

# Application 0

## Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric) – Sujet

Centrale MP 2004.

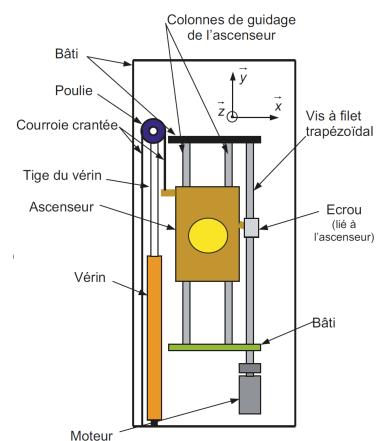
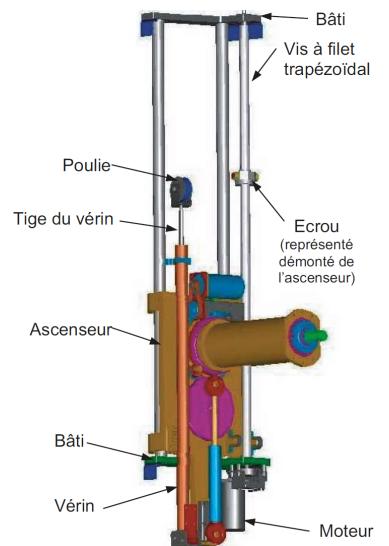
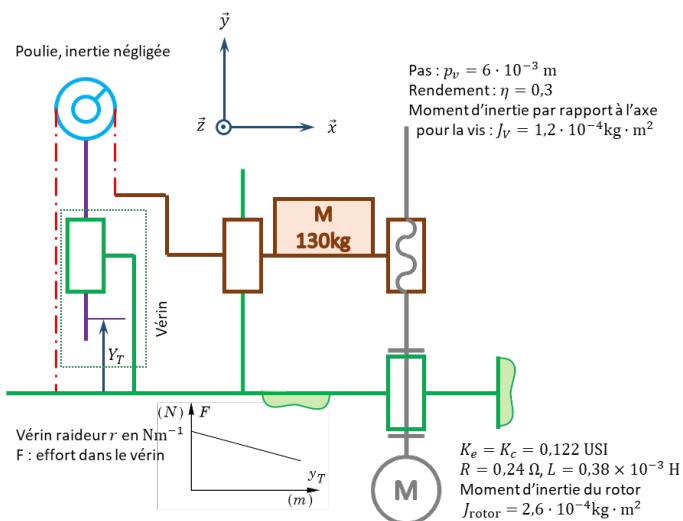
### Mise en situation

C1-05

C2-08

**Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »**

Le mammographe doit être adapté à la taille de la patiente en faisant monter ou descendre l'ascenseur. La liaison glissière de l'ascenseur par rapport à la partie fixe du mammographe est réalisée par un guidage sur deux barres parallèles fixées sur le bâti. Le déplacement de l'ascenseur est obtenu à partir d'un moteur électrique qui entraîne en rotation une vis. La rotation de la vis entraîne ensuite l'écrou sur lequel est fixé l'ascenseur. Un vérin à gaz permet d'assister le moteur lors de la montée de l'ascenseur par l'intermédiaire d'une poulie montée à l'extrémité de la tige du vérin à gaz et d'une courroie crantée. Une des extrémités de la courroie est fixée sur le bâti du mammographe et l'autre extrémité est liée à l'ascenseur.



### Détermination de la motorisation

#### Objectif

L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

### Faire monter ou descendre l'ascenseur

Critères	Niveaux
Ne pas stresser la patiente en déplaçant trop rapidement l'ascenseur : limiter la vitesse de déplacement rapide	$V_R = 0,15 \text{ m s}^{-1}$
Ne pas blesser la patiente lors de l'approche du bucky : respecter une vitesse lente $V_L$ lors de l'accostage	$V_L = 0,02 \text{ m s}^{-1}$
Respecter une course de réglage de la position de l'ascenseur	course = 0,8 m $\delta_{\text{course}} = \pm 10^{-3}$ m
Atteindre rapidement la vitesse de déplacement rapide $V_R$ : respecter la durée $t_a$ de la phase d'accélération constante	$t_a = 0,4 \text{ s (mini)}$

