

## Mouvement RT – RSG ★★

C1-05

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les lois de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

Le système possède deux mobilités :

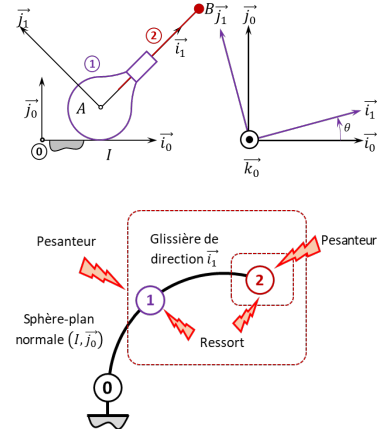
- translation de 1 par rapport à 2 ( $\lambda$ );
- rotation de l'ensemble  $\{1+2\}$  autour du point  $I$  (le roulement sans glissement permet d'écrire une relation entre la rotation de paramètre  $\theta$  et le déplacement suivant  $\vec{i}_0$ ).

On en déduit la stratégie suivante :

- Première loi de mouvement :
  - on isole 2,
  - BAME :
    - \*  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}$ ,
    - \*  $\{\mathcal{T}(1_{\text{ressort}} \rightarrow 2)\}$  ( $\overrightarrow{R}(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{i}_1 = 0$  et  $\overrightarrow{R}(1_{\text{ressort}} \rightarrow 2) \cdot \vec{i}_1 = 0$ )
    - \*  $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\}$ ;
  - on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection suivant  $\vec{i}_1$ .
- Seconde loi de mouvement :
  - on isole  $\{1+2\}$ ;
  - BAME :
    - \*  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$  ( $\overrightarrow{\mathcal{M}}(I, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{k}_0 = 0$ ),
    - \*  $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 1)\}$ ,
    - \*  $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\}$ .
  - on réalise un théorème du moment dynamique en  $I$  en projection suivant  $\vec{k}_0$ .

**Question 3** Déterminer les lois de mouvement.

03 DYN



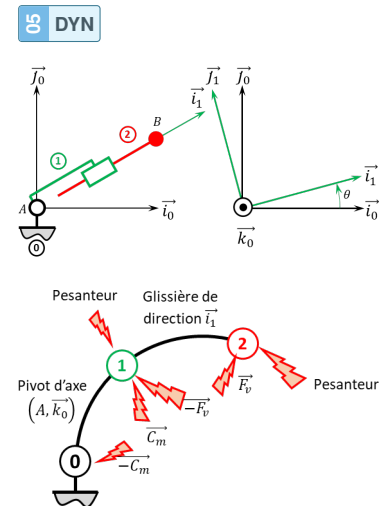


## Mouvement RT ★

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

- On isole {1}. On réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{i}_1$  :  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{i}_1 + \overrightarrow{R(F_v \rightarrow 2)} \cdot \vec{i}_1 + \overrightarrow{R(Pes \rightarrow 2)} \cdot \vec{i}_1 = \overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{i}_1$ .
- On isole {1+2}. On réalise un théorème du moment dynamique en A en projection sur  $\vec{k}_0$  :  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \cdot \vec{k}_0 + \overrightarrow{\mathcal{M}(A, Mot \rightarrow 1)} \cdot \vec{k}_0 + \overrightarrow{\mathcal{M}(A, Pes \rightarrow 2)} \cdot \vec{k}_0 + \overrightarrow{\mathcal{M}(A, Pes \rightarrow 1)} \cdot \vec{k}_0 = \overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \cdot \vec{k}_0 + \overrightarrow{\delta(A, 1/0)} \cdot \vec{k}_0$ .





# Colle 0

## Mesure de moment d'inertie – Corrigé

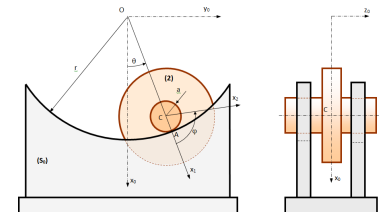
Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09

La figure ci-dessous représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie  $I$  d'un solide de révolution (2) par rapport à son axe. Soit  $R_0$  un repère galiléen lié au bâti ( $S_0$ ) tel que l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  soit vertical descendant. Les deux portées sur lesquelles roule le solide (2) sont des portions de la surface d'un cylindre de révolution d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et de rayon  $r$ . Le solide (2), de masse  $m$ , de centre d'inertie  $C$ , possède deux tourillons de même rayon  $a$ . Soit  $f$  le coefficient de frottement entre (2) et ( $S_0$ ).

L'étude se ramène à celle d'un problème plan paramétré de la façon suivante :



- ▶ le tourillon de (2), de centre  $C$ , roule sans glisser en  $A$  sur la portée cylindrique de ( $S_0$ );
- ▶  $R_1$  est un repère tel que  $\vec{OA} = r\vec{x}_1$  et on pose  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ;
- ▶  $R_2$  est un repère lié à 2 avec  $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On suppose que  $\varphi = 0$  lorsque  $\theta = 0$ .

**Question 1** Donner la relation entre  $\varphi$  et  $\theta$ .

**Question 2** Déterminer l'équation du mouvement de (2) par rapport à ( $S_0$ ) en fonction de  $\theta$ .

**Question 3** On suppose que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du mouvement. Montrer que le mouvement est périodique et déterminer la période  $T$  des oscillations de (2).

**Question 4** En déduire le moment d'inertie  $I$  de (S) sachant que :  $T = 5 \text{ s}$ ;  $a = 12,5 \text{ mm}$ ;  $r = 141,1 \text{ mm}$ ;  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;  $m = 7217 \text{ g}$ ;  $f = 0,15$ .

