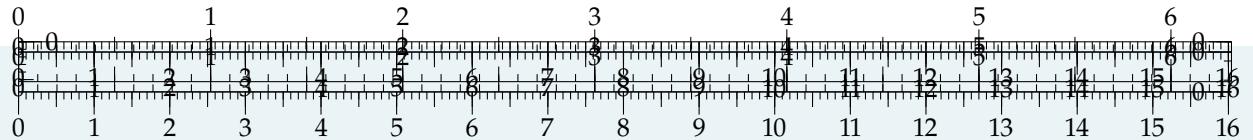
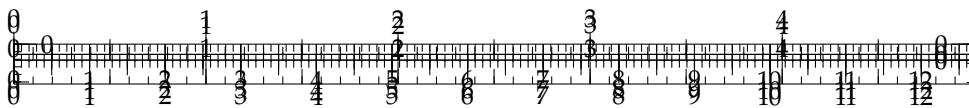


## Table des matières







.../.../.../Style/png/Fond\_SLCI.png

# 1 Modélisation des systèmes mulyiphysiques

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Qu'est-ce qu'un système multiphysique ?

Pour comprendre le fonctionnement des systèmes qui nous entourent, il est souvent nécessaire de maîtriser un voire plusieurs domaines de la physique. En effet, le winch utilisé dans le laboratoire a un fonctionnement essentiellement mécanique. En revanche, le simulateur de drone  $D^2C$  est composé d'une partie mécanique (rotation du banc et des hélices) une partie électrotechnique (moteurs) une partie électronique (commande des moteurs) une partie informatique (gestion de la commande et des informations).

Pour modéliser un système, plusieurs outils peuvent être nécessaires. Lorsqu'un outil est associé à un champ de la physique, on peut parler de modèle « mono physique » :

- ▶ pour modéliser la géométrie d'un système ou le comportement d'un mécanisme, on peut faire appel à SolidWorks par exemple;
- ▶ pour modéliser la partie électrique d'un système il est possible d'utiliser un logiciel comme PSpice;
- ▶ pour programmer une interface graphique d'un logiciel, il est possible d'utiliser Python...

En revanche, lorsqu'on veut que tous ces domaines communiquent, il faut une plate forme commune permettant l'échange entre les modèles. On parle alors de modélisation multiphysique. Il est possible d'utiliser des logiciels comme Scilab (Xcos – Modelica) ou Matlab (Simulink – Simscape).

### 1.1.2 Pourquoi modéliser des systèmes ?

Dans l'industrie, les modèles sont indispensables. Ils permettent d'avoir un modèle numérique, image du produit que l'on cherche à réaliser ou que l'on a déjà. L'image doit être aussi fidèle à la réalité que possible. On a vu que ce modèle peut-être « monophysique » ou « multiphysique ».

L'objectif du modèle est de se substituer au produit réel. Les simulations réalisées sur le modèle ont pour objectif de remplacer des expérimentations sur le produits, considérées comme coûteuse en temps et en argent.

Il est possible de recenser les avantages et inconvénients liés à la simulation des modèles [Crevits2015].

**Y. Crevits**, *Éléments de modélisation multi physique des systèmes industriels en vue de leur simulation numérique*, Juin 2015.

**Ph. Fichou**, *La modélisation multiphysique Technologie*, Mars 2012.

**Yvan Liebgott**, *Modélisation et Simulation des Systèmes Multi-Physiques avec MATLAB*.

**Frédéric Mazet**, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville Toulon.

**Patrick Beynet**, *Sciences industrielles de l'ingénieur MP - PSI*, Éditions Ellipses.

**Ivan Liebgott**, *Modélisation et Simulation des systèmes Multi-Physiques avec MATLAB-Simulink*.

B1-01

B1-02

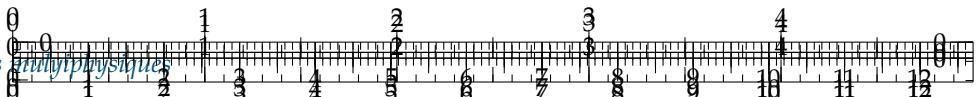
B1-03

B1-04

B2-02

Crevits2015





- ✓ Pouvoir prévoir le comportement du système réel alors qu'il n'existe pas encore lors de la phase de conception ;
  - ✓ permettre la prévision de phénomènes (en météorologie par exemple) ;
  - ✓ éviter ou limiter le recours aux expérimentations réelles qui peuvent être très coûteuses ou très dangereuses, voire proscribes (essais nucléaires militaires) ou impossibles dans l'état actuel des connaissances et des moyens (projet ITER) ;
  - ✓ quand l'échelle de temps des phénomènes dans le système réel ne permet pas une expérience « en une durée raisonnable » pour effectuer des observations ou des mesures. (premiers instants de l'univers ( $t < 10^{-6}$ s) ou l'évolution des galaxies ( $t > 10^6$  années)) ;
  - ✓ « observer » ou représenter des variables inaccessibles à l'expérience ou la mesure ;
  - ✓ les manipulations sont faciles sur un modèle. Elles peuvent être répétées, voire itérées automatiquement pour apprécier de très nombreuses situations ;
  - ✓ le droit à l'erreur, sans risque ;
  - ✓ la possibilité de supprimer des phénomènes perturbateurs ou des effets secondaires.
- 
- ✗ Avoir une confiance aveugle dans les simulations et ses résultats : des erreurs liées aux modèles ou aux calculs peuvent ne pas être perçues immédiatement ;
  - ✗ « oublier » les conditions de la simulation et les hypothèses formulées pour établir le modèle et surtout dans le cas des systèmes complexes ;
  - ✗ « inverser » la réalité et « forcer » le réel à intégrer les contraintes du modèle ;
  - ✗ oublier le niveau de précision des résultats provenant du modèle.

## 1.2 Modélisation des systèmes multiphysiques

### 1.2.1 Modélisation causale et acausale

Lorsque le fonctionnement d'un système est régit par une équation différentielle, dont l'ordre de dérivation de la sortie est supérieur à l'ordre de dérivation de l'entrée, la sortie est une conséquence de l'entrée. En passant l'équation dans le domaine de Laplace puis en la traduisant sous forme de schéma bloc, on obtient alors un bloc **orienté** traduisant ainsi la relation de cause à effet entre l'entrée et la sortie.

On parle ici de modélisation **causale**.

Les liens entre les blocs représentent une grandeur physique (courant, tension, position, vitesse *etc.*).

En modélisation acausale, les entrées et sorties ne sont pas spécifiées. Les liens entre entrées et sorties sont définies de manière implicite. Lorsqu'on visualise la traduction graphique d'un modèle acausal, les liens ne sont pas orientés (les blocs sont « réversibles »). Les blocs sont traversés par des flux d'énergie d'un même domaine physique.

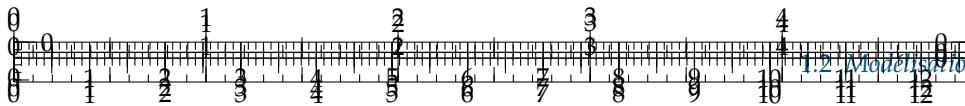
Dans Matlab – Simulink, on parle de grandeurs potentielles (across) et de grandeur traversante (through) :

- ▶ une variable potentielle est mesurée par un instrument en parallèle avec la chaîne d'énergie ;
- ▶ une variable traversante est mesurée par un instrument en série avec la chaîne d'énergie.

Dans Scilab – Coselica, (langage Modelica), on parle de variables potentielles et flux.

- ▶ variables potentielles : les variables qui sont reliées au même port sont égales ;
- ▶ variables flux : les variables qui aboutissent au même port ont pour somme 0.





**TABLE 1.1 –** Modélisation acausale dans Matlab – Simulink – Simscape : variables « across » et « through ».

Domaine physique	Variables « across »	Variables « through »	Puissance W
Électrique	Tension (V)	Courant (A)	$\mathcal{P} = UI$
Hydraulique	Pression (Pa)	Débit ( $m^3 s^{-1}$ )	$\mathcal{P} = pQ$
Mécanique de translation	Vitesse linéaire ( $m s^{-1}$ )	Force (N)	$\mathcal{P} = FV$
Mécanique de rotation	Vitesse angulaire( $rad s^{-1}$ )	Moment (Nm)	$\mathcal{P} = C\omega$
Thermique	Température (K)	Flux thermique et flux d'entropie	

### 1.2.2 Les différents modèles et outils

La figure ci-dessous présente un modèle causal et un modèle acausal du système de laboratoire « Control'X » en utilisant le logiciel Matlab-Simulink.

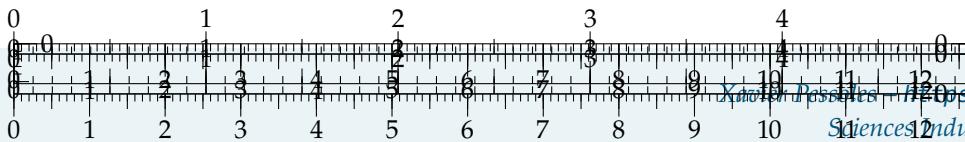


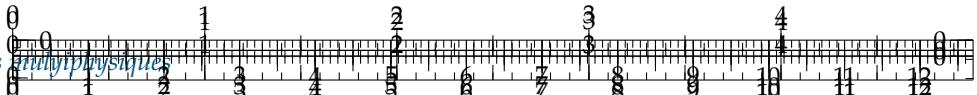
Visuellement on constate que sur le modèle causal, les composants du système apparaissent. Ainsi, sans connaître les lois de comportements des composants, il est possible de réaliser le modèle multiphysique d'un système.

En modélisation acause, on utilise une représentation par schéma-blocs. Il est ici indispensable de connaître les modèles de connaissance ou de comportement des composants pour réaliser le modèle.

### 1.2.3 Résolution – Avantage et Inconvénients

Que ce soient des modèles causaux ou acausaux, Matlab a recours à des solveurs pour simuler le comportement des systèmes. En effet, des équations différentielles, linéaires ou non, sont « cachées » derrière les blocs.





.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Cours/images/solveur.png

Par défaut, nous laisserons un choix automatique du solveur. Cependant, certains modèles imposeront (via un message d'erreur) le changement de ce solveur. Par ailleurs le pas de simulation devra être changé dans certain cas, dans le but d'améliorer la précision des résultats.

FIGURE 1.1 – Solveurs Matlab

Attention, il est à noter qu'il peut être difficile de réaliser de diagramme de Bode en utilisant un modèle acausal. Ceci peut être un handicap en phase de conception d'un système car il devient plus délicat de déterminer les résonances du système.

## 1.3 Modélisation des systèmes physiques

On utilisera ici Matlab – Simulink. Certains modèles sont aussi transposables avec Scilab – Xcos.

### 1.3.1 Modélisation des systèmes mécaniques

#### Introduction

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Cours/images/Masse\_Ressort.png

Deux modes de modélisation des systèmes mécanique est disponible : une modélisation 1D (mouvement de translation suivant une seule direction, mouvement de

**FIGURE 1.2 – Modélisation causale** autour d'un axe fixe) ou une modélisation 3D. La modélisation 1D est possible directement dans Matlab. Pour la modélisation 3D, il est plus aisé d'utiliser tème « masse – ressort – amortisseur » SolidWorks.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Cours/images/Modele3D

FIGURE 1.3 – Modélisation acausale 3D d'un bras robotisé.

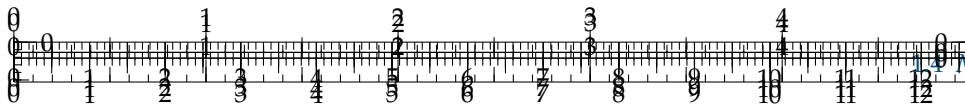
#### Blocs communément utilisés en modélisation multiphysique.

Les éléments communément utilisés sont donnés dans la figure suivante.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Cours/images/Bilbio\_SimMeca\_02.png

La figure suivante illustre une transmission mécanique modélisée en utilisant Simulink. On notera le positionnement des capteurs pour mesurer des variables accross ou through, ainsi que le positionnement du bloc permettant de modéliser les frottements.





.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Cours/images/transmission\_meca.png

### 1.3.2 Modélisation des systèmes électriques

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Cours/images/MoteurCC.png

**FIGURE 1.4** – Modélisation acausale de la commande d'un moteur à courant continu.

### 1.3.3 Modélisation des systèmes thermiques, pneumatiques et hydrauliques

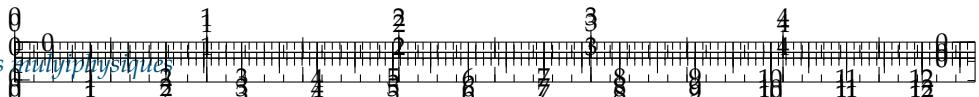
En cas de besoin, des exemples complémentaires sont disponibles en utilisant Matlab – Simulink.

## 1.4 Modélisation des non-linéarités

Même si on cherche à modéliser les blocs d'un système par des équations linéaires (à coefficients constants), il est très fréquent de rencontrer des systèmes (notamment mécaniques) qui n'obéissent pas des lois linéaires (par exemple, le comportement du Maxpid est non linéaire : suivant la plage de fonctionnement – entre 0 et 5° ou entre 85 et 90° – un tour de moteur ne correspond pas au même mouvement angulaire du bras).

Deux solutions s'offrent alors à nous : linéariser le fonctionnement ou modéliser la non linéarité. Les modèles causaux sont par essence linéaire. Cependant, il est possible d'intégrer des non-linéarités modélisables relativement simplement (seuil, saturation, hystérésis). Il est en revanche plus délicat de modéliser les non linéarités géométriques des mécanismes. En revanche dans les modèles acausal, la passerelle entre SolidWorks et Matlab, permet par exemple de modéliser des systèmes mécaniques non linéaires.





Attention : l'analyse fréquentielle d'un système non linéaire n'a pas (peu ?) de sens, même s'il est possible d'effectuer un diagramme de Bode, notamment avec Matlab...

### 1.4.1 Linéarisation

Lorsqu'un système est non linéaire, il peut être possible de le linéariser. Cela signifie que **localement** (sur un certain intervalle) on approche le comportement du système par une droite. On conséquence, on conserve la validité de notre modélisation de type SLCI. Cependant, il faut faire attention à la zone de validité du modèle : si le comportement du système est fortement linéaire la linéarisation ne sera valable que dans une certaine zone.

#### Exemple – Loi entrée sortie du Maxpid

Le comportement mécanique du Maxpid n'est pas linéaire. Si on désire modéliser ce comportement sur un système causal, il est impératif d'utiliser une loi linéaire. Dans le premier cas, on modélise le comportement en utilisant une régression linéaire. Ce modèle génère des erreurs, mais il est « utilisable » sur toute la plage de fonctionnement.

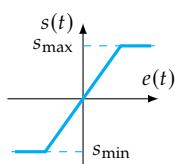
Il est aussi possible, dans un second cas, de linéariser le système autour d'un point de fonctionnement. Ainsi, le modèle sera plus fidèle à la réalité autour de ce point de fonctionnement. Par contre, les écarts s'accroissent en s'éloignant du point de fonctionnement.

02.png

### 1.4.2 Saturation

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisation

Paramètres :  $s_{\max}$  et  $s_{\min}$



Même si vous l'avez peut-être peu remarqué, les saturations sont omniprésentes sur les systèmes réels. Les principales sources de saturation sont des saturations en tension ou des saturations en courant.

En régime saturé, au delà d'une certaine valeur d'entrée, le signal de sortie du bloc reste identique et égal à la valeur de saturation.

Tout d'abord, dans les systèmes asservis et corrigés, le correcteur permet souvent une amplification de la consigne. Par exemple, un correcteur proportionnel de valeur 5 dans la boucle ouverte permet de multiplier par 5 la tension de commande. Celle-ci peut alors être supérieure à la tension que la source peut fournir.

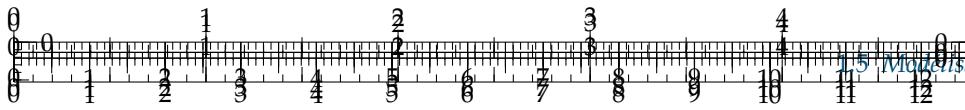
De même, suivant la charge agissant sur un système (charge électrique ou mécanique), le courant nécessaire à un déplacement peut devenir très important, notamment en phase transitoire. Un pic de courant peut avoir pour effet de détériorer des composants.

#### Exemple –

Prenons par exemple le cas du moteur à continu du Maxpid dont la modélisation est (ou devrait être) bien connue. Sollicitons le moteur par un échelon de tension et observons les signaux que nous ne regardons peut être pas toujours, par exemple le courant. Au démarrage du moteur, si on néglige la bobine et qu'on néglige l'existence d'une tension dans la boucle de retour, le courant initial est de l'ordre de  $\frac{U}{R} \approx \frac{48}{2} = 24$  A. Pour certains systèmes ce courant peut détériorer des composants. Afin de limiter le courant, des saturateurs permettant d'éviter de dépasser certaines intensités.

La conséquence peut ici être un ralentissement du système. En effet, le courant «





plaonnant », l'accélération n'est pas aussi forte qu'on l'attendrait. En conséquence, le système est moins rapide.

### 1.4.3 Seuil

Les seuils (ou bandes mortes – dead band) permettent de modéliser un comportement non linéaire pour lequel la sortie reste nulle quand l'entrée varie dans un certain intervalle.

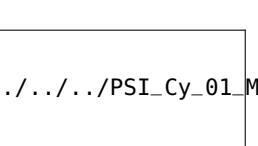
Dans le cas d'une modélisation causale, on peut utiliser le seuil pour modéliser le frottement sec. En effet, dans le cas d'un système piloté par un moteur à courant continu, une petite tension ne suffit pas à actionner le système. Il faut vaincre les frottements secs. Le seuil permet de modéliser ce comportement.

### 1.4.4 Hystérésis

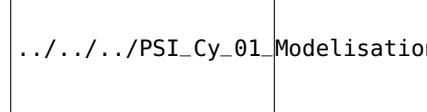
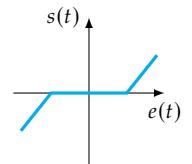
Les hystérésis (Relay) permettent de modéliser un comportement non linéaire pour lequel la sortie est différente quand l'entrée croît ou lorsqu'elle décroît.

## 1.5 Modélisation des systèmes numériques

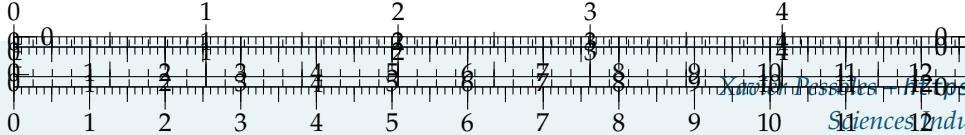
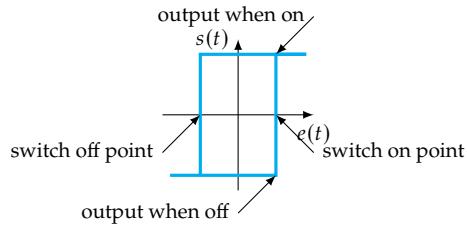
On verra dans un chapitre ultérieur que les systèmes que nous manipulons sont souvent numériques. En effet, que ce soit sur le Maxpid, le Control'X, le D2C, la cheville NAO etc. les grandeurs analogiques mesurées sont converties en grandeurs numériques grâce à un CAN (convertisseur analogique numérique). La fréquence d'échantillonnage ou la quantification du signal peuvent avoir un impact non négligeable sur les performances du système.



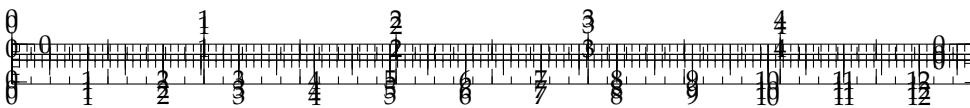
Paramètres : valeur mini et valeur maxi



Paramètres : switch on point, switch off point, output when on, output when off







../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_01\_ROV/images/fig\_00.jpg

## Application 1

### Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Sujet

Concours Centrale – MP 2019

B2-02

Pour réaliser l'ensouillage sous-marin de câbles, ceux-ci sont déposés sur le fond marin par un navire câblier. Le robot sous-marin ROV (Remotely Operated Vehicle) est déposé sur le fond marin par un bateau support et ensouille le câble provenant du navire câblier après l'avoir détecté et s'être aligné dans l'axe de celui-ci.

Pour transférer le ROV du pont du bateau support jusqu'à l'aplomb de la surface d'immersion une grue portique est utilisée. La grue portique est actionnée par un ensemble de deux vérins hydrauliques modélisés en un seul vérin équivalent pour cette étude.

Lors de la descente du ROV dans la mer, il est suspendu à un câble ombilical. Un bon équilibrage hydrostatique est nécessaire pour assurer l'horizontalité du ROV pendant la descente.

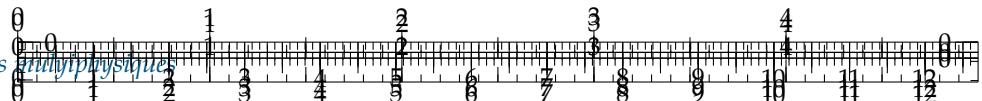
../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_01\_ROV/images/fig\_02.png

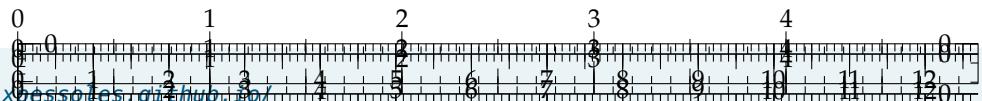
**Question 1** À partir des figures précédentes, relier les composants du modèle de simulation multiphysique de la grue portique. Quel(s) ensemble(s) n'ont pas été modélisés?

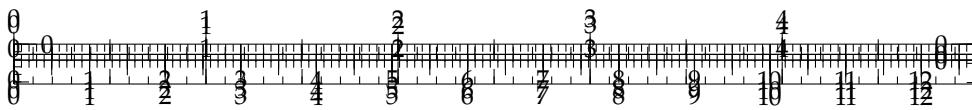




.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_01\_R0V/images/Cy\_01\_Ch\_01\_Application\_01\_R0V\_01.png

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_01\_R0V/images/Cy\_01\_Ch\_01\_Application\_01\_R0V\_02.png





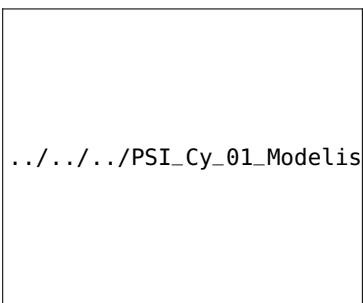
../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_01\_ROV/images/fig\_00.jpg

## Application 1

### Mise à l'eau d'un robot sous-marin – Corrigé

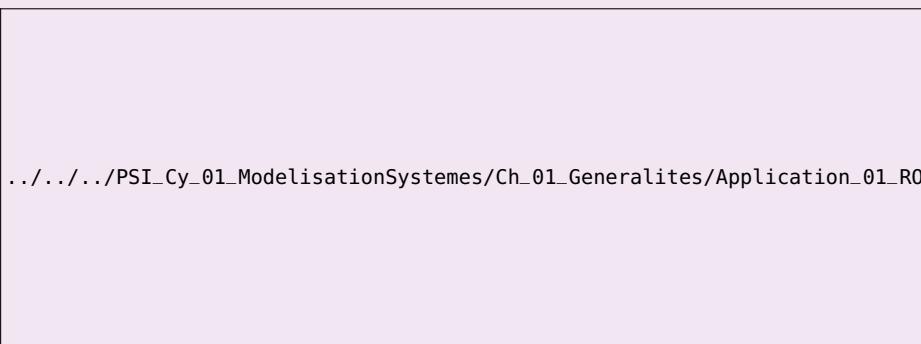
Concours Centrale – MP 2019

B2-02



../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

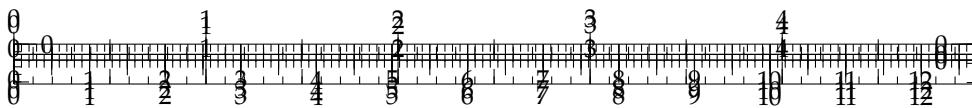
#### Correction



../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_01\_ROV/images/cor\_01.png







.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_02\_SeineMusicale/images/fig\_00.png

## Application 2

### La Seine Musicale – Sujet

La Seine Musicale est un équipement à vocation musicale à fort rayonnement culturel, dont l'objet est de créer ou d'aménager des espaces pour des concerts, des expositions, des installations permanentes ou provisoires.

L'un des défis architecturaux de ce projet consiste à mettre en mouvement la voile, équipée de 470 panneaux photovoltaïques, autour de l'auditorium, tout en garantissant une acoustique exceptionnelle.

Les deux demi-voiles sont mises en mouvement de manière indépendante par des chariots motorisés, ainsi qu'une couronne motorisée déplaçant chacun des sommets des demi-voiles par l'intermédiaire de bielles.

Chaque chariot (central et latéral) se déplace grâce à quatre galets, appelés galets de roulement, qui roulent sur les deux rails circulaires concentriques de la voie médiane de roulement et grâce à quatre autres galets de guidage qui roulent sur les côtés des deux rails. Chacun des deux chariots centraux est motorisé à l'aide de deux motoréducteurs qui entraînent chacun en rotation deux des quatre galets de roulement. Afin d'optimiser son rendement énergétique, cette voile se déplace chaque jour toutes les 15 minutes pour suivre le soleil du garage Est au garage Ouest.

Afin d'effectuer un premier dimensionnement en phase d'avant-projet des solutions techniques choisies, un modèle multiphysique simple de la chaîne de traction d'un chariot motorisé est réalisé (figure 1.6). **On se place dans le cas le plus défavorable avec un seul motoréducteur fonctionnel qui entraîne deux galets de roulement (roue).**

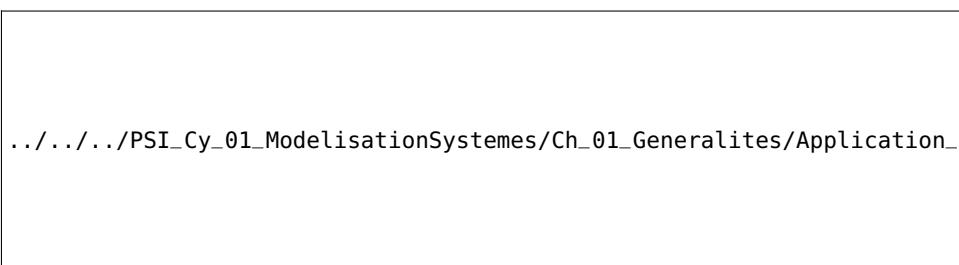
Concours Centrale – MP 2020

**B2-02**

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

**FIGURE 1.5** – Schéma d'architecture de la voile solaire

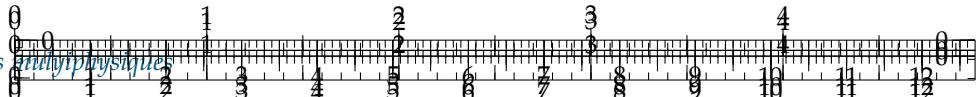


**FIGURE 1.6** – Modèle multiphysique du déplacement d'une demi-voile

Le modèle multiphysique est constitué de trois parties :

- ▶ commande en tension qui résulte de la superposition de deux rampes pour générer la loi de vitesse trapézoïdale;
- ▶ modèle électrique constitué d'un moteur à courant continu alimenté;





- modèle mécanique constitué d'un réducteur, d'une roue de chariot, d'une masse mobile de la demi-voile et d'un capteur de position.

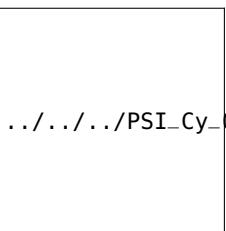
Lors de son déplacement, il peut arriver que la voile soit soumise à l'effet du vent. Il est donc important de le prendre en compte dans le modèle pour évaluer son impact sur le déplacement. Par ailleurs, afin d'assurer une durée de vie du moteur conforme à son mode de fonctionnement, il est important de pouvoir estimer la consommation électrique du moteur en fonctionnement.

Le modèle figure 1.6 a donc été enrichi de nouveaux blocs, à savoir : un capteur de courant, un capteur de tension et l'effort extérieur lié au vent (échelon).

**Question 1** Sur la figure suivante, compléter les liens du modèle proposé pour prendre en compte les deux capteurs.

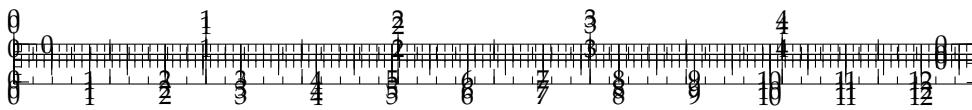
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_02\_Seine

**FIGURE 1.7** – Modèle multiphysique du déplacement d'une demi-voile



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_02\_SeineMusicale/images/Cy\_01\_Ch\_01





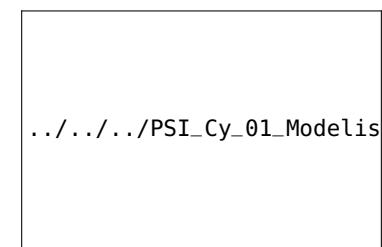
../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_02\_SeineMusicale/images/fig\_00.png

## Application 2

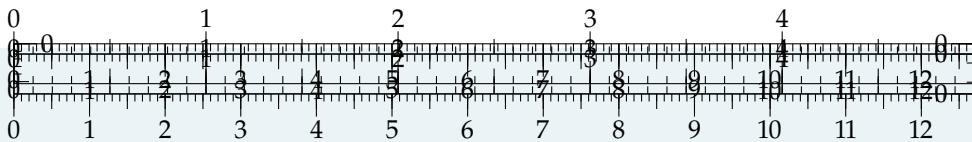
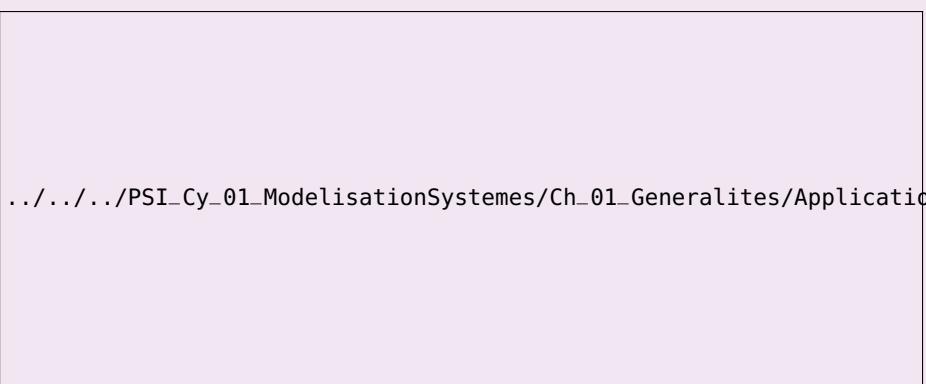
### La Seine Musicale – Corrigé

Concours Centrale – MP 2020

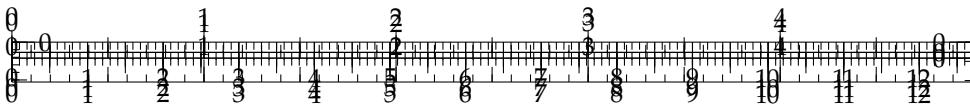
B2-02



Correction







.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_03\_DirectionDecoupee/images/fig\_00.jpg

## Application 3

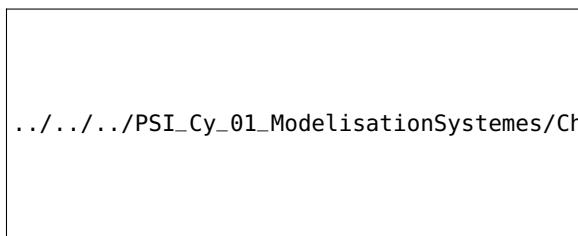
### Direction automatique découpée – Sujet

Banque PT – SI A 2017

**B2-02**

Depuis maintenant de nombreuses années, les commandes de vol d'avions sont passées d'une technologie purement mécanique à la technologie par fil (Fly by Wire). Le secteur automobile suit cette tendance qui présente de nombreux avantages. C'est le système de direction par fil (Steer by Wire), encore nommé direction découpée, qui fait l'objet de l'étude proposée.

La figure 1.8 donne une vue de cette unité sous la forme d'une maquette numérique à laquelle est associé le schéma cinématique qui servira de base à l'étude mécanique.



L'unité de pilotage est constituée d'une chaîne d'énergie chargée de solliciter le volant par un couple  $C_{mv}\vec{x}_v$  qui résiste à l'action du conducteur  $C_c\vec{x}_v$  quand celui-ci cherche à tourner le volant.

En effet, la simple dynamique du système mécanique de l'unité de pilotage ne donnerait pas au conducteur la sensation de manier la direction d'une automobile. La composante  $C_{mv}$  est donc élaborée pour que la dynamique du volant en termes d'inertie et de raideur soit équivalente à celle d'une direction conventionnelle optimisée selon le type de conduite visée.

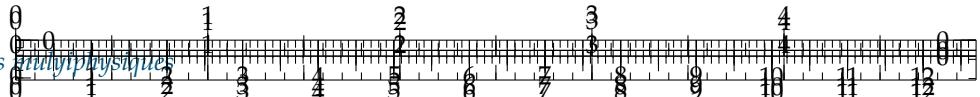
La composante  $C_{mv}$  est élaborée à partir de la consigne d'angle du volant  $C_{v\_ref}$ , transmise par le générateur de consigne intégré au contrôleur de modèles, et de la composante  $C_c$  du couple conducteur.

Le modèle de la structure sous la forme d'un schéma bloc décrivant le comportement asservi de cette unité est donné figure 1.9. On précise que la variable d'entrée est  $\theta_{v\_ref}(p)$ , que la variable de sortie est  $\theta_v(p)$  et que la variable  $C_c(p)$  est considérée comme une perturbation. Un signal de commande  $U_{mv}(p)$  pilote la motorisation.



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

**FIGURE 1.8** – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

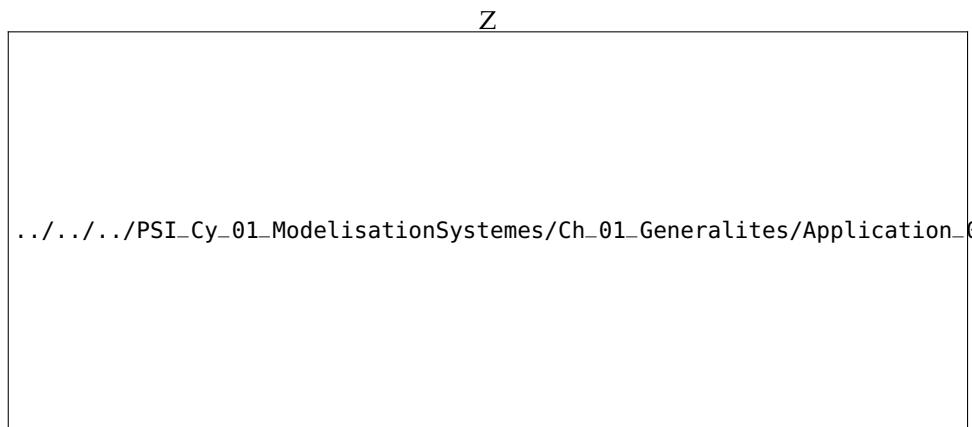


**FIGURE 1.9** – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_03\_Direct

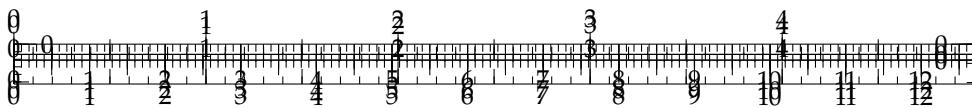
Un modèle acausal de cette structure dont certains composants ne sont pas reliés aux autres, est donné sur le cahier réponses.

**Question 1** Compléter ce modèle en traçant les liens manquants qui donneraient un modèle équivalent au schéma bloc de la figure 1.9.



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_03\_DirectionDecoupee/images/Cy\_01





../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_03\_DirectionDecouplee/images/fig\_00.jpg

## Application 3

### Direction automatique découpée – Corrigé

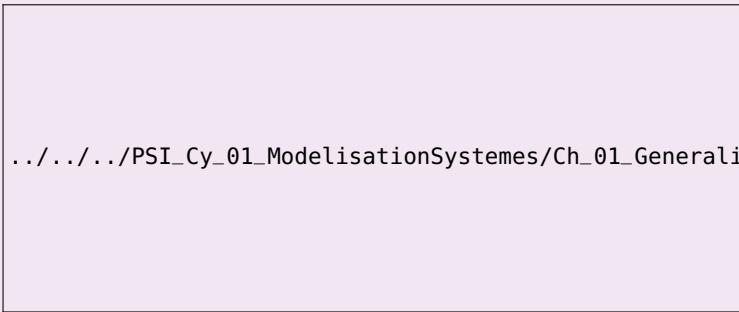
Banque PT – SI A 2017

**Question 1** Compléter ce modèle en traçant les liens manquants qui donneraient un modèle équivalent au schéma bloc de la figure 1.9.

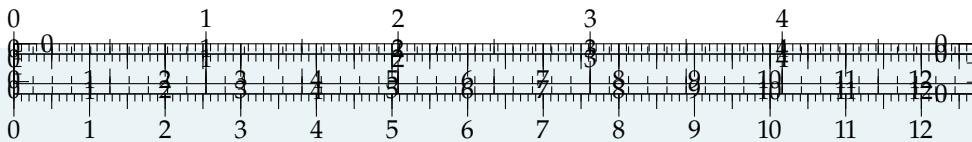
B2-02

../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

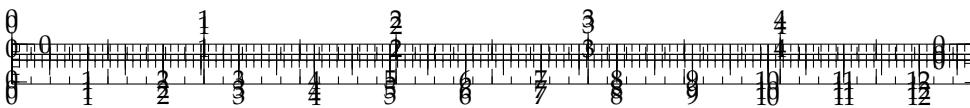
Correction



../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_01\_Generalites/Application\_03\_DirectionDecouplee/images/corrigé\_00.jpg







.../.../.../Style/png/Fond\_SLCI.png

## 2 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis



### 2.1 Définitions préliminaires et détermination des performances

#### 2.1.1 Définitions

##### Définition – Informations analogiques et numériques

- ▶ Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- ▶ Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/01\_Modelisation\_Perf\_Fiche/images/CAN\_CNA.png

##### Définition – Systèmes automatiques ou asservis

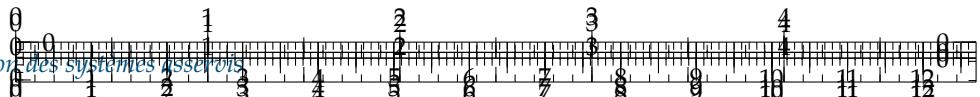
Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

- ▶ la loi de consigne  $e(t)$  est une grandeur de commande qui est modifiable;
- ▶ la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie  $s(t)$  est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelis



de la qualité de la tâche accomplie.

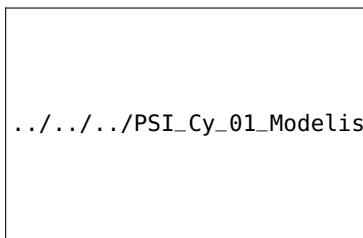


FIGURE 2.1 – Système suiveur.

### Définition – Systèmes suiveurs et régulateurs

- ▶ Pour un système suiveur la consigne  $e(t)$  fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- ▶ Pour un système régulateur la consigne  $e(t)$  est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.

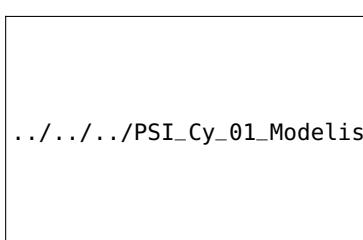


FIGURE 2.2 – Système régulateur.

### 2.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques

#### Définition – Précision en position – Erreur statique $\varepsilon_S$

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'erreur statique  $\varepsilon_S$  comme la différence entre la consigne (un échelon) et la réponse  $s(t)$  en régime permanent.

#### Définition – Précision en vitesse $\varepsilon_V$

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

#### Définition – Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

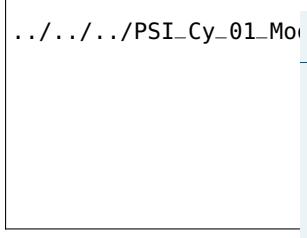
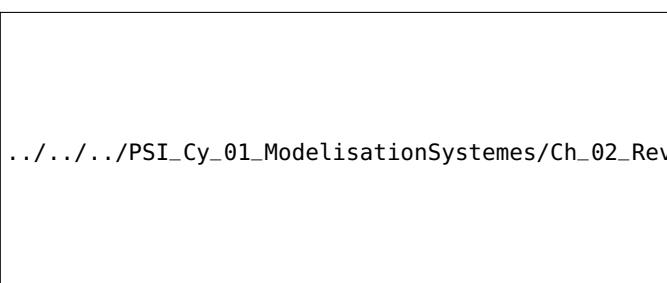


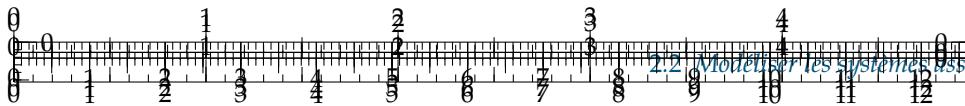
FIGURE 2.3 – Erreur de trainage.

#### Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne  $e(t)$  et la réponse du système  $s(t)$ .
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de  $s(t)$ .
3. Tracer la bande correspondant à une variation de  $\pm n\%$  de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle  $s(t)$  coupe la bande et n'en sort plus.

FIGURE 2.4 – Performances sur une réponse à un échelon.





### Définition – Stabilité

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

## 2.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace



### 2.2.1 Définitions

#### Définition – Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles

Une fonction temporelle  $f(t)$  vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour  $t = 0^+$  :

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

#### Définition – Transformée de Laplace

À toute fonction du temps  $f(t)$ , nulle pour  $t \leq 0$  (fonction causale), on fait correspondre une fonction  $F(p)$  de la variable complexe  $p$  telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

On note  $\mathcal{L}[f(t)]$  la transformée directe et  $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$  la transformée inverse.

De manière générale on note  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ ,  $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$ ,  $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$ ,  $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$ ,  $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p) \dots$

#### Résultat – Dérivation

Dans les conditions de Heaviside :  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$ ,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$ ,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n F(p)$ .

En dehors des conditions de Heaviside la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$ .

### 2.2.2 Théorèmes

#### Théorème – Valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow \infty} pF(p)$$

#### Théorème – Retard

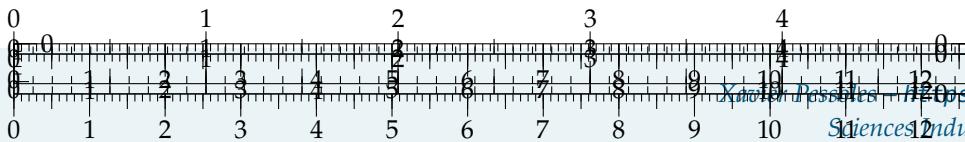
$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

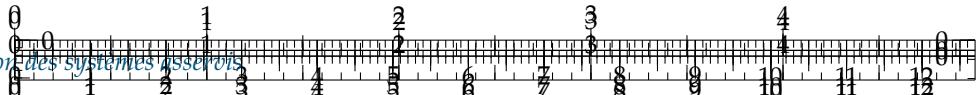
#### Théorème – Valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0} pF(p)$$

#### Théorème – Amortissement

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$





## 2.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

03 SLCI

### 2.3.1 Définitions

#### Définition – Fonction de transfert – Transmittance

Soit un système linéaire continu linéaire invariant dont on note le signal d'entrée  $e$  et le signal de sortie  $s$ , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction  $H$  telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

#### Définition – Classe – Ordre – Pôles – Zéros

$H(p)$  est une fonction rationnelle en  $p$ . En factorisant le numérateur et le dénominateur,  $H(p)$  peut s'écrire sous cette forme :

*Exemple*

$$H(p) = \frac{K}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

d'ordre 3 et de classe 1.

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

- Les  $z_i$  sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Les  $p_i$  sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Le degré de  $D(p)$  est appelé **ordre n du système** ( $n \geq m$  pour les systèmes physiques).
- L'équation  $D(p) = 0$  est appelée équation caractéristique.
- S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre  $\alpha$  de  $D(p)$ , un terme  $p^\alpha$  apparaît au dénominateur.  $\alpha$  est la **classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

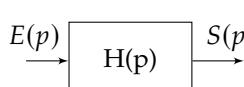
*Exemple*

$$\begin{aligned} H_1(p) &= \frac{K}{a+1+bp+cp^2} = \\ &\frac{K}{a+1} \frac{1}{1+\frac{b}{a+1}p+\frac{c}{a+1}p^2}. \\ H_2(p) &= \frac{K}{(a_1+b_1p)(a_2+b_2p)} = \\ &\frac{K}{a_1a_2} \frac{1}{\left(1+\frac{b_1}{a_1}p\right)\left(1+\frac{b_2}{a_2}p\right)}. \end{aligned}$$

#### Définition – Forme canonique

On appelle forme canonique d'une fonction de transfert une forme pour laquelle le coefficient du monome de plus bas degré est 1 au numérateur et au dénominateur. On appelle gain la coefficient ainsi mis en facteur.

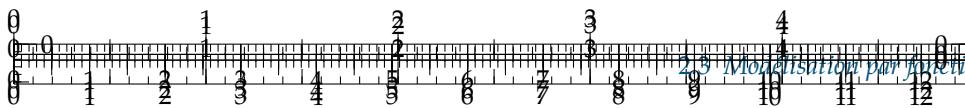
#### Définition – Modélisation d'un bloc



Soit un système d'entrée  $E(p)$ , de sortie  $S(p)$ , caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

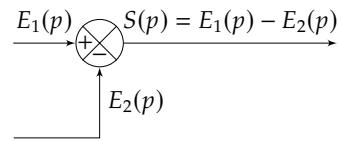
$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$





### Définition – Modélisation d'un comparateur

Soit l'équation  $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$ . Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.



### 2.3.2 Algèbre de blocs

#### Résultat – Blocs en série

$$E(p) \xrightarrow{H_1(p)} \xrightarrow{H_2(p)} S(p) \Leftrightarrow E(p) \xrightarrow{H_1(p)H_2(p)} S(p)$$

*Remarque – Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsqu'on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.*

#### Résultat – Blocs en parallèle

$$E(p) \xrightarrow{H_1(p)} \xrightarrow{+} S(p) \Leftrightarrow E(p) \xrightarrow{H_1(p) + H_2(p)} S(p)$$

#### Résultat – Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT

$$E(p) \xrightarrow{+} \xrightarrow{H_1(p)} S(p) \Leftrightarrow E(p) \xrightarrow{\frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}} S(p)$$

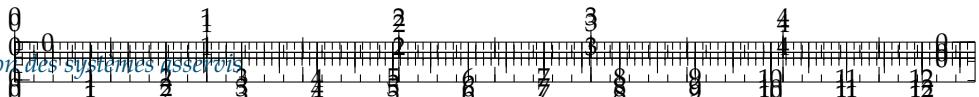
#### Résultat – Comparateurs en série

$$E(p) \xrightarrow{+} \xrightarrow{+} S(p) \Leftrightarrow E(p) \xrightarrow{+} \xrightarrow{+} S(p)$$

#### Résultat – Point de prélèvement

$$E(p) \xrightarrow{H_1(p)} S(p) \Leftrightarrow E(p) \xrightarrow{H_1(p)} R(p) \xleftarrow{H_2(p)H_1(p)} S(p)$$





### 2.3.3 Fonctions usuelles

#### Définition – Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF

Formule de Black

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$

#### Définition – Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO

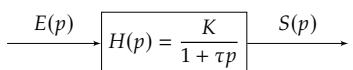
$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

#### Définition – Théorème de superposition

Soit un système d'entrées  $E_1$  et  $E_2$  et de sortie  $S$ . On note  $H_1 = \frac{S}{E_1}$  lorsque  $E_2$  est nulle et  $H_2 = \frac{S}{E_2}$  lorsque  $E_1$  est nulle. En superposant, on a alors :  $S = H_1E_1 + H_2E_2$ .

## 2.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

### 2.4.1 Systèmes d'ordre 1



#### Définition – Système d'ordre 1

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

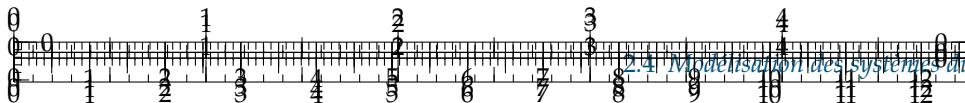
- ▶  $\tau$  la constante de temps en secondes ( $\tau > 0$ );
- ▶  $K$  le gain statique du système ( $K > 0$ ).

#### Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude  $E_0$ . Lorsque  $E_0 = 1 (1/p$  dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$





Analytiquement, on montre que  $s(t) = KE_0 u(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ .

Si la réponse indicelle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- ▶ le gain à partir de l'asymptote  $KE_0$ ;
- ▶ la constante de temps à partir de  $t_{5\%}$  ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- ▶ valeur finale  $s_\infty = KE_0$ ;
- ▶ pente à l'origine **non nulle**;
- ▶  $t_{5\%} = 3\tau$ ;
- ▶ pour  $t = \tau$ ,  $s(\tau) = 0,63 s_\infty$ .

### Résultat – Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente  $k$  :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que  $s(t) = Kk \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u(t)$ .

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- ▶ pente de l'asymptote  $Kk$ ;
- ▶ intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses :  $t = \tau$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

## 2.4.2 Systèmes d'ordre 2

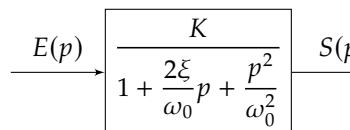
### Définition – Systèmes d'ordre 2

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$



- ▶  $K$  est appelé le gain statique du système (rapport des unités de  $S$  et de  $E$ );
- ▶  $\xi$  (lire  $\xi$ ) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- ▶  $\omega_0$  pulsation propre du système ( $\text{rad/s}$  ou  $\text{s}^{-1}$ ).

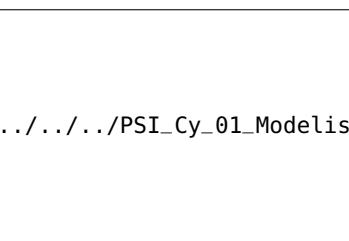
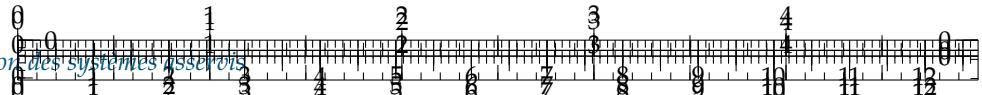
Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

### Résultat – $\xi \geq 1$ : système non oscillant et amorti (apériodique)

- ▶ La fonction de transfert a deux pôles réels.
- ▶ La tangente à l'origine est nulle.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys





### Résultat – $\xi < 1$ : système oscillant et amorti (pseudo périodique)

- ▶ La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- ▶ La tangente à l'origine est nulle.
- ▶ La pseudo-période est de la forme  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ .
- ▶ La valeur du premier dépassement vaut :  $D_1 = KE_0e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ .

### Résultat –

- ▶ Pour  $\xi = 0$  le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude  $KE_0$  (2 $KE_0$  crête à crête).
- ▶ Pour  $\xi \approx 0,69$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **avec dépassement**. Le temps de réponse à 5% est donné par  $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ .
- ▶ Pour  $\xi = 1$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.

## 2.5 Réponse fréquentielle des SLCI

### 2.5.1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme  $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  et on note :

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

- ▶  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  : la période de la sinusoïde en s;
- ▶  $f = \frac{1}{T}$  : fréquence de la sinusoïde en Hz.
- ▶  $A$  : l'amplitude de la sinusoïde;
- ▶  $\omega$  : la pulsation en rad/s;
- ▶  $\varphi$  : la phase à l'origine en rad.

### Définition – Gain & Phase

Soit  $H(p)$  une fonction de transfert. On pose  $p = j\omega$  et on note :

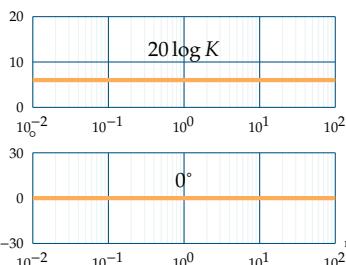
- ▶  $H_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$  le gain décibel de la fonction de transfert;
- ▶  $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$ .

### Résultat –

On note  $H(p) = G_1(p)G_2(p)$ . On a :

- ▶  $H_{dB}(\omega) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega)$ ;
- ▶  $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G_{1dB}(\omega)) + \text{Arg}(G_{2dB}(\omega))$ .

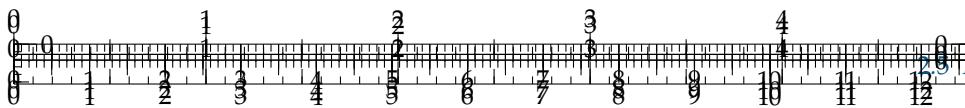
### 2.5.2 Gain



### Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur

- ▶ Fonction de transfert :  $H(p) = K$ .
- ▶ Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ .
- ▶ Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ .

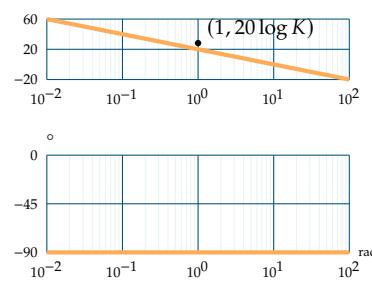




### 2.5.3 Intégrateur

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur

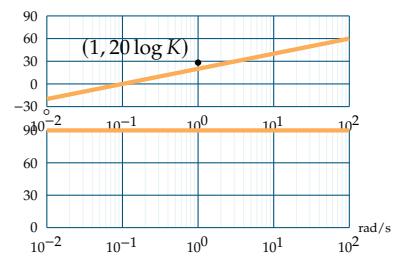
- Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{p}$ .
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $-20\text{dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



### 2.5.4 Dérivateur

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un déivateur

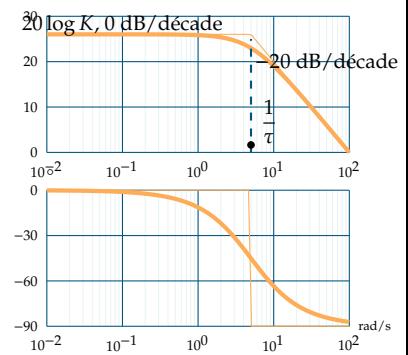
- Fonction de transfert :  $H(p) = Kp$ .
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $20\text{dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $+90^\circ$ .



### 2.5.5 Systèmes d'ordre 1

#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

- Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ .
- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite de pente  $-20\text{dB/decade}$ .
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



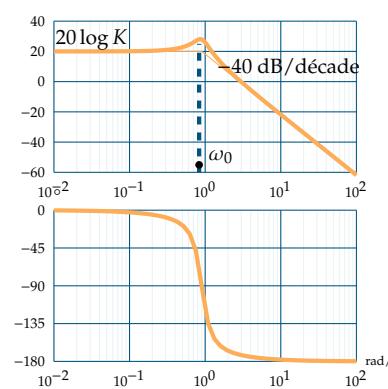
### 2.5.6 Systèmes d'ordre 2

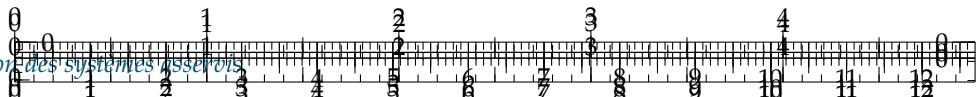
#### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre

- Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ .

Cas où  $\xi < 1$ .

- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
  - pour  $\omega > \omega_0$  : droite de pente  $-40\text{dB/decade}$ .
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;





- pour  $\omega > \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $-180^\circ$ .

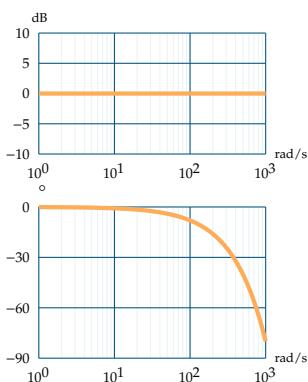
Dans le cas où  $\xi > 1$ , le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$ . On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

### Résultat – Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

À la résonance, l'amplitude maximale est de  $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ . (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit  $20 \log A_{\max}$  lorsque  $\omega = \omega_r$ .)

### 2.5.7 Retard



### Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur

- Fonction de transfert :  $H(p) = e^{-Tp}$ .
- Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- Diagramme de phase asymptotique :  $\arg(H(p)) = -\tau\omega$ .

### 2.5.8 Tracé du diagramme de Bode

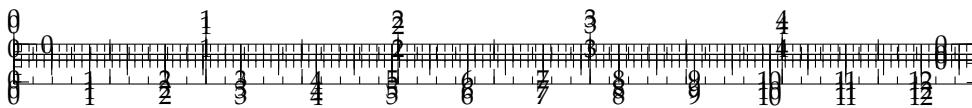
#### Méthode – 1 : Sommation dans le diagramme de Bode

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Tracer chacune des fonctions de transfert.
3. Sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

#### Méthode – 2 : Tableau de variations

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes.
3. Sommer les pentes.
4. Tracer le diagramme de Bode.





## Application 1

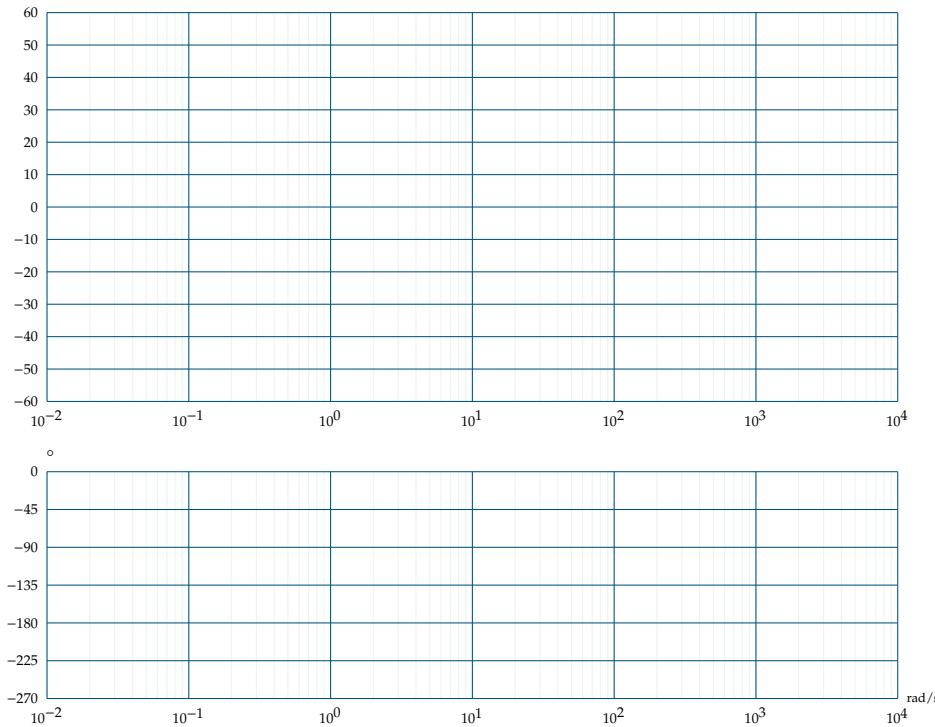
### Réponses fréquentielles – Sujet

D'après Sébastien Grange.

#### Diagramme de Bode

**Question 1** Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

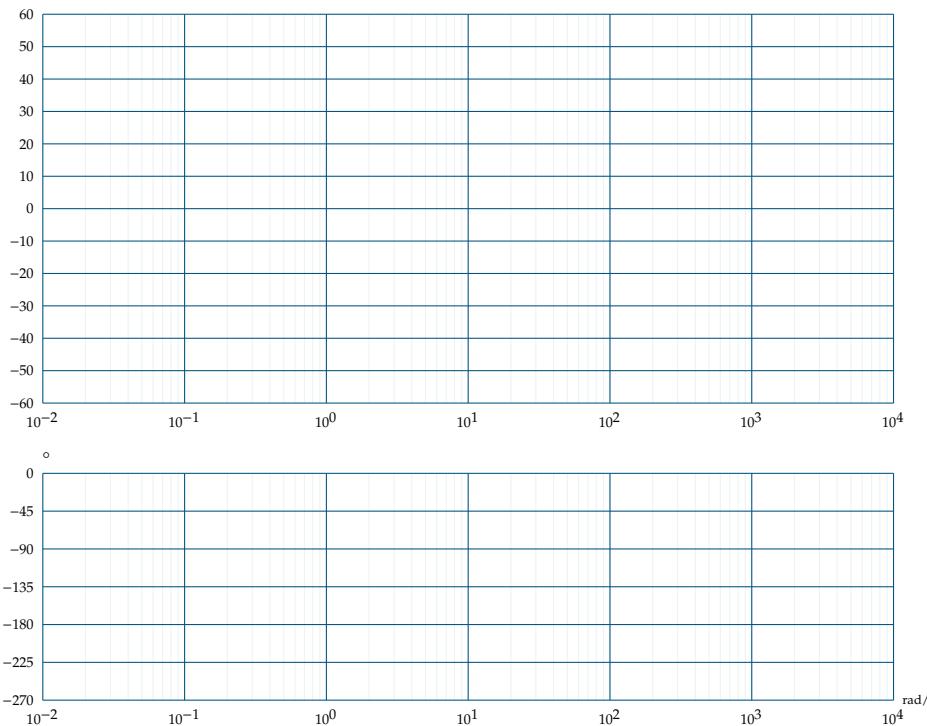
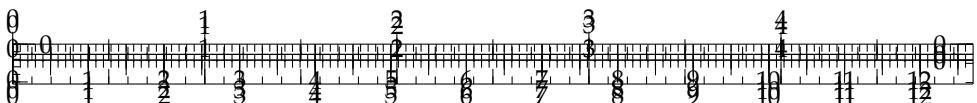
$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$



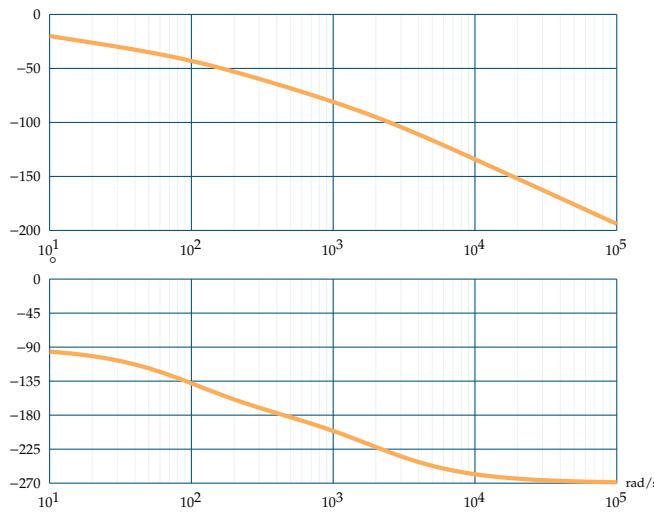
**Question 2** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$





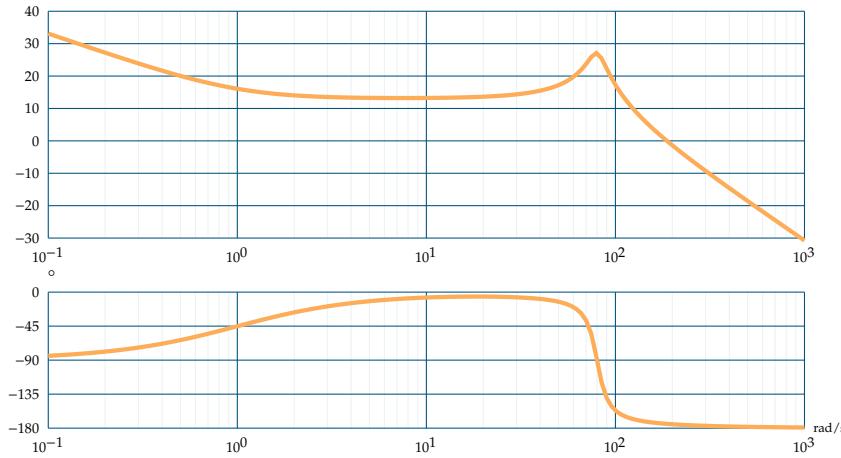
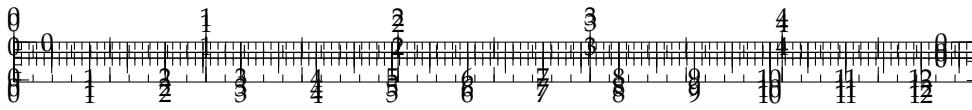
**Question 3** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1p)(1 + T_2p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .



**Question 4** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

**Question 5** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{\text{dB}}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .





**Question 6** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

## Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

**Première étude :**  $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

**Question 7** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

**Question 8** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega_b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

**Deuxième étude :**  $B(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 9** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

**Question 10** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.

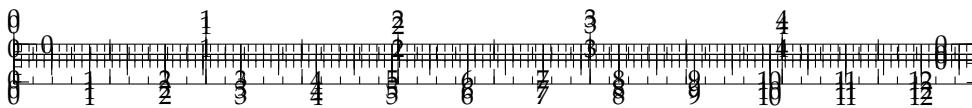
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSy

- ▶  $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ;
- ▶  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $S = 10 \text{ g}^{-1} \cdot 10^{-3} / \text{V} / (\text{m/s}^2)$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur;
- ▶  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement;
- ▶  $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma_b(t)$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisati







# Application 1

## Réponses fréquentielles – Corrigé

D'après Sébastien Grange.

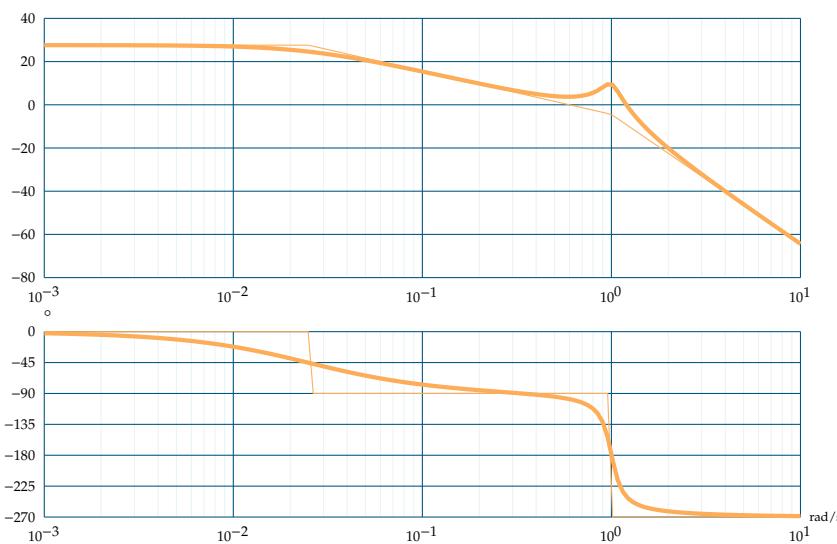
### Diagramme de Bode

**Question 1** Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

#### Correction

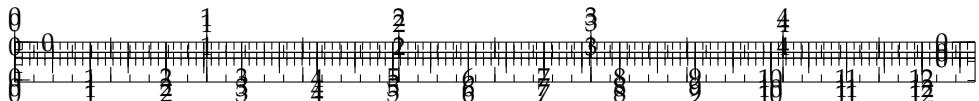
$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)} = \frac{24}{(1 + 40p) \left( 1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1} p + \frac{p^2}{1^2} \right)}$$



**Question 2** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$



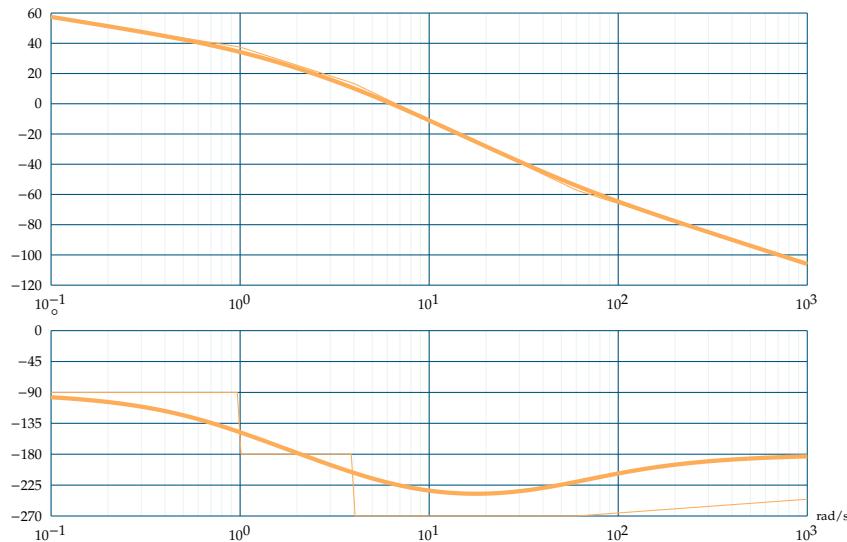


### Correction

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)} = \frac{75(1 + 0,0167p)}{p(1 + (2 \cdot 1,25)/2p + p^2/2^2)} = \frac{75(1 + 0,0167p)}{p(1 + p)(1 + 0,25p)}$$

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_05\_App

Positionnement du diagramme asymptotique de gain : en  $\omega = << 1\text{rad s}^{-1}$ ,  $H(p) \approx \frac{75}{p}$ . Ainsi pour  $\omega \approx 0,1\text{rad s}^{-1}$ ,  $H_{dB}(0, 1) = 20 \log(75/0,1) = 57\text{ dB}$ .



**Question 3** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1p)(1 + T_2p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .

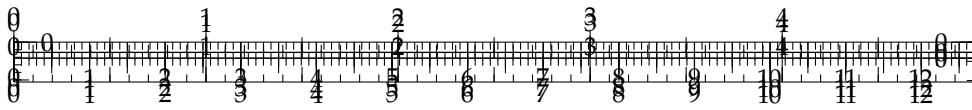
### Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. De plus la phase diminue dans un premier temps de 90 degrés puis encore de 90 degrés ce qui justifie les 2 1<sup>er</sup> ordres.

Pour identifier les constantes de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un premier ordre passe par -45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $\frac{1}{T}$ . Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc les pulsations de coupure lorsque la phase vaut -135 degrés puis -225 degrés. On a :  $1/T_1 \approx 100$  et  $1/T_2 \approx 2000$  donc  $T_1 = 0,01\text{s}$  et  $T_2 = 0,0005\text{s}$ .

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici  $\omega = 0,1\text{rad/s}$ . Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1<sup>er</sup> ordre valent environ  $20 \log K$  et celui de l'intégrateur  $20 \log(1/\omega)$ . On a donc pour  $\omega = 0,1\text{rad/s}$  :  $20 \log(K/0,1) \approx -20$   $K \approx 1$





On a donc :  $H(p) = \frac{1}{p(1 + 0.01p)(1 + 0.0005p)}$ .

Le pôle dominant est le pôle qui met le plus de temps à converger, c'est-à-dire celui qui a la constante de temps la plus grande, on a donc :  $H(p) \simeq \frac{1}{p(1 + 0.01p)}$ .

**Question 4** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

#### Correction

On sait que la sortie sera également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais déphasée et d'amplitude différente :  $s(t) = S_0 \sin(300t + \varphi)$ .

Le diagramme de Bode nous donne le rapport de l'amplitude entre la sortie et l'entrée (courbe de gain) et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (courbe de phase).

$$G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) = 20 \log(S_0/E_0) = 20 \log(S_0/3).$$

On peut lire que :  $G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) \simeq -60 \text{ dB}$  et donc  $S_0 \simeq 3 \cdot 10^{-3}$ . D'après la courbe de phase, on peut lire :  $\varphi(\omega = 300 \text{ rad/s}) = -175 \text{ degrés}$ . On a donc :  $s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(300t - 3,05)$ . L'angle est à mettre en radians.

**Question 5** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .

#### Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. Ensuite la phase augmente dans un premier temps de 90 degrés, ce qui signifie la présence d'un « 1er ordre » en numérateur. Puis la phase diminue de 180 degrés et le gain résonne ce qui justifie la présence d'un 2ème ordre avec un coefficient d'amortissement plus petit que  $1/\sqrt{2}$ .

$$H(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p(1 + 2\xi/\omega_0 p + p^2/(\omega_0^2))}$$

Pour identifier la constante de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un « premier ordre » au numérateur passe par 45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $1/\tau$ . Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -45 degrés. On a :  $1/T \simeq 1$  et  $T = 1 \text{ s}$ .

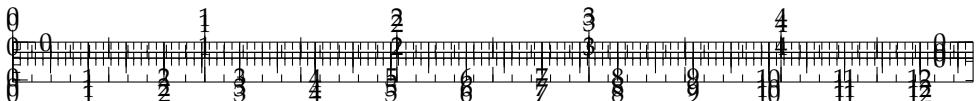
Pour identifier la pulsation de coupure, on va utiliser le fait que la phase d'un 2ème ordre passe par -90 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $\omega_0$ . Ici, il y a un intégrateur et un « 1er ordre » au numérateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -90 degrés. On a :  $\omega_0 \simeq 80 \text{ rad/s}$ .

Pour identifier le coefficient d'amortissement, on va utiliser la résonnance. On a :  $20 \log(1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})) \simeq 13$  et  $\xi \simeq 0,11$ .

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ . Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1er ordre et du 2ème ordre valent environ  $20 \log K$  et celui de l'intégrateur  $20 \log(1/\omega)$ . On a donc pour  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$  :  $20 \log(K/0,1) \simeq 33$  et  $K \simeq 4,5$

**Question 6** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.





## Réponse fréquentielle

.../.

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

- $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ;
- $\tau = 0,2\text{s}$  et  $S = 10\text{g}^{-1} \cdot 10^{-3}/V/(m/s^2)$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur;
- $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement;
- $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma_b(t)$ .

**Première étude :**  $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

**Question 7** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne?

### Correction

$$\text{En calculant la FTBF on a } FTBF(p) = \frac{\frac{A}{1+\tau p}}{1 + \frac{AS}{1+\tau p}} = \frac{A}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)}.$$

$$\text{Par suite } \Gamma_b(p) = \frac{A}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)} \frac{E_0}{p}.$$

$$\text{On a donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \Gamma_b(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)} \frac{E_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{AE_0}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)} = \frac{AE_0}{1 + AS}.$$

$$\text{Pour } E_0 = 0,2 \text{ V}, \Gamma_f = \frac{100g \times 0,2}{1 + 100g \times 10 \times 10^{-3} \text{ g}^{-1}} = 10 \text{ g.}$$

$$\text{On veut } \frac{AE_0}{1 + AS} = 20 \text{ g soit } E_0 = 20g \frac{1 + AS}{A} E_0 = 20g \frac{1 + 100 \times 10 \times 10^{-3}}{100g} = 0,4 \text{ g. Il faudrait donc } E_0 = 0,4 \text{ V.}$$

**Question 8** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega_b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

### Correction

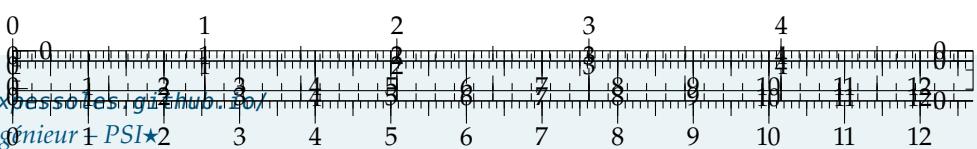
$$FTBF(p) = \frac{A}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)} = \frac{\frac{A}{1 + \tau p}}{1 + \frac{AS}{1 + \tau p}} \text{ en faisant l'application numérique, } FTBF(p) = \frac{50g}{1 + 0,2p}.$$

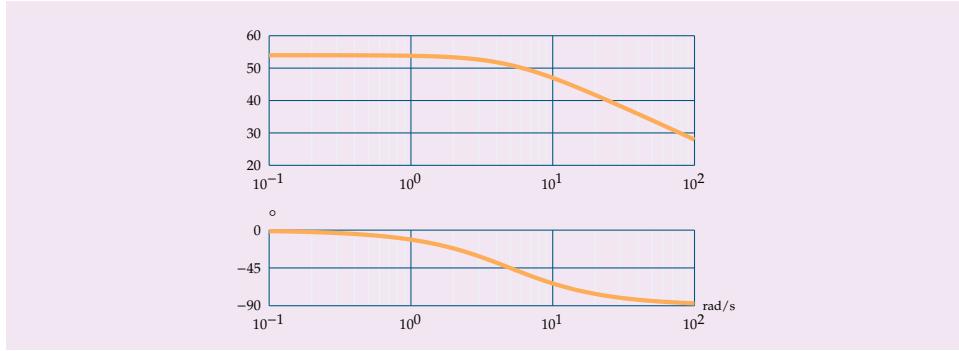
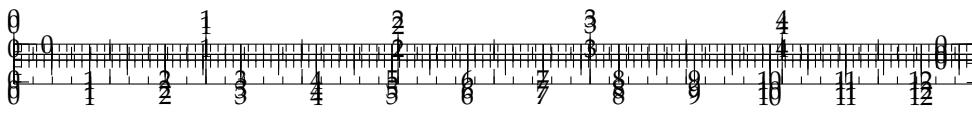
$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(50g) - 20 \log \sqrt{1 + 0,2^2 \omega^2} \text{ et } G_{\text{dB}}(10) = 20 \log(50g) - 20 \log \sqrt{5} = 20 \log(10g\sqrt{5}) \simeq 47 \simeq 20 \log 223.$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan 0,2\omega \text{ et } \varphi(10) = -\arctan 2 \simeq -63^\circ.$$

$$\text{Au final } \omega_b(t) = 0,2 \times 223 \sin(\omega t - 63^\circ).$$

Pour information, on donne le diagramme de Bode de la FTBF.





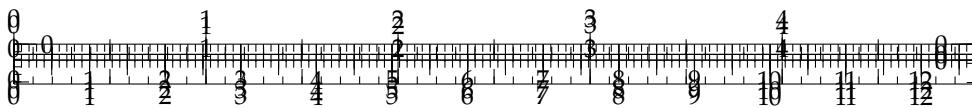
**Deuxième étude :**  $B(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 9** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

**Question 10** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.







../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_01\_BTP/images/fig\_00.png

## TD 1

# Banc d'essai BTP- Sujet

Concours CCINP – TSI 2015

B2-07

C2-03

### Mise en situation

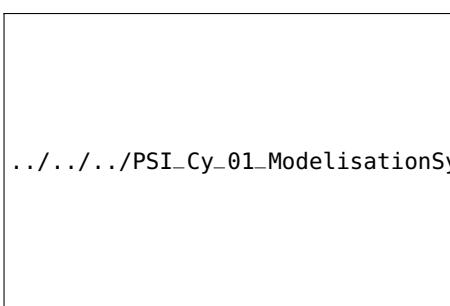
Airbus Helicopters commercialise des hélicoptères civils et militaires. Le déplacement des hélicoptères est assuré par un rotor principal permettant la sustentation et la translation de l'appareil. Un rotor arrière permet de compenser le couple de réaction engendré par le rotor principal et de contrôler les mouvements de lacet de l'appareil (figure ??). La puissance est délivrée par deux turboréacteurs (certains hélicoptères ne sont équipés que d'un turboréacteur). Ces turboréacteurs entraînent en rotation une boîte de transmission principale (BTP) qui elle-même entraîne d'une part le rotor principal et d'autre part le rotor arrière, par l'intermédiaire d'un arbre de transmission et d'une boîte de transmission arrière (BTA). La BTP assure aussi l'entraînement d'une série d'accessoires permettant le fonctionnement de l'appareil (alternateur, pompe hydraulique ...). Pour chaque association hélicoptère - turboréacteur, un banc d'essai permet de vérifier que la BTP répond au cahier des charges. La figure ?? présente la structure du banc d'essai.

../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

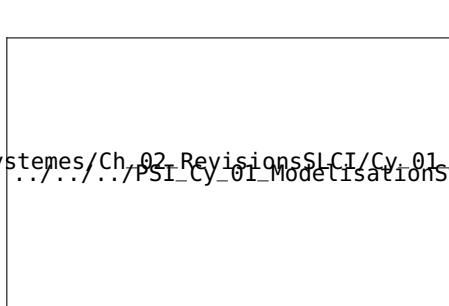
### Objectif

Valider Req 1.1.1.

../../../../PSI\_Cy\_01\_Modelisation



(a) Hélicoptère.



(b) Structure du banc d'essai.

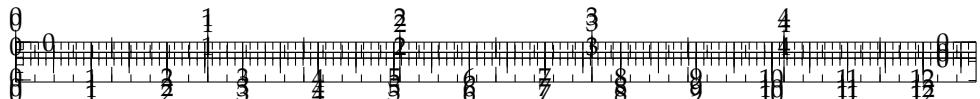
d'essai

### Le moteur à courant continu

On note :

- $u(t)$  : la tension appliquée aux bornes de l'induit;





- $i(t)$  : le courant absorbé par l'induit;
- $e(t)$  : la force contre-électromotrice;
- $\omega_m(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- $c_m(t)$  : le couple moteur;
- $c_r(t)$  : le couple résistant sur l'arbre moteur dû à la génération d'un couple résistant en sortie de BTP;
- $K_c$  : la constante de couple définie telle que  $c_m(t) = K_c i(t)$  (équation 1);
- $K_e$  : la constante de force contre-électromotrice définie telle que  $e(t) = K_e \omega_m(t)$  (équation 2).

Le banc d'essai est équipé d'un dispositif permettant de générer un couple résistant sur le rotor de sortie de la BTP. Cela permet de simuler les actions aérodynamiques sur les pales. Il faut donc évaluer l'impact de ce couple sur la vitesse du moteur. La modélisation adoptée pour le moteur à courant continu est celle de la figure ??.

- $R$  : la résistance de l'induit;
- $L$  : l'inductance de l'induit;
- $f$  : le coefficient de frottement, qui génère un couple résistant proportionnel à  $\omega_m(t)$ ;
- $I_{eq}$  : l'inertie équivalente du banc d'essai ramené à l'arbre moteur;

**FIGURE 2.6 – Schéma équivalent du moteur à courant continu.**

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_01

Hypothèses :

- le comportement de chacun des composants sera considéré comme linéaire, continu et invariant;
- les conditions de Heaviside sont considérées comme vérifiées;
- on note  $p$  la variable de Laplace. La transformée de Laplace d'une fonction temporelle  $f(t)$  sera notée  $F(p)$  (la transformée de  $\omega(t)$  sera notée  $\Omega(p)$ ).

## Modélisation de l'asservissement en vitesse

Hypothèses :

- on néglige l'inductance du moteur à courant continu ainsi que l'effet du coefficient de frottement;
- on fait l'hypothèse que  $K_c = K_e = K$ ;
- pour simplifier l'étude, la boucle de courant n'a pas été modélisée.

Le schéma-blocs de l'asservissement en vitesse du moteur à courant continu est donné sur la figure ??.

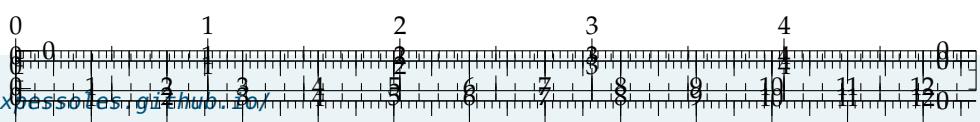
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_01

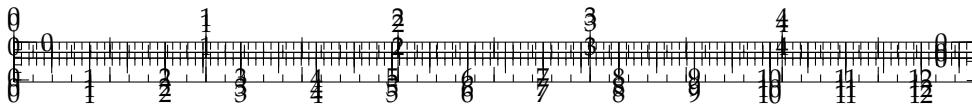
**FIGURE 2.7 – Régulation en vitesse du banc d'essai.**

**Question 1** Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour ? Comment déterminer la valeur du gain  $K_{Adapt}$  ?

**Hypothèse 1 : on considère que  $C_r(p) = 0$  et  $\Omega_c(p) \neq 0$ .**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_C(p))$ . On considère





que  $C(p) = K_P$ ,  $K_P$  étant constant. Mettre  $H_1(p)$  sous la forme  $K_1/(1 + \tau_1 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$ .

**Hypothèse 2 : on considère que  $\Omega_C(p) = 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 3** Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$  ■

On considère que  $C(p) = K_P$ ,  $K_P$  étant constante. Mettre  $H_2(p)$  sous la forme  $-K_2/(1 + \tau_2 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_2$  et  $\tau_2$ .

**Hypothèse 3 : on considère maintenant que  $\Omega_C(p) \neq 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 5** En utilisant le théorème de superposition, exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $\Omega_c(p)$  et  $C_r(p)$ .

À une fréquence de rotation de  $350 \text{ min}^{-1}$  en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de  $1928 \text{ min}^{-1}$  soit environ  $202 \text{ rad/s}$ . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à  $990 \text{ Nm}$ . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude  $202 \text{ rad/s}$  et à un couple résistant de  $990 \text{ Nm}$ .

**Question 6** Après avoir exprimé la consigne  $\Omega_c(p)$  puis le couple résistant  $C_r(p)$ , calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 7** Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain  $K_I$  de la forme  $C(p) = K_I/p$  ?

**Question 8** En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

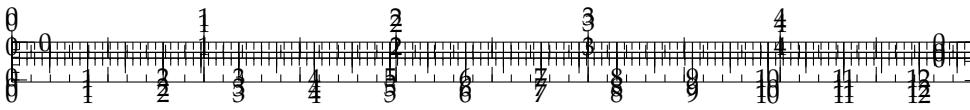
#### Éléments de correction

1.  $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$ .
2.  $K_1 = \frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}} \text{ et } \tau_1 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K^2 + K K_P K_{\text{Capt}}}.$
3. .
4.  $K_2 = \frac{R}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})} \text{ et } \tau_2 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}.$
5.  $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p).$
6.  $\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}} K_1) \Omega_{c0} + K_{\text{Capt}} K_2 C_{r0}.$
7. On montre que l'écart statique est annulé.
8.  $\varepsilon = 0.$

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisati







../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_01\_BTP/images/fig\_00.png

## TD 1

### Banc d'essai BTP- Corrigé

Concours CCINP – TSI 2015

B2-07

C2-03

#### Mise en situation

##### Objectif

Valider Req 1.1.1.

#### Le moteur à courant continu

#### Modélisation de l'asservissement en vitesse

**Question 1** Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour? Comment déterminer la valeur du gain  $K_{\text{Adapt}}$ ?

##### Correction

Il s'agit de réaliser un asservissement en fréquence de rotation. On pourrait utiliser une génératrice tachymétrique.

Afin d'avoir un asservissement précis ( $\varepsilon(p) = 0$  lorsque  $\Omega_c(p) = \Omega(p)$ ), on prend  $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$ .

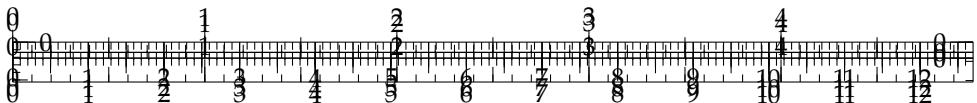
**Hypothèse 1 : on considère que  $C_r(p) = 0$  et  $\Omega_c(p) \neq 0$ .**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_c(p))$ . On considère que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constant. Mettre  $H_1(p)$  sous la forme  $K_1/(1 + \tau_1 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$ .

##### Correction

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K}{RI_{\text{eq}}p}}{1 + \frac{K^2}{RI_{\text{eq}}p}} = \frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} = \frac{1/K}{1 + \frac{RI_{\text{eq}}}{K^2}p}$$





$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)} = K_{\text{Adapt}} \frac{\frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} C(p)}{1 + \frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} C(p) K_{\text{Capt}}} = \frac{K_{\text{Adapt}} K C(p)}{RI_{\text{eq}}p + K^2 + KC(p) K_{\text{Capt}}}$$

$$H_1(p) = \frac{K_{\text{Adapt}} K K_P}{RI_{\text{eq}}p + K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}} = \frac{\frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}}}{\frac{RI_{\text{eq}}}{K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}} p + 1} = \frac{K_1}{1 + \tau_1 p}$$

Soit par identification :  $K_1 = \frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}}$  et  $\tau_1 = \frac{RI_{\text{eq}}}{K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}}$ .

**Hypothèse 2 :** on considère que  $\Omega_C(p) = 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .

**Question 3** Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

#### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_C

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$

On considère que  $C(p) = K_P$ ,  $K_P$  étant constante. Mettre  $H_2(p)$  sous la forme  $-K_2/(1 + \tau_2 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_2$  et  $\tau_2$ .

#### Correction

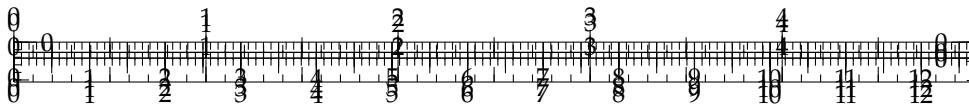
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_C

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_C

$$\text{On a donc : } H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = -\frac{1}{\frac{K}{R} \left( K + K_P K_{\text{Capt}} \right) + I_{\text{eq}} p} = -\frac{\frac{R}{K} \left( K + K_P K_{\text{Capt}} \right)}{1 + \frac{R I_{\text{eq}}}{K \left( K + K_P K_{\text{Capt}} \right)} p}$$

$$= -\frac{K_2}{1 + \tau_2 p} \text{ Soit par identification : } K_2 = \frac{R}{K \left( K + K_P K_{\text{Capt}} \right)} \text{ et } \tau_2 = \tau_1 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K \left( K + K_P K_{\text{Capt}} \right)}$$





**Hypothèse 3 :** on considère maintenant que  $\Omega_c(p) \neq 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .

**Question 5** En utilisant le théorème de superposition, exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $\Omega_c(p)$  et  $C_r(p)$ .

#### Correction

Par superposition on a :  $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p)$ .

À une fréquence de rotation de  $350 \text{ min}^{-1}$  en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de  $1928 \text{ min}^{-1}$  soit environ  $202 \text{ rad/s}$ . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à  $990 \text{ Nm}$ . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude  $202 \text{ rad/s}$  et à un couple résistant de  $990 \text{ Nm}$ .

