

4 Rappels de Statique

4.1 Modélisation locale des actions mécaniques

Définition – Action mécanique de contact volumique

Localement, les actions mécaniques volumiques peuvent être modélisées par le

$$\text{torseur suivant : } \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iiint_V f(M) \overrightarrow{u(M)} dV \\ \overrightarrow{M(P, 1 \rightarrow 2)} = \iint_M \overrightarrow{PM} \wedge dR(1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_M.$$

La densité volumique d'effort s'exprime en $[\text{Nm}^{-3}]$.

Définition – Action mécanique de contact surfacique

Localement, les actions mécaniques dans un contact surfacique peuvent être modélisées par le torseur suivant : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iint_S f(M) \overrightarrow{u(M)} dS \\ \overrightarrow{M(P, 1 \rightarrow 2)} = \iint_S \overrightarrow{PM} \wedge dR(1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_M.$$

La densité surfacique d'effort peut alors se décomposer sur le vecteur normal au contact et sur un vecteur appartenant au plan tangent au contact. On a alors $f(M) \overrightarrow{u(M)} = p_{12}(M) \overrightarrow{n_{12}} + \tau_{12}(M)$. On note :

- ▶ $p_{12}(M)$ pression de contact au point M (en $[\text{Nm}^{-2}]$);
- ▶ $\tau_{12}(M)$ la projection tangentielle de la densité surfacique (norme en $[\text{Nm}^{-2}]$).

4.1	Modélisation locale des actions mécaniques	1
4.2	Modélisation globale des actions mécaniques	1
4.3	Modélisation du contact ponctuel entre 2 pièces	3
4.4	Modélisation locale des actions mécaniques	4
4.5	Résolution des problèmes d'arc-boutement	5
4.1	Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer	5
4.2	Les types de problèmes	6
4.3	Stratégie d'isolement	6

02 STAT

4.2 Modélisation globale des actions mécaniques

Définition – Torseur statique ou torseur sthénique ou torseur d'efforts

L'action mécanique d'un système matériel S_1 (ou d'un phénomène physique) sur un système matériel S_2 est représentable par un torseur au point M :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M, S_2 \rightarrow S_1)} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{M,\mathcal{R}}$$

Remarque

La norme de vecteur $\overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$ est en Newton (N). La norme du vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}(M, S_2 \rightarrow S_1)}$ est en Newton – mètre ($N \cdot m$).

Propriété – Varignon

Le torseur statique étant un torseur, on a donc :

$$\forall B, \overrightarrow{\mathcal{M}(B, S_2 \rightarrow S_1)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, S_2 \rightarrow S_1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$$

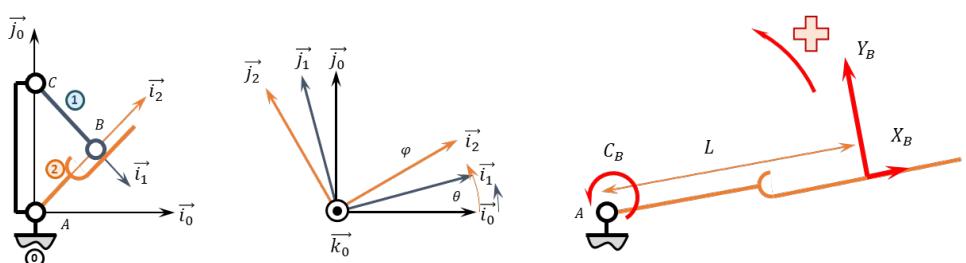
**Remarque – Moment d'une force – Interprétation graphique**

Prenons le cas du serrage d'un écrou avec un effort $\vec{F} = -F\vec{y}$:

Dans l'hypothèse où l'effort \vec{F} s'appliquerait au point O , il n'y aurait donc pas de serrage de l'écrou. Le moment (ou couple de serrage) serait donc nul : $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, Clef \rightarrow Ecrou)} = \vec{0}$.

Si l'effort s'applique en P : $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, Clef \rightarrow Ecrou)} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = L\vec{x} \wedge -F\vec{y} = -LF\vec{z}$. Méthode pour déterminer le moment dans un problème plan :

- ▶ norme du vecteur : effort fois bras de levier (on peut éventuellement décomposer l'effort dans le repère de travail);
- ▶ perpendiculaire au plan;
- ▶ sens : on regarde si, par rapport au point où on cherche le moment, l'effort fait tourner la pièce dans le sens direct ou indirect.



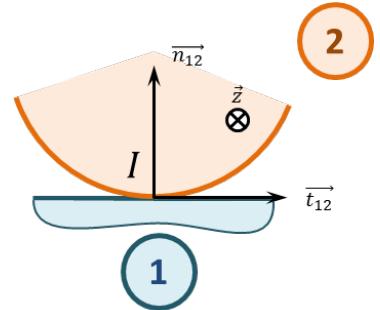
Application du TMS en A : $C_B + Y_B L + 0 = 0$.

B2-14

4.3 Modélisation du contact ponctuel entre 2 pièces

4.3.1 Torseur des actions mécaniques

Considérons le contact ponctuel ponctuel entre deux pièces 1 et 2. En considérant la liaison parfaite, le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 s'écrit sous la forme suivante : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{12}\vec{n}_{12} \\ 0 \end{array} \right\}_I$ en notant \vec{n}_{12} le vecteur normal au contact orienté de 1 vers 2. En considérant que la liaison n'est pas parfaite, plusieurs situation peuvent se présenter.



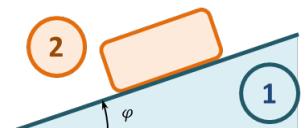
- ▶ Si on considère qu'un effort tend à faire translater 2 suivant \vec{t}_{12} , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\vec{n}_{12} + T_{12}\vec{t}_{12} \\ 0 \end{array} \right\}_I$.
- ▶ Si on considère qu'un effort tend à faire rouler 2 autour de \vec{z}_{12} , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\vec{n}_{12} \\ M_{r12}\vec{z} \end{array} \right\}_I$ avec M_{r12} moment de résistance au roulement.
- ▶ Si on considère qu'un effort tend à faire pivoter 2 autour de \vec{n}_{12} , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\vec{n}_{12} \\ M_{p12}\vec{n}_{12} \end{array} \right\}_I$ avec M_{p12} moment de résistance au pivotement.

Remarque

Il est possible de modéliser l'ensemble des composantes dues au frottement dans un même torseur.
On fait l'hypothèse ici d'un problème plan, mais il peut aisément être adapté à un modèle 3D.

4.3.2 Facteur de glissement et d'adhérence

Considérons la pièce 2 sur un plan incliné 1. Notons φ_a l'angle à partir duquel la pièce 2 se met à glisser sur le plan. On appelle $f_a = \tan \varphi_a$ le facteur d'adhérence.



On constate expérimentalement qu'une fois la pièce est en mouvement, si on diminue l'angle φ , la pièce continue à glisser, jusqu'à un angle φ_g . On appelle $f_g = \tan \varphi_g$ le facteur de glissement.

Ces facteurs sont sans unité. Ils dépendent de la nature des matériaux en contact ainsi que de la nature des surfaces de contact (et d'un lubrifiant éventuel). Ils sont indépendants de l'effort de 2 sur 1. Ces deux facteurs étant relativement proches, on fera l'hypothèse que $f = f_a = f_g$.

