



## 10 Résolution d'un problème de dynamique

### 10.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer

1. Faire un graphe d'analyse (ou de structure : liaisons et actions mécaniques extérieures).
2. Faire un bilan des actions mécaniques extérieures et écrire le torseur associé.
3. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
4. Simplifier les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons dans le cas d'un problème plan.
5. Faire des produits vectoriels le plus vite possible.
6. Calculer un torseur dynamique.

10.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer . . . . .	1
10.2 Les types de problèmes . . . . .	1
10.3 Stratégie d'isolement . . . . .	1
10.4 Loi de mouvement . . . . .	5

C1-05

C2-08

### 10.2 Les types de problèmes

Le principe fondamental de la dynamique a pour objectif de :

1. déterminer une loi de mouvement;
2. déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

Le cas 1 est le plus souvent rencontré. L'objectif est de trouver une équation différentielle **indépendamment des actions dans les liaisons** et liant positions, vitesses, accélérations, dimensions et propriétés massiques. Cette loi permet généralement de dimensionner les actionneurs d'un système (couple moteur ou effort à fournir par un actionneur linéaire – vérin par exemple –).

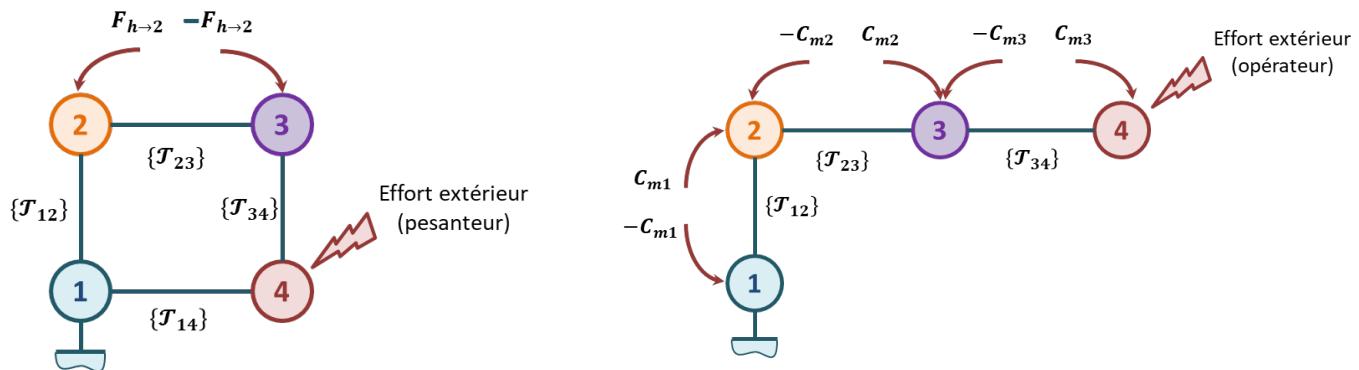
Dans le cas 2, on peut essayer de minimiser le nombre d'équations à écrire. C'est cette stratégie que nous allons présenté.

Dans le cas 2, il faut isoler chacune des pièces et réaliser le PFD.

### 10.3 Stratégie d'isolement

#### 10.3.1 Graphe d'analyse, ou de structure

On rencontre principalement deux types de structures : des chaînes fermées, ou des chaînes ouvertes.

**Remarques :**

- ▶ Entre les pièces (ou les groupes de pièces), on matérialise les liaisons (dont vous connaissez super bien les torseurs).
- ▶ Entre certaines pièces (ou groupes de pièces), il peut exister des actions mécaniques extérieures qui agissent « en positif » sur une des pièces et « en négatif » sur l'autre. **C'est par exemple le cas des moteurs et des vérins.** Il faut bien préciser que l'action mécanique agit sur les deux pièces.
- ▶ Les actions strictement extérieures (comme la pesanteur) ne sont pas en interactions entre deux pièces.

**10.3.2 Isoler les solides soumis à 2 glisseurs**

On commence toujours, toujours, toujours, toujours, toujours par isoler les ensembles soumis à 2 glisseurs... Mais cela vous le saviez :). Cependant, en dynamique ce cas est rare. On peut le rencontrer, dans le cas des problèmes plans, lorsque la masse d'un solide est négligée.

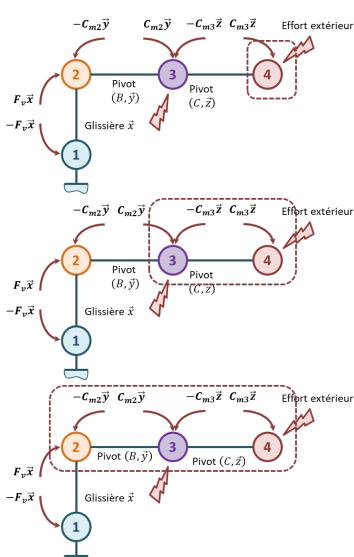
**10.3.3 Cas des chaînes ouvertes**

C'est le cas le plus rencontré en dynamique.

On commence par isoler le bout de chaîne. Puis on réalise le théorème correspondant à la mobilité de cet ensemble et on poursuit le raisonnement.

Ainsi, pour la figure ci-contre :

1. pour obtenir  $C_{m3}$ , on isole 4 et on fait un théorème du moment dynamique en  $C$  en projection sur  $\vec{z}$  ;
2. pour obtenir  $C_{m2}$ , on isole  $\{4+3\}$  et on fait un théorème du moment dynamique en  $B$  en projection sur  $\vec{y}$  ;
3. pour obtenir  $F_v$ , on isole  $\{4+3+2\}$  et on fait un théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$ .

**10.3.4 Cas des chaînes fermées**

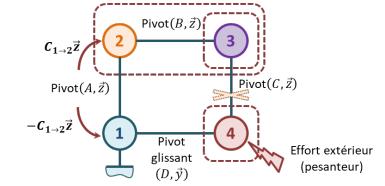
Ce cas n'est pas le plus fréquent. Lorsqu'on désire obtenir la loi de mouvement d'une chaîne fermée, il est généralement plus rapide d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique que nous aborderons plus tard.

Puis les chaînes fermées, on va réaliser une coupure « fictive » dans le système et reprendre la méthode précédente.

L'objectif est que toutes les équations dynamiques fassent apparaître les inconnues statiques d'une seule et même liaisons. Cela permettra finalement de disposer d'assez d'équations pour supprimer ces inconnues de liaisons.

Pour l'exemple ci-contre :

1. on isole 4 et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{y}$ ;
2. on isole 3 et on réalise un théorème du moment dynamique en  $B$  en projection sur  $\vec{z}$ ;
3. on isole {2+3} et on réalise un théorème du moment dynamique en  $A$  en projection sur  $\vec{z}$ .



### 10.3.5 Cas des véhicules

Dans les cas des véhicules, l'application du PFD permet de déterminer

- ▶ les conditions de dérapages en ligne droite ou en virage;
- ▶ les conditions de basculement en ligne droite ou en virage.

#### Véhicule qui accélère, sans glissement des roues

La figure 10.1 permet de modéliser (partiellement) les actions mécaniques sur un véhicule en ligne droite. En faisant les hypothèses suivantes :

- ▶ véhicule qui accélère et roues avant motrices,
- ▶ problème plan ;
- ▶ masse des roues négligeables ;

il en résulte que la roue arrière (dont l'inertie est nulle si la masse est négligeable) est soumise à deux glisseurs (pivot dans le plan avec le châssis et contact ponctuel avec le sol). En conséquence, il n'y a pas d'effort tangentiel dans cette liaison.

De plus en phase d'accélération et d'adhérence de la roue avant, l'effort tangentiel de la roue sur le sol est vers l'avant.

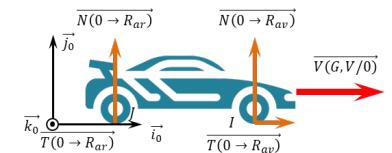


FIGURE 10.1 – Véhicule en mouvement

#### Freinage, roues bloquées

On se met dans le cas d'un freinage sur toutes les roues et ces roues se bloquent. Le véhicule glisse et l'effort tangentiel s'oppose au mouvement. On est dans le cas d'un glissement, donc on est sur le cône de frottement.

La loi de mouvement peut s'obtenir en isolant tout le véhicule et en réalisant un **théorème de la résultante dynamique** suivant  $\vec{i}_0$ . Le TRD sur  $\vec{j}_0$ , le TMD (par exemple en  $I$ ) et les lois de Coulomb permettent de supprimer les inconnues de liaison.

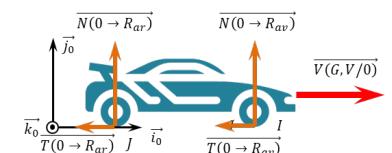


FIGURE 10.2 – Freinage et glissade ...

#### Dérapage en rond point

Si on dérape (figure 10.3), c'est nécessairement suivant la direction  $\vec{k}_1$ . La loi de mouvement, ou les conditions de dérapage, peuvent s'obtenir en isolant tout le véhicule et en réalisant un **théorème de la résultante dynamique** suivant  $\vec{i}_0$ . La tendance au dérapement étant vers l'extérieur du virage, les efforts tangentiels sont nécessairement orientés vers l'intérieur du virage.

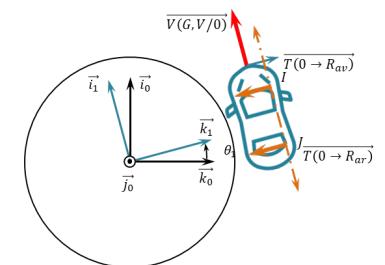


FIGURE 10.3 – Dérapage

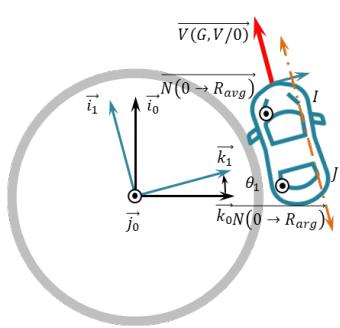


FIGURE 10.4 – Tonneau

### Tonneau en rond point

Si la voiture part en tonneau (figure ?? c'est nécessairement en pivotant autour de l'axe  $\vec{IJ}$ . Pour déterminer les conditions de tonneau, il faudra donc d'une part réaliser un **théorème du moment dynamique** en  $I$  ou en  $J$  en projection suivant la direction  $\vec{IJ}$  (c'est-à-dire vecteur  $\vec{i}_1$ ). On cherchera alors la condition où les efforts normaux sur les roues intérieures seront nuls.

### Wheeling en moto

On souhaite savoir dans quelles conditions il est possible de faire un wheeling en moto, c'est à dire pour quelle accélération, la roue avant va se décoller du sol. Ce mouvement correspond à une rotation de la moto autour de la roue arrière.

Pour traduire ce mouvement, on isole l'ensemble de la moto et on réalise un **théorème du moment dynamique** en  $J$  en détermine à quelle condition l'effort normal sur la roue avant est nul.

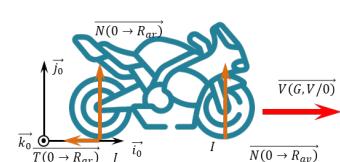


FIGURE 10.5 – Wheeling

### Soleil en moto

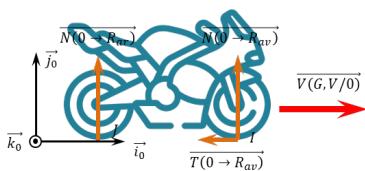


FIGURE 10.6 – Soleil

On souhaite savoir dans quelles conditions il est possible de décoller la roue arrière, c'est à dire pour quelle déleration, la roue arrière va se décoller du sol lors d'un freinage sur la roue avant uniquement (roue avant bloquée). Ce mouvement correspond à une rotation de la moto autour de la roue avant.

Pour traduire ce mouvement, on isole l'ensemble de la moto et on réalise un **théorème du moment dynamique** en  $I$  en détermine à quelle condition l'effort normal sur la roue arrière est nul.

### 10.3.6 Il y a plus qu'à ...

#### Produit mixte

Petite remarque pour finir : le produit mixte. Lorsqu'on applique un théorème suivant une direction, le produit mixte peut être un bon outil :  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{z} = (\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{z} + (\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}) \cdot \vec{z} \dots$  et  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{z} = (\vec{v} \wedge \vec{z}) \cdot \vec{u} = (\vec{z} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}.$

#### Projection de la dérivée et dérivée de la projection...

On reconnaîtra que  $(uv)' = u'v + uv'$  et donc  $u'v = (uv)' - uv'$ .

On pourra utiliser judicieusement le résultat suivant :

$$\frac{d}{dt} [\vec{V}(t)]_{\mathcal{B}_0} \cdot \vec{u}(t) = \frac{d}{dt} [\vec{V}(t) \cdot \vec{u}(t)] - \vec{V}(t) \cdot \frac{d}{dt} [\vec{u}(t)]_{\mathcal{B}_0}$$

## 10.4 Loi de mouvement

En règle générale, les lois de mouvement permettent d'exprimer le couple moteur ou l'effort à fournir pour un vérin pour réaliser un déplacement. Ces lois sont des équations différentielles d'ordre 2. En général, il n'est pas nécessaire de résoudre ces équations différentielles car le mouvement est forcé par la commande.

Une des lois usuellement suivie par un actionneur pour aller d'un point à un autre est une loi de mouvement de vitesse en trapèze. Ce mouvement peut être décomposé en 3 phases :

- ▶ phase 1 mouvement uniformément décéléré. L'accélération est donc constante, la vitesse croît de façon linéaire et la position de façon parabolique ;
- ▶ phase 2 : mouvement uniforme. L'accélération est nulle, la vitesse est constante et la position évolue linéairement ;
- ▶ phase 3 : mouvement uniformément décéléré. L'accélération est constante et négative, la vitesse décroît linéairement et la position évolue de façon parabolique.

