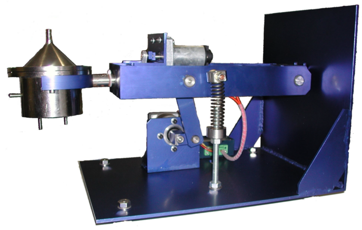
TD 1
Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Sujet

CCP – PSI – 2006.

02 COR 03 COR

Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.



Objectif

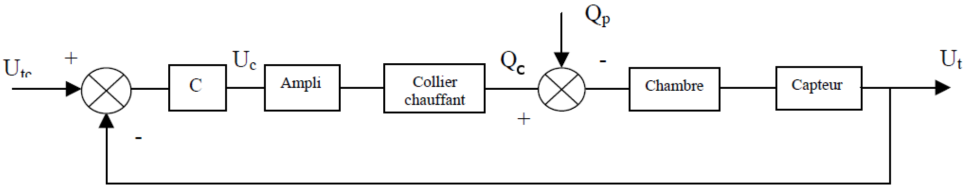
La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- temps de montée en température : 3 min maxi ;
- précision de la température : ±0,5 ° pour un échelon de 20 °.

Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- U_{tc} : tension de consigne ;
- U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre) ;
- U_a : tension d'alimentation du collier chauffant ;
- q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant ;
- q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



Expérimentalement, on peut déterminer que FTBO(p) $= \dfrac{U_t(p)}{U_c(p)} = \dfrac{0,5}{(1+5p)\,(1+100p)}$.

Analyse des performances

On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

Question 1 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

Question 2 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

Question 3 Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée (figure 1)

Question 4 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

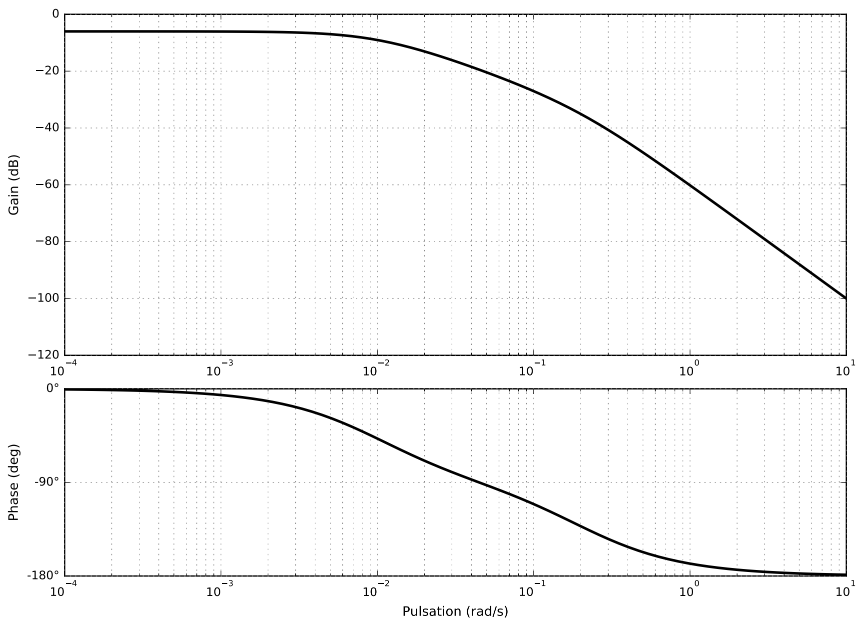
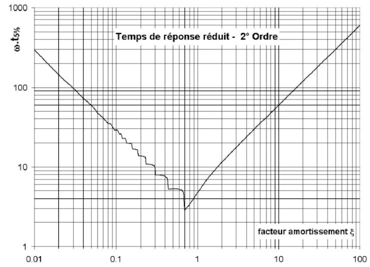


Figure 1 – Diagramme de Bode de la BO non corrigée

Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.



Question 5 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

Question 6 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 7 Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur , si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \dfrac{K}{T_i p}\left(1 + T_i p\right)$. On utilise pour cela la méthode des compensation de pôles.

Question 8 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

Question 9 En déduire le nouvel écart de position.

Éléments de correction

1. 218 s.
2. $\varepsilon_P = \dfrac{1}{1 + G_{\text{FTBO}}}$ et $\varepsilon_v = \infty$.
3. .
4. Système stable (FTBO ordre 2 et critère du Revers respecté) ($M_G \to \infty$, M_φ non définie).
5. $K = 9$.
6. 50 s,
7. $\varepsilon_P = \dfrac{1}{1 + G_{\text{FTBO}}}$ et $\varepsilon_v = \infty$.
8. $U_a = 450$ V.
9. $K = 10$ et $T_i = 100$ s.
10. $\varepsilon_P = 0$.

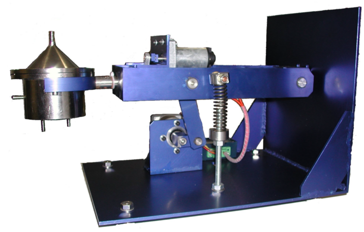
TD 1
Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Corrigé

CCP – PSI – 2006.

02 COR 03 COR

Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.



Objectif

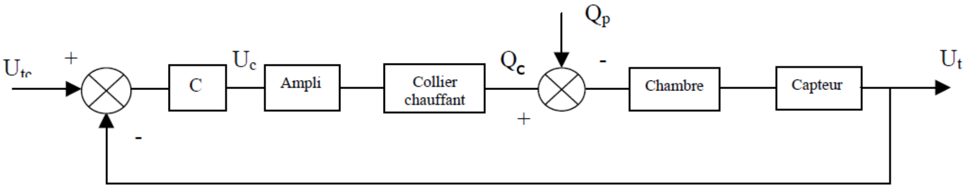
La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- temps de montée en température : 3 min maxi ;
- précision de la température : ±0,5 ° pour un échelon de 20 °.

Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- U_{tc} : tension de consigne ;
- U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre) ;
- U_a : tension d'alimentation du collier chauffant ;
- q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant ;
- q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



Expérimentalement, on peut déterminer que FTBO(p) $= \dfrac{U_t(p)}{U_c(p)} = \dfrac{0,5}{\left(1+5p\right)\left(1+100p\right)}$.

Analyse des performances

On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

Question 1 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

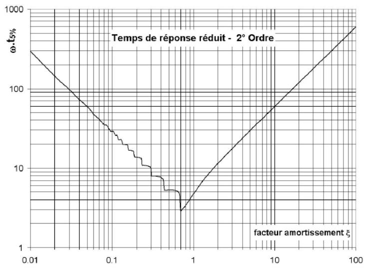
Question 2 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

Question 3 Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée (figure 1)

Question 4 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.



Question 5 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

Question 6 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 7 Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur , si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \dfrac{K}{T_i p}\left(1 + T_i p\right)$. On utilise pour cela la méthode des compensation de pôles.

Question 8 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

Question 9 En déduire le nouvel écart de position.

