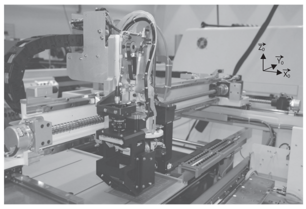
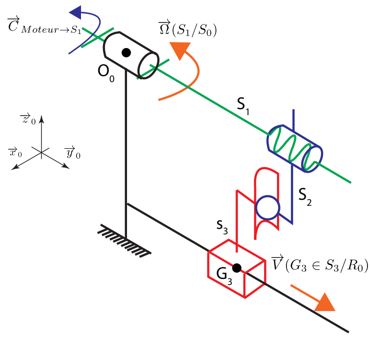
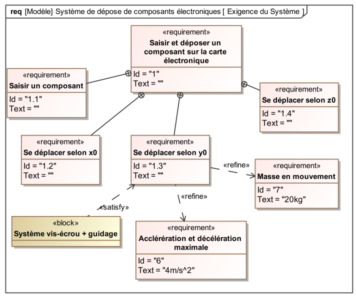
Application 0
Système de dépose de composants électroniques – Corrigé

Émilien Durif – E3A PSI 2011.







Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée $\overrightarrow{y_0}$) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « *vis-écrou* ».

Hypothèses :

- le référentiel associé au repère $R_0 = \left(O_0; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ est supposé galiléen ;
- les solides seront supposés indéformables ;
- on notera J_1 le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe $\left(O_0, \overrightarrow{y_0}\right)$: $J_1 = I_{\left(O_0, \overrightarrow{y_0}\right)}(S_1)$;
- on note M_3 et G_3 respectivement la masse et le centre d'inertie du solide S_3 ;
- la position de G_3 est définie par $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \overrightarrow{y_0} + z \cdot \overrightarrow{z_0}$
- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre S_0 et S_3 (Coefficient de frottement noté μ) et la pivot entre S_0 et S_1 (couple résistant noté C_r) ;
- seul l'action de pesanteur sur S_3 sera supposée non négligeable.

- S_0 : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
- S_1 : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
- S_2 : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
- S_3 : chariot supportant la tête de dépose (masse M_3).

Objectif

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- couple moteur transmis à S_1 : $\overrightarrow{C}_{\text{Moteur}\rightarrow S_1} \cdot \overrightarrow{y_0} = C_m(t)$;
- vitesse de rotation de S_1 : $\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \overrightarrow{y_0} = \dot{\theta}(t)$;

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose S_3) :

- masse : M_3 ;
- cinématique de S_3 : $\overrightarrow{a}(G_3R_0) \cdot \overrightarrow{y_0} = \ddot{y}(t)$.

On considère l'ensemble $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$.

Question 1 Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

Correction

Question 2 Déterminer l'expression de $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$ en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

Correction

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur } \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow S_3/R_0)$$

Données numériques associées au système :

- Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) : $\mu = 0,1$.
- Pas de la vis à billes : $p = 20$ mm.
- Diamètre de la vis à billes : $D = 25$ mm.
- Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe $\overrightarrow{y_0}$: $I_v = 2,15 \times 10^{-4}$ kg m^2.
- Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) : $C_r = 3$ Nm.
- l, longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) : 1000 mm.

Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :

- couple maximal, $C_{\max} = 21{,}2$ Nm ;
- fréquence de rotation maximale, $N_m = 6000$ tr/min ;
- moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe $\overrightarrow{y_0}$, $I_m =$

Question 3 Calculer $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$ en fonction des données du problème.

Correction

On a :

$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow S_3/R_0)$

- $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01} \cdot \overrightarrow{x_0} + Y_{01} \cdot \overrightarrow{y_0} + Z_{01} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ L_{01} \cdot \overrightarrow{x_0} \pm C_r \cdot \overrightarrow{y_0} + N_{01} \cdot \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_0} = \pm C_r \cdot \dot{\theta}(t)$. Le signe de la composante suivant $\overrightarrow{y_0}$ dépendra du sens du mouvement de S_1/S_0.
- $\mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) = \{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \cdot \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{-} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_0} = C_m \cdot \dot{\theta}(t)$.
- $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{03} \cdot \overrightarrow{x_0} \pm Y_{03} \cdot \overrightarrow{y_0} + Z_{03} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ L_{03} \cdot \overrightarrow{x_0} + M_{03} \cdot \overrightarrow{y_0} + N_{03} \cdot \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{-} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{-} = \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t)$.
- $\mathcal{P}(\text{Poids} \rightarrow S_3/R_0) = \left\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow S_3)\right\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ -M_3 \cdot g \cdot \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_3} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{G_3} = 0$.

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t)$$

Question 4 Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble E : $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$.