**Question 6** Après avoir exprimé la consigne  $\Omega_c(p)$  puis le couple résistant  $C_r(p)$ , calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

#### Correction

On a, pour des échelons de consignes :  $\Omega_c(p) = \frac{\Omega_{c0}}{p}$  avec  $\Omega_{c0} = 202 \text{ rad/s}$  et  $C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$  avec  $C_{r0} = 990 \text{ Nm}$ .

L'écart statique  $\varepsilon_S$  s'écrit en sortie du comparateur :

$$\begin{aligned}\varepsilon_S &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}\Omega_m(p)) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} \left( p(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_1(p)\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_2(p)C_r(p)) \right) \\ &\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( K_{\text{Adapt}}\frac{\Omega_{c0}}{p} - K_{\text{Capt}}K_1\frac{\Omega_{c0}}{p} + K_{\text{Capt}}K_2\frac{C_{r0}}{p} \right) \\ &\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}}K_1)\Omega_{c0} + K_{\text{Capt}}K_2C_{r0}\end{aligned}$$

L'écart statique ne pourra pas être nul (exigence 1.1.1 du cahier des charges non vérifiée).

**Question 7** Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain  $K_I$  de la forme  $C(p) = K_I/p$  ?

#### Correction

En choisissant  $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$ , l'écart statique pourra être réduit à condition d'avoir un gain  $K_P$  important  $K_1 \rightarrow 1$  et  $K_2 \rightarrow 0$ , mais pas trop pour ne pas rendre le système instable. Avec un correcteur intégral, le système devient de classe 1 et l'écart statique est annulé.

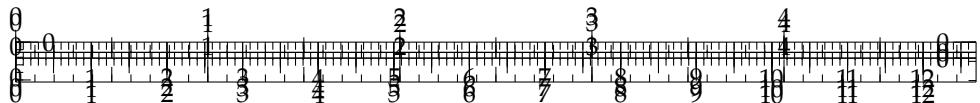
**Question 8** En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

#### Correction

En reprenant le raisonnement de la question \*\*, et en remplaçant  $C(p)$  par  $K_I/p$  dans

$$\text{les expressions de } H_1(p) \text{ et } H_2(p) : \lim_{p \rightarrow 0} H_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \frac{\frac{R I_{\text{eq}} p + K^2}{K} p}{1 + \frac{R I_{\text{eq}} p + K^2}{K} \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}}} =$$





$$\frac{K_{\text{Adapt}}}{K_{\text{Capt}}}.$$

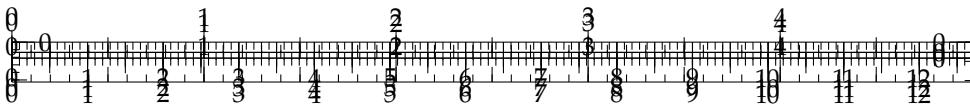
$$\lim_{p \rightarrow 0} H_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{1}{\frac{K}{R} \left( K + \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}} \right) + I_{\text{eq}} p} = 0$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( K_{\text{Adapt}} \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_1(p) \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_2(p) C_r(p) \right)$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} K_{\text{Adapt}} / K_{\text{Capt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} 0 C_r 0 = 0$$

Dans ce cas, l'application d'un couple perturbateur n'a donc pas d'influence sur l'écart statique. La fréquence de rotation du rotor peut être temporairement impactée, mais au bout d'un laps de temps, l'écart statique tend vers 0. L'exigence 1.1.1 est donc vérifiée.





../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_02\_AssemblageFalcon/images/fig\_00.png

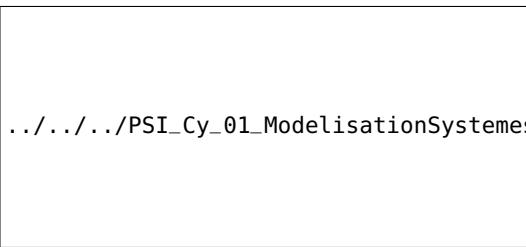
## TD 2

# Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Sujet

Concours E3A – PSI 2015.

### Mise en situation

#### Présentation



Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.

L'objectif de cette partie est de valider les choix effectués par la société pour le sous ensemble de sélection des fixations de la cellule (exigence 1.1).

#### Axe chariot

Le déplacement du chariot est assuré par un axe numérique asservi en vitesse et en position. Cet axe est composé d'un moteur à courant continu, d'un système de transmission de puissance de type poulies / courroie et d'un rail.

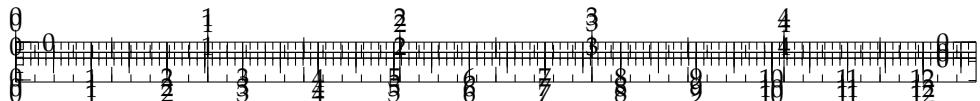
La modélisation du système de déplacement du chariot est donné ci-contre.

### Sélectionner les fixations – Exigence 1.1

Afin de sélectionner le type de fixation, la buse d'aspiration doit être déplacée en face de la cassette avec une erreur inférieure à 0,5 mm (voir exigences fonctionnelles). Cependant le fabricant du système poulie-courroie du rail indique déjà une erreur de  $\pm 0,25$  mm due notamment à l'élasticité de la courroie. Par conséquent, l'erreur en position de la commande doit être nulle. De plus, afin de ne pas perdre de temps lors



../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys



de la production, le temps maximal de déplacement lors de la sélection est imposé à une seconde.

L'étude se fera dans le cas le plus défavorable c'est-à-dire un déplacement du chariot vers le haut entre les deux cassettes de rivets les plus éloignées. L'axe de déplacement est appelé  $\vec{y}_c$

## Notations domaine temporel – domaine de Laplace

Les notations entre le domaine temporel et celui de Laplace sont données dans la suite. Ainsi, si la fonction  $f(t)$  possède une transformée de Laplace, elle sera notée :  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $u(t) = e(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t);$                        | <input type="checkbox"/> $u(t)$ : tension moteur;                                      |
| <input type="checkbox"/> $e(t) = K_E \omega_m(t);$  | <input type="checkbox"/> $i(t)$ : courant moteur;                                      |
| <input type="checkbox"/> $C_M(t) = K_C i(t);$   | <input type="checkbox"/> $e(t)$ : force contre-électromotrice;                         |
| <input type="checkbox"/> $J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f\omega_m(t) = C_M(t) - C_R(t).$ | <input type="checkbox"/> $\omega_m(t)$ : vitesse de rotation moteur;                   |
|   | <input type="checkbox"/> $C_M(t)$ : couple moteur;                                     |
|   | <input type="checkbox"/> $C_R(t)$ : couple résistant modélisant l'action de pesanteur. |

## Critères à respecter pour l'exigence 1.2

Exigence	Critères	Niveaux
Déplacer le chariot	<b>Précision</b> : erreur statique par rapport à une consigne de vitesse constante <b>Rapidité</b> : temps de réponse à 5% en réponse à une consigne échelon <b>Stabilité</b>	NULLE $T_{r5\%} = 0,1\text{s}$ maxi
	Marge de gain : Marge de phase :	6 dB mini 45° mini

## Choix d'une architecture de la chaîne de transmission

**Question 1** Proposer sous la forme d'un schéma une autre solution permettant le déplacement du chariot. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique par un moteur doit être conservée.

Compte tenu des vitesses de translation importantes, le système retenu est de type poulie-courroie.

## Détermination de l'inertie équivalente

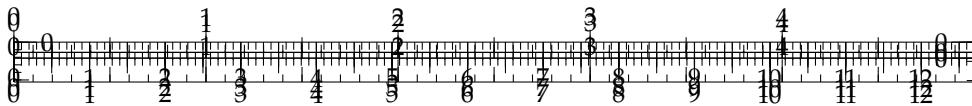
Les grandeurs caractéristiques (notations et valeurs) des éléments de l'axe du chariot sont données dans le tableau ci-dessous.

Moment d'inertie du rotor du moteur autour de son axe	$J_m$	$140 \times 10^{-6}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie du réducteur ramené à l'arbre moteur	$J_{rd}$	$60 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie de la poulie motrice autour de son axe	$J_{PM}$	$38 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Moment d'inertie de la poulie réceptrice autour de son axe	$J_{PR}$	$38 \times 10^{-4}\text{kg m}^2$
Masse totale du chariot	$M$	5 kg
Vitesse de rotation de l'arbre moteur	$\omega_m$	
Vitesse de rotation de l'arbre de sortie du réducteur	$\omega_r$	
Rayon d'une poulie motrice ou réceptrice	$R_p$	45 mm
Rapport de réduction réducteur ( $\omega_r / \omega_m$ )	$\lambda$	1/5

**Question 2** À partir des grandeurs définies déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente  $J_{eq}$  de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{moteur+réducteur+poulies+chariot}\}$  ramenée sur l'arbre moteur. Cette inertie équivalente est définie par  $E_c(\Sigma) = 1/2 J_{eq} \omega_m^2$ .

**Question 3** Déterminer la valeur numérique de l'expression précédente.





## Modèle de connaissance du moteur à courant continu

### Objectif

L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de la motorisation de l'axe afin de simuler un déplacement.

**Question 4** À partir des équations du moteur à courant continu, réaliser le schéma-blocs du moteur à courant continu.

**Question 5** En considérant que  $C_R(p) = 0$ , déterminer la fonction de transfert  $H_M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$  sous sa forme canonique.

Le coefficient de frottement visqueux est donné par  $f = 0,2 \times 10^{-2} \text{ Nms rad}^{-1}$ , l'inductance par  $L = 9 \text{ mH}$ , la résistance de l'induit par  $R = 3 \text{ Ohm}$ , la constante de couple par  $K_c = 1,3 \text{ NmA}^{-1}$  et  $K_E = 1,3 \text{ V (rad s}^{-1}\text{)}^{-1}$ .

**Question 6** Montrer que la fonction de transfert  $H_M(p)$  peut se mettre sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_C}{K_C K_e + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2}$

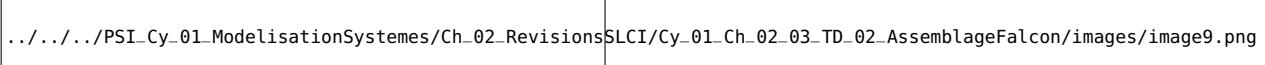
Justifier la réponse. Pour cette question, la valeur numérique de  $J_{eq}$  considérée sera  $J_{eq} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$  indépendamment du résultat numérique calculé précédemment.

**Question 7** Montrer qu'avec l'expression,  $H_M(p)$  peut s'écrire sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}$  avec  $T_E < T_M$ .

## Étude de l'asservissement en position de l'axe

### Modélisation de l'asservissement en position

La partie précédente a permis de déterminer un modèle du moteur. La suite de l'étude va permettre, par simulation, de déterminer les réglages nécessaires de l'axe vis-à-vis du cahier des charges. La figure suivante présente le principe de l'asservissement de l'axe du chariot.



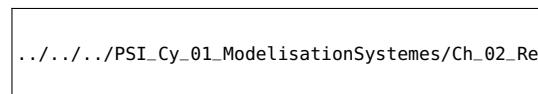
Les grandeurs caractéristiques des blocs de l'asservissement de l'axe chariot sont données dans le tableau ci-contre.

**Question 8** Quelle doit être la valeur de  $K_G$  pour assurer un asservissement correct (c'est-à-dire l'écart  $\varepsilon$  doit être nul si la position de l'axe est identique à la consigne)?

**Question 9** Donner le schéma-blocs de l'asservissement.

## Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant  $C_R$  dû à l'action de pesanteur est supposé constant.



Générateur	$K_G$	À déterminer
Capteur de position	$K_{capt}$	$5 \times 10^{-3} \text{ V rad}^{-1}$
Correcteur amplificateur	$C(p)$	Variable

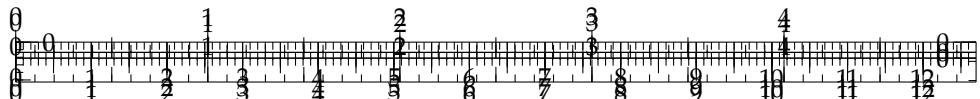
**Question 10** Donner l'expression de  $Y(p)$ .

**Question 11** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .



Avec :

- $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} ;$
- $H_C(p) = \frac{(R + Lp) K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} ;$
- $C_R(p) = C_R/p ;$
- $K_R = R_p \lambda .$



**Question 12** On souhaite que lorsque le système se déplace à vitesse constante, l'erreur sur la vitesse atteinte par le système soit nulle. Quelle sollicitation doit-on utiliser. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

**Question 13** Conclure.

Afin de répondre totalement au cahier des charges, l'utilisation d'un correcteur proportionnel intégral dérivé est retenue. En effet, la commande de l'axe intègre directement ce type de correcteur. Dans la suite du problème, le correcteur  $C(p)$  sera de la forme :  $C(p) = K_I \left( 1 + \frac{1}{(T_I p)} \right) (1 + T_D p)$ . Le réglage des coefficients a été fait par simulation numérique. Afin de vérifier maintenant le critère de rapidité, on donne la réponse temporelle (figure ??) de l'axe à un échelon de position de 1 m.

**Question 14** Conclure sur la conformité au cahier des charges du système ainsi réglé.

**Question 15** Tracer le diagramme de Bode.

On considère  $C_R(p) = 0$ . On prendra  $K_M = 0,8 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ ,  $T_e = 0,0051 \text{ s}$ ,  $T_m = 0,0074 \text{ s}$ .

**Question 16** Révision SLCI Cy\_01\_Ch\_02\_TD\_02\_AssemblageFalcon/images/image11.png pour  $C(p) = 1$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

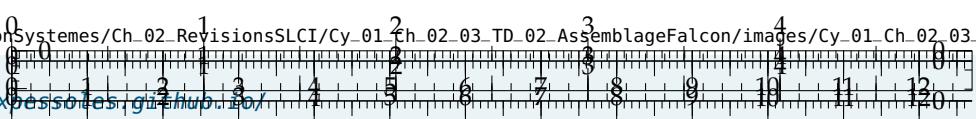
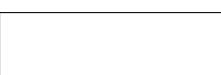
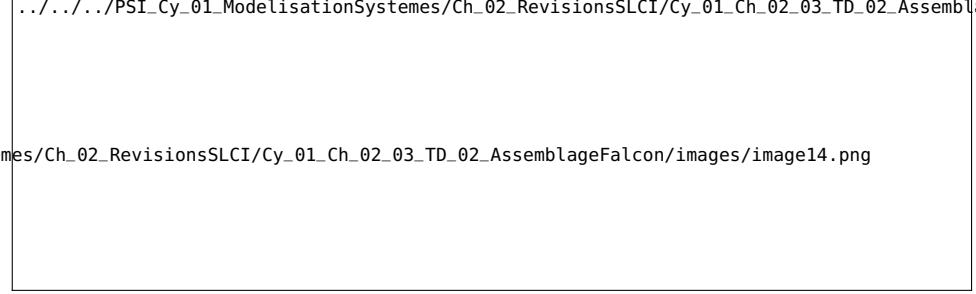
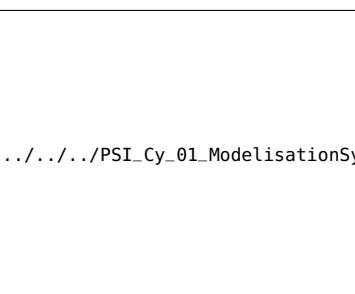
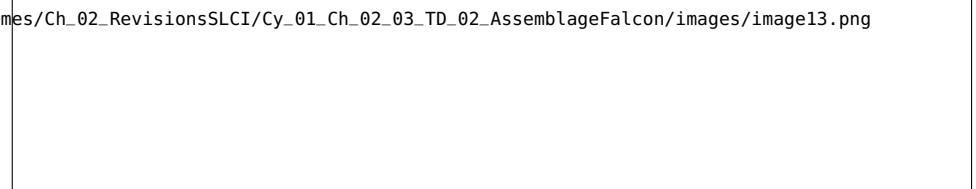
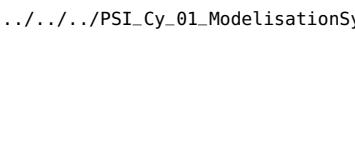
**Question 17** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = \frac{1}{p}$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

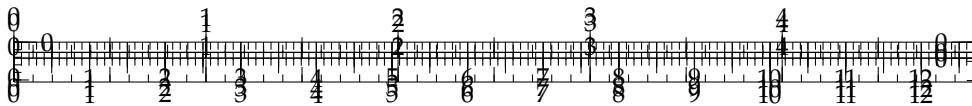
On donne ci-dessous les diagrammes de Bode avec les correcteurs optimisés. Déterminer les marges de gain et marges de phase.

## Vérification des performances de l'axe du magasin de rivets

Afin de vérifier les réglages précédents, un essai sur le système réel est réalisé. Une consigne de 2 m est donnée. L'absence de système d'acquisition dédié impose un système de mesure extérieur au système réel. C'est un dispositif d'analyse d'image qui est retenu pour ces mesures.

**Question 18** À partir des relevés ci-dessous, conclure sur le respect des exigences fonctionnelles de l'axe du magasin de stockage des rivets (Exigence 1.1).





../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_02\_AssemblageFalcon/images/fig\_00.png

## TD 2

# Cellule d'assemblage pour avion Falcon – Corrigé

Concours E3A – PSI 2015.

## Mise en situation

### Sélectionner les fixations – Exigence 1.1

### Critères à respecter pour l'exigence 1.2

## Choix d'une architecture de la chaîne de transmission

**Question 1** Proposer sous la forme d'un schéma une autre solution permettant le déplacement du chariot. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique par un moteur doit être conservée.

### Correction

Utilisation d'un système vis-écrou.

## Détermination de l'inertie équivalente

**Question 2** À partir des grandeurs définies déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente  $J_{eq}$  de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{moteur+réducteur+poulies+chariot}\}$  ramenée sur l'arbre moteur. Cette inertie équivalente est définie par  $E_c(\Sigma) = 1/2J_{eq}\omega_m^2$ .

### Correction

$E_c(\Sigma) = E_c(\text{moteur}) + E_c(\text{réducteur}) + E_c(\text{poulies}) + E_c(\text{chariot})$ .

- $E_c(\text{moteur}) = 1/2J_m\omega_m^2$  ;
- $E_c(\text{réducteur}) = 1/2J_{red}\omega_m^2$  ;
- $E_c(\text{poulies}) = 1/2(J_{Pm} + J_{PR})\omega_{red}^2 = 1/2(J_{Pm} + J_{PR})\lambda^2\omega_m^2$  ;
- $E_c(\text{chariot}) = 1/2MV^2 = 1/2MR_p^2\lambda^2\omega_m^2$ .

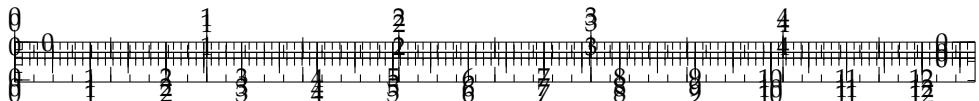
On a donc  $J_{eq} = MR_p^2\lambda^2 + (J_{Pm} + J_{PR})\lambda^2 + J_{red} + J_m$ .

**Question 3** Déterminer la valeur numérique de l'expression précédente.

### Correction

$$J_{eq} = 0,0068 \text{ kg m}^2$$





## Modèle de connaissance du moteur à courant continu

### Objectif

L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de la motorisation de l'axe afin de simuler un déplacement.

**Question 4** À partir des équations du moteur à courant continu, réaliser le schéma-blocs du moteur à courant continu.

### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_01

**Question 5** En considérant que  $C_R(p) = 0$ , déterminer la fonction de transfert  $H_M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$  sous sa forme canonique.

### Correction

$$H_m(p) = \frac{\frac{K_c}{K_c K_E + Rf}}{1 + \frac{RJ_{eq} + Lf}{K_c K_E + Rf} p + \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E + Rf} p^2}$$

Le coefficient de frottement visqueux est donné par  $f = 0,2 \times 10^{-2} \text{ Nms rad}^{-1}$ , l'inductance par  $L = 9 \text{ mH}$ , la résistance de l'induit par  $R = 3 \text{ Ohm}$ , la constante de couple par  $K_c = 1,3 \text{ NmA}^{-1}$  et  $K_E = 1,3 \text{ V}(\text{rad s}^{-1})^{-1}$ .

**Question 6** Montrer que la fonction de transfert  $H_M(p)$  peut se mettre sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_c}{K_c K_E + RJ_{eq}p + LJ_{eq}p^2}$ . Justifier la réponse. Pour cette question, la valeur numérique de  $J_{eq}$  considérée sera  $J_{eq} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$  indépendamment du résultat numérique calculé précédemment.

### Correction

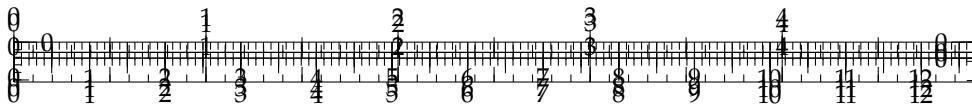
En faisant les applications numériques on montre que  $Rf$  est négligeable devant  $K_c K_E$  et que  $Lf$  est négligeable devant  $RJ_{eq}$ . On a donc :  $H_m(p) = \frac{\frac{K_c}{K_c K_E}}{1 + \frac{RJ_{eq}}{K_c K_E} p + \frac{LJ_{eq}}{K_c K_E} p^2} = \frac{K_c}{K_c K_E + RJ_{eq}p + LJ_{eq}p^2}$ .

**Question 7** Montrer qu'avec l'expression,  $H_M(p)$  peut s'écrire sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}$  avec  $T_E < T_M$ .

### Correction

$$\left\{ \begin{array}{l} T_e + T_m = \frac{RJ_{eq}}{K_c K_e} \\ T_e T_m = \frac{LJ_{eq}}{K_c K_e} \end{array} \right. \quad \text{On a (résolution d'une équation du second degré) : } \\ T_e = \frac{\frac{RJ_{eq}}{K_c K_e} - \sqrt{\left(\frac{RJ_{eq}}{K_c K_e}\right)^2 - 4 \frac{LJ_{eq}}{K_c K_e}}}{2}. T_e = 0,0051 \text{ s et } T_m = 0,0074 \text{ s.}$$





## Étude de l'asservissement en position de l'axe

### Modélisation de l'asservissement en position

**Question 8** Quelle doit être la valeur de  $K_G$  pour assurer un asservissement correct (c'est-à-dire l'écart  $\varepsilon$  doit être nul si la position de l'axe est identique à la consigne) ?

#### Correction

On doit avoir  $K_G = K_{\text{capt}} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{R_p} = 0,556 \text{ V rad}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

**Question 9** Donner le schéma-blocs de l'asservissement.

#### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_02\_AssemblageFalcon/images/corr\_02.png

## Étude du modèle simplifié

**Question 10** Donner l'expression de  $Y(p)$ .

#### Correction

On raisonne par superposition :

Si  $C_r(p) = 0$  :

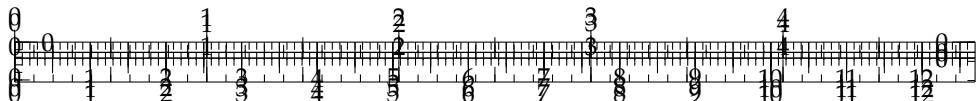
$$\begin{aligned} Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{\frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r} \end{aligned}$$

#### Correction

Si  $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$  :

$$\begin{aligned} Y_2(p) &= C_r(p) \frac{\frac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\ &= C_r(p) \frac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \end{aligned}$$





$$= C_r(p) \frac{(R + Lp)K_M K_r}{K_C} \frac{1}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M}$$

On a donc :  $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$ .

**Question 11** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

#### Correction

**Question 12** On souhaite que lorsque le système se déplace à vitesse constante, l'erreur sur la vitesse atteinte par le système soit nulle. Quelle sollicitation doit-on utiliser. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

#### Correction

**Question 13** Conclure.

#### Correction

**Question 14** Conclure sur la conformité au cahier des charges du système ainsi réglé.

#### Correction

**Question 15** Tracer de diagramme de Bode.

#### Correction

**Question 16** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = 1$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

#### Correction

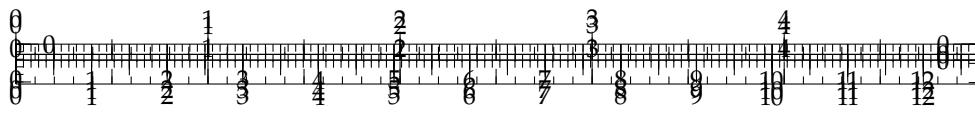
**Question 17** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = \frac{1}{p}$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

#### Correction

## Vérification des performances de l'axe du magasin de rivets

**Question 18** À partir des relevés ci-dessous, conclure sur le respect des exigences fonctionnelles de l'axe du magasin de stockage des rivets (Exigence 1.1).

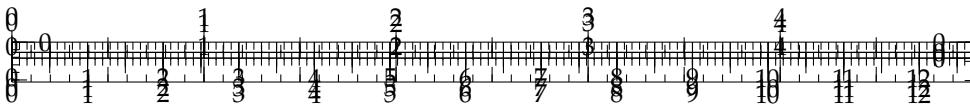




## Correction







.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_04\_Tissus/images/fig\_00.png

## TD 3

# Tête de découpe de tissus– Sujet

Concours CCINP MP 2018.

B2-07

Un système de découpe automatisé de tissus est composé (figure ??) :

- ▶ d'une table de découpe sur laquelle le tissus à découper (appelé matelas) est maintenu en position par aspiration;
- ▶ d'un bras transversal qui se déplace en translation de direction  $\vec{y}_0$  par rapport à la table;
- ▶ d'une tête de coupe qui se déplace en translation de direction  $\vec{x}_0$  par rapport au bras transversal;
- ▶ d'un ordinateur qui pilote l'ensemble du système.

## Modélisation du comportement du moteur de coupe

### Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure ??).

Le mouvement de coupe est asservi en vitesse. La vitesse de rotation du moteur, notée  $\omega_m(t)$ , est le paramètre asservi. Elle est mesurée à l'aide d'un codeur incrémental et de son conditionneur qui fournissent une tension  $u_{mes}(t)$ , image de la vitesse de rotation du moteur. Cette tension est comparée à la tension consigne  $u_{cons}(t)$ , image de la vitesse de rotation de consigne  $\omega_{cons}(t)$ ; un adaptateur fournit  $u_{cons}(t)$  à partir de  $\omega_{cons}(t)$ . La tension écart  $\varepsilon(t) = u_{cons}(t) - u_{mes}(t)$  est alors transformée en tension d'alimentation du moteur  $u_m(t)$  par l'ensemble correcteur-variateur.

**Question 1** Compléter le schéma-blocs fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.

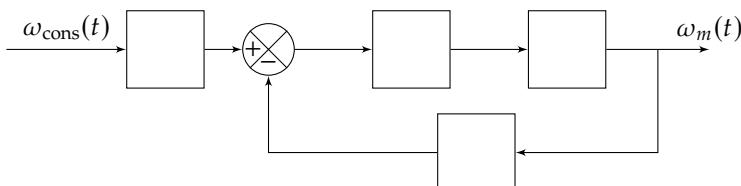


FIGURE 2.9 – Structure d'une table de découpe de tissus

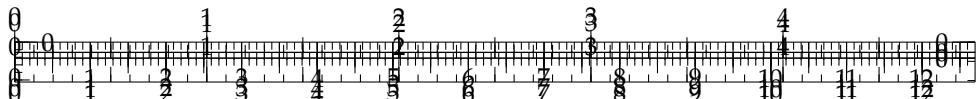
**Question 2** On note  $K_a$  le gain de l'adaptateur et  $K_c$  le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre  $K_a$  et  $K_c$  pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

On donne les quatre équations du modèle d'un moteur à courant continu :  $u_m(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$ ,  $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) + c_r(t)$ ,  $c_m(t) = k_c i(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$ . La fonction de transfert du moteur est notée  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ .



Le moteur utilisé est un moteur à courant continu dont les caractéristiques et les grandeurs physique sont sont :

- ▶  $R$ , résistance de l'induit;
- ▶  $L$ , inductance de l'induit;
- ▶  $k_e$ , constante de vitesse;
- ▶  $k_c$ , constante de couple;
- ▶  $u_m(t)$  est la tension d'alimentation du moteur;



**Question 3** Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

**Question 4** En supposant le couple résistant nul,  $c_r(t) = 0$ , donner la forme canonique de la fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ . On exprimera les constantes en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $k_e$ ,  $k_c$  et  $J$ .

## Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

### Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

Le correcteur de l'asservissement en vitesse du moteur est un proportionnel-intégrateur de fonction de transfert  $H_{cor}(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_04\_Tissus/images/fig\_01.jpg  
Les résultats de simulation de la réponse du moteur  $N_m(t)$ , en boucle fermée, pour une entrée échelon d'amplitude  $N_0 = 3000 \text{ tr min}^{-1}$  pour différentes valeurs de  $K_p$  et de  $K_i$  sont donnés sur la figure ??.

**FIGURE 2.11** – Évolutions simulées de la vitesse  $\omega_m(t)$ .

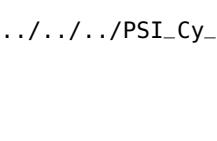
**Question 5** Pour les courbes 1 et 2 de la figure ??, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de  $K_p$ . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

**Question 6** Pour chaque courbe de la figure ??, préciser, en le justifiant, si la valeur de  $K_i$  est nulle ou non.

**Question 7** Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.

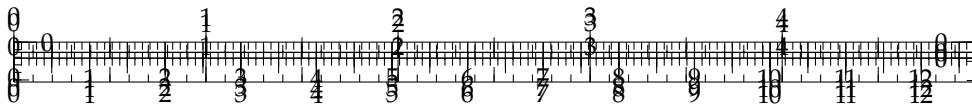
### Éléments de correction

1. .
2.  $K_a = K_c$ .
3. .
4.  $K = \frac{1}{k_e}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}}$  et  $\xi = \frac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_c k_e}}$ .
5. La courbe 2 a la plus grande valeur de  $K_p$ .
6.  $K_i \neq 0$  pour la courbe 3 uniquement.
7. .



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_04\_Tissus/images/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_04\_Tissus/images/fig\_01.jpg





.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_04\_Tissus/images/fig\_00.png

## TD 3

### Tête de découpe de tissus– Corrigé

Concours CCINP MP 2018.

B2-07

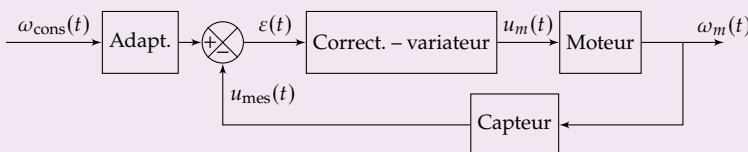
#### Modélisation du comportement du moteur de coupe

##### Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure ??).

**Question 1** Compléter le schéma-blocs fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.

##### Correction



**Question 2** On note  $K_a$  le gain de l'adaptateur et  $K_c$  le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre  $K_a$  et  $K_c$  pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

##### Correction

On a  $\varepsilon(t) = K_a \omega_{\text{cons}}(t) - K_c \omega_m(t)$ .

Pour que  $\varepsilon(t)$  soit nul lorsque  $\omega_{\text{cons}}(t) = \omega_m(t)$ , il faut que  $K_a = K_c$ .

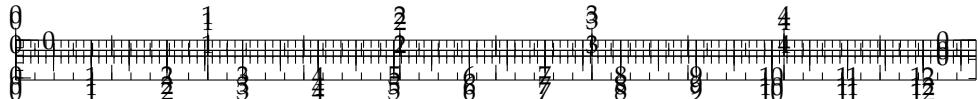
**Question 3** Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

##### Correction

On a  $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p)$ ,  $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) + C_r(p)$ ,  $C_m(p) = k_c I(p)$ ,  $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ .

**Question 4** En supposant le couple résistant nul,  $c_r(t) = 0$ , donner la forme canonique





de la fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ . On exprimera les constantes en fonction de  $R, L, k_e, k_c$  et  $J$ .

#### Correction

$$\text{On a } U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) = \frac{C_m(p)}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_m(p) = Jp \frac{\Omega_m(p)}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_m(p).$$

$$\text{On a donc } U_m(p) = \Omega_m(p) \left( \frac{Jp}{k_c} (R + Lp) + k_e \right) \text{ et } H_m(p) = \frac{1}{\frac{JL}{k_c} p^2 + \frac{JR}{k_c} p + k_e} = \frac{\frac{1}{k_e}}{\frac{JL}{k_c k_e} p^2 + \frac{JR}{k_c k_e} p + 1}.$$

$$\text{Par identification, on a donc } K = \frac{1}{k_e}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}} \text{ et } \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{JR}{k_c k_e} \text{ soit } \xi = \frac{JR}{2k_c k_e} \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}} = \frac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_c k_e}}.$$

## Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModeObjectifSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_04\_Tissus/images/fig\_0

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

**FIGURE 2.13** – Évolutions simulées de  $\omega_m(t)$ .

**Question 5** Pour les courbes 1 et 2 de la figure ??, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de  $K_p$ . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

#### Correction

##### Méthode 1 – Coefficient d'amortissement

On note  $H_{BF}(p) = \frac{\omega_m(t)}{\omega_{\text{cons}}(t)}$ .

$$\text{On a alors, } H_{BF}(p) = K_c \frac{\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + K_p \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K_c K_p K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2} + K_p K_c}.$$

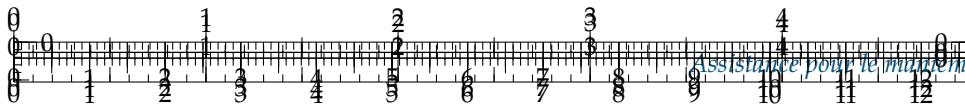
$$\text{On a donc } \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{2\xi}{\omega_0 (1 + K_p K_c)} \text{ et } \omega_{BF}^2 = \omega_0^2 (1 + K_p K_c).$$

$$\text{Soit } \xi_{BF} = \frac{\xi \omega_{BF}}{\omega_0 (1 + K_p K_c)} = \frac{\xi \omega_0 \sqrt{1 + K_p K_c}}{\omega_0 (1 + K_p K_c)} = \frac{\xi}{\omega_0 \sqrt{1 + K_p K_c}}.$$

En conclusion, plus  $K_p$  augmente, plus le coefficient d'amortissement diminue et donc plus les pseudo oscillations deviennent grandes. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de  $K_p$ .

##### Méthode 2 – Calcul de l'écart statique





On montre que  $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1 + K_p K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}.$

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a  $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_a}{1 + K_p K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K_a}{1 + K_p K_c K}.$$

Lorsque  $K_p$  augmente,  $\varepsilon_S$  diminue. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de  $K_p$ .

**Question 6** Pour chaque courbe de la figure ??, préciser, en le justifiant, si la valeur de  $K_i$  est nulle ou non.

#### Correction

On montre que  $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{p}\right) K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}.$

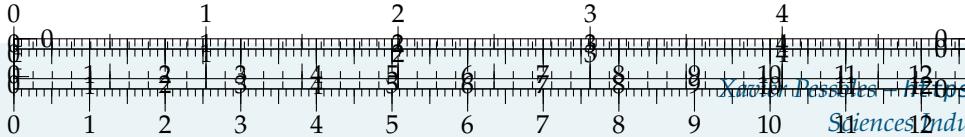
Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a  $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0. Ainsi, si  $K_i$  non nul,  $\varepsilon_S = 0$  (courbe 3 uniquement).$$

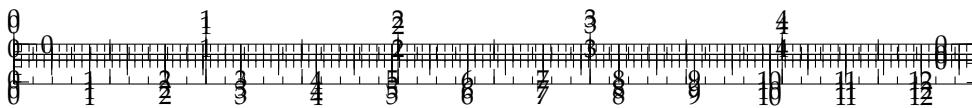
**Question 7** Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.

#### Correction

	Stabilité	1 <sup>er</sup> Dépassemement	Erreur statique	$T_{5\%}$
Exigences	Absolue	< 20 %	Nulle	0,5 s
Courbe 1	Stable OK	$D_1 = 45\%$ Pas OK	2450 tr/min Pas OK	$T_{5\%} = 0,015\text{ s}$ OK
Courbe 2	Stable OK	$D_1 = 59\%$ Pas OK	900 tr/min Pas OK	$T_{5\%} = 0,018\text{ s}$ OK
Courbe 3	Stable OK	$D_1 = 15\%$ OK	0 tr/min OK	$T_{5\%} = 0,048\text{ s}$ OK







.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_03\_Exosquelette/images/fig\_00.png

## TD 4

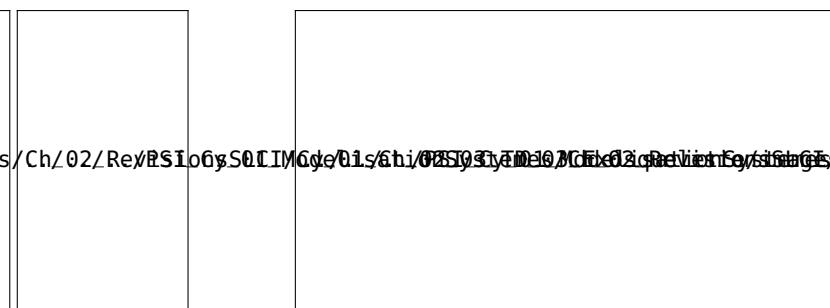
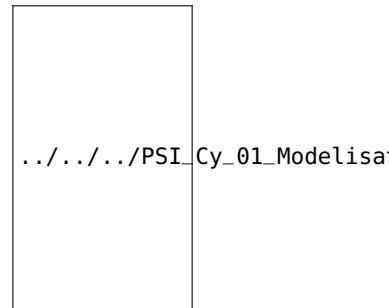
# Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie– Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

## Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.

On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.



## Gestion du mouvement vertical

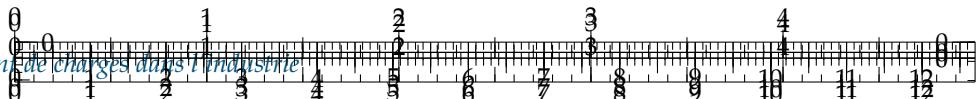
### Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.

#### Notations :

- ▶  $\theta_{mC}(p)$  consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_{mC}(t)$  en rad);
- ▶  $\theta_m(p)$  position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_m(t)$  en rad); Le correcteur est de la forme :  $C_\Omega(p) = K_2 \left( \frac{Jp + f}{Jp} \right)$ .
- ▶  $C_{mC}(p)$  consigne de couple moteur (variable temporelle :  $c_{mC}(t)$  en Nm); En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que :
- ▶  $C_m(p)$  couple moteur (variable l'écart est défini par la variable  $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$  temporelle :  $c_m(t)$  en Nm); ▶ l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable  $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ .
- ▶  $C_r(p)$  couple résistant perturbateur (variable temporelle :  $c_r(t)$  en Nm); Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart  $\varepsilon(t)$  est égal à l'erreur  $\mu(t)$ .
- ▶  $K_1$  gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en  $s^{-1}$ );
- ▶  $\Omega_{mC}(p)$  consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_{mC}(t)$  en  $rad\ s^{-1}$ ) Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude  $C_r(p) = 0$ .
- ▶  $\Omega_m(p)$  vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_m(t)$  en  $rad\ s^{-1}$ );
- ▶  $C_\Omega(p)$  correcteur de l'asservissement de vitesse; Question 1 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).
- ▶  $M_C(p)$  modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles :  $M_C(p) = 1$ ; Question 2 Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

#### Hypothèse

- ▶  $C_\Omega(p)$  correcteur de l'asservissement de vitesse;
- ▶  $M_C(p)$  modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles :

$M_C(p) = 1$ ; Question 3 Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

▶  $J$  moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur;

▶  $f$  coefficient de frottement queux équivalents pour semble en mouvement.

#### Méthode –

On peut définir l'erreur de position  $\varepsilon_p$  par  $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$  avec

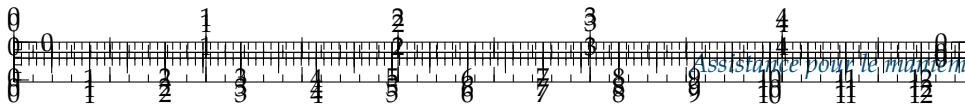
$$\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p} \text{ (entrée échelon).}$$

Question 4 Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Question 5 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec  $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$  et  $T = 33$  ms.





**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Synthèse

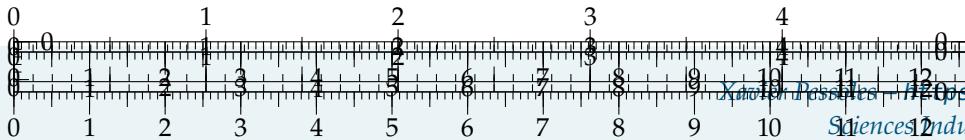
**Question 9** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.

.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_03\_Exosquelette/images/fig\_10.

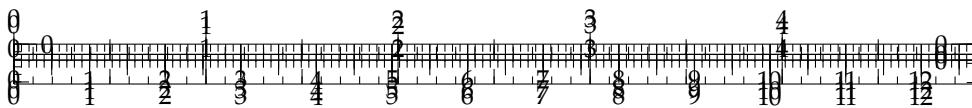
### Éléments de correction

1. Asservissement en position.
2.  $H_\Omega(p) = \frac{K_2}{Tp + K_2}$ .
3.  $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{K_1}$
4.  $\varepsilon(p) = 0$ ,  $\varepsilon_v = \frac{1}{K_1}$  et  $K_1 > 100$ .
5.  $\varepsilon_a = \infty$ .
6.  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1}$ .
7.  $\varepsilon_v = \frac{1-K_3}{K_1}$ ,  $K_3 = 1$ .
8.  $\varepsilon_a = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$ . Le cahier des charges est donc validé.

.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisati







../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_03\_Exosquelette/images/fig\_00.png

## TD 4

# Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie– Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

## Mise en situation

### Gestion du mouvement vertical

#### Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

../../../../PSI\_Cy\_01\_Modelisat

**Question 1** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

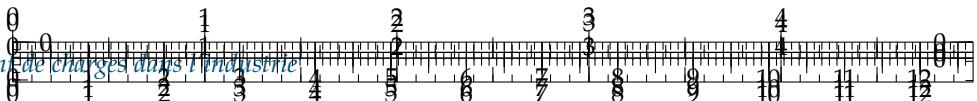
#### Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.

../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_03\_Exosquelette/images/cor\_01.png

**Question 2** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .



**Correction**

En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a :  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \frac{C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}{1+C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}$ . En conséquences :  $H_\Omega(p) = \frac{K_2}{Jp+K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1}$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

**Correction**

D'une part,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$ . D'autre part,  $\theta_m(p) = H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\varepsilon(p)$ . Par suite,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)\left(1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\right) = \theta_{mC}(p)$ . En conséquences,  $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}}$ .

**Question 4** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Correction**

On a :

$$\blacktriangleright \varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p} = 0$$

(ce qui était prévisible pour un système de classe 1);

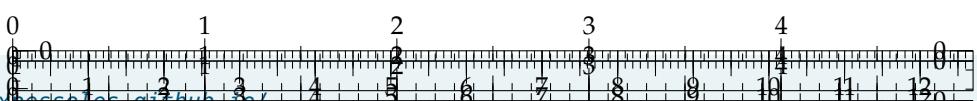
$$\begin{aligned} \blacktriangleright \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \frac{1}{K_1} \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et} \\ &\text{de gain } K_1 \text{ en BO).} \end{aligned}$$

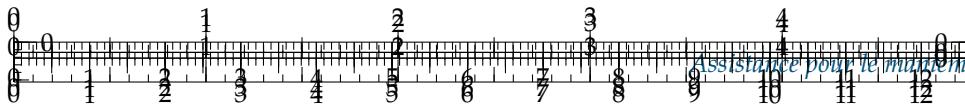
Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut  $\frac{1}{K_1} < 0,01$  et  $K_1 > 100$ .

**Question 5** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

**Correction**

En raisonnant de même, on a :  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3}$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} \frac{1}{p^2} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{p}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \infty \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1).}$$




Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

#### Correction

En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p);$
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p);$
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp}.$

$$\text{On a donc : } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp} = \theta_{mC}(p) - (K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)) \frac{1}{p(1 + Tp)}$$

$$= \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1 + Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \varepsilon(p).$$

$$\text{On a alors } \varepsilon(p) \left(1 + \frac{K_1}{p(1 + Tp)}\right) = \theta_{mC}(p) \left(1 - \frac{K_3}{1 + Tp}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1 + Tp) + K_1}{p(1 + Tp)} = \theta_{mC}(p) \frac{1 + Tp - K_3}{1 + Tp}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1}.$$

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

#### Correction

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} = \frac{1 - K_3}{K_1}.$$

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir  $K_3 = 1$ .

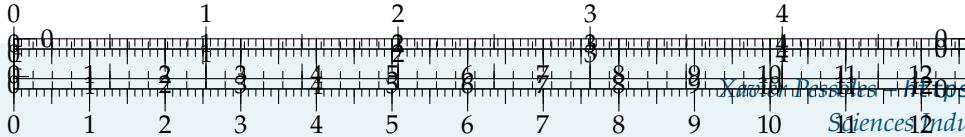
**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

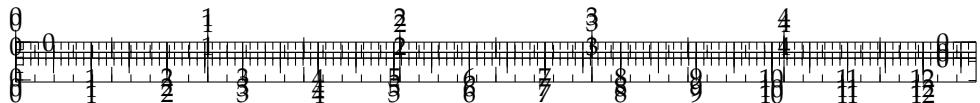
#### Correction

On a :  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p}$ . En prenant  $K_3 = 1$  et  $K_1 = 100$ , on obtient :  $\varepsilon_a = \frac{T}{p(1 + Tp) + 100} = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$ . L'erreur est donc de  $33 \times 10^{-5}$ . Le cahier des charges est donc validé.

## Synthèse

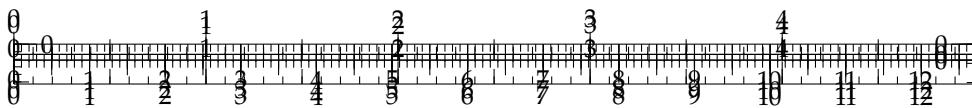
**Question 9** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.





../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_03\_TD\_01





.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_01\_SupportRov/images/fig\_00.jpg

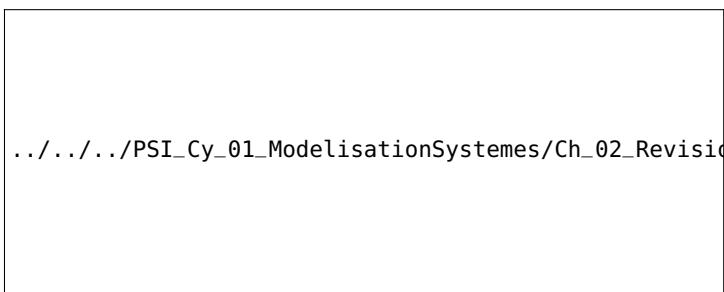
## TD 5

# Bateau support de ROV– Sujet

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

### Introduction

On s'intéresse à une grue permettant la dépose sur fond marin d'un robot dont l'objectif est d'enfoncer des câbles.



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

la grue

### Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

La société TravOcéan souhaite pouvoir travailler dans des conditions de mer difficiles pour limiter au maximum les périodes d'arrêt des chantiers. Pour cela, elle souhaite disposer d'un système de treuillage de ses ROV certifié pour une houle d'amplitude verticale de 5 m. Le tableau suivant présente un extrait du cahier des charges correspondant.

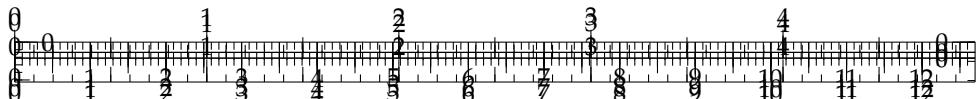
charges

Critère	Niveau
les mouvements du ROV pour une m et de pulsations comprises entre u câble	Amplitude verticale du ROV maximale < 1 m pour 5 m d'amplitude de houle
	Temps de réponse, $t_{r5\%}$ < 3 s

Une étude expérimentale en bassin de carène a permis d'obtenir un modèle de comportement de l'ensemble  $S = \{\text{bateau} + \text{portique} + \text{ROV}\}$  suivant l'axe vertical, sous l'effet de la houle, au point d'ancrage du ROV sur la grue portique.

La fonction de transfert de l'ensemble  $S$  est  $B(p) = \frac{Y_S(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$  avec  $Y_S(p)$  la transformée





de Laplace de la variation du déplacement vertical du point d'ancrage du ROV et  $Y_{\text{vague}}(p)$  la transformée de Laplace de la variation du déplacement de la surface de l'eau à la verticale du point d'ancrage du ROV.

**Question 1** Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Le tracé du gain de  $B(p)$  dans la figure ??.

**Question 2** En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_01\_SupportRov/images/DR\_A.pdf

FIGURE 2.15 – ROV suspendu à la grue portique

## Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

### Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Pour compenser les effets de la houle, une solution hydropneumatique est alors envisagée. Ce système est un compensateur de houle passif noté PHC (??).

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_01\_SupportRov/images/Fig10.pdf

Les petites variations de pression  $\Delta p_E(t)$  et  $\Delta p_G(t)$  autour du point d'équilibre peuvent être définies par  $\Delta p_E(t) = p_E(t) - P_{E0}$  et  $\Delta p_G(t) = p_G(t) - P_{G0}$ . Une étude de mécanique des fluides a permis d'obtenir les relations (1) et (2).

$$\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = \frac{K}{V_E} S \left( \frac{dy_h(t)}{dt} - \frac{dy_{\text{ROV}}(t)}{dt} \right) + \frac{K}{V_E} C_{qR} (\Delta p_G(t) - \Delta p_E(t)) \quad (1)$$

$$\frac{d\Delta p_G(t)}{dt} = \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} (\Delta p_E(t) - \Delta p_G(t)) \quad (2)$$

FIGURE 2.16 – Schéma d'implantation du PHV (non à l'échelle)

À l'équilibre, le principe fondamental de la statique se traduit par  $-Mg + S(P_{E0} - P_{\text{atm}}) = 0$ .

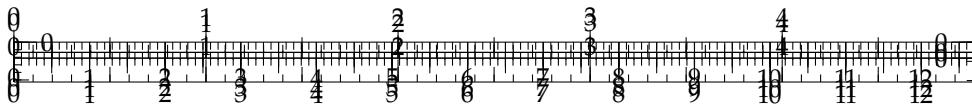
Le théorème de la résultante dynamique appliquée à  $\Sigma$  se traduit par  $S\Delta p_E(t) = M\ddot{y}_{\text{ROV}}(t) + c(\dot{y}_{\text{ROV}}(t) - \dot{y}_h(t))$  (3).

L'hypothèse du fluide incompressible se traduit par  $\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = 0$ .

**Question 3** Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme :  $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p))$  (4). Exprimer  $K_1$  et  $\tau_1$  en fonction de  $A$ ,  $V_{G0}$ ,  $r$ ,  $C_{qR}$  et  $P_{G0}$ .

**Question 4** Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :





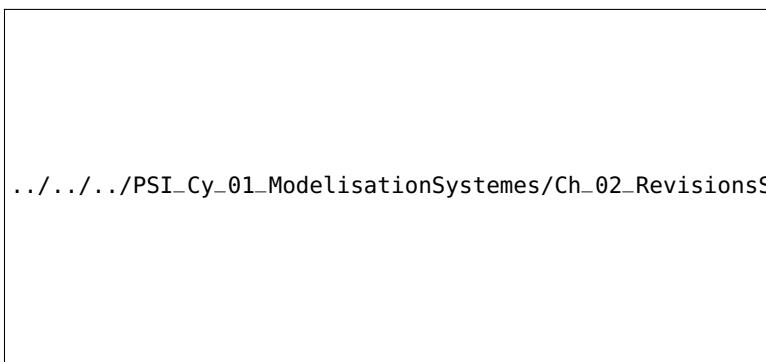
$H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ . Exprimer  $\omega_0$ ,  $\zeta$  et  $\tau$  en fonction des constantes définies précédemment.

On utilisera dans toute la suite la relation  $\tau\omega_0 = 2\zeta$ .

**Question 5** Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC,  $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$ , en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

**Question 6** Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC},  $G(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$  en fonction de  $H(p)$  et  $B(p)$ . Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

Des réglages pour différentes valeurs de pulsation de la houle  $\omega_c$  et de gain maximal acceptable du compensateur ont été effectués.

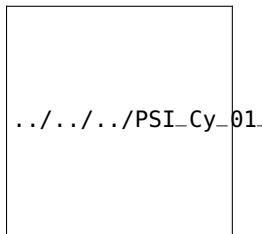


La ?? donne les diagrammes du gain de la fonction  $G(p)$  de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC} pour quatre réglages. Les volumes du gaz  $V_{G0}$  correspondant à chaque réglage sont donnés dans le tableau ci-après.

Réglage	PHC 1	PHC 2	PHC 3	PHC 4
$V_{G0}$ ( $\text{m}^3$ )	96	1	52	2

Pour respecter l'exigence Id 1.1, le gain de la fonction de transfert de l'ensemble doit toujours être inférieur à  $-14 \text{ dB}$ .

**Question 7** Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

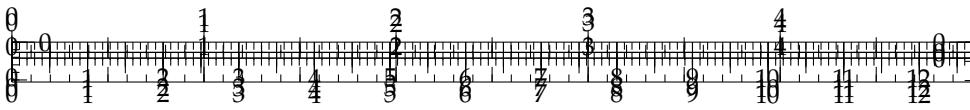


#### Éléments de correction

1.  $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{\text{vague}}(j\omega)} \right|$  et  $G_{\text{dB}}(\omega) < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB} \quad \forall \omega \in [0, 5; 1, 7] \text{ rad/s.}$
2. ...
3.  $K_1 = \frac{S r P_{G0}}{V_{G0}}$  et  $\tau = \frac{V_{G0}}{r P_{G0} C_{qR}}$ .
4.  $\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1}, \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}}, \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}$ .
5. .
6. .
7. PHC4.







../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_01\_SupportRov/images/fig\_00.jpg

## TD 5

# Bateau support de ROV- Corrigé

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

### Introduction

#### Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

**Question 1** Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

#### Correction

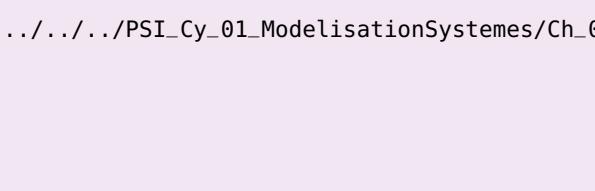
La définition du gain en décibel de la fonction de transfert  $B(j\omega)$  est  $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{vague}(j\omega)} \right|$ . L'exigence Id 1.1 impose une amplitude maximale du ROV de 1 m pour 5 m de houle soit :

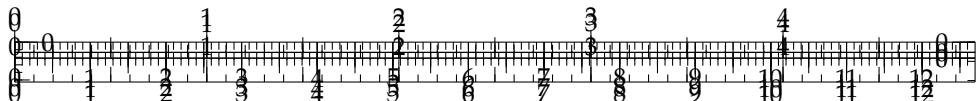
$$G_{dB}(\omega) < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB } \forall \omega \in [0, 5; 1, 7] \text{ rad/s.}$$

**Question 2** En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

#### Correction

On observe un phénomène de résonance, le système amplifie la houle entre 0,5 et 1 rad/s et l'atténue à une valeur maximale de 13-14 dB pour 1,7 rad/s. Le système ne répond donc pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.





## Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

### Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

**Question 3** Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme :  $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{ROV}(p))$  (4). Exprimer  $K_1$  et  $\tau_1$  en fonction de  $A$ ,  $V_{G0}$ ,  $r$ ,  $C_{qR}$  et  $P_{G0}$ .

### Correction

On écrit les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace en tenant compte de l'hypothèse de fluide incompressible :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) + C_{qR}(\Delta P_G(p) - \Delta P_E(p)) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}(\Delta P_E(p) - \Delta P_G(p)) = p\Delta P_G(t). \quad (2.2)$$

L'équation (2) donne :

$$\begin{aligned} \Delta P_G(t) \left( p + \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \right) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \Delta P_E(p), \\ \Delta P_G(t) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) + C_{qR} \left( \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p) - \Delta P_E(p) \right) = 0,$$

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) = C_{qR} \left( 1 - \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \right) \Delta P_E(p),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{Sp}{C_{qR}} \frac{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0}} (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{S}{C_{qR}} \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \left( \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)).$$

Enfin, on obtient :

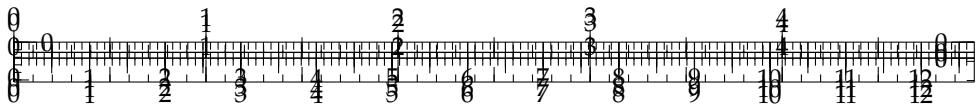
$$\Delta P_E(p) = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \left( \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)).$$

Par identification :

$$K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \text{ et } \tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}.$$

**Question 4** Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions





initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \text{ Exprimer } \omega_0, \zeta \text{ et } \tau \text{ en fonction des constantes}$$

définies précédemment.

### Correction

La transformée de Laplace de (3) est :

$$\alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) = \gamma \Delta P_E(p).$$

En utilisant (4), on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) &= \gamma K_1 (\tau_1 p + 1) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)), \\ (\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)) Y_{\text{ROV}}(p) &= (\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p) Y_h(p). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)}, \\ H(p) &= \frac{\gamma K_1 + (\gamma K_1 \tau_1 + \beta)p}{\alpha p^2 + (\beta + \gamma K_1 \tau_1)p + K_1 \gamma}. \end{aligned}$$

Donc :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{\gamma K_1 \tau_1 + \beta}{K_1 \gamma} p}{1 + \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{K_1 \gamma} p + \frac{\alpha}{K_1 \gamma} p^2}.$$

Par identification, on obtient :

$$\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1}; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}}; \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}.$$

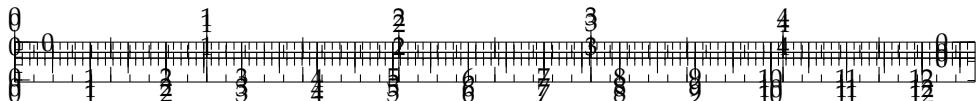
**Question 5** Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC,  $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$ , en faisant apparaître ses caractéristiques.

Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

### Correction

Diagrammes de Bode de  $H(p)$ . On identifie 2 pulsations caractéristiques :  $\omega_1 = 1/\tau \approx 0,33$  rad/s et  $\omega_n = 0,364$  rad/s. On verra apparaître un phénomène de résonance à la pulsation  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  car  $\zeta = 0,55 < \sqrt{2}/2$ . La résonance sera toutefois faible.





$\omega$	$\text{BF } \omega \ll \omega_1$	$\text{MF } \omega_1 \ll \omega \ll \omega_n$	$\text{HF } \omega_n \ll \omega$
$H(j\omega)$	1	$\tau j\omega$	$\frac{\tau\omega_n^2}{j\omega}$
$G_{\text{dB}}$	0	$20 \log \tau + 20 \log \omega$	$20 \log(\tau\omega_n^2) - 20 \log \omega$
$\phi$	0	$90^\circ$	$-90^\circ$

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD

La valeur du gain maxi est de +3 dB (due au premier ordre au numérateur, l'influence du dénominateur est négligeable car la résonance est faible).

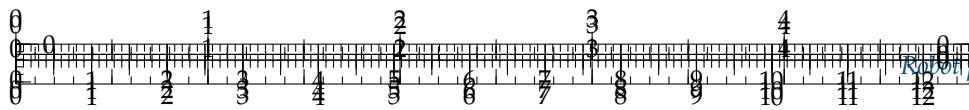
**Question 6** Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC},  $G(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$  en fonction de  $H(p)$  et  $B(p)$ . Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

#### Correction

On a la relation  $G(p) = B(p)H(p)$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD

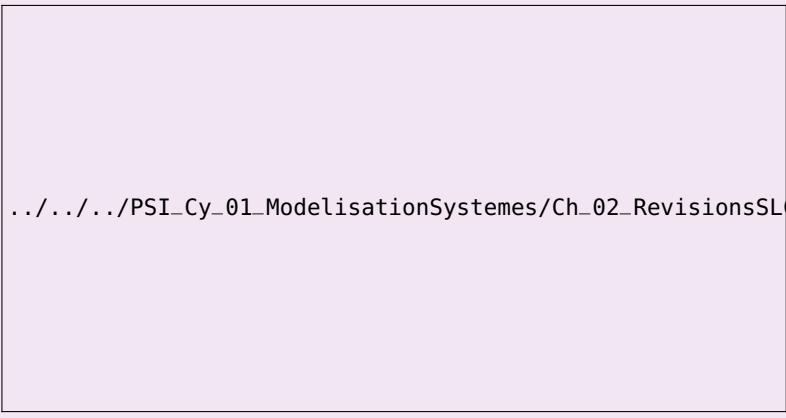




**Question 7** Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

#### Correction

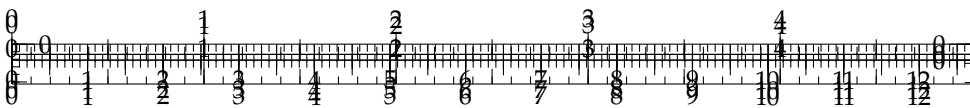
Le réglage de PHC 4 est celui qui respecte le mieux l'exigence Id1.1.



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_01\_SupportRov/images/Q18







.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_02\_Endoscope/images/fig\_00.jpg

## TD 6

# Robot pour la chirurgie endoscopique– Sujet

Banque PT – SIA – 2005.

### Présentation

On s'intéresse au robot de chirurgie endoscopique « Endoxirob ». Il est nécessaire de permettre à l'instrument chirurgical de se mouvoir avec des performances dynamiques comparables ou meilleures que celles réalisées par un chirurgien humain. L'étude est effectuée uniquement pour l'axe « d'élévation » selon  $\vec{z}_1$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

igences.

	Niveaux
ce	
de translation nominale	$> 0,1 \text{ m s}^{-1}$
$t_1$ pour atteindre la vitesse nominale	100 ms maximum
on – Écart statique	$< 0,2 \text{ mm}$
on – Retard de traînage pour une rampe de $0,1 \text{ m s}^{-1}$	$< 0,1 \text{ s}$
é – Dépassement	Aucun
é – Marge de phase	$45^\circ$
té – Bande passante à $-3 \text{ dB}$ pour la partie mécanique	4 Hz

La figure suivante présente le schéma-blocs de l'axe d'élévation (selon  $\vec{Z}_1$ ) du dispositif de commande de l'instrument chirurgical.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_02\_Endoscope/images/fig\_01.png

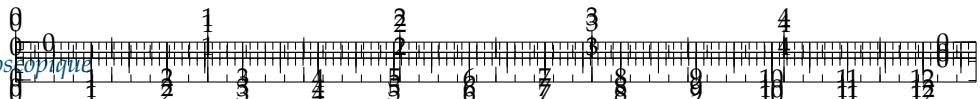
La console permet de capter le déplacement de la main, de le coder, de le corriger éventuellement afin d'élaborer la consigne de position angulaire du rotor moteur. La position angulaire est ensuite transformée en position linéaire de l'instrument par un mécanisme de transformation de mouvement à crémaillère.

La figure ci-contre présente de façon simplifiée, la chaîne cinématique de l'axe d'élévation :

- ▶ l'actionneur est un moto-réducteur (1) à courant continu Gammatic n° RH-8D-6006 ; le premier étage de transmission du mouvement se fait par une courroie crantée (2) qui s'enroule sur des poulies de même diamètre pour entraîner l'arbre intermédiaire (3) ;



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys



- ▶ une roue dentée (3') de diamètre primitif  $\Phi_1 = 38,4 \text{ mm}$  solidaire de l'arbre intermédiaire (3) engrène avec une crémaillère (4) solidaire de la partie supérieure mobile du robot;
- ▶ cette crémaillère est en liaison glissière d'axe  $\vec{z}_1$  par rapport à la partie inférieure du robot considérée comme fixe dans cette partie du sujet, et notée « Bâti ».

Pour équilibrer le poids de la partie supérieure (coulisseau compris) de masse  $M = 5,5 \text{ kg}$ , les ingénieurs ont placé un contre-poids (7) de masse  $2M = 11 \text{ kg}$  tiré par un câble qui s'enroule sur un tambour (3'') de diamètre  $\Phi_2 = \frac{\Phi}{2} = 19,2 \text{ mm}$  solidaire de l'arbre intermédiaire (3).

Le constructeur du moto-réducteur donne les caractéristiques mécaniques en sortie du réducteur ce qui permet de considérer le moto-réducteur comme un « moteur qui tourne lentement avec un couple élevé » :

- ▶ puissance nominale en sortie du réducteur :  $P_{\text{nom}} = 8,6 \text{ W}$ ;
- ▶ couple nominal en sortie du réducteur :  $C_{\text{nom}} = 1,4 \text{ Nm}$ ;
- ▶ couple de maintien en sortie du réducteur :  $C_{\text{maint}} = 1,5 \text{ Nm}$ ;
- ▶ couple maxi en sortie du réducteur :  $C_{\text{max}} = 2,7 \text{ Nm}$ ;
- ▶ vitesse nominale en sortie du réducteur :  $N_{\text{nom}} = 60 \text{ tr min}^{-1}$ ;
- ▶ vitesse maxi en sortie du réducteur :  $N_{\text{max}} = 100 \text{ tr min}^{-1}$ ;
- ▶ moment d'inertie total ramené à l'arbre de sortie du réducteur :  $J_1 = 3,70 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- ▶ capteur de position : codeur 360 incrémentés par tour monté sur le rotor du moteur;
- ▶ rapport de réduction : 50 (n'interviendra que dans le calcul de la résolution du capteur).

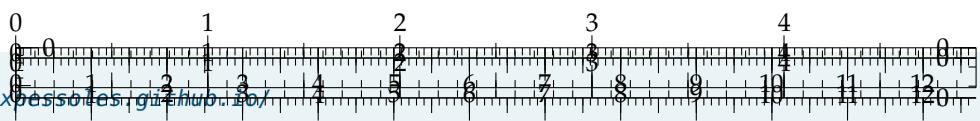
Avec :

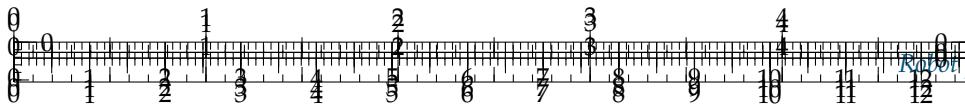
### Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

- ▶  $u(t)$  tension appliquée aux bornes de l'induit      Le constructeur donne les caractéristiques électro-mécaniques exprimées à la sortie
- ▶  $i(t)$  intensité du courant traversant l'induit      du réducteur. On rappelle les équations temporelles :  $u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$ ,
- ▶  $e(t)$  force électromotrice induite par la rotation du moteur, évaluée à la sortie du réducteur;       $e(t) \equiv k_e \omega_{\text{rédu}}(t)$ ,  $C_{\text{rédu}}(t) = k_c i(t)$ ,  $C_{\text{rédu}}(t) - C_r - f_v \omega_{\text{rédu}}(t) = J_{\text{équ}} \frac{d\omega_{\text{rédu}}(t)}{dt}$ .
- ▶  $\omega_{\text{rédu}}(t)$  vitesse de rotation à la sortie du réducteur;      Les transformées de Laplace des fonctions  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $e(t)$ ,  $\omega_{\text{rédu}}(t)$ ,  $C_{\text{rédu}}(t)$  sont respectivement  $U(p)$ ,  $I(p)$ ,  $E(p)$ ,  $\Omega_{\text{rédu}}(p)$  et  $C_{\text{rédu}}(p)$ . On considère toutes les conditions initiales à la sortie du réducteur; nulles.
- ▶  $R = 10 \Omega$  : résistance de l'induit;
- ▶  $L = 2,2 \text{ mH}$  inductance de l'induit;
- ▶  $k_c = 2,1 \text{ N m A}^{-1}$  constante de couple évaluée à la sortie du réducteur;
- ▶  $k_e = 2,1 \text{ V s rad}^{-1}$  constante de f.e.m évaluée à la sortie du réducteur;
- ▶  $C_r = 0,2 \text{ N m}$  couple résistant induit par les frottements secs, ramené à la sortie du réducteur/.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_01
- ▶  $f_v = 0,04 \text{ N m s rad}^{-1}$  coefficient de frottement visqueux équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur;
- ▶  $J_{\text{équ}} = 7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$  moment d'inertie équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur.

**Question 1** Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.

**Question 2** Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur  $M(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)}$  lorsque  $C_r(p) = 0$ .





Quel que soit le résultat obtenu à la question précédente, on utilisera l'expression de  $M(p)$  suivante :  $M_1(p) = \frac{0,436}{1 + 14,5 \cdot 10^{-3}p + 3,1 \cdot 10^{-6}p^2}$ .

Sur le système de levage non asservi c'est à dire avec le capteur de position angulaire déconnecté, on a pratiqué, un essai en charge, en donnant au moteur un échelon de tension  $u(t) = 24$  V. Avec une génératrice tachymétrique dont le gain est de  $0,166$  V s rad $^{-1}$ , on a tracé la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$ .

Remarque : la partie supérieure du robot est supposée rigide pendant cet essai.

**Question 3** Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance  $L$ .

**Question 4** Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de  $M_1(p)$  lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de  $L$ ) étant rejeté.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

#### Remarque

Un pole est dit dominant par rapport à un autre quand sa partie réelle est grande devant l'autre.

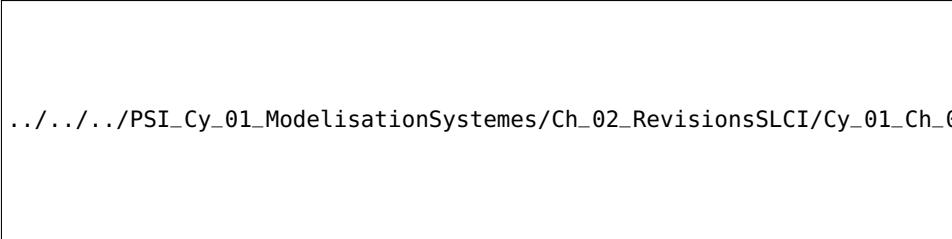
Dans la suite du problème, on néglige l'inductance  $L$  du moteur.

**Question 5** Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur  $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$ . Donner les valeurs numériques de  $G_s$  et de  $T$  à partir de l'expression de  $M_1(p)$  et des réponses apportées précédemment.

**Question 6** Déterminer les valeurs de  $G_s$  et  $T$ , à partir de la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$  (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

#### Respect du critère de marge de phase

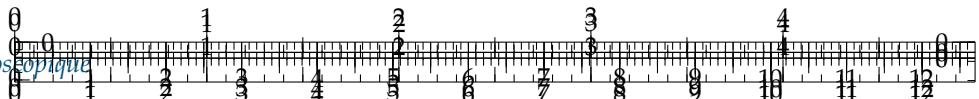
La boucle d'asservissement de la position angulaire de l'arbre de sortie du réducteur est définie par le schéma-blocs figure suivante. La consigne de position en incrément est élaborée par le calculateur, à partir des informations envoyées par la console.



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_02\_Endoscope/images/fig\_05.png

Le convertisseur-amplificateur  $K$  de gain  $k$  variable élabore la commande du moteur. Le codeur incrémental  $C$  placé sur le rotor du moteur a une résolution de 360 incréments par tour. Il est associé à un compteur – décompteur qui élabore la mesure de position en incrément. Le système est discret (non continu) mais on l'assimile à un système continu car le comptage est très rapide. Le réducteur a un rapport de réduction de 50.





**Question 7** Donner la fonction de transfert du bloc  $B(p)$  et la valeur du coefficient du bloc  $C$  en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de  $k$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_O(p)$ .

**Question 8** Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour  $k = 1$ . Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de  $k$ ? Justifier.

#### Remarque

Au vu de l'exigence 6, on admet que le système est stable en boucle fermé si, sur le tracé de Bode de la boucle ouverte, lorsque le gain est nul, la phase est supérieure à  $-180 + 45 = -135^\circ$ .

**Question 9** Calculer l'écart statique  $\varepsilon_{\text{conso}}$  en incrémentations lorsque la consigne est un échelon de position :  $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$ .

Étant donné que la perturbation  $C_r$  intervient entre deux blocs de  $M(p)$ , on adopte le schéma de la figure suivante pour faciliter les calculs de la question suivante.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_01.png

**Question 10** Calculer, pour la valeur  $k_{45}$  de  $k$  établie précédemment, l'écart statique  $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$  en incrémentations entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant  $C_r u(t)$  induit par les frottements secs.

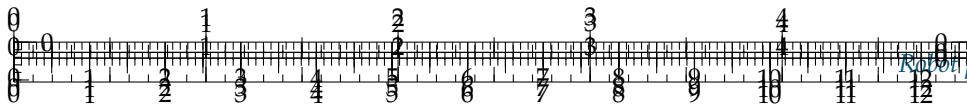
**Question 11** La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrémentations pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc  $K$  qui annulerait cet écart.

### Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

#### Modélisation par schéma-blocs

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_02\_Endoscope/images/fig\_07.png





### Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

Lorsque la boucle d'asservissement est bien réglée, la fonction de transfert est :

$H_1(p) = \frac{\Theta(p)}{\text{Cons}(p)} = \frac{0,00035}{1 + 0,014p + 0,00017p^2}$ . On rappelle que la courroie s'enroule sur des poulies de même diamètre et que la roue dentée qui engrène avec la crémaillère a un diamètre  $\Phi_1 = 38,4$  mm.

**Question 12** Exprimer le coefficient du bloc  $H_2$  et préciser l'unité.

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

**Question 13** Quelle relation doit vérifier le produit  $P$  des gains des blocs  $C_1, H_1, H_2$ ? Justifier. Exprimer le coefficient  $c_1$  en incrément par mètre du bloc  $C_1$ .

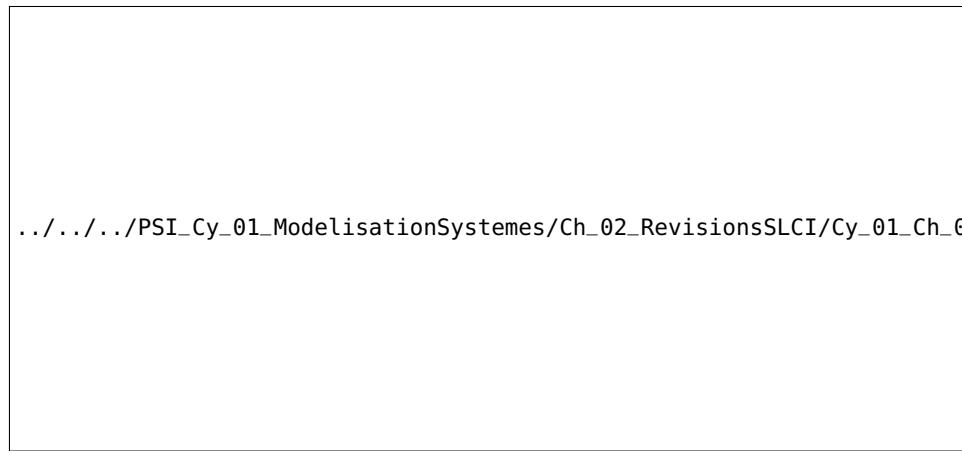
Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

**Question 14** Exprimer le nouveau coefficient  $c_2$  du bloc  $C_1$  ainsi que le nouveau produit  $P_1$ .

### Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

La partie supérieure du robot est constituée par assemblage de tubes minces en fibres de carbone. On modélise cette partie par deux solides :  $S_0$  représentant la crémaillère et les solides qui y sont liés ; et  $S_1$  représentant l'instrument chirurgical. Ces solides sont considérés en liaison glissière parfaite et reliés par un ressort de raideur  $k_0$  et un amortisseur de coefficient  $f_0$ , montés en parallèle comme le montre le schéma.

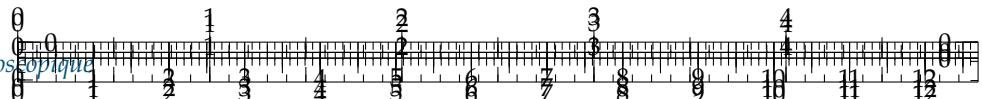
Pour identifier la fonction de transfert  $H_3(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{crem}}(p)}$  de cette partie, on a imposé à la crémaillère un échelon de déplacement  $d_{\text{crem}}(t) = 20 \times 10^{-3}$  m à partir de la position d'équilibre. On a tracé la courbe de déplacement  $d_{\text{instrum}}(t)$  de l'instrument.



On donne sur la figure suivante les abaques des dépassemens relatifs et des temps de réponse réduits d'un système du second ordre.

**Question 15** Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert  $H_3(p)$ ; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.





**Question 16** Le critère de la bande passante de 4 Hz à  $-3$  dB est-il satisfait ?

Les questions suivantes vont permettre de déterminer l'expression analytique de  $H_3(p)$ , de façon à analyser l'influence du paramètre de raideur, pour respecter le critère de bande passante du cahier des charges.

Soit  $m_1$  la masse du solide  $S_1$ . L'axe du mouvement est vertical ascendant et noté  $\vec{z}$ . L'origine  $O$  du mouvement de  $S_1$  correspond à la position pour laquelle le ressort est à sa longueur libre. Soit  $a_0$  l'allongement du ressort dans la position d'équilibre qui prend en compte l'action de la pesanteur. Nota :  $a_0$  est négatif car on considère qu'il y a allongement du ressort.

L'équation du mouvement du ressort autour de la position d'équilibre est donné par :

$$m_1 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0.$$

**Question 17** Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique :  $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$ , exprimer le coefficient d'amortissement  $\xi_3$  et la pulsation propre  $\omega_{03}$  du mouvement en fonction de  $k_0$ ,  $f_0$ ,  $m_1$ .

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface :  $m_1 = 1,6$  kg.

**Question 18** Pour la valeur de  $\omega_{03}$  calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur  $k_0$  (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à  $-3$  dB de 4 Hz. (On notera que  $\omega_{-3\text{dB}} > \omega_{03}$ ).

### Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

On conserve la valeur  $c_1$  du bloc  $C_1$ . La fonction de transfert du système est :

$$H(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{main}}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,014p + 0,00017p^2)(1 + 0,015p + 0,0014p^2)}. \text{ Le chirurgien impose avec sa main une rampe de déplacement de } 100 \text{ mm s}^{-1}. \text{ On a tracé sur la figure ?? les courbes de déplacement de la main et de l'instrument.}$$

**Question 19** Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal ; de l'écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?

On donne figure ??, la courbe d'amplitude (gain) de  $H(p)$  pour  $p = j\omega$  dans le plan de Bode. La main du chirurgien est prise d'un tremblement sensiblement sinusoïdal dont la période est de 0,25 s et l'amplitude 1 mm.

**Question 20** Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

### Amélioration des performances dynamiques

On souhaite limiter l'amplitude du mouvement de l'outil lors du tremblement de la main en filtrant le signal traité par le capteur-codeur  $C_1$  de sorte que les tremblements n'apparaissent plus sur le soustracteur. On propose trois filtres du premier ordre, de gains statiques égaux à 1 et de constantes de temps :  $T_1 = 0,04$  s ;  $T_2 = 0,1$  s ;  $T_3 = 0,5$  s.



FIGURE 2.18 – Courbes de déplacement de la main

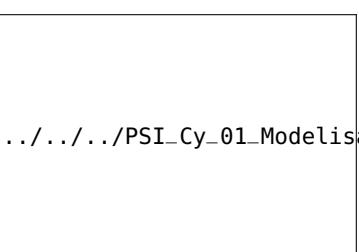
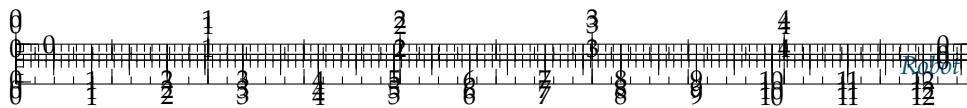


FIGURE 2.19 – Courbe de gain



**Question 21** Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténués de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?

### Éléments de correction

$$1. U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p); E(p) = k_e \Omega_{\text{rédu}}(p); C_{\text{rédu}}(p) = k_c I(p); C_{\text{rédu}}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{\text{rédu}}(p) = J_{\text{équ}} p \Omega_{\text{rédu}}(p).$$

$$2. M(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + R f_v}}{\frac{J_{\text{équ}} L}{k_e k_c + R f_v} p^2 + \frac{R J_{\text{équ}} + L f_v}{k_e k_c + R f_v} p + 1}.$$

3. .

4. .

$$5. M_2(p) = \frac{\frac{k_c}{R J_{\text{équ}}}}{\frac{k_e k_c + R f_v}{k_e k_c + R f_v} p + 1}.$$

6.  $G_S = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ , on a  $\tau = 0,02 \text{ s}$ .

$$7. B(p) = \frac{1}{50p}, C = \frac{360}{2\pi} \text{ incr/rad}, H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{k G_S}{1 + T p}.$$

8. .

9. L'écart statique est nul.

$$10. \varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95 \text{ incr.}$$

$$11. H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$$

12. .

13. .

14. .

$$15. H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

16. .

$$17. \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \text{ et } \xi_3 = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$$

$$18. \Rightarrow k_0 < 1010 \text{ N m}^{-1}.$$

19. ► Écart dynamique maximal : 5 mm.

► Écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi : 4 mm.

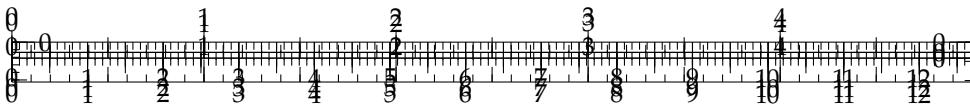
► Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.

20. .

$$21. T_2 = 0,1 \text{ s.}$$







.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_02\_Endoscope/images/fig\_00.jpg

## TD 6

# Robot pour la chirurgie endoscopique– Corrigé

Banque PT – SIA – 2005.

### Présentation

#### Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

**Question 1** Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

#### Correction

On a :

- $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p);$
- $E(p) = k_e \Omega_{\text{rédu}}(p);$
- $C_{\text{rédu}}(p) = k_c I(p);$
- $C_{\text{rédu}}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{\text{rédu}}(p) = J_{\text{équ}} p \Omega_{\text{rédu}}(p).$

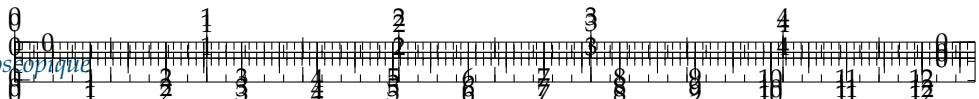
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_02\_Endoscope/images/cor\_01.png

**Question 2** Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur  $M(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)}$  lorsque  $C_r(p) = 0$ .

#### Correction

En raisonnant à partir des équations, on a :  $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) \Rightarrow U(p) = I(p)(R + Lp) + k_e \Omega_{\text{rédu}}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{C_{\text{rédu}}}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{\text{rédu}}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{(J_{\text{équ}} p + f_v) \Omega_{\text{rédu}}(p)}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{\text{rédu}}(p)$   
 $\Rightarrow U(p) = \left( \frac{(J_{\text{équ}} p + f_v)}{k_c} (R + Lp) + k_e \right) \Omega_{\text{rédu}}(p)$   
 Au final,  $M(p) = \frac{k_c}{(J_{\text{équ}} p + f_v) (R + Lp) + k_e k_c}$ .





En mettant l'expression sous forme canonique, on a :  $M(p) = \frac{k_c}{J_{\text{équ}}Lp^2 + (RJ_{\text{équ}} + Lf_v)p + k_e k_c + Rf_v}$

$$\Rightarrow M(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + Rf_v}}{\frac{J_{\text{équ}}L}{k_e k_c + Rf_v}p^2 + \frac{RJ_{\text{équ}} + Lf_v}{k_e k_c + Rf_v}p + 1}.$$

En réalisant l'application numérique, on a :  $M(p) = \frac{0,44}{3,2 \times 10^{-6}p^2 + 14,6 \times 10^{-3}p + 1}$ .

**Question 3** Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance  $L$ .

#### Correction

En observant cette courbe, l'absence de tangente horizontale à l'origine permet de modéliser le système comme un système d'ordre 1. En négligeant  $L$ , le terme d'ordre 2 devient donc négligeable et  $M(p)$  se modélise par une fonction d'ordre 1.

**Question 4** Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de  $M_1(p)$  lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de  $L$ ) étant rejeté.

#### Correction

En utilisant la formulation de  $M_1(p)$  donnée, on calcule le discriminant du dénominateur et on a :  $\Delta = (14,5 \times 10^{-3})^2 - 4 \cdot 3,1 \times 10^{-6} = 0,00019785$ . Au final,  $p_1 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \approx -4607$  et  $p_2 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \approx -70$ . Le dénominateur peut donc se factoriser sous la forme  $3,1 \times 10^{-6}(p + 4607)(p + 70)$ .

Le pôle  $p_2$  est donc dominant par rapport à  $p_1$ .

**Question 5** Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur  $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$ . Donner les valeurs numériques de  $G_s$  et de  $T$  à partir de l'expression de  $M_1(p)$  et des réponses apportées précédemment.

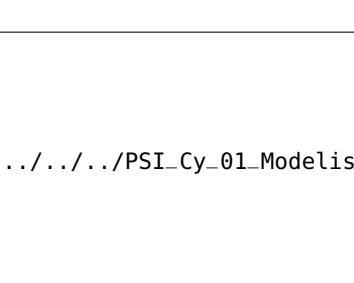
#### Correction

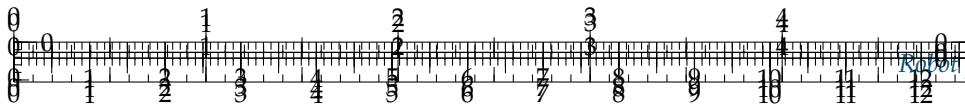
En utilisant l'expression établie initialement en négligeant l'inductance, on a  $M_2(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + Rf_v}}{\frac{RJ_{\text{équ}}}{k_e k_c + Rf_v}p + 1}$ . En réalisant l'application numérique,  $M_2(p) = \frac{0,437}{1 + 0,015p}$  ( $G_s = 0,437 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$  et  $T = 0,015 \text{ s}$ ).

**Question 6** Déterminer les valeurs de  $G_s$  et  $T$ , à partir de la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$  (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

#### Correction

La tension de consigne étant de 24 V et la vitesse de sortie est telle que  $24 \cdot G_S \cdot K_{\text{tachy}} = 1,75 \text{ V}$





soit  $G_S = \frac{1,75}{24 \times 0,166} = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ . En utilisant la méthode de 63 % de la valeur finale, on a  $\tau = 0,02 \text{ s}$ . On constate que les résultats sont relativement proches de ceux formulés par l'hypothèse «  $L$  négligeable ».

## Respect du critère de marge de phase

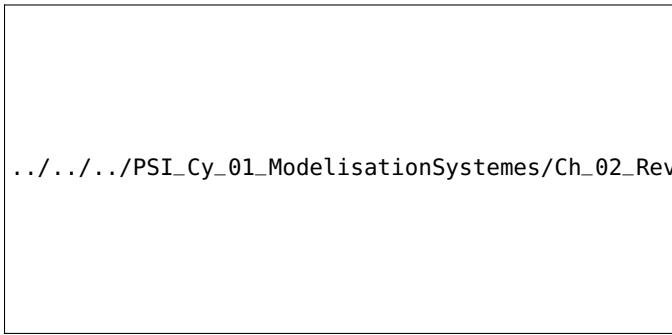
**Question 7** Donner la fonction de transfert du bloc  $B(p)$  et la valeur du coefficient du bloc  $C$  en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de  $k$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_O(p)$ .

### Correction

$B$  assure la réduction de la fréquence de rotation et son intégration dans le but d'obtenir un angle; donc  $B(p) = \frac{1}{50p}$ . Par ailleurs  $C = \frac{360}{2\pi} \text{ incr/rad}$ .

$$\text{On a donc } H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{kG_S}{1 + Tp}.$$

**Question 8** Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour  $k = 1$ . Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de  $k$ ? Justifier.



### Correction

Au vu du tracé, la phase est supérieure à  $-135^\circ$  lorsque le gain est nul. Le système est donc stable.

**Question 9** Calculer l'écart statique  $\varepsilon_{\text{cons}\infty}$  en incrément lorsque la consigne est un échelon de position :  $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$ .

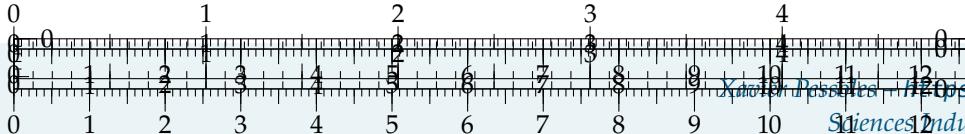
### Correction

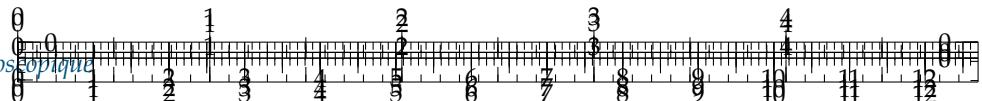
#### Méthode 1 (à connaître après le cours sur la précision – Cycle 2)

La boucle ouverte est de classe 1, l'entrée est un échelon et il n'y a pas de perturbation. L'écart statique est donc nul.

#### Méthode 2 (à savoir faire) – Calcul de l'écart

On a  $\epsilon(p) = \frac{\text{Cons}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$ .  $\text{Cons}(p) = \frac{1}{p}$ . On a alors  $\varepsilon_{\text{cons}\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow +0} p \epsilon(p)$   
 $= \lim_{p \rightarrow +0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = 0$ .





**Question 10** Calculer, pour la valeur  $k_{45}$  de  $k$  établie précédemment, l'écart statique  $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$  en incrément entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant  $C_r u(t)$  induit par les frottements secs.

