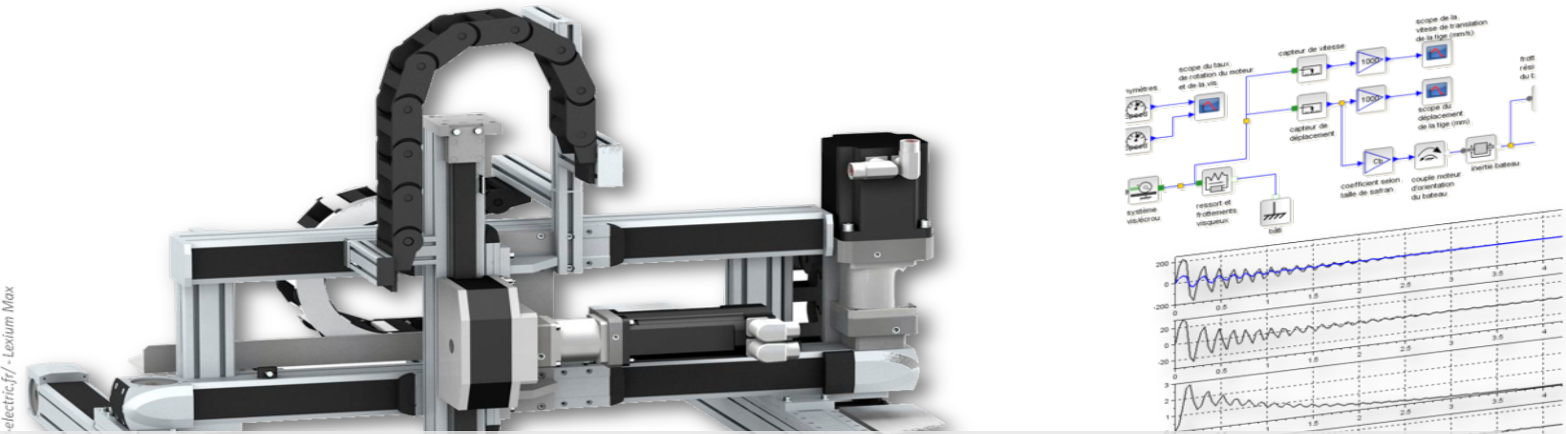


1 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

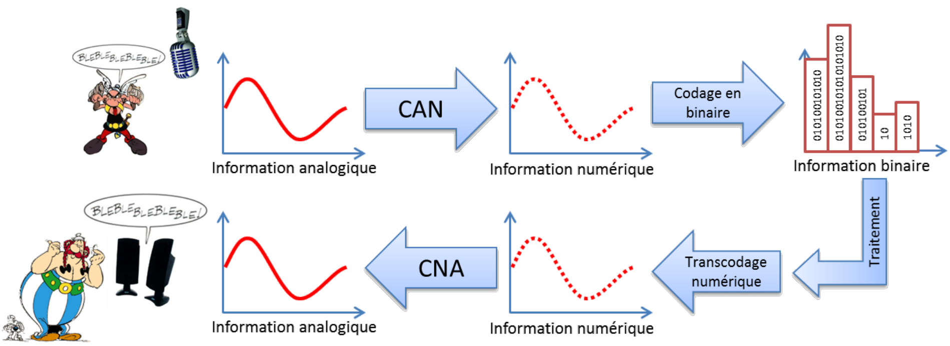
01 SLCI | 02 SLCI | 03 SLCI | 07 SLCI | 08 SLCI | 09 SLCI | 10 SLCI | 11 SLCI

1.1 Définitions préliminaires et détermination des performances

1.1.1 Définitions

Définition – Informations analogiques et numériques

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).

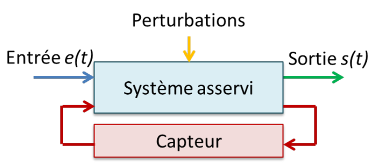


Définition – Systèmes automatiques ou asservis

Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

- la loi de consigne $e(t)$ est une grandeur de commande qui est modifiable ;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie $s(t)$ est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger



de la qualité de la tâche accomplie.

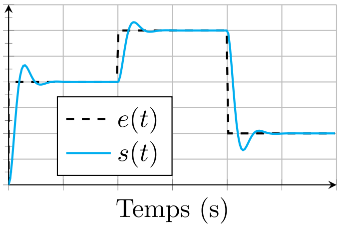


Figure 1.1 – Système suiveur.

Définition – Systèmes suiveurs et régulateurs

- Pour un système suiveur la consigne $e(t)$ fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- Pour un système régulateur la consigne $e(t)$ est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.

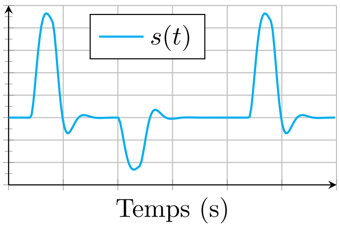


Figure 1.2 – Système régulateur.

1.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques

Définition – Précision en position – Erreur statique ε_S

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'erreur statique ε_S comme la différence entre la consigne (un échelon) et la réponse $s(t)$ en régime permanent.

Définition – Précision en vitesse ε_V

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

Définition – Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

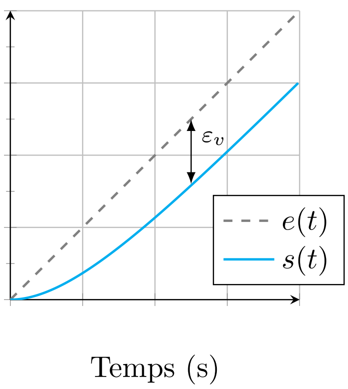


Figure 1.3 – Erreur de trainage.

Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.

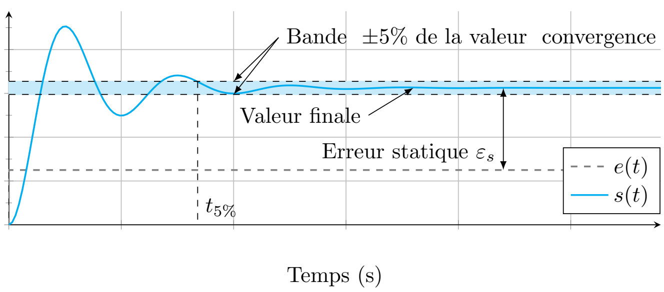


Figure 1.4 – Performances sur une réponse à un échelon.

Définition – Stabilité

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

1.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace

02 SLCI

1.2.1 Définitions

Définition – Conditions de Heavisde – Fonction causale – Conditions initiales nulles

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour $t = 0^+$:

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{\mathrm{d}f(0^+)}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(0^+)}{\mathrm{d}t^2} = 0...$$

Définition – Transformée de Laplace

À toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t \leq 0$ (fonction causale), on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

On note $\mathscr{L}\left[f(t)\right]$ la transformée directe et $\mathscr{L}^{-1}\left[F(p)\right]$ la transformée inverse.

De manière générale on note $\mathscr{L}\left[f(t)\right] = F(p)$, $\mathscr{L}\left[e(t)\right] = E(p)$, $\mathscr{L}\left[s(t)\right] = S(p)$, $\mathscr{L}\left[\omega(t)\right] = \Omega(p)$, $\mathscr{L}\left[\theta(t)\right] = \Theta(p)$ ...

Résultat – Dérivation

Dans les conditions de Heaviside : $\mathscr{L}\left[\frac{\mathbf{d}f(t)}{\mathbf{d}t}\right] = pF(p)$, $\mathscr{L}\left[\frac{\mathbf{d}^2 f(t)}{\mathbf{d}t^2}\right] = p^2F(p)$, $\mathscr{L}\left[\frac{\mathbf{d}^n f(t)}{\mathbf{d}t^n}\right] = p^nF(p)$.

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par $\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = pF(p) - f(0^+)$.

1.2.2 Théorèmes

Théorème – Valeur initiale

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\in\mathbb{R}, p\to\infty} pF(p)$$

Théorème – Valeur finale

$$\lim_{t\to \infty} f(t) = \lim_{p\in\mathbb{R}, p\to 0} pF(p)$$

Théorème – Retard

$$\mathscr{L}\left[f\left(t - t_0\right)\right] = e^{-t_0 p}F(p)$$

Théorème – Amortissement

$$\mathscr{L}\left[e^{-at}f\left(t\right)\right] = F(p+a)$$

1.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

03 SLCI

1.3.1 Définitions

Définition – Fonction de transfert – Transmittance

Soit un système linéaire continu linéaire invariant dont on note le signal d'entrée e et le signal de sortie s, régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction H telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

Définition – Classe – Ordre – Pôles – Zéros

$H(p)$ est une fonction rationnelle en p. En factorisant le numérateur et le dénominateur, $H(p)$ peut s'écrire sous cette forme :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K\frac{\left(p - z_1\right)\left(p - z_2\right)\ldots\left(p - z_m\right)}{p^\alpha\left(p - p_1\right)\left(p - p_2\right)\ldots\left(p - p_n\right)}$$

- Les z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Les p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- **Le degré de $D(p)$ est appelé ordre n du système ($n \geq m$ pour les systèmes physiques).**
- L'équation $D(p) = 0$ est appelée équation caractéristique.
- S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre α de $D(p)$, un terme p^α apparaît au dénominateur. α **est la classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

Exemple

$H(p) = \dfrac{K}{p\left(1 + \tau_1 p\right)\left(1 + \tau_2 p\right)}$ *est d'ordre 3 et de classe 1.*

Définition – Forme canonique

On appelle forme canonique d'une fonction de transfert une forme pour laquelle le coefficient du monome de plus bas degré est 1 au numérateur et au dénominateur. On appelle gain la coefficent ainsi mis en facteur.

Exemple

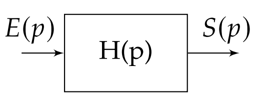
$H_1(p) = \dfrac{K}{a + 1 + bp + cp^2} = \dfrac{K}{a+1}\dfrac{1}{1 + \dfrac{b}{a+1}p + \dfrac{c}{a+1}p^2}$.

$H_2(p) = \dfrac{K}{\left(a_1 + b_1 p\right)\left(a_2 + b_2 p\right)} = \dfrac{K}{a_1 a_2}\dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{b_1}{a_1}p\right)\left(1 + \dfrac{b_2}{a_2}p\right)}$.

Définition – Modélisation d'un bloc

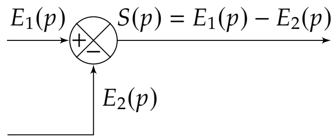
Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$, caractérisé par une fonction de transfert $H(p)$. Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$



Définition – Modélisation d'un comparateur

Soit l'équation $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$. Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

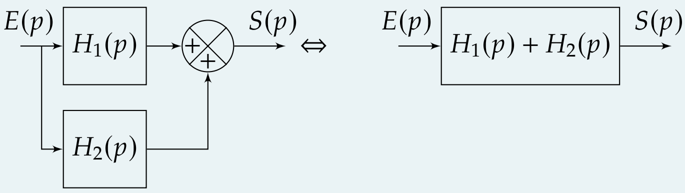


1.3.2 Algèbre de blocs

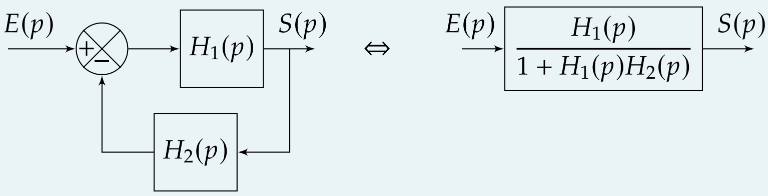
Remarque – Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsqu'on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.

Résultat – Blocs en série

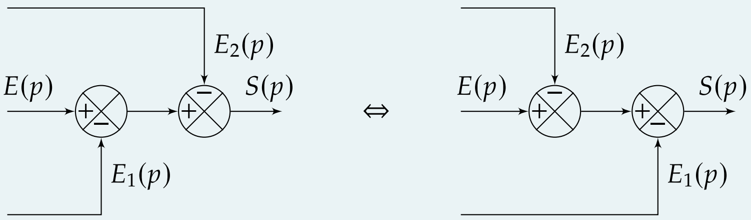
Résultat – Blocs en parallèle



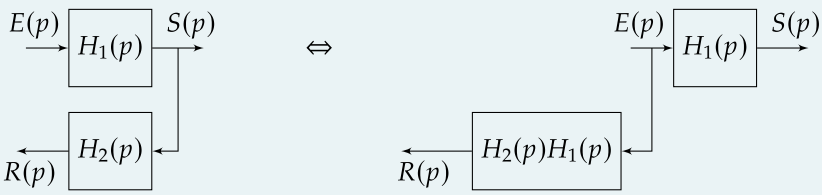
Résultat – Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT



Résultat – Comparateurs en série

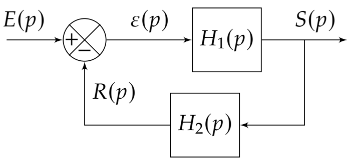


Résultat – Point de prélèvement



1.3.3 Fonctions usuelles

08 SLCI



Définition – Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF

Formule de Black

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$

Définition – Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO

$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

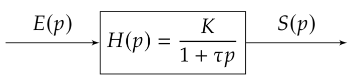
Définition – Théorème de superposition

Soit un système d'entrées E_1 et E_2 et de sortie S. On note $H_1 = \dfrac{S}{E_1}$ lorsque E_2 est nulle et $H_2 = \dfrac{S}{E_2}$ lorsque E_1 est nulle. En superposant, on a alors : $S = H_1E_1 + H_2E_2$.

1.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

07 SLCI

1.4.1 Systèmes d'ordre 1



Définition – Système d'ordre 1

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

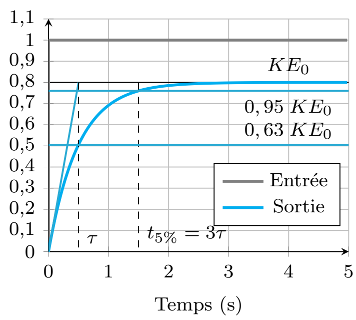
$$\tau \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

- τ la constante de temps en secondes ($\tau > 0$) ;
- K le gain statique du système ($K > 0$).



Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude E_0. Lorsque $E_0 = 1$ ($1/p$ dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p}\frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = KE_0 u(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.
Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- le gain à partir de l'asymptote KE_0 ;
- la constante de temps à partir de $t_{5\%}$ ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- valeur finale $s_\infty = KE_0$;
- pente à l'origine **non nulle** ;
- $t_{5\%} = 3\tau$;
- pour $t = \tau$, $s(\tau) = 0,63\, s_\infty$.

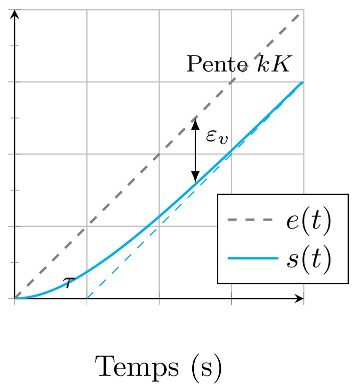
Résultat – Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente k :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2}\frac{K}{1+\tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = Kk\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$.
Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- pente de l'asymptote Kk ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses : $t = \tau$.