4.3.3 Modélisation de l'adhérence et du glissement – Lois de Coulomb

Cas 1 – Glissement – $\overrightarrow{V(1,2/1)} \neq \vec{0}$

- ▶ Connaissant le sens et la direction de $\overrightarrow{V(1,2/1)}$, alors \vec{t}_{12} s'oppose à $\overrightarrow{V(1,2/1)}$.
- ▶ $|T_{12}| = f|N_{12}|$.
- ▶ La vecteur vitesse appartenant au plan tangent au contact, on dit que l'effort résultant ($\overrightarrow{F_{12}} = N_{12}\vec{n}_{12} + T_{12}\vec{t}_{12}$) est sur le cône de frottement.

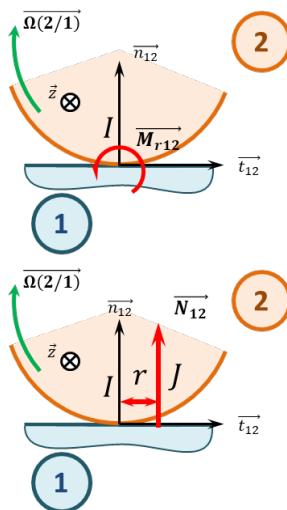
Cas 2 – Adhérence – $\overrightarrow{V(1,2/1)} = \vec{0}$

- ▶ La direction de \vec{t}_{12} n'est pas connue.
- ▶ $|T_{12}| \leq f|N_{12}|$.
- ▶ La direction \vec{t}_{12} n'étant pas connue, on dit que l'effort résultant ($\overrightarrow{F_{12}} = N_{12}\vec{n}_{12} + T_{12}\vec{t}_{12}$) appartient au cône d'adhérence.

Remarque

En considérant que la direction du vecteur vitesse peut décrire le plan tangent au contact, la résultante des efforts $\overrightarrow{F_{12}}$ décrit alors un cône. On parle donc de cône d'adhérence.

4.3.4 Modélisation de la résistance au roulement et au pivotement



Modélisation de la résistance au roulement

- ▶ Le moment de résistance au roulement $\overrightarrow{M_{r12}}$ s'oppose à $\overrightarrow{\Omega(2/1)} \cdot \vec{z}$.
- ▶ On note r le coefficient de résistance au roulement ([m]) et on a $||\overrightarrow{M_{r12}}|| = r||\overrightarrow{N_{12}}||$.

Modélisation de la résistance au pivotement

- ▶ Le moment de résistance au pivotement $\overrightarrow{M_{p12}}$ s'oppose à $\overrightarrow{\Omega(2/1)} \cdot \vec{n}_{12}$.
- ▶ On note p le coefficient de résistance au pivotement ([m]) et on a $||\overrightarrow{M_{p12}}|| = p||\overrightarrow{N_{12}}||$.

Ainsi pour modéliser la résistance au roulement, on peut faire l'hypothèse que l'action normale de 1 sur 2 est « avancée » de r par rapport au point I .

4.4 Modélisation locale des actions mécaniques

Définition – Action mécanique locale

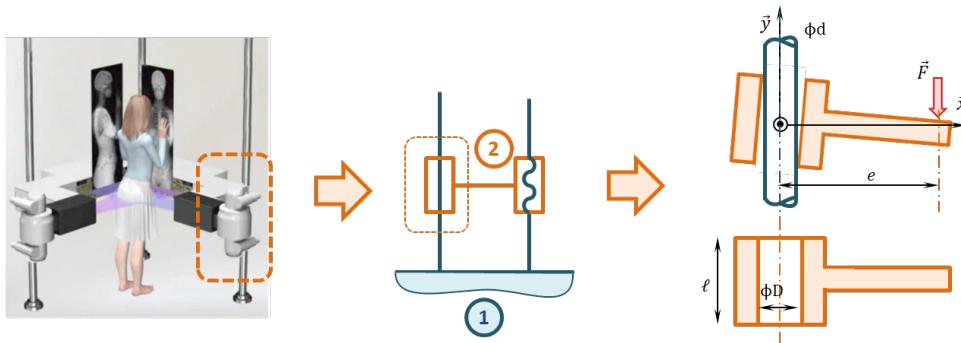
Localement, les actions mécaniques dans un contact ponctuel avec frottement peuvent être modélisées par le torseur suivant : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iint_S f(M) \overrightarrow{u(M)} dS \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, 1 \rightarrow 2)} = \iint_S \overrightarrow{PM} \wedge d\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M$.

La densité surfacique d'effort peut alors se décomposer sur le vecteur normal au contact et sur un vecteur appartenant au plan tangent au contact. On a alors $f(M) \overrightarrow{u(M)} = p_{12}(M) \overrightarrow{n_{12}} + \overrightarrow{\tau_{12}}(M)$. Dans le cas du glissement : $||\overrightarrow{\tau_{12}}(M)|| = p_{12} \cdot f$. En notant :

- ▶ $p_{12}(M)$ pression de contact au point M (en Nm^{-2});
- ▶ $\tau_{12}(M)$: la projection tangentielle de la densité surfacique (norme en Nm^{-2});
- ▶ f facteur de frottement.

4.5 Résolution des problèmes d'arc-boutement

L'arc-boutement est un phénomène de blocage d'une liaison (souvent glissière ou pivot glissant). Ce phénomène est causé d'une part par le frottement dans une liaison et d'autre part par le jeu existant entre les deux pièces en mouvement. En effet, le jeu dans la liaison autorise une légère rotation de la pièce mâle, modifiant les zones de contact. Le frottement dans ces zones de contact conduit à l'arc-boutement.



On commence donc par modéliser le contact par des liaisons ponctuelles avec frottement. L'écriture du PFS et l'utilisation du modèle de Coulomb permet de déterminer des conditions géométriques à la limite du coincement. (Pour cela, on fait l'hypothèse qu'on est à la limite du glissement en un point (égalité) et dans le cône d'adhérence à l'autre point inégalité.)

4.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer

01 STAT 03 STAT

1. **Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.**
2. **Faire un bilan des actions mécaniques extérieures et écrire le torseur associé.**
3. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
4. **Faire un graphe d'analyse (ou de structure : liaisons et actions mécaniques extérieures).**
5. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
6. **Faire des produits vectoriels le plus vite possible.**
7. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
8. **Simplifier les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons dans le cas d'un problème plan.**

4.2 Les types de problèmes

Le principe fondamental de la statique a pour objectif de calculer des actions mécaniques dans deux cas :

1. connaître toutes les actions mécaniques dans toutes les liaisons ;
2. connaître la loi entrée-sortie en effort, c'est à dire :
 - quel couple moteur faut-il pour déplacer un objet ?
 - quel effort doit fournir le vérin pour soulever cette masse ?
 - ...