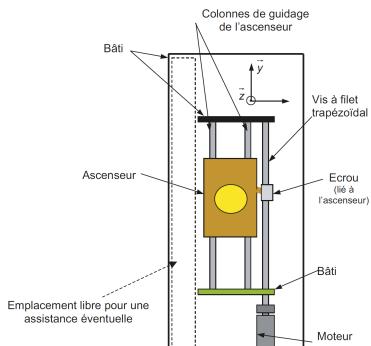
**Question 1** Déterminer la fréquence de rotation du moteur  $\omega$  en fonction de la vitesse de déplacement  $V$  de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\max}$  que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

Pour déterminer les performances minimales du moteur, on étudie la phase de montée de l'ascenseur définie par :

1. départ en position basse ( $y = 0$  à l'instant  $t = 0$ );
2. mise en mouvement ascendant de l'ascenseur à accélération constante  $a$  pour atteindre la vitesse  $V_R$  rapide en respectant les contraintes du cahier des charges;
3. arrêt de l'ascenseur à la position  $y = 0,8 \text{ m}$  (la phase de décélération est telle que la décélération est constante et sa durée égale à  $t_a$ ).

**Question 2** Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement  $y$  de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

### Solution sans assistance



On souhaite déterminer le couple moteur. Pour cela on propose d'appliquer le théorème de l'énergie-puissance au système isolé  $\Sigma$  (rotor du moteur + vis + ascenseur) en mouvement par rapport au bâti supposé galiléen.

On notera :

- $\vec{g} = -g \vec{y}$  l'accélération de la pesanteur. On prendra  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;
- $C$  le couple exercé par le stator sur le rotor du moteur.

**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ , du système isolé. Mettre  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$  sous la forme :  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$ . Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M_e$  et faire l'application numérique.

**Question 4** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Question 5** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire  $P_0$  de ce moteur.

**Question 6** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

### Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

Le dispositif d'assistance a pour rôle de diminuer le couple moteur en compensant le poids de l'ascenseur. L'emplacement disponible, pour ce dispositif, est celui occupé par le vérin à gaz, voir figures précédentes.

Dans cette solution un contrepoids est choisi pour compenser exactement le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti et d'inertie négligeable. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre au contrepoids.

**Question 7** Faire un schéma de principe de ce dispositif.

**Question 8** Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M'_e$  et faire l'application numérique.

**Question 9** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Question 10** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur.

**Question 11** En déduire la puissance nécessaire  $P$  du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

**Question 12** Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique  $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section  $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$  et de hauteur  $1,4 \text{ m}$ . Cette solution est-elle envisageable ?

### Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

**Question 13** Faire un schéma de principe du dispositif.

**Question 14** L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum  $F_{c \text{ maxi}}$  qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement  $y$  de l'ascenseur.

L'emplacement disponible ne permet pas de placer un ressort de diamètre nominal  $D$  supérieur à  $0,1 \text{ m}$ . Le ressort de traction sera réalisé dans un acier allié de résistance élastique au glissement  $R_{eg} = 560 \text{ MPa}$  et de module de Coulomb  $G = 82\,000 \text{ MPa}$ . On

prendra un coefficient de sécurité  $s = 2$ . Pour que le ressort résiste à l'effort maximal  $F_{c\max}$ , il doit avoir un diamètre  $d \geq \sqrt[3]{\frac{8F_{c\max}Ds}{\pi R_{eg}}}$ , c'est-à-dire  $d \geq 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{F_{c\max}}$ .

Pour obtenir un ressort de raideur  $r$  il faut un nombre de spires  $n = \frac{Gd^4}{8D^3r}$ , c'est-à-dire  $n \simeq 10^{13} \frac{d^4}{r}$ .