#### Correction

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \varepsilon(p) &= \text{Cons}(p) - B(p)C\Omega(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C \left( \varepsilon(p)KM(p) - C_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \right) \\
 \Leftrightarrow \varepsilon(p)(1 + B(p)CKM(p)) &= \text{Cons}(p) + B(p)CC_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \Leftrightarrow \varepsilon(p) = \\
 &\text{Cons}(p) \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} \\
 &+ C_r(p) \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} \\
 &+ C_r \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{\frac{G_S}{1 + Tp} R \frac{1}{50p} C}{k_c \left( 1 + \frac{1}{50p} CK \frac{G_S}{1 + Tp} \right)} \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{G_S RC}{k_c ((1 + Tp) 50p + CKG_S)} \\
 &= C_r \frac{G_S RC}{k_c CKG_S} = C_r \frac{R}{k_c K}.
 \end{aligned}$$

On a donc  $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = C_r \frac{R}{k_c K}$  soient  $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95$  incr.

**Question 11** La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc  $K$  qui annulerait cet écart.

#### Correction

Si on majore l'erreur précédente à 1 incrément, l'erreur sur la position de l'instrument est de 0,007 mm. Cette erreur est inférieure à 0,2 mm (exigence 3). On peut conserver la valeur  $k = 1$ .

## Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

### Modélisation par schéma-blocs

#### Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

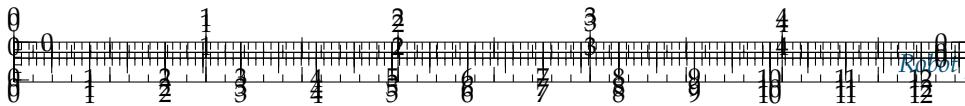
**Question 12** Exprimer le coefficient du bloc  $H_2$  et préciser l'unité.

#### Correction

En notant  $x$  le déplacement en translation, on a  $x = \frac{38,4}{2}\Theta$ . On a donc  $H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$ .

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.





**Question 13** Quelle relation doit vérifier le produit  $P$  des gains des blocs  $C_1, H_1, H_2$ ? Justifier. Exprimer le coefficient  $c_1$  en incréments par mètre du bloc  $C_1$ .

#### Correction

Dans le cas où l'instrument doit réaliser les mêmes mouvements que la main, il est nécessaire que  $P = 1$ .

On a  $G_{H_1} \cdot G_{H_2} = 0,0192 \times 0,00035 = 6,72 \times 10^{-6}$ .

On a donc  $c_1 = 148\,810 \text{ incr m}^{-1}$ .

Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

**Question 14** Exprimer le nouveau coefficient  $c_2$  du bloc  $C_1$  ainsi que le nouveau produit  $P_1$ .

#### Correction

On souhaite maintenant que  $P_1 = \frac{1}{10}$  et  $c_1 = 14\,881 \text{ incr m}^{-1}$ .

### Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

**Question 15** Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert  $H_3(p)$ ; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

#### Correction

Pour un échelon de 20 mm, le déplacement est de 20 mm. Le gain statique est donc de  $K = 1$ .

Le premier dépassement absolu est d'environ 30 mm soit un dépassement de 50 % par rapport à la valeur finale. En utilisant l'abaque des temps de réponse, on trouve  $\xi = 0,2$ .

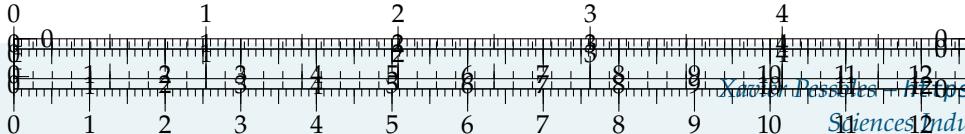
Le temps de réponse à 5 % est d'environ 0,55 s. En utilisant l'abaque, on a  $\omega_0 Tr = 15$ . On a donc  $\omega_0 = 27 \text{ rad s}^{-1}$ .

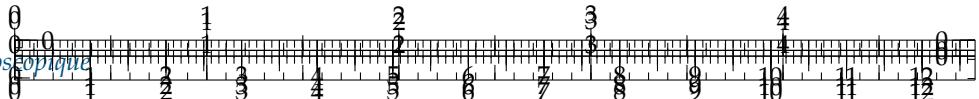
$$\text{Au final, } H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

**Question 16** Le critère de la bande passante de 4 Hz à  $-3 \text{ dB}$  est-il satisfait?

#### Correction

On trace le diagramme de Bode. La bande passante à  $-3 \text{ dB}$  est de 4 Hz. Une marge de sécurité serait peut être préférable.





.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_02\_Endos

**Question 17** Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique :  $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$ , exprimer le coefficient d'amortissement  $\xi_3$  et la pulsation propre  $\omega_{03}$  du mouvement en fonction de  $k_0, f_0, m_1$ .

#### Correction

On a  $m_1 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{k_0} \frac{d^2z(t)}{dt^2} + \frac{f_0}{k_0} \frac{dz(t)}{dt} + z = 0$ .

On a donc  $\omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1}$  et  $\frac{2\xi_3}{\omega_{03}} = \frac{f_0}{k_0}$  et  $\xi_3 = \frac{f_0}{2k_0} \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}$ .

On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface :  $m_1 = 1,6 \text{ kg}$ .

**Question 18** Pour la valeur de  $\omega_{03}$  calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur  $k_0$  (en N/m) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à  $-3 \text{ dB}$  de 4 Hz. (On notera que  $\omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03}$ ).

#### Correction

On a  $\omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03}$  or  $\omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \Rightarrow k_0 = m_1 \omega_{03}^2$ ; donc nécessairement,  $\omega_{-3 \text{ dB}} > \sqrt{\frac{k_0}{m_1}}$   
 $\Rightarrow k_0 < \omega_{-3 \text{ dB}}^2 m_1 \Rightarrow k_0 < 2^2 4^2 \pi^2 \times 1,6 \text{ k} < 1010 \text{ N m}^{-1}$ .

### Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

**Question 19** Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal ; de l'écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère ?

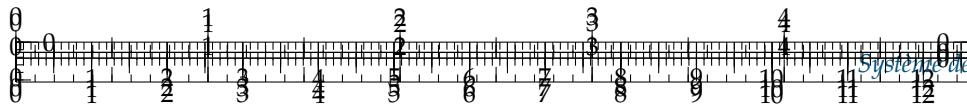
#### Correction

- ▶ Écart dynamique maximal : 5 mm.
- ▶ Écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi : 4 mm.
- ▶ Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.

9\_cor.png

**Question 20** Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?



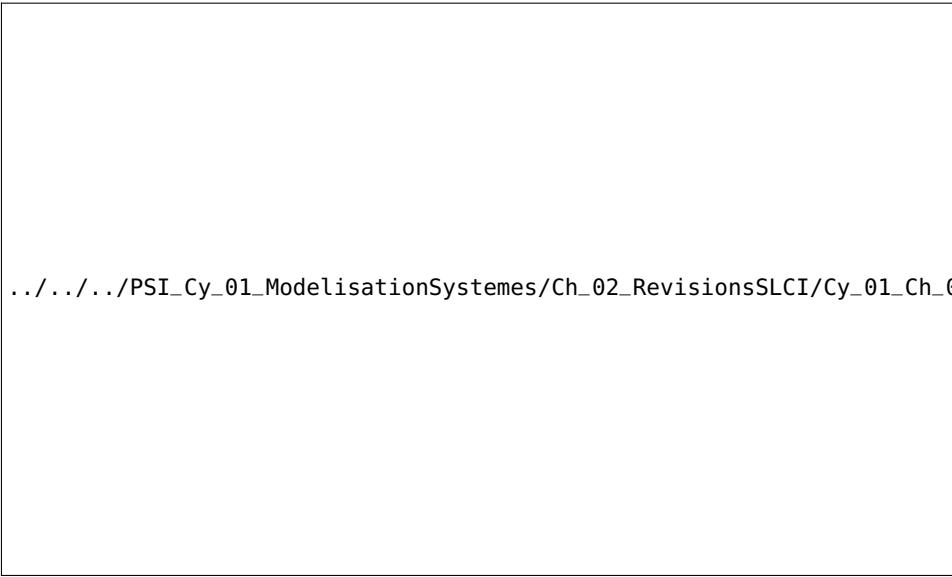


### Correction

Pour une sinusoïde de période 0,25 s, la pulsation est de  $\frac{2\pi}{0,25} = 25 \text{ rad s}^{-1}$ . À cette pulsation, le gain est de 8 dB. Le rapport S/E est donc de  $10^{8/20} = 2,5$  ainsi l'amplitude du robot sera de 2,5 mm. Il faudrait régler l'asservissement pour que ces vibrations soient atténuées/filtrées (plutôt qu'amplifiées).

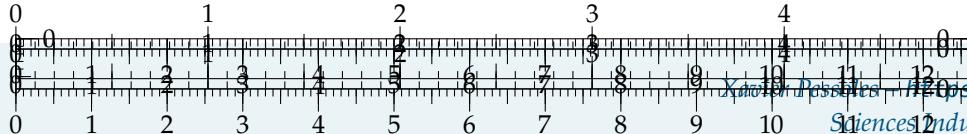
### Amélioration des performances dynamiques

**Question 21** Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténués de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?

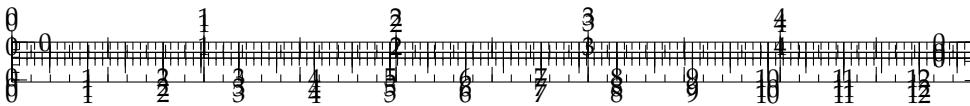


### Correction

Le filtre  $T_2 = 0,1 \text{ s}$  permet d'atténuer le gain à une pulsation de  $25 \text{ rad s}^{-1}$  sans trop atténuer le gain à des pulsations inférieures à  $6,3 \text{ rad s}^{-1}$ .







.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_03\_Freinage/images/fig\_01.png

## TD 7

# Système de freinage d'un TGV DUPLEX- Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2006

## Mise en situation

L'objet de cette étude est l'analyse du système de freinage mécanique à énergie pneumatique installé sur les TGV Duplex. Par soucis de sécurité, il est indispensable d'éviter le blocage des roues (phénomène appelé enrayage) lors du freinage. Pour cela il est nécessaire de maîtriser la vitesse de glissement entre la roue et le rail.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

### Objectif

L'objectif est d'étudier la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation.

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure ?? où  $v_c$  est la consigne de glissement.

On note :

- ▶  $H_1(p)$  la fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électrovalve);
- ▶  $H_2(p)$  la fonction de transfert de la roue au freinage;
- ▶  $C(p)$  le correcteur de la boucle de régulation;
- ▶  $M(p)$  la fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement, cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure;
- ▶  $v_m$  : glissement estimé.

On adoptera pour la suite :  $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$  et  $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

Pour une vitesse de train  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ , le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse du train par rapport au rail  $V_T$  ne font pas l'objet de cette étude.

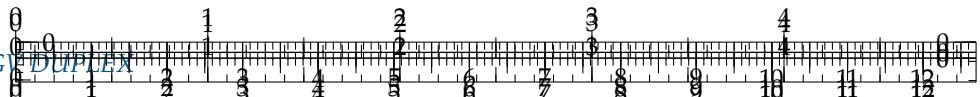
On a  $M = 8200 \text{ kg}$ ,  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ ,  $I/r^2 = 400 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

## Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

On donne la fonction de transfert entre le glissement relatif et la force de freinage :

$$H_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}.$$



**Marges de stabilité, performances en boucle ouverte**

Pulsation de coupure à 0 dB

$\omega_c \simeq 1 \text{ rad s}^{-1}$

Marge de phase

$\Delta\varphi \geq 60^\circ$  au point de fonctionnement nominal  $B$

Stabilité quel que soit le point de fonctionnement sur la caractéristique  $\mu = f(v)$ **Réponse à un échelon de consigne de glissement**

Écart en régime permanent

Nul

Temps du 1<sup>er</sup> maximum

$t_m \leq 3,5 \text{ s}$

Dépassee

$D \simeq 18 \%$

**Réponse à une variation en échelon de l'adhérence**

Écart en régime permanent

Nul

Temps de réponse

$t_r \leq 9 \text{ s}$

**FIGURE 2.21** – Cahier des charges de la boucle de régulation de glissement pour  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ 

**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

**Synthèse du régulateur de la boucle de régulation**

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_03\_Freinage/images/BodeQ1.png  
On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Méthode – Marge de phase**

Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$ . On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

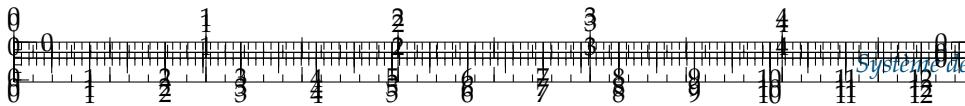
**Méthode –**

Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0$ .

**Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement**

Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérification concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de





glissement : temps du 1<sup>er</sup> maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)}$ , on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante :  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$ .

On supposera sans aucune justification que  $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$ .

**Question 5** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

**Question 6** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Question 7** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) = \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2}\right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$ .

**Question 8** Calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $\nu_c(t) = \nu_{c0} u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

**Question 9** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

### Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

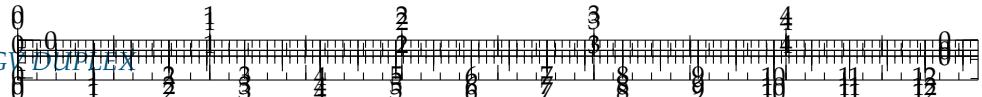
La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive. On admet que cette modélisation conduit au schéma bloc représenté sur la figure ci-dessous.

On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

**Question 10** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{\nu_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $\nu_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|\mathcal{H}_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|\mathcal{C}(j\omega)\mathcal{H}_1(j\omega)\mathcal{M}(j\omega)\|} \right].$$





.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisationsystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_03\_Freinage/image02.png

**Question 11** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $||H_2(j\omega)||$ .

**Question 12** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $||F_2(j\omega)||$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner l'expression de la fonction  $F_2(p)$  correspondant à la variation de la force de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

**Question 13** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

**Question 14** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

**Question 15** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).

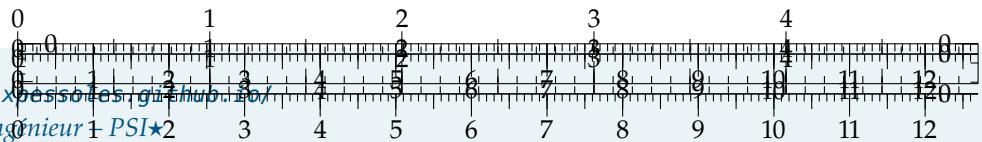
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisationsystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_03\_Freinage/image03.png

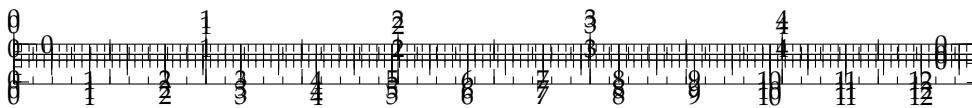
### Retour sur le cahier des charges

**Question 16** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

#### Éléments de correction

1. ...
2.  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ$ .
3.  $T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$ .
4. \*\*\*
5. \*\*\*
6. \*\*\*
7. \*\*\*
8. \*\*\*
9. \*\*\*
10. \*\*\*



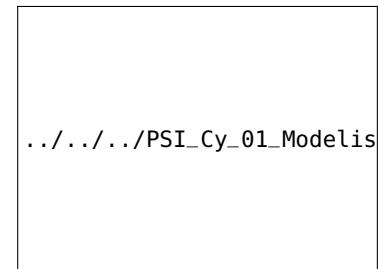


../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_03\_Freinage/images/fig\_01.png

## TD 7

# Système de freinage d'un TGV DUPLEX- Corrigé

Concours Centrale Supelec PSI 2006 –  
Ressources UPSTI



## Mise en situation

### Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

#### Correction

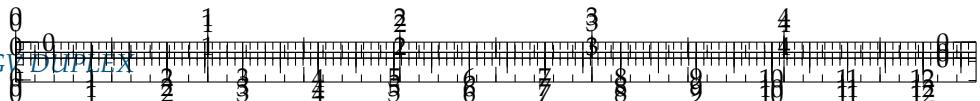
On a pour  $H_1(p)$ ,  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,01 \Leftrightarrow \omega_0 = 10$  et  $2\frac{\xi}{\omega_0} = 0,1$  soit  $\xi = 0,1 \times 10/2 = 0,5$ . Les pulsations caractéristiques de la FTBO sont donc  $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$  et  $1/0,05 = 20 \text{ rad s}^{-1}$ . Pour tracer un diagramme de Bode avec un intégrateur, il est nécessaire de définir un point pour définir la « hauteur » du tracé. Pour cela on prend un point pour lequel seul l'intégrateur et les constantes ont de l'effet. Ainsi, pour  $\omega = 0,1 \text{ rad s}^{-1}$ , on a  $\text{FTBO}(p) \simeq \frac{2000 \times 45 \times 10^{-6}}{p}$ .

On a donc  $20 \log 0,09 - 20 \log 0,1 \simeq -0,92 \text{ dB}$ .

On peut dresser le tableau de variations de la FTBO puis tracer les asymptotes.

../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_03\_Freinage/images/cor\_01.png





../../../../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_03\_Freinage/

## Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :

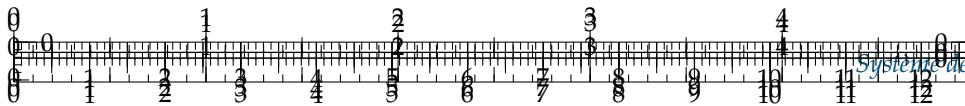
$$C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

### Méthode – Marge de phase

Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|FTBO(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$ . On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg[FTBO(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .





### Correction

La pulsation de coupure souhaitée est  $\omega_c \approx 1 \text{ rad s}^{-1}$ . On cherche donc  $K_r$  et  $T_i$  tels que  $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ) = 60^\circ$ .

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \underbrace{\frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}}_{\rightarrow -5,7^\circ \text{ qd } \omega = \omega_c} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + 0,05p}}_{\rightarrow -2,8^\circ \text{ qd } \omega = \omega_c} \cdot \underbrace{K_r}_{\rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \cdot \underbrace{\frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}}_{\rightarrow -90^\circ} \right] = \arg \left[ \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \right] - 98,5$$

### Remarque

Ci-dessus, ce sont les **arguments** que l'on évalue lorsque  $\omega = \omega_c$ . L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] - 98,5.$$

Pour respecter la marge souhaitée, il est donc nécessaire que  $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180) \geq 60$

$$\text{Soit } \arg \left[ \frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] - 98,5 + 180 \geq 60 \text{ et } \arg \left[ \frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] \geq -21,5^\circ.$$

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

### Correction

$$\begin{aligned} \text{On en déduit que pour } \omega = \omega_c = 1, \arg \left[ \frac{T_ip + 1}{T_ip} \right] \geq -21,5^\circ &\Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) - 90 \geq -21,5^\circ \\ \Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) \geq 68,5^\circ \text{ et donc } \Rightarrow T_i &\geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s.} \end{aligned}$$

**Attention :** à ce stade, la marge de phase serait de  $60^\circ$  SI la pulsation de coupure était de  $1 \text{ rad s}^{-1}$  ce qui n'est pas encore le cas pour le moment.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

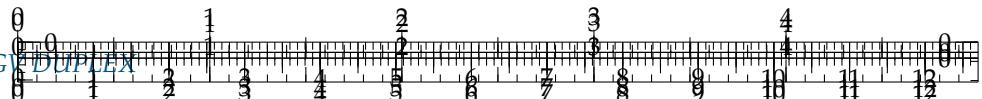
### Méthode –

Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0$ .

### Correction

En raisonnant graphiquement à l'aide du diagramme en boucle ouverte non corrigé, on lit que le gain est d'environ  $-20 \text{ dB}$  lorsque  $\omega = 1$ . La fonction de transfert du correcteur est  $C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) = K_r \frac{T_ip + 1}{T_ip}$ . Le gain dB du correcteur doit donc être de  $20 \text{ dB}$  lorsque  $\omega = 1 : 20 \log K_r + 20 \log \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} - 20 \log T_i\omega = 20 \Leftrightarrow \log K_r + \log \sqrt{T_i^2 + 1} - \log T_i = 1$   $\Leftrightarrow \log K_r = 1 - \log \sqrt{T_i^2 + 1} + \log T_i$ . On a donc  $K_r = 9,3$ .





Anlaytiquement (à vérifier....)  $20 \log ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0 \Rightarrow ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 1$ .

$$\begin{aligned} ||\text{FTBO}(j\omega)|| &= \left\| \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\ &= \left\| \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \frac{1 + T_ip}{T_ip} \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\ &= \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2} \left\| \frac{1}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \frac{1}{1 + 0,05p} \right\| = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + 0,05^2 \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,01^2 \omega^2)^2 + 0,1^2 \omega^2}} \\ &= \frac{K_r}{T_i} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1 + T_i^2}}{\sqrt{1 + 0,05^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,01^2)^2 + 0,1^2}} \end{aligned}$$

**Question 5** Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

#### Méthode –

Soit  $\omega_\varphi$  la pulsation telle que  $\varphi(\omega_\varphi) = -180^\circ$ . La marge de gain s'exprime alors par  $MG = -20 \log |H(j\omega_\varphi)|$ .

#### Correction

**Approche analytique** On résout  $\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = -180^\circ$

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right]$$

#### Approche graphique

### Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

**Question 6** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

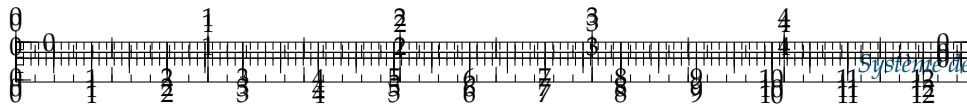
#### Correction

**Question 7** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

#### Correction

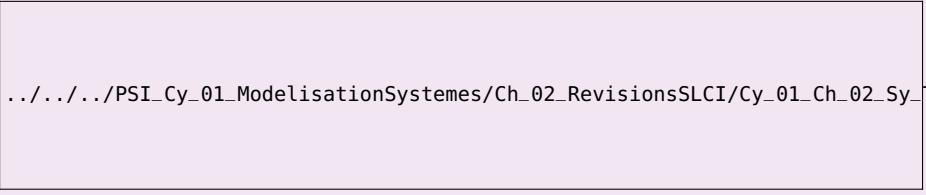
- $K_f = 1$  : lorsque  $\omega$  tend vers 0, le gain tend vers 0;
- $\omega_0 = 0,5$  : valeur de la pulsation de résonance;
- $\tau_1 = \frac{1}{0,9} = 1,11 \text{ s}$ ;
- $\tau_2 = \frac{1}{7} = 0,14 \text{ s}$ ;
- $\xi < 0,7$  (résonance).





**Question 8** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

#### Correction



On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$ .

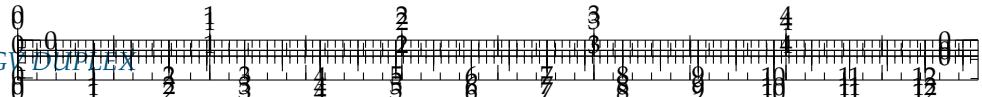
**Question 9** Calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $v_c(t) = v_{c0}u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

#### Correction



**Question 10** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la





consigne de glissement relatif.

#### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_03\_Freinage

### Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

**Question 11** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $v_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right].$$

#### Correction

On a directement  $F_2(p) = -\frac{H_2(p)}{1 + H_2(p)M(p)C(p)H_1(p)}$ .

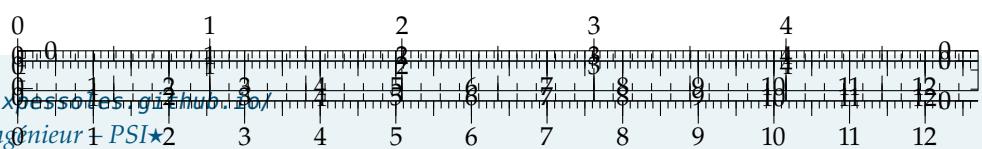
On peut alors déterminer le module et on a  $\|F_2(j\omega)\| = \left\| \frac{H_2(j\omega)}{1 + H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|$ .

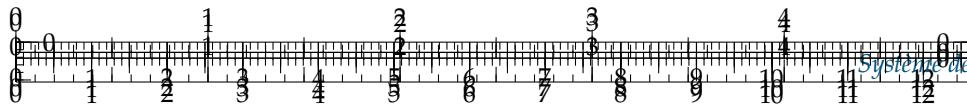
Dans ces conditions :

- si  $\left\| \frac{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)}{H_2(j\omega)} \right\| >> 1$  alors  $\|F_2(j\omega)\| \approx \frac{1}{\|M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\|}$ ;
- si  $\left\| \frac{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)}{H_2(j\omega)} \right\| << 1$  alors  $\|F_2(j\omega)\| \approx \|H_2(j\omega)\|$ .

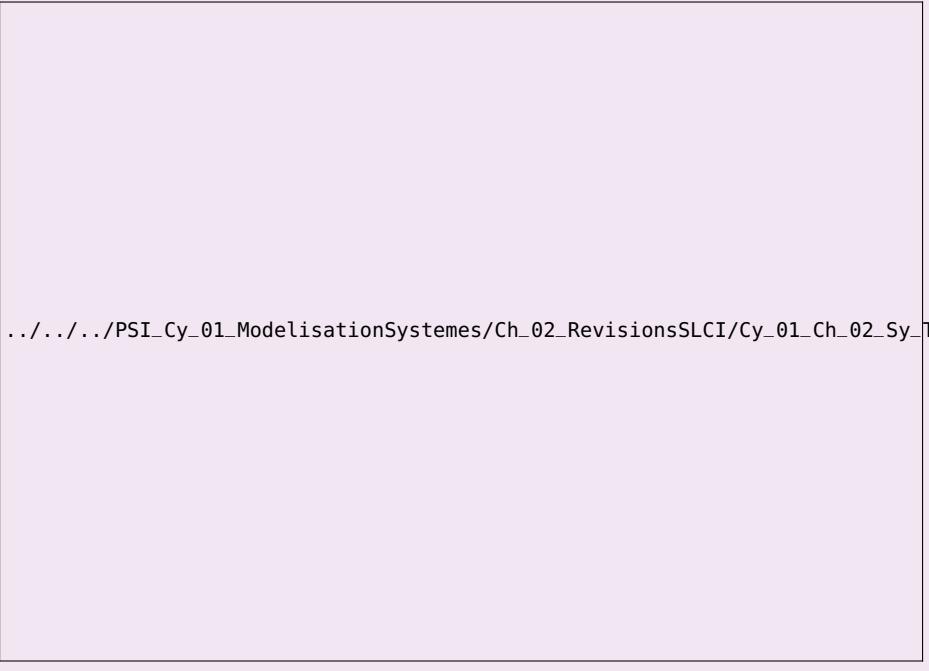
On peut en conclure que  $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$ .

**Question 12** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|}$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $\|H_2(j\omega)\|$ .



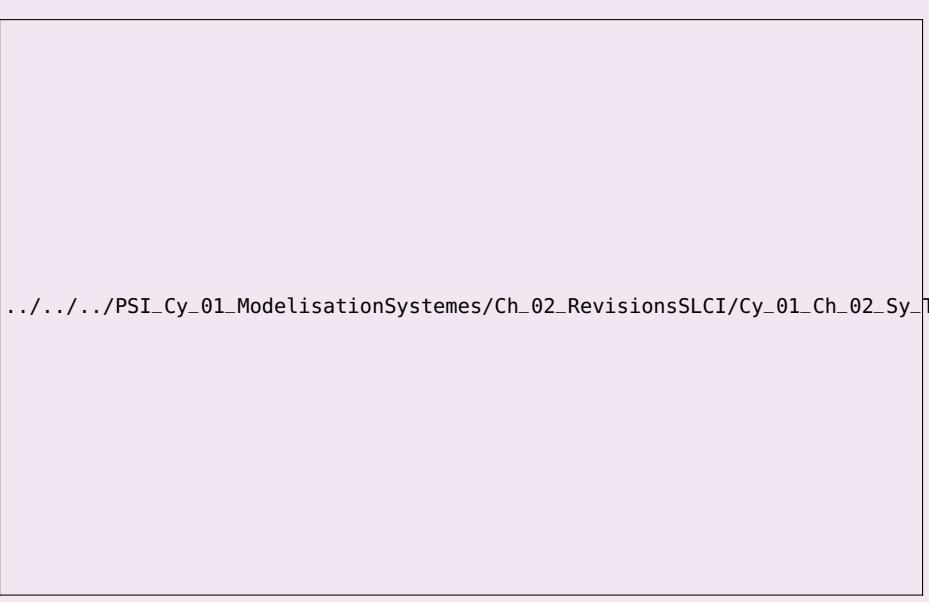


## Correction



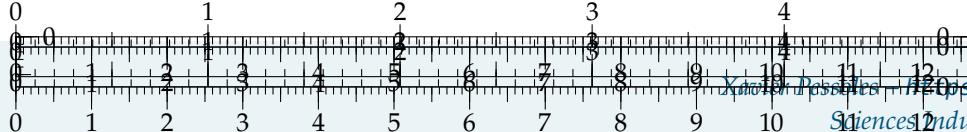
**Question 13** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $\|F_2(j\omega)\|$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

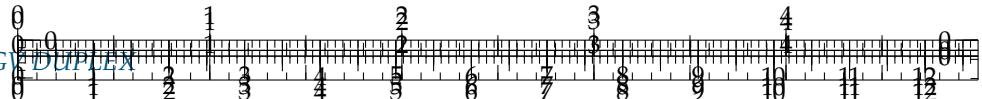
## Correction



[.../.../.../PSI\\_Cy\\_01\\_ModelisationSystemes/Ch\\_02\\_RevisionsSLCI/Cy\\_01\\_Ch\\_02\\_Sy\\_TD\\_03\\_Freinage/images/cor\\_03.png](.../.../.../PSI_Cy_01_ModelisationSystemes/Ch_02_RevisionsSLCI/Cy_01_Ch_02_Sy_TD_03_Freinage/images/cor_03.png)

En analysant les brisures de  $F_2$ , on peut proposer la fonction de transfert suivante :  $F_2 = \frac{Kp}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$  avec  $\tau_1 = \frac{1}{0,35} \simeq 2,9$  s,  $\tau_2 = \frac{1}{1,8} \simeq 0,6$  s. Avec cette proposition, en basse fréquence, seul le dérivateur existe, on a donc  $20 \log K\omega = 20 \log 0,01K = -123$  soit  $K = 100 \times 10^{-123/20} \simeq 7 \cdot 10^{-5}$ .





$$\text{Au final, } F_2 = -\frac{7 \cdot 10^{-5} p}{(1 + 2,9p)(1 + 0,6p)}.$$

**Question 14** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

#### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_03\_Frein

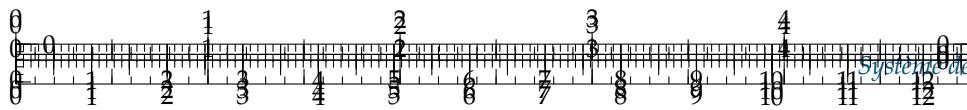
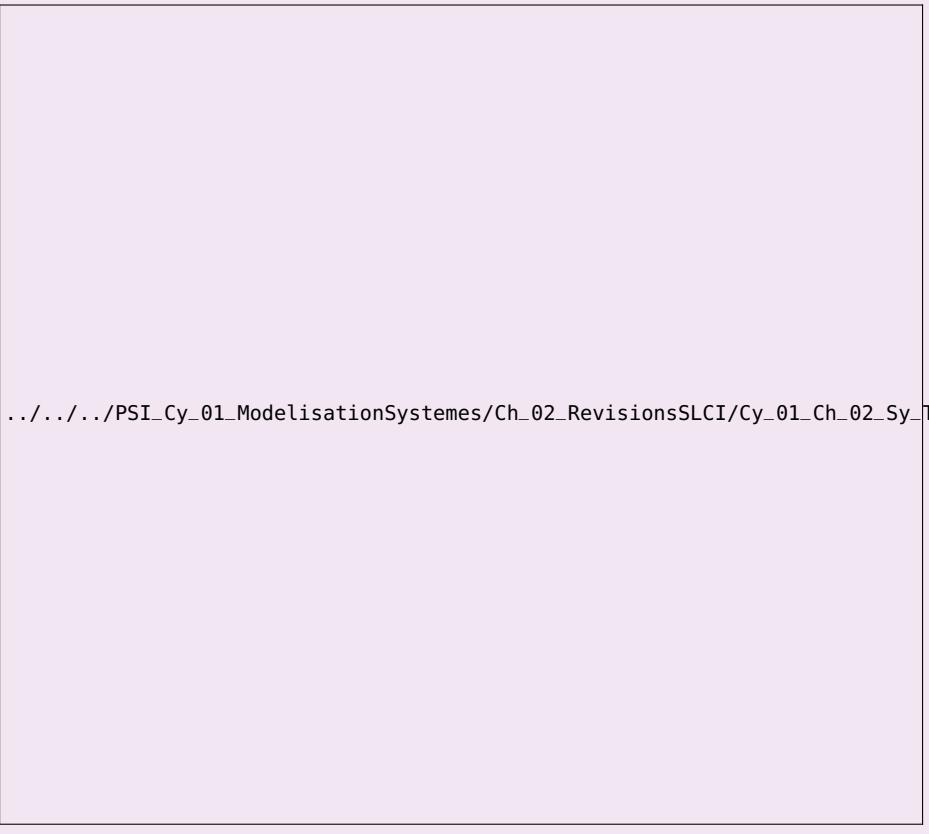
**Question 15** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000$  N.

#### Correction

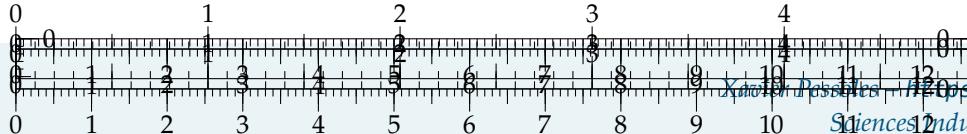
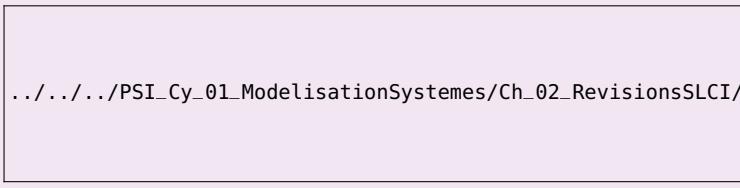
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_03\_Frein

**Question 16** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).

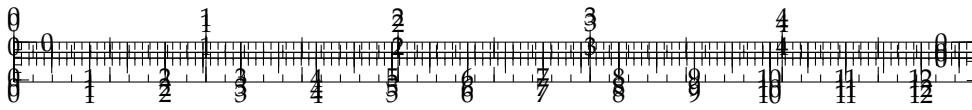


**Correction****Retour sur le cahier des charges**

**Question 17** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

**Correction**





.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_04\_Hexapode/images/fig\_00.jpg

## TD 8

# Asservissement par traitement d'image d'une plate-forme Hexapode – Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2016

## Mise en situation

### Objectif

En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure ??.

On suppose :

- ▶ qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques ;
- ▶ pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont  $F_u(p)$  est la transformée de Laplace ;
- ▶ que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont  $D(p)$  est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe ;
- ▶ pour l'axe considéré que  $L^m(p)$ ,  $L^d(p)$  et  $L^{de}(p)$  sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur  $L^m$  est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur) ;
- ▶ que  $U(p)$  représente la transformée de Laplace de la grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert  $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$ , la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur  $\tau = 0,04$  s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel suivant, caractérisé par une pulsation de coupure en boucle ouverte et une marge de phase fixées à priori, est rappelé :

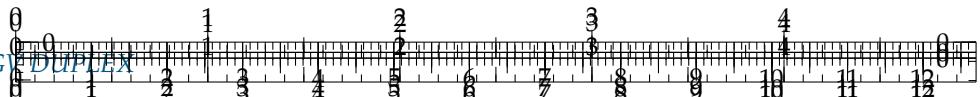
- ▶ pulsation de coupure  $\omega_c$  à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$  ;



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_04\_Hexapode/images/fig\_00.jpg

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_04\_Hexapode/images/fig\_00.jpg

**FIGURE 2.22** – Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement



- ▶ marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$ .

Pour la conception de la loi de commande, il s'agira :

- ▶ de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel ;
- ▶ d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images) ;
- ▶ de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

### Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation  $L^{de}(t)$  de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté  $C_1(p)$  et la consigne  $L^*(p)$ , est représentée par le schéma de la figure ??.

En raison de la présence d'un retard de mesure (signe synchrone représenté sur les schémas fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisations

FIGURE 2.23 – Structure de commande à une boucle

**Question 1** La figure B du document réponse montre le diagramme de Bode de la fonction  $H(p)$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant  $C_1(p) = 1$ ).

**Question 2** Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- ▶ compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur  $C_1(j\omega)$  doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur  $\tau$  ;
- ▶ en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral  $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_{i1}p}\right)$ , justifier qu'un correcteur de ce type :
  - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure ;
  - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

### Structure de commande adaptée à un système avec retard

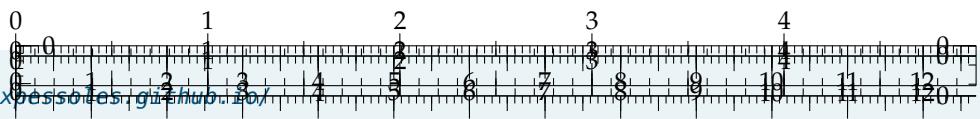
Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards.

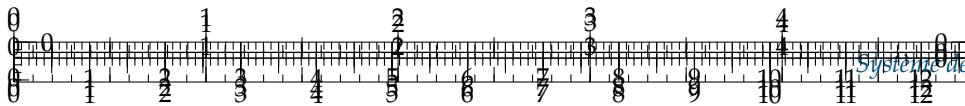
La figure suivante montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel ??(a) représentant la réalisation de la commande ( $X(p)$ ) est la transformée de Laplace du signal de commande ( $U(p)$ ) et d'autre part un schéma fictif ??(b).

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisations

FIGURE 2.24 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard.

**Question 3** En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral  $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$  permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier





des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit  $\arg(C(j\omega))$ , que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale  $T_i$ ;
- ▶ pour la valeur de  $T_i$  obtenue, déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

**Question 4** Pour une consigne nulle  $L^*(t)$ , une perturbation en sortie nulle  $d(t) = 0$  et un échelon de perturbation en entrée  $f_u(t) = F_0 h(t)$  où  $h(t)$  est l'échelon d'Heaviside :

- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- ▶ compte tenu de la forme de  $H(p)$ , en déduire alors le comportement de la grandeur  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

## Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

- ▶ une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe  $L^m(t)$  permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence  $L^{m*}(t)$ . Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et on note  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$  la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne;
- ▶ la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée  $L^{de}(t)$ .

La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée  $T(p)$  où :

- ▶  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$  est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure);
- ▶  $L^{m*}(p)$  est la consigne de l'asservissement de la boucle interne;
- ▶ l'effet de la perturbation  $F_u(p)$  est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée;
- ▶ les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace  $D(p)$ .

Pour la conception de la loi de commande :

- ▶ une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée;
- ▶ on synthétise dans ce cas un correcteur  $C_2(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p}\right)$  de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur  $R_e(p)$  est réalisé en utilisant  $C_2(p)$  selon une structure identique à celle de la figure précédente (a);
- ▶ le calcul du régulateur  $C_2(p)$  ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.



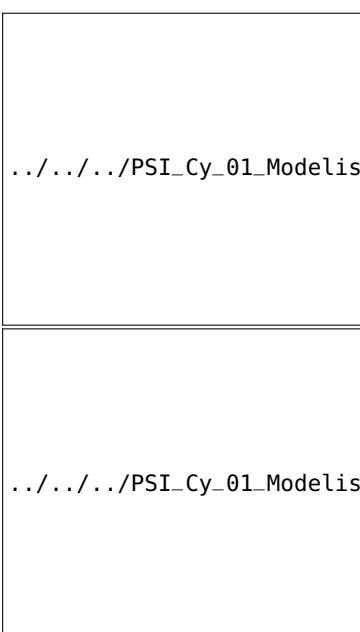


**Question 5** En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur  $L^m(t)$  en régime permanent, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$ , en réponse à une perturbation  $d(t)$  en échelon  $d(t) = D_0 h(t)$ . Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur  $R_e(p)$  selon le schéma de la figure (a) reste stable du point vue interne.

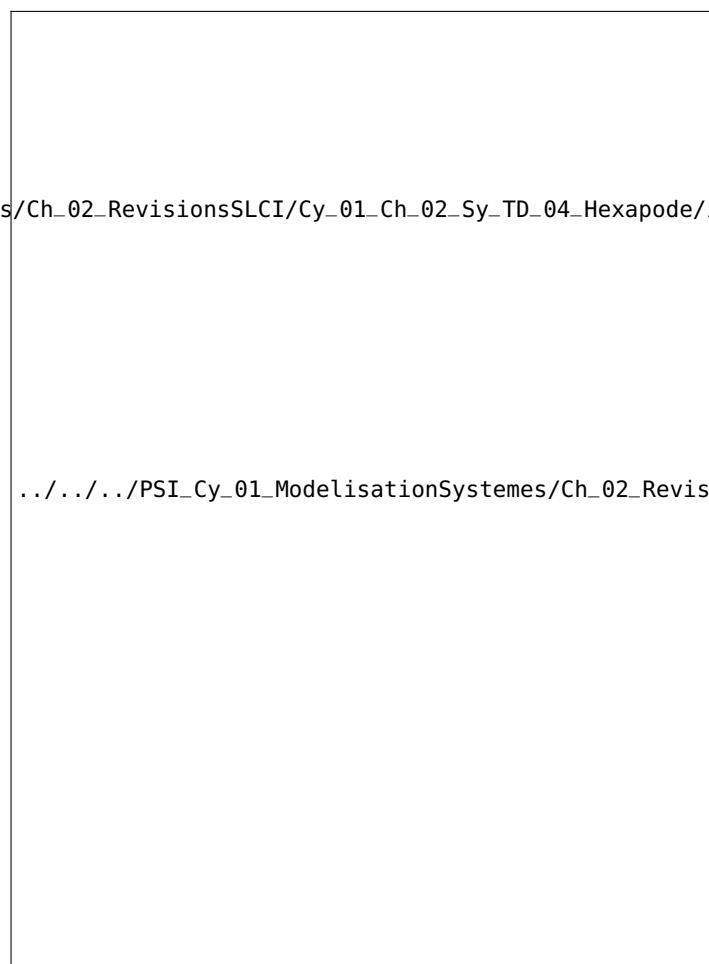
### Retour sur le cahier des charges

La figure ?? montre les évolutions temporelles de la position  $L^d(t)$  en réponse à une consigne en échelon  $L^*(t) = L_0 h(t - 0,02)$  avec  $L_0 = 10 \text{ mm}$  et à une perturbation en échelon  $D^*(t) = D_0 h(t - 0,02)$  avec  $D_0 = 10 \mu\text{m}$ .

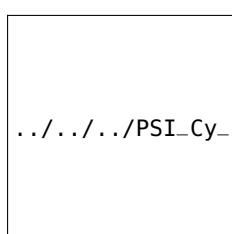
**Question 6** Comparer ces courbes et en justifier le résultat obtenu en validant les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.



**FIGURE 2.26** – Evolutions temporelles de la position  $L^d(t)$

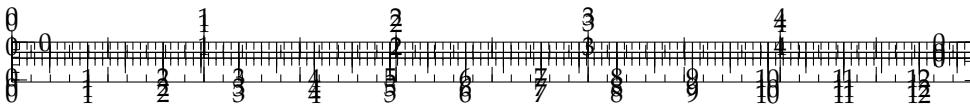


.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_04\_Hexapode/images/fig\_06b.png



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_04\_Hexapode/images/Cy\_01\_0





.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_04\_Hexapode/images/fig\_00.jpg

## TD 8

# Asservissement par traitement d'image d'une plate-forme Hexapode – Corrigé

Concours Centrale Supelec PSI 2016

## Mise en situation

### Objectif

En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure ??.

On suppose :

- ▶ qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques ;
- ▶ pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont  $F_u(p)$  est la transformée de Laplace ;
- ▶ que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont  $D(p)$  est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe ;
- ▶ pour l'axe considéré que  $L^m(p)$ ,  $L^d(p)$  et  $L^{de}(p)$  sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur  $L^m$  est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur) ;
- ▶ que  $U(p)$  représente la transformée de Laplace de la grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert  $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$ , la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur  $\tau = 0,04$  s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel suivant, caractérisé par une pulsation de coupure en boucle ouverte et une marge de phase fixées à priori, est rappelé :

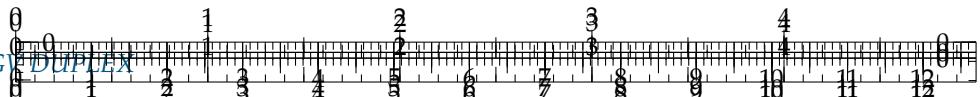
- ▶ pulsation de coupure  $\omega_c$  à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$  ;



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

**FIGURE 2.27** – Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement



- marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$ .

Pour la conception de la loi de commande, il s'agira :

- de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel;
- d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images);
- de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

### Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation  $L^{de}(t)$  de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté  $C_1(p)$  et la consigne  $L^*(p)$ , est représentée par le schéma de la figure ??.

.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisations

**FIGURE 2.28 – Structure de commande à une boucle**

En raison de l'hypothèse de mesure sans retard (figurant dans l'énoncé de l'exercice 03.png fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

**Question 1** La figure B du document réponse montre le diagramme de Bode de la fonction  $H(p)$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant  $C_1(p) = 1$ ).

#### Correction

**Question 2** Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

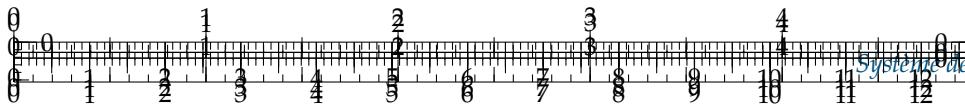
- compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur  $C_1(j\omega)$  doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur  $\tau$ ;
- en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral  $C_1(p) = K_1 \left( 1 + \frac{1}{Ti1p} \right)$ , justifier qu'un correcteur de ce type :
  - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure;
  - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

#### Correction

### Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards. La figure suivante montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel ??(a) représentant la réalisation de la commande ( $X(p)$ ) est la transformée





de Laplace d'une grandeur  $x(t)$  interne au régulateur), d'autre part un schéma fictif ??(b).

**Question 3** En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral  $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$  permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit  $\arg(C(j\omega))$ , que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale  $T_i$ ;
- ▶ pour la valeur de  $T_i$  obtenue, déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

#### Correction

**Question 4** Pour une consigne nulle  $L^*(t)$ , une perturbation en sortie nulle  $d(t) = 0$  et un échelon de perturbation en entrée  $f_u(t) = F_0 h(t)$  où  $h(t)$  est l'échelon d'Heaviside :

- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- ▶ compte tenu de la forme de  $H(p)$ , en déduire alors le comportement de la grandeur  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

#### Correction

## Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

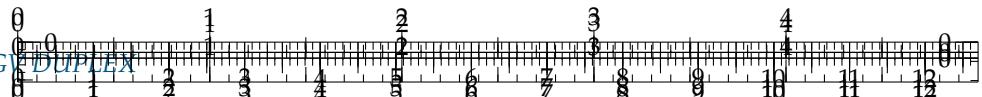
- ▶ une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe  $L^m(t)$  permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence  $L^{m*}(t)$ . Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et on note  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$  la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne;
- ▶ la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée  $L^{de}(t)$ .

La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée  $T(p)$  où :

- ▶  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$  est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure);
- ▶  $L^{m*}(p)$  est la consigne de l'asservissement de la boucle interne;
- ▶ l'effet de la perturbation  $F_u(p)$  est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée;



FIGURE 2.29 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard.



- ▶ les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace  $D(p)$ .

Pour la conception de la loi de commande :

- ▶ une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée;
- ▶ on synthétise dans ce cas un correcteur  $C_2(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p}\right)$  de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur  $R_e(p)$  est réalisé en utilisant  $C_2(p)$  selon une structure identique à celle de la figure précédente (a);
- ▶ le calcul du régulateur  $C_2(p)$  ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_04\_Hexapode/images/fig

**FIGURE 2.30** – Modèle de commande avec une boucle interne intégrée

**Question 5** En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur  $L^m(t)$  en régime permanent, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$ , en réponse à une perturbation  $d(t)$  en échelon  $d(t) = D_0 h(t)$ . Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur  $R_e(p)$  selon le schéma de la figure (a) reste stable du point vue interne.

#### Correction

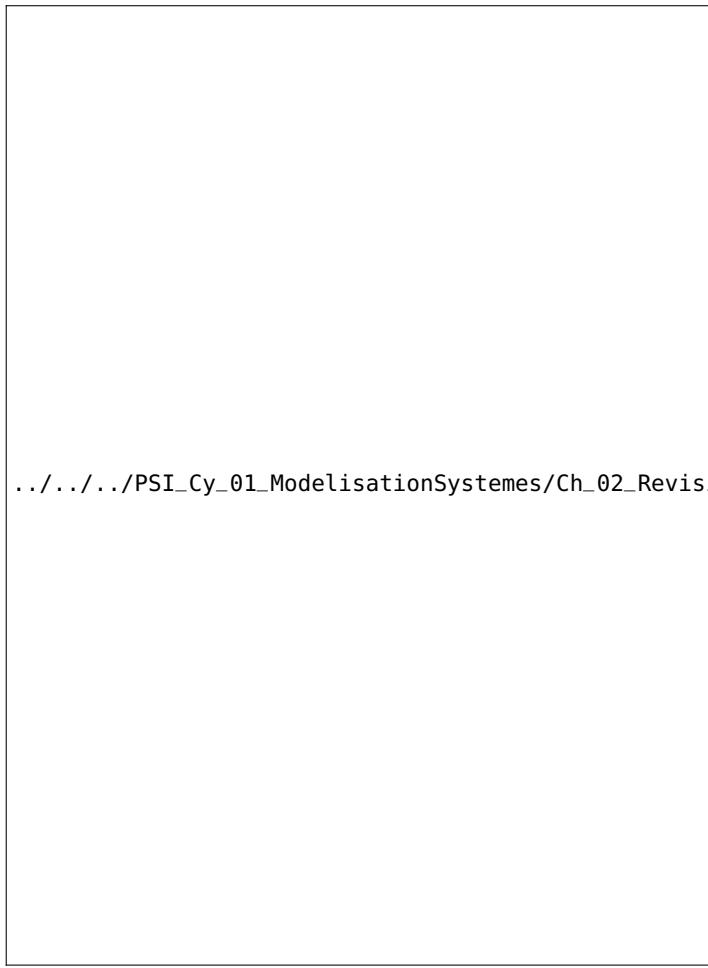
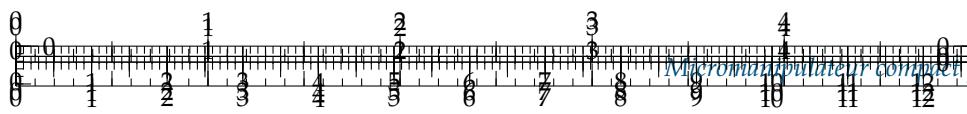
### Retour sur le cahier des charges

La figure ?? montre les évolutions temporelles de la position  $L^d(t)$  en réponse à une consigne en échelon  $L^*(t) = L_0 h(t - 0,02)$  avec  $L_0 = 10 \text{ mm}$  et à une perturbation en échelon  $D^*(t) = D_0 h(t - 0,02)$  avec  $D_0 = 10 \mu\text{m}$ .

**Question 6** Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.

#### Correction

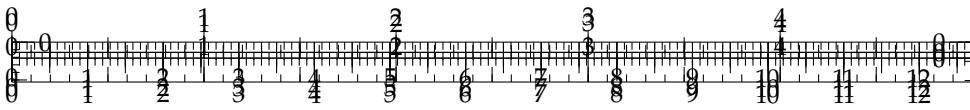




.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Sy\_TD\_04\_Hexapode/images/fi







.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_01\_MC2E\_0rdre2/images/fig\_00.png

## TD 9

# Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique– Sujet

Mines Ponts 2016.

B2-04

## Présentation générale

L'objet de cette étude est un robot appelé MC<sup>2</sup>E utilisé en chirurgie endoscopique. Ce type de robots médico-chirurgicaux est équipé de capteurs (caméra, capteur d'efforts...) permettant de maîtriser les interactions avec des environnements souvent déformables et difficilement modélisables comme le corps humain.

La figure ?? décrit les exigences auxquelles est soumis l'asservissement du MC<sup>2</sup>E.

## Validation des performances de l'asservissement d'effort

### Modèle de connaissance de l'asservissement

#### Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$ .

On notera  $\theta_m(p)$ ,  $\Omega_m(p)$ ,  $C_m(p)$  et  $C_e(p)$  les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose  $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$  où  $K_{C\theta}$  est une constante positive. On a de plus  $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$ . La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

**FIGURE 2.32 – Performances de l'asservissement.**

On note :

- ▶  $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- ▶  $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

Dans un premier temps, on prendra  $H_{cor}(p) = 1$ .

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

Avec :

- ▶  $C_e(p)$ , couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC<sup>2</sup>E;
- ▶  $C_c(p)$ , couple de consigne;
- ▶  $C_m(p)$ , couple moteur;
- ▶  $H_{cor}(p)$ , fonction de transfert du correcteur.





**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

**FIGURE 2.34** – Régulation avec retour tachymétrique.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01...

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C0}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 1.6.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_01\_MC2E\_Ordre2/images/fig\_08.png

**FIGURE 2.35** – Régulation avec correcteur PI.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_01\_MC2E\_Ordre2/images/fig\_08.png

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme :

$$\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

**Question 7** À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_01\_MC2E\_Ordre2/images/im\_01.png

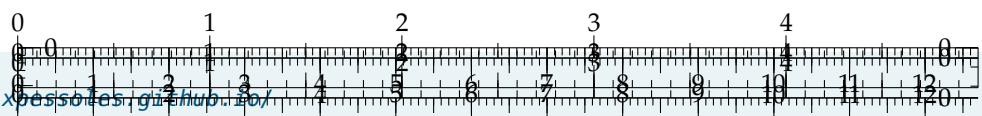
**Question 8** Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

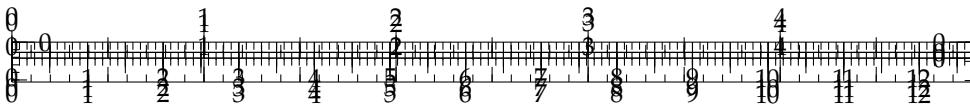
## Diagrammes de Bode

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_01\_MC2E\_Ordre2/images/im\_02.png

**Question 9** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $G(p) = \frac{K_i (1 + T_i p)}{T_i p (1 + \tau p)^2}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_01\_MC2E\_Ordre2/images/Cy\_01...





.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_01\_MC2E\_0rdre2/images/fig\_00.png

## TD 9

# Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique– Corrigé

Mines Ponts 2016.

B2-04

## Présentation générale

### Validation des performances de l'asservissement d'effort

#### Modèle de connaissance de l'asservissement

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSy

#### Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

#### Correction

$$H_1(p) = \frac{1}{Jp}, H_2(p) = \frac{1}{p} \text{ et } H_3(p) = K_{C\theta}.$$

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

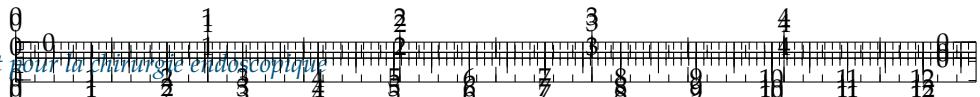
#### Correction

$$\text{Calculons } F(p) = \frac{C_e(p)}{C_m(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp} \frac{1}{p}}{1 + \frac{K_{C\theta}}{Jp} \frac{1}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } H_{BF}(p) &= \frac{F(p)H_{cor}(p)}{1 + F(p)H_{cor}(p)} \text{ soit } H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}}{1 + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta} + K_{C\theta}} \\ &= \frac{1/2}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2 + 1}. \end{aligned}$$

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.





### Correction

Le coefficient d'amortissement étant nul, il s'agit d'un oscillateur harmonique d'amplitude  $C_0/2$ . Le système vibre ce qui est incompatible avec le mouvement d'un robot chirurgical.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

`.../.../PSI_Cy_01_ModelisationSystemes/Ch_02_RevisionsSLCI/Cy_01`

FIGURE 2.36 – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

### Correction

$$\begin{aligned} \text{D'une part, } F_1(p) &= \frac{\frac{1}{Jp}}{1 + \frac{B}{Jp}} = \frac{1}{Jp + B}. \text{ Par suite } FTBO(p) = \frac{F_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + F_1(p)H_2(p)H_3(p)} \\ &= \frac{\frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}}{1 + \frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{p(Jp + B) + K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + Bp + K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2 + \frac{B}{K_{C\theta}}p + 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Par ailleurs, } H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2} = \frac{1}{1 + 2\tau p + \tau^2 p^2}.$$

$$\text{On a donc } \frac{B}{K_{C\theta}} = 2\tau \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \tau. \text{ D'autre part, } \tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}.$$

$$\text{Au final, } B = 2\sqrt{J K_{C\theta}} \text{ et } \tau = \frac{B}{2K_{C\theta}} = \frac{2\sqrt{J K_{C\theta}}}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}.$$

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 1.6.

`.../.../PSI_Cy_01_ModelisationSystemes/Ch_02_RevisionsSLCI/Cy_01_Ch_02_Colle_01_MGE_Onde2/images/fig_08.png`

FIGURE 2.37 – Régulation avec correcteur PI.

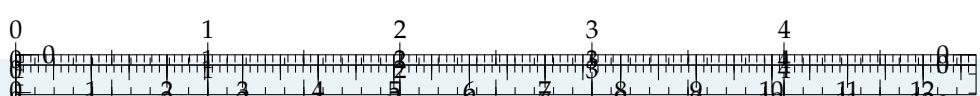
**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

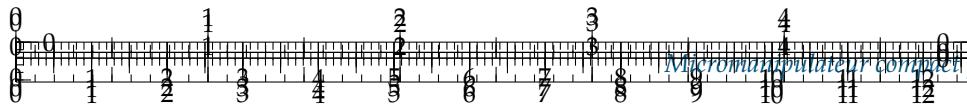
### Correction

- Méthode 1 : la FTBO est de classe 1. L'écart statique est donc nul.
- Méthode 2 (à savoir faire absolument, mais à éviter car trop long).

$$\text{On a } \varepsilon(p) = \frac{C_c(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_i(1 + T_ip)}{T_ip(1 + \tau p^2)}} = C_0 \frac{1}{p + \frac{K_i(1 + T_ip)}{T_i(1 + \tau p^2)}}.$$

$$\text{Par suite, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = 0.$$





On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de

transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : 
$$\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}.$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

#### Correction

Pour que la FTBF soit d'ordre 2, la FTBO doit être d'ordre 2.

En choisissant  $T_i = \tau$  (compensation du pôle double du système), on a alors  $FTBO(p) =$

$$\frac{K_i(1 + \tau p)}{\tau p(1 + \tau p)^2} = \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}.$$

$$\text{On a alors } FTBF(p) = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}}{1 + \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p) + K_i}.$$

**Question 7** À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

On donne  $K_i = 1$ .

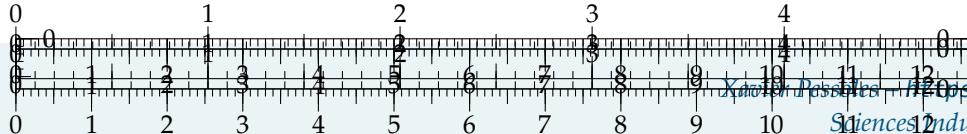
**Question 8** Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

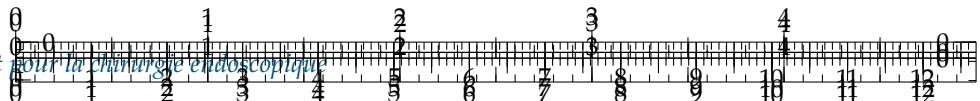
#### Correction

### Diagrammes de Bode

On prend  $K_i = 0,4$ ,  $T_i = 0,01$  s et  $\tau = 0,5$  s.

**Question 9** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $G(p) = \frac{K_i(1 + T_ip)}{T_ip(1 + \tau p)^2}$ .





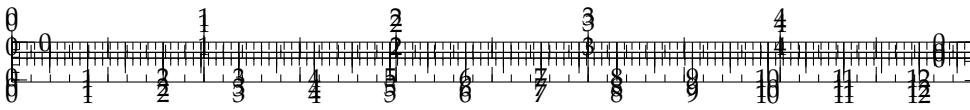
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_0

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_0

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_0

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_0





# Colle 1

## Cisaille à découpe au vol – Sujet

D'après P. Dubois, C. Gamelon..

### Mise en situation

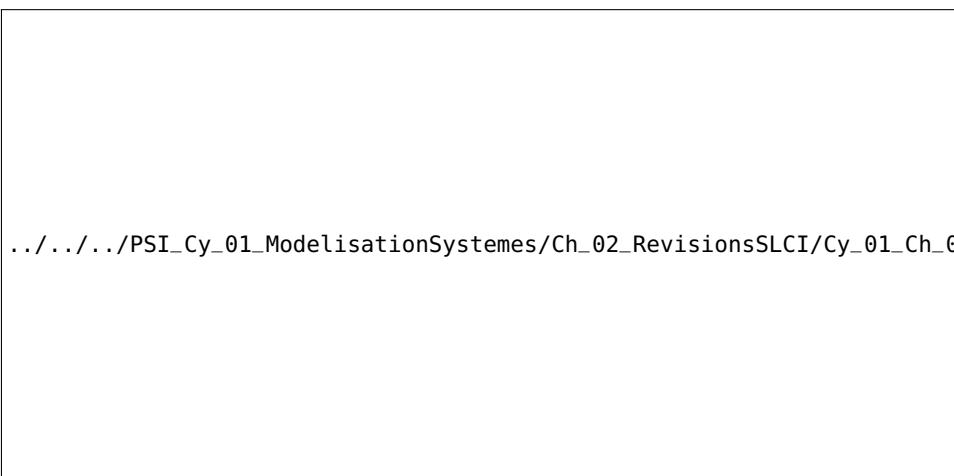
#### Objectif

- ▶ Identifier les paramètres du vérin.
- ▶ Quantifier l'erreur de trainage et déterminer son impact sur le système.
- ▶ Proposer des solutions pour la compenser.

B2-04

B2-06

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSy



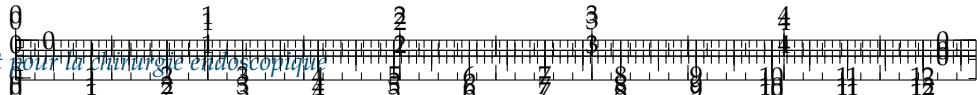
La machine, représentée par le schéma ci-dessus, permet de débiter en continu une bobine de tôle en tronçons de même longueur \*. La rotation continue à fréquence variable de la bobine impose à la tôle (**t**) une vitesse linéaire  $v(t)$  par rapport au bâti (**b**) constante. Les outils de découpe sont portés par la cisaille (**c**) qui est mise en mouvement par un vérin hydraulique.

En avançant, la tôle déplace le palpeur du capteur porté par la cisaille. Celui-ci délivre alors une tension  $u(t)$  proportionnelle à l'écart de position entre la tôle et la cisaille. Un amplificateur transforme ce signal en courant d'intensité  $i(t)$  pour commander un distributeur hydraulique qui fournit au vérin un débit d'huile  $q(t)$ . Au bout d'un certain temps, se déplaçant à la même vitesse, la cisaille et la tôle arrivent face à un détecteur qui déclenche la coupe. La tôle tombe, la cisaille recule jusqu'à son point de départ et attend que la tôle revienne en contact avec le palpeur pour recommencer un cycle. La position de la cisaille est ainsi « asservie » à la position de la tôle.

On notera par des majuscules les transformées de Laplace des fonctions du temps notées en minuscules.

Rappels :  $\mathcal{L}[a] = \frac{a}{p}$ ,  $\mathcal{L}[at] = \frac{a}{p^2}$  et  
 $\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}$ .





On note :

- ▶  $e(t)$  le déplacement de la tôle (**t**) par rapport au bâti (**b**);
- ▶  $\varepsilon(t)$  le déplacement de la tôle par rapport à la cisaille (**c**);
- ▶  $x(t)$  le déplacement de la cisaille par rapport au bâti.

$X(p)$  est la transformée de Laplace du déplacement  $x(t)$  et  $Q(p)$  celle du débit  $q(t)$ .

## Schéma-bloc du système

On considère comme instant initial le moment où la tôle touche le palpeur. À cet instant  $e$  et  $x$  sont nuls. L'équation reliant les déplacements est donnée par :

$$\varepsilon(t) = e(t) - x(t).$$

Le capteur, l'amplificateur et le distributeur délivrent des signaux de sortie proportionnels à leurs signaux d'entrée. On notera  $K_c$ ,  $K_a$  et  $K_d$  leurs gains respectifs. Soit  $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$  la fonction de transfert associée à l'ensemble vérin plus charge déplacée.

**Question 1** Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.

## Équation de comportement dynamique

On note :

- ▶  $m$  la masse totale mise en mouvement par le vérin;
- ▶  $f$  le coefficient de frottement visqueux associé au déplacement de l'ensemble mobile. Les frottements créent un effort qui s'oppose au déplacement et qui est proportionnel à la vitesse :  $F_f(t) = -f \frac{dx(t)}{dt}$ ;
- ▶  $\Delta p(t)$  la différence de pression entre les deux chambres  $C_1$  et  $C_2$  du vérin;
- ▶  $S$  la surface du piston en contact avec l'huile.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble mobile en projection sur  $\vec{x}$ , on a :  $m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\Delta p(t) - f \frac{dx(t)}{dt}$ .

## Fonction de transfert du vérin

Pour le type de vérin utilisé, le débit d'alimentation a pour expression :  $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\Delta p(t)}{dt}$ .  $V$  est le volume moyen d'une chambre et  $B$  le module d'élasticité de l'huile, (ces deux paramètres sont des constantes).

**Question 2** Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace. En déduire l'expression de la fonction de transfert :  $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$ , que l'on mettra sous la forme :  $H_v(p) = \frac{k}{p(ap^2 + bp + 1)}$ .

## Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

$$\text{On pose } H_v(p) = \frac{K_v}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}.$$

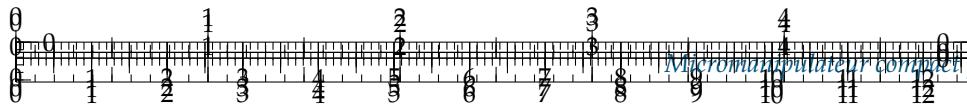
Une simulation numérique a permis de tracer le diagramme de Bode donné page suivante. On se propose de retrouver les valeurs de  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$  à partir du diagramme.

**Question 3** Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel  $\text{GdB}(\omega)$  en fonction des notations  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$ , (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de  $H_v(j\omega)$ ). Quelle est sa valeur pour  $\omega = \omega_0$  ?

**Question 4** Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque  $\omega$  tend vers 0. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de  $\omega$  coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB ?

**Question 5** Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque  $\omega$  tend vers  $\infty$ . Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de  $\omega$  coupe-t-elle l'asymptote précédente ?





**Question 6** Déduire des résultats précédents et du diagramme de Bode de  $H_v(p)$  donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$  (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).

**Question 7** Donner l'expression littérale de la phase  $\varphi(\omega)$  en fonction des notations  $\omega_0$  et  $\xi$ . Déterminer ses limites lorsque  $\omega$  tend vers 0 et lorsque  $\omega$  tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre  $\omega_0$  puis pour 100 et 200 rad s<sup>-1</sup>. Tracer la courbe de phase.

### Détermination des gains $K_c$ , $K_a$ et $K_d$

Pour que le système soit stable en boucle fermée on décide de régler le correcteur pour avoir une marge de gain de 6 dB.

**Question 8** Quelle valeur  $K$  doit-on donner au produit des gains  $K_c K_a K_d$  (préciser les unités). On note  $K_0$  le produit  $K K_v$  (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de  $K_0$ ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue ?

#### Méthode –

Cette question est un peu prématuée par rapport à notre avancée. Cependant, vous pouvez tenter d'appliquer la méthode suivante :

1. Déterminer le gain (en dB) pour lequel la phase vaut -180°.
2. Chercher  $K$  tel que  $20 \log |FTBO| = -6$ .
3. Calculer  $K_0$ .

### Erreur de traînage

On note :  $H(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$ .

**Question 9** Donner l'expression de l'écart  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $E(p)$  et  $H(p)$ . La tôle se déplace à vitesse constante  $v$ , quelle est la transformée  $E(p)$  de  $e(t)$ ? Donner l'expression de  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $v$  et des paramètres canoniques.

**Question 10** On appelle erreur de traînage  $\varepsilon_t$  la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de  $\varepsilon_t$ . Faire l'application numérique avec  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$  et  $K_0 = 7$  (unité SI).

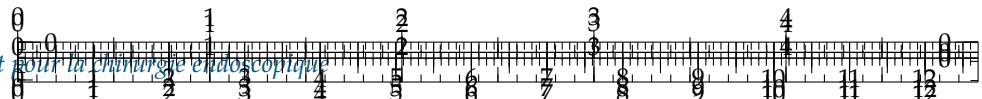
### Identification temporelle

On donne ci-contre, le tracé de la courbe  $x(t)$  obtenu à l'aide d'un logiciel de simulation. Cette réponse est voisine de celle d'un premier ordre soumis à la même entrée. Soit  $F(p) = \frac{K_f}{1 + Tp}$  la fonction de transfert du système du premier ordre associé.

**Question 11** Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante :  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ ).

**Question 12** Déterminer les valeurs numériques de  $K_f$  et  $T$  à l'aide de relevés sur la courbe.



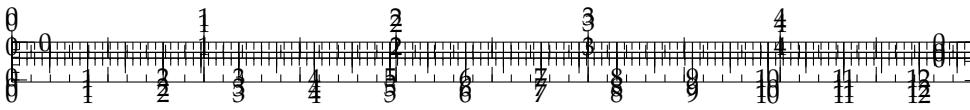


**Question 13** Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.

**Question 14** Quel réglage peut-on envisager sur la cisaille pour compenser cette erreur ?

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle...





# Colle 1

## Cisaille à découpe au vol – Corrigé

D'après P. Dubois, C. Gamelon..

### Mise en situation

#### Schéma-bloc du système

**Question 1** Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.

B2-04

B2-06

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_02\_Cisaille/images/Schemabloc\_Cisaille.jpg

#### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystèmes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_02\_Cisaille/images/Schemabloc\_Cisaille.jpg

### Équation de comportement dynamique

#### Fonction de transfert du vérin

**Question 2** Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace.

En déduire l'expression de la fonction de transfert :  $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$ , que l'on mettra sous la forme :  $H_v(p) = \frac{k}{p(ap^2 + bp + 1)}$ .

#### Correction

D'une part,  $mp^2X(p) = S\Delta P(p) - fpX(p) \Leftrightarrow \frac{p(mp + f)}{S}X(p) = \Delta P(p)$ .

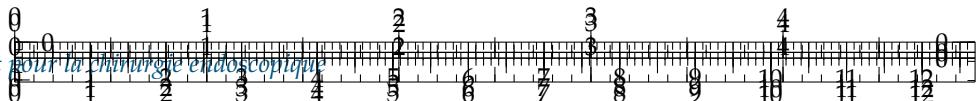
D'autre part :  $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Delta P(p) \Leftrightarrow 2B\frac{Q(p) - SpX(p)}{Vp} = \Delta P(p)$ .

On a donc :  $\frac{p(mp + f)}{S}X(p) = 2B\frac{Q(p) - SpX(p)}{Vp} \Leftrightarrow \frac{p(mp + f)}{S}X(p) + \frac{2BSpX(p)}{Vp} = \frac{2BQ(p)}{Vp}$

 $\Leftrightarrow \left( \frac{p(mp + f)}{S} + \frac{2BSp}{Vp} \right) \frac{Vp}{2B} = \frac{Q(p)}{X(p)} \Leftrightarrow \left( \frac{p(mp + f)}{S} \frac{Vp}{2B} + Sp \right) = \frac{Q(p)}{X(p)}$ 

On a donc,  $H_v(p) = \frac{1}{p \left( \frac{(mp + f)Vp}{S} \frac{1}{2B} + S \right)} = \frac{1}{p \left( \frac{Vm}{2BS}p^2 + \frac{fV}{2BS}p + S \right)} =$





$$\frac{1/S}{p \left( \frac{Vm}{2BS^2} p^2 + \frac{fV}{2BS^2} p + 1 \right)}.$$

Au final,  $k = \frac{1}{S}$ ,  $a = \frac{Vm}{2BS^2}$  et  $b = \frac{fV}{2BS^2}$ .

### Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

**Question 3** Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel  $G_{dB}(\omega)$  en fonction des notations  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$ , (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de  $H_v(j\omega)$ ). Quelle est sa valeur pour  $\omega = \omega_0$  ?

#### Correction

$$H_v(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}$$

$$\begin{aligned} \text{En conséquence, } G_{dB}(\omega) &= 20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \right| = 20 \log K_v - 20 \log |j\omega| - \\ &20 \log \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right| \\ &= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2} \\ \text{Au final, } G_{dB}(\omega_0) &= 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi. \end{aligned}$$

**Question 4** Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque  $\omega$  tend vers 0. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de  $\omega$  coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB ?

#### Correction

$$\text{On a } G_{dB}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2}.$$

Lorsque  $\omega$  tend vers 0, le gain tend  $20 \log K_v - 20 \log \omega$ . La pente est donc de  $-20 \text{ dB/decade}$ . Elle coupe l'horizontale à 0 dB en  $\omega = K_v$ .

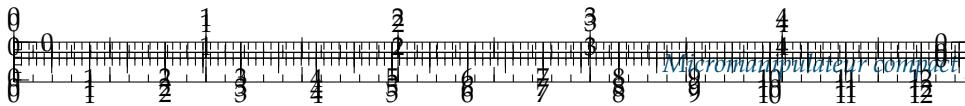
**Question 5** Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque  $\omega$  tend vers  $+\infty$ . Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de  $\omega$  coupe-t-elle l'asymptote précédente ?

#### Correction

$$\text{On a } G_{dB}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2}.$$

Lorsque  $\omega$  tend vers  $+\infty$ , le gain tend  $20 \log K_v - 20 \log \omega$ ,  $G_{dB}$  tend vers  $= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \omega^2 + 20 \log \omega_0^2 = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega$ .





La pente est donc de -60 dB/decade.

L'intersection des deux asymptotes a lieu quand

$$20 \log K_v - 20 \log \omega = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega \Leftrightarrow \log \omega = \log \omega_0. \text{ Ainsi, l'intersection des asymptotes a lieu en } \omega = \omega_0.$$

**Question 6** Déduire des résultats précédents et du diagramme de Bode de  $H_v(p)$  donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres  $K_v$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$  (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).

#### Correction

Par lecture du graphe, on obtient  $\omega_0 = 140 \text{ rad/s}$  et  $K_v = 1000 \text{ s m}^{-2}$ .

$$G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 20 \log 1000 - 20 \log 140 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 60 - 20 \log 140 - 20 \log 2\xi \Leftrightarrow \frac{37 - 60 + 20 \log 140}{-20} = \log 2\xi \Leftrightarrow \xi \approx 0,05.$$

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

**Question 7** Donner l'expression littérale de la phase  $\varphi(\omega)$  en fonction des notations  $\omega_0$  et  $\xi$ . Déterminer ses limites lorsque  $\omega$  tend vers 0 et lorsque  $\omega$  tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre  $\omega_0$  puis pour 100 et 200 rad s<sup>-1</sup>. Tracer la courbe de phase.

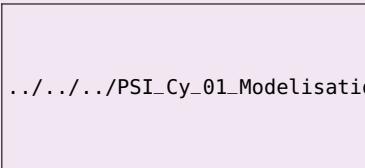
#### Correction

$$\varphi(\omega) = \arg K_v - \arg(j\omega) - \arg \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arg \left( \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0} j \right)$$

Lorsque  $\omega$  tend vers 0,  $\varphi(\omega)$  tend vers  $-\frac{\pi}{2}$ .

Lorsque  $\omega$  tend vers l'infini,  $-\arg \left( \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_0} j \right)$  tend vers  $\pi$  donc  $-\arg(\dots)$  tend vers  $-\pi$ .

Explication graphique de prof de SII...



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

Au final, lorsque  $\omega$  tend vers l'infini,  $\varphi(\omega)$  tend vers  $-\frac{3\pi}{2}$ .

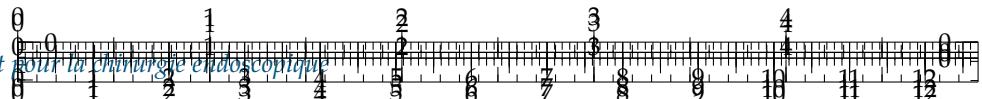
## Détermination des gains $K_c$ , $K_a$ et $K_d$

**Question 8** Quelle valeur  $K$  doit-on donner au produit des gains  $K_c K_a K_d$  (préciser les unités). On note  $K_0$  le produit  $KK_v$  (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de  $K_0$ ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue ?

#### Correction

Étant donné l'exigence demandée, le gain de la FTBO doit être de -6 dB lorsque la phase vaut -180°. On a déjà vu que pour cette phase, le gain décibel de  $H_v$  vaut 37 dB. Le gain dB vaut  $20 \log K + 20 \log |H_v|$ . On cherche donc  $K$  tel que  $20 \log K + 20 \log |H_v| = -6$ . Au final,  $K = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Par suite,  $K_0 = 7 \text{ s}^{-1}$ .





## Erreur de traînage

**Question 9** Donner l'expression de l'écart  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $E(p)$  et  $H(p)$ . La tôle se déplace à vitesse constante  $v$ , quelle est la transformée  $E(p)$  de  $e(t)$ ? Donner l'expression de  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $v$  et des paramètres canoniques.

### Correction

On peut redémontrer le résultat suivant :  $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{E(p)}{1 + H(p)}$ .

Exprimons  $\varepsilon(p)$  :  $\varepsilon(p) = E(p) - X(p) = E(p) - H(p)\varepsilon(p)$ ; donc  $\varepsilon(p)(1 + H(p)) = E(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + H(p)}$ .

Le consigne étant une vitesse, on a donc  $E(p) = \frac{v}{p^2}$ . On a donc :  $\varepsilon(p) = \frac{v}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_v K_c K_a K_d}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}}$ .

**Question 10** On appelle erreur de traînage  $\varepsilon_t$  la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de  $\varepsilon_t$ . Faire l'application numérique avec  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$  et  $K_0 = 7$  (unité SI).

### Correction

L'entrée en vitesse précédente correspondant à une entrée en rampe, on a donc  $\varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{v}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_v K_c K_a K_d}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{v}{p + \frac{K_v K_c K_a K_d}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}}$

$\frac{v}{K_v K_c K_a K_d} = \frac{1}{7} \simeq 0,14 \text{ m}$ . Pour compenser cette erreur, il suffit de régler la butée de la tôle à découper.

## Identification temporelle

**Question 11** Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante :  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ ).

**Question 12** Déterminer les valeurs numériques de  $K_f$  et  $T$  à l'aide de relevés sur la courbe.

### Correction

Première solution : cf cours pour un système du premier ordre soumis à une rampe.

Seconde solution : se raccrocher à ce que l'on sait (peut-être) pour un premier ordre soumis à un échelon... en effet, la rampe peut être assimilée à un premier ordre intégré. Ainsi, pour un système du premier ordre soumis à un échelon d'amplitude  $v$ , la valeur finale est  $vK_f$ . Ainsi, en intégrant, la pente en régime permanent sera de  $vK_f$ .

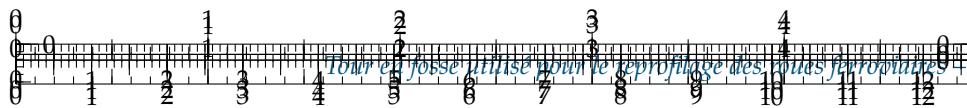
La pente étant de 1 on a  $K_f = 1$ .

Reste à savoir que l'asymptote coupe l'axe des abscisses en  $T$ . Après lecture,  $T = 0,15 \text{ s}$ .

\_04.png

**Question 13** Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.





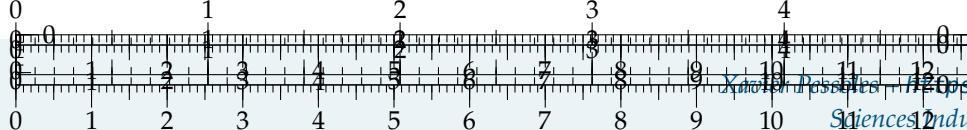
### Correction

Même erreur que précédemment.

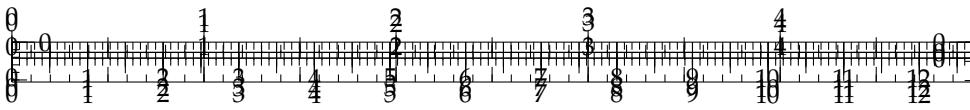
**Question 14** Quel réglage peut-on envisager sur la cisaille pour compenser cette erreur ?

### Correction

Il est possible de décaler la butée de 14 cm et ainsi supprimer l'écart de trainage.







.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_03\_PorteOutil/images/fig\_00.png

## TD 10

# Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil– Sujet

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

### Modélisation du mouvement pour la commande

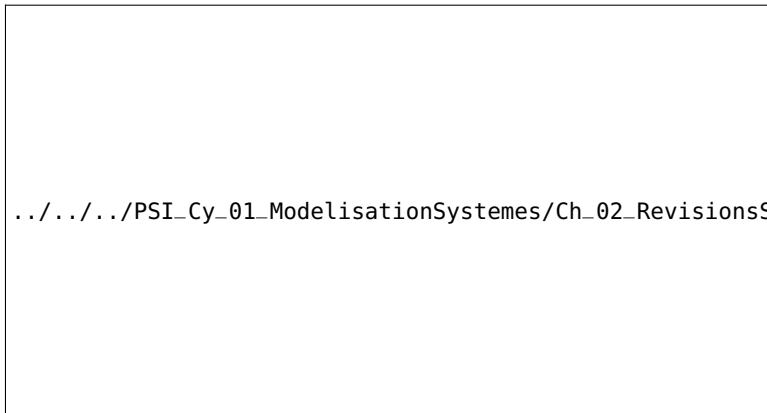
#### Objectif

Modéliser le comportement dynamique de l'outil et du porte-outil, puis étudier une commande en position  $z_1(t)$  comprenant un correcteur proportionnel.

Le système composé de l'outil et du porte-outil est modélisé sur la figure 1.9. Le porte-outil, de masse  $m_1 = 5522 \text{ kg}$ , est considéré indéformable et en liaison glissière de direction  $\vec{z}_0$  avec le bâti. Une chaîne de motorisation électrique permet de déplacer le porte-outil et une structure de commande associée permet d'asservir la position  $z_1(t)$  par rapport à une position de référence. La chaîne de motorisation exerce une force motrice  $\vec{f}_m(t) = f_m(t)\vec{z}_0$  sur le porte-outil.

La cahier des charges est donné sur la figure suivante.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSy



Les positions du porte-outil et du point C par rapport à leur position de référence sont respectivement paramétrées par  $z_1(t)\vec{z}_0$  et  $z_2(t)\vec{z}_0$ , avec  $z_1(t)\vec{z}_0$  et  $z_2(t)\vec{z}_0$  des grandeurs algébriques (figure 1.9). Les conditions initiales sont toujours supposées nulles.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au porte-outil puis à l'outil permet d'obtenir les deux relations suivantes :

$$m_1\ddot{z}_1(t) + \lambda\dot{z}_1(t) + Kz_1(t) = \lambda\dot{z}_2(t) + Kz_2(t) + f_m(t)$$

$$m_2\ddot{z}_2(t) + \lambda\dot{z}_2(t) + Kz_2(t) = \lambda\dot{z}_1(t) + Kz_1(t) + f_c(t)$$



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelis

**FIGURE 2.39** – Modèle de déformation de l'outil avec le porte-outil piloté



FIGURE 2.40 – Modèle de l'outil et du porte-outil

Le modèle correspondant est représenté par le schéma bloc de la ??.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisation

Question 1 Exprimer les fonctions  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$  en fonction de  $K$ ,  $\lambda$ ,  $m_1$  et  $m_2$ .

Le modèle de la ?? est réduit au modèle équivalent de la figure ??.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisation

Question 2 Exprimer  $N_1(p)$  et  $N_2(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$ .

FIGURE 2.41 – Modèle équivalent

Question 3 Montrer que  $N_2(p)$  peut s'écrire sous la forme  $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2 (p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$

Exprimer  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $A$  en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\lambda$  et  $K$ .

Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert  $N_2(p)$  est représenté ci-contre.

Question 4 Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisation

Question 5 Au regard des valeurs numériques montrer que la fonction de transfert  $N_2(p)$  peut être approchée par la fonction  $N_{2app}(p) = \frac{A}{p^2}$ . En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert  $N_{2app}(p)$  sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

Le modèle approché ( $N_{2app}(p)$ ) est retenu pour la suite de l'étude. Le schéma bloc modélisant la régulation de la position  $z_1(t)$  est donné en figure ??, en considérant un correcteur proportionnel de gain  $K_p$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisation

FIGURE 2.42 – Modèle de synthèse de la régulation en position  $z_1(t)$  du porte-outil

Question 6 Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la figure 1.6.

## Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$ .

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par  $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$  où  $\tau$  est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

Question 7 Déterminer  $H_r(p)$  en fonction de  $\tau$ .

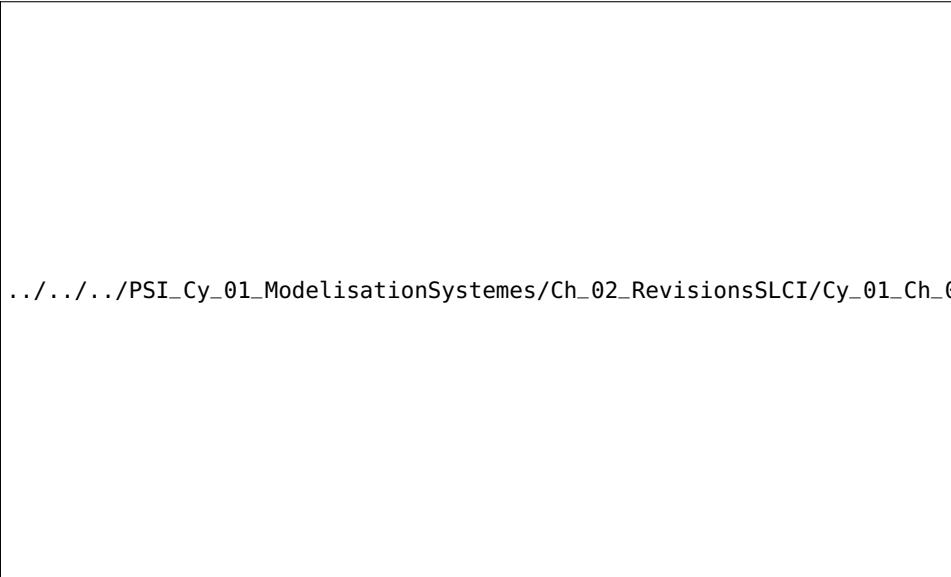
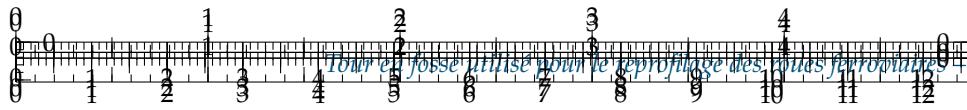
Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisation

FIGURE 2.43 – Modèle équivalent de la chaîne d'asservissement complète

La ?? représente le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système modélisé ??, avec  $b = \frac{5 \times 10^{-2}}{\pi} \text{ mm rad}^{-1}$





de la

Les « zéros de transmission » d'une fonction de transfert  $H(p)$  correspondent aux pulsations  $\omega$  pour lesquelles  $H(j\omega)$  est nul.

**Question 8** Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la ?? en analysant les « zéros de transmission ».

**Question 9** Déterminer un ordre de grandeur du paramètre  $b$  permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

#### Éléments de correction

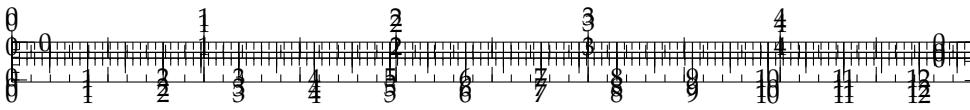
1.  $H_1(p) = \lambda p + K, H_2(p) = \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}, H_3(p) = \lambda p + K, H_4(p) = \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}.$
2.  $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$  et  $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}.$
3.  $\omega_1^2 = \frac{K}{m_2}, \omega_2^2 = K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, \xi_1 = \frac{\lambda}{2\sqrt{m_2 K}}$  et  $\xi_2 = \lambda \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2\sqrt{K m_1 m_2}}.$
4. .
5.  $A = 1,87 \cdot 10^{-4}.$
6. .
7.  $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}.$
8. .
9.  $b_{\lim} = 2,83 \text{ mm rad}^{-1}.$

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Mo



.../.../.../S





## TD 10

# Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil– Corrigé

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

B2-07

C2-02

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSy

### Modélisation du mouvement pour la commande

**Question 1** Exprimer les fonctions  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$  en fonction de  $K$ ,  $\lambda$ ,  $m_1$  et  $m_2$ .

#### Correction

D'après le schéma-blocs  $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p))$ . D'après la première équation différentielle, on a :  $m_1p^2Z_1(p) + \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) = \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p)(m_1p^2 + \lambda p + K) = Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) = \frac{Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p)}{m_1p^2 + \lambda p + K}$ . On

a donc par identification  $H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K}$  et  $H_1(p) = \lambda p + K$ .

D'après le schéma-blocs  $Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))$ . D'après la seconde équation différentielle,  $m_2p^2Z_2(p) + \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) = \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p)(m_2p^2 + \lambda p + K) = Z_1(p)(\lambda p + K) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p) = \frac{Z_1(p)(\lambda p + K) + F_c(p)}{m_2p^2 + \lambda p + K}$ . On

a donc par identification  $H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$  et  $H_3(p) = \lambda p + K$ .