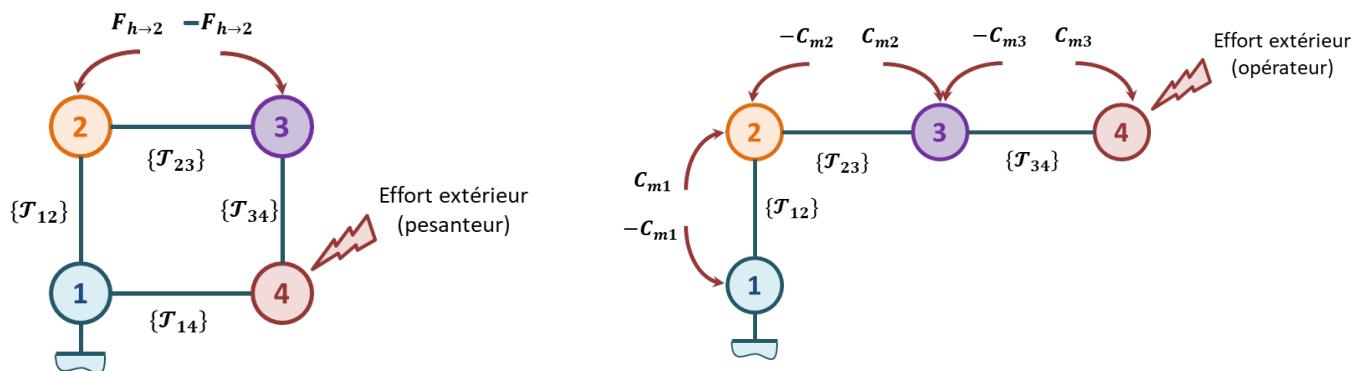
Dans le cas 1, il faut isoler chacune des pièces et réaliser le PFS.

Dans le cas 2, on peut essayer de minimiser le nombre d'équations à écrire. C'est cette stratégie que nous allons présenté.

4.3 Stratégie d'isolement

4.3.1 Graphe d'analyse, ou de structure

On rencontre principalement deux types de structures : des chaînes fermées, ou des chaînes ouvertes.



Remarques :

- Entre les pièces (ou les groupes de pièces), on matérialise les liaisons (dont vous connaissez super bien les torseurs).
- Entre certaines pièces (ou groupes de pièces), il peut exister des actions mécaniques extérieures qui agissent « en positif » sur une des pièces et « en négatif » sur l'autre. **C'est par exemple le cas des moteurs et des vérins.** Il faut bien préciser que l'action mécanique agit sur les deux pièces.
- Les actions strictement extérieures (comme la pesanteur) ne sont pas en interactions entre deux pièces.

4.3.2 Isoler les solides soumis à 2 glisseurs

On commence toujours, toujours, toujours, toujours, toujours, toujours par isoler les ensembles soumis à 2 glisseurs. Cela permet de conclure que, d'après le PFS (et le principe des actions réciproques qui en découle) les actions mécaniques agissant

sur ce solide ont même direction, même norme et sens opposé. Ce qui supprime des inconnues.

Mais qu'est-ce qu'un glisseur ?

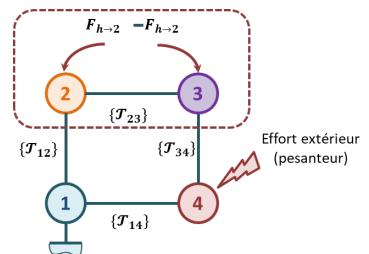
Un glisseur est un torseur dont il existe un point tel que le moment est nul. Ainsi, le torseur statique d'une liaison rotule est un glisseur. Le torseur statique d'une liaison pivot n'est pas un glisseur.

Remarque

Pour démontrer qu'un torseur est un glisseur, on peut par exemple montrer que son automoment est nul. L'automoment est le produit de la résultante et du moment d'un torseur. Il est identique en tout point. C'est un invariant du torseur (comme la résultante).

Dans le cas ci-dessous, si on isole 2, 3 et h (qui pourrait être une action hydraulique). Ainsi, si $\{T_{12}\}$ et $\{T_{43}\}$ sont des glisseurs de « centres » respectifs A et B et qu'on note $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$. Alors on a $\{T_{12}\} = -\{T_{43}\} = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{u} \\ 0 \end{array} \right\}_A$.

Il faut bien comprendre que $\{T_{12}\}$ et $\{T_{43}\}$ pouvaient avoir chacun 2 ou 3 inconnues et que maintenant nous avons au total UNE inconnue.



4.3.3 Isoler les solides soumis à 3 glisseurs ou plus

La stratégie est toujours la suivante :

1. **Isoler la pièce.**
2. **Réaliser le bilan des actions mécaniques, en écrivant les torseurs et en laissant de la place à gauche de la feuille pour les déplacer.**
3. **Citer L'équation du PFS qu'on va utiliser.** Cela peut être le théorème de la résultante statique (TRS) suivant l'axe \vec{u} ou le théorème du moment statique (TMS) au point A en projection sur \vec{u} .
4. **Effectuer la résolution.** (Déplacer les torseurs, appliquer le PFS.)
5. **Réitérer avec un autre isolement.**

4.3.4 Oui, mais quel est le problème ?

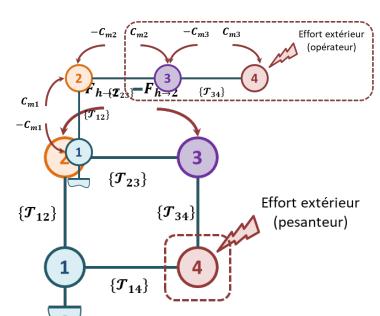
Le problème est de choisir L'équation. Je dirai qu'il faut écrire le théorème qui correspond à la mobilité de la pièce isolée, mais cela a-t-il vraiment un sens ? Prenons des exemples...

Si on a isolé 4 et que $\{T_{14}\}$ est une liaison pivot d'axe (A, \vec{z}) , on réalisera un théorème du moment statique en A en projection suivant \vec{z} .

Si on a isolé 4 et que $\{T_{14}\}$ est une liaison glissière de direction \vec{u} , on réalisera un théorème de la résultante statique en projection suivant \vec{u} .

... Est-ce que c'est plus clair?... J'espère...

Si on cherche une relation entre l'effort extérieur et C_{m2} , que la liaison entre 2 et 3 est une liaison pivot d'axe (B, \vec{x}) , on isolera {3 et 4} et on réalisera un théorème du moment statique en B en projection suivant \vec{x} .



... Toujours pas clair?... Si?

4.3.5 Il y a plus qu'à ...

Petite remarque pour finir : le produit mixte. Lorsqu'on applique un TMS suivant une direction, le produit mixte peut être un bon outil : $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{z} = (\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{z} + (\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}) \cdot \vec{z}$... et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{z} = (\vec{v} \wedge \vec{z}) \cdot \vec{u} = (\vec{z} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$.

