

## 11 Approche énergétique

### 11.1 Introduction

#### 11.1.1 Objectif de la modélisation

Dans ce chapitre nous aborderons les notions de **puissance**, **travail**, et **énergie**. Ces notions sont fondamentales pour :

- ▶ dimensionner des composants d'une chaîne d'énergie en terme de puissance transmissible ;
- ▶ déterminer des équations de mouvement pour prévoir les performances d'un système ;
- ▶ estimer le rendement d'une chaîne complète d'énergie.

B2-10

Émilien Durif, *Approche énergétique*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

### 11.2 Puissance

#### 11.2.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

##### Définition – Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

On définit la **puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel** ( $E$ ) en mouvement par rapport à un référentiel  $R$  subissant une densité d'effort  $\vec{f}(M)$  (où  $M$  est un point courant de ( $E$ )) comme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \overrightarrow{V(M, E/R)} dV.$$

##### Remarque

On appellera **puissance galiléenne**, la puissance d'un ensemble matériel ( $E$ ) en mouvement dans un **référentiel galiléen**  $\mathcal{R}_g$  :  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ .

- ▶ Une puissance est une **grandeur scalaire** s'exprimant en **Watt**.
- ▶ Elle est homogène à un produit entre un effort et une vitesse et peut donc s'exprimer en unité SI en **Nms<sup>-1</sup>**.
- ▶ Historiquement on a utilisé longtemps les « chevaux » ou « cheval vapeur » (1 ch = 736 W).

**Propriété – Calcul des actions mécaniques s'appliquant sur un ensemble E**

On considère un ensemble matériel  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$ .

Dans la pratique pour calculer la puissance totale des actions mécaniques s'appliquant sur  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  il faut sommer toutes les puissances s'appliquant sur les  $S_i$  venant de l'extérieur de  $E$  :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \sum_{\forall S_i \in E} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_i/R).$$

**11.2.2 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide****Définition – Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ( $S$ )**

La puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ( $S$ ) en mouvement dans un référentiel  $R$  peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit ( $S$ ) et le torseur cinématique du mouvement de  $S$  dans le référentiel  $R$ .

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}.$$

On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point**.

**Remarque**

- ▶ Le comoment des torseurs est défini par  $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}$   
 $= \left\{ \frac{\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}}{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \right\}_P \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(S/R)}}{\overrightarrow{V(P, S/R)}} \right\}_P = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}.$
- ▶ Lorsque le torseur cinématique de  $S/R$  est un couple (mouvement de translation) alors **en tout point A** la puissance est alors donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} \forall P$ .
- ▶ Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)} \forall P$ .

**11.2.3 Puissance d'actions mutuelles entre deux solides****Définition – Puissance d'actions mutuelles entre deux solides**

Soient deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) distincts, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. **La puissance des actions mutuelles** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ), dans leur mouvement par rapport au repère  $R$ , est :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R_g) = \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_g) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_g).$$

**La puissance des actions mutuelles** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) est **indépendante du repère R**. Ainsi,

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2).$$

**Remarque**

- On peut parler parfois de **puissance des inter-efforts**.
- Pour un ensemble  $E$ , on peut exprimer l'ensemble de la puissance des inter-effort comme la puissance intérieure à l'ensemble  $E$  :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j).$$

**11.2.4 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons****Définition – Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons**

Si deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}.$$

La **liaison parfaite** si et seulement si quel que soit le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre  $S_1$  et  $S_2$  est nulle**.

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$

**Remarque**

- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solide  $S_1$  et  $S_2$ . Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.
- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

**11.3 Énergie cinétique****11.3.1 Définition****Définition – Énergie cinétique**

On définit l'**énergie cinétique**  $\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g)$  d'un système matériel  $S$  en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}_g$  comme la somme des carrés de la vitesse en chaque point courant  $P$  de  $S$  pondéré de la masse élémentaire :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} \left( \vec{V}(P/\mathcal{R}_g) \right)^2 dm.$$

### 11.3.2 Propriétés

#### Propriété – Expression avec les comoments

L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(S/\mathcal{R}_g) \} \otimes \{ \mathcal{C}(S/\mathcal{R}_g) \}.$$

Il faudra bien veiller à ce que chacun des torseurs soit exprimé en un même point.

#### Propriété – Cas particuliers

- Solide  $S$  de masse  $M$  de centre d'inertie  $G$  en mouvement de **translation** par rapport à  $R$  :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} M \overrightarrow{\mathcal{V}(G, S/\mathcal{R}_g)}^2.$$

- Solide  $S$  de moment d'inertie  $I_{Oz}(S)$  en mouvement de rotation par rapport à l'**axe fixe**  $(O, \vec{z})$  par rapport  $R$  :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} I_{Oz}(S) \overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_g)}^2.$$

### 11.3.3 Inertie et masse équivalentes

#### Définition – Inertie et masse équivalentes

Lorsqu'un problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et pour simplifier les calculs, on peut exprimer l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$  en fonction d'un seul paramètre cinématique. On peut alors écrire  $\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)$  :

- avec **son inertie équivalente**  $J_{\text{eq}}(E)$  (en  $\text{kg m}^2$ ) rapportée à un paramètre de rotation  $\dot{\theta}(t)$  :

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} J_{\text{eq}}(E) \dot{\theta}^2.$$

- avec **sa masse équivalente**  $M_{\text{eq}}(E)$  (en  $\text{kg}$ ) rapportée à un paramètre de translation  $\dot{x}(t)$  :

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} M_{\text{eq}}(E) \dot{x}^2.$$

## 11.4 Théorème de l'énergie cinétique

### 11.4.1 Introduction

Le théorème de l'énergie cinétique est la traduction du Principe Fondamental de la Dynamique d'un point de vue énergétique.

### 11.4.2 Énoncé pour un solide

#### Théorème – Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à  $S$ . Soit :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g).$$

### 11.4.3 Énoncé pour un ensemble de solides

#### Théorème – Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides

Soit  $(E)$  un ensemble de  $n$  solide  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$  en mouvement par rapport à un repère galiléen  $\mathcal{R}_g$ . Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j/\mathcal{R}_g) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) + \mathcal{P}_{\text{int}}(E).$$

Avec :

- ▶  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$  la puissance intérieure à  $E$  qui est nulle si l'il n'y a pas d'apport d'énergie interne ni de dissipation (liaisons parfaites);
- ▶  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g)$ , la puissance galiléenne de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$ .

#### Remarque

- ▶ Dans le théorème de l'énergie cinétique, contrairement au principe fondamental de la dynamique, on tient compte de la puissance des actions mutuelles donc internes à l'ensemble matériel  $E$  que l'on considère.
- ▶ Ce théorème permet d'obtenir une seule équation scalaire. Cette méthode est donc moins riche que le principe fondamental de la dynamique mais permet d'obtenir quasiment directement les équations de mouvements.
- ▶ Pour obtenir une équation de mouvement (*i.e* éliminer les inconnues en actions mécaniques) il faut alors combiner d'autres équations issues des théorèmes généraux de la dynamique.

## 11.5 Notion de rendement énergétique

### 11.5.1 Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle

Une étude dynamique d'une chaîne fonctionnelle peut se décomposer en deux parties :

- ▶ **en régime permanent** (variation d'énergie cinétique négligeable) : étude des effets dissipatifs pour estimer une puissance nominale des actionneurs;
- ▶ **en régime transitoire** : évaluation du complément de puissance pour permettre au système de fonctionner.

**Définition – Rendement d'une chaîne fonctionnelle**

Le rendement se définit **en régime permanent** comme la puissance utile sur la puissance d'entrée d'une chaîne fonctionnelle :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})}.$$

- ▶  $\eta \in [0, 1]$ ;
- ▶  $\mathcal{P}(\text{entrée}) > 0$  définit la puissance fournie par l'actionneur **en régime permanent**;
- ▶  $\mathcal{P}(\text{utile}) > 0$  définit la puissance fournie à l'aval d'une chaîne fonctionnelle (effecteur par exemple) **en régime permanent**.

**Propriété – Rendement global d'une chaîne d'énergie**

Le **rendement global** d'une chaîne d'énergie comportant  $n$  éléments de rendements  $\eta_i$  est donné par :

$$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i \leq 1.$$

Chacun des rendements successifs  $\eta_i$  étant au plus égale à 1, le rendement global est nécessairement inférieur ou égal au plus mauvais rendement.

**11.5.2 Détermination d'une puissance dissipée****Propriété – Estimation des dissipations**

On peut évaluer en régime permanent les pertes ou puissance dissipée à partir de la connaissance du rendement  $\eta$  :

$$\mathcal{P}(\text{dissipée}) = (1 - \eta) \cdot \mathcal{P}(\text{entrée}).$$



## Application 1

### Détermination de l'inertie équivalente de réducteurs – Sujet

#### Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec  $Z_1$ ,  $Z_{21}$ ,  $Z_{23}$  et  $Z_3$  le nombre de dents des roues dentées. On nomme  $k_1$  le rapport du train de  $S_1$  et  $S_2$  avec  $k_1 = \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$  et  $k_2$  le rapport de  $S_2$  et  $S_3$  avec  $k_2 = \frac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$ .

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$

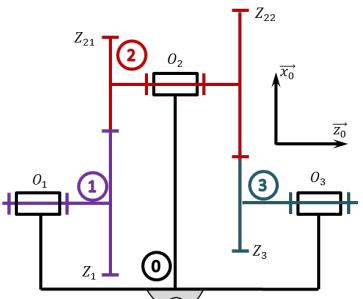
On rappelle que pour les engrenages à denture droite  $d = mz$  avec  $d$  le diamètre primitif,  $m$  le module,  $z$  le nombre de dents du pignon.  $\omega(1/0)$ ,  $\omega(2/0)$  et  $\omega(3/0)$  sont les vitesses de rotation de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  autour des axes  $(O_1, \vec{x}_g)$ ,  $(O_2, \vec{x}_g)$  et  $(O_3, \vec{x}_g)$ . Le repère galiléen  $\mathcal{R}_g$  est lié au solide  $S_0$ . Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les matrices d'inertie sont définies aux centres de masse  $G_1 = O_1$ ,  $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$  associées aux solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  sont de la forme :  $I_{O_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{O_i, R_i}$ .

