

2 Rappels sur la détermination des performances des systèmes asservis

2.1 Stabilité des systèmes asservis

2.1.1 Notion de stabilité

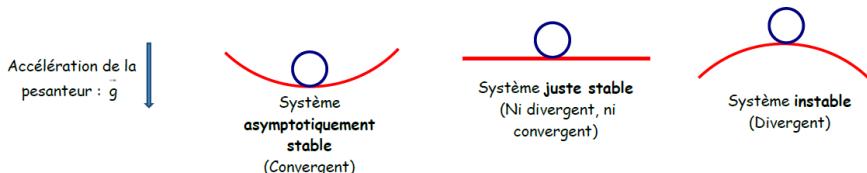
Représentation graphique [1]

Un état d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre par une cause extérieure, finit par retrouver ce même état d'équilibre après disparition de la cause. Illustrons cette définition de façon très intuitive à travers l'exemple suivant : une boule soumise à l'accélération de la pesanteur se déplaçant (avec un peu de dissipation énergétique) sur une surface donnée.

C1-01

C2-03

Frédéric Mazet, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville Toulon.
Florestan Mathurin, Stabilité des SLCI
Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.



Premières définitions

Définition – Définition intuitive

Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :

- ▶ abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre;
- ▶ son régime transitoire finit par disparaître;
- ▶ sa sortie finit par ressembler à l'entrée;
- ▶ sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

Remarque

La stabilité d'un système est indépendante de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionnelle (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...

Pour simplifier les calculs, une première approche pourra être d'utiliser la réponse impulsionale.

Définition –

En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionale tend vers zéro au cours du temps.

Étude des pôles de la fonction de transfert

Dans le cas général la fonction de transfert d'un système peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } n \geq m.$$

Lors du calcul de la réponse temporelle en utilisant la transformée de Laplace inverse (quelle que soit l'entrée), la nature du régime transitoire ne dépend que des pôles p_i de la fonction de transfert (zéros du dénominateur).

En factorisant le numérateur et le dénominateur de $H(p)$ on peut alors retrouver une fonction de la forme :

$$H(p) = \frac{(p + z_m) \cdot (p + z_{m-1}) \dots}{(p + p_n) \cdot (p + p_{n-1}) \dots} \quad \text{avec } p_i, z_i \in \mathbb{C}.$$

En passant dans le domaine temporel :

Mode : fonction temporelle associée à un pôle.

- les pôles réels (de type $p = -a$) induisent des modes du type e^{-at} ;
- les pôles complexes conjugués (de type $p = -a \pm j\omega$) induisent des modes du type $e^{-at} \sin \omega t$.

On peut ainsi constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.

Ainsi, on peut observer la réponse temporelle des systèmes en fonction du positionnement des pôles dans le plan complexe.

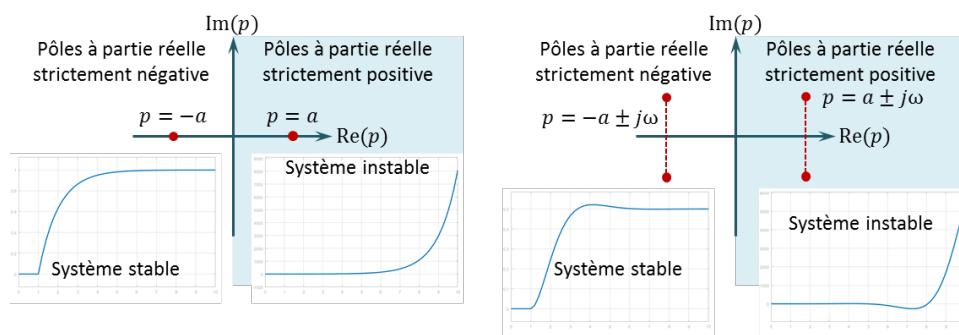


FIGURE 2.1 – Représentation d'un système à pôle simple et à pôles conjugués dans le plan complexe – Réponse indicielle

Position des pôles dans le plan complexe

Par extension on peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicielle associée.

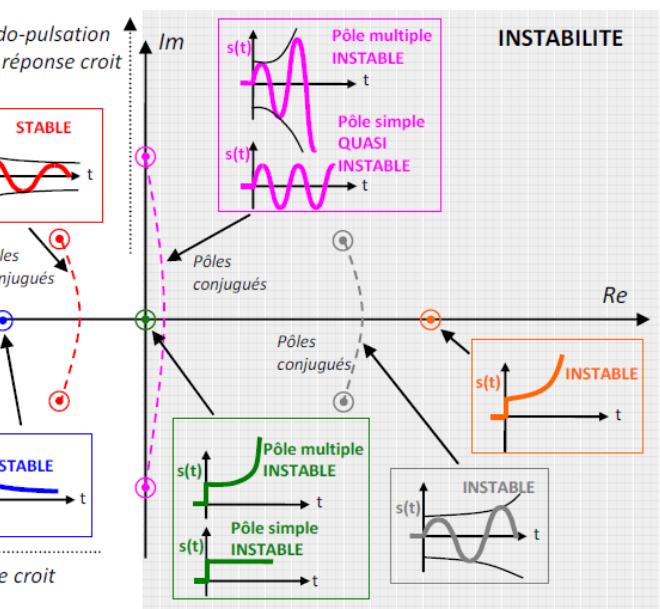


FIGURE 2.2 – Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système [F. Mathurin].

Définition –

À retenir Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (**en boucle fermée**) sont à partie réelle strictement négative.

Remarque

On peut montrer que :

- ▶ **pour les systèmes d'ordre 1 et 2 :** le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe;
- ▶ **pour les systèmes d'ordre 3 :** de la forme $a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3$ les coefficients doivent être strictement de même signe et $a_2a_1 > a_3a_0$.

Pôles dominants [1]

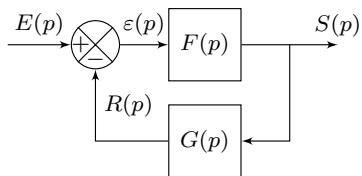
Lors de l'étude d'un système, on se contente en général de ne prendre en compte que les pôles les plus influents. Ces pôles sont appelés les pôles dominants. Pour un système asymptotiquement stable, ce sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires, puisque ce sont eux qui induisent des modes qui disparaissent dans le temps le plus lentement.

Caractéristiques dans le lieu de pôles

Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [1].

2.1.2 Marges de stabilité

Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...



La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par $H_{BO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)G(p)$.

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)G(p)} = \frac{F(p)}{1 + H_{BO}(p)}$.

Définition – Équation caractéristique

Soit $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ une fonction de transfert. On appelle $D(p) = 0$ l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de $D(p)$ correspondent aux pôles de $H(p)$.

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera $1 + H_{BO}(p) = 0$.

Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh

Pour un système d'ordre supérieur à 3 il devient délicat d'obtenir analytiquement (ou numériquement) les racines du polynôme et ainsi conclure sur la stabilité à partir du signe des parties réelles.

Il existe un critère algébrique permettant de vérifier la stabilité d'un système : il s'agit de critère de Routh. Pour un système bouclé, ce critère utilise le dénominateur de la BF. Ce critère n'étant pas au programme, on pourra rechercher dans la littérature des articles s'y référant si nécessaire.

On parle ici de critère graphique car l'interprétation graphique dans le diagramme de Bode est directe.

Critère « graphique » de stabilité : le critère du Revers

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme $1 + H_{BO}(p) = 0$. Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation $H_{BO}(p) = -1$. Ainsi dans le plan complexe, le point $(-1; 0)$ permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain dB nul) et une phase de -180° .

Résultat –

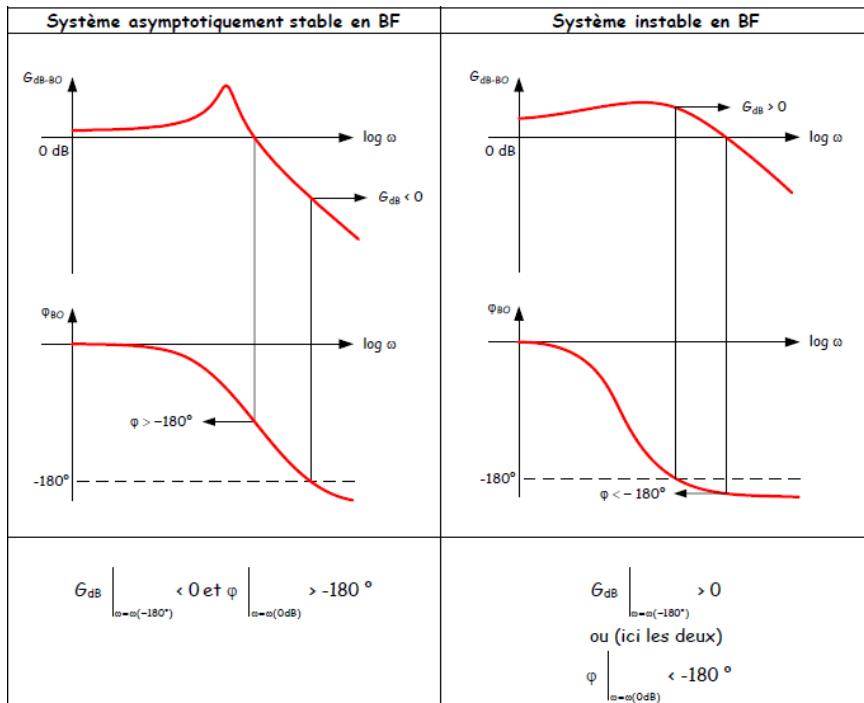
Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a :**

$$G_{dB}|_{\omega=\omega_{-180^\circ}} < 0_{dB} \quad \text{et} \quad \varphi|_{\omega=\omega_{0dB}} > -180^\circ.$$

En notant ω_{-180° la pulsation pour laquelle la phase vaut -180° et ω_{0dB} la pulsation pour laquelle le gain est nul.

Résultat –

Condition (non suffisante ...) de stabilité : les pôles de la FTBO doivent être à partie réelle positive.



Vers le système réel...

Le résultat donné ci-dessus est un résultat théorique dans le sens où le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système réel aura un écart avec le diagramme de Bode du système modélisé.

Résultat – Marges

Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considérera, dans le cas général que le système est stable si :

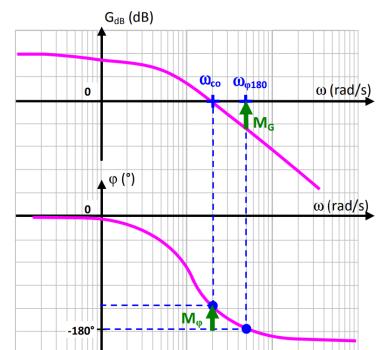
- ▶ la marge de gain est supérieure à 10 dB;
- ▶ la marge de phase est supérieure à 45°.

Définition – Marge de phase

La marge de phase est définie telle que $M_\varphi = 180^\circ + \arg(\text{FTBO}(j\omega_{c0}))$ où ω_{c0} est la pulsation de coupure pour laquelle $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{c0})| = 0 \text{ dB}$.

Définition – Marge de gain

La marge de gain est définie telle que $M_G = -20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})|$ où $\omega_{\varphi180}$ est la pulsation pour laquelle $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})) = -180^\circ$.



La marge de gain permet compte de tenir compte de variations de gain de la boucle ouverte.

De même, la marge de phase permet de tenir compte de variation de phase (retard ou déphasage non modélisés).

La nécessité d'avoir recours à des marges de stabilité apparaît notamment lorsque :

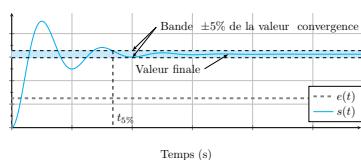
- ▶ la simplification du modèle amène à considérer uniquement les pôles dominant,
- ▶ le modèle ne prend pas en compte la dynamique de certains composants du système;
- ▶ le système n'est pas invariant au cours du temps;
- ▶ on s'éloigne de la zone de fonctionnement linéaire;
- ▶ certaines non linéarités sont ignorées.

2.2 Rapidité des systèmes asservis

Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.

Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Temps de réponse à 5%



Méthode – Détermination du temps de réponse

En pratique, on détermine le temps de réponse à 5%.

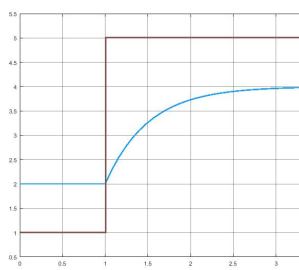
1. Tracer sur le même graphe la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.

Résultat –

Plus le temps de réponse à 5% d'un système est petit, plus le régime transitoire disparaît rapidement.

Exemple – Donner le temps de réponse à 5% de la réponse à un échelon donné dans la figure suivante.

Les pièges du temps de réponse à 5% :



- ▶ le temps de réponse à 5% se mesure à plus ou moins 5% de la sortie (et pas de l'entrée). Ainsi, si le système est stable, le temps de réponse n'est **jamais l'infini**;
- ▶ si le signal ne part pas de 0 (en ordonnée), il faut réaliser la bande à $S_0 + \Delta s \pm 0.05\Delta s$;
- ▶ si le signal ne part pas de 0 (en abscisse), il faut tenir compte du décalage des temps.

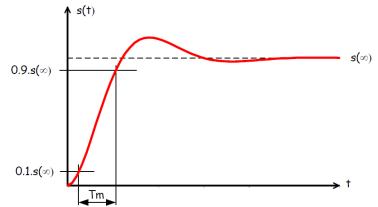
Temps de montée

Pour caractériser la rapidité d'un système, on peut aussi utiliser le temps de montée. Il s'agit du temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur finale. Ce temps de montée caractérise la « vivacité » d'un système.

2.2.2 Rapidité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2

Systèmes d'ordre 1

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5% est donné par 3τ .



Résultat –

Pour un système du premier ordre, plus la constante de temps est petite, plus le système est rapide.

Soit un système du premier ordre bouclé avec un retour unitaire. L'expression de la FTBF est donnée par $\text{FTBF}(p) = \frac{K}{1 + \tau p + K}$. La constante de temps est alors $\tau_{\text{BF}} = \frac{\tau}{1 + K}$.

Résultat –

Pour un système du premier ordre bouclé (avec un retour unitaire), plus le gain statique est grand, plus le système est rapide.

Systèmes d'ordre 2

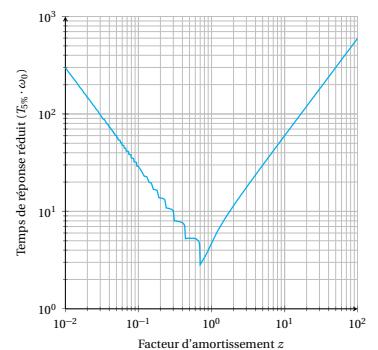
Résultat –

Pour un système du second, à ξ constant, plus la pulsation propre est grande, plus le système est rapide.

Soit un système du deuxième ordre bouclé avec un retour unitaire. En déterminant les caractéristiques de la FTBF, on obtient $K_{\text{BF}} = \frac{K}{1 + K}$, $\omega_{\text{BF}} = \omega_0 \sqrt{1 + K}$, $\xi_{\text{BF}} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K}}$.

Résultat –

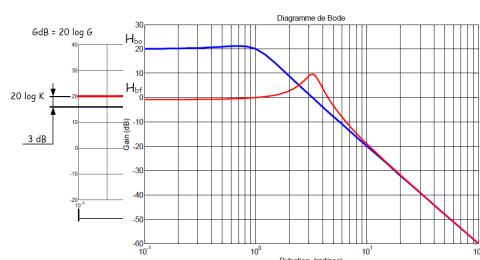
- ▶ L'augmentation du gain de FTBO augmente la pulsation de la FTBF.
- ▶ L'augmentation du gain de FTBO diminue le coefficient d'amortissement. Suivant la valeur de ξ_{BF} le système peut devenir plus ou moins rapide.



2.2.3 Résultats dans le diagramme de Bode

Résultat –

Plus la bande passante d'un système est élevée, plus le système est rapide.



Résultat -

Plus la pulsation de coupure à 0 dB de la boucle ouverte est grande, plus le système asservi est rapide.

2.3 Précision des systèmes asservis

2.3.1 Système non perturbé

Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.

Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

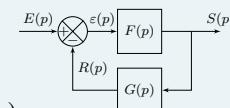
Définition -

La précision est l'écart entre la valeur de consigne et la valeur de la sortie. Pour caractériser la précision d'un système, on s'intéresse généralement à l'écart en régime permanent.