Correction

- D'après le graphe des liaisons : $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) + \mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_3)$.
- Calcul de $\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12}\overrightarrow{x_0} + Y_{12}\overrightarrow{y_0} + Z_{12}\overrightarrow{z_0} \\ L_{12}\overrightarrow{x_0} + M_{12}\overrightarrow{y_0} + N_{12}\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} q_{21}\overrightarrow{y_0} \\ v_{12} \cdot \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{O_0} = Y_{12} \cdot v_{12} + q_{21} \cdot M_{12}$.
  Or, $\left\{ \begin{array}{l} M_{12} = -\frac{p}{2\pi} Y_{12} \\ v_{12} = \frac{p}{2\pi} q_{21} \end{array} \right.$. D'où : $\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = Y_{12} \cdot v_{12} + q_{21} \cdot M_{12} = \frac{p}{2\pi}\left[Y_{12} \cdot q_{21} - q_{21} \cdot Y_{12}\right] = 0$.
- Calcul de $\mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_3) = \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} A \\ X_{23}\overrightarrow{x}_0 + Y_{23}\overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{\overrightarrow{0}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} A \\ p_{32}\overrightarrow{x}_0 + q_{32}\overrightarrow{y}_0 + r_{32}\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{w_{32}\cdot\overrightarrow{z_0}} = 0$.
- On en déduit donc : $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0$.

Question 5 Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à R_0

Correction

- Énergie cinétique de l'ensemble dans son mouvement par rapport à R_0 :

$$E_c(E/R_0) = E_c(1/R_0) + E_c(2/R_0) + E_c(3/R_0)$$

- Énergie cinétique de 1 dans son mouvement par rapport à R_0 : $E_c(1/R_0) = \frac{1}{2}\{\mathscr{C}(1/R_0)\} \otimes \{\mathscr{V}(1/R_0)\} = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{*} \\ \overline{\overline{I}}_{O_0}(S_1)\cdot\dot{\theta}(t)\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}_{O_0} \otimes \left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}(t)\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{O_0} = \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}^2\overline{\overline{I}}_{O_0}(S_1)\cdot\overrightarrow{y}_0\cdot\overrightarrow{y}_0\right] = \frac{1}{2}J_1\cdot\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(I_m+I_v)\cdot\dot{\theta}^2$.
- Énergie cinétique de 2 dans son mouvement par rapport à R_0 : $E_c(2/R_0) = \frac{1}{2}\{\mathscr{C}(2/R_0)\} \otimes \{\mathscr{V}(2/R_0)\} = 0$ car l'inertie de 2 est négligeable.
- Énergie cinétique de 3 dans son mouvement par rapport à R_0 :$E_c(3/R_0) = \frac{1}{2}\{\mathscr{C}(3/R_0)\} \otimes \{\mathscr{V}(3/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c}- \\ M_3\cdot\dot{y}(t)\cdot\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}_{\overrightarrow{0}} \otimes \left\{\begin{array}{c}- \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{\dot{y}(t)\cdot\overrightarrow{y_0}} = \frac{1}{2}M_3\cdot\dot{y}^2(t)$.
- L'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble E : $E_c(E/R_0) = \frac{1}{2}\left[(I_m+I_v)\cdot\dot{\theta}^2(t)+M_3\cdot\dot{y}^2(t)\right]$.

Question 6 Déterminer la mobilité du système.

Correction

Ici la mobilité vaut 1.

Question 7 Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

Correction

Par une fermeture cinématique on pourrait montrer : $\dot{y}(t) = -\frac{p}{2\pi}\dot{\theta}(t)$.

Question 8 Déterminer l'inertie équivalente de E ramenée à la rotation autour de l'axe $\left(O_0,\overrightarrow{y_0}\right)$ et du paramètre $\dot{\theta}(t)$.

Correction

$E_c(E/R_0) = \frac{1}{2}\left[(I_m+I_v)\cdot\dot{\theta}^2(t)+M_3\cdot\dot{y}^2(t)\right] = \frac{1}{2}\left[(I_m+I_v)+M_3\cdot\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\right]\cdot\dot{\theta}^2(t)$ d'où, $J_{\text{eq}}(E) = (I_m+I_v)+M_3\cdot\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2$.

Question 9 Déterminer la masse équivalente de E ramené à la translation selon la direction $\overrightarrow{y_0}$ et du paramètre $\dot{y}(t)$.

Correction

$E_c(E/R_0) = \frac{1}{2}\left[(I_m+I_v)\cdot\dot{\theta}^2(t)+M_3\cdot\dot{y}^2(t)\right] = \frac{1}{2}\left[(I_m+I_v)\cdot\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2+M_3\right]\cdot\dot{y}^2(t)$ d'où, $M_{\text{eq}}(E) = (I_m+I_v)\cdot\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2+M_3$.

Question 10 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E.