Q20 – Temps de réponse du système régulé

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1+H_{bo}(p)}$$ car le retour est unitaire.

$$H_{bf}(p) = \frac{1/3}{1+\frac{105}{1,5}\cdot p+\frac{500}{1,5}\cdot p^2}$$

D'où l'on déduit :

- la pulsation propre ω_n telle que : $\omega_n^2 = \frac{1,5}{500} = 30\cdot 10^{-4} \Rightarrow \omega_n = 5,5\ .\ 10^{-2}$ *rd/s*

- le facteur d'amortissement ξ tel que : $\frac{2\cdot\xi}{\omega_n} = 70 \Rightarrow \xi = 1,92$ # 2

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n . t_{5\%} \approx 12 \Rightarrow \underline{t_{5\%} = 218\ s}$ **Incompatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : *3 mn* maximum).

Q21 – Ecart de position – Ecart de traînage

Fonction de transfert de classe 0 (zéro) $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \dfrac{1}{1+G_{FTBO}} \\ \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$

$\underline{\varepsilon_p = 0,66}$ $\underline{66\ \%}$ **Incompatible** avec le cahier des charges.

Q22 – Diagrammes de Bode de la F.T.B.O.

On procède par superposition : $H_{bo}(j\omega) = H_1(j\omega)\cdot H_2(j\omega) = \frac{0,5}{1+j\cdot 5\omega}\cdot\frac{1}{1+j\cdot 100\omega}$

Pulsations de brisure $\omega_1 = 0,2$ *rd/s* ; $\omega_2 = 0,01$ *rd/s*

Qd $\omega \to 0$ $\quad H_{bo} \approx \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -6dB \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$

$$\boxed{G = -6dB - 10 \cdot Log\left(1 + 25 \cdot \omega^2\right) - 10 \cdot Log\left(1 + 10^4 \cdot \omega^2\right)}$$

$$\boxed{\varphi = -Arc\tan(5 \cdot \omega) - Arc\tan(100 \cdot \omega)}$$

ω (rd/s)	0,01	0,1	1
G (dB)	- 9	- 27	- 60
φ (°)	- 48	- 115	- 169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Tracé des lieux asymptotiques et réels : *Voir le Document Réponse page suivante*

<u>Q23 – Marges de gain, de phase</u>

Marge de gain : <u>$M_G = \infty$</u>

Marge de phase : <u>$M_\varphi = 180°$</u>

<u>Q 24 – Réglage du correcteur Proportionnel assurant la stabilité et optimisant les performances du système</u>

Il faut écarter la solution consistant à régler K afin que le lieu de transfert en B.O. soit tangent au contour fermé à *2,3 dB*, car alors le facteur d'amortissement devient inférieur à *1*, (*0,4* pour un second ordre et le dépassement est environ de *25%)* ce qui entraînera un dépassement lors la montée en température (Non respect du C.d.C.)

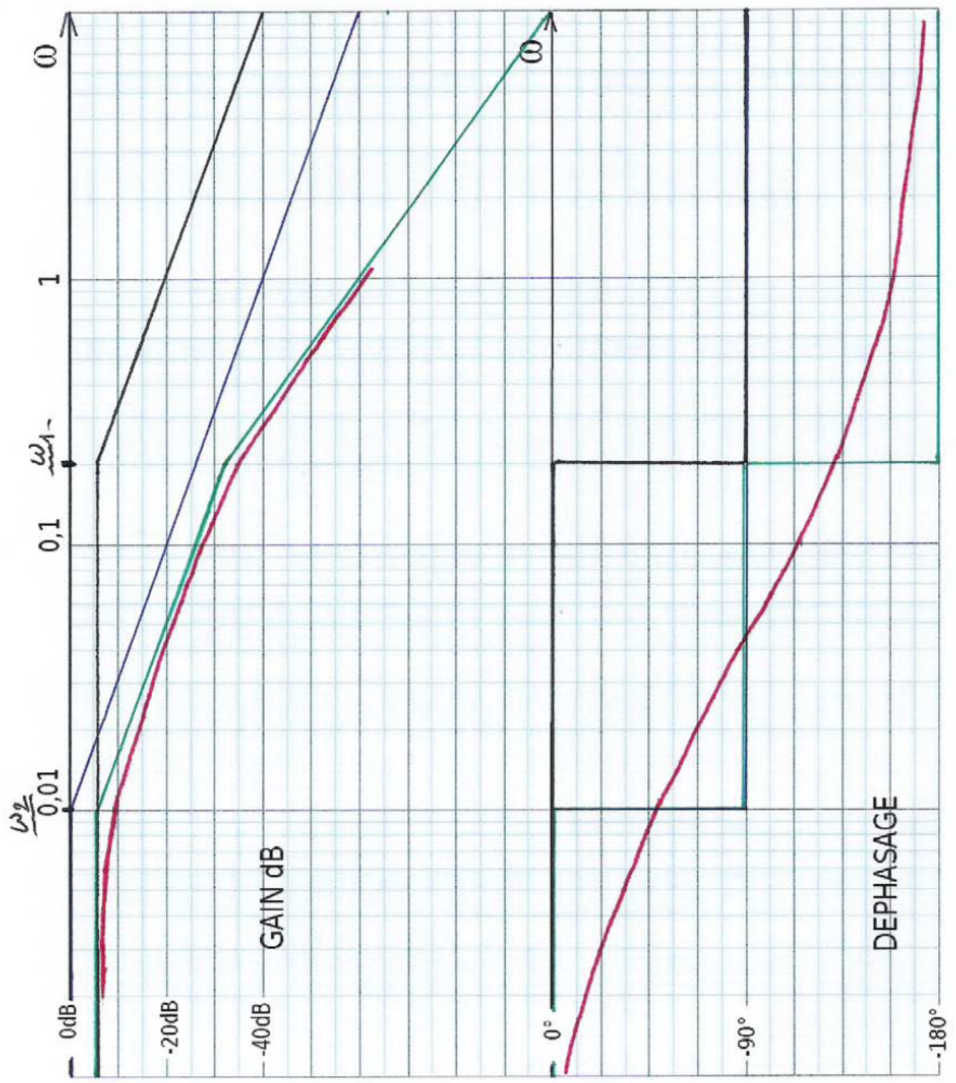
On règle K de telle sorte que $\xi \geq 1$; la réponse indicielle est alors **apériodique critique** ou **apériodique amorti**.

$$H_{bo}(\omega) = \frac{0{,}5 \cdot K}{1 + 105 \cdot p + 500 \cdot p^2}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)}$$ car le retour est unitaire.

$$H_{bf}(p) = \frac{\dfrac{0{,}5 \cdot K}{1 + 0{,}5 \cdot K}}{1 + \dfrac{105}{1 + 0{,}5 \cdot K} p + \dfrac{500}{1 + 0{,}5 \cdot K} p^2}$$

Question 22 : *Tracé de Bode*



Pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\dfrac{1+0{,}5\cdot K}{500}}$

Facteur d'amortissement, il est tel que : $\dfrac{2\cdot\xi}{\omega_n} = \dfrac{105}{1+0{,}5\cdot K}$,

$$\Rightarrow \xi = \frac{105}{2\cdot\sqrt{500}\cdot\sqrt{1+0{,}5\cdot K}}$$

Condition de **non dépassement** : $\xi \geq 1 \Leftrightarrow K \leq 9{,}02$

On choisit $\underline{K = 9}$ alors $\underline{\xi \approx 1}$ la réponse indicielle est **apériodique critique**.