Au final,

$$H_1(p) = \lambda p + K \quad H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K} \quad H_3(p) = \lambda p + K \quad H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$$

**Question 2** Exprimer  $N_1(p)$  et  $N_2(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$ .

#### Correction

En utilisant le premier modèle, on avait :  $\begin{cases} Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p)) \\ Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)) \end{cases}$ .

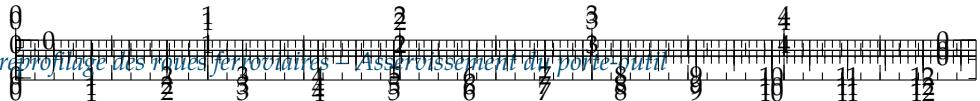
Ainsi,  $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)(H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))))$   
 $= H_2(p)F_m(p) + H_1(p)H_2(p)H_4(p)F_c(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)Z_1(p)$   
 $\Leftrightarrow Z_1(p)(1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)H_4(p)F_c(p))$ .

En utilisant le schéma-blocs,  $Z_1(p) = (F_c(p)N_1(p) + F_m(p))N_2(p)$ . Par identification, on obtient  $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$  et  $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$ .

**Question 3** Montrer que  $N_2(p)$  peut s'écrire sous la forme  $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2(p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$

Exprimer  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $A$  en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\lambda$  et  $K$ .



**Correction**

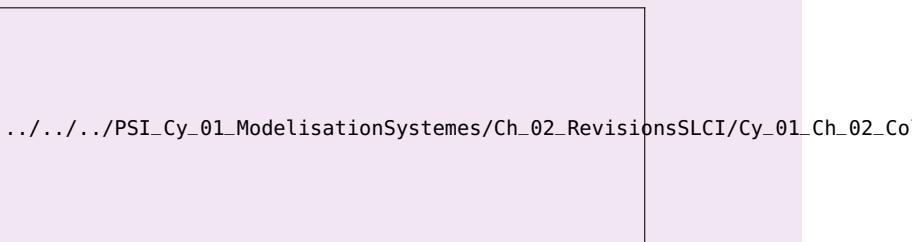
$$\begin{aligned}
 N_2(p) &= \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)} = \frac{\frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}}{1 - (\lambda p + K) \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} (\lambda p + K) \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} \\
 &= \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K) - \frac{(\lambda p + K)^2}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{(m_1 p^2 + \lambda p + K)(m_2 p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2} \\
 &= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + \lambda^2 p^2 + \lambda p K + K m_2 p^2 + K \lambda p + K^2 - \lambda^2 p^2 - K^2 - 2 \lambda p K} \\
 &= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + K m_2 p^2} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{p^2 (m_1 m_2 p^2 + (m_1 + m_2) \lambda p + K(m_1 + m_2))} \\
 &= \frac{m_2 \left( p^2 + \frac{\lambda}{m_2} p + \frac{K}{m_2} \right)}{p^2 m_1 m_2 \left( p^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \lambda p + K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}. \\
 \text{Par identification, on a : } A &= \frac{1}{m_1}, \omega_1^2 = \frac{K}{m_2}, 2\xi_1\omega_1 = \frac{\lambda}{m_2} \text{ et } \xi_1 = \frac{\lambda}{2\omega_1 m_2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{Km_2}} =, \\
 \omega_2^2 &= K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, 2\xi_2\omega_2 = \lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \text{ et } \xi_2 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}. \\
 \text{On a donc } \xi_1 &= \frac{\lambda}{2\sqrt{m_2 K}} \text{ et } \xi_2 = \lambda \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2\sqrt{Km_1 m_2}}.
 \end{aligned}$$

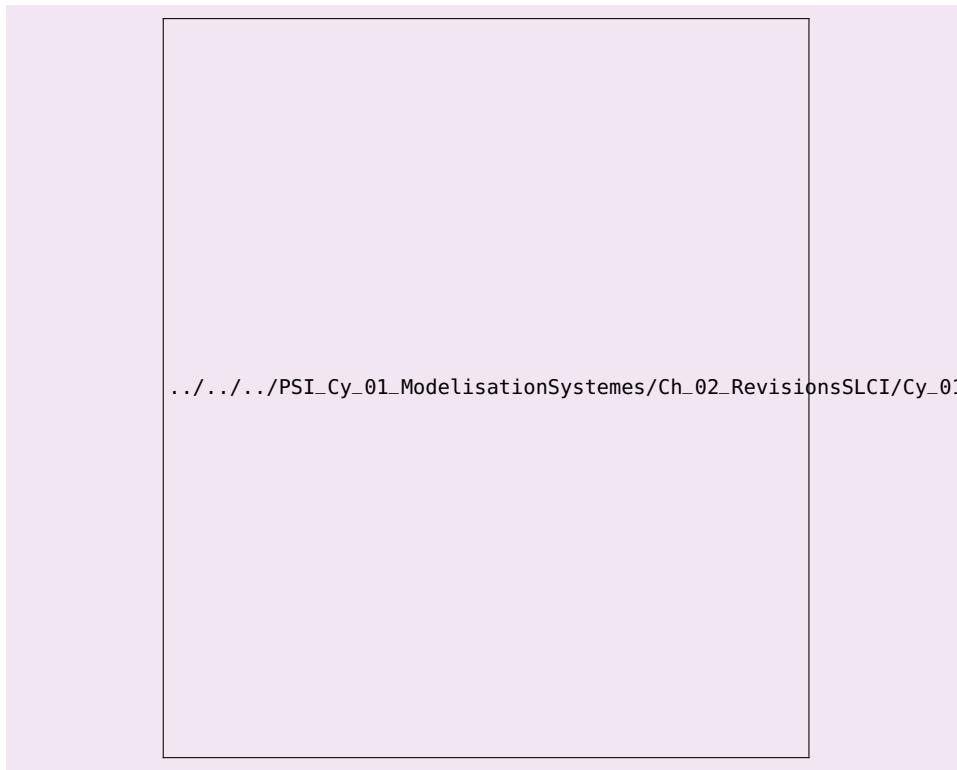
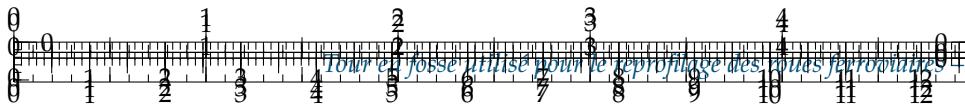
Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert  $N_2(p)$  est représenté ci-contre.

**Question 4** Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

**Correction**

D'après le diagramme asymptotique donné, on a nécessairement  $\omega_1 < \omega_2$ . On peut dresser un tableau des variations à partir de la fonction de transfert  $N_2(p)$ .





**Question 5** Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert  $N_2(p)$  peut être approchée par la fonction  $N_{2\text{app}}(p) = \frac{A}{p^2}$ . En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert  $N_{2\text{app}}(p)$  sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

#### Correction

Si le système n'est pas sollicité par des pulsations comprises entre 150 et 250 rad s<sup>-1</sup>, on peut modéliser  $N_2(p)$  par un double intégrateur. Le gain dB est donc  $20 \log A - 20 \log \omega^2$ . Pour  $\omega = 500$  rad s<sup>-1</sup> on a  $20 \log A - 20 \log 500^2 = -182,5 \Rightarrow \log A = \frac{20 \log 500^2 - 182,5}{20}$  et  $A = 1,87 \cdot 10^{-4}$ .

**Question 6** Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la figure 1.6.

#### Correction

Dans le cas, la FTBO est de classe 2.

- **req 1.1** :  $M\varphi = 60^\circ$  : impossible à respecter la phase sera toujours de  $-180^\circ$ .
- **req 1.2** :  $\omega_{0\text{dB}} = 200$  rad s<sup>-1</sup> : critère non respecté (cf diagramme de Bode).
- **req 1.4** : erreur en régime permanent :  $\Delta c < 40 \mu\text{m}$  pour un échelon d'amplitude  $f_{c0} = 1 \text{ kN}$  : critère non respecté (pas d'intégrateur avant la perturbation).
- **req 1.5** : défaut de la roue  $\Delta u < 30 \mu\text{m}$  lorsque la perturbation est sinusoïdale.

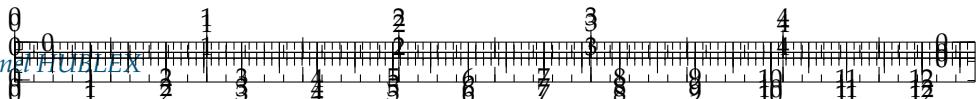
La correction proportionnelle ne permet donc pas de respecter tous les critères du cahier des charges.

## Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$ .

D'un point de vue numérique,  $K_f = 1,5 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$  et  $\tau = 1 \text{ s}$ .





D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par  $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$  où  $\tau$  est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

**Question 7** Déterminer  $H_r(p)$  en fonction de  $\tau$ .

#### Correction

D'après le schéma-blocs,  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$ . D'après les équations données et en utilisant le théorème du retard, on a  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p) + Z_2(p)e^{-\tau p} = Q_c(p) - Z_2(p)(1 - e^{-\tau p})$ . En conséquence,  $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}$ .

Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

**Question 8** Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la ?? en analysant les « zéros de transmission ».

#### Correction

$$\text{FTBO}(p) = bK_f S(p)H_r(p) = \frac{bK_f}{K + \lambda p + m_2 p^2} (1 - e^{-\tau p}) = H_2(p) \cdot H_r(p).$$

On a  $G_{dB}(\omega) = G_{dB2}(\omega) + G_{dBr}(\omega)$ .

$$G_{dBr}(\omega) = 20 \log |1 - e^{-j\tau\omega}| = 20 \log \sqrt{(1 - \cos(-\tau\omega))^2 + (\sin(-\tau\omega))^2} = 20 \log \sqrt{2 - 2 \cos(\tau\omega)}.$$

On a donc :

- pour  $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$  et  $G_{dBr}(\omega) \rightarrow -\infty$ ;
- pour  $\omega = \frac{\pi + k2\pi}{\tau}$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$  et  $G_{dBr}(\omega) = 20 \log 2$ .

Le diagramme en gain montre alors l'addition d'un gain du second ordre et d'un gain périodique. Les « zéros de transmission » correspondent aux pulsations  $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$ .

Pour la phase,  $\varphi_{BO}(\omega) = \varphi_2(\omega) + \arg(1 - \cos(-\tau\omega) - j \sin(-\tau\omega))$ . Or  $1 - \cos(-\tau\omega) = 1 - \cos(\tau\omega) \geq 0$ . On a donc  $\varphi_{BO} = \varphi_2(\omega) + \arctan\left(\frac{\sin(\tau\omega)}{1 - \cos(\tau\omega)}\right)$ .

Le diagramme de phase est la somme d'une phase d'un système du second ordre et d'un signal  $\frac{2\pi}{\tau}$  périodique.

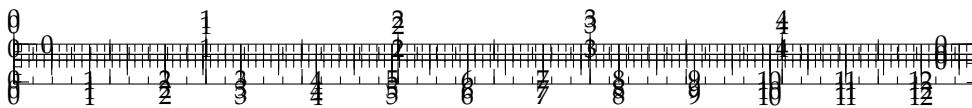
**Question 9** Déterminer un ordre de grandeur du paramètre  $b$  permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

#### Correction

Pour garantir la stabilité en BF, il faut assurer un gain négatif en BO. D'après le diagramme de gain, le gain maximal relevé est de 45 dB. Il faudrait donc ajouter un gain supplémentaire  $b'$  tel que  $20 \log b' = 45$  soit  $b' = 10^{45/20} = 177$ . Au bilan, on aurait donc  $b_{lim} = b'b = 177 \times \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\pi} = 2,83 \text{ mm rad}^{-1}$ .

Il faudrait déterminer si une augmentation de  $b$  réduit l'amortissement de l'asservissement.





## TD 11

# Gyropode à usage professionnel HUBLEX- Sujet

Concours CCINP – MP 2020.

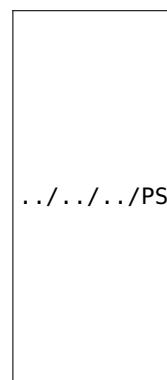
### Présentation

Le système étudié dans ce sujet, appelé Hublex, est un gyropode professionnel destiné à faciliter le déplacement des collaborateurs au sein d'entreprises, administrations, hôpitaux... lorsque ces lieux sont de grandes tailles.

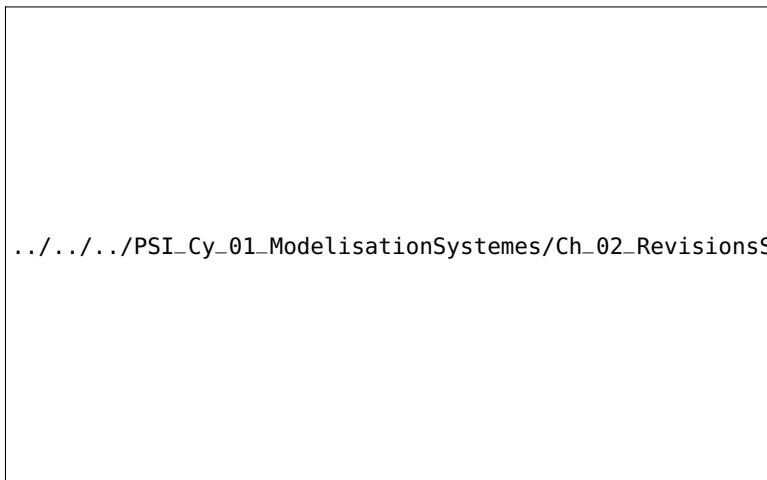
### Étude de l'asservissement en intensité des moteurs

#### Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en intensité du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence « 1.7.1.1 » et ses sous-exigences.



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisa



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_04\_Hublex/images/fig\_02

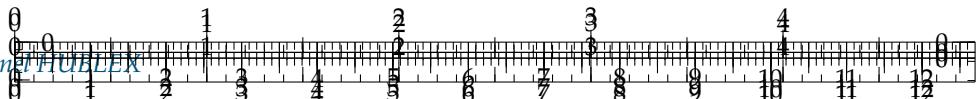
gences

### Modélisation du moteur

Le moteur brushless associé à son électronique de commande peut se modéliser par les équations d'une machine à courant continu.

On notera  $J_{eq}$  l'inertie équivalente des masses mobiles mises en jeu ramenée sur l'arbre moteur. On modélisera les différents frottements par un frottement visqueux générant





un couple résistant, rapporté à l'arbre moteur, proportionnel à la vitesse de rotation de l'arbre moteur et de coefficient  $f$  ( $f > 0$ ). On rappelle les équations caractéristiques associées :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ ;
- $e(t) = K_e \omega_m(t)$ ;
- $C_m(t) = K_e i(t)$ ;
- $J_{\text{eq}} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - f \omega_m(t)$ .

**Question 1** Donner, dans le domaine de Laplace, les 4 équations caractéristiques associées au modèle de machines à courant continu.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystèmes/Ch\_02\_RevisionsSLCT/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_04\_Hublex/images/fig\_dr3.png

**Question 2** Compléter alors le schéma-blocs du moteur dans ?? On précisera la grandeur associée à chaque lien.

FIGURE 2.46 – Schéma-blocs

**Question 3** Donner l'expression de la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$ . Mettre cette fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$ .

### Asservissement du moteur en intensité

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystèmes/Ch\_02\_RevisionsSLCT/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_04\_Hublex/images/fig\_e13.png

FIGURE 2.47 – Schéma-blocs

Intensité, image du couple moteur (voir équation précédente). Le schéma-blocs est représenté ?? Un convertisseur IU fournit au calculateur une tension  $u_{ic}(t)$  image de l'intensité de consigne  $i_c(t)$ , proportionnelle à cette dernière de coefficient  $K_{iu}$ . De même, l'intensité réelle  $i(t)$ , mesurée par un capteur d'intensité de coefficient  $K_{capt}$ , a pour image  $u_{im}(t)$ . L'écart, noté  $\varepsilon(t) = u_{ic}(t) - u_{im}(t)$ , est traité par le correcteur de fonction de transfert  $C(p)$ , qui impose la tension  $u(t)$  aux bornes du moteur.

On donne la fonction de transfert du moteur :  $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$ .

**Question 4** Préciser, en justifiant, quelle valeur donner à  $K_{iu}$ , caractéristique du convertisseur IU.

On prend, dans un premier temps, un correcteur purement proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

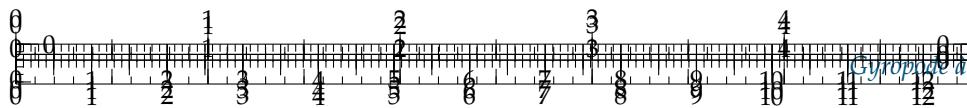
On en déduit la fonction de transfert  $H_I(p) = \frac{I(p)}{I_c(p)}$  :

$$H_I(p) = \frac{K'}{1 + K'} \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}, \text{ avec } K' = K_{iu} K_p K_m.$$

**Question 5** Calculer l'expression littérale de l'erreur en régime permanent notée  $\mu_s$ , pour une entrée indicielle (i.e.  $I_c(p)$  est un échelon unitaire), en fonction de  $K_{iu}$ ,  $K_p$  et  $K_m$ .

**Question 6** Conclure, lorsque cela est possible, quant au respect des sous exigences de l'exigence « 1.7.1.1.1 » avec ce type de correcteur.

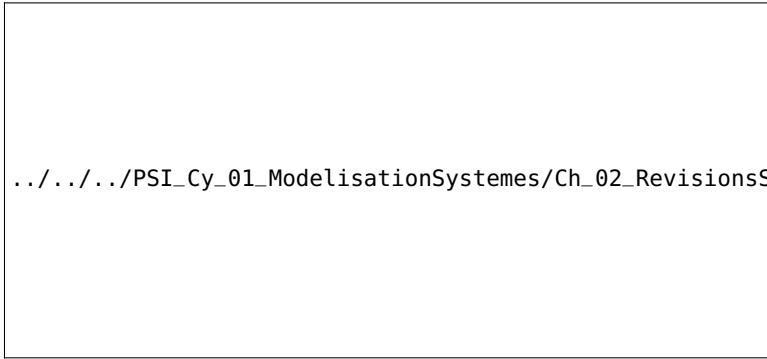




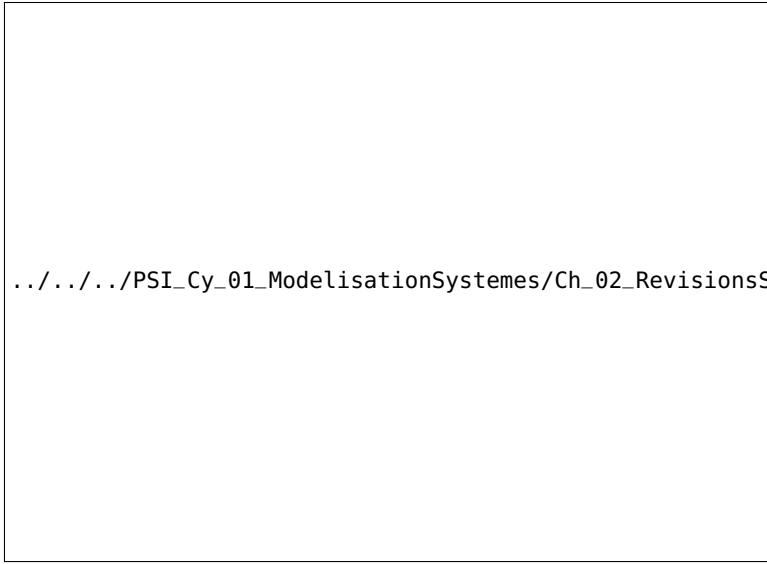
Dans un deuxième temps, il est décidé d'utiliser un correcteur de type proportionnel intégral. Sa fonction de transfert est notée :  $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$ .

**Question 7** Tracer les diagrammes de Bode asymptotique du correcteur ainsi que l'allure des courbes réelles pour  $K_p = 10$  et  $K_i = 1000$ . On précisera les valeurs numériques associées aux valeurs caractéristiques.

Une fois le correcteur réglé, on obtient les diagrammes de Bode en boucle ouverte (??) et les réponses temporelles (??), pour un échelon d'intensité  $i_c(t)$  de 2 A.



.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_04\_Hublex/images/fig\_15



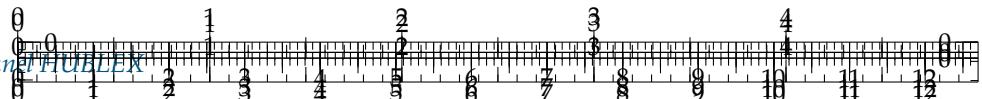
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_04\_Hublex/images/fig\_16

**Question 8** Commenter le résultat obtenu vis-à-vis de l'exigence « 1.7.1.4 ». Expliquer pourquoi cet asservissement n'est pas directement implanté en l'état dans le système (on pourra s'intéresser à la réponse en tension du du système).

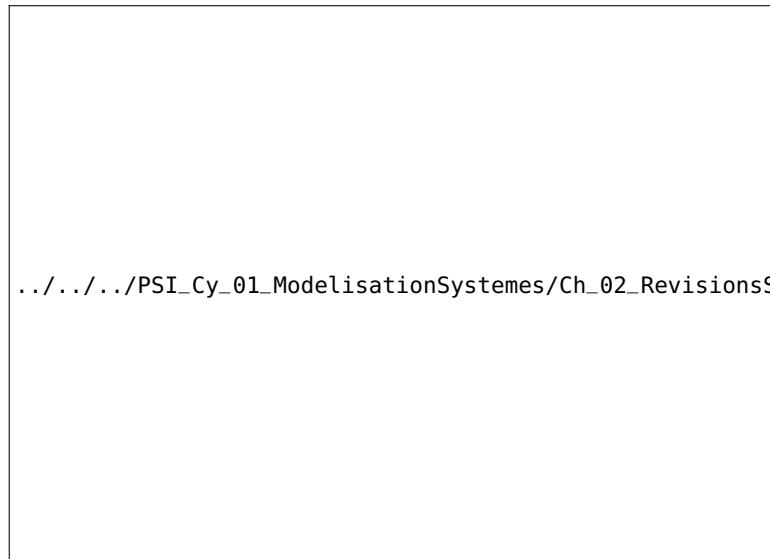
Le correcteur reste inchangé. Afin de palier au problème identifié précédemment, on apporte une dernière évolution au sein du calculateur. Cela permet de respecter les exigences de l'asservissement. ?? présente les réponses temporelles du système pour un échelon d'intensité  $i_c(t)$  de 2 A.

**Question 9** Préciser quelle ultime modification a apporté le constructeur afin de respecter les exigences de l'asservissement.





**FIGURE 2.50** – Réponses temporelles du système finalement implanté



#### Éléments de correction

1.  $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p)$ ,  
 $E(p) = K_e \Omega_m(p)$ ,  $C_m(p) = K_e I(p)$ ,  $J_{eq} p \Omega_m(p) = C_m(p) - f \Omega_m(p)$ .

2. .

3.  $K_m = \frac{f}{Rf + K_e^2}$ ,  $\tau_m = \frac{J}{f}$ ,  
 $\omega_{0m} = \sqrt{\frac{Rf + K_e^2}{LJ}}$   $z_m = \frac{Lf + RJ}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf + K_e^2}}$ .

4.  $K_{capt} = K_{IU}$ .

5.  $\varepsilon_s = \frac{1}{1 + K_m K_p K_{capt}}$ .

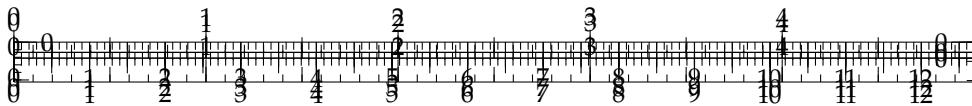
6. .

7. .

8. Saturation.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_04\_Hublex/images/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_04\_Hublex/





## TD 11

# Gyropode à usage professionnel HUBLEX- Corrigé

Concours CCINP – MP 2020.

### Présentation

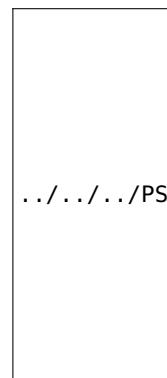
B2-04

C2-03

### Étude de l'asservissement en intensité des moteurs

#### Modélisation du moteur

**Question 1** Donner, dans le domaine de Laplace, les 4 équations caractéristiques associées au modèle de machines à courant continu.



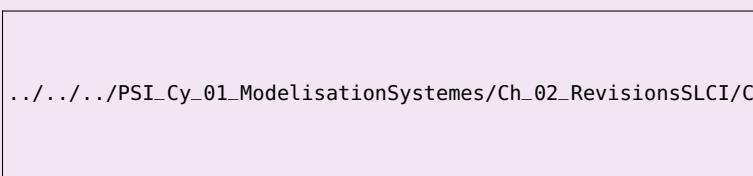
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisa...

#### Correction

- $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p);$
- $E(p) = K_e \Omega_m(p);$
- $C_m(p) = K_e I(p);$
- $J_{eq}p\Omega_m(p) = C_m(p) - f\Omega_m(p).$

**Question 2** Compléter alors le schéma-blocs du moteur dans ???. On précisera la grandeur associée à chaque lien.

#### Correction



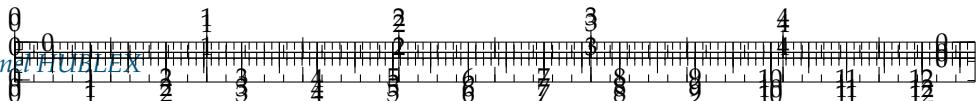
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystèmes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_04\_Hublex/images/cor\_01.png

**Question 3** Donner l'expression de la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$ . Mettre cette fonction de transfert sous la forme  $H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m p}{1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2}$ .

#### Correction

$$\text{En utilisant la formule de Black, on a } H_m(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{R + Lp}}{1 + K_e^2 \frac{1}{R + Lp} \frac{1}{f + Jp}} =$$





$$\begin{aligned} \frac{1}{(R + Lp) + K_e^2 \frac{1}{f + Jp}} &= \frac{f + Jp}{(R + Lp)(f + Jp) + K_e^2} \\ &= \frac{f + Jp}{Rf + (Lf + RJ)p + LJp^2 + K_e^2} = \frac{f}{Rf + K_e^2} \frac{1 + \frac{J}{f}p}{(Lf + RJ) \frac{p}{Rf + K_e^2} + \frac{LJp^2}{Rf + K_e^2} + 1}. \end{aligned}$$

On a donc  $K_m = \frac{f}{Rf + K_e^2}$ ,  $\tau_m = \frac{J}{f}$ ,  $\frac{1}{\omega_{0m}^2} = \frac{LJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow \omega_{0m} = \sqrt{\frac{Rf + K_e^2}{LJ}}$  et  $\frac{2z_m}{\omega_{0m}} = \frac{Lf + RJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow z_m = \frac{\omega_{0m}}{2} \frac{Lf + RJ}{Rf + K_e^2} \Rightarrow z_m = \frac{Lf + RJ}{2\sqrt{LJ}\sqrt{Rf + K_e^2}}.$

## Asservissement du moteur en intensité

**Question 4** Préciser, en justifiant, quelle valeur donner à  $K_{iu}$ , caractéristique du convertisseur IU.

### Correction

Pour avoir  $\varepsilon = 0$  lorsque  $I_c(p) = I(p)$ , il faut nécessairement  $K_{capt} = K_{IU}$ .

**Question 5** Calculer l'expression littérale de l'erreur en régime permanent notée  $\mu_s$ , pour une entrée indicielle (i.e.  $I_c(p)$  est un échelon unitaire), en fonction de  $K_{iu}$ ,  $K_p$  et  $K_m$ .

### Correction

$K_{capt} = K_{IU}$ , il est donc possible de positionner  $K_{capt}$  en amont de la chaîne directe, de supprimer  $K_{IU}$  et de se ramener à un schéma-blocs à retour unitaire.

On a alors  $FTBO(p) = K_{capt}C(p)H_m(p)$  et  $\varepsilon(p) = \frac{I_c(p)}{1 + FTBO(p)}$ .

On a alors  $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{1}{p} \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{1}{1 + K_m K_p K_{capt}}.$

**Question 6** Conclure, lorsque cela est possible, quant au respect des sous exigences de l'exigence « 1.7.1.1.1 » avec ce type de correcteur.

### Correction

Avec ce correcteur, l'exigence de précision nulle ne pourra pas être satisfaite.

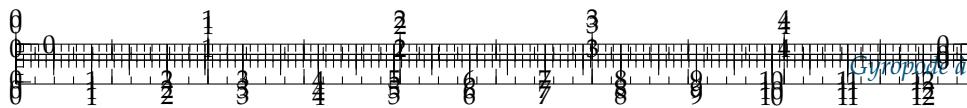
**Question 7** Tracer les diagrammes de Bode asymptotique du correcteur ainsi que l'allure des courbes réelles pour  $K_p = 10$  et  $K_i = 1000$ . On précisera les valeurs numériques associées aux valeurs caractéristiques.

### Correction

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{K_p p + K_i}{p} = K_i \frac{\frac{K_p}{K_i} p + 1}{p} = \frac{1000}{p} \left( \frac{1}{100} p + 1 \right).$$

On peut donc dresser le tableau de variation asymptotique.





.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_04\_Hublex/images/correction8\_1.jpg

L'asymptote du gain décibels de «  $H_1(p)$  » coupe l'axe des abscisses en 1000.

.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_04\_Hublex/images/correction8\_2.jpg

**Question 8** Commenter le résultat obtenu vis-à-vis de l'exigence « 1.7.1.1.4 ». Expliquer pourquoi cet asservissement n'est pas directement implanté en l'état dans le système (on pourra s'intéresser à la réponse en tension du du système).

#### Correction

La marge de phase est respectée. Cependant la tension atteinte demandée par la commande (120 V) est peut être trop élevée pour le moteur.

.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_02\_RevisionsSLCI/Cy\_01\_Ch\_02\_Colle\_04\_Hublex/images/correction8\_3.jpg

Le correcteur reste inchangé. Afin de palier au problème identifié précédemment, on apporte une dernière évolution au sein du calculateur. Cela permet de respecter les exigences de l'asservissement. ?? présente les réponses temporelles du système pour un échelon d'intensité  $i_c(t)$  de 2 A.

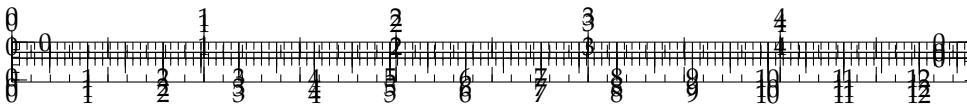
**Question 9** Préciser quelle ultime modification a apporté le constructeur afin de respecter les exigences de l'asservissement.

#### Correction

Le constructeur a ajouté une saturation de  $\pm 60$  V.







.../.../.../Style/png/Fond\_SLCI.png

## 3 Rappels sur la détermination des performances des systèmes asservis

### 3.1 Stabilité des systèmes asservis

#### 3.1.1 Notion de stabilité

##### Représentation graphique [1]

Un état d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre par une cause extérieure, finit par retrouver ce même état d'équilibre après disparition de la cause. Illustrons cette définition de façon très intuitive à travers l'exemple suivant : une boule soumise à l'accélération de la pesanteur se déplaçant (avec un peu de dissipation énergétique) sur une surface donnée.

C1-01

C2-03

Frédéric Mazet, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville Toulon.

Florestan Mathurin, Stabilité des SLCI Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cours/images/fig\_stabilite.png

##### Premières définitions

###### Définition – Définition intuitive

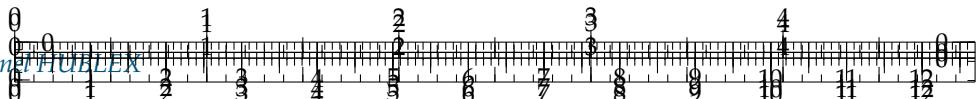
Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :

- ▶ abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre;
- ▶ son régime transitoire finit par disparaître;
- ▶ sa sortie finit par ressembler à l'entrée;
- ▶ sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

###### Remarque

La stabilité d'un système est indépendante de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionnelle (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...





Pour simplifier les calculs, une première approche pourra être d'utiliser la réponse impulsionnelle.

### Définition –

En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro au cours du temps.

### Étude des pôles de la fonction de transfert

Dans le cas général la fonction de transfert d'un système peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } n \geq m.$$

Lors du calcul de la réponse temporelle en utilisant la transformée de Laplace inverse (quelle que soit l'entrée), la nature du régime transitoire ne dépend que des pôles  $p_i$  de la fonction de transfert (zéros du dénominateur).

En factorisant le numérateur et le dénominateur de  $H(p)$  on peut alors retrouver une fonction de la forme :

$$H(p) = \frac{(p + z_m) \cdot (p + z_{m-1}) \dots}{(p + p_n) \cdot (p + p_{n-1}) \dots} \quad \text{avec } p_i, z_i \in \mathbb{C}.$$

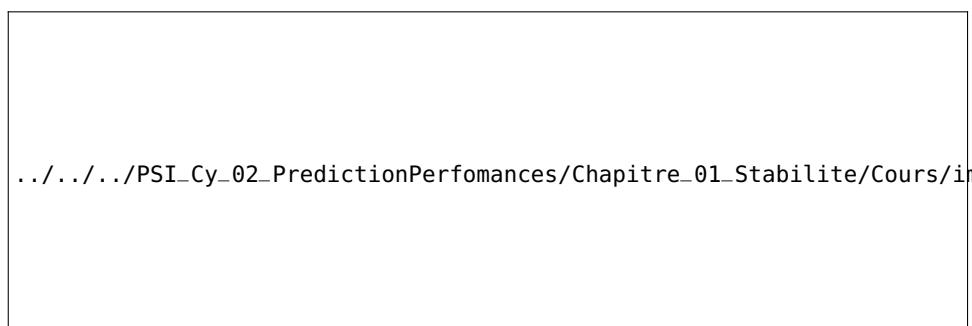
En passant dans le domaine temporel :

Mode : fonction temporelle associée à un pôle.

- les pôles réels (de type  $p = -a$ ) induisent des modes du type  $e^{-at}$  ;
- les pôles complexes conjugués (de type  $p = -a \pm j\omega$ ) induisent des modes du type  $e^{-at} \sin \omega t$ .

**On peut ainsi constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.**

Ainsi, on peut observer la réponse temporelle des systèmes en fonction du positionnement des pôles dans le plan complexe.

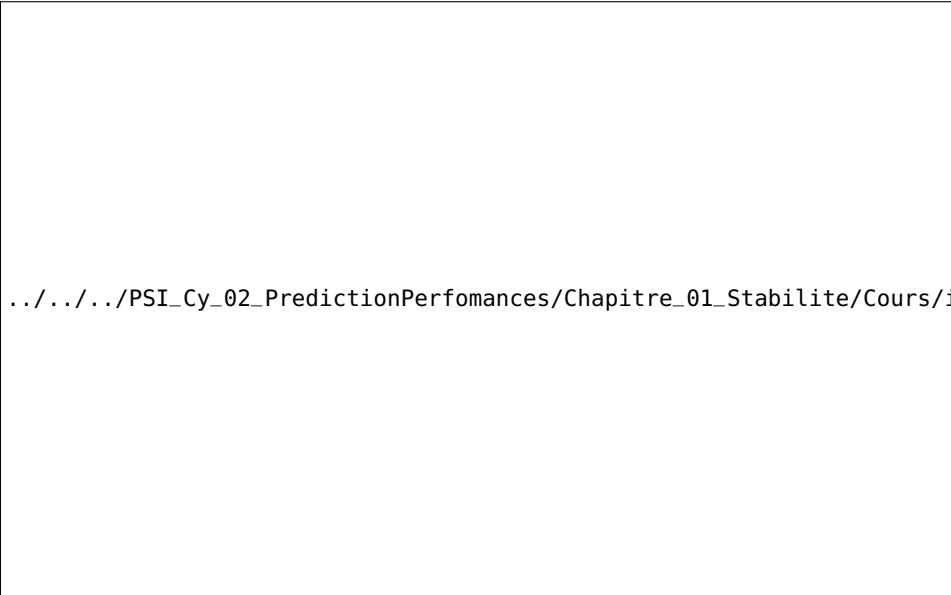
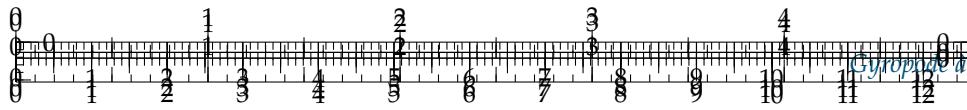


**FIGURE 3.1** – Représentation d'un système à pôle simple et à pôles conjugués dans le plan complexe – Réponse indicielle

### Position des pôles dans le plan complexe

Par extension on peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicielle associée.





.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cours/images/plan\_complexe\_fm.png

onse à  
position  
système

### Définition –

À retenir Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (**en boucle fermée**) sont à partie réelle strictement négative.

### Remarque

On peut montrer que :

- ▶ **pour les systèmes d'ordre 1 et 2** : le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe ;
- ▶ **pour les systèmes d'ordre 3** : de la forme  $a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3$  les coefficients doivent être strictement de même signe et  $a_2a_1 > a_3a_0$ .

### Pôles dominants [1]

Lors de l'étude d'un système, on se contente en général de ne prendre en compte que les pôles les plus influents. Ces pôles sont appelés les pôles dominants. Pour un système asymptotiquement stable, ce sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires, puisque ce sont eux qui induisent des modes qui disparaissent dans le temps le plus lentement.

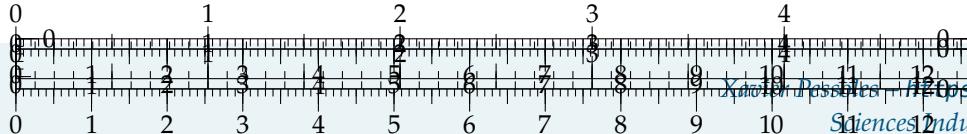
### Caractéristiques dans le lieu de pôles

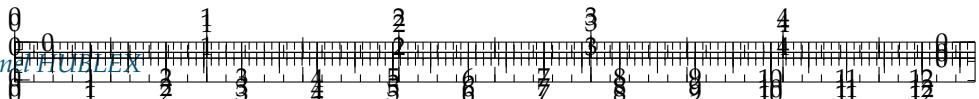
Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [1].

#### 3.1.2 Marges de stabilité

**Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...**

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par  $H_{BO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)G(p)$ .





La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :  $H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)G(p)} = \frac{F(p)}{1 + H_{BO}(p)}.$

### Définition – Équation caractéristique

Soit  $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  une fonction de transfert. On appelle  $D(p) = 0$  l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de  $D(p)$  correspondent aux pôles de  $H(p)$ .

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera  $1 + H_{BO}(p) = 0$ .

### Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh

Pour un système d'ordre supérieur à 3 il devient délicat d'obtenir analytiquement (ou numériquement) les racines du polynôme et ainsi conclure sur la stabilité à partir du signe des parties réelles.

Il existe un critère algébrique permettant de vérifier la stabilité d'un système : il s'agit de critère de Routh. Pour un système bouclé, ce critère utilise le dénominateur de la BF. Ce critère n'étant pas au programme, on pourra rechercher dans la littérature des articles s'y référant si nécessaire.

### Critère « graphique » de stabilité : le critère du Revers

On parle ici de critère graphique car l'interprétation graphique dans le diagramme de Bode est directe.

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme  $1 + H_{BO}(p) = 0$ . Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation  $H_{BO}(p) = -1$ . Ainsi dans le plan complexe, le point  $(-1; 0)$  permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain dB nul) et une phase de  $-180^\circ$ .

#### Résultat –

Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a :**

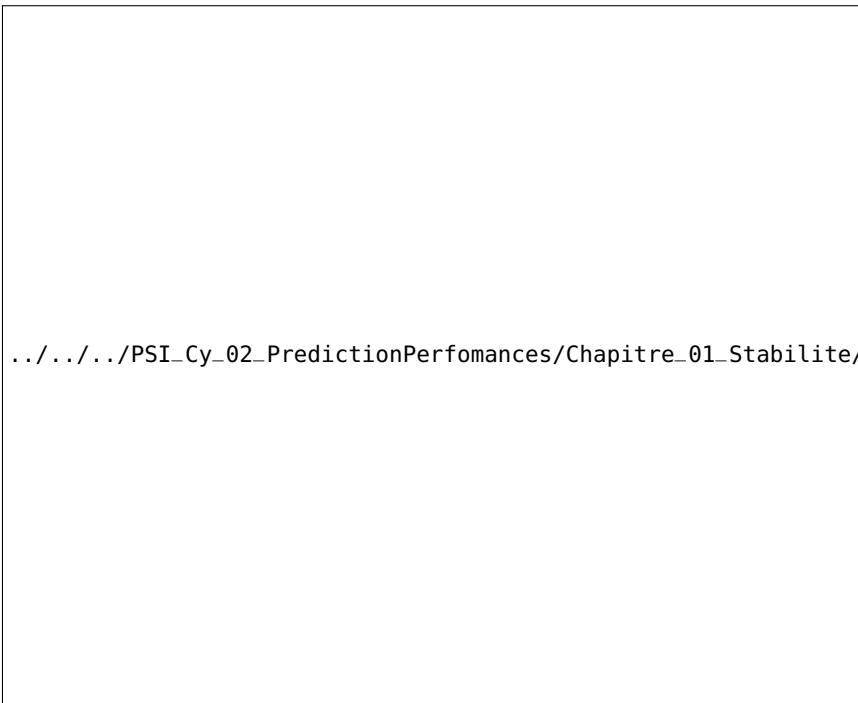
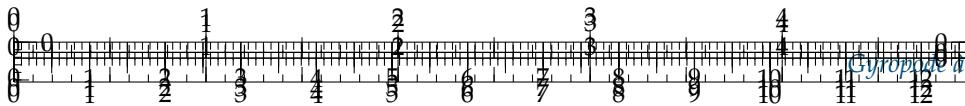
$$G_{dB}|_{\omega=\omega_{-180^\circ}} < 0_{dB} \quad \text{et} \quad \varphi|_{\omega=\omega_{0dB}} > -180^\circ.$$

En notant  $\omega_{-180^\circ}$  la pulsation pour laquelle la phase vaut  $-180^\circ$  et  $\omega_{0dB}$  la pulsation pour laquelle le gain est nul.

#### Résultat –

Condition (non suffisante ...) de stabilité : les pôles de la FTBO doivent être à partie réelle positive.





.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cours/images/marges.png

## Vers le système réel...

Le résultat donné ci-dessus est un résultat théorique dans le sens où le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système réel aura un écart avec le diagramme de Bode du système modélisé.

### Résultat – Marges

Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considérera, dans le cas général que le système est stable si :

- ▶ la marge de gain est supérieure à 10 dB;
- ▶ la marge de phase est supérieure à 45°.

### Définition – Marge de phase

La marge de phase est définie telle que  $M_\varphi = 180^\circ + \arg(\text{FTBO}(j\omega_{c0}))$  où  $\omega_{c0}$  est la pulsation de coupure pour laquelle  $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{c0})| = 0 \text{ dB}$ .

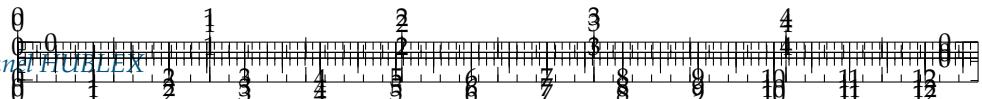
### Définition – Marge de gain

La marge de gain est définie telle que  $M_G = -20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})|$  où  $\omega_{\varphi180}$  est la pulsation pour laquelle  $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})) = -180^\circ$ .

La marge de gain permet de tenir compte de variations de gain de la boucle ouverte.

De même, la marge de phase permet de tenir compte de variation de phase (retard ou déphasage non modélisés).





La nécessité d'avoir recours à des marges de stabilité apparaît notamment lorsque :

- ▶ la simplification du modèle amène à considérer uniquement les pôles dominant,
- ▶ le modèle ne prend pas en compte la dynamique de certains composants du système;
- ▶ le système n'est pas invariant au cours du temps;
- ▶ on s'éloigne de la zone de fonctionnement linéaire;
- ▶ certaines non linéarités sont ignorées.

## 3.2 Rapidité des systèmes asservis

**Frédéric Mazet**, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.

**Florestan Mathurin**, Stabilité des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_Prediction

### Méthode – Détermination du temps de réponse

En pratique, on détermine le temps de réponse à 5%.

1. Tracer sur le même graphe la consigne  $e(t)$  et la réponse du système  $s(t)$ .
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de  $s(t)$ .
3. Tracer la bande correspondant à une variation de  $\pm n\%$  de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle  $s(t)$  coupe la bande et n'en sort plus.

### Résultat –

Plus le temps de réponse à 5% d'un système est petit, plus le régime transitoire disparaît rapidement.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_Pro

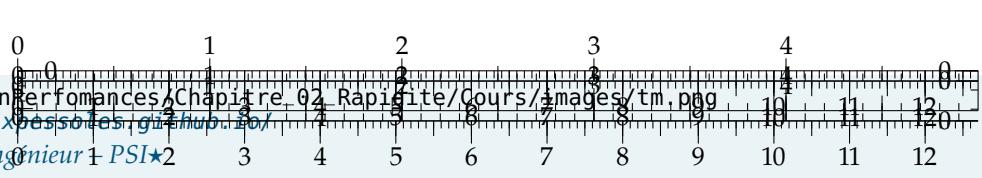
### Exemple – Donner le temps de réponse à 5% de la réponse à un échelon donné dans la figure suivante.

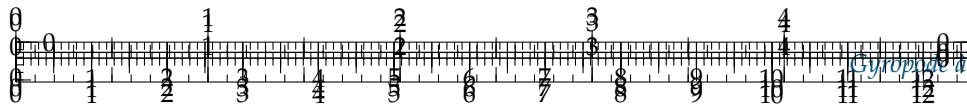
Les pièges du temps de réponse à 5% :

- ▶ le temps de réponse à 5% se mesure à plus ou moins 5% de la sortie (et pas de l'entrée). Ainsi, si le système est stable, le temps de réponse n'est **jamais l'infini**;
- ▶ si le signal ne part pas de 0 (en ordonnée), il faut réaliser la bande à  $S_0 + \Delta s \pm 0.05\Delta s$ ;
- ▶ si le signal ne part pas de 0 (en abscisse), il faut tenir compte du décalage des temps.

### Temps de montée

Pour caractériser la rapidité d'un système, on peut aussi utiliser le temps de montée. Il s'agit du temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur finale. Ce temps de montée caractérise la « vivacité » d'un système.





### 3.2.2 Rapidité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2

#### Systèmes d'ordre 1

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5% est donné par  $3\tau$ .

##### Résultat –

Pour un système du premier ordre, plus la constante de temps est petite, plus le système est rapide.

Soit un système du premier ordre bouclé avec un retour unitaire. L'expression de la FTBF est donnée par  $\text{FTBF}(p) = \frac{K}{1 + \tau p + K}$ . La constante de temps est alors  $\tau_{\text{BF}} = \frac{\tau}{1 + K}$ .

##### Résultat –

Pour un système du premier ordre bouclé (avec un retour unitaire), plus le gain statique est grand, plus le système est rapide.

#### Systèmes d'ordre 2

##### Résultat –

Pour un système du second, à  $\xi$  constant, plus la pulsation propre est grande, plus le système est rapide.

Soit un système du deuxième ordre bouclé avec un retour unitaire. En déterminant les caractéristiques de la FTBF, on obtient  $K_{\text{BF}} = \frac{K}{1 + K}$ ,  $\omega_{\text{BF}} = \omega_0 \sqrt{1 + K}$ ,  $\xi_{\text{BF}} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K}}$ .

##### Résultat –

- ▶ L'augmentation du gain de FTBO augmente la pulsation de la FTBF.
- ▶ L'augmentation du gain de FTBO diminue le coefficient d'amortissement. Suivant la valeur de  $\xi_{\text{BF}}$  le système peut devenir plus ou moins rapide.

### 3.2.3 Résultats dans le diagramme de Bode

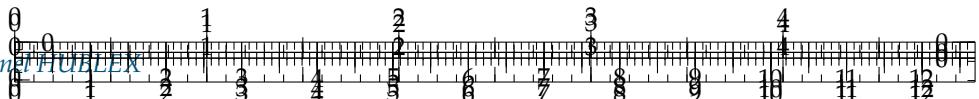
##### Résultat –

Plus la bande passante d'un système est élevée, plus le système est rapide.

##### Résultat –

Plus la pulsation de coupure à 0 dB de la boucle ouverte est grande, plus le système asservi est rapide.





### 3.3 Précision des systèmes asservis

#### 3.3.1 Système non perturbé

**Frédéric Mazet**, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.

**Florestan Mathurin**, Stabilité des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

##### Définition –

La précision est l'écart entre la valeur de consigne et la valeur de la sortie. Pour caractériser la précision d'un système, on s'intéresse généralement à l'écart en régime permanent.

Attention à bien s'assurer que, lors d'une mesure expérimentale par exemple, les grandeurs de consigne et de sortie sont bien de la même unité (et qualifient bien la même grandeur physique).

Pour un système non perturbé dont le schéma-blocs est celui donné ci-contre, on caractérise l'écart en régime permanent par :

$$\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) \iff \varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerf

##### Définition –

Un système est précis pour une entrée lorsque  $\varepsilon_{\text{permanent}} = 0$ .

##### Définition –

~

Le nom de l'écart dépend de l'entrée avec lequel le système est sollicité :

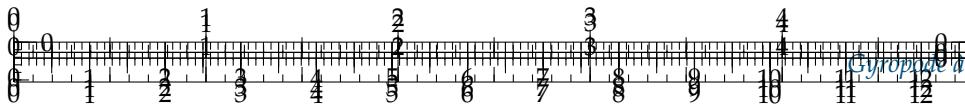
- ▶ écart statique, système sollicité par une entrée échelon :  $e(t) = E_0$  et  $E(p) = \frac{E_0}{p}$  ;
- ▶ écart en vitesse ou en poursuite, système sollicité par une rampe :  $e(t) = Vt$  et  $E(p) = \frac{V}{p^2}$  ;
- ▶ écart en accélération : système sollicité par une parabole,  $e(t) = At^2$  et  $E(p) = \frac{A}{p^3}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_03\_Precision/Cours/images

#### Petit développement ...

Calculons l'écart statique pour le système précédent. On a :  $\varepsilon(p) = E(p) - R(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p)$ . En conséquences,  $\varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p) \iff \varepsilon(p)(1 + F(p)G(p)) = E(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + F(p)G(p)}$ .





### Résultat –

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$$

Poursuivons ...

On a  $\text{FTBO}(p) = \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^\alpha (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}$  avec  $m < n$ .

### FTBO de classe nulle

- ▶ Pour une entrée échelon :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$ .
- ▶ Pour une entrée de type rampe :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = +\infty$ .
- ▶ Pour une entrée de type parabole :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = +\infty$ .

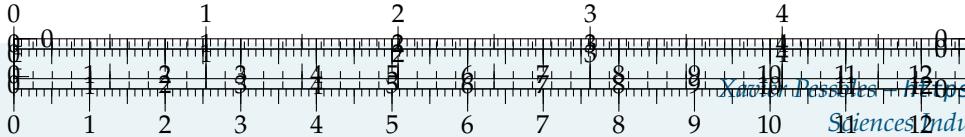
### FTBO de classe 1

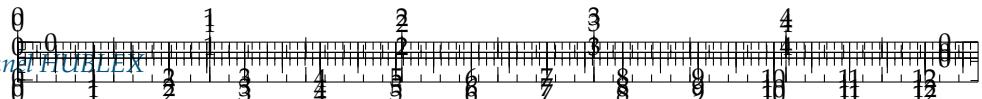
- ▶ Pour une entrée échelon :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$ .
- ▶ Pour une entrée de type rampe :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = \frac{V}{K_{BO}}$ .
- ▶ Pour une entrée de type parabole :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = +\infty$ .

### FTBO de classe 2

- ▶ Pour une entrée échelon :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$ .
- ▶ Pour une entrée de type rampe :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$ .
- ▶ Pour une entrée de type parabole :  $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = \frac{A}{K_{BO}}$ .

### Résultat –





Classe	Consigne échelon $e(t) = E_0$ $E(p) = \frac{E_0}{p}$	Consigne en rampe $e(t) = Vt$ $E(p) = \frac{V}{p^2}$	Consigne parabolique $e(t) = At^2$ $E(p) = \frac{A}{p^3}$
0	$\varepsilon_S = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$	$\varepsilon_V = +\infty$	$\varepsilon_A = +\infty$
1	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_V = \frac{V}{K_{BO}}$	$\varepsilon_A = +\infty$
2	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_V = 0$	$\varepsilon_A = \frac{A}{K_{BO}}$

### Remarque

L'écart statique est nul si la boucle ouverte comprend au moins une intégration. À défaut, l'augmentation du gain statique de la boucle ouverte provoque une amélioration de la précision.

### 3.3.2 Système perturbé

Soit le schéma-blocs ci-contre.

Le gain statique vis-à-vis de la consigne principale est égal à celui de la partie à gauche du schéma-blocs.

$$\begin{aligned} \text{Par lecture directe, on a : } \varepsilon(p) &= E(p) - R(p)S(p) = E(p) - R(p)(H_2(p)(P(p) + \varepsilon(p)H_1(p))) \\ \iff \varepsilon(p) &= E(p) - R(p)H_2(p)P(p) - R(p)H_1(p)H_2(p)\varepsilon(p) \iff \varepsilon(p)(1 + R(p)H_1(p)H_2(p)) = \\ E(p) - R(p)H_2(p)P(p) &\iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)} - \frac{R(p)H_2(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)}P(p). \end{aligned}$$

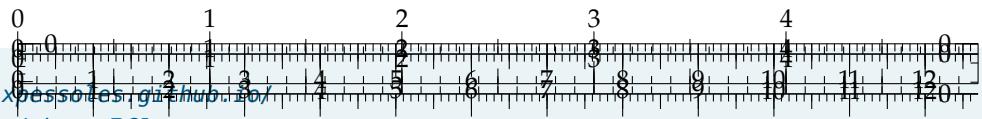
$$\text{On a donc : } \varepsilon(p) = \underbrace{\frac{1}{1 + FTBO(p)}E(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la consigne}} - \underbrace{\frac{R(p)H_2(p)}{1 + FTBO(p)}P(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la perturbation}}.$$

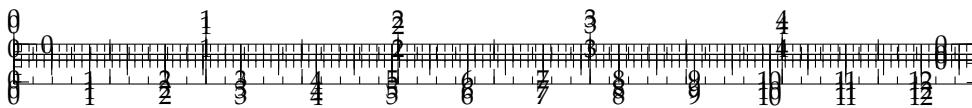
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_03\_Precision/Cours/images/fig\_erreur\_02.png

### Résultat –

Il faut au moins un intégrateur en amont d'une perturbation constante pour annuler l'écart vis-à-vis de cette perturbation. Un intégrateur placé en aval n'a aucune influence.

Quand ce n'est pas le cas, un gain  $K_1$  important en amont de la perturbation réduit toujours l'écart vis-à-vis de cette perturbation.





## Application 1 Stabilité des systèmes – Sujet

### Exercice 1 – Réponse impulsionale (entrée Dirac)

**Question 1** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Activation\_01/images/fig\_01.png

### Exercice 2 – Pôles de la FTBF

On donne les pôles des FTBF de plusieurs systèmes :

- |                               |                            |                      |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------|
| 1. $-1, -2;$                  | 4. $-2 + 3j, -2 - 3j, -2;$ | 7. $-1 + j, -1 - j;$ |
| 2. $-3, -2, 0;$               | 5. $-j, j, -1, 1;$         | 8. $2, -1, -3;$      |
| 3. $-2 + j, -2 - j, 2j, -2j;$ | 6. $-1, +1;$               | 9. $-6, -4, 7.$      |

**Question 1** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

### Exercice 3 – Applications du critère du Revers

**Question 1** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

**Question 2** Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.





.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Activation\_01/images/fig\_02.png

## Exercice 4 – Étude de la stabilité

### Objectif

- ▶ Caractériser la stabilité d'un système à partir de la FTBO.
- ▶ La marge de gain est supérieure à 10 dB et que la marge de phase est supérieure à 45°.

On donne le schéma ci-contre.

On a  $K = 1$ ,  $\tau = 0,1$  et  $G = 20$ .

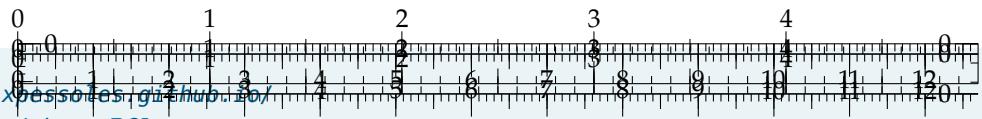
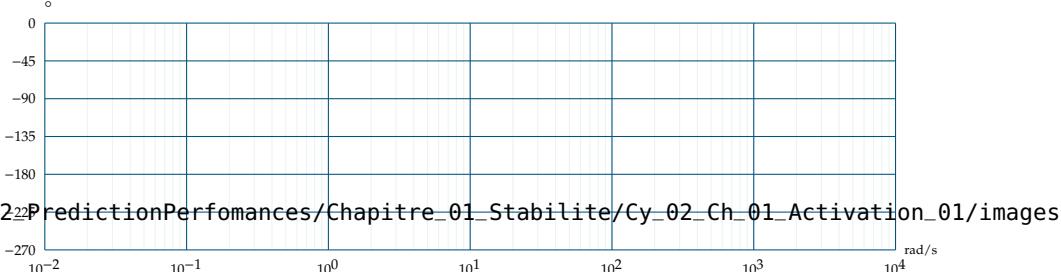
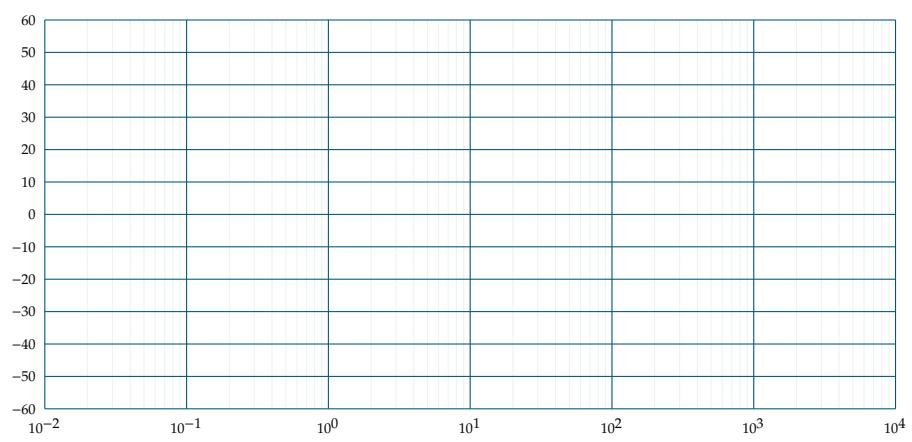
**Question 1** Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

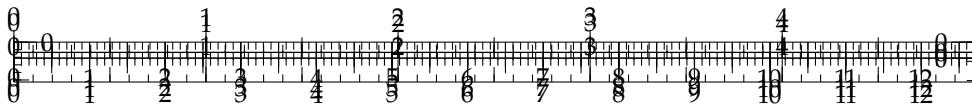
**Question 2** Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

**Question 3** Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

**Question 4** Confirmer ces résultats par le calcul.

**Question 5** Conclure par rapport au cahier des charges.





## Application 1 Stabilité des systèmes – Corrigé

### Exercice 1 – Réponse impulsionale (entrée Dirac)

**Question 1** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03

### Exercice 2 – Pôles de la FTBF

**Question 1** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

### Exercice 3 – Applications du critère du Revers

**Question 1** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

**Question 2** Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

### Exercice 4 – Étude de la stabilité

**Question 1** Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

#### Correction

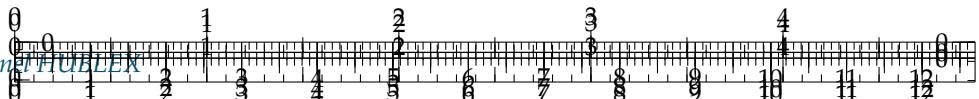
$$\text{Ici on a } \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}.$$

$$\text{Erreur statique (entrée échelon)} : \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = 0$$

$$\text{Erreur trainage (entrée rampe)} : \varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = \frac{1}{20}$$

**Question 2** Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.



**Correction**

.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Act

**Question 3** Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

**Correction**

**Question 4** Confirmer ces résultats par le calcul.

**Correction**

La phase ne coupe jamais l'axe des abscisses. Ainsi, la marge de gain n'est pas définie (elle est infinie). Pour déterminer la marge de phase analytiquement :

1. On cherche  $\omega_c$  tel que  $G_{dB}(\omega_c) = 0$ ;
2. On calcule  $\varphi(\omega_c)$ ;
3. La marge de phase est de  $\varphi(\omega_c) - (-180)$ .

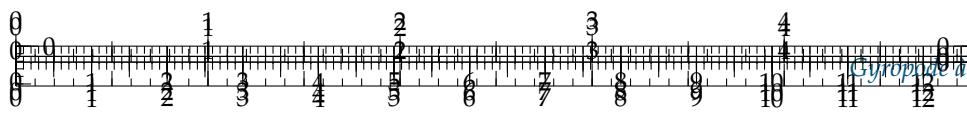
Cherchons  $\omega_c$  tel que  $G_{dB}(\omega_c) = 0$ . On a  $FTBO(j\omega) = \frac{20}{(1+0,1j\omega)j\omega} = \frac{20}{j\omega-0,1\omega^2}$ .  
 $20 \log |FTBO(j\omega)| = 20 \log 20 - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 0,01\omega^4} = 20 \log 20 - 20 \log \omega \sqrt{1+0,01\omega^2}$ .  
 $G_{dB}(\omega_c) = 0 \Leftrightarrow 20 = \omega_c \sqrt{1+0,01\omega_c^2} \Leftrightarrow 400 = \omega_c^2 (1+0,01\omega_c^2)$  On pose  $x = \omega_c^2$  et on a :  
 $400 = x (1+0,01x) \Leftrightarrow x^2 + 100x - 40000 = 0$ . On a donc  $\Delta = 412,3^2$  et  $x_{1,2} = \frac{-100 \pm 412,3}{2}$   
on conserve la racine positive et  $x_1 = 156,15$  et  $\omega_c = 12,5 \text{ rad s}^{-1}$ .  
 $\varphi(\omega_c) = \arg(20) - 90 - \arg(1+0,1j\omega_c) = 0 - 90 - \arctan(0,1\omega_c) = 0 - 90 - 51,34 = -141,34^\circ$ .  
La marge de phase est donc de  $38,66^\circ$ .

**Question 5** Conclure par rapport au cahier des charges.

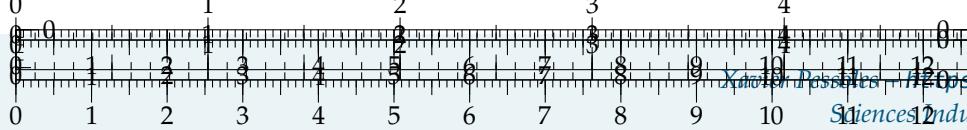
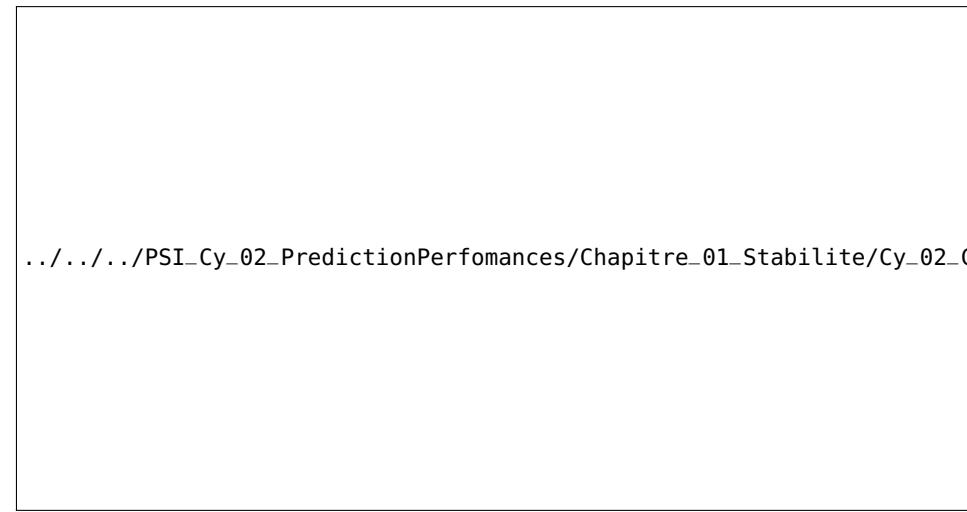
**Correction**

Le système ne sera pas stable vis-à-vis du cahier des charges.

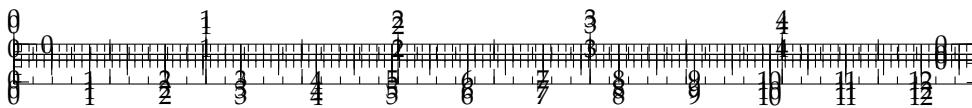




Pour  $\tau = 0,005$







## Application 2

### Stabilité des systèmes – Sujet

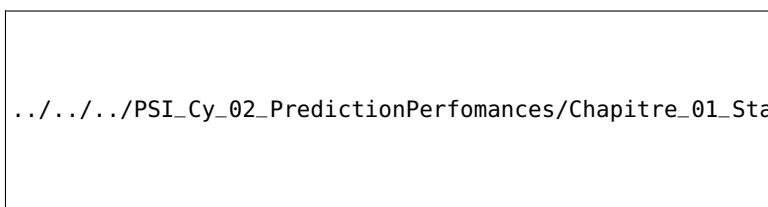
C1-01

On considère le schéma-blocs ci-contre et la réponse indicielle pour  $K_C = 1$ .

**Question 1** Justifier l'allure du diagramme du diagramme de Bode donné ci-dessous pour  $K_C = 1$ .

C2-03

`.../.../.../PSI_Cy_02_PredictionPerfo...`

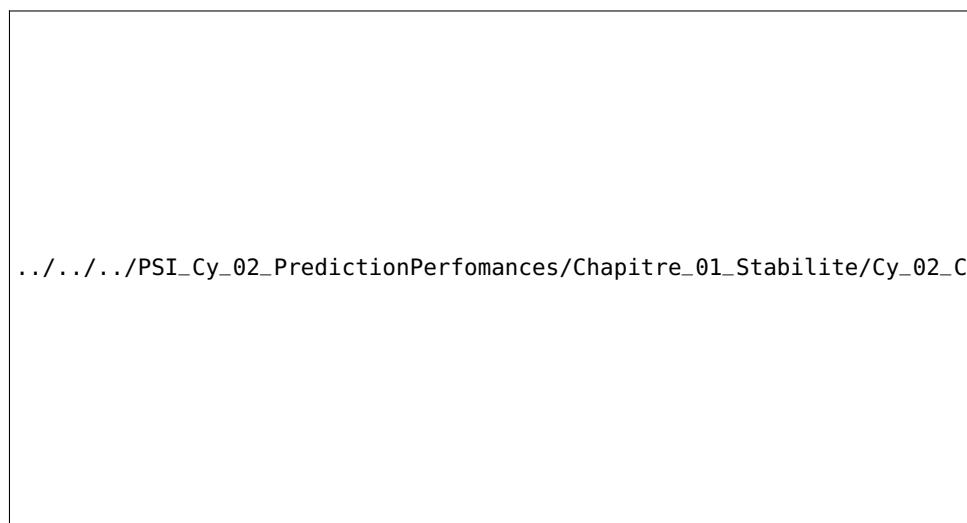


`.../.../.../PSI_Cy_02_PredictionPerfomances/Chapitre_01_Stabilite/Cy_02_Ch_01_Application_01/images/fig...`

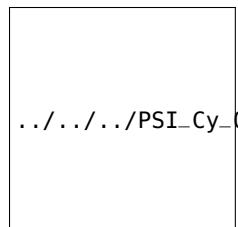
**Question 2** Donner graphiquement les marges de phase et de gain pour  $K_C = 1$ .

**Question 3** Donner analytiquement les marges de phase et de gain pour  $K_C = 1$  (méthode).

**Question 4** Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et 40°. Déterminer la plus grande valeur de  $K_C$  permettant de vérifier ce cahier des charges



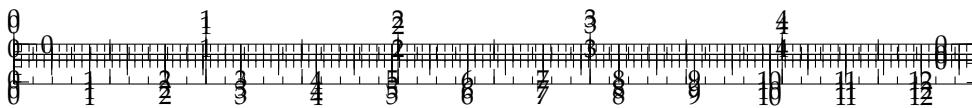
`.../.../.../PSI_Cy_02_PredictionPerfomances/Chapitre_01_Stabilite/Cy_02_Ch_01_Application_01/images/fig_03.png`



`.../.../.../PSI_Cy_02_Pr...`







## Application 2

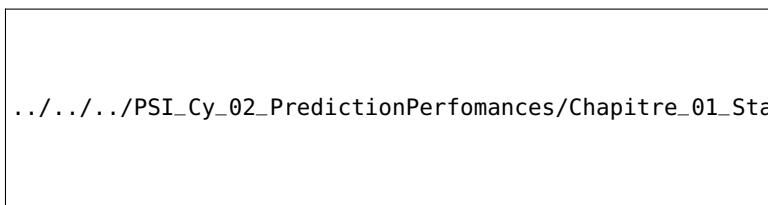
### Stabilité des systèmes – Corrigé

C1-01

On considère le schéma-blocs ci-contre et la réponse indicielle pour  $K_C = 1$ .

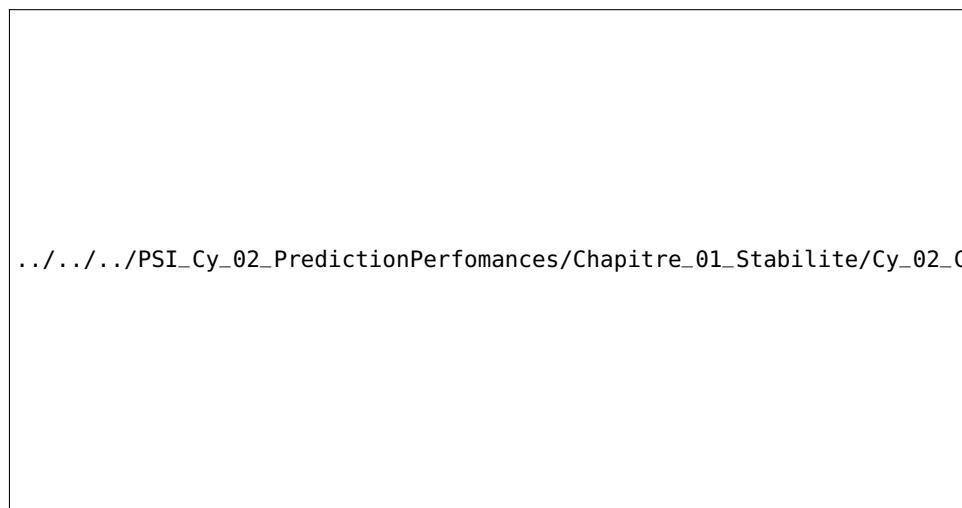
**Question 1** Justifier l'allure du diagramme du diagramme de Bode donné ci-dessous pour  $K_C = 1$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo



.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Application\_01/images/fig...

**Question 2** Donner graphiquement les marges de phase et de gain pour  $K_C = 1$ .



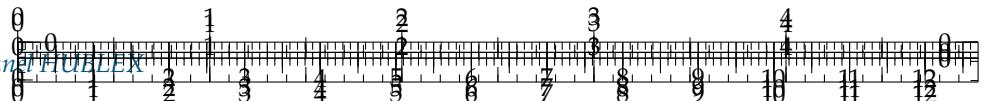
**Question 3** Donner analytiquement les marges de phase et de gain pour  $K_C = 1$  (méthode).

#### Correction

##### Calcul de la marge de gain

- On détermine  $\omega_{180}$  tel que  $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{180})) = -180^\circ$ .  
 $\arg(\text{FTBO}(j\omega)) = -\arg(j\omega) - \arg(1 + 10j\omega) - \arg(1 + 0,5j\omega) = -90 - \arctan(10\omega) - \arctan(0,5\omega)$ .





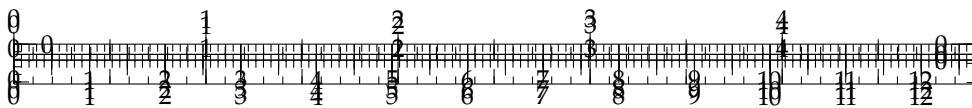
$$\arg(\text{FTBO}(j\omega_{180})) = -180^\circ \Leftrightarrow -90 - \arctan(10\omega) - \arctan(0,5\omega) = -180$$

$$\text{On a } \omega = 0,447 \text{ rad s}^{-1}.$$

**Question 4** Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et 40°. Déterminer la plus grande valeur de  $K_C$  permettant de vérifier ce cahier des charges

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Applications/Exercices/Exo\_01\_Gyropode\_a\_usage\_professionnel/Exo\_01\_Gyropode\_a\_usage\_professionnel.ipynb





## Application 3

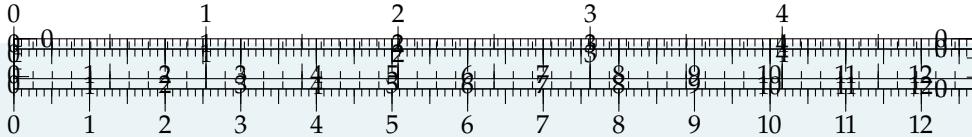
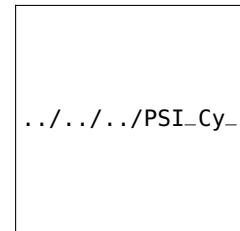
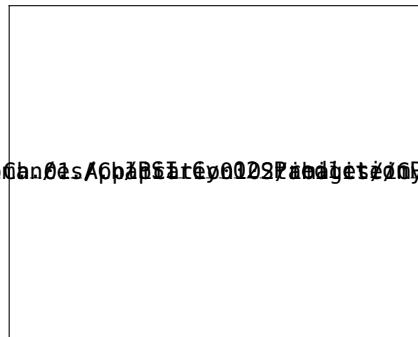
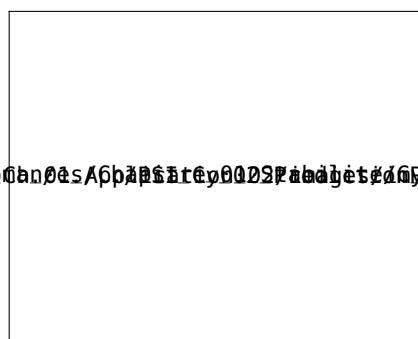
### Stabilité des systèmes – Sujet

C1-01

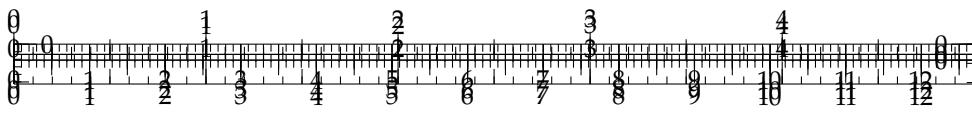
**Question 1** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

C2-03

P. Dupas?







## Application 3

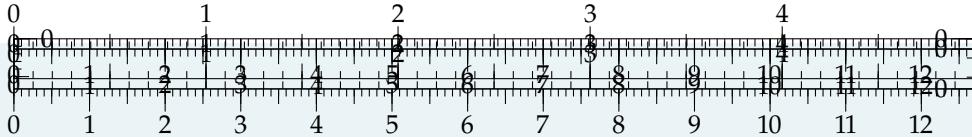
### Stabilité des systèmes – Corrigé

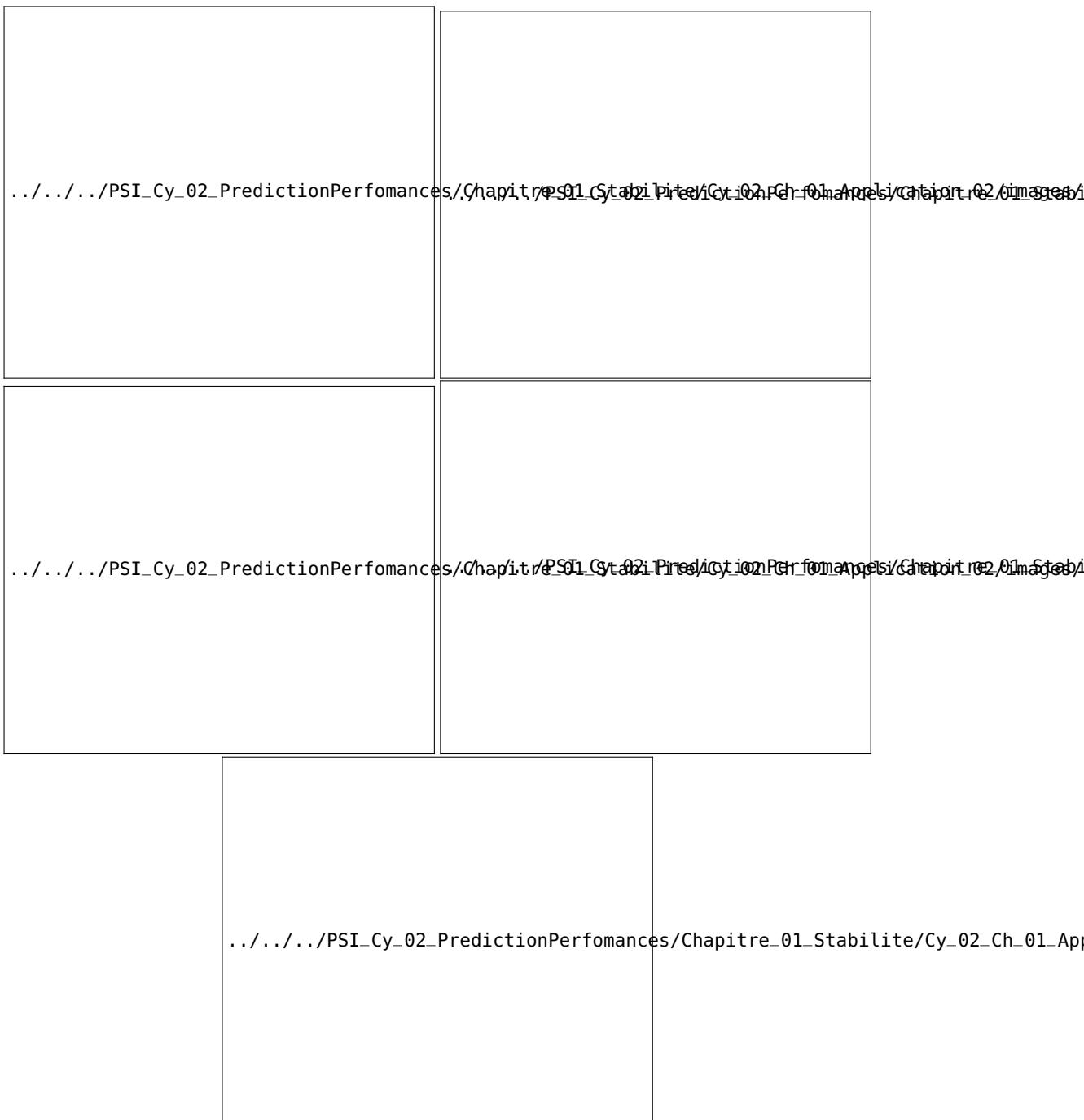
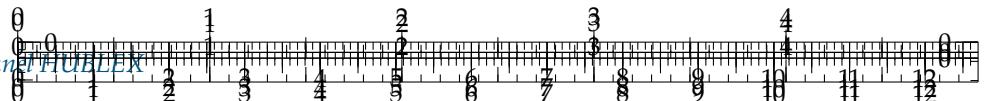
**Question 1** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

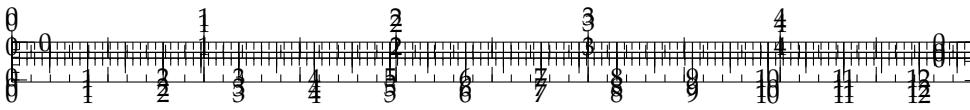
C1-01

C2-03

P. Dupas?







.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_01\_Drone/images/fig\_01.png

# TD 1

## Drone quadri-rotor – Sujet

Pole SII Chateaubriand – Joliot Curie

C1-01

C2-03

### Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction  $\vec{z}$ ) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x})$ ) et en tangage (rotation autour de l'axe  $(O, \vec{y})$ ) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ( $\frac{\omega_2}{\omega_4}$  pour le roulis et  $\frac{\omega_1}{\omega_3}$  pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

### Objectif

- ▶ Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- ▶ Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Accélération verticale	Vers le haut : 3g Vers le bas : 0,5g (valeur absolue)
Précision	Erreur statique nulle
Stabilité	Marge de phase minimale : 35°. Dépassement maximal < 5 %
Rapidité	$t_{r5\%} < 0,6$ s

### Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.

Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

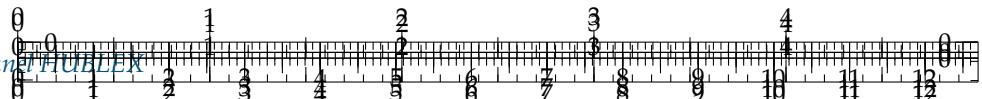
$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

$u$  représente la tension de commande du moteur,  $\omega(t)$  son taux de rotation,  $\tau$  et  $k_v$  des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme  $k_q\omega^2$  provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en  $\omega^2$ , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , fréquence



.../.../.../PSI\_Cy\_02\_Prediction



de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  et  $u = u_0 + \delta u$  où  $\delta\omega$  et  $\delta u$  représentent des petites variations de  $\omega$  et  $u$  autour du point de fonctionnement.

**Question 1** Déterminer l'équation stationnaire liant  $\omega_0$  et  $u_0$ .

**Question 2** Montrer que l'équation différentielle liant  $\delta\omega$  et  $\delta u$  est de la forme  $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$ . Exprimer  $A$  et  $B$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ . On note  $\Delta\Omega(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta\omega$  et  $\Delta U(p)$  celle de  $\delta u$ .

**Question 3** Calculer la fonction de transfert  $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$  du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques  $K_m$  et  $T_m$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

## Recherche du point de fonctionnement $\omega_0$

Dans le mouvement de déplacement vertical de direction  $\vec{Z}$ , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée  $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$ . La masse totale du drone est  $m = 240$  g. On prendra  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .

**Question 4** Calculer numériquement la poussée  $F_0$  que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude  $z_0$ . La poussée  $F$  varie avec  $\omega^2$ . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant  $F$  à la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s.

**Question 5** Déterminer la fréquence de rotation  $\omega_0$  des moteurs en vol stationnaire.

Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande  $u$

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_01\_Drone/images/fig\_04.png

courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme  $y = ax^2 + bx$ . On donne la constante de temps du moteur :  $\tau = 125$  ms.

**Question 6** Déterminer l'expression des coefficients  $k_v$  et  $k_q$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\tau$ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$  du moteur linéarisé autour de son point de

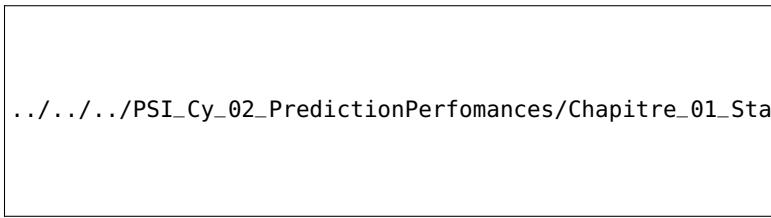
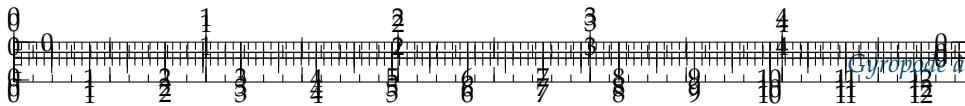
fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant :  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_01\_Drone/images/fig\_05.png

## Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , par le schéma-bloc suivant :





.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_01\_Drone/images/fig\_06...  
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_Predic

FIGURE 3.3 – Courbe de phase

Le gain du capteur barométrique est de  $0,05 \text{ V m}^{-1}$ . On pose  $z(t) = z_0 + \delta z(t)$ ,  $\Delta Z(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta z(t)$ ,  $F = F_0 + \delta F$  représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire :  $m\ddot{z} = 4F - mg$ .

**Question 7** Déterminer la fonction de transfert  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$  à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté  $K_{BO} = 2,5K$ . La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée figure ??, en gras avec un correcteur proportionnel ( $T = 0$ ) et en trait fin avec le correcteur retenu ( $K = 1$  et  $T = 0,2s$ ).

**Question 8** Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur  $T = 0,2s$  et  $K = 1$ . Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et  $1000 \text{ rad s}^{-1}$ , le gain sera compris entre  $-120 \text{ dB}$  et  $10 \text{ dB}$ .

**Question 9** Justifier que pour  $K = 1$ , on a  $\omega_{c0 \text{ dB}} = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$ . En déduire graphiquement la marge de phase pour  $K = 1$ . Commenter.

**Question 10** Procéder au réglage du gain  $K$  du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

**Question 11** Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié ? Justifier.

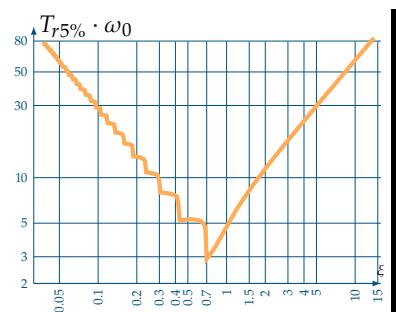
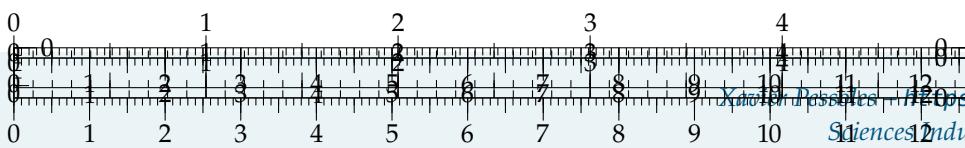
La figure 1.6 représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain  $K$  précédemment déterminée.

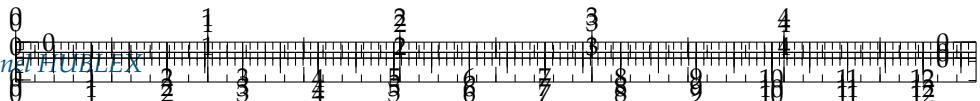
**Question 12** Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

**Question 13** À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

**Question 14** En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié ?

**Question 15** Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre  $\omega_n$  et de coefficient d'amortissement  $\xi < 1$ . En déduire une estimation de la pulsation propre  $\omega_n$  de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.



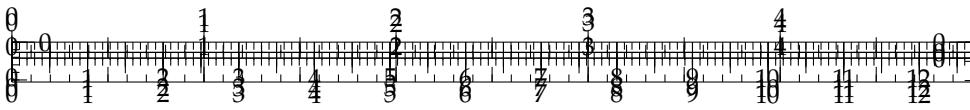


**Question 16** Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

#### Éléments de correction

1.  $-\frac{1}{\tau}\omega_0 - k_q\omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau}u_0 = 0;$
2.  $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q\omega_0$  et  $B = \frac{k_v}{\tau}.$
3.  $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q\omega_0}$  et  $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q\omega_0}.$
4.  $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6 \text{ N}.$
5.  $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}.$
6.  $k_v = \frac{1}{b} (\text{rad/s/V})$  et  $k_b = \frac{a}{b\tau}.$
7.  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2} \cdot H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}.$
- 8.
- 9.
10.  $K = 17,9.$
11. FTBO de classe 2,  $\varepsilon_s$  nul.
12.  $p_2 = -15, p_3 = -5 + 8j, p_4 = -5 - 8j.$
13.  $\xi = 0,6$
14.  $\dots/\dots/\dots/\text{PSI\_Cy\_02\_P14}$
15.  $p = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}.$   $\omega_n \approx 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
16.  $t_{5\%} \approx 0,61 \text{ s}.$





.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_01\_Drone/images/fig\_01.png

## TD 1

# Drone quadri-rotor – Corrigé

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

C1-01

C2-03

## Présentation

### Objectif

- ▶ Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- ▶ Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

## Linéarisation du modèle de moteur

**Question 1** Déterminer l'équation stationnaire liant  $\omega_0$  et  $u_0$ .

### Correction

En vol stationnaire, dans les conditions idéales, la vitesse de rotation des hélices est constante ; donc  $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$ . De plus, il n'y a pas de variation de la vitesse de rotation des hélices et donc pas de variation de la tension d'alimentation. En conséquence,  $\delta u = 0$  et  $\delta\omega = 0$ .

On a donc  $\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u$  En notant  $\omega_0$  et  $u_0$  les vitesses en tensions à l'état stationnaire, on a  $\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0$ .

**Question 2** Montrer que l'équation différentielle liant  $\delta\omega$  et  $\delta u$  est de la forme  $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$ . Exprimer  $A$  et  $B$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

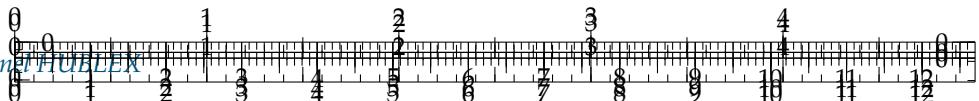
### Correction

On utilise le changement de variable proposé autour d'un point de fonctionnement et on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega(t)}{dt} &= -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u \\ \Rightarrow \frac{d(\omega_0 + \delta\omega)}{dt} &= -\frac{1}{\tau}(\omega_0 + \delta\omega) - k_q(\omega_0 + \delta\omega)^2 + \frac{k_v}{\tau}(u_0 + \delta u) \\ \Rightarrow \frac{d(\delta\omega)}{dt} &= -\frac{1}{\tau}\omega_0 - \frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q\omega_0^2 - k_q(\delta\omega)^2 - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}u_0 + \frac{k_v}{\tau}\delta u \\ \text{Or } \frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 &= \frac{k_v}{\tau}u_0 \text{ (question précédente)}; \text{ donc : } \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q(\delta\omega)^2 - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u \end{aligned}$$

$$\text{En négligeant les termes d'ordre 2, on a donc : } \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$





Au final,  $A = \frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0$  et  $B = \frac{k_v}{\tau}$ .