Correction

En combinant les résultats des différentes questions précédentes, on obtient : $M_{\text{eq}}\cdot\dot{y}(t)\cdot\ddot{y}(t) = (C_m \pm C_r)\cdot\dot{\theta}(t) \pm Y_{03}\cdot\dot{y}(t)+0$.
On peut postuler un sens de déplacement : $\dot{y}(t)>0$, ainsi $\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{p}\dot{y}(t)<0$, $C_r>0$, $Y_{03}<0$: $M_{\text{eq}}\cdot\dot{y}(t)\cdot\ddot{y}(t) = \left[-(C_m+C_r)\cdot\frac{2\pi}{p}+Y_{03}\right]\cdot\dot{y}(t)$

Question 11 Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier C_m à $y(t)$.

Correction

Il faut éliminer le paramètre Y_{03}. Pour cela on peut écrire le théorème de la résultante dynamique appliqué à S_3 en projection selon $\overrightarrow{z_0}$: $Z_{03} - M_3 \cdot g = 0$.
Or la loi de Coulomb donne (avec $Z_{03} > 0$ et $Y_{03} < 0$) : $Y_{03} = -\mu \cdot Z_{03} = -\mu \cdot M_3 \cdot g$.
Ainsi l'équation de mouvement obtenue est (en éliminant $\dot{y}(t) \neq 0$) : $\boxed{M_{\text{eq}} \cdot \ddot{y}(t) = -(C_m + C_r) \cdot \dfrac{2\pi}{p} - \mu \cdot M_3 \cdot g}$.

Question 12 Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

Correction

$$C_m = -\frac{p}{2\pi}\left[M_{\text{eq}}\ddot{y}_{\max} + M_3 \cdot g \cdot \mu\right] - C_r = -\frac{p}{2\pi}M_3\left(\ddot{y}_{\max} + g \cdot \mu\right) - (I_m + I_v)\frac{2\pi}{p}\ddot{y}_{\max} - C_r$$

L'application numérique donne : $C_m = -3,79 N \cdot m$

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre S_1 et S_2. On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement η défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

Question 13 En considérant le système $E_1 = \{S_1 + S_2\}$, définir le rendement.

Correction

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})} = \frac{\mathcal{P}(S_2 \to S_3/R_0)}{\mathcal{P}(\text{moteur} \to S_1/R_0)}$$

Question 14 On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre S_1 et S_2. En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à S_2/R_0 et S_1/R_0 en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

Correction

- Expression de $\mathcal{P}(\text{dissipée})$: $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = -\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = -\left(\mathcal{P}(S_1 \to S_2/R_0) + \mathcal{P}(S_2 \to S_1/R_0)\right)$;
- TEC appliqué à S_2/R_0 en régime permanent : $\mathcal{P}(S_1 \to S_2/R_0) = -\mathcal{P}(S_3 \to S_2/R_0)$;
- TEC appliqué à S_1/R_0 en régime permanent : $\mathcal{P}(\text{moteur} \to S_1/R_0) = -\mathcal{P}(S_2 \to S_1/R_0)$
- en combinant ces équations on obtient $\mathcal{P}(\text{dissipée})$: $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = -\left(-\mathcal{P}(S_3 \to S_2/R_0) - \mathcal{P}(\text{moteur} \to S_1/R_0)\right)$
$= -\mathcal{P}(S_2 \to S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{moteur} \to S_1/R_0) = \left(1-\eta\right)\mathcal{P}(\text{moteur} \to S_1/R_0)$.

On donne :

- Rendement η dans la liaison hélicoïdale : $\eta = 0,8$;

Question 15 Déterminer dans ces conditions les dissipations.

Correction

$\mathscr{P}(\text{dissipée}) = C_{\text{max}} \cdot \dot{\theta}_{\text{max}} \cdot \left(\eta - 1\right) = 21,2 \times 6000\frac{2\pi}{60} \cdot \left(1 - \eta\right) = 2664\,\text{W}$

Application 1
Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric) – Corrigé

Centrale MP 2004.

Mise en situation

C1-05

C2-08

Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »

Détermination de la motorisation

Objectif

L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

Question 1 Déterminer la fréquence de rotation du moteur ω en fonction de la vitesse de déplacement V de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum ω_{maxi} que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

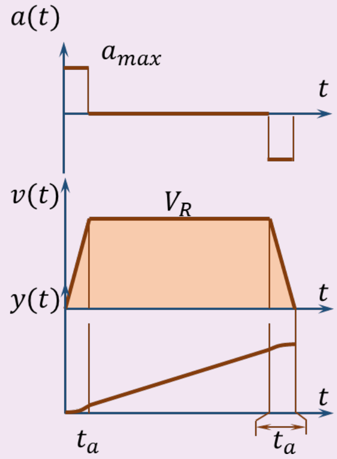
Correction

On a $V = \omega \dfrac{p_v}{2\pi}$ et donc $\omega_{\text{maxi}} = V_R \dfrac{2\pi}{p_v}$.

Application numérique : $\omega_{\text{maxi}} = 0,15 \dfrac{2\pi}{6 \cdot 10^{-3}} = 157\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} = 1500\,\text{tr}\,\text{min}^{-1}$.