Par conséquent, sur le diagramme de Black, **on translate** le lieu de transfert en B.O. **dans la direction verticale** de _20 Log 9_ , c'est-à-dire d'environ **_19 dB_** .

Q 25 – Eléments de performances, temps de réponse à 5 % , écarts de position et de traînage

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H_{bo2})

La marge de gain est inchangée : $\underline{M_G = \infty}$

On relève : $\underline{M_\varphi = 90°}$ **La stabilité est assurée**.

Pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\dfrac{1+0{,}5\cdot 9}{500}} = \sqrt{\dfrac{5{,}5}{500}} \approx 0{,}1 \quad rd/s$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n . t_{5\%} \approx 5 \Rightarrow \underline{t_{5\%} = 50\ s}$ **Compatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : *3 mn* maximum).

Fonction de transfert de classe 0 (zéro) $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \dfrac{1}{1+G_{FTBO}} \\ \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$

$\underline{\varepsilon_p = 0{,}55}$ $\underline{55\ \%}$ **Incompatible** avec le cahier des charges.

Q26 – Tension en entrée de l'amplificateur, tension d'alimentation du collier chauffant lorsque l'échelon de tension de consigne U_{tc} est de 5 V

A 17° C correspond $U_c = 0\ V$, donc $U_t = 0\ V$.

Si $U_{tc} = 5\ V \Rightarrow \underline{U_c = 45\ V}$. ($U_c = K.\varepsilon$)

Alors $\underline{U_a = 450\ V}$ Il y aura **saturation de l'ampli** et donc augmentation du temps de réponse.

Q 27 – Choix d'un correcteur à action P.I. – Réglage de ce correcteur

$$C(p) = \frac{K}{T_i p}(1 + T_i p)$$

Le réglage du correcteur se fait **par compensation du pôle le plus lent**. Méthode qui consis à choisir la constante de temps T_i du correcteur égale **à la constante de temps la plus grande** du système à corriger. On réglera le gain K du correcteur afin que **la réponse indicielle ne présente pas de dépassement** (on choisit $\xi = 1$). Le choix de T_i devant satisfaire le C.d.C. (Montée en température rapide : *3 mn* maximum).

La F.T.B.O. s'écrit alors : $H_{bo}(\omega) = \dfrac{0{,}5 \cdot K}{T_i \cdot p + 500 \cdot p^2}$

La F.T.B.F. s'écrit alors : $H_{bf}(\omega) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{T_i}{0{,}5 \cdot K} \cdot p + \dfrac{500}{0{,}5 \cdot K} \cdot p^2}$

La pulsation propre (non amortie) vaut alors : $\omega_n = \dfrac{1}{10} \cdot \sqrt{\dfrac{K}{10}}$

Le facteur d'amortissement vaut alors : $\xi = \dfrac{T_i}{10 \cdot \sqrt{10 \cdot K}}$

On choisit $\boldsymbol{\xi = 1}$ la réponse indicielle est apériodique critique.

Alors : $K = 10^{-3} \cdot T_i$

On a toujours : $\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5$ puisque $\xi = 1$

Tableau des valeurs de K, ω_n, $t_{5\%}$ en fonction du choix de T_i

T_i	K	ω_n	$t_{5\%}$	*Commentaires*
5 s	25.10^{-3}	5.10^{-3} rd/s	1 000 s	**A rejeter**
100 s	10	0,1 rd/s	**50 s**	**A RETENIR**

Tracé du lieu de transfert de la F.T.B.O. dans le plan de Black :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{5}{j \cdot 100\omega \cdot (1 + j \cdot 5\omega)}$$

Gain : $G = -26\,dB - 20 \cdot Log\omega - 10 \cdot Log(1 + 25 \cdot \omega^2)$

Argument : $\varphi = -90° - Arc\tan(5\omega)$

ω (rd/s)	0,01	0,1	0,2	1
G (dB)	14	- 7	- 15	- 40
φ (°)	- 93	- 117°	- 135	- 169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Compte tenu de la forme de la F.T.B.O. , le lieu de transfert présente deux asymptotes verticales d'équations $\varphi = - 90°$ et $\varphi = - 180°$.

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H_{bo3})

La marge de gain est inchangée : $M_G = \propto$

On relève : $M_\varphi \approx 77°$ **La stabilité est assurée**.

Q 28 – Nouvel écart de position

Le système est de **classe 1** $\Rightarrow$ $\varepsilon_p = 0$

TD 2
Machine de rééducation SysReeduc – Sujet

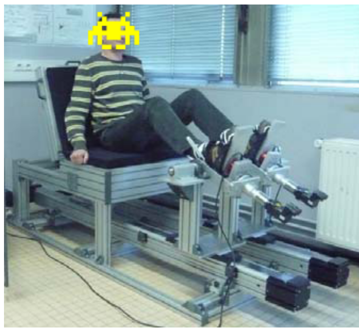
CCP PSI 2013.

Mise en situation

C1-02

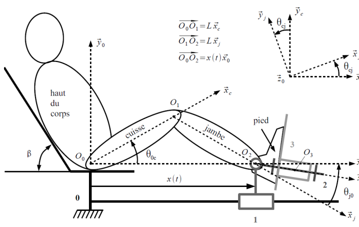
C2-04

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.



Objectif

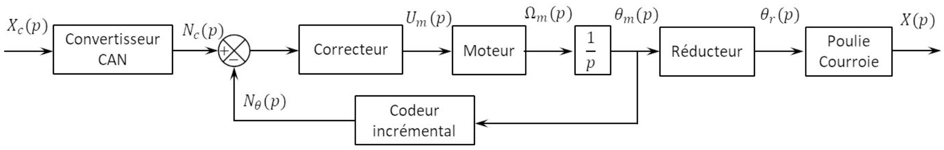
L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrer le correcteur pour répondre aux exigences.



Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0{,}2\,\text{s}$
Pulsation au gain unité	$50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



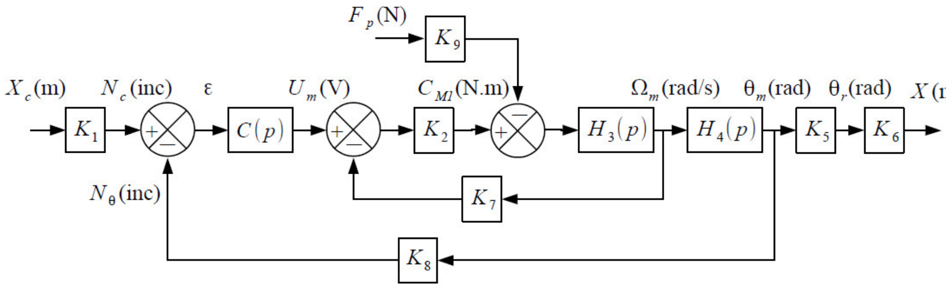
Éléments de modélisation[1]

1: On peut passer directement à la question 3 pour aborder plus rapidement les correcteurs.

Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$;
- $e(t) = k_e \omega_m(t)$;
- $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.

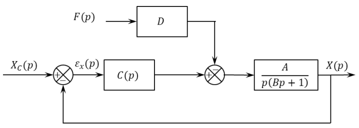


Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M+m)\, r \rho_1 \dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t).$$

On note :

- M la masse du chariot et m la masse du support de pied ;
- $\rho_1 = \dfrac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur ;
- $r = 46{,}1 \times 10^{-3}$ m le rayon de la poulie du transmetteur poulie–courroie ;
- $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A, B et D, avec $A = 6700$ m/V, $B = 0{,}01$ s et $D = 6$ V/N.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 3 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c.

Question 4 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 5 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i \left(1 + \dfrac{1}{T_i p}\right)$

Question 6 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_i.

Question 7 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

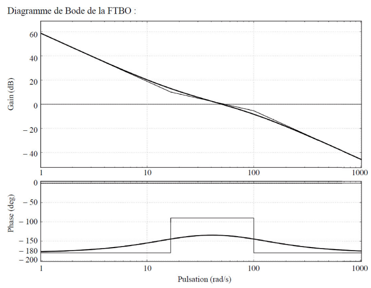
Question 8 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $\text{FTBO}(p) = \dfrac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

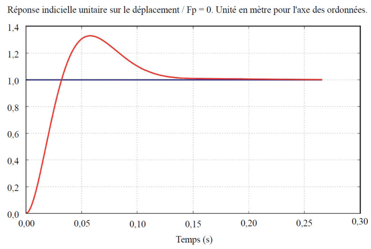
Question 9 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Question 10 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 11 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.





TD 2
Machine de rééducation SysReeduc – Corrigé

CCP PSI 2013.

Mise en situation

C1-02

C2-04

2: On peut passer directement à la question 3 pour aborder plus rapidement les correcteurs.

Éléments de modélisation[2]

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.

Correction

On a :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \dfrac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M+m)\, r \rho_1 p \Omega_m(p) = \dfrac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M+m)\, r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \dfrac{1}{(M+m)\, r^2 \rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \dfrac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \dfrac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incréments. X_c est la consigne que doit respectée X. Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8 \theta_m = K_1 X_C - K_8 \dfrac{X}{K_5 K_6}$. Au final, $K_1 = \dfrac{K_8}{K_5 K_6}$.

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.

Correction

On montre $A = \dfrac{K_8}{k_e}$, $B = \dfrac{R\,(m+M)\, r^2 \rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D = \dfrac{r^2 \rho_1^2 R}{K_8 k_t}$.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 3 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c.

Correction

On a $\varepsilon_x(p) = X_C(p) - X(p) = X_C(p) - \left(\left(C(p)\varepsilon_x(p) - F(p)D \right) \dfrac{A}{p\,(Bp+1)} \right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left(1 + \dfrac{AC(p)}{p\,(Bp+1)} \right) = X_C(p) + \dfrac{AF(p)D}{p\,(Bp+1)}$

$\Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left(\dfrac{p\,(Bp+1) + AC(p)}{p\,(Bp+1)} \right) = X_C(p) + \dfrac{AF(p)D}{p\,(Bp+1)} \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \dfrac{p\,(Bp+1)}{p\,(Bp+1) + AC(p)} X_C(p) + \dfrac{AF(p)D}{p\,(Bp+1) + AC(p)}$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \frac{p\left(Bp+1\right)}{p\left(Bp+1\right)+AK_C}X_C(p) + \frac{AD}{p\left(Bp+1\right)+AK_C}F(p)$$

Question 4 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

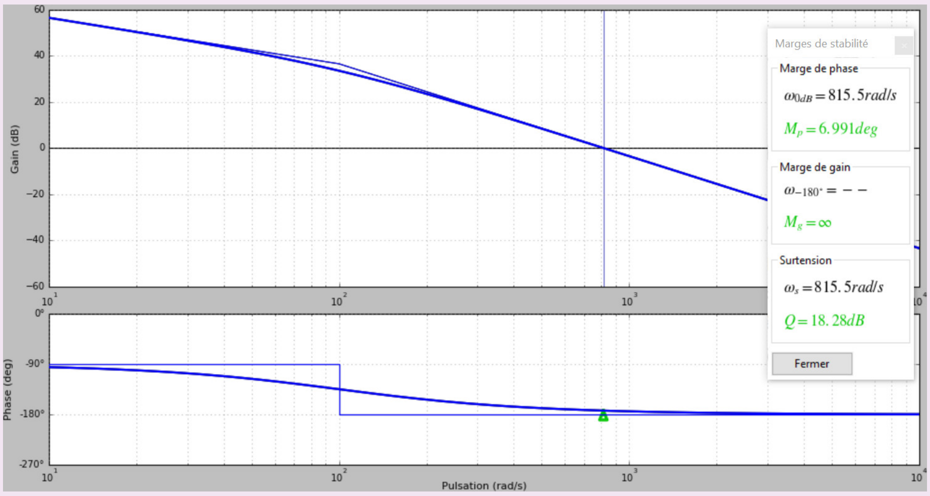
Correction

On a : $\varepsilon_x = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon_x(p) = \lim_{p\to 0} p\left(\frac{p\left(Bp+1\right)}{p\left(Bp+1\right)+AK_C}\frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p\left(Bp+1\right)+AK_C}\frac{F_p}{p}\right)$
$= \lim_{p\to 0} \frac{p\left(Bp+1\right)}{p\left(Bp+1\right)+AK_C}X_0 + \frac{AD}{p\left(Bp+1\right)+AK_C}F_p$
$= \frac{D}{K_C}F_p$
L'écart en position n'est donc pas nul.

Question 5 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

Correction

On a $\text{FTBO}(p) = \frac{A}{p\left(Bp+1\right)}$.



La marge de phase n'est pas respectée.

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

Question 6 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_i.

Correction

$$\varepsilon_x(p) = \frac{p\left(Bp+1\right)}{p\left(Bp+1\right) + AK_i\left(1+\dfrac{1}{T_ip}\right)} X_C(p) + \frac{AD}{p\left(Bp+1\right) + AK_i\left(1+\dfrac{1}{T_ip}\right)} F(p)$$

Question 7 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

$$\varepsilon_x = \lim_{p\to 0} p \left(\frac{p\left(Bp+1\right)}{p\left(Bp+1\right) + AK_i\left(1+\dfrac{1}{T_ip}\right)} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p\left(Bp+1\right) + AK_i\left(1+\dfrac{1}{T_ip}\right)} \frac{F_0}{p} \right)$$
$$= \lim_{p\to 0} \frac{pT_ip\left(Bp+1\right)}{pT_ip\left(Bp+1\right) + AK_i\left(T_ip+1\right)} X_0 + \frac{ADT_ip}{T_ipp\left(Bp+1\right) + AK_i\left(T_ip+1\right)} F_0 = 0.$$

Question 8 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $\text{FTBO}(p) = \dfrac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Correction

$$\text{FTBO}(p) = \frac{A}{p\left(Bp+1\right)} K_i \left(1+\frac{1}{T_ip}\right) = \frac{A}{p\left(Bp+1\right)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}.$$

Question 9 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Correction

On souhaite que pour $\omega = 50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, $\varphi(\omega) = -135°$.