Attention à bien s'assurer que, lors d'une mesure expérimentale par exemple, les grandeurs de consigne et de sortie sont bien de la même unité (et qualifient bien la même grandeur physique).

Pour un système non perturbé dont le schéma-blocs est celui donné ci-contre, on caractérise l'écart en régime permanent par :

$$\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) \iff \varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

**Définition -**

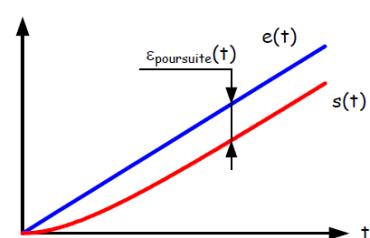
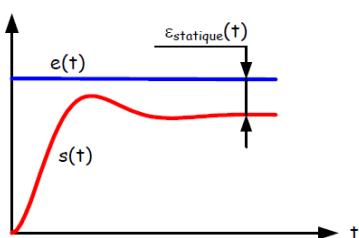
Un système est précis pour une entrée lorsque $\varepsilon_{\text{permanent}} = 0$.

Définition -

~

Le nom de l'écart dépend de l'entrée avec lequel le système est sollicité :

- ▶ écart statique, système sollicité par une entrée échelon : $e(t) = E_0$ et $E(p) = \frac{E_0}{p}$;
- ▶ écart en vitesse ou en poursuite, système sollicité par une rampe : $e(t) = Vt$ et $E(p) = \frac{V}{p^2}$;
- ▶ écart en accélération : système sollicité par une parabole, $e(t) = At^2$ et $E(p) = \frac{A}{p^3}$.



Petit développement ...

Calculons l'écart statique pour le système précédent. On a : $\varepsilon(p) = E(p) - R(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p) \iff \varepsilon(p)(1 + F(p)G(p)) = E(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + F(p)G(p)}$.

Résultat –

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$$

Poursuivons ...

On a $\text{FTBO}(p) = \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^\alpha (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}$ avec $m < n$.

FTBO de classe nulle

- ▶ Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$.
- ▶ Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = +\infty$.
- ▶ Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = +\infty$.

FTBO de classe 1

- ▶ Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$.
- ▶ Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = \frac{V}{K_{BO}}$.
- ▶ Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = +\infty$.

FTBO de classe 2

- ▶ Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$.
- ▶ Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$.

► Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = \frac{A}{K_{BO}}$.

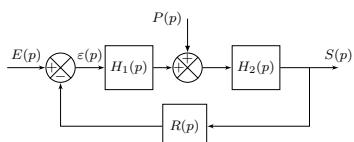
Résultat -

Classe	Consigne échelon $e(t) = E_0$ $E(p) = \frac{E_0}{p}$	Consigne en rampe $e(t) = Vt$ $E(p) = \frac{V}{p^2}$	Consigne parabolique $e(t) = At^2$ $E(p) = \frac{A}{p^3}$
0	$\varepsilon_S = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$	$\varepsilon_V = +\infty$	$\varepsilon_A = +\infty$
1	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_V = \frac{V}{K_{BO}}$	$\varepsilon_A = +\infty$
2	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_V = 0$	$\varepsilon_A = \frac{A}{K_{BO}}$

Remarque

L'écart statique est nul si la boucle ouverte comprend au moins une intégration. À défaut, l'augmentation du gain statique de la boucle ouverte provoque une amélioration de la précision.

2.3.2 Système perturbé

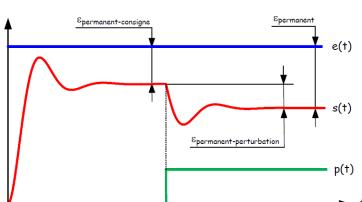


Soit le schéma-blocs ci-contre.

L'écart est caractérisé par le soustracteur principal, c'est-à-dire celui situé le plus à gauche du schéma-blocs.

Par lecture directe, on a : $\varepsilon(p) = E(p) - R(p)S(p) = E(p) - R(p)(H_2(p)(P(p) + \varepsilon(p)H_1(p)))$
 $\iff \varepsilon(p) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) - R(p)H_1(p)H_2(p)\varepsilon(p) \iff \varepsilon(p)(1 + R(p)H_1(p)H_2(p)) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)} - \frac{R(p)H_2(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)}P(p).$

On a donc : $\varepsilon(p) = \underbrace{\frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)}E(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la consigne}} - \underbrace{\frac{R(p)H_2(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}P(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la perturbation}}.$



Résultat -

Il faut au moins un intégrateur en amont d'une perturbation constante pour annuler l'écart vis-à-vis de cette perturbation. Un intégrateur placé en aval n'a aucune influence.

Quand ce n'est pas le cas, un gain K_1 important en amont de la perturbation réduit toujours l'écart vis-à-vis de cette perturbation.

Application 1

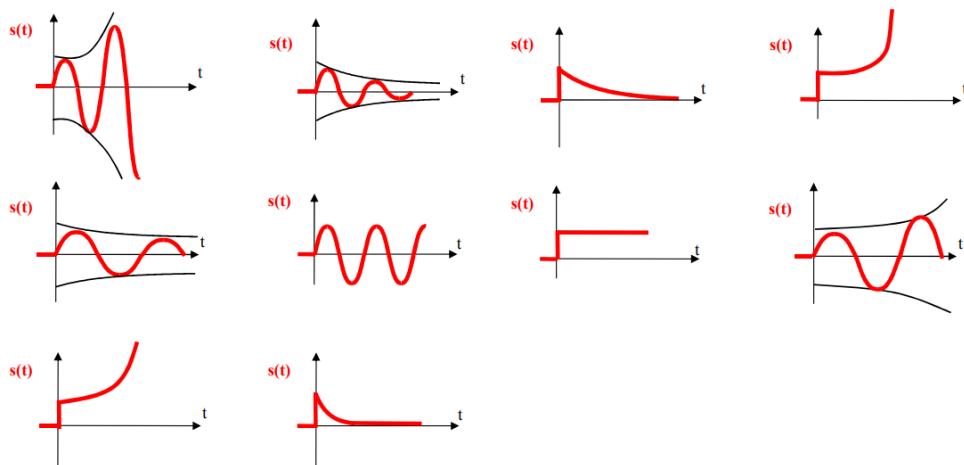
Stabilité des systèmes – Sujet

Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03



Exercice 2 – Pôles de la FTBF

On donne les pôles des FTBF de plusieurs systèmes :

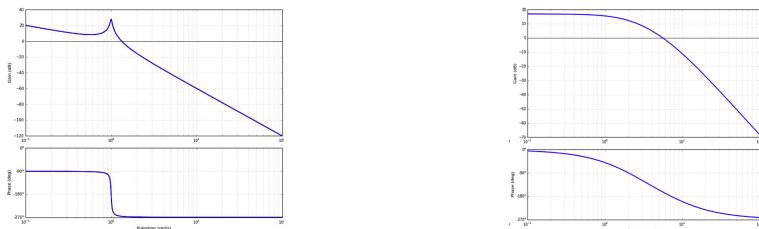
- | | | |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------|
| 1. $-1, -2;$ | 4. $-2 + 3j, -2 - 3j, -2;$ | 7. $-1 + j, -1 - j;$ |
| 2. $-3, -2, 0;$ | 5. $-j, j, -1, 1;$ | 8. $2, -1, -3;$ |
| 3. $-2 + j, -2 - j, 2j, -2j;$ | 6. $-1, +1;$ | 9. $-6, -4, 7.$ |

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

Question 2 Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

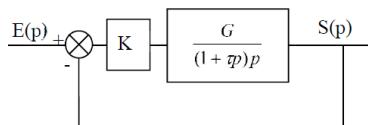


Exercice 4 – Étude de la stabilité

Objectif

- ▶ Caractériser la stabilité d'un système à partir de la FTBO.
- ▶ La marge de gain est supérieure à 10 dB et que la marge de phase est supérieure à 45°.

On donne le schéma ci-contre.



On a $K = 1$, $\tau = 0,1$ et $G = 20$.

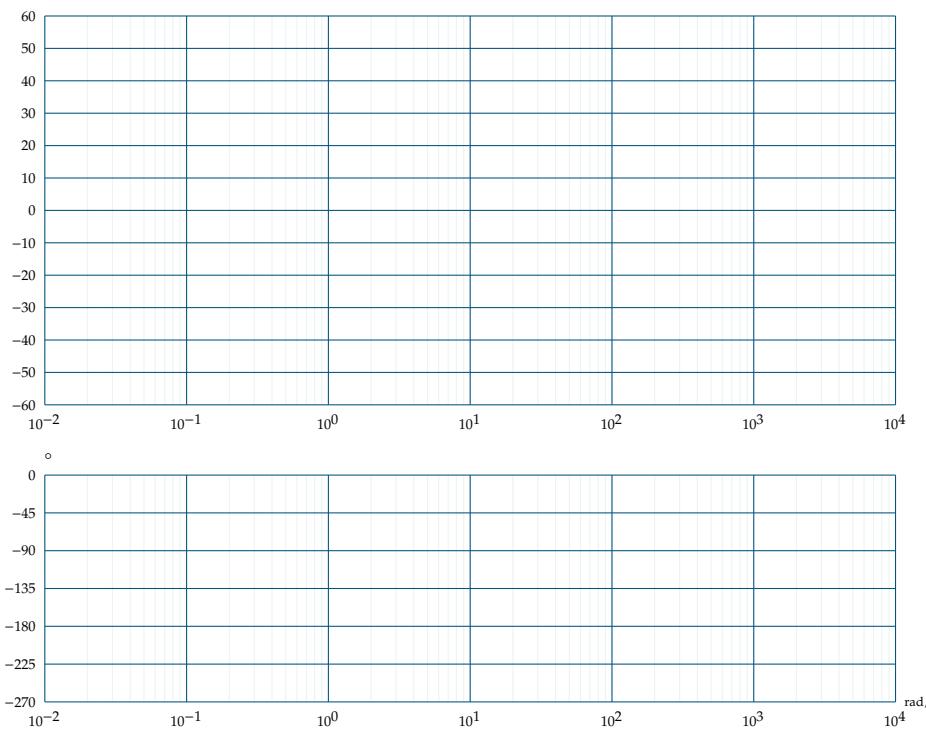
Question 1 Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

Question 2 Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

Question 3 Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

Question 4 Confirmer ces résultats par le calcul.

Question 5 Conclure par rapport au cahier des charges.



Application 1

Stabilité des systèmes – Corrigé

Exercice 1 – Réponse impulsionale (entrée Dirac)

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03

Exercice 2 – Pôles de la FTBF

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

Question 2 Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

Exercice 4 – Étude de la stabilité

Question 1 Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

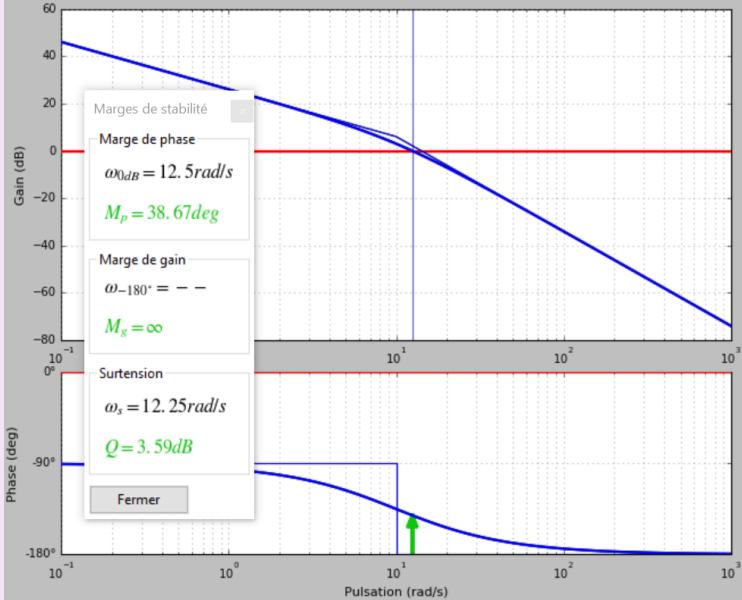
Correction

$$\text{Ici on a } \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}.$$

$$\text{Erreur statique (entrée échelon)} : \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = 0$$

$$\text{Erreur trainage (entrée rampe)} : \varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = \frac{1}{20}$$

Question 2 Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

Correction

Question 3 Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

Correction

Question 4 Confirmer ces résultats par le calcul.

Correction

La phase ne coupe jamais l'axe des abscisses. Ainsi, La marge de gain n'est pas définie (elle est infinie). Pour déterminer la marge de phase analytiquement :

1. On cherche ω_c tel que $G_{dB}(\omega_c) = 0$;
2. On calcule $\varphi(\omega_c)$;
3. La marge de phase est de $\varphi(\omega_c) - (-180)$.

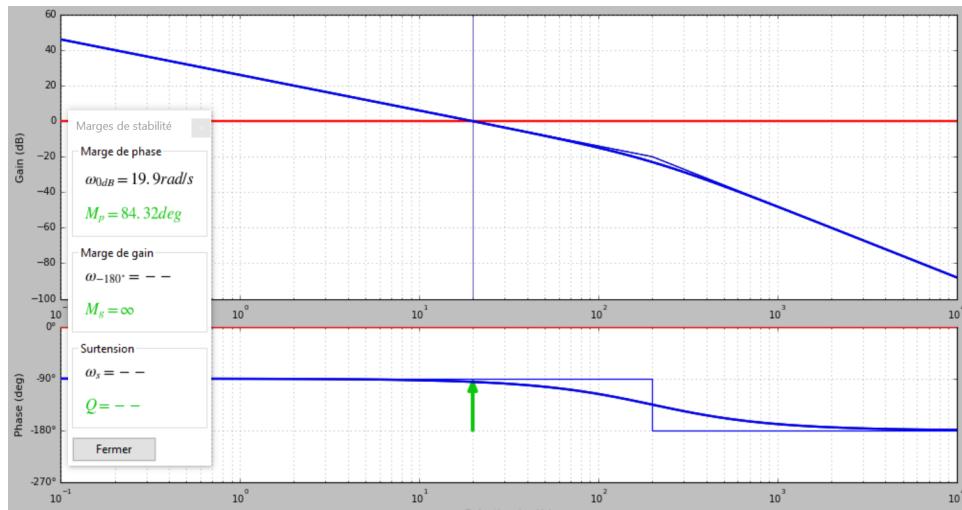
Cherchons ω_c tel que $G_{dB}(\omega_c) = 0$. On a $FTBO(j\omega) = \frac{20}{(1 + 0,1j\omega)j\omega} = \frac{20}{j\omega - 0,1\omega^2}$.
 $20 \log |FTBO(j\omega)| = 20 \log 20 - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 0,01\omega^4} = 20 \log 20 - 20 \log \omega \sqrt{1 + 0,01\omega^2}$.
 $G_{dB}(\omega_c) = 0 \Leftrightarrow 20 = \omega_c \sqrt{1 + 0,01\omega_c^2} \Leftrightarrow 400 = \omega_c^2 (1 + 0,01\omega_c^2)$ On pose $x = \omega_c^2$ et on a :
 $400 = x (1 + 0,01x) \Leftrightarrow x^2 + 100x - 40000 = 0$. On a donc $\Delta = 412,3^2$ et $x_{1,2} = \frac{-100 \pm 412,3}{2}$
on conserve la racine positive et $x_1 = 156,15$ et $\omega_c = 12,5 \text{ rad s}^{-1}$.
 $\varphi(\omega_c) = \arg(20) - 90 - \arg(1 + 0,1j\omega_c) = 0 - 90 - \arctan(0,1\omega_c) = 0 - 90 - 51,34 = -141,34^\circ$.
La marge de phase est donc de $38,66^\circ$.

Question 5 Conclure par rapport au cahier des charges.

Correction

Le système ne sera pas stable vis-à-vis du cahier des charges.

Pour $\tau = 0,005$



Application 2

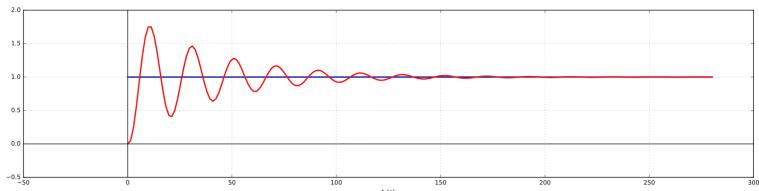
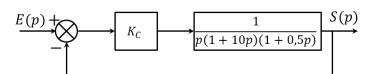
Stabilité des systèmes – Sujet

On considère le schéma-blocs ci-contre et la réponse indicielle pour $K_C = 1$.