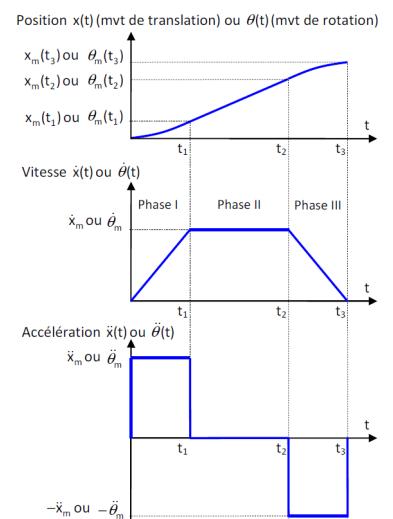
Dans le cas général, il sera souvent inutile d'écrire les équations horaires de chacune des phases. En effet, les questions liées à ces lois de mouvements sont généralement :

- ▶ d'identifier le « pire des cas » en terme de vitesse / accélération ;
- ▶ de déterminer les temps de une ou plusieurs des phases en fonction de la distance à parcourir, la vitesse maximale, l'accélération accélérations maximales ;
- ▶ de déterminer la hauteur du palier de vitesse ;
- ▶ de déterminer la distance parcourue.

### Résultat –

Dans les 3 derniers points, il est souvent suffisant de remarquer en utilisant les courbes que :

- ▶  $t_1 = \frac{\dot{x}_m}{\ddot{x}_m}$  ;
- ▶ en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors de l'accélération est donnée par  $\frac{1}{2}t_1\dot{x}_m$  ;
- ▶ en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors des 3 phases est donnée par  $2 \cdot \frac{1}{2}t_1\dot{x}_m + (t_2 - t_1)\dot{x}_m$ .



	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Équation de position	$x(t) = \frac{1}{2}\ddot{x}_m t^2$	$x(t) = \dot{x}_m(t)(t - t_1) + x_m(t_1)$	$x(t) = -\frac{1}{2}\ddot{x}_m(t - t_2)^2 + \dot{x}_m(t)(t - t_2) + x_m(t_2)$
Équation de vitesse	$\dot{x}(t) = \ddot{x}_m t$	$\dot{x}(t) = \dot{x}_m$	$\dot{x}(t) = -\ddot{x}_m(t - t_2) + \dot{x}_m$
Équation d'accélération	$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_m$	$\ddot{x}(t) = 0$	$\ddot{x}(t) = -\ddot{x}_m$



# Application 1

## Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme ★ – Sujet

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

### Mise en situation

Les figures et le schéma ci-dessous représentent un micromoteur à combustion interne de modèle réduit. Du point de vue cinématique, il est basé sur un système bielle manivelle (2,1), associé à un piston (3), animé d'un mouvement de translation rectiligne alternatif.

On note :

- $\overrightarrow{AB} = e\vec{x}_1$ ,  $\overrightarrow{BC} = L_2\vec{y}_2$ ,  $\overrightarrow{AC} = \lambda_3\vec{y}_0$ ;
- $\overrightarrow{HG_1} = a_1\vec{x}_1$ ,  $\overrightarrow{BG_2} = a_2\vec{y}_2$ ,  $\overrightarrow{CG_3} = a_3\vec{y}_0$ ;
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$ ,  $(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = \theta_2$ ;  $\omega_{10} = \dot{\theta}_1$  et  $\omega_{20} = \dot{\theta}_2$ ;
- $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  les masses des trois pièces mobiles (1), (2) et (3).

On note  $C_m\vec{z}_0$  le couple délivré par le moteur et  $F_e\vec{y}_0$  la force exercée sur le piston suite à l'explosion du mélange air – carburant. On néglige les effets de la pesanteur.

**Question 1** Exprimer la relation liant la vitesse de rotation  $\omega_{10}$  du vilebrequin (1) et la vitesse du piston (3), notée  $\dot{\lambda} = V_{3/0}$ .

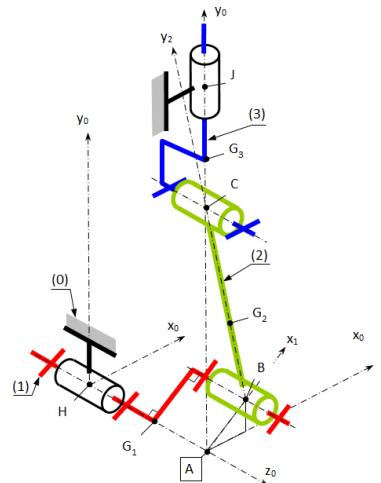
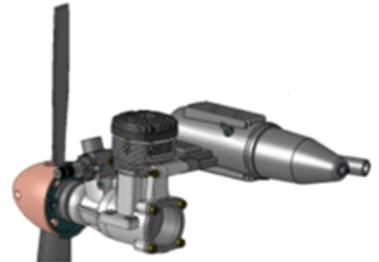
Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

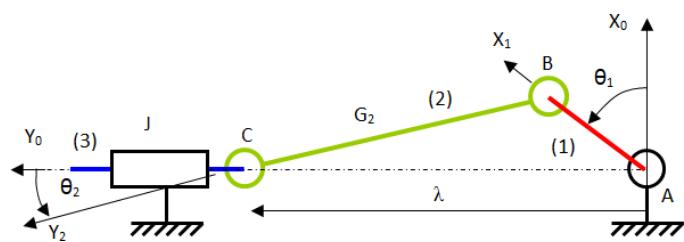
On note  $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(H;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$  la matrice d'inertie en  $H$  de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré (1).

**Question 2** En considérant que seul le plan  $(H, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie  $I_A(1)$ ,  $I_{G_2}(2)$  et  $I_{G_3}(3)$  sont diagonales.

**Question 3** Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.





# Application 1

## Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme ★ – Corrigé

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

### Mise en situation

**Question 1** Exprimer la relation liant la vitesse de rotation  $\omega_{10}$  du vilebrequin (1) et la vitesse du piston (3), notée  $\lambda = V_{3/0}$ .

#### Correction

On réalise une fermeture géométrique dans le triangle  $ABC$  et on a :  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow e\vec{x}_1 + L_2\vec{x}_2 - \lambda_3\vec{y}_0 \Leftrightarrow e(\cos\theta_1\vec{x}_0 + \sin\theta_1\vec{y}_0) + L_2(\cos\theta_2\vec{x}_0 + \sin\theta_2\vec{y}_0) - \lambda_3\vec{y}_0 = \vec{0}$ .

On a donc :  $\begin{cases} e\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 = 0 \\ e\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_2\cos\theta_2 = -e\cos\theta_1 \\ L_2\sin\theta_2 = \lambda_3 - e\sin\theta_1 \end{cases}$  Au final,  $L_2^2 = e^2\cos^2\theta_1 + (\lambda_3 - e\sin\theta_1)^2 \Leftrightarrow L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1 = (\lambda_3 - e\sin\theta_1)^2$   
 $\Rightarrow \sqrt{L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1} = \lambda_3 - e\sin\theta_1 \Rightarrow \lambda_3 = \sqrt{L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1} + e\sin\theta_1$ .



**Question 2** En considérant que seul le plan  $(H, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.

#### Correction

On a donc une invariance suivant  $\vec{y}_1$  et  $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(H, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie  $I_A(1)$ ,  $I_{G_2}(2)$  et  $I_{G_3}(3)$  sont diagonales.

#### Correction

$H$  est un point fixe :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \{\mathcal{C}(1/0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overline{R_c(1/0)} = m_1 \overline{V(G_1, 1/0)} \\ \overline{\sigma(H, 1/0)} = I_H(1) \overline{\Omega(1/0)} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_H \\ \blacktriangleright \quad \{\mathcal{D}(1/0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overline{R_d(1/0)} = m_1 \overline{\Gamma(G_1, 1/0)} \\ \overline{\delta(H, 1/0)} = \left[ \frac{d\delta(H, 1/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_H \end{aligned}$$

$G_3$  est le centre de gravité de 3. Le solide 3 est en translation par rapport à 0.

$$\blacktriangleright \{C(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(3/0)} = m_3 \overrightarrow{V(G_3, 3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3 \lambda_3 \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_3}$$

$$\blacktriangleright \{D(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(3/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_3, 1/0)} = \left[ \frac{d\sigma(G_3, 3/0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3 \ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_3}$$

$G_2$  est le centre de gravité de 2.

$$\blacktriangleright \{C(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(2/0)} = m_2 \overrightarrow{V(G_2, 2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_2, 2/0)} = I_{G_2}(2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (\dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}) \\ C_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\blacktriangleright \{D(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} = \left[ \frac{d\sigma(G_2, 2/0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}) \\ C_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$$

Détail des calculs.

**Calcul de  $\overrightarrow{V(G_2, 2/0)}$ .**

$$\overrightarrow{V(G_2, 2/0)} = \overrightarrow{V(G_2, 2/3)} + \overrightarrow{V(G_2, 3/0)}$$

$$\overrightarrow{V(G_2, 2/3)} = \overrightarrow{V(C, 2/3)} + \overrightarrow{G_2 C} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/3)} = \overrightarrow{0} + a_2 \overrightarrow{y_2} \wedge \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} = a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} \quad \overrightarrow{V(G_2, 3/0)} = \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{V(G_2, 2/0)} = \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}.$$

**Calcul de  $\overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)}$ .**

$$\overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} = \ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}.$$

**Question 3** Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.

### Correction

► On isole (1).

► Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_A$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$  (pas de frottement dans la liaison).
- Liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$  (pas de frottement dans la liaison). Par ailleurs,  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)}) \overrightarrow{z_0} = (e \overrightarrow{x_1} \wedge (X_{21} \overrightarrow{x_2} + Y_{21} \overrightarrow{y_2})) \overrightarrow{z_0} = (e X_{21} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} + e Y_{21} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2}) \overrightarrow{z_0} = e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1)$
- Couple moteur :  $\{\mathcal{T}(0_m \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_A$ .

► On applique le TMD en A en projection suivant  $\overrightarrow{z}$  :

$$e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1) + C_m = C_1 \ddot{\theta}_1$$

► On isole (2).

► Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{-R(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{-\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$  (pas de frottement dans la liaison).

- Liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 3)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_C$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$   
(pas de frottement dans la liaison).

► On applique le TMD en  $C$  en projection sur  $\overrightarrow{z_0}$  :

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z} &= \overrightarrow{\delta(C, 2/0)} \cdot \overrightarrow{z} \iff L_2 \overrightarrow{y_2} \wedge (X_{21} \overrightarrow{x_2} + Y_{21} \overrightarrow{y_2}) \cdot \overrightarrow{z} = (\overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} + \overrightarrow{CG_2} \wedge m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)}) \cdot \overrightarrow{z} \\ \implies -L_2 X_{21} &= C_2 \ddot{\theta}_2 \left( -a_2 \overrightarrow{y_2} \wedge (m_2 (\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2})) \right) \cdot \overrightarrow{z} \\ \implies -L_2 X_{21} &= C_2 \ddot{\theta}_2 + a_2 m_2 (\ddot{\lambda}_3 \sin \theta_2 - a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2}) \end{aligned}$$

► On isole (2+3).

► Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Liaison glissière :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_A$  avec  $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{y_0} = 0$   
(pas de frottement dans la liaison).
- Liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$   
(pas de frottement dans la liaison).
- Force explosion :  $\{\mathcal{T}(0_e \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_y \overrightarrow{y} + F_z \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{C_{exp}} \end{array} \right\}_C$ .

► On applique le TRD en projection sur  $\overrightarrow{y_0}$  :

$$\begin{aligned} F_y - Y_{21} &= m_3 \ddot{\lambda}_3 + (m_2 (\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2})) \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \iff F_y - Y_{21} &= m_3 \ddot{\lambda}_3 + (m_2 (\ddot{\lambda}_3 + a_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + a_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2)) \end{aligned}$$



# Application 2

## Chaîne ouverte – Wheeling moto ★ – Sujet

Équipe PT - La Martinière Monplaisir.

### Modélisation

L'étude proposée concerne l'étude dynamique d'une moto dans une phase de wheeling. Il s'agit d'une figure acrobatique consistant à soulever la roue avant, et de ne garder que l'appui sous la roue arrière. La moto est supposée se déplacer en ligne droite, sur une route horizontale, et l'étude menée est cinématiquement plane. Le modèle d'étude est sur la figure ci-dessous.

- $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est un repère supposé galiléen, où  $\vec{x}_0$  est dirigé suivant la vitesse de la moto et  $\vec{y}_0$  suivant la verticale ascendante;
- $\mathcal{R}_1 = (G_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est un repère lié à l'ensemble considéré indéformable {cadre + bras arrière + fourche avant + pilote}. On note  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ;
- $\mathcal{R}_2 = (O_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est un repère lié à la roue avant (2), de rayon  $R$  et de centre  $O_2$  tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$ . On note  $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ ;
- $\mathcal{R}_3 = (O_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est un repère lié à la roue arrière (3), de rayon  $R$  et de centre  $O_3$  tel que  $\vec{z}_3 = \vec{z}_0$ . On note  $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$ . Les contacts entre les roues (2) et (3) et le sol (0) sont modélisés par des liaisons ponctuelles en  $H_2$  et  $H_3$ .

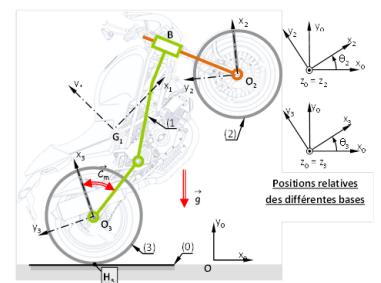
On note  $G_i$  le centre d'inertie,  $m_i$  la masse et  $C_i$  le moment d'inertie par rapport à l'axe de la pièce (i). **On fait l'hypothèse que le problème est plan.**

### Étude dynamique

La transmission exerce sur la roue arrière un couple moteur  $\vec{C}_m = C_m \vec{z}_0$ . On suppose que l'adhérence roue/sol est suffisante pour assurer le roulement sans glissement de la roue (3) au contact en  $H$  avec le sol. La situation initiale est définie au moment où la roue avant quitte le contact avec le sol, avec  $\dot{\theta}_1 = 0$  (après  $\neq 0$ ).

**Question 1** Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling. Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en  $H_3$ .

**Question 2** En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer l'ensemble des équations de mouvement, en précisant :



On note :

- $\vec{OO_3} = \lambda \vec{x}_0 + R \vec{y}_0$ ;
- $\vec{O_3O_2} = L_1 \vec{x}_1$ ;
- $\vec{O_3G_1} = a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1$ ;
- $\vec{H_3O_3} = R \vec{y}_0$ ;
- $\vec{H_2O_2} = R \vec{y}_0$ ;
- $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$ .

- ▶ élément(s) isolé(s);
- ▶ théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.