**Question 15** La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible ?

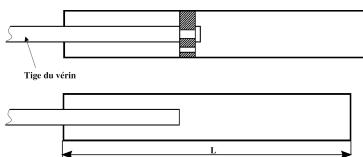
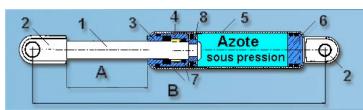
### Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

Le schéma de principe de ce dispositif a été donné précédemment. Le corps du vérin est lié au bâti. Une poulie crantée est en liaison pivot avec l'extrémité de la tige du vérin. Une courroie crantée s'enroule (un demi-tour) sur la poulie et est liée au bâti à une de ses extrémités. L'autre extrémité de la courroie est liée à l'ascenseur.

**Question 16** Déterminer la relation existant entre le déplacement  $y$  de l'ascenseur et le déplacement  $y_T$  de la tige du vérin. En déduire la course  $\Delta y_T$  nécessaire de la tige du vérin à gaz.

**Question 17** Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté  $F_c$ . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existant entre l'effort  $F$  développé par le vérin et l'effort de compensation  $F_c$ . En déduire l'effort minimum  $F_{\min}$  développé par le vérin.

Le vérin à gaz est présenté sur le dessin ci-contre.



**Question 18** Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.

**Question 19** Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre  $d = 15 \times 10^{-3}$  m. On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée  $p_2$ .

Dans la gamme de vérin à gaz on choisit le vérin de diamètre le plus grand  $D = 57 \times 10^{-3}$  m. L'espace disponible permet de placer un vérin dont la chambre a une longueur maximale  $L = 1$  m. Soient  $p_1$ ,  $F_1$ ,  $V_1$  la pression, l'effort de poussée du vérin et le volume de gaz dans le vérin pour la position ascenseur en bas et  $p_2$ ,  $F_{\min}$ ,  $V_2$  pour la position ascenseur en haut. Pour cette position, la tige du vérin est complètement sortie.

**Question 20** Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de  $F_1$ ,  $F_{\min}$  et  $\Delta y_T$ . Exprimer  $F_{\min}$  en fonction de  $p_2$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer  $F_1$  en fonction de  $p_1$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur  $r$  de ce vérin à gaz en fonction de  $F_{\min}$ ,  $d$ ,  $D$ ,  $L$  et  $\Delta y_T$ .

**Question 21** On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur  $L$  et calculer la raideur  $r$ .

On prendra  $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$  pour la suite du problème.

**Question 22** Déterminer l'effort maximal  $F_{\text{Maxi}}$  développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de  $F$ .

**Question 23** Déterminer la relation  $F = F(y_T)$ .

On considérera dans cette question que l'effort de compensation  $F_c$  est constant.

**Question 24** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $a, M_e, F_c, M\dots$

**Question 25** Exprimer ensuite  $a$  en fonction de  $C, M_e, F_c, M\dots$

**Question 26** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur (prendre  $F_c = 1300 \text{ N}$ ).

**Question 27** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

## Synthèse

**Question 28** On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges ? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante ?





# Application 1

## Mesure d'inertie – Sujet

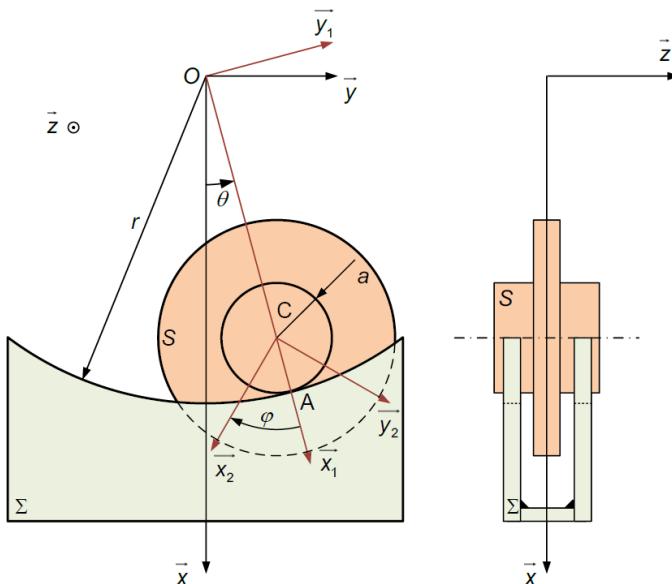
Un classique ...

### Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide  $S$  par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti  $\Sigma$ .