1.4.2 Systèmes d'ordre 2

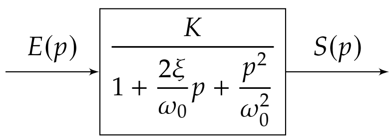
Définition – Systèmes d'ordre 2

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

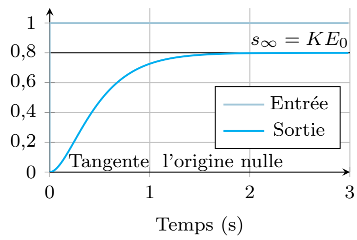


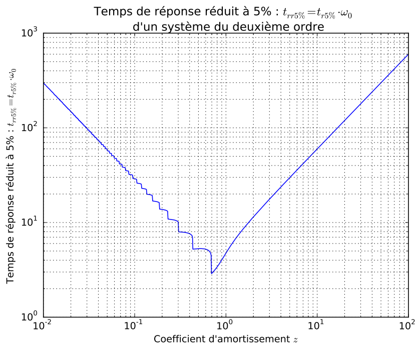
- K est appelé le gain statique du système (rapport des unités de S et de E) ;
- ξ (lire *xi*) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité) ;
- ω_0 pulsation propre du système (rad/s ou s^{-1}).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

Résultat – $\xi \geq 1$: système non oscillant et amorti (apériodique)

- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.





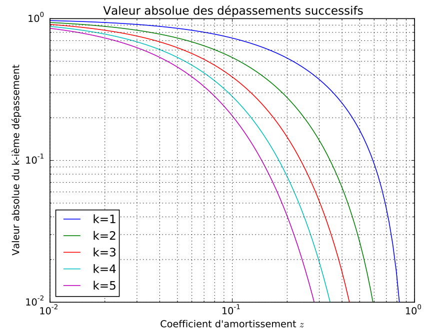
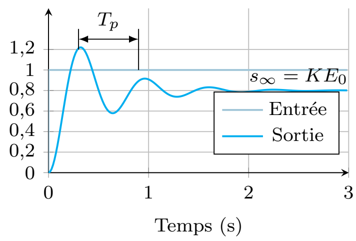


Figure 1.5 – Abaques pour des systèmes d'ordre 2

(a) Abaque des temps de réponses réduits à 5 %

(b) Abaques des dépassements



Résultat – $\xi < 1$: système oscillant et amorti (pseudo périodique)

- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$.
- La valeur du premier dépassement vaut : $D_1 = KE_0 e^{\dfrac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$.

Résultat –

- Pour $\xi = 0$ le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude KE_0 ($2KE_0$ crête à crête).
- Pour $\xi \simeq 0,69$ on obtient le système du second ordre le plus rapide **avec dépassement**. Le temps de réponse à 5% est donné par $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \simeq 3$.
- Pour $\xi = 1$ on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.

1.5 Réponse fréquentielle des SLCI

11 SLCI

1.5.1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme $f(t) = A\sin(\omega \cdot t + \varphi)$ et on note :

- $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: la période de la sinusoïde en s ;
- $f = \dfrac{1}{T}$: fréquence de la sinusoïde en Hz.
- A : l'amplitude de la sinusoïde ;
- ω : la pulsation en rad/s ;
- φ : la phase à l'origine en rad.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

Définition – Gain & Phase

Soit $H(p)$ une fonction de transfert. On pose $p = j\omega$ et on note :

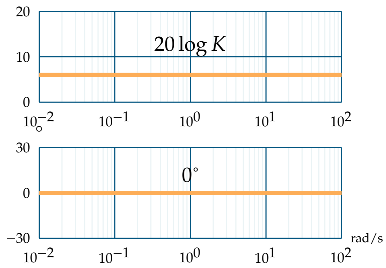
- $H_{\text{dB}}(\omega) = 20\log|H(j\omega)|$ le gain décibel de la fonction de transfert ;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}\left(H(j\omega)\right)$.

Résultat –

On note $H(p) = G_1(p)G_2(p)$. On a :

- $H_{\text{dB}}(\omega) = G1_{\text{dB}}(\omega) + G2_{\text{dB}}(\omega)$;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}\left(G1_{\text{dB}}(\omega)\right) + \text{Arg}\left(G2_{\text{dB}}(\omega)\right)$.

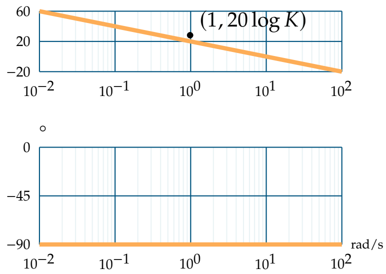
1.5.2 Gain



Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur

- Fonction de transfert : $H(p) = K$.
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée $20\log K$.
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée 0°.

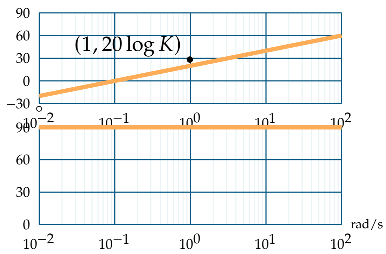
1.5.3 Intégrateur



Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur

- Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{p}$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente -20dB/decade passant par le point $(1, 20\log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée $-90\,^\circ$.

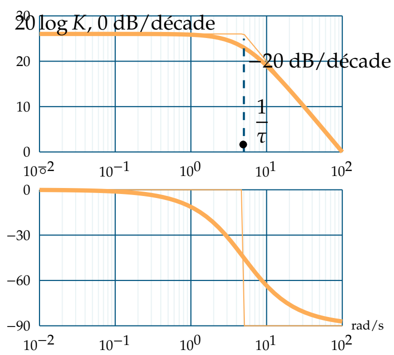
1.5.4 Dérivateur



Résultat – Diagramme de Bode d'un dérivateur

- Fonction de transfert : $H(p) = Kp$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente 20dB/decade passant par le point $(1, 20\log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée $+90\,^\circ$.

1.5.5 Systèmes d'ordre 1

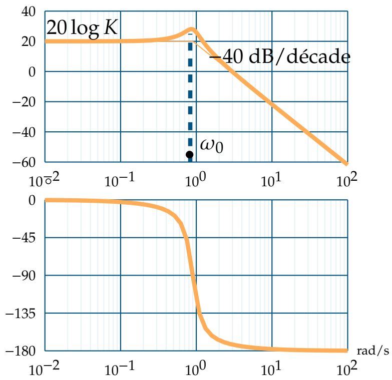


Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

- Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$.
- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour $\omega < \dfrac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $20\log K$;
  - pour $\omega > \dfrac{1}{\tau}$: droite de pente -20dB/decade.
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour $\omega < \dfrac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $0\,^\circ$;
  - pour $\omega > \dfrac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $-90\,^\circ$.

1.5.6 Systèmes d'ordre 2

Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre



- Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$.

Cas où $\xi < 1$.

- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$;
  - pour $\omega > \omega_0$: droite de pente −40dB/decade.
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée 0 ° ;
  - pour $\omega > \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée −180°.

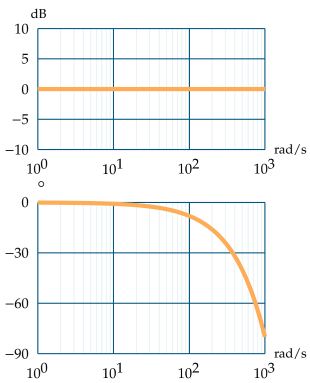
Dans le **cas où** $\xi > 1$, le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$. On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

Résultat – Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque $\xi < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$.
À la résonance, l'amplitude maximale est de $A_{\max} = \dfrac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$. (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit $20 \log A_{\max}$ lorsque $\omega = \omega_r$.)

1.5.7 Retard

Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur



- Fonction de transfert : $H(p) = e^{-Tp}$.
- Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- Diagramme de phase asymptotique : $\arg\left(H(p)\right) = -\tau\omega$.

1.5.8 Tracé du diagramme de Bode

Méthode – 1 : Sommation dans le diagramme de Bode

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Tracer chacune des fonctions de transfert.
3. Sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

Méthode – 2 : Tableau de variations

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes.
3. Sommer les pentes.
4. Tracer le diagramme de Bode.

Application 1
Réponses fréquentielles – Sujet

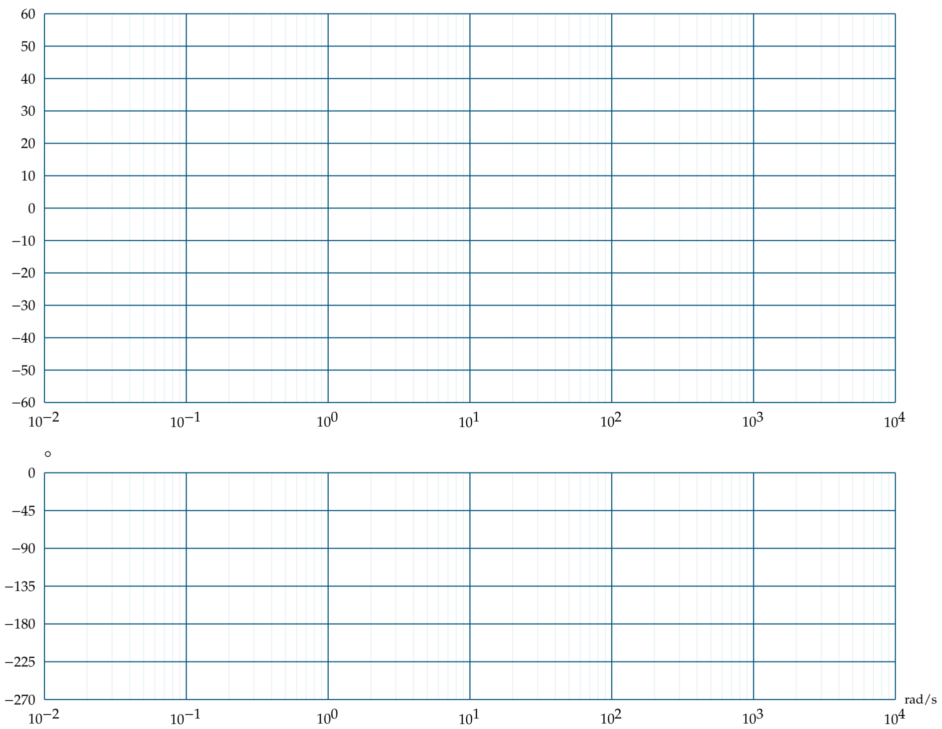
D'après Sébastien Grange.

Diagramme de Bode

SLCI

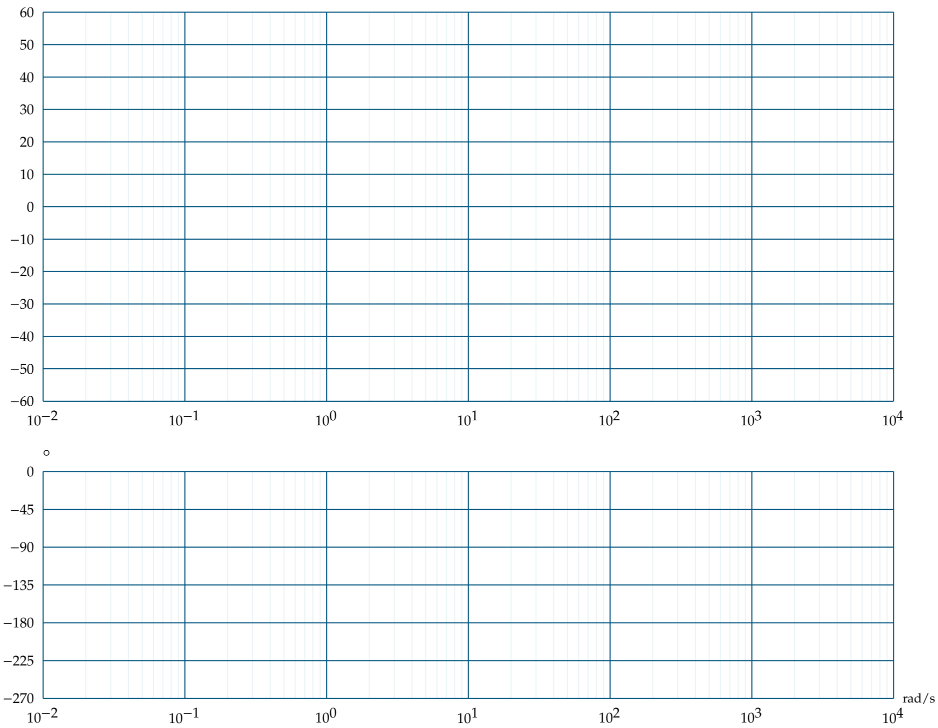
Question 1 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p+0.025)(p^2+0,2p+1)}$$

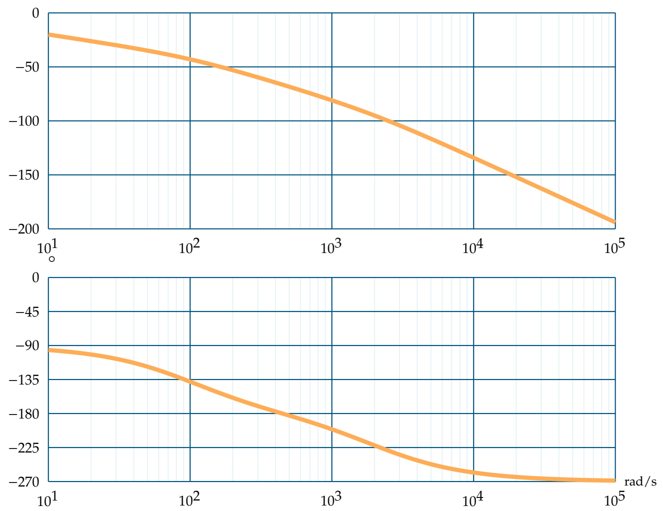


Question 2 Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p+60)}{p(p^2+5p+4)}$$

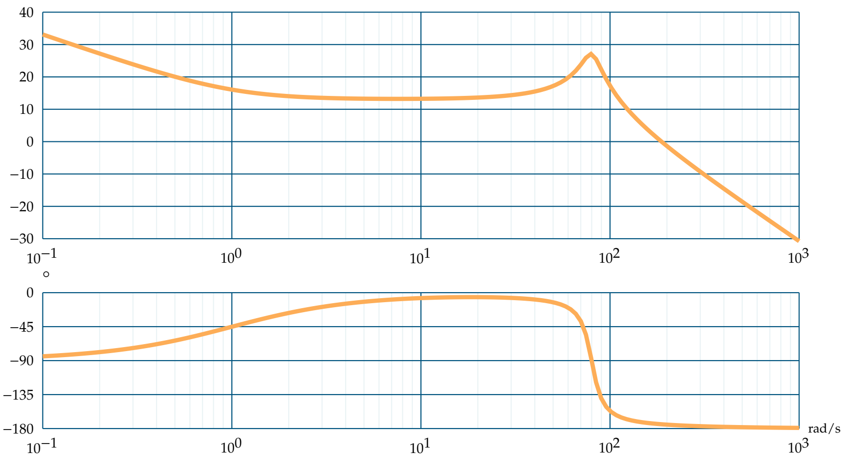


Question 3 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :$H(p) = \dfrac{K}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$. Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de $H(p)$.



Question 4 On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale : $e(t) = 3\sin 300t$. Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

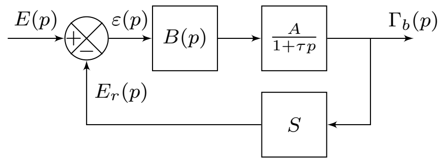
Question 5 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a : $\text{Max}\left(G_{\text{dB}}\right) = 20\log\dfrac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.