**Question 5** Déterminer l'angle  $\theta_0$  maxi pour qu'il n'y ait pas glissement en  $A$ . Faire l'application numérique.

Dispositif de mesure de moment d'inertie.

1/2

$$1. \text{ RSG en } A \quad \vec{V}(A \in S/R_0) = \vec{0} = \vec{V}(C \in S/R_0) + \vec{AC} \wedge \vec{\omega}(S/R_0)$$

$$\Leftrightarrow (r-a) \dot{\theta} \vec{y}_1 - a \vec{x}_1 \wedge (\dot{\varphi} + \theta) \vec{z}_0$$

$$\Leftrightarrow r \dot{\theta} + a \dot{\varphi} = 0 \quad \text{en intégrant avec } c_1 = 0 : \underline{r\theta + a\varphi = 0}$$

2. Isolons  $\{S\}$ 

$$\mathcal{C}_{(\text{pesanteur} \rightarrow S)} = \begin{Bmatrix} m g \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(S_0 \rightarrow S) = \begin{Bmatrix} N \vec{x}_1 + T \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Appliquons le th de l'énergie cinétique  $P(\text{ext} \rightarrow S/S_0) = \frac{dE_c(S/S_0)}{dt}$

$$\begin{aligned} E_c(S/S_0) &= \frac{1}{2} m [(r-a) \dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2} I (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2} m (r-a)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{a-r}{a}\right)^2 \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{(r-a)^2}{2} \left(m + \frac{I}{a^2}\right) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dE_c(S/S_0)}{dt} = (r-a)^2 \left(m + \frac{I}{a^2}\right) \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$\begin{aligned} P(\text{ext} \rightarrow S/S_0) &= \mathcal{C}_{(\text{pesanteur} \rightarrow S)} \otimes \mathcal{V}(S/R_0) + \mathcal{C}(S_0 \rightarrow S) \otimes \mathcal{V}(S/R_0) \\ &= \begin{Bmatrix} m g \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C \otimes \begin{Bmatrix} (\theta + \dot{\varphi}) \vec{z}_0 \\ (r-a) \dot{\theta} \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_C + \begin{Bmatrix} N \vec{x}_1 + T \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} (\theta + \dot{\varphi}) \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \\ &= -m g (r-a) \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad (r-a) \left(m + \frac{I}{a^2}\right) \dot{\theta} = -m g \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \underline{(r-a) \left(m a^2 + I\right) \dot{\theta} + m g a^2 \sin \theta = 0} \quad (1)$$

Autre solution : PFD appliqué à  $\{S\}$  en A :

$$\begin{Bmatrix} m \vec{\Gamma}(C \in S/R_0) \\ \vec{\delta}_A(S/R_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m g \vec{x}_0 + N \vec{x}_1 + T \vec{y}_1 \\ m g a \sin \theta \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec } \vec{\delta}_A(S/R_0) &= \vec{\delta}_C(S/R_0) + \vec{AC} \wedge m \vec{\Gamma}(C \in S/R_0) \\
 &= \frac{d}{dt} \left[ \underbrace{\int_C(S) \vec{r}_2(S/R_0)}_{I(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{z}_0} \right] - m a \vec{x}_1 \wedge [(r-a)\theta \vec{y}_1 - (r-a)\dot{\theta} \vec{x}_1] \\
 &= [I(1 - \frac{a}{r}) \ddot{\theta} - m a (r-a) \dot{\theta}] \vec{z}_0
 \end{aligned}$$

2/2

$$\text{TTD en A / } \vec{z}_0 \quad (r-a) [I + m a^2] \ddot{\theta} + m g a \sin \theta = 0 \quad (1)$$

3 -  $\theta$  petit  $\Rightarrow \sin \theta \approx \theta$  d'où l'éq diff du 2<sup>nd</sup> ordre :

$$\ddot{\theta} + \frac{m g a^2}{(r-a)(I + m a^2)} \theta = 0$$

Le coef de  $\theta$  étant positif, on a un phénomène périodique de période  $T = 2\pi \sqrt{\frac{(r-a)(I + m a^2)}{m g a^2}}$

$$4 - T^2 = 4\pi^2 \frac{(r-a)(I + m a^2)}{m g a^2} \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{T^2 \cdot m g a^2}{4\pi^2 (r-a)} - m a^2$$

$$\text{A.N. } I = \frac{25,7277 \cdot 9,81 \cdot 12,5^2 \cdot 10^{-6}}{4\pi^2 (141,1 - 12,5) \cdot 10^{-3}} - 7,277 \cdot 12,5^2 \cdot 10^{-6} = 53,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$5 - \text{Th de la résultante dynamique appliquée à } \{S\}: m[(r-a)\ddot{\theta} \vec{y}_1 - (r-a)\dot{\theta}^2 \vec{x}_1] = m g \vec{x}_0 + N \vec{x}_1 + T \vec{y}_1$$

$$/ \vec{x}_1 \quad -m(r-a)\dot{\theta}^2 = m g \cos \theta + N \quad \Leftrightarrow \quad N = -m(r-a)\dot{\theta}^2 - m g \cos \theta$$

$$/ \vec{y}_1 \quad m(r-a)\ddot{\theta} = T - m g \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad T = m(r-a)\ddot{\theta} + m g \sin \theta$$

$$\text{pas de glissement} \Rightarrow \|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\| \quad \Leftrightarrow \quad |m(r-a)\ddot{\theta} + m g \sin \theta| < f(m(r-a)\dot{\theta}^2 + m g \cos \theta)$$

$$\text{de (1)} \quad \ddot{\theta} = \frac{m g a^2}{(r-a)(I + m a^2)} \cdot \sin \theta \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_0 = 0 \quad \text{car il y a risque de glissement quand } \theta \text{ est max, (ici } \theta_0)$$

$$\text{d'où : } m(r-a) \frac{m g a^2}{(r-a)(I + m a^2)} \sin \theta_0 + m g \sin \theta_0 < f m g \cos \theta_0$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta_0 < f \cdot \left(1 + \frac{m a^2}{I}\right)$$

$$\text{A.N. } \theta_0 < 8,7^\circ$$





# TD 0

## Stabilisateur passif d'image – Corrigé

04 DYN

Mines Ponts 2018 – PSI.