C1-05

C2-08



Soit  $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère galiléen lié au bâti  $\Sigma$ . On désigne par  $\vec{g} = g\vec{x}$  l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de  $\Sigma$  sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe  $(O, \vec{z})$ , de rayon  $r$ . Le solide  $S$  de masse  $m$ , de centre d'inertie  $C$ , possède deux tourillons de même rayon  $a$  ( $a < r$ ).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- ▶ le tourillon  $S$ , de centre  $C$ , roule sans glisser au point  $A$  sur la portée cylindrique de  $\Sigma$ ;
- ▶ soit  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  le repère, tel que le point  $C$  soit sur l'axe  $(O, \vec{x}_1)$ .  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ ;
- ▶ soit  $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  un repère lié à  $S$ . On pose  $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On suppose  $\varphi = 0$  lorsque  $\theta = 0$ .

Notons  $I$  le moment d'inertie de  $S$  par rapport à son axe de symétrie  $(C, \vec{z})$  et  $f$  le coefficient de frottement entre  $S$  et  $\Sigma$ .

On donne  $a = 12,3 \text{ mm}$ ;  $r = 141,1 \text{ mm}$ ;  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;  $m = 7217 \text{ g}$ ;  $f = 0,15$ .

**Question 1** Déterminer la relation entre  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\theta}$ .

**Question 2** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R$ . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur  $\theta$ .

**Question 3** En supposant que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du mouvement, déterminer la période  $T$  des oscillations de  $S$ .

**Question 4** En déduire le moment d'inertie  $I$  de  $S$ , sachant que  $T = 5$  s.

En supposant toujours que l'angle  $\theta$  reste petit, on pose  $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)}}$ .

On suppose à la date  $t = 0$ , tel que  $\theta = \theta_0$  et  $\dot{\theta} = 0$ .

**Question 5** Déterminer la valeur maximale de  $\theta_0$  pour que  $S$  roule sans glisser sur  $\Sigma$ .

# TD 0

## Robot de dépose de fibres optiques ★ – Sujet

Concours Mines Ponts – PSI 2004.

C1-05

C2-08

### Présentation

L'objet de cette étude est un robot permettant la pose d'arceaux métalliques pour l'installation de réseaux souterrains de télécommunication par fibres optiques.

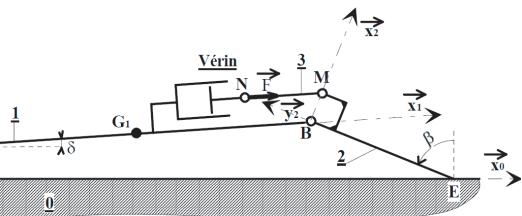
### Objectif

En fin des mouvements des bras, on doit avoir  $\delta = 14^\circ$  et  $\dot{\delta} \leq 50^\circ.s^{-1}$ .

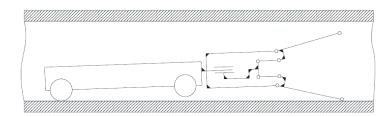


De façon à pouvoir dérouler les arceaux métalliques, le chariot est centré dans la canalisation à l'aide de quatre bras actionnés par un vérin hydraulique.

Afin de valider le choix du vérin, et donc sa puissance, il faut déterminer l'action  $F$  du vérin qui permettra au robot de se positionner correctement dans la canalisation. Sous l'effet d'un vérin, les bras inférieurs vont soulever le robot qui va pivoter sur son train arrière. La fin du positionnement sera assurée lorsque les roulettes des bras supérieurs viendront en contact avec la paroi de la canalisation. À un instant  $t$ , le système est modélisé selon le schéma ci-dessous :



**FIGURE 1 – Modélisation du robot**



### Hypothèses

L'étude dynamique est à faire dans le plan de symétrie longitudinale du robot.