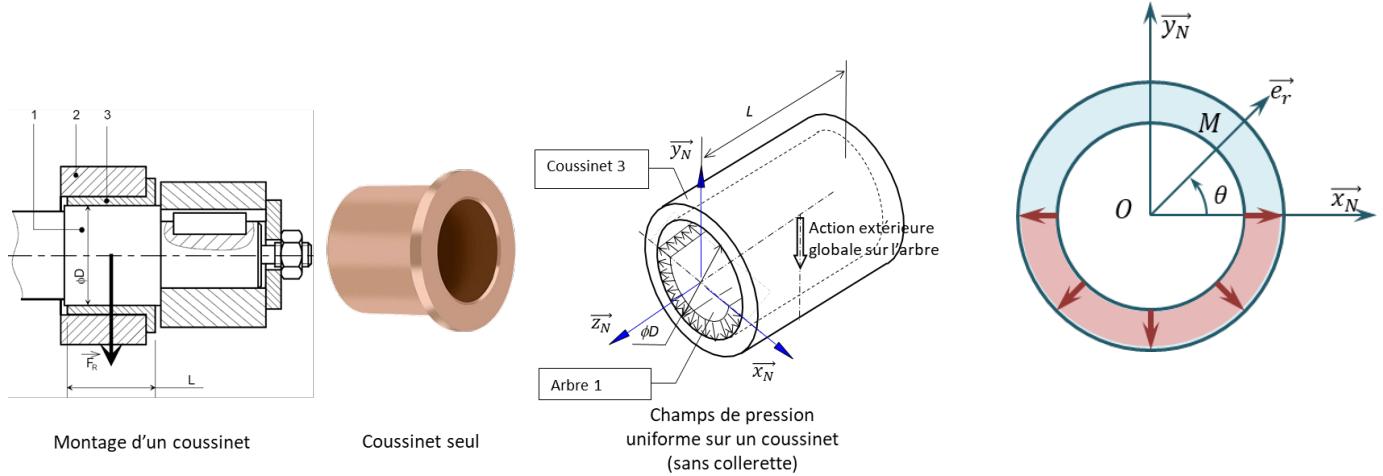
Application 1

Modélisation des actions mécaniques – Sujet

Torseur des actions mécaniques transmissibles dans un coussinet

 STAT

Un coussinet (ou bague) est un élément technologique permettant de réaliser des liaisons pivot. Suivant les cas d'utilisation d'un système, un chargement sur l'arbre est transmis au coussinet.



On donne le modèle suivant où le champ de pression de l'arbre sur le coussinet est uniforme pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$. On note $R = \frac{D}{2}$ le rayon du coussinet.

Question 1 Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)z_N}$.

On considère maintenant que la pression n'est pas uniforme et vaut au point M $p(M) = p_0 \sin \theta$.

Question 3 Justifier que $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$ n'a une composante que sur \vec{y} .

Question 4 Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$. On rappelle que $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$.

Éléments de correction

$$2. \overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)z_N} = 0.$$

$$3. \overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} = -LDp \vec{y}.$$

STAT STAT STAT

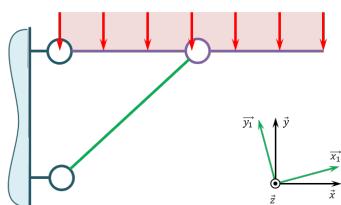


FIGURE 4.1 – Modélisation initiale

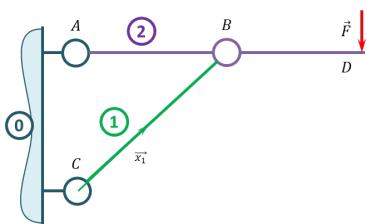
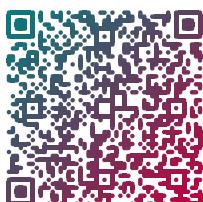


FIGURE 4.2 – Modélisation retenue

Éléments de correction

$$3. X_{02} = -F \frac{a+b}{a \tan \alpha}, F_{01} = F \frac{a+b}{a \sin \alpha}, Y_{02} = -\frac{b}{a} F.$$



Détermination des efforts dans une structure étayée

Lors de la démolition d'une partie de la gare de Lyon Part-Dieu (en 2018), des étais ont été posés afin de soutenir la structure supérieure.

Dans le but de dimensionner les étais, il est nécessaire de déterminer les actions mécaniques dans chacune des liaisons.

Pour cela, on utilise la modélisation ci-contre.

On a $\overrightarrow{AB} = a \vec{x}$, $\overrightarrow{BD} = b \vec{x}$ et $\overrightarrow{CB} = L \vec{x}_1$.

Question 5 Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).

Question 6 Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

Question 7 Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de F .

Application 2

Modélisation des actions mécaniques – Sujet

Ressources de Stéphane GENOËL.

Exercice 1 : Assemblage par fretteage

Le fretteage consiste à encastrer deux pièces en utilisant le phénomène d'adhérence.

Avant l'assemblage réalisé à l'aide d'une presse, l'arbre 1 possède un diamètre légèrement supérieur à celui de l'alésage (trou cylindrique) de la pièce 2 dans laquelle il vient se loger.

Après fretteage, il subsiste donc une pression de contact p (souvent supposée uniforme sur toute la surface de contact) entre les deux pièces.

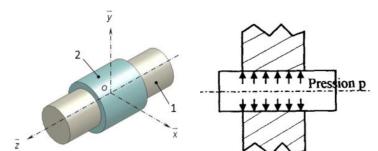
Les caractéristiques de cet assemblage par fretteage sont les suivantes :

- R : rayon de l'arbre 1;
- L : longueur du contact;
- f : facteur d'adhérence entre les deux pièces.

B2-14

C1-05

C2-07



Objectif

Déterminer l'effort axial maximal transmissible et le couple maximal transmissible d'une pièce à l'autre.

Effort axial maximal transmissible

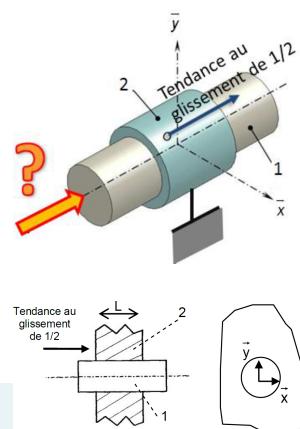
L'effort axial maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante axiale de la résultante de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante axiale de la résultante de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de $1/2$ suivant $-\vec{z}$.

Question 1 Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) et l'autre dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

Question 2 Exprimer $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$.

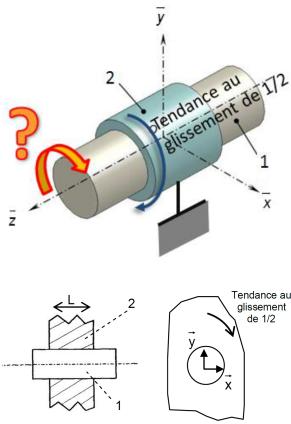
Question 3 Déterminer la résultante axiale maximale transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques du fretteage.



Couple maximal transmissible

Le couple (ou moment) maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante sur l'axe \vec{z} du moment résultant de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante sur l'axe \vec{z} du moment résultant de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de 1/2 autour de \vec{z} .



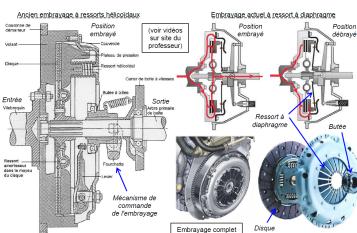
Question 4 Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) et l'autre dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

Question 5 Exprimer $dF_{2 \rightarrow 1}(Q)$.

Question 6 Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques du frettage.

Exercice 2 : Embrayage à friction mono disque de véhicules automobiles (surfaces de friction plane)

Situé en amont des boîtes à vitesses, l'embrayage mono disque a pour rôle de désolidariser le moteur de la boîte afin de pouvoir changer de rapports, ou lorsque le véhicule est arrêté moteur tournant au ralenti.

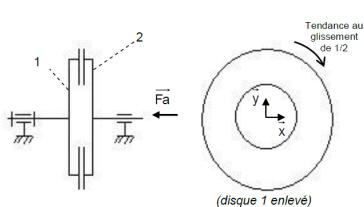


Position embrayée : le disque est fortement serré entre deux surfaces lisses (plateau et volant) par la pression des ressorts. Le tout tournera donc d'un bloc, sans glissement et sans pertes.

Position débrayée : la poussée du conducteur sur la pédale contrebalance la force des ressorts. Le disque, sous l'effet des vibrations, coulisse alors légèrement sur ses cannelures pour se positionner entre les surfaces lisses (plateau et volant), sans les toucher. Les vitesses angulaires du volant-plateau (solidaires du vilebrequin) et du disque (solidaire des roues par l'intermédiaire de la transmission) peuvent alors différer sans que le disque ne frotte.