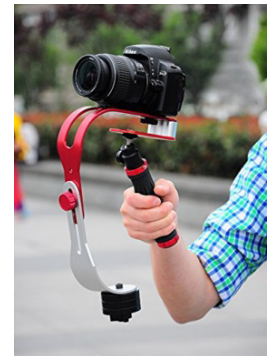
### Mise en situation

#### Objectif

Suite à une sollicitation brève de  $0,5 \text{ m s}^{-2}$ , l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les  $0,5^\circ$ .

### Travail demandé

**Question 1** Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans (0) galiléen s'exprime comme  $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$ .



#### Correction

(1) et (E) sont en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{Y}_0)$ . On va donc réaliser un théorème du moment dynamique appliqué à (E) en O en projection sur  $\vec{Y}_0$ .

**Calcul de  $\delta(O, E/0)$**

**Méthode 1 – En passant par le calcul de  $\delta(O, 2/0)$ ,  $\delta(O, C/0)$  et  $\delta(O, Cp/0)$**

Le support 2 étant sans masse, on a  $\delta(O, 2/0) = \vec{0}$ . La caméra et le contrepooids étant considérés comme des masses ponctuelles, on a  $\delta(G_C, C/0) = \vec{0}$  et  $\delta(G_{Cp}, Cp/0) = \vec{0}$ .

**Calcul de  $\delta(O, C/0)$**

On a  $\delta(O, C/0) = \delta(G_C, C/0) + \overrightarrow{OG_C} \wedge M_C \overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)}$ .

**Calcul de  $\overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)}$**

$\overrightarrow{V(G_C, C/0)} = \overrightarrow{V(G_C, C/1)} + \overrightarrow{V(G_C, 1/0)} = \overrightarrow{G_C \vec{O}} \wedge \overrightarrow{\Omega(C/0)} + v(t)\vec{X}_0 = -L_C \vec{Z}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + v(t)\vec{X}_0 = L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 + v(t)\vec{X}_0$ .

De plus  $\overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \ddot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t)\vec{X}_0$ .

Au final,  $\delta(O, C/0) = \overrightarrow{OG_C} \wedge M_C \overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \vec{Z}_2 \wedge M_C (L_C \ddot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t)\vec{X}_0)$

$\delta(O, C/0) = L_C M_C (L_C \ddot{\varphi} \vec{Y}_2 + a(t) \cos \varphi \vec{Y}_0)$ .

**Calcul de  $\delta(O, Cp/0)$**

On a  $\delta(O, Cp/0) = \delta(G_{Cp}, Cp/0) + \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)}$ .

**Calcul de  $\overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)}$**

De même,  $\overrightarrow{V(G_{Cp}, Cp/0)} = \overrightarrow{V(G_{Cp}, Cp/1)} + \overrightarrow{V(G_{Cp}, 1/0)} = \overrightarrow{G_{Cp} \vec{O}} \wedge \overrightarrow{\Omega(Cp/0)} + v(t)\vec{X}_0 = L_{Cp} \vec{Z}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + v(t)\vec{X}_0 = -L_{Cp} \dot{\varphi} \vec{X}_2 + v(t)\vec{X}_0$ .

De plus  $\overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)} = -L_{Cp} \ddot{\varphi} \vec{X}_2 + L_{Cp} \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t)\vec{X}_0$ .

Au final,  $\delta(O, Cp/0) = \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)} = -L_{Cp} \vec{Z}_2 \wedge M_{Cp} (-L_{Cp} \ddot{\varphi} \vec{X}_2 + L_{Cp} \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t)\vec{X}_0)$

$\delta(O, C/0) = -L_{Cp} M_{Cp} (-L_{Cp} \ddot{\varphi} \vec{Y}_2 + a(t) \cos \varphi \vec{Y}_0)$

On a donc  $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \vec{Y}_0 = M_{Cp} L_{Cp}^2 \ddot{\varphi} - M_{Cp} L_{Cp} a(t) \cos \varphi + M_C L_C^2 \ddot{\varphi} + M_C L_C a(t) \cos \varphi$

**Méthode 2 – En passant par le calcul de  $I_O(E)$**

On a  $I_O(C) = M_C \begin{pmatrix} L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$  et  $I_O(Cp) = M_{Cp} \begin{pmatrix} L_{Cp}^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_{Cp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$  et donc

$$I_O(E) = \begin{pmatrix} M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