Le robot est modélisé par le schéma ci-dessus. Il comprend :

- ▶ une tige 1 de longueur  $OB = L_1$ , de section négligeable, de masse  $m_1$ , et de centre d'inertie  $G_1$ , tel que  $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L_1}{2}\vec{x}_1$ ;
- ▶ une roue 4, de centre  $O$ , de rayon  $R = 0,07\text{ m}$ , de masse négligeable, qui correspond au train arrière. Cette roue est en liaison encastrement avec 1;
- ▶ un bras 2 constitué de deux éléments  $BE$  et  $BM$  tels que  $\overrightarrow{BE} = -a\vec{y}_2$  et  $\overrightarrow{BM} = b\vec{x}_2$ , de section et de masse négligeables;
- ▶ une biellette 3 ( $NM$ ) de masse négligeable et dont la direction au cours du mouvement est sensiblement celle de la tige 1;
- ▶ un vérin hydraulique de masse négligeable.

En  $I$ , le contact entre la roue 4 et la paroi 0 se fait par roulement sans glissement.

En  $E$ , le contact entre le bras 2 et la paroi 0 se fait sans frottement.

Toutes les autres liaisons sont considérées sans frottement.

L'action  $\vec{F}$  du vérin sur la biellette 3, à chaque instant, pour direction  $\vec{x}_1$  :  $\vec{F} = F\vec{x}_1$ .

## Repères et paramétrage

- ▶  $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , repère associé à la canalisation  $O$  et supposé galiléen.
- ▶  $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , repère associé à la tige 1.
- ▶  $R_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , repère associé au bras 2.
- ▶  $\delta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .
- ▶  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ .

## Cahier des charges

On désire avoir en fin de mouvement des bras, correspondant à  $\delta = 14^\circ$ , une vitesse  $\dot{\delta}$  inférieur à  $50^\circ/s$

## Modélisation dynamique

**Question 1** Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble  $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$ , puis la calculer.

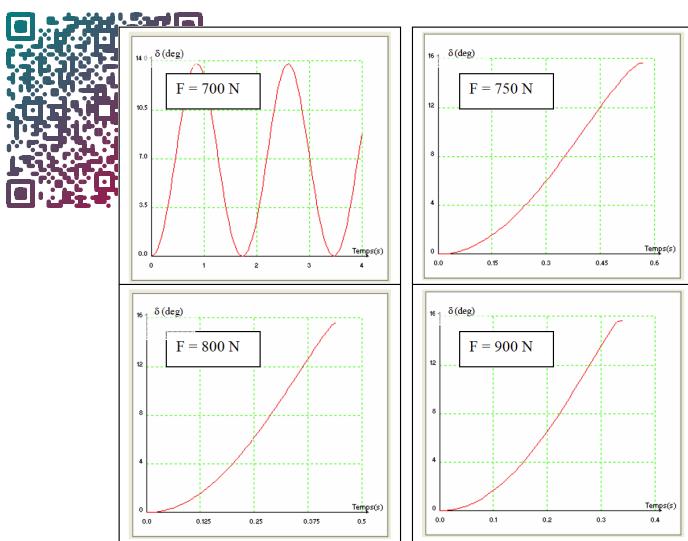
**Question 2** Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur  $\Sigma$ .

**Question 3** Donner la puissance intérieure à  $\Sigma$ .

**Question 4** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $\Sigma$  pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre  $F$ ,  $\delta$ , et  $\beta$ .

Des simulations pour différentes valeurs de  $F$  donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de  $\delta$  en fonction du temps.

**Question 5** Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses  $\dot{\delta}$  en fin de course. En déduire les valeurs de  $F$  respectant le cahier des charges.



**FIGURE 2 –** Résultats de la simulation dynamique du système

# TD 1

## RobuROC 6 : plate-forme d'exploration tout terrain ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2009.

C1-05

C2-08

### Mise en situation

Le robuROC 6 est un robot mobile développé par la société ROBOSOFT. Cette plateforme robotisée a été conçue pour des applications de recherche et d'exploration en milieu extérieur. Elle est équipée de 6 roues motrices indépendantes, de même diamètre, montées par paires sur 3 podes articulés en tangage et en roulis.



#### Hypothèse

Le mouvement de roulis n'est pas pris en compte. Il est fixé à une valeur nulle.