On modélise l'embrayage par 2 disques creux identiques (1 et 2) en contact grâce à une action axiale \vec{F}_a .

Le rayon intérieur des 2 disques vaut : R_{\min} . Le rayon extérieur des 2 disques vaut : R_{\max} . On donne f le facteur d'adhérence entre les deux pièces.



Question 7 Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) et l'autre dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

Question 8 Exprimer $dF_{2 \rightarrow 1}(Q)$.

Question 9 Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 10 Déterminer l'action axiale \vec{F}_a qui crée les $d\vec{N}$ en fonction de p et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 11 En déduire le couple maximal transmissible en fonction de F_a (et non en fonction de p) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Exercice 3 : Embrayage conique des synchroniseurs de boîte de vitesses (surface de friction coniques)

Les boîtes de vitesses automobiles ont pour particularité d'avoir tous leurs engrenages en prise. Les pignons et roues situés sur l'arbre primaire (arbre qui sera lié à l'arbre moteur) sont en liaison pivot sur ce dernier donc ils tournent tous à des vitesses différentes autour de cet arbre. Ces pignons et roues sont appelés pignons « fous » et roues « folles »

Les pignons et roues situés sur l'arbre secondaire sont solidaires de ce dernier donc ils tournent tous à la même vitesse.

Le rôle de la boîte de vitesses est de mettre en liaison encastrement un des pignons (ou roues) fous de l'arbre primaire avec l'arbre primaire. Or pour pouvoir solidariser un des pignons fous et son arbre, il faut synchroniser leurs régimes de vitesses, et c'est là le rôle des synchroniseurs.

On modélise le pignon fou et l'anneau de synchronisation par 2 cônes en contact grâce à une action axiale \vec{F}_a .

Le rayon maximal des 2 cônes vaut : R_{\max} . Le rayon minimal des 2 cônes vaut : R_{\min} . Le demi-angle au sommet des 2 cônes vaut α . On donne f le facteur d'adhérence entre les deux pièces.

Question 12 Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) et l'autre dans le plan (\vec{x}, \vec{y}'), en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

Question 13 Exprimer $d\overrightarrow{F}_{2 \rightarrow 1}(Q)$.

Question 14 Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 15 Déterminer l'action axiale \vec{F}_a qui crée les $d\vec{N}$ en fonction de p et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 16 En déduire le couple maximal transmissible en fonction de F_a (et non en fonction de p) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 17 Déterminer le modèle global de l'action mécanique de l'arbre 2 sur le bâti 1 sous forme d'un torseur exprimé au point O.

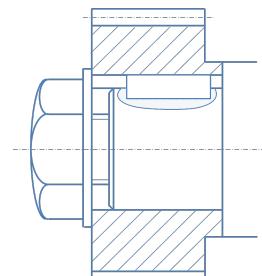
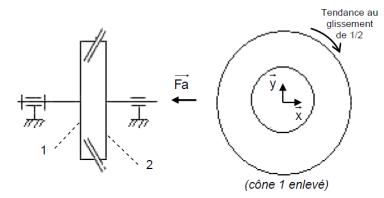
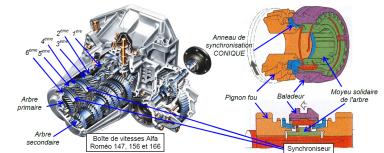
Couple transmis par une clavette

On cherche à connaître le couple transmissible autour de \vec{z} , axe du pignon.

La clavette est de hauteur $2h$ et de largeur l . On note p le champ de pression uniforme du pignon sur une demi-clavette. p est appelée pression de matage.

O est un point de l'axe.

Question 18 Déterminer le couple transmissible par la clavette.



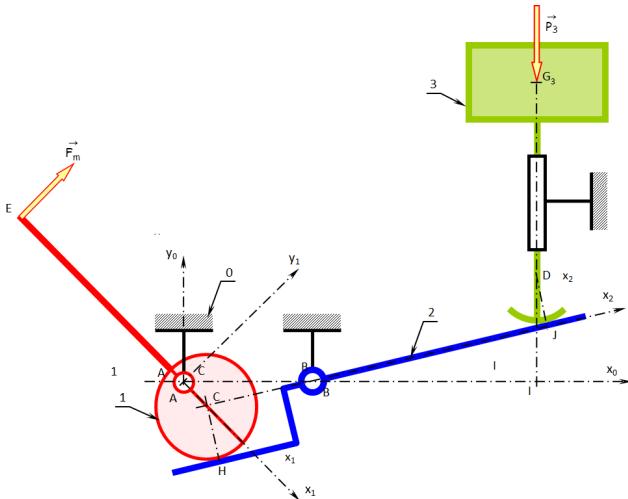
Application 3

Mécanisme de levage – Sujet

Le mécanisme représenté schématiquement ci-dessus est destiné à assurer le levage d'une charge liée au coulisseau (3) au moyen d'un levier à excentrique (1) et d'un balancier (2).

Ressources de l'équipe pédagogique La Martinière Monplaisir.

STAT STAT STAT



Objectif

Objectif : Dans cette étude, on va mettre en évidence l'influence du frottement sur l'équilibre d'un système.

On note \vec{P}_3 le poids de la charge appliquée sur le coulisseau et \vec{F}_m l'effort appliqué en E par l'opérateur sur le levier à excentrique (1).

Paramétrage géométrique

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= L_0 \vec{x}_0; \vec{AE} = -L_1 \vec{x}_1; \vec{BI} = d_0 \vec{x}_0; \vec{AC} = e_1 \vec{x}_1; \vec{HC} = R_1 \vec{y}_2; \vec{BJ} = \lambda_{32} \vec{x}_2; \vec{ID} = \\ &\lambda_{30} \vec{y}_0; \vec{JD} = R_3 \vec{y}_2; (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta_{(1/0)}; (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \theta_{(2/0)}. \end{aligned}$$

On suppose dans un premier temps que toutes les liaisons sont sans frottement.

Question 1 Justifier que le système est statiquement plan.

Question 2 En écrivant les équations associées à l'équilibre de chacune des pièces, établir la relation liant F_m et P_3 à l'équilibre. *On cherchera à écrire le minimum d'équations.*

Question 3 Pour quelle(s) valeur(s) particulières de $\theta_{1/0}$ l'équilibre est-il possible avec un effort F_m nul ?

Question 4 Établir les équations permettant de relier la translation $\lambda_{3/0}$ du coulisseau, la position angulaire $\theta_{(1/0)}$ et les constantes géométriques du mécanisme.

Question 5 En établissant un bilan de puissance, vérifier les relations obtenues.

On suppose que les contacts en H et J s'effectuent avec frottement de même coefficient f



Question 6 On suppose que les contacts en H et J s'effectuent avec frottement de même coefficient f . Reprendre la question 2 dans le cadre de cette hypothèse. On se place dans la situation de descente de la charge.

Distinguer deux situations, selon que J est situé au-dessus ou en dessous de l'axe (B, \vec{x}_0) .

Question 7 Définir le domaine de valeurs de $\theta_{(1/0)}$ pour lequel l'équilibre du système est possible sans exercer d'effort sur le levier (1) ($F_m = 0$).

Application 4

Étude d'un robot Kuka – Sujet

D'après CCP MP 2010.