Question 2 Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement y de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

Correction



L'accélération $a_{\max}$ est donnée par $a_{\max} = \dfrac{V_R}{t_a} = \dfrac{0,15}{0,4} = 0{,}375\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
Les distances parcourues correspondent à l'aire sous la courbe du profil de vitesse. La distance d'accélération et de décélération sont données par $d_a = \dfrac{1}{2} V_R t_a = \dfrac{1}{2} 0,15 \times 0,4 = 0{,}03\,\mathrm{m}$.
En conséquence, la distance à parcourir à vitesse constante est $d_c = 0,8 - 2 \times 0,03 = 0{,}74\,\mathrm{m}$.
Le temps pour parcourir cette distance est $t_c = \dfrac{d_c}{V_R} = \dfrac{0,74}{0,15} = 4{,}13\,\mathrm{s}$.

Solution sans assistance

Question 3 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée $\mathscr{E}_c(\Sigma/0)$, du système isolé. Mettre $\mathscr{E}_c(\Sigma/0)$ sous la forme : $\mathscr{E}_c(\Sigma/0) = \dfrac{1}{2} M_e V^2$. Donner l'expression littérale de la masse équivalente M_e et faire l'application numérique.

Correction

Calcul de l'énergie cinétique : $\mathscr{E}_c(\Sigma/0) = \dfrac{1}{2}(J_R + J_V)\left(V\dfrac{2\pi}{p_v}\right)^2 + \dfrac{1}{2} M V^2 = \dfrac{1}{2}\left((J_R + J_V)\dfrac{4\pi^2}{p_v^2} + M\right) V^2$.

On a donc $M_e = (J_R + J_V)\dfrac{4\pi^2}{p_v^2} + M = \left(2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}\right)\dfrac{4\pi^2}{\left(6 \times 10^{-3}\right)^2} + 130 = \left(2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}\right)\dfrac{4\pi^2}{\left(6 \times 10^{-3}\right)^2} + 150 = 547\,\mathrm{kg}$.

Question 4 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C.

Correction

- On isole Σ.
- Bilan des puissances intérieures : liaisons parfaites $\mathscr{P}_{\text{int}} = 0$.
- Bilan des puissances extérieures :

- $\mathcal{P}(\text{pes} \to \text{Asc.}/0) = -MgV$;
- $\mathcal{P}(\text{mot} \to \text{Asc.}/0) = C\omega$.

► Calcul de l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \dfrac{1}{2}M_e V^2$

On applique le théorème de l'énergie cinétique : $M_e V\dot{V} = C\dfrac{V2\pi}{p_v} - MgV$ et donc $M_e\dot{V} = C\dfrac{2\pi}{p_v} - Mg$. Au final, $C = \dfrac{p_v}{2\pi}\left(M_e\dot{V} + Mg\right)$.

Question 5 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire P_0 de ce moteur.

Correction

Le couple maximal est nécessaire en phase d'accélération.
$C_{\text{Max}} = \dfrac{p_v}{2\pi}\left(M_e\dot{V} + Mg\right)$
$= \dfrac{6\times 10^{-3}}{2\pi}(547 \times 0,15 + 130 \times 9,81) = 1,4\,\text{Nm}$.
La puissance nécessaire est alors $P_0 = C_{\text{Max}} \cdot \omega_{\text{maxi}} = 1,4 \times 157 = 222\,\text{W}$.

Question 6 En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

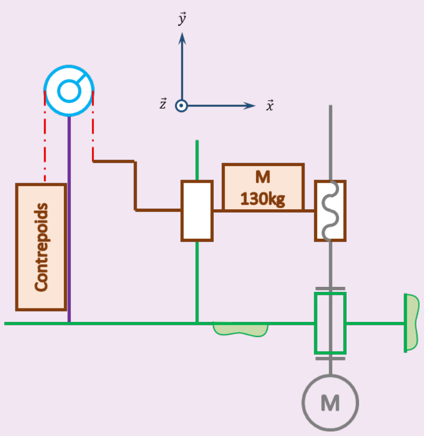
Correction

Le rendement n'a vraiment de sens qu'en régime permanent. Ici, le rendement va nous permettre de majorer la puissance motrice nécessaire. On a $P = \dfrac{222}{0,3} = 740\,\text{W}$.

Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

Question 7 Faire un schéma de principe de ce dispositif.

Correction



Question 8 Donner l'expression littérale de la masse équivalente M'_e et faire l'application numérique.

Correction

En prenant un contrepoids de même masse que l'ascenseur et en négligeant l'inertie de la poulie, le contrepoids se déplaçant à la même vitesse que l'ascenseur (mais dans un sens opposé), on a $M'_e = (J_R + J_V)\dfrac{4\pi^2}{p_v^2} + 2M$, soit $M'_e = 677\,\text{kg}$

Question 9 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C.

Correction

Par rapport au TEC effectué précédemment, il faut ajouter la puissance des actions de pesanteurs sur le contrepoids. Cette puissance est opposée à la puissance des actions de pesanteur sur l'ascenseur. $C = \dfrac{p_v}{2\pi} M'_e \dot{V}$.