O est un point quelconque ; donc  $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \vec{Y}_0 =$

$$\overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \left[ \frac{d\sigma(O, E/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \vec{R}_c(E/R_0) \text{ et } \overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)} = I_O(E) \cdot$$

$$\overrightarrow{\Omega(E/R_0)} + M \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V(O, E/R_0)}.$$

$$\text{De plus, } \overrightarrow{OG} = \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \vec{Z}_2, \overrightarrow{V(O, E/R_0)} = v(t) \vec{X}_0 \text{ et } \overrightarrow{V(G, E/R_0)} = v(t) \vec{X}_0 + \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} \vec{X}_2.$$

$$\text{On a donc, } \overrightarrow{\sigma(O, S/R_0)} = \dot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \vec{Y}_2 + (M_C + M_{Cp}) \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \vec{Z}_2 \wedge v(t) \vec{X}_0 = \dot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \vec{Y}_2 + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) v(t) \cos \varphi \vec{Y}_0.$$

$$\left[ \frac{d\sigma(O, E/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \ddot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \vec{Y}_2 + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) (a(t) \cos \varphi - v(t) \dot{\varphi} \sin \varphi) \vec{Y}_0.$$

$$\overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \vec{R}_c(E/R_0) = v(t) \vec{X}_0 \wedge (M_C + M_{Cp}) \left( v(t) \vec{X}_0 + \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} \vec{X}_2 \right) = (M_C + M_{Cp}) \left( \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} v(t) \sin \varphi \right) \vec{Y}_2 = (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) \dot{\varphi} v(t) \sin \varphi \vec{Y}_2.$$

$$\text{Au final, } \overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \ddot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \vec{Y}_2 + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos \varphi \vec{Y}_0$$

**Bilan des actions mécaniques en O agissant sur E**

- Liaison pivot  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\}$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow E)} \cdot \vec{Y}_2 = 0$ .
- $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C)\}$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \rightarrow C)} \cdot \vec{Y}_2 = (\overrightarrow{OG} \wedge -M_C g \vec{Z}_0) \vec{Y}_2 = (L_C \vec{Z}_2 \wedge -M_C g \vec{Z}_0) \vec{Y}_2 = L_C M_C g \sin \varphi \vec{Y}_2$ .
- $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow Cp)\}$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \rightarrow Cp)} \cdot \vec{Y}_2 = (-L_{Cp} \vec{Z}_2 \wedge -M_{Cp} g \vec{Z}_0) \vec{Y}_2 = -L_{Cp} M_{Cp} g \sin \varphi \vec{Y}_2$ .

**Théorème du moment dynamique en O en projection sur  $\vec{Y}_2$**

$$\ddot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos \varphi = L_C M_C g \sin \varphi - L_{Cp} M_{Cp} g \sin \varphi.$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) + (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \sin \varphi = - (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos \varphi.$$

$$\text{On a donc : } Q_1 = M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2, Q_2(t) = (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \sin \varphi, Q_3(t) = (M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C) \cos \varphi.$$

**Question 2** Établir sous forme canonique la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$ . Donner

l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  en fonction de  $m_c, m_{cp}, L_c, L_{cp}$  et  $g$ .

#### Correction

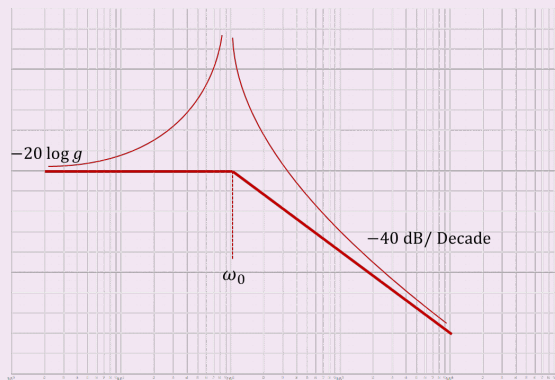
Dans les conditions précédentes, on a  $Q_1 = M_{cp}L_{cp}^2 + M_cL_c^2$ ,  $Q_2(t) = (L_{cp}M_{cp} - L_cM_c)g\varphi$  et  $Q_3(t) = (M_{cp}L_{cp} - M_cL_c)$ .

L'équation de comportement devient donc  $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + (L_{cp}M_{cp} - L_cM_c)g\varphi = Q_3a(t)$   
 $\Rightarrow \frac{Q_1 p^2 \Phi(p) + (L_{cp}M_{cp} - L_cM_c)g\Phi(p)}{Q_3} = A(p)$  et  $H(p) = \frac{Q_3 A(p)}{Q_1 p^2 + (L_{cp}M_{cp} - L_cM_c)g}$ .

On a donc  $\omega_0^2 = \frac{(L_{cp}M_{cp} - L_cM_c)g}{Q_1} = \frac{(L_{cp}M_{cp} - L_cM_c)g}{M_{cp}L_{cp}^2 + M_cL_c^2}$ . Le gain  $K$  vaut  $\frac{M_{cp}L_{cp} - M_cL_c}{(L_{cp}M_{cp} - L_cM_c)g} = \frac{1}{g}$ .

**Question 3** Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain  $G_{dB} = f(\omega)$  de la fonction de transfert  $H(j\omega)$ . Placer les caractéristiques remarquables.

#### Correction



**Question 4** Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que  $\omega_0 = 0,1\omega_a$ . Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple  $(m_{cp}, L_{cp})$ . En utilisant le comportement asymptotique en gain de  $G_{dB}$ , estimer numériquement l'amplitude  $\Delta\varphi$  (en degrés) des oscillations de **(E)** selon l'axe  $(O, \vec{y}_0)$ .

#### Correction

On a  $\omega_a = 10\omega_0$ . Une décade après  $\omega_0$ ,  $G_{dB} = -20 \log 10 - 40 = -60$  dB. Une atténuation de -60 dB correspond à un gain de  $10^{-60/20} = 0,001$ . L'amplitude des oscillations sera donc de  $0,001a_0 = 5 \times 10^{-4}$  rad soit  $0,03^\circ$ .