**Question 3** Mettre en place les équations précédentes. Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.



# Application 2

## Chaîne ouverte – Wheeling moto ★ – Corrigé

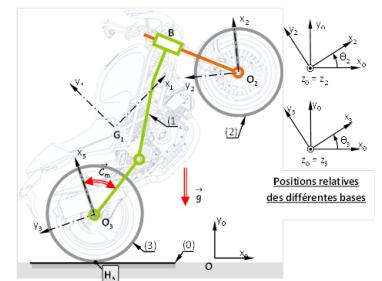
Équipe PT - La Martinière Monplaisir.

### Modélisation

L'étude proposée concerne l'étude dynamique d'une moto dans une phase de wheeling. Il s'agit d'une figure acrobatique consistant à soulever la roue avant, et de ne garder que l'appui sous la roue arrière. La moto est supposée se déplacer en ligne droite, sur une route horizontale, et l'étude menée est cinématiquement plane. Le modèle d'étude est sur la figure ci-dessous.

- $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est un repère supposé galiléen, où  $\vec{x}_0$  est dirigé suivant la vitesse de la moto et  $\vec{y}_0$  suivant la verticale ascendante ;
- $\mathcal{R}_1 = (G_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est un repère lié à l'ensemble considéré indéformable {cadre + bras arrière + fourche avant + pilote}. On note  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  ;
- $\mathcal{R}_2 = (O_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est un repère lié à la roue avant (2), de rayon  $R$  et de centre  $O_2$  tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$ . On note  $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$  ;
- $\mathcal{R}_3 = (O_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est un repère lié à la roue arrière (3), de rayon  $R$  et de centre  $O_3$  tel que  $\vec{z}_3 = \vec{z}_0$ . On note  $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$ . Les contacts entre les roues (2) et (3) et le sol (0) sont modélisés par des liaisons ponctuelles en  $H_2$  et  $H_3$ .

On note  $G_i$  le centre d'inertie,  $m_i$  la masse et  $C_i$  le moment d'inertie par rapport à l'axe de la pièce (i). **On fait l'hypothèse que le problème est plan.**



### Étude dynamique

La transmission exerce sur la roue arrière un couple moteur  $\vec{C}_m = C_m \vec{z}_0$ . On suppose que l'adhérence roue/sol est suffisante pour assurer le roulement sans glissement de la roue (3) au contact en  $H$  avec le sol. La situation initiale est définie au moment où la roue avant quitte le contact avec le sol, avec  $\dot{\theta}_1 = 0$  (après  $\neq 0$ ).

**Question 1** Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling. Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en  $H_3$ .

### Correction

On note :

- $\overrightarrow{OO_3} = \lambda \vec{x}_0 + R \vec{y}_0$ ;
- $\overrightarrow{O_3O_2} = L_1 \vec{x}_1$ ;
- $\overrightarrow{O_3G_1} = a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1$ ;
- $\overrightarrow{H_3O_3} = R \vec{y}_0$ ;
- $\overrightarrow{H_2O_2} = R \vec{y}_0$ ;
- $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$ .

**Question 2** En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer l'ensemble des équations de mouvement, en précisant :

- élément(s) isolé(s) ;
- théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.

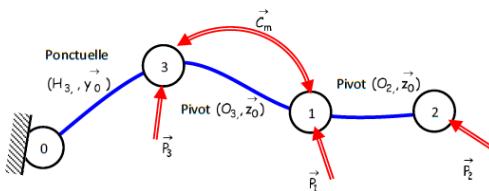
### Correction

**Question 3** Mettre en place les équations précédentes. Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.

### Correction

**Eléments de corrigé**

Q1- Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling.  
Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en  $H_3$ .



Si on considère des liaisons parfaites, en particulier en  $H_3$  (liaison sans frottement), l'ensemble modélisé en 2D est isostatique et comporte 4 mobilités :

- déplacement suivant  $\vec{x}_0$  du centre d'inertie  $G_1$  du cadre (1) par rapport au sol : paramètre  $\lambda_1$  ;
- position angulaire du cadre (1) par rapport au sol : paramètre  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  ;
- position angulaire de la roue (3) par rapport au sol : paramètre  $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$  ;
- position angulaire de la roue (2) par rapport au sol : paramètre  $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$  .

La propriété de roulement sans glissement en  $H_3$  entre la roue (3) et le sol (0) introduit une relation entre les paramètres de position.

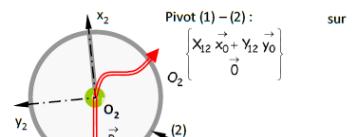
Il y a donc 3 équations du mouvement issues de l'application du principe fondamental de la dynamique.

Q2- En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer le mouvement de l'ensemble :

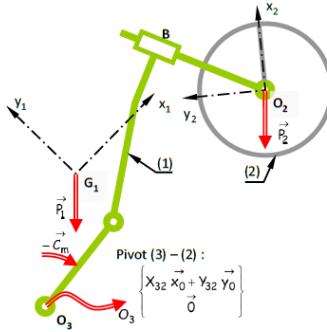
- élément(s) isolé(s) ;
- théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.

Les trois équations sont obtenues en isolant successivement :

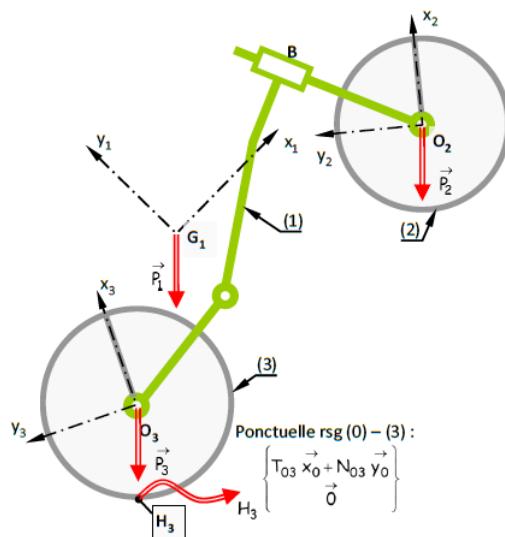
- la roue avant (2) :  
équation du moment dynamique en  $O_2$ , en projection  $\vec{z}_0$ . Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison pivot (1) – (2) ;



- ensemble {roue avant (2), cadre (1)} :  
équation du moment dynamique en  $O_3$ , en projection sur  $\vec{z}_0$ .  
Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison pivot (3) – (1) ;



- ensemble {roue avant (2), cadre (1), roue arrière (3)} : équation du moment dynamique en  $H_3$ , en projection sur  $z_0$ . Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison ponctuelle avec RsG (0) – (3) ;



Q3- Mettre en place les équations

précédentes.

Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.

#### EQUATION (1)

Moment cinétique de la roue (2) : il est défini en  $O_2$ , centre d'inertie de la roue (2), point où est supposée définie sa matrice

$$\text{d'inertie : } \vec{\sigma}(O_2, 2/0) = \bar{\bar{\mathbf{I}}}(O_2, 2) \otimes \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 = C_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_0$$

$$\text{Moment dynamique : } \vec{\delta}(O_2, 2/0) = \frac{d\vec{\sigma}(O_2, 2/0)}{dt/(0)} = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_0$$

Actions extérieures sur la roue (2) :

- pesanteur : le poids  $\vec{P}_2$  est supposé appliqué en  $O_2$ , donc de moment nul en ce point ;
- la liaison pivot (1) – (2) a un moment nul en  $O_2$ .

Soit l'équation (1) :  $C_2 \ddot{\theta}_2 = 0$

#### EQUATION (2)

Moment dynamique de l'ensemble {(1), (2)} : il est défini en  $O_3$ , en faisant la somme des moments dynamiques de (1) et de (2) :  $\vec{\delta}(O_3, 1, 2/0) = \vec{\delta}(O_3, 1/0) + \vec{\delta}(O_3, 2/0)$

#### Calcul pour le cadre (1) :

Moment cinétique du cadre (1) : il est défini en  $G_1$ , centre d'inertie du cadre (1), point où est supposée définie sa matrice

$$\text{d'inertie : } \vec{\sigma}(G_1, 1/0) = \bar{\bar{\mathbf{I}}}(G_1, 1) \otimes \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 = C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_0$$

$$\text{Moment dynamique : } \vec{\delta}(G_1, 1/0) = \frac{d\vec{\sigma}(G_1, 1/0)}{dt/(0)} = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_0$$

$$\text{Calcul en } O_3 : \quad \vec{\delta}(O_3, 1/0) = \vec{\delta}(G_1, 1/0) + m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) \wedge \vec{G}_1 \vec{O}_3$$

Calcul de l'accélération  $\vec{\Gamma}(G_1, 1/0)$  : pour ce calcul, il est plus adroit de repérer la position du cadre (1) par rapport au sol (0) en définissant comme paramètre  $\lambda_1$  :  $\vec{O} \vec{O}_3 = \lambda_1 \vec{x}_0$ .

Le point O est un point lié au sol, situé à la distance R du plan de contact de la roue avec la chaussée.

$$\begin{aligned}
 \vec{\omega}_{G_1} &= \vec{\omega}\vec{O}_3 + \vec{O}_3\vec{\omega}_1 = \lambda_1 \vec{x}_0 + \vec{a}_1 \vec{x}_1 + \vec{b}_1 \vec{y}_1 \\
 \vec{V}(G_1, 1/0) &= \dot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \dot{\theta}_1 (\vec{a}_1 \vec{y}_1 - \vec{b}_1 \vec{x}_1) \\
 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) &= \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \ddot{\theta}_1 (\vec{a}_1 \vec{y}_1 - \vec{b}_1 \vec{x}_1) - \dot{\theta}_1^2 (\vec{a}_1 \vec{x}_1 + \vec{b}_1 \vec{y}_1) \\
 \text{Moment dynamique en } O_3 : \quad \vec{\delta}(O_3, 1/0) &= C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_0 + m_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \ddot{\theta}_1 (\vec{a}_1 \vec{y}_1 - \vec{b}_1 \vec{x}_1) - \dot{\theta}_1^2 (\vec{a}_1 \vec{x}_1 + \vec{b}_1 \vec{y}_1) \right] \wedge (-\vec{a}_1 \vec{x}_1 - \vec{b}_1 \vec{y}_1) \\
 \vec{\delta}(O_3, 1/0) &= C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_0 - m_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 (a_1 \sin \theta_1 + b_1 \cos \theta_1) - \dot{\theta}_1 (a_1^2 + b_1^2) \right] \vec{z}_0
 \end{aligned}$$

Calcul pour la roue avant (2) :

$$\vec{\delta}(O_3, 2/0) = \vec{\delta}(O_2, 2/0) + m_2 \vec{\Gamma}(O_2, 2/0) \wedge \vec{O}_2 \vec{O}_3$$

Calcul de l'accélération  $\vec{\Gamma}(O_2, 2/0)$

$$\vec{\omega}\vec{O}_2 = \lambda_1 \vec{x}_0 + L_1 \vec{x}_1$$

$$\vec{V}(O_2, 2/0) = \dot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \dot{L}_1 \vec{y}_1$$

$$\vec{\Gamma}(O_2, 2/0) = \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \ddot{L}_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 L_1 \vec{x}_1$$

$$\text{Moment dynamique en } O_3 : \quad \vec{\delta}(O_3, 2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_0 + m_2 \left[ \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \ddot{L}_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 L_1 \vec{x}_1 \right] \wedge -L_1 \vec{x}_1$$

$$\vec{\delta}(O_3, 2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_0 - m_2 L_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1 L_1 \right] \vec{z}_0$$

Actions extérieures appliquées à l'ensemble (1, 2) :

- pesanteur sur (2) : le poids  $\vec{P}_2$  appliqué en  $O_2$ , de moment en  $O_3$  :

$$\vec{O}_3 \vec{O}_2 \wedge -\vec{P}_2 \vec{y}_0 = L_1 \vec{x}_1 \wedge -\vec{P}_2 \vec{y}_0 = -L_1 P_2 \cos \theta_1 \vec{z}_0$$

- pesanteur sur (1) : le poids  $\vec{P}_1$  appliqué en  $G_1$ , de moment en  $O_3$  :

$$\vec{O}_3 \vec{G}_1 \wedge -\vec{P}_1 \vec{y}_0 = (\vec{a}_1 \vec{x}_1 + \vec{b}_1 \vec{y}_1) \wedge -\vec{P}_1 \vec{y}_0 = -P_1 (a_1 \cos \theta_1 - b_1 \sin \theta_1) \vec{z}_0$$

- le moteur agit sur le cadre (1) en exerçant un couple de moment  $-C_m \vec{z}_0$
- la liaison pivot (3) – (2) a un moment nul en  $O_3$ .

Soit l'équation (2) :

$$C_1 \ddot{\theta}_1 - m_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 (a_1 \sin \theta_1 + b_1 \cos \theta_1) + \dot{\theta}_1 (a_1^2 + b_1^2) \right] + C_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1 L_1 \right] = -L_1 P_2 \cos \theta_1 - P_1 (a_1 \cos \theta_1 - b_1 \sin \theta_1) - C_m$$

Équation (3)

Moment dynamique de l'ensemble {(1), (2), (3)} : il est défini en  $H_3$ , en faisant la somme des moments dynamiques de (1), de (2) et de (3) :  $\vec{\delta}(H_3, [1, 2, 3]/0) = \vec{\delta}(H_3, 1/0) + \vec{\delta}(H_3, 2/0) + \vec{\delta}(H_3, 3/0)$

Calcul pour le cadre (1) :

$$\text{Moment dynamique en } H_3 : \quad \vec{\delta}(H_3, 1/0) = \vec{\delta}(G_1, 1/0) + m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) \wedge \vec{G}_1 \vec{H}_3$$

$$\vec{\delta}(H_3, 1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_0 + m_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \ddot{\theta}_1 (\vec{a}_1 \vec{y}_1 - \vec{b}_1 \vec{x}_1) - \dot{\theta}_1^2 (\vec{a}_1 \vec{x}_1 + \vec{b}_1 \vec{y}_1) \right] \wedge (-R \vec{y}_0 - a_1 \vec{x}_1 - b_1 \vec{y}_1)$$

Calcul pour la roue avant (2) :

$$\text{Moment dynamique en } H_3 : \quad \vec{\delta}(H_3, 2/0) = \vec{\delta}(O_2, 2/0) + m_2 \vec{\Gamma}(O_2, 2/0) \wedge \vec{O}_2 \vec{H}_3$$

$$\vec{\delta}(H_3, 2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_0 + m_2 L_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \ddot{\theta}_1 L_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 L_1 \vec{x}_1 \right] \wedge (-R \vec{y}_0 - L_1 \vec{x}_1)$$

**Calcul pour la roue arrière (3) :**

Moment cinétique de la roue (3) : il est défini en  $O_3$ , centre d'inertie de la roue (3), point où est supposée définie sa matrice d'inertie.

$$\vec{\sigma}(O_3,3/0) = \bar{\bar{I}}(O_3,3) \otimes \dot{\theta}_3 \vec{z}_0 = C_3 \dot{\theta}_3 \vec{z}_0$$

$$\text{Moment dynamique : } \vec{\delta}(O_3,3/0) = \frac{d\vec{\sigma}(O_3,3/0)}{dt/(0)} = C_3 \ddot{\theta}_3 \vec{z}_0$$

Moment dynamique en  $H_3$  :  $\vec{\delta}(H_3,3/0) = \vec{\delta}(O_3,3/0) + m_3 \vec{\Gamma}(O_3,3/0) \wedge O_3 H_3$ , avec  $O_3 = G_3$ , centre d'inertie de la roue (3).