Question 6 Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité S est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.



- $A = 100\,\text{g}\,\text{m}\,\text{s}^{-2}\,\text{V}^{-1}$;
- $\tau = 0{,}2\,\text{s}$ et $S = 10g^{-1}\cdot 10^{-3}/V/(m/s^2)$ où g est l'accélération de pesanteur ;
- $E(p)$ est la transformée de Laplace de $e(t)$ la tension de consigne de cet asservissement ;
- $\Gamma_b(p)$ la transformée de l'accélération $\gamma_b(t)$.

Première étude : $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude E_0 égale à 0,2 V.

Question 7 Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

Question 8 La tension de consigne prend la forme suivante : $e(t) = 0,2\sin(\omega t)$ avec $\omega = 10\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. Déterminer $\omega_b(t)$ en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

Deuxième étude : $B(p) = \dfrac{1}{p}$.

Question 9 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

Question 10 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.

Application 1
Réponses fréquentielles – Corrigé

D'après Sébastien Grange.

Diagramme de Bode

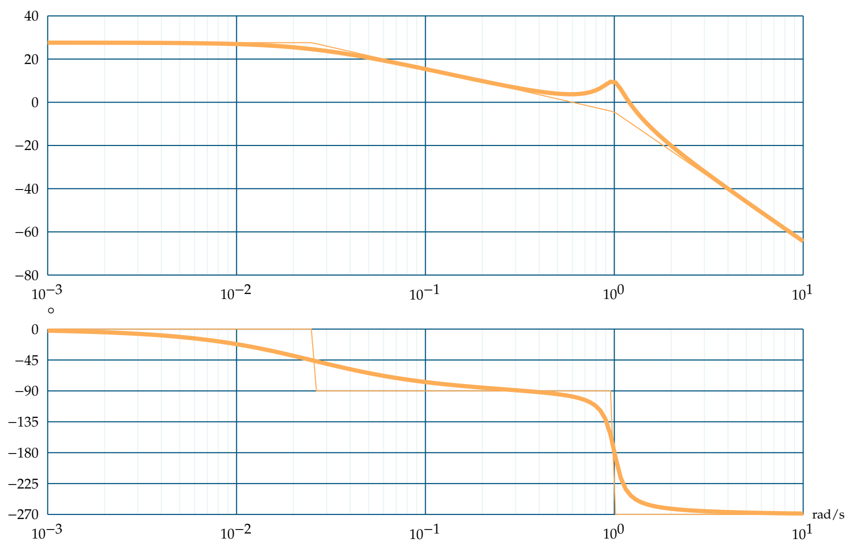
11 SLCI

Question 1 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p+0.025)(p^2+0,2p+1)}$$

Correction

$$H(p) = \frac{0,6}{(p+0,025)(p^2+0,2p+1)} = \frac{24}{(1+40p)\left(1+\frac{2\cdot 0,1}{1}p+\frac{p^2}{1^2}\right)}$$



Question 2 Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

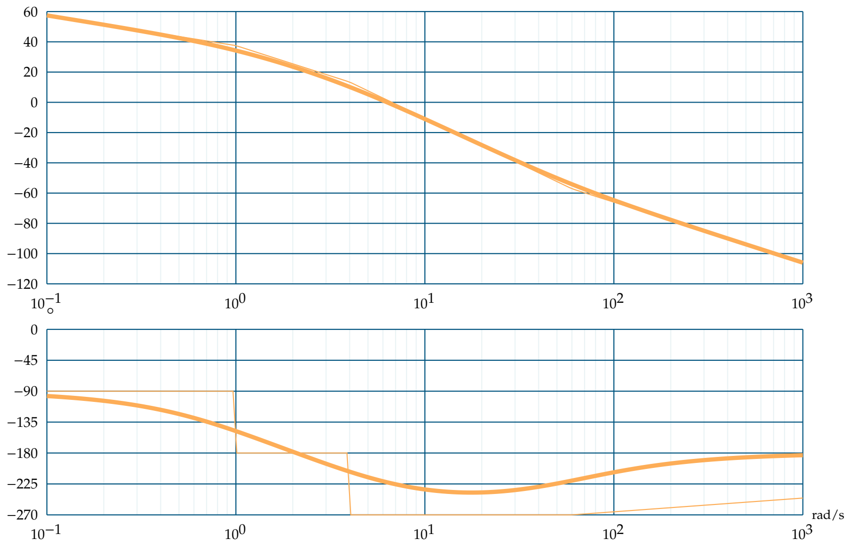
$$H(p) = \frac{5(p+60)}{p(p^2+5p+4)}$$

Correction

$$H(p)=\frac{5(p+60)}{p(p^2+5p+4)}=\frac{75(1+0,0167p)}{p(1+(2\cdot 1,25)/2p+p^2/2^2)}=\frac{75(1+0,0167p)}{p(1+p)(1+0,25p)}$$

	1 rad/s		$\frac{1}{0,25}=4$ rad/s	$\frac{1}{0,0167}=60$ rad/s
$1+0,0167p$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	+20 dB/décade +90°
$\frac{1}{1+p}$	0 dB/décade	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°
$\frac{1}{1+0,25p}$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°
$1/p$	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°
$H(p)$	-20 dB/décade -90°	-40 dB/décade -180°	-60 dB/décade -270°	-40 dB/décade -180°

Poistionnement du diagramme asymptotique de gain : en $\omega =<< 1\text{rad s}^{-1}$, $H(p)\simeq\frac{75}{p}$. Ainsi pour $\omega\simeq 0,1\text{rad s}^-1$, $H_{dB}(0,1)=20\log(75/0,1)=57$ dB.



Question 3 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :$H(p)=\dfrac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$. Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de $H(p)$.

Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. De plus la phase diminue dans un premier temps de 90 degrés puis encore de 90degrés ce qui justifie les 2 1er ordres.
Pour identifier les constantes de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un premier ordre passe par -45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut $\frac{1}{\tau}$. Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc les pulsations de coupure lorsque la phase vaut -135 degrés puis -225 degrés. On a : $1/T_1\simeq 100$ et $1/T_2\simeq 2000$ donc $T_1=0{,}01$ s et $T_2=0{,}0005$ s.
Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici $\omega=0,1 rad/s$. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1er ordre valent environ $20\log K$ et celui de l'intégrateur $20\log(1/\omega)$. On a donc pour $\omega=0,1rad/s$: $20\log(K/0,1)\simeq -20$ $K\simeq 1$

On a donc : $H(p) = \dfrac{1}{p(1+0.01p)(1+0.0005p)}$.
Le pôle dominant est le pôle qui met le plus de temps à converger, c'est-à-dire celui qui a la constante de temps la plus grande, on a donc : $H(p) \simeq \dfrac{1}{p(1+0.01p)}$.

Question 4 On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale : $e(t) = 3\sin 300t$. Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

Correction

On sait que la sortie sera également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais déphasée et d'amplitude différente : $s(t) = S_0 \sin\left(300t + \varphi\right)$.
Le diagramme de Bode nous donne le rapport de l'amplitude entre la sortie et l'entrée (courbe de gain) et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (courbe de phase).
$G_{dB}(\omega = 300rad/s) = 20\log(S_0/E_0) = 20\log(S_0/3)$.
On peut lire que : $G_{dB}(\omega = 300rad/s) \simeq -60\,\text{dB}$ et donc $S_0 \simeq 3\cdot 10^{-3}$. D'après la courbe de phase, on peut lire : $\varphi(\omega = 300rad/s) = -175\,\text{degrs}$ On a donc : $s(t) = 3\cdot 10^{-3}\sin(300t - 3,05)$. L'angle est à mettre en radians.

Question 5 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a : $\text{Max}\left(G_{\text{dB}}\right) = 20\log\dfrac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.

Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. Ensuite la phase augmente dans un premier temps de 90 degrés, ce qui signifie la présente d'un « 1er ordre » en numérateur. Puis la phase diminue de 180 degrés et le gain résonne ce qui justifie la présence d'un 2ème ordre avec un coefficient d'amortissement plus petit que $1/\sqrt{2}$.
$H(p) = \dfrac{K(1+Tp)}{p(1+2\xi/\omega_0 p + p^2/(\omega^2))}$
Pour identifier la constante de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un « premier ordre » au numérateur passe par 45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut $1/\tau$. Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -45 degrés. On a : $1/T \simeq 1$ et $T = 1\,\text{s}$.
Pour identifier la pulsation de coupure, on va utiliser le fait que la phase d'un 2ème ordre passe par -90 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut ω_0. Ici, il y a un intégrateur et un « 1er ordre » au numérateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -90 degrés. On a : $\omega_0 \simeq 80\,\text{rad/s}$.
Pour identifier le coefficient d'amortissement, on va utiliser la résonnance. On a : $20\log(1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})) \simeq 13$ et $\xi \simeq 0,11$.
Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici $\omega = 0,1rad/s$. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1er ordre et du 2ème ordre valent environ $20\log K$ et celui de l'intégrateur $20\log(1/\omega)$. On a donc pour $\omega = 0{,}1\,\text{rad/s}$: $20\log(K/0.1) \simeq 33$ et $K \simeq 4.5$

Question 6 Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

Réponse fréquentielle

$E(p)$

Un capteur d'accélération de sensibilité S est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

- $A = 100\,\mathrm{g\,m\,s^{-2}\,V^{-1}}$;
- $\tau = 0{,}2\,\mathrm{s}$ et $S = 10g^{-1} \cdot 10^{-3}/V/(m/s^2)$ où g est l'accélération de pesanteur ;
- $E(p)$ est la transformée de Laplace de $e(t)$ la tension de consigne de cet asservissement ;
- $\Gamma_b(p)$ la transformée de l'accélération $\gamma_b(t)$.

Première étude : $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude E_0 égale à 0,2 V.

Question 7 Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

Correction

En calculant la FTBF on a $FTBF(p) = \dfrac{\dfrac{A}{1+\tau p}}{1+\dfrac{AS}{1+\tau p}} = \dfrac{A}{1+\tau p + AS\,(1+\tau p)}$.

Par suite $\Gamma_b(p) = \dfrac{A}{1+\tau p + AS\,(1+\tau p)}\dfrac{E_0}{p}$.

On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \Gamma_b(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{A}{1+\tau p + AS\,(1+\tau p)}\dfrac{E_0}{p} = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{AE_0}{1+\tau p + AS\,(1+\tau p)} = \dfrac{AE_0}{1+AS}$.

Pour $E_0 = 0{,}2\,\mathrm{V}$, $\Gamma_f = \dfrac{100g\times 0,2}{1+100g\times 10\times 10^{-3}g^{-1}} = 10g$.

On veut $\dfrac{AE_0}{1+AS} = 20g$ soit $E_0 = 20g\dfrac{1+AS}{A}$ $E_0 = 20g\dfrac{1+100\times 10\times 10^{-3}}{100g} = 0,4$. Il faudrait donc $E_0 = 0{,}4\,\mathrm{V}$.

Question 8 La tension de consigne prend la forme suivante : $e(t) = 0,2\sin(\omega t)$ avec $\omega = 10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Déterminer $\omega_b(t)$ en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

Correction

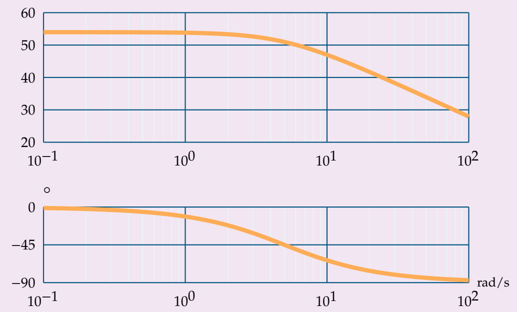
$FTBF(p) = \dfrac{A}{1+\tau p + AS\,(1+\tau p)} = \dfrac{\dfrac{A}{1+AS}}{1+\tau p}$ en faisant l'application numérique, $FTBF(p) = \dfrac{50g}{1+0,2p}$.

$G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log(50g) - 20\log\sqrt{1+0,2^2\omega^2}$ et $G_{\mathrm{dB}}(10) = 20\log(50g) - 20\log\sqrt{5} = 20\log(10g\sqrt{5}) \simeq 47 \simeq 20\log 223$.

$\varphi(\omega) = -\arctan 0,2\omega$ et $\varphi(10) = -\arctan 2 \simeq -63°$.

Au final $\omega_b(t) = 0,2\times 223\sin(\omega t - 63)$.

Pour information, on donne le diagramme de Bode de la FTBF.



Deuxième étude : $B(p) = \dfrac{1}{p}$.

Question 9 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

Question 10 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.

TD 1
Tête de découpe de tissus– Sujet

Concours CCINP MP 2018.

02 SLCI | 07 SLCI | 08 SLCI

Un système de découpe automatisé de tissus est composé (figure 1.6) :

- d'une table de découpe sur laquelle le tissus à découper (appelé matelas) est maintenu en position par aspiration ;
- d'un bras transversal qui se déplace en translation de direction $\overrightarrow{y_0}$ par rapport à la table ;
- d'une tête de coupe qui se déplace en translation de direction $\overrightarrow{x_0}$ par rapport au bras transversal ;
- d'un ordinateur qui pilote l'ensemble du système.

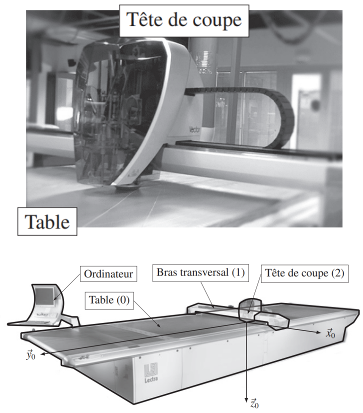


Figure 1.6 – Structure d'une table de découpe de tissus

Modélisation du comportement du moteur de coupe

Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 1.9).

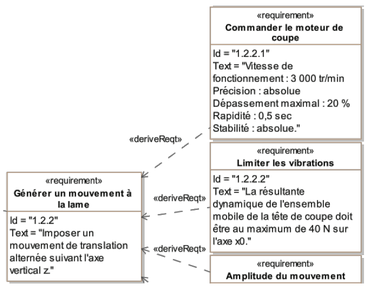
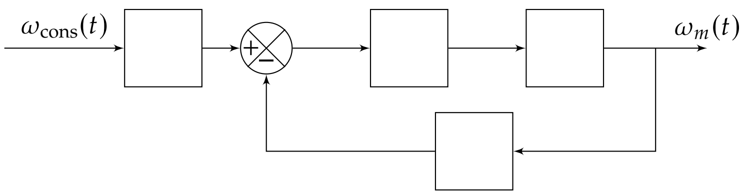


Figure 1.7 – Exigence 1.2.2.1

Le mouvement de coupe est asservi en vitesse. La vitesse de rotation du moteur, notée $\omega_m(t)$, est le paramètre asservi. Elle est mesurée à l'aide d'un codeur incrémental et de son conditionneur qui fournissent une tension $u_{\text{mes}}(t)$, image de la vitesse de rotation du moteur. Cette tension est comparée à la tension consigne $u_{\text{cons}}(t)$, image de la vitesse de rotation de consigne $\omega_{\text{cons}}(t)$; un adaptateur fournit $u_{\text{cons}}(t)$ à partir de $\omega_{\text{cons}}(t)$. La tension écart $\varepsilon(t) = u_{\text{cons}}(t) - u_{\text{mes}}(t)$ est alors transformée en tension d'alimentation du moteur $u_{\text{m}}(t)$ par l'ensemble correcteur-variateur.