Question 1 Justifier l'allure du diagramme du diagramme de Bode donné ci-dessous pour $K_C = 1$.

C1-01

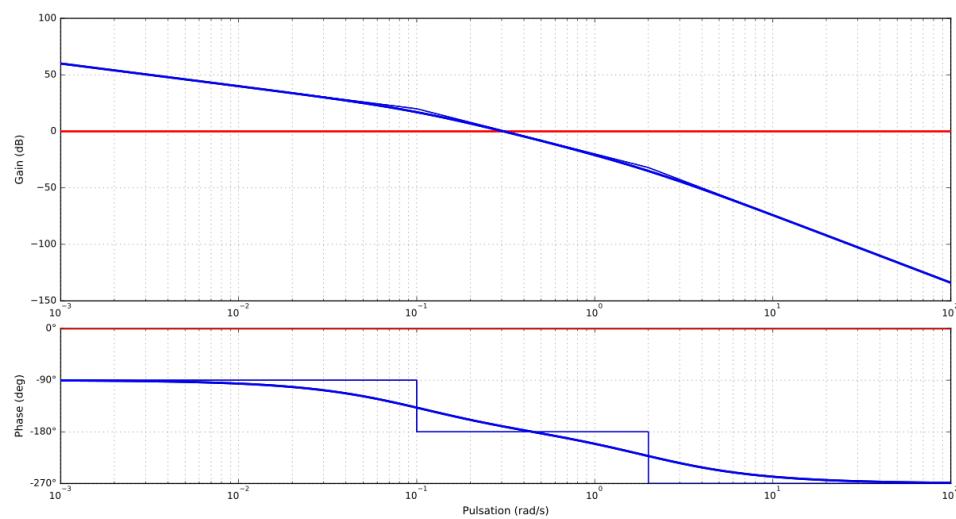
C2-03



Question 2 Donner graphiquement les marges de phase et de gain pour $K_C = 1$.

Question 3 Donner analytiquement les marges de phase et de gain pour $K_C = 1$ (méthode).

Question 4 Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et 40°. Déterminer la plus grande valeur de K_C permettant de vérifier ce cahier des charges



Application 2

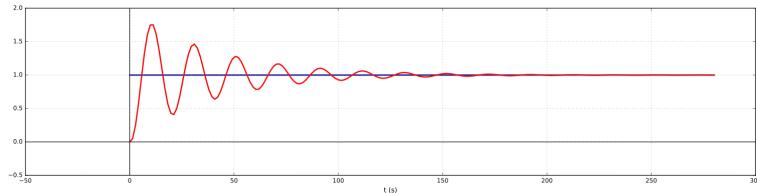
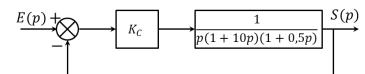
Stabilité des systèmes – Corrigé

On considère le schéma-blocs ci-contre et la réponse indicielle pour $K_C = 1$.

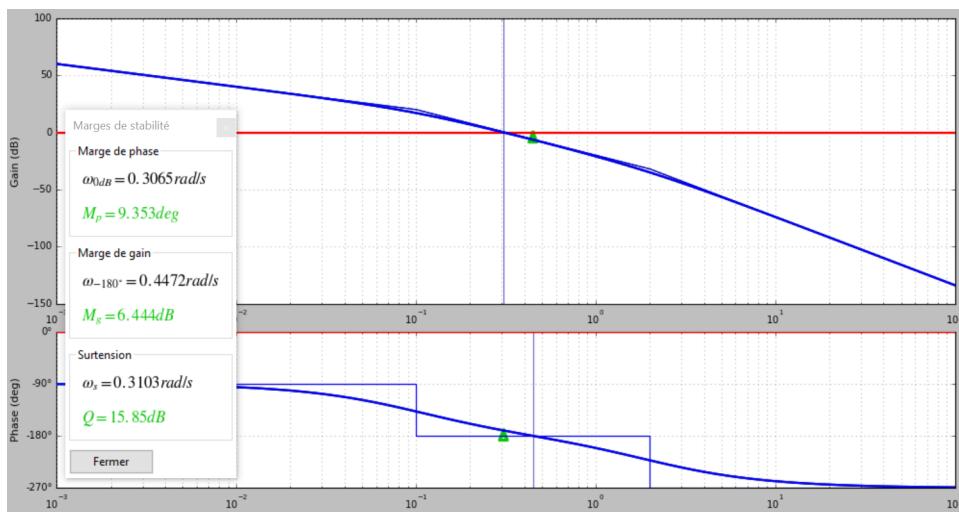
Question 1 Justifier l'allure du diagramme du diagramme de Bode donné ci-dessous pour $K_C = 1$.

C1-01

C2-03



Question 2 Donner graphiquement les marges de phase et de gain pour $K_C = 1$.



Question 3 Donner analytiquement les marges de phase et de gain pour $K_C = 1$ (méthode).

Correction

Calcul de la marge de gain

- On détermine ω_{180} tel que $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{180})) = -180^\circ$.

$$\arg(\text{FTBO}(j\omega)) = -\arg(j\omega) - \arg(1 + 10j\omega) - \arg(1 + 0.5j\omega) = -90 - \arctan(10\omega) - \arctan(0.5\omega)$$

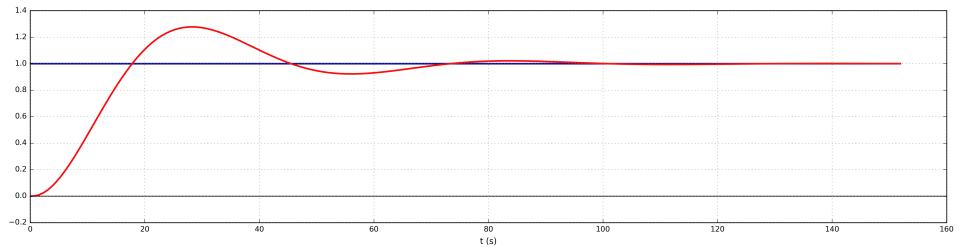
$$\arg(\text{FTBO}(j\omega_{180})) = -180^\circ \Leftrightarrow -90 - \arctan(10\omega) - \arctan(0.5\omega) = -180$$

```

1 import math as m
2 from pylab import *
3 from scipy.optimize import bisect
4
5 def f(x):
6     res = m.pi/2 - m.atan(10*x) - m.atan(0.5*x)
7     return res
8
9 zerol = bisect(f, .1, 10)
On a  $\omega = 0,447 \text{ rad s}^{-1}$ .

```

Question 4 Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et 40°. Déterminer la plus grande valeur de K_C permettant de vérifier ce cahier des charges



Application 3

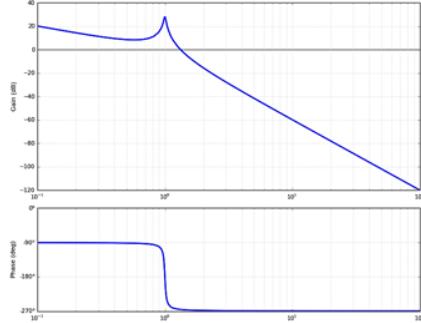
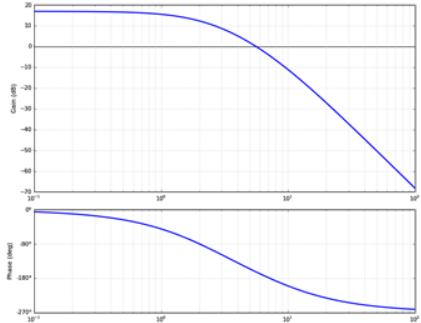
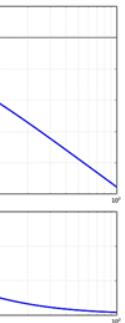
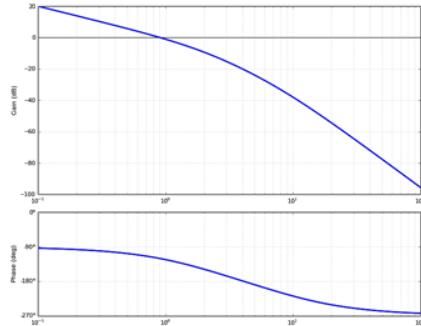
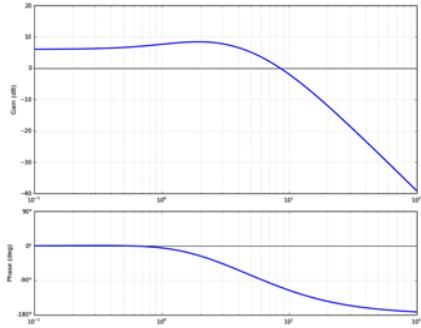
Stabilité des systèmes – Sujet

C1-01

C2-03

P. Dupas?

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.



Application 3

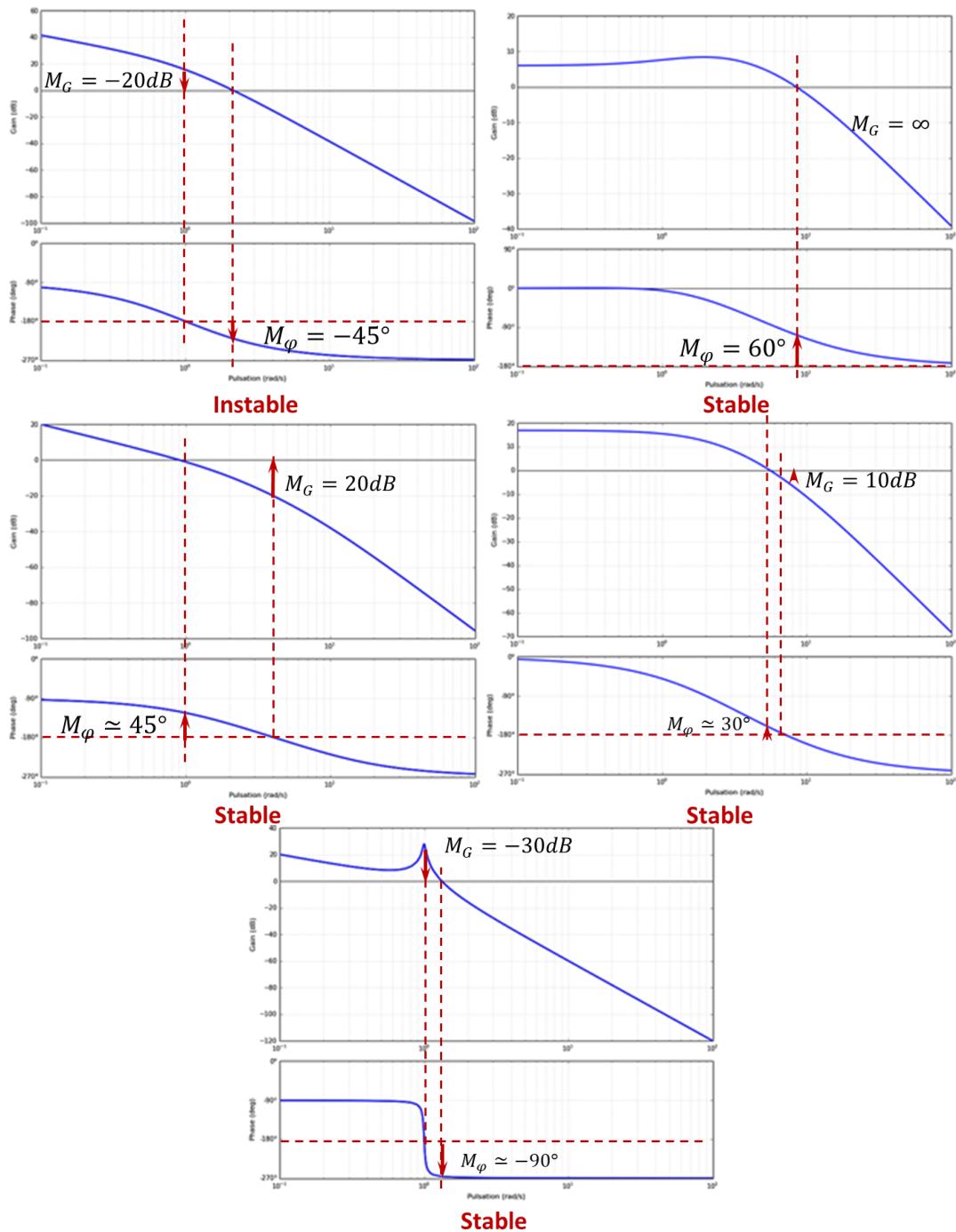
Stabilité des systèmes – Corrigé

C1-01

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

C2-03

P. Dupas?



TD 1

Stabilisateur actif d'image – Sujet

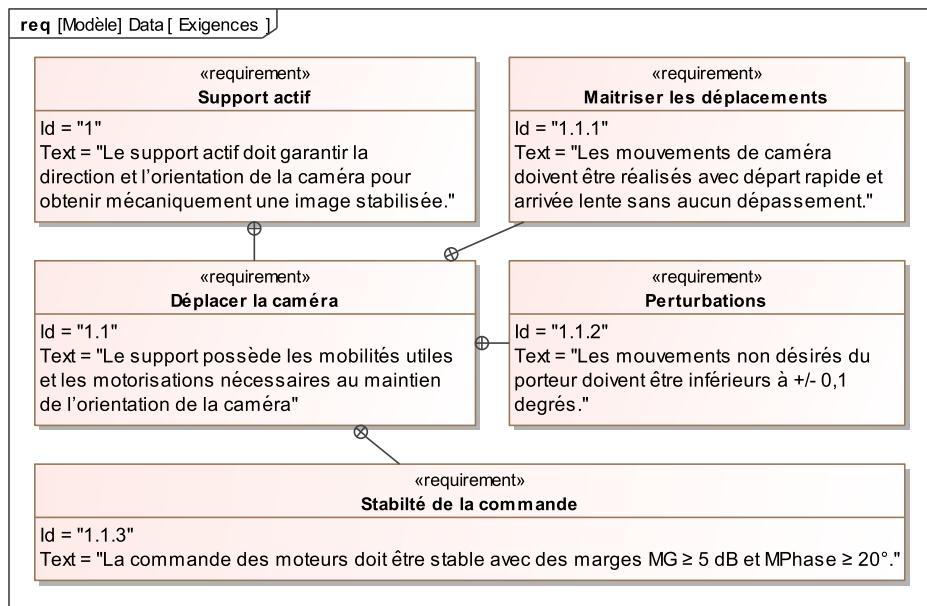
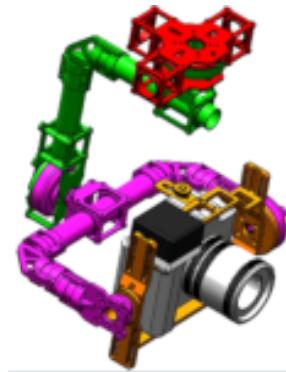
Mines Ponts 2018 – PSI

C1-01

C2-03

Mise en situation

On s'intéresse à une nacelle active de caméra. Ce système de stabilisation, nommé CAM-GYR, permet de s'assurer que quelque soit l'orientation du porteur (caméraman), l'axe vertical de la caméra et toujours parallèle à la direction de la pesanteur. Le système est équipé de 3 moteurs permettant d'ajuster le roulis, le tangage et le lacet. On s'intéresse ici uniquement à la stabilisation de l'axe de tangage.



Objectif

Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

Travail demandé

On considère un modèle de l'axe de tangage sans perturbation et qui reçoit des consignes assez rapides modélisées par des échelons. L'ensemble {moteur, charge} ne

présente pas de réducteur. Il est modélisé par un ensemble en série de deux fonctions de transfert :

- un gain pur de valeur K_m ;
- une fonction de transfert du premier ordre de gain statique A et de constante de temps τ_m .

Cet ensemble présente comme entrée la commande du moteur $\text{com}(t)$ et comme sortie la vitesse angulaire de rotation du moteur $\omega_m(t)$. Le réglage retenu est tel que $K_m A = 1$. **Le retour K_D agit par un sommateur.** Dans cette étude, $A_i(p) = 1$.

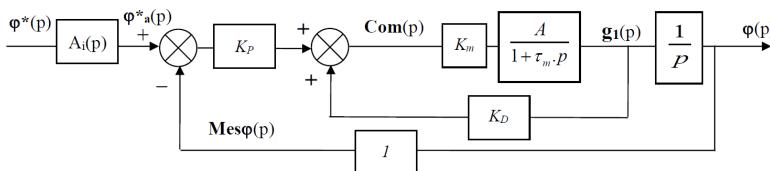


FIGURE 2.3 – Modèle 1 de l'axe de tangage.