Calcul de l'accélération  $\vec{\Gamma}(O_3,3/0)$

$$O\vec{O}_3 = \lambda_1 \vec{x}_0$$

$$\vec{V}(O_3,3/0) = \dot{\lambda}_1 \vec{x}_0$$

$$\vec{\Gamma}(O_3,3/0) = \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0$$

$$\text{En } H_3 : \vec{\delta}(H_3,3/0) = C_3 \ddot{\theta}_3 \vec{z}_0 + m_3 \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 \wedge -R \vec{y}_0 = (C_3 \ddot{\theta}_3 - m_3 \ddot{\lambda}_1 R) \vec{z}_0$$

**Actions extérieures appliquées à l'ensemble {1, 2, 3} :**

- pesanteur sur (2) : le poids  $\vec{P}_2$  appliqué en  $O_2$ , de moment en  $H_3 : H_3 \vec{O}_2 \wedge -P_2 \vec{y}_0 = -L_1 P_2 \cos \theta_1 \vec{z}_0$
- pesanteur sur (1) : le poids  $\vec{P}_1$  appliqué en  $G_1$ , de moment en  $H_3 : H_3 \vec{G}_1 \wedge -P_1 \vec{y}_0 = -P_1 (a_1 \cos \theta_1 - b_1 \sin \theta_1) \vec{z}_0$
- pesanteur sur (3) : le poids  $\vec{P}_3$  appliqué en  $O_3$ , a un moment nul en  $H_3$  ;
- le contact ponctuel du sol sur la roue (3) a un moment nul en  $H_3$ .

Nota : le moteur est interne à l'ensemble isolé...

**Soit l'équation (3) :**

Il reste à conclure...

Le système d'équations n'est pas intégrable dans le cas général.

Seule l'équation (1) indépendante des deux autres donne un résultat simple :

$$C_2 \ddot{\theta}_2 = 0, \text{ soit } \dot{\theta}_2 = \text{Cte} : \text{la vitesse de rotation de la roue avant est constante...}$$



# Application 3

## Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant ★ – Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

05 DYN



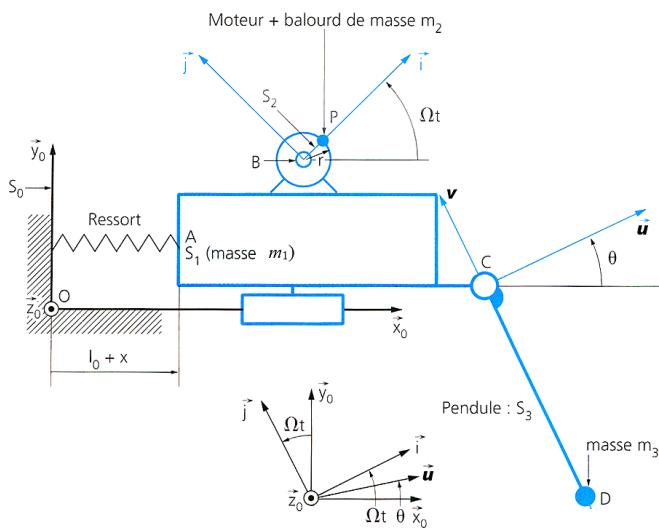
### Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide  $S_1$ , de masse  $m_1$  en liaison glissière parfaite avec un support  $S_0$ , fixe par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  supposé galiléen.

Le solide  $S_1$  est rappelé par un ressort de longueur libre  $l_0$  et de raideur  $k$ . Une masse ponctuelle  $m_2$  excentrée, placée en  $P$ , tourne sur un rayon  $r$  et est entraînée à vitesse constante  $\Omega$ . Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur  $S_2$ .

Un pendule simple de longueur  $L$ , porte à son extrémité  $D$  une masse concentrée  $m_3$ , l'ensemble constitue le solide  $S_3$ , en liaison pivot parfaite d'axe  $(C, \vec{z}_0)$  avec  $S_1$ .

Les masses autres que  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  sont négligées.



### Objectif

Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse du système.

**Question 2** Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant  $x$ ,  $\theta$  et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles.

**Question 3** Déterminer ces deux équations. On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre  $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$  en supposant que  $x$ ,  $\theta$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{\theta}$  sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

**Question 4** Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme  $x(t) = A \cos(\Omega t)$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$ .

**Question 5** Déterminer le système d'équations permettant de calculer  $A$  et  $B$ .

**Question 6** Indiquer la condition que doit vérifier la longueur  $L$  afin d'assurer  $x(t) = 0$  en régime forcé.

#### Éléments de correction

1.  $(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} \cos \theta - m_3 L \dot{\theta}^2 \sin \theta = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$  et  $\ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$ .
2.  $(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$  et  $\ddot{x} + L \ddot{\theta} + g \theta = 0$ .
3.  $A = \frac{m_2 r \Omega^2 (-L \Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3) \Omega^2 + k] (-L \Omega^2 + g) - m_3 L \Omega^4}$  et  $B = \frac{m_2 r \Omega^2}{[-(m_1 + m_2 + m_3) \Omega^2 + k] (-L \Omega^2 + g) - m_3 L \Omega^4}$ .
4.  $L = \frac{g}{\Omega^2}$ .



# Application 3

## Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant ★ – Corrigé

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

05 DYN

### Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide  $S_1$ , de masse  $m_1$  en liaison glissière parfaite avec un support  $S_0$ , fixe par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  supposé galiléen.

Le solide  $S_1$  est rappelé par un ressort de longueur libre  $l_0$  et de raideur  $k$ . Une masse ponctuelle  $m_2$  excentrée, placée en  $P$ , tourne sur un rayon  $r$  et est entraînée à vitesse constante  $\Omega$ . Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur  $S_2$ .

Un pendule simple de longueur  $L$ , porte à son extrémité  $D$  une masse concentrée  $m_3$ , l'ensemble constitue le solide  $S_3$ , en liaison pivot parfaite d'axe  $(C, \vec{z}_0)$  avec  $S_1$ .

Les masses autres que  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  sont négligées.



### Objectif

Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse du système.

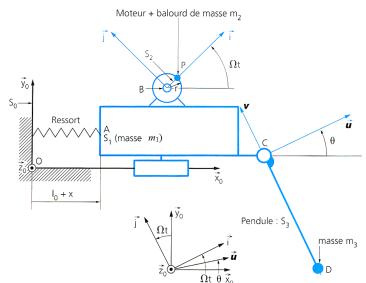
### Correction

**Question 2** Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant  $x$ ,  $\theta$  et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles.

### Correction

**Question 3** Déterminer ces deux équations.

### Correction



On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre  $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$  en supposant que  $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$  sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

**Question 4** Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

#### Correction

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme  $x(t) = A \cos(\Omega t)$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$ .

**Question 5** Déterminer le système d'équations permettant de calculer  $A$  et  $B$ .

#### Correction

**Question 6** Indiquer la condition que doit vérifier la longueur  $L$  afin d'assurer  $x(t) = 0$  en régime forcé.

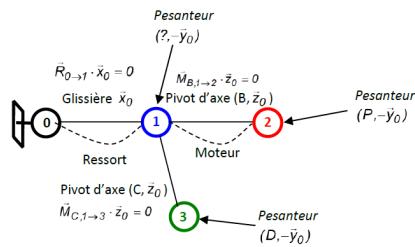
#### Correction

#### Éléments de correction

1.  $(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} \cos \theta - m_3 L \dot{\theta}^2 \sin \theta = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$  et  $\ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$ .
2.  $(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$  et  $\ddot{x} + L \ddot{\theta} + g \theta = 0$ .
3.  $A = \frac{m_2 r \Omega^2 (-L \Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3) \Omega^2 + k] (-L \Omega^2 + g) - m_3 L \Omega^4}$  et  $B = \frac{m_2 r \Omega^2}{[-(m_1 + m_2 + m_3) \Omega^2 + k] (-L \Omega^2 + g) - m_3 L \Omega^4}$ .
4.  $L = \frac{g}{\Omega^2}$ .

1. Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant  $x, \theta$ , leurs dérivées et les paramètres cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède trois degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver trois équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée :  $\Omega = \text{cte}$ . Reste à déterminer  $\theta(t)$  et  $x(t)$ .

On isole  $\Sigma = 1+2+3$ .

Le théorème de la résultante dynamique appliquée à  $\Sigma$  en projection sur  $\vec{x}_0$  doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas :

$$\bar{R}_{d\Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 = \bar{R}_{\Sigma-\Sigma} \cdot \vec{x}_0$$

On isole 3.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 3 au point  $C$  et en projection sur  $\vec{z}_0$  doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 3 n'interviennent pas :

$$\bar{\delta}_{C,3/0} \cdot \vec{z}_0 = \bar{M}_{C,\bar{3}-3} \cdot \vec{z}_0$$

Actions mécaniques pour obtenir  $\bar{R}_{(1+2+3)-(1+2+3)} \cdot \vec{x}_0$  :

$$\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{cases} \bar{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \bar{M}_{P,0 \rightarrow 1} \end{cases} \quad \text{avec } \bar{R}_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_0 = 0 \quad \{T_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{cases} -kx\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\{T_{pes \rightarrow 1}\} = \begin{cases} -m_1g\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} \quad \{T_{pes \rightarrow 2}\} = \begin{cases} -m_2g\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} \quad \{T_{pes \rightarrow 3}\} = \begin{cases} -m_3g\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\bar{R}_{(1+2+3)-(1+2+3)} \cdot \vec{x}_0 = -kx$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir  $\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0$  :

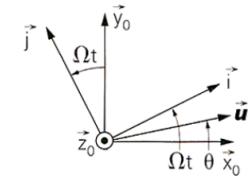
$$\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = \sum_{i=1}^3 m_i \vec{\Gamma}_{G_i \in 1/0} \cdot \vec{x}_0$$

$$\text{Soit } \vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = m_1 \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} \cdot \vec{x}_0 + m_2 \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} \cdot \vec{x}_0 + m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{V}_{G_1 \in 1/0} = \dot{x} \vec{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} = \ddot{x} \vec{x}_0$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/1} = \vec{V}_{G_2 \in 2/1} + \vec{G_2} \vec{B} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -r \vec{i} \wedge \Omega \vec{z}_0 = r \Omega \vec{j}$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/0} = \vec{V}_{G_2 \in 2/1} + \vec{V}_{G_2 \in 1/0} = r \Omega \vec{j} + \dot{x} \vec{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} = \ddot{x} \vec{x}_0 - r \Omega^2 \vec{i}$$



$$\text{car } \frac{d \vec{j}}{dt} \Big|_0 = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{j} = \Omega \vec{z}_0 \wedge \vec{j} = -\Omega \vec{i}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/1} = \vec{V}_{G_3 \in 3/1} + \vec{G_3} \vec{C} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} = L \vec{v} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = L \dot{\theta} \vec{u}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{V}_{G_3 \in 3/1} + \vec{V}_{G_3 \in 1/0} = L \dot{\theta} \vec{u} + \dot{x} \vec{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = \ddot{x} \vec{x}_0 + L \ddot{\theta} \vec{u} + L \dot{\theta}^2 \vec{v}$$

$$\text{car } \frac{d \vec{u}}{dt} \Big|_0 = \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \vec{v}$$

Théorème de la résultante dynamique appliquée à S1 + S2 + S3 en projection sur  $\vec{x}_0$  :  $\vec{R}_{d\Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x}_0$

$$-kx = m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - r \Omega^2 \cos(\Omega t)) + m_3 (\ddot{x} + L \ddot{\theta} \cos \theta - L \dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} \cos \theta - m_3 L \dot{\theta}^2 \sin \theta = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

Actions mécaniques pour obtenir  $\vec{M}_{C,\bar{3} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$  :

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{P,2 \rightarrow 3} \end{array} \right\} \text{ avec } \vec{M}_{P,2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\{T_{pes \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_3 g \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\vec{M}_{C,pes \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = \left( \vec{M}_{G_3,pes \rightarrow 3} + \vec{G_3} \wedge -m_3 g \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = [-L \vec{v} \wedge -m_3 g \vec{y}_0] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 g L \sin \theta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir  $\vec{\delta}_{C,3/0} \cdot \vec{z}_0$  :

$$\vec{\delta}_{G_3,3/0} = \vec{0} \text{ (masse ponctuelle)}$$

$$\vec{\delta}_{C,3/0} \cdot \vec{z}_0 = [\vec{\delta}_{G_3,3/0} + \vec{G_3} \wedge \vec{R}_{d3/0}] \cdot \vec{z}_0 = [-L \vec{v} \wedge m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0}] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 L [\vec{z}_0 \wedge \vec{v}] \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L \vec{u} \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L [\ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta}]$$

Théorème du moment dynamique appliquée à S3 au point C et en projection sur  $\vec{z}_0$  :  $\vec{\delta}_{C,3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C,\bar{3} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$

$$-m_3 g L \sin \theta = m_3 L [\ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta}] \quad \text{d'où } \ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

## 2. Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

En considérant que  $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$  sont des petites variations de position ou de vitesse autour de la position d'équilibre  $(x_0, \theta_0) = (0,0)$ ,

et que le développement limité de  $f(x)$  à l'ordre  $n$  en  $a$  est  $f(x+a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}x^n$ , on a :

$$\begin{array}{ll} \text{ordre 0: } \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} & \text{ordre 1: } \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = \theta \end{cases} \\ \text{ordre 2: } \begin{cases} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin \theta = \theta \end{cases} & \text{ordre 3: } \begin{cases} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} \end{cases} \end{array}$$

$$\text{et } \dot{\theta}^2 \approx 0$$

$$\text{Donc: } \boxed{(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta} = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t)} \text{ et } \boxed{\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0}$$

3. Déterminer le système d'équations permettant de calculer  $A$  et  $B$ .

En posant  $x(t) = A \cos(\Omega t)$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$ , on a :  $\ddot{x}(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t)$  et  $\ddot{\theta}(t) = -B\Omega^2 \cos(\Omega t)$

Les deux équations obtenues précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2 + m_3)A\Omega^2 \cos(\Omega t) + kA \cos(\Omega t) - m_3LB\Omega^2 \cos(\Omega t) = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - LB\Omega^2 \cos(\Omega t) + gB \cos(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \left[ -(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k \right]A - m_3L\Omega^2 B = m_2r\Omega^2 \\ -A\Omega^2 + (-L\Omega^2 + g)B = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{aligned} A &= \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{\left[ -(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k \right](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4} \\ B &= \frac{m_2r\Omega^4}{\left[ -(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k \right](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4} \end{aligned}$$

4. Indiquer la condition que doit vérifier la longueur  $L$  afin d'assurer  $x(t) = 0$  en régime forcé.

On a  $x(t) = 0$  en régime forcé, si  $A = 0$ .