Les 6 roues de la plate-forme (notée *PF*) sont motorisées permettant ainsi de se déplacer sur des reliefs très accidentés. Cependant, la plate-forme ne comporte pas de systèmes spécifiques de direction. Le changement de direction est imposé par une rotation différentielle des roues du podo central **1**. Les roues avant et arrière doivent alors avoir des vitesses de rotation compatibles avec celles du podo central **1**. Lorsque le rayon de courbure de la trajectoire suivie par la plate-forme devient inférieur à 4 mètres, le groupe hydraulique est actionné pour passer en « Mode 2 roues instable ». La plate-forme ne tenant pas en équilibre sur 2 roues, elle retombe dès le début du mouvement sur les roues arrière ou les roues avant, passant donc en « Mode 4 roues Déplacement ». Cette intervention du groupe hydraulique permet ainsi de soulager le contact entre les roues des podes avant / arrière et le sol.

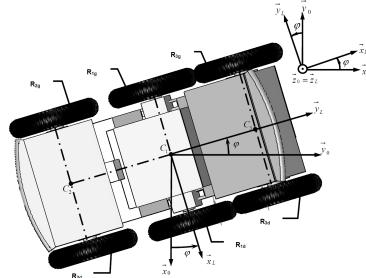
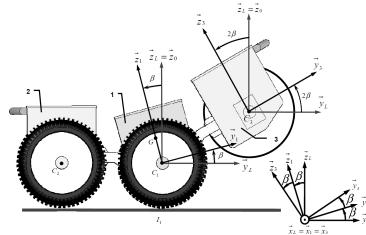
Pour cette étude, nous considérerons que la plate-forme retombe sur les roues arrière (figure suivante) et nous nous placerons dans le cas d'un rayon de courbure nul. Le mouvement de lacet étudié est donc une rotation autour de l'axe  $(C_1, \vec{z}_0)$ , d'angle  $\varphi$ , appelé angle de lacet.

Ce mouvement est défini par le torseur cinématique suivant :

$$\{\mathcal{V}(PF/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(PF/0)} = \dot{\varphi} \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{C_1}.$$

L'objectif de cette partie est de valider l'aptitude du système à respecter la loi de vitesse de la figure suivante.

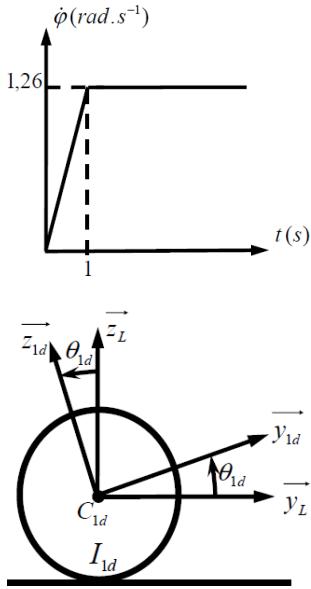
Les roues centrales et les roues arrière sont en contact avec le sol. Dans ce mode, seules les roues centrales  $R_{1d}$  et  $R_{1g}$  sont motrices. Elles roulent sans glisser sur le sol en  $I_{1d}$  et  $I_{1g}$ . Les roues du podo avant **3** et du podo arrière **2** sont bloquées .



#### Paramétrage

- ▶  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au sol **0** supposé galiléen;
- ▶  $\mathcal{R}_L = (C_1; \vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$  lié à la plate-forme **PF** tel que  $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_L) = (\vec{y}_0, \vec{y}_L)$  appelé angle de lacet;
- ▶  $\mathcal{R}_1 = (C_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au podo central **1** tel que  $\beta = (\vec{y}_L, \vec{y}_1) = (\vec{z}_L, \vec{z}_1)$ ;  $\beta$  est l'angle de tangage;  $\beta = 2^\circ$  (supposé constant pendant tout le mouvement du lacet);

- $\mathcal{R}_3 = (C_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  lié au pode avant 3 tel que  $2\beta = (\vec{y}_L, \vec{y}_3) = (\vec{z}_L, \vec{z}_3) = 4^\circ$ ;
- $\overrightarrow{C_1 C_3} = b \vec{y}_3$  et  $\overrightarrow{C_1 C_2} = -b \vec{y}_L$  avec  $b = 553 \text{ mm}$ ;
- la figure précédente permet de définir le paramétrage de chacune des roues de la plate-forme en contact avec le sol avec l'exemple de la roue centrale droite  $R_{1d}$ .