Question 1 Avec $K_m A = 1$, calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas : $A_i(p) = 1$.

Question 2 Quelle est la valeur maximale de K_D pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

En accord avec les résultats précédents, on fixe $K_D = 0,5$ et $\tau_m = 0,2\text{s}$. Dans un premier temps on impose $K_P = 10\text{s}^{-1}$.

Question 3 Lorsque $A_i(p) = 1$, le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Dans un second temps on se place en mode stabilisation. On s'intéresse toujours au comportement de l'axe de tangage mais sans le filtre passe bas ($A_i(p) = 1$). On considère ici que la consigne est constante donc $\varphi_a^*(t) = 0$. Une perturbation $\text{Pe}(p)$ agit au niveau de l'ensemble (moteur, charge) modélisée sur le schéma bloc (Modèle 2). On appelle $\text{Com}(p)$ la transformée de Laplace de la commande du moteur $\text{com}(t)$.

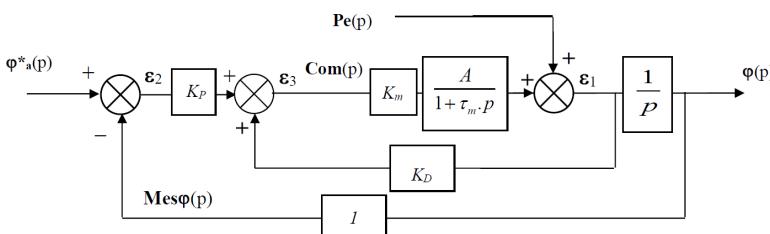
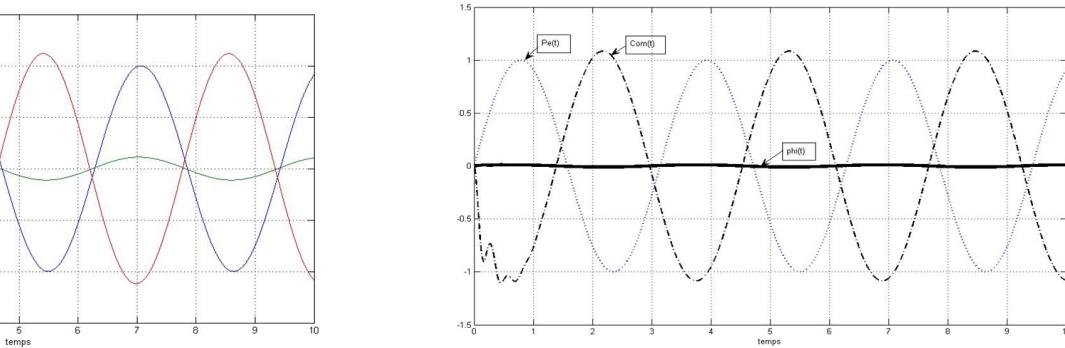


FIGURE 2.4 – Modèle 2 de l'axe de tangage.

Question 4 Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert $\text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)}$ qui lie la commande à la perturbation.

Question 5 Avec le modèle 2 et une entrée $\text{Pe}(p)$ échelon unitaire, déterminer la limite quand t tend vers l'infini de la commande : $\text{com}(t)$. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Question 6 Avec le modèle 2 déterminer la FTBO $\frac{\text{Mesφ}(p)}{\varepsilon_2(p)}$ de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie $\text{Pert}(p) = \frac{\varphi(p)}{\text{Pe}(p)}$.



Question 7 Déterminer la valeur lorsque t tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat?

Question 8 On désire une marge de gain de $M_G \geq 5$ dB et une marge de phase $M\varphi \geq 20^\circ$ (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de K_P en utilisant les données ci-dessous.

$$\text{On note } F(\omega) = \frac{2}{j\omega(1 + 0,4j\omega)}.$$

ω (rad/s)	1	2,5	5	7	10
$\text{Arg}(F(\omega))$	-112°	-135°	-153°	-160°	-166°
$20 \log F(\omega) $	5,4 dB	3 dB	-1 dB	-3 dB	-6,2 dB

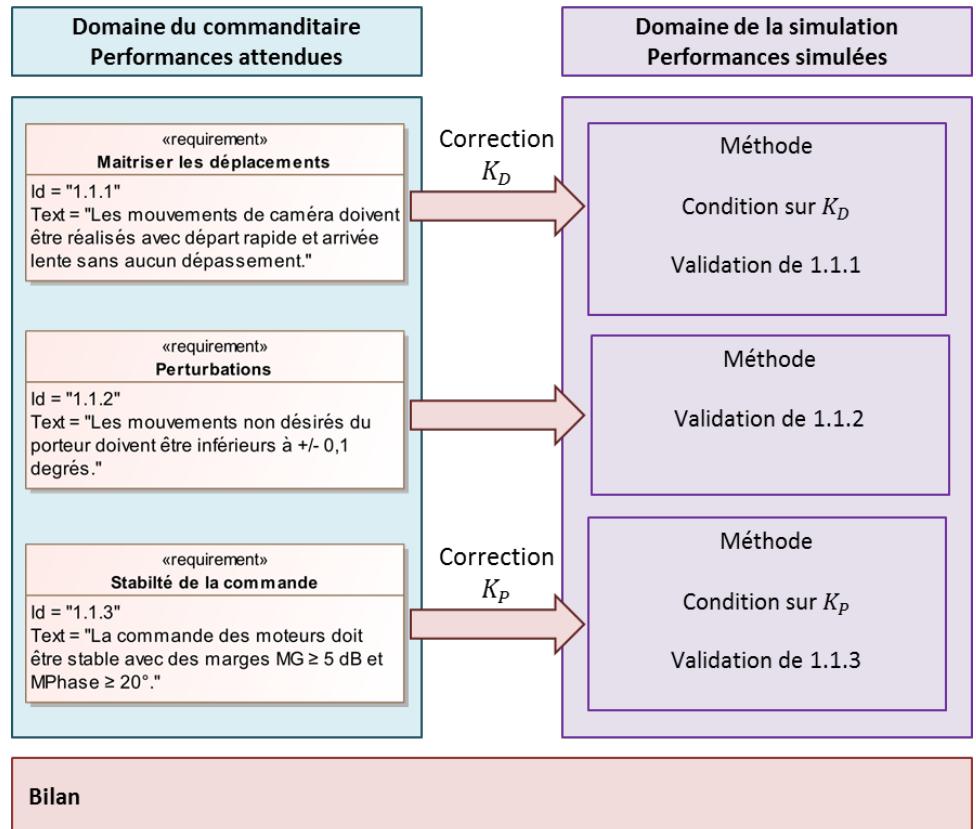
Le figure suivante (droite) présente la réponse temporelle de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale (due par exemple au vent qui crée un balancement de la GYRCAM) (ordonnée en degrés).

Question 9 Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de $\text{Com}(t)$ relativement à $\text{Pe}(t)$ en utilisant le résultat de la question ???. Afin d'améliorer le comportement, un autre réglage a été effectué (voir figure précédente – droite).

Question 10 Analyser comparativement ce nouveau tracé.

Synthèse

Question 11 En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.



Éléments de correction

1. $\text{FTBO}(p) = \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D)}$ et $\text{FTBF}(p) = A_i(p) \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P}$.
2. $K_D < 1$.
- 3.
4. $\text{Stab}(p) = \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}$.
5. $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{com}(t) = -1$.
6.
$$\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)} \quad \text{et} \quad \text{Pert}(p) = \frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D) A K_m}.$$
7. $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, 1^\circ$.
8. $K_P < 1,41$.
9. .
10. .



TD 1

Stabilisateur actif d'image – Corrigé

Mines Ponts 2018 – PSI

C1-01

C2-03

Mise en situation

Objectif

Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

Travail demandé

Question 1 Avec $K_m A = 1$, calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

Correction

Attention au signe du comparateur de la boucle imbriquée !

On définit la FTBO par $\text{FTBO}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{\text{Mes}\varphi(p)}$ avec $\varepsilon(p)$ la sortie du premier comparateur.

On a d'une part $G(p) = \frac{\frac{K_m A}{1 + \tau_m p}}{1 - \frac{K_m A K_D}{1 + \tau_m p}} = \frac{K_m A}{1 + \tau_m p - K_m A K_D}$. On a alors $\text{FTBO}(p) = \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$.

Si on définit la FTBF par $\text{FTBF}(p) = \frac{\varphi(p)}{\varphi^*(p)}$, on a $\text{FTBF}(p) =$

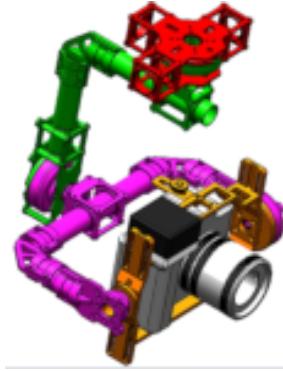
$$A_i(p) \frac{\frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}{1 + \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}$$

$$= A_i(p) \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D) + K_m A K_p}.$$

Au final, $\text{FTBO}(p) = \frac{K_p}{p(1 + \tau_m p - K_D)}$ et $\text{FTBF}(p) = A_i(p) \frac{K_p}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_p}$.

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas : $A_i(p) = 1$.

Question 2 Quelle est la valeur maximale de K_D pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).



Correction

Pour que le système soit stable, tous les coefficients du dénominateur $D(p)$ de la FTBF doivent être de même signe (ainsi toutes les racines sont à partie réelle négative). On a $D(p) = p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P = \tau_m p^2 p + (1 - K_D)p + K_P$ et donc nécessairement, $1 - K_D > 0$ et $K_D < 1$.

Question 3 Lorsque $A_i(p) = 1$, le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Correction

$$\text{On a : FTBF}(p) = \frac{K_P}{p + \tau_m p^2 - K_D p + K_P} = \frac{K_P}{\frac{\tau_m}{K_P} p^2 + p \frac{1 - K_D}{K_P} + 1}.$$

$$\text{On a alors } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}} \text{ et } \xi = \frac{1 - K_D}{K_P} \frac{\sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}}}{2} = \frac{1 - K_D}{2\sqrt{K_P \tau_m}} = \frac{0,5}{2\sqrt{2}} < 1. \text{ Il y a donc du dépassement. L'exigence n'est pas vérifiée.}$$

Question 4 Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert $\text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)}$ qui lie la commande à la perturbation.

Correction

$$\text{On a } \varepsilon_2(p) = -\text{Mes}(\varphi(p)) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p) \frac{1}{p}. \text{ Par ailleurs, } \varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1 + \tau_m p}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon_3(p) = K_P \varepsilon_2(p) + K_D \varepsilon_1(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p) \left(K_D - \frac{K_P}{p} \right) \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}}.$$

$$\text{On a donc } \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}} = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1 + \tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \left(\frac{p}{pK_D - K_P} - \frac{AK_m}{1 + \tau_m p} \right) =$$

$$\text{Pe}(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \frac{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)} = \text{Pe}(p).$$

$$\text{On a donc } \text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)} = \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}.$$

Question 5 Avec le modèle 2 et une entrée $\text{Pe}(p)$ échelon unitaire, déterminer la limite quand t tend vers l'infini de la commande : $\text{com}(t)$. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Correction

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{com}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \text{Com}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \text{Stab}(p) \text{Pe}(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-K_P}{AK_m K_P} = -1 \text{ si } AK_m = 1.$$

Ainsi, pour une perturbation angulaire dans un autre sens, le système commande les moteurs avec une consigne dans le sens opposé.

Question 6 Avec le modèle 2 déterminer la FTBO $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$ de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie $\text{Pert}(p) = \frac{\varphi(p)}{\text{Pe}(p)}$.

Correction

On a $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$ (c'est la même que pour le premier modèle).

On a vu que $\varepsilon_2(p) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p)\frac{1}{p}$, $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}$ et $\varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_P}{p}\right)$.

En conséquences, $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p} \iff \varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) +$

$$\varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_P}{p}\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_1(p)\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right) = \text{Pe}(p) \Leftrightarrow p\varphi(p)\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right) = \text{Pe}(p)$$

$$\text{et donc } \text{Pert}(p) = \frac{1}{p\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right)} = \frac{1}{p\left(1 + \frac{K_P - pK_D}{p}\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right)} =$$

$$\frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p + (K_P - pK_D)AK_m)}.$$

Question 7 Déterminer la valeur lorsque t tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat?

Correction

$$\begin{aligned} \text{On a } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p\Phi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p\text{Pert}(p)\text{Pe}(p) = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p + (K_P - pK_D)AK_m)} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{K_P A K_m} = \frac{1}{K_P} = 0,1^\circ. \end{aligned}$$

Le système n'est pas précis s'il y a une perturbation échelon.

Question 8 On désire une marge de gain de $M_G \geq 5$ dB et une marge de phase $M\varphi \geq 20^\circ$ (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de K_P en utilisant les données ci-dessous.

Correction

Pour une marge de phase de 20° , la phase doit être de -160° lorsque le gain est nul. Or en -160° le gain est de -3 dB. Pour respecter la marge de phase, il faut donc déterminer K_P tel

$$\text{que } 20 \log K_P = 3 \text{ soit } K_P < 10^{\frac{3}{20}} \approx 1,41.$$

Le système étant d'ordre 2, la marge de gain sera forcément infinie.

Question 9 Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de $\text{Com}(t)$ relativement à $\text{Pe}(t)$ en utilisant le résultat de la question ??.

Correction

La commande s'oppose à la perturbation (comme évoqué question ??). Le stabilisateur a au final un mouvement sinusoïdal dont les valeurs maximales et minimales sont voisines de $0,1^\circ$ et $-0,1^\circ$.

Question 10 Analyser comparativement ce nouveau tracé.

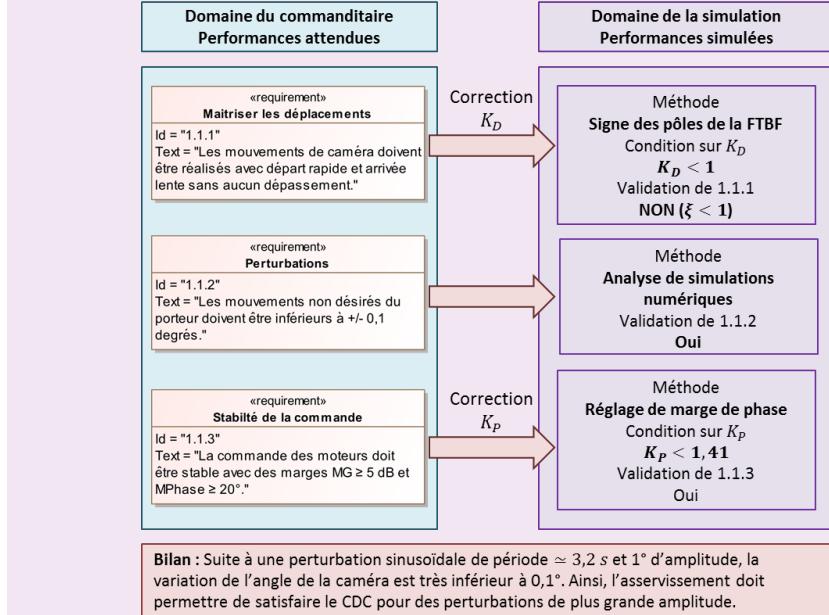
Correction

Dans ce cas, les mouvements du porteur sont inférieurs à 0,1 degrés (en valeur absolue).

Synthèse

Question 11 En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.

Correction



TD 2

Direction automobile découplée – Sujet

Banque PT – SIA 2017.

Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!

Mise en situation

Le principe de la direction découpée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de type télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisée par l'organisation qui suit (??).

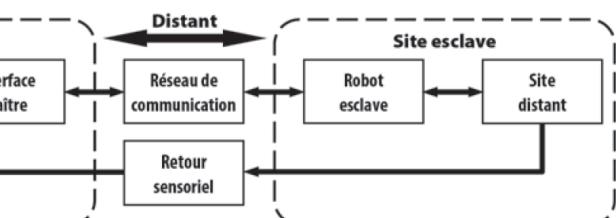


FIGURE 2.5 – Architecture maître-esclave

Une direction automobile découpée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (??) précise les principales exigences.

Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure ??.