Question 10 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur.

Correction

$C_{\text{Max}} = 0{,}24\,\text{Nm}$, $P_0 = 38\,\text{W}$.

Question 11 En déduire la puissance nécessaire P du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Correction

Avec les mêmes précautions que précédemment, $P = 127\,\text{W}$.

Question 12 Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique $9 \times 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$. L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section $0,2 \times 0{,}1\,\text{m}^2$ et de hauteur $1{,}4\,\text{m}$. Cette solution est-elle envisageable ?

Correction

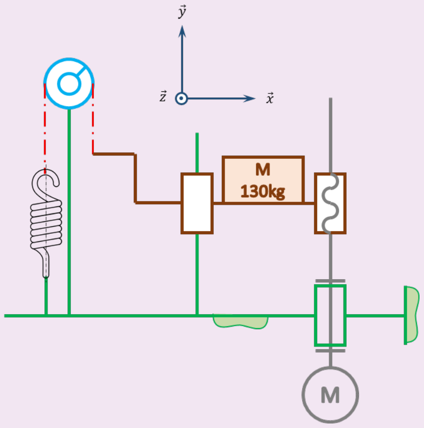
Au vu de la section disponible, la hauteur du contrepoids sera de $\dfrac{130}{0,1 \times 0,2 \times 9 \times 10^3} = 0{,}72\,\text{m}$. Le contrepoids doit pouvoir se déplacer de $0{,}8\,\text{m}$ soit un encombrement total de $1{,}52\,\text{m}$ supérieur à $1{,}4\,\text{m}$ disponible.

Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

Question 13 Faire un schéma de principe du dispositif.

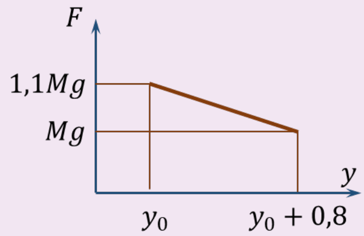
Correction



Question 14 L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum $F_{c\,\text{maxi}}$ qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement y de l'ascenseur.

Correction

La course maximale est de 0,8 m. La charge à compenser correspond au poids de l'ascenseur soit Mg. Lorsque l'ascenseur sera en bas, y sera minimal et le ressort sera tendu. L'effort sera donc maximal, soit $1,1Mg$. Lorsque l'ascenseur sera en haut, y sera maximal et le ressort sera « au repos ». L'effort doit compenser le poids. La raideur doit être de la forme $k = \dfrac{1,1Mg - Mg}{0,8} = \dfrac{0,1 \times 130 \times 9,81}{0,8} \simeq 159{,}4\,\text{N}\,\text{m}^{-1}$.



Question 15 La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible ?

Correction

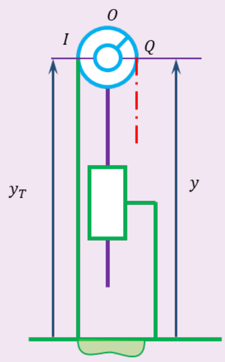
Dans les conditions proposées ci-dessus, on a $d = 9,7 \times 10^{-4}\sqrt[3]{1,1 \times Mg} = 0{,}011\,\text{m}$. Le nombre de spires serait alors $n = 872$. Si les spires sont jointives, on a une longueur de ressort minimale de $dn = 9{,}47\,\text{m}$ ce qui dépasse très largement les dimensions de la machine.

Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

Question 16 Déterminer la relation existant entre le déplacement y de l'ascenseur et le déplacement y_T de la tige du vérin. En déduire la course Δy_T nécessaire de la tige du vérin à gaz.

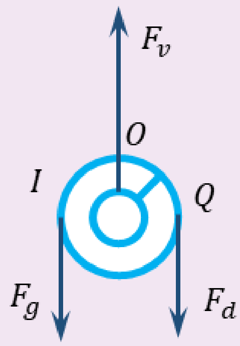
Correction

En utilisant le roulement sans glissement de la poulie par rapport à la courroie en I on montre que $y_T = \frac{1}{2}y$.



Question 17 Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté F_c. C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existant entre l'effort F développé par le vérin et l'effort de compensation F_c. En déduire l'effort minimum F_{mini} développé par le vérin.

Correction



Si on néglige la masse de la poulie, on peut appliquer le PFS (à la place du PFD).

- On isole la poulie de rayon R.
- La poulie est soumise au brin de gauche, au brin de droite et à l'effort du vérin.
- TMS en O, centre de la pivot : $F_g R - RF_d = 0$ soit $F_g = F_d$.
- TRS : $2F_d + F_v = 0$.

En reprenant les notations de la question, on a $2F_c = F$. Comme au minimum, $F_c = Mg$, on a donc $F_{\text{mini}} = 2Mg = 2550{,}6\,\text{N}$.

Question 18 Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.

Correction

Soit D le diamètre du vérin et d le diamètre de la tige.