$\arg\left(\text{FTBO}(j\omega)\right) = \arg\left(\dfrac{A}{p\left(Bp+1\right)} K_i \dfrac{1+T_ip}{T_ip}\right) = -180 - \arg\left(\left(Bp+1\right)\right) + \arg\left(1+T_ip\right)$

$= -180 - \arctan B\omega + \arctan T_i\omega$ En $\omega = 50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ on a alors $-180 - \arctan 0,5 + \arctan 50T_i = -135 \Leftrightarrow \arctan 50T_i = -135 + 180 + \arctan 0,5 = 74$. D'où $T_i = 0{,}05\,\text{s}$.

Question 10 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

Correction

On souhaite que $|\text{FTBO}(j\omega)| = 1$ pour $\omega = 50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

$$|\text{FTBO}(j\omega)| = \left|\frac{A}{p\left(Bp+1\right)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}\right| = AK_i \frac{1}{\omega\sqrt{B^2\omega^2+1}} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{T_i\omega} = \frac{AK_i}{T_i\omega^2} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{\sqrt{B^2\omega^2+1}}.$$

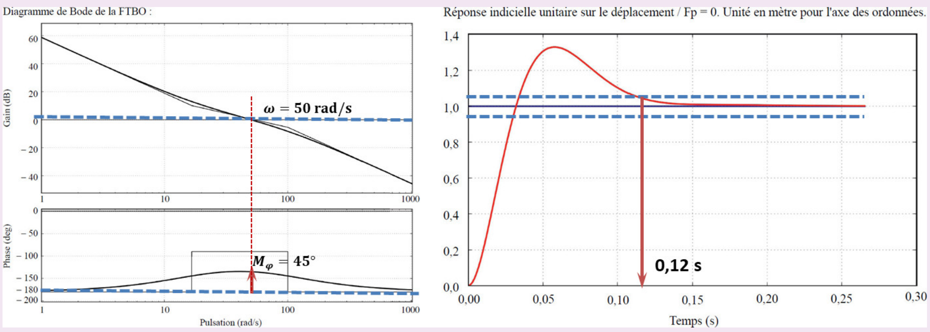
On a donc $K_i = \dfrac{T_i\omega^2\sqrt{B^2\omega^2+1}}{A\sqrt{1+T_i^2\omega^2}} = 0{,}0077\,\text{V}\,\text{m}^{-1}$.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 11 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

Correction

- Ecart de position : nul $\Rightarrow$ Exigence OK.
- Marge de gain : infine $\Rightarrow$ Exigence OK.
- Marge de phase : $\simeq 45°$ $\Rightarrow$ Exigence OK.



TD 3
Vanoise Express – Sujet

E3A – PSI – 2014.

02 COR 03 COR 04 COR

Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	**Ecart statique** en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M\varphi \geq 45°$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1\, rd/s$

Modélisation du moteur à courant continu[3]

3: On peut passer directement à la question 6 pour aborder plus rapidement les asservissements.

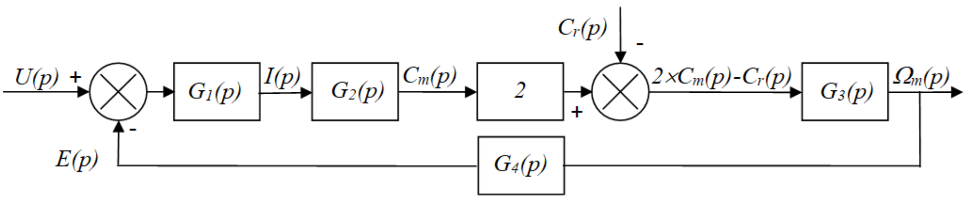
Notations :

- on notera $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- $u(t)$ tension d'alimentation des moteurs ;
- $i(t)$ intensité traversant un moteur ;
- $e(t)$ force contre électromotrice d'un moteur ;
- $\omega_m(t)$ vitesse de rotation d'un moteur ;
- $c_m(t)$ couple d'un seul moteur ;
- $c_r(t)$ couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

Hypothèses et données :

- on suppose les conditions initiales nulles ;
- les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- $L = 0{,}59\,\text{mH}$ inductance d'un moteur ;
- $R = 0{,}0386\,\Omega$ résistance interne d'un moteur ;
- $f = 6\,\text{N m s/rad}$ coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- $J = 800\,\text{kg m}^2$ moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- $c_m(t) = k_T i(t)$ avec $k_T = 5{,}67\,\text{Nm/A}$ (constante de couple d'un moteur) ;
- $e(t) = k_E \omega_m(t)$ avec $k_T = 5{,}77\,\text{Vs/rad}$ (constante électrique d'un moteur)
- équations de la dynamique : $2c_m(t) - c_r(t) = J\dfrac{\text{d}\omega_m(t)}{\text{d}t} + f\omega_m(t)$;
- loi des mailles : $u(t) - e(t) = Ri(t) + L\dfrac{\text{d}i(t)}{\text{d}t}$.

Question 1 Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminer les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.



Question 2 $\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$. Exprimer les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V (le couple de perturbation $c_r(t)$ est nul) ;
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m (la tension $u(t)$ est nulle).

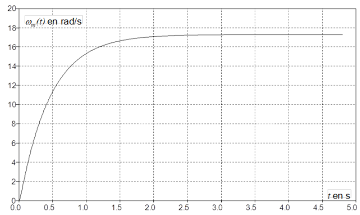


Figure 2 – Réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V.

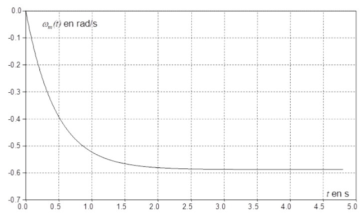
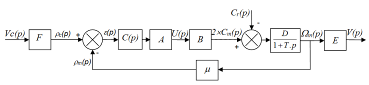
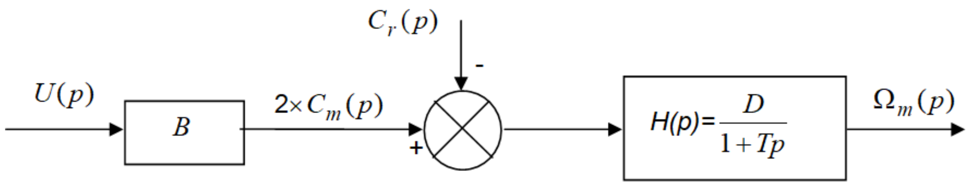


Figure 3 – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m.



Question 3 Choisisser et justifier un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminer numériquement les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



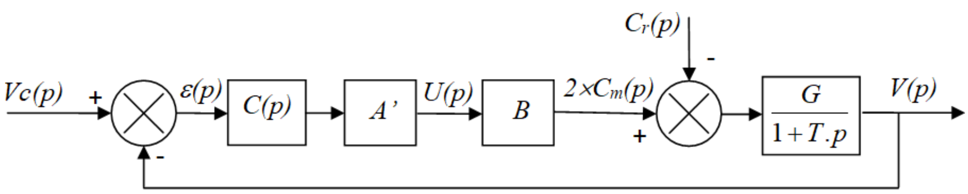
Question 4 Donner la valeur numérique des trois constantes B, D et T.