Notations :

- arbre-volant v : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- G_v : centre d'inertie de l'arbre-volant v ;
- $I_v(G_v)$: opérateur d'inertie de v au point G_v ;
- J_v : le moment d'inertie de v autour de l'axe (G_v, \vec{x}_v) ;
- f_v : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$: l'angle de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\theta_v(p)$ dans le domaine de Laplace);



FIGURE 2.6 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

- $\omega_v(t)$: la vitesse de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\Omega_v(p)$ dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen;
- G_v est situé sur l'axe de la liaison pivot;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux $C_f \vec{x}_v$;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant v se réduisent respectivement aux couples $C_c \vec{x}_v$ et $C_{mv} \vec{x}_v$.

Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la ?? où le retour est unitaire. On note $\varepsilon_{\theta_v}(t)$ l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et $\varepsilon_{cv}(t)$ le couple résultant des couples C_c et C_{mv} .

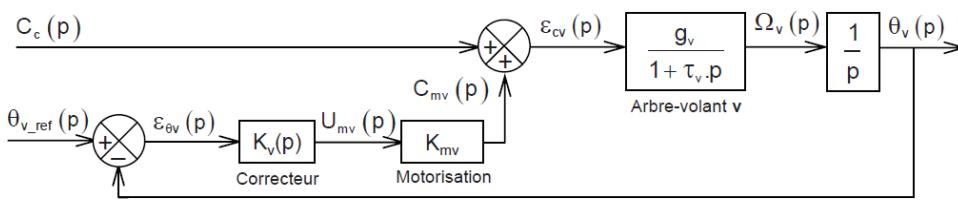


FIGURE 2.7 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes : $g_v = 5 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$; $\tau_v = 0,1 \text{ s}$ et $K_{mv} = 0,4 \text{ N m V}^{-1}$.

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain K_{mv} .

Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que $K_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$ avec $\tau_i = \alpha \tau_v$.

Question 1 Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité ?

Question 2 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v1}(p)$ du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v1}(p) \varepsilon_{\theta_v}(p)$ sous la forme $\text{FTBO}_{v1}(p) = K_{BOv1} \frac{1}{p^2} H(p)$ pour laquelle on précisera les expressions de K_{BOv1} et de $H(p)$ avec $H(p)$ de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si α doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de α).

On commence par choisir τ_i en prenant $\alpha = 10$ et on cherche à optimiser K_i .

$$\text{On donne } \varepsilon_{\theta_v}(p) = \frac{\theta_{v_ref}(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p(1 + \tau_v p)} \cdot \frac{C_C(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)}.$$

Question 3 Quelle doit être la valeur minimale de K_i pour que les critères de précision soient satisfaits ?

On donne ?? le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$.

Question 4 Tracer sur le lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

Question 5 Donner, par lecture du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, la valeur de K_i qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

On donne (??) l'évolution de cette pulsation ω_ℓ en fonction de α et un abaque qui représente la valeur maximale φ_m de $\varphi(\omega)$ en fonction de α .

Question 6 Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte, ω_0 , fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de α et/ou K_i ? On pourra s'aider des abaques fournis (??) pour justifier la réponse.

On donne (??), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1^{er} dépassement en % de la valeur finale, en fonction de K_i et pour $\alpha = 10$.

Question 7 Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi $\alpha = 10$.

Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique

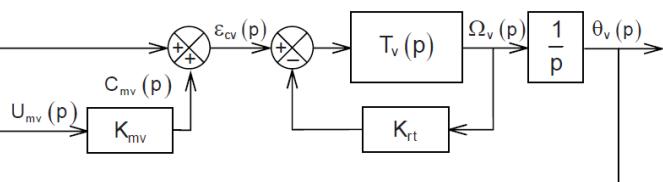


FIGURE 2.10 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage avec retour tachymétrique

Question 8 Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

Question 9 Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $T_{\text{vrt}}(p)$ définie par $\Omega_v(p) = T_{\text{vrt}}(p)\epsilon_{cv}(p)$ en fonction de $T_v(p)$ et K_{rt} . Mettre alors $T_{\text{vrt}}(p)$ sous la forme $T_{\text{vrt}}(p) = T_v(p)\beta \frac{1 + \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle, on précisera l'expression de β en fonction de K_{rt} et du gain statique g_v .

Question 10 Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v2}(p)$, telle que, $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v2}(p)\epsilon_{\theta_v}(p)$, peut ainsi se mettre sous la forme $\text{FTBO}_{v2}(p) = K_{\text{BOv2}} \frac{1 + \alpha \tau_v p}{p^2 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle on donnera l'expression de K_{BOv2} en fonction de K_{mv} , g_v , τ_v , K_i , α et β .

On donne sur la ?? le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v2}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 1,2 \text{ V rad}^{-1}$ (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec $\beta = 1/6$ (non justifié) et pour $\alpha = 10$ (valeur choisie précédemment).

Question 11 Justifier que β doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

On donne (??), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement en réponse

On note :

- ▶ $\varphi(\omega)$ la phase de $H(p)$, soit $\text{Arg}[H(j\omega)]$;
- ▶ ω_ℓ la plus grande pulsation qui vérifie $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45^\circ$.

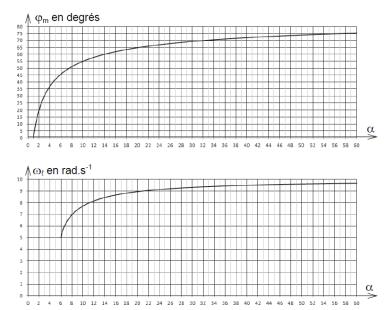


FIGURE 2.8 – ABAQUES DE RÉGLAGE DE $H(p)$ EN FRÉQUENTIEL

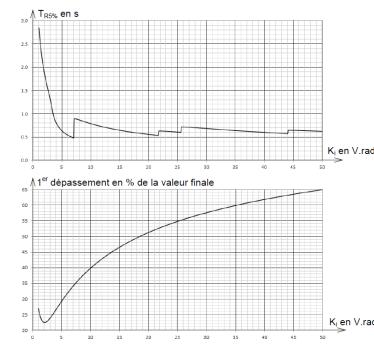


FIGURE 2.9 – ABAQUES DE RÉGLAGE EN TEMPS POREL DE L'UNITÉ DE PILOTAGE CORRIGÉE

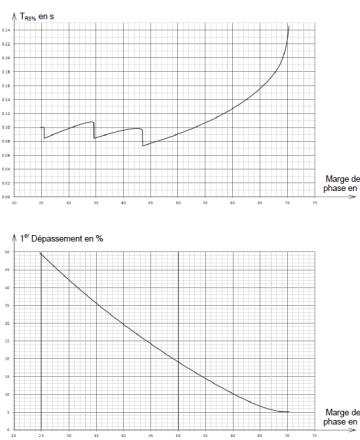


FIGURE 2.11 – Abaque de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée avec retour tachymétrique

Éléments de correction

1. .
2. $K_{BOv1} = \frac{K_i K_{mv} g v}{\alpha \tau_v}$ et $H(p) = \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \tau_v p}, \alpha > 1.$
3. $K_i \geq 10\alpha \frac{\tau_v}{K_{mv}}$ et $K_i \geq 25 \text{ V rad}^{-1}.$
4. .
5. $K_i = 5 \text{ V rad}^{-1}.$
6. .
7. .
8. .
9. $\beta = 1$



Exigence	Critères	Niveaux	Flexibilité
10. K	Id 1-3.3 – Le système doit fournir au conducteur un retour d'effort qui optimise le confort et la sécurité.	30 rad/s ($\approx 5 \text{ Hz}$) 0,1 s	mini $\pm 20 \text{ ms}$
11. M	1- Pulsion de coupure à 0dB en boucle ouverte ω_0 2- Temps de réponse à 5% (boucle fermée) 3- Erreur statique en réponse à une consigne d'angle – pour une consigne en échelon – pour une consigne en rampe de pente Ω_{s0} 4- Erreur statique en réponse à une perturbation de couple – pour une perturbation en échelon – pour une perturbation en rampe de pente C_{s0}	nulle $\leq 0,5\%$ de Ω_{s0}	aucune $\pm 0,2\%$
12. N	5- Stabilité – Marge de phase – Marge de gain	nulle $\leq 10\%$ de C_{s0}	aucune $\pm 5\%$
13. K	6- Amortissement	45° 20 dB	mini mini
14. .	– 1 ^{er} dépassement en réponse indicielle (boucle fermée)	0%	15% maxi
15. .			

FIGURE 2.12 – Exigences

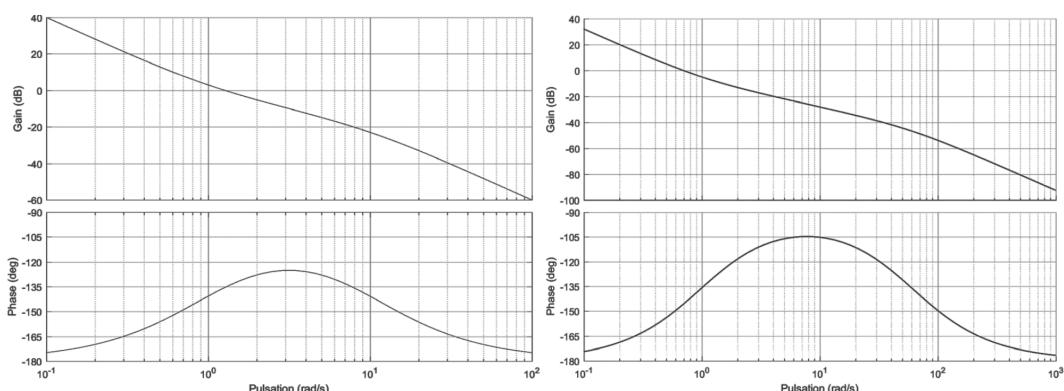


FIGURE 2.13 – Lieux de transfert de FTBOv1(p) et FTBOv2(p)

TD 2

Direction automobile découplée – Corrigé

Banque PT – SIA 2017.

Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!

Mise en situation

Le principe de la direction découpée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de type télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisée par l'organisation qui suit (??).

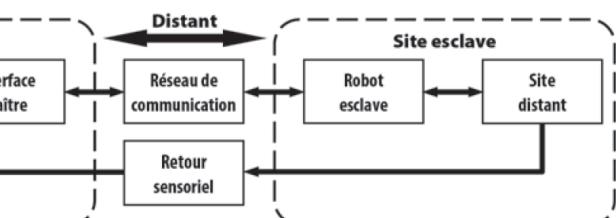


FIGURE 2.14 – Architecture maître-esclave

Une direction automobile découpée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (??) précise les principales exigences.

Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure ??.

Notations :

- arbre-volant v : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- G_v : centre d'inertie de l'arbre-volant v ;
- $I_v(G_v)$: opérateur d'inertie de v au point G_v ;
- J_v : le moment d'inertie de v autour de l'axe (G_v, \vec{x}_v) ;
- f_v : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$: l'angle de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\theta_v(p)$ dans le domaine de Laplace);

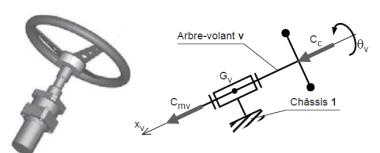


FIGURE 2.15 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

- $\omega_v(t)$: la vitesse de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\Omega_v(p)$ dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen;
- G_v est situé sur l'axe de la liaison pivot;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux $C_f \vec{x}_v$;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant v se réduisent respectivement aux couples $C_c \vec{x}_v$ et $C_{mv} \vec{x}_v$.

Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la ?? où le retour est unitaire. On note $\varepsilon_{\theta_v}(t)$ l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et $\varepsilon_{cv}(t)$ le couple résultant des couples C_c et C_{mv} .

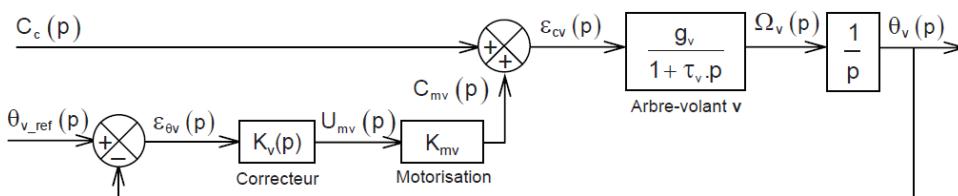


FIGURE 2.16 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes : $g_v = 5 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$; $\tau_v = 0,1 \text{ s}$ et $K_{mv} = 0,4 \text{ N m V}^{-1}$.

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain K_{mv} .

Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que $K_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$ avec $\tau_i = \alpha \tau_v$.

Question 1 Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité ?

Correction

Question 2 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v1}(p)$ du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v1}(p)\varepsilon_{\theta_v}(p)$ sous la forme $\text{FTBO}_{v1}(p) = K_{BOv1} \frac{1}{p^2} H(p)$ pour laquelle on précisera les expressions de K_{BOv1} et de $H(p)$ avec $H(p)$ de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si α doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de α).

Correction

On commence par choisir τ_i en prenant $\alpha = 10$ et on cherche à optimiser K_i .

$$\text{On donne } \varepsilon_{\theta v}(p) = \frac{\theta_{v_ref}(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p(1 + \tau_v p)} \cdot \frac{C_C(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)}.$$

Question 3 Quelle doit être la valeur minimale de K_i pour que les critères de précision soient satisfaits ?

Correction

On donne ?? le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$.

Question 4 Tracer sur le lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

Correction

Question 5 Donner, par lecture du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, la valeur de K_i qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

Correction

On donne (??) l'évolution de cette pulsation ω_ℓ en fonction de α et un abaque qui représente la valeur maximale φ_m de $\varphi(\omega)$ en fonction de α .

On note :

- ▶ $\varphi(\omega)$ la phase de $H(p)$, soit $\text{Arg}[H(j\omega)]$;
- ▶ ω_ℓ la plus grande pulsation qui vérifie $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45^\circ$.

Question 6 Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte, ω_0 , fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de α et/ou K_i ? On pourra s'aider des abaques fournis (??) pour justifier la réponse.

Correction

On donne (??), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1^{er} dépassement en % de la valeur finale, en fonction de K_i et pour $\alpha = 10$.

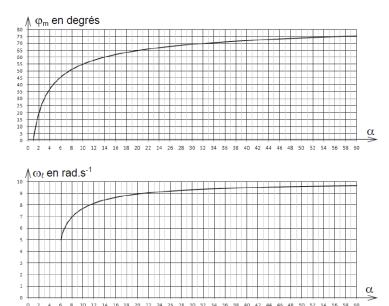


FIGURE 2.17 – Aboques de réglage de $H(p)$ en fréquentiel

Question 7 Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi $\alpha = 10$.

Correction

Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique

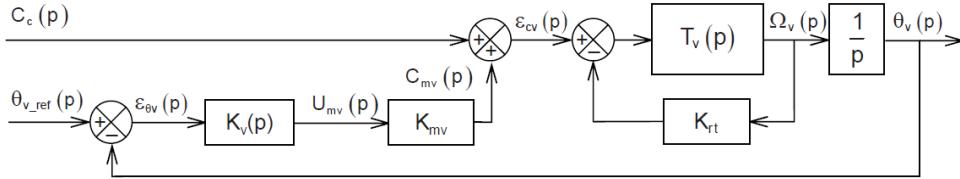


FIGURE 2.19 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage avec retour tachymétrique

Question 8 Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

Correction

Question 9 Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $T_{\text{vrt}}(p)$ définie par $\Omega_v(p) = T_{\text{vrt}}(p)\epsilon_{cv}(p)$ en fonction de $T_v(p)$ et K_{rt} . Mettre alors $T_{\text{vrt}}(p)$ sous la forme $T_{\text{vrt}}(p) = T_v(p)\beta \frac{1 + \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle, on précisera l'expression de β en fonction de K_{rt} et du gain statique g_v .

Correction

Question 10 Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v2}(p)$, telle que, $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v2}(p)\epsilon_{\theta v}(p)$, peut ainsi se mettre sous la forme $\text{FTBO}_{v2}(p) = K_{\text{BOv2}} \frac{1 - 1 + \alpha \tau_v p}{p^2 1 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle on donnera l'expression de K_{BOv2} en fonction de K_{mv} , g_v , τ_v , K_i , α et β .

Correction

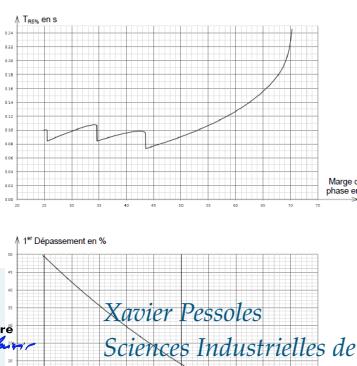
On donne sur la ?? le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v2}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 1,2 \text{ V rad}^{-1}$ (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec $\beta = 1/6$ (non justifié) et pour $\alpha = 10$ (valeur choisie précédemment).