### Retour sur le cahier des charges

**Question 5** Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

**Correction**

On a  $0,03^\circ < 0,5^\circ$ . Le cahier des charges est vérifié au voisinage de  $10\omega_0$ .

# TD 1

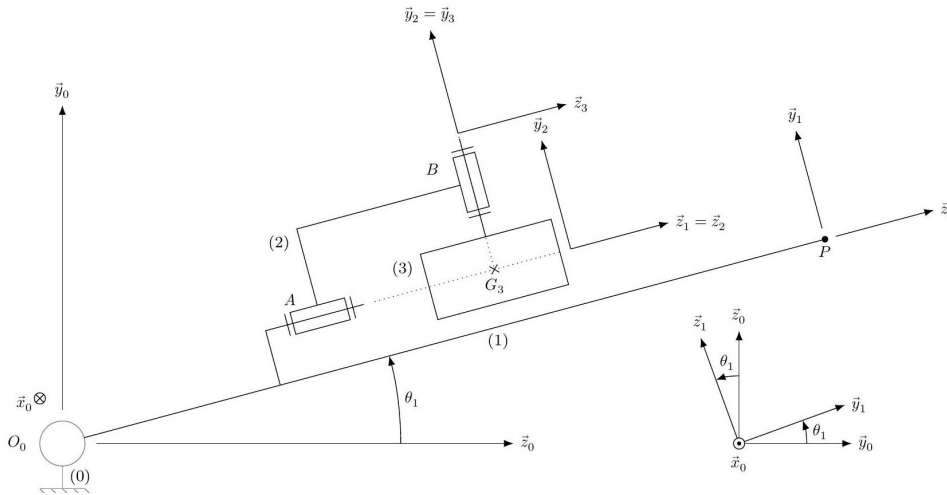
## Gyrolock ★ – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2022.  
Corrigé proposé par l'UPSTI.

### Comportement dynamique du stabilisateur

C1-05

C2-09



**FIGURE 1** – Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ )

Dans la modélisation retenue (figure 1), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel  $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère  $\mathcal{R}_1 (O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  avec  $\theta_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ . Le point  $P$  tel que  $O_0P = L$  représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

### Paramétrage, notations et hypothèses

- La liaison pivot d'axe  $(O_0, \vec{x}_0)$  entre les solides (0) et (1) possède une raideur  $k$  et un coefficient de frottement visqueux  $f$ , d'où  $\vec{M}(O_0, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1)$ ;
- les autres liaisons sont supposées parfaites;
- l'action du cœur sur le stabilisateur (1) est modélisée par  $\{\mathcal{T}_{c \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} f_c \vec{y}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_P$ ;
- seul le déplacement vertical du point  $P$  est pris en compte. On note  $y(t) = -\vec{O_0P} \cdot \vec{y}_0$ ;
- le stabilisateur (1) est de masse  $m_1$  et possède un centre d'inertie  $G_1$  tel que  $\vec{O_0G_1} = L_{G_1} \vec{z}_1$  et l'opérateur d'inertie est  $\mathcal{J}(G_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ ;
- la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables;
- la toupie (3) est de masse  $m_3$  et possède un centre d'inertie  $G_3$  tel que  $\vec{O_0G_3} = L_{G_3} \vec{z}_1 + H_{G_3} \vec{y}_1$ ;
- les figures de changement de base sont données figures 6 et 9;
- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques.

**Question 1** Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en  $\theta_1(t)$ ). L'ensemble isolé,

l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

**Question 2** Exprimer  $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0$ , la projection sur  $\vec{x}_0$  du moment dynamique au point  $O_0$  du solide (1) en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ .

#### Correction

Par formule de Varignon :

$$\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \vec{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 + \left( \overrightarrow{O_0 G_1} \wedge m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) \right) \cdot \vec{x}_0$$

$$\text{avec } \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{O_0 G_1}}{dt^2} \right|_0 = -L_{G_1} \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - L_{G_1} \dot{\theta}_1^2 \vec{z}_1 \text{ donc } \left( \overrightarrow{O_0 G_1} \wedge m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) \right) \cdot \vec{x}_0 = m_1 L_{G_1}^2 \ddot{\theta}_1.$$

$$\text{De plus au centre d'inertie } G_1 : \vec{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \left. \frac{d \vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0}{dt} \right|_0 \text{ avec}$$

$$\vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \mathcal{J}(G_1, 1) \vec{\Omega}(1/0) \cdot \vec{x}_0.$$

$$\text{Donc } \vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = A_1 \dot{\theta}_1 \text{ et } \vec{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = A_1 \ddot{\theta}_1.$$

$$\text{Finalement } \boxed{\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = (A_1 + m_1 L_{G_1}^2) \ddot{\theta}_1}.$$

**Question 3** Exprimer littéralement la vitesse  $\vec{V}(G_3, 3/0)$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ , puis l'accélération  $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0)$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ .

#### Correction

Le point  $G_3$  étant **physiquement rattaché à (3)** on peut écrire

$$\boxed{\vec{V}(G_3, 3/0) = \left. \frac{d \overrightarrow{O_0 G_3}}{dt} \right|_0 = -L_{G_3} \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + H_{G_3} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1}.$$

$$\text{Ensuite } \boxed{\vec{\Gamma}(G_3, 3/0) = \left. \frac{d \vec{V}(G_3, 3/0)}{dt} \right|_0 = -\left( L_{G_3} \ddot{\theta}_1 + H_{G_3} \dot{\theta}_1^2 \right) \vec{y}_1 + \left( H_{G_3} \ddot{\theta}_1 - L_{G_3} \dot{\theta}_1^2 \right) \vec{z}_1}.$$

1:  $\ddot{\theta}_2 \approx 0$ ,  $\theta_2 \approx 0$  et  $\dot{\theta}_3 = \omega_3$  constante.