Ce qui implique que :  $A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{\left[ -(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k \right](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$  Soit :  $\boxed{L = \frac{g}{\Omega^2}}$

Dans ce cas  $B = \frac{-m_2r}{m_3L}$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t) = \frac{-m_2r}{m_3L} \cos(\Omega t)$



## Application 4

# Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique ★ – Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie.

05 DYN

### Présentation

La géotechnique correspond aux activités liées aux applications de la mécanique des sols, de la mécanique des roches et de la géologie. À partir d'essais en laboratoire et in situ, la géotechnique fournit aux constructeurs de bâtiments et d'ouvrages les données indispensables pour le génie civil en ce qui concerne leur stabilité en fonction des sols. Aujourd'hui la modélisation physique d'ouvrage géotechnique en centrifugeuse est une approche expérimentale répandue. La centrifugation des modèles réduits permet de reproduire des états de contraintes dans les matériaux semblables à ceux régnant dans l'ouvrage grandeur nature. Le laboratoire central des Ponts et Chaussées (LCPC) de Nantes possède une centrifugeuse géotechnique dont les principales caractéristiques sont données ci-après :

- ▶ distance de l'axe à la plate-forme nacelle : 5,5 m;
- ▶ longueur du bras : 6,8 m;
- ▶ accélération maximale : 200 g;
- ▶ temps de montée à 200 g : 360 s.



On propose le modèle cinématique ci-contre.

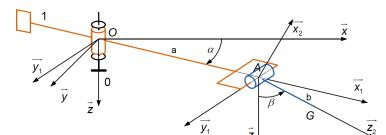
Soit  $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère galiléen lié au bâti 0 de la centrifugeuse. L'axe  $(O, \vec{z})$  est dirigé suivant la verticale descendante. On désigne par  $\vec{g} = g \vec{z}$  le vecteur accélération de la pesanteur.

Le bras 1 est en liaison pivot sans frottement d'axe  $(O, \vec{z})$  avec le bâti 0. Soit  $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  un repère lié au bras 1. On pose  $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ , avec  $\alpha = \omega t$ , où  $\omega$  est une constante positive.

La nacelle 2 est en liaison pivot sans frottement d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  avec le bras 1, telle que  $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$  ( $a$  est une constante positive). Soit  $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$  un repère lié à la nacelle 2. On pose  $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$ .

On note :

- ▶ bras 1 : moment d'inertie  $I$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{z})$ ;
- ▶ nacelle 2 : centre d'inertie  $G$ , tel que  $\overrightarrow{AG} = b\vec{z}_2$  ( $b$  est une constante positive),  
masse  $m$ , matrice d'inertie  $I_A$  (2) = 
$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$
.



Un moteur, fixé sur la bâti 0, exerce sur le bras 1 une action mécanique représentée par le couple  $C_m \vec{z}$ . Le bras 1 tourne à la vitesse constante  $\omega$  par rapport au bâti 0.

### Objectif

Déterminer les équations du mouvement de la centrifugeuse, ainsi que le couple moteur à fournir au cours du mouvement.

**Question 1** Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

**Question 2** Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

On suppose que la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, et que  $mba \gg A \simeq C$ .

**Question 3** Déterminer les expressions de l'angle  $\beta$  et du couple moteur  $C_m$  ?



## Application 4

# Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique ★ – Corrigé

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie.

05 DYN

### Présentation

La géotechnique correspond aux activités liées aux applications de la mécanique des sols, de la mécanique des roches et de la géologie. À partir d'essais en laboratoire et in situ, la géotechnique fournit aux constructeurs de bâtiments et d'ouvrages les données indispensables pour le génie civil en ce qui concerne leur stabilité en fonction des sols. Aujourd'hui la modélisation physique d'ouvrage géotechnique en centrifugeuse est une approche expérimentale répandue. La centrifugation des modèles réduits permet de reproduire des états de contraintes dans les matériaux semblables à ceux régnant dans l'ouvrage grandeur nature. Le laboratoire central des Ponts et Chaussées (LCPC) de Nantes possède une centrifugeuse géotechnique dont les principales caractéristiques sont données ci-après :

- ▶ distance de l'axe à la plate-forme nacelle : 5,5 m;
- ▶ longueur du bras : 6,8 m;
- ▶ accélération maximale : 200 g;
- ▶ temps de montée à 200 g : 360 s.



On propose le modèle cinématique ci-contre.

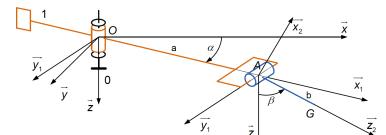
Soit  $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère galiléen lié au bâti 0 de la centrifugeuse. L'axe  $(O, \vec{z})$  est dirigé suivant la verticale descendante. On désigne par  $\vec{g} = g \vec{z}$  le vecteur accélération de la pesanteur.

Le bras 1 est en liaison pivot sans frottement d'axe  $(O, \vec{z})$  avec le bâti 0. Soit  $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  un repère lié au bras 1. On pose  $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ , avec  $\alpha = \omega t$ , où  $\omega$  est une constante positive.

La nacelle 2 est en liaison pivot sans frottement d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  avec le bras 1, telle que  $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$  ( $a$  est une constante positive). Soit  $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$  un repère lié à la nacelle 2. On pose  $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$ .

On note :

- ▶ bras 1 : moment d'inertie  $I$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{z})$ ;
- ▶ nacelle 2 : centre d'inertie  $G$ , tel que  $\overrightarrow{AG} = b\vec{z}_2$  ( $b$  est une constante positive),  
masse  $m$ , matrice d'inertie  $I_A$  (2) = 
$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$
.



Un moteur, fixé sur la bâti 0, exerce sur le bras 1 une action mécanique représentée par le couple  $C_m \vec{z}$ . Le bras 1 tourne à la vitesse constante  $\omega$  par rapport au bâti 0.

### Objectif

Déterminer les équations du mouvement de la centrifugeuse, ainsi que le couple moteur à fournir au cours du mouvement.

**Question 1** Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

### Correction

**Question 2** Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

### Correction

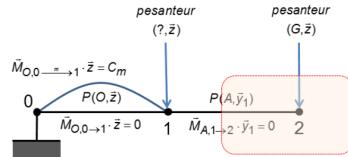
On suppose que la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, et que  $m \vec{b} \gg A \simeq C$ .

**Question 3** Déterminer les expressions de l'angle  $\beta$  et du couple moteur  $C_m$  ?

### Correction

1. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède deux degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver deux équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée :  $\omega = \text{cte}$ . Reste à déterminer  $\beta(t)$ .

On isole la nacelle 2.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur  $\vec{y}_1$  doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 2 n'interviennent pas :

$$\ddot{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = \dot{M}_{A,2 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1$$

Actions mécaniques pour obtenir  $\dot{M}_{A,2 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1$  :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \underset{\forall P \in (A, \vec{y}_1)}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ M_{P,1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}} \quad \text{avec} \quad \dot{M}_{P,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1 = 0 \quad \{T_{pes \rightarrow 2}\} = \underset{\forall P \in (G, \vec{z})}{\left\{ \begin{array}{l} mg\vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}}$$

Avec  $\dot{M}_{A,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1 = 0$

$$\dot{M}_{A,pes \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1 = (\cancel{M_{G,pes \rightarrow 2}} + \cancel{AG} \wedge mg\vec{z}) \cdot \vec{y}_1 = (b\vec{z}_2 \wedge mg\vec{z}) \cdot \vec{y}_1 = -mgbsin\beta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir :  $\ddot{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1$  :

*A n'est pas un point fixe dans  $R_0$ . On ne peut donc pas utiliser l'intégration par partie.*

**La matrice d'inertie est donnée en un point A qui n'est pas le centre de gravité !!!**

2 possibilités :

Méthode 1 : utiliser les définitions de  $\vec{\sigma}_{A,2/0}$  et  $\ddot{\delta}_{A,2/0}$  :

$$\vec{\sigma}_{A,2/0} = \overset{\#}{I}_A(2) \cdot \vec{\Omega}_{2/0} + m\vec{AG} \wedge \vec{V}_{A \in 2/0} \quad \text{et} \quad \ddot{\delta}_{A,2/0} = \frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt} \Big|_0 + m\vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G \in 2/0}$$

Méthode 2 : utiliser Huygens pour obtenir la matrice au point G, puis utiliser la méthode classique en déterminant  $\vec{\sigma}_{G,2/0}$  puis  $\ddot{\delta}_{G,2/0}$  puis  $\ddot{\delta}_{A,2/0}$ .

Nous allons utiliser la méthode 1.

$$\vec{V}_{A/0} = \vec{V}_{A\in 2/0} = \vec{V}_{A\in 1/0} = \vec{V}_{G\in 1/0} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -\alpha \vec{x}_1 \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_1 = \alpha \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_{A,2/0} = \vec{l}_A(2) \cdot \vec{\Omega}_{2/0} + m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A\in 2/0} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{b2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{b2} + mb \vec{z}_2 \wedge \alpha \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{b2} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{b2} - mba \dot{\alpha} \vec{x}_2$$

$$= -A \dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_2 + B \dot{\beta} \vec{y}_2 + C \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2 - mba \dot{\alpha} \vec{x}_2$$

$$= -(A \dot{\alpha} \sin \beta + mba \dot{\alpha}) \vec{x}_2 + B \dot{\beta} \vec{y}_2 + C \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2$$

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = \frac{d \vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt} \Big|_0 \cdot \vec{y}_1 + (m \vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G\in 2/0}) \cdot \vec{y}_1$$

Avec :  $(m \vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G\in 2/0}) \cdot \vec{y}_1 = 0$  car  $\vec{V}_{A/0} // \vec{y}_1$

$$\frac{d \vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt} \Big|_0 \cdot \vec{y}_1 = \frac{d(\vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1)}{dt} \Big|_0 - \vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \frac{d \vec{y}_1}{dt} \Big|_0$$

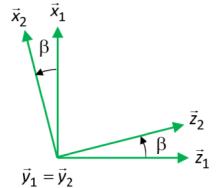
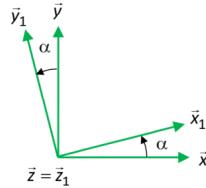
$$\text{et } \frac{d \vec{y}_1}{dt} \Big|_0 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\alpha} \vec{z} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha} \vec{x}_1$$

Donc

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = \frac{d(B\dot{\beta})}{dt} - [-(A\dot{\alpha} \sin \beta + mba \dot{\alpha}) \vec{x}_2 + B\dot{\beta} \vec{y}_2 + C\dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2] \cdot [-\dot{\alpha} \vec{x}_1]$$

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = B\ddot{\beta} + \dot{\alpha}[-(A\dot{\alpha} \sin \beta + mba \dot{\alpha}) \cos \beta + C\dot{\alpha} \cos \beta \sin \beta] \quad \text{car } \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 = \cos \beta \text{ et } \vec{z}_2 \cdot \vec{x}_1 = \sin \beta$$

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = B\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \cos \beta [\sin \beta(C - A) - mba]$$

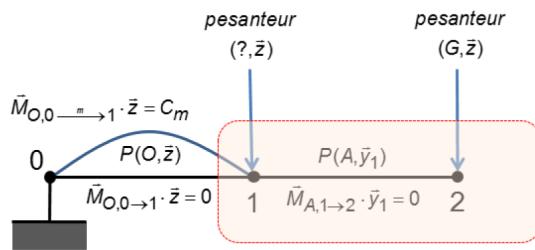


Théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur  $\vec{y}_1$  :  $\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = \vec{M}_{A,\bar{2} \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1$

$$-mg b \sin \beta = B\ddot{\beta} + \omega^2 \cos \beta [\sin \beta(C - A) - mba] \quad (1)$$

2. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

Graphe de structure :



On isole l'ensemble  $E = \text{bras } 1 + \text{nacelle } 2$ .