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

- La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F.
- Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0{,}716$ V s/rad transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$.
- Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A, qui alimente les deux moteurs électriques.
- La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain $E = 0{,}1$ m (réducteur et rayon de la poulie).

Question 5 Déterminer l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t) = 0$ entraîne $v_c(t) = v(t)$. Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients E et F calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients A' et G. Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes : $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4$ sN ; $G = 6 \cdot 10^{-5}$ m/(sNm) et $T = 0{,}47$ s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

Utilisation d'un correcteur proportionnel

$C(p) = C_0 = 1$.

Question 6 Justifier en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

Question 7 On suppose $C_r(p) = 0$. Calculer en fonction de C_0, A', B, G et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$. Faire l'application numérique.

On suppose $V_c(p) = 0$.

Question 8 Calculer en fonction de C_0, A', B, G et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation en échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{Nm}$ qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

Question 9 Faire également une application numérique si $C_{r0} = 7460\,\text{Nm}$ qui modéliserait la montée vers La Plagne.

Question 10 Donner numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

Question 11 Existe-t-il une valeur réaliste de C_0 pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifier.

Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur $C(p) = \dfrac{C_i}{p}$.

Question 12 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée FTBO(p). Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.

Question 13 Tracer le diagramme asymptotique de Bode de FTBO(p). Tracer également l'allure des courbes. Voir figure 8

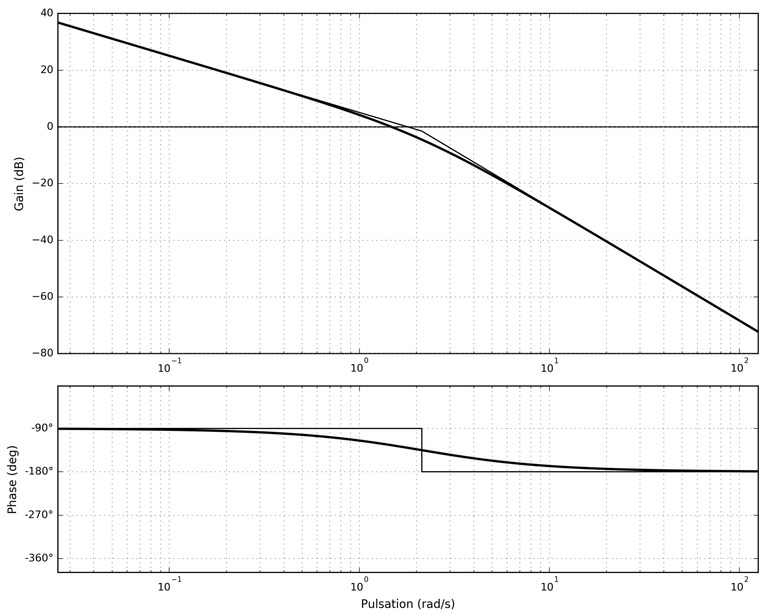


Figure 4 – Diagramme de Bode correspondant à la question 13 ($C_i = 1$).

Question 14 Donner la valeur maximale de C_i permettent de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

Question 15 Trouver la valeur minmale de C_i permettant de respecter le critère de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifier.

Question 16 On suppose Cr(p)=0. Calculer numériquement l'écart statique en suivi de consigne ε_s' engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$.

Question 17 On suppose $V_c(p) = 0$. Calculer numériquement l'écart statique en régulation ε_s'' engendré par une perturbation échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{N m}$ qui modéliserait la descente des « Arcs ».

Question 18 Donner numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon_s' + \varepsilon_s''$. Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié ? Justifier.

On suppose $C_r(p) = 0$.

Question 19 Calculer l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifier.

Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur $C(p) = C_a(p)\dfrac{1}{p^2}$, produit de la fonction $C_a(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a > 1$ (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne figure 9 le diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \dfrac{A'BG}{p^2\left(1+Tp\right)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans $C_a(p)$ (c'est-à-dire pour $C_a(p) = 1$).

Question 20 Montrer que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?

La fonction $C_a(p)$ va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

Question 21 Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de $-135°$?

Question 22 Tracer en fonction de a, τ et K les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec a>1. Préciser clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Préciser de même les pulsations des points particuliers.

Question 23 La phase maximum $\varphi_{\max}$ ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin\varphi_{\max} = \dfrac{a-1}{a+1}$. Calculer numériquement a pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

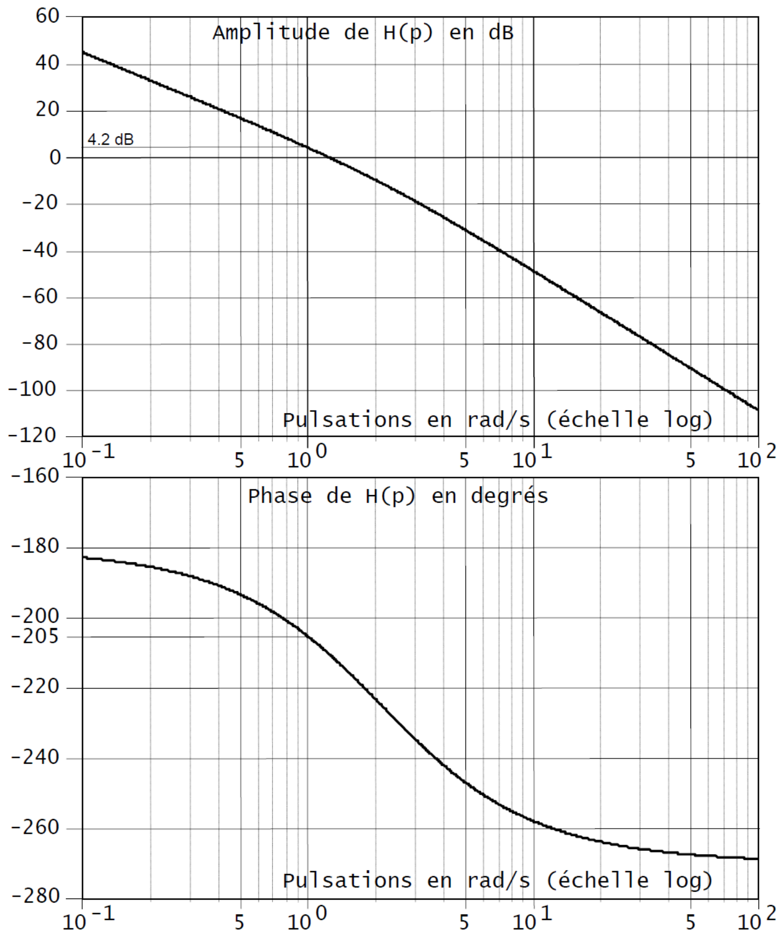


Figure 5 – Diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \dfrac{A'BG}{p^2\,(1+Tp)}$

Question 24 Donner l'expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

Question 25 En déduire la valeur numérique de τ pour que $\varphi_{\max}$ soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

Question 26 Calculer numériquement la valeur à donner à K pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Préciser la démarche utilisée.