### Caractéristiques géométriques et d'inertie des solides

Le mouvement de roulis étant nul et le mouvement de tangage étant fixé à une valeur constante, il est possible de définir l'ensemble rigide  $\Sigma$  constitué des trois podes 1, 2 et 3, des deux roues avant, des deux roues arrière et des bras d'articulation 4 et 4'. Pour chaque constituant de cet ensemble, la masse est supposée répartie uniformément. Centre de gravité de  $\Sigma$  :  $G$  tel que  $\overrightarrow{C_1 G} = a_G \vec{z}_1$  et  $a_G = 85 \text{ mm}$ ,  $m_\Sigma = 152 \text{ kg}$ ,  $I_{C_1}(\Sigma) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$  avec  $A = 30,2 \text{ kg m}^2$ ,  $B = 8,2 \text{ kg m}^2$  et  $C = 32,3 \text{ kg m}^2$ .

Roue droite ou gauche + axe de roue :  $R_{i \text{ d ou g}}$  ( $i$  correspond au numéro du pode). Centre de gravité de  $R_{i \text{ d ou g}}$  :  $C_{i \text{ d ou g}}$  tel que l'entraxe  $C_{ig} C_{id} = 2e$ ,  $\overrightarrow{C_i C_{id}} = e \vec{x}_L$  et  $\overrightarrow{C_i C_{ig}} = -e \vec{x}_L$  avec  $e = 340 \text{ mm}$ ,  $m_r = 4 \text{ kg}$ , rayon d'une roue  $R = 225 \text{ mm}$ ,

$$I_{C_{i \text{ d ou g}}} (R_{i \text{ d ou g}}) = \begin{pmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & B_r & 0 \\ 0 & 0 & B_r \end{pmatrix}_{(\vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)} \quad \text{valable dans toute base orthonormée directe}$$

contenant  $\vec{x}_L$  avec  $A_r = 0,1 \text{ kg m}^2$  et  $B_r = 0,04 \text{ kg m}^2$ .

Axe des moteurs du pode central : les deux motoréducteurs centraux sont constitués chacun d'un moteur à courant continu alimenté en 48 V associé à un réducteur épicycloïdal de rapport de réduction  $k = 1/25$ . La matrice d'inertie en  $C_1$  d'un axe moteur droit  $M_{1d}$  ou  $M_{1g}$  (en rotation suivant  $(C_1, \vec{x}_L)$ ) est :  $I_{C_1}(M_{1d} \text{ ou } M_{1g}) = \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & B_m & 0 \\ 0 & 0 & B_m \end{pmatrix}_{(\vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)}$  avec  $A_m = 795 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2$  et  $B_m = 8 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ .

Les masses et inerties des autres pièces seront négligées.

### Modélisation du contact roue / sol

Les roues centrales  $R_{1d}$  et  $R_{1g}$  sont motrices, elles roulent sans glisser aux points de contact  $I_{1d}$  et  $I_{1g}$ . On pose  $\overrightarrow{C_{1d} I_{1d}} = -R \vec{z}_L$  et  $\overrightarrow{C_{1g} I_{1g}} = -R \vec{z}_L$ . Le contact avec le sol 0 est modélisé par le torseur suivant :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{1d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{1d})} = Y_{1d} \vec{y}_L + Z_{1d} \vec{z}_L \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_{1d}}$

et  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{1g})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{1g})} = Y_{1g} \vec{y}_L + Z_{1g} \vec{z}_L \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_{1g}}$ .