Dans le premier cas, on a, dans la chambre droite, $F_d = +p\pi\dfrac{D^2-d^2}{4}$ et $F_g = -p\pi\dfrac{D^2}{4}$. La résultante des forces est donc $F_g + F_d = -p\pi\dfrac{d^2}{4}$.

Dans le second cas, l'effort est $-p\pi\dfrac{d^2}{4}$. Les deux modèle sont donc équivalent.

Question 19 Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre $d = 15 \times 10^{-3}$ m. On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée p_2.

Correction

On a $p_2 = \dfrac{F_{\text{mini}}}{\dfrac{\pi d^2}{4}} = 14\,433\,443$ Pa soient 144 bars.

Question 20 Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de F_1, F_{mini} et Δ_{y_T}. Exprimer F_{mini} en fonction de p_2 et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer F_1 en fonction de p_1 et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur r de ce vérin à gaz en fonction de F_{mini}, d, D, L et Δ_{y_T}.

Correction

- $r = \dfrac{F_1 - F_{\text{mini}}}{\Delta y_T}$.
- $F_{\text{mini}} = p_2\dfrac{\pi d^2}{4}$, $F_1 = p_1\dfrac{\pi d^2}{4}$.
- On a $p_1V_1 = p_2V_2 \Leftrightarrow F_{\text{mini}}V_1 = F_1V_2 \Leftrightarrow F_{\text{mini}}\dfrac{V_1}{V_2} = F_1$. D'où $r = \dfrac{F_{\text{mini}}\dfrac{V_1}{V_2} - F_{\text{mini}}}{\Delta y_T}$ $F_{\text{mini}}\dfrac{\dfrac{V_1}{V_2}-1}{\Delta y_T}$.

Par ailleurs, $V_1 - V_2 = \Delta y_T\dfrac{\pi d^2}{4}$; donc $V_2 = L\dfrac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T\dfrac{\pi d^2}{4}$.

On a donc $r = F_{\text{mini}}\dfrac{\dfrac{V_1-V_2}{V_2}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}}\dfrac{\dfrac{\Delta y_T\dfrac{\pi d^2}{4}}{L\dfrac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T\dfrac{\pi d^2}{4}}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}}\dfrac{\dfrac{\Delta y_T d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}}\dfrac{d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}$

Question 21 On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur L et calculer la raideur r.

Correction

Pour avoir la raideur la plus faible, il faut la longueur la plus grande soit 1 m. $r = F_{\text{mini}} \dfrac{d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}$

On prendra $r = 180\,\text{Nm}^{-1}$ pour la suite du problème.

Question 22 Déterminer l'effort maximal F_{Maxi} développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de F.

Correction

$F_{\text{Maxi}} = F_{\text{Mini}} + r\Delta y_T = 2550 + 180,4 = 2622\,\text{N}$.
La variation d'effort est de $\dfrac{72}{2550} \simeq 3\,\%$.

Question 23 Déterminer la relation $F = F(y_T)$.

Correction

$F = 2622 - r y_T$.

On considérera dans cette question que l'effort de compensation F_c est constant.

Question 24 En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de a, M_e, F_c, M...

Correction

En reprenant l'expression précédente et en ajoutant l'effort de la courroie F_c (de sens opposé au poids), on a $C = \dfrac{p_v}{2\pi}\left(M_e\dot{V} + Mg - F_c\right)$.

Question 25 Exprimer ensuite a en fonction de C, M_e, F_c, M ...

Correction

On a $a = \dot{V}$ et $a = \dfrac{1}{M_e}\left(\dfrac{2\pi C}{p_v} + F_c - Mg\right)$.

Question 26 En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur (prendre $F_c = 1300\,\text{N}$).

Correction

On reprend l'expression de C et on a $C = 0{,}22\,\text{Nm}$. $P_0 = 34{,}4\,\text{W}$

Question 27 En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.

Correction

$P = 115\,\mathrm{W}$

Synthèse

Question 28 On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges ? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante ?

Correction

Application 2
Mesure d'inertie – Corrigé

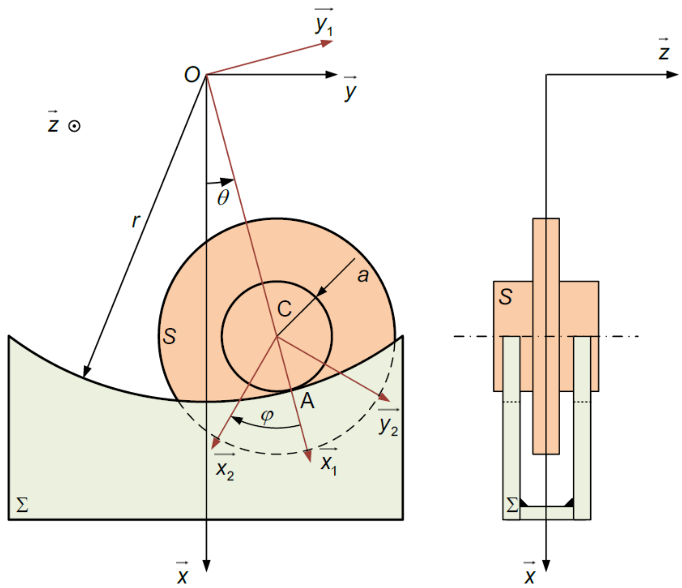
Un classique ...