Le théorème du moment dynamique appliqué à  $E$  au point  $O$  et en projection sur  $\vec{z}$  doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas.

$$\ddot{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z} = \dot{M}_{O,\bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z}$$

Actions mécaniques pour obtenir  $\dot{M}_{O,\bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z}$  :

$$\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{cases} \vec{r}_{0 \rightarrow 1} & \text{avec } \dot{M}_{P,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = 0 \\ \dot{M}_{P,0 \rightarrow 1} & \end{cases} \quad \{T_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{cases} \vec{0} & \text{avec } \dot{M}_{P,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = C_m \\ \dot{M}_{P,0 \rightarrow 1} & \end{cases}$$

$$\{T_{pes \rightarrow 1}\} = \begin{cases} m_1 g \vec{z} & \\ \vec{0} & \end{cases} \quad \{T_{pes \rightarrow 2}\} = \begin{cases} m_2 g \vec{z} & \\ \vec{0} & \end{cases}$$

$$\text{Avec } \dot{M}_{O,pes \rightarrow i} \cdot \vec{z} = (\dot{M}_{G,pes \rightarrow i} + \vec{O}G_i \wedge m_i g \vec{z}) \cdot \vec{z} = 0$$

$$\dot{M}_{O,\bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z} = \dot{M}_{O,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \dot{M}_{O,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \dot{M}_{O,pes \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \dot{M}_{O,pes \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = C_m$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir  $\ddot{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z}$  :

$O$  est un point fixe dans  $R_0$ . On peut donc utiliser l'intégration par partie.

$$\ddot{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z} = \frac{d(\dot{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z})}{dt} - \dot{\delta}_{O,E/0} \cdot \frac{d\vec{z}}{dt} \Big|_0 = \frac{d(\dot{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z})}{dt}$$

$$\dot{\delta}_{O,1/0} \cdot \vec{z} = \left( \int_0^1 \delta_{O(1)} \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \right) \cdot \vec{z} = I\dot{\alpha} \quad \text{donc} \quad \frac{d(\dot{\delta}_{O,1/0} \cdot \vec{z})}{dt} = 0 \quad (\text{car } \dot{\alpha} = \omega = \text{cte})$$

$$\dot{\delta}_{O,2/0} \cdot \vec{z} = (\dot{\sigma}_{A,2/0} + \vec{O}A \wedge mV_{G \rightarrow 2/0}) \cdot \vec{z} = \dot{\sigma}_{A,2/0} \cdot \vec{z} + (\vec{O}A \wedge mV_{G \rightarrow 2/0}) \cdot \vec{z}$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{A,2/0} \cdot \vec{z} &= [-(A\dot{\alpha} \sin \beta + mba\dot{\alpha})\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\vec{y}_2 + C\dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2] \cdot \vec{z} \\ &= -(A\dot{\alpha} \sin \beta + mba\dot{\alpha})(-\sin \beta) + C\dot{\alpha} \cos^2 \beta \quad \text{car } \vec{x}_2 \cdot \vec{z} = -\sin \beta \text{ et } \vec{z}_2 \cdot \vec{z} = \cos \beta \\ &= \omega(A \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + mba \sin \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{OA} \wedge m\vec{V}_{G_{2/0}}) \cdot \vec{z} &= [a\ddot{x}_1 \wedge m(\dot{V}_{Ae2/0} + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0})] \cdot \vec{z} \\
&= \{a\ddot{x}_1 \wedge m[a\dot{\alpha}\vec{y}_1 - b\vec{z}_2 \wedge (\dot{\alpha}\vec{z} + \dot{\beta}\vec{y}_1)]\} \cdot \vec{z} \\
&= \{a\ddot{x}_1 \wedge m[\dot{\alpha}(a + b\sin\beta)\vec{y}_1 + b\dot{\beta}\vec{x}_2]\} \cdot \vec{z} \\
&= ma\ddot{\alpha}(a + b\sin\beta) \\
&= m\omega\ddot{\alpha}(a + b\sin\beta) \\
\text{Ainsi } \vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z} &= \omega(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + 2mb\sin\beta + ma^2) \\
\vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z} &= \omega(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + 2mb\sin\beta + ma^2) \\
\frac{d(\vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z})}{dt} &= \omega(2\dot{\beta}A\sin\beta\cos\beta - 2C\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta + 2mb\dot{\beta}\cos\beta) \\
\frac{d(\vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z})}{dt} &= 2\omega\dot{\beta}\cos\beta[\sin\beta(A - C) + mba]
\end{aligned}$$

Théorème du moment dynamique appliqué à  $E$  au point  $O$  et en projection sur  $\vec{z}$  :  $\vec{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z} = \vec{M}_{O,\bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z}$

$$C_m = 2\omega\dot{\beta}\cos\beta[\sin\beta(A - C) + mba] \quad (2)$$

### 3. Déterminer les expressions de l'angle $\beta$ et du couple moteur $C_m$ ?

On suppose que  $mba \gg A \approx C$

De plus lorsque la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, on a :  $\beta = cte \Rightarrow \dot{\beta} = \ddot{\beta} = 0$

Ainsi, les deux équations déterminées aux questions 1 et 2 deviennent :

$$(1) \Rightarrow -mgbs\in\beta = -\omega^2\cos\beta mba \Rightarrow \tan\beta = \frac{\omega^2 a}{g} \Rightarrow \boxed{\beta = \arctan\left(\frac{\omega^2 a}{g}\right)}$$

(2)  $\Rightarrow C_m = 0$  ce qui est normal, car la liaison 1/0 est parfaite, donc à vitesse constante de 1/0, il n'y a pas besoin de couple moteur (qui sert à accélérer ou freiner).

## Application 5

# Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs ★★ – Sujet

Centrale Supélec PSI 2013.

### Modélisation dynamique du comportement de la charge

#### Objectif

Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.



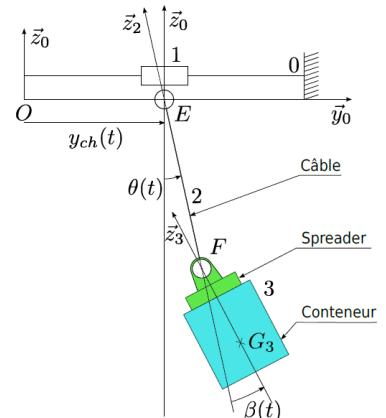
En vue d'élaborer une commande automatisée du déchargement des conteneurs, une bonne compréhension de la dynamique du système est nécessaire. Cette partie vise à établir les équations du mouvement du conteneur. La charge peut alors balancer selon le modèle présenté ci-après. Dans cette étude, la vitesse de vent nulle. On fait l'hypothèse que le conteneur est suspendu à un seul câble indéformable, en liaison pivot à ses extrémités. Les liaisons entre les solides 0, 1, 2 et 3 sont supposées parfaites. Le portique support du chariot est noté 0, le chariot 1, le câble 2 et l'ensemble {spreader + conteneur} 3.

#### Paramétrage

- Le repère  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au portique fixe ; il est supposé galiléen avec  $\vec{z}_0$  l'axe vertical ascendant.
- La position du chariot telle que  $\overrightarrow{OE} = y_{ch}(t)\vec{y}_0$  est notée  $y_{ch}(t)$ ; l'angle  $(\vec{z}_0, \vec{z}_2)$  d'inclinaison du câble  $\theta(t)$  et l'angle  $(\vec{z}_2, \vec{z}_3)$  d'inclinaison du conteneur par rapport au câble  $\beta(t)$ .

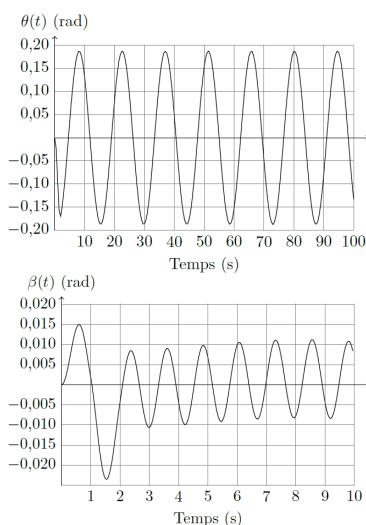
#### Données

- $\mathcal{R}_1 = (E; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  repère lié au chariot de levage 1.
- $\mathcal{R}_2 = (E; \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  repère lié au câble 2;  $\ell_2 = 50 \text{ m}$  la longueur  $EF$  du câble ; la masse est négligée.
- $\mathcal{R}_3 = (F; \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  repère lié à l'ensemble {spreader + conteneur} ;  $m_3 = 50 \text{ tonnes}$  la masse du solide 3;  $G_3$  le centre de gravité du solide 3, tel que  $\overrightarrow{G_3F} = h_3\vec{z}_3$  où  $h_3 = 2,5 \text{ m}$ ; la matrice d'inertie du solide 3 s'écrit  $I_3(G_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$  où  $\begin{cases} A_3 = 52 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \\ B_3 = 600 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \\ C_3 = 600 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \end{cases}$ .



- la motorisation  $M_D$  du mouvement de direction exerce, par l'intermédiaire de câbles, des actions mécaniques sur (1) qui se réduisent à un glisseur de la forme  $\overrightarrow{R} (M_D \rightarrow 1) = F \vec{y}_0$ ;
- l'action mécanique du câble sur le spreader est notée  $\overrightarrow{R} (2 \rightarrow 3) = F_{23} \vec{z}_2$ .

**Question 1** Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?



**Question 2** Déterminer littéralement, au point  $G_3$ , la vitesse  $\overrightarrow{V (G_3, 3/0)}$  puis le torseur dynamique  $\{\mathcal{D} (3/0)\}$  de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ .

**Question 3** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$ , sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

**Question 4** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$  et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

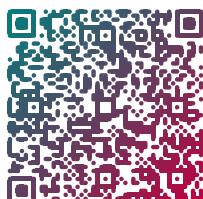
**Question 5** En supposant que  $\theta$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, linéariser les équations précédentes.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en  $y_{ch}(t)$  de 10 m.

**Question 6** Proposer une simplification de la modélisation précédente.

#### Éléments de correction

1.  $m = 3$ .
2.  $\overrightarrow{V (G_3, 3/0)} = \dot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \dot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{y}_3, \quad \{\mathcal{D} (3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \\ A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{G_3}$
3.  $-M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$
4.  $-M_3 g h_3 \sin (\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$
- 5.



## Application 5

# Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs ★★ – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2013.

### Modélisation dynamique du comportement de la charge

#### Objectif

Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.



**Question 1** Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?

#### Correction

Le système a trois mobilités :

- ▶ la translation de la liaison glissière de longueur  $y_{ch}(t)$  (degré de liberté motorisé);
- ▶ la rotation du câble d'angle  $\theta(t)$  (degré de liberté non motorisé);
- ▶ la rotation du conteneur d'angle  $\beta(t)$  (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.

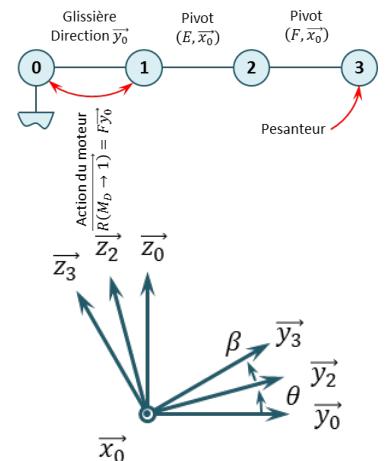
**Question 2** Déterminer littéralement, au point  $G_3$ , la vitesse  $\overrightarrow{V(G_3, 3/0)}$  puis le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(3/0)\}$  de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ .

#### Correction

$$\overrightarrow{V(G_3, 3/0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG_3}) \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d}{dt} \left( y_{ch}(t) \overrightarrow{y_0} - \ell_2 \overrightarrow{z_2} - h_3 \overrightarrow{z_3} \right) \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

On a :

- ▶  $\left[ \frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta} \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta} \overrightarrow{y_2};$
- ▶  $\left[ \frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_3} + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \overrightarrow{z_3} = (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_3} = -(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_3};$



$$\blacktriangleright \left[ \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \vec{z}_2;$$

$$\blacktriangleright \left[ \frac{d\vec{y}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{z}_3.$$

$$\overrightarrow{V(G_3, 3/0)} = \ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \dot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{y}_3.$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/0)} = \ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3.$$

Par ailleurs,  $G_3$  étant le centre d'inertie, de 3, on a  $\overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} = \left[ \frac{d\sigma(G_3, 3/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{dA_3(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0.$

On a donc,  $\{\mathcal{D}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_3 \left( \ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3 \right) \\ A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{G_3}$

**Question 3** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$ , sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

### Correction

D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant  $\vec{z}_2$ , on peut donc suggérer de réaliser le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur  $\vec{y}_2$ . Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3;
- action de 2 sur 3.

On a donc :  $-M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_2 = \left( M_3 \left( \ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3 \right) \right) \cdot \vec{y}_2$

$$\Leftrightarrow -M_3 g \sin \theta = M_3 \left( \ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta \right)$$

Résolution faisant intervenir  $F$  – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc (1+2+3) et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{y}_0$ .

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action du moteur sur 1.

On applique le TRD sur  $\vec{y}_0$  :  $F = \overrightarrow{R_d(1+2+3/0)} \cdot \vec{y}_0 = \underbrace{\overrightarrow{R_d(1/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(3/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} = \left( M_3 \left( \ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3 \right) \right) \cdot \vec{y}_0$

$$\Leftrightarrow F = M_3 \left( \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} \cos \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos(\beta + \theta) - \ell_2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin(\beta + \theta) \right)$$

**Question 4** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$  et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

**Correction**

Le TMD appliqué à 3 au point F en projection suivant  $\vec{x}_0$  se traduit par :

$$\overrightarrow{FG_3} \wedge (-M_3 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = \left( \overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} + \overrightarrow{FG_3} \wedge \overrightarrow{R_d(3/0)} \right) \cdot \vec{x}_0$$

\*\*\*\* Il faut calculer  $\overrightarrow{FG_3} \wedge \overrightarrow{R_d(3/0)}$  \*\*\*\*

$$\Leftrightarrow -h_3 \vec{z}_3 \wedge (-M_3 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$$

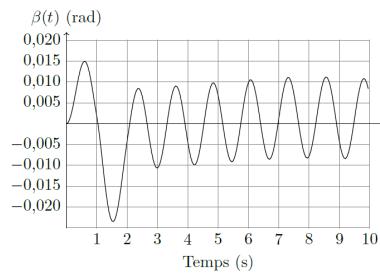
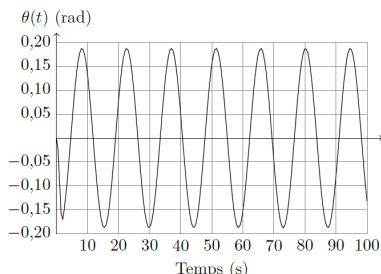
$$\Leftrightarrow -M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}).$$

**Question 5** En supposant que  $\theta, \beta, \dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, linéariser les équations précédentes.

**Correction**

- On a  $-M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$ . En linéarisant, on obtient  $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \beta)$ . En considérant que  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, on a :  $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}))$ .
- On a :  $F - M_3 g \cos \theta = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta)$ . En linéarisant, on obtient :  $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \beta)$ . En considérant que  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, on a :  $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta)$ .

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en  $y_{ch}(t)$  de 10 m.



**Question 6** Proposer une simplification de la modélisation précédente.

**Correction**

L'amplitude des oscillations de  $\beta$  est 10 fois inférieure aux oscillations de  $\theta$ . En conséquences, on pourrait poser  $\beta = 0$  et :

- $-g\theta = \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 \ddot{\theta}$ ;
- $F - M_3 g = -M_3 \ddot{y}_{ch}(t)\theta$ ;
- $M_3 g h_3 \theta = A_3 \ddot{\theta}$ .