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur  $C_m$  agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une charge résistante  $C_r$  s'exerce sur l'arbre 3.

**Question 1** Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.

**Question 2** Déterminer l'inertie équivalente du réducteur ramené à l'axe moteur.

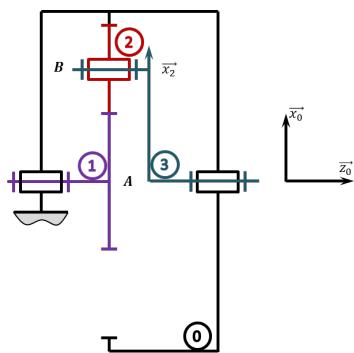
**Question 3** Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.



## Exercice 2 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train épicycloïdal

On considère le train épicycloïdal suivant à trois satellites. Chacune des pièces est axisymétrique. On donne leurs matrices d'inertie :

$$\overline{\overline{I}}_A(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \quad \overline{\overline{I}}_B(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \quad \overline{\overline{I}}_A(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$



On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$

**Question 4** Déterminer le rapport de réduction du train épicycloïdal.

**Question 5** Déterminer l'inertie équivalente du train épicycloïdal.

**Question 6** Déterminer le couple moteur (à appliquer sur l'arbre 1) nécessaire à la mise en mouvement de la charge sur l'arbre de sortie 3 sur lequel est appliqué un couple résistant.



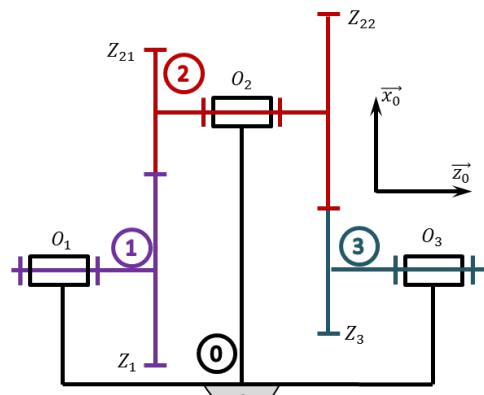
## Application 1

### Détermination de l'inertie équivalente de réducteurs – Corrigé

#### Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec  $Z_1$ ,  $Z_{21}$ ,  $Z_{23}$  et  $Z_3$  le nombre de dents des roues dentées. On nomme  $k_1$  le rapport du train de  $S_1$  et  $S_2$  avec  $k_1 = \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$  et  $k_2$  le rapport de  $S_2$  et  $S_3$  avec  $k_2 = \frac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$ .

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$



On rappelle que pour les engrenages à denture droite  $d = mz$  avec  $d$  le diamètre primitif,  $m$  le module,  $z$  le nombre de dents du pignon.  $\omega(1/0)$ ,  $\omega(2/0)$  et  $\omega(3/0)$  sont les vitesses de rotation de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  autour des axes  $(O_1, \vec{x}_g)$ ,  $(O_2, \vec{x}_g)$  et  $(O_3, \vec{x}_g)$ . Le repère galiléen  $\mathcal{R}_g$  est lié au solide  $S_0$ . Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les matrices d'inertie sont définies aux centres de masse  $G_1 = O_1$ ,  $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$  associées aux solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  sont de la forme :  $I_{O_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{O_i, R_i}$ .

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur  $C_m$  agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une charge résistante  $C_r$  s'exerce sur l'arbre 3.

**Question 7** Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.

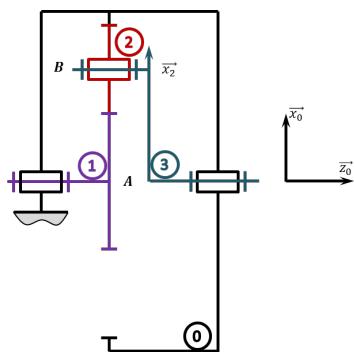
**Question 8** Déterminer l'inertie équivalente du réducteur ramené à l'axe moteur.

**Question 9** Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.

## Exercice 2 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train épicycloïdal

On considère le train épicycloïdal suivant à trois satellites. Chacune des pièces est axisymétrique. On donne leurs matrices d'inertie :

$$\overline{\overline{I}}_A(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \quad \overline{\overline{I}}_B(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \quad \overline{\overline{I}}_A(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$



On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$

**Question 10** Déterminer le rapport de réduction du train épicycloïdal.

### Correction

#### Méthode –

1. Écrire le rapport de réduction recherché.
2. Refaire le schéma en fixant le porte satellite et en libérant le bâti. Le porte satellite devient donc le bâti et le train peut être considéré comme un train simple.
3. Déterminer le rapport de réduction du train simple (les taux de rotation seront donc exprimés en fonction du porte-satellite) en fonction du nombre de dents des roues dentées.
4. Introduire les fréquences de rotation exprimées au point 1.
5. Exprimer le rapport de réduction cherché en fonction du nombre de dents des solides.

On recherche  $k = \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)}$ .

On bloque le porte satellite 3 et on libère la couronne 0.

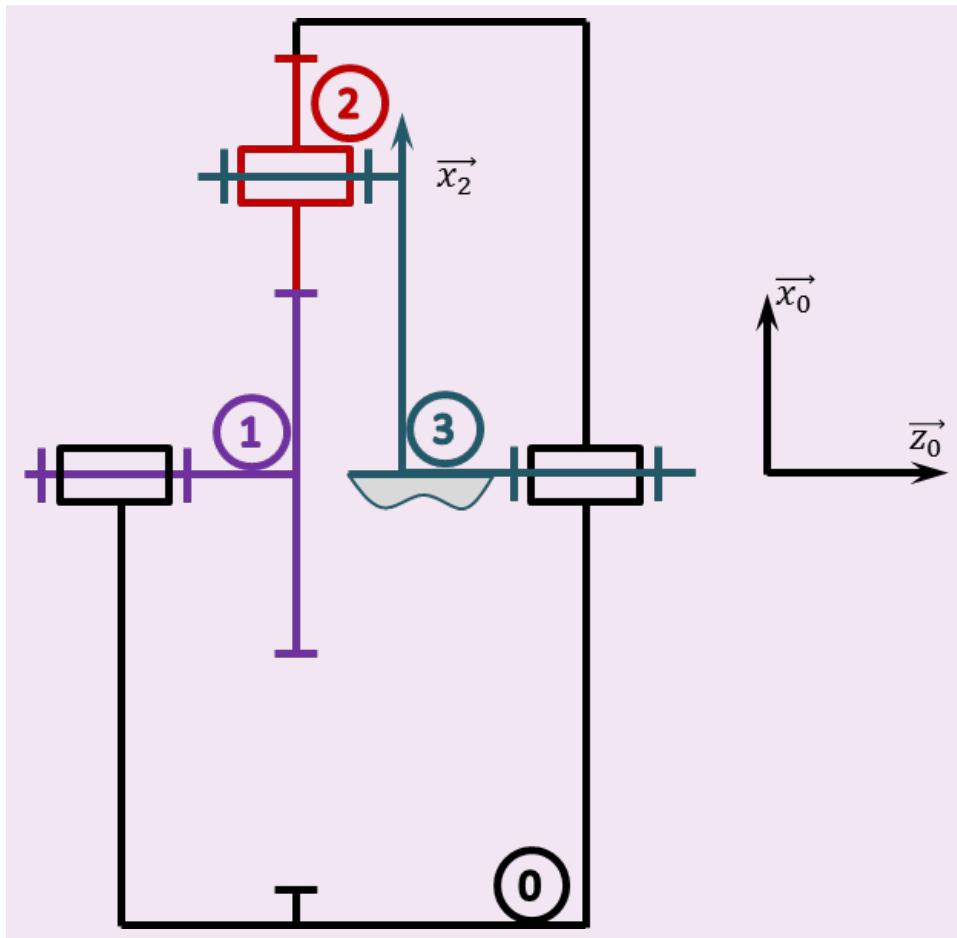
On peut donc exprimer  $\frac{\omega(0/3)}{\omega(1/3)} = (-1)^1 \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_2 \cdot Z_0} = -\frac{Z_1}{Z_0}$ .

En décomposant le taux de rotation, on introduit  $\omega(1/0)$  et  $\omega(0/3)$  :  $\frac{\omega(0/3)}{\omega(1/3)} = \frac{\omega(0/3)}{\omega(1/0) + \omega(0/3)}$

$$\frac{\omega(0/3)}{\omega(1/0) + \omega(0/3)} = -\frac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow \frac{-\omega(3/0)}{\omega(1/0) - \omega(3/0)} = -\frac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow Z_0 \omega(3/0) =$$

$$Z_1 (\omega(1/0) - \omega(3/0)) \Leftrightarrow \omega(3/0) (Z_0 + Z_1) = Z_1 \omega(1/0) \Leftrightarrow \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_0}.$$

Au final,  $k = \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_0}$ .



**Question 11** Déterminer l'inertie équivalente du train épicycloïdal.

**Question 12** Déterminer le couple moteur (à appliquer sur l'arbre 1) nécessaire à la mise en mouvement de la charge sur l'arbre de sortie 3 sur lequel est appliqué un couple résistant.

#### Correction

##### Méthode –

- On calcule  $T(1/0)$ ,

##### Calcul de l'énergie cinétique du planétaire : $T(1/0)$

Par définition,  $2T(1/0) = \{\mathcal{V}(1/0)\} \otimes \{\mathcal{C}(1/0)\}$  A étant un point fixe dans 0, on a :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \omega(1/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(A, 1/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{C}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_1 \overrightarrow{V(G, 1/0)} \\ \sigma(A \in 1/0) = \bar{I}(A, 0) \overrightarrow{\Omega(1/0)} = C_1 \omega(1/0) \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$T(1/0) = \frac{1}{2} C_1 \omega(1/0)^2$$

### Correction

**Calcul de l'énergie cinétique du porte-satellite :  $T(3/0)$**

Par définition,  $2T(2/0) = \{\mathcal{V}(2/0)\} \otimes \{\mathcal{C}(2/0)\}$ ; on a :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \omega(3/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(A, 3/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{C}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_3 \overrightarrow{V(G, 3/0)} \\ \sigma(A \in 3/0) = \bar{I}(A, 3) \overrightarrow{\Omega(3/0)} = C_3 \omega(3/0) \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$T(3/0) = \frac{1}{2} C_3 \omega(3/0)^2 = \frac{1}{2} k^2 C_3 \omega(1/0)^2$$

### Correction

**Calcul de l'énergie cinétique d'un seul satellite :  $T(2/0)$**

Par définition,  $2T(2/0) = \{\mathcal{V}(2/0)\} \otimes \{\mathcal{C}(2/0)\}$  et le centre d'inertie d'un porte satellite est au point  $B$  on a donc :

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega(2/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(B, 2/0)} \end{array} \right\}_B$$

$$\{\mathcal{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_2 \overrightarrow{V(G, 2/0)} \\ \sigma(A \in 2/0) = \bar{I}(A, 2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} = C_2 \omega(2/0) \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

$$\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \overrightarrow{V(B, 2/3)} + \overrightarrow{V(B, 3/0)} = \vec{0} + \overrightarrow{V(A, 3/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/0)} = -R_3 \vec{x}_3 \wedge \omega(3/0) \vec{z}_0 = -R_3 \omega(3/0) \vec{y}_3.$$

### Remarque

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est porté par le porte satellite. Par ailleurs, les points  $A, B$  ainsi que les points de contact dans les engrenages sont toujours suivant la direction du porte satellite. Enfin,  $R_3 = R_1 + R_2$ .

D'où :

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega(2/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(B, 2/0)} = -R_3 \omega(3/0) \vec{y}_3 \end{array} \right\}_B$$

$$\{\mathcal{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_2 \overrightarrow{V(G, 2/0)} = -R_3 \omega(3/0) \vec{y}_3 \\ \sigma(A \in 2/0) = C_2 \omega(2/0) \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$T(3/0) = \frac{1}{2} C_2 \omega(2/0)^2 + \frac{1}{2} M_2 R_3^2 \omega(3/0)^2 = \frac{1}{2} C_2 \frac{r_1^2}{4r_2^2} \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2} M_2 R_3^2 k^2 \omega(1/0)^2 = \frac{1}{2} C_2 \mu^2 \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2} M_2 K$$

### Correction

**Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble E :  $T(E/0)$**

Sans oublier qu'il y a 3 satellites (...), on a donc :

$$T(E/0) = T(1/0) + T(2/0) + T(3/0)$$

$$T(E/0) = \frac{3}{2}C_2 \frac{r_1^2}{4r_2^2} \omega(1/0)^2 + \frac{3}{2}M_2 R_3^2 k^2 \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2}C_1 \omega(1/0)^2 + \frac{1}{2}k^2 C_3 \omega(1/0)^2$$

D'où

$$T(E/0) = \frac{1}{2} (3C_2\mu^2 + 3M_2R_3^2k^2 + C_1 + k^2C_3) \omega(1/0)^2$$

On note donc  $J_{eq} = 3C_2\mu^2 + 3M_2R_3^2k^2 + C_1 + k^2C_3$  l'inertie équivalente du train épicycloïdal.

### Correction

#### Calcul des puissances externes

##### Calcul des puissances dues aux actions de contact

Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 1 et 0 :  $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1}$  :

On a :  $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1} = \{\mathcal{V}(1/0)\} \otimes \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\}$

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \omega(1/0) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(A, 1/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(1 \rightarrow 0)} \\ \overrightarrow{m(A, 1 \rightarrow 0)} = L_{01} \vec{x}_0 + L_{01} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_A$$

On a donc :  $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1} = 0$ .

- ▶ Puissance dissipée dans la liaison engrenage entre 2 et 0 :  $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 2} = 0$
- ▶ Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 3 et 0 :  $\mathcal{P}_{0 \rightarrow 3} = 0$
- ▶ Puissance fournie à l'arbre 1 :  $\mathcal{P}_{ext \rightarrow 1} = C_e \omega(1/0)$
- ▶ Puissance transmise par l'arbre 3 :  $\mathcal{P}_{3 \rightarrow ext} = C_s \omega(3/0) = kC_s \omega(1/0)$
- ▶ Calcul des puissances dues aux actions à distance
- ▶ Puissance due à la pesanteur sur la pièce 1
- ▶ Puissance due à la pesanteur sur la pièce 3
- ▶ Puissance due à la pesanteur sur la pièce 2
- ▶ Calcul des puissances internes
- ▶ Puissance dissipée dans la liaison engrenage entre 1 et 2 :  $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = 0$  (RSG)
- ▶ Puissance dissipée dans la liaison pivot entre 2 et 3 :  $\mathcal{P}_{3 \rightarrow 2} = 0$

D'après le théorème de l'énergie puissance, on a :

$$\frac{dT(E/0)}{dt} = (C_e + kC_s) \omega(1/0) \Leftrightarrow J_{eq} \dot{\omega}(1/0) = (C_e + kC_s)$$



# Application 2

## Système de dépose de composants électroniques – Sujet

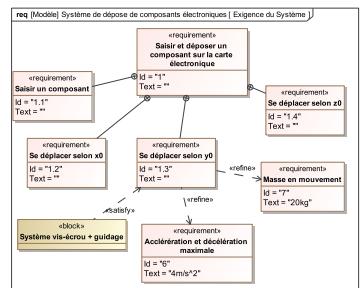
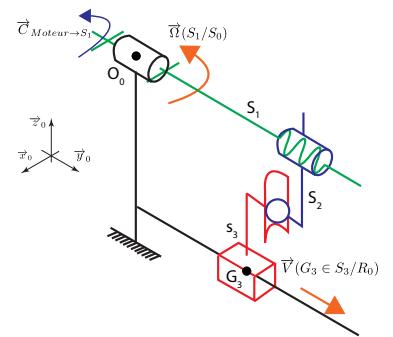
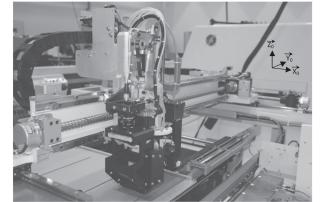
Émilien Durif – E3A PSI 2011.

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée  $\vec{y}_0$ ) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

**Hypothèses :**

- ▶ le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
- ▶ les solides seront supposés indéformables;
- ▶ on notera  $J_1$  le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  :  $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$ ;
- ▶ on note  $M_3$  et  $G_3$  respectivement la masse et le centre d'inertie du solide  $S_3$ ;
- ▶ la position de  $G_3$  est définie par  $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
- ▶ les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre  $S_0$  et  $S_3$  (Coefficient de frottement noté  $\mu$ ) et la pivot entre  $S_0$  et  $S_1$  (couple résistant noté  $C_r$ );
- ▶ seul l'action de pesanteur sur  $S_3$  sera supposée non négligeable.

- ▶  $S_0$  : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
- ▶  $S_1$  : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
- ▶  $S_2$  : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
- ▶  $S_3$  : chariot supportant la tête de dépose (masse  $M_3$ ).



### Objectif

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- ▶ couple moteur transmis à  $S_1$  :  $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$ ;
- ▶ vitesse de rotation de  $S_1$  :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$ ;

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose  $S_3$ ) :

- ▶ masse :  $M_3$ ;
- ▶ cinématique de  $S_3$  :  $\vec{a}(G_3 R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}(t)$ .

On considère l'ensemble  $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$ .

**Question 1** Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

**Données numériques associées au système :**

- ▶ Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) :  $\mu = 0,1$ .
- ▶ Pas de la vis à billes :  $p = 20 \text{ mm}$ .
- ▶ Diamètre de la vis à billes :  $D = 25 \text{ mm}$ .
- ▶ Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe  $\vec{y}_0$  :  $I_v = 2,15 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .
- ▶ Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) :  $C_r = 3 \text{ Nm}$ .
- ▶  $l$ , longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) :  $1000 \text{ mm}$ .

Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :

- ▶ couple maximal,  $C_{\max} = 21,2 \text{ Nm}$ ;
- ▶ fréquence de rotation maximale,  $N_m = 6000 \text{ tr/min}$ ;
- ▶ moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe  $\vec{y}_0$ ,  $I_m = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

**Question 2** Déterminer l'expression de  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

**Question 3** Calculer  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction des données du problème.

**Question 4** Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble  $E : \mathcal{P}_{\text{int}}(E)$ .

**Question 5** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$

**Question 6** Déterminer la mobilité du système.

**Question 7** Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

**Question 8** Déterminer l'inertie équivalente de  $E$  ramenée à la rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  et du paramètre  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 9** Déterminer la masse équivalente de  $E$  ramené à la translation selon la direction  $\vec{y}_0$  et du paramètre  $\dot{y}(t)$ .

**Question 10** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $E$ .

**Question 11** Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier  $C_m$  à  $y(t)$ .

**Question 12** Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre  $S_1$  et  $S_2$ . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement  $\eta$  défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

**Question 13** En considérant le système  $E_1 = \{S_1 + S_2\}$ , définir le rendement.

**Question 14** On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre  $S_1$  et  $S_2$ . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à  $S_2/R_0$  et  $S_1/R_0$  en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

On donne :

- ▶ Rendement  $\eta$  dans la liaison hélicoïdale :  $\eta = 0,8$ ;

**Question 15** Déterminer dans ces conditions les dissipations.



# Application 2

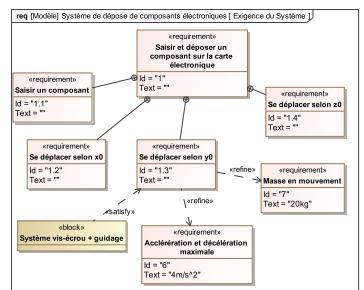
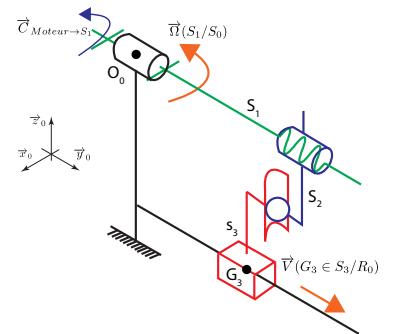
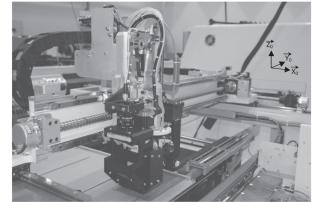
## Système de dépose de composants électroniques – Corrigé

Émilien Durif – E3A PSI 2011.

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée  $\vec{y}_0$ ) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

**Hypothèses :**

- ▶ le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
  - ▶ les solides seront supposés indéformables;
  - ▶ on notera  $J_1$  le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  :  $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$ ;
  - ▶ on note  $M_3$  et  $G_3$  respectivement la masse et le centre d'inertie du solide  $S_3$ ;
  - ▶ la position de  $G_3$  est définie par  $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
  - ▶ les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre  $S_0$  et  $S_3$  (Coefficient de frottement noté  $\mu$ ) et la pivot entre  $S_0$  et  $S_1$  (couple résistant noté  $C_r$ );
  - ▶ seul l'action de pesanteur sur  $S_3$  sera supposée non négligeable.
- 
- ▶  $S_0$  : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
  - ▶  $S_1$  : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
  - ▶  $S_2$  : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
  - ▶  $S_3$  : chariot supportant la tête de dépose ( $M_3$ ).



### Objectif

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- ▶ couple moteur transmis à  $S_1$  :  $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$ ;
- ▶ vitesse de rotation de  $S_1$  :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$ ;

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose  $S_3$ ) :

- ▶ masse :  $M_3$ ;
- ▶ cinématique de  $S_3$  :  $\vec{a}(G_3 R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}(t)$ .

On considère l'ensemble  $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$ .

**Question 1** Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

**Données numériques associées au système :**

- ▶ Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) :  $\mu = 0,1$ .
- ▶ Pas de la vis à billes :  $p = 20 \text{ mm}$ .
- ▶ Diamètre de la vis à billes :  $D = 25 \text{ mm}$ .
- ▶ Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe  $\vec{y}_0$  :  $I_v = 2,15 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .
- ▶ Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) :  $C_r = 3 \text{ Nm}$ .
- ▶  $l$ , longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) :  $1000 \text{ mm}$ .

### Correction

**Question 2** Déterminer l'expression de  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

### Correction

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow S_3/R_0)$$

Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :

- ▶ couple maximal,  $C_{\max} = 21,2 \text{ Nm}$ ;
- ▶ fréquence de rotation maximale,  $N_m = 6000 \text{ tr/min}$ ;
- ▶ moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe  $\vec{y}_0$ ,  $I_m = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

**Question 3** Calculer  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction des données du problème.

### Correction

On a :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow S_3/R_0)$$

- ▶  $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1) \\ X_{01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{01} \cdot \vec{y}_0 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ L_{01} \cdot \vec{x}_0 \pm C_r \cdot \vec{y}_0 + N_{01} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}(t) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0} = \pm C_r \cdot \dot{\theta}(t). \text{ Le signe de la composante suivant } \vec{y}_0 \text{ dépendra du sens du mouvement de } S_1/S_0.$
- ▶  $\mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) = \{ \mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow S_1) \} \otimes \{ \mathcal{V}(S_1/R_0) \} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{-} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}(t) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0} = C_m \cdot \dot{\theta}(t).$
- ▶  $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3) \\ X_{03} \cdot \vec{x}_0 \pm Y_{03} \cdot \vec{y}_0 + Z_{03} \cdot \vec{z}_0 \\ L_{03} \cdot \vec{x}_0 + M_{03} \cdot \vec{y}_0 + N_{03} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{-} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{-} = \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t).$
- ▶  $\mathcal{P}(\text{Poids} \rightarrow S_3/R_0) = \{ \mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow S_3) \} \otimes \{ \mathcal{V}(S_3/R_0) \} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -M_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{G_3} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{G_3} = 0.$

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t)$$

**Question 4** Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble  $E : \mathcal{P}_{\text{int}}(E)$ .

### Correction

- ▶ D'après le graphe des liaisons :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) + \mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_3)$ .
- ▶ Calcul de  $\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{ \mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2) \} \otimes \{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2) \\ X_{12} \vec{x}_0 + Y_{12} \vec{y}_0 + Z_{12} \vec{z}_0 \\ L_{12} \vec{x}_0 + M_{12} \vec{y}_0 + N_{12} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}(S_2/S_1) \\ q_{21} \vec{y}_0 \\ v_{12} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_0} = Y_{12} \cdot v_{12} + q_{21} \cdot M_{12}.$  Or,  $\begin{cases} M_{12} = -\frac{p}{2\pi} Y_{12} \\ v_{12} = \frac{p}{2\pi} q_{21} \end{cases}$ . D'où :  $\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = Y_{12} \cdot v_{12} + q_{21} \cdot M_{12} = \frac{p}{2\pi} [Y_{12} \cdot q_{21} - q_{21} \cdot Y_{12}] = 0.$
- ▶ Calcul de  $\mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_3) = \{ \mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3) \} \otimes \{ \mathcal{V}(S_3/S_2) \} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3) \\ X_{23} \vec{x}_0 + Y_{23} \vec{y}_0 \\ p_{32} \vec{x}_0 + q_{32} \vec{y}_0 + r_{32} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{\vec{0}} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}(S_3/S_2) \\ A \\ w_{32} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{w_{32} \cdot \vec{z}_0}$

- $= 0.$
- On en déduit donc :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0.$

**Question 5** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$

#### Correction

- Énergie cinétique de l'ensemble dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :

$$E_c(E/R_0) = E_c(1/R_0) + E_c(2/R_0) + E_c(3/R_0)$$

- Énergie cinétique de 1 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :  $E_c(1/R_0) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}(1/R_0) \} \otimes \{ \mathcal{V}(1/R_0) \} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \vec{\tau} \\ \vec{I}_{O_0}(S_1) \cdot \dot{\theta}(t) \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0} = \frac{1}{2} [\dot{\theta}^2 \vec{I}_{O_0}(S_1) \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{y}_0] = \frac{1}{2} J_1 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2.$
- Énergie cinétique de 2 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :  $E_c(2/R_0) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}(2/R_0) \} \otimes \{ \mathcal{V}(2/R_0) \} = 0$  car l'inertie de 2 est négligeable.
- Énergie cinétique de 3 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :  $E_c(3/R_0) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}(3/R_0) \} \otimes \{ \mathcal{V}(3/R_0) \} = \left\{ \begin{array}{c} - \\ M_3 \cdot \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{\vec{0}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} - \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0} = \frac{1}{2} M_3 \cdot \dot{y}^2(t).$
- L'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble  $E$  :  $E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)].$

**Question 6** Déterminer la mobilité du système.

#### Correction

Ici la mobilité vaut 1.

**Question 7** Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

#### Correction

Par une fermeture cinématique on pourrait montrer :  $\dot{y}(t) = -\frac{p}{2\pi} \dot{\theta}(t).$

**Question 8** Déterminer l'inertie équivalente de  $E$  ramenée à la rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  et du paramètre  $\dot{\theta}(t)$ .

#### Correction

$$E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)] = \frac{1}{2} \left[ (I_m + I_v) + M_3 \cdot \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right] \cdot \dot{\theta}^2(t) \text{ d'où,}$$

$$J_{\text{eq}}(E) = (I_m + I_v) + M_3 \cdot \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2.$$

**Question 9** Déterminer la masse équivalente de  $E$  ramené à la translation selon la direction  $\vec{y}_0$  et du paramètre  $\dot{y}(t)$ .

#### Correction

$$E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)] = \frac{1}{2} \left[ (I_m + I_v) \cdot \left( \frac{2\pi}{p} \right)^2 + M_3 \right] \cdot \dot{y}^2(t) \text{ d'où,}$$

$$M_{\text{eq}}(E) = (I_m + I_v) \cdot \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + M_3.$$

**Question 10** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $E$ .

#### Correction

En combinant les résultats des différentes questions précédentes, on obtient :  $M_{\text{eq}} \cdot \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t) + 0$ .

On peut postuler un sens de déplacement :  $\dot{y}(t) > 0$ , ainsi  $\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{p} \dot{y}(t) < 0$ ,  $C_r > 0$ ,  $Y_{03} < 0$  :

$$M_{\text{eq}} \cdot \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = \left[ -(C_m + C_r) \cdot \frac{2\pi}{p} + Y_{03} \right] \cdot \dot{y}(t)$$

**Question 11** Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier  $C_m$  à  $y(t)$ .

#### Correction

Il faut éliminer le paramètre  $Y_{03}$ . Pour cela on peut écrire le théorème de la résultante dynamique appliquée à  $S_3$  en projection selon  $\vec{z}_0$  :  $Z_{03} - M_3 \cdot g = 0$ .

Or la loi de Coulomb donne (avec  $Z_{03} > 0$  et  $Y_{03} < 0$ ) :  $Y_{03} = -\mu \cdot Z_{03} = -\mu \cdot M_3 \cdot g$ .

Ainsi l'équation de mouvement obtenue est (en éliminant  $\dot{y}(t) \neq 0$ ) :

$$M_{\text{eq}} \cdot \ddot{y}(t) = -(C_m + C_r) \cdot \frac{2\pi}{p} - \mu \cdot M_3 \cdot g.$$

**Question 12** Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

#### Correction

$$C_m = -\frac{p}{2\pi} [M_{\text{eq}} \ddot{y}_{\max} + M_3 \cdot g \cdot \mu] - C_r = -\frac{p}{2\pi} M_3 (\ddot{y}_{\max} + g \cdot \mu) - (I_m + I_v) \frac{2\pi}{p} \ddot{y}_{\max} - C_r$$

L'application numérique donne :  $C_m = -3,79 N \cdot m$

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre  $S_1$  et  $S_2$ . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement  $\eta$  défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

**Question 13** En considérant le système  $E_1 = \{S_1 + S_2\}$ , définir le rendement.

#### Correction

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})} = \frac{\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0)}{\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)}$$

**Question 14** On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre  $S_1$  et  $S_2$ . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à  $S_2/R_0$  et  $S_1/R_0$  en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

**Correction**

- ▶ Expression de  $\mathcal{P}(\text{dissipée})$  :  $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = -\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = -(\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0))$ ;
- ▶ TEC appliqué à  $S_2/R_0$  en régime permanent :  $\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) = -\mathcal{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0)$ ;
- ▶ TEC appliqué à  $S_1/R_0$  en régime permanent :  $\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = -\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0)$ ;
- ▶ en combinant ces équations on obtient  $\mathcal{P}(\text{dissipée})$  :  $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = -(-\mathcal{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0) - \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)) = -\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = (1 - \eta) \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)$ .

On donne :

- ▶ Rendement  $\eta$  dans la liaison hélicoïdale :  $\eta = 0,8$ ;

**Question 15** Déterminer dans ces conditions les dissipations.

**Correction**

$$\mathcal{P}(\text{dissipée}) = C_{\max} \cdot \dot{\theta}_{\max} \cdot (\eta - 1) = 21,2 \times 6000 \frac{2\pi}{60} \cdot (1 - \eta) = 2664 \text{ W}$$



# Application 3

## Télécabine à stabilité accrue : le funitel – Sujet

Mines Ponts PSI – 2003.

### Mise en situation

Une télécabine est un système de transport de personnes permettant un changement d'altitude important dans une zone d'accès difficile, généralement en montagne.

Les télécabines sont tractées par un câble mis en mouvement par un ensemble motorisation. Afin de procéder à une évaluation de la puissance nécessaire à l'entraînement du câble, on prendra comme modèle une ligne rectiligne supportée par 9 pylônes (voir figure au verso).



Le guidage des brins de câble est réalisé par des palonniers à galets fixés sur les pylônes, pour lesquels le contact peut être modélisé par un appui avec frottement sec avec un coefficient de frottement  $f = 0,03$ . 2 brins permettent l'ascension de la cabine, 2 brins permettent la descente. Cette donnée, associée à un calcul numérique des actions de contact des brins de câble sur les palonniers, a permis une estimation à 400 kW des pertes par frottement au niveau de ces palonniers (puissance galiléenne des actions des palonniers sur les brins de câble). L'action du vent sur une face d'une cabine est modélisable par une pression uniforme  $p$  :  $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2$  avec  $p$  en pascal,  $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$  masse volumique de l'air,  $V_a$  module de la vitesse relative de l'air par rapport à la cabine en  $\text{m/s}$ .

### Objectif

On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de  $0,15 \text{ m s}^{-2}$ . On se place à l'instant où la vitesse de  $7,2 \text{ m s}^{-1}$  va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse  $V_e = 30 \text{ m s}^{-1}$  souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

**Question 1** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $E_{c_T}$ , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de  $M_c$ ,  $M_p$ ,  $\mu$ ,  $L$ ,  $V$ ,  $D_p$  et  $I_M$ .

**Question 2** Déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_p$ , des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de  $M_p$ ,  $V$ ,  $h$ ,  $g$  et  $L$ .

**Question 3** Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée

$P_v$  des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de  $\rho$ ,  $S_f$ ,  $V$ ,  $V_e$  et  $\alpha = \arcsin(h/L)$ .

**Question 4** En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée  $P_T$  pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.

Sur la ligne, les cabines se déplacent à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ . En gare, pour permettre l'embarquement et le débarquement des passagers, la vitesse maximum de la cabine doit être de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ . Lors de leur circulation en gare, les cabines sont donc libérées des brins de câble. On envisagera une accélération constante des cabines de  $a = 1,3 \text{ m s}^{-2}$ .

**Question 5** Quelle est alors la durée  $t$  de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur  $x$  (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de  $a$ ,  $v_0$ ,  $t$  et  $V$ . Pour que l'accélération de  $1,3 \text{ m s}^{-2}$  permette le lancement des cabines de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$  à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ , l'application numérique donne environ :  $x = 20 \text{ m}$ .

#### Éléments de correction

1.  $\mathcal{E}_c (\Sigma/0) = \frac{1}{2} \left( 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} \right) V^2 \simeq 6,7 \text{ MJ}.$
2.  $\mathcal{P} (\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = -8M_p gV \sin \alpha = -359\,289 \text{ W}.$
3.  $\mathcal{P} (\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -16S_f \rho V^2 V_e \cos \alpha = -218\,677 \text{ W}.$
4.  $P_T = 1266 \text{ kW}.$
5.  $\tau = \frac{V - v_0}{a} = 5,3 \text{ s}$  et  $x = \tau \cdot \frac{1}{2} (V + v_0) = 19,875 \text{ m}.$

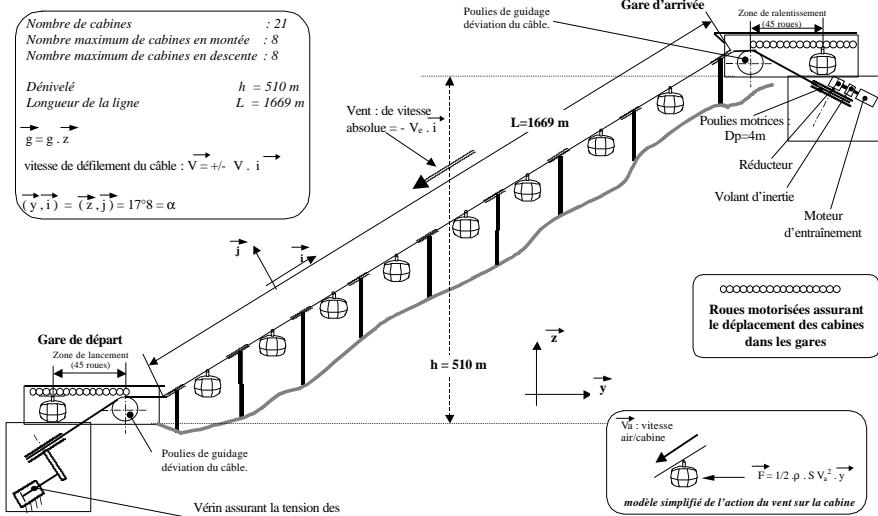


FIG. 1 : Ligne totale

<b>Extrait du cahier des charges</b>		<b>Autres caractéristiques techniques</b>	
Nombre de cabines	21	Masse d'une cabine vide	$Mc = 2500 \text{ kg}$
Nombre maxi de cabines en montée	8	Surface latérale d'une cabine	$Sl = 10 \text{ m}^2$
Nombre maxi de cabines en descente	8	Surface frontale d'une cabine	$Sf = 7,1 \text{ m}^2$
Nombre maxi de passagers par cabine et masse des passagers	26 $M_p = 2080 \text{ kg}$	Masse linéaire du câble	$\mu = 8,47 \text{ kg/m}$
Vitesse nominale de défilement du câble (identique en tous points de la ligne)	$V = 7,2 \text{ m/s}$	Nombre de pylônes	9
Fréquence de rotation nominale du moteur d'entraînement	$N = 1700 \text{ tr/min}$	Diamètre d'une poulie motrice :	$D_p = 4 \text{ m}$
Longueur de la ligne	$L = 1669 \text{ m}$	Inertie* de l'ensemble de la motorisation ramenée sur l'axe des poulies motrices	$I_M = 575 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$
Dénivelé	$h = 510 \text{ m}$		



## Application 3

### Télécabine à stabilité accrue : le funitel – Corrigé

Mines Ponts PSI – 2003.

#### Mise en situation



#### Objectif

On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de  $0,15 \text{ m s}^{-2}$ . On se place à l'instant où la vitesse de  $7,2 \text{ m s}^{-1}$  va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse  $V_e = 30 \text{ m s}^{-1}$  souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

**Question 1** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $E_{c_T}$ , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de  $M_c$ ,  $M_p$ ,  $\mu$ ,  $L$ ,  $V$ ,  $D_p$  et  $I_M$ .

#### Correction

- ▶ Énergie cinétique des 4 brins de câbles :  $\mathcal{E}_c (\text{cables}/0) = \frac{1}{2} 4L\mu V^2$ .
- ▶ Énergie cinétique des 8 cabines montantes :  $\mathcal{E}_c (C_m/0) = \frac{1}{2} 8(M_c + M_p)V^2$ .
- ▶ Énergie cinétique des 8 cabines descendantes :  $\mathcal{E}_c (C_d/0) = \frac{1}{2} 8M_c V^2$ .
- ▶ Énergie cinétique de la motorisation :  $\mathcal{E}_c (M/0) = \frac{1}{2} I_M \omega_M^2$ .

On a par ailleurs  $V = \omega_M \cdot \frac{D_p}{2}$ .

$$\text{On a donc } \mathcal{E}_c (\Sigma/0) = \frac{1}{2} \left( 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} \right) V^2.$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } M_{\text{eq}} &= 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} = 4 \times 1669 \times 8,47 + 16 \times 2500 + 8 \times 2080 + \\ &575 \times 10^3 \frac{4}{16} = 256\,936 \text{ kg et } \mathcal{E}_c (\Sigma/0) = 6,7 \text{ MJ.} \end{aligned}$$

**Question 2** Déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_p$ , des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de  $M_p$ ,  $V$ ,  $h$ ,  $g$  et  $L$ .

### Correction

Les puissances de la pesanteur sur les cabines montantes s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_m/0) &= \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -(M_c + M_p) g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \\ &\quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} \\ &= -8(M_c + M_p) g V \vec{z} \cdot \vec{i} = -8(M_c + M_p) g V \sin \alpha. \end{aligned}$$

Les puissances de la pesanteur sur les cabines descendantes s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_d/0) &= \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C_d)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_d/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -M_c g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} \\ &= 8M_c g V \vec{z} \cdot \vec{i} \\ &= 8M_c g V \sin \alpha. \end{aligned}$$

Remarque : la puissance de la pesanteur sur le câble sont opposées pour la partie montante et la partie descendante.

Ainsi,  $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = 8M_c g V \sin \alpha - 8(M_c + M_p) g V \sin \alpha = -8M_p g V \sin \alpha = -359\,289 \text{ W}$ .

**Question 3** Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_v$  des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de  $\rho$ ,  $S_f$ ,  $V$ ,  $V_e$  et  $\alpha = \arcsin(h/L)$ .

### Correction

Le vent va dans le sens de la descente. En montée,  $\overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/C_m)} = \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c, C_m/0)} = -V_e \vec{i} - V \vec{i}$ .

En descente,  $\overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/C_d)} = \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c, C_d/0)} = -V_e \vec{i} + V \vec{i}$ .

Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi :  $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2 = \frac{1}{2} \rho (-V - V_e)^2 \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -p S_f \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} = -8S_f V \frac{1}{2} \rho (V + V_e)^2 \cos \alpha$ .

Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi :  $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2 = \frac{1}{2} \rho (V - V_e)^2 \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -p S_f \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} = 8S_f V \frac{1}{2} \rho (V - V_e)^2 \cos \alpha$ .

Au final,  $\mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = 8S_f V \frac{1}{2} \rho ((V - V_e)^2 - (V + V_e)^2) \cos \alpha = 8S_f V \frac{1}{2} \rho (-4VV_e) \cos \alpha = -16S_f \rho V^2 V_e \cos \alpha$ . On a donc  $\mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -218\,677 \text{ W}$

**Question 4** En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée  $P_T$  pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.

**Correction**

On applique le théorème de l'énergie cinétique :

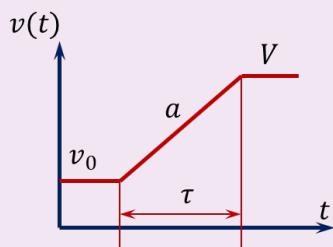
$$\frac{d\mathcal{E}_c(\Sigma/0)}{dt} = \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathcal{P}(\text{frottement} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow \Sigma/0).$$

On a donc, en régime permanent :  $0 = -229672 - 359289 - 400000 + P_T$ .  $P_T = 218677 + 359289 + 400000 = 977\,966 \text{ W} \simeq 1000 \text{ kW}$ .

En tenant compte de l'accélération, on a  $P_T = 1000 \text{ kW} + M_{\text{eq}} V \dot{V} = 1000 \text{ kW} + M_{\text{eq}} 7,2 \cdot 0,15 \simeq 1266 \text{ kW}$ .

Le surplus de puissance est nécessaire en cas de situation plus défavorable (plus de vent, dépassement du nombre de passagers...).

**Question 5** Quelle est alors la durée  $t$  de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur  $x$  (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de  $a$ ,  $v_0$ ,  $t$  et  $V$ . Pour que l'accélération de  $1,3 \text{ m s}^{-2}$  permette le lancement des cabines de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$  à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ , l'application numérique donne environ :  $x = 20 \text{ m}$ .

**Correction**

On a  $v(t) = at + k$ . Par ailleurs,  $v(t_2) = V = at_2 + k$  et  $v(t_1) = v_0 = at_1 + k$ . On a donc  $V - v_0 = a\tau$  soit  $\tau = \frac{V - v_0}{a} = \frac{6,9}{1,3} = 5,3 \text{ s}$ . La distance parcourue pendant la durée  $\tau$  correspond à l'intégrale de la vitesse soit à l'aire sous la courbe. On a donc  $x = \tau \cdot \frac{1}{2} (V + v_0) = 5,3 \times 0,5 \times 7,5 = 19,875 \text{ m}$ .



## Application 4

# Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric) – Sujet

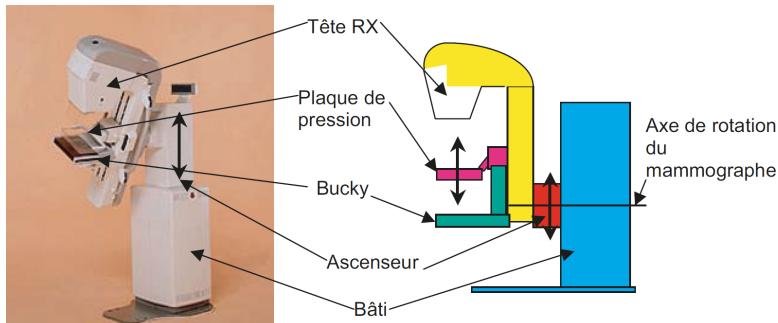
Centrale MP 2004.

### Mise en situation

C1-05

Le mammographe est utilisée pour rechercher la présence d'une tumeur dans un sein.  
Il est constitué des éléments génériques suivants.

C2-08



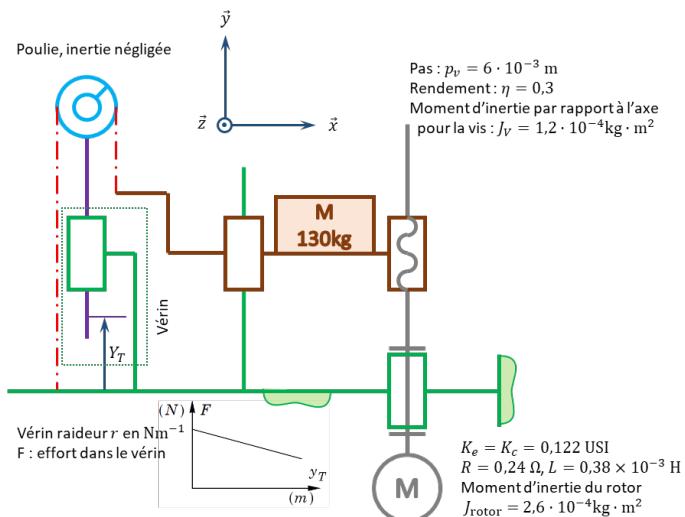
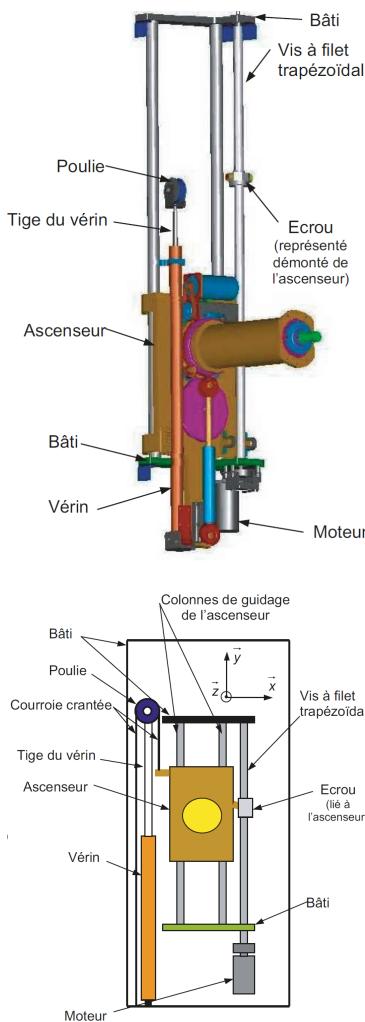
Un ascenseur en liaison glissière de direction verticale par rapport à la partie fixe du mammographe (bâti). Cette mobilité permet d'adapter le mammographe à la taille de la patiente. L'ascenseur supporte les éléments suivants : la « tête RX » qui permet d'émettre les rayons X et un collimateur qui permet de contrôler le faisceau afin d'optimiser le cliché. Le réglage angulaire de la tête RX est réalisé par un pivotement autour de l'axe de rotation du mammographe. La tête RX est donc en liaison pivot par rapport à l'ascenseur.

Le « bucky » sert de surface d'appui au sein et de support au film ou au capteur d'images. Le réglage angulaire du bucky est réalisé par un pivotement autour de l'axe de rotation du mammographe. Le bucky est en liaison pivot par rapport à l'ascenseur.

La « plaque de compression » permet de comprimer le sein et de le maintenir en position afin d'avoir une meilleure qualité de l'image. Elle fait l'objet d'une liaison glissière par rapport au bucky. À noter que les réglages angulaires des deux liaisons pivots sont indépendants. On peut, par exemple, faire tourner la tête sans faire tourner le bucky.

## Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »

Le mammographe doit être adapté à la taille de la patiente en faisant monter ou descendre l'ascenseur. La liaison glissière de l'ascenseur par rapport à la partie fixe du mammographe est réalisée par un guidage sur deux barres parallèles fixées sur le bâti. Le déplacement de l'ascenseur est obtenu à partir d'un moteur électrique qui entraîne en rotation une vis. La rotation de la vis entraîne ensuite l'écrou sur lequel est fixé l'ascenseur. Un vérin à gaz permet d'assister le moteur lors de la montée de l'ascenseur par l'intermédiaire d'une poulie montée à l'extrémité de la tige du vérin à gaz et d'une courroie crantée. Une des extrémités de la courroie est fixée sur le bâti du mammographe et l'autre extrémité est liée à l'ascenseur.



### Détermination de la motorisation

#### Objectif

L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

### Faire monter ou descendre l'ascenseur

Critères	Niveaux
Ne pas stresser la patiente en déplaçant trop rapidement l'ascenseur : limiter la vitesse de déplacement rapide	$V_R = 0,15 \text{ m s}^{-1}$
Ne pas blesser la patiente lors de l'approche du bucky : respecter une vitesse lente $V_L$ lors de l'accostage	$V_L = 0,02 \text{ m s}^{-1}$
Respecter une course de réglage de la position de l'ascenseur	$\text{course} = 0,8 \text{ m}$ $\delta_{\text{course}} = \pm 10^{-3} \text{ m}$
Atteindre rapidement la vitesse de déplacement rapide $V_R$ : respecter la durée $t_a$ de la phase d'accélération constante	$t_a = 0,4 \text{ s (mini)}$

**Question 1** Déterminer la fréquence de rotation du moteur  $\omega$  en fonction de la vitesse de déplacement  $V$  de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\max}$  que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

Pour déterminer les performances minimales du moteur, on étudie la phase de montée de l'ascenseur définie par :

1. départ en position basse ( $y = 0$  à l'instant  $t = 0$ );
2. mise en mouvement ascendant de l'ascenseur à accélération constante  $a$  pour atteindre la vitesse  $V_R$  rapide en respectant les contraintes du cahier des charges;
3. arrêt de l'ascenseur à la position  $y = 0,8 \text{ m}$  (la phase de décélération est telle que la décélération est constante et sa durée égale à  $t_a$ ).

**Question 2** Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement  $y$  de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

### Solution sans assistance

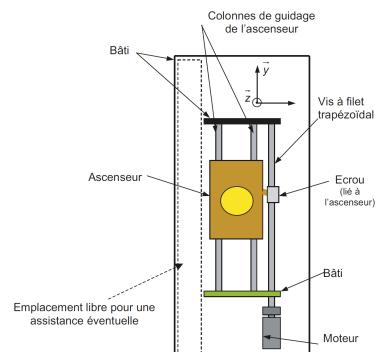
On souhaite déterminer le couple moteur. Pour cela on propose d'appliquer le théorème de l'énergie-puissance au système isolé  $\Sigma$  (rotor du moteur + vis + ascenseur) en mouvement par rapport au bâti supposé galiléen.