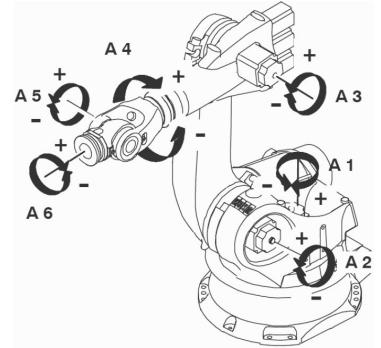
STAT STAT STAT

Mise en situation

Le robot Kuka, objet de cette étude, a pour objectif la palettisation de bidons utilisés en agriculture biologique (compléments permettant d'améliorer les qualités nutritives des produits agricoles).

Objectif

Suite à l'appui sur le bouton d'arrêt d'urgence, le robot doit immédiatement s'immobiliser dans la position courante. On souhaite alors vérifier que les freins équipant le robot sont suffisants pour assurer sa configuration d'équilibre dans le cas d'une charge maximale de 50 daN (préhenseur + bidon de 40 litres) et qu'il ne faudra pas mettre des actionneurs en parallèle.



On se place dans la situation particulière définie figure suivante avec $\alpha_2 = -90^\circ$ et $\alpha_3 = +90^\circ$.

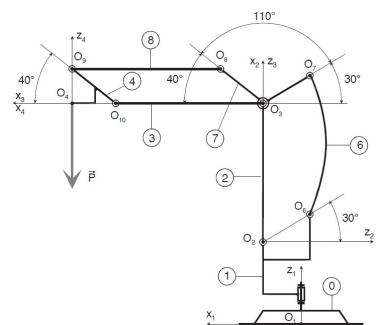
On donne :

- $O_2O_3 = O_6O_7 = 1250 \text{ mm}$;
- $O_3O_{10} = O_8O_9 = 1350 \text{ mm}$;
- $O_2O_6 = O_3O_7 = O_3O_8 = O_9O_{10} = 500 \text{ mm}$;
- $\vec{P} = -500\vec{z}_4$.

On admettra pour simplifier que le point O_4 est situé sur l'axe \vec{x}_3 et que l'axe \vec{z}_4 passe par le point O_9 . De même, les poids propres des pièces seront négligés par rapport aux autres actions.

Les liaisons pivot sont supposées parfaites (pas de frottement).

Les couples de freinage maxi M_f_2 et M_f_3 des freins associés aux moteurs M_2 et M_3 sont de 5 mN sur l'arbre moteur. On leur adjoint en série un réducteur de rapport 1/200.



Question 1 Réaliser le graphe de structure du mécanisme.

Question 2 Déterminer les actions de la barre 8 sur le poignet 4 et du bras 3 sur le poignet 4.

Question 3 En isolant l'ensemble 3 et 4 et en considérant les informations fournies dans le tableau suivant, déterminer l'expression du moment Mf_3 correspondant à l'action du frein sur la pièce 3 en O_3 .

Moteur	Axe	Monté sur	Entraîne	Nmaxi (tr.min ⁻¹)	Puissance (kW)	Réducteur	Frein (Nm)
M1	A1	0	1	3500	4,5	200	5
M2	A2	1	2	3500	3,5	200	5
M3	A3	2	3	3500	2,5	200	5
M4	A4	4	5	3500	1,5	100	5

Le dispositif de freinage ne permet qu'un couple maxi de 5 mN sur l'axe moteur.

Question 4 Quel est alors le couple de freinage disponible en sortie du réducteur ?

Question 5 Le maintien du freinage est-il assuré ?

On veut alors vérifier que le dispositif de freinage du moteur M_2 convient.

Question 6 En isolant la pièce 7, déterminer l'action de la barre 6 sur la pièce 7.

Question 7 En considérant l'ensemble 2, 3, 4, 7, 8, déterminer l'expression du moment Mf_2 correspondant à l'action du frein sur la pièce 2 en O_2 . Calculer Mf_2 .

Question 8 Le dispositif de freinage étant identique à celui de l'axe 3, le maintien du freinage est-il assuré ?



TD 1 :

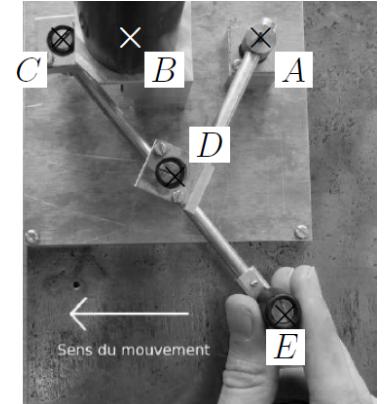
Interface maître et esclave d'un robot – Sujet

CCP PSI 2015.



Mise en situation

La téléopération consiste à mettre en relation deux manipulateurs appelés communément maître et esclave. Le manipulateur maître permet au chirurgien de donner sa consigne de déplacement à l'aide d'un levier de commande tandis que l'esclave l'exécute au contact de l'environnement (l'organe à opérer). Les deux sous-systèmes échangent des informations de déplacement et d'effort au travers d'un ou plusieurs canaux de communication. Un retour visuel est également mis en place en parallèle à ce dispositif.



Modélisation de l'interface maître

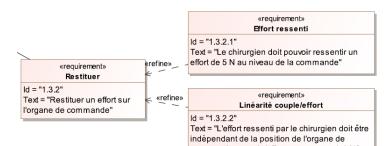
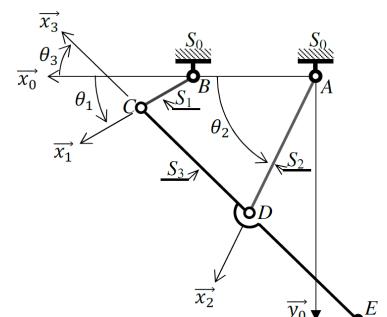
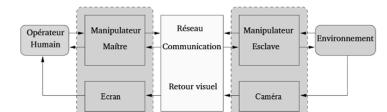
Ce mécanisme est constitué de 4 barres reliées par des liaisons pivots.

Objectif

Vérifier que l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) peut être satisfaite par le mécanisme de HOEKEN.

- ▶ Solide S_0 , repère $\mathcal{R}_0(A; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $\overrightarrow{AB} = L_0 \vec{x}_0$ avec $L_0 = 50$ mm.
- ▶ Solide S_1 , repère $\mathcal{R}_1(B; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, $\overrightarrow{BC} = L_1 \vec{x}_1$ avec $L_1 = 25$ mm, $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- ▶ Solide S_2 , repère $\mathcal{R}_2(A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$, $\overrightarrow{AD} = L_2 \vec{x}_2$ avec $L_2 = 62,5$ mm, $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$.
- ▶ Solide S_3 , repère $\mathcal{R}_3(C; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$, $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DC} = L_3 \vec{x}_3$ avec $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$.

- ▶ On notera $\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_j)\} = \begin{pmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{pmatrix}_{P, \mathcal{B}_0}$ l'expression l'expression au point P , en projection dans la base \mathcal{B}_0 , du torseur de l'action mécanique exercée



par le solide S_i sur le solide S_j ; toutes les inconnues seront exprimées dans la base \mathcal{B}_0 .