Question 1 Compléter le schéma-blocs fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.



Question 2 On note K_a le gain de l'adaptateur et K_c le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre K_a et K_c pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

Le moteur utilisé est un moteur à courant continu dont les caractéristiques et les grandeurs physique sont sont :

- R, résistance de l'induit ;
- L, inductance de l'induit ;
- k_e, constante de vitesse ;
- k_c, constante de couple ;
- $u_m(t)$ est la tension d'alimentation du moteur ;
- $i(t)$ est l'intensité traversant l'induit ;
- $e(t)$ est la force contre-électromotrice ;
- $\omega_m(t)$ est la vitesse de rotation de l'arbre moteur ;
- $c_m(t)$ est le couple moteur ;
- $c_r(t)$ est le couple résistant ;
- J est le moment d'inertie de l'ensemble en mouvement ramené à l'arbre moteur, supposé constant dans cette partie.

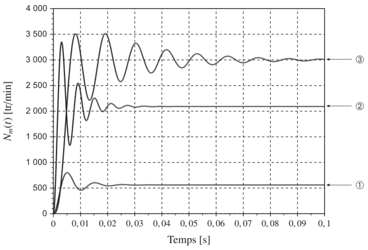


Figure 1.8 – Évolutions simulées de $\omega_m(t)$.

On donne les quatre équations du modèle d'un moteur à courant continu : $u_m(t) = Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + e(t)$, $J\dfrac{\mathrm{d}\omega_m(t)}{\mathrm{d}t} = c_m(t) + c_r(t)$, $c_m(t) = k_c i(t)$, $e(t) = k_e\omega_m(t)$. La fonction de transfert du moteur est notée $H_m(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

Question 4 En supposant le couple résistant nul, $c_r(t) = 0$, donner la forme canonique de la fonction de transfert sous la forme $H_m(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$. On exprimera les constantes en fonction de R, L, k_e, k_c et J.

Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

Le correcteur de l'asservissement en vitesse du moteur est un proportionnel-intégrateur de fonction de transfert $H_{\text{cor}}(p) = K_p + \dfrac{K_i}{p}$.

Les résultats de simulation de la réponse du moteur $N_{\text{m}}(t)$, en boucle fermée, pour une entrée échelon d'amplitude $N_0 = 3000\,\text{tr}\,\text{min}^{-1}$ pour différentes valeurs de K_p et de K_i sont donnés sur la figure 1.10.

Question 5 Pour les courbes 1 et 2 de la figure 1.10, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de K_p. On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

Question 6 Pour chaque courbe de la figure 1.10, préciser, en le justifiant, si la valeur de K_i est nulle ou non.

Question 7 Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.

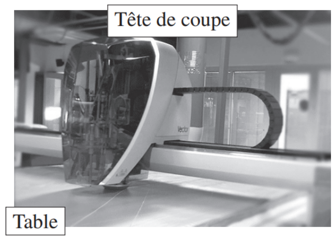
Éléments de correction

1. .
2. $K_a = K_c$.
3. .
4. $K = \dfrac{1}{k_e}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_c k_e}{JL}}$ et $\xi = \dfrac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{L k_c k_e}}$.
5. La courbe 2 a la plus grande valeur de K_p.
6. $K_i \neq 0$ pour la courbe 3 uniquement.
7. .

TD 1
Tête de découpe de tissus– Corrigé

Concours CCINP MP 2018.

02 SLCI 07 SLCI 08 SLCI



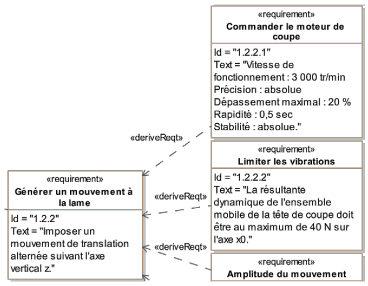


FIGURE 1.9 – Exigence 1.2.2.1

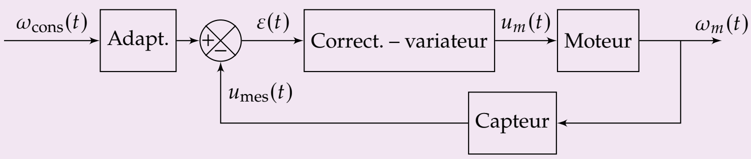
Modélisation du comportement du moteur de coupe

Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 1.9).

Question 1 Compléter le schéma-blocs fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.

Correction



Question 2 On note K_a le gain de l'adaptateur et K_c le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre K_a et K_c pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

Correction

On a $\varepsilon(t) = K_a\omega_{\text{cons}}(t) - K_c\omega_m(t)$.
Pour que $\varepsilon(t)$ soit nul lorsque $\omega_{\text{cons}}(t) = \omega_m(t)$, il faut que $K_a = K_c$.

Question 3 Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

Correction

On a $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p)$, $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) + C_r(p)$, $C_m(p) = k_c I(p)$, $E(p) = k_e\Omega_m(p)$.

Question 4 En supposant le couple résistant nul, $c_r(t) = 0$, donner la forme canonique de la fonction de transfert sous la forme $H_m(p) = \dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$. On exprimera les constantes en fonction de R, L, k_e, k_c et J.

Correction

On a $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) = \dfrac{C_m(p)}{k_c}(R+Lp) + k_e\Omega_m(p) = Jp\dfrac{\Omega_m(p)}{k_c}(R+Lp) + k_e\Omega_m(p)$.

On a donc $U_m(p) = \Omega_m(p)\left(\dfrac{Jp}{k_c}(R+Lp)+k_e\right)$ et $H_m(p) = \dfrac{1}{\dfrac{JL}{k_c}p^2+\dfrac{JR}{k_c}p+k_e} = \dfrac{\dfrac{1}{k_e}}{\dfrac{JL}{k_ck_e}p^2+\dfrac{JR}{k_ck_e}p+1}$.

Par identification, on a donc $K = \dfrac{1}{k_e}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_ck_e}{JL}}$ et $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = \dfrac{JR}{k_ck_e}$ soit $\xi = \dfrac{JR}{2k_ck_e}\sqrt{\dfrac{k_ck_e}{JL}} = = \dfrac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_ck_e}}$.

Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

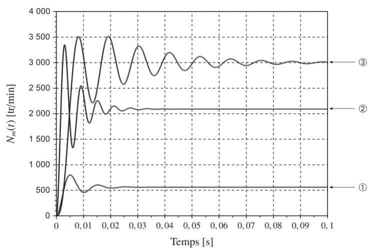


Figure 1.10 – Évolutions simulées de $\omega_m(t)$.

Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

Question 5 Pour les courbes 1 et 2 de la figure 1.10, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de K_p. On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

Correction

Méthode 1 – Coefficient d'amortissement

On note $H_{BF}(p) = \dfrac{\omega_m(t)}{\omega_{cons}(t)}$.

On a alors, $H_{BF}(p) = K_c\dfrac{K_p\dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}}{1+K_p\dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}K_c} = \dfrac{K_cK_pK}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}+K_pK_c}$.

On a donc $\dfrac{2\xi_{BF}}{\omega_{BF}} = \dfrac{2\xi}{\omega_0\left(1+K_pK_c\right)}$ et $\omega_{BF}^2 = \omega_0^2\left(1+K_pK_c\right)$.

Soit $\xi_{BF} = \dfrac{\xi\omega_{BF}}{\omega_0\left(1+K_pK_c\right)} = \dfrac{\xi\omega_0\sqrt{1+K_pK_c}}{\omega_0\left(1+K_pK_c\right)} = \dfrac{\xi}{\omega_0\sqrt{1+K_pK_c}}$.

En conclusion, plus K_p augmente, plus le coefficient d'amortissement diminue et donc plus les pseudo oscillations deviennent grandes. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de K_p.

Méthode 2 – Calcul de l'écart statique

On montre que $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \dfrac{1}{1+FTBO(p)} = \dfrac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1+K_pK_c\dfrac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}}$.

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a $\varepsilon_S = \lim\limits_{t\to+\infty} = \varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{K_a}{1+K_pK_c\dfrac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \dfrac{K_a}{1+K_pK_cK}$.

Lorsque K_p augmente, ε_S diminue. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de K_p.

Question 6 Pour chaque courbe de la figure 1.10, préciser, en le justifiant, si la valeur de K_i est nulle ou non.

Correction

On montre que $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \dfrac{1}{1+FTBO(p)} = \dfrac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1+\left(K_p+\frac{K_i}{p}\right)K_c\dfrac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}}$.

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a $\varepsilon_S = \lim\limits_{t\to+\infty} = \varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = 0$. Ainsi, si K_i non nul, $\varepsilon_S = 0$ (courbe 3 uniquement).

Question 7 Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.

Correction

	Stabilité	1er Dépassement	Erreur statique	$T_{5\%}$
Exigences	Absolue	< 20 %	Nulle	0,5 s
Courbe 1	Stable **OK**	D_1 = 45 % **Pas OK**	2450 tr/min **Pas OK**	$T_{5\%}$ = 0,015 s **OK**
Courbe 2	Stable **OK**	D_1 = 59 % **Pas OK**	900 tr/min **Pas OK**	$T_{5\%}$ = 0,018 s **OK**
Courbe 3	Stable **OK**	D_1 = 15 % **OK**	0 tr/min **OK**	$T_{5\%}$ = 0,048 s **OK**

TD 2
Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie– Sujet

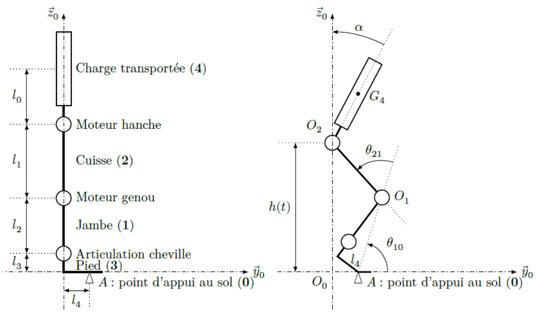
Concours Centrale Supelec TSI 2017.

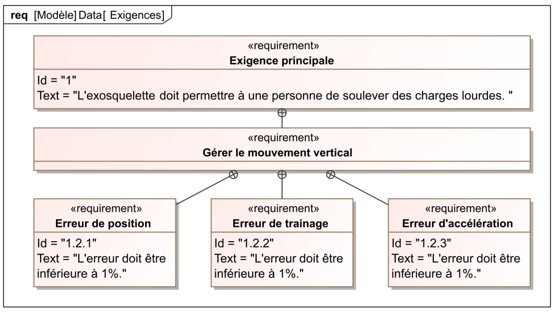
09 SLCI 05 PERF

Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.

On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.



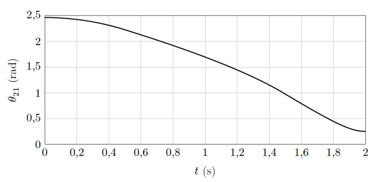


Gestion du mouvement vertical

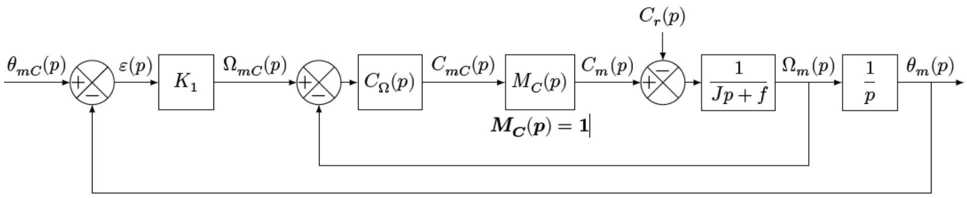
Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.



Notations :

- $\theta_{mC}(p)$ consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_{mC}(t)$ en rad) ;
- $\theta_m(p)$ position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_m(t)$ en rad) ;
- $C_{mC}(p)$ consigne de couple moteur (variable temporelle : $c_{mC}(t)$ en Nm) ;
- $C_m(p)$ couple moteur (variable temporelle : $c_m(t)$ en Nm) ;
- $C_r(p)$ couple résistant perturbateur (variable temporelle : $c_r(t)$ en Nm) ;
- K_1 gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en s^{-1}) ;
- $\Omega_{mC}(p)$ consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_{mC}(t)$ en rad s^{-1}) ;
- $\Omega_m(p)$ vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_m(t)$ en rad s^{-1}) ;
- $C_\Omega(p)$ correcteur de l'asservissement de vitesse ;
- $M_C(p)$ modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles : $M_C(p) = 1$;
- J moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur ;
- f coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement.

Le correcteur est de la forme : $C_\Omega(p) = K_2\left(\dfrac{Jp+f}{Jp}\right)$.

En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que :

- l'écart est défini par la variable $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$;
- l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$.

Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart $\varepsilon(t)$ est égal à l'erreur $\mu(t)$.

Hypothèse

Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Question 2 Exprimer $H_\Omega(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J, K_2 et p.

Question 3 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p.

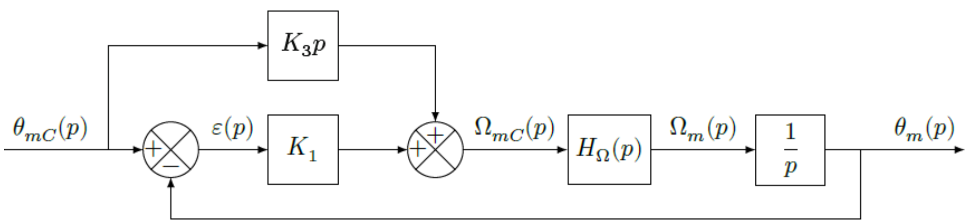
Méthode –

On peut définir l'erreur de position ε_p par $\varepsilon_p = \lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p)$ avec $\theta_{mC}(p) = \dfrac{1}{p}$ (entrée échelon).

Question 4 Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v. Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Question 5 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec $H_\Omega(p) = \dfrac{1}{1+Tp}$ et $T = 33$ ms.



Question 6 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T, K_1, K_3 et p.

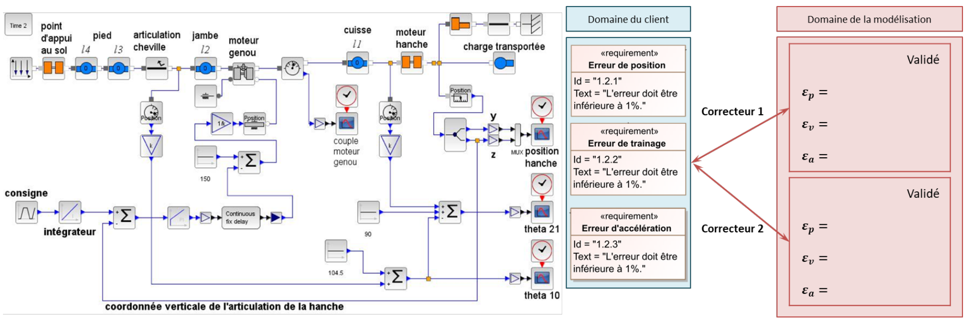
Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

Question 7 Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

Question 8 Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Synthèse

Question 9 En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.



