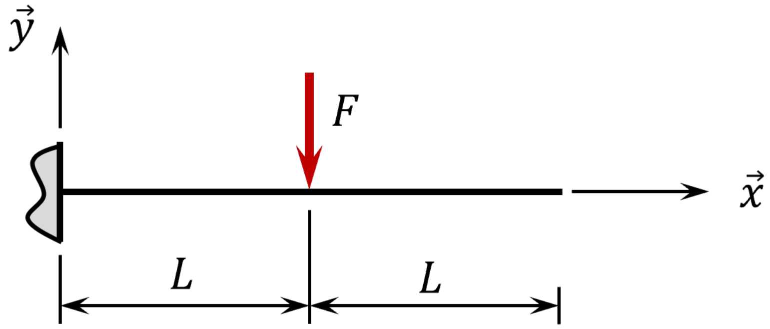
Poutre encastrée ★

05 RDM

Pas de corrigé pour cet exercice.

- $\overrightarrow{F} = -F\overrightarrow{y} = -2000\overrightarrow{y}$;
- $L = 1\,\text{m}$.

On donne la poutre suivante.



Question 1 Exprimer l'équation de la déformée de la poutre.

L'équation de la déformée est donnée par : $EI_{GZ}y''(x) = M_{fz}(x)$.

Calcul du torseur de cohésion

La poutre est composée de 2 tronçons :

- 1^er tronçon : $\lambda \in [0, L]$
- 2^e tronçon : $\lambda \in [L, 2L]$

1^er tronçon

- On isole la partie II.
- BAME :
  - $\{\mathcal{T}(I \to II)\}$
  - $\{\mathcal{T}(F \to II)\}$
- D'après le PFS, on a donc $\{\mathcal{T}(I \to II)\} + \{\mathcal{T}(F \to II)\} = \{0\}$ et donc $\{\mathcal{T}(II \to I)\} = \{\mathcal{T}(F \to II)\}$.

On a donc $\forall \lambda \in [0, L]$, $\overrightarrow{\mathcal{M}(G, F \to II)} = (L-\lambda)\overrightarrow{x} \wedge -F\overrightarrow{y} = -F(L-\lambda)\overrightarrow{z}$.

Au final, $\{\mathcal{T}(II \to I)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\overrightarrow{y} \\ -F(L-\lambda)\overrightarrow{z} \end{array} \right\}_G$.

2^e tronçon

$\forall \lambda \in [0, L]$, $\{\mathcal{T}(II \to I)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$.

Calcul de la déformée sur le premier tronçon

$\forall x \in [L, 2L]$, $EI_{GZ}y''(x) = -F(L-x) = -FL + Fx$ et en intégrant $EI_{GZ}y'(x) = -FLx + \dfrac{1}{2}Fx^2 + c_1$ et $EI_{GZ}y(x) = -\dfrac{1}{2}FLx^2 + F\dfrac{1}{6}x^3 + c_1x + c_2$.

La liaison en $x = 0$ étant une encastrement, on a $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. En conséquence, $c_2 = 0$ et $c_1 = 0$.

Au final, $EI_{GZ}y(x) = -\dfrac{1}{2}FLx^2 + \dfrac{1}{6}Fx^3 = Fx^2\dfrac{x-3L}{6}$.

On peut alors exprimer la flèche en L : $EI_{GZ}y(L) = -\dfrac{FL^3}{3}$.

Calcul de la déformée sur le second tronçon

$\forall x \in [L, 2L]$, $EI_{GZ}y_2''(x) = 0$ et en intégrant $EI_{GZ}y_2'(x) = c_3$ et $EI_{GZ}y_2(x) = c_3x + c_4$.
On a de plus $y(L) = y_2(L)$ et $y'(L) = y_2'(L)$.

D'une part, $F\dfrac{3L^2 - 6L^2}{6} = c_3$ et donc $c_3 = -F\dfrac{L^2}{2}$

D'autre part, $FL^2\dfrac{L-3L}{6} = -F\dfrac{L^2}{2}L + c_4$ et $c_4 = FL^2\dfrac{L-3L}{6} + F\dfrac{L^2}{2}L = \dfrac{FL^3}{6}$.

Question 2 Donner la valeur de la flèche au point d'application de l'effort.