**Question 4** En conservant les conditions de fonctionnement ci-contre <sup>1</sup>, il est possible de montrer que  $\vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$  avec  $c_x(t) = B_3 \omega_3 \dot{\theta}_2$  (résultat admis sans démonstration). En déduire  $\vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0$ , en fonction de  $A_3$ ,  $c_x(t)$ ,  $m_3$ ,  $L_{G_3}$ ,  $H_{G_3}$  et  $\ddot{\theta}_1(t)$ .

#### Correction

Par formule de Varignon :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0 &= \vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 + \left( \overrightarrow{O_0 G_3} \wedge m_3 \vec{\Gamma}(G_3, 3/0) \right) \cdot \vec{x}_0 \\ &= A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t) + m_3 L_{G_3} \left( L_{G_3} \ddot{\theta}_1 + H_{G_3} \dot{\theta}_1^2 \right) + m_3 H_{G_3} \left( H_{G_3} \ddot{\theta}_1 - L_{G_3} \dot{\theta}_1^2 \right) \\ &= \left( A_3 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2 \right) \ddot{\theta}_1 - c_x(t) \end{aligned}$$

**Question 5** Exprimer  $J_x$  en fonction de  $A_1$ ,  $A_3$ ,  $m_1$ ,  $m_3$ ,  $L_{G_1}$ ,  $L_{G_3}$  et  $H_{G_3}$  permettant

d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x \ddot{\theta}_1(t) + f \dot{\theta}_1(t) + k \theta_1(t) = c_x(t) - L f_c(t)$$

#### Correction

En appliquant la stratégie vue en question 14 on a l'équation (effets dynamiques de (2) négligés et actions de la pesanteur négligées) :

$$\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0 + \vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1) + (\overrightarrow{O_0P} \wedge f_c \vec{y}_1) \cdot \vec{x}_0$$

Tout calcul fait avec  $\overrightarrow{O_0P} = L \vec{z}_1$  :

$$\left( A_1 + A_3 + m_1 L_{G_1}^2 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2 \right) \ddot{\theta}_1 + f \dot{\theta}_1 + k \theta_1 = c_x(t) - L f_c(t)$$

On identifie  $J_x = A_1 + A_3 + m_1 L_{G_1}^2 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2$ .

En supposant que  $\theta_1$  reste proche de 0, la relation  $y(t) = L\theta_1(t)$  sera utilisée.

Les transformées de Laplace de  $y(t)$ ,  $c_x(t)$  et  $f_c(t)$  sont notées  $Y(p)$ ,  $C_x(p)$  et  $F_c(p)$ .

**Question 6** En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert  $H_{\text{pert}}(p)$  et  $H_1(p)$  du schéma-blocs figure 2 en fonction de  $L$ ,  $J_x$ ,  $f$  et  $k$ .

#### Correction

Le schéma-bloc donne  $\frac{Y(p)}{H_1(p)} = C_x(p) - H_{\text{pert}}(p)F_c(p)$ . L'équation différentielle précédente rapportée dans le domaine de Laplace (**conditions initiales nulles**) s'écrit (avec  $Y(p) = L\theta_1(p)$ ) :

$$\left( J_x p^2 + f p + k \right) \frac{Y(p)}{L} = C_x(p) - L F_c(p)$$

On identifie  $H_1(p) = \frac{L}{J_x p^2 + f p + k}$  et  $H_{\text{pert}}(p) = L$ .

On rappelle que  $L = 0,3$  m et les valeurs retenues pour  $J_x$ ,  $f$  et  $k$  sont :

- ▶  $J_x = 1,14 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;
- ▶  $-f = 64 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$ ;
- ▶  $-k = 95 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ .

**Question 7** Écrire  $H_1(p)$  sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique  $K_1$ , amortissement  $\xi_1$  et pulsation propre  $\omega_1$ . Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).

#### Correction

On a  $H_1(p) = \frac{L}{1 + \frac{f}{k}p + \frac{J_x}{k}p^2}$ , on identifie alors :

- le gain statique  $K_1 = \frac{L}{k} = \frac{0,3}{95} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/N}$ ;
- la pulsation propre  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{J_x}} = \sqrt{\frac{95}{1,14 \cdot 10^{-2}}} = 91,3 \text{ rad/s}$ ;

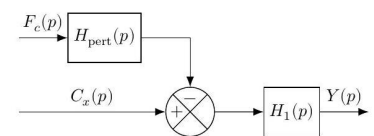


FIGURE 2 – Schéma bloc du stabilisateur (1)

- l'amortissement  $\xi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{\sqrt{kJ_x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{64 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{95 \times 1,14 \cdot 10^{-2}}} = 0,03$ .

On choisit de décrire le comportement dans le domaine fréquentiel. On a un système d'ordre 2 avec résonance (car  $\xi_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ) à la pulsation  $\omega_r = \omega_1 \sqrt{1 - 2\xi_1^2}$ . Le diagramme de Bode associé est le suivant :



# TD 2

## Exosquelette Atalante ★ – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2023.

### Comportement dynamique de l'exosquelette

**Question 1** Déterminer l'expression de l'accélération du point  $G_3$  appartenant à l'ensemble {pied+tibia} 3 dans son mouvement par rapport au buste 1, en fonction de  $L_0, L_2, \theta_1, \theta_2$  et leurs dérivées temporelles.