Éléments de correction

1. Asservissement en position.
2. $H_\Omega(p) = \dfrac{K_2}{Jp + K_2}$.
3. $\varepsilon(p) = \dfrac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}}$
4. $\varepsilon(p) = 0$, $\varepsilon_v = \dfrac{1}{K_1}$ et $K_1 > 100$.
5. $\varepsilon_a = \infty$.
6. $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p)\dfrac{p\left(1 + Tp - K_3\right)}{p\left(1 + Tp\right) + K_1}$.
7. $\varepsilon_v = \dfrac{1 - K_3}{K_1}$, $K_3 = 1$.
8. $\varepsilon_a = \dfrac{33 \times 10^{-3}}{100}$. Le cahier des charges est donc validé.

TD 2
Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie– Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

09 SLCI 05 PERF

Mise en situation

Gestion du mouvement vertical

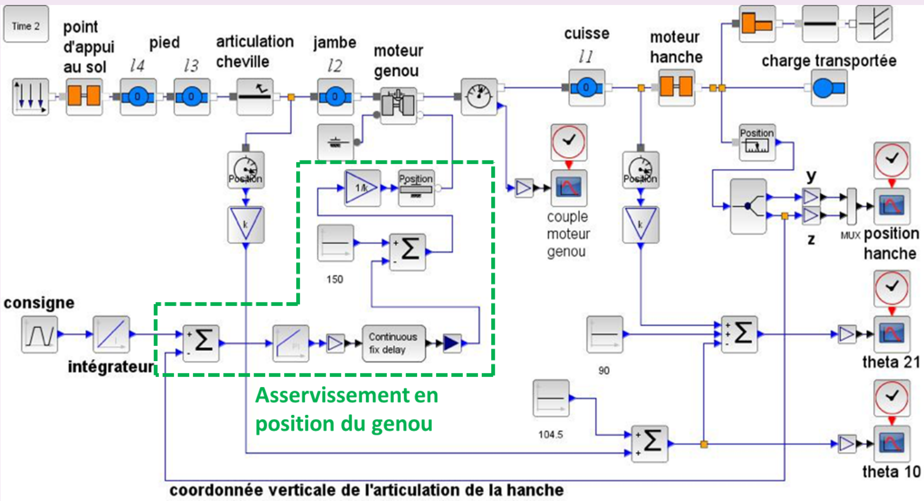
Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Question 1 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



Question 2 Exprimer $H_\Omega(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J, K_2 et p.

Correction

En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a : $H_\Omega(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \dfrac{C_\Omega(p)M_C(p)\dfrac{1}{Jp+f}}{1+C_\Omega(p)M_C(p)\dfrac{1}{Jp+f}}$. En conséquences : $H_\Omega(p) = \dfrac{K_2}{Jp+K_2} = \dfrac{1}{\dfrac{Jp}{CK_2}+1}$.

Question 3 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p.

Correction

D'une part, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$. D'autre part, $\theta_m(p) = H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}\varepsilon(p)$. Par suite, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}\varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)\left(1+H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}\right) = \theta_{mC}(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = \dfrac{\theta_{mC}(p)}{1+H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}}$.

Question 4 Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v. Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Correction

On a :

- $\varepsilon_p = \lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{1+H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}}\dfrac{1}{p} = \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{Jp}{C_\Omega K_2}+1}\dfrac{K_1}{p}} = 0$ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1) ;
- $\varepsilon_v = \lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{1+H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}}\dfrac{1}{p^2} = \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{Jp}{C_\Omega K_2}+1}\dfrac{K_1}{p}}\dfrac{1}{p}$ $= \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{1}{p+\dfrac{1}{\dfrac{Jp}{C_\Omega K_2}+1}K_1} = \dfrac{1}{K_1}$ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et de gain K_1 en BO).

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut $\dfrac{1}{K_1} < 0,01$ et $K_1 > 100$.

Question 5 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

En raisonnant de même, on a : $\varepsilon_a = \lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{1+H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}}\dfrac{1}{p^3}$ $= \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{Jp}{C_\Omega K_2}+1}\dfrac{K_1}{p}}\dfrac{1}{p^2} = 0 = \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{1}{p^2+\dfrac{p}{\dfrac{Jp}{C_\Omega K_2}+1}K_1} = \infty$ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1).

Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

Question 6 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T, K_1, K_3 et p.

Correction

En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$;
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)$;
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \dfrac{1}{p} \dfrac{1}{1+Tp}$.

On a donc : $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \dfrac{1}{p} \dfrac{1}{1+Tp} = \theta_{mC}(p) - \left(K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)\right) \dfrac{1}{p\left(1+Tp\right)} = \theta_{mC}(p) - \dfrac{K_3 p}{p\left(1+Tp\right)} \theta_{mC}(p) - \dfrac{K_1}{p\left(1+Tp\right)} \varepsilon(p)$.

On a alors $\varepsilon(p) \left(1 + \dfrac{K_1}{p\left(1+Tp\right)}\right) = \theta_{mC}(p) \left(1 - \dfrac{K_3}{1+Tp}\right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon(p) \dfrac{p\left(1+Tp\right)+K_1}{p\left(1+Tp\right)} = \theta_{mC}(p) \dfrac{1+Tp-K_3}{1+Tp}$.

Enfin, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \dfrac{p\left(1+Tp-K_3\right)}{p\left(1+Tp\right)+K_1}$.

Question 7 Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

Correction

$\varepsilon_v = \lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{p\left(1+Tp-K_3\right)}{p\left(1+Tp\right)+K_1} \dfrac{1}{p^2} = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{\left(1+Tp-K_3\right)}{p\left(1+Tp\right)+K_1} = \dfrac{1-K_3}{K_1}$.

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir $K_3 = 1$.

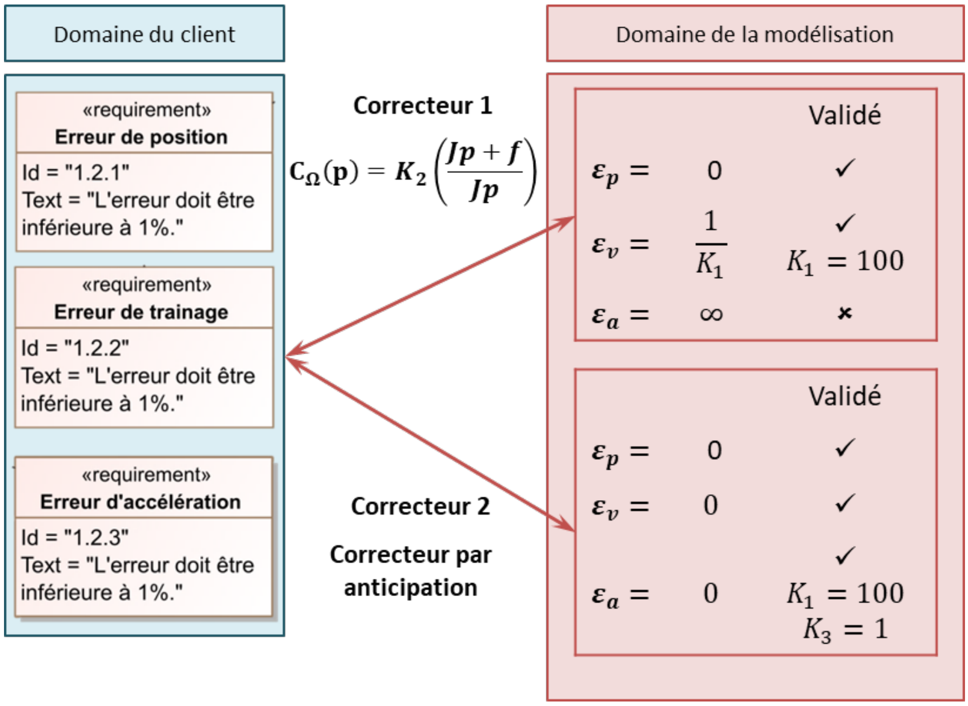
Question 8 Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

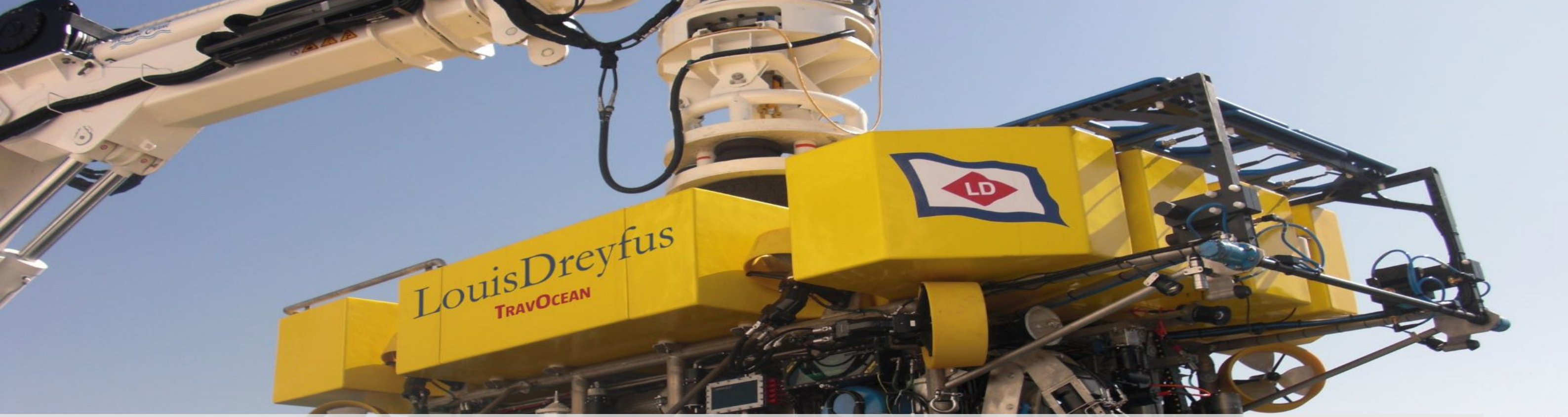
Correction

On a : $\varepsilon_a = \lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{p\left(1+Tp-K_3\right)}{p\left(1+Tp\right)+K_1} \dfrac{1}{p^3} = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{\left(1+Tp-K_3\right)}{p\left(1+Tp\right)+K_1} \dfrac{1}{p}$. En prenant $K_3 = 1$ et $K_1 = 100$, on obtient : $\varepsilon_a = \dfrac{T}{p\left(1+Tp\right)+100} = \dfrac{33 \times 10^{-3}}{100}$. L'erreur est donc de 33×10^{-5}. Le cahier des charges est donc validé.

Synthèse

Question 9 En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.


Domaine du client
Domaine de la modélisation
«requirement»
Erreur de position
Id = "1.2.1"
Text = "L'erreur doit être inférieure à 1%."
«requirement»
Erreur de trainage
Id = "1.2.2"
Text = "L'erreur doit être inférieure à 1%."
«requirement»
Erreur d'accélération
Id = "1.2.3"
Text = "L'erreur doit être inférieure à 1%."
Correcteur 1
$C_\Omega(p) = K_2\left(\frac{Jp+f}{Jp}\right)$
Validé
$\varepsilon_p =$ 0 ✓
$\varepsilon_v =$ $\frac{1}{K_1}$ ✓ $K_1 = 100$
$\varepsilon_a =$ ∞ ×
Correcteur 2
Correcteur par anticipation
Validé
$\varepsilon_p =$ 0 ✓
$\varepsilon_v =$ 0 ✓
$\varepsilon_a =$ 0 ✓ $K_1 = 100$ $K_3 = 1$



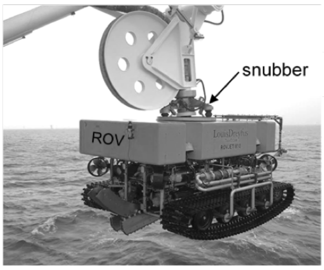
TD 3
Bateau support de ROV– Sujet

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

02 SLCI 09 SLCI 11 SLCI

Introduction

On s'intéresse à une grue permettant la dépose sur fond marin d'un robot dont l'objectif est d'enfouir des câbles.



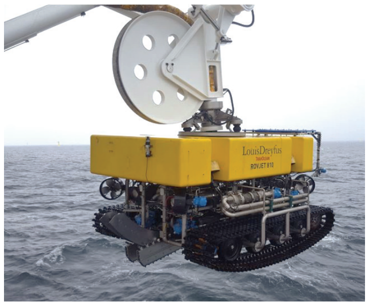


Figure 1.11 – ROV suspendu à la grue portique

Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

La société TravOcéan souhaite pouvoir travailler dans des conditions de mer difficiles pour limiter au maximum les périodes d'arrêt des chantiers. Pour cela, elle souhaite disposer d'un système de treuillage de ses ROV certifié pour une houle d'amplitude verticale de 5 m. Le tableau suivant présente un extrait du cahier des charges correspondant.

Table 1.1 – Extrait du cahier des charges

Exigence	Critère	Niveau
Id 1.1 : Compensation des mouvements du ROV pour une houle d'amplitude de 5 m et de pulsations comprises entre 0,5 rad s^{-1} à 1,7 rad s^{-1}	Amplitude verticale du ROVmaximale	< 1 m pour 5 m d'amplitude de houle
Id 1.2 : Mise en tension du câble	Temps de réponse, $t_{r5\%}$	< 3 s

Une étude expérimentale en bassin de carène a permis d'obtenir un modèle de comportement de l'ensemble S = {bateau + portique + ROV} suivant l'axe vertical, sous l'effet de la houle, au point d'ancrage du ROV sur la grue portique.

La fonction de transfert de l'ensemble S est $B(p) = \dfrac{Y_S(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$ avec $Y_S(p)$ la transformée de Laplace de la variation du déplacement vertical du point d'ancrage du ROV et $Y_{\text{vague}}(p)$ la transformée de Laplace de la variation du déplacement de la surface de l'eau à la verticale du point d'ancrage du ROV.

Question 1 Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Le tracé du gain de $B(p)$ dans la figure 1.12.

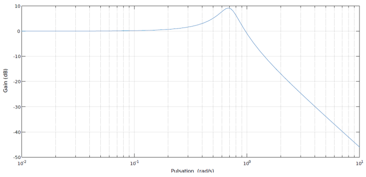


Figure 1.12 – ROV suspendu à la grue portique

Question 2 En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Pour compenser les effets de la houle, une solution hydropneumatique est alors envisagée. Ce système est un compensateur de houle passif noté PHC (figure 1.13).

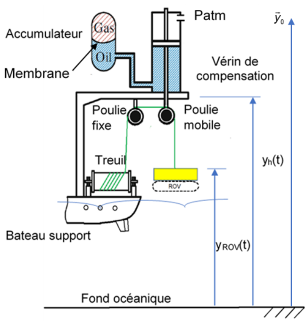


Figure 1.13 – Schéma d'implantation du PHV (non à l'échelle)

Les petites variations de pression $\Delta p_E(t)$ et $\Delta p_G(t)$ autour du point d'équilibre peuvent être définies par $\Delta p_E(t) = p_E(t) - P_{E0}$ et $\Delta p_G(t) = p_G(t) - P_{G0}$. Une étude de mécanique des fluides a permis d'obtenir les relations (1) et (2).

$$\frac{\mathrm{d}\Delta p_E(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{K}{V_E} S \left(\frac{\mathrm{d}y_h(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y_{\text{ROV}}(t)}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{K}{V_E} C_{qR} \left(\Delta p_G(t) - \Delta p_E(t) \right) \quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta p_G(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{r P_{G0} C_{qR}}{V_{G0}} \left(\Delta p_E(t) - \Delta p_G(t) \right) \quad (2)$$

À l'équilibre, le principe fondamental de la statique se traduit par $-Mg + S(P_{E0} - P_{\text{atm}}) = 0$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ se traduit par $S\Delta p_E(t) = M\ddot{y}_{\text{ROV}}(t) + c(\dot{y}_{\text{ROV}}(t) - \dot{y}_h(t))$ (3).