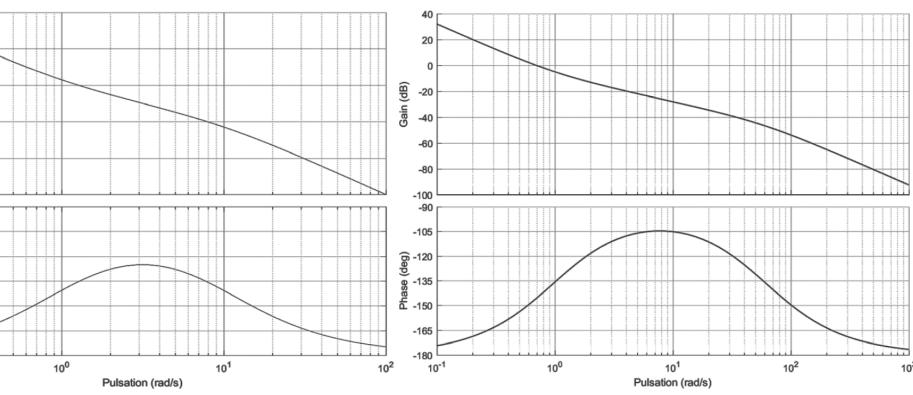
Question 11 Justifier que β doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

Correction

On donne (??), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement en réponse à un échelon d'angle θ_{v_ref} , en fonction de la marge de phase du système, réglé avec $\beta = 1/6$.

Question 12 Donner par lecture des abaques (??), la valeur de la marge de phase la plus grande, permettant de satisfaire les deux critères de temps de réponse et de dépassement.





de $FTBO_{v1}(p)$ et $FTBO_{v2}(p)$

Correction

Question 13 Déterminer par lecture du lieu de transfert dans le plan de Bode de $FTBO_{v2}(p)$, tracé dans les conditions de la question 11, la valeur de K_i permettant d'obtenir la marge de phase trouvée à la question précédente.

Correction

Question 14 Faire une synthèse argumentée de la démarche proposée dans cette partie, pour optimiser le comportement de l'unité de pilotage. Conclure, en reprenant chaque critère de l'exigence Id 1-3.3, sur la satisfaction du cahier des charges

Correction

Question 15 Avec le réglage établi par le modèle, quel phénomène pourrait endommager certains composants du système réel ? Quelle disposition technologique permettrait d'éviter ce phénomène ? Quelles en seraient les conséquences sur les performances du système ?

Correction

critères	Niveaux	Flexibilité
- Pulsion de coupure à 0dB en boucle ouverte ω_0 - Temps de réponse à 5% (boucle fermée) - Erreur statique en réponse à une consigne d'angle - pour une consigne en échelon - pour une consigne en rampe de pente Ω_{c0} - Erreur statique en réponse à une perturbation de couple - pour une perturbation en échelon - pour une perturbation en rampe de pente C_{c0} - Stabilité - Marge de phase - Marge de gain - Amortissement - 1 ^{er} dépassement en réponse indicielle (boucle fermée)	30 rad/s (≈ 5 Hz) 0,1 s nulle $\leq 0,5\%$ de Ω_{c0} nulle $\leq 10\%$ de C_{c0} 45° 20 dB 0%	mini ± 20 ms aucune $\pm 0,2\%$ aucune $\pm 5\%$ mini mini 15% maxi

FIGURE 2.21 – Exigences

Éléments de correction

1. .
2. $K_{BOv1} = \frac{K_i K_{mv} g v}{\alpha \tau_v}$ et $H(p) = \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \tau_v p}, \alpha > 1.$
3. $K_i \geq 10\alpha \frac{\tau_v}{K_{mv}}$ et $K_i \geq 25 \text{ V rad}^{-1}$.
4. .
5. $K_i = 5 \text{ V rad}^{-1}$.
6. .
7. .
8. .
9. $\beta = \frac{1}{1 + K_{rt} g v}$
10. $K_{BOv2} = \frac{K_i K_{mv} \beta g v}{\alpha \tau_v}$.
11. .
12. $M_\phi = 58^\circ$.
13. $K_i = 120 \text{ V rad}^{-1}$.
14. .
15. .

TD 3

Base TC200 Tecdron – Sujet

Centrale Supelec TSI 2021.

C2-03

Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.



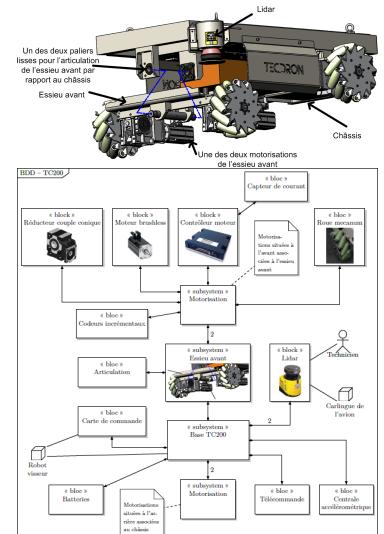
Validation de l'asservissement du moteur

Objectif

Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire $C_f(p) = 0$.



Performance attendue

tive en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon

$$\mu_{v\infty} < 1 \%$$

e ω_{mc0}

itesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe

$$\leq 100 \text{ rad s}^{-1} \text{ pour une pente de } 1800 \text{ rad s}^{-1}$$

$$mc(t) = at$$

réponse à 5 %

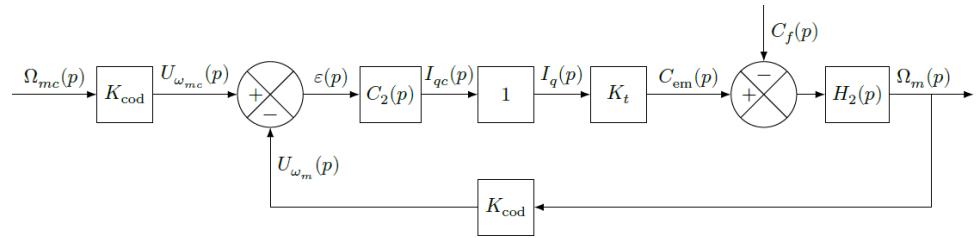
ment maximal

phase

$$t_{5\%} < 180 \text{ ms}$$

$$\leq 10 \%$$

$$\geq 60^\circ$$



Fonction de transfert	Expression	Valeur
Codeur et sa carte de traitement	K_{cod}	$0,2 \text{ V s rad}^{-1}$
Constante de couple	K_t	$0,09 \text{ N m A}^{-1}$
Correcteur de type proportionnel	$C_2(p) = K_2$	
Dynamique de la motorisation	$H_2(p) = \frac{1}{J_{\text{eq}} p}$	$J_{\text{eq}} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$

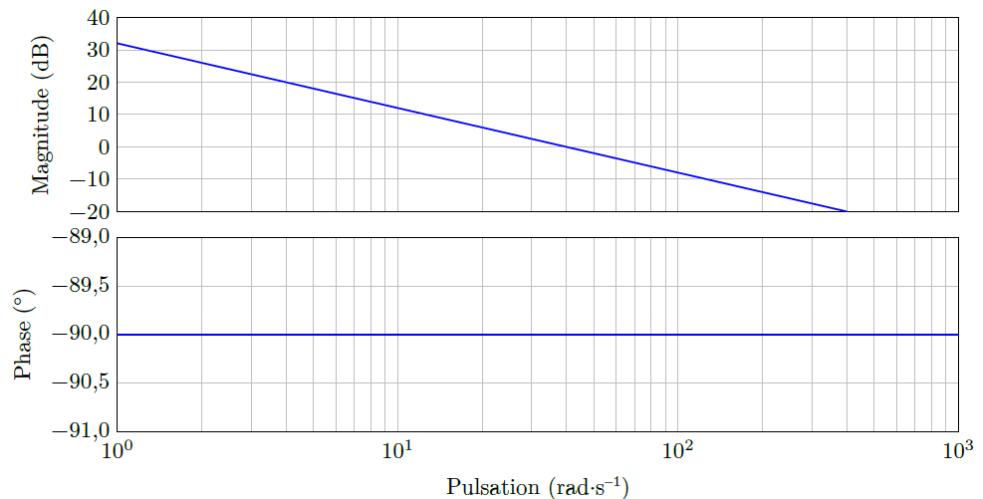
Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{\text{BF}}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$ pour $C_f(p) = 0$.

Question 2 Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

Question 3 Déterminer la condition sur K_2 afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

Question 4 Calculer l'erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne de vitesse en échelon de valeur ω_{mc0} .

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.



Question 5 Identifier la valeur de K_2 qui a été réellement choisie par le constructeur.

Question 6 À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne de vitesse en rampe de pente a et valider le critère de précision des exigences.

TD 3

Base TC200 Tecdron – Corrigé

Centrale Supelec TSI 2021.

C2-03

Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.



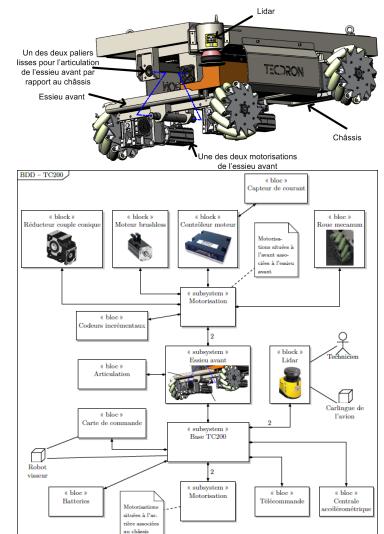
Validation de l'asservissement du moteur

Objectif

Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire $C_f(p) = 0$.



Performance attendue

tive en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon $e \omega_{mc0}$

$$\mu_{v\infty} < 1 \%$$

itesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe $e \omega_{mc}(t) = at$

$$\leq 100 \text{ rad s}^{-1} \text{ pour une pente de } 1800 \text{ rad s}^{-1}$$

$$t_{5\%} < 180 \text{ ms}$$

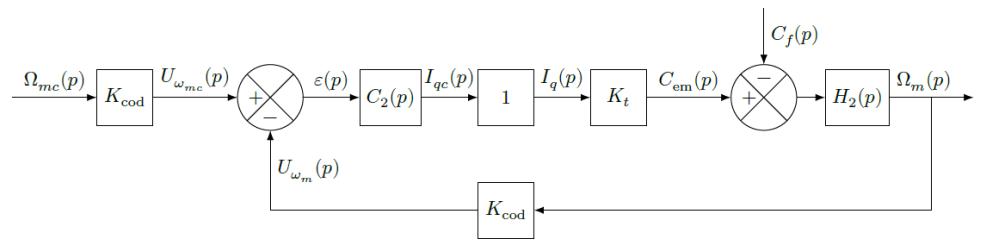
$$\leq 10 \%$$

$$\geq 60^\circ$$

réponse à 5 %

ment maximal

phase



Fonction de transfert	Expression	Valeur
Codeur et sa carte de traitement	K_{cod}	$0,2 \text{ V s rad}^{-1}$
Constante de couple	K_t	$0,09 \text{ N m A}^{-1}$
Corrèleur de type proportionnel	$C_2(p) = K_2$	
Dynamique de la motorisation	$H_2(p) = \frac{1}{J_{\text{eq}} p}$	$J_{\text{eq}} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$

Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{\text{BF}}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$ pour $C_f(p) = 0$.

Correction

Question 2 Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

Correction

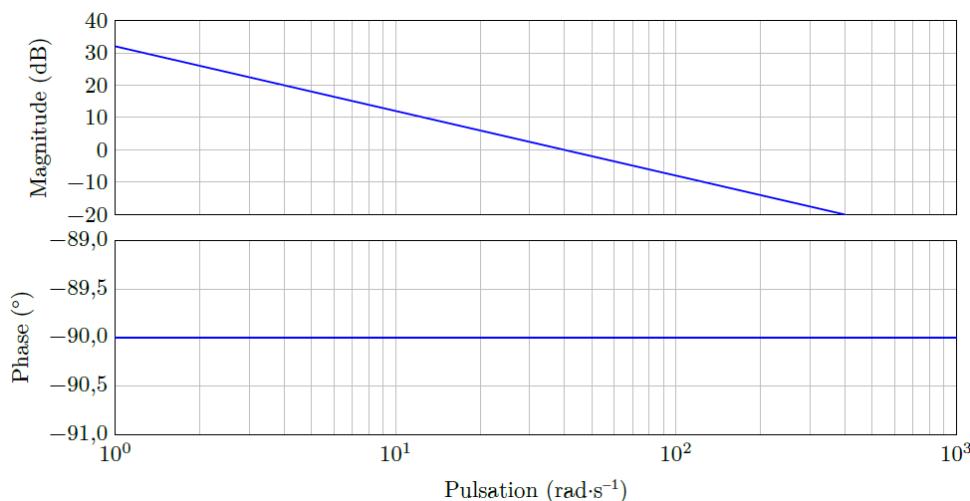
Question 3 Déterminer la condition sur K_2 afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

Correction

Question 4 Calculer l'erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne de vitesse en échelon de valeur ω_{mc0} .

Correction

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.



Question 5 Identifier la valeur de K_2 qui a été réellement choisie par le constructeur.

Correction

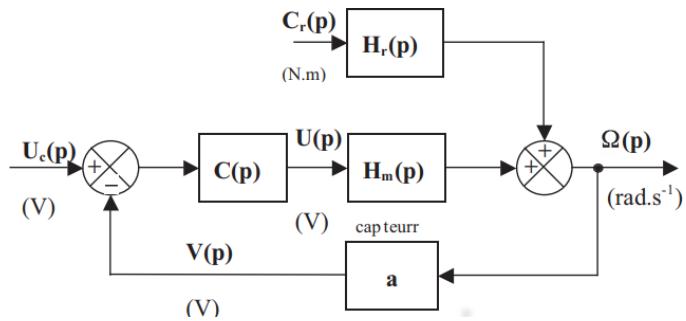
Question 6 À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne de vitesse en rampe de pente a et valider le critère de précision des exigences.

Correction

Application 4

Précision des systèmes – Sujet

On considère le schéma-blocs suivant.



On a $H_r(p) = K_r \frac{1 + 0,492p}{1 + 10,34p + 5,1p^2}$ et $K_r = 0,37 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$. $H_m(p) = \frac{0,5}{(1 + 10p)(1 + 0,5p)}$.

Le gain du capteur est de $a = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 2 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 3 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

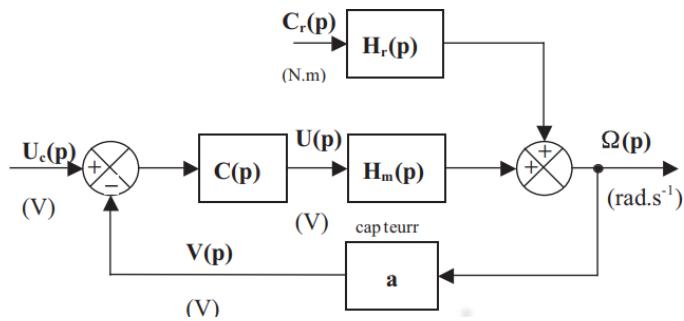
Question 4 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.



Application 4

Précision des systèmes – Corrigé

On considère le schéma-blocs suivant.



On a $H_r(p) = K_r \frac{1 + 0,492p}{1 + 10,34p + 5,1p^2}$ et $K_r = 0,37 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$. $H_m(p) = \frac{0,5}{(1 + 10p)(1 + 0,5p)}$.

Le gain du capteur est de $a = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

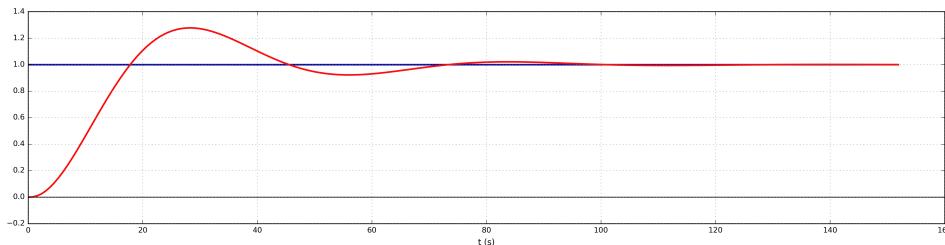
Question 2 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 3 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 4 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.