## Application 6

# Dynamique du véhicule – Chariot élévateur à bateaux★ – Sujet

X – ENS – PSI – 2012.

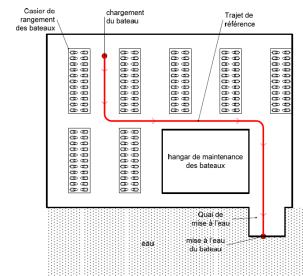
### Présentation

Le chariot élévateur , objet de cette étude, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

- ▶ du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage ;
- ▶ du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépôse du bateau.



On considère que le chariot élévateur se déplace sur le trajet de référence de la Figure 1. Les basculements frontal et latéral des chariots élévateurs représentent le principal risque auquel est confronté le conducteur. L'objectif de cette partie est de définir les conditions de stabilité du chariot élévateur dans les phases de freinage et lors des virages afin de définir les conditions optimales de déplacement du chariot dans chacune des phases. La caractérisation partielle de l'exigence 2 est donnée sur la Figure 2.



Caractérisation partielle de la Fonction de Service FS2		
Qualification	Critère	Valeur
Permettre au conducteur de déplacer le bateau en toute sécurité	C201	Basculement frontal
	C202	Couple de freinage du chariot disponible sur chaque roue
	C203	Temps d'accélération sur le plat
	C204	Basculement latéral du chariot en virage
	C205	Puissance du moteur
	C206	Position du centre de gravité de l'ensemble $\Sigma = \{\text{chariot,tablier,contrepoids}\}$

### Objectif

L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req 2 : le conducteur peut déplacer le bateau en toute sécurité ».

## Étude de la position du centre de gravité

La position du centre de gravité de l'ensemble « chariot+tablier » influence directement la stabilité lors des déplacements. Il est impératif de connaître avec précision sa position. Étant donné qu'il est possible de monter, sur le même chariot, différents types de tabliers en fonction de l'utilisation souhaitée, le chariot est équipé d'un contrepoids qui permet de régler la position du centre de gravité de l'ensemble. Ce réglage est effectué en usine et dépend du contexte d'utilisation du chariot élévateur.

### Objectif

L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req C206 : la position du centre de gravité de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$  doit être situé à un tiers de l'empattement par rapport à l'axe des roues arrières».

La Figure ci-contre donne le paramétrage retenu pour l'étude. On note  $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  le repère lié au chariot. Le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  est un plan de symétrie matériel pour le chariot.

Le repère  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est un repère lié à la route, supposé galiléen pour les conditions de l'étude.

On note :

- $G_B$  : centre de gravité du bateau de masse  $m_B$  ;
- $G_T$  : centre de gravité du tablier de masse  $m_T$  ;
- $G_1$  : centre de gravité du chariot seul de masse  $m_1$  ;
- $G_C$  : centre de gravité du contrepoids de masse  $m_C$  ;
- $G$  : centre de gravité de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$ .

$$\text{On donne : } \overrightarrow{OG_B} = \begin{pmatrix} x_{G_B} \\ 0 \\ z_{G_B} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}, \overrightarrow{OG_T} = \begin{pmatrix} x_{G_T} \\ 0 \\ z_{G_T} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}, \overrightarrow{OG_1} = \begin{pmatrix} x_{G_1} \\ 0 \\ z_{G_1} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}, \overrightarrow{OG_C} = \begin{pmatrix} x_{G_C} \\ 0 \\ z_{G_C} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}.$$

Afin de minimiser les risques de basculement du chariot élévateur, on souhaite que le point  $G$  soit confondu avec le point  $O$  (exigence req C206).

**Question 1** Déterminer l'expression de  $x_{G_C}$  afin de valider l'exigence req C206.

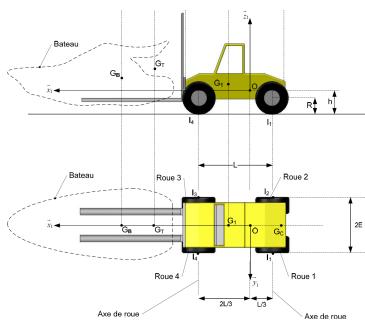
Pour toute la suite de l'étude, les points  $G$  et  $O$  sont supposés confondus et la masse totale de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$  est notée  $M$ .

## Étude du basculement frontal

Afin d'éviter les risques de basculement frontal du chariot lors des phases de freinage, le dispositif de sécurité ADS permet au conducteur de choisir, à partir des commandes disponibles sur son tableau de bord, la valeur de la décélération à imposer au chariot avant l'arrêt total. Ainsi, lorsque le conducteur relâche complètement la pédale de l'accélérateur, le dispositif ADS entre en action et le chariot est alors animé d'un mouvement uniformément décéléré. Le choix de la valeur de la décélération est fait en fonction des conditions de chargement du chariot. Ce dispositif permet au conducteur de maîtriser parfaitement les distances d'arrêt tout en évitant le basculement frontal.

L'objectif de cette partie est de mettre en évidence l'intérêt d'un tel dispositif.

Le chariot est en phase de freinage sur une route horizontale, il transporte un bateau (B) de masse  $m_B$  et de centre de gravité  $G_B$ . La vitesse du centre de gravité de l'ensemble



$\Sigma$  est donnée par  $\overrightarrow{V(G, \Sigma/\mathcal{R}_0)} = V(t)\vec{x}_1$ . Tous les mouvements du tablier sont inactifs durant le déplacement. Il n'y a pas de mouvement relatif entre le bateau et l'ensemble  $\Sigma$  au cours de cette phase. L'objet est de déterminer la valeur de la décélération qui provoque le basculement frontal de l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$ . Le problème est traité en trois dimensions.

L'action mécanique exercée par le sol sur le pneu  $P_i$  est modélisée par le torseur

$$\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_i)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow P_i)} = -T_i \vec{x}_1 + N_i \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(I_i, \text{sol} \rightarrow P_i)} = \vec{0} \end{array} \right\}_{I_1} = \left\{ \begin{array}{ll} -T_i & 0 \\ 0 & 0 \\ N_i & 0 \end{array} \right\}_{I_i, \mathcal{R}_1}.$$

La masse et l'inertie des roues sont négligées. La décélération qui provoque le basculement de l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$  est notée  $\overrightarrow{\Gamma_{\text{dec}}}(\{\Sigma, B\}/\mathcal{R}_0) = -\text{dec}_x \vec{x}_1$

On admet, dans un premier temps, que le basculement a lieu avant le glissement. Cette hypothèse sera vérifiée par la suite.

**Question 2** Écrire les équations issues de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$ . Le théorème du moment dynamique sera appliqué au point  $I_4$ .

**Question 3** Donner les hypothèses qui peuvent être faites afin de réduire le nombre d'inconnues du problème.

On considère que le basculement a lieu lorsque les roues arrière perdent le contact avec le sol.

**Question 4** Déterminer alors l'expression de  $\text{dec}_x$ .

Le facteur d'adhérence entre le pneu et la route est noté  $f$ .

**Question 5** Donner les expressions de  $N_4$  et  $T_4$  et expliquer qualitativement comment vérifier que le basculement a lieu avant le glissement afin de justifier l'hypothèse faite en début d'étude.

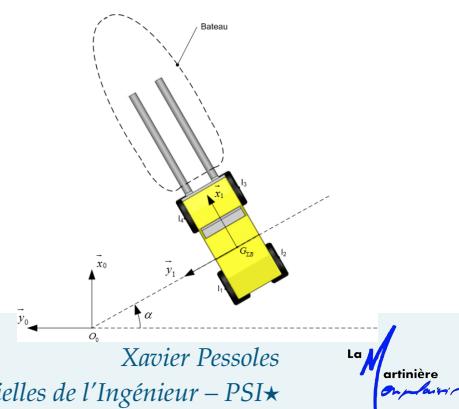
## Étude du basculement latéral

Le centre de gravité de l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$  est noté  $G_{\Sigma B} \overrightarrow{OG_{\Sigma B}} \begin{pmatrix} x_{G_{\Sigma B}} \\ y_{G_{\Sigma B}} \\ z_{G_{\Sigma B}} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ .

L'objet est de déterminer la vitesse maximale avec laquelle le chariot peut aborder le virage sans risque de basculement latéral. Le schéma retenu pour l'étude est présenté sur la Figure 24. Le chariot aborde un virage de rayon de courbure  $\rho$  avec  $\overrightarrow{O_0 G_{\Sigma B}} = -\rho \vec{y}_1$ . Tous les mouvements du tablier sont inactifs durant le déplacement. Il n'y a pas de mouvement relatif entre le bateau  $B$  et l'ensemble  $\Sigma$  au cours du mouvement. La vitesse du chariot est constante pendant toute la phase de virage et est notée  $\overrightarrow{V(G, \Sigma/\mathcal{R}_0)} = V \vec{x}_1$ . La masse et l'inertie des roues sont négligées. On admet que le basculement latéral a lieu avant le glissement, cette hypothèse pourra être vérifiée par la suite.

Le rayon de courbure du virage  $\rho$  est suffisamment grand devant l'empattement  $E$  du chariot pour pouvoir négliger l'influence du braquage des roues dans le modèle proposé. L'action mécanique exercée par le sol sur le pneu  $i$  est modélisée par le

$$\text{torseur : } \{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_i)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow P_i)} = -T_i \vec{x}_1 + N_i \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(I_i, \text{sol} \rightarrow P_i)} = \vec{0} \end{array} \right\}_{I_1} = \left\{ \begin{array}{ll} -T_i & 0 \\ 0 & 0 \\ N_i & 0 \end{array} \right\}_{I_i, \mathcal{R}_1}.$$





La matrice d'inertie de l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$  est de la forme  $I_{G_{\{\Sigma B\}}}(\{\Sigma, B\}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ .

**Question 6** Quel théorème doit-on utiliser afin d'obtenir directement l'équation permettant de déterminer l'expression de  $V$  qui provoque le basculement latéral?

**Question 7** En déduire l'expression de  $V$  qui provoque le basculement latéral .

## Application 6

# Dynamique du véhicule – Chariot élévateur à bateaux★ – Corrigé

X – ENS – PSI – 2012.

### Présentation

#### Étude de la position du centre de gravité

##### Objectif

L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req C206 : la position du centre de gravité de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$  doit être situé à un tiers de l'empattement par rapport à l'axe des roues arrières».



**Question 1** Déterminer l'expression de  $x_{G_C}$  afin de valider l'exigence req C206.

##### Correction

On a  $\overrightarrow{OG} = \frac{m_T}{m_T + m_1 + m_C} \overrightarrow{OG_T} + \frac{m_1}{m_T + m_1 + m_C} \overrightarrow{OG_1} + \frac{m_C}{m_T + m_1 + m_C} \overrightarrow{OG_C}$ . On souhaite que  $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$ . On a donc  $0 = \frac{m_T}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_T} + \frac{m_1}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_1} + \frac{m_C}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_C}$  et donc :  $x_{G_C} = -\frac{m_T}{m_C} x_{G_T} - \frac{m_1}{m_C} x_{G_1}$ .

Pour toute la suite de l'étude, les points  $G$  et  $O$  sont supposés confondus et la masse totale de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$  est notée  $M$ .

#### Étude du basculement frontal

**Question 2** Écrire les équations issues de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$ . Le théorème du moment dynamique sera appliqué au point  $I_4$ .

##### Correction

On isole  $\{\Sigma, B\}$ .

On fait le BAME.

$$\blacktriangleright \text{ Poids du bateau : } \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow B)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_B g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -m_B g \vec{z} \\ m_B g \vec{y} \left( x_{G_B} - \frac{2L}{3} \right) + E m_B g \vec{x} \end{array} \right\}_{I_4}.$$

► Poids de  $\Sigma$  :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow \Sigma)\} = \left\{ \begin{array}{l} -Mg \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} -Mg \vec{z} \\ -\frac{2MgL}{3} \vec{y} + EMg \vec{x} \end{array} \right\}_{I_4}.$

► Action du sol sur chaque roue :

- $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_1 \vec{x} + N_1 \vec{z} \\ LN_1 \vec{y} \end{array} \right\}_{I_4};$

- $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_1 \vec{x} + N_1 \vec{z} \\ -2EN_2 \vec{x} + LN_2 \vec{y} - 2ET_2 \vec{z} \end{array} \right\}_{I_4};$

- $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_3 \vec{x} + N_3 \vec{z} \\ -2EN_3 \vec{x} - 2ET_3 \vec{z} \end{array} \right\}_{I_4};$

- $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_4)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_4 \vec{x} + N_4 \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_{I_4}.$

**Calcul du  $\{\mathcal{D}(\{\Sigma, B\}/0)\}$ .**

$$\{\mathcal{D}(\{\Sigma, B\}/0)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R_d(\{\Sigma, B\}/0)}}{\delta(I_4, \{\Sigma, B\}/0)} \right\}_{I_4}.$$

On a  $\overrightarrow{R_d(\{\Sigma, B\}/0)} = -(M + m_B) \text{dec}_x \vec{x}_1$ .