L'hypothèse du fluide incompressible se traduit par $\dfrac{\mathrm{d}\Delta p_E(t)}{\mathrm{d}t} = 0$.

Question 3 Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme : $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p))$ (4). *Exprimer K_1 et τ_1 en fonction de A, V_{G0}, r, C_{qR} et P_{G0}.*

Question 4 Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

$H(p) = \dfrac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \dfrac{1+\tau p}{1+\dfrac{2\zeta}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$. Exprimer ω_0, ζ et τ en fonction des constantes définies précédemment.

On utilisera dans toute la suite la relation $\tau\omega_0 = 2\zeta$.

Question 5 Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC, $H(p) = \dfrac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$, en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

Question 6 Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC}, $G(p) = \dfrac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$ en fonction de $H(p)$ et $B(p)$. Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de $G(p)$.

Des réglages pour différentes valeurs de pulsation de la houle ω_c et de gain maximal acceptable du compensateur ont été effectués.

La figure 1.14 donne les diagrammes du gain de la fonction $G(p)$ de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC} pour quatre réglages. Les volumes du gaz V_{G0} correspondant à chaque réglage sont donnés dans le tableau ci-après.

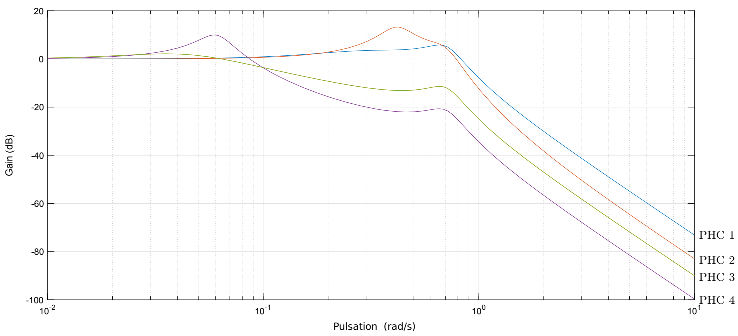


Figure 1.14 – Courbes de gain $G(p)$ pour différents réglages du PHC

Réglage	PHC 1	PHC 2	PHC 3	PHC 4
V_{G0} (m^3)	96	1	52	2

Table 1.2 – Volumes V_{G0} pour différents réglages du PHC

Pour respecter l'exigence Id 1.1, le gain de la fonction de transfert de l'ensemble doit toujours être inférieur à −14 dB.

Question 7 Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

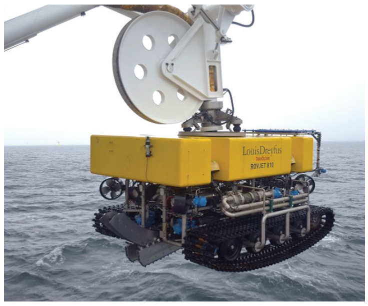
Éléments de correction

1. $G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log\left|\dfrac{Y_S(j\omega)}{Y_{\text{vague}}(j\omega)}\right|$ et $G_{\text{dB}(\omega)} < 20\log\dfrac{1}{5} \approx -14$ dB $\forall\ \omega \in [0,5;1,7]$ rad/s.
2. ...
3. $K_1 = \dfrac{SrP_{G0}}{V_{G0}}$ et $\tau = \dfrac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}$.
4. $\tau = \tau_1 + \dfrac{\beta}{\gamma K_1}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}}$; $\zeta = \dfrac{1}{2}\dfrac{\beta+\gamma K_1\tau_1}{\sqrt{\alpha\gamma K_1}}$.
5. .
6. .
7. PHC4.

TD 3
Bateau support de ROV– Corrigé

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

02 SLCI 09 SLCI 11 SLCI



Introduction

Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

Question 1 Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Correction

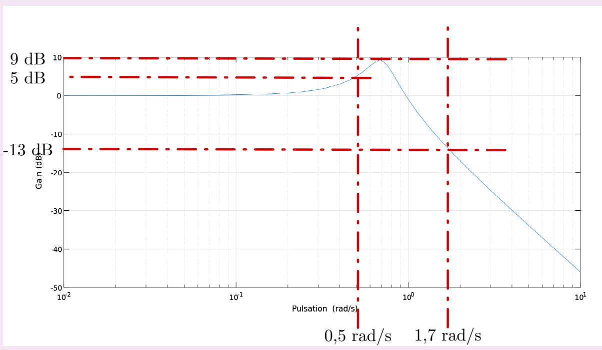
La définition du gain en décibel de la fonction de transfert $B(j\omega)$ est $G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log\left|\dfrac{Y_S(j\omega)}{Y_{\text{vague}}(j\omega)}\right|$. L'exigence Id 1.1 impose une amplitude maximale du ROV de 1 m pour 5 m de houle soit :

$$\boxed{G_{\text{dB}(\omega)} < 20\log\frac{1}{5} \approx -14\text{ dB} \ \ \forall\ \ \omega \in [0,5;1,7]\text{ rad/s.}}$$

Question 2 En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

Correction

On observe un phénomène de résonance, le système amplifie la houle entre 0,5 et 1 rad/s et l'atténue à une valeur maximale de 13-14 dB pour 1,7 rad/s. Le système ne répond donc pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.



Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Question 3 Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme : $\Delta P_E(p) = K_1(1+\tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{ROV}(p))$ (4). *Exprimer K_1 et τ_1 en fonction de A, V_{G0}, r, C_{qR} et P_{G0}.*

Correction

On écrit les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace en tenant compte de l'hypothèse de fluide incompressible :

$$\begin{aligned} Sp\left(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)\right) + C_{qR}\left(\Delta P_G(p) - \Delta P_E(p)\right) &= 0, & (1.1)\\ \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}\left(\Delta P_E(p) - \Delta P_G(p)\right) &= p\Delta P_G(t). & (1.2)\end{aligned}$$

L'équation (2) donne :

$$\begin{aligned} \Delta P_G(t)\left(p + \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}\right) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}\Delta P_E(p),\\ \Delta P_G(t) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}\Delta P_E(p).\end{aligned}$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$Sp\left(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)\right) + C_{qR}\left(\frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}\Delta P_E(p) - \Delta P_E(p)\right) = 0,$$

$$Sp\left(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)\right) = C_{qR}\left(1 - \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}\right)\Delta P_E(p),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{Sp}{C_{qR}}\frac{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0}}\left(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)\right),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{S}{C_{qR}}\frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}\left(\frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}p + 1\right)\left(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)\right).$$

Enfin, on obtient :

$$\Delta P_E(p) = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}}\left(\frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}p + 1\right)\left(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)\right).$$

Par identification :

$$\boxed{K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \text{ et } \tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}.}$$

Question 4 Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \dfrac{1+\tau p}{1+\dfrac{2\zeta}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$. Exprimer ω_0, ζ et τ en fonction des constantes définies précédemment.

Correction

La transformée de Laplace de (3) est :

$$\alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p\left(Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)\right) = \gamma \Delta P_E(p).$$

En utilisant (4), on obtient :

$$\begin{aligned}
\alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p\left(Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)\right) &= \gamma K_1\left(\tau_1 p + 1\right)\left(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)\right), \\
\left(\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1\left(\tau_1 p + 1\right)\right) Y_{\text{ROV}}(p) &= \left(\gamma K_1\left(\tau_1 p + 1\right) + \beta p\right) Y_h(p).
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
H(p) &= \frac{\gamma K_1\left(\tau_1 p + 1\right) + \beta p}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1\left(\tau_1 p + 1\right)}, \\
H(p) &= \frac{\gamma K_1 + (\gamma K_1 \tau_1 + \beta) p}{\alpha p^2 + (\beta + \gamma K_1 \tau_1) p + K_1 \gamma}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{H(p) = \frac{1 + \dfrac{\gamma K_1 \tau_1 + \beta}{K_1 \gamma} p}{1 + \dfrac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{K_1 \gamma} p + \dfrac{\alpha}{K_1 \gamma} p^2}}.$$

Par identification, on obtient :

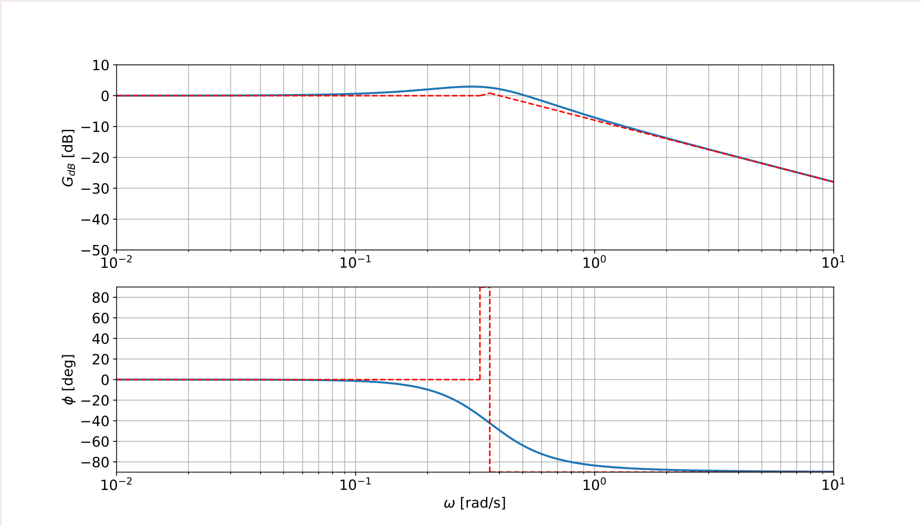
$$\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1} \;;\; \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}} \;;\; \zeta = \frac{1}{2}\frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}.$$

Question 5 Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC, $H(p) = \dfrac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$, en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

Correction

Diagrammes de Bode de $H(p)$. On identifie 2 pulsations caractéristiques : $\omega_1 = 1/\tau \approx 0,33$ rad/s et $\omega_n = 0,364$ rad/s. On verra apparaître un phénomène de résonance à la pulsation $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$ car $\zeta = 0,55 < \sqrt{2}/2$. La résonance sera toutefois faible.

ω	BF $\omega \ll \omega_1$	MF $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_n$	HF $\omega_n \ll \omega$
$H(j\omega)$	1	$\tau j\omega$	$\dfrac{\tau\omega_n^2}{j\omega}$
G_{dB}	0	$20\log\tau + 20\log\omega$	$20\log(\tau\omega_n^2) - 20\log\omega$
ϕ	0	90°	−90°

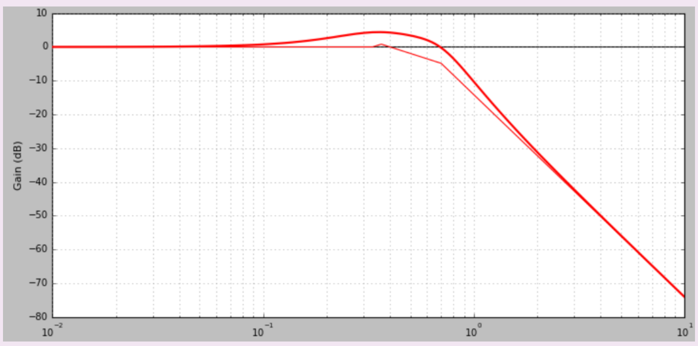


La valeur du gain maxi est de +3 dB (due au premier ordre au numérateur, l'influence du dénominateur est négligeable car la résonance est faible).

Question 6 Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC}, $G(p) = \dfrac{Y_{\mathrm{ROV}}(p)}{Y_{\mathrm{vague}}(p)}$ en fonction de $H(p)$ et $B(p)$. Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de $G(p)$.

Correction

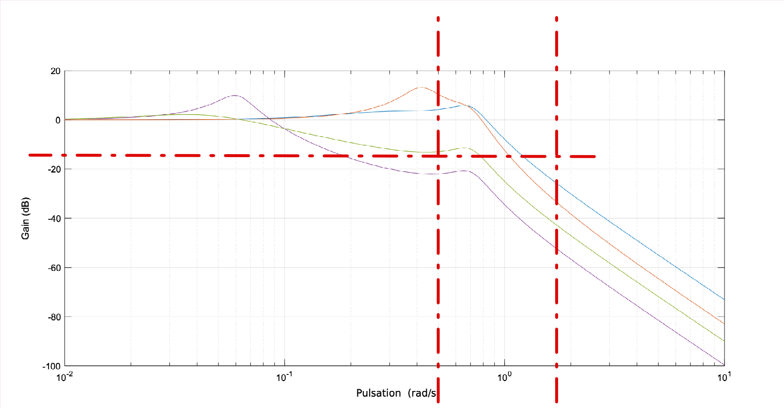
On a la relation $G(p) = B(p)G(p)$.



Question 7 Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

Correction

Le réglage de PHC 4 est celui qui respecte le mieux l'exigence Id1.1.



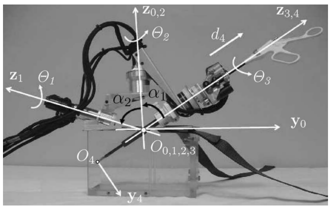
TD 4
Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique– Sujet

Mines Ponts 2016.

B2-04

Présentation générale

L'objet de cette étude est un robot appelé MC^{2}E utilisé en chirurgie endoscopique. Ce type de robots médico-chirurgicaux est équipé de capteurs (caméra, capteur d'efforts. . .) permettant de maîtriser les interactions avec des environnements souvent déformables et difficilement modélisables comme le corps humain.



La figure 1.15 décrit les exigences auxquelles est soumis l'asservissement du MC^{2}E.

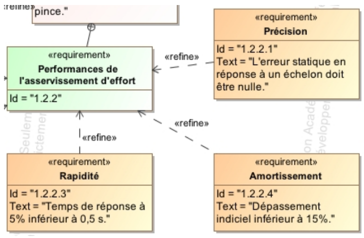


Figure 1.15 – Performances de l'asservissement.

Validation des performances de l'asservissement d'effort

Modèle de connaissance de l'asservissement

Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J\dfrac{\mathrm{d}^2\theta_m(t)}{\mathrm{d}t^2} = C_m(t) - C_e(t)$.

On note :

- J, inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur ;
- $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera $\theta_m(p)$, $\Omega_m(p)$, $C_m(p)$ et $C_e(p)$ les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$ où $K_{C\theta}$ est une constante positive. On a de plus $\dfrac{\mathrm{d}\theta_m(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_m(t)$. La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :

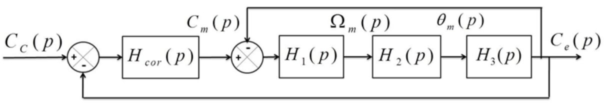


Figure 1.16 – Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$, couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC^{2}E ;
- $C_c(p)$, couple de consigne ;
- $C_m(p)$, couple moteur ;
- $H_{\text{cor}}(p)$, fonction de transfert du correcteur.

Dans un premier temps, on prendra $H_{\text{cor}}(p) = 1$.

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B. On s'intéresse ici à la définition analytique de B. Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

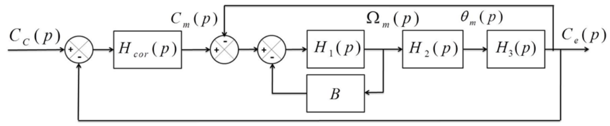


Figure 1.17 – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle B de telle façon que, pour $H_{\text{cor}}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{\text{BO}}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{\text{BO}}(p) = \dfrac{1}{(1+\tau p)^2}$.