Question 27 Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifier.

Question 28 Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifier.

Éléments de correction

1. $G_1(p) = \dfrac{1}{R+Lp}$, $G_2(p) = k_T$, $G_3(p) = \dfrac{1}{f+Jp}$, $G_1(p) = k_E$.
2. $F_1(p) = \dfrac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1+2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ et $F_2(p) = \dfrac{G_3(p)}{1+2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$.

3. $F_1(p) = \dfrac{0,1725}{1+0,47p}$ et $F_2(p) = \dfrac{5,8\cdot 10^{-4}}{1+0,47p}$.
4. $B = 297{,}4\,\mathrm{N\,m\,V^{-1}}$, $D = 5,8.10^{-4}\,\mathrm{rad.s^{-1}Nm}$ et $T = 0{,}47\,\mathrm{s}$.
5. $F = \dfrac{\mu}{E} = 7{,}16\,\mathrm{V\,s\,m^{-1}}$
6. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
7. FTBO de classe 0 $\varepsilon'_S = \dfrac{V_0}{1+C_0A'BG} = 4{,}286\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
8. $\varepsilon''_S = -0{,}156\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ – à vérifier.
9. $\varepsilon''_S = 0{,}160\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
10. $\varepsilon'_S = 4{,}13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\varepsilon'_S = 4{,}46\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
11. C_0 infini
12. $\mathrm{FTBO}(p) = \dfrac{1,8}{p\left(1+0,47p\right)}$
13.
14. $\omega_{0\,\mathrm{dB}} \leq 2{,}13\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et $C_i \leq 1,67$.
15. $C_i \geq 0,61$.
16. FTBO de classe 1 $\varepsilon'_S = 0$.
17. Intégrateur en amont de la perturbation $\varepsilon''_S = 0$.
18. CDCF OK.
19. $\varepsilon_v = \dfrac{1}{C_iA'BG}$
20. Marge négative, système instable.
21. 70° de phase à ajouter.
22.
23. $a = 32,16$
24. $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
25. $\tau = 0{,}176\,\mathrm{s}$
26. $K = 0,109$
27.
28.

TD 3
Vanoise Express – Corrigé

E3A – PSI – 2014.

02 COR 03 COR 04 COR

Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	**Ecart statique** en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M\varphi \geq 45°$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1\,rd/s$

Modélisation du moteur à courant continu[4]

4: On peut passer directement à la question 6 pour aborder plus rapidement les asservissements.

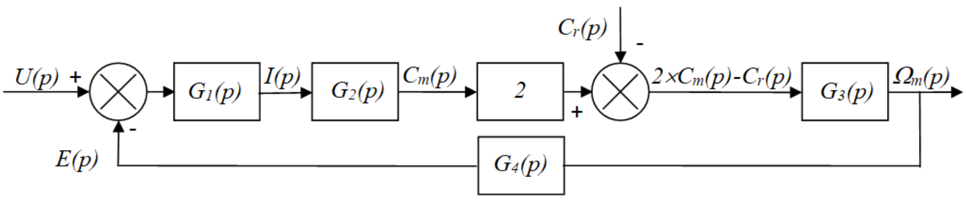
Notations :

- on notera $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- $u(t)$ tension d'alimentation des moteurs ;
- $i(t)$ intensité traversant un moteur ;
- $e(t)$ force contre électromotrice d'un moteur ;
- $\omega_m(t)$ vitesse de rotation d'un moteur ;
- $c_m(t)$ couple d'un seul moteur ;
- $c_r(t)$ couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

Hypothèses et données :

- on suppose les conditions initiales nulles ;
- les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- $L = 0{,}59\,\text{mH}$ inductance d'un moteur ;
- $R = 0{,}0386\,\Omega$ résistance interne d'un moteur ;
- $f = 6\,\text{N m s/rad}$ coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- $J = 800\,\text{kg m}^2$ moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- $c_m(t) = k_T i(t)$ avec $k_T = 5{,}67\,\text{Nm/A}$ (constante de couple d'un moteur) ;
- $e(t) = k_E \omega_m(t)$ avec $k_T = 5{,}77\,\text{Vs/rad}$ (constante électrique d'un moteur)
- équations de la dynamique : $2c_m(t) - c_r(t) = J\dfrac{\mathrm{d}\omega_m(t)}{\mathrm{d}t} + f\omega_m(t)$;
- loi des mailles : $u(t) - e(t) = Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$.

Question 1 Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminer les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.



Question 2 $\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$. Exprimer les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V (le couple de perturbation $c_r(t)$ est nul) ;
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m (la tension $u(t)$ est nulle).

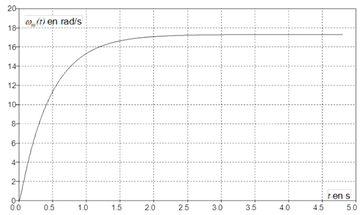


Figure 6 – Réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V.

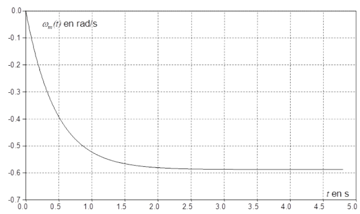
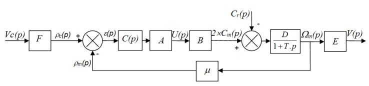
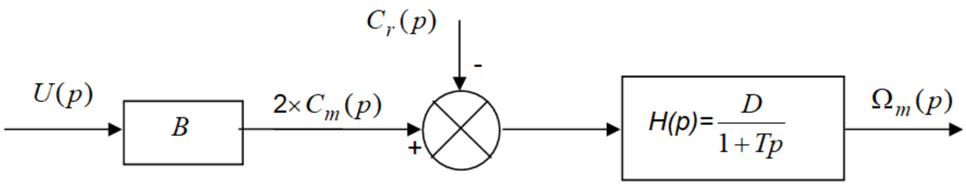


Figure 7 – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m.



Question 3 Choisisser et justifier un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminer numériquement les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



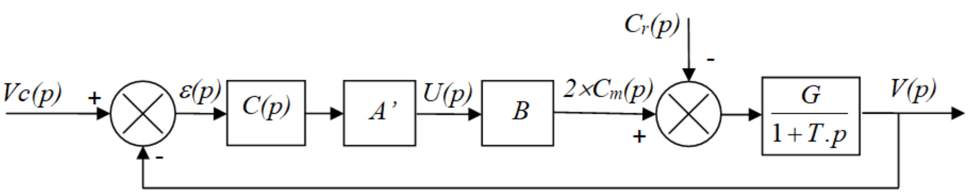
Question 4 Donner la valeur numérique des trois constantes B, D et T.

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

- La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F.
- Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0{,}716$ V s/rad transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$.
- Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A, qui alimente les deux moteurs électriques.
- La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain $E = 0{,}1$ m (réducteur et rayon de la poulie).