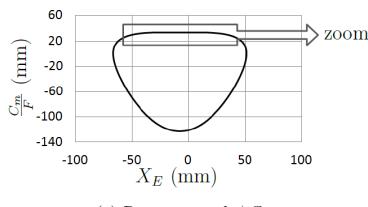
- ▶ L'action mécanique exercée par le moteur sur S_1 sera modélisée par un couple $C_m(t)\vec{z}_0$.
- ▶ L'action mécanique exercée par l'opérateur sur S_3 sera modélisée par une force $F(t)\vec{x}_0$ appliquée au point E .
- ▶ L'accélération de la pesanteur sera négligée.
- ▶ Les inerties des solides en mouvement et les frottements dans les guidages seront négligés.

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse du mécanisme (liaisons et efforts).

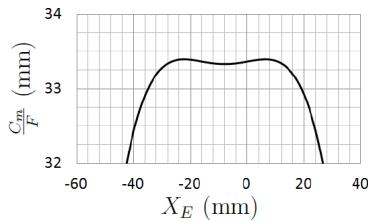
Cette relation n'étant pas linéaire, on propose d'analyser les résultats d'une simulation numérique en traçant le couple moteur/effort opérateur en fonction de l'abscisse du point E

Question 2 Retrouver ces graphes en utilisant Python. J'ai pas essayé, mais si eux ont réussi, pourquoi pas vous ? Il faut peut-être utiliser le premier devoir de vacances.

Question 3 Déterminer, à partir de la figure précédente, sur quel intervalle de l'abscisse X_E l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) est satisfaite. (On ajoute que la course sur X_E doit être supérieure à 50 mm.)



(a) Rapport couple/effort



(b) $X_E \in [-60 \text{ mm}, 40 \text{ mm}]$



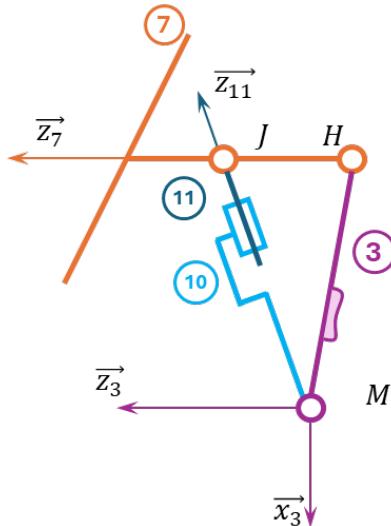
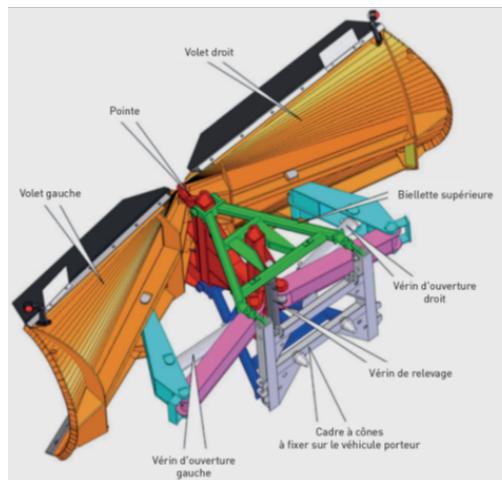


TD 2 : Chasse neige – Sujet

D'après documents Mines-Telecom.

Mise en situation

L'étrave de déneigement, objet de cette étude, est utilisée pour dégager les routes. Elle est composée de deux volets disposés en « V » qui permettent d'évacuer sur les côtés une épaisseur importante de neige. Les deux volets sont articulés de façon indépendante sur la pointe de l'étrave et ont une ouverture variable contrôlée par le conducteur à travers un vérin d'ouverture. En fin d'utilisation ou pour éviter des obstacles, elle est pourvue d'un système de relevage hydraulique.



La pièce 7 est la lame de déneigement articulée par rapport au châssis 3. Elle est mise en mouvement par le vérin {10 ; 11}.

Données et hypothèses

- ▶ $\gamma = (\vec{x}_3, \vec{x}_7) = (\vec{z}_3, \vec{z}_7)$ et $\beta = (\vec{x}_3, \vec{x}_{11}) = (\vec{z}_3, \vec{z}_{11})$;
- ▶ $\vec{z}_{11} = \vec{z}_{10}$ et $\vec{x}_{11} = \vec{x}_{10}$;
- ▶ $\vec{HJ} = h\vec{z}_7$ et $\vec{HQ} = a\vec{x}_3 + b\vec{y}_3 + c\vec{z}_3$ et $\vec{HG} = i\vec{z}_7$ et $\vec{HM} = f\vec{x}_3 + g\vec{z}_3$.
- ▶ Dans le cadre de cette étude, $\beta = 37^\circ$ et $\gamma = 16^\circ$, $\vec{g} = -g\vec{y}_3$;
- ▶ liaisons parfaites (pas de jeu, pas de frottement);

- le poids de toutes les pièces est négligé, sauf celui de la pièce 7, $m_7 = 850 \text{ kg}$ appliqué en G ;
- dimensions en mètres : $h = 0,68$; $a = -0,33$; $b = 0,1$; $c = 1,1$ et $i = 0,5$;
- l'action de la neige sur le volet 7 est modélisée par un glisseur de moment nul en Q tel que : $\{\mathcal{T}(\text{neige} \rightarrow 7)\} = \left\{ \begin{array}{c} Q \vec{x}_7 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_Q$ avec $Q = 15\,000 \text{ N}$;
- le vérin d'ouverture choisi supporte une pression d'alimentation de 150 bars.

Problème ouvert

Question 1 Proposer et mettre en œuvre une démarche permettant de déterminer la section du vérin permettant de « chasser la neige ».

Problème décomposé

Question 2 Réaliser les figures planes associées au paramétrage du problème.

Question 3 Tracer le graphe de liaisons.

Question 4 Déterminer la direction \vec{u} de l'action mécanique $\overrightarrow{R(11 \rightarrow 7)} = F \vec{u}$.

Question 5 En isolant 7, exprimer la relation liant F , Q et les grandeurs géométriques.

Question 6 En déduire la section minimale S , du vérin permettant de chasser la neige.



Éléments de correction

$$S = -\frac{Q(a \sin \gamma + c \cos \gamma)}{ph \sin(\beta - \gamma)}.$$

TD 5

Machine de forage – Sujet

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

Dans le domaine du génie civil, les foreuses permettent de réaliser des perçages profonds afin de couler des pieux en béton armé. On s'intéresse aux conditions de basculement statique de la foreuse.

Pour prévenir le basculement de la foreuse, l'opérateur peut observer dans un coin de son écran : le pourcentage $b\%$ d'atteinte de la posture critique de basculement pour une orientation de tourelle donnée (figure 4.3).

Afin d'assurer la stabilité de l'engin, on cherche à satisfaire l'exigence 1.2 (figure 4.4).

Le paramétrage mécanique est donné sur la figure 4.5 :

- ▶ **0** le sol, **S1** le châssis de la foreuse, **S2** sa tourelle et son mât et **S3** l'ensemble {table de forage + outil} ;
- ▶ $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère attaché aux solides **S0** et **S1** ;
- ▶ $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ la base attachée aux solides **S2** et **S3** telle que $(\vec{x}, \vec{x}_2) = \theta$ où θ est connu ;
- ▶ $\Sigma = \{S1, S2, S3\}$ l'ensemble de la foreuse, de centre de gravité G tel que $\overrightarrow{OG} = r\vec{x}_2 + z_G\vec{z}$;
- ▶ $M = 186,5$ tonnes la masse de l'ensemble Σ et $m = 18$ tonnes la masse de **S3** seul ;
- ▶ $2F_w\vec{z}$ connu, l'effort du câble d'avance sur **S3**. La masse du câble est négligée dans la suite ;
- ▶ $F_{sol}\vec{z}$, inconnu, l'effort de forage du sol **0** sur l'outil de forage **S3** au point F , connu, défini par $\overrightarrow{OF} = R\vec{x}_2$;
- ▶ $-g\vec{z}$ où $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$, l'accélération de la pesanteur terrestre.