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B, en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ.

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i. Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 1.20.

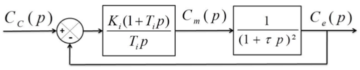


Figure 1.18 – Régulation avec correcteur PI.

Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

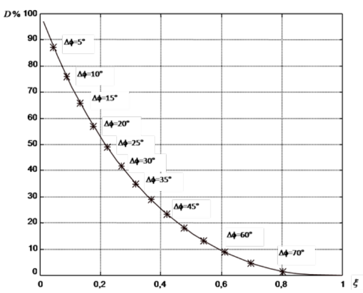
On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : $\dfrac{K_{\text{BF}}}{1+\dfrac{2\xi_{\text{BF}}}{\omega_{0\text{BF}}}p+\dfrac{p^2}{\omega_{0\text{BF}}^2}}$.

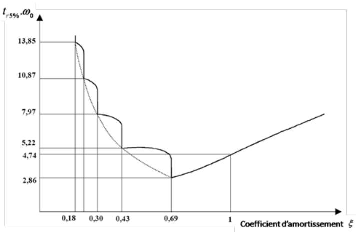
Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i.

Question 7 À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

On donne $K_i = 1$.

Question 8 Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{c0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.





Diagrammes de Bode

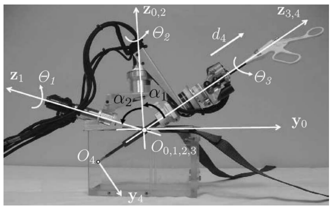
On prend $K_i = 0,4$, $T_i = 0,01$ s et $\tau = 0,5$ s.

Question 9 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(p) = \dfrac{K_i\,(1+T_ip)}{T_ip\,(1+\tau p)^2}$.

TD 4
Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique– Corrigé

Mines Ponts 2016.

B2-04



Présentation générale

Validation des performances de l'asservissement d'effort

Modèle de connaissance de l'asservissement

Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Correction

$H_1(p) = \dfrac{1}{Jp}$, $H_2(p) = \dfrac{1}{p}$ et $H_3(p) = K_{C\theta}$.

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Correction

Calculons $F(p) = \dfrac{C_e(p)}{C_m(p)} = \dfrac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \dfrac{K_{C\theta}\dfrac{1}{Jp}\dfrac{1}{p}}{1+K_{C\theta}\dfrac{1}{Jp}\dfrac{1}{p}} = \dfrac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}$.

Par suite $H_{\text{BF}}(p) = \dfrac{F(p)H_{\text{cor}}(p)}{1+F(p)H_{\text{cor}}(p)}$ soit $H_{\text{BF}}(p) = \dfrac{\dfrac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}}{1+\dfrac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}} = \dfrac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}+K_{C\theta}}$

$= \dfrac{1/2}{\dfrac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$.

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Correction

Le coefficient d'amortissement étant nul, il s'agit d'un oscillateur harmonique d'amplitude $C_0/2$. Le système vibre ce qui est incompatible avec le mouvement d'un robot chirurgical.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B. On s'intéresse ici à la définition analytique de B. Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

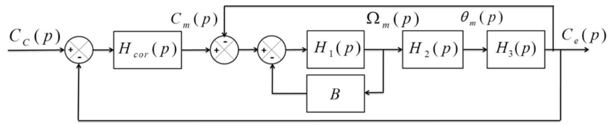


Figure 1.19 – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle B de telle façon que, pour $H_{\text{cor}}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{\text{BO}}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{\text{BO}}(p) = \dfrac{1}{(1+\tau p)^2}$.

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B, en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ.

Correction

D'une part, $F_1(p) = \dfrac{\dfrac{1}{Jp}}{1+\dfrac{B}{Jp}} = \dfrac{1}{Jp+B}$. Par suite $\text{FTBO}(p) = \dfrac{F_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+F_1(p)H_2(p)H_3(p)}$

$$= \frac{\dfrac{1}{Jp+B}\dfrac{K_{C\theta}}{p}}{1+\dfrac{1}{Jp+B}\dfrac{K_{C\theta}}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{p\left(Jp+B\right)+K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+Bp+K_{C\theta}} = \frac{1}{\dfrac{J}{K_{C\theta}}p^2+\dfrac{B}{K_{C\theta}}p+1}.$$

Par ailleurs, $H_{\text{BO}}(p) = \dfrac{1}{(1+\tau p)^2} = \dfrac{1}{1+2\tau p+\tau^2p^2}$.

On a donc $\dfrac{B}{K_{C\theta}} = 2\tau \Rightarrow \dfrac{B}{2K_{C\theta}} = \tau$. D'autre part, $\tau^2 = \dfrac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \dfrac{B}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\dfrac{J}{K_{C\theta}}}$.

Au final, $B = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ et $\tau = \dfrac{B}{2K_{C\theta}} = \dfrac{2\sqrt{JK_{C\theta}}}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\dfrac{J}{K_{C\theta}}}$.

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i. Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 1.20.

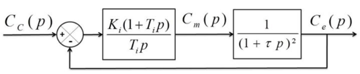


Figure 1.20 – Régulation avec correcteur PI.

Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Correction

- Méthode 1 : la FTBO est de classe 1. L'écart statique est donc nul.
- Méthode 2 (à savoir faire absolument, mais à éviter car trop long).

On a $\varepsilon(p) = \dfrac{C_c(p)}{1+\text{FTBO}(p)} = \dfrac{C_0}{p}\dfrac{1}{1+\dfrac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p^2)}} = C_0\dfrac{1}{p+\dfrac{K_i(1+T_ip)}{T_i(1+\tau p)^2}}$.

Par suite, $\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = 0$.

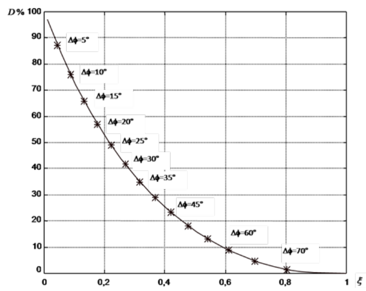
On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : $\dfrac{K_{\text{BF}}}{1+\dfrac{2\xi_{\text{BF}}}{\omega_{0\text{BF}}}p+\dfrac{p^2}{\omega_{0\text{BF}}^2}}$.

Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i.

Correction

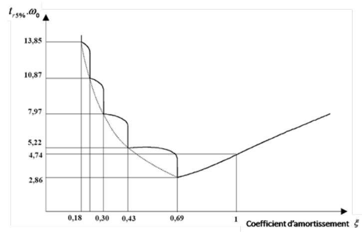
Pour que la FTBF soit d'ordre 2, la FTBO doit être d'ordre 2.
En choisissant $T_i = \tau$ (compensation du pôle double du système), on a alors $\text{FTBO}(p) = \dfrac{K_i(1+\tau p)}{\tau p(1+\tau p)^2} = \dfrac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}$.

On a alors $\text{FTBF}(p) = \dfrac{\dfrac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}}{1+\dfrac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}} = \dfrac{K_i}{\tau p(1+\tau p)+K_i}$.



Question 7 À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

On donne $K_i = 1$.



Question 8 Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{c0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Correction

Diagrammes de Bode

On prend $K_i = 0,4$, $T_i = 0{,}01\,\text{s}$ et $\tau = 0{,}5\,\text{s}$.

Question 9 Tracer le diagrame de Bode de la fonction de transfert $G(p) = \dfrac{K_i\left(1+T_i p\right)}{T_i p\left(1+\tau p\right)^2}$.

Question 2.

D'après l'équation de mouvement, $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) - C_e(p)$. On a donc $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$. 2

On a $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$; donc $H_2(p) = \frac{1}{p}$. 2

Enfin, $C_e(p) = K_{C\theta}\theta_m(p)$ et donc $H_3(p) = K_{C\theta}$. 1

Question 3.

On a dans un premier temps $\frac{C_e(p)}{C_m(p)} = F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp}\frac{1}{p}K_{C\theta}}{1+\frac{1}{Jp}\frac{1}{p}K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}$.

Dans un second temps, $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)}{1+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)} = \frac{K_{C\theta}H_{cor}(p)}{Jp^2+K_{C\theta}+K_{C\theta}H_{cor}(p)}$.

Avec $H_{cor}(p) = 1$: $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+2K_{C\theta}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$. 5

Question 4.

On peut mettre la fonction précédente sous forme canonique. On a : $H_{BF}(p) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{Jp^2}{2K_{C\theta}}+1}$. Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. On a alors un oscillateur harmonique et la réponse du système à un échelon d'amplitude C_0 est une sinusoïde (d'amplitude C_0 et de moyenne $\frac{C_0}{2}$). 3

Un mouvement sinusoïdal est surement incompatible avec l'asservissement d'un axe sur un robot chirurgical. 2

Question 5.

On a $H_{BO}(p) = \frac{H_{cor}(p)\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B}H_2(p)H_3(p)}{1+\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B}H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+pB+K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{Jp^2}{K_{C\theta}}+\frac{pB}{K_{C\theta}}+1}$.

Par ailleurs, $(1+\tau p)^2 = 1+\tau^2p^2+2\tau p$. 3 2

En identifiant, $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}}$ et $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}}$. On a donc $B = 2\tau K_{C\theta} = 2K_{C\theta}\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ et $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$.

Question 6.

On a : $\varepsilon(p) = \frac{C_c(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{C_0}{p}\cdot\frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2}}$. En conséquences, $\varepsilon_S = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{C_0}{p}\cdot\frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2}} = \lim_{p\to 0} C_0\cdot\frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2}} = 0\ \mathrm{Nm}$. 3 L'exigence 1.2.2.1 est vérifiée. 2

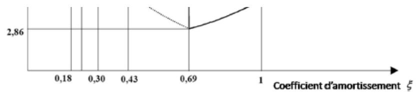
Question 7.

On a $\frac{\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2}}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2}} = \frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2+K_i(1+T_ip)}$. Avec $T_i = \tau$, on a $\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)+K_i}$. 5 La FTBF est bien d'ordre 2.

Pour avoir $D\% \leq 15\%$ il faut $\xi \geq 0{,}5$

Cependant, on trouve sur ce diagramme qu'il faut avoir $\xi \geq 0{,}8$ pour avoir une marge de phase de 70°.

Si on souhaite obtenir le temps de réponse à 5% le plus rapide, comme $\xi \geq 0{,}8 > 0{,}7$, il faut prendre ξ le plus faible possible. Cela impose $\boxed{\xi = 0{,}8}$ et comme $\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_i}}$ on a alors $K_i = \frac{1}{4\xi^2} = 0{,}4$.

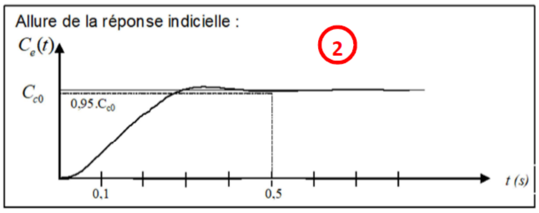


Pour $\xi = 0{,}8$, la lecture de l'abaque donne donc $t_{R5\%}.\omega_0 \geq 3{,}5$ et avec $t_{R5\%} \leq 0{,}5s$ on a $\boxed{\omega_0 \geq 7 rad/s}$

Question 9.

Critère	Valeur
Dépassement	2% 1
Tr5%	<0,5 s 1
Erreur statique en réponse à un échelon	0 1

Allure de la réponse indicielle : 2



TD 5
Gyropode à usage professionnel HUBLEX– Sujet

Concours CCINP – MP 2020.

B2-04

C2-03

Présentation

Le système étudié dans ce sujet, appelé Hublex, est un gyropode professionnel destiné à faciliter le déplacement des collaborateurs au sein d'entreprises, administrations, hôpitaux... lorsque ces lieux sont de grandes tailles.

Étude de l'asservissement en intensité des moteurs

Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en intensité du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence « 1.7.1.1 » et ses sous-exigences.

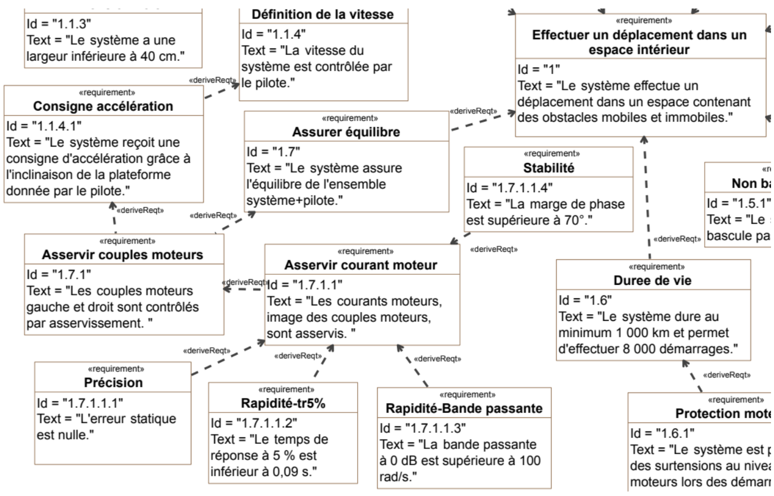


FIGURE 1.21 – Diagramme des exigences

Modélisation du moteur

Le moteur brushless associé à son électronique de commande peut se modéliser par les équations d'une machine à courant continu.

On notera J_{eq} l'inertie équivalente des masses mobiles mises en jeu ramenée sur l'arbre moteur. On modélisera les différents frottements par un frottement visqueux générant un couple résistant, rapporté à l'arbre moteur, proportionnel à la vitesse de rotation de l'arbre moteur et de coefficient f ($f > 0$). On rappelle les équations caractéristiques associées :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$;
- $e(t) = K_e\omega_m(t)$;
- $C_m(t) = K_e i(t)$;
- $J_{\text{eq}}\dfrac{\mathrm{d}\omega_m(t)}{\mathrm{d}t} = C_m(t) - f\omega_m(t)$.

Question 1 Donner, dans le domaine de Laplace, les 4 équations caractéristiques associées au modèle de machines à courant continu.

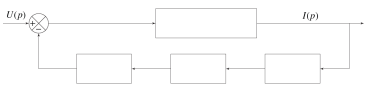


Figure 1.22 – Schéma-blocs

Question 2 Compléter alors le schéma-blocs du moteur dans figure 1.22. On précisera la grandeur associée à chaque lien.

Question 3 Donner l'expression de la fonction de transfert $H_m(p) = \dfrac{I(p)}{U(p)}$. Mettre cette fonction de transfert sous la forme $H_m(p) = K_m\dfrac{1+\tau_m p}{1 + \dfrac{2z_m}{\omega_{0m}}p + \dfrac{1}{\omega_{0m}^2}p^2}$.

Asservissement du moteur en intensité

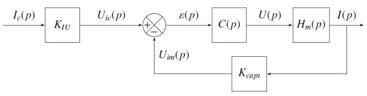


Figure 1.23 – Schéma-blocs

L'architecture retenue pour contrôler le couple moteur est un asservissement en intensité, image du couple moteur (voir équation précédente). Le schéma-blocs est représenté figure 1.23. Un convertisseur IU fournit au calculateur une tension $u_{\text{ic}}(t)$ image de l'intensité de consigne $i_c(t)$, proportionnelle à cette dernière de coefficient K_{iu}. De même, l'intensité réelle $i(t)$, mesurée par un capteur d'intensité de coefficient K_{capt}, a pour image $u_{\text{im}}(t)$. L'écart, noté $\varepsilon(t) = u_{\text{ic}}(t) - u_{\text{im}}(t)$, est traité par le correcteur de fonction de transfert $C(p)$, qui impose la tension $u(t)$ aux bornes du moteur.