Par ailleurs, on a  $\overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma, B\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G, \Sigma/0)} + \overrightarrow{\delta(G, B/0)}$ . Le bateau étant en translation par rapport au bâti, on a donc :

►  $\overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma\}/0)} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{\delta(I_4, \{\Sigma\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma\}/0)} + \overrightarrow{I_4 G} \wedge \overrightarrow{R_d(\{\Sigma\}/0)} =$   
 $\left( -2\frac{L}{3} \vec{x}_1 - E \vec{y}_1 + h \vec{z}_1 \right) \wedge -M \text{dec}_x \vec{x}_1 = -M \text{dec}_x (E \vec{z}_1 + h \vec{y}_1);$

►  $\overrightarrow{\delta(G_B, \{B\}/0)} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{\delta(I_4, \{B\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G_B, \{B\}/0)} + \overrightarrow{I_4 G_B} \wedge$   
 $\overrightarrow{R_d(\{B\}/0)} = \left( \left( -x_{G_B} + 2\frac{L}{3} \right) \vec{x}_1 + E \vec{y}_1 + (z_{G_B} + h) \vec{z}_1 \right) \wedge -m_B \text{dec}_x \vec{x}_1 =$   
 $m_B \text{dec}_x (E \vec{z}_1 - (z_{G_B} + h) \vec{y}_1);$

► au final,  $\overrightarrow{\delta(I_4, \{\Sigma, B\}/0)} = m_B \text{dec}_x (E \vec{z}_1 - (z_{G_B} + h) \vec{y}_1) - M \text{dec}_x (E \vec{z}_1 + h \vec{y}_1).$

**On applique le PFD.**

► Théorème de la résultante dynamique :

- suivant  $\vec{x}_1 : - (M + m_B) \text{dec}_x = - \sum_{i=1}^4 T_i;$
- suivant  $\vec{y}_1 : 0 = 0;$
- suivant  $\vec{z}_1 : 0 = \sum_{i=1}^4 N_i - (M + m_B) g.$

► Théorème du moment dynamique :

- suivant  $\vec{x}_1 : 0 = Em_B g + EMg - 2EN_2 - 2EN_3;$
- suivant  $\vec{y}_1 : -m_B \text{dec}_x (z_{G_B} + h) - M \text{dec}_x h = L(N_1 + N_2) + m_B g \left( x_{G_B} - 2\frac{L}{3} \right) - \frac{Mg2L}{3};$
- suivant  $\vec{z}_1 : m_B \text{dec}_x E - M \text{dec}_x E = -2ET_2 - 2ET_3.$

**Question 3** Donner les hypothèses qui peuvent être faites afin de réduire le nombre d'inconnues du problème.

### Correction

La mise en équation précédente permet d'exprimer 8 inconnues ( $N_i$  et  $T_i$  pour  $i$  allant de 1 à 4).

En faisant l'hypothèse que le plan  $(G_1, \vec{z}_1, \vec{x}_1)$  est plan de symétrie, on peut considérer que  $N_4 = N_3, T_4 = T_3, N_1 = N_2, T_1 = T_2$ . Il reste donc 4 inconnues.

De plus, à la limite du basculement frontal, les roues arrières se décolleraient. Il resterait donc les inconnues  $N_3$  et  $T_3$ .

On considère que le basculement a lieu lorsque les roues arrière perdent le contact avec le sol.

**Question 4** Déterminer alors l'expression de  $\text{dec}_x$ .

#### Correction

Le basculement frontal du véhicule peut se traduire par un théorème du moment dynamique appliqué en  $I_4$  en projection sur  $\vec{y}_1$ . On utilise les conditions précédentes. On a donc :

$$\begin{aligned} -m_B \text{dec}_x (z_{G_B} + h) - M \text{dec}_x h &= m_B g \left( x_{G_B} - 2 \frac{L}{3} \right) - \frac{Mg2L}{3} \quad \text{soit} \quad \text{dec}_x = \\ m_B g \left( x_{G_B} - 2 \frac{L}{3} \right) - \frac{Mg2L}{3} \\ \frac{-m_B (z_{G_B} + h) - Mh}{\Leftrightarrow \text{dec}_x = -8 \frac{m_B (3x_{G_B} - 2L) - M2L}{3m_B (z_{G_B} + h) + 3Mh}} \end{aligned}$$

Le facteur d'adhérence entre le pneu et la route est noté  $f$ .

**Question 5** Donner les expressions de  $N_4$  et  $T_4$  et expliquer qualitativement comment vérifier que le basculement a lieu avant le glissement afin de justifier l'hypothèse faite en début d'étude.

#### Correction

## Étude du basculement latéral

**Question 6** Quel théorème doit-on utiliser afin d'obtenir directement l'équation permettant de déterminer l'expression de  $V$  qui provoque le basculement latéral ?

#### Correction

**Question 7** En déduire l'expression de  $V$  qui provoque le basculement latéral .

#### Correction



## Application 7

# Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ – Sujet

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

05 DYN

### Présentation

Le support de l'étude est le véhicule auto balancé Segway®. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, mais plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La première génération de Segway avait un guidon fixe et une poignée de direction). Cette technologie provoquait un effet de roulis qui pouvait conduire à un renversement. Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier le dérapage et le renversement d'un Segway de première génération.

La seconde génération de Segway a vu apparaître une technologie appelée LeanSteer avec guidon inclinable qui permet de faire tourner le Segway lorsque l'utilisateur penche son corps sur le côté (non étudié dans cet exercice).

On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- la route **(0)** est munie du repère  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Ce référentiel associé est supposé galiléen.
- la plate-forme **(1)** a pour centre de gravité  $C$ . Le conducteur **(2)** a pour centre de gravité  $G$ . Les roues 3 et 4, de masse et inertie négligeable, sont liées à 1 par des liaisons pivots d'axe  $(C, \vec{y}_1)$ . L'ensemble  $E = 1 + 2$  forme le système matériel indéformable  $E$  de centre de gravité  $G_E$  et de masse  $m_E$ . Il est animée d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est  $O$ . Le rayon de courbure de la trajectoire du point  $G_E$  dans  $\mathcal{R}_0$  est  $R_c$ . Le repère lié à 1 est  $\mathcal{R}_1$  tel que  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0 = \vec{z}_{01}$  et on note  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .

On donne  $\overrightarrow{OG_E} = R_c \vec{y}_1 + h \vec{z}_{01}$ . L'opérateur d'inertie de  $E$  en  $G_E$  dans  $\mathcal{R}_1$  est  $I_{G_E}(E) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ .



### Hypothèse

- Les contacts entre les roues 3 et 4 et la route 0 ont lieu en  $A$  et  $B$  définis par  $\overrightarrow{G_E A} = -l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$  et  $\overrightarrow{G_E B} = l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$ ,  $l$  désignant la demi voie du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres  $A$  et

$B$  et de normale  $\vec{z_0}$ . Le contact dans ces liaisons se fait avec un coefficient de frottement noté  $f$  (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route 0 sur les roues 3 et 4 sont modélisées par des glisseurs en  $A$  et  $B$  de résultantes  $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} = -T_A \vec{y_1} + N_A \vec{z_1}$  et  $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 4)} = -T_B \vec{y_1} + N_B \vec{z_1}$ .

- ▶ On se place dans un cas où le rayon de courbure  $R_C$  de la trajectoire du point  $C$ , ainsi que la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$  sont constants.
- ▶ L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g \vec{z_0}$ . Accélération de la pesanteur,  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ .
- ▶ On néglige la masse et les l'inertie des roues.

On donne :

- ▶ coefficient d'adhérence pneu-route :  $f = 1$ ;
- ▶ masse de  $E = 1 + 2$  :  $m_E = 134 \text{ kg}$ ;
- ▶ demi largeur des voies :  $l = 35 \text{ cm}$ ,  $h = 86 \text{ cm}$ .

### Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

## Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.1» Glissement du véhicule pour une vitesse de $20 \text{ km h}^{-1}$ dans un virage de rayon de courbure $10 \text{ m}$	Interdit

**Question 1** Exprimer la vitesse, notée  $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}$ , du point  $G_E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $R_C$ . Exprimer la vitesse linéaire  $V_L = ||\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}||$  du véhicule en fonction de  $R_C$  et  $\dot{\theta}$ .

**Question 2** Exprimer l'accélération, notée  $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)}$ , du point  $G_E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $R_C$ .

**Question 3** Exprimer les conditions d'adhérence liant  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $N_A$ ,  $N_B$  et  $f$  traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant  $T_A + T_B$  à  $f$  et  $N_A + N_B$ .

**Question 4** Isoler  $E$  et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{z_0}$ .

**Question 5** Isoler  $E$  et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{y_1}$ . En déduire une inéquation donnant la vitesse limite  $V_L$  de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

**Question 6** Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

## Étude du renversement en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.2» Renversement du véhicule pour une vitesse de 20 km h <sup>-1</sup> dans un virage de rayon de courbure 10 m.	Interdit

### Hypothèse

On suppose qu'il y a adhérence des roues en A et B.

**Question 7** Calculer le torseur dynamique du système matériel E en  $G_E$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Exprimer ses composantes dans la base  $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

**Question 8** Calculer  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$  le moment dynamique au point B de l'ensemble (E) dans son mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  en projection sur  $\vec{x}_1$ .

**Question 9** En appliquant le théorème du moment dynamique au point B à l'ensemble E et les roues dans leur mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , en projection sur  $\vec{x}_1$ , écrire l'équation scalaire qui donne  $N_A$  en fonction de  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$  et des données du problème.

**Question 10** Écrire la condition de non renversement du véhicule.

On néglige  $I_{G_E}(E)$  pour simplifier l'application numérique.

**Question 11** Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.



### Éléments de correction

1.  $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)} = -R_C \dot{\theta} \vec{x}_1$  et  $V_L = R_C \dot{\theta}$ .
2.  $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)} = -R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$ .
3.  $T_A + T_B \leq f(N_A + N_B)$
4.  $N_A + N_B - m_E g = 0$ .
5.  $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$ .
6.  $36 \text{ km h}^{-1}$ .
7.  $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \\ -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_E}$ .
8.  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1 = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$ .
9.  $N_A = \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}$ .
10.  $N_A \geq 0$ .
11.  $V_L \leq 6,38 \text{ m s}^{-1} = 22,9 \text{ km h}^{-1}$



## Application 7

# Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ – Corrigé

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

05 DYN

## Présentation

### Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

## Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

**Question 1** Exprimer la vitesse, notée  $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}$ , du point  $G_E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $R_C$ . Exprimer la vitesse linéaire  $V_L = \|\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}\|$  du véhicule en fonction de  $R_C$  et  $\dot{\theta}$ .

### Correction

On a  $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)} = -R_C \dot{\theta} \vec{x}_1$ . On a alors  $V_L = R_C \dot{\theta}$ .

**Question 2** Exprimer l'accélération, notée  $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)}$ , du point  $G_E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $\ddot{\theta}$  et  $R_C$ .

### Correction

$$\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C \ddot{\theta} \vec{x}_1 - R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 = -R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \quad (\dot{\theta} \text{ est constant}).$$

**Question 3** Exprimer les conditions d'adhérence liant  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $N_A$ ,  $N_B$  et  $f$  traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant  $T_A + T_B$  à  $f$  et  $N_A + N_B$ .

### Correction

La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc,  $T_A \leq f N_A$  et  $T_B \leq f N_B$ . En sommant les inégalités, on a donc  $T_A + T_B \leq f (N_A + N_B)$ .

**Question 4** Isoler  $E$  et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{z}_0$ .

### Correction

$E$  étant un ensemble indéformable, on a :  $\overrightarrow{R_d(E/\mathcal{R}_0)} = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$  (pas de projection sur  $\vec{z}_0$ ). On isole  $E$  et les roues et on réalise le BAME :



- pesanteur sur  $E$ ;
- action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur  $\vec{z}_{01}$ , on a donc :  $N_A + N_B - m_E g = 0$ .

**Question 5** Isoler  $E$  et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{y}_1$ . En déduire une inéquation donnant la vitesse limite  $V_L$  de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

#### Correction

En appliquant le TRD en projection sur  $\vec{y}_1$ , on a :  $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$ . En utilisant les résultats de la question précédente,  $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$ . En notant  $V_L = R_C \dot{\theta}$  la vitesse limite avant dérapage, on a  $\frac{V_L^2}{R_C} \leq f g$ . On a donc  $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$ .

**Question 6** Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

#### Correction

La vitesse limite est donc de  $10 \text{ m s}^{-1}$  soient  $36 \text{ km h}^{-1}$  ce qui satisfait le cahier des charges.

## Étude du renversement en virage du véhicule Segway

**Question 7** Calculer le torseur dynamique du système matériel  $E$  en  $G_E$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Exprimer ses composantes dans la base  $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

#### Correction

Au centre d'inertie de  $E$ , on a  $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$ . On a  $\overrightarrow{\Omega(E/\mathcal{R}_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0$ .

On a donc,  $\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E\dot{\theta}\vec{x}_1 - D\dot{\theta}\vec{y}_1 + C\dot{\theta}\vec{z}_{01}$ . On a donc  $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E\dot{\theta}^2\vec{y}_1 + D\dot{\theta}^2\vec{x}_1$ .

En conséquence,  $\{\overrightarrow{\delta(E/\mathcal{R}_0)}\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \\ -E\dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D\dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_E}$ .

**Question 8** Calculer  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$  le moment dynamique au point  $B$  de l'ensemble  $(E)$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  en projection sur  $\vec{x}_1$ .

#### Correction

$$\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d(B/E)} = -E\dot{\theta}^2\vec{y}_1 + D\dot{\theta}^2\vec{x}_1 + (h\vec{z}_0 - l\vec{y}_1) \wedge (-m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1) = -E\dot{\theta}^2\vec{y}_1 + D\dot{\theta}^2\vec{x}_1 + hm_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{x}_1. \overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1 = (D + hm_E R_C) \dot{\theta}^2.$$

**Question 9** En appliquant le théorème du moment dynamique au point  $B$  à l'ensemble  $E$  et les roues dans leur mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , en projection sur  $\vec{x}_1$ , écrire l'équation scalaire qui donne  $N_A$  en fonction de  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$  et des données du problème.

#### Correction

On a :

$$\blacktriangleright \overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \vec{z}_{01} = (-l\vec{y}_1 + h\vec{z}_0) \wedge -m_E g \vec{z}_{01} = l m_E g \vec{x}_1;$$

$$\blacktriangleright \vec{BA} \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l \vec{y}_1 \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l N_A \vec{x}_1.$$

En appliquant le TMD en  $B$  suivant  $\vec{x}_1$ , on a :  $lm_E g - 2l N_A = (D + hm_E R_C) \dot{\theta}^2$ .

$$\text{Au final, } N_A = \frac{lm_E g - (D + hm_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}.$$

**Question 10** Écrire la condition de non renversement du véhicule.

### Correction

Pour qu'il y ait non renversement,  $N_A$  doit rester positif ou nul.

On néglige  $I_{G_E}$  ( $E$ ) pour simplifier l'application numérique.

**Question 11** Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

### Correction

$$N_A \approx \frac{lm_E g - hm_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0. \text{ Ce qui est positif (pas de basculement).}$$

$$\begin{aligned} N_A \geq 0 &\Rightarrow \frac{lm_E g - (D + hm_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow lg - hR_C \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow lg - hV_L^2/R_C \geq 0 \\ &\Rightarrow lg \geq hV_L^2/R_C \Rightarrow \sqrt{\frac{R_C lg}{h}} \geq V_L \Rightarrow V_L \leq 6,38 \text{ m s}^{-1} = 22,9 \text{ km h}^{-1}. \text{ CDCF Validé.} \end{aligned}$$