Mise en situation

C1-05

C2-08

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ.



Soit $\left(O;\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ un repère galiléen lié au bâti Σ. On désigne par $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{x}$ l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe $\left(O,\overrightarrow{z}\right)$, de rayon r . Le solide S de masse m, de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a ($a < r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- le tourillon S, de centre C, roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ ;
- soit $\mathcal{R}_1$ $\left(O;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z}\right)$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe $\left(O,\overrightarrow{x_1}\right)$. $\theta = \left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_1}\right)$;
- soit $\mathcal{R}_2$ $\left(C;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z}\right)$ un repère lié à S. On pose $\varphi = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right)$. On suppose $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie $\left(C,\overrightarrow{z}\right)$ et f le coefficient de frottement entre S et Σ.

On donne $a = 12{,}3\,\text{mm}$; $r = 141{,}1\,\text{mm}$; $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$; $m = 7217\,\text{g}$; $f = 0,15$.

Question 1 Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.

Question 2 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport à R. En déduire l'équation différentielle du mouvement sur θ.

Question 3 En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S.

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de S, sachant que $T = 5\,\text{s}$.

En supposant toujours que l'angle θ reste petit, on pose $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\dfrac{mg}{(r-a)\left(m+\dfrac{I}{a^2}\right)}}$.

On suppose à la date $t = 0$, tel que $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$.

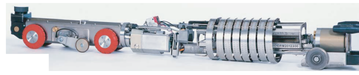
Question 5 Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que S roule sans glisser sur Σ.

TD 0
Robot de dépose de fibres optiques ⋆ – Corrigé

Concours Mines Ponts – PSI 2004.

C1-05

C2-08



Présentation

Objectif

En fin des mouvements des bras, on doit avoir $\delta = 14°$ et $\dot{\delta} \leq 50°.s^{-1}$.

Hypothèses

Repères et paramétrage

Cahier des charges

Modélisation dynamique

Question 1 Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$, puis la calculer.

Correction

Pour calculer l'énergie cinétique de l'ensemble seule la masse de la tige 1 est prise en compte.

$2\ E_c(\Sigma/R_0) = \{\mathscr{C}(\Sigma/R_0)\} \otimes \{\mathscr{V}(\Sigma/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(1/0) \\ \overrightarrow{V}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} m_1\ \overrightarrow{V}(G_1, 1/0) \\ \overrightarrow{\sigma}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1}$

$= m_1\ \left(\overrightarrow{V}(G_1, 1/0)\right)^2 + \overrightarrow{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0)$.

- Vecteur de taux de rotation de 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\delta}\ \overrightarrow{z_0}$.
- Vitesse du point G_1 appartenant à 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{V}(G_1, 1/0) = \overrightarrow{V}(I, 1/0) + \overrightarrow{G_1 I_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = -\left(R\ \overrightarrow{y_0} + \frac{L_1}{2}\overrightarrow{x_1}\right) \wedge \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} = -R\ \dot{\delta}\ \overrightarrow{x_0} + \frac{L_1}{2}\ \dot{\delta}\overrightarrow{y_1}$.
- Caractéristiques d'inertie de la tige 1 : la tige 1 supposée unidimensionnelle présente naturellement des symétries matérielles suivant des plans contenant $\overrightarrow{x_1}$. Les produits d'inertie sont donc nuls. Le moment d'inertie en G_1 suivant $\overrightarrow{z_0}$ est $C_1 = \frac{m_1\ L_1^2}{12}$.
- Moment cinétique en G_1 de 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{\sigma}(G_1, 1/0) = \overline{\overline{I}}_{G_1}(1) \cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \frac{m_1\ L_1^2}{12}\dot{\delta}\ \overrightarrow{z_0}$.
- On en déduit $E_c(1/0)$: $E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) = \frac{1}{2}\ m_1\ \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{4} + R\ L_1\ \sin\delta\right) + \frac{m_1\ L_1^2}{12}\ \dot{\delta}^2$
  $= \frac{1}{2}\ m_1\ \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\ L_1 \sin\delta\right)$.

Question 2 Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ.