On donne la fonction de transfert du moteur : $H_m(p) = K_m\dfrac{1+\tau_m p}{1 + \dfrac{2z_m}{\omega_{0m}}p + \dfrac{1}{\omega_{0m}^2}p^2}$.

Question 4 Préciser, en justifiant, quelle valeur donner à K_{iu}, caractéristique du convertisseur IU.

On prend, dans un premier temps, un correcteur purement proportionnel : $C(p) = K_p$.

On en déduit la fonction de transfert $H_I(p) = \dfrac{I(p)}{I_c(p)}$:

$$H_I(p) = \frac{K'}{1+K'}\frac{1+\tau_m p}{1 + \dfrac{\dfrac{2z_m}{\omega_{0m}} + K'\tau_m}{1+K'}p + \dfrac{1}{\omega_{0m}^2(1+K')}p^2}, \text{ avec } K' = K_{\text{iu}}K_p K_m.$$

Question 5 Calculer l'expression littérale de l'erreur en régime permanent notée μ_s, pour une entrée indicielle (i.e. $I_c(p)$ est un échelon unitaire), en fonction de K_{iu}, K_{p} et K_m.

Question 6 Conclure, lorsque cela est possible, quant au respect des sous exigences de l'exigence « 1.7.1.1.1 » avec ce type de correcteur.

Dans un deuxième temps, il est décidé d'utiliser un correcteur de type proportionnel intégral. Sa fonction de transfert est notée : $C(p) = K_p + \dfrac{K_i}{p}$.

Question 7 Tracer les diagrammes de Bode asymptotique du correcteur ainsi que l'allure des courbes réelles pour $K_p = 10$ et $K_i = 1000$. On précisera les valeurs numériques associées aux valeurs caractéristiques.

Une fois le correcteur réglé, on obtient les diagrammes de Bode en boucle ouverte (figure 1.24) et les réponses temporelles (figure 1.25), pour un échelon d'intensité $i_c(t)$ de 2 A.

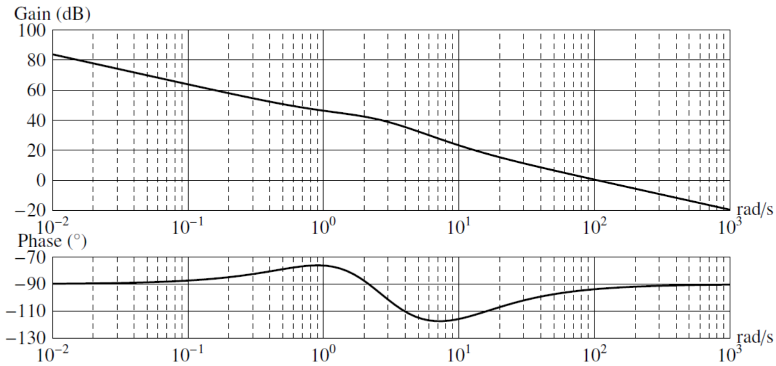


Figure 1.24 – Diagrammes de Bode en boucle ouverte avec réglage du correcteur PI effectué

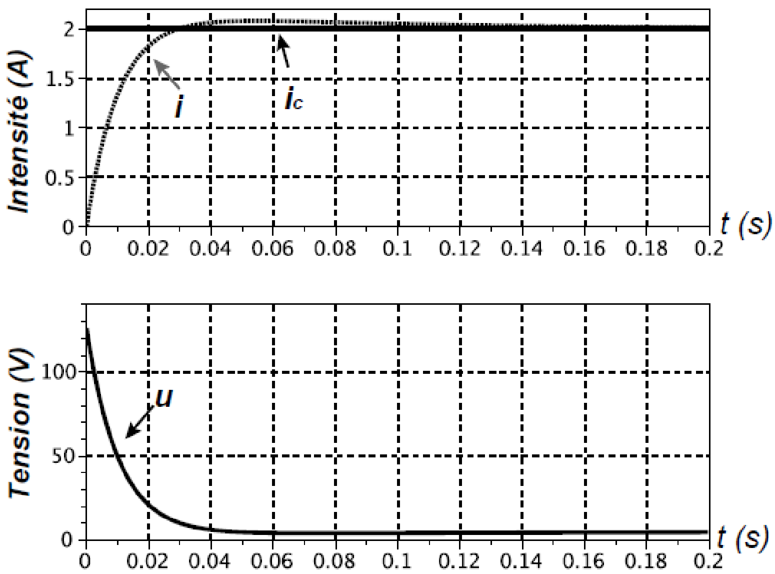


Figure 1.25 – Réponses temporelles avec réglage du correcteur PI effectué

Question 8 Commenter le résultat obtenu vis-à-vis de l'exigence « 1.7.1.1.4 ». Expliquer pourquoi cet asservissement n'est pas directement implanté en l'état dans le système (on pourra s'intéresser à la réponse en tension du du système).

Le correcteur reste inchangé. Afin de palier au problème identifié précédemment, on apporte une dernière évolution au sein du calculateur. Cela permet de respecter les exigences de l'asservissement. figure 1.26 présente les réponses temporelles du système pour un échelon d'intensité $i_c(t)$ de 2 A.

Question 9 Préciser quelle ultime modification a apporté le constructeur afin de respecter les exigences de l'asservissement.

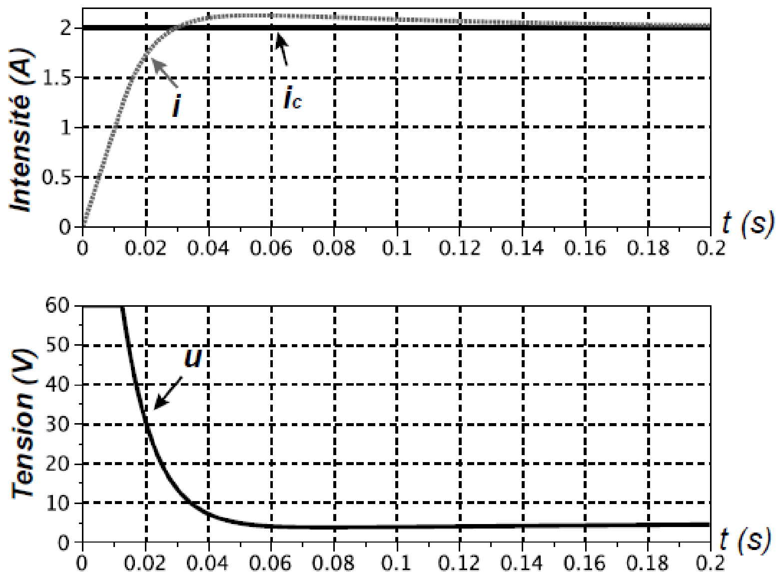


Figure 1.26 – Réponses temporelles du système finalement implanté

Éléments de correction

1. $U(p) = E(p)+RI(p)+LpI(p)$, $E(p) = K_e\Omega_m(p)$, $C_m(p) = K_e I(p)$, $J_{\text{eq}}p\Omega_m(p) = C_m(p) - f\Omega_m(p)$.
2. .
3. $K_m = \dfrac{f}{Rf+K_e^2}$, $\tau_m = \dfrac{J}{f}$, $\omega_{0m} = \sqrt{\dfrac{Rf+K_e^2}{LJ}}$ $z_m = \dfrac{Lf+RJ}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf+K_e^2}}$.
4. $K_{\text{capt}} = K_{\text{IU}}$.
5. $\varepsilon_s = \dfrac{1}{1+K_m K_P K_{\text{Capt}}}$.
6. .
7. .
8. Saturation.

TD 5
Gyropode à usage professionnel HUBLEX– Corrigé

Concours CCINP – MP 2020.

B2-04

C2-03

Présentation

Étude de l'asservissement en intensité des moteurs

Modélisation du moteur

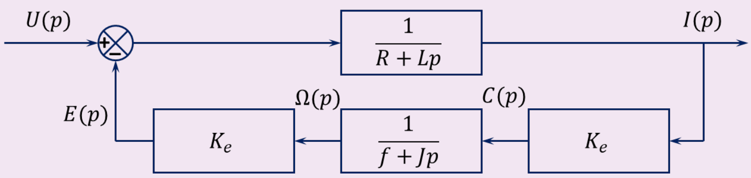
Question 1 Donner, dans le domaine de Laplace, les 4 équations caractéristiques associées au modèle de machines à courant continu.

Correction

- $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p)$;
- $E(p) = K_e \Omega_m(p)$;
- $C_m(p) = K_e I(p)$;
- $J_{\text{eq}} p \Omega_m(p) = C_m(p) - f\Omega_m(p)$.

Question 2 Compléter alors le schéma-blocs du moteur dans figure 1.22. On précisera la grandeur associée à chaque lien.

Correction



Question 3 Donner l'expression de la fonction de transfert $H_m(p) = \dfrac{I(p)}{U(p)}$. Mettre cette fonction de transfert sous la forme $H_m(p) = K_m \dfrac{1+\tau_m p}{1 + \dfrac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \dfrac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$.

Correction

En utilisant la formule de Black, on a $H_m(p) = \dfrac{I(p)}{U(p)} = \dfrac{\dfrac{1}{R+Lp}}{1 + K_e^2 \dfrac{1}{R+Lp}\dfrac{1}{f+Jp}} =$

$$\frac{1}{(R+Lp)+K_e^2\frac{1}{f+Jp}}=\frac{f+Jp}{(R+Lp)(f+Jp)+K_e^2}$$

$$=\frac{f+Jp}{Rf+(Lf+RJ)p+LJp^2+K_e^2}=\frac{f}{Rf+K_e^2}\frac{1+\frac{J}{f}p}{(Lf+RJ)\frac{p}{Rf+K_e^2}+\frac{LJp^2}{Rf+K_e^2}+1}.$$

On a donc $K_m=\frac{f}{Rf+K_e^2}$, $\tau_m=\frac{J}{f}$, $\frac{1}{\omega_{0m}^2}=\frac{LJ}{Rf+K_e^2}\Rightarrow\omega_{0m}=\sqrt{\frac{Rf+K_e^2}{LJ}}$ et $\frac{2z_m}{\omega_{0m}}=\frac{Lf+RJ}{Rf+K_e^2}\Rightarrow z_m=\frac{\omega_{0m}}{2}\frac{Lf+RJ}{Rf+K_e^2}\Rightarrow z_m=\frac{Lf+RJ}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf+K_e^2}}$.

Asservissement du moteur en intensité

Question 4 Préciser, en justifiant, quelle valeur donner à K_{iu}, caractéristique du convertisseur IU.

Correction

Pour avoir $\varepsilon=0$ lorsque $I_c(p)=I(p)$, il faut nécessairement $K_{\text{capt}}=K_{\text{IU}}$.

Question 5 Calculer l'expression littérale de l'erreur en régime permanent notée μ_s, pour une entrée indicielle (i.e. $I_c(p)$ est un échelon unitaire), en fonction de K_{iu}, K_{p} et K_m.

Correction

$K_{\text{capt}}=K_{\text{IU}}$, il est donc possible de positionner K_{capt} en amont de la chaîne directe, de supprimer K_{IU} et de se ramener à un schéma-blocs à retour unitaire.

On a alors $\text{FTBO}(p)=K_{\text{Capt}}C(p)H_m(p)$ et $\varepsilon(p)=\frac{I_c(p)}{1+\text{FTBO}(p)}$.

On a alors $\varepsilon_s=\lim\limits_{p\to 0}p\times\frac{1}{p}\frac{1}{1+\text{FTBO}(p)}=\lim\limits_{p\to 0}\frac{1}{1+\text{FTBO}(p)}=\frac{1}{1+K_mK_PK_{\text{Capt}}}$.

Question 6 Conclure, lorsque cela est possible, quant au respect des sous exigences de l'exigence « 1.7.1.1.1 » avec ce type de correcteur.

Correction

Avec ce correcteur, l'exigence de précision nulle ne pourra pas être satisfaite.

Question 7 Tracer les diagrammes de Bode asymptotique du correcteur ainsi que l'allure des courbes réelles pour $K_p=10$ et $K_i=1000$. On précisera les valeurs numériques associées aux valeurs caractéristiques.

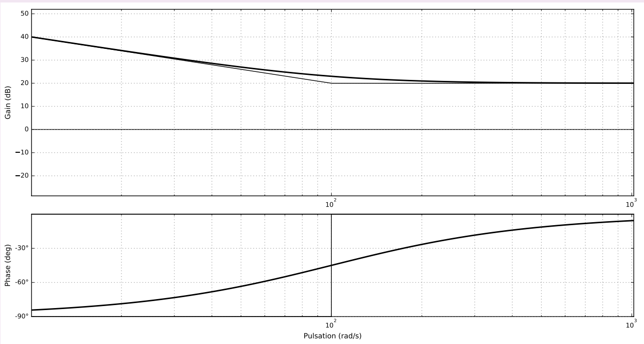
Correction

$C(p)=K_p+\frac{K_i}{p}=\frac{K_pp+K_i}{p}=K_i\frac{\frac{K_p}{K_i}p+1}{p}=\frac{1000}{p}\left(\frac{1}{100}p+1\right)$.

On peut donc dresser le tableau de variation asymptotique.

	$\omega \to 0$	$\omega_1 = 100\text{rad/s}$	$\omega \to \infty$
$H_1(p) = \frac{\mathrm{K_i}}{p} = \frac{1000}{p}$	-20 dB/décade $-90°$		-20 dB/décade $-90°$
$H_2(p) = 1 + \frac{\mathrm{p}}{100}$	0 dB/décade $0°$		20 dB/décade $90°$
$C(p)$	-20 dB/décade $-90°$		0 dB/décade $0°$

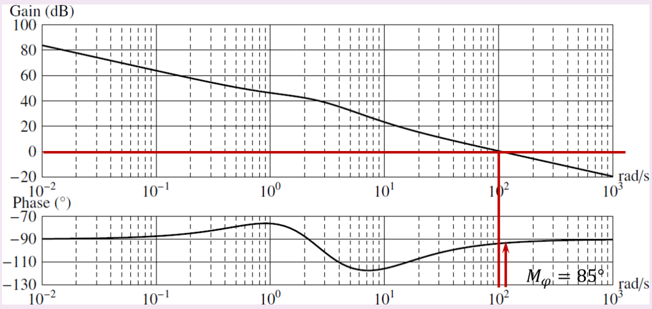
L'asymptote du gain décibel de « $H_1(p)$ » coupe l'axe des abscisses en 1000.



Question 8 Commenter le résultat obtenu vis-à-vis de l'exigence « 1.7.1.1.4 ». Expliquer pourquoi cet asservissement n'est pas directement implanté en l'état dans le système (on pourra s'intéresser à la réponse en tension du du système).

Correction

La marge de phase est respectée. Cependant la tension atteinte demandée par la commande (120 V) est peut être trop élevée pour le moteur.



Le correcteur reste inchangé. Afin de palier au problème identifié précédemment, on apporte une dernière évolution au sein du calculateur. Cela permet de respecter les exigences de l'asservissement. figure 1.26 présente les réponses temporelles du système pour un échelon d'intensité $i_c(t)$ de 2 A.

Question 9 Préciser quelle ultime modification a apporté le constructeur afin de respecter les exigences de l'asservissement.

Correction

Le constructeur a ajouté une saturation de ±60 V.