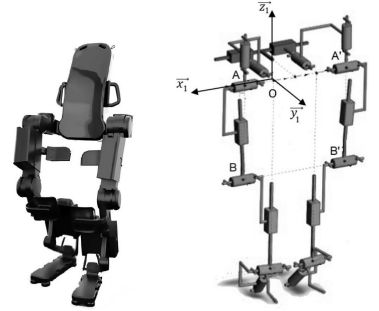


FIGURE 3 – Exosquelette Atalante et modélisation 3D associée

#### Correction

$$\begin{aligned} \text{On cherche } \overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/1)} &= \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{V(G_3, 3/1)} \right]_{\mathcal{R}_1} \\ \overrightarrow{V(G_3, 3/1)} &= \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG_3} \right]_{\mathcal{R}_1} = \frac{d}{dt} \left[ -L_2 \vec{z}_2 - L_0 \vec{z}_3' \right]_{\mathcal{R}_1} \\ &= L_2 \dot{\theta}_1 \vec{y}_2 + L_0 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_3' \\ \text{Par suite, } \overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/1)} &= L_2 \ddot{\theta}_1 \vec{y}_2 + L_2 \dot{\theta}_1^2 \vec{z}_2 + L_0 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_3' + L_0 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{z}_3' \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \frac{d}{dt} [\vec{z}_3']_{\mathcal{R}_1} &= \overrightarrow{\Omega(3/1)} \wedge \vec{z}_3' \\ &= (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_3' \\ &= -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_3' \end{aligned} \right.$$

**Question 2** Déterminer l'expression de la projection suivant  $\vec{x}_1$  du moment dynamique en A de l'ensemble { pied+tibia } 3 dans son mouvement par rapport au buste 1,  $\vec{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{x}_1$ , sous la forme :  $\vec{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{x}_1 = A_1 \ddot{\theta}_1 + A_2 \ddot{\theta}_2 + A_3 \dot{\theta}_1^2 + A_4 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$ . Préciser les expressions littérales de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  en fonction des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties de l'exosquelette.

#### Correction

$$\begin{aligned} \text{On cherche } \overrightarrow{\delta(A, 3/1)} \cdot \vec{x}_1 \\ \text{On a } \overrightarrow{\delta(A, 3/1)} \cdot \vec{x}_1 &= \left( \overrightarrow{\delta(G_3, 3/1)} + \overrightarrow{AG_3} \wedge m_3 \overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/1)} \right) \cdot \vec{x}_1 \\ &= \left( \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{\sigma(G_3, 3/1)} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{AG_3} \wedge m_3 \overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/1)} \right) \cdot \vec{x}_1 \\ \text{Or, en } G_3, \text{ centre d'inertie de 3, } \overrightarrow{\sigma(G_3, 3/1)} &= I_{G_3}(3) \overrightarrow{\Omega(3/1)} = \begin{pmatrix} I_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y3} & I_{yz3} \\ 0 & I_{yz3} & I_{z3} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= I_{x3} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{x}_3 \\ \text{Par suite, } \overrightarrow{\delta(A, 3/1)} \cdot \vec{x}_1 &= \left( \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{\sigma(G_3, 3/1)} \right]_{\mathcal{R}_1} \cdot \vec{x}_1 + \left( \overrightarrow{AG_3} \wedge m_3 \overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/1)} \right) \cdot \vec{x}_1 \right) \\ &= \left( \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{\sigma(G_3, 3/1)} \cdot \vec{x}_1 \right]_{\mathcal{R}_1} - \underbrace{\overrightarrow{\sigma(G_3, 3/1)} \cdot \frac{d}{dt} [\vec{x}_1]_{\mathcal{R}_1}}_0 + \left( \overrightarrow{AG_3} \wedge m_3 \overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/1)} \right) \cdot \vec{x}_1 \right) \\ &= I_{x3} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \left( (-L_2 \vec{z}_2 - L_0 \vec{z}_3') \wedge m_3 (L_2 \dot{\theta}_1 \vec{y}_2 + L_2 \dot{\theta}_1^2 \vec{z}_2 + L_0 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_3' + L_0 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{z}_3') \right) \cdot \vec{x}_1 \\ &= \ddot{\theta}_1 \left( I_{x3} + m_3 L_2^2 + L_2 m_3 L_0 \cos(\theta_2 + \alpha) + m_3 L_0 L_2 \cos(\theta_2 + \alpha) + m_3 L_0^2 \right) + \\ &\quad \ddot{\theta}_2 \left( I_{x3} + L_2 m_3 L_0 \cos(\theta_2 + \alpha) + m_3 L_0^2 \right) + \dot{\theta}_1^2 (m_3 L_0 L_2 \sin(\theta_2 + \alpha)) + \\ &\quad (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 (-L_2 m_3 L_0 \sin(\theta_2 + \alpha)) \\ \text{Soit : } \begin{cases} A_1 = I_{x3} + m_3 L_2^2 + 2m_3 L_0 L_2 \cos(\theta_2 + \alpha) + m_3 L_0^2 \\ B_1 = I_{x3} + m_3 L_0 L_2 \cos(\theta_2 + \alpha) + m_3 L_0^2 \\ C_1 = m_3 L_0 L_2 \sin(\theta_2 + \alpha) \\ D_1 = -m_3 L_0 L_2 \sin(\theta_2 + \alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

**Question 3** Proposer une démarche permettant de déterminer l'expression de  $C_1$ ,

l'action mécanique exercée sur la cuisse 2 par l'actionneur correspondant. Préciser le(les) ensemble(s) isolé(s), le(s) bilan(s) des actions mécaniques extérieures, le(s) théorème(s) utilisé(s) et la(les) équation(s) utile(s).