TD 4

Robot à câbles – Sujet

Concours Centrale-Supélec 2023 – TSI.

Présentation

Les robots parallèles à câbles sont une structure de robots apparus au début des années 2000. Dans ce système, la plate-forme est déplacée et orientée par rapport à une référence fixe dans toutes les directions de l'espace par l'enroulement ou le déroulement de plusieurs câbles (figure ??). Cette structure permet à la plate-forme d'atteindre une grande zone de travail avec une très grande précision dans le positionnement comme dans l'orientation.

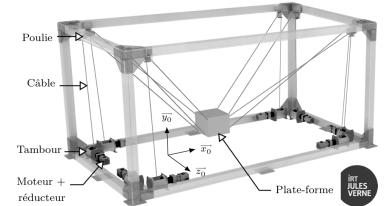


FIGURE 2.23 – Robot à câbles CAROCA

Étude de l'asservissement de la longueur d'un câble pour gérer le mouvement

Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs permettant d'assurer l'enroulement adéquat des câbles.

Le programme de pilotage tient compte de l'allongement relatif des câbles suite aux efforts de traction lors du déplacement de la plate-forme chargée. Il génère alors, pour chacun des huit moteurs, des consignes de position et de vitesse qui sont envoyées aux variateurs de vitesse qui alimentent les moteurs afin d'assurer un positionnement de la plate-forme conforme aux attentes de l'utilisateur. L'ensemble composé d'un variateur et du moteur associé est appelé moto-variateur pour la suite. L'algorithme implanté dans le variateur est de type commande vectorielle, ce qui rend le moto-variateur équivalent à un système du premier ordre avec une bande passante à -3 dB de 200 Hz. Le modèle défini figure est adopté pour la suite.

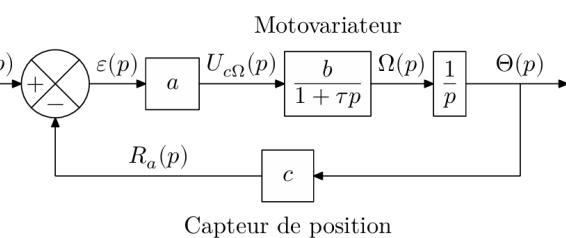


FIGURE 2.24 – Schéma-bloc de la commande en position du moteur

Notations

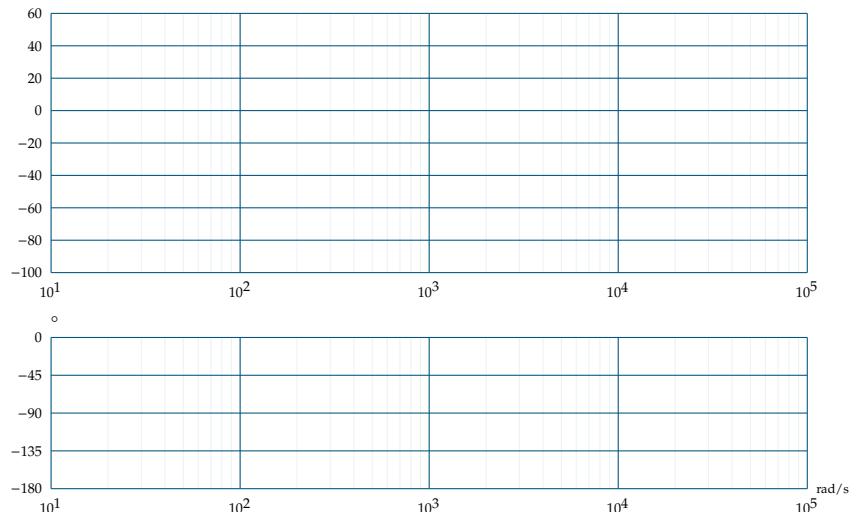
- $\Theta_c(p)$ et $\Theta(p)$ sont respectivement les images de la consigne de position angulaire $\theta_c(t)$ (en rad) issue du programme de pilotage et de la position angulaire effective $\theta(t)$ du moteur (en rad). $\Omega(p)$ est l'image de la vitesse angulaire $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ du moteur (grandeur temporelle en rad s⁻¹).
- Le capteur de position (codeur optique incrémental associé à une unité de comptage sur 13 bits) est de gain $c = 1304$ point rad⁻¹.
- L'adaptateur est de gain K_a , grandeur en point rad⁻¹.
- Le correcteur est de type proportionnel de gain a , ce qui permet de délivrer une tension $u_{c\Omega}(t)$ proportionnelle à l'écart $\varepsilon(t)$. Un pré-réglage a permis de choisir la valeur $a = 43,4$ mV point⁻¹.
- Le comportement du motovariableur est assimilé à un premier ordre de gain $b = 31,4$ rad s⁻¹ V⁻¹ et de constante de temps $\tau = 796 \mu\text{s}$.

Question 1 Justifier la valeur numérique proposée pour la constante de temps τ .

Dans la structure de l'asservissement de position de la figure ??, l'erreur est définie par $\mu(t) = \theta_c(t) - \theta(t)$ (grandeur en rad) et l'écart par $\varepsilon(t) = r_c(t) - r_a(t)$ (grandeur en point).

Question 2 On souhaite que l'erreur $\mu(t)$ soit nulle quand l'écart $\varepsilon(t)$ l'est : en déduire la relation entre K_a et c .

Question 3 Après avoir donné l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(j\omega)$, tracer son diagramme asymptotique de Bode (courbes de gain et de phase en précisant la valeur de la cassure et le gain associé) et esquisser le plus précisément possible l'allure des courbes réelles de réponse fréquentielle.



Question 4 Relever sur la courbe tracée à la question précédente la valeur de la marge de phase $M\varphi$. Sachant qu'on souhaite que cette marge soit de $M\varphi = 45^\circ$, conclure quant au réglage de a .

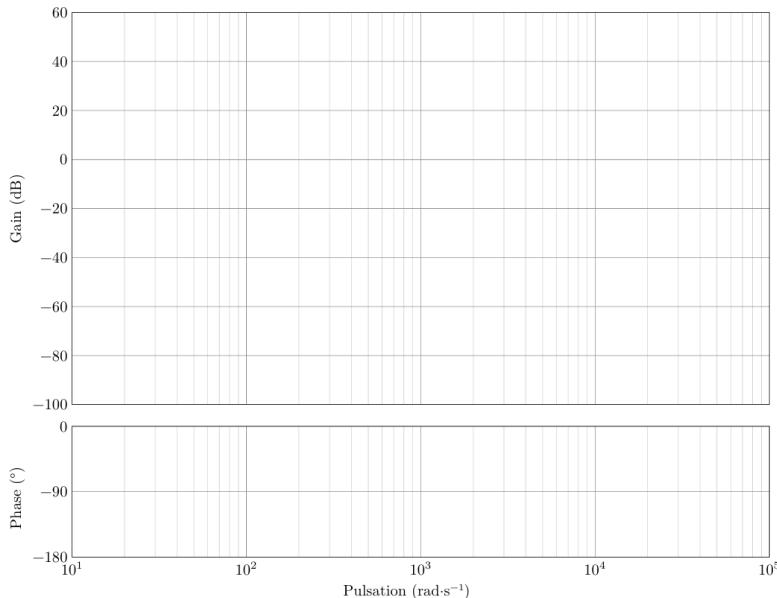
Question 5 Déterminer l'expression de l'image $\mu(p)$ de l'erreur en fonction de l'image $\Theta_c(p)$ de la consigne angulaire et de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p)$ de l'asservissement.

La précision du système s'évalue par l'erreur en régime permanent pour des consignes de position de types :

- ▶ échelon d'amplitude θ_0 (en rad) : l'erreur en régime permanent, notée μ_p (en rad), est dite « statique »;
- ▶ rampe de pente ω_0 (en rad s^{-1}) : l'erreur en régime permanent, notée μ_v (en rad s^{-1}), est dite « de poursuite ».

Les exigences de l'utilisateur imposent que ces deux erreurs doivent être inférieures à 0,1% de la consigne.

Question 6 Déterminer la valeur de l'erreur statique μ_p . Déterminer l'expression de l'erreur de poursuite μ_v en fonction des gains a , b et c et de la pente ω_0 . Faire l'application numérique et vérifier si les exigences de l'utilisateur sont vérifiées.



Éléments de correction

1. .
2. $K_a = c$.
3. $H_{BO}(j\omega) = \frac{1777}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{1256}\right)}$.
4. .
5. $\mu(p) = \frac{\Theta_c(p)}{1 + H_{BO}(p)}$.
6. $\mu_p = 0, \mu_v = \frac{\omega_0}{abc}$.



TD 4

Robot à câbles – Corrigé

Concours Centrale-Supélec 2023 – TSI.

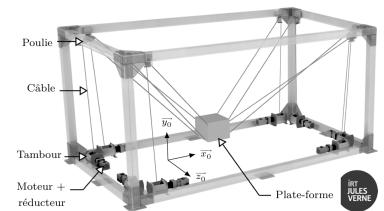


FIGURE 2.25 – Robot à câbles CAROCA

Présentation

Étude de l'asservissement de la longueur d'un câble pour gérer le mouvement

Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs permettant d'assurer l'enroulement adéquat des câbles.

Question 1 Justifier la valeur numérique proposée pour la constante de temps τ .

Correction

Si la bande passant à -3 dB est de 200 Hz, on a une pulsation de cassure à 200 Hz soit $\omega_c = \frac{1}{\tau} = 2 \times \pi \times 200$ et $\tau = 7,9 \times 10^{-4} = 796 \mu\text{s}$.

Question 2 On souhaite que l'erreur $\mu(t)$ soit nulle quand l'écart $\varepsilon(t)$ l'est : en déduire la relation entre K_a et c .

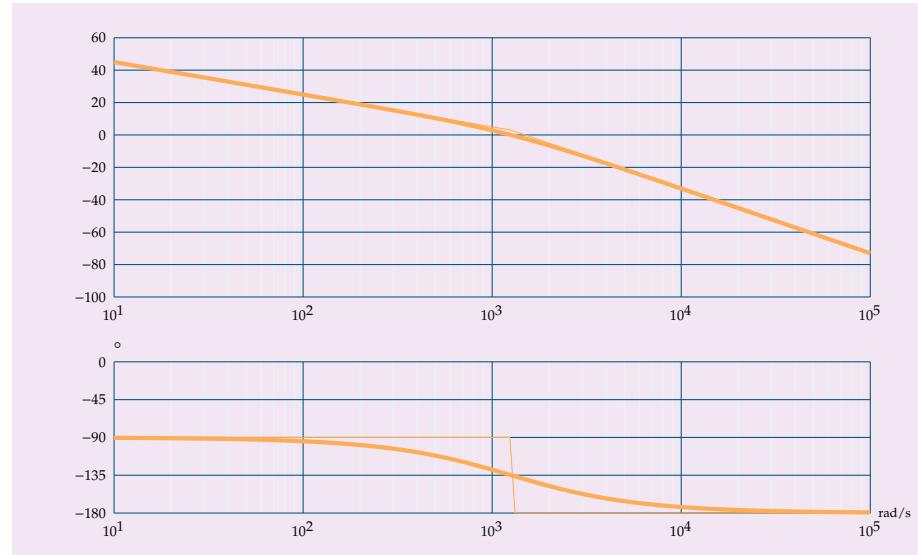
Correction

Dans les conditions citées ci-dessus, il faut donc nécessairement $K_a = c$.

Question 3 Après avoir donné l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(j\omega)$, tracer son diagramme asymptotique de Bode (courbes de gain et de phase en précisant la valeur de la cassure et le gain associé) et esquisser le plus précisément possible l'allure des courbes réelles de réponse fréquentielle.

Correction

Par définition, $H_{bo}(j\omega) = \frac{abc}{p(1 + \tau p)}$ avec $abc = 1304 \times 31,4 \times 43,3 \times 10^{-3} = 1773 \text{ s}^{-1}$.



Question 4 Relever sur la courbe tracée à la question précédente la valeur de la marge de phase $M\varphi$. Sachant qu'on souhaite que cette marge soit de $M\varphi = 45^\circ$, conclure quant au réglage de a .

Correction

La marge de phase est mesurée à environ 45° . Le choix de a est donc convenable.

Question 5 Déterminer l'expression de l'image $\mu(p)$ de l'erreur en fonction de l'image $\Theta_c(p)$ de la consigne angulaire et de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p)$ de l'asservissement.

Correction

Pour déterminer l'erreur vis-à-vis de la consigne, il faudrait déplacer le comparateur vers la gauche. Cela revient à avoir un asservissement à retour unitaire en passant le gain c dans la chaîne directe.

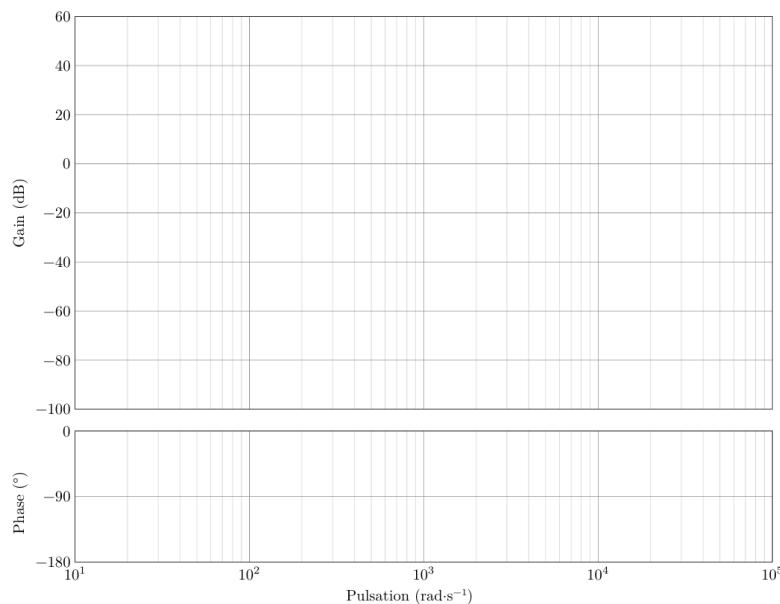
$$\text{On a donc } \mu(p) = \frac{\Theta_c(p)}{1 + FTBO(p)} \text{ avec } FTBO(p) = \frac{abc}{p(1 + \tau p)}.$$

Remarque : on peut aussi exprimer $\varepsilon(p) = \frac{R_c(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{\Theta_c(p)a}{1 + FTBO(p)}$. On a donc $\varepsilon(p) = a\mu(p)$.

Question 6 Déterminer la valeur de l'erreur statique μ_p . Déterminer l'expression de l'erreur de poursuite μ_v en fonction des gains a , b et c et de la pente ω_0 . Faire l'application numérique et vérifier si les exigences de l'utilisateur sont vérifiées.

Correction

La FTBO est de classe 1 et il n'y a pas de perturbation. On a donc $\mu_p = 0$ et $\mu_v = \frac{\omega_0}{abc}$. Pour $\omega_0 = 1$, on a $\mu_v = 0,05\%$. Le cahier des charges est respecté.



TD 5

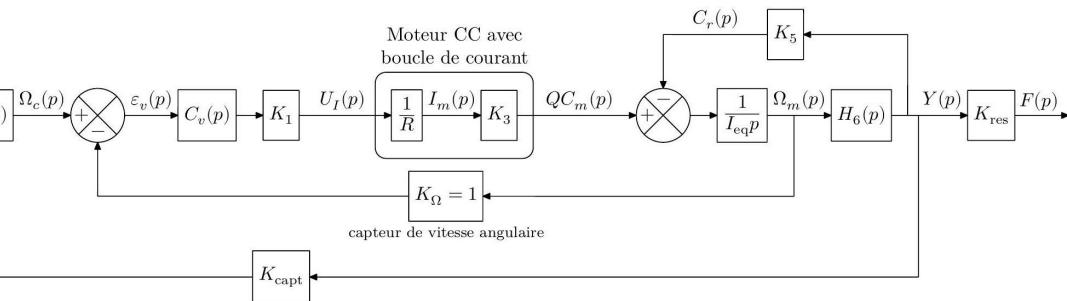
Exosquelette lombaire – Sujet

Concours Centrale-Supélec 2023 – MP.

Mise en situation

On s'intéresse à un banc d'essai permettant de valider un actionneur linéaire. Dans ce cadre, il est nécessaire de proposer un modèle de connaissance de l'asservissement en force, le valider par comparaison avec une mesure sur le banc d'essai et vérifier les performances de l'actionneur linéaire sur ce banc d'essai. Ce modèle permettra de valider une commande pour le cas spécifique étudié.