On note  $\Delta\Omega(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta\omega$  et  $\Delta U(p)$  celle de  $\delta u$ .

**Question 3** Calculer la fonction de transfert  $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$  du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques  $K_m$  et  $T_m$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

#### Correction

En utilisant la transformée de Laplace, on obtient  $p\Delta\Omega(s) = -A\Delta\Omega(s) + B\Delta U(s)$  et donc

$$\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)} = \frac{B}{p+A} = \frac{B/A}{p/A+1}. \text{ En conséquence, } K_m = \frac{B}{A} = \frac{\frac{k_v}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0} = \frac{k_v}{1 + \tau k_q 2\omega_0}.$$

$$\tau_m = \frac{\tau}{1 + \tau k_q 2\omega_0}$$

## Recherche du point de fonctionnement $\omega_0$

**Question 4** Calculer numériquement la poussée  $F_0$  que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude  $z_0$ .

#### Correction

On a  $4F_0 = mg$ . Le poids du drone est de  $0,240 \times 9,81 = 2,3544$  N. Chaque moteur doit donc exercer  $\frac{2,3544}{4} = 0,59$  N.

**Question 5** Déterminer la fréquence de rotation  $\omega_0$  des moteurs en vol stationnaire.

#### Correction

En lisant le graphe, on obtient  $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 6** Déterminer l'expression des coefficients  $k_v$  et  $k_q$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\tau$ . Préciser leur unité.

#### Correction

Lorsque  $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$ , on a  $u = a\omega^2 + b\omega_0$ . Par ailleurs en régime stationnaire, on a

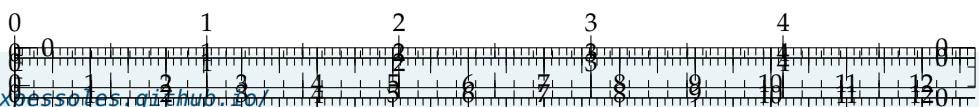
$$\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0. \text{ Il en résulte que } u_0 = \frac{1}{k_v}\omega_0 + \frac{k_q\tau}{k_v}\omega_0^2.$$

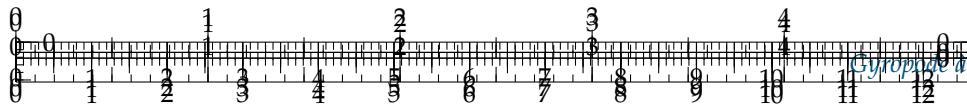
On a donc  $a = \frac{k_q\tau}{k_v}$  et  $b = \frac{1}{k_v}$ . On a donc  $b$  tel que [V] = [B][s<sup>-1</sup>] et [B] = [V][s]. On a donc  $k_v$  en [V<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>].

Par ailleurs, [V] = [k<sub>q</sub>][s][Vs][s<sup>-2</sup>] et  $k_q$  n'a pas d'unité.

On peut ainsi déduire le modèle  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$  du moteur linéarisé autour de son point de

fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant :  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$ .





## Vérification des performances

**Question 7** Déterminer la fonction de transfert  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$  à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

### Correction

On a vu que  $4_0 F = mg$ .

Par ailleurs,  $m\ddot{z} = 4F - mg$  et donc,  $m \frac{d(z_0 + \delta z(t))}{dt} = 4(F_0 + \delta F(t)) - mg$  et  $m \frac{d(\delta z(t))}{dt} = 4\delta F(t)$ . Dans le domaine de Laplace, on a  $mp^2 \Delta Z(p) = 4\Delta F(p)$ . En conséquences,  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2}$ .

La FTBO s'exprime alors par  $H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}$ .

**Question 8** Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur  $T = 0,2\text{ s}$  et  $K = 1$ . Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et  $1000\text{ rad s}^{-1}$ , le gain sera compris entre  $-120\text{ dB}$  et  $10\text{ dB}$ .

### Correction

On a  $H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}$ . Les pulsations de cassure sont alors :  $5\text{ rad s}^{-1}$ ,  $30\text{ rad s}^{-1}$  et  $77\text{ rad s}^{-1}$ . Les pentes sont alors :

- ▶ pour  $\omega < 5\text{ rad s}^{-1}$  :  $-40\text{ dB/décade}$ ;
- ▶ pour  $5\text{ rad s}^{-1} < \omega < 30\text{ rad s}^{-1}$  :  $-20\text{ dB/décade}$ ;
- ▶ pour  $30\text{ rad s}^{-1} < \omega < 77\text{ rad s}^{-1}$  :  $-40\text{ dB/décade}$
- ▶ pour  $\omega > 77\text{ rad s}^{-1}$  :  $-60\text{ dB/décade}$ .

Pour une pulsation de  $10 \times 10^{-2}\text{ rad s}^{-1}$ , on a  $FTBO(p) \approx \frac{2,5}{p^2}$ . On a donc un gain  $\approx 20\log\left(\frac{2,5}{0,01^2}\right) \approx 88\text{ dB}$ . Reste à tracer...

**Question 9** Justifier que pour  $K = 1$ , on a  $\omega_{c0\text{dB}} = 1,5\text{ rad s}^{-1}$ . En déduire graphiquement la marge de phase pour  $K = 1$ . Commenter.

### Correction

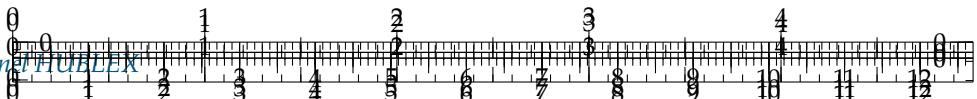
Si on considère que pour  $\omega < 5\text{ rad s}^{-1}$ , on a  $H_{BO}(p) \approx \frac{2,5K}{p^2}$ . Dans ces conditions, pour  $K = 1$ , on a  $\left|\frac{2,5}{-\omega^2}\right| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{2,5} \approx 1,58\text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 10** Procéder au réglage du gain  $K$  du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

### Correction

En raisonnant analytiquement, on cherche la pulsation  $\omega_{-145}$  pour laquelle la phase est de  $-180^\circ + 35^\circ = -145^\circ$ , soit  $\arg FTBO(j\omega) = -145^\circ$ . (Résolution à faire à la calculatrice, sur





Python ou autre. Il y a surement 2 solutions vu le profil de courbe de phase). On cherche ensuite  $K$  tel que  $|FTBO(j\omega_{-145})| = 1$ . (Résolution à faire à la calculatrice, sur Python ou autre.)

**Question 11** Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

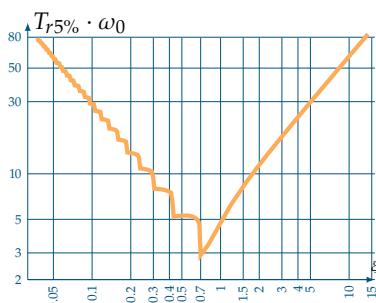
#### Correction

La boucle ouverte comporte 2 intégrateurs. L'écart statique est donc nul. Le cahier des charges est vérifié.

**Question 12** Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

#### Correction

Les pôles dominants sont  $P_2 \approx -15, P_3 \approx -5 + 8i, P_4 \approx -5 - 8i$ .



**Question 13** À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

#### Correction

Dans ce cas, on ne prend que  $P_3$  et  $P_4$ .  $\xi = 0,6$ .

**Question 14** En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

#### Correction

Le coefficient d'amortissement est inférieur à 0,69. Il y aura donc des oscillations verticales lors du drone. Le dépassement sera supérieur à 5 % de la valeur finale. En conséquence, le critère de stabilité n'est pas totalement respecté.

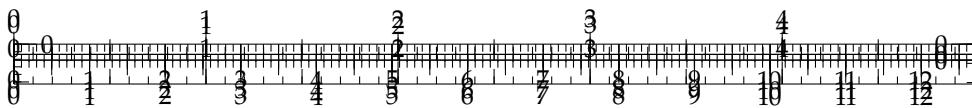
**Question 15** Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre  $\omega_n$  et de coefficient d'amortissement  $\xi < 1$ . En déduire une estimation de la pulsation propre  $\omega_n$  de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

#### Correction

**Question 16** Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

#### Correction





## TD 2

# Stabilisateur actif d'image – Sujet

Mines Ponts 2018 – PSI

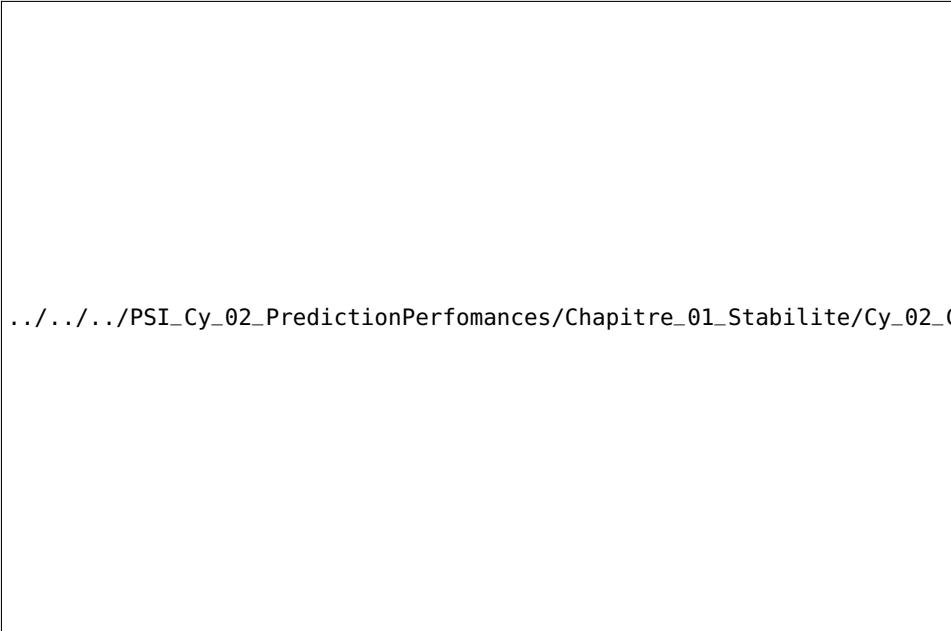
C1-01

C2-03

### Mise en situation

On s'intéresse à une nacelle active de caméra. Ce système de stabilisation, nommé CAM-GYR, permet de s'assurer que quelque soit l'orientation du porteur (caméraman), l'axe vertical de la caméra et toujours parallèle à la direction de la pesanteur. Le système est équipé de 3 moteurs permettant d'ajuster le roulis, le tangage et le lacet. On s'intéresse ici uniquement à la stabilisation de l'axe de tangage.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo



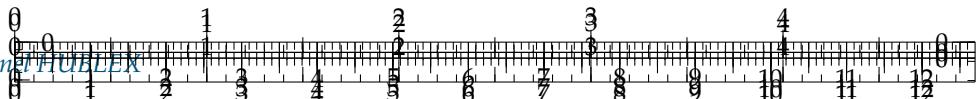
### Objectif

Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

### Travail demandé

On considère un modèle de l'axe de tangage sans perturbation et qui reçoit des consignes assez rapides modélisées par des échelons. L'ensemble {moteur, charge} ne





présente pas de réducteur. Il est modélisé par un ensemble en série de deux fonctions de transfert :

- ▶ un gain pur de valeur  $K_m$  ;
- ▶ une fonction de transfert du premier ordre de gain statique  $A$  et de constante de temps  $\tau_m$ .

Cet ensemble présente comme entrée la commande du moteur  $com(t)$  et comme sortie la vitesse angulaire de rotation du moteur  $\omega_m(t)$ . Le réglage retenu est tel que  $K_m A = 1$ . **Le retour  $K_D$  agit par un sommateur.** Dans cette étude,  $A_i(p) = 1$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch...

**FIGURE 3.5** – Modèle 1 de l'axe de tangage.

**Question 1** Avec  $K_m A = 1$ , calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas :  $A_i(p) = 1$ .

**Question 2** Quelle est la valeur maximale de  $K_D$  pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqués.

En accord avec les résultats précédents, on fixe  $K_D = 0,5$  et  $\tau_m = 0,2\text{ s}$ . Dans un premier temps on impose  $K_P = 10\text{ s}^{-1}$ .

**Question 3** Lorsque  $A_i(p) = 1$ , le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Dans un second temps on se place en mode stabilisation. On s'intéresse toujours au comportement de l'axe de tangage mais sans le filtre passe bas ( $A_i(p) = 1$ ). On considère ici que la consigne est constante donc  $\varphi_a^*(t) = 0$ . Une perturbation  $Pe(p)$  agit au niveau de l'ensemble (moteur, charge) modélisée sur le schéma bloc (Modèle 2). On appelle  $Com(p)$  la transformée de Laplace de la commande du moteur  $com(t)$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch...

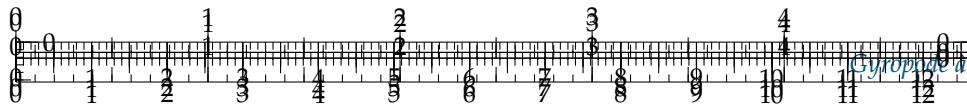
**FIGURE 3.6** – Modèle 2 de l'axe de tangage.

**Question 4** Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert  $Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)}$  qui lie la commande à la perturbation.

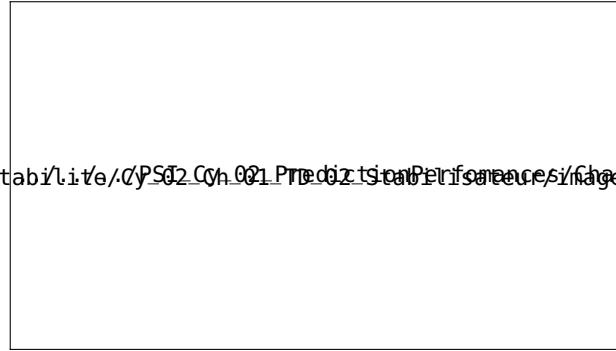
**Question 5** Avec le modèle 2 et une entrée  $Pe(p)$  échelon unitaire, déterminer la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la commande :  $com(t)$ . Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Question 6** Avec le modèle 2 déterminer la FTBO  $\frac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$  de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie  $Pert(p) = \frac{\varphi(p)}{Pe(p)}$ .





[predictionPerformances/Chapitre\\_01\\_Stabilite/Cy\\_02\\_Ch\\_01\\_TD\\_02\\_Stab.pdf](#)



**Question 7** Déterminer la valeur lorsque  $t$  tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat?

**Question 8** On désire une marge de gain de  $M_G \geq 5$  dB et une marge de phase  $M\varphi \geq 20^\circ$  (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de  $K_P$  en utilisant les données ci-dessous.

$$\text{On note } F(\omega) = \frac{2}{j\omega(1 + 0,4j\omega)}.$$

$\omega$ (rad/s)	1	2,5	5	7	10
$\text{Arg}(F(\omega))$	$-112^\circ$	$-135^\circ$	$-153^\circ$	$-160^\circ$	$-166^\circ$
$20 \log  F(\omega) $	5,4 dB	3 dB	-1 dB	-3 dB	-6,2 dB

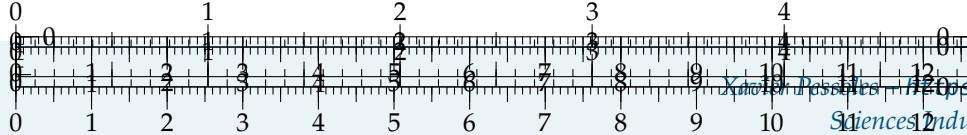
Le figure suivante (droite) présente la réponse temporelle de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale (due par exemple au vent qui crée un balancement de la GYRCAM) (ordonnée en degrés).

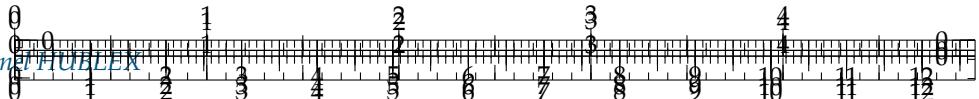
**Question 9** Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de  $\text{Com}(t)$  relativement à  $\text{Pe}(t)$  en utilisant le résultat de la question ?? Afin d'améliorer le comportement, un autre réglage a été effectué (voir figure précédente – droite).

**Question 10** Analyser comparativement ce nouveau tracé.

## Synthèse

**Question 11** En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.





.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_01\_Scale

### Éléments de correction

$$1. \text{ FTBO}(p) = \frac{K_p}{p(1 + \tau_m p - K_D)} \text{ et } \text{FTBF}(p) = A_i(p) \frac{K_p}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_p}.$$

$$2. K_D < 1.$$

3.

$$4. \text{ Stab}(p) = \frac{(pK_D - K_p)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_p)}.$$

$$5. \lim_{t \rightarrow \infty} \text{com}(t) = -1.$$

$$6. \frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)} \quad \text{et} \quad \text{Pert}(p) = \frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p) + (K_p - pK_D) A K_m}.$$

$$7. \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, 1^\circ.$$

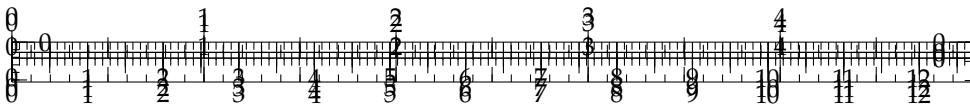
8.  $K_{\text{stab}} = 14$

9. .

10. .

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_02\_Stabilisateur





## TD 2

# Stabilisateur actif d'image – Corrigé

Mines Ponts 2018 – PSI

C1-01

C2-03

### Mise en situation

#### Objectif

Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

### Travail demandé

**Question 1** Avec  $K_m A = 1$ , calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

#### Correction

**Attention au signe du comparateur de la boucle imbriquée !**

On définit la FTBO par  $\text{FTBO}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{\text{Mes}\varphi(p)}$  avec  $\varepsilon(p)$  la sortie du premier comparateur.

On a d'une part  $G(p) = \frac{\frac{K_m A}{1 + \tau_m p}}{1 - \frac{K_m A K_D}{1 + \tau_m p}} = \frac{K_m A}{1 + \tau_m p - K_m A K_D}$ . On a alors  $\text{FTBO}(p) = \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$ .

Si on définit la FTBF par  $\text{FTBF}(p) = \frac{\varphi(p)}{\varphi^*(p)}$ , on a  $\text{FTBF}(p) = A_i(p) \frac{\frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}{1 + \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}$

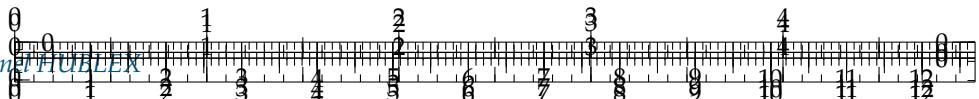
$= A_i(p) \frac{K_m A K_p}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D) + K_m A K_p}$ .

Au final,  $\text{FTBO}(p) = \frac{K_p}{p(1 + \tau_m p - K_D)}$  et  $\text{FTBF}(p) = A_i(p) \frac{K_p}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_p}$ .

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas :  $A_i(p) = 1$ .

**Question 2** Quelle est la valeur maximale de  $K_D$  pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).





### Correction

Pour que le système soit stable, tous les coefficients du dénominateur  $D(p)$  de la FTBF doivent être de même signe (ainsi toutes les racines sont à partie réelle négative). On a  $D(p) = p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P = \tau_m p^2 p + (1 - K_D)p + K_P$  et donc nécessairement,  $1 - K_D > 0$  et  $K_D < 1$ .

**Question 3** Lorsque  $A_i(p) = 1$ , le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

### Correction

$$\text{On a : FTBF}(p) = \frac{K_P}{p + \tau_m p^2 - K_D p + K_P} = \frac{K_P}{\frac{\tau_m}{K_P} p^2 + p \frac{1 - K_D}{K_P} + 1}$$

$$\text{On a alors } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}} \text{ et } \xi = \frac{1 - K_D}{K_P} \frac{\sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}}}{2} = \frac{1 - K_D}{2\sqrt{K_P \tau_m}} = \frac{0,5}{2\sqrt{2}} < 1. \text{ Il y a donc du dépassement. L'exigence n'est pas vérifiée.}$$

**Question 4** Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert  $\text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)}$  qui lie la commande à la perturbation.

### Correction

$$\text{On a } \varepsilon_2(p) = -\text{Mes}(\varphi(p)) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p) \frac{1}{p}. \text{ Par ailleurs, } \varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1 + \tau_m p}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon_3(p) = K_P \varepsilon_2(p) + K_D \varepsilon_1(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p) \left( K_D - \frac{K_P}{p} \right) \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}}.$$

$$\text{On a donc } \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}} = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1 + \tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \left( \frac{p}{pK_D - K_P} - \frac{AK_m}{1 + \tau_m p} \right) =$$

$$\text{Pe}(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \frac{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)} = \text{Pe}(p).$$

$$\text{On a donc } \text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)} = \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}.$$

**Question 5** Avec le modèle 2 et une entrée  $\text{Pe}(p)$  échelon unitaire, déterminer la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la commande :  $\text{com}(t)$ . Quel sens physique donner à ce résultat ?

### Correction

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{com}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \text{Com}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \text{Stab}(p) \text{Pe}(p)$$

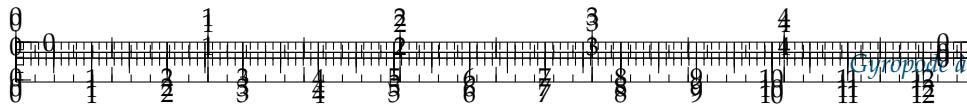
$$= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-K_P}{AK_m K_P} = -1 \text{ si } AK_m = 1.$$

Ainsi, pour une perturbation angulaire dans un autre sens, le système commande les moteurs avec une consigne dans le sens opposé.

**Question 6** Avec le modèle 2 déterminer la FTBO  $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$  de ce schéma puis calculer

la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie  $\text{Pert}(p) = \frac{\varphi(p)}{\text{Pe}(p)}$ .





### Correction

On a  $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}$  (c'est la même que pour le premier modèle).

On a vu que  $\varepsilon_2(p) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p)\frac{1}{p}$ ,  $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}$  et  $\varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_P}{p}\right)$ .

En conséquences,  $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p} \iff \varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) +$

$$\varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_P}{p}\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_1(p)\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right) = \text{Pe}(p) \Leftrightarrow p\varphi(p)\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right) = \text{Pe}(p)$$

$$\text{et donc } \text{Pert}(p) = \frac{1}{p\left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D\right)\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right)} = \frac{1}{p\left(1 + \frac{K_P - pK_D}{p}\frac{A K_m}{1 + \tau_m p}\right)} =$$

$$\frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m}.$$

**Question 7** Déterminer la valeur lorsque  $t$  tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?

### Correction

$$\begin{aligned} \text{On a } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p\Phi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p\text{Pert}(p)\text{Pe}(p) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{K_P A K_m} = \frac{1}{K_P} = 0,1^\circ. \end{aligned}$$

Le système n'est pas précis s'il y a une perturbation échelon.

**Question 8** On désire une marge de gain de  $M_G \geq 5 \text{ dB}$  et une marge de phase  $M\varphi \geq 20^\circ$  (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de  $K_P$  en utilisant les données ci-dessous.

### Correction

Pour une marge de phase de  $20^\circ$ , la phase doit être de  $-160^\circ$  lorsque le gain est nul. Or en  $-160^\circ$  le gain est de  $-3 \text{ dB}$ . Pour respecter la marge de phase, il faut donc déterminer  $K_P$  tel que  $20 \log K_P = 3$  soit  $K_P < 10^{\frac{3}{20}} \approx 1,41$ .

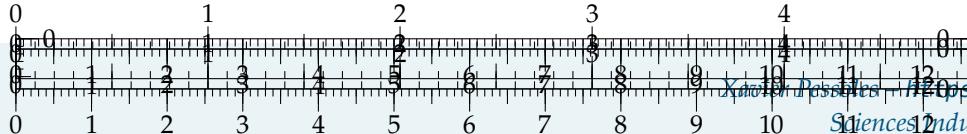
Le système étant d'ordre 2, la marge de gain sera forcément infinie.

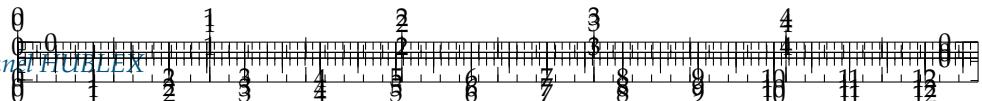
**Question 9** Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de  $\text{Com}(t)$  relativement à  $\text{Pe}(t)$  en utilisant le résultat de la question ??.

### Correction

La commande s'oppose à la perturbation (comme évoqué question ??). Le stabilisateur a au final un mouvement sinusoïdal dont les valeurs maximales et minimales sont voisines de  $0,1^\circ$  et  $-0,1^\circ$ .

**Question 10** Analyser comparativement ce nouveau tracé.





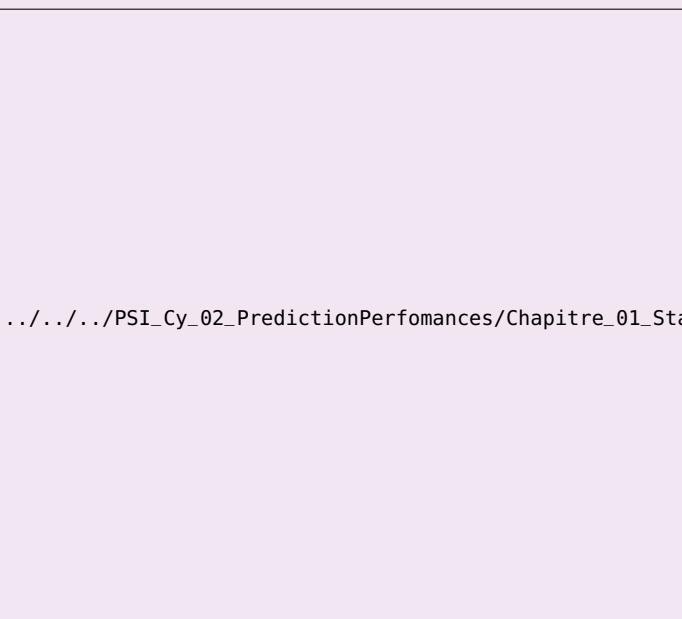
### Correction

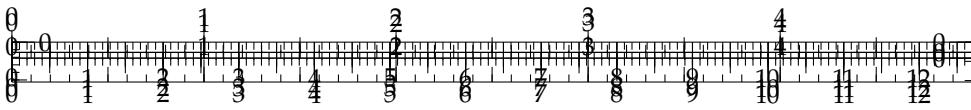
Dans ce cas, les mouvements du porteur sont inférieurs à 0,1 degrés (en valeur absolue).

### Synthèse

**Question 11** En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.

### Correction





## TD 3

# Direction automobile découplée – Sujet

Banque PT – SIA 2017.

**Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!**

### Mise en situation

Le principe de la direction découpée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de type télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisée par l'organisation qui suit (??).

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_03\_DirectionDecoupee/images

esclave

Une direction automobile découpée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (??) précise les principales exigences.

### Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure figure 1.8.

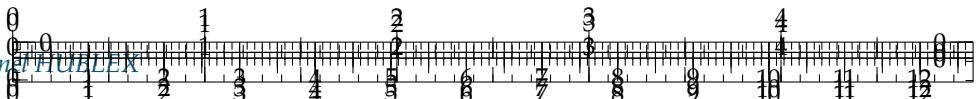
Notations :

- arbre-volant  $v$  : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- $G_v$  : centre d'inertie de l'arbre-volant  $v$ ;
- $I_v(G_v)$  : opérateur d'inertie de  $v$  au point  $G_v$ ;
- $J_v$  : le moment d'inertie de  $v$  autour de l'axe  $(G_v, \vec{x}_v)$ ;
- $f_v$  : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$  : l'angle de rotation de l'arbre-volant  $v$  par rapport au châssis 1 (noté  $\theta_v(p)$  dans le domaine de Laplace);

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_03\_DirectionDecoupee/images

**FIGURE 3.8** – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique





- ▶  $\omega_v(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre-volant  $v$  par rapport au châssis 1 (noté  $\Omega_v(p)$  dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- ▶ le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen;
- ▶  $G_v$  est situé sur l'axe de la liaison pivot;
- ▶ la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux  $C_f \vec{x}_v$ ;
- ▶ les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant  $v$  se réduisent respectivement aux couples  $C_c \vec{x}_v$  et  $C_{mv} \vec{x}_v$ .

## Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la ?? où le retour est unitaire. On note  $\varepsilon_{\theta_v}(t)$  l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et  $\varepsilon_{cv}(t)$  le couple résultant des couples  $C_c$  et  $C_{mv}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_01.pdf

**FIGURE 3.9 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage**

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes :  $g_v = 5 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ;  $\tau_v = 0,1 \text{ s}$  et  $K_{mv} = 0,4 \text{ N m V}^{-1}$ .

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain  $K_{mv}$ .

## Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que  $K_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$  avec  $\tau_i = \alpha \tau_v$ .

**Question 1** Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité ?

**Question 2** Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte  $FTBO_{v1}(p)$  du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que  $\theta_v(p) = FTBO_{v1}(p)\varepsilon_{\theta_v}(p)$  sous la forme  $FTBO_{v1}(p) = K_{BOv1} \frac{1}{p^2} H(p)$  pour laquelle on précisera les expressions de  $K_{BOv1}$  et de  $H(p)$  avec  $H(p)$  de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si  $\alpha$  doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de  $\alpha$ ).

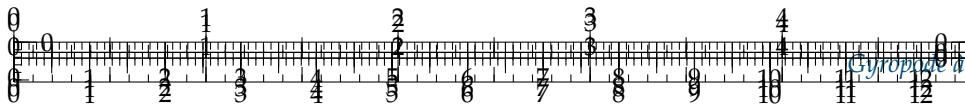
On commence par choisir  $\tau_i$  en prenant  $\alpha = 10$  et on cherche à optimiser  $K_i$ .

On donne  $\varepsilon_{\theta_v}(p) = \frac{\theta_{v\_ref}(p)}{1 + FTBO_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p(1 + \tau_v p)} \cdot \frac{C_C(p)}{1 + FTBO_{v1}(p)}$ .

**Question 3** Quelle doit être la valeur minimale de  $K_i$  pour que les critères de précision soient satisfaits ?

On donne figure 1.7 le tracé du lieu de transfert de la  $FTBO_{v1}(p)$  dans le plan de Bode, pour  $K_i = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$ .





**Question 4** Tracer sur le lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v1}(p)$ , les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

**Question 5** Donner, par lecture du lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v1}(p)$ , la valeur de  $K_i$  qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

On donne (??) l'évolution de cette pulsation  $\omega_\ell$  en fonction de  $\alpha$  et un abaque qui représente la valeur maximale  $\varphi_m$  de  $\varphi(\omega)$  en fonction de  $\alpha$ .

**Question 6** Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte,  $\omega_0$ , fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de  $\alpha$  et/ou  $K_i$ ? On pourra s'aider des abaques fournis (??) pour justifier la réponse.

On donne (??), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1<sup>er</sup> dépassement en % de la valeur finale, en fonction de  $K_i$  et pour  $\alpha = 10$ .

**Question 7** Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi  $\alpha = 10$ .

## Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_03\_DirectionDecouplee/images/f

**Question 8** Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

**Question 9** Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée  $T_{\text{vrt}}(p)$  définie par  $\Omega_v(p) = T_{\text{vrt}}(p)\epsilon_{cv}(p)$  en fonction de  $T_v(p)$  et  $K_{\text{rt}}$ . Mettre alors  $T_{\text{vrt}}(p)$  sous la forme  $T_{\text{vrt}}(p) = T_v(p)\beta \frac{1 + \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$  pour laquelle, on précisera l'expression de  $\beta$  en fonction de  $K_{\text{rt}}$  et du gain statique  $g_v$ .

**Question 10** Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte  $\text{FTBO}_{v2}(p)$ , telle que,  $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v2}(p)\epsilon_{\theta v}(p)$ , peut ainsi se mettre sous la forme  $\text{FTBO}_{v2}(p) = K_{\text{BOv2}} \frac{1 + \alpha \tau_v p}{p^2 + \beta \tau_v p}$  pour laquelle on donnera l'expression de  $K_{\text{BOv2}}$  en fonction de  $K_{\text{mv}}$ ,  $g_v$ ,  $\tau_v$ ,  $K_i$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

On donne sur la ?? le tracé du lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v2}(p)$  dans le plan de Bode, pour  $K_i = 1,2 \text{ V rad}^{-1}$  (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec  $\beta = 1/6$  (non justifié) et pour  $\alpha = 10$  (valeur choisie précédemment).

**Question 11** Justifier que  $\beta$  doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

On donne (??), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement en réponse



On note :

- ▶  $\varphi(\omega)$  la phase de  $H(p)$ , soit  $\text{Arg}[H(j\omega)]$ ;
- ▶  $\omega_\ell$  la plus grande pulsation qui vérifie  $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45^\circ$ .

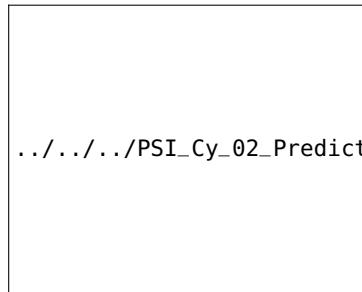


FIGURE 3.10 – ABAQUE DE RÉGLAGE DE  $H(p)$  EN FRÉQUENTIEL

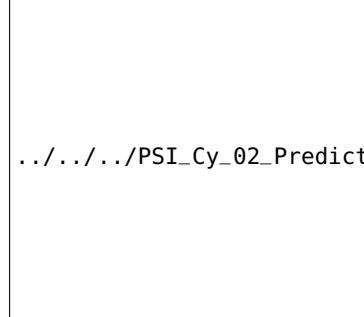
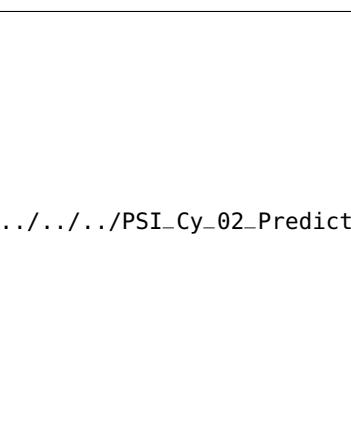


FIGURE 3.11 – ABAQUE DE RÉGLAGE EN TEMPOREL DE L'UNITÉ DE PILOTAGE CORRIGÉE

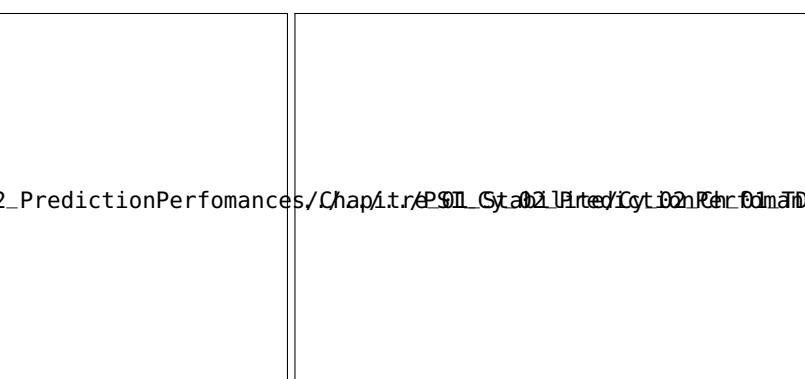
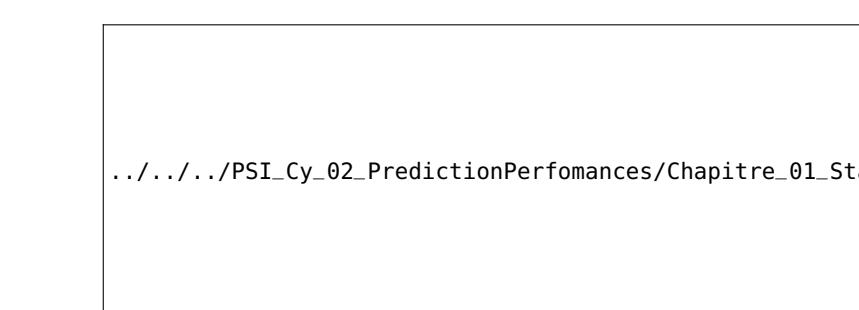
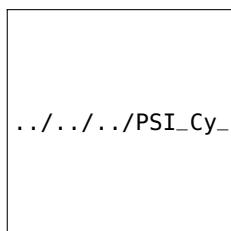


**FIGURE 3.13 – Abaque de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée avec retour tachymétrique**

#### Éléments de correction

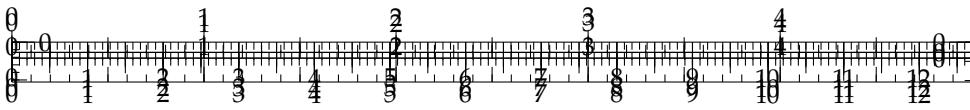
1. .
2.  $K_{BOv1} = \frac{K_i K_{mv} g v}{\alpha \tau_v}$  et  $H(p) = \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \tau_v p}$ ,  $\alpha > 1$ .
3.  $K_i \geq 10\alpha \frac{\tau_v}{K_{mv}}$  et  $K_i \geq 25 \text{ V rad}^{-1}$ .
4. .
5.  $K_i = 5 \text{ V rad}^{-1}$ .
6. .
7. .
8. .
9.  $\beta = \frac{1}{1 + K_{rt} g v}$
10.  $K_{BOv2} = \frac{K_i K_{mv} \beta g v}{\alpha \tau_v}$ .
11. .
12.  $M_\varphi = 58^\circ$ .
13.  $K_i = 120 \text{ V rad}^{-1}$ .
14. .
15. .

**FIGURE 3.14 – Exigences**



**FIGURE 3.15 – Lieux de transfert de FTBOv1(p) et FTBOv2(p)**





## TD 3

# Direction automobile découplée – Corrigé

Banque PT – SIA 2017.

**Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!**

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerf

### Mise en situation

Le principe de la direction découpée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de type télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisée par l'organisation qui suit (??).

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfomances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_03\_DirectionDecoupee/images

esclave

Une direction automobile découpée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (??) précise les principales exigences.

### Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure figure 1.8.

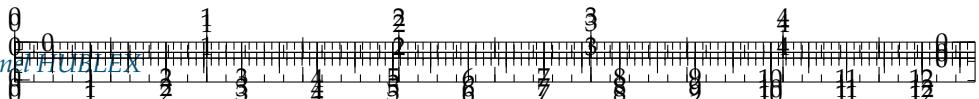
Notations :

- arbre-volant  $v$  : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- $G_v$  : centre d'inertie de l'arbre-volant  $v$ ;
- $I_v(G_v)$  : opérateur d'inertie de  $v$  au point  $G_v$ ;
- $J_v$  : le moment d'inertie de  $v$  autour de l'axe  $(G_v, \vec{x}_v)$ ;
- $f_v$  : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$  : l'angle de rotation de l'arbre-volant  $v$  par rapport au châssis 1 (noté  $\theta_v(p)$  dans le domaine de Laplace);

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo

**FIGURE 3.17** – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique





- $\omega_v(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre-volant  $v$  par rapport au châssis 1 (noté  $\Omega_v(p)$  dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen;
- $G_v$  est situé sur l'axe de la liaison pivot;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux  $C_f \vec{x}_v$ ;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant  $v$  se réduisent respectivement aux couples  $C_c \vec{x}_v$  et  $C_{mv} \vec{x}_v$ .

## Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la ?? où le retour est unitaire. On note  $\varepsilon_{\theta_v}(t)$  l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et  $\varepsilon_{cv}(t)$  le couple résultant des couples  $C_c$  et  $C_{mv}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_01.pdf

**FIGURE 3.18** – Schéma-blocs de l'unité de pilotage

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes :  $g_v = 5 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ;  $\tau_v = 0,1 \text{ s}$  et  $K_{mv} = 0,4 \text{ N m V}^{-1}$ .

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain  $K_{mv}$ .

### Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que  $K_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$  avec  $\tau_i = \alpha \tau_v$ .

**Question 1** Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité ?

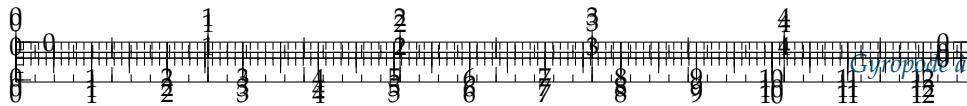
#### Correction

**Question 2** Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte  $FTBO_{v1}(p)$  du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que  $\theta_v(p) = FTBO_{v1}(p)\varepsilon_{\theta_v}(p)$  sous la forme  $FTBO_{v1}(p) = K_{BOv1} \frac{1}{p^2} H(p)$  pour laquelle on précisera les expressions de  $K_{BOv1}$  et de  $H(p)$  avec  $H(p)$  de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si  $\alpha$  doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de  $\alpha$ ).

#### Correction

On commence par choisir  $\tau_i$  en prenant  $\alpha = 10$  et on cherche à optimiser  $K_i$ .





On donne  $\varepsilon_{\theta v}(p) = \frac{\theta_{v\_ref}(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p(1 + \tau_v p)} \cdot \frac{C_C(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)}$ .

**Question 3** Quelle doit être la valeur minimale de  $K_i$  pour que les critères de précision soient satisfaits ?

#### Correction

On donne figure 1.7 le tracé du lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v1}(p)$  dans le plan de Bode, pour  $K_i = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$ .

**Question 4** Tracer sur le lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v1}(p)$ , les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

#### Correction

**Question 5** Donner, par lecture du lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v1}(p)$ , la valeur de  $K_i$  qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

#### Correction

On donne (??) l'évolution de cette pulsation  $\omega_\ell$  en fonction de  $\alpha$  et un abaque qui représente la valeur maximale  $\varphi_m$  de  $\varphi(\omega)$  en fonction de  $\alpha$ .

On note :

- $\varphi(\omega)$  la phase de  $H(p)$ , soit  $\text{Arg}[H(j\omega)]$ ;
- $\omega_\ell$  la plus grande pulsation qui vérifie  $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45^\circ$ .

**Question 6** Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte,  $\omega_0$ , fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de  $\alpha$  et/ou  $K_i$ ? On pourra s'aider des abaques fournis (??) pour justifier la réponse.

#### Correction

On donne (??), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1<sup>er</sup> dépassement en % de la valeur finale, en fonction de  $K_i$  et pour  $\alpha = 10$ .

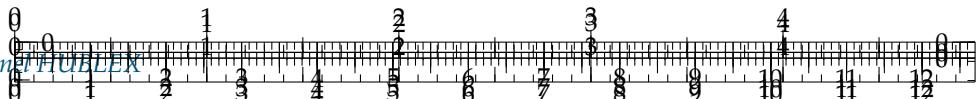
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo

FIGURE 3.19 – ABAQUES DE RÉGLAGE DE  $H(p)$  EN FRÉQUENTIEL

**Question 7** Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi  $\alpha = 10$ .

#### Correction





## Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_03\_DirectionDecoupee/images/abaque\_tachymetrique.png

**FIGURE 3.21** – Schéma-blocs de l'unité de pilotage avec retour tachymétrique

**Question 8** Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

### Correction

**Question 9** Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée  $T_{\text{vrt}}(p)$  définie par  $\Omega_v(p) = T_{\text{vrt}}(p)\epsilon_{cv}(p)$  en fonction de  $T_v(p)$  et  $K_{\text{rt}}$ . Mettre alors  $T_{\text{vrt}}(p)$  sous la forme  $T_{\text{vrt}}(p) = T_v(p)\beta \frac{1 + \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$  pour laquelle, on précisera l'expression de  $\beta$  en fonction de  $K_{\text{rt}}$  et du gain statique  $g_v$ .

### Correction

**Question 10** Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte  $\text{FTBO}_{v2}(p)$ , telle que,  $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v2}(p)\epsilon_{\theta v}(p)$ , peut ainsi se mettre sous la forme  $\text{FTBO}_{v2}(p) = K_{\text{BOv2}} \frac{1 + \alpha \tau_v p}{p^2 + \beta \tau_v p}$  pour laquelle on donnera l'expression de  $K_{\text{BOv2}}$  en fonction de  $K_{\text{mv}}$ ,  $g_v$ ,  $\tau_v$ ,  $K_i$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

### Correction

On donne sur la ?? le tracé du lieu de transfert de la  $\text{FTBO}_{v2}(p)$  dans le plan de Bode, pour  $K_i = 1,2 \text{ V rad}^{-1}$  (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec  $\beta = 1/6$  (non justifié) et pour  $\alpha = 10$  (valeur choisie précédemment).

**Question 11** Justifier que  $\beta$  doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

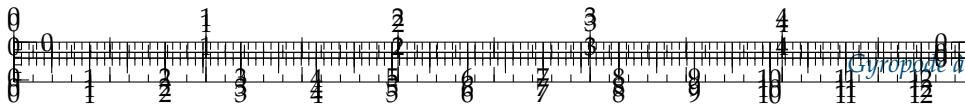
### Correction

On donne (??), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement en réponse à un échelon d'angle  $\theta_{v\_ref}$ , en fonction de la marge de phase du système, réglé avec  $\beta = 1/6$ .

**Question 12** Donner par lecture des abaques (??), la valeur de la marge de phase la plus grande, permettant de satisfaire les deux critères de temps de réponse et de dépassement.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_03\_DirectionDecoupee/images/abaque\_tachymetrique.png





PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfomances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_TD\_03\_DirectionDecoupee/

de  $FTBO_{v1}(p)$  et  $FTBO_{v2}(p)$

### Correction

**Question 13** Déterminer par lecture du lieu de transfert dans le plan de Bode de  $FTBO_{v2}(p)$ , tracé dans les conditions de la question 11, la valeur de  $K_i$  permettant d'obtenir la marge de phase trouvée à la question précédente.

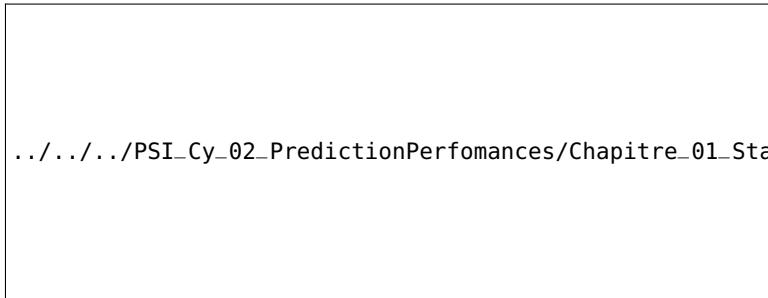
### Correction

**Question 14** Faire une synthèse argumentée de la démarche proposée dans cette partie, pour optimiser le comportement de l'unité de pilotage. Conclure, en reprenant chaque critère de l'exigence Id 1-3.3, sur la satisfaction du cahier des charges

### Correction

**Question 15** Avec le réglage établi par le modèle, quel phénomène pourrait endommager certains composants du système réel ? Quelle disposition technologique permettrait d'éviter ce phénomène ? Quelles en seraient les conséquences sur les performances du système ?

### Correction

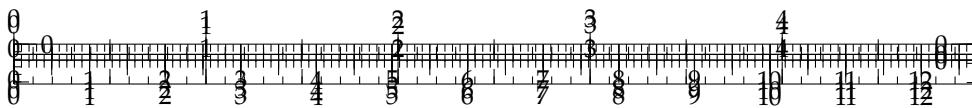


### Éléments de correction

1. .
2.  $K_{BOv1} = \frac{K_i K_{mv} g v}{\alpha \tau_v}$  et  $H(p) = \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \tau_v p}$ ,  $\alpha > 1$ .
3.  $K_i \geq 10\alpha \frac{\tau_v}{K_{mv}}$  et  $K_i \geq 25 \text{ V rad}^{-1}$ .
4. .
5.  $K_i = 5 \text{ V rad}^{-1}$ .
6. .
7. .
8. .
9.  $\beta = \frac{1}{1 + K_{rt} g v}$
10.  $K_{BOv2} = \frac{K_i K_{mv} \beta g v}{\alpha \tau_v}$ .
11. .
12.  $M_\phi = 58^\circ$ .
13.  $K_i = 120 \text{ V rad}^{-1}$ .
14. .
15. .







## Colle 1

### Stabilité – Sujet

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système :  $G(p) = \frac{2}{(10p + 1)^3}$ .

**Question 1** Tracer le schéma-blocs.

**Question 2** Tracer les diagrammes de bode de  $G(p)$ .

**Question 3** Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ .

**Question 4** Calculer la valeur de  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

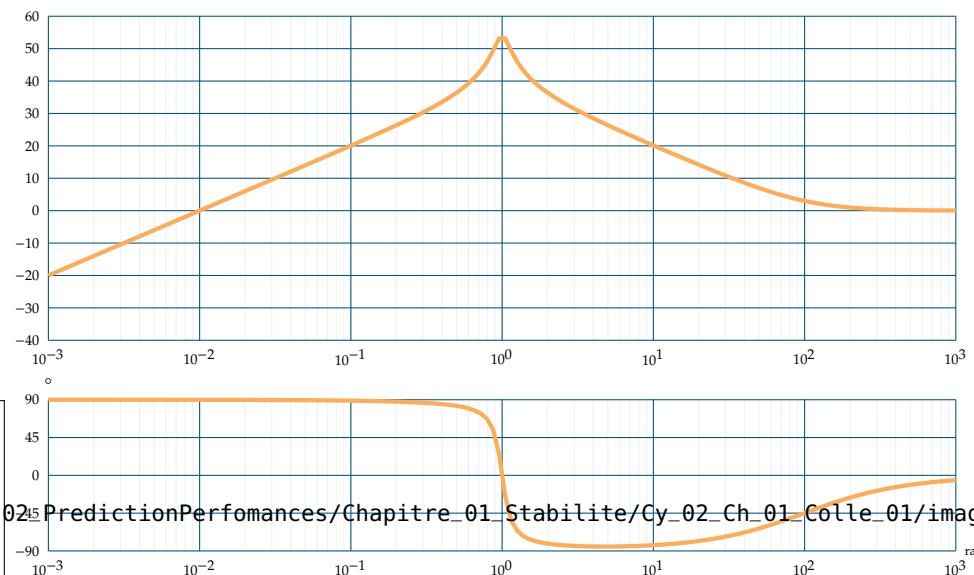
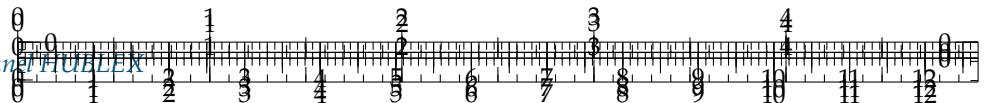
**Question 5** Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

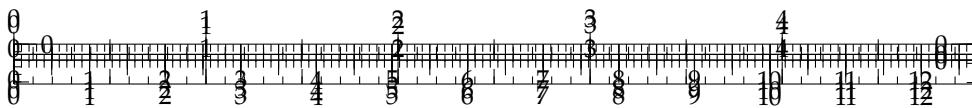
On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert  $C(p) = \frac{Ki}{p}$ .

**Question 6** Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

**Question 7** Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.







## Colle 1

### Stabilité – Corrigé

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système :  $G(p) = \frac{2}{(10p + 1)^3}$ .

**Question 1** Tracer le schéma-blocs.

**Question 2** Tracer les diagrammes de bode de  $G(p)$ .

**Question 3** Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ .

**Question 4** Calculer la valeur de  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

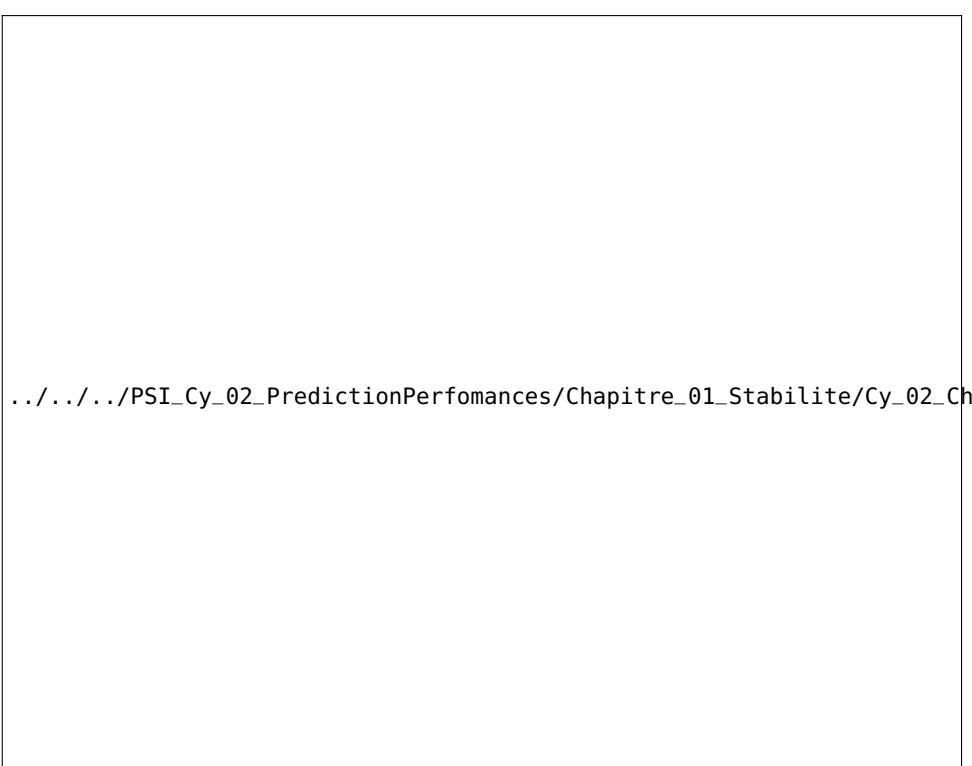
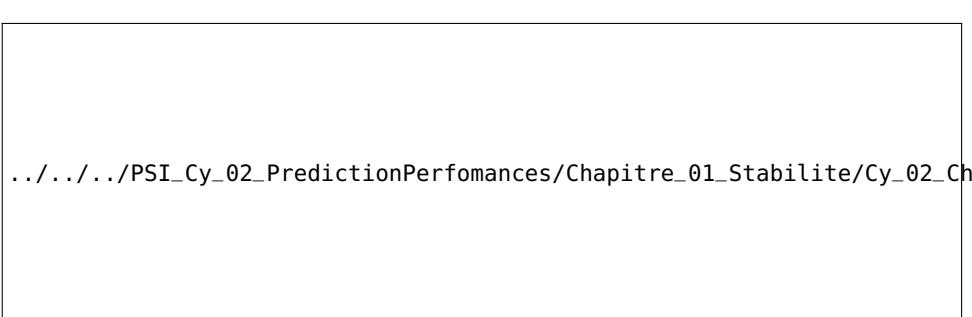
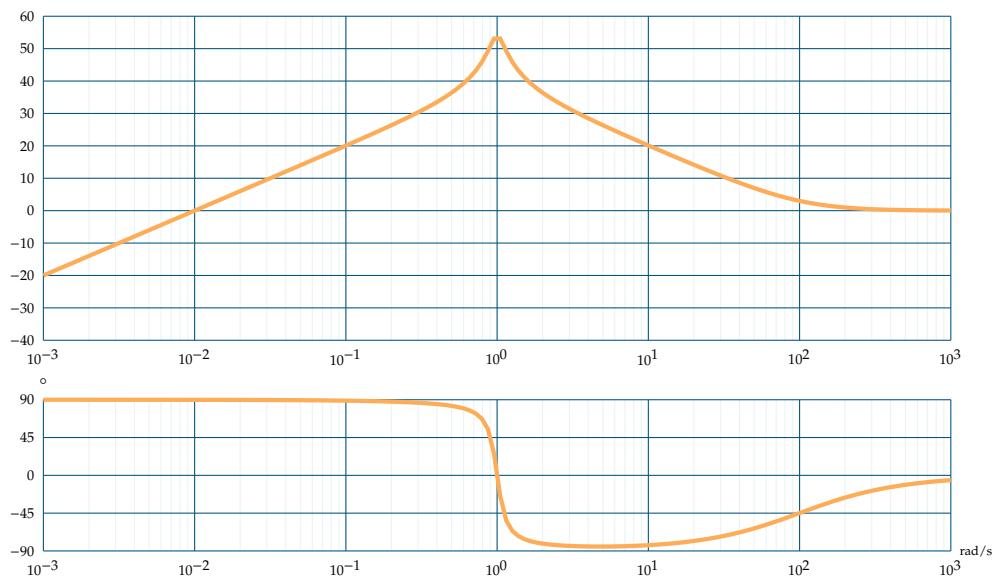
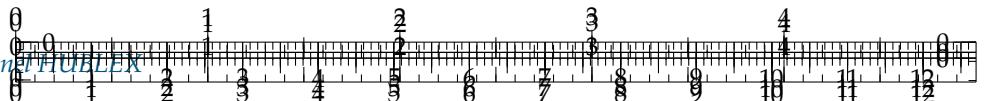
**Question 5** Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

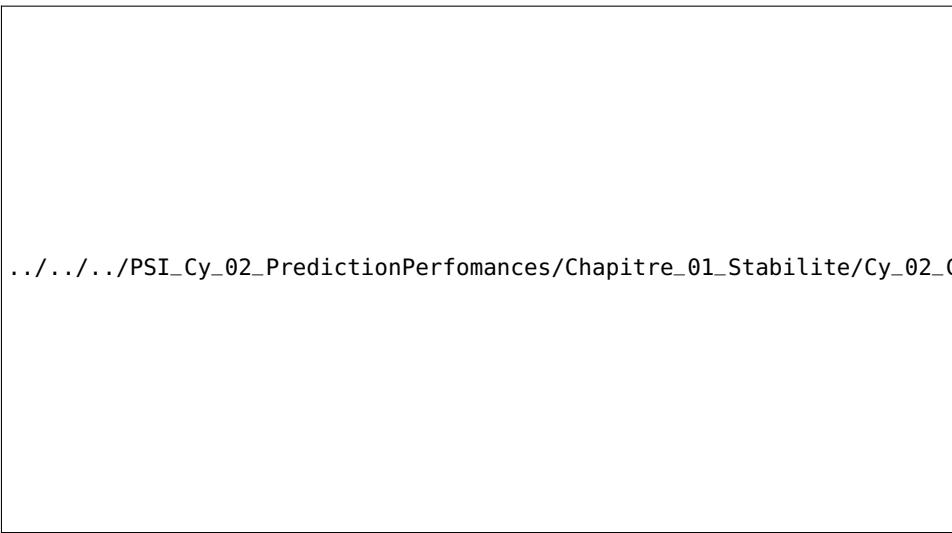
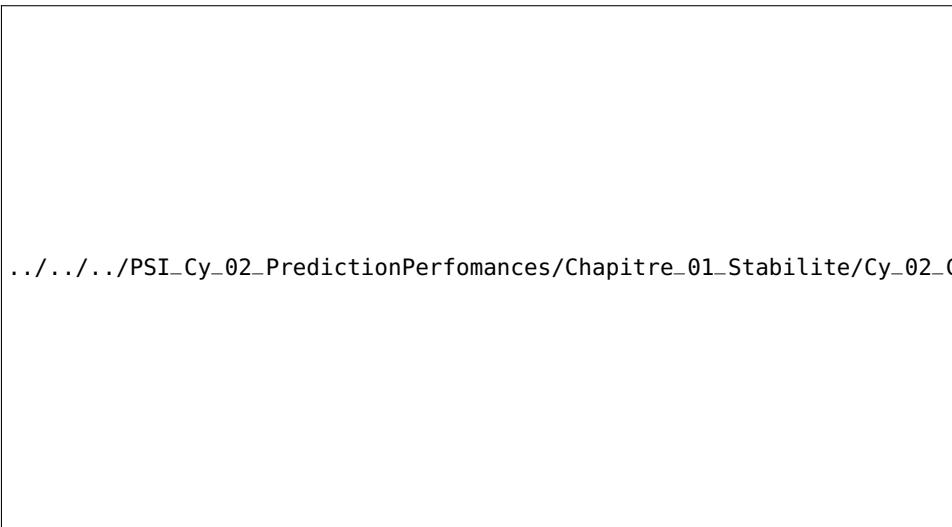
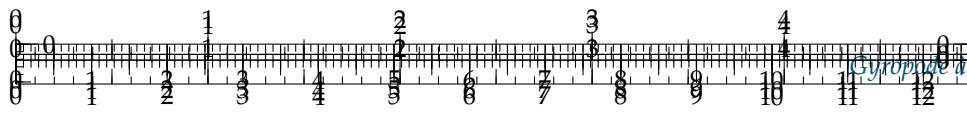
On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert  $C(p) = \frac{Ki}{p}$ .

**Question 6** Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

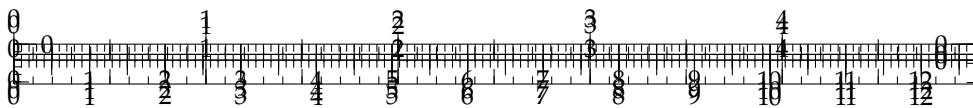
**Question 7** Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.











## Colle 2

### Stabilité – Sujet

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{10}{(p+1)(p+4)}.$$

**Question 1** Tracer le schéma-blocs.

**Question 2** Tracer les diagrammes de bode de  $G(p)$ .

**Question 3** Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ .

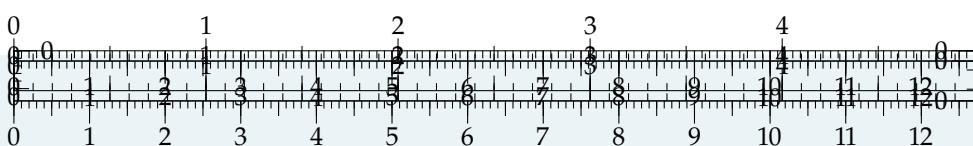
**Question 4** Calculer la valeur de  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

**Question 5** Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

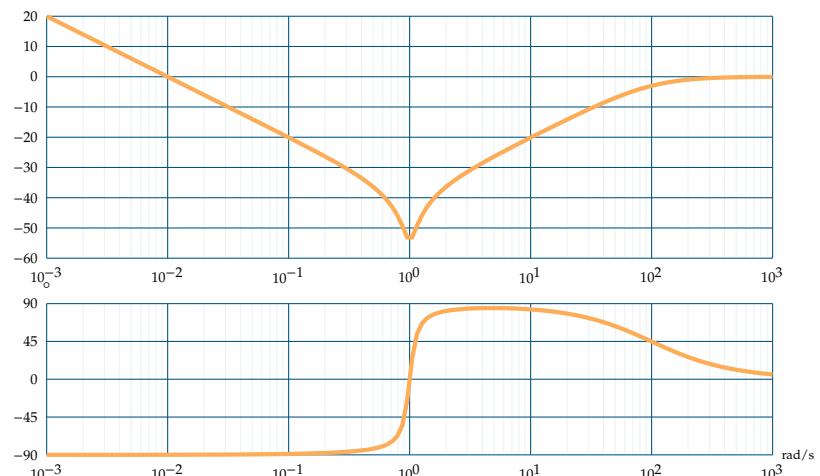
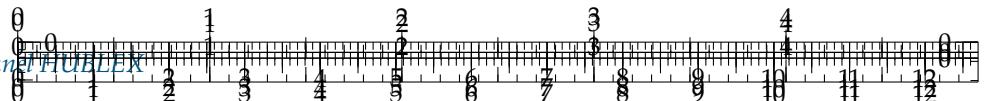
On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert  $C(p) = \frac{Ki}{p}$ .

**Question 6** Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

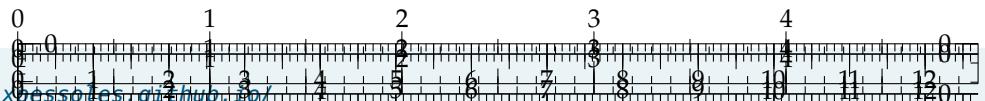
**Question 7** Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.

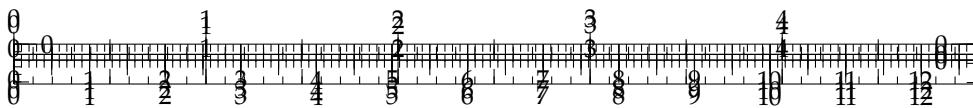


--



.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Colle\_02/images/Cy\_02\_Ch\_01\_01





## Colle 2

### Stabilité – Corrigé

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{10}{(p+1)(p+4)}.$$

**Question 1** Tracer le schéma-blocs.

**Question 2** Tracer les diagrammes de bode de  $G(p)$ .

**Question 3** Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ .

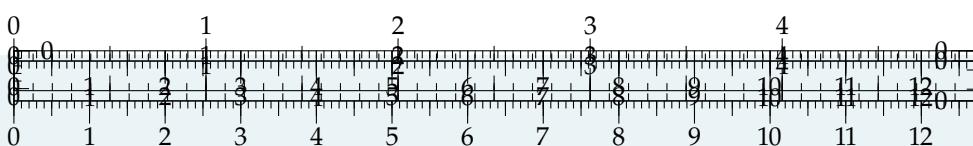
**Question 4** Calculer la valeur de  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

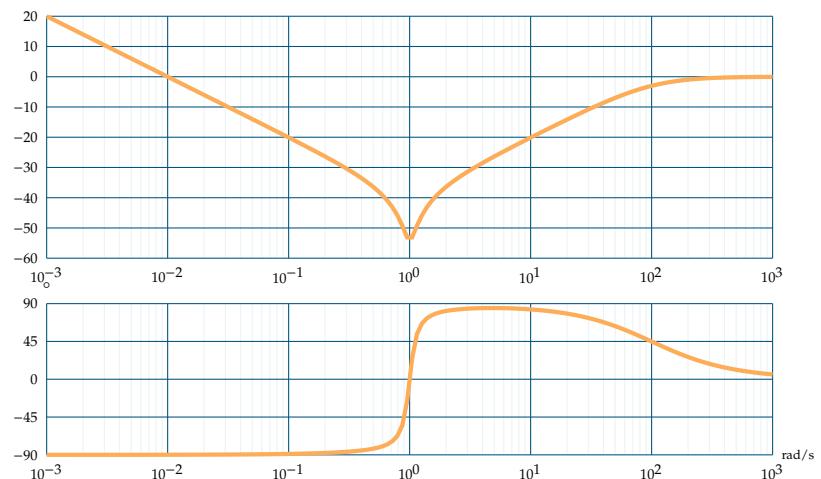
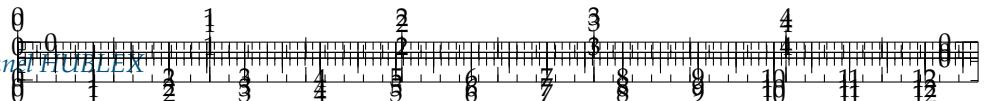
**Question 5** Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert  $C(p) = \frac{Ki}{p}$ .

**Question 6** Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

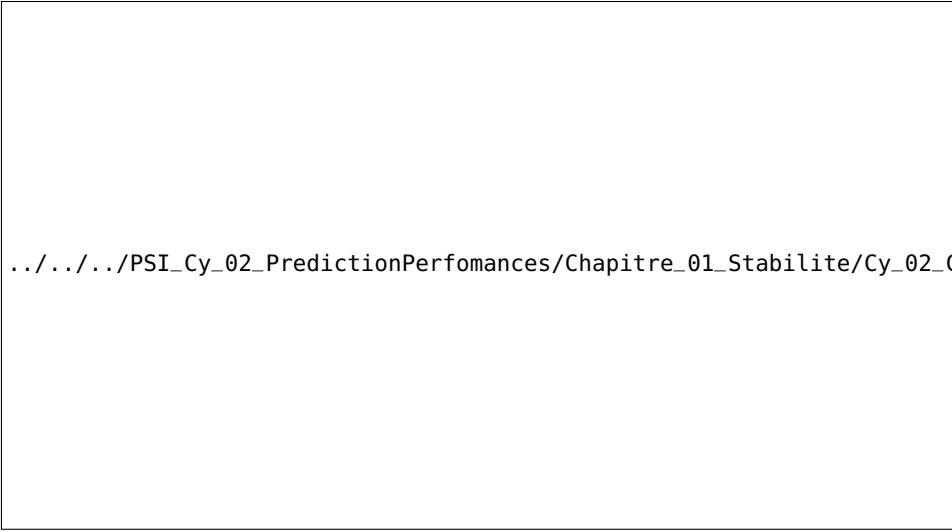
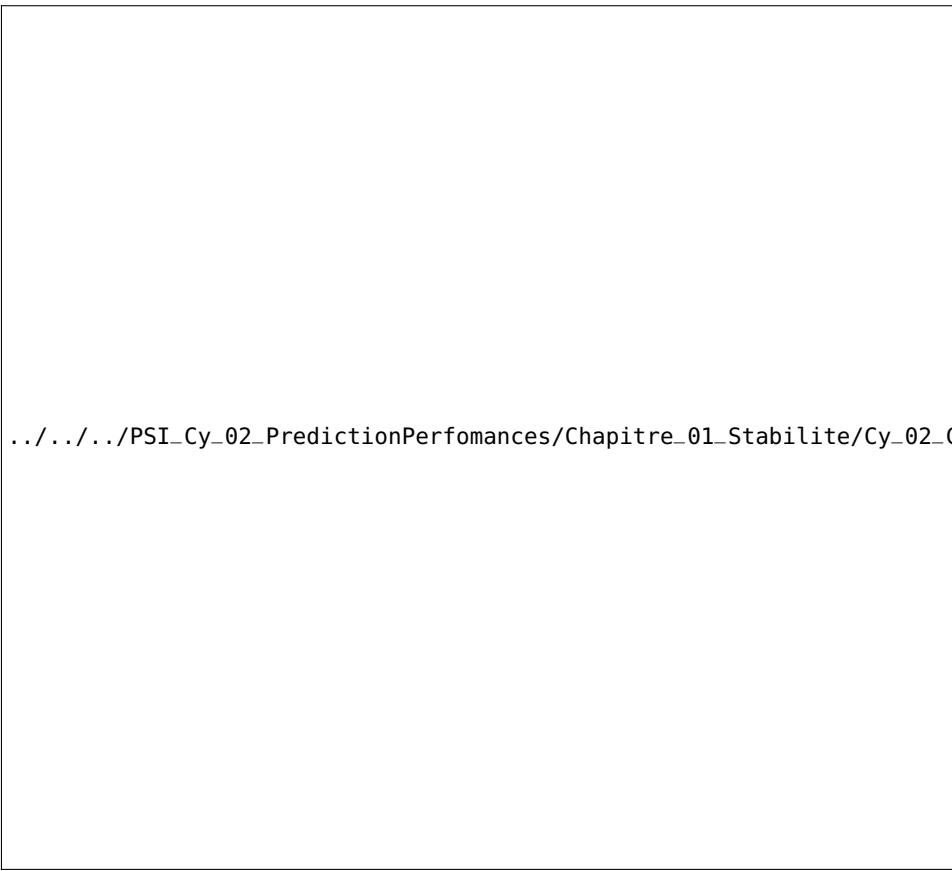
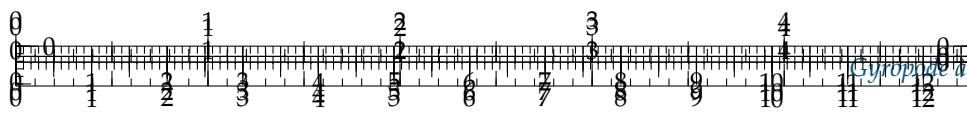
**Question 7** Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.

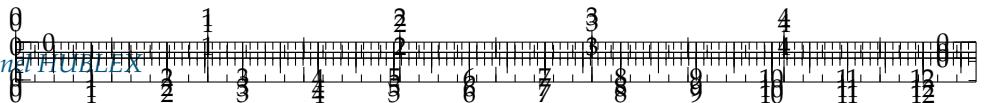




.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Co

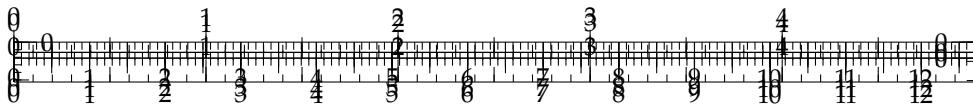






.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Col





## Colle 3

### Performances – Sujet

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système :  $G(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$ .

**Question 1** Tracer les diagrammes de bode de  $G(p)$ .

**Question 2** Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ . La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert  $B(p) = 3$ .

**Question 3** Tracer le schéma-blocs.

**Question 4** Calculer la valeur de  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

**Question 5** Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

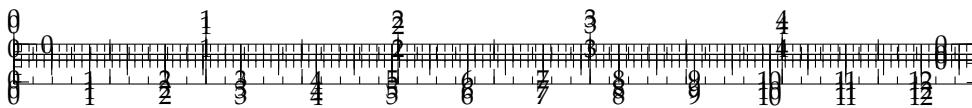
On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert  $C(p) = Ki/p$ .

**Question 6** Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_Pr







## Colle 3

### Performances – Corrigé

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système :  $G(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$ .

**Question 1** Tracer les diagrammes de bode de  $G(p)$ .

**Correction**

**Question 2** Tracer la marge de gain et la marge de phase.

**Correction**

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ . La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert  $B(p) = 3$ .

**Question 3** Tracer le schéma-blocs.

**Correction**

**Question 4** Calculer la valeur de  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ .

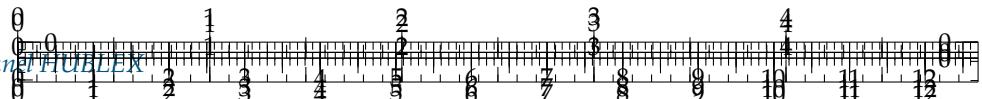
**Correction**

**Question 5** Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

**Correction**

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert  $C(p) = Ki/p$ .





**Question 6** Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

**Correction**

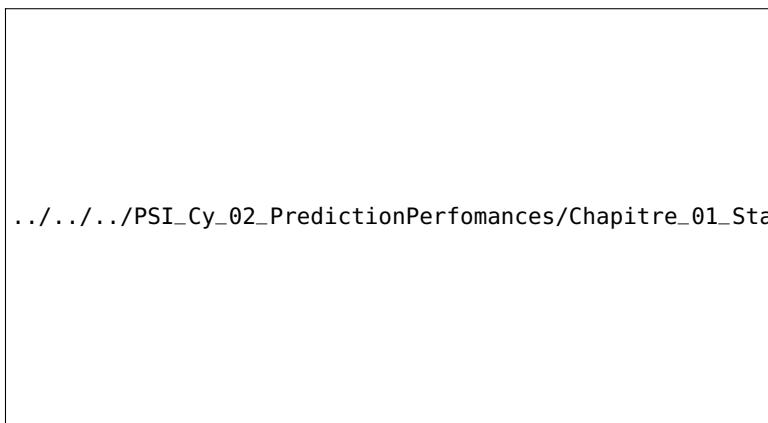
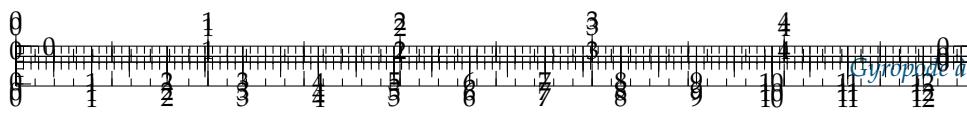
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch...

$$\varepsilon = 0,123$$

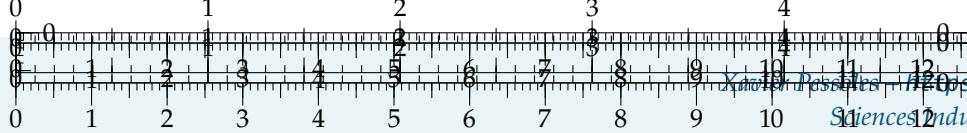
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch...

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch...

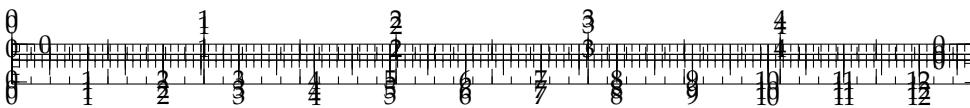




.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfomances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Colle\_03/images/cor\_04.png







## Colle 4

### Imagerie médicale – Sujet

F. Mathurin.

L'étude porte sur un système permettant de réaliser des imageries médicales de vaisseaux sanguins sur un patient. Ce système, conçu par General Electric Medical System, envoie des rayons X dans le corps du patient et mesure leur rayonnement. En fonction des informations reçues, une image de synthèse en 3 dimensions est réalisée, permettant de voir les éventuels problèmes médicaux à venir.

Ce système est constitué des éléments suivants : le bâti 0, une épaule 1 qui peut être mis en mouvement par rapport au bâti 0, un bras d'arceau 2 qui peut s'orienter par rapport à l'épaule 1 et un arceau 3 qui se déplace par rapport à bras d'arceau 2. Le patient est situé sur une table mobile. Le réglage en hauteur du patient sur la table mobile est possible pour son confort mais n'est pas utilisé au cours d'une analyse. Seuls les degrés de liberté  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont utilisés pendant l'analyse. L'émetteur de rayons, situé sur l'arceau, focalise la vision interne du patient en un point appelé iso centre.

Sur l'image de gauche, l'arceau 3 s'oriente par rapport au bras d'arceau 2 et sur l'image de droite le bras d'arceau 2 se déplace par rapport à l'épaule 1. On donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel du système de positionnement dans la phase de vie correspondant à une mesure d'imagerie :

[.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerfo](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerfo)

[.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerfo](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerfo)

[.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerfo](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerfo)

[.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerformances/Chapitre\\_01\\_Stabilite/Cy\\_02\\_Ch\\_01\\_Colle\\_04\\_IRM/images/fig\\_07.png](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerformances/Chapitre_01_Stabilite/Cy_02_Ch_01_Colle_04_IRM/images/fig_07.png)

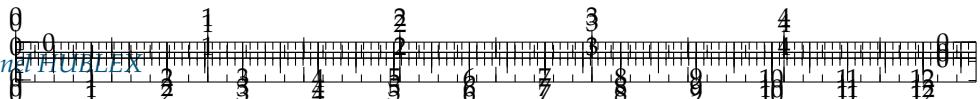
Conformément au cahier des charges, chaque axe élémentaire, piloté séparément, doit avoir une vitesse angulaire de  $10^\circ/\text{s}$  en phase de mesure. Technologiquement, la chaîne d'action de chaque axe élémentaire est constituée d'un réducteur entre le moteur et l'effecteur. Ce réducteur diminue la vitesse angulaire d'un facteur 558.

On s'intéresse à l'axe permettant de déplacer le bras d'arceau 2 par rapport à l'épaule 1. La structure de la chaîne fonctionnelle asservie de cet axe est la suivante :

[.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerfo](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerfo)

[.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerformances/Chapitre\\_01\\_Stabilite/Cy\\_02\\_Ch\\_01\\_Colle\\_04\\_IRM/images/fig\\_04.png](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerformances/Chapitre_01_Stabilite/Cy_02_Ch_01_Colle_04_IRM/images/fig_04.png)





Les différents éléments de cette chaîne fonctionnelle sont les suivants :

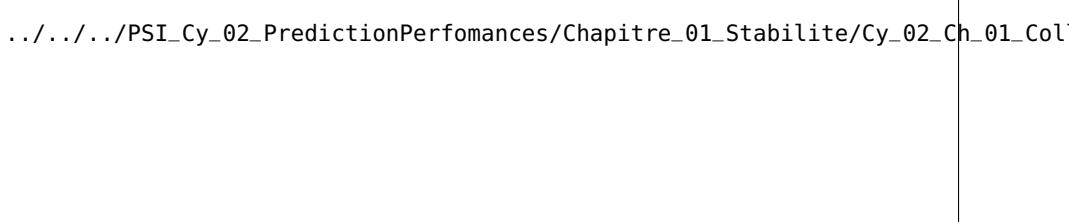
- ▶ l'amplificateur est un gain pur :  $K_a$  ;
- ▶ le réducteur est un gain pur  $K_r$  (sans dimension) ;
- ▶ le capteur est un gain pur :  $K_c$  ;
- ▶ le moteur est un système d'ordre 1, de constante de temps  $T_m$  et de gain  $K_m$ . On note la fonction de transfert du moteur  $H_m(p)$ .

**Question 1** Déterminer la valeur numérique du bloc du réducteur  $K_r$ .

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en chaîne directe  $FTCD(p)$ , la fonction de transfert en boucle ouvert  $FTBO(p)$  et la fonction de transfert en boucle fermée  $FTBF(p)$  de cet asservissement. Exprimer les résultats en fonction de  $K_a$ ,  $K_m$ ,  $K_r$ ,  $K_c$  et  $T_m$ .

**Question 3** Montrer que la fonction de transfert en boucle fermée de ce système peut s'écrire sous la forme d'un deuxième ordre  $\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ . Donner l'expression littérale de  $K$ ,  $z$  et  $\omega_0$  en fonction de  $K_a$ ,  $K_m$ ,  $K_r$ ,  $K_c$  et  $T_m$ .

**Question 4** La réponse du système à cette entrée en échelon de tension  $u_m(t) = 10u(t)$  a été mesurée en sortie du réducteur. On donne ci-contre la courbe obtenue. Déterminer les valeurs numériques expérimentales de  $K_m$  et  $T_m$  à partir de la courbe.



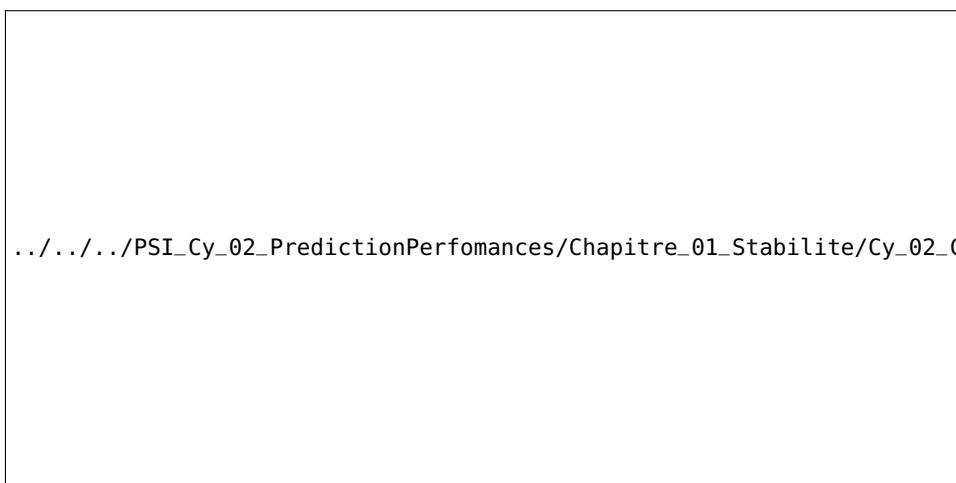
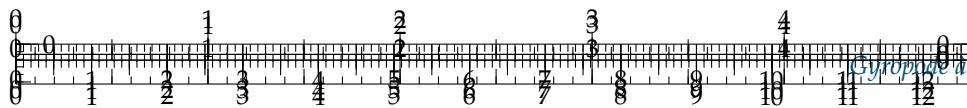
Avec les valeurs numériques des coefficients des différents gains, on peut déterminer la valeur numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte :  $FTBO(p) = \frac{10}{p \left( 1 + \frac{1}{30}p \right)}$ .

**Question 5** Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction de transfert en boucle ouverte sur le diagramme vierge en bleu.

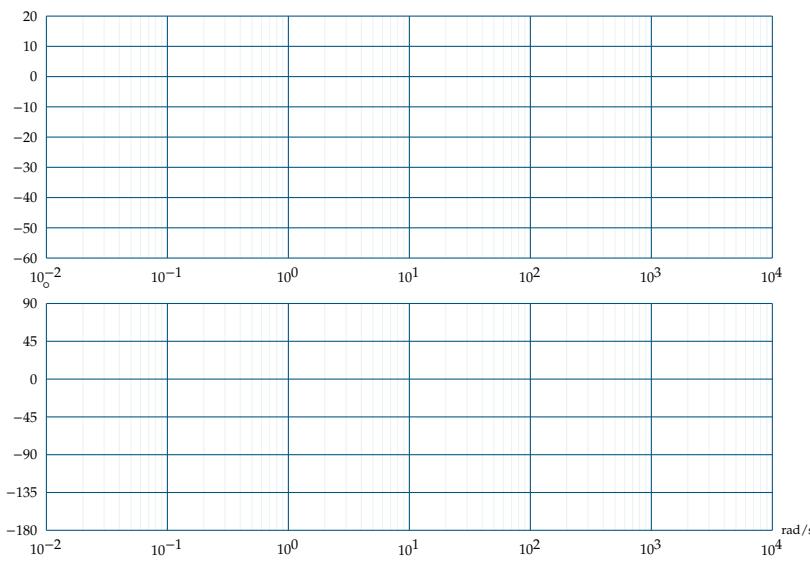
**Question 6** Calculer le gain et la phase exacte pour  $\omega = 30$  rad/s.

**Question 7** On donne les tracés réels des courbes de gain et de phase de la FTBO. Déterminer la pulsation qui annule le gain puis déterminer la marge de phase du système  $M\varphi$ . Conclure quant à la capacité du système à satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges.

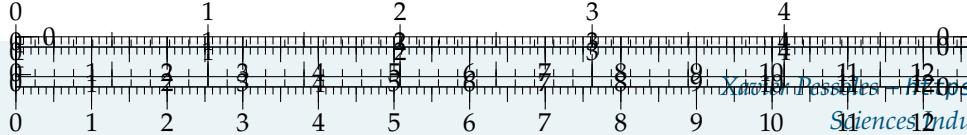




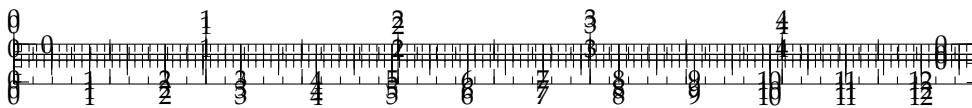
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Colle\_04\_IRM/images/fig\_06.png



.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Colle\_04\_IRM/images/fig\_07.png







## Colle 4

### Imagerie médicale – Corrigé

F. Mathurin.

L'étude porte sur un système permettant de réaliser des imageries médicales de vaisseaux sanguins sur un patient. Ce système, conçu par General Electric Medical System, envoie des rayons X dans le corps du patient et mesure leur rayonnement. En fonction des informations reçues, une image de synthèse en 3 dimensions est réalisée, permettant de voir les éventuels problèmes médicaux à venir.

Ce système est constitué des éléments suivants : le bâti 0, une épaule 1 qui peut être mis en mouvement par rapport au bâti 0, un bras d'arceau 2 qui peut s'orienter par rapport à l'épaule 1 et un arceau 3 qui se déplace par rapport à bras d'arceau 2. Le patient est situé sur une table mobile. Le réglage en hauteur du patient sur la table mobile est possible pour son confort mais n'est pas utilisé au cours d'une analyse. Seuls les degrés de liberté  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont utilisés pendant l'analyse. L'émetteur de rayons, situé sur l'arceau, focalise la vision interne du patient en un point appelé iso centre.

Sur l'image de gauche, l'arceau 3 s'oriente par rapport au bras d'arceau 2 et sur l'image de droite le bras d'arceau 2 se déplace par rapport à l'épaule 1. On donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel du système de positionnement dans la phase de vie correspondant à une mesure d'imagerie :

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerfo](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerfo)

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerfo](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerfo)

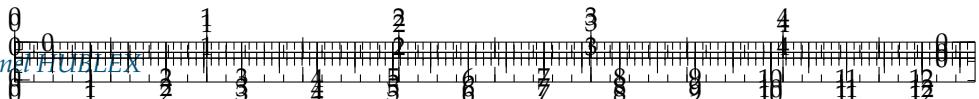
[.../.../.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerfomances/Chapitre\\_01\\_Stabilite/Cy\\_02\\_Ch\\_01\\_Colle\\_04\\_IRM/images/fig\\_07.png](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerfomances/Chapitre_01_Stabilite/Cy_02_Ch_01_Colle_04_IRM/images/fig_07.png)

Conformément au cahier des charges, chaque axe élémentaire, piloté séparément, doit avoir une vitesse angulaire de  $10^\circ/\text{s}$  en phase de mesure. Technologiquement, la chaîne d'action de chaque axe élémentaire est constituée d'un réducteur entre le moteur et l'effecteur. Ce réducteur diminue la vitesse angulaire d'un facteur 558.

On s'intéresse à l'axe permettant de déplacer le bras d'arceau 2 par rapport à l'épaule 1. La structure de la chaîne fonctionnelle asservie de cet axe est la suivante :

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerfomances/Chapitre\\_01\\_Stabilite/Cy\\_02\\_Ch\\_01\\_Colle\\_04\\_IRM/images/fig\\_04.png](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerfomances/Chapitre_01_Stabilite/Cy_02_Ch_01_Colle_04_IRM/images/fig_04.png)





Les différents éléments de cette chaîne fonctionnelle sont les suivants :

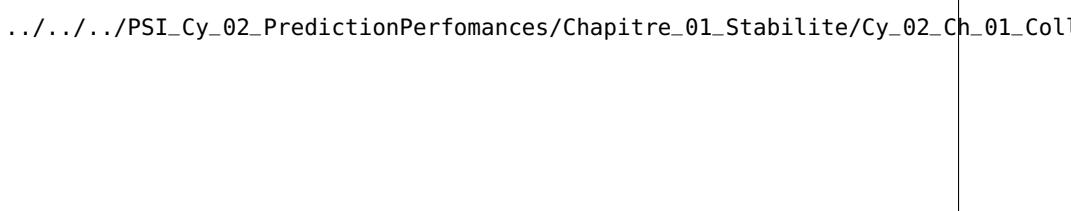
- ▶ l'amplificateur est un gain pur :  $K_a$  ;
- ▶ le réducteur est un gain pur  $K_r$  (sans dimension) ;
- ▶ le capteur est un gain pur :  $K_c$  ;
- ▶ le moteur est un système d'ordre 1, de constante de temps  $T_m$  et de gain  $K_m$ . On note la fonction de transfert du moteur  $H_m(p)$ .

**Question 1** Déterminer la valeur numérique du bloc du réducteur  $K_r$ .

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en chaîne directe  $FTCD(p)$ , la fonction de transfert en boucle ouvert  $FTBO(p)$  et la fonction de transfert en boucle fermée  $FTBF(p)$  de cet asservissement. Exprimer les résultats en fonction de  $K_a$ ,  $K_m$ ,  $K_r$ ,  $K_c$  et  $T_m$ .