Les roues arrière  $R_{2d}$  et  $R_{2g}$  sont bloquées, leur vitesse de rotation par rapport au pode arrière 2 est nulle. Le contact avec le sol 0 est modélisé par le torseur suivant :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{2d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{2d})} = T_{2d} \vec{n}_g + Z_{2d} \vec{z}_L \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_{2d}}$  et  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{2g})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{2g})} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_{2g}}$

$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{2g})} = T_{2g} \vec{n}_g + Z_{2g} \vec{z}_L \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right. \right\}_{I_{2g}}$  avec  $\vec{n}_d$  et  $\vec{n}_g$  deux vecteurs unitaires opposés aux vitesses de glissement des roues  $R_{2d}$  et  $R_{2g}$  par rapport au sol 0 respectivement en  $I_{2d}$  et  $I_{2g}$ . On pose  $\overrightarrow{C_{2d} I_{2d}} = -R \vec{z}_L$  et  $\overrightarrow{C_{2g} I_{2g}} = -R \vec{z}_L$ .  $T_{2d} = f Z_{2d}$  et  $T_{2g} = f Z_{2g}$ ;  $f$  est le facteur de frottement constant au contact roue/sol  $f = 0,6$ .

### Autres liaisons

Toutes les autres liaisons de la plate-forme sont supposées parfaites (sans jeu, sans frottement).

### Motoréducteur centraux

L'action mécanique développée par le motoréducteur sur la roue centrale droite  $R_{1d}$  est notée  $\{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow R_{1d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ -C_m \vec{x}_L \end{array} \right\}_{C_1}$ .

L'action mécanique développée par le motoréducteur sur la roue centrale droite  $R_{1g}$  est notée  $\{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow R_{1g})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_m \vec{x}_L \end{array} \right\}_{C_1}$ .

**Question 1** Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble  $\Sigma$  au point  $C_1$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

Dans un premier temps, l'objectif est de déterminer la somme des efforts normaux  $Z_{2d} + Z_{2g}$  s'exerçant sur les roues arrières. Isolons l'ensemble de la plate-forme PF, soit l'ensemble  $\Sigma$ , les roues centrales et les motoréducteurs. Plaçons-nous dans le plan médian  $(C_1, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$  de la plate-forme PF. Nous définissons le projeté  $I_1$  des points de contact  $I_{1d}$  et  $I_{1g}$  dans ce plan.  $I_1$  est défini par le vecteur :  $\overrightarrow{C_1 I_1} = -R \vec{z}_L$ . D'autre part, nous avons  $\overrightarrow{C_2 I_1} = b \vec{y}_L - R \vec{z}_L$  et  $\overrightarrow{C_3 I_1} = -b \vec{y}_3 - R \vec{z}_L$ . Nous ferons l'hypothèse que le moment dynamique  $\delta(I_1, PF/0) \cdot \vec{x}_L$  est négligeable devant les actions mécaniques.

**Question 2** En appliquant le théorème du moment dynamique à la plate-forme PF en mouvement par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$  en  $I_1$  en projection sur  $\vec{x}_L$ , déterminer l'expression littérale de la somme des efforts normaux de contact  $Z_{2d} + Z_{2g}$ , entre les roues arrière et le sol. Réaliser l'application numérique et comparer la valeur obtenue à la somme des efforts normaux s'exerçant sur les roues arrière lorsque la plate-forme est immobile en appui sur ses six roues sur un sol plan, à savoir  $(Z_{2d} + Z_{2g})_{\text{Repos}} = (m_2 + 2m_r) g$  avec  $m_2 = 52 \text{ kg}$  la masse du pod arrière 2.

L'objectif est dans un second temps de valider l'aptitude des moteurs à suivre la loi de vitesse en lacet exigée. Il est proposé de déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  par une approche énergétique.

**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides en mouvement. Le résultat sera mis sous la forme  $\frac{1}{2} J \dot{\phi}^2$  où  $J$  est à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème.

**Question 4** Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique afin de déterminer l'expression du couple moteur. Vous donnerez le résultat sous la forme  $C_m = k_2 (J\ddot{\varphi} + k_1 (T_{2d} + T_{2g}))$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème. Vous veillerez à bien faire apparaître les différentes étapes de votre raisonnement et à fournir des expressions littérales.



Pour la question suivante, vous prendrez  $J = 34 \text{ kg m}^2$ ,  $k_1 = 0,65 \text{ m}$  et  $k_2 = 1,3 \times 10^{-2}$  sans unité.

**Question 5** Calculer le couple moteur maximal :  $C_m \text{ maxi}$ . À partir du graphe de fonctionnement du moteur, conclure quand à l'aptitude de la motorisation à générer le mouvement de lacet désiré.