Le schéma-blocs est donné dans la figure ??.



asservissement de force développée par un actionneur linéaire placé sur le banc d'essai

Réglage de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur

Le schéma-blocs décrivant la structure de l'asservissement de la vitesse angulaire du moteur est fourni sur la figure ?? . Cet asservissement doit respecter le cahier des charges fourni dans le tableau ??.

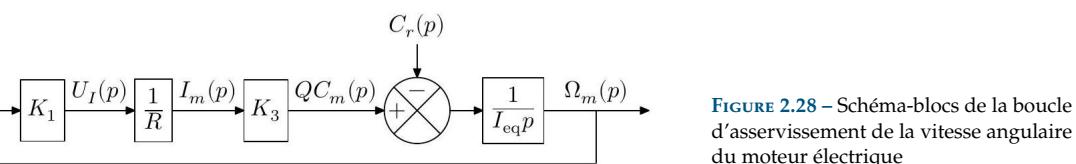


FIGURE 2.28 – Schéma-blocs de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur électrique

Le choix d'un correcteur proportionnel intégral est fait afin de diminuer l'influence de la perturbation en couple modélisée par $C_r(p)$. La fonction de transfert du correcteur de la boucle d'asservissement en vitesse angulaire est noté $C_v(p)$, tel que $C_v(p) = K_i \frac{1+\tau_{ip}}{\tau_{ip}}$.

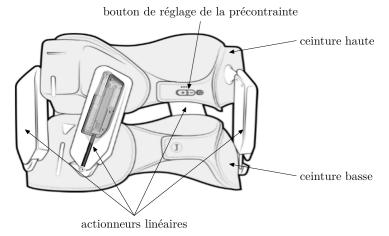


FIGURE 2.26 – Exosquelette lombaire Japet

Critère concepteur	Niveau
Marge de phase	$\geq 80^\circ$
Erreur en régime permanent pour une perturbation en échelon constant	Nulle
Pulsation de coupure à 0 dB	$\omega_0 \text{ dB} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

TABLE 2.1 – Critères concepteur pour la boucle d’asservissement de la vitesse angulaire

On note $H_{BOv}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\varepsilon_v(p)}$ la fonction de transfert en boucle ouverte de l’asservissement de vitesse angulaire du moteur.

Question 1 Déterminer l’expression littérale de la phase de $H_{BOv}(i\omega)$. En déduire la valeur numérique de τ_i respectant les critères concepteur de la boucle de vitesse.

Le diagramme de Bode de la boucle ouverte $H_{BOv}(p)$, avec $K_i = 1$ et τ_i déterminé à la question ??, est donné sur la figure ??.

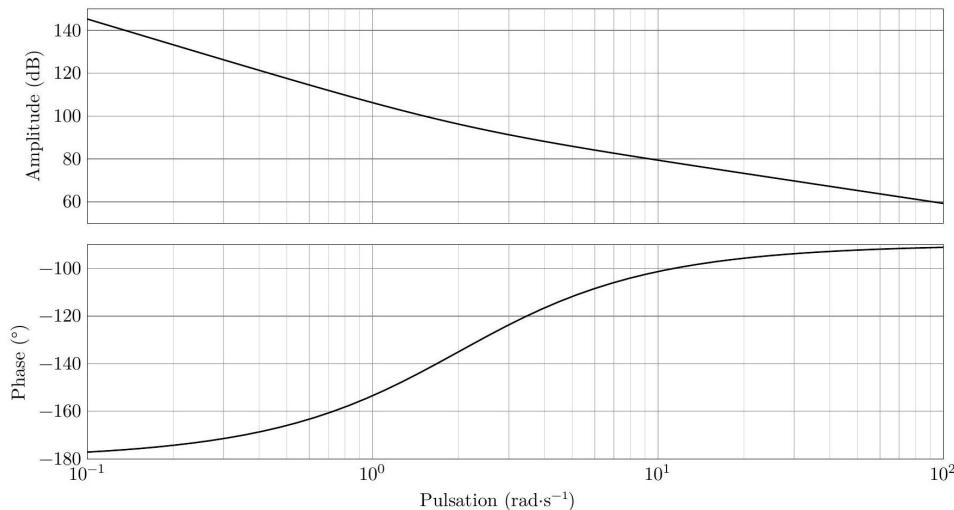


FIGURE 2.29 – Diagramme de Bode de $H_{BOv}(p)$

Question 2 Déterminer la valeur numérique de K_i afin que la boucle d’asservissement de vitesse respecte les critères concepteur du tableau ??.

Simplification du modèle de connaissance

Il est possible de mettre le schéma-blocs de la figure ?? sous la forme du schéma-blocs de la figure ??, afin de faciliter la prévision des performances simulées.

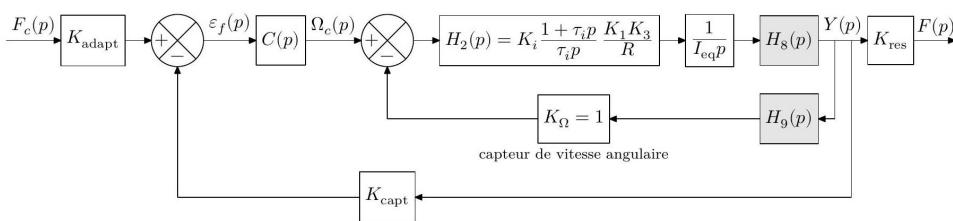


FIGURE 2.30 – Schéma-blocs de l’asservissement de la force développée par un actionneur linéaire

Question 3 Déterminer les fonctions de transfert $H_8(p)$ et $H_9(p)$ en fonction de K_5 , I_{eq} et $H_6(p)$. Ne pas remplacer K_5 et $H_6(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Pour faciliter l’analyse des performances simulées, le schéma-blocs de la figure ?? est adapté afin de disposer d’un schéma-blocs à retour unitaire, tel que décrit sur la figure ??.

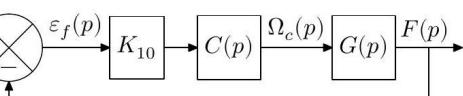


FIGURE 2.31 – Schéma-blocs de l'asservissement de la force développée par un actionneur linéaire à retour unitaire

Question 4 Déterminer l'expression du gain K_{10} en fonction de K_{capt} et de K_{res} .

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $G(p)$ en fonction de $H_2(p)$, I_{eq} , $H_8(p)$, $H_9(p)$ et K_{res} . Ne pas remplacer $H_2(p)$, $H_8(p)$ et $H_9(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Pour la suite, on donne la fonction de transfert $G(p)$, obtenue avec les valeurs de réglage correctes déterminées aux questions ?? et ??,

$$G(p) = \frac{F(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1 + \tau_i p}{p} \frac{1,2 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-4} + 9,7 \times 10^{-5} p + 5,3 \times 10^{-6} p^2}.$$

Analyse des performances de l'asservissement en force développée par un actionneur linéaire

Il est proposé dans cette section d'analyser les performances simulées de l'asservissement en force dont un extrait du cahier des charges est présenté dans le tableau ??.

Indicateur	Niveau
Angle de phase	$\geq 60^\circ$
Angle de gain	$> 20 \text{ dB}$
Passage maximal	$< 2,5\%$
Temps en régime permanent pour une entrée en échelon	$< 1\%$
Temps de réponse à 5% pour une consigne en échelon de force de 40 N	$t_{\text{r}5\%} < 1 \text{ s}$
Vitesse maximale de montée de la force de traction	$100 \text{ N} \cdot \text{s}^{-1}$

TABLE 2.2 – Extrait du cahier des charges fonctionnel de l'actionneur linéaire sur le banc d'essai

On note $H_{BOf}(p) = \frac{F(p)}{\varepsilon_f(p)}$ la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en force développé par un actionneur linéaire. Dans un premier temps, le choix d'un correcteur proportionnel $C(p) = K_{\text{cor}}$ est réalisé. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert $H_{BOf}(p) = \frac{F(p)}{\varepsilon_f(p)} = K_{\text{cor}} K_{10} G(p)$, avec $K_{\text{cor}} = 1$ et la valeur de τ_i déterminée à la question ??, est donné sur la figure ??.

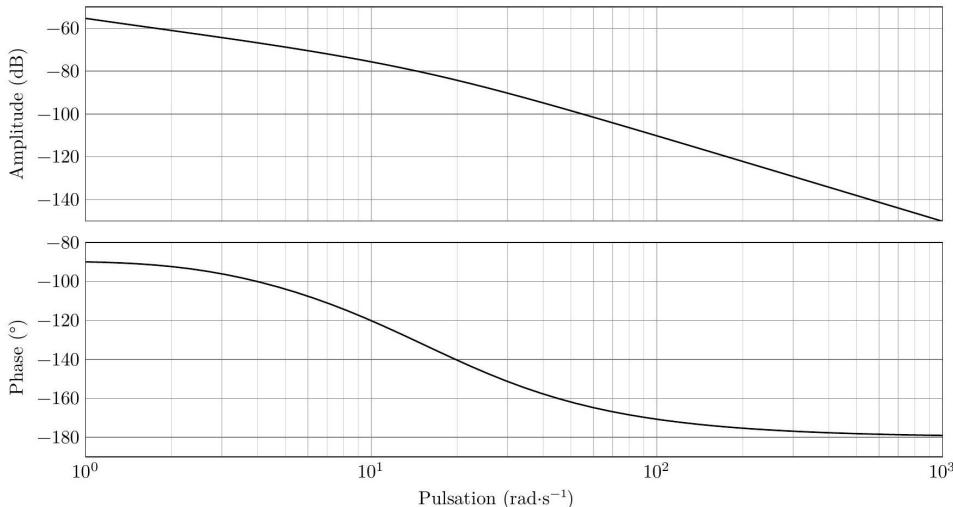


FIGURE 2.32 – Diagramme de Bode de $H_{BO_f}(p)$

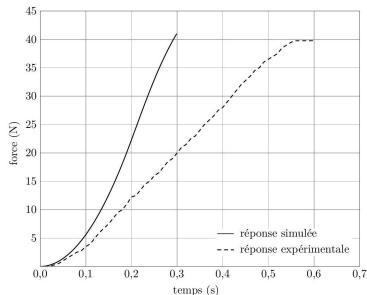


FIGURE 2.33 – Réponses temporelles du modèle et expérimentale, pour une consigne en échelon de force de 40 N

Question 6 Déterminer la valeur numérique limite de K_{cor} afin que la boucle d'asservissement de force respecte les critères de marge de phase et de gain du tableau ??.

Les courbes sur la figure ?? représentent les réponses temporales du modèle de connaissance de la figure ??, avec les correcteurs $C_v(p)$ et $C(p)$ correctement réglés, et de l'expérimentation sur le banc d'essai pour une consigne en échelon de force de 40 N.

Question 7 Quel critère du tableau des exigences (tableau ??) n'est pas pris en compte dans le modèle de connaissance? D'après la courbe expérimentale, ce critère est-il respecté par le système réel?



TD 5

Exosquelette lombaire – Corrigé

Concours Centrale-Supélec 2023 – MP.

Mise en situation

Réglage de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur

Question 1 Déterminer l'expression littérale de la phase de $H_{BOV}(i\omega)$. En déduire la valeur numérique de τ_i respectant les critères concepteur de la boucle de vitesse.

Correction

$$\text{On a } H_{BOV}(i\omega) = C_v(p)K_1 \frac{1}{R} K_3 \frac{1}{I_{eq}p} = \frac{K_i K_1 K_3}{R I_{eq}} \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p^2}.$$

$$\text{On a } \varphi(\omega) = \arg\left(\frac{K_i K_1 K_3}{R I_{eq}}\right) + \arg(1 + \tau_i p) - \arg(\tau_i p^2) = \arctan \tau_i \omega - 180^\circ.$$

On souhaite une marge de phase supérieure à 80° ; donc $M_\varphi = \varphi(\omega) + 180 = \arctan \tau_i \omega \geq 80^\circ$.

$$\arctan \tau_i \omega \geq 80^\circ \Rightarrow \tau_i \omega \geq \tan 80 \Rightarrow \tau_i \geq \frac{\tan 80}{\omega_{0dB}} \Rightarrow \tau_i \geq 0,57 \text{ s.}$$

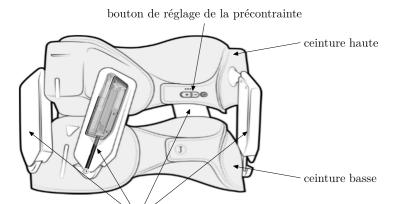


FIGURE 2.34 – Exosquelette lombaire Japet

Question 2 Déterminer la valeur numérique de K_i afin que la boucle d'asservissement de vitesse respecte les critères concepteur du tableau ??.

Correction

Pour $\omega_{0dB} = 10 \text{ rad s}^{-1}$ on mesure un gain de 80 dB . Il faut donc déterminer K_i tel que $20 \log K_i = -80$ soit $K_i = 1 \times 10^{-4} \text{ V s rad}^{-1}$.

Les critères de marge et de pulsation de coupure sont respectés (on a tout fait pour). L'erreur statique est nulle car il y a un intégrateur dans le correcteur (elle sera nulle à condition que la perturbation soit constante).

Simplification du modèle de connaissance

Question 3 Déterminer les fonctions de transfert $H_8(p)$ et $H_9(p)$ en fonction de K_5, I_{eq} et $H_6(p)$. Ne pas remplacer K_5 et $H_6(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Correction

En décalant le point de prélèvement du capteur de vitesse d'un bloc vers la droite, on se retrouve avec $\frac{1}{H_6(p)}$ dans la boucle de retour.

On sort le bloc $\frac{1}{I_{\text{eq}}p}$ de la « petite » boucle et $\frac{1}{I_{\text{eq}}p}$ se retrouve aussi dans la pboucle de retour.

En identifiant, on a alors $H_9(p) = \frac{1}{H_6(p)}$ et en utilisant la formule de Black, on a $H_8(p) =$

$$\frac{H_6(p)}{1 + \frac{H_6(p)K_5}{I_{\text{eq}}p}} = \frac{H_6(p)I_{\text{eq}}p}{I_{\text{eq}}p + H_6(p)K_5}.$$

Question 4 Déterminer l'expression du gain K_{10} en fonction de K_{capt} et de K_{res} .

Correction

En décalant le point de prélèvement de droite vers la droite, on a alors K_{res} dans la boucle de retour. Pour que le système soit correctement asservi, il faut donc nécessairement que $K_{\text{adapt}} = K_{\text{capt}}K_{\text{res}}$

On se ramène ensuite à un retour unitaire. On alors $K_{10} = K_{\text{capt}}K_{\text{res}}$.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $G(p)$ en fonction de $H_2(p)$, I_{eq} , $H_8(p)$, $H_9(p)$ et K_{res} . Ne pas remplacer $H_2(p)$, $H_8(p)$ et $H_9(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Correction

$$G(p) = \frac{H_2(p)\frac{1}{I_{\text{eq}}p}H_8(p)}{1 + H_2(p)H_8(p)H_9(p)\frac{1}{I_{\text{eq}}p}}K_{\text{res}} = \frac{H_2(p)H_8(p)}{I_{\text{eq}}p + H_2(p)H_8(p)H_9(p)}K_{\text{res}}$$

Pour la suite, on donne la fonction de transfert $G(p)$, obtenue avec les valeurs de réglage correctes déterminées aux questions ?? et ??,

$$G(p) = \frac{F(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1 + \tau_i p}{p} \frac{1,2 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-4} + 9,7 \times 10^{-5} p + 5,3 \times 10^{-6} p^2}.$$

Analyse des performances de l'asservissement en force développée par un actionneur linéaire

Question 6 Déterminer la valeur numérique limite de K_{cor} afin que la boucle d'asservissement de force respecte les critères de marge de phase et de gain du tableau ??.

Correction

La marge de gain sera toujours infinie car la phase tend asymptotiquement vers -180° .

Pour régler la marge de phase à 60° , il faut relever le gain de 75 dB. On a donc $K_{\text{cor}} = 10^{75/20} \simeq 5623$.

Question 7 Quel critère du tableau des exigences (tableau ??) n'est pas pris en compte dans le modèle de connaissance? D'après la courbe expérimentale, ce critère est-il respecté par le système réel?

Correction

La réponse temporelle du modèle ne permet pas de savoir si l'exigence 1.1 sur le dépassement est respectée.

Ce critère semble respecté sur le système réel vu qu'aucun dépassement n'est observé en régime permanent.