**Question 3** Montrer que la fonction de transfert en boucle fermée de ce système peut s'écrire sous la forme d'un deuxième ordre  $\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ . Donner l'expression littérale de  $K$ ,  $z$  et  $\omega_0$  en fonction de  $K_a$ ,  $K_m$ ,  $K_r$ ,  $K_c$  et  $T_m$ .

**Question 4** La réponse du système à cette entrée en échelon de tension  $u_m(t) = 10u(t)$  a été mesurée en sortie du réducteur. On donne ci-contre la courbe obtenue. Déterminer les valeurs numériques expérimentales de  $K_m$  et  $T_m$  à partir de la courbe.



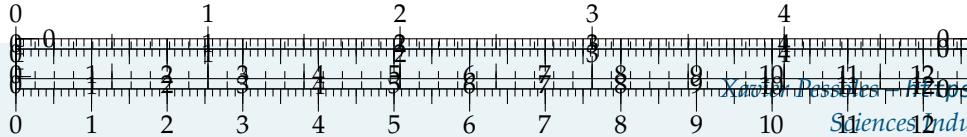
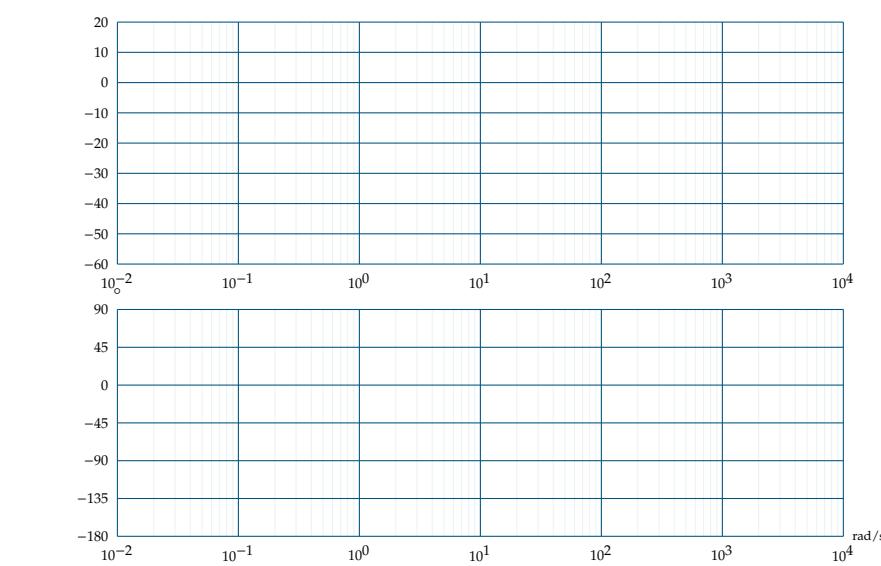
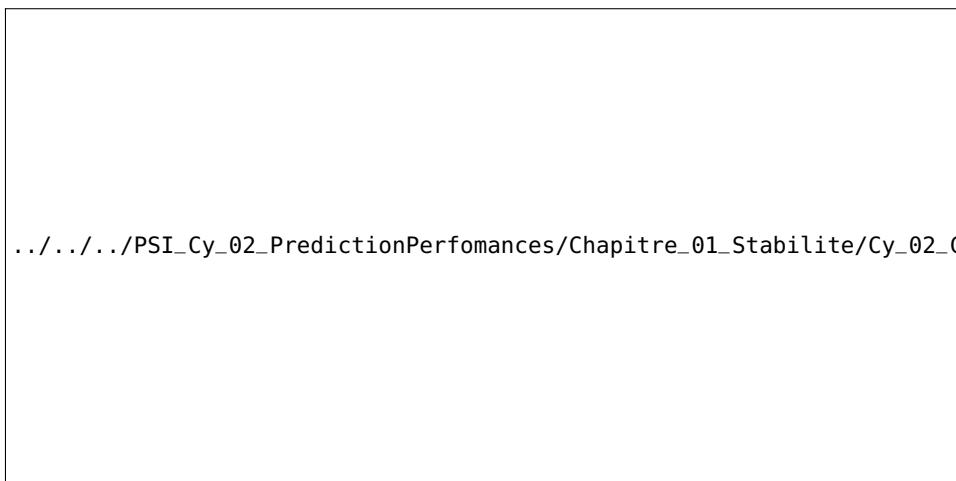
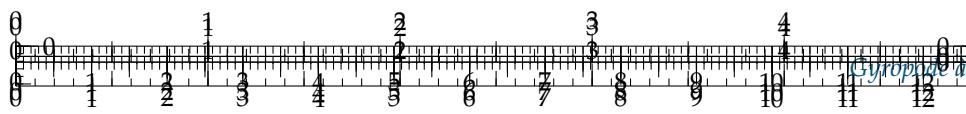
Avec les valeurs numériques des coefficients des différents gains, on peut déterminer la valeur numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte :  $FTBO(p) = \frac{10}{p \left( 1 + \frac{1}{30}p \right)}$ .

**Question 5** Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction de transfert en boucle ouverte sur le diagramme vierge en bleu.

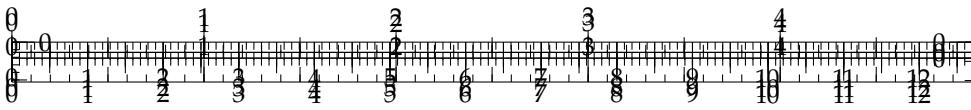
**Question 6** Calculer le gain et la phase exacte pour  $\omega = 30$  rad/s.

**Question 7** On donne les tracés réels des courbes de gain et de phase de la FTBO. Déterminer la pulsation qui annule le gain puis déterminer la marge de phase du système  $M\varphi$ . Conclure quant à la capacité du système à satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges.









## Colle 5

# Robot MIR : Machine d'inspection des réacteurs rapides – Sujet

E3A MP – 2012.

### Mise en situation

Le robot MIR développé pour la vérification des cuves de Superphenix doit être adapté pour le contrôle d'une nouvelle génération de réacteurs à neutrons rapides.

L'objectif du robot MIR est de :

- ▶ assurer le contrôle surfacique télévisuel des soudures des deux cuves et des zones adjacentes ;
- ▶ assurer le contrôle volumique par ultrasons des soudures de la cuve principale et des zones adjacentes. Une possibilité était offerte d'effectuer ce contrôle sur la cuve de sécurité ;
- ▶ mesurer en permanence la distance entre les deux cuves.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo

### Étude de la fonction Ft12 : Déplacer le transducteur à vitesse constante

Le robot MIR étant à l'arrêt entre les deux cuves, le mini bac est plaqué contre la paroi de la cuve à contrôler. Pour l'inspection des soudures, le transducteur 13 (capteur de l'état des soudures) doit se déplacer à l'intérieur du mini bac d'inspection à vitesse constante. Le mini bac est rempli d'un fluide visqueux. L'inspection peut avoir lieu pour n'importe quelle position du robot MIR, donc l'angle  $\alpha$  qui caractérise la direction du déplacement du transducteur par rapport à l'horizontale, est susceptible de prendre toute valeur comprise entre  $-\pi/2$  (robot tête en bas) et  $\pi/2$  (robot tête en haut). Afin de garantir la qualité des résultats de mesure, le transducteur doit donc se déplacer à une vitesse  $V_0$  constante par rapport à la paroi, et ceci pour toute valeur de l'angle  $\alpha$ .

#### Objectif

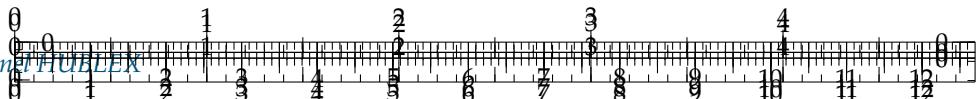
Qualifier la précision statique du système et définir les améliorations à apporter.

L'objectif de cette partie est de dimensionner le correcteur nécessaire au respect d'un écart statique nul, et ceci malgré le caractère variable de l'angle  $\alpha$ .

Le transducteur est en liaison glissière de direction  $\vec{x}_r$ , avec le corps 1 du robot MIR. La chaîne d'énergie est composée entre autre, d'un actionneur rotatif qui exerce un couple  $c(t)$  sur le pignon 11, qui est en liaison pivot, supposée parfaite, avec le robot MIR. Un système pouilles (11 et 12) et courroie crantée 14 impose le mouvement de translation au transducteur 13.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo





Le comportement dynamique du système est régit par l'équation suivante :

$$M_{eq} \frac{dv_r(t)}{dt} = \delta c(t) + \beta v_r(t) + \gamma g u(t)$$

avec  $u(t)$  échelon unitaire.

On cherche à garantir une vitesse de translation du transducteur **13** égale à la valeur de consigne indépendamment de l'angle  $\alpha$ .

Pour cela, on réalise le système bouclé suivant :

`.../.../.../PSI_Cy_02_PredictionPerformances/Chapitre_01_Stabilite/Cy_02_Ch_01_Col`

**Question 1** En supposant des conditions initiales nulles, exprimer les fonctions de transfert  $A(p)$  et  $B(p)$  en fonction entre autres de  $\delta$ ,  $\beta$  et  $M_{eq}$ .

Le capteur est modélisé par un gain pur de valeur  $K_{capt}$ .

**Question 2** En supposant une perturbation nulle, quelle doit être la valeur du gain  $K_{conv}$  du convertisseur modélisé par un gain pur, afin que l'écart  $\varepsilon(t)$  soit nul quand la valeur de la vitesse réelle  $v_r(t)$  est égale à la valeur de la consigne  $v_c(t)$ . On adopte pour la suite la modélisation suivante :

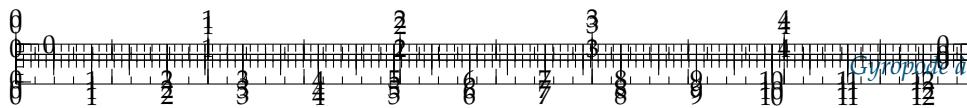
`.../.../.../PSI_Cy_02_PredictionPerformances/Chapitre_01_Stabilite/Cy_02_Ch_01_Col`

Avec  $H_{mot}(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p}$ ,  $G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$  et  $H(p) = K_{cor}$  fonction de transfert du correcteur.

**Question 3** Exprimer les deux fonctions de transfert :  $H_1(p) = \left( \frac{V_r(p)}{V_c(p)} \right)_{F_{pert}(p)=0}$  et  $H_2(p) = \left( \frac{V_r(p)}{F_{pert}(p)} \right)_{V_c(p)=0}$  en fonction des gains  $K_{conv}$ ,  $K_{cor}$ , et  $K_{capt}$  ainsi que des fonctions de transfert  $H_{mot}(p)$  et  $G(p)$ .

**Question 4** En supposant que  $K_{cor} = 1$  et en indiquant les valeurs remarquables, tracer les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $\frac{U_r(p)}{\varepsilon(p)}$  en utilisant les valeurs numériques suivantes :  $K_m = 0,1 \text{ N V}^{-1}$ ,  $\tau_m = 0,01 \text{ s}$ ,  $K_{capt} = 50 \text{ V s m}^{-1}$ ,  $K = 200 \text{ m s}^{-1} \text{ N}^{-1}$ ,  $\tau = 1 \text{ s}$ .





**Question 5** Déterminer le gain en décibel de la fonction de transfert en boucle ouverte (courbe réelle) pour la pulsation de  $100 \text{ rad s}^{-1}$ .

On formule l'hypothèse simplificatrice suivante : la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte pour une pulsation de  $100 \text{ rad/s}$  est de  $-135^\circ$ .

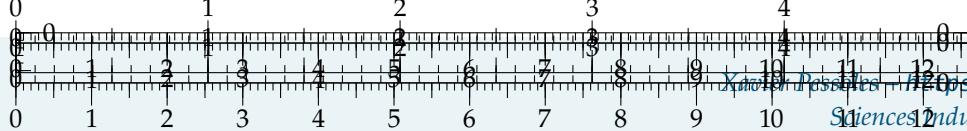
**Question 6** On souhaite une marge de gain  $12 \text{ dB}$  et un marge de phase de  $45^\circ$ , en utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la valeur numérique correspondante de  $K_{\text{cor}}$ . Commenter la valeur de la marge de gain obtenue ?

**Question 7** On impose une vitesse constante en entrée de valeur  $v_0$  ( $v_c(t) = v_0 \cdot u(t)$ ) avec  $u(t)$  fonction échelon unitaire de Heaviside. Exprimer l'écart statique en régime permanent en tenant compte de la perturbation (en fonction de l'angle  $\alpha$ , de la valeur de  $K_{\text{cor}}$  et des données).

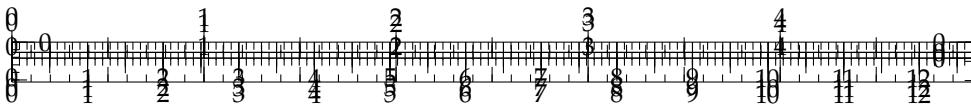
On souhaite obtenir une vitesse de translation indépendante de l'inclinaison. Pour toute la suite du sujet, on installe un correcteur intégral du type  $\frac{K_c}{p}$ , placé au début de la chaîne d'action.

**Question 8** On impose de nouveau une vitesse constante en entrée de valeur  $v_0$  ( $v_c(t) = v_0 \cdot u(t)$ ); exprimer l'expression du nouvel écart statique en régime permanent (en fonction de l'angle  $\alpha$  et des données). Pouvait-on prévoir ce résultat ?

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_Pr







## Colle 5

# Robot MIR : Machine d'inspection des réacteurs rapides – Corrigé

E3A MP – 2012.

### Mise en situation

Le robot MIR développé pour la vérification des cuves de Superphenix doit être adapté pour le contrôle d'une nouvelle génération de réacteurs à neutrons rapides.

L'objectif du robot MIR est de :

- ▶ assurer le contrôle surfacique télévisuel des soudures des deux cuves et des zones adjacentes ;
- ▶ assurer le contrôle volumique par ultrasons des soudures de la cuve principale et des zones adjacentes. Une possibilité était offerte d'effectuer ce contrôle sur la cuve de sécurité ;
- ▶ mesurer en permanence la distance entre les deux cuves.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo

### Étude de la fonction Ft12 : Déplacer le transducteur à vitesse constante

Le robot MIR étant à l'arrêt entre les deux cuves, le mini bac est plaqué contre la paroi de la cuve à contrôler. Pour l'inspection des soudures, le transducteur 13 (capteur de l'état des soudures) doit se déplacer à l'intérieur du mini bac d'inspection à vitesse constante. Le mini bac est rempli d'un fluide visqueux. L'inspection peut avoir lieu pour n'importe quelle position du robot MIR, donc l'angle  $\alpha$  qui caractérise la direction du déplacement du transducteur par rapport à l'horizontale, est susceptible de prendre toute valeur comprise entre  $-\pi/2$  (robot tête en bas) et  $\pi/2$  (robot tête en haut). Afin de garantir la qualité des résultats de mesure, le transducteur doit donc se déplacer à une vitesse  $V_0$  constante par rapport à la paroi, et ceci pour toute valeur de l'angle  $\alpha$ .

#### Objectif

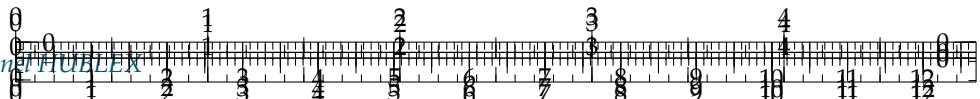
Qualifier la précision statique du système et définir les améliorations à apporter.

L'objectif de cette partie est de dimensionner le correcteur nécessaire au respect d'un écart statique nul, et ceci malgré le caractère variable de l'angle  $\alpha$ .

Le transducteur est en liaison glissière de direction  $\vec{x}_r$ , avec le corps 1 du robot MIR. La chaîne d'énergie est composée entre autre, d'un actionneur rotatif qui exerce un couple  $c(t)$  sur le pignon 11, qui est en liaison pivot, supposée parfaite, avec le robot MIR. Un système pouilles (11 et 12) et courroie crantée 14 impose le mouvement de translation au transducteur 13.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo





Le comportement dynamique du système est régit par l'équation suivante :

$$M_{eq} \frac{dv_r(t)}{dt} = \delta c(t) + \beta v_r(t) + \gamma g u(t)$$

avec  $u(t)$  échelon unitaire.

On cherche à garantir une vitesse de translation du transducteur 13 égale à la valeur de consigne indépendamment de l'angle  $\alpha$ .

Pour cela, on réalise le système bouclé suivant :

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Col

**Question 1** En supposant des conditions initiales nulles, exprimer les fonctions de transfert  $A(p)$  et  $B(p)$  en fonction entre autres de  $\delta$ ,  $\beta$  et  $M_{eq}$ .

#### Correction

Le capteur est modélisé par un gain pur de valeur  $K_{capt}$ .

**Question 2** En supposant une perturbation nulle, quelle doit être la valeur du gain  $K_{conv}$  du convertisseur modélisé par un gain pur, afin que l'écart  $\varepsilon(t)$  soit nul quand la valeur de la vitesse réelle  $v_r(t)$  est égale à la valeur de la consigne  $v_c(t)$ .

#### Correction

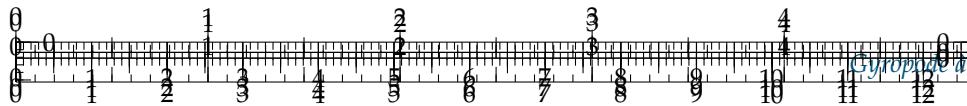
On adopte pour la suite la modélisation suivante :

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Col

Avec  $H_{mot}(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p}$ ,  $G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$  et  $H(p) = K_{cor}$  fonction de transfert du correcteur.

**Question 3** Exprimer les deux fonctions de transfert :  $H_1(p) = \left( \frac{V_r(p)}{V_c(p)} \right)_{F_{pert}(p)=0}$  et  $H_2(p) = \left( \frac{V_r(p)}{F_{pert}(p)} \right)_{V_c(p)=0}$  en fonction des gains  $K_{conv}$ ,  $K_{cor}$ , et  $K_{capt}$  ainsi que des fonctions de transfert  $H_{mot}(p)$  et  $G(p)$ .





### Correction

**Question 4** En supposant que  $K_{\text{cor}} = 1$  et en indiquant les valeurs remarquables, tracer les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $\frac{U_r(p)}{\varepsilon(p)}$  en utilisant les valeurs numériques suivantes :  $K_m = 0,1 \text{ N V}^{-1}$ ,  $\tau_m = 0,01 \text{ s}$ ,  $K_{\text{capt}} = 50 \text{ V s m}^{-1}$ ,  $K = 200 \text{ m s}^{-1} \text{ N}^{-1}$ ,  $\tau = 1 \text{ s}$ .

### Correction

**Question 5** Déterminer le gain en décibel de la fonction de transfert en boucle ouverte (courbe réelle) pour la pulsation de  $100 \text{ rad s}^{-1}$ .

### Correction

On formule l'hypothèse simplificatrice suivante : la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte pour une pulsation de  $100 \text{ rad/s}$  est de  $-135^\circ$ .

**Question 6** On souhaite une marge de gain  $12 \text{ dB}$  et un marge de phase de  $45^\circ$ , en utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la valeur numérique correspondante de  $K_{\text{cor}}$ . Commenter la valeur de la marge de gain obtenue ?

### Correction

**Question 7** On impose une vitesse constante en entrée de valeur  $v_0$  ( $v_c(t) = v_0 \cdot u(t)$ ) avec  $u(t)$  fonction échelon unitaire de Heaviside. Exprimer l'écart statique en régime permanent en tenant compte de la perturbation (en fonction de l'angle  $\alpha$ , de la valeur de  $K_{\text{cor}}$  et des données).

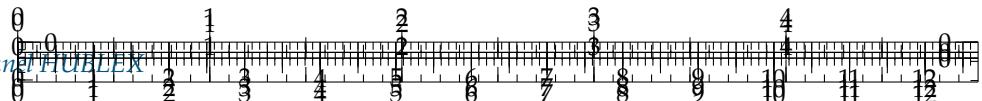
### Correction

On souhaite obtenir une vitesse de translation indépendante de l'inclinaison. Pour toute la suite du sujet, on installe un correcteur intégral du type  $\frac{K_c}{p}$ , placé au début de la chaîne d'action.

**Question 8** On impose de nouveau une vitesse constante en entrée de valeur  $v_0$  ( $v_c(t) = v_0 \cdot u(t)$ ); exprimer l'expression du nouvel écart statique en régime permanent (en fonction de l'angle  $\alpha$  et des données). Pouvait-on prévoir ce résultat ?

### Correction



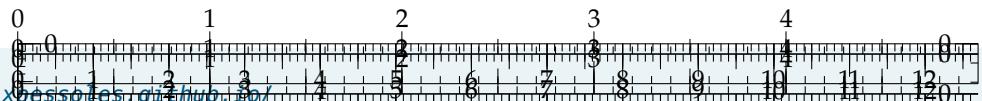


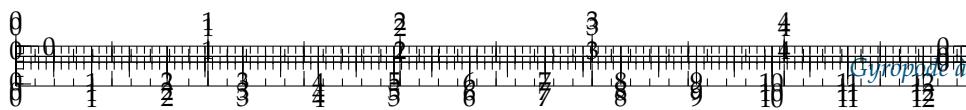
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch...

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch...

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch...

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch...



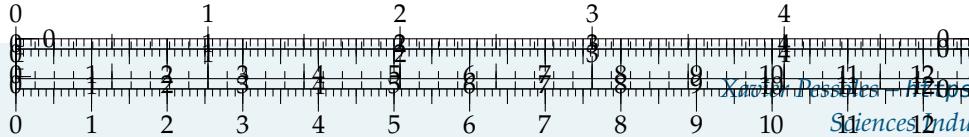


.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Colle\_05\_MIR\_PrecisionStab

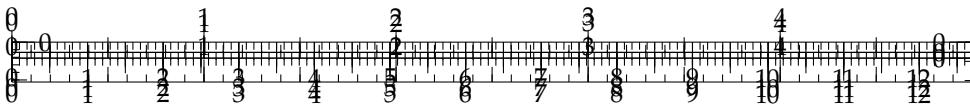
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Colle\_05\_MIR\_PrecisionStab

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Colle\_05\_MIR\_PrecisionStab

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_01\_Stabilite/Cy\_02\_Ch\_01\_Colle\_05\_MIR\_PrecisionStab







## Colle 6

### Préhenseur – Sujet

#### Présentation

Une usine de fabrication de flacons en verre possède un poste de mise en cartons qui est l'objet de la présente étude. Ce poste est équipé de deux robots permettant de déplacer les flacons, déplacer des cartons, détecter des flacons dans des cartons, ranger des flacons dans les cartons. Ces robots sont de type « Delta » à architecture parallèle.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo

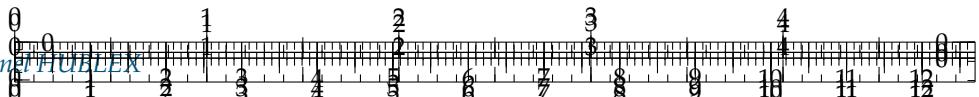
#### Architecture de la commande

On se propose ici de valider le niveau des performances de la commande de l'axe d'orientation de la pince.

Le servo-entraînement met en rotation un arbre télescopique muni à chacune de ses extrémités d'un joint de Cardan. Le mouvement d'orientation de la pince est indépendant des mouvements de la plate-forme 4. Afin d'assurer un bon positionnement angulaire de la pince P, la commande de sa rotation est asservie de la façon suivante :

- ▶ la consigne de position  $\theta_{PC}$ , entrée par l'utilisateur grâce à une interface graphique (lors des réglages) ou imposée par la Partie Commande (lors des cycles de travail), est transformée en une tension  $v_{PC}$  grâce à un convertisseur qui sera assimilé à un système de gain pur  $K_C$  (en  $V \text{ rad}^{-1}$ ).
- ▶ la vitesse de rotation  $\omega_M$  (en  $\text{rad s}^{-1}$ ) et l'angle de rotation  $\theta_M$  (en rad) de l'arbre moteur sont mesurés par un codeur incrémental, monté directement sur l'arbre moteur, qui délivre une information numérique ; celle-ci est alors transformée par une carte de conversion numérique-analogique (C.A.N.) supposée linéaire en deux tensions  $v_\omega$  et  $v_\theta$  telles que :
  - pour la vitesse :  $v_\omega = K_\omega \omega_M$ ,
  - pour la position :  $v_\theta = K_\theta \theta_M$ ;
- ▶ la tension  $v_\theta$  (image de la rotation  $\theta_M$  du moteur) est soustraite à la tension  $v_{PC}$  pour donner la tension  $\varepsilon_P$  ;
- ▶ cette tension  $\varepsilon_P$  est modifiée par un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  pour donner la tension  $\varepsilon_{VP}$  ;
- ▶ la tension  $v_\omega$  (image de la vitesse de rotation  $\omega_M$  du moteur) est soustraite à la tension  $\varepsilon_{VP}$  en sortie du correcteur pour donner la tension  $\varepsilon_v$  ;
- ▶ cette tension  $\varepsilon_v$  est amplifiée par un amplificateur de gain pur  $G$  pour donner la tension d'alimentation du moteur  $u_M$  ; le moteur tourne alors à la vitesse angulaire  $\omega_M$  telle que  $\Omega_M(p) = M(p)U_M(p)$  ;





- ▶ la rotation  $\theta_{EC}$  de la pièce d'entrée du double joint de Cardan est telle que  $\theta_{EC} = \lambda \theta_M$ , grâce au réducteur de vitesse fixé sur l'arbre moteur ;
- ▶ le double joint de Cardan est homocinétique et a pour fonction de transfert  $R(p) = 1$  (l'entrée est l'angle  $\theta_{EC}$ , et la sortie est  $\theta_{SC} = \theta_P$  où  $\theta_P$  est la rotation de la pince fixée sur la pièce de sortie du double joint de Cardan).

**Question 1** Tracer le schéma bloc d'asservissement en position, d'entrée  $\theta_{PC}(p)$  et de sortie  $\theta_P(p)$ , faisant apparaître toutes les variables et les fonctions de transfert définies ci-dessus.

## Performances de la commande

Le servo-entraînement utilisé est le

AXL305RS330E5 qui est composé d'un moteur RS330E, du variateur 10/20-60 et du

réducteur GB à train épicycloïdal.

**Question 2** On veut que lorsque la pince atteint la position demandée (soit  $\theta_P = \theta_{PC}$ ) l'écart  $\varepsilon_P = \theta_{PC} - \theta_P$  soit nul. En déduire la relation entre  $K_C$ ,  $K_\theta$  et  $\lambda$  puis la valeur numérique de  $K_C$  qui permette d'assurer cet écart nul.

- ▶ constante de force électromotrice :

$K_E = 14,3 \text{ V/1000 tours min}^{-1}$  À partir des équations du moteur à courant continu, on obtient la fonction de transfert

- ▶ constante de couple :  $K_T = 0,137 \text{ N m A}^{-1}$ ; suivante :  $M(p) = \frac{\Omega_M(p)}{U_M(p)} = \frac{K_T}{K_E K_T + J R p + J L p^2}$ . On donne  $K_\omega = 6 \text{ V/1000 tours min}^{-1}$

- ▶ résistance de l'induit :  $R_I = 1 \Omega$ ;

- ▶ inductance de l'induit :  $L_I = 1,65 \text{ mH}$ ;

**Question 3** Déterminer l'expression littérale et la valeur numérique du gain  $G$  de

- ▶ frottement visqueux rapporté à l'axe de rotation du moteur négligeable ;
- ▶ alors le temps de réponse à 5 % ?

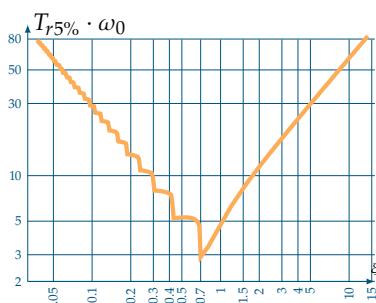
entrainée rapportée à l'axe de rotation du moteur :  $J = 10^{-5} \text{ kg m}^2$ . Avec la valeur de  $G$  trouvée précédemment, on a alors calculé la fonction de transfert

$$\text{de boucle (ou en boucle ouverte) suivante pour l'asservissement en position : } H_B(p) = \frac{V_\theta(p)}{\varepsilon_P} = C(p) \frac{86}{p(10^3 + 3,2p + 5,310^{-3}p^2)}$$

Les exigences de l'orientation du flacon sont données dans le tableau suivant.

Fonction	Critères	Niveaux
Orienter le flacon	Stabilité	Marge de phase $M\varphi > 45^\circ$ Marge de gain $MG > 10 \text{ dB}$
	Précision	Écart statique nul à une entrée en échelon $\varepsilon_\infty = 0$
	Rapidité	Bande passante à 0 dB de la fonction $H_B(p)$ : $BP_0 > 50 \text{ rad s}^{-1}$ . On définit la bande passante par sa largeur de bande (ici : $50 \text{ rad s}^{-1}$ ).

On considère pour l'instant que le système n'est pas corrigé :  $C(p) = 1$ .



**Question 4** Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode en amplitude et phase de la fonction de transfert  $H_{BO}(p)$  du système non corrigé en plaçant avec précision les points caractéristiques.

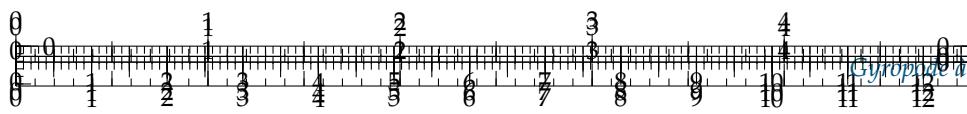
Pour la fin, la courbe de gain sera assimilée à son tracé asymptotique.

**Question 5** Déterminer les valeurs de  $M\varphi$ , marge de phase,  $MG$ , marge de gain et  $BP_0$ , bande passante à 0 dB de la fonction de transfert  $H_B(p)$ . Les critères de la fonction précédente sont-ils vérifiés ?

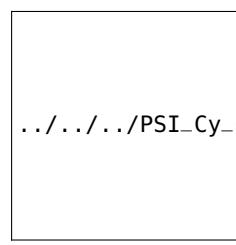
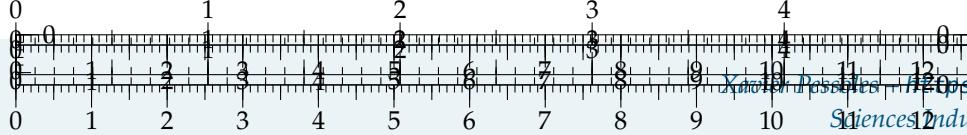
**Question 6** Vérifier les valeurs des marges par le calcul.

On prend une correction proportionnelle :  $C(p) = C_0$ .





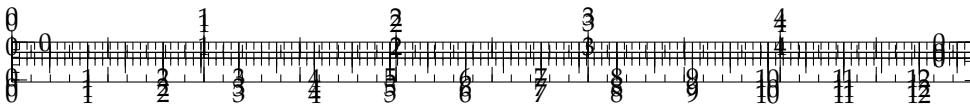
**Question 7** Déterminer la bande de valeurs de  $C_0$  qui permettent de vérifier les critères du cahier des charges partiel donné précédemment.



.../.../.../PSI\_Cy\_02\_Prediction







## Colle 6

### Préhenseur – Corrigé

#### Présentation

Une usine de fabrication de flacons en verre possède un poste de mise en cartons qui est l'objet de la présente étude. Ce poste est équipé de deux robots permettant de déplacer les flacons, déplacer des cartons, détecter des flacons dans des cartons, ranger des flacons dans les cartons. Ces robots sont de type « Delta » à architecture parallèle.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo

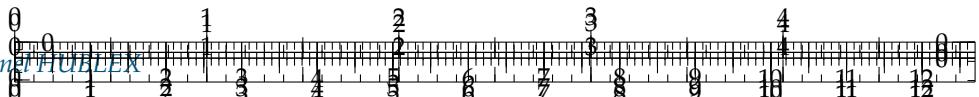
#### Architecture de la commande

On se propose ici de valider le niveau des performances de la commande de l'axe d'orientation de la pince.

Le servo-entraînement met en rotation un arbre télescopique muni à chacune de ses extrémités d'un joint de Cardan. Le mouvement d'orientation de la pince est indépendant des mouvements de la plate-forme 4. Afin d'assurer un bon positionnement angulaire de la pince P, la commande de sa rotation est asservie de la façon suivante :

- ▶ la consigne de position  $\theta_{PC}$ , entrée par l'utilisateur grâce à une interface graphique (lors des réglages) ou imposée par la Partie Commande (lors des cycles de travail), est transformée en une tension  $v_{PC}$  grâce à un convertisseur qui sera assimilé à un système de gain pur  $K_C$  (en  $V \text{ rad}^{-1}$ ).
- ▶ la vitesse de rotation  $\omega_M$  (en  $\text{rad s}^{-1}$ ) et l'angle de rotation  $\theta_M$  (en rad) de l'arbre moteur sont mesurés par un codeur incrémental, monté directement sur l'arbre moteur, qui délivre une information numérique ; celle-ci est alors transformée par une carte de conversion numérique-analogique (C.A.N.) supposée linéaire en deux tensions  $v_\omega$  et  $v_\theta$  telles que :
  - pour la vitesse :  $v_\omega = K_\omega \omega_M$ ,
  - pour la position :  $v_\theta = K_\theta \theta_M$ ;
- ▶ la tension  $v_\theta$  (image de la rotation  $\theta_M$  du moteur) est soustraite à la tension  $v_{PC}$  pour donner la tension  $\varepsilon_P$  ;
- ▶ cette tension  $\varepsilon_P$  est modifiée par un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  pour donner la tension  $\varepsilon_{VP}$  ;
- ▶ la tension  $v_\omega$  (image de la vitesse de rotation  $\omega_M$  du moteur) est soustraite à la tension  $\varepsilon_{VP}$  en sortie du correcteur pour donner la tension  $\varepsilon_v$  ;
- ▶ cette tension  $\varepsilon_v$  est amplifiée par un amplificateur de gain pur  $G$  pour donner la tension d'alimentation du moteur  $u_M$  ; le moteur tourne alors à la vitesse angulaire  $\omega_M$  telle que  $\Omega_M(p) = M(p)U_M(p)$  ;





- la rotation  $\theta_{EC}$  de la pièce d'entrée du double joint de Cardan est telle que  $\theta_{EC} = \lambda \theta_M$ , grâce au réducteur de vitesse fixé sur l'arbre moteur ;
- le double joint de Cardan est homocinétique et a pour fonction de transfert  $R(p) = 1$  (l'entrée est l'angle  $\theta_{EC}$ , et la sortie est  $\theta_{SC} = \theta_P$  où  $\theta_P$  est la rotation de la pince fixée sur la pièce de sortie du double joint de Cardan).

**Question 1** Tracer le schéma bloc d'asservissement en position, d'entrée  $\theta_{PC}(p)$  et de sortie  $\theta_P(p)$ , faisant apparaître toutes les variables et les fonctions de transfert définies ci-dessus.

## Performances de la commande

Le servo-entraînement utilisé est le

AXL305RS330E5 qui est composé d'un moteur RS330E, du variateur 10/20-60 et du

réducteur GB à train épicycloïdal.

**Question 2** On veut que lorsque la pince atteint la position demandée (soit  $\theta_P = \theta_{PC}$ ) l'écart  $\varepsilon_P = \theta_{PC} - \theta_P$  soit nul. En déduire la relation entre  $K_C$ ,  $K_\theta$  et  $\lambda$  puis la valeur numérique de  $K_C$  qui permette d'assurer cet écart nul.

- constante de force électromotrice :

$K_E = 14,3 \text{ V/1000 tours min}^{-1}$  À partir des équations du moteur à courant continu, on obtient la fonction de transfert

- constante de couple :  $K_T = 0,137 \text{ N m A}^{-1}$ ; suivante :  $M(p) = \frac{\Omega_M(p)}{U_M(p)} = \frac{K_T}{K_E K_T + J R p + J L p^2}$ . On donne  $K_\omega = 6 \text{ V/1000 tours min}^{-1}$

- résistance de l'induit :  $R_I = 1 \Omega$ ;

- inductance de l'induit :  $L_I = 1,65 \text{ mH}$ ;

**Question 3** Déterminer l'expression littérale et la valeur numérique du gain  $G$  de

- frottement visqueux rapporté à l'axe de rotation du moteur négligeable ;

- inertie du rotor + de la charge entraînée rapportée à l'axe de rotation du moteur :  $J = 10^{-5} \text{ kg m}^2$ .

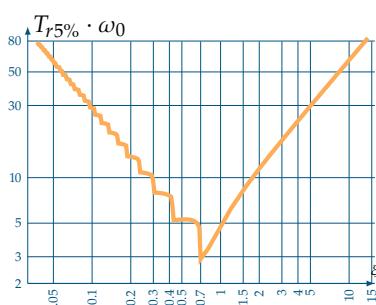
Avec la valeur de  $G$  trouvée précédemment, on a alors calculé la fonction de transfert de boucle (ou en boucle ouverte) suivante pour l'asservissement en position :  $H_B(p) =$

$$\frac{V_\theta(p)}{\varepsilon_P} = C(p) \frac{86}{p(10^3 + 3,2p + 5,310^{-3}p^2)}.$$

Les exigences de l'orientation du flacon sont données dans le tableau suivant.

Fonction	Critères	Niveaux
Orienter le flacon	Stabilité	Marge de phase $M\varphi > 45^\circ$ Marge de gain $MG > 10 \text{ dB}$
	Précision	Écart statique nul à une entrée en échelon $\varepsilon_\infty = 0$
	Rapidité	Bande passante à 0 dB de la fonction $H_B(p)$ : $BP_0 > 50 \text{ rad s}^{-1}$ . On définit la bande passante par sa largeur de bande (ici : $50 \text{ rad s}^{-1}$ ).

On considère pour l'instant que le système n'est pas corrigé :  $C(p) = 1$ .



**Question 4** Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode en amplitude et phase de la fonction de transfert  $H_{BO}(p)$  du système non corrigé en plaçant avec précision les points caractéristiques.

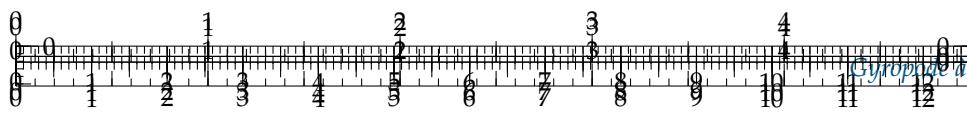
Pour la fin, la courbe de gain sera assimilée à son tracé asymptotique.

**Question 5** Déterminer les valeurs de  $M\varphi$ , marge de phase,  $MG$ , marge de gain et  $BP_0$ , bande passante à 0 dB de la fonction de transfert  $H_B(p)$ . Les critères de la fonction précédente sont-ils vérifiés ?

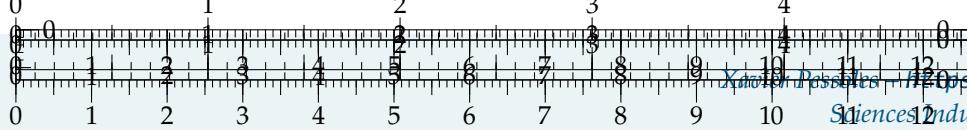
**Question 6** Vérifier les valeurs des marges par le calcul.

On prend une correction proportionnelle :  $C(p) = C_0$ .

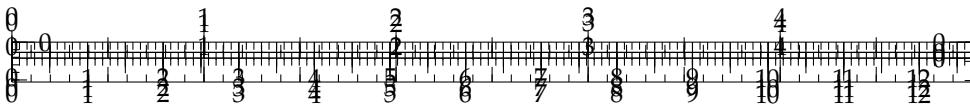




**Question 7** Déterminer la bande de valeurs de  $C_0$  qui permettent de vérifier les critères du cahier des charges partiel donné précédemment.







## TD 4

# Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Sujet

Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert.

### Mise en situation

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servovalve, elle-même commandée en tension  $u$  par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servovalve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.

Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

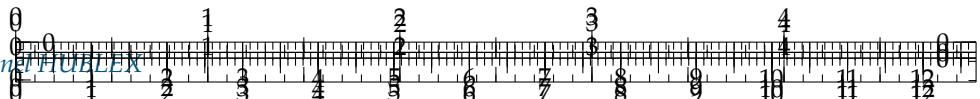
- ▶ précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5%;
- ▶ rapidité de l'asservissement :  $t_{5\%} = 0,15 \text{ s}$ ;
- ▶ stabilité : marge de phase de  $45^\circ$ , marge de gain de 10 dB;
- ▶ sécurité du mouvement : aucun dépassement.

### Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- ▶  $S = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , surface utile des pistons;
- ▶  $b = 10^9 \text{ Pa}$  : module de compressibilité du fluide utilisé;
- ▶  $P_a = 150 \times 10^5 \text{ Pa}$  : pression d'alimentation de la servovalve;
- ▶  $K = 10^{-7} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \text{Pa}^{-0.5}$  : constante de débit de la servovalve;
- ▶  $\varphi = 10^{-11} \text{ m}^3 \text{Pa}^{-1}$  : facteur de fuite dans le vérin;
- ▶  $q(t)$  : débit entrant et sortant du vérin;
- ▶  $V_1$  et  $V_2$  : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse :  $V_1 = V_2 = V = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ );
- ▶  $p(t) = p_1 - p_2$  : différence des pressions dans les chambres du vérin;
- ▶  $z(t)$  : déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre;
- ▶  $M = 700 \text{ kg}$  : masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot;
- ▶  $k = 10^5 \text{ Nm}^{-1}$  : raideur équivalente de la structure du robot;





- $\mu = 100 \text{ N s m}^{-1}$  : coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- $F_0 = 3000 \text{ N}$  : effort nominal sur le vérin ;
- $Z_0 = 50 \text{ cm}$  : position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur  $k$ .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe  $\vec{z}$  du vérin, conduit à l'équation :

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}.$$

**Question 1** Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>► l'inertie du robot;</li> <li>► à la raideur du robot;</li> <li>► au frottement visqueux;</li> <li>► à la pression dans la chambre;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>► à la compressibilité de l'huile;</li> <li>► au déplacement de la tige de vérin;</li> <li>► aux fuites entre les chambres.</li> </ul> |
|--|---|

**Question 2** En considérant une évolution au point de fonctionnement  $P_0$ ,  $F_0$  et  $Z_0$ , traduire l'équation d'équilibre du vérin.

**Question 3** On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors  $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$ ,  $F_{\text{forage}(t)} = F_0 + \Delta F(t)$  et  $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$ . Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

**Question 4** En considérant une évolution au point de fonctionnement  $P_0$ ,  $Q_0$  et  $Z_0$ , traduire l'équation de bilan des débits.

**Question 5** On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors  $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ . Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

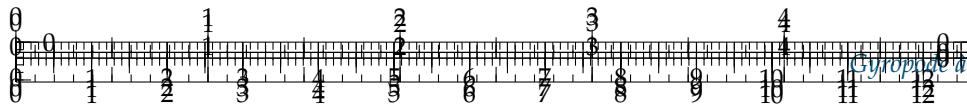
**Question 6** À partir des équations obtenues, compléter le schéma-blocs traduisant son comportement.

../../../../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_02\_Rapidite/Cy\_02\_Ch\_02\_TD\_01\_RobotClimber/images/fig\_03.j

### Modélisation du comportement de la servovalve

La servovalve permet de fournir le débit  $q(t)$  au vérin à partir d'une tension de commande  $u(t)$  appliquée en entrée : la tension  $u(t)$  est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante  $p_a$  et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension  $u(t)$ , mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire :  $q(t) = Ku(t)\sqrt{p_a - p(t)}$ .





Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

**Question 7** Déterminer la relation liant  $Q_0$ ,  $U_0$  et  $P_0$  au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera  $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$ ,  $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$  et  $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$ .

**Question 8** Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servovalve et vérin, admettant en entrée la tension  $\Delta U(p)$  et la force  $\Delta F(p)$ , et en sortie la position  $\Delta Z(p)$ .

## Asservissement de position

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

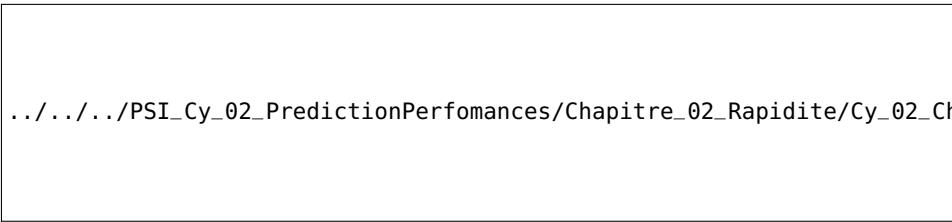
- ▶ la servovalve, qui fournit le débit  $q(t)$  au vérin à partir d'un signal de commande  $u(t)$ ;
- ▶ un capteur de position de fonction de transfert  $k_c$ , qui fournit une tension  $\text{Im}(z(t))$  image de la position réelle  $z(t)$ ;
- ▶ un correcteur  $C(p)$  qui élabore la commande  $u(t)$  de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre  $\text{Im}(z_c(t))$ , image de la consigne de position, et  $\text{Im}(z(t))$ .  $\text{Im}(z_c(t))$  est obtenue grâce à un adaptateur  $K_a$  situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

**Question 9** Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

**Question 10** Préciser l'expression de l'adaptateur  $K_a$  pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , et  $G$  sont utilisés pour simplifier les calculs.

**Question 11** À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.



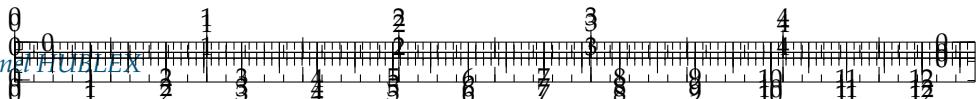
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_02\_Rapidite/Cy\_02\_Ch\_02\_TD\_01\_RobotClimber/images/fig\_04.j

## Validation des performances pour une correction unitaire $C(p) = 1$

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle fermée,  $\text{FTBF}(p) = \frac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2}p + 1,78 \times 10^{-4}p^2 + 4,8 \times 10^{-6}p^3}$ , ainsi que les valeurs numériques des pôles :  $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$  et  $p_3 = -30,4$  (en rad/s).

**Question 12** Le système est-il stable ? Est-il précis ?





**Question 13** À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

**Question 14** À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassements.

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte,  $FTBO(p) = \frac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2}p + 7,03 \times 10^{-3}p^2 + 1,9 \times 10^{-4}p^3}$ , ainsi que les valeurs numériques des pôles :  $p_{12} = -18 \pm 81,6j$  et  $p_3 = -0,75$  (rad/s)

**Question 15** Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.

### Optimisation du comportement : réduction des oscillations

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur »,

$$\text{de fonction de transfert : } C(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_2}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } \xi_1 < \xi_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Question 16** Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

On choisit de prendre  $\omega_0$  égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et  $\xi_2 = 0,7$ .

**Question 17** Proposer une valeur pour le paramètre  $\xi_1$ . Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).

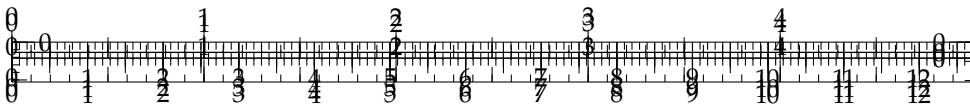
.../.../.../PSI\_Cy\_92\_Predic

#### Éléments de correction

1. ...
2.  $(Mp^2 + \mu p + k) \Delta Z(p) = S\Delta p(p) - \Delta F(p) \text{ et } \Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \left(\varphi + \frac{V}{2b}p\right)\Delta P(p).$
3. ...
4.  $\Delta q = K\Delta U \sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}}\Delta p + \text{termes néglig..}$
5. ...
6. ...
7.  $K_a = k_c.$
8.  $FTBO(p) = \frac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE} \text{ et } FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}.$
9. ...
10. ...
11. ...
12.  $\omega_0 = 83,6 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\xi = 0,21$ ,  $\omega_3 = 0,75 \text{ rad s}^{-1}$ .
13. ...
14. ...

ages/Cy\_0





## TD 4

# Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Corrigé

Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert.

### Mise en situation

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servovalve, elle-même commandée en tension  $u$  par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servovalve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.

Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

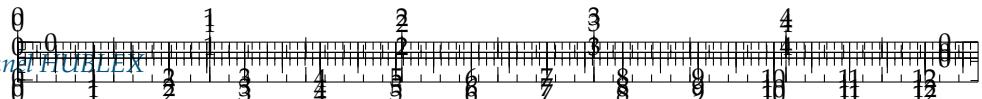
- ▶ précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5%;
- ▶ rapidité de l'asservissement :  $t_{5\%} = 0,15 \text{ s}$ ;
- ▶ stabilité : marge de phase de  $45^\circ$ , marge de gain de 10 dB;
- ▶ sécurité du mouvement : aucun dépassement.

### Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- ▶  $S = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , surface utile des pistons;
- ▶  $b = 10^9 \text{ Pa}$  : module de compressibilité du fluide utilisé;
- ▶  $P_a = 150 \times 10^5 \text{ Pa}$  : pression d'alimentation de la servovalve;
- ▶  $K = 10^{-7} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \text{Pa}^{-0.5}$  : constante de débit de la servovalve;
- ▶  $\varphi = 10^{-11} \text{ m}^3 \text{Pa}^{-1}$  : facteur de fuite dans le vérin;
- ▶  $q(t)$  : débit entrant et sortant du vérin;
- ▶  $V_1$  et  $V_2$  : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse :  $V_1 = V_2 = V = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ );
- ▶  $p(t) = p_1 - p_2$  : différence des pressions dans les chambres du vérin;
- ▶  $z(t)$  : déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre;
- ▶  $M = 700 \text{ kg}$  : masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot;
- ▶  $k = 10^5 \text{ Nm}^{-1}$  : raideur équivalente de la structure du robot;





- $\mu = 100 \text{ N s m}^{-1}$  : coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- $F_0 = 3000 \text{ N}$  : effort nominal sur le vérin ;
- $Z_0 = 50 \text{ cm}$  : position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur  $k$ .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe  $\overrightarrow{z}$  du vérin, conduit à l'équation :

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}.$$

**Question 1** Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>► l'inertie du robot;</li> <li>► à la raideur du robot;</li> <li>► au frottement visqueux;</li> <li>► à la pression dans la chambre;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>► à la compressibilité de l'huile;</li> <li>► au déplacement de la tige de vérin;</li> <li>► aux fuites entre les chambres.</li> </ul> |
|--|---|

#### Correction

Termes correspondant :

- l'inertie du robot :  $M \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$ ;
- à la raideur du robot :  $-k(z(t) - Z_0)$ ;
- au frottement visqueux :  $-\mu \frac{dz(t)}{dt}$ ;
- à la pression dans la chambre :  $Sp(t)$ ;
- à la compressibilité de l'huile :  $\frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}$ ;
- au déplacement de la tige de vérin :  $S \frac{dz(t)}{dt}$ ;
- aux fuites entre les chambres :  $\varphi p(t)$ .

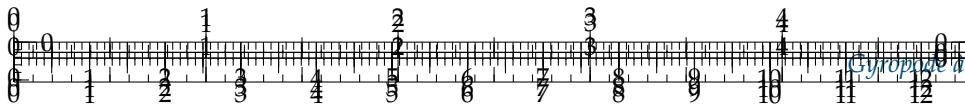
**Question 2** En considérant une évolution au point de fonctionnement  $P_0$ ,  $F_0$  et  $Z_0$ , traduire l'équation d'équilibre du vérin.

#### Correction

On a :  $M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t)$ . Au point de fonctionnement, on a donc  $0 = Sp_0 - F_0$  et donc  $Sp_0 = F_0$ .

**Question 3** On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors  $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$ ,  $F_{\text{forage}}(t) = F_0 + \Delta F(t)$  et  $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$ . Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.





### Correction

Au voisinage du point de fonctionnement, on a donc :  $M \frac{d^2 \Delta z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{d \Delta z(t)}{dt} - k \Delta z(t) + S(P_0 + \Delta p(t)) - F_0 - \Delta F(t)$ . De plus, à l'équilibre,  $SP_0 = F_0$ . Dans le domaine de Laplace, on a alors  $\Delta Z(p) (Mp^2 + \mu p + k) = S \Delta P(p) - \Delta F(p)$ .

**Question 4** En considérant une évolution au point de fonctionnement  $P_0$ ,  $Q_0$  et  $Z_0$ , traduire l'équation de bilan des débits.

### Correction

On a  $q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}$ . Au point de fonctionnement, on a donc  $Q_0 = \varphi P_0$ .

**Question 5** On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors  $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ . Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

### Correction

$$\begin{aligned} \text{Au voisinage du point de fonctionnement, on a donc} \\ Q_0 + \Delta q(t) &= S \frac{d(Z_0 + \Delta z(t))}{dt} + \varphi (P_0 + \Delta p(t)) + \frac{V}{2b} \frac{d(P_0 + \Delta p(t))}{dt} \\ \Leftrightarrow Q_0 + \Delta q(t) &= S \frac{d\Delta z(t)}{dt} + \varphi (P_0 + \Delta p(t)) + \frac{V}{2b} \frac{d\Delta p(t)}{dt} \\ \Leftrightarrow \Delta q(t) &= S \frac{d\Delta z(t)}{dt} + \varphi \Delta p(t) + \frac{V}{2b} \frac{d\Delta p(t)}{dt} \quad (\text{en utilisant la question précédente}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dans le domaine de Laplace, on a donc } \Delta Q(p) &= Sp \Delta Z(p) + \varphi \Delta P(p) + \frac{V}{2b} p \Delta P(p) \text{ soit} \\ \Delta Q(p) &= Sp \Delta Z(p) + \Delta P(p) \left( \varphi + \frac{V}{2b} p \right) \end{aligned}$$

**Question 6** À partir des équations obtenues, compléter le schéma-blocs traduisant son comportement.

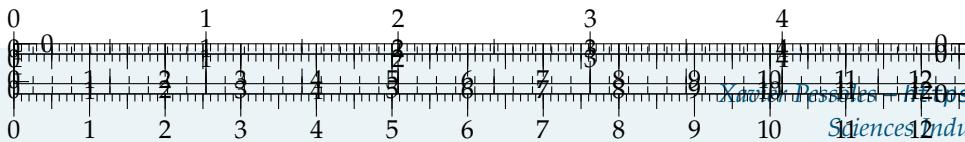
### Correction

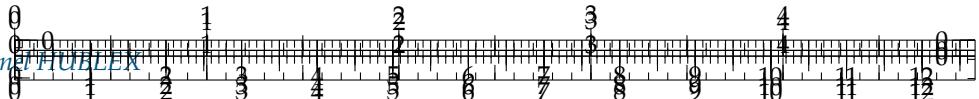
## Modélisation du comportement de la servovalve

La servovalve permet de fournir le débit  $q(t)$  au vérin à partir d'une tension de commande  $u(t)$  appliquée en entrée : la tension  $u(t)$  est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante  $p_a$  et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension  $u(t)$ , mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire :  $q(t) = Ku(t)\sqrt{p_a - p(t)}$ .

Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

**Question 7** Déterminer la relation liant  $Q_0$ ,  $U_0$  et  $P_0$  au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera  $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$ ,  $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$  et  $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$ .





### Correction

Au point de fonctionnement,  $Q_0 = KU_0\sqrt{p_a - P_0}$ .

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} Q_0 + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0 - \Delta p(t)} \\ \Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0 - \Delta p(t)} \\ \Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{(p_a - P_0) \left(1 - \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}\right)} \\ \text{et } \sqrt{1 - \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}} &\simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}\right) \\ \Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0} - \frac{K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0} \\ \Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) &= K(U_0 + \Delta u(t)) \sqrt{p_a - P_0} - \underbrace{\frac{KU_0\sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}}_{\text{on néglige}} - \\ &\quad \underbrace{\frac{K\Delta u(t)\sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}}_{\text{on néglige}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \Delta q(t) = K\Delta u(t)\sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2} \frac{\Delta p(t)}{\sqrt{p_a - P_0}}$$

**Question 8** Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servo-valve et vérin, admettant en entrée la tension  $\Delta U(p)$  et la force  $\Delta F(p)$ , et en sortie la position  $\Delta Z(p)$ .

### Correction

## Asservissement de position

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

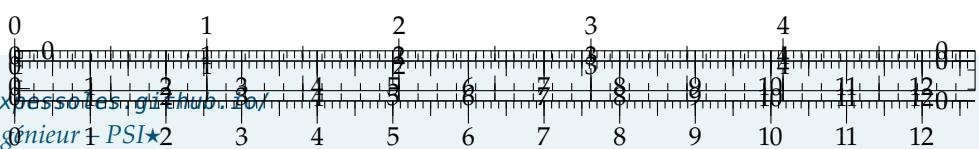
- ▶ la servovalve, qui fournit le débit  $q(t)$  au vérin à partir d'un signal de commande  $u(t)$ ;
- ▶ un capteur de position de fonction de transfert  $k_c$ , qui fournit une tension  $\text{Im}(z(t))$  image de la position réelle  $z(t)$ ;
- ▶ un correcteur  $C(p)$  qui élabore la commande  $u(t)$  de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre  $\text{Im}(z_c(t))$ , image de la consigne de position, et  $\text{Im}(z(t))$ .  $\text{Im}(z_c(t))$  est obtenue grâce à un adaptateur  $K_a$  situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

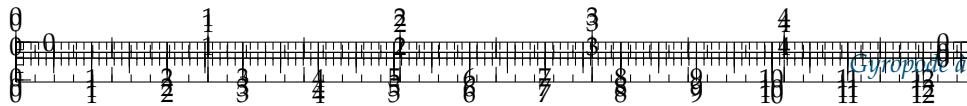
**Question 9** Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

### Correction

**Question 10** Préciser l'expression de l'adaptateur  $K_a$  pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

### Correction

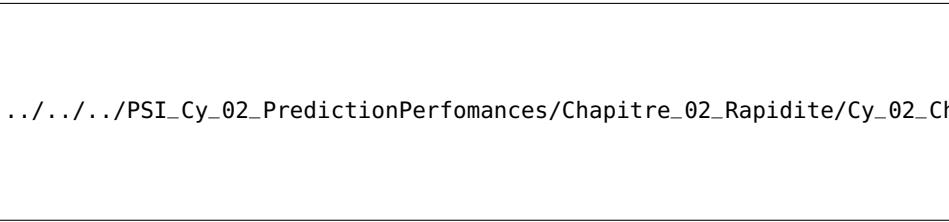




Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , et  $G$  sont utilisés pour simplifier les calculs.

**Question 11** À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.

#### Correction



**Validation des performances pour une correction unitaire  $C(p) = 1$**

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle fermée,  $FTBF(p) = \frac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2}p + 1,78 \times 10^{-4}p^2 + 4,8 \times 10^{-6}p^3}$ , ainsi que les valeurs numériques des pôles :  $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$  et  $p_3 = -30,4$  (en rad/s).

**Question 12** Le système est-il stable ? Est-il précis ?

#### Correction

**Question 13** À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

#### Correction

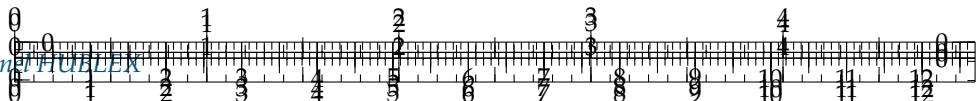
**Question 14** À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassemens.

#### Correction

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte,  $FTBO(p) = \frac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2}p + 7,03 \times 10^{-3}p^2 + 1,9 \times 10^{-4}p^3}$ , ainsi que les valeurs numériques des pôles :  $p_{12} = -18 \pm 81,6j$  et  $p_3 = -0,75$  (rad/s)

**Question 15** Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.





### Correction

## Optimisation du comportement : réduction des oscillations

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur »,

$$\text{de fonction de transfert : } C(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_2}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } \xi_1 < \xi_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Question 16** Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

### Correction

On choisit de prendre  $\omega_0$  égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et  $\xi_2 = 0,7$ .

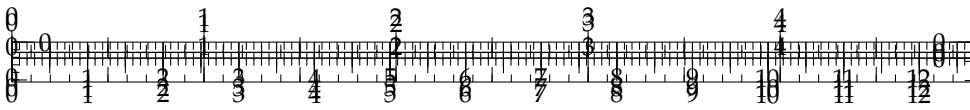
**Question 17** Proposer une valeur pour le paramètre  $\xi_1$ . Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).

### Correction

#### Éléments de correction

1. ...
2.  $(Mp^2 + \mu p + k) \Delta Z(p) = S\Delta p(p) - \Delta F(p)$  et  $\Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \left( \varphi + \frac{V}{2b}p \right) \Delta P(p)$ .
3. ...
4.  $\Delta q = K\Delta U \sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}} \Delta p + \text{termes néglig..}$
5. ...
6. ...
7.  $K_a = k_c$ .
8.  $\text{FTBO}(p) = \frac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE}$  et  $\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$ .
9. ...
10. ...
11. ...
12.  $\omega_0 = 83,6 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\xi = 0,21$ ,  $\omega_3 = 0,75 \text{ rad s}^{-1}$ .
13. ...
14. ...





## TD 5

# Radar d'avion – Sujet

F. Mathurin.

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est  $\theta_c(t)$ , l'angle réel du radar est  $\theta_r(t)$ . La différence des deux angles est transformée en une tension  $u_m(t)$ , selon la loi  $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$ . La tension  $u_m(t)$  engendre, via un moteur de fonction de transfert  $H_m(t)$ , une vitesse angulaire  $\omega_m(t)$ . Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation  $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$  ( $B < 1$ ),  $\omega_r(t)$  étant la vitesse angulaire du radar.

**Question 1** Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes :  $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$ ,  $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t)$  et  $c_m(t) = k_m i(t)$ .

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ .

**Question 3** Montrer que  $H_m(p)$  peut se mettre sous la forme canonique  $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$  et déterminer les valeurs littérales de  $K_m$  et  $T_m$ .

**Question 4** En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de  $\omega_m(t)$  à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de  $\omega_m(t)$  et la valeur finale atteinte par  $\omega_m(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini.

**Question 5** Déterminer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$ . Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de  $H(p)$  à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :

**Question 6** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de  $K$ ,  $z$  et  $\omega_0$ .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite :  $K = 1$ ,  $z = 0,5$  et  $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$ .



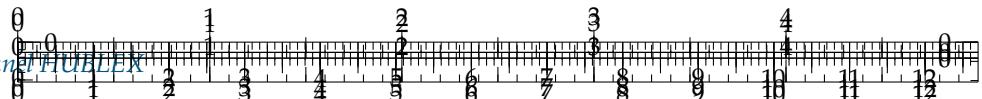
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerf

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerf

Avec :

- ▶  $u(t)$  : tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur);
- ▶  $e(t)$  : force contre-électromotrice (en V);
- ▶  $i(t)$  : intensité (en A);
- ▶  $\omega_m(t)$  : vitesse de rotation du moteur (en rad/s);
- ▶  $C_m(t)$  : couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner);
- ▶  $J$  : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m<sup>2</sup>) ;
- ▶  $R$  : résistance électrique du moteur;
- ▶  $k_e$  : constante de force contre-électromotrice;
- ▶  $k_m$  : constante de couple.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerf



**Question 7** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}.$$

**Question 8** Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

**Question 9** Déterminer  $G$  et  $\varphi$  pour  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ .

**Question 10** Déterminer, en régime permanent,  $\theta_r(t)$  pour une entrée  $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$ .

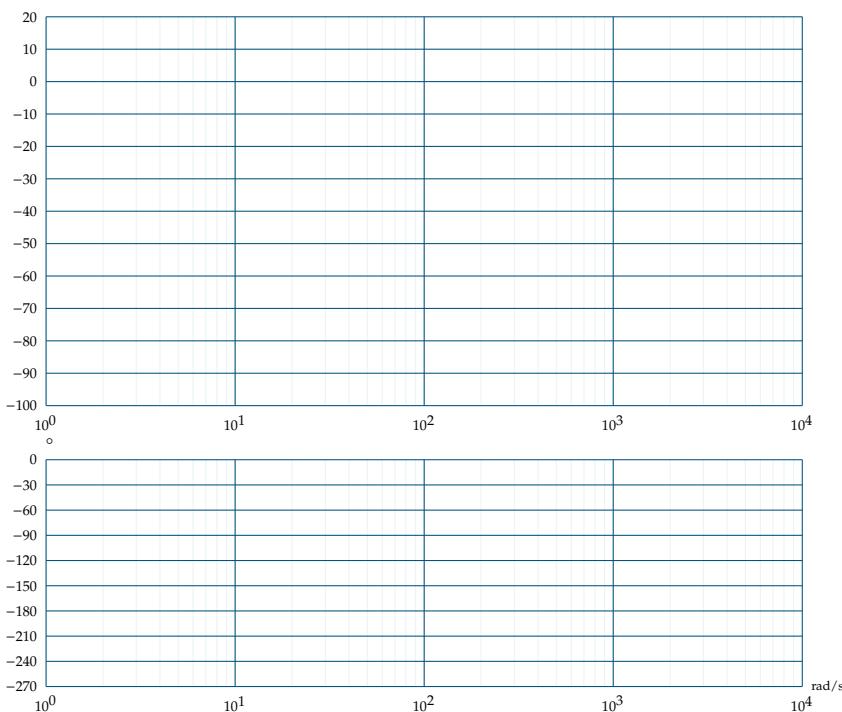
Pour  $\omega < 20 \text{ rad/s}$ , on a  $H(p) \approx \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

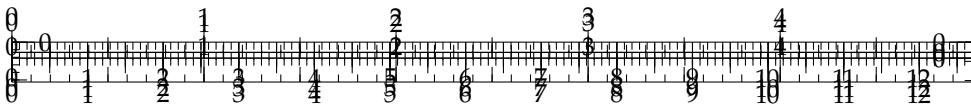
**Question 11** Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à  $-3 \text{ dB}$ . Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

.../.../PSI\_Cy-

92\_PredictionPerformances/Chapitre\_02\_Rapidite/Cy\_02\_Ch\_02\_TD\_02\_Radar/images/Cy

**Question 12** Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.





## TD 5

# Radar d'avion – Corrigé

F. Mathurin.

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est  $\theta_c(t)$ , l'angle réel du radar est  $\theta_r(t)$ . La différence des deux angles est transformée en une tension  $u_m(t)$ , selon la loi  $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$ . La tension  $u_m(t)$  engendre, via un moteur de fonction de transfert  $H_m(t)$ , une vitesse angulaire  $\omega_m(t)$ . Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation  $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$  ( $B < 1$ ),  $\omega_r(t)$  étant la vitesse angulaire du radar.

**Question 1** Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes :  $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$ ,  $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t)$  et  $c_m(t) = k_m i(t)$ .

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ .

**Question 3** Montrer que  $H_m(p)$  peut se mettre sous la forme canonique  $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$  et déterminer les valeurs littérales de  $K_m$  et  $T_m$ .

**Question 4** En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de  $\omega_m(t)$  à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de  $\omega_m(t)$  et la valeur finale atteinte par  $\omega_m(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini.

**Question 5** Déterminer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$ . Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de  $H(p)$  à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :

**Question 6** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de  $K$ ,  $z$  et  $\omega_0$ .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite :  $K = 1$ ,  $z = 0,5$  et  $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$ .



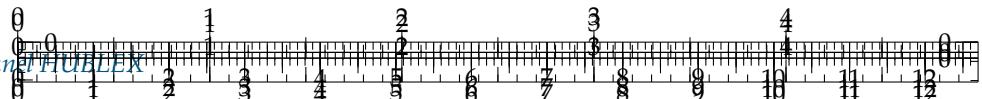
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerf

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerf

Avec :

- ▶  $u(t)$  : tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur);
- ▶  $e(t)$  : force contre-électromotrice (en V);
- ▶  $i(t)$  : intensité (en A);
- ▶  $\omega_m(t)$  : vitesse de rotation du moteur (en rad/s);
- ▶  $C_m(t)$  : couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner);
- ▶  $J$  : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m<sup>2</sup>) ;
- ▶  $R$  : résistance électrique du moteur;
- ▶  $k_e$  : constante de force contre-électromotrice;
- ▶  $k_m$  : constante de couple.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerf



**Question 7** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}.$$

**Question 8** Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

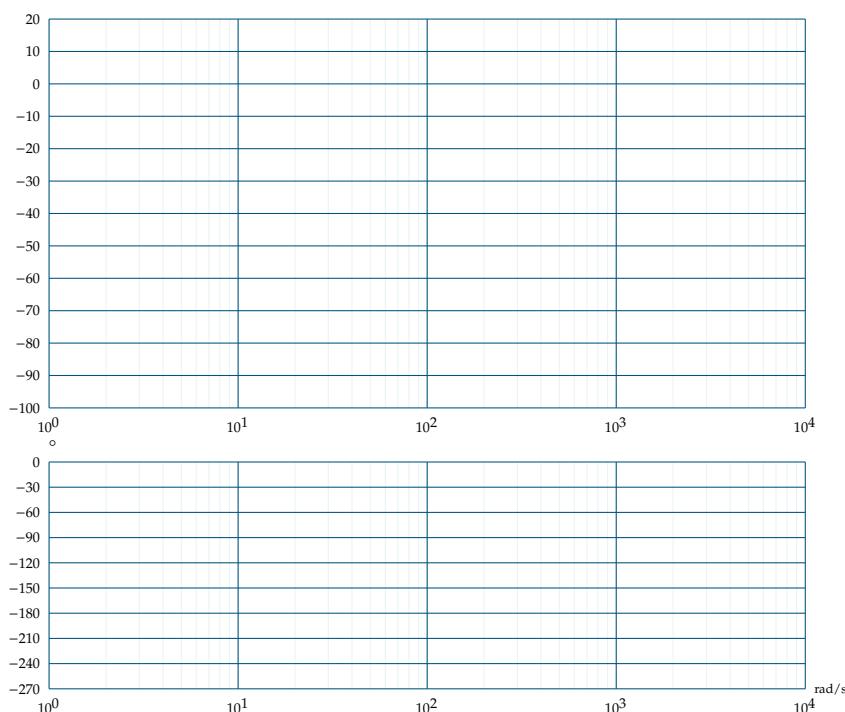
**Question 9** Déterminer  $G$  et  $\varphi$  pour  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ .

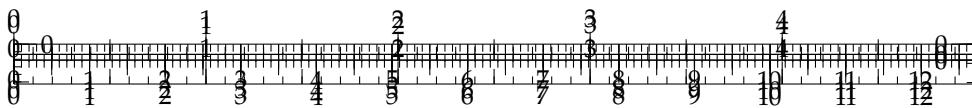
**Question 10** Déterminer, en régime permanent,  $\theta_r(t)$  pour une entrée  $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$ .

Pour  $\omega < 20 \text{ rad/s}$ , on a  $H(p) \approx \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

**Question 11** Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à  $-3 \text{ dB}$ . Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

**Question 12** Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.





## TD 6

# Base TC200 Tecdron – Sujet

Centrale Supelec TSI 2021.

C2-03

### Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.

### Validation de l'asservissement du moteur

#### Objectif

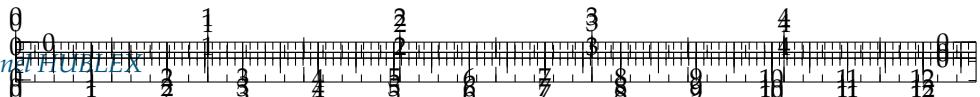
Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire  $C_f(p) = 0$ .

	Performance attendue
tive en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon	$\mu_{v\infty} < 1 \%$
e $\omega_{mc0}$	
itesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe	$\leq 100 \text{ rad s}^{-1}$ pour une
$mc(t) = at$	pente de $1800 \text{ rad s}^{-1}$
réponse à 5 %	$t_{5\%} < 180 \text{ ms}$
ment maximal	$\leq 10 \%$
phase	$\geq 60^\circ$





.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_02\_Rapidite/Cy\_02\_Ch\_02\_TD\_03

Fonction de transfert	Expression	Valeur
Codeur et sa carte de traitement	$K_{cod}$	$0,2 \text{ V s rad}^{-1}$
Constante de couple	$K_t$	$0,09 \text{ N m A}^{-1}$
Correcteur de type proportionnel	$C_2(p) = K_2$	
Dynamique de la motorisation	$H_2(p) = \frac{1}{J_{eq}p}$	$J_{eq} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$

**Question 1** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$  pour  $C_f(p) = 0$ .

**Question 2** Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

**Question 3** Déterminer la condition sur  $K_2$  afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

**Question 4** Calculer l'erreur relative en régime permanent  $\mu_{v\infty}$  pour une consigne de vitesse en échelon de valeur  $\omega_{mc0}$ .

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.

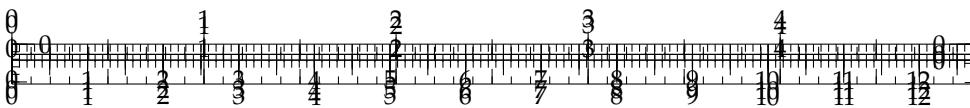
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_02\_Rapidite/Cy\_02\_Ch\_02\_TD\_03

**Question 5** Identifier la valeur de  $K_2$  qui a été réellement choisie par le constructeur.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_02\_Rapidite/Cy\_02\_Ch\_02\_TD\_03\_TC200/images/Cy\_02\_Ch\_02\_TD\_03\_TC200\_im

**Question 6** A partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent  $\Delta\omega_\infty$  pour une consigne de vitesse en rampe de pente  $a$  et valider le critère de précision des exigences.





## TD 6

# Base TC200 Tecdron – Corrigé

Centrale Supelec TSI 2021.

C2-03

### Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.

### Validation de l'asservissement du moteur

#### Objectif

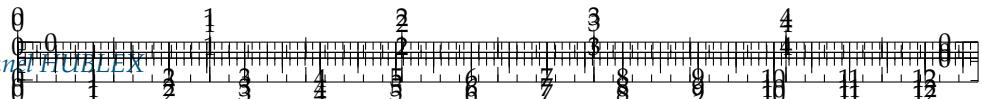
Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire  $C_f(p) = 0$ .

	Performance attendue
tive en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon	$\mu_{v\infty} < 1 \%$
e $\omega_{mc0}$	
itesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe	$\leq 100 \text{ rad s}^{-1}$ pour une
$\omega_{mc}(t) = at$	pente de $1800 \text{ rad s}^{-1}$
réponse à 5 %	$t_{5\%} < 180 \text{ ms}$
ment maximal	$\leq 10 \%$
phase	$\geq 60^\circ$





.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_02\_Rapidite/Cy\_02\_Ch\_02\_TD\_03

Fonction de transfert	Expression	Valeur
Codeur et sa carte de traitement	$K_{cod}$	$0,2 \text{ V s rad}^{-1}$
Constante de couple	$K_t$	$0,09 \text{ N m A}^{-1}$
Correcteur de type proportionnel	$C_2(p) = K_2$	
Dynamique de la motorisation	$H_2(p) = \frac{1}{J_{eq}p}$	$J_{eq} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$

**Question 1** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$  pour  $C_f(p) = 0$ .

Correction

**Question 2** Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

Correction

**Question 3** Déterminer la condition sur  $K_2$  afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

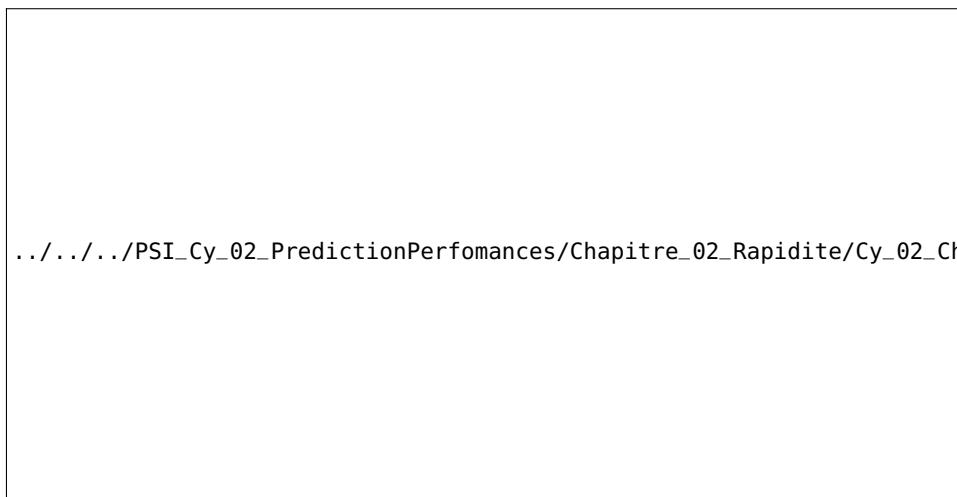
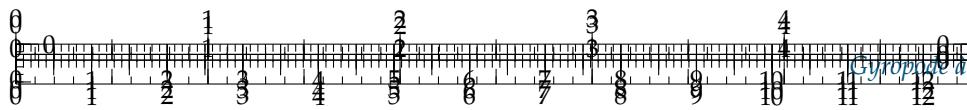
Correction

**Question 4** Calculer l'erreur relative en régime permanent  $\mu_{v\infty}$  pour une consigne de vitesse en échelon de valeur  $\omega_{mc0}$ .

Correction

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.





**Question 5** Identifier la valeur de  $K_2$  qui a été réellement choisie par le constructeur.

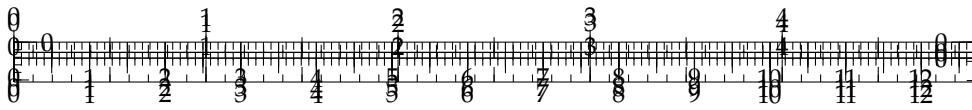
**Correction**

**Question 6** À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent  $\Delta\omega_\infty$  pour une consigne de vitesse en rampe de pente  $a$  et valider le critère de précision des exigences.

**Correction**



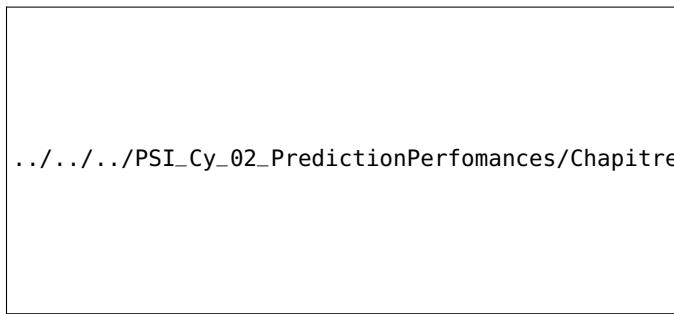




## Application 4

### Précision des systèmes – Sujet

On considère le schéma-blocs suivant.



On a  $H_r(p) = K_r \frac{1 + 0,492p}{1 + 10,34p + 5,1p^2}$  et  $K_r = 0,37 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .  $H_m(p) = \frac{0,5}{(1 + 10p)(1 + 0,5p)}$   
Le gain du capteur est de  $a = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$ .

On considère que  $C(p) = K_p$  et que  $C_r(p) = 0$ .

**Question 1** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que  $C(p) = K_p$  et que  $C_r(p)$  est une perturbation de type échelon.

**Question 2** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que  $C(p) = K_p + \frac{1}{T_ip}$  et que  $C_r(p) = 0$ .

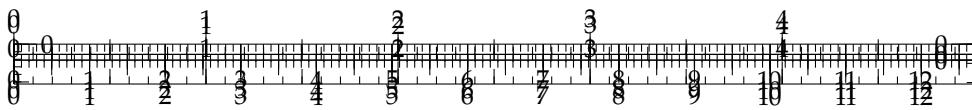
**Question 3** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que  $C(p) = K_p + \frac{1}{T_ip}$  et que  $C_r(p)$  est une perturbation de type échelon.

**Question 4** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.



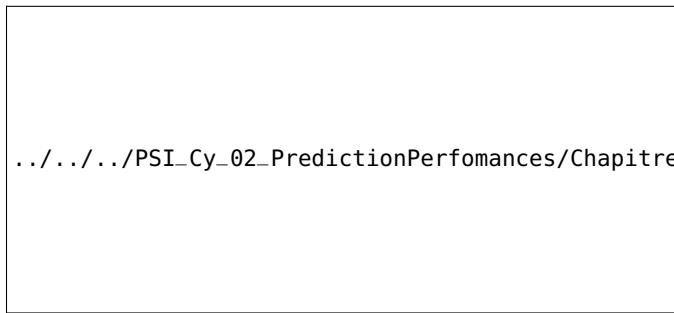




## Application 4

### Précision des systèmes – Corrigé

On considère le schéma-blocs suivant.



On a  $H_r(p) = K_r \frac{1 + 0,492p}{1 + 10,34p + 5,1p^2}$  et  $K_r = 0,37 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .  $H_m(p) = \frac{0,5}{(1 + 10p)(1 + 0,5p)}$ . Le gain du capteur est de  $a = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$ .

On considère que  $C(p) = K_p$  et que  $C_r(p) = 0$ .

**Question 1** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que  $C(p) = K_p$  et que  $C_r(p)$  est une perturbation de type échelon.

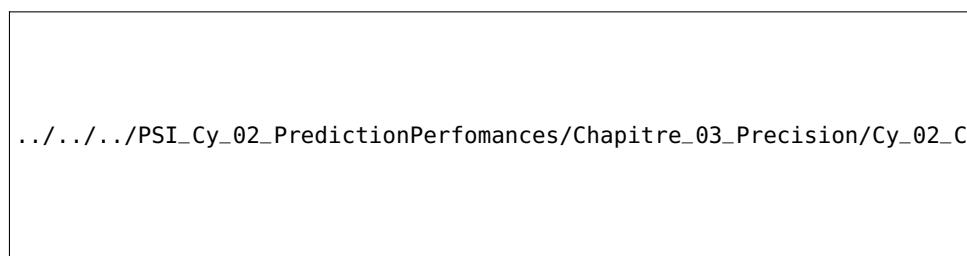
**Question 2** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que  $C(p) = K_p + \frac{1}{T_ip}$  et que  $C_r(p) = 0$ .

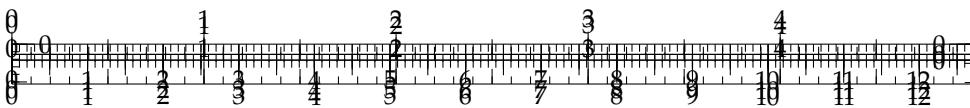
**Question 3** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que  $C(p) = K_p + \frac{1}{T_ip}$  et que  $C_r(p)$  est une perturbation de type échelon.

**Question 4** Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.







## Application 5

### Cellule d'assemblage pour avion Falcon Sujet

E3A – PSI 2015.

#### Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.

[.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerfo](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerfo)

[.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerformances/Chapitre\\_03\\_Precision/Cy\\_02\\_Ch\\_03\\_Application\\_02\\_Asse...](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerformances/Chapitre_03_Precision/Cy_02_Ch_03_Application_02_Asse...)

#### Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

#### Étude du modèle simplifié

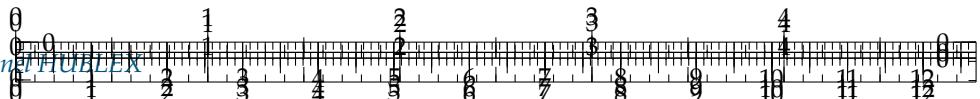
Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante.  
Le couple résistant  $C_r$  dû à l'action de pesanteur est supposé constant.

$$H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} \quad \text{et}$$

$$\frac{(R + Lp) K_M}{K_C} \\ H_C(p) = \frac{K_C}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}.$$

[.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerfomances/Chapitre\\_03\\_Precision/Cy\\_02\\_Ch\\_03\\_Application\\_02\\_AssemblageFalcon/i](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerfomances/Chapitre_03_Precision/Cy_02_Ch_03_Application_02_AssemblageFalcon/i)





## Etude du modèle sans perturbation

**Question 1** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

**Question 2** On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

## Etude du modèle avec perturbation

**Question 3** Donner l'expression de  $\varepsilon(p)$ .

**Question 4** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

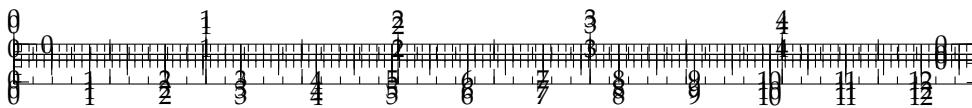
**Question 5** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

**Question 6** On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

**Question 7** On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_03\_Precision/Cy\_02\_Ch\_03\_Application\_02\_AssemblageFall





## Application 5

### Cellule d'assemblage pour avion Falcon Corrigé

E3A – PSI 2015.

#### Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_03\_Precision/Cy\_02\_Ch\_03\_Application\_02\_Asse

#### Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

#### Étude du modèle simplifié

##### Etude du modèle sans perturbation

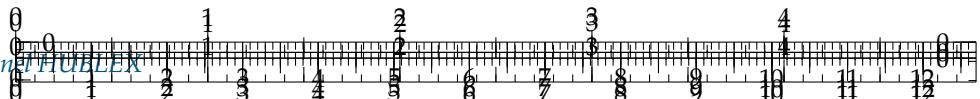
**Question 1** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

##### Correction

**Question 2** On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

##### Correction





## Etude du modèle avec perturbation

**Question 3** Donner l'expression de  $\varepsilon(p)$ .

### Correction

On raisonne par superposition :

Si  $C_r(p) = 0$  :

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{\frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r} \end{aligned}$$

### Correction

Si  $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$  :

$$\begin{aligned} Y_2(p) &= C_r(p) \frac{\frac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\ &= C_r(p) \frac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \\ &= C_r(p) \frac{(R + Lp) K_M K_r}{K_C (1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M} \end{aligned}$$

On a donc :  $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$ .

**Question 4** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

### Correction

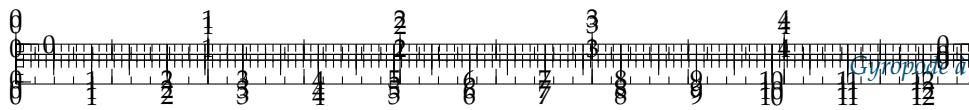
**Question 5** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

### Correction

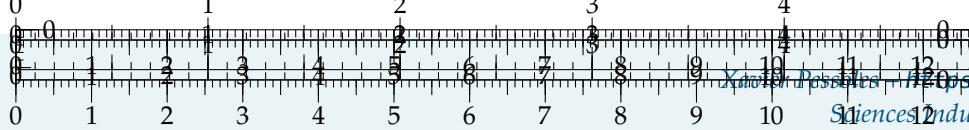
**Question 6** On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

### Correction

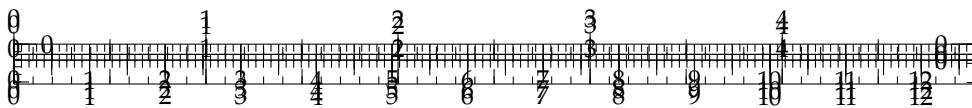




**Question 7** On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ . Pouvait-on prévoir le résultat?

**Correction**





## TD 7

# Fauteuil dynamique de cinéma – Sujet

Concours Centrale-Supélec TSI 2015

### Présentation du système

Ce concept a été inventé au Canada en 2008, et s'est étendu à toute l'Amérique du Nord avant de traverser l'Atlantique pour proposer un cinéma dynamique avec une quantité d'effets spéciaux et spatiaux. Le fauteuil dynamique de cinéma est principalement destiné à l'industrie du divertissement et de la simulation.

### Mise en situation

Le siège dynamique est constitué :

- ▶ du dossier qui permet d'agir directement sur la tête du spectateur afin d'amplifier la sensation d'accélération (via l'oreille interne);
- ▶ de l'assise du siège qui permet d'obtenir un mouvement de tangage et un mouvement de roulis du spectateur.

Les trois motorisations (une pour le dossier et deux pour l'assise) sont composées chacune d'un moteur à courant continu à aimants permanents et d'un réducteur de vitesse. Chaque moteur est alimenté par un variateur de vitesse dont la structure de puissance est un hacheur. Un capteur de courant interne au variateur est utilisé par ce dernier pour réaliser un asservissement de courant, donc implicitement de couple. Une génératrice tachymétrique accouplée à l'axe de chaque moteur est utilisée par le variateur correspondant pour réaliser un asservissement de vitesse. Un codeur incrémental accouplé aussi sur l'axe de chaque moteur est utilisé par une carte à base de microcontrôleur pour réaliser un asservissement de position, une sortie analogique de cette carte étant reliée à l'entrée de consigne du variateur de vitesse.

### Exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération »

#### Objectif

Proposer un modèle de comportement des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

#### Exigence : amplifier la sensation d'accélération

- ▶ Précision statique de la boucle d'asservissement de position :

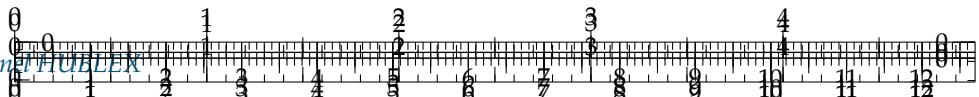


Concours Centrale-Supélec TSI 2015

C1-01

C2-03

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo



- erreur statique de position < 1%;
- erreur statique de traînage < 1%;
- erreur statique d'accélération < 1% .

- Rapidité pour un échelon de consigne d'accélération :
- temps de montée de 0 à 100% de la consigne < 5 ms ;
  - dépassement < 20%.

## Comportement de l'ensemble variateur et moteur du dossier

### Objectif

- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de courant.
- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de vitesse.
- Analyser la précision de l'asservissement de position.

### Modélisation de l'asservissement de vitesse

**NE PAS TRAITER LES QUESTIONS 1 à 3.**

### Remarque

Les 3 premières questions n'ont pas vraiment d'intérêt. Je les ai laissées car elles apparaissaient dans le sujet initial.

L'étude suivante consiste à obtenir un modèle simplifié de la boucle d'asservissement de vitesse (figure suivante) au regard des réglages effectués et de l'influence d'une perturbation de type échelon sur le dossier. En effet, vu la courte durée des sollicitations, la perturbation sur le dossier, dont l'origine peut être une action du spectateur sur ses muscles cervicaux, peut être modélisée par un échelon.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_03\_Precision/Cy\_02\_Ch\_03\_TD\_0

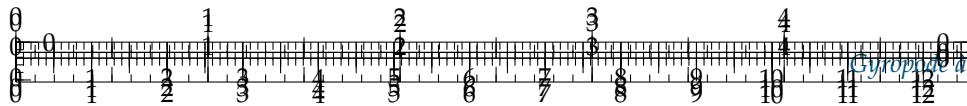
**FIGURE 3.25** – Modèle de la boucle d'asservissement de vitesse

On a  $C_\Omega(p) = k_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right)$ . De plus :  $K = 0,115 \text{ N m A}^{-1}$ ;  $R = 1 \Omega$ ;  $L = 1,1 \text{ mH}$ ;  $K_{rI} = 0,5 \text{ V A}^{-1}$ ;  $r = 1/50$ ;  $f = 4,1 \times 10^{-4} \text{ N m s rad}^{-1}$ ;  $J = 0,16 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ .

**Question 1** Exprimer la fonction de transfert de la boucle de vitesse  $H_\Omega(p) = \Omega(p)/U_{C\Omega}(p)$ , lorsque  $C_R(p) = 0$ . Le résultat sera mis sous une forme canonique.

**Question 2**  $T_1$  étant égal à  $J/f$ , montrer alors que la fonction de transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme  $\frac{b}{\tau p + 1}$ . Calculer les valeurs numériques des termes  $b$  et  $\tau$ .

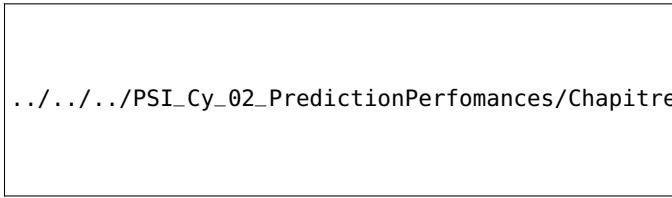




**Question 3** En déduire, à l'aide de la figure précédente,  $\theta(p)/C_R(p)$  lorsque  $\theta_C(p) = 0$ . Calculer ensuite la valeur finale de  $\theta(t)$  lorsque  $c_R(t)$  est un échelon unitaire. Conclure quant à l'action, en régime permanent, du correcteur proportionnel et intégral sur les effets d'une perturbation  $c_R(t)$  de type échelon.

### Modélisation de la boucle d'asservissement de position

Après toutes les simplifications précédentes, est obtenu le modèle de la figure suivante où seul le comportement en réponse à la consigne  $\theta_C$  est abordé.



**Question 4** Exprimer la fonction de transfert  $\theta(p)/\theta_C(p)$ . Déterminer ensuite la valeur numérique de  $a$  pour avoir un facteur d'amortissement égal à 0,7. Justifier le choix de ce facteur d'amortissement. (Pour ce calcul et les calculs suivants prendre  $b = 63 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ,  $\tau = 2,2 \text{ ms}$ ,  $c = 40 \text{ rad}^{-1}$ .)

### Analyse de la précision du système

Un aspect important pour la simulation sensorielle du siège dynamique est la capacité du système à reproduire fidèlement la consigne de position issue du programme de simulation sensorielle du siège dynamique. Dans un premier temps, l'étude se limite à la précision statique en utilisant le modèle défini à la figure précédente. L'erreur représente la différence entre l'entrée  $\theta_C(t)$  et la sortie  $\theta(t)$  et est définie par la variable  $\mu(t) = \theta_C(t) - \theta(t)$ .

**Question 5** Exprimer dans un premier temps  $\mu(p)$  en fonction de  $\theta_C(p)$ , puis déterminer de façon littérale et numérique l'erreur de position  $\mu_p$ , l'erreur de trainage  $\mu_v$  et l'erreur en accélération  $\mu_a$ . Conclure quant à la précision statique du système suite aux différentes consignes  $\theta_C(p)$  de type échelon, rampe et accélération.

### Validation et optimisation de la performance simulée en accélération du dossier

#### Objectif

Valider la performance simulée en accélération au regard du cahier des charges fonctionnel.

La figure suivante représente la structure d'une correction par anticipation qui permet d'améliorer la précision statique du système

**Question 6** Déterminer l'erreur de position  $\mu_p$  puis l'erreur de traînage  $\mu_v$ . Conclure sur l'erreur de position au regard du cahier des charges.



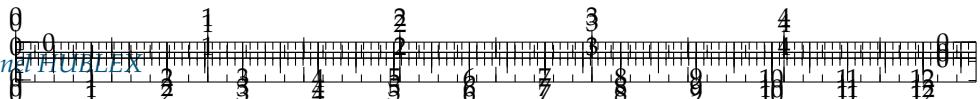


FIGURE 3.27 – Structure avec anticipation

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_03\_Precision/Cy\_02\_Ch\_03\_TD\_01

**Question 7** D'après l'erreur de traînage  $\mu_v$  déterminée à la question précédente, calculer la valeur numérique de  $d$  qui permet d'annuler cette erreur de traînage. En prenant en compte la valeur numérique de  $d$  et de  $b$ , déterminer l'expression de l'erreur en accélération  $\mu_a$ . Calculer ensuite sa valeur numérique et conclure au regard du cahier des charges.

Un aspect important pour la simulation sensorielle du siège dynamique est la capacité du système à reproduire rapidement les consignes d'accélération. À l'aide d'une simulation, la variable accélération  $\dot{\theta}_d$  possède les deux comportements donnés figure suivante pour la période transitoire, et ce lorsque la consigne vaut  $\theta_{Cd}(t) = \frac{t^2}{2}u(t)$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_03\_Precision/Cy\_02\_Ch\_03\_TD\_02

FIGURE 3.28 – Accélération du dossier et avec et sans anticipation

**Question 8** Conclure quant au respect du cahier des charges vis-à-vis des accélérations produites par le dossier du siège dynamique de cinéma.

### Exigence fonctionnelle « incliner le spectateur suivant l'axe de tangage et de roulis »

#### Objectif

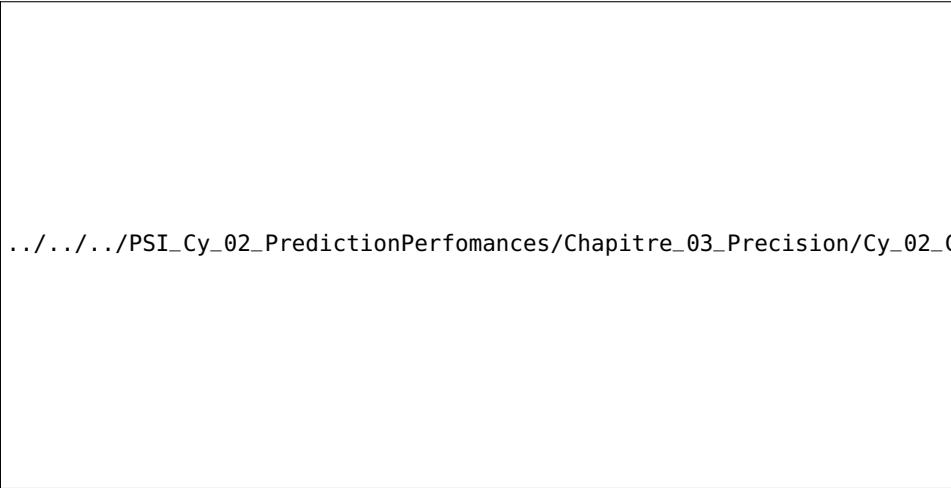
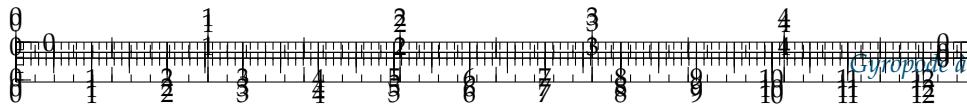
Valider le choix de conception pour la réalisation de la commande simultanée des deux moteurs de l'assise du siège.

En mode simultané (figure suivante), les consignes de vitesse de chaque variateur sont issues d'un calculateur numérique :  $a$ ,  $d$  et  $c$  sont identiques. En revanche, le réglage du retour vitesse des cartes variateur est effectué à l'aide d'un potentiomètre et celui-ci peut ne pas avoir été réglé avec précision. En imposant le réglage du retour vitesse de la motorisation 1 à  $5 \text{ V}$  pour  $3000 \text{ tr min}^{-1}$  et celui de la motorisation 2 à  $5,5 \text{ V}$  pour  $3000 \text{ tr min}^{-1}$ ,

les calculs donnent  $b_1 = 62,8 \text{ rad.s}^{-1}.V^{-1}$  et  $b_2 = 57,1 \text{ rad.s}^{-1}.V^{-1}$ . Les inerties au niveau de chaque moteur, supérieures à celle au niveau du moteur de dossier, peuvent fluctuer en fonction de la position du spectateur.

En tenant compte d'une variation d'inertie de 10%, les calculs donnent  $\tau_1 = 1/366 \text{ s}$  et  $\tau_2 = 1/447 \text{ s}$ . On prendra  $a = 0,09 \text{ V}$ ,  $c = 40 \text{ rad}^{-1}$  et  $d = 0,016 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$ .





née des

**Question 9** En réutilisant éventuellement les calculs effectués aux questions ?? et ?? et en tenant compte des différences de réglage de retour vitesse et des différences d'inertie entre les deux motorisations, exprimer la valeur finale de  $\theta_1(t) - \theta_2(t)$  lorsque la consigne  $\theta_C(t)$  est respectivement égale à  $u(t)$ ,  $t \cdot u(t)$  puis  $\frac{t^2}{2}u(t)$ ,  $u(t)$  étant la fonction échelon unité.

La figure ?? représente le résultat d'une simulation de  $\theta_1(t) - \theta_2(t)$  pour une consigne  $\theta_C(t) = \frac{t^2}{2}U(t)$

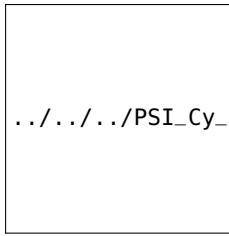
**Question 10** Conclure quant à l'erreur en accélération lors de la commande simultanée.

#### Éléments de correction

1.  $H_\Omega(p) = \frac{\frac{1}{K_\Omega}(1 + T_1 p)}{\frac{T_1 K_{rI} J}{K_\Omega k_1 K} p^2 + \left(\frac{f K_{rI}}{K_\Omega k_1 K} + 1\right) T_1 p + 1}$ .
2.  $b = \frac{1}{K_\Omega} = 20\pi = 62,8 \text{ rad s}^{-1}\text{V}^{-1}$  et  $\tau = \frac{K_{rI} J}{k_1 K K_\Omega} = 2,17 \times 10^{-3} \text{ s}$ .
3.  $-\frac{T_1 K_{rI} p}{k_1 (T_1 p + 1) K} \cdot \frac{b}{p(1 + \tau p) + abc}$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 1$ .
4.  $a = \frac{1}{4bc\tau\xi^2} = 0,092$ .
5.  $\mu(p) = \frac{p(1 + \tau p)}{p(1 + \tau p) + abc} \theta_c(p)$ ,  $\mu_p = 0$ ,  $\mu_v = \frac{1}{abc}$  et  $\mu_a = \infty$ .
6.  $\mu_p = 0$  et  $\mu_v = \frac{1 - bd}{ab}$ .
7. ...
8. ...
9. ...
10. ...

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo

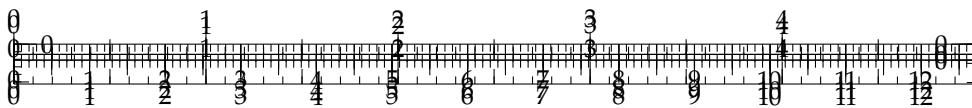
FIGURE 3.30 –  $\theta_1 - \theta_2$  en fonction du temps



.../.../.../PSI\_Cy\_02\_Prediction







## TD 7

# Fauteuil dynamique de cinéma – Corrigé

Concours Centrale-Supélec TSI 2015

C1-01

C2-03

### Présentation du système

#### Mise en situation

**Exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération »**

**Comportement de l'ensemble variateur et moteur du dossieret**

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo

#### Objectif

- ▶ Établir un modèle simplifié de l'asservissement de courant.
- ▶ Établir un modèle simplifié de l'asservissement de vitesse.
- ▶ Analyser la précision de l'asservissement de position.

#### Modélisation de l'asservissement de vitesse

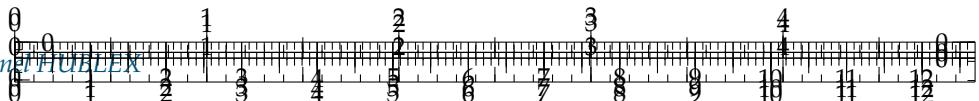
**NE PAS TRAITER LES QUESTIONS 1 à 3.**

**Question 1** Exprimer la fonction de transfert de la boucle de vitesse  $H_\Omega(p) = \Omega(p)/U_{C\Omega}(p)$ , lorsque  $C_R(p) = 0$ . Le résultat sera mis sous une forme canonique.

#### Correction

$$\begin{aligned}
 H_\Omega(p) &= \frac{k_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right) \frac{K}{K_{rI}} \frac{1}{Jp + f}}{1 + K_\Omega k_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right) \frac{K}{K_{rI}} \frac{1}{Jp + f}} = \frac{k_1 (1 + T_1 p) K}{T_1 p K_{rI} (Jp + f) + K_\Omega k_1 (1 + T_1 p) K} \\
 &= \frac{\frac{Kk_1}{K_\Omega k_1 K} (1 + T_1 p)}{\frac{T_1 K_{rI} J}{K_\Omega k_1 K} p^2 + \left(\frac{f T_1 K_{rI}}{K_\Omega k_1 K} + \frac{K_\Omega k_1 T_1 K}{K_\Omega k_1 K}\right) p + 1} H_\Omega(p) = \frac{\frac{1}{K_\Omega} (1 + T_1 p)}{\frac{T_1 K_{rI} J}{K_\Omega k_1 K} p^2 + \left(\frac{f K_{rI}}{K_\Omega k_1 K} + 1\right) T_1 p + 1}
 \end{aligned}$$





**Question 2**  $T_1$  étant égal à  $J/f$ , montrer alors que la fonction de transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme  $\frac{b}{\tau p + 1}$ . Calculer les valeurs numériques des termes  $b$  et  $\tau$ .

#### Correction

$$\text{On a } H_\Omega(p) = \frac{\frac{1}{K_\Omega} \left(1 + \frac{J}{f} p\right)}{\frac{J}{f} K_{rl} J + \frac{K_\Omega k_1 K}{K_\Omega k_1 K} p^2 + \left(\frac{f K_{rl}}{K_\Omega k_1 K} + 1\right) \frac{J}{f} p + 1} = \frac{(f + Jp)}{\frac{K_{rl} J^2}{k_1 K} p^2 + \left(\frac{f K_{rl}}{k_1 K} + K_\Omega\right) Jp + f K_\Omega}$$

$$= \frac{(f + Jp) k_1 K}{K_{rl} J^2 p^2 + (f K_{rl} + K_\Omega k_1 K) Jp + f K_\Omega k_1 K}$$

$$\text{On a : } \Delta = (f K_{rl} + K_\Omega k_1 K)^2 J^2 - 4f K_\Omega k_1 K K_{rl} J^2 = (f^2 K_{rl}^2 + K_\Omega^2 k_1^2 K^2 + 2f K_{rl} K_\Omega k_1 K) J^2 - 4f K_\Omega k_1 K K_{rl} J^2$$

$$= (f^2 K_{rl}^2 + K_\Omega^2 k_1^2 K^2 - 2f K_{rl} K_\Omega k_1 K) J^2 = (f K_{rl} - K_\Omega k_1 K)^2 J^2$$

On a donc

$$p_{12} = \frac{-(f K_{rl} + K_\Omega k_1 K) J \pm (f K_{rl} - K_\Omega k_1 K) J}{2K_{rl} J^2},$$

$$p_1 = \frac{-f J K_{rl} - K_\Omega k_1 K J + f J K_{rl} - K_\Omega k_1 K J}{2K_{rl} J^2} = -\frac{K_\Omega k_1 K}{K_{rl} J}, \quad p_2 = \frac{-f J K_{rl} - K_\Omega k_1 K J - f J K_{rl} + K_\Omega k_1 K J}{2K_{rl} J^2} = -\frac{f}{J}.$$

On a donc

$$H_\Omega(p) = \frac{J \left(\frac{f}{J} + p\right) k_1 K}{\left(p + \frac{f}{J}\right) \left(p + \frac{K_\Omega k_1 K}{K_{rl} J}\right)} = \frac{J k_1 K}{p + \frac{K_\Omega k_1 K}{K_{rl} J}} = \frac{\frac{K_{rl} J^2}{K_\Omega}}{\frac{K_{rl} J}{K_\Omega k_1 K} p + 1}$$

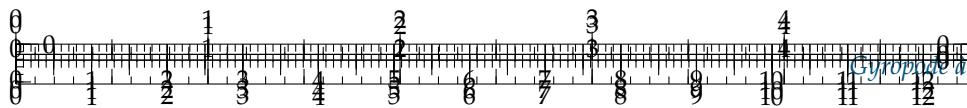
$$\text{On a donc } b = \frac{K_{rl} J^2}{K_\Omega} \text{ et } \tau = \frac{K_{rl} J}{K_\Omega k_1 K}.$$

$$\text{Autre solution : } b = \frac{1}{K_\Omega} = 20\pi = 62,8 \text{ rad s}^{-1} V^{-1} \text{ et } \tau = \frac{K_{rl} J}{k_1 K K_\Omega} = 2,17 \times 10^{-3} \text{ s.}$$

**Question 3** En déduire, à l'aide de la figure précédente,  $\theta(p)/C_R(p)$  lorsque  $\theta_C(p) = 0$ . Calculer ensuite la valeur finale de  $\theta(t)$  lorsque  $c_R(t)$  est un échelon unitaire. Conclure quant à l'action, en régime permanent, du correcteur proportionnel et intégral sur les effets d'une perturbation  $c_R(t)$  de type échelon.

#### Correction





.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_03\_Precision/Cy\_02\_Ch\_03\_TD\_01\_FauteuilDynamique/images/cor\_01.png

$$\begin{aligned} \frac{\theta(p)}{C_r(p)} &= \frac{1}{C_\Omega(p) \frac{K}{K_{ri}}} \frac{\frac{b}{1+\tau p} \frac{1}{p}}{1 + \frac{abc}{1+\tau p} \frac{1}{p}} = \frac{1}{k_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right) \frac{K}{K_{ri}}} \frac{\frac{b}{1+\tau p} \frac{1}{p}}{1 + \frac{abc}{1+\tau p} \frac{1}{p}} \\ &= \frac{T_1 K_{ri} p}{k_1 (T_1 p + 1) K} \cdot \frac{b}{p (1 + \tau p) + abc} \\ \text{et } \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) &= 1. \end{aligned}$$

### Modélisation de la boucle d'asservissement de position

**Question 4** Exprimer la fonction de transfert  $\theta(p)/\theta_C(p)$ . Déterminer ensuite la valeur numérique de  $a$  pour avoir un facteur d'amortissement égal à 0,7. Justifier le choix de ce facteur d'amortissement. (Pour ce calcul et les calculs suivants prendre  $b = 63 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ,  $\tau = 2,2 \text{ ms}$ ,  $c = 40 \text{ rad}^{-1}$ .)

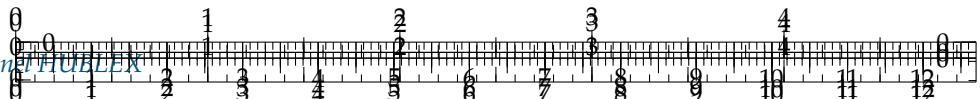
#### Correction

$$\text{On a } \frac{\theta(p)}{\theta_C(p)} = c \frac{\frac{ab}{p(\tau p + 1)}}{1 + \frac{abc}{p(\tau p + 1)}} = \frac{abc}{p(\tau p + 1) + abc} = \frac{1}{\frac{\tau}{abc} p^2 + \frac{p}{abc} + 1}.$$

$$\text{On a } \omega_0 = \sqrt{abc/\tau} \text{ et } \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{abc} \text{ et } \xi = \frac{1}{2\sqrt{abc\tau}}. \text{ En conséquence, } a = \frac{1}{4bc\tau\xi^2} = 0,092.$$

(On prend  $\xi = 0,7$  car cela correspond au temps de réponse le plus rapide pour un second ordre.)





## Analyse de la précision du système

**Question 5** Exprimer dans un premier temps  $\mu(p)$  en fonction de  $\theta_C(p)$ , puis déterminer de façon littérale et numérique l'erreur de position  $\mu_p$ , l'erreur de traînage  $\mu_v$  et l'erreur en accélération  $\mu_a$ . Conclure quant à la précision statique du système suite aux différentes consignes  $\theta_C(p)$  de type échelon, rampe et accélération.

### Correction

$$\text{On a } \mu(p) = \frac{\theta_c(p)}{1 + \frac{abc}{p(1+\tau p)}} = \frac{p(1+\tau p)}{p(1+\tau p) + abc} \theta_c(p) = \frac{p(1+\tau p)}{p(1+\tau p) + abc} \theta_c(p).$$

La FTBO est de classe 1 et de gain  $K_{BO} = abc$  on a donc :

- ▶ pour une entrée échelon,  $\mu_p = 0$ ;
- ▶ pour une entrée rampe,  $\mu_v = \frac{1}{abc}$ ;
- ▶ pour une entrée accélération,  $\mu_a = \infty$ .

## Validation et optimisation de la performance simulée en accélération du dossier

### Objectif

Valider la performance simulée en accélération au regard du cahier des charges fonctionnel.

**Question 6** Déterminer l'erreur de position  $\mu_p$  puis l'erreur de traînage  $\mu_v$ . Conclure sur l'erreur de position au regard du cahier des charges.

### Correction

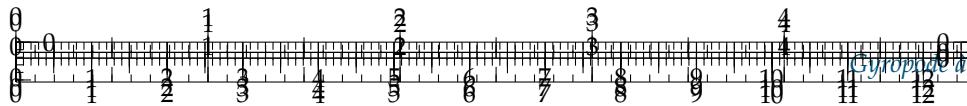
$$\begin{aligned} \text{On a } \varepsilon_{\text{codeur}}(p) &= c\theta_c(p) - c\theta(p) \\ &= c\theta_c(p) - \frac{bc}{p(\tau p + 1)} U_{CQ}(p) = c\theta_c(p) - \frac{bc}{p(\tau p + 1)} (\theta_C(p)dp + a\varepsilon_{\text{codeur}}(p)) \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p) \left(1 + \frac{abc}{p(\tau p + 1)}\right) &= \theta_C(p) \left(c - \frac{bcd}{\tau p + 1}\right) \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p) \left(1 + \frac{abc}{p(\tau p + 1)}\right) &= \theta_C(p)c \frac{\tau p + 1 - bd}{\tau p + 1} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p) &= \theta_C(p)cp \frac{\tau p + 1 - bd}{p(\tau p + 1) + abc} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mu_p &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} cp \frac{\tau p + 1 - bd}{p(\tau p + 1) + abc} = \lim_{p \rightarrow 0} cp \frac{\tau p + 1 - bd}{p(\tau p + 1) + abc} = 0; \\ \mu_v &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2} cp \frac{\tau p + 1 - bd}{p(\tau p + 1) + abc} = \frac{1 - bd}{ab}. \end{aligned}$$

**Question 7** D'après l'erreur de traînage  $\mu_v$  déterminée à la question précédente, calculer la valeur numérique de  $d$  qui permet d'annuler cette erreur de traînage. En prenant en compte la valeur numérique de  $d$  et de  $b$ , déterminer l'expression de l'erreur en accélération  $\mu_a$ . Calculer ensuite sa valeur numérique et conclure au regard du cahier des charges.





### Correction

On a  $\mu_v = \frac{1 - bd}{abc}$ . En conséquences,  $\mu_v = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{1 - bd}{ab} \Leftrightarrow d = \frac{1}{b}$ .

$$\mu_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^3} cp \frac{\tau p + 1 - bd}{p(\tau p + 1) + abc} = \frac{\tau}{ab}.$$

**Question 8** Conclure quant au respect du cahier des charges vis-à-vis des accélérations produites par le dossier du siège dynamique de cinéma.

### Correction

**Exigence fonctionnelle « incliner le spectateur suivant l'axe de tangage et de roulis »**

### Objectif

Valider le choix de conception pour la réalisation de la commande simultanée des deux moteurs de l'assise du siège.

**Question 9** En réutilisant éventuellement les calculs effectués aux questions ?? et ?? et en tenant compte des différences de réglage de retour vitesse et des différences d'inertie entre les deux motorisations, exprimer la valeur finale de  $\theta_1(t) - \theta_2(t)$  lorsque la consigne  $\theta_C(t)$  est respectivement égale à  $u(t)$ ,  $t \cdot u(t)$  puis  $\frac{t^2}{2}u(t)$ ,  $u(t)$  étant la fonction échelon unité.

### Correction

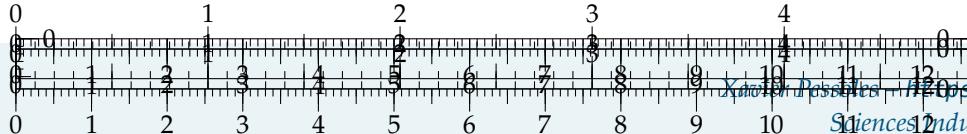
En raisonnant graphiquement, on a  $\theta_1(p) - \theta_2(p) = \varepsilon_{\text{codeur } 1}(p) - \varepsilon_{\text{codeur } 2}(p)$ ; donc :

- $\mu_p = \mu_{p1} - \mu_{p2} = 0$ ;
- $\mu_v = \mu_{v1} - \mu_{v2} = \frac{1 - b_1d}{ab_1} - \frac{1 - b_2d}{ab_2}$ ;
- $\mu_a = \mu_{a1} - \mu_{a2} = \infty$ .

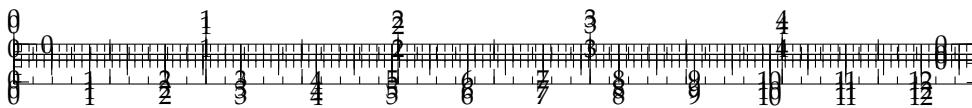
La figure ?? représente le résultat d'une simulation de  $\theta_1(t) - \theta_2(t)$  pour une consigne  $\theta_C(t) = \frac{t^2}{2}U(t)$

**Question 10** Conclure quant à l'erreur en accélération lors de la commande simultanée.

### Correction







## TD 8

# Robot à câbles – Sujet

Concours Centrale-Supélec 2023 – TSI.

### Présentation

Les robots parallèles à câbles sont une structure de robots apparus au début des années 2000. Dans ce système, la plate-forme est déplacée et orientée par rapport à une référence fixe dans toutes les directions de l'espace par l'enroulement ou le déroulement de plusieurs câbles (figure ??). Cette structure permet à la plate-forme d'atteindre une grande zone de travail avec une très grande précision dans le positionnement comme dans l'orientation.

### Étude de l'asservissement de la longueur d'un câble pour gérer le mouvement

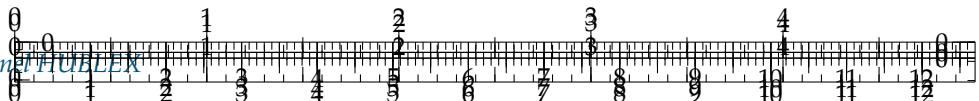
#### Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs permettant d'assurer l'enroulement adéquat des câbles.

Le programme de pilotage tient compte de l'allongement relatif des câbles suite aux efforts de traction lors du déplacement de la plate-forme chargée. Il génère alors, pour chacun des huit moteurs, des consignes de position et de vitesse qui sont envoyées aux variateurs de vitesse qui alimentent les moteurs afin d'assurer un positionnement de la plate-forme conforme aux attentes de l'utilisateur. L'ensemble composé d'un variateur et du moteur associé est appelé moto-variateur pour la suite. L'algorithme implanté dans le variateur est de type commande vectorielle, ce qui rend le moto-variateur équivalent à un système du premier ordre avec une bande passante à  $-3 \text{ dB}$  de 200 Hz. Le modèle défini figure est adopté pour la suite.

[.../PSI\\_Cy\\_02\\_PredictionPerformances/Chapitre\\_04\\_Revisions/Cy\\_02\\_Ch\\_04\\_TD\\_01\\_RobotCables/images/f](http://.../PSI_Cy_02_PredictionPerformances/Chapitre_04_Revisions/Cy_02_Ch_04_TD_01_RobotCables/images/f)





## Notations

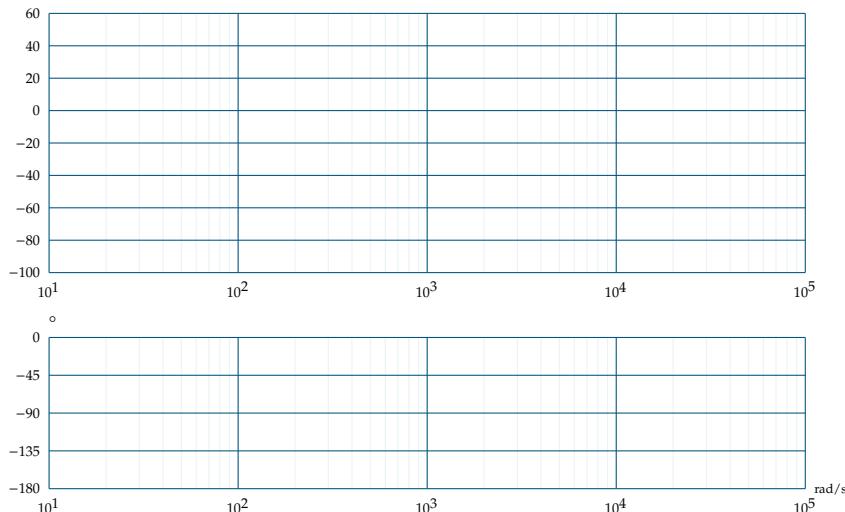
- $\Theta_c(p)$  et  $\Theta(p)$  sont respectivement les images de la consigne de position angulaire  $\theta_c(t)$  (en rad) issue du programme de pilotage et de la position angulaire effective  $\theta(t)$  du moteur (en rad).  $\Omega(p)$  est l'image de la vitesse angulaire  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$  du moteur (grandeur temporelle en rad s<sup>-1</sup>).
- Le capteur de position (codeur optique incrémental associé à une unité de comptage sur 13 bits) est de gain  $c = 1304$  point rad<sup>-1</sup>.
- L'adaptateur est de gain  $K_a$ , grandeur en point rad<sup>-1</sup>.
- Le correcteur est de type proportionnel de gain  $a$ , ce qui permet de délivrer une tension  $u_{c\Omega}(t)$  proportionnelle à l'écart  $\varepsilon(t)$ . Un pré-réglage a permis de choisir la valeur  $a = 43,4$  mV point<sup>-1</sup>.
- Le comportement du motovariableur est assimilé à un premier ordre de gain  $b = 31,4$  rad s<sup>-1</sup> V<sup>-1</sup> et de constante de temps  $\tau = 796 \mu\text{s}$ .

**Question 1** Justifier la valeur numérique proposée pour la constante de temps  $\tau$ .

Dans la structure de l'asservissement de position de la figure ??, l'erreur est définie par  $\mu(t) = \theta_c(t) - \theta(t)$  (grandeur en rad) et l'écart par  $\varepsilon(t) = r_c(t) - r_a(t)$  (grandeur en point).

**Question 2** On souhaite que l'erreur  $\mu(t)$  soit nulle quand l'écart  $\varepsilon(t)$  l'est : en déduire la relation entre  $K_a$  et  $c$ .

**Question 3** Après avoir donné l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(j\omega)$ , tracer son diagramme asymptotique de Bode (courbes de gain et de phase en précisant la valeur de la cassure et le gain associé) et esquisser le plus précisément possible l'allure des courbes réelles de réponse fréquentielle.

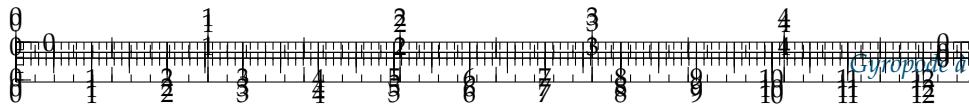


**Question 4** Relever sur la courbe tracée à la question précédente la valeur de la marge de phase  $M\varphi$ . Sachant qu'on souhaite que cette marge soit de  $M\varphi = 45^\circ$ , conclure quant au réglage de  $a$ .

**Question 5** Déterminer l'expression de l'image  $\mu(p)$  de l'erreur en fonction de l'image  $\Theta_c(p)$  de la consigne angulaire et de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(p)$  de l'asservissement.

La précision du système s'évalue par l'erreur en régime permanent pour des consignes de position de types :





- ▶ échelon d'amplitude  $\theta_0$  (en rad) : l'erreur en régime permanent, notée  $\mu_p$  (en rad), est dite « statique »;
- ▶ rampe de pente  $\omega_0$  (en  $\text{rad s}^{-1}$ ) : l'erreur en régime permanent, notée  $\mu_v$  (en  $\text{rad s}^{-1}$ ), est dite « de poursuite ».

Les exigences de l'utilisateur imposent que ces deux erreurs doivent être inférieures à 0,1% de la consigne.

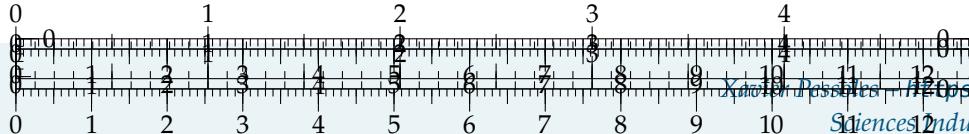
**Question 6** Déterminer la valeur de l'erreur statique  $\mu_p$ . Déterminer l'expression de l'erreur de poursuite  $\mu_v$  en fonction des gains  $a$ ,  $b$  et  $c$  et de la pente  $\omega_0$ . Faire l'application numérique et vérifier si les exigences de l'utilisateur sont vérifiées.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfomances/Chapitre\_04\_Revisions/Cy\_02\_Ch\_04\_TD\_01\_RobotCables/images/f

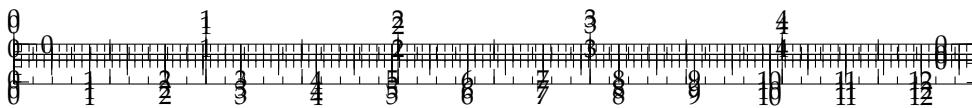
#### Éléments de correction

1. .
2.  $K_a = c$ .
3.  $H_{BO}(j\omega) = \frac{1777}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{1256}\right)}$ .
4. .
5.  $\mu(p) = \frac{\Theta_c(p)}{1 + H_{BO}(p)}$ .
6.  $\mu_p = 0$ ,  $\mu_v = \frac{\omega_0}{abc}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_Prediction



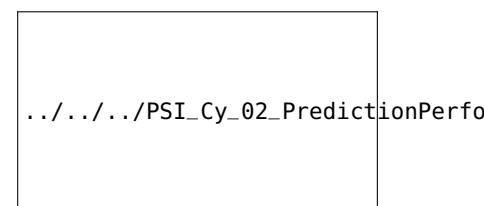




## TD 8

# Robot à câbles – Corrigé

Concours Centrale-Supélec 2023 – TSI.



**FIGURE 3.33** – Robot à câbles CAROCA

### Présentation

### Étude de l'asservissement de la longueur d'un câble pour gérer le mouvement

#### Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs permettant d'assurer l'enroulement adéquat des câbles.

**Question 1** Justifier la valeur numérique proposée pour la constante de temps  $\tau$ .

#### Correction

Si la bande passant à  $-3 \text{ dB}$  est de  $200 \text{ Hz}$ , on a une pulsation de cassure à  $200 \text{ Hz}$  soit  $\omega_T = \frac{1}{\tau} = 2 \times \pi \times 200$  et  $\tau = 7,9 \times 10^{-4} = 796 \mu\text{s}$ .

**Question 2** On souhaite que l'erreur  $\mu(t)$  soit nulle quand l'écart  $\varepsilon(t)$  l'est : en déduire la relation entre  $K_a$  et  $c$ .

#### Correction

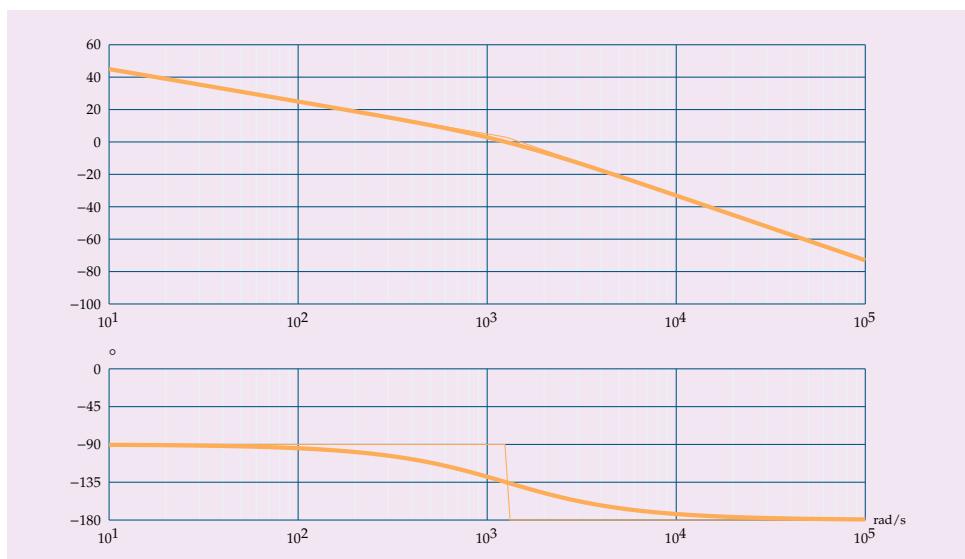
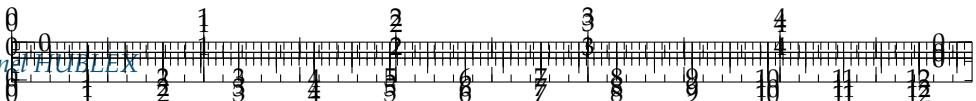
Dans les conditions citées ci-dessus, il faut donc nécessairement  $K_a = c$ .

**Question 3** Après avoir donné l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(j\omega)$ , tracer son diagramme asymptotique de Bode (courbes de gain et de phase en précisant la valeur de la cassure et le gain associé) et esquisser le plus précisément possible l'allure des courbes réelles de réponse fréquentielle.

#### Correction

Par définition,  $H_{bo}(j\omega) = \frac{abc}{p(1 + \tau p)}$  avec  $abc = 1304 \times 31,4 \times 43,3 \times 10^{-3} = 1773 \text{ s}^{-1}$ .





**Question 4** Relever sur la courbe tracée à la question précédente la valeur de la marge de phase  $M\varphi$ . Sachant qu'on souhaite que cette marge soit de  $M\varphi = 45^\circ$ , conclure quant au réglage de  $a$ .

#### Correction

La marge de phase est mesurée à environ  $45^\circ$ . Le choix de  $a$  est donc convenable.

**Question 5** Déterminer l'expression de l'image  $\mu(p)$  de l'erreur en fonction de l'image  $\Theta_c(p)$  de la consigne angulaire et de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(p)$  de l'asservissement.

#### Correction

Pour déterminer l'erreur vis-à-vis de la consigne, il faudrait déplacer le comparateur vers la gauche. Cela revient à avoir un asservissement à retour unitaire en passant le gain  $c$  dans la chaîne directe.

On a donc  $\mu(p) = \frac{\Theta_c(p)}{1 + FTBO(p)}$  avec  $FTBO(p) = \frac{abc}{p(1 + \tau p)}$ .

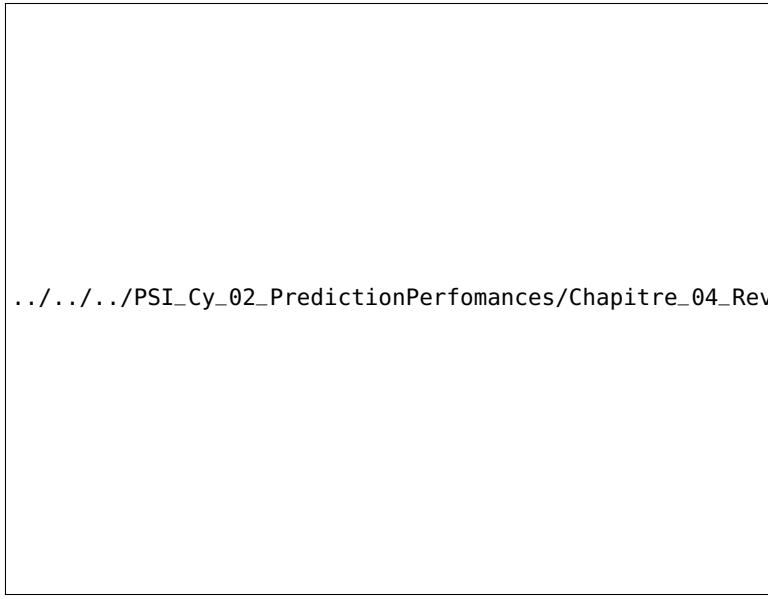
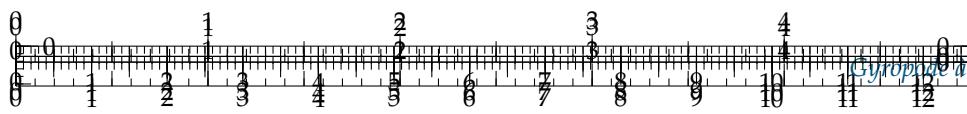
Remarque : on peut aussi exprimer  $\varepsilon(p) = \frac{R_c(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{\Theta_c(p)a}{1 + FTBO(p)}$ . On a donc  $\varepsilon(p) = a\mu(p)$ .

**Question 6** Déterminer la valeur de l'erreur statique  $\mu_p$ . Déterminer l'expression de l'erreur de poursuite  $\mu_v$  en fonction des gains  $a$ ,  $b$  et  $c$  et de la pente  $\omega_0$ . Faire l'application numérique et vérifier si les exigences de l'utilisateur sont vérifiées.

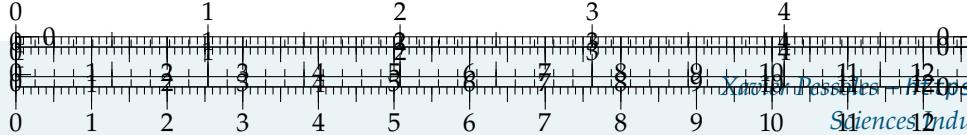
#### Correction

La FTBO est de classe 1 et il n'y a pas de perturbation. On a donc  $\mu_p = 0$  et  $\mu_v = \frac{\omega_0}{abc}$ . Pour  $\omega_0 = 1$ , on a  $\mu_v = 0,05\%$ . Le cahier des charges est respecté.

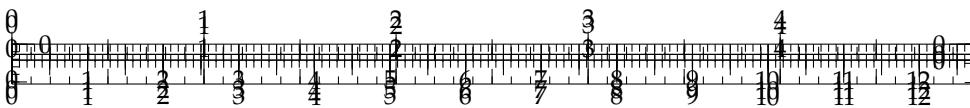




../../../../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_04\_Revisions/Cy\_02\_Ch\_04\_TD\_01\_RobotCables/images/f







## TD 9

### Exosquelette lombaire – Sujet

Concours Centrale-Supélec 2023 – MP.

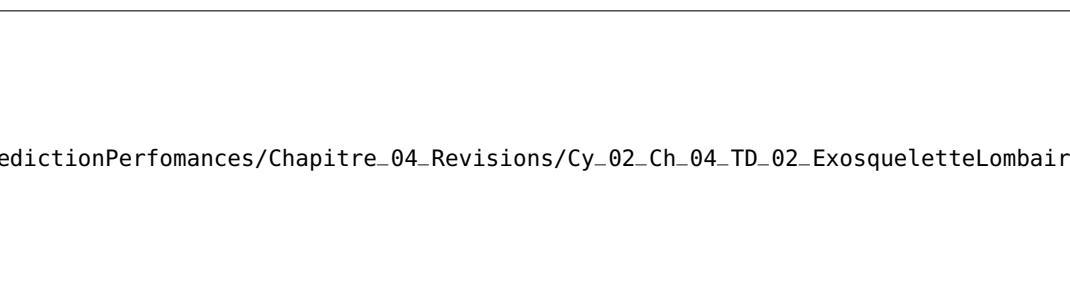
#### Mise en situation

On s'intéresse à un banc d'essai permettant de valider un actionneur linéaire. Dans ce cadre, il est nécessaire de proposer un modèle de connaissance de l'asservissement en force, le valider par comparaison avec une mesure sur le banc d'essai et vérifier les performances de l'actionneur linéaire sur ce banc d'essai. Ce modèle permettra de valider une commande pour le cas spécifique étudié.

Le schéma-blocs est donné dans la figure ??.

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo

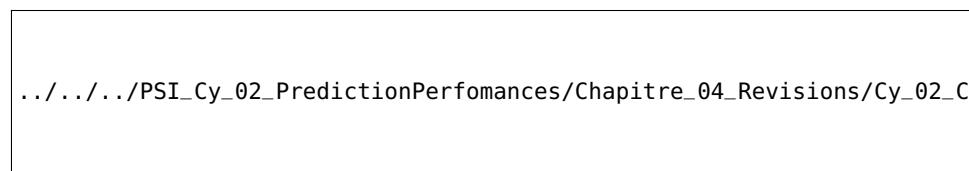
**FIGURE 3.34** – Exosquelette lombaire Japet



asservissement de force développée par un actionneur linéaire placé sur le banc d'essai

#### Réglage de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur

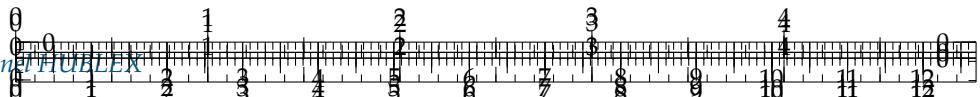
Le schéma-blocs décrivant la structure de l'asservissement de la vitesse angulaire du moteur est fourni sur la figure ?? . Cet asservissement doit respecter le cahier des charges fourni dans le tableau ??.



Le choix d'un correcteur proportionnel intégral est fait afin de diminuer l'influence de la perturbation en couple modélisée par  $C_r(p)$ . La fonction de transfert du correcteur de la boucle d'asservissement en vitesse angulaire est noté  $C_v(p)$ , tel que  $C_v(p) = K_i \frac{1+\tau_{ip}}{\tau_{ip} p}$ .



boucle  
angulaire



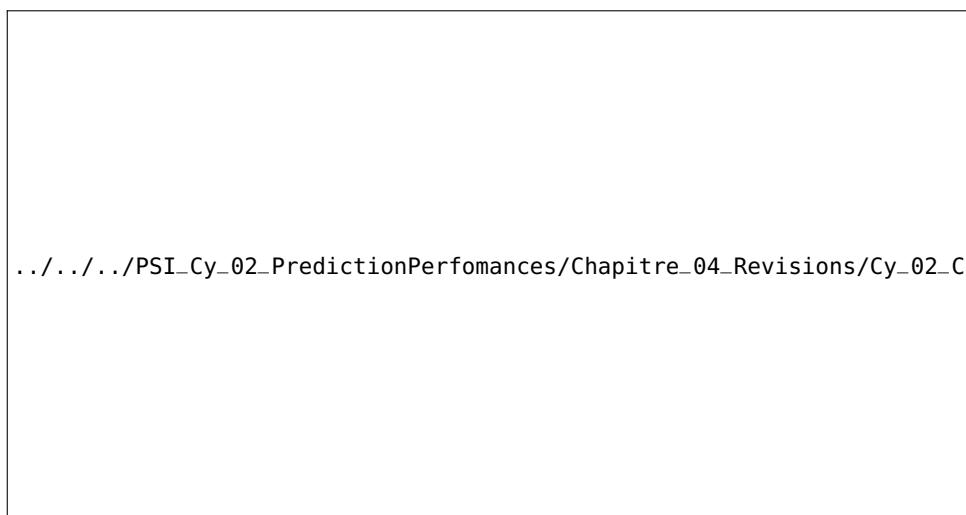
**TABLE 3.1** – Critères concepteur pour la boucle d’asservissement de la vitesse angulaire

Critère concepteur	Niveau
Marge de phase	$\geq 80^\circ$
Erreur en régime permanent pour une perturbation en échelon constante	Nulle
Pulsation de coupure à 0 dB	$\omega_0 \text{ dB} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

On note  $H_{BOv}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\varepsilon_v(p)}$  la fonction de transfert en boucle ouverte de l’asservissement de vitesse angulaire du moteur.

**Question 1** Déterminer l’expression littérale de la phase de  $H_{BOv}(i\omega)$ . En déduire la valeur numérique de  $\tau_i$  respectant les critères concepteur de la boucle de vitesse.

Le diagramme de Bode de la boucle ouverte  $H_{BOv}(p)$ , avec  $K_i = 1$  et  $\tau_i$  déterminé à la question ??, est donné sur la figure ??.

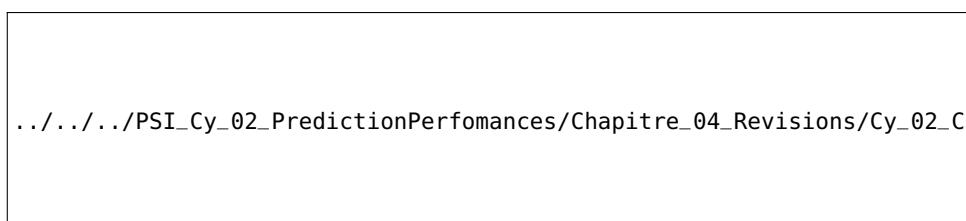


**FIGURE 3.37** – Diagramme de Bode de  $H_{BOv}(p)$

**Question 2** Déterminer la valeur numérique de  $K_i$  afin que la boucle d’asservissement de vitesse respecte les critères concepteur du tableau ??.

### Simplification du modèle de connaissance

Il est possible de mettre le schéma-blocs de la figure ?? sous la forme du schéma-blocs de la figure ??, afin de faciliter la prévision des performances simulées.

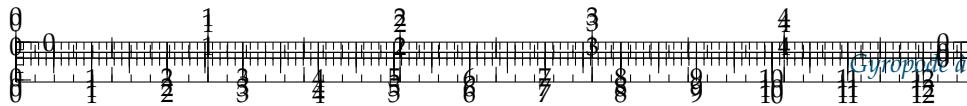


**FIGURE 3.38** – Schéma-blocs de l’asservissement de la force développée par un actionneur linéaire

**Question 3** Déterminer les fonctions de transfert  $H_8(p)$  et  $H_9(p)$  en fonction de  $K_5$ ,  $I_{eq}$  et  $H_6(p)$ . Ne pas remplacer  $K_5$  et  $H_6(p)$  par les expressions trouvées précédemment.

Pour faciliter l’analyse des performances simulées, le schéma-blocs de la figure ?? est adapté afin de disposer d’un schéma-blocs à retour unitaire, tel que décrit sur la figure ??.





.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_04\_Revisions/Cy\_02\_Ch\_04\_TD\_02\_ExosqueletteL

**Question 4** Déterminer l'expression du gain  $K_{10}$  en fonction de  $K_{\text{capt}}$  et de  $K_{\text{res}}$ .

**Question 5** Déterminer la fonction de transfert  $G(p)$  en fonction de  $H_2(p)$ ,  $I_{\text{eq}}$ ,  $H_8(p)$ ,  $H_9(p)$  et  $K_{\text{res}}$ . Ne pas remplacer  $H_2(p)$ ,  $H_8(p)$  et  $H_9(p)$  par les expressions trouvées précédemment.

Pour la suite, on donne la fonction de transfert  $G(p)$ , obtenue avec les valeurs de réglage correctes déterminées aux questions ?? et ??,

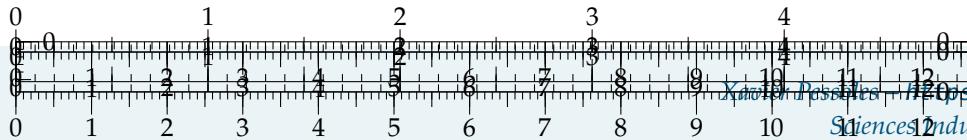
$$G(p) = \frac{F(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1 + \tau_i p}{p} \frac{1,2 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-4} + 9,7 \times 10^{-5} p + 5,3 \times 10^{-6} p^2}.$$

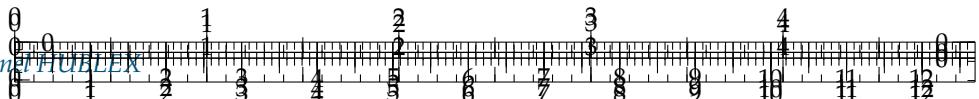
### Analyse des performances de l'asservissement en force développée par un actionneur linéaire

Il est proposé dans cette section d'analyser les performances simulées de l'asservissement en force dont un extrait du cahier des charges est présenté dans le tableau ??.

Id	Exigence	Critère	Niveau
Id1.1	Stabilité	Marge de phase	$\geq 60^\circ$
		Marge de gain	$> 20 \text{ dB}$
		Dépassement maximal	$< 2,5\%$
Id1.2	Précision	Erreur en régime permanent pour une entrée en échelon	$< 1\%$
Id1.3	Rapidité	Temps de réponse à 5% pour une consigne en échelon de force de 40 N	$\text{tr}_{5\%} < 1 \text{ s}$
		Vitesse maximale de montée de la force de traction	$100 \text{ N} \cdot \text{s}^{-1}$

On note  $H_{BOf}(p) = \frac{F(p)}{\epsilon_f(p)}$  la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en force développé par un actionneur linéaire. Dans un premier temps, le choix d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K_{\text{cor}}$  est réalisé. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $H_{BOf}(p) = \frac{F(p)}{\epsilon_f(p)} = K_{\text{cor}} K_{10} G(p)$ , avec  $K_{\text{cor}} = 1$  et la valeur de  $\tau_i$  déterminée à la question ??, est donné sur la figure ??.





**FIGURE 3.40** – Diagramme de Bode de  $H_{BOf}(p)$

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_04\_Revisions/Cy\_02\_Ch\_04\_TD\_02\_ExosqueletteLombaire/images/

**FIGURE 3.41** – Réponses temporelles du modèle et expérimentale, pour une consigne en échelon de force de 40 N

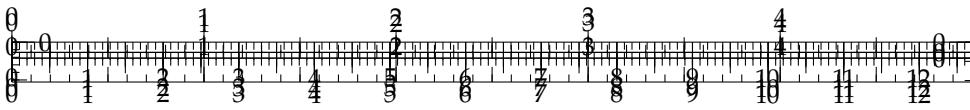
**Question 6** Déterminer la valeur numérique limite de  $K_{cor}$  afin que la boucle d'asservissement de force respecte les critères de marge de phase et de gain du tableau ??.

Les courbes sur la figure ?? représentent les réponses temporales du modèle de connaissance de la figure ??, avec les correcteurs  $C_v(p)$  et  $C(p)$  correctement réglés, et de l'expérimentation sur le banc d'essai pour une consigne en échelon de force de 40 N.

**Question 7** Quel critère du tableau des exigences (tableau ??) n'est pas pris en compte dans le modèle de connaissance ? D'après la courbe expérimentale, ce critère est-il respecté par le système réel ?

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_04\_Revisions/Cy\_02\_Ch\_04\_TD\_02\_ExosqueletteLombaire/images/





## TD 9

# Exosquelette lombaire – Corrigé

Concours Centrale-Supélec 2023 – MP.

### Mise en situation

#### Réglage de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur

**Question 1** Déterminer l'expression littérale de la phase de  $H_{BOV}(i\omega)$ . En déduire la valeur numérique de  $\tau_i$  respectant les critères concepteur de la boucle de vitesse.

#### Correction

$$\text{On a } H_{BOV}(i\omega) = C_v(p)K_1 \frac{1}{R} K_3 \frac{1}{I_{eq}p} = \frac{K_i K_1 K_3}{R I_{eq}} \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p^2}.$$

$$\text{On a } \varphi(\omega) = \arg\left(\frac{K_i K_1 K_3}{R I_{eq}}\right) + \arg(1 + \tau_i p) - \arg(\tau_i p^2) = \arctan \tau_i \omega - 180^\circ.$$

On souhaite une marge de phase supérieure à  $80^\circ$ ; donc  $M_\varphi = \varphi(\omega) + 180 = \arctan \tau_i \omega \geq 80^\circ$ .

$$\arctan \tau_i \omega \geq 80^\circ \Rightarrow \tau_i \omega \geq \tan 80 \Rightarrow \tau_i \geq \frac{\tan 80}{\omega_{0 \text{ dB}}} \Rightarrow \tau_i \geq 0,57 \text{ s}.$$

**Question 2** Déterminer la valeur numérique de  $K_i$  afin que la boucle d'asservissement de vitesse respecte les critères concepteur du tableau ??.

#### Correction

Pour  $\omega_{0 \text{ dB}} = 10 \text{ rad s}^{-1}$  on mesure un gain de  $80 \text{ dB}$ . Il faut donc déterminer  $K_i$  tel que  $20 \log K_i = -80$  soit  $K_i = 1 \times 10^{-4} \text{ V s rad}^{-1}$ .

Les critères de marge et de pulsation de coupure sont respectés (on a tout fait pour). L'erreur statique est nulle car il y a un intégrateur dans le correcteur (elle sera nulle à condition que la perturbation soit constante).

### Simplification du modèle de connaissance

**Question 3** Déterminer les fonctions de transfert  $H_8(p)$  et  $H_9(p)$  en fonction de  $K_5, I_{eq}$  et  $H_6(p)$ . Ne pas remplacer  $K_5$  et  $H_6(p)$  par les expressions trouvées précédemment.

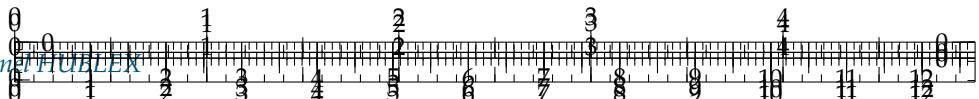
#### Correction

En décalant le point de prélèvement du capteur de vitesse d'un bloc vers la droite, on se retrouve avec  $\frac{1}{H_6(p)}$  dans la boucle de retour.



.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformance

FIGURE 3.42 – Exosquelette lombaire Japet



On sort le bloc  $\frac{1}{I_{eq}p}$  de la « petite » boucle et  $\frac{1}{I_{eq}p}$  se retrouve aussi dans la pboucle de retour.

En identifiant, on a alors  $H_9(p) = \frac{1}{H_6(p)}$  et en utilisant la formule de Black, on a  $H_8(p) =$

$$\frac{H_6(p)}{1 + \frac{H_6(p)K_5}{I_{eq}p}} = \frac{H_6(p)I_{eq}p}{I_{eq}p + H_6(p)K_5}.$$

**Question 4** Déterminer l'expression du gain  $K_{10}$  en fonction de  $K_{capt}$  et de  $K_{res}$ .

#### Correction

En décalant le point de prélèvement de droite vers la droite, on a alors  $K_{res}$  dans la boucle de retour. Pour que le système soit correctement asservi, il faut donc nécessairement que  $K_{adapt} = K_{capt}K_{res}$

On se ramène ensuite à un retour unitaire. On alors  $K_{10} = K_{capt}K_{res}$ .

**Question 5** Déterminer la fonction de transfert  $G(p)$  en fonction de  $H_2(p)$ ,  $I_{eq}$ ,  $H_8(p)$ ,  $H_9(p)$  et  $K_{res}$ . Ne pas remplacer  $H_2(p)$ ,  $H_8(p)$  et  $H_9(p)$  par les expressions trouvées précédemment.

#### Correction

$$G(p) = \frac{H_2(p) \frac{1}{I_{eq}p} H_8(p)}{1 + H_2(p)H_8(p)H_9(p) \frac{1}{I_{eq}p}} K_{res} = \frac{H_2(p)H_8(p)}{I_{eq}p + H_2(p)H_8(p)H_9(p)} K_{res}$$

Pour la suite, on donne la fonction de transfert  $G(p)$ , obtenue avec les valeurs de réglage correctes déterminées aux questions ?? et ??,

$$G(p) = \frac{F(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1 + \tau_i p}{p} \frac{1,2 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-4} + 9,7 \times 10^{-5} p + 5,3 \times 10^{-6} p^2}.$$

## Analyse des performances de l'asservissement en force développée par un actionneur linéaire

**Question 6** Déterminer la valeur numérique limite de  $K_{cor}$  afin que la boucle d'asservissement de force respecte les critères de marge de phase et de gain du tableau ??.

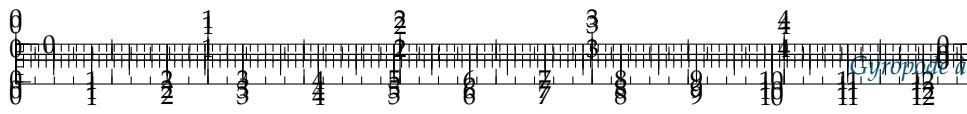
#### Correction

La marge de gain sera toujours infinie car la phase tend asymptotiquement vers  $-180^\circ$ .

Pour régler la marge de phase à  $60^\circ$ , il faut relever le gain de 75 dB. On a donc  $K_{cor} = 10^{75/20} \simeq 5623$ .

**Question 7** Quel critère du tableau des exigences (tableau ??) n'est pas pris en compte dans le modèle de connaissance? D'après la courbe expérimentale, ce critère est-il respecté par le système réel?





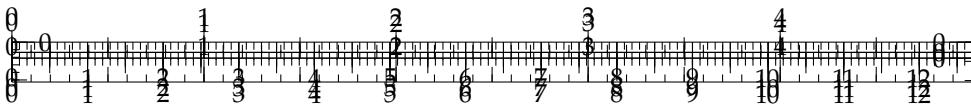
### Correction

La réponse temporelle du modèle ne permet pas de savoir si l'exigence 1.1 sur le dépassement est respectée.

Ce critère semble respecté sur le système réel vu qu'aucun dépassement n'est observé en régime permanent.







## TD 10

# Contrôle d'une machine de forage – Sujet

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

On travaille avec le schéma-bloc simplifié de la figure ?? où  $K_0$  est un gain d'adaptation fixe.

`.../.../PSI_Cy_02_PredictionPerformances/Chapitre_04_Revisions/Cy_02_Ch_04_TD_03ControleMachineForage`

On prend dans un premier temps un correcteur  $C(p)$  proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

**Question 1** Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte  $G_{BO}(p) = \frac{V(p)}{\varepsilon(p)}$ .

**Question 2** Avec un correcteur proportionnel, peut-on satisfaire l'exigence de précision de vitesse indiquée à l'exigence 2.1.1.? Justifier.

On utilise dans un second temps un correcteur proportionnel intégral :  $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$ .

**Question 3** L'exigence de précision sur la vitesse est-elle satisfaite? Justifier.

Ce correcteur est initialement réglé avec les valeurs suivantes :  $K_p = 1$  et  $T_i = 10$  s.

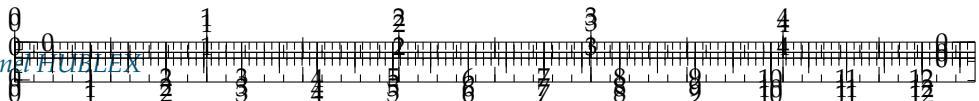
**Question 4** Tracer les diagrammes de Bode asymptotique et réel de ce correcteur. Détailler les constructions.

Pour le réglage de la question précédente, on donne le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ainsi corrigée sur le DR3.

**Question 5** Affiner le réglage du correcteur (sans modifier la valeur de  $T_i$ ) en proposant une valeur de  $K_p$  permettant de garantir la marge de phase spécifiée dans l'exigence 2.1.1.

Enfin, on souhaite valider ou invalider l'hypothèse faite en début de cette sous-partie concernant la non-influence de l'amortisseur sur les performances d'asservissement en vitesse d'avance de la table de forage. Les diagrammes de Bode de la figure suivante, illustrent la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée sans (en train plein) et avec amortisseur (en pointillés).





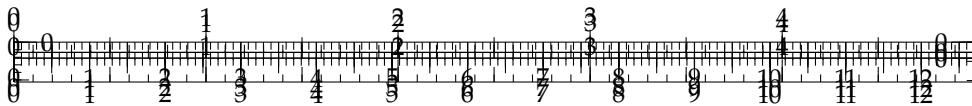
.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_04\_Revisions/Cy\_02\_Ch\_04\_TD\_03

.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerformances/Chapitre\_04\_Revisions/Cy\_02\_Ch\_04\_TD\_03

**Question 6** Sur quelle(s) performance(s) la présence de l'amortisseur peut-elle influer ?

Justifier que le correcteur choisi permet de répondre aux exigences 2.1.1 en présence de l'amortisseur.





## TD 10

# Contrôle d'une machine de forage – Corrigé

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

**Question 1** Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte  $G_{BO}(p) = \frac{V(p)}{\varepsilon(p)}$ .

### Correction

$$G_{BO}(p) = K_0 C(p) \frac{K_h}{1 + \frac{2z_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2}}$$

**Question 2** Avec un correcteur proportionnel, peut-on satisfaire l'exigence de précision de vitesse indiquée à l'exigence 2.1.1.? Justifier.

### Correction

Pour un erreur statique nulle, il faut obligatoirement un intégrateur dans la boucle ouverte, ce qui n'est pas le cas.

On utilise dans un second temps un correcteur proportionnel intégral :  $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$ .

**Question 3** L'exigence de précision sur la vitesse est-elle satisfaite? Justifier.

### Correction

$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_p \frac{T_i p + 1}{T_i p}$ . La FTBO est maintenant de classe 1. L'erreur statique est donc nulle.

Ce correcteur est initialement réglé avec les valeurs suivantes :  $K_p = 1$  et  $T_i = 10$  s.

**Question 4** Tracer les diagrammes de Bode asymptotique et réel de ce correcteur. Détaillez les constructions.

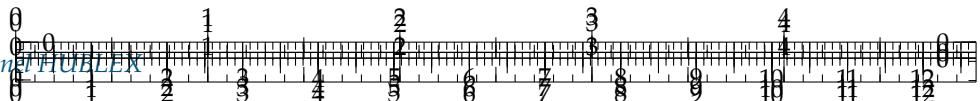
### Correction

On a  $\frac{K_p}{T_i} = 0,1$

- Quand  $\omega$  tend vers 0, le gain a une pente de  $-20$  dB/decade et la phase tend vers  $-90^\circ$ .



.../.../.../PSI\_Cy\_02\_PredictionPerfo



- Quand  $\omega$  tend vers  $+\infty$ , le gain a une pente de 0 dB/decade et tend vers  $20 \log K_p = 0$  et la phase tend vers  $0^\circ$ .
- Le changement de pente se passe à 1/10 rad/s.



**Question 5** Affiner le réglage du correcteur (sans modifier la valeur de  $T_i$ ) en proposant une valeur de  $K_p$  permettant de garantir la marge de phase spécifiée dans l'exigence 2.1.1.

#### Correction

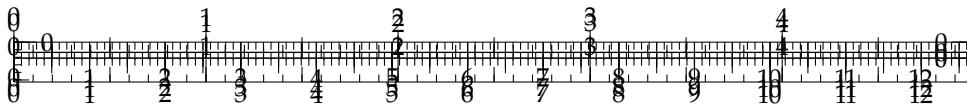
Pour avoir une marge de phase de  $30^\circ$ , il faut que le gain soit nul quand la phase est de  $-150^\circ$ . Dans l'état actuel le gain est de 10 dB. Il faut donc  $20 \log K_p = -10$  soit  $K_p = 0,31$ .

**Question 6** Sur quelle(s) performance(s) la présence de l'amortisseur peut-elle influer ? Justifier que le correcteur choisi permet de répondre aux exigences 2.1.1 en présence de l'amortisseur.

#### Correction

L'amortisseur améliore la stabilité car la marge de phase est plus grande. En revanche, la bande passante à 0 dB étant plus petite, le système est donc moins rapide.





.../.../.../Style/png/Fond\_SLCI.png

## 4 Correction des SLCI

### 4.1 Pourquoi corriger un système ?

Souvent évoqué en lors de l'étude des systèmes asservis, regardons ce qui se cache derrière le bloc correcteur. On peut le considérer comme la partie intelligente du système car de sa part position dans l'architecture d'un système il reçoit l'image de l'écart entre la cosigne et la sortie du système. En fonction de cet écart, en fonction de ses « capacités » va permettre d'améliorer les performances du système.

Sur la figure ci-contre est tracée en gris la réponse indicielle d'un système non corrigé et en noir la réponse indicielle du système corrigé. On observe que le système corrigé est :

- ▶ plus précis;
- ▶ plus amorti;
- ▶ plus rapide.

L'objectif du correcteur est donc d'améliorer les caractéristiques tout en assurant la stabilité du système.

#### Résultat -

- ▶ D'après les résultats sur la stabilité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'avoir des marges de gains suffisantes.
- ▶ D'après les résultats sur la rapidité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain dans le but d'avoir une pulsation de coupure à 0 dB la plus grande possible (pour la FTBO).
- ▶ D'après les résultats sur la précision des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain statique de la boucle ouverte pour assurer une bonne précision du système (et d'éventuellement augmenter la classe).

Au vu de ces conclusions, le choix d'un correcteur se fera dans le domaine fréquentiel en utilisant le diagramme de Bode.

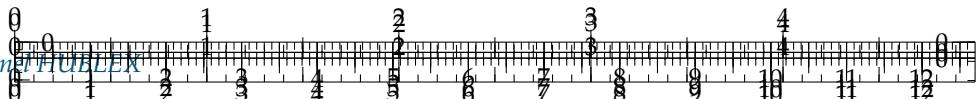


C1-02

C2-04

**Frédéric Mazet**, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.

**Florestan Mathurin**, Correction des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

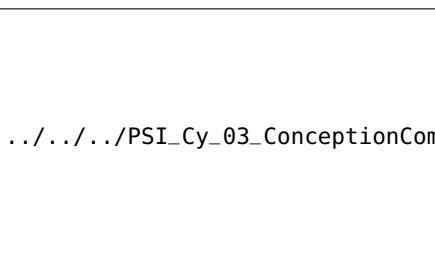


## 4.2 Le correcteur proportionnel

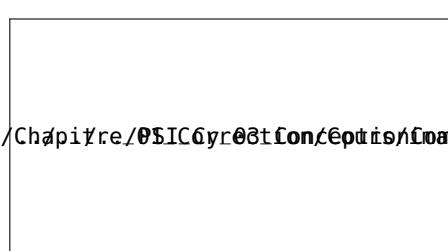
### Définition – Correcteur P

Le correcteur proportionnel a pour fonction de transfert  $C(p) = K$ .

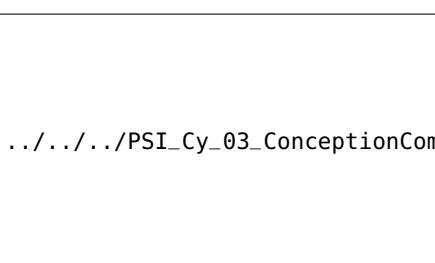
Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $K = 15$ ,  $\xi = 3$ ,  $\omega = 1$ ).



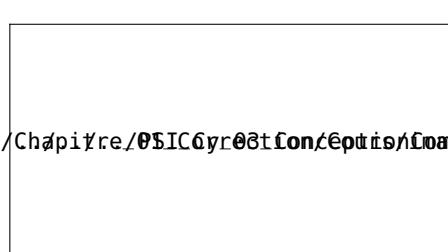
$T_{5\%} : 0,781 \text{ s}$  – Écart statique : 0,07



Marge de phase  $71,94^\circ$



$T_{5\%} : 0,88 \text{ s}$  – Écart statique : tend  $\rightarrow 0$



Marge de phase  $6,43^\circ$

### Résultat –

On observe qu'une augmentation du gain proportionnel a pour effet :

- ▶ d'améliorer la précision;
- ▶ d'augmenter la vivacité;
- ▶ d'augmenter le temps de réponse (à partir d'un certain seuil);
- ▶ de diminuer l'amortissement;
- ▶ de diminuer la marge de phase.

Pour un système d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain provoque une marge de phase négative et donc une instabilité du système.

### Méthode –

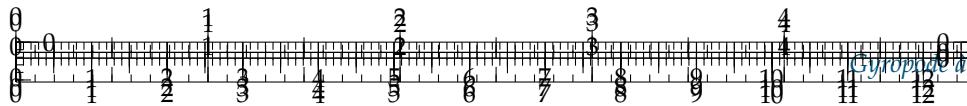
#### Réglage de la marge de phase :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0\text{dB}}$  tel que  $\varphi(\omega_{0\text{dB}})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{0\text{dB}})$ .
- ▶ On cherche  $K_p$  tel que  $G_{\text{dB}}(\omega_{0\text{dB}}) = 0$

#### Réglage de la marge de gain :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{-180^\circ}$  tel que  $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$ .
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{-180^\circ})$ .
- ▶ On cherche  $K_p$  tel qu'on ait la marge de gain souhaitée.





## 4.3 Les correcteurs à action intégrale

### 4.3.1 Le correcteur intégral pur

#### Définition – Correcteur I

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$ .

#### Résultat –

##### Avantages

Ce correcteur améliore la précision lors de la sollicitation par un échelon car il ajoute une intégration dans la boucle ouverte.

##### Inconvénients

Le déphasage de  $-90^\circ$  sur tout le spectre de pulsation entraîne une réduction de la marge de phase ce qui peut déstabiliser le système.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

### 4.3.2 Le correcteur proportionnel intégral

#### Définition – Correcteur PI

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = K \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

En développant on obtient  $C(p) = K \frac{T_i p + 1}{T_i p}$ . Ce correcteur augmente donc la classe de la boucle ouverte et donc la précision. Si  $K > 1$  la pulsation de coupure est augmentée, entraînant ainsi une augmentation de la rapidité du système. Enfin, ce correcteur diminue la phase à basse fréquence. Il faut donc faire en sorte que cette chute de phase n'intervienne pas dans la zone de la pulsation de coupure du système.

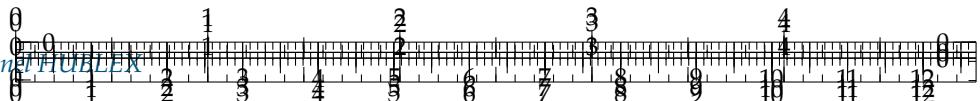
#### Résultat – Correcteur PI

- ▶ augmente l'amortissement;
- ▶ augmente la rapidité;
- ▶ augmente la précision.

#### Méthode –

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que  $\varphi(\omega_{0dB})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{dB}(\omega_{0dB})$ .
- ▶ On cherche  $K$  tel que  $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$
- ▶ La mise en place de l'effet intégral ne doit pas modifier la position de la





pulsation de coupure réglée précédemment. Pour cela, il faut donc que  $\frac{1}{T_i} << \omega_0 \text{dB}$ . Usuellement on positionne l'action intégrale une décade avant la pulsation réglée. On a donc  $T_i = \frac{10}{\omega_0 \text{dB}}$ .

#### Remarque

Une autre possibilité pour régler  $T_i$  est de réaliser **une compensation de pôle**. Admettons que la FTBO puisse se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$  avec  $\tau_1 >> \tau_2$ .  $\tau_1$  ayant pour effet de diminuer la rapidité du système, on pourra prendre  $T_i = \tau_1$  afin de supprimer l'effet du pôle associé à  $\tau_1$ .

## 4.4 Le correcteur à avance de phase

#### Définition – Correcteur à avance de phase

Un correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \frac{1 + \alpha \tau p}{1 + \tau p}$  avec  $\alpha > 1$ .

#### Résultat –

Ce correcteur permet d'ajouter de la phase pour les pulsations comprises entre  $\frac{1}{a\tau}$  et  $\frac{1}{\tau}$ . On montre que  $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$  et ce pour une pulsation  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$ .

#### Remarque

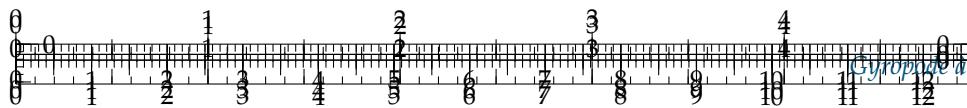
On peut prendre  $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$  pour ne pas modifier la valeur du gain à la pulsation où on désire ajouter de la phase.

#### Démonstration

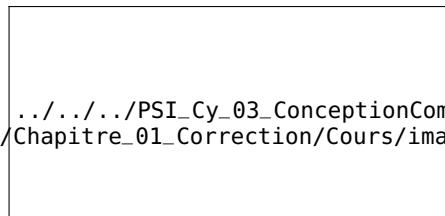
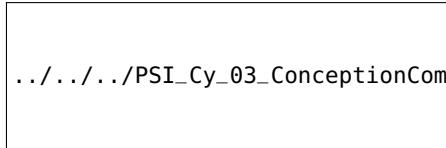
Pour déterminer  $\omega_{\max}$  on pourrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase est maximum en résolvant  $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$ . On peut aussi remarquer « graphiquement » que  $\omega_{\max}$  est situé au milieu des deux pulsations de coupures :  $\frac{1}{2} \left( \log\left(\frac{1}{\tau}\right) + \log\left(\frac{1}{a\tau}\right) \right) = \log\left(\frac{1}{a\tau^2}\right)^{1/2} = \log\left(\frac{1}{\tau\sqrt{a}}\right)$  et  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$ .

D'autre part, il faudrait calculer  $\varphi(\omega_{\max})$ ...





Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $G(p) = \frac{100}{(p + 1)^2}$ ,  $a = 3,54$ ,  $T = 0,053$  s).

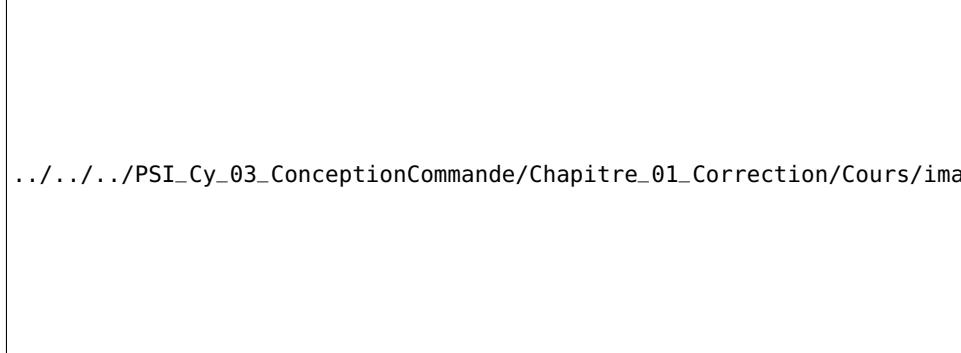


Ici le correcteur permet une augmentation de la rapidité et un meilleur amortissement.

#### Méthode –

- ▶ En utilisant la BO non corrigée on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que le gain est nul.
- ▶ On calcule  $\varphi(\omega_{0dB})$ .
- ▶ On détermine la phase à ajouter.
- ▶ On calcule  $a$ .
- ▶ On calcule  $\tau$ .
- ▶ On calcule  $K$ .

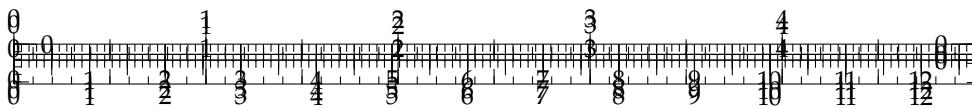
## 4.5 Bilan sur l'influence des correcteurs



[.../PSI\\_Cy\\_03\\_ConceptionCommande/Chapitre\\_01\\_Correction/Cours/images/BilanInfluence.png](http://.../PSI_Cy_03_ConceptionCommande/Chapitre_01_Correction/Cours/images/BilanInfluence.png)







## Application 1

### Réglage de correcteurs P et PI – Sujet

Ressources de P. Dupas.

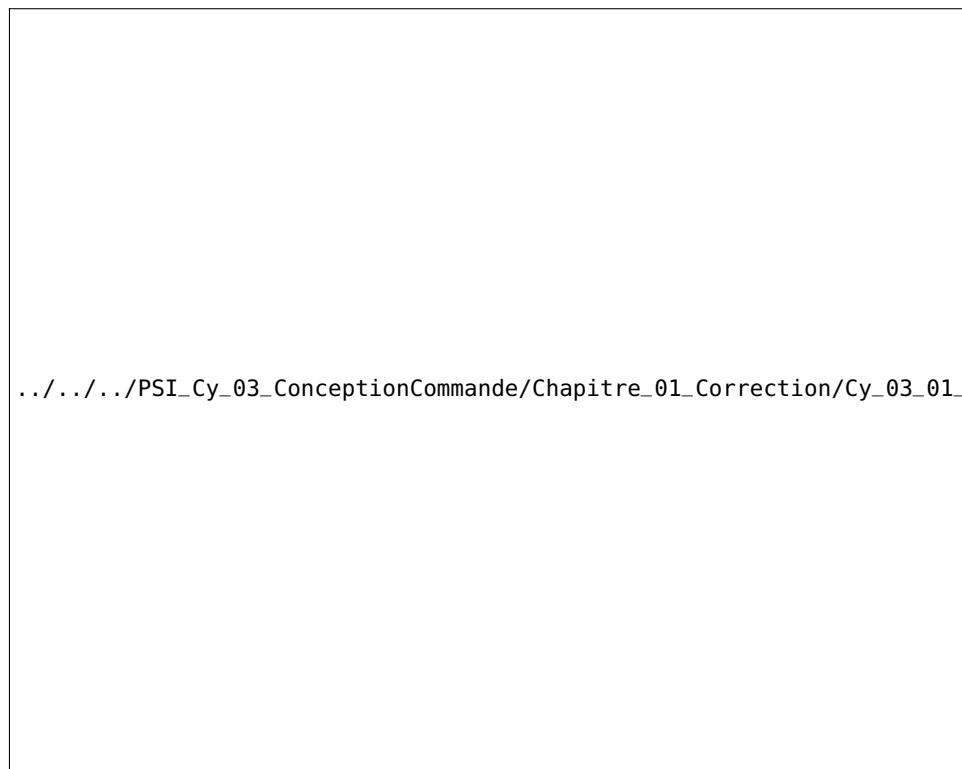
#### Correcteur proportionnel

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de  $45^\circ$  et une marge de gain de 10 dB.

C1-02

C2-04

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.

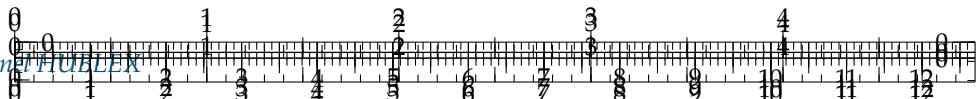


**Question 1** Mesurer puis calculer la marge de phase.

**Question 2** Mesurer puis calculer la marge de gain.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.



**Éléments de correction**

1.  $M_\varphi = -60^\circ$ .
2.  $M_G = -20 \text{ dB}$ .
3.  $K_p = 0,054$  et  $M_G = 5,35 \text{ dB}$ .
4.  $K_p = 0,0316$  et  $M_\varphi = 70^\circ$ .

D'après ressources P. Dupas.

**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

**Correcteur proportionnel intégral**

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de  $45^\circ$  en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme  $C(p) = K_p \frac{1 + \tau p}{\tau p}$ .

**Question 5** Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Activation\_01\_P\_PI/images/Cy\_03\_01\_Activation\_01\_P\_PI/

**Question 6** Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

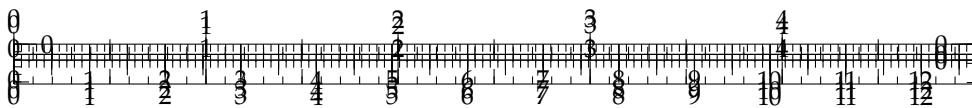
**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Activation\_01\_P\_PI/images/Cy\_03\_01\_Activation\_01\_P\_PI/

**Éléments de correction**

- 1.
2.  $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$ .
- 3.





## Application 1

### Réglage de correcteurs P et PI – Corrigé

Ressources de P. Dupas.

#### Correcteur proportionnel

D'après ressources P. Dupas.

**Question 1** Mesurer puis calculer la marge de phase.

C1-02

C2-04

#### Correction

- On cherche  $\omega$  tel que  $G_{dB}(\omega) = 0 \text{ dB}$  :  $G_{dB}(\omega) = -20 \log(10) - 20 \log \omega - 20 \log \left( \sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2} \right)$

On trouve  $\omega = 2,21 \text{ rad/s}$  et  $M_\varphi = -60^\circ$ . Le système est instable.

**Question 2** Mesurer puis calculer la marge de gain.

#### Correction

Pour  $\varphi = -180^\circ$ , on a  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  et  $M_G = -20 \text{ dB}$ . Le système est instable.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

#### Correction

Pour  $\varphi = -135^\circ$  on a  $\omega = 0,62 \text{ rad/s}$ . On trouve un gain proportionnel de 0,054.

La marge de gain est alors de 5,35 dB ce qui est inférieur aux 10 dB demandés.

**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

#### Correction

Pour  $\varphi = -180^\circ$  on a  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ . On trouve un gain proportionnel de 0,316.

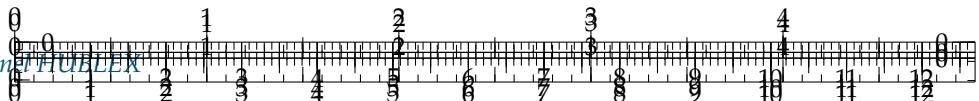
La marge de phase est alors de  $70^\circ (\omega = 0,0333 \text{ rad/s})$ .

#### Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

**Question 5** Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.



**Correction**

.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Activation\_01\_P...

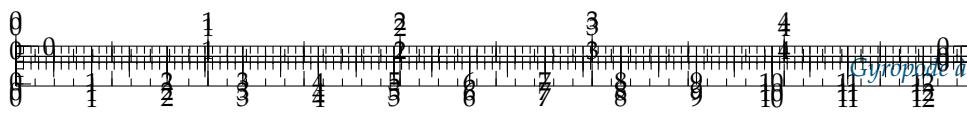
**Question 6** Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Correction**

- ▶ On résout  $\varphi(\omega) = -135^\circ : \varphi(\omega) = -\arctan \omega - \arctan \omega/8 \Rightarrow \tan 135^\circ = \frac{\omega + \omega/8}{1 - \omega^2/8}$   
 $\Leftrightarrow -1 + \omega^2/8 - 9\omega/8 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 9\omega - 8 = 0. \Delta = 81 + 32 = 10,63^2. \omega = \frac{9 \pm 10,63}{2} = 9,82 \text{ rad/s.}$
- ▶ Calculons  $G_{dB}(9,82) = -23,9 \text{ dB}$ . Il faut donc augmenter le gain de  $23,9 \text{ dB}$  soit  $K_p = 10^{23,9/20} = 15,7$ .
- ▶ On choisit  $\tau$  pour ne pas modifier la marge de phase. Il faut donc que le déphasage de  $0^\circ$  du correcteur ait lieu avant  $9,82 \text{ rad/s}$ . De manière usuelle on prend  $\frac{1}{\tau} = \frac{9,82}{10} = 0,982 \text{ rad/s.}$
- ▶ Au final, on a  $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$ .

**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

**Correction**

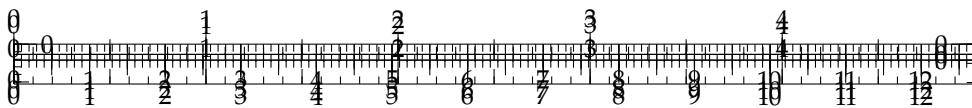


.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Activation\_01\_P\_PI/images/PI\_corrige.png

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Activation\_01\_P\_PI/images/PI\_BodeC.png







## Application 2

### Réglage de correcteurs P et AP – Sujet

Ressources de P. Dupas.

#### Correcteur proportionnel

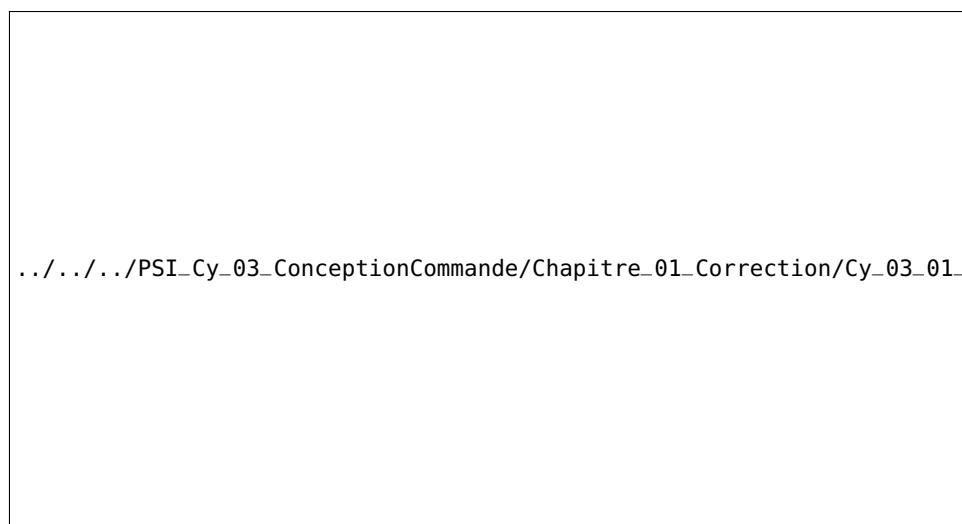
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

C1-02

C2-04

**Question 1** Déterminer la précision du système  $\varepsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

**Question 2** Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.



**Question 3** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

**Question 4** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

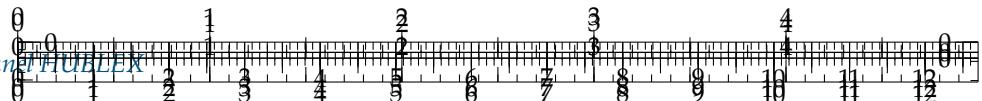
#### Correcteur à avance de phase

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de



#### Éléments de correction

1.  $\varepsilon_S = \frac{1}{2}$ .
2. .
3.  $\omega_{-135^\circ} = 2,95 \text{ rad/s}$ .
4.  $\omega_0 \text{dB} = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 38 \text{ dB}$  soit  $K_P = 79$ .



phase de la forme  $C(p) = K \frac{1 + \alpha\tau p}{1 + \tau p}$ .