#### Correction

- On isole l'ensemble  $\{2 + 3\}$ .
- Bilan des actions mécaniques :
  - liaison pivot en A telle que  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_1 = 0$ ;
  - actionneur de 1 sur 2 tel que  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2_m)} \cdot \vec{x}_1 = C_1$ ;
  - action du patient sur la hanche telle que  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2_p)} \cdot \vec{x}_1 = C_{\text{hanche}}$ ;
  - action de la pesanteur sur 2 en  $G_2$ ;
  - action de la pesanteur sur 3 en  $G_3$ .
- On écrit alors le théorème du moment dynamique en A en projection sur  $\vec{x}_0$ .

**Question 4** Déterminer l'expression de  $C_1$  en fonction de  $\theta_1, \theta_2$ , leurs dérivées, de  $C_{\text{hanche}}$  et des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties de l'exosquelette.

#### Correction

Détermination des actions mécaniques.

- $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{pes} \rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_1 = (\overrightarrow{AG_2} \wedge -m_2 g \vec{z}_1) \cdot \vec{x}_1 = ((l_2 - L_2) \vec{z}_2 \wedge -m_2 g \vec{z}_1) \cdot \vec{x}_1 = m_2 g (l_2 - L_2) \sin \theta_1$ ;
- $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{pes} \rightarrow 3)} \cdot \vec{x}_1 = (\overrightarrow{AG_3} \wedge -m_3 g \vec{z}_1) \cdot \vec{x}_1 = ((-L_2 \vec{z}_2 - L_0 \vec{z}_3') \wedge -m_3 g \vec{z}_1) \cdot \vec{x}_1 = ((L_2 \vec{z}_2 + L_0 \vec{z}_3') \wedge m_3 g \vec{z}_1) \cdot \vec{x}_1 = -m_3 g (L_2 \sin \theta_1 + L_0 \sin(\alpha + \theta_2 + \theta_1))$ .

Le TMD en A appliqué 2+3 en projections sur  $\vec{x}_1$  se traduit donc par :

$$C_1 + C_{\text{hanche}} - m_3 g (L_2 \sin \theta_1 + L_0 \sin(\alpha + \theta_2 + \theta_1)) + m_2 g (l_2 - L_2) \sin \theta_1 = A_1 \ddot{\theta}_1 + A_2 \ddot{\theta}_2 + A_3 \dot{\theta}_1^2 + A_4 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2.$$

**Question 5** Dédurre des deux équations précédentes que le modèle dynamique considéré peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + M_2 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + C + M_3 \begin{pmatrix} C_{\text{hanche}} \\ C_{\text{genou}} \end{pmatrix}$  où C est une matrice colonne et  $M_1, M_2$  et  $M_3$  sont des matrices  $2 \times 2$ . Donner l'expression littérale des coefficients de C,  $M_1, M_2$  et  $M_3$  par des relations non linéaires des paramètres de mouvement ( $\theta_1, \theta_2$ ), leurs dérivés premières et des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties du problème.

#### Correction

On a :

$$\begin{cases} C_1 = -C_{\text{hanche}} + m_3 g (L_2 \sin \theta_1 + L_0 \sin(\alpha + \theta_2 + \theta_1)) - m_2 g (l_2 - L_2) \sin \theta_1 - A_1 \ddot{\theta}_1 - A_2 \ddot{\theta}_2 - A_3 \dot{\theta}_1^2 \\ C_2 = [I_{x3} + m_3 L_0^2] (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_3 L_2 L_0 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \alpha) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 + \alpha)] + m_3 g L_0 \sin(\theta_2 + \theta_1 + \alpha) \end{cases}$$

Par identification :  $M_1 = \begin{pmatrix} -A_1 & -A_2 \\ [I_{x3} + m_3 L_0^2] + m_3 L_2 L_0 \cos(\theta_2 + \alpha) & [I_{x3} + m_3 L_0^2] \end{pmatrix},$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -A_3 \dot{\theta}_1 & 0 \\ 0 & m_3 L_2 L_0 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \alpha) \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } C = \begin{pmatrix} m_3 g (L_2 \sin \theta_1 + L_0 \sin (\alpha + \theta_2 + \theta_1)) - m_2 g (l_2 - L_2) \sin \theta_1 - A_4 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_3 g L_0 \sin (\theta_2 + \theta_1 + \alpha) \end{pmatrix}.$$

Si on part du principe que le vecteur  $C$  ne doit pas dépendre de  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$  on obtient cette autre solution :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -A_1 & -A_2 \\ [I_{x3} + m_3 L_0^2] + m_3 L_2 L_0 \cos (\theta_2 + \alpha) & [I_{x3} + m_3 L_0^2] \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -(A_3 + A_4) \dot{\theta}_1 - 2A_4 \dot{\theta}_2 & -A_4 (\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1) \\ 0 & m_3 L_2 L_0 \dot{\theta}_1 \sin (\theta_2 + \alpha) \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } C = \begin{pmatrix} m_3 g (L_2 \sin \theta_1 + L_0 \sin (\alpha + \theta_2 + \theta_1)) - m_2 g (l_2 - L_2) \sin \theta_1 \\ m_3 g L_0 \sin (\theta_2 + \theta_1 + \alpha) \end{pmatrix}.$$