Correction

$\mathscr{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) = \mathscr{P}(\text{pesanteur} \rightarrow \Sigma/0) + \mathscr{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) + \mathscr{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0)$

- Actions de la pesanteur :

$\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow \Sigma/0) = \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/0) = \{\mathcal{T}\ (\text{pes} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}\ (1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1\ g\ \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_1} \otimes$
$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}(1/0 \\ \overrightarrow{V}(G_1,1/0) \end{array} \right\}_{G_1}$
$= -m_1\ g\ \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{V}(G_1,1/0) = -m_1\ g \frac{L_1}{2} \dot{\delta}\ \cos\delta.$

- Actions du contact en I entre 0 et 4 (*le contact se fait par roulement sans glissement*) :
  $\mathcal{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0) = \{\mathcal{T}\ (0 \rightarrow 4)\} \otimes \{\mathcal{V}\ (4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{04} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_I \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(4/0) \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_I = 0.$
- Actions du contact en E entre 0 et 2 (*le contact se fait sans frottement*) :
  $\mathcal{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) = \{\mathcal{T}\ (0 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}\ (4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{02}\ \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E \otimes$
  $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}(2/0) \\ \overrightarrow{V}(E,2/0) \end{array} \right\}_E = R_{02}\ \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{V}(E,2/0) = 0.$

Question 3 Donner la puissance intérieure à Σ.

Correction

- Les liaisons sont supposées comme parfaites donc : $\mathcal{P}\left(1 \overset{\text{Pivot}}{\leftrightarrow} 2\right) = \mathcal{P}\left(1 \overset{\text{Pivot Gl.}}{\leftrightarrow} 3\right) = \mathcal{P}\left(3 \overset{\text{Pivot}}{\leftrightarrow} 2\right) = 0.$
- Action du vérin entre 1 et 3 :
  $\mathcal{P}\left(1 \overset{\text{Vérin}}{\leftrightarrow} 3\right) = \{\mathcal{T}\ (1 \rightarrow 3)\} \otimes \{\mathcal{V}\ (3/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_N \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V}(N,3/1) \end{array} \right\}_N = F\ \overrightarrow{V}(N,3/1) \cdot \overrightarrow{x_1}.$
  En considérant que $\overrightarrow{MN}$ est porté par $\overrightarrow{x_1}$ (hypothèse faite dans l'énoncé), on obtient :
  $\overrightarrow{V}(N,3/1) \cdot \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{V}(M,3/1) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{V}(M,3/2) + \overrightarrow{V}(M,2/1)\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{V}(B,2/1) + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(-b\overrightarrow{x_2} \wedge (\dot{\beta} - \dot{\delta})\ \overrightarrow{z_0}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = b\ (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \cdot \overrightarrow{y_2} \cdot \overrightarrow{x_1} = -b\ (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta).$
  On en déduit : $\mathcal{P}\left(1 \overset{\text{Vérin}}{\leftrightarrow} 3\right) = -F\ b\ (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta).$

Question 4 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre F, δ, et β.

Correction

On applique alors le théorème de l'énergie cinétique à Σ par rapport au référentiel galiléen R_0 :
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c(\Sigma/R_0)) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}_{\text{int}}(\Sigma).$
Or, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c(\Sigma/R_0)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\ m_1\ \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\ L_1 \sin\delta\right)\right] = m_1\ \dot{\delta} \left[\ddot{\delta} \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\ L_1 \sin\delta\right) + \frac{1}{2}\dot{\delta}^2\ R\ L_1 \cos\delta\right].$
Ainsi on obtient, l'équation :

$$\boxed{m_1\ \dot{\delta} \left[\ddot{\delta} \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\ L_1 \sin\delta\right) + \frac{1}{2}\dot{\delta}^2\ R\ L_1 \cos\delta\right] = -F\ b\ (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta) - m_1\ g \frac{L_1}{2} \dot{\delta}\ \cos\delta.}$$

Des simulations pour différentes valeurs de F donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de δ en fonction du temps.

Question 5 Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot{\delta}$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.

Correction

- $F = 700\,\text{N}$: le régime est fortement oscillant. Le système ne parvient pas à soulever le robot jusqu'à 14°. Celui-ci se comporte comme un oscillateur non amorti (le modèle est considéré sans frottement).
  Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.
- $F = 750\,\text{N}$: le système atteint les 14°. La pente à l'accostage vaut environ $37.5°/s$ ce qui est raisonnable vis-à-vis du cahier des charges. Cependant, le modèle utilisé pour trouver ce résultat utilise des liaisons parfaites, sans frottement. L'effort de 700 N étant insuffisant avec ce modèle parfait, il est possible qu'un effort de 750 N devienne insuffisant en réalité.
  Cette valeur est théoriquement satisfaisante mais l'écart entre modèle et réalité risque de modifier la conclusion.
- $F = 800\,\text{N}$: Le système atteint les 14° La pente à l'accostage vaut environ $45°/s$ ce qui est inférieur à la limite de $50°/s$ imposée par le cahier des charges. L'effort est 15% supérieur à la valeur minimale nécessaire pour atteindre les 14° ce qui semble une marge suffisante pour vaincre les frottements non pris en compte dans le modèle.
  Cette valeur est satisfaisante.
- $F = 950\,\text{N}$: Le système atteint les 14°. La pente à l'accostage vaut environ $75°/s$ ce qui est supérieur à la limite de $50°/s$ imposée par le cahier des charges.
  Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.