On modélise ici les contacts entre le sol et la foreuse **par des contacts ponctuels** : $F_g\vec{z}$, (respectivement $F_d\vec{z}$) inconnu, l'effort du sol 0 sur **S1**, supposé ponctuel au centre I (respectivement J) de la surface de contact entre la chenille gauche c_g (respectivement c_d) et le sol tel que $\|\overrightarrow{OI}\| = a = 2,1 \text{ m}$ (respectivement $\|\overrightarrow{OJ}\| = a = 2,1 \text{ m}$).

Question 1 En appliquant le principe fondamental de la statique en O à l'isolement de votre choix, donner l'expression de F_g et de F_d en fonction des données connues du système, de θ et de F_{sol} .

Le problème étant symétrique pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (tourelle orientée à droite) et $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (tourelle orientée à gauche), on n'étudie par la suite que le basculement statique à droite.

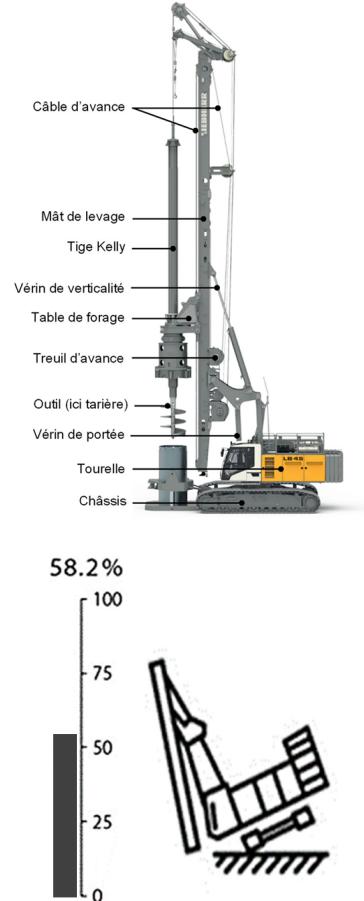


FIGURE 4.3 – Aperçu du contrôle de $b\%$.

« requirement »	
Équilibrage statique initial	
Id = '1.2'	
Text = 'b% < 50 % dans la posture la plus défavorable outil levé'	

FIGURE 4.4 – Exigence 1.2.

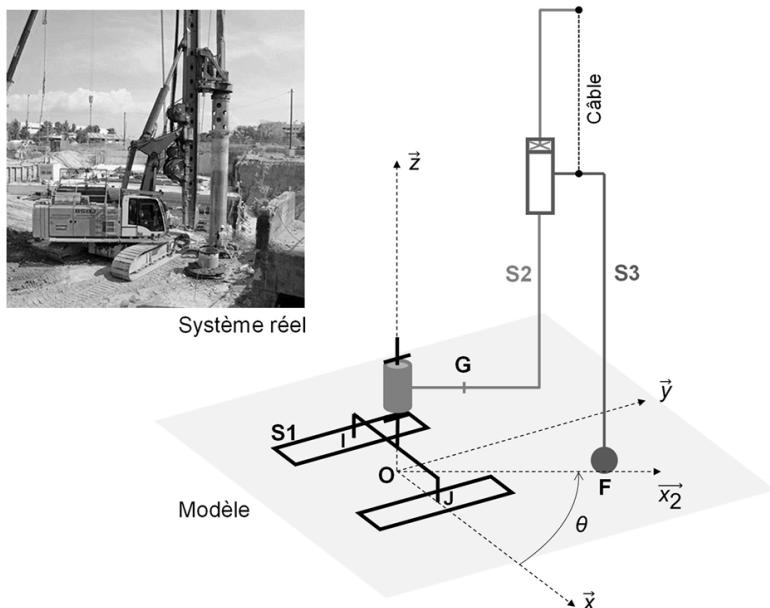


FIGURE 4.5 – Paramétrage mécanique

Question 2 Donner la condition en effort pour laquelle il y a basculement statique à droite. En absence d'effort de forage, en déduire la condition sur la position (r, θ) du centre de gravité G pour laquelle le basculement à droite est alors évité.

Question 3 Interpréter physiquement ce résultat et montrer que $b\%$ peut être, dans ce cas, approximé par : $b\% = 100 \frac{|r \cos \theta|}{a}$.

On désire dimensionner le nombre de contrepoids de 8 tonnes à placer à l'arrière de la tourelle pour que, en l'absence de forage et en extension maximale, l'exigence 1.2 d'équilibrage statique initial soit respectée même dans le pire des cas où la tourelle est pleinement orientée à droite ($\theta = 0^\circ$). Dans cette posture, le schéma de la figure 4.6 illustre où se situent, dans le même plan, les centres de gravité des différents éléments de la machine :

- ▶ G_t est le centre de gravité de la tourelle et du châssis. La masse de cet ensemble S_t est notée $m_t = 44,7$ tonnes ;
- ▶ G_e est le centre de gravité de tous les équipements mobiles (tige Kelly, potences, vérins, mât, table de forage, outillage, terre à évacuer), positionnés dans la configuration la plus défavorable. La masse de cet ensemble S_e est notée $m_e = 48,8$ tonnes ;
- ▶ G_c est le centre de gravité des contrepoids. Il y a n_{cp} contrepoids de masse totale $m_c = n_{cp} \cdot m_1$, où $m_1 = 8$ tonnes est la masse d'un seul contrepoids ;
- ▶ l'accélération de la pesanteur est notée : $\vec{g} = -g \vec{z} = -9,8 \vec{z}$ (en m/s^2).

On note (en mètres) : $\overrightarrow{OG_t} = 2,2 \vec{z}$, $\overrightarrow{OG_e} = 4,4 \vec{x} + 13 \vec{z}$; $\overrightarrow{OG_c} = -4,3 \vec{x} + 2,3 \vec{z}$. On fait l'hypothèse que $\overrightarrow{OG_c}$ reste identique, indépendamment du nombre de contrepoids.

Question 4 Exprimer la coordonnée sur \vec{x} , notée r , du centre de gravité G total de la machine en fonction des paramètres connus et de n_{cp} . En déduire le nombre n_{cp} minimum de contrepoids pour respecter l'exigence 1.2.

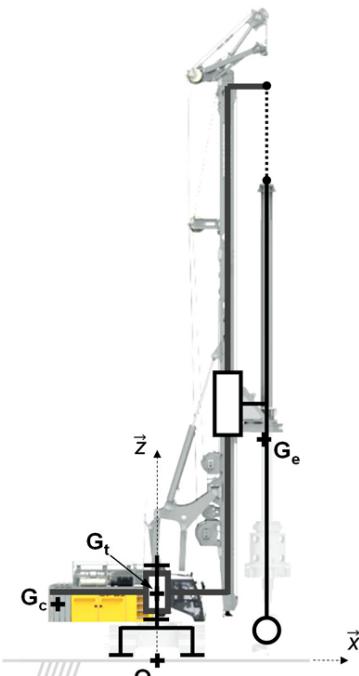


FIGURE 4.6 – Position des centres de gravité des différents solides.