Question 5 Déterminer l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t) = 0$ entraîne $v_c(t) = v(t)$. Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients E et F calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients A' et G. Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes : $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4$ sN ; $G = 6 \cdot 10^{-5}$ m/(sNm) et $T = 0{,}47$ s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

Utilisation d'un correcteur proportionnel

$C(p) = C_0 = 1$.

Question 6 Justifier en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

Question 7 On suppose $C_r(p) = 0$. Calculer en fonction de C_0, A', B, G et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε_s' engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$. Faire l'application numérique.

On suppose $V_c(p) = 0$.

Question 8 Calculer en fonction de C_0, A', B, G et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε_s'' engendré par une perturbation en échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{Nm}$ qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

Question 9 Faire également une application numérique si $C_{r0} = 7460\,\text{Nm}$ qui modéliserait la montée vers La Plagne.

Question 10 Donner numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon_s' + \varepsilon_s''$ dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

Question 11 Existe-t-il une valeur réaliste de C_0 pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifier.

Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur $C(p) = \dfrac{C_i}{p}$.

Question 12 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée FTBO(p). Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.

Question 13 Tracer le diagramme asymptotique de Bode de FTBO(p). Tracer également l'allure des courbes. Voir figure 8

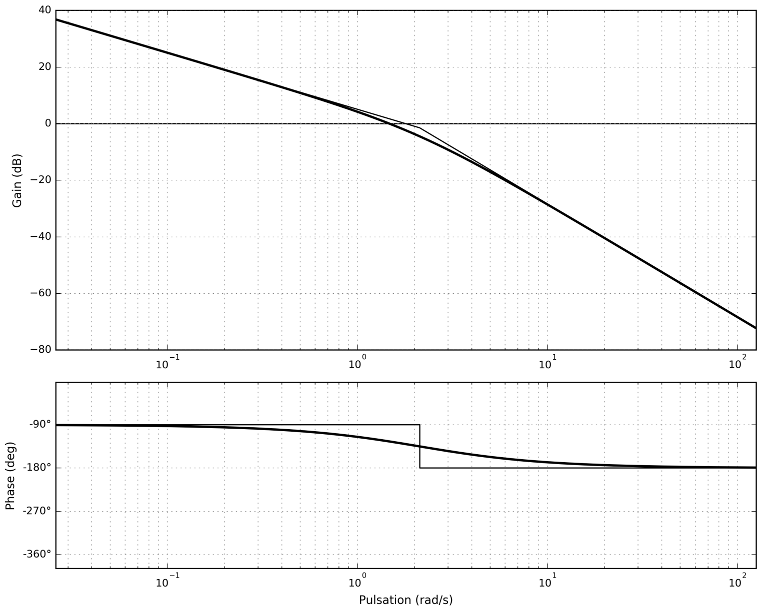


FIGURE 8 – Diagramme de Bode correspondant à la question 13 ($C_i = 1$).

Question 14 Donner la valeur maximale de C_i permettent de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

Question 15 Trouver la valeur minmale de C_i permettant de respecter le critère de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifier. Il faut que la pulsation de coupure à 0 dB soit supérieure à 1 rad/s. Sur la BO non corrigée, on mesure que le gain vaut 4,23 dB pour cette pulsation. On a donc $C_{\text{i min}} = 0,61$.

Question 16 On suppose Cr(p)=0. Calculer numériquement l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$.

Question 17 On suppose $V_c(p) = 0$. Calculer numériquement l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{N m}$ qui modéliserait la descente des « Arcs ».

Question 18 Donner numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$. Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié ? Justifier.

On suppose $C_r(p) = 0$.

Question 19 Calculer l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifier.

Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur $C(p) = C_a(p)\dfrac{1}{p^2}$, produit de la fonction $C_a(p) = K\dfrac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$ avec $a > 1$ (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne figure 9 le diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \dfrac{A'BG}{p^2\left(1 + Tp\right)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans $C_a(p)$ (c'est-à-dire pour $C_a(p) = 1$).

Question 20 Montrer que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?

La fonction $C_a(p)$ va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

Question 21 Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de $-135°$?

Question 22 Tracer en fonction de a, τ et K les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K\dfrac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$ avec a>1. Préciser clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Préciser de même les pulsations des points particuliers.

Question 23 La phase maximum $\varphi_{\max}$ ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin\varphi_{\max} = \dfrac{a-1}{a+1}$. Calculer numériquement a pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

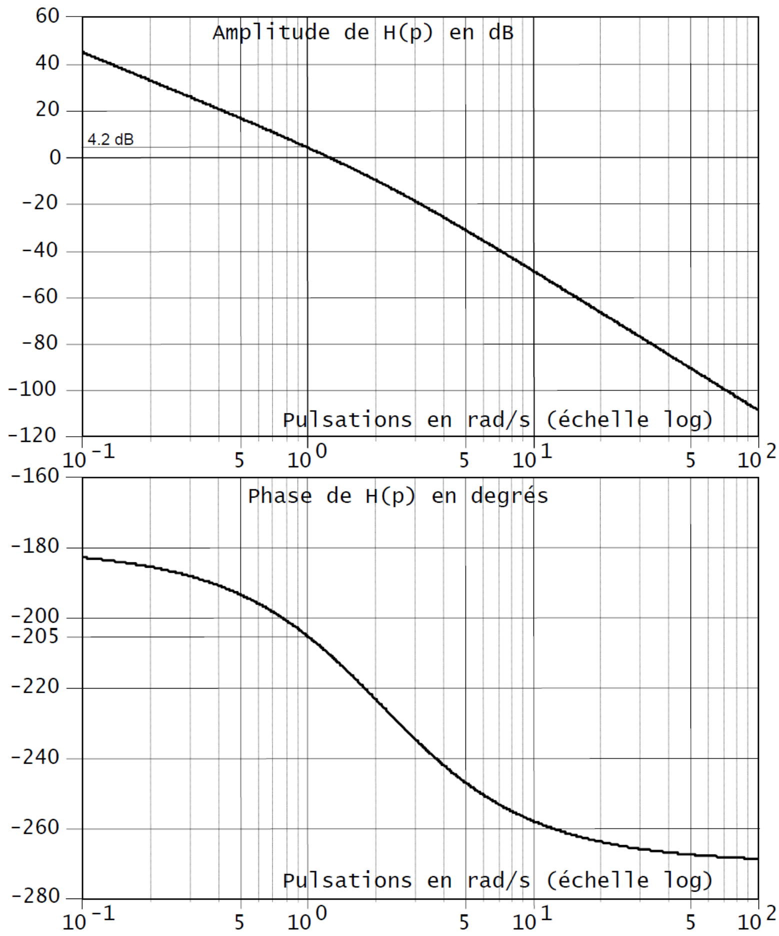


FIGURE 9 – Diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \dfrac{A'BG}{p^2\,(1+Tp)}$

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

Question 24 Donner l'expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

Question 25 En déduire la valeur numérique de τ pour que $\varphi_{\max}$ soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

Question 26 Calculer numériquement la valeur à donner à K pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Préciser la démarche utilisée.

Question 27 Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifier.

Question 28 Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifier.