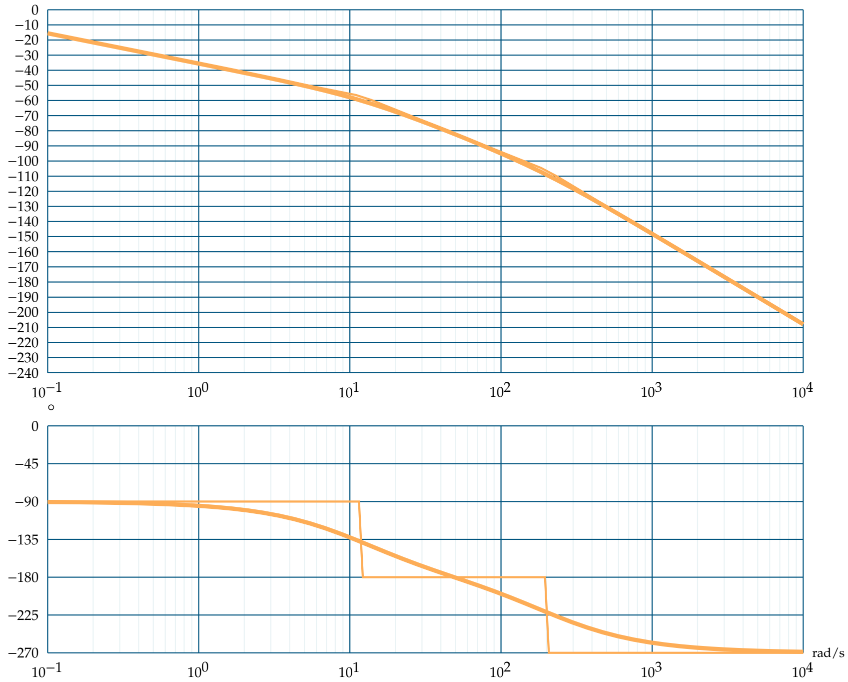
Diagramme de Bode ★★

SLCI

Question 1 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante : $F(p) = \dfrac{2}{0,05p^3 + 10,6p^2 + 120p}$.

En factorisant, on obtient $F(p) = \dfrac{40}{p\left(p+12\right)\left(p+200\right)} = \dfrac{40}{2400p\left(\dfrac{p}{12}+1\right)\left(\dfrac{p}{200}+1\right)}$.



TD 0
Fauteuil dynamique de cinéma – Corrigé

Concours Centrale-Supélec TSI 2015

C1-01

C2-03

Présentation du système

Mise en situation

Exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération »

Comportement de l'ensemble variateur et moteur du dosseret

Objectif

- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de courant.
- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de vitesse.
- Analyser la précision de l'asservissement de position.

Modélisation de l'asservissement de vitesse

NE PAS TRAITER LES QUESTIONS 1 à 3.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert de la boucle de vitesse $H_\Omega\left(p\right) = \Omega(p)/U_{C\Omega}(p)$, lorsque $C_R\left(p\right) = 0$. Le résultat sera mis sous une forme canonique.

Correction

$$H_\Omega(p) = \frac{k_1\left(1+\frac{1}{T_1p}\right)\frac{K}{K_{rI}}\frac{1}{Jp+f}}{1+K_\Omega k_1\left(1+\frac{1}{T_1p}\right)\frac{K}{K_{rI}}\frac{1}{Jp+f}} = \frac{k_1\left(1+T_1p\right)K}{T_1pK_{rI}\left(Jp+f\right)+K_\Omega k_1\left(1+T_1p\right)K}$$

$$= \frac{\frac{Kk_1}{K_\Omega k_1 K}\left(1+T_1p\right)}{\frac{T_1K_{rI}J}{K_\Omega k_1K}p^2+\left(\frac{fT_1K_{rI}}{K_\Omega k_1K}+\frac{K_\Omega k_1T_1K}{K_\Omega k_1K}\right)p+1} \quad H_\Omega(p) = \frac{\frac{1}{K_\Omega}\left(1+T_1p\right)}{\frac{T_1K_{rI}J}{K_\Omega k_1K}p^2+\left(\frac{fK_{rI}}{K_\Omega k_1K}+1\right)T_1p+1}$$

Question 2 T_1 étant égal à J/f, montrer alors que la fonction de transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme $\dfrac{b}{\tau p+1}$. Calculer les valeurs numériques des termes b et τ.

Correction

On a $H_\Omega(p) = \dfrac{\frac{1}{K_\Omega}\left(1+\frac{J}{f}p\right)}{\frac{\frac{J}{f}K_{rI}J}{K_\Omega k_1K}p^2+\left(\frac{fK_{rI}}{K_\Omega k_1K}+1\right)\frac{J}{f}p+1} = \dfrac{\left(f+Jp\right)}{\frac{K_{rI}J^2}{k_1K}p^2+\left(\frac{fK_{rI}}{k_1K}+K_\Omega\right)Jp+fK_\Omega}$

$= \dfrac{(f+Jp)\,k_1K}{K_{rI}J^2p^2 + (fK_{rI}+K_\Omega k_1K)\,Jp + fK_\Omega k_1K}$

On a : $\Delta = (fK_{rI}+K_\Omega k_1K)^2J^2 - 4fK_\Omega k_1KK_{rI}J^2 = \left(f^2K_{rI}^2 + K_\Omega^2k_1^2K^2 + 2fK_{rI}K_\Omega k_1K\right)J^2 - 4fK_\Omega k_1KK_{rI}J^2$

$= \left(f^2K_{rI}^2 + K_\Omega^2k_1^2K^2 - 2fK_{rI}K_\Omega k_1K\right)J^2 = (fK_{rI}-K_\Omega k_1K)^2J^2$

On a donc

$p_{12} = \dfrac{-(fK_{rI}+K_\Omega k_1K)\,J \pm (fK_{rI}-K_\Omega k_1K)\,J}{2K_{rI}J^2}$,

$p_1 = \dfrac{-fJK_{rI}-K_\Omega k_1KJ + fJK_{rI} - K_\Omega k_1KJ}{2K_{rI}J^2} = -\dfrac{K_\Omega k_1K}{K_{rI}J}$, $p_2 = \dfrac{-fJK_{rI}-K_\Omega k_1KJ - fJK_{rI} + K_\Omega k_1KJ}{2K_{rI}J^2} = -\dfrac{f}{J}$.

On a donc

$$H_\Omega(p) = \dfrac{J\left(\dfrac{f}{J}+p\right)k_1K}{\left(p+\dfrac{f}{J}\right)\left(p+\dfrac{K_\Omega k_1K}{K_{rI}J}\right)} = \dfrac{Jk_1K}{p+\dfrac{K_\Omega k_1K}{K_{rI}J}} = \dfrac{\dfrac{K_{rI}J^2}{K_\Omega}}{\dfrac{K_{rI}J}{K_\Omega k_1K}p+1}$$

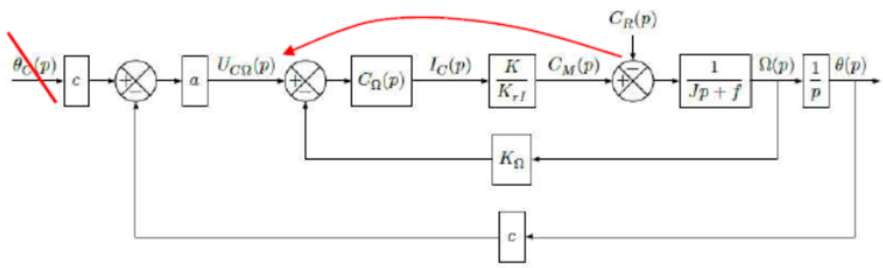
On a donc $b = \dfrac{K_{rI}J^2}{K_\Omega}$ et $\tau = \dfrac{K_{rI}J}{K_\Omega k_1K}$.

Autre solution : $b = \dfrac{1}{K_\Omega} = 20\pi = 62{,}8\,\text{rad}\,\text{s}{-}1\text{V}^{-1}$ et $\tau = \dfrac{K_{ri}J}{k_1KK_\Omega} = 2{,}17\times10^{-3}$ s.

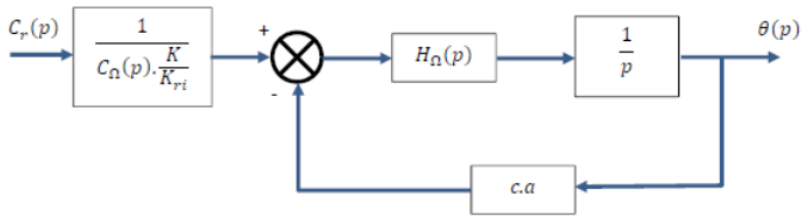
Question 3 En déduire, à l'aide de la figure précédente, $\theta(p)/C_R(p)$ lorsque $\theta_C(p) = 0$. Calculer ensuite la valeur finale de $\theta(t)$ lorsque $c_R(t)$ est un échelon unitaire. Conclure quant à l'action, en régime permanent, du correcteur proportionnel et intégral sur les effets d'une perturbation $c_R(t)$ de type échelon.

Correction

On effectue une transformation de schéma en déplaçant le comparateur de $C_r(p)$



D'où la nouvelle structure de schéma bloc :



$$\frac{\theta(p)}{C_r(p)} = \frac{1}{C_\Omega(p).\frac{K}{K_{ri}}}.\frac{H_\Omega(p).\frac{1}{p}}{1+c.a.H_\Omega(p).\frac{1}{p}} = \frac{K_{ri}.T_1.p}{K.k_1.(1+T_1.p)}.\frac{\frac{b}{1+\tau p}.\frac{1}{p}}{1+\frac{b}{1+\tau p}.\frac{1}{p}}$$

L'application du théorème de la valeur finale pour une entrée de type échelon donne :

$$\theta(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\theta(p) = 0$$

Ce résultat était prévisible car le correcteur PI est placé avant la perturbation.

$$\frac{\theta(p)}{C_r(p)} = \frac{1}{C_\Omega(p)\frac{K}{K_{ri}}}\frac{\frac{b}{1+\tau p}\frac{1}{p}}{1+\frac{abc}{1+\tau p}\frac{1}{p}} = \frac{1}{k_1\left(1+\frac{1}{T_1 p}\right)\frac{K}{K_{ri}}}\frac{\frac{b}{1+\tau p}\frac{1}{p}}{1+\frac{abc}{1+\tau p}\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{T_1 K_{ri} p}{k_1\left(T_1 p+1\right)K}\cdot\frac{b}{p\left(1+\tau p\right)+abc}$$

et $\lim_{t\to\infty}\theta(t) = 1$.

Modélisation de la boucle d'asservissement de position

Question 4 Exprimer la fonction de transfert $\theta(p)/\theta_C(p)$. Déterminer ensuite la valeur numérique de a pour avoir un facteur d'amortissement égal à 0,7. Justifier le choix de ce facteur d'amortissement. (Pour ce calcul et les calculs suivants prendre $b = 63\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{V}^{-1}$, $\tau = 2{,}2\,\text{ms}$, $c = 40\,\text{rad}^{-1}$.)

Correction

On a $\dfrac{\theta(p)}{\theta_C(p)} = c\dfrac{\frac{ab}{p\left(\tau p+1\right)}}{1+\frac{abc}{p\left(\tau p+1\right)}} = \dfrac{abc}{p\left(\tau p+1\right)+abc} = \dfrac{1}{\frac{\tau}{abc}p^2+\frac{p}{abc}+1}$.

On a $\omega_0 = \sqrt{abc/\tau}$ et $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = \dfrac{1}{abc}$ et $\xi = \dfrac{1}{2\sqrt{abc\tau}}$. En conséquence, $a = \dfrac{1}{4bc\tau\xi^2} = 0{,}092$.
(On prend $\xi = 0{,}7$ car cela correspond au temps de réponse le plus rapide pour un second ordre.)

Analyse de la précision du système

Question 5 Exprimer dans un premier temps $\mu(p)$ en fonction de $\theta_C(p)$, puis déterminer de façon littérale et numérique l'erreur de position μ_p, l'erreur de trainage μ_v et l'erreur en accélération μ_a. Conclure quant à la précision statique du système suite aux différentes consignes $\theta_C(p)$ de type échelon, rampe et accélération.

Correction

On a $\mu(p) = \dfrac{\theta_c(p)}{1+\dfrac{abc}{p\left(1+\tau p\right)}} = \dfrac{p\left(1+\tau p\right)}{p\left(1+\tau p\right)+abc}\theta_c(p) = \dfrac{p\left(1+\tau p\right)}{p\left(1+\tau p\right)+abc}\theta_c(p)$.

La FTBO est de classe 1 et de gain $K_{\text{BO}} = abc$ on a donc :

- pour une entrée échelon, $\mu_p = 0$;
- pour une entrée rampe, $\mu_v = \dfrac{1}{abc}$;
- pour une entrée accélération, $\mu_a = \infty$.

Validation et optimisation de la performance simulée en accélération du dosseret

Objectif

Valider la performance simulée en accélération au regard du cahier des charges fonctionnel.

Question 6 Déterminer l'erreur de position μ_p puis l'erreur de traînage μ_v. Conclure sur l'erreur de position au regard du cahier des charges.

Correction

On a $\varepsilon_{\text{codeur}}(p) = c\theta_c(p) - c\theta(p)$

$= c\theta_c(p) - \dfrac{bc}{p\left(\tau p+1\right)}U_{C\Omega}(p) = c\theta_c(p) - \dfrac{bc}{p\left(\tau p+1\right)}\left(\theta_C(p)dp + a\varepsilon_{\text{codeur}}(p)\right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p)\left(1+\dfrac{abc}{p\left(\tau p+1\right)}\right) = \theta_C(p)\left(c - \dfrac{bcd}{\tau p+1}\right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p)\left(1+\dfrac{abc}{p\left(\tau p+1\right)}\right) = \theta_C(p)c\dfrac{\tau p+1-bd}{\tau p+1}$

$\Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p) = \theta_C(p)cp\dfrac{\tau p+1-bd}{p\left(\tau p+1\right)+abc}$

On a alors :

- $\mu_p = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{p}cp\dfrac{\tau p+1-bd}{p\left(\tau p+1\right)+abc} = \lim\limits_{p\to 0} cp\dfrac{\tau p+1-bd}{p\left(\tau p+1\right)+abc} = 0$;
- $\mu_v = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{p^2}cp\dfrac{\tau p+1-bd}{p\left(\tau p+1\right)+abc} = \dfrac{1-bd}{ab}$.

Question 7 D'après l'erreur de traînage μ_v déterminée à la question précédente, calculer la valeur numérique de d qui permet d'annuler cette erreur de traînage. En prenant en compte la valeur numérique de d et de b, déterminer l'expression de l'erreur en accélération μ_a. Calculer ensuite sa valeur numérique et conclure au regard du cahier des charges.

Correction

On a $\mu_v = \dfrac{1-bd}{abc}$. En conséquences, $\mu_v = 0 \Leftrightarrow 0 = \dfrac{1-bd}{ab} \Leftrightarrow d = \dfrac{1}{b}$.
$\mu_a = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{1}{p^3} cp \dfrac{\tau p + 1 - bd}{p\left(\tau p + 1\right) + abc} = \dfrac{\tau}{ab}$.

Question 8 Conclure quant au respect du cahier des charges vis-à-vis des accélérations produites par le dosseret du siège dynamique de cinéma.

Correction

Exigence fonctionnelle « incliner le spectateur suivant l'axe de tangage et de roulis »

Objectif

Valider le choix de conception pour la réalisation de la commande simultanée des deux moteurs de l'assise du siège.

Question 9 En réutilisant éventuellement les calculs effectués aux questions 6 et 7 et en tenant compte des différences de réglage de retour vitesse et des différences d'inertie entre les deux motorisations, exprimer la valeur finale de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ lorsque la consigne $\theta_C(t)$ est respectivement égale à $u(t)$, $t \cdot u(t)$ puis $\frac{t^2}{2}u(t)$, $u(t)$ étant la fonction échelon unité.

Correction

En raisonnant graphiquement, on a $\theta_1(p) - \theta_2(p) = \varepsilon_{\text{codeur }1}(p) - \varepsilon_{\text{codeur }2}(p)$; donc :

- $\mu_p = \mu_{p1} - \mu_{p2} = 0$;
- $\mu_v = \mu_{v1} - \mu_{v2} = \dfrac{1-b_1 d}{ab_1} - \dfrac{1-b_2 d}{ab_2}$;
- $\mu_a = \mu_{a1} - \mu_{a2} = \infty$.

La figure 10 représente le résultat d'une simulation de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ pour une consigne $\theta_C\ (t) = \frac{t^2}{2}U(t)$

Question 10 Conclure quant à l'erreur en accélération lors de la commande simultanée.

Correction