On notera :

- $\vec{g} = -g \vec{y}$  l'accélération de la pesanteur. On prendra  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;
- $C$  le couple exercé par le stator sur le rotor du moteur.

**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ , du système isolé. Mettre  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$  sous la forme :  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$ . Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M_e$  et faire l'application numérique.

**Question 4** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .



**Question 5** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire  $P_0$  de ce moteur.

**Question 6** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

### Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

Le dispositif d'assistance a pour rôle de diminuer le couple moteur en compensant le poids de l'ascenseur. L'emplacement disponible, pour ce dispositif, est celui occupé par le vérin à gaz, voir figures précédentes.

Dans cette solution un contrepoids est choisi pour compenser exactement le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti et d'inertie négligeable. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre au contrepoids.

**Question 7** Faire un schéma de principe de ce dispositif.

**Question 8** Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M'_e$  et faire l'application numérique.

**Question 9** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Question 10** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur.

**Question 11** En déduire la puissance nécessaire  $P$  du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

**Question 12** Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique  $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section  $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$  et de hauteur  $1,4 \text{ m}$ . Cette solution est-elle envisageable ?

### Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

**Question 13** Faire un schéma de principe du dispositif.

**Question 14** L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum  $F_{c \text{ maxi}}$  qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement  $y$  de l'ascenseur.

L'emplacement disponible ne permet pas de placer un ressort de diamètre nominal  $D$  supérieur à  $0,1 \text{ m}$ . Le ressort de traction sera réalisé dans un acier allié de résistance élastique au glissement  $R_{eg} = 560 \text{ MPa}$  et de module de Coulomb  $G = 82\,000 \text{ MPa}$ . On

prendra un coefficient de sécurité  $s = 2$ . Pour que le ressort résiste à l'effort maximal  $F_{c \text{ maxi}}$ , il doit avoir un diamètre  $d \geq \sqrt[3]{\frac{8F_{c \text{ maxi}}Ds}{\pi R_{eg}}}$ , c'est-à-dire  $d \geq 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{F_{c \text{ maxi}}}$ .

Pour obtenir un ressort de raideur  $r$  il faut un nombre de spires  $n = \frac{Gd^4}{8D^3r}$ , c'est-à-dire  $n \simeq 10^{13} \frac{d^4}{r}$ .

**Question 15** La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible ?

### Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

Le schéma de principe de ce dispositif a été donné précédemment. Le corps du vérin est lié au bâti. Une poulie crantée est en liaison pivot avec l'extrémité de la tige du vérin. Une courroie crantée s'enroule (un demi-tour) sur la poulie et est liée au bâti à une de ses extrémités. L'autre extrémité de la courroie est liée à l'ascenseur.

**Question 16** Déterminer la relation existant entre le déplacement  $y$  de l'ascenseur et le déplacement  $y_T$  de la tige du vérin. En déduire la course  $\Delta y_T$  nécessaire de la tige du vérin à gaz.

**Question 17** Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté  $F_c$ . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existant entre l'effort  $F$  développé par le vérin et l'effort de compensation  $F_c$ . En déduire l'effort minimum  $F_{\text{mini}}$  développé par le vérin.

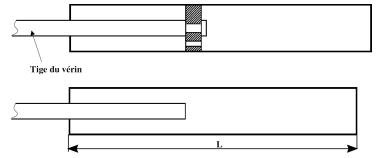
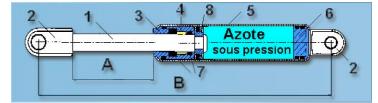
Le vérin à gaz est présenté sur le dessin ci-contre.

**Question 18** Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.

**Question 19** Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre  $d = 15 \times 10^{-3} \text{ m}$ . On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée  $p_2$ .

Dans la gamme de vérin à gaz on choisit le vérin de diamètre le plus grand  $D = 57 \times 10^{-3} \text{ m}$ . L'espace disponible permet de placer un vérin dont la chambre a une longueur maximale  $L = 1 \text{ m}$ . Soient  $p_1, F_1, V_1$  la pression, l'effort de poussée du vérin et le volume de gaz dans le vérin pour la position ascenseur en bas et  $p_2, F_{\text{mini}}, V_2$  pour la position ascenseur en haut. Pour cette position, la tige du vérin est complètement sortie.

**Question 20** Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de  $F_1, F_{\text{mini}}$  et  $\Delta y_T$ . Exprimer  $F_{\text{mini}}$  en fonction de  $p_2$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer  $F_1$  en fonction de  $p_1$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur  $r$  de ce vérin à gaz en fonction de  $F_{\text{mini}}, d, D, L$  et  $\Delta y_T$ .



**Question 21** On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur  $L$  et calculer la raideur  $r$ .

On prendra  $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$  pour la suite du problème.

**Question 22** Déterminer l'effort maximal  $F_{\text{Maxi}}$  développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de  $F$ .

**Question 23** Déterminer la relation  $F = F(y_T)$ .

On considérera dans cette question que l'effort de compensation  $F_c$  est constant.

**Question 24** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $a, M_e, F_c, M\dots$

**Question 25** Exprimer ensuite  $a$  en fonction de  $C, M_e, F_c, M\dots$

**Question 26** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur (prendre  $F_c = 1300 \text{ N}$ ).

**Question 27** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

## Synthèse



**Question 28** On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante?

## Application 4

# Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric) – Corrigé

Centrale MP 2004.

### Mise en situation

**Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »**

C1-05

C2-08

### Détermination de la motorisation

#### Objectif

L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.



**Question 1** Déterminer la fréquence de rotation du moteur  $\omega$  en fonction de la vitesse de déplacement  $V$  de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\max}$  que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

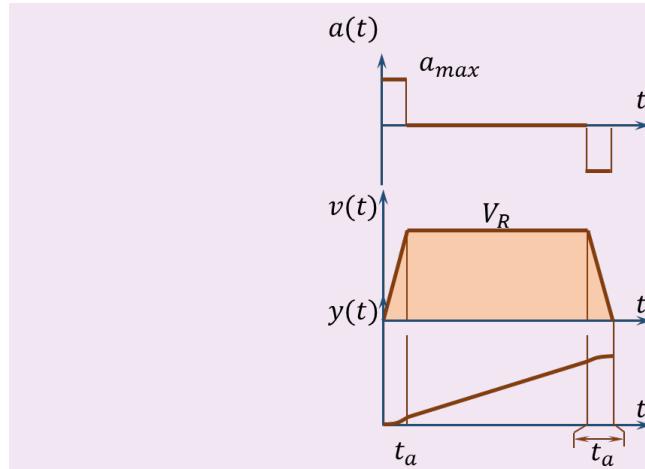
#### Correction

On a  $V = \omega \frac{p_v}{2\pi}$  et donc  $\omega_{\max} = V_R \frac{2\pi}{p_v}$ .

Application numérique :  $\omega_{\max} = 0,15 \frac{2\pi}{6 \cdot 10^{-3}} = 157 \text{ rad s}^{-1} = 1500 \text{ tr min}^{-1}$ .

**Question 2** Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement  $y$  de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

#### Correction



L'accélération  $a_{\max}$  est donnée par  $a_{\max} = \frac{V_R}{t_a} = \frac{0,15}{0,4} = 0,375 \text{ m s}^{-2}$ .

Les distances parcourues correspondent à l'aire sous la courbe du profil de vitesse. La distance d'accélération et de décélération sont données par  $d_a = \frac{1}{2}V_R t_a = \frac{1}{2}0,15 \times 0,4 = 0,03 \text{ m}$ .

En conséquence, la distance à parcourir à vitesse constante est  $d_c = 0,8 - 2 \times 0,03 = 0,74 \text{ m}$ .  
Le temps pour parcourir cette distance est  $t_c = \frac{d_c}{V_R} = \frac{0,74}{0,15} = 4,93 \text{ s}$ .

## Solution sans assistance

**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ , du système isolé. Mettre  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$  sous la forme :  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}M_e V^2$ . Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M_e$  et faire l'application numérique.

### Correction

Calcul de l'énergie cinétique :  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}(J_R + J_V) \left( V \frac{2\pi}{p_v} \right)^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2} \left( (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + M \right) V^2$ .

$$\begin{aligned} \text{On a donc } M_e &= (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + M = (2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}) \frac{4\pi^2}{(6 \times 10^{-3})^2} + 130 \\ &= (2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}) \frac{4\pi^2}{(6 \times 10^{-3})^2} + 150 = 547 \text{ kg.} \end{aligned}$$

**Question 4** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

### Correction

- On isole  $\Sigma$ .
- Bilan des puissances intérieures : liaisons parfaites  $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$ .
- Bilan des puissances extérieures :

- $\mathcal{P} (\text{pes} \rightarrow \text{Asc.}/0) = -MgV$ ;
- $\mathcal{P} (\text{mot} \rightarrow \text{Asc.}/0) = C\omega$ .

► Calcul de l'énergie cinétique :  $\mathcal{E}_c (\Sigma/0) = \frac{1}{2}M_e V^2$

On applique le théorème de l'énergie cinétique :  $M_e V \dot{V} = C \frac{V2\pi}{p_v} - MgV$  et donc  $M_e \dot{V} = C \frac{2\pi}{p_v} - Mg$ . Au final,  $C = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg)$ .

**Question 5** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire  $P_0$  de ce moteur.

#### Correction

Le couple maximal est nécessaire en phase d'accélération.

$$\begin{aligned} C_{\text{Max}} &= \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg) \\ &= \frac{6 \times 10^{-3}}{2\pi} (547 \times 0,15 + 130 \times 9,81) = 1,4 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

La puissance nécessaire est alors  $P_0 = C_{\text{Max}} \cdot \omega_{\text{maxi}} = 1,4 \times 157 = 222 \text{ W}$ .

**Question 6** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

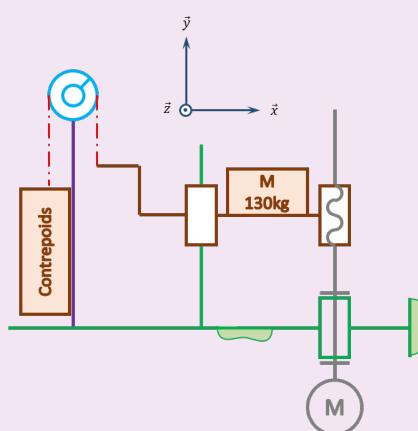
#### Correction

**Le rendement n'a vraiment de sens qu'en régime permanent.** Ici, le rendement va nous permettre de majorer la puissance motrice nécessaire. On a  $P = \frac{222}{0,3} = 740 \text{ W}$ .

### Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

**Question 7** Faire un schéma de principe de ce dispositif.

#### Correction



**Question 8** Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M'_e$  et faire l'application numérique.

**Correction**

En prenant un contrepoids de même masse que l'ascenseur et en négligeant l'inertie de la poulie, le contrepoids se déplaçant à la même vitesse que l'ascenseur (mais dans un sens opposé), on a  $M'_e = (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + 2M$ , soit  $M'_e = 677 \text{ kg}$

**Question 9** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Correction**

Par rapport au TEC effectué précédemment, il faut ajouter la puissance des actions de pesanteurs sur le contrepoids. Cette puissance est opposée à la puissance des actions de pesanteur sur l'ascenseur.  $C = \frac{p_v}{2\pi} M'_e \dot{V}$ .

**Question 10** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur.

**Correction**

$$C_{\text{Max}} = 0,24 \text{ Nm}, P_0 = 38 \text{ W}.$$

**Question 11** En déduire la puissance nécessaire  $P$  du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

**Correction**

Avec les mêmes précautions que précédemment,  $P = 127 \text{ W}$ .

**Question 12** Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique  $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section  $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$  et de hauteur  $1,4 \text{ m}$ . Cette solution est-elle envisageable ?

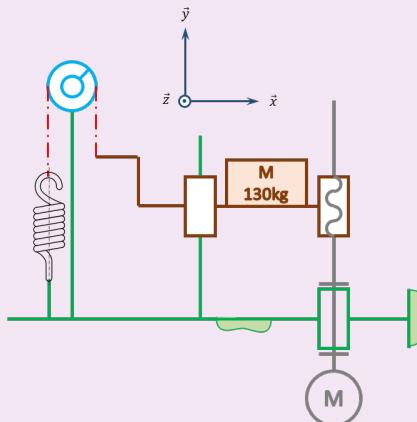
**Correction**

Au vu de la section disponible, la hauteur du contrepoids sera de  $\frac{130}{0,1 \times 0,2 \times 9 \times 10^3} = 0,72 \text{ m}$ . Le contrepoids doit pouvoir se déplacer de  $0,8 \text{ m}$  soit un encombrement total de  $1,52 \text{ m}$  supérieur à  $1,4 \text{ m}$  disponible.

**Motorisation assistée par un ressort de traction**

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

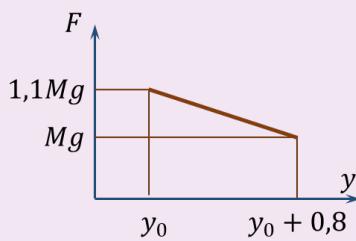
**Question 13** Faire un schéma de principe du dispositif.

**Correction**

**Question 14** L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum  $F_{c \text{ maxi}}$  qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement  $y$  de l'ascenseur.

**Correction**

La course maximale est de 0,8 m. La charge à compenser correspond au poids de l'ascenseur soit  $Mg$ . Lorsque l'ascenseur sera en bas,  $y$  sera minimal et le ressort sera tendu. L'effort sera donc maximal, soit  $1,1Mg$ . Lorsque l'ascenseur sera en haut,  $y$  sera maximal et le ressort sera « au repos ». L'effort doit compenser le poids. La raideur doit être de la forme  $k = \frac{1,1Mg - Mg}{0,8} = \frac{0,1 \times 130 \times 9,81}{0,8} \approx 159,4 \text{ N m}^{-1}$ .



**Question 15** La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible ?

**Correction**

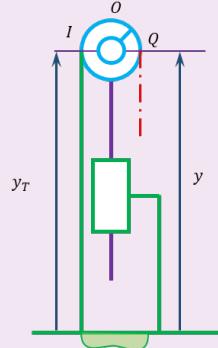
Dans les conditions proposées ci-dessus, on a  $d = 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{1,1 \times Mg} = 0,011 \text{ m}$ . Le nombre de spires serait alors  $n = 872$ . Si les spires sont jointives, on a une longueur de ressort minimale de  $dn = 9,47 \text{ m}$  ce qui dépasse très largement les dimensions de la machine.

**Assistance à l'aide d'un vérin à gaz**

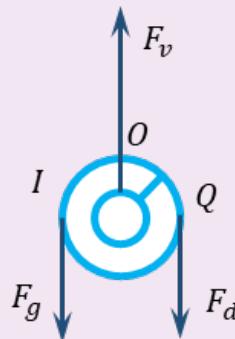
**Question 16** Déterminer la relation existant entre le déplacement  $y$  de l'ascenseur et le déplacement  $y_T$  de la tige du vérin. En déduire la course  $\Delta y_T$  nécessaire de la tige du vérin à gaz.

**Correction**

En utilisant le roulement sans glissement de la poulie par rapport à la courroie en  $I$  on montre que  $y_T = \frac{1}{2}y$ .



**Question 17** Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté  $F_c$ . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existant entre l'effort  $F$  développé par le vérin et l'effort de compensation  $F_c$ . En déduire l'effort minimum  $F_{\min}$  développé par le vérin.

**Correction**

Si on néglige la masse de la poulie, on peut appliquer le PFS (à la place du PFD).

- On isole la poulie de rayon  $R$ .
- La poulie est soumise au brin de gauche, au brin de droite et à l'effort du vérin.
- TMS en O, centre de la pivot :  $F_g R - RF_d = 0$  soit  $F_g = F_d$ .
- TRS :  $2F_d + F_v = 0$ .

En reprenant les notations de la question, on a  $2F_c = F$ . Comme au minimum,  $F_c = Mg$ , on a donc  $F_{\min} = 2Mg = 2550,6\text{ N}$ .

**Question 18** Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.

**Correction**

Soit  $D$  le diamètre du vérin et  $d$  le diamètre de la tige.

Dans le premier cas, on a, dans la chambre droite,  $F_d = +p\pi \frac{D^2 - d^2}{4}$  et  $F_g = -p\pi \frac{D^2}{4}$ . La résultante des forces est donc  $F_g + F_d = -p\pi \frac{d^2}{4}$ .

Dans le second cas, l'effort est  $-p\pi \frac{d^2}{4}$ . Les deux modèles sont donc équivalents.

**Question 19** Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre  $d = 15 \times 10^{-3} \text{ m}$ . On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée  $p_2$ .

**Correction**

On a  $p_2 = \frac{F_{\min}}{\frac{\pi d^2}{4}} = 14\,433\,443 \text{ Pa}$  soient 144 bars.

**Question 20** Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de  $F_1$ ,  $F_{\min}$  et  $\Delta y_T$ . Exprimer  $F_{\min}$  en fonction de  $p_2$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer  $F_1$  en fonction de  $p_1$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur  $r$  de ce vérin à gaz en fonction de  $F_{\min}$ ,  $d$ ,  $D$ ,  $L$  et  $\Delta y_T$ .

**Correction**

$$\blacktriangleright r = \frac{F_1 - F_{\min}}{\Delta y_T}.$$

$$\blacktriangleright F_{\min} = p_2 \frac{\pi d^2}{4}, F_1 = p_1 \frac{\pi d^2}{4}.$$

$$\blacktriangleright \text{On a } p_1 V_1 = p_2 V_2 \Leftrightarrow F_{\min} V_1 = F_1 V_2 \Leftrightarrow F_{\min} \frac{V_1}{V_2} = F_1. \text{ D'où } r = \frac{F_{\min} \frac{V_1}{V_2} - F_{\min}}{\Delta y_T}$$

$$F_{\min} \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\Delta y_T}.$$

Par ailleurs,  $V_1 - V_2 = \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}$ ; donc  $V_2 = L \frac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}$ .

$$\text{On a donc } r = F_{\min} \frac{\frac{V_1 - V_2}{V_2}}{\Delta y_T} = F_{\min} \frac{\frac{L \frac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}}{V_2}}{\Delta y_T} = F_{\min} \frac{\frac{\Delta y_T d^2}{L D^2 - \Delta y_T d^2}}{\Delta y_T} =$$

$$F_{\min} \frac{d^2}{L D^2 - \Delta y_T d^2}$$

**Question 21** On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur  $L$  et calculer la raideur  $r$ .

**Correction**

Pour avoir la raideur la plus faible, il faut la longueur la plus grande soit 1 m.  $r = F_{\text{mini}} \frac{d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}$

On prendra  $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$  pour la suite du problème.

**Question 22** Déterminer l'effort maximal  $F_{\text{Maxi}}$  développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de  $F$ .

**Correction**

$$F_{\text{Maxi}} = F_{\text{Mini}} + r\Delta y_T = 2550 + 180,4 = 2622 \text{ N.}$$

La variation d'effort est de  $\frac{72}{2550} \simeq 3\%$ .

**Question 23** Déterminer la relation  $F = F(y_T)$ .

**Correction**

$$F = 2622 - ry_T.$$

On considérera dans cette question que l'effort de compensation  $F_c$  est constant.

**Question 24** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $a, M_e, F_c, M\dots$

**Correction**

En reprenant l'expression précédente et en ajoutant l'effort de la courroie  $F_c$  (de sens opposé au poids), on a  $C = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg - F_c)$ .

**Question 25** Exprimer ensuite  $a$  en fonction de  $C, M_e, F_c, M\dots$

**Correction**

$$\text{On a } a = \dot{V} \text{ et } a = \frac{1}{M_e} \left( \frac{2\pi C}{p_v} + F_c - Mg \right).$$

**Question 26** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur (prendre  $F_c = 1300 \text{ N}$ ).

**Correction**

On reprend l'expression de  $C$  et on a  $C = 0,22 \text{ Nm}$ .  $P_0 = 34,4 \text{ W}$

**Question 27** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

**Correction**

$$P = 115 \text{ W}$$

**Synthèse**

**Question 28** On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges ? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante ?

**Correction**