**Question 5** Justifier le tracer du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

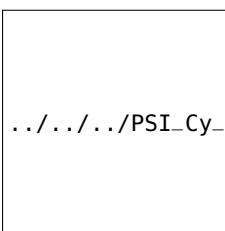
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Activation\_02\_P\_AP/images/Cy\_03\_01\_Activation\_02\_P\_AP/

**Question 6** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

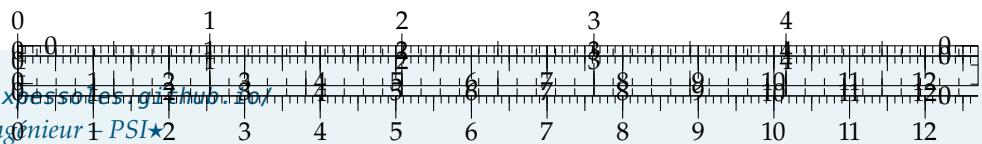
**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

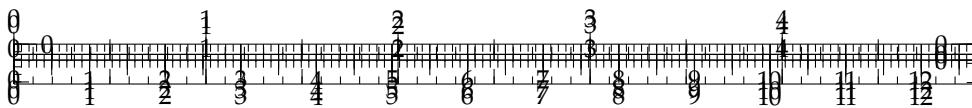
#### Éléments de correction

- 1.
2.  $C(p) = 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}$ .
- 3.



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Activation\_02\_P\_AP/images/Cy\_03\_01\_Activation\_02\_P\_AP/





## Application 2

### Réglage de correcteurs P et AP – Corrigé

Ressources de P. Dupas.

#### Correcteur proportionnel

**Question 1** Déterminer la précision du système  $\varepsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

C1-02

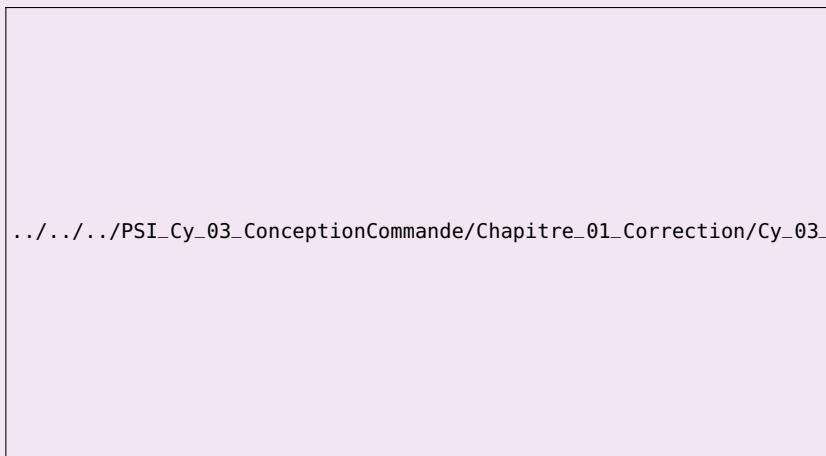
C2-04

#### Correction

Le système est de classe 0. L'entrée est de type échelon.  $K_{BO} = 1$ . L'écart statique est de  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ .

**Question 2** Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

#### Correction



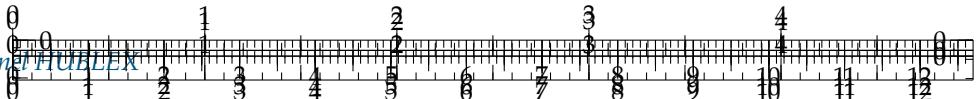
.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Activation\_02\_P\_AP/images/01\_Bode.png

**Question 3** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

#### Correction

- On résout  $\varphi(\omega) = -135^\circ$  :  $\varphi(\omega) = -\arctan 10\omega - \arctan 0,1\omega - \arctan 0,2\omega$ .  
 $\varphi(\omega) = -135^\circ \Leftrightarrow \omega = 2,95 \text{ rad s}^{-1}$  (solveur Excel).
- Calculons  $G_{dB}(\omega) = -20 \log(\sqrt{1 + 10^2\omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + 0,1^2\omega^2}) -$





$20 \log \left( \sqrt{1 + 0,2^2 \omega^2} \right) = -31 \text{ dB}$ . Il faut donc augmenter le gain de 31 dB soit  $K_p = 10^{31/20} = 35,48$ .

- On a alors un écart statique de  $\frac{1}{1 + 35,48} = 0,027$ .
- Pour déterminer la marge de gain, il faut résoudre  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ . On obtient  $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 12 \text{ dB}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Activation\_01

**Question 4** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

#### Correction

- On commence par résoudre  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ . On obtient  $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 44 \text{ dB}$ .
- Il faut augmenter le gain de 38 dB soit  $20 \log K_p = 38 \Rightarrow K_p = 10^{38/20} = 79$ .
- On a alors un écart statique de  $\frac{1}{1 + 79} = 0,0125$ .
- La marge de phase est alors de  $19^\circ$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Activation\_01

## Correcteur à avance de phase

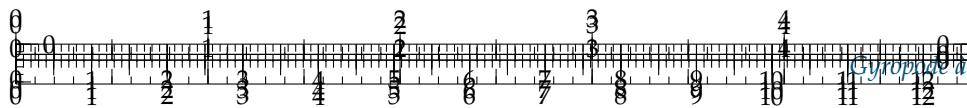
**Question 5** Justifier le tracer du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

**Question 6** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

#### Correction

- $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(100) - 20 \log(1 + \omega^2)$ .  $G_{\text{dB}}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \frac{100}{1 + \omega^2} = 1 \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt{99}$   $\Rightarrow \omega = 9,95 \text{ rad/s}$ .
- $\varphi(\omega) = -2 \arctan \omega$  et  $\varphi(9,95) = -2,94 \text{ rad} = -169^\circ$  soit une marge de phase de  $11^\circ$ ; le correcteur doit donc apporter un complément de phase de  $34^\circ$ .
- $\varphi_{\text{max}} = \arcsin \left( \frac{a - 1}{a + 1} \right) \Rightarrow \sin(\varphi_{\text{max}}) = \frac{a - 1}{a + 1} \Rightarrow a = -\frac{\sin(\varphi_{\text{max}}) + 1}{\sin(\varphi_{\text{max}}) - 1} = 3,54$ .

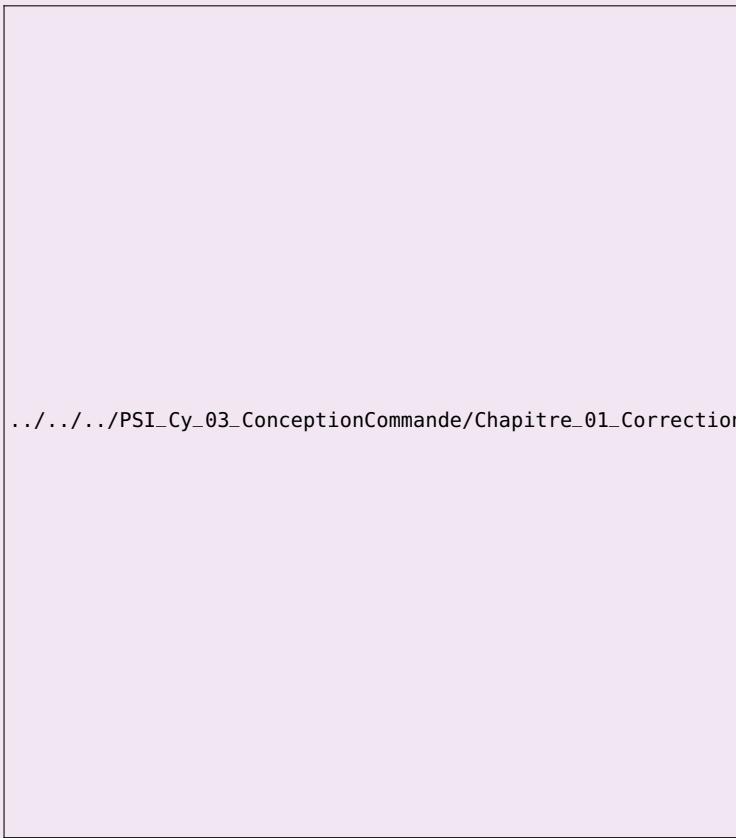




$$\blacktriangleright \tau = \frac{1}{9,95\sqrt{3,54}} = 0,053 \text{ s.}$$

**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

**Correction**



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Activation\_02\_P\_AP/images/AP\_BodeC.png

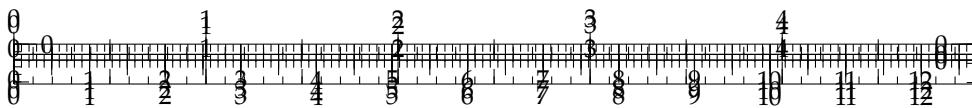
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Activation\_02\_P\_AP/images/AP\_corrige.png

**Éléments de correction**

$$\begin{aligned} 1. \\ 2. \quad C(p) &= \\ &0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}. \\ 3. \end{aligned}$$







## Application 3

### Réglage de correcteurs P – Sujet

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

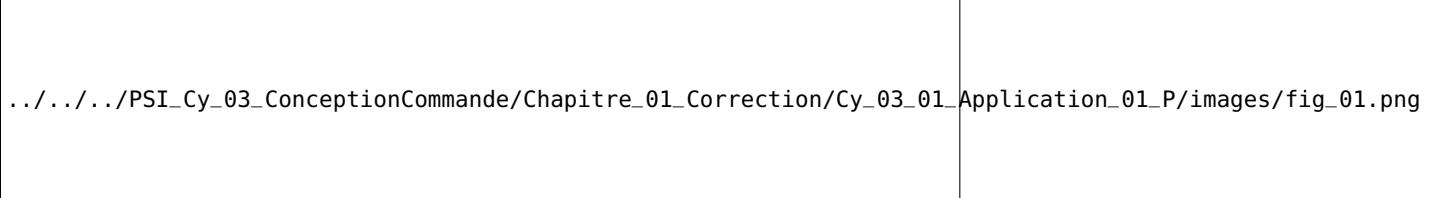
- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} = \frac{30}{1 + 5 \cdot 10^{-3} p}$ ;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$  : gain du capteur de position;
- $K_a$  : gain de l'adaptateur du signal de consigne  $\alpha_e(t)$ ;
- le signal de consigne  $\alpha_e(t)$  est exprimé en degrés;
- le correcteur  $C(p)$  est à action proportionnelle de gain réglable  $K_c$ ;
- $N = 200$  : rapport de transmission.

C1-02

C2-04

#### Objectif

- On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .
- On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$  du réducteur.

**Question 2** Déterminer le gain  $K_a$  de l'adaptateur.

**Question 3** Déterminer, en fonction notamment de  $K'_m$  et  $\tau'_m$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté  $K_{BO}$ .

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .

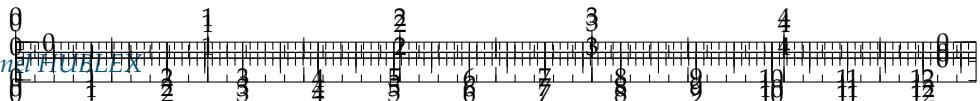
**Question 4** Déterminer la valeur de  $K_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

**Question 5** En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

**Question 6** Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .





**Question 7** Déterminer l'expression de  $\alpha_e(t)$  correspondant à une consigne de vitesse de  $105 \text{ } \text{s}^{-1}$ . En déduire  $\alpha_e(p)$ .

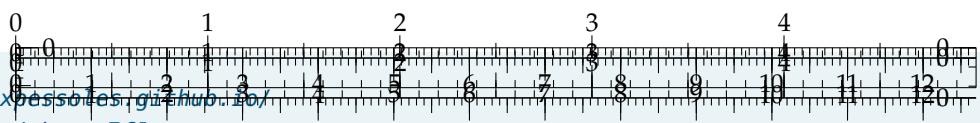
**Question 8** La valeur de  $K_{BO}$  définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.

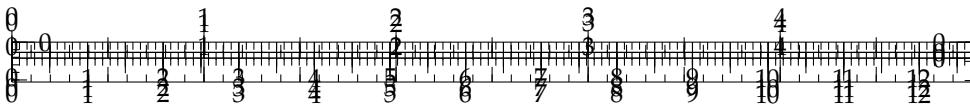
.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Application\_01\_P/images/Cy\_03\_01\_A

#### Éléments de correction

1.  $R(p) = \frac{1}{Np}$ .
2.  $K_a = \frac{\pi}{180} K_r$ .
3.  $T(p) = \frac{K_{BO}}{p(1 + \tau'_m p)}$  avec  

$$K_{BO} = \frac{K_c K'_m K_r}{N}$$
.
4.  $K_{BO} = \frac{\sqrt{2}}{\tau'_m}$ .
5.  $K_c = \frac{\sqrt{2}N}{\tau'_m K'_M K_r}$ .
6.  $\varepsilon_S = 0$ .
7.  $\alpha_e(p) = \frac{105}{p^2}$ .
8.  $\varepsilon_d = \frac{105 K_a}{K_{BO}}$ .





## Application 3

### Réglage de correcteurs P – Corrigé

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} = \frac{30}{1 + 5 \cdot 10^{-3} p}$  ;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$  : gain du capteur de position;
- $K_a$  : gain de l'adaptateur du signal de consigne  $\alpha_e(t)$ ;
- le signal de consigne  $\alpha_e(t)$  est exprimé en degrés;
- le correcteur  $C(p)$  est à action proportionnelle de gain réglable  $K_c$ ;
- $N = 200$  : rapport de transmission.

C1-02

C2-04

#### Objectif

- On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .
- On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .

[.../PSI\\_Cy\\_03\\_ConceptionCommande/Chapitre\\_01\\_Correction/Cy\\_03\\_01\\_Application\\_01\\_P/images/fig\\_01.png](http://.../PSI_Cy_03_ConceptionCommande/Chapitre_01_Correction/Cy_03_01_Application_01_P/images/fig_01.png)

**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$  du réducteur.

#### Correction

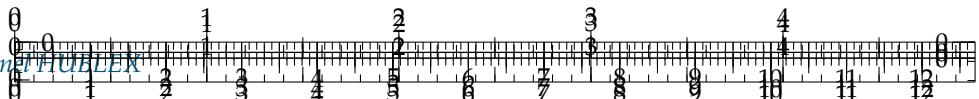
D'une part le réducteur permet de réduire la vitesse. D'autre part, le schéma-bloc permet de convertir une vitesse en position. Il joue donc le rôle d'intégrateur. On a donc  $R(p) = \frac{1}{Np}$

**Question 2** Déterminer le gain  $K_a$  de l'adaptateur.

#### Correction

On a  $\varepsilon(p) = K_a \alpha_e(p) - K_r \alpha_r(p) = K_a \alpha_e(p) - K_r \frac{\pi}{180} \alpha(p)$ . Pour que le système soit correctement asservi, il faut donc  $K_a = K_r \frac{\pi}{180}$ .





**Question 3** Déterminer, en fonction notamment de  $K'_m$  et  $t'_m$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté  $K_{BO}$ .

#### Correction

$$\text{On a } T(p) = C(p)H(p)R(p)K_r = K_c \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} \frac{1}{Np} K_r. \text{ On a donc } K_{BO} = \frac{K_c K'_m K_r}{N}$$

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 4** Déterminer la valeur de  $K_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

#### Correction

Pour un premier ordre intégré, la phase est de  $135^\circ$  en  $\frac{1}{\tau'_m}$ . Le gain (dB) de la boucle ouverte doit donc être nul pour cette pulsation ou encore que le module soit unitaire.

$$|T(p)| = 1 \Rightarrow \left| K_c \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} \frac{1}{Np} K_r \right| = 1 \Rightarrow \frac{K_c K'_m K_r}{N} \left| \frac{1}{1 + \tau'_m p} \frac{1}{p} \right| = 1 \Rightarrow \frac{K_c K'_m K_r}{N} \frac{1}{\tau'_m} \frac{1}{\sqrt{1+1}} = 1 \\ \Rightarrow K_c = \frac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r} \Rightarrow K_c = \frac{\sqrt{2}}{K_{BO}}$$

**Question 5** En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

#### Correction

$$\Rightarrow K_c = \frac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r}$$

**Question 6** Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

#### Correction

La BO du système est de classe 1. Pour une entrée échelon, l'écart statique est nul.

On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{s}^{-1}$ .

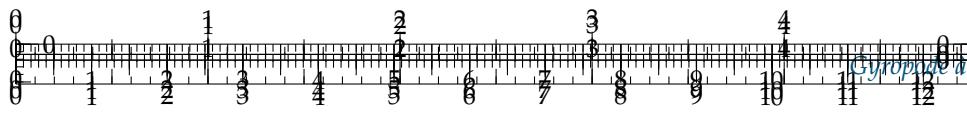
**Question 7** Déterminer l'expression de  $\alpha_e(t)$  correspondant à une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{s}^{-1}$ . En déduire  $\alpha_e(p)$ .

#### Correction

$$\alpha_e(t) = 105t \text{ et } \alpha_e(p) = \frac{105}{p^2}$$

**Question 8** La valeur de  $K_{BO}$  définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.





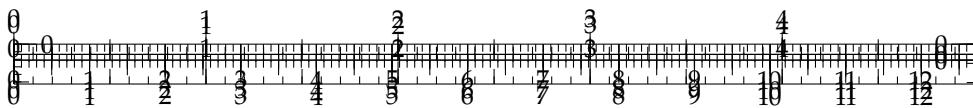
### Correction

$$\text{L'écart de trainage est donné par } \varepsilon_t = \frac{105K_a}{K_{BO}} = \frac{105K_r \frac{\pi}{180}}{\frac{N\sqrt{2}}{\tau'_m K'_m K_r} K'_m K_r} = \frac{105\pi K_r \tau'_m}{180\sqrt{2} N}.$$

$$\text{AN : } \varepsilon_t = \frac{105 \times \pi \times 4 \times 5 \times 10^{-3}}{180\sqrt{2}} = 0,02^\circ. \text{ Le CDC est respecté.}$$







## Colle 1

# Asservissement en température d'un four – Sujet

Équipe PT – La Martinière Monplaisir.

Un four électrique destiné au traitement thermique d'objets est constitué d'une enceinte close chauffée par une résistance électrique alimentée par une tension  $v(t)$ . Dix objets peuvent prendre place simultanément dans le four. Le traitement thermique consiste à maintenir les objets pendant 1 heure à une température de 1200°C (régulée de façon optimale car les objets sont détruits si la température dépasse 1400°C). Entre deux cuissons, un temps de 24 minutes est nécessaire pour procéder au refroidissement du four et à la manutention. Le four est régi par l'équation différentielle :  $\frac{d\theta(t)}{dt} + 2000 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = 0,02v(t)$ .

C1-02

C2-04

**Question 1** Calculer la fonction de transfert  $G(p)$  du four en boucle ouverte. Quel est le gain statique du four ? Que se passerait-il si on alimentait le four en continu et en boucle ouverte ?

On décide de réguler la température  $\theta(t)$  dans le four en utilisant un capteur de température qui délivre une tension  $u(t)$ . Le capteur est régi par l'équation différentielle :  $u(t) + 2 \frac{du(t)}{dt} = 5 \cdot 10^{-3}\theta(t)$ . On introduit également un gain  $K$  dans la chaîne directe.

**Question 2** Faire le schéma de la boucle de régulation et calculer sa fonction de transfert en boucle fermée. Rappeler les conditions de stabilité d'un système.

On donne  $t_m$  le temps de montée du système en BF :  $t_m \approx \frac{3}{\omega_{co}}$  avec  $\omega_{co}$  est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

**Question 3** On souhaite se placer dans des conditions de stabilité suffisantes en imposant une marge de phase  $\Delta\varphi = 45^\circ$ . Quelle est dans ces conditions, la valeur du temps de montée en boucle fermée ?

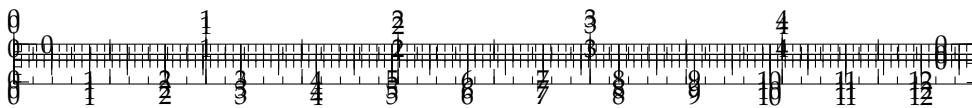
On souhaite atteindre une cadence de 100 pièces en 24h, ceci est obtenu pour  $K = 11,3$ .

**Question 4** Pour conserver une marge de phase égale à  $60^\circ$  on introduit une correcteur à avance de phase sous la forme  $C(p) = K_a \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$ . Déterminer les constantes du correcteur.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Co







## Colle 1

# Asservissement en température d'un four – Corrigé

Équipe PT – La Martinière Monplaisir.

Un four électrique destiné au traitement thermique d'objets est constitué d'une enceinte close chauffée par une résistance électrique alimentée par une tension  $v(t)$ . Dix objets peuvent prendre place simultanément dans le four. Le traitement thermique consiste à maintenir les objets pendant 1 heure à une température de 1200°C (régulée de façon optimale car les objets sont détruits si la température dépasse 1400°C). Entre deux cuissons, un temps de 24 minutes est nécessaire pour procéder au refroidissement du four et à la manutention. Le four est régi par l'équation différentielle :  $\frac{d\theta(t)}{dt} + 2000 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = 0,02v(t)$ .

C1-02

C2-04

**Question 1** Calculer la fonction de transfert  $G(p)$  du four en boucle ouverte. Quel est le gain statique du four ? Que se passerait-il si on alimentait le four en continu et en boucle ouverte ?

On décide de réguler la température  $\theta(t)$  dans le four en utilisant un capteur de température qui délivre une tension  $u(t)$ . Le capteur est régi par l'équation différentielle :  $u(t) + 2 \frac{du(t)}{dt} = 5 \cdot 10^{-3}\theta(t)$ . On introduit également un gain  $K$  dans la chaîne directe.

**Question 2** Faire le schéma de la boucle de régulation et calculer sa fonction de transfert en boucle fermée. Rappeler les conditions de stabilité d'un système.

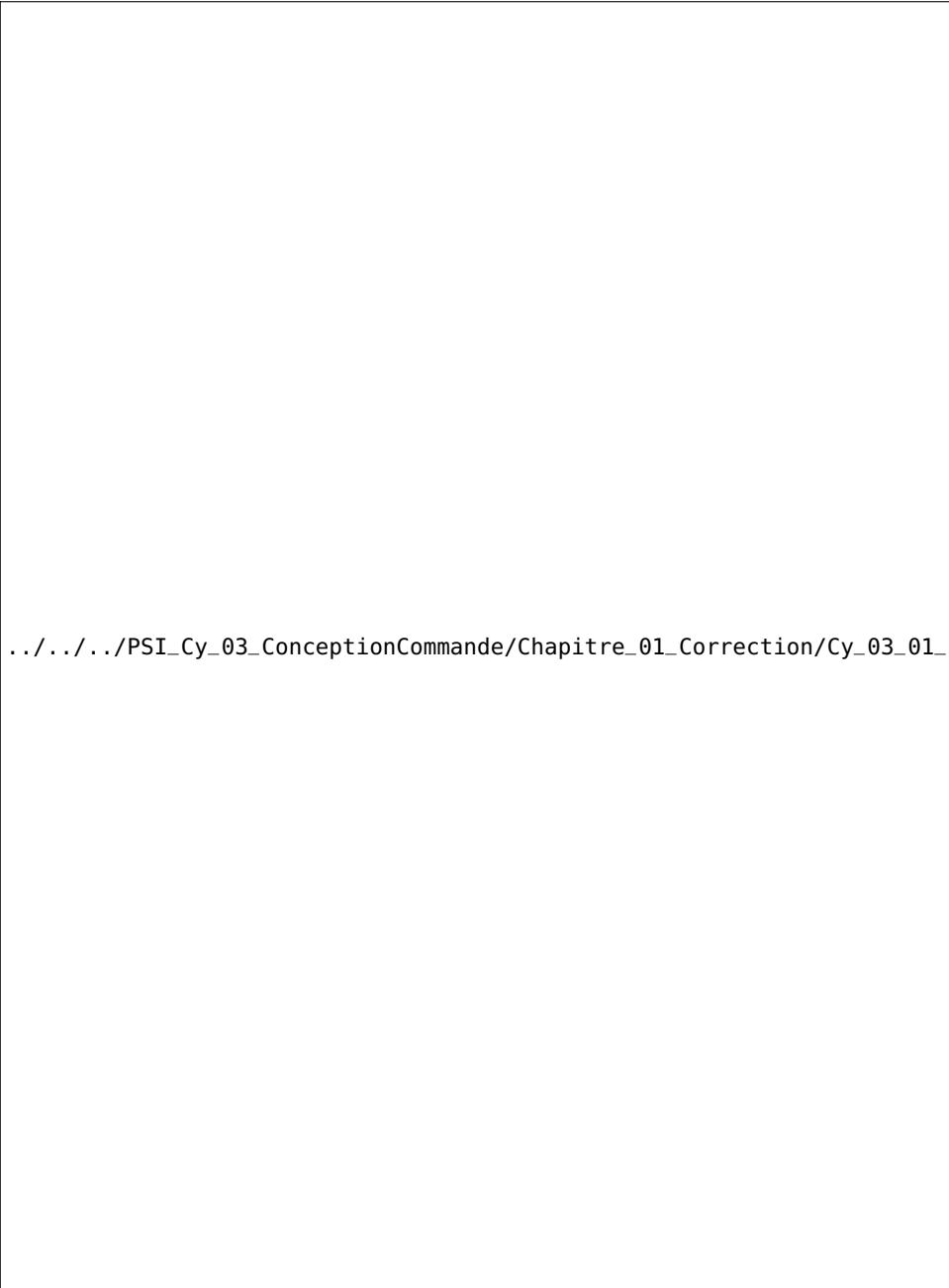
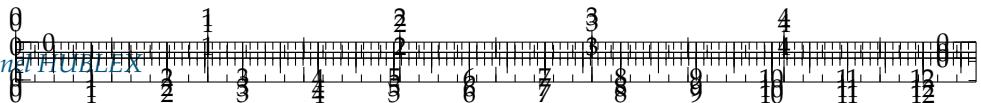
On donne  $t_m$  le temps de montée du système en BF :  $t_m \simeq \frac{3}{\omega_{co}}$  avec  $\omega_{co}$  est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

**Question 3** On souhaite se placer dans des conditions de stabilité suffisantes en imposant une marge de phase  $\Delta\varphi = 45^\circ$ . Quelle est dans ces conditions, la valeur du temps de montée en boucle fermée ?

On souhaite atteindre une cadence de 100 pièces en 24h, ceci est obtenu pour  $K = 11,3$ .

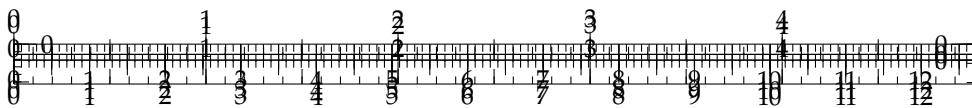
**Question 4** Pour conserver une marge de phase égale à  $60^\circ$  on introduit une correcteur à avance de phase sous la forme  $C(p) = K_a \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$ . Déterminer les constantes du correcteur.





../../../../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Colle\_01





## Colle 2

# Réglage d'un correcteur P et d'un correcteur à avance de phase – Sujet

Équipe PT – La Martinière Monplaisir.

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire :  $G(p) = \frac{K}{(10p + 1)^2 (p + 1)}$

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

- ▶ marge de phase :  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$ ;
- ▶ dépassement  $D\% < 10\%$ ;
- ▶ écart statique  $\varepsilon_S < 0,08$ ;
- ▶ temps de montée  $t_m < 8\text{s}$ .

C1-02

C2-04

**Question 1** Quelle est la condition sur  $K$  pour obtenir  $\varepsilon_S < 0,08$  ?

**Question 2** Exprimer l'erreur de trainage.

On note  $t_m$  le temps de montée du système en BF et  $t_m \simeq \frac{3}{\omega_{\text{co}}}$  et  $\omega_{\text{co}}$  est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

**Question 3** Quelle est la condition sur  $K$  pour obtenir  $t_m < 8\text{s}$  ?

**Question 4** Quel choix faire pour la valeur de  $K$  ?

**Question 5** Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions.

Expérimentalement, on constate que  $z_{\text{BF}} \simeq \frac{\Delta\varphi^o}{100}$  et on rappelle que  $D\% = e \sqrt{1 - z_{\text{BF}}^2}$ .

**Question 6** Que vaut alors le dépassement D% ?

**Question 7** À partir de la relation précédente, déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.

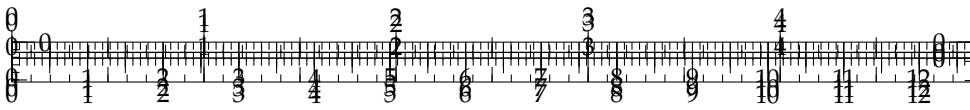
Avec la valeur de  $K = 16,1$ , on introduit, en amont de  $G(p)$ , dans la chaîne directe, un correcteur  $C(p) = K_a \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$  à avance de phase destiné à corriger le dépassement et la marge de phase, sans altérer ni la rapidité, ni la précision qui correspondent au cahier des charges.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

**Question 8** Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase permettant d'obtenir une marge de phase de  $60^\circ$ .







## Colle 2

# Réglage d'un correcteur P et d'un correcteur à avance de phase – Corrigé

Équipe PT – La Martinière Monplaisir.

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire :  $G(p) = \frac{K}{(10p + 1)^2 (p + 1)}$

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

C1-02

C2-04

- ▶ marge de phase :  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$ ;
- ▶ dépassement  $D\% < 10\%$ ;
- ▶ écart statique  $\varepsilon_S < 0,08$ ;
- ▶ temps de montée  $t_m < 8$  s.

**Question 1** Quelle est la condition sur  $K$  pour obtenir  $\varepsilon_S < 0,08$  ?

**Question 2** Exprimer l'erreur de trainage.

On note  $t_m$  le temps de montée du système en BF et  $t_m \simeq \frac{3}{\omega_{co}}$  et  $\omega_{co}$  est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

**Question 3** Quelle est la condition sur  $K$  pour obtenir  $t_m < 8$  s ?

**Question 4** Quel choix faire pour la valeur de  $K$  ?

**Question 5** Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions.

Expérimentalement, on constate que  $z_{BF} \simeq \frac{\Delta\varphi^o}{100}$  et on rappelle que  $D\% = e^{\frac{-\pi z_{BF}}{\sqrt{1 - z_{BF}^2}}}$ .

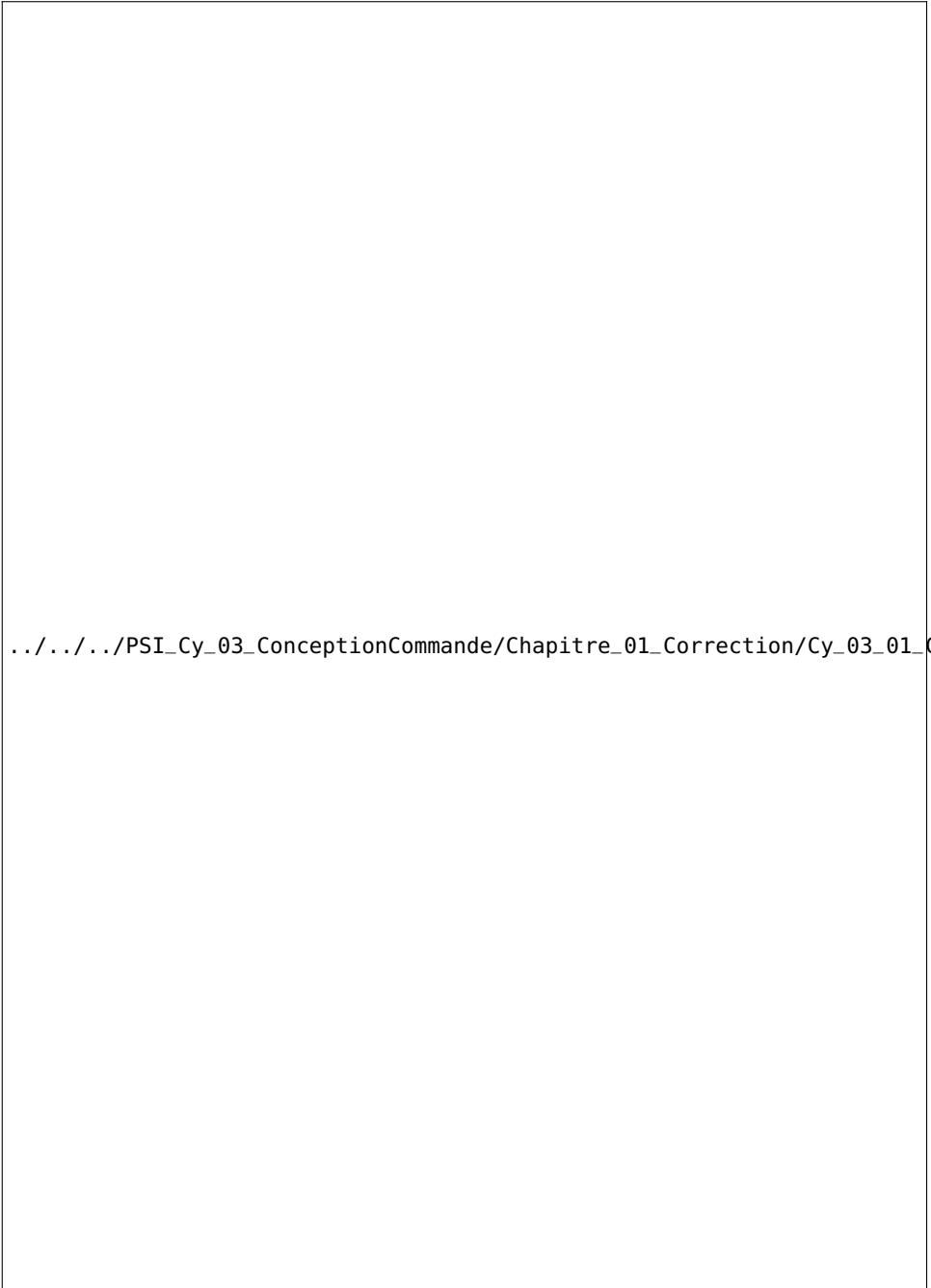
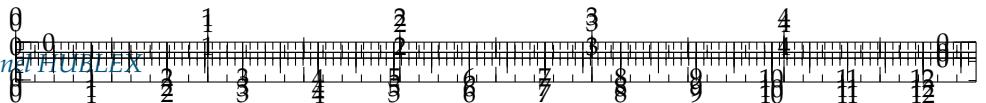
**Question 6** Que vaut alors le dépassement D% ?

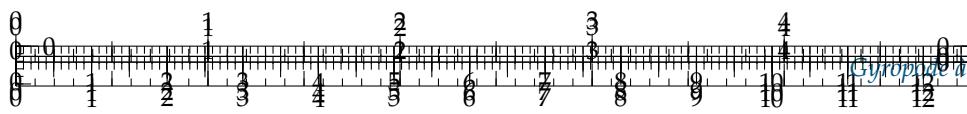
**Question 7** À partir de la relation précédente, déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.

Avec la valeur de  $K = 16,1$ , on introduit, en amont de  $G(p)$ , dans la chaîne directe, un correcteur  $C(p) = K_a \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$  à avance de phase destiné à corriger le dépassement et la marge de phase, sans altérer ni la rapidité, ni la précision qui correspondent au cahier des charges.

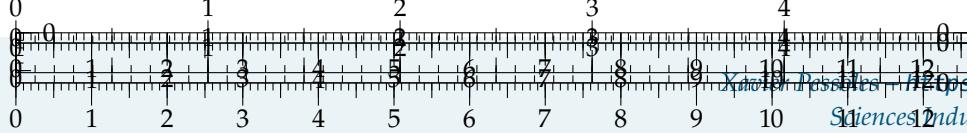
**Question 8** Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase permettant d'obtenir une marge de phase de  $60^\circ$ .



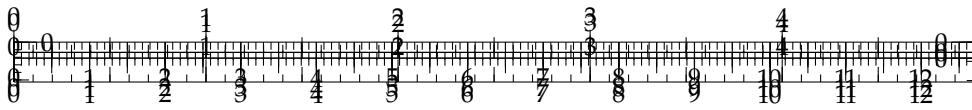




.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Colle\_02\_P\_AP/images/cor\_02.png







## Colle 3

# Réglage d'un correcteur P et d'un correcteur à avance de phase – Sujet

Équipe PT – La Martinière Monplaisir.

On considère un système de fonction de transfert est :  $G(p) = \frac{K}{(p + 1)^3}$  placé dans une boucle de régulation à retour unitaire. On souhaite une marge de phase supérieure à 45°.

C1-02

C2-04

**Question 1** Tracer le schéma-blocs associé au système.

**Question 2** Exprimer l'écart de statique et l'écart de trainage.

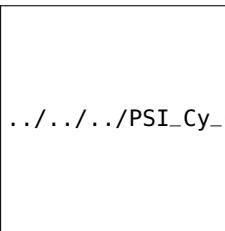
**Question 3** Définir la condition de stabilité théorique du système.

On note  $t_m$  le temps de montée du système en BF avec  $t_m \simeq \frac{3}{\omega_{co}}$  et  $\omega_{co}$  est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

**Question 4** Calculer la valeur  $K$  qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 2,15 s.

**Question 5** Calculer pour cette valeur de  $K$  la marge de phase.

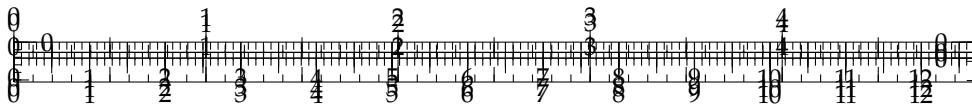
**Question 6** En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase  $C(p) = K_a \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$  qu'il faut introduire dans la chaîne directe.



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception







## Colle 3

# Réglage d'un correcteur P et d'un correcteur à avance de phase – Corrigé

Équipe PT – La Martinière Monplaisir.

On considère un système de fonction de transfert est :  $G(p) = \frac{K}{(p + 1)^3}$  placé dans une boucle de régulation à retour unitaire. On souhaite une marge de phase supérieure à  $45^\circ$ .

C1-02

C2-04

**Question 1** Tracer le schéma-blocs associé au système.

**Question 2** Exprimer l'écart de statique et l'écart de trainage.

**Question 3** Définir la condition de stabilité théorique du système.

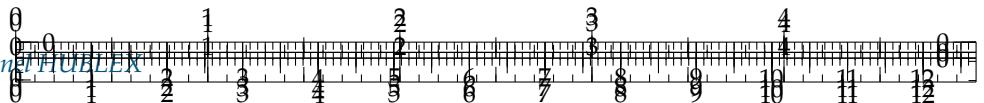
On note  $t_m$  le temps de montée du système en BF avec  $t_m \simeq \frac{3}{\omega_{co}}$  et  $\omega_{co}$  est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

**Question 4** Calculer la valeur  $K$  qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 2,15 s.

**Question 5** Calculer pour cette valeur de  $K$  la marge de phase.

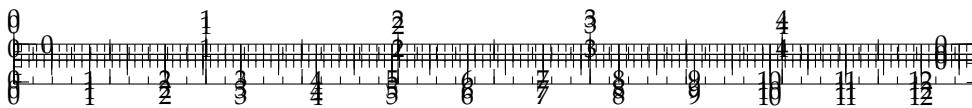
**Question 6** En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase  $C(p) = K_a \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$  qu'il faut introduire dans la chaîne directe.





.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Colle\_03...





## Colle 4

# Réglage d'un correcteur P et d'un correcteur à avance de phase – Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie.

### Correction proportionnelle

Soit  $F(p)$  la FTBO d'un système bouclé à retour unitaire. Les diagrammes de BODE de  $F(p)$  sont représentés sur la figure ci-dessous.

C1-02

C2-04

**Question 1** Déterminer les marges de phase et de gain du système, puis conclure quant à sa stabilité.

On décide d'ajouter au système un correcteur série de type proportionnel. On note  $K_p$  le gain de ce correcteur.

**Question 2** Déterminer la valeur de  $K_p$  permettant d'obtenir une marge de gain  $M_G = 12 \text{ dB}$ .

**Question 3** Déterminer la nouvelle marge de phase du système.

**Question 4** En le justifiant, déterminer l'erreur de position du système corrigé pour une consigne indicielle.

### Correction intégrale – Asservissement en accélération

On désire contrôler l'accélération  $\gamma(t)$  d'un plateau. Pour cela, un capteur d'accélération, fixé sur le plateau et de sensibilité  $B$ , est utilisé dans la chaîne de retour du système. Le moteur permettant la motorisation du plateau est modélisé par la fonction de transfert :

$H(s) = \frac{A}{1 + \tau s}$ . On modélise le correcteur par la fonction de transfert  $C(s)$ .

On a  $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $B = 10^{-2} \text{ g}^{-1} \text{ V m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

**Question 5** Quelle doit être la fonction de transfert du transducteur  $T(s)$  qui traduira l'accélération de consigne  $\Gamma_c(s)$  en tension  $E(s)$ .

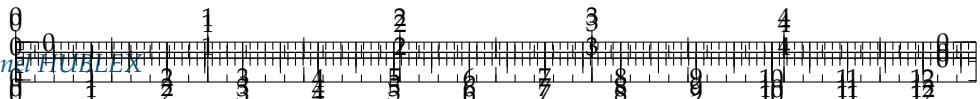
On applique à l'entrée du système une consigne d'accélération  $\gamma_c = 20 \text{ g}$ .

Système asservi sans correction :  $C(s) = 1$ .

**Question 6** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.

**Question 7** Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.





**Question 8** Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent.

**Question 9** Donner l'allure de la réponse de ce système en précisant les points caractéristiques.

**Système asservi avec correction intégrale :**  $C(s) = \frac{1}{s}$ .

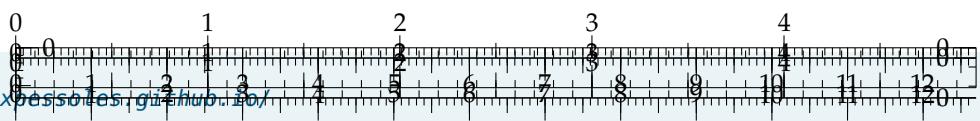
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Colle\_04

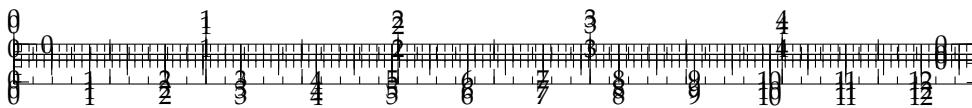
**Question 10** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.

**Question 11** Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.

**Question 12** Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent. Pour voir ou prévoir des résultats

**Question 13** Conclure en comparant le comportement du système avec et sans correction.





## Colle 4

# Réglage d'un correcteur P et d'un correcteur à avance de phase – Corrigé

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie.

### Correction proportionnelle

Soit  $F(p)$  la FTBO d'un système bouclé à retour unitaire. Les diagrammes de BODE de  $F(p)$  sont représentés sur la figure ci-dessous.

C1-02

C2-04

**Question 1** Déterminer les marges de phase et de gain du système, puis conclure quant à sa stabilité.

On décide d'ajouter au système un correcteur série de type proportionnel. On note  $K_p$  le gain de ce correcteur.

**Question 2** Déterminer la valeur de  $K_p$  permettant d'obtenir une marge de gain  $M_G = 12 \text{ dB}$ .

**Question 3** Déterminer la nouvelle marge de phase du système.

**Question 4** En le justifiant, déterminer l'erreur de position du système corrigé pour une consigne indicielle.

### Correction intégrale – Asservissement en accélération

On désire contrôler l'accélération  $\gamma(t)$  d'un plateau. Pour cela, un capteur d'accélération, fixé sur le plateau et de sensibilité  $B$ , est utilisé dans la chaîne de retour du système. Le moteur permettant la motorisation du plateau est modélisé par la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{A}{1 + \tau s}. \text{ On modélise le correcteur par la fonction de transfert } C(s).$$

On a  $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $B = 10^{-2} \text{ g}^{-1} \text{ V m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

**Question 5** Quelle doit être la fonction de transfert du transducteur  $T(s)$  qui traduira l'accélération de consigne  $\Gamma_c(s)$  en tension  $E(s)$ .

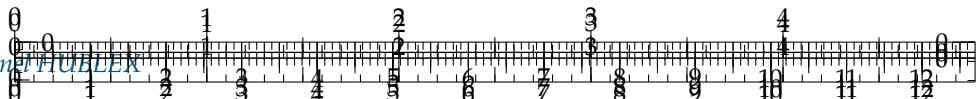
On applique à l'entrée du système une consigne d'accélération  $\gamma_c = 20 \text{ g}$ .

Système asservi sans correction :  $C(s) = 1$ .

**Question 6** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.

**Question 7** Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.





**Question 8** Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent.

**Question 9** Donner l'allure de la réponse de ce système en précisant les points caractéristiques.

**Système asservi avec correction intégrale :**  $C(s) = \frac{1}{s}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Colle\_04...

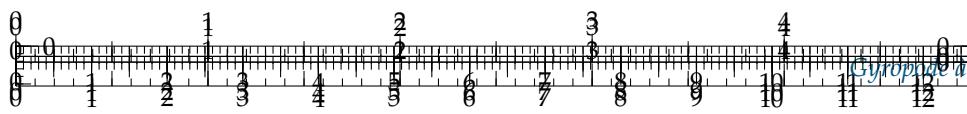
**Question 10** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Réaliser l'application numérique.

**Question 11** Calculer le temps de réponse à 5% de ce système pour une entrée en échelon.

**Question 12** Donner la valeur de l'accélération en régime permanent. Ce système est-il précis ? Donner l'erreur en régime permanent. Pouvait-on prévoir ce résultat.

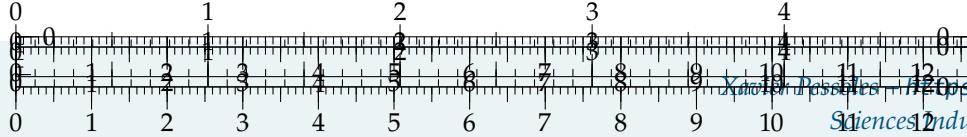
**Question 13** Conclure en comparant le comportement du système avec et sans correction.



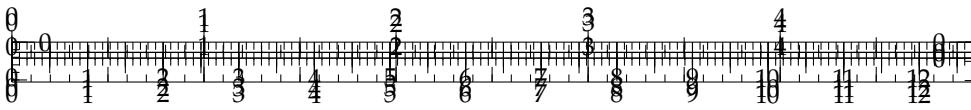


.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Colle\_04\_P\_I/images/cor\_01.png

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Colle\_04\_P\_I/images/cor\_02.png







## TD 1

# Mobilité assistée à l'aide d'une canne robotisée – Sujet

Concours CCP – PSI 2018.

### Présentation du prototype de canne robotisée étudié

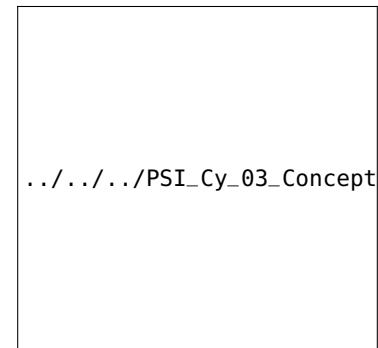
L'objectif de cette canne est de prendre en charge une partie des efforts normaux supportés par une jambe handicapée.

C1-02

C2-04

Le prototype de canne robotisée envisagé conserve une forme longiligne, un point d'appui au sol ainsi qu'un encombrement et un poids réduits. La canne robotisée, dont la structure mécanique est présentée en ??, se compose d'un axe linéaire motorisé et d'une roue motorisée située à son extrémité.

Les deux degrés de mobilité, rendus possibles par cette structure, permettent de suivre la marche d'un sujet et lui offre un point d'appui. L'avantage est d'éviter aux utilisateurs la manipulation de la canne (levée et positionnement) pendant la marche, la roue restant toujours en contact avec le sol.



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

### Étude de l'exigence 3.1.6.2 « Commande de l'axe linéaire »

Le maintien d'une hauteur constante lors de la phase d'appui revient finalement à asservir en position le déplacement  $x(t)$  de la canne supérieure 3 par rapport à la canne inférieure 2.

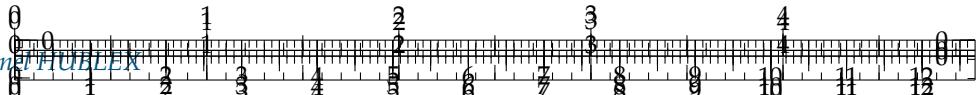
Le modèle causal retenu pour l'étude du comportement de l'axe linéaire perturbé est représenté par le schéma-blocs ci-dessous. Dans ce modèle, on note :

- ▶  $X_c(p)$  la transformée de Laplace de la consigne de déplacement  $x_c(t)$  en mètre,
- ▶  $X(p)$  la transformée de Laplace du déplacement  $x(t)$  en mètre,
- ▶  $F_p(p)$  la transformée de Laplace de l'effort exercé par le patient sur la canne  $F_p(t)$  en N,
- ▶  $\Omega_m(p)$  la transformée de Laplace de la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m(t)$  en rad/s,
- ▶  $C_m(p)$  la transformée de Laplace du couple moteur  $C_m(t)$  en N m,
- ▶  $C(p)$  la fonction de transfert du bloc correcteur.



FIGURE 4.1 – Schéma cinématique et photographie du prototype de canne robotisée





.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_P\_01\_0

## Modèle comportemental

Afin de proposer une modélisation simplifiée de la chaîne d'énergie de l'axe linéaire, une simulation du modèle précédent en boucle ouverte, non perturbé, a été réalisée. Le document réponse présente la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte à l'aide du diagramme de Bode (courbe de gain  $G_{BO}(\omega)$  et courbe de phase  $\varphi_{BO}(\omega)$ ).

**Question 1** À partir du diagramme de Bode, proposer un modèle de comportement du système en boucle ouverte. Soit  $H_{BO\_1}(p)$  cette fonction de transfert, donner sa forme canonique factorisée. Soient  $T_1$  et  $T_2$ , telles que  $T_1 < T_2$ , les constantes de temps introduites et  $K_{BO}$  le gain de  $H_{BO\_1}(p)$ , préciser les valeurs numériques et unités de  $T_1$ ,  $T_2$  et  $K_{BO}$ . Vous laisserez apparaître les traits de construction nécessaires à l'identification du modèle sur le document réponse.

Lors d'une marche saine à allure rapide la cadence moyenne est de 113 pas par minute.

**Question 2** Déterminer la fréquence moyenne en Hz de la marche saine à allure rapide.

Pour la suite, on considérera que la fréquence maximale de déplacement de l'axe linéaire de la canne (liée au mouvement de la marche) est fixée à  $F_{MAX} = 4$  Hz. On propose alors en première approximation une modélisation du comportement du système en boucle ouverte par une fonction de transfert  $H_{BO}(p)$  de la forme  $H_{BO}(p) = K_{BO}/p$  avec  $K_{BO} = 1/30$ .

**Question 3** Justifier, à l'aide de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte, la validité de cette modélisation approchée.

## Correction proportionnelle

Pour la suite, on modélise le comportement du système en boucle ouverte par  $H_{BO}(p) = K_{BO}/p$  avec  $K_{BO} = 1/30$ . On considère un correcteur à action proportionnelle tel que  $C(p) = K_{corr} = 1$ .

Le schéma-blocs du système non perturbé correspond alors à celui de la figure ??.

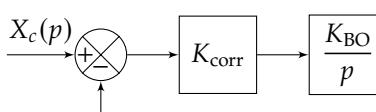
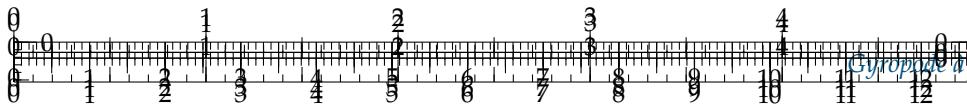


FIGURE 4.2 – Schéma-bloc simplifié du système non perturbé avec  $C(p) = K_{corr}$

**Question 4** Déterminer l'expression de  $H_{BF}(p) = X(p)/X_c(p)$ , la fonction de transfert en boucle fermée de la modélisation de la ???. Déterminer les paramètres caractéristiques de  $H_{BF}(p)$  et en déduire les performances de cette modélisation pour  $C(p) = K_{corr} = 1$ . Conclure vis-à-vis des performances d'asservissement de l'axe linéaire.

On se propose de modifier la valeur de  $K_{corr}$  de manière à vérifier l'exigence de rapidité de l'asservissement.





**Question 5** Déterminer la valeur numérique à donner à  $K_{\text{corr}}$  pour assurer le temps de réponse à 5 % lié à l'exigence de rapidité de l'asservissement de l'axe linéaire.

La figure ?? donne l'évolution de la réponse temporelle  $x(t)$  du système réel non perturbé à un échelon en déplacement de valeur finale  $X_c = 10 \text{ mm}$ , pour une correction proportionnelle  $K_{\text{corr}} = 1500$ .

**Question 6** L'évolution de la réponse du système est-elle cohérente avec le comportement du modèle retenu ? Justifier. Quelle modification faudrait-il apporter au modèle approché pour retrouver cette forme de réponse temporelle ?

Pour la suite, on modélise la fonction de transfert en boucle ouverte du système par  $H_{\text{BO}}(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K_{\text{BO}}}{1 + \tau_{\text{BO}} p}$  avec  $K_{\text{BO}} = 1/30$  (unité en  $\text{s}^{-1}$ ) et  $\tau_{\text{BO}} = 9 \text{ ms}$ .

**Question 7** Quelle valeur maximale de  $K_{\text{corr}}$ , notée  $K_{\text{corr}}^{\text{MAX}}$ , permet de vérifier les critères de précision et de dépassement de l'asservissement de l'axe linéaire ?

**Question 8** Déterminer la valeur du temps de réponse à 5 %,  $t_{r5\%}$  de ce modèle pour  $K_{\text{corr}} = K_{\text{corr}}^{\text{MAX}}$  à partir de l'abaque du temps de réponse réduit donné ci-dessous.

La figure ?? donne les évolutions des réponses temporales  $x(t)$  du système réel avec prise en compte de la perturbation ( $F_p$  constante et égale à 175 N) à un échelon en déplacement de valeur finale  $X_c = 10 \text{ mm}$ , pour une correction proportionnelle  $K_{\text{corr}} = 1500$  et pour  $K = K_{\text{corr}}^{\text{MAX}}$ .

**Question 9** Conclure sur les capacités de la correction à action proportionnelle pure vis-à-vis des performances à atteindre.

## Correction avec action proportionnelle et intégrale généralisée – correcteur PI généralisé

Le correcteur finalement retenu est un correcteur avec action proportionnelle et intégrale généralisée. La fonction de transfert  $C(p)$  prend alors la forme suivante :

$$C(p) = K_{\text{corr}} \cdot \frac{1+T_d p}{p} \text{ avec } K_{\text{corr}} >> 1 \text{ et } T_d < 1 \text{ s.}$$

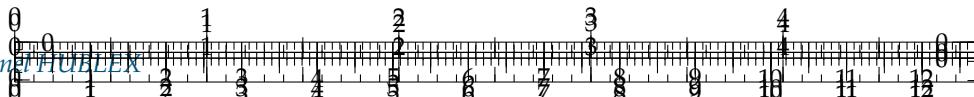
On donne dans le document réponse le diagramme de Bode (courbe de Gain et de Phase) du système en boucle ouverte avec correcteur PI Généralisé pour  $K_{\text{corr}} = 1000$  et  $T_d = 0,2 \text{ s}$ .

**Question 10** Représenter sur le document réponse les marges de Gain  $M_G$  et de Phase  $M_\phi$  du système corrigé.

Avec cette correction, le système est précis mais les valeurs des marges de gain et de phase sont telles que le système n'est pas assez rapide. Il est donc nécessaire d'augmenter la valeur de  $K_{\text{corr}}$ , tout en conservant  $T_d = 0,2 \text{ s}$ , de manière à augmenter la bande passante du système et ainsi se rapprocher des valeurs limites de marge de Gain et de Phase autorisées.

**Question 11** En déduire la valeur maximale à donner au gain  $K_{\text{corr}}$ , en conservant  $T_d = 0,2 \text{ s}$ , afin de respecter les performances en stabilité de l'asservissement de l'axe linéaire tout en augmentant au maximum la bande passante du système.





.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

Déplacement (mm) en fonction du temps (s)

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

Intensité simulée (A) en fonction du temps (s)

FIGURE 4.4 – Réponses temporelles à un échelon d'amplitude  $X_c = 10 \text{ mm}$  du système simulé, perturbé et corrigé

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

FIGURE 4.5 – Hauteur de la main au cours de la marche pour  $V = 0,22 \text{ m/s}$

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception  
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

FIGURE 4.6 –  $V = 0,22 \text{ m/s}$ , allure normale – (a) : suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol – (b) : suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle  $\theta_g$ ) par la canne (angle  $\theta$ )

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

FIGURE 4.7 –  $V = 0,29 \text{ m/s}$ , allure rapide – (a) : suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol – (b) : suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle  $\theta_g$ ) par la canne (angle  $\theta$ )

Les figures ?? donnent la réponse temporelle à un échelon de consigne  $X_c = 10 \text{ mm}$  du système simulé, perturbé et corrigé du déplacement  $x(t)$  (en mm) ainsi que l'évolution de l'intensité simulée (en Ampères) circulant au sein du moteur.

**Question 12** Conclure sur les performances du système perturbé vis-à-vis des exigences de l'asservissement de l'axe linéaire. Commenter l'évolution de l'intensité simulée avec les caractéristiques de la carte de commande du moteur.

## Synthèse – Étude de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche »

L'objectif de cette synthèse est de vérifier que les paramètres d'asservissement mis finalement en place sur la commande de l'axe linéaire et sur la commande de la roue permettent d'atteindre les performances de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche ».

La ?? donne les évolutions de la hauteur de main mesurées lors d'une marche assistée avec le prototype de canne à la vitesse  $V = 0,22 \text{ m/s}$ .

La courbe grise en trait continu correspond au cas où l'axe linéaire est sans correction ( $C(p) = 1$ ).

La courbe noire en trait pointillé correspond au cas où l'axe linéaire est corrigé (correction PI généralisée avec paramètres optimisés).

Il est à remarquer que lors de cet essai, le patient avait pour consigne de conserver sa main immobile lors du déplacement. Cette condition est difficilement vérifiable en pratique car le patient ne peut pas vraiment se concentrer sur la position de sa main pendant la marche.

**Question 13** Conclure sur l'influence de la correction de l'axe linéaire sur le respect de l'exigence de maintien de la hauteur de main.

Les figures ?? et ?? donnent pour  $V = 0,22 \text{ m/s}$  (allure normale), respectivement pour  $V = 0,29 \text{ m/s}$  (allure rapide), le suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol et le suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle  $\theta_g$ ) par la canne (angle  $\theta$ ).

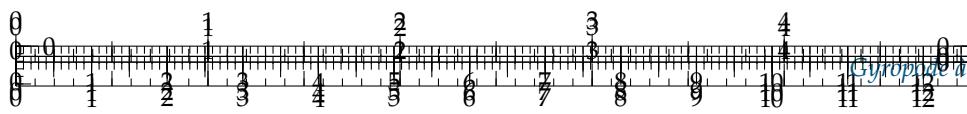
**Question 14** Conclure sur le réglage des paramètres d'asservissement mis en place vis-à-vis des performances liées à la synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur

## Annexes – Diagramme partiel des exigences

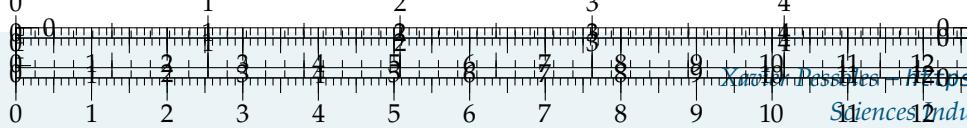
### Éléments de correction

1.  $H_{BO\_1}(p) = K_{BO} \frac{1}{p} \frac{1}{1+T_1 p} \frac{1}{1+T_2 p}$  avec  $\omega_{c1} \approx 1 \times 10^4 \text{ rad/s}$  et  $T_1 = 0,1 \text{ ms}$ ,  $\omega_{c2} \approx 1 \times 10^2 \text{ rad/s}$  et  $T_2 = 10 \text{ ms}$ .  $K_{BO} = 10^{-30/20} \approx 0,032 \text{ s}^{-1}$ .
2. 1,88 Hz.
3. .
4.  $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{BO}} p}$  et  $1/K_{BO} = 30 \text{ s}$ .
5.  $K_{corr} \geq 1500$ .
6. .
7.  $K_{corr} \leq 1700$ .
8.  $t_{r5\%} \approx 38 \text{ ms} < 60 \text{ ms}$ .
9. .
10.  $M_G \approx 60 \text{ dB}$  et une marge de Phase  $M_\varphi \approx 50^\circ$ .
11.  $K_{corr}^{\text{new}} \approx 5620$ .
12. .

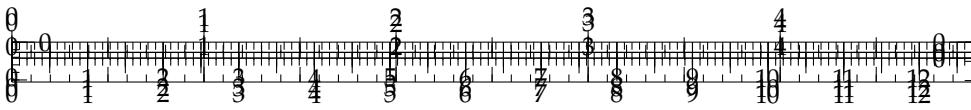




13. .  
14. .







## TD 1

# Mobilité assistée à l'aide d'une canne robotisée – Corrigé

Concours CCP – PSI 2018.

### Présentation du prototype de canne robotisée étudié

#### Étude de l'exigence 3.1.6.2 « Commande de l'axe linéaire »

C1-02

#### Modèle comportemental

C2-04

**Question 1** À partir du diagramme de Bode, proposer un modèle de comportement du système en boucle ouverte. Soit  $H_{BO\_1}(p)$  cette fonction de transfert, donner sa forme canonique factorisée. Soient  $T_1$  et  $T_2$ , telles que  $T_1 < T_2$ , les constantes de temps introduites et  $K_{BO}$  le gain de  $H_{BO\_1}(p)$ , préciser les valeurs numériques et unités de  $T_1$ ,  $T_2$  et  $K_{BO}$ . Vous laisserez apparaître les traits de construction nécessaires à l'identification du modèle sur le document réponse.

#### Correction

L'allure des courbes de gain et de phase de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte montre clairement que le comportement est équivalent à celui d'un système du second ordre (avec coefficient d'amortissement  $z > 1$ , car les courbes présentent deux cassures nettes en  $\omega_{c1} = 1/T_1$  et  $\omega_{c2} = 1/T_2$ ) associé à un intégrateur pur (pente de -20 dB/dec quand  $\omega \rightarrow 0$  pour la courbe de gain et asymptote à -90° quand  $\omega \rightarrow 0$  pour la courbe de phase). La forme canonique factorisée peut donc se mettre sous la forme :

$$H_{BO\_1}(p) = K_{BO} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1+T_1 \cdot p} \cdot \frac{1}{1+T_2 \cdot p}$$

On relève sur les courbes :

$$\omega_{c1} \approx 10^4 \text{ rad/s}, \text{ donc } T_1 = 10^{-4} \text{ s} = 0,1 \text{ ms},$$

$$\omega_{c2} \approx 10^2 \text{ rad/s}, \text{ donc } T_2 = 10^{-2} \text{ s} = 10 \text{ ms},$$

et en remarquant que pour  $\omega = 10^0 = 1 \text{ rad/s}$ ,  $G_{BO} = 20 \log(K_{BO}) = -30 \text{ dB}$ , on obtient  $K_{BO} = 10^{-30/20} \approx 0,032 \text{ s}^{-1}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

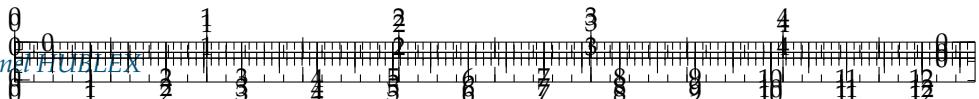
**Question 2** Déterminer la fréquence moyenne en Hz de la marche saine à allure rapide.

#### Correction

Une cadence de 113 pas par minute correspond à une fréquence de marche de l'ordre de  $\frac{113}{60} \approx 1,88 \text{ Hz}$ .

**Question 3** Justifier, à l'aide de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte, la validité de cette modélisation approchée.



**Correction**

$F_{MAX} = 4 \text{ Hz}$  correspond à une sollicitation de pulsation  $\omega_{MAX} = 4 \times 2\pi \simeq 25 \text{ rad/s}$ .

On constate que  $\omega_{MAX} < \omega_{c2} = 100 \text{ rad/s} \ll \omega_{c1} = 10^4 \text{ rad/s}$ .

Pour  $\omega < \omega_{MAX}$ , le système se comporte donc comme un intégrateur pur de gain égal à  $K_{BO}$ . L'approximation de  $H_{BO}(p)$  par  $K_{BO}/p$  avec  $K_{BO} = 1/30 \simeq 0,032$  est donc acceptable.

**Question 4** Déterminer l'expression de  $H_{BF}(p) = X(p)/X_c(p)$ , la fonction de transfert en boucle fermée de la modélisation de la ???. Déterminer les paramètres caractéristiques de  $H_{BF}(p)$  et en déduire les performances de cette modélisation pour  $C(p) = K_{corr} = 1$ . Conclure vis-à vis des performances d'asservissement de l'axe linéaire.

**Correction**

En appliquant la formule de Black, il vient  $H_{BF}(p) = \frac{K_{corr} \cdot K_{BO}/p}{1 + K_{corr} \cdot K_{BO}/p}$ , avec  $K_{corr} = 1$ , on obtient :

$$H_{BF}(p) = \frac{K_{BO}}{p + K_{BO}}, \text{ soit sous forme canonique : } H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{BO}} \cdot p}.$$

La fonction de transfert est donc celle d'un système du 1er ordre, de gain unitaire  $K_{BF} = 1$  et de constante de temps  $1/K_{BO} = 30 \text{ s}$ .

Les performances de ce système sont donc :

- ▶ système stable car système du 1er ordre  $\Rightarrow$  cdcf vérifié,
- ▶ système précis car de gain unitaire  $\Rightarrow$  cdcf vérifié,
- ▶ système ne présente pas de dépassement car système du 1er ordre  $\Rightarrow$  cdcf vérifié,
- ▶  $tr5\% = 3 \times 30 = 90 \text{ s} \Rightarrow$  cdcf non vérifié car le temps de réponse attendu est de 60 ms.

Le système avec  $K_{corr} = 1$  est donc trop lent.

**Question 5** Déterminer la valeur numérique à donner à  $K_{corr}$  pour assurer le temps de réponse à 5 % lié à l'exigence de rapidité de l'asservissement de l'axe linéaire.

**Correction**

Il faut alors augmenter  $K_{corr}$ , tel que  $tr5\% = 3 \times \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \leqslant 60 \text{ ms}$ . Donc

$$K_{corr} \geqslant \frac{3}{60 \cdot 10^{-3} \cdot K_{BO}}. \text{ L'application numérique donne } K_{corr} \geqslant 1500.$$

**Question 6** L'évolution de la réponse du système est-elle cohérente avec le comportement du modèle retenu ? Justifier. Quelle modification faudrait-il apporter au modèle approché pour retrouver cette forme de réponse temporelle ?

**Correction**

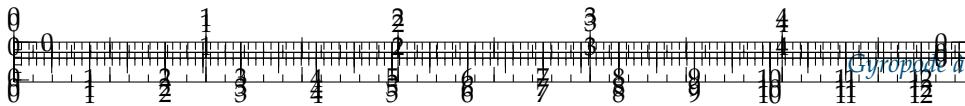
L'allure de la réponse ne correspond pas à celle d'un système du 1er ordre car un dépassement est observé. Avec  $K_{corr} = 1500$ , le système en boucle ouverte ne peut plus être modélisé par un intégrateur pur de gain  $K_{BO}$ , en effet cette valeur élevée de  $K_{corr}$  fait monter la courbe de gain, le système a une bande passante plus élevée et l'action du terme  $\frac{1}{1+T_2 \cdot p}$  ne peut plus être négligée. Le comportement du système doit donc être modélisé par celui d'un système du second ordre pour se rapprocher du comportement observé.

**Question 7** Quelle valeur maximale de  $K_{corr}$ , notée  $K_{corr}^{MAX}$ , permet de vérifier les critères de précision et de dépassement de l'asservissement de l'axe linéaire ?

**Correction**

Le critère de précision est satisfait du fait de la présence du terme intégrateur en  $\frac{1}{p}$  dans la fonction de transfert en boucle ouverte du système.





Pour assurer un 1er dépassement  $D1\% \leq 5\%$ , il faut que le système du second ordre ait un coefficient d'amortissement  $z$ , tel que  $z \geq 0,7$ . On détermine l'expression de  $H_{BF}(p)$ , la fonction de transfert en boucle fermée, afin d'identifier  $z$ .

D'après la formule de Black,  $H_{BF}(p) = \frac{K_{corr} \cdot H_{BO}(p)}{1 + K_{corr} \cdot H_{BO}(p)} = \frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{K_{corr} \cdot K_{BO} + p \cdot (1 + \tau_{BO} \cdot p)}$ .

La forme canonique de  $H_{BF}(p)$  est donc :  $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \cdot p + \frac{\tau_{BO}}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \cdot p^2}$

Par identification,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{\tau_{BO}}}$  et  $z = \frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}}$ , donc,  $z = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau_{BO} \cdot K_{corr} \cdot K_{BO}}}$ . La condition  $z \geq 0,7$  implique donc  $K_{corr} \leq \frac{1}{(2 \times 0,7)^2 \cdot \tau_{BO} \cdot K_{BO}}$ . L'application numérique donne  $K_{corr} \leq 1700$ . On prend donc  $K_{corr}^{MAX} = 1700$ .

**Question 8** Déterminer la valeur du temps de réponse à 5 %,  $t_{r5\%}$  de ce modèle pour  $K_{corr} = K_{corr}^{MAX}$  à partir de l'abaque du temps de réponse réduit donné ci-dessous.

#### Correction

D'après l'abaque du temps de réponse réduit donné en ??, pour  $z = 0,7$  on relève  $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ .

Or  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr}^{MAX} \cdot K_{BO}}{\tau_{BO}}}$ , donc  $t_{r5\%} = 3 \cdot \sqrt{\frac{\tau_{BO}}{K_{corr}^{MAX} \cdot K_{BO}}}$ .

L'application numérique donne :  $t_{r5\%} \approx 38 \text{ ms} < 60 \text{ ms} \Rightarrow \text{cdcf vérifié !}$

**Question 9** Conclure sur les capacités de la correction à action proportionnelle pure vis-à-vis des performances à atteindre.

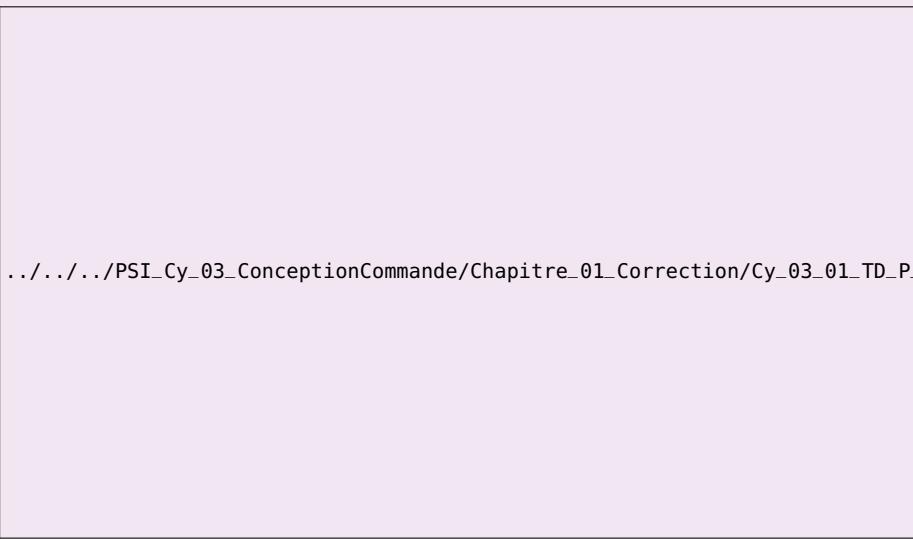
#### Correction

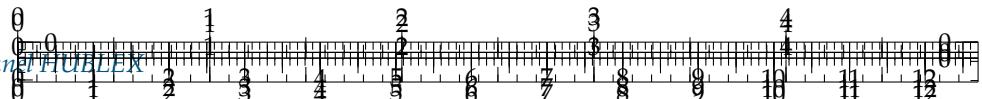
Les performances de stabilité, rapidité et de 1er dépassement sont vérifiées. Cependant, le système avec correction proportionnelle n'arrive pas à atténuer suffisamment la perturbation (l'erreur est de l'ordre de 15 à 20% bien supérieure au 5% du cahier des charges). Un autre type de correction doit donc être envisagé pour satisfaire l'ensemble des critères.

**Question 10** Représenter sur le document réponse les marges de Gain  $M_G$  et de Phase  $M_\phi$  du système corrigé.

#### Correction

D'après la figure ci-dessous, on relève une marge de Gain  $M_G \approx 60 \text{ dB}$  et une marge de Phase  $M_\phi \approx 50^\circ$ . Avec ces valeurs le cahier des charges ( $M_G = 45 \text{ dB}$  et  $M_\phi = 35^\circ$ ) est vérifié.





.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

**Question 11** En déduire la valeur maximale à donner au gain  $K_{corr}$ , en conservant  $T_d = 0,2$  s, afin de respecter les performances en stabilité de l'asservissement de l'axe linéaire tout en augmentant au maximum la bande passante du système.

#### Correction

La modification de la valeur du gain  $K_{corr}$  n'affecte que la courbe de gain. L'augmentation de  $K_{corr}$  va faire remonter la courbe de gain du système en boucle ouverte. Graphiquement, on observe que c'est le critère sur la marge de Gain qui limite la remontée de la courbe de gain (voir figure ci-dessous). La courbe de gain peut donc être remontée de +15 dB, on relève alors une marge de Gain  $M_G \simeq 45$  dB et une marge de Phase  $M_\phi \simeq 65^\circ$ .

Initialement on avait  $K_{corr}^{init} = 1000$ , pour remonter la courbe de gain de +15 dB, il faudra prendre  $K_{corr}^{\text{new}}$  tel que :

$$20 \times \log(K_{corr}^{\text{new}}) = 20 \times \log(K_{corr}^{init}) + 15$$

$$\Leftrightarrow K_{corr}^{\text{new}} = K_{corr}^{init} \times 10^{15/20}$$

L'application numérique donne  $K_{corr}^{\text{new}} \simeq 5620$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_P\_01

**Question 12** Conclure sur les performances du système perturbé vis-à-vis des exigences de l'asservissement de l'axe linéaire. Commenter l'évolution de l'intensité simulée avec les caractéristiques de la carte de commande du moteur.

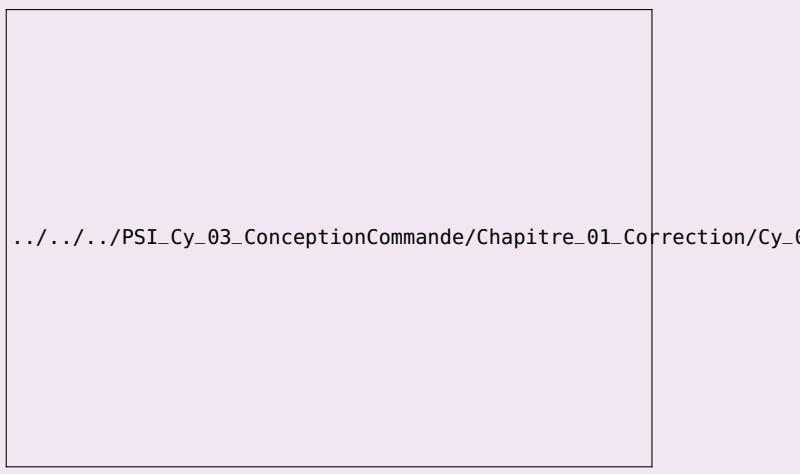
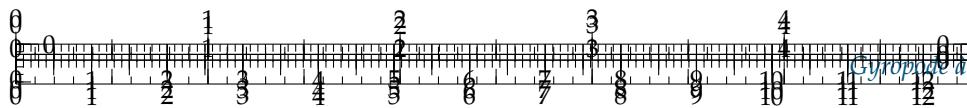
#### Correction

Avec cette correction la réponse temporelle respecte l'ensemble des critères du cahier des charges :

- le système est stable et  $M_G \simeq 45$  dB et  $M_\phi \simeq 65^\circ \Rightarrow$  cdcf vérifié;
- le système est précis  $\Rightarrow$  cdcf vérifié;
- système ne présente pas de dépassement  $\Rightarrow$  cdcf vérifié;
- $tr5\% \simeq 50$  ms  $\Rightarrow$  cdcf vérifié ( $< 60$  ms).

Par contre, on relève un courant  $I_{mot}^{\text{MAX}} \simeq 35$  A. Or la carte ELMO ne supporte qu'un courant maximal de 20 A. Le contrôleur ELMO ne permet donc pas de réaliser cette commande.





.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_P\_01\_CanneRobotisee/images/reponse

## Synthèse – Étude de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche »

**Question 13** Conclure sur l'influence de la correction de l'axe linéaire sur le respect de l'exigence de maintien de la hauteur de main.

### Correction

Le cahier des charges (performance Id 7) impose un écart de hauteur de main de 3 cm pour un cycle de marche. Sans correction, l'écart peut atteindre jusqu'à 4,5 cm, avec correction l'écart est limité à 2,5 cm maxi ce qui vérifie le cdcf.

Avec correction les variations de hauteur de la main sont donc moins importantes au commencement de la phase d'appui. Ceci apporte un confort dans l'utilisation avec le sentiment d'avoir une canne plus rigide (moins d'affaissement) lors de l'appui.

**Question 14** Conclure sur le réglage des paramètres d'asservissement mis en place vis-à-vis des performances liées à la synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.

### Correction

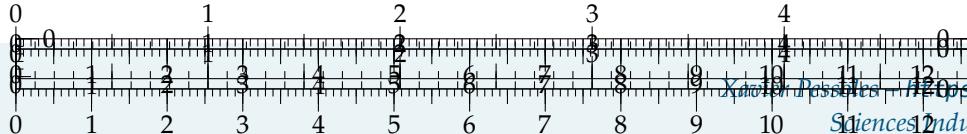
Le cahier des charges stipule comme performance à atteindre pour l'assistance de la marche (cadre Id 7) :

- ▶ un écart maximal sur l'angle d'orientation entre la canne et la jambe de  $20^\circ$ ;
- ▶ le respect de l'exigence de suivi du pied, l'appui au sol de la canne doit se situer entre l'avant et l'arrière du pied de la jambe invalide.

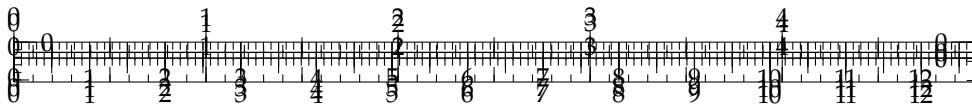
Pour les deux allures de marche, l'exigence de suivi de pied est respectée car la courbe de position de la canne reste comprise entre les courbes de position de l'avant du pied et de l'arrière du pied (c'est à la limite de l'avant du pied pour le cas de la marche rapide).

Pour ce qui concerne l'exigence sur l'angle d'orientation, pour les deux allures l'exigence est respectée car les écarts restent inférieurs à  $20^\circ$ . Mise à part la phase d'appui en allure normale, l'orientation de la canne est en retard par rapport à l'orientation de la jambe, et ce retard est d'autant plus important que l'allure de la marche est élevée.

On peut donc conclure que ce réglage des paramètres d'asservissement permet de satisfaire les performances liées à la synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.







## TD 2

# Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E) – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2016.

## Mise en situation

Le robot MC<sup>2</sup>E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

C1-02

C2-04

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

**L'axe en translation du MC<sup>2</sup>E est asservi en effort constant pour tirer (ou pousser) la vésicule au fur et à mesure que le chirurgien utilise son bistouri pour détacher la vésicule du foie. Le diagramme des exigences au dos décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC<sup>2</sup>E.**

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

## Objectif

Modéliser et valider l'asservissement en effort. On cherche à savoir si l'asservissement réalisé permet d'obtenir un effort constant sur l'effecteur.

## Modèle de connaissance de l'asservissement

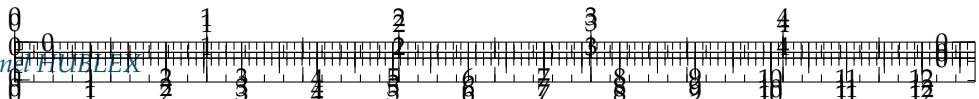
L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$  avec :

- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera  $\theta_m(p)$ ,  $\Omega_m(p)$ ,  $C_m(p)$  et  $C_e(p)$  les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose  $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$  où  $K_{C\theta}$  est une constante positive. On a de plus  $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$ . La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_01\_MC2E/images/Sujet/images/





Avec :

- $C_e(p)$ , couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC<sup>2</sup>E;
- $C_c(p)$ , couple de consigne;
- $C_m(p)$ , couple moteur;
- $H_{cor}(p)$ , fonction de transfert du correcteur.

Dans un premier temps, on prendra  $H_{cor}(p) = 1$ .

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

FIGURE 4.9 – Régulation avec retour tachymétrique

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_T

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus loin (exigences 1.2.2.1 à 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.

FIGURE 4.10 – Régulation avec correcteur PI.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_T

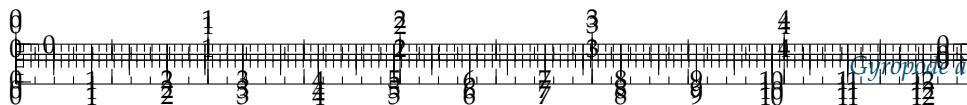
**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : 
$$\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$$

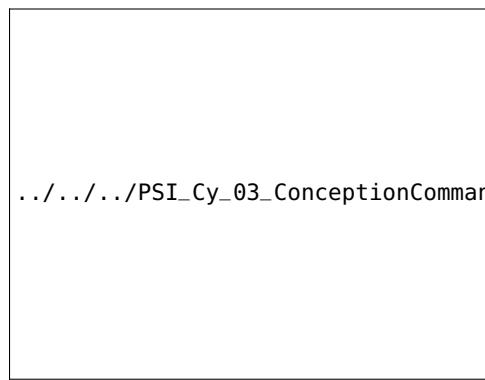
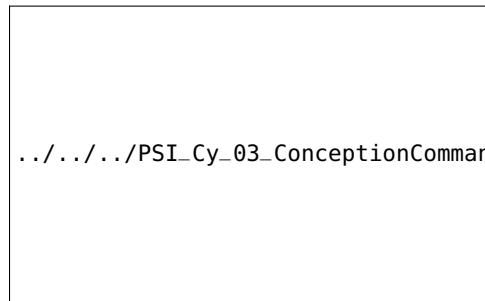
**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

Les courbes de la réponse fréquentielle en boucle ouverte pour  $K_i = 1$  et les réponses fréquentielles en boucle fermée pour différentes valeurs de  $K_i$  sont données ci-dessous.





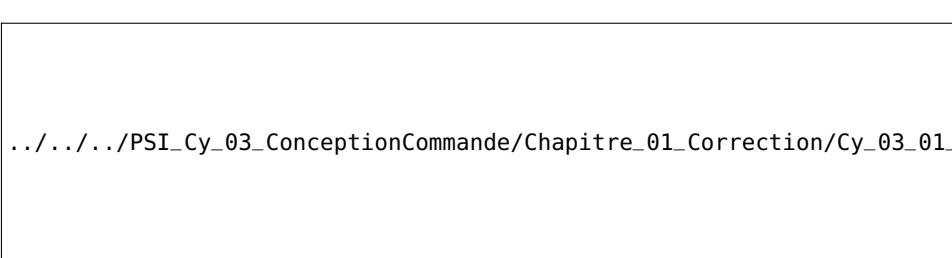
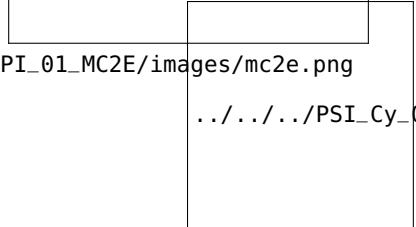
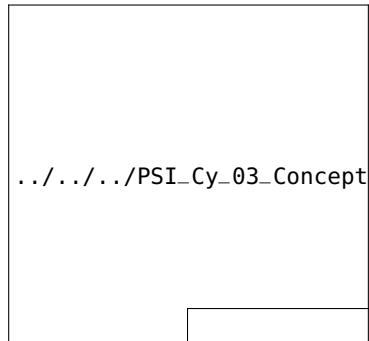
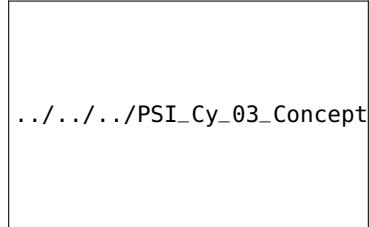
**Question 7** En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour  $K_i$  permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.



## Retour sur le cahier des charges

**Question 8** Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

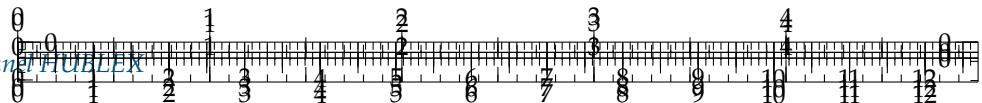
Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain			
Marges de phase			
Dépassement			
T5 %			
Erreur statique			



## Éléments de correction

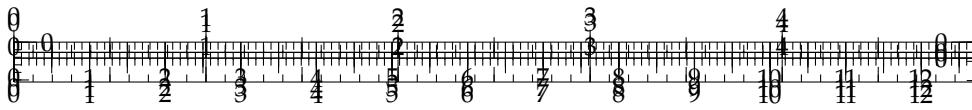
$$1. H_1(p) = \frac{1}{Jp}, H_2(p) = \frac{1}{p}, H_3(p) = K_{C\theta}.$$





2.  $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + 2K_{C\theta}}$ .
3. Sinus d'amplitude  $C_0/2$  et de pulsation  $\omega_0$ .
4.  $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$  et  $B = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ .
5. Erreur statique nulle.
6.  $\tau = T_i$ .
7.  $K_i = 0,4 (< 1,58)$ .
8. .





## TD 2

# Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E) – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2016.

## Mise en situation

### Modèle de connaissance de l'asservissement

C1-02

C2-04

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

#### Correction

On a  $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$  et donc  $H_2(p) = \frac{\theta_m(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{p}$ .

De plus  $Jp^2\theta_m(p) = C_m(p) - C_e(p) \Leftrightarrow Jp\Omega_m(p) = \Omega_m(p)$  et donc  $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_m(p) - C_e(p)} = \frac{1}{Jp}$ .

Enfin,  $H_3(p) = \frac{C_e(p)}{\theta_m(p)} = K_{C\theta}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

#### Correction

D'une part,  $F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp} \frac{1}{p} K_{C\theta}}{1 + \frac{1}{Jp} \frac{1}{p} K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}$ .

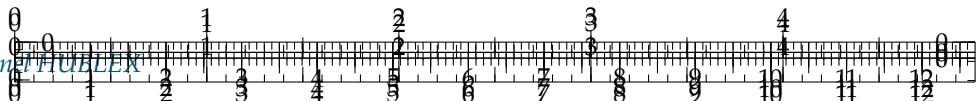
D'autre part,  $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}}{1 + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + 2K_{C\theta}}$ .

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

#### Correction

Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. Le gain est





de  $\frac{1}{2}$  et la pulsation est de  $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{J}{2K_{C\theta}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K_{C\theta}}{J}}$ .

Pour une entrée échelon d'amplitude  $C_0$ , le système répondra par un sinus d'amplitude  $\frac{C_0}{2}$  (valeur crête à crête  $C_0$ ) de pulsation  $\omega_0$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

#### Correction

$$\text{D'une part, } F_1(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)B}.$$

$$\text{D'autre part, } H_{BO}(p) = \frac{\frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)}{1 + \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)B + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} =$$

$$\frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1 + \frac{B}{Jp} + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + Bp + K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2 + \frac{B}{K_{C\theta}}p + 1}.$$

$$\text{Enfin, } (1 + \tau p)^2 = 1 + 2\tau p + \tau^2 p^2. \text{ Donc nécessairement } \tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} \text{ et}$$

$$2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}} \Leftrightarrow B = 2\tau K_{C\theta} = 2\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} K_{C\theta} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}.$$

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

#### Correction

La boucle ouverte est de classe 1. L'erreur statique (entrée échelon) est donc nulle ce qui est conforme à l'exigence 1.2.2.1 du cahier des charges.

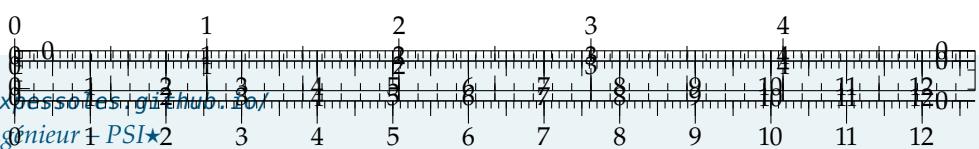
**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

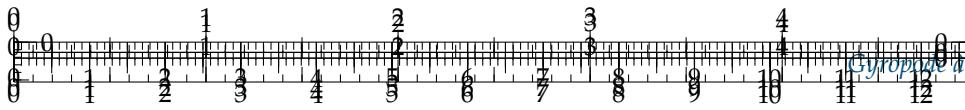
#### Correction

Pour avoir une FTBF d'ordre 2, il faut que la BO soit d'ordre 2. En conséquence, vu la forme de correcteur proposé, on peut envisager que le correcteur compense un pôle du système.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi pour } \tau = T_i, \text{ on a } \frac{C_e(p)}{C_C(p)} &= \frac{\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}}{1 + \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p) + K_i} = \frac{K_i}{\tau^2 p^2 + \tau p + K_i} \\ &= \frac{1}{\frac{\tau^2}{K_i} p^2 + \frac{\tau}{K_i} p + 1}. \end{aligned}$$

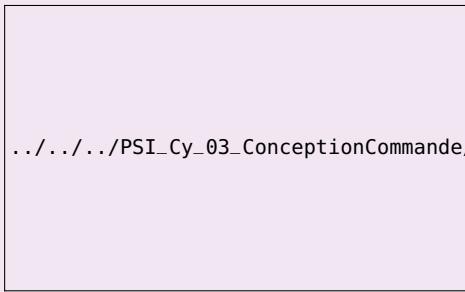
**Question 7** En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour  $K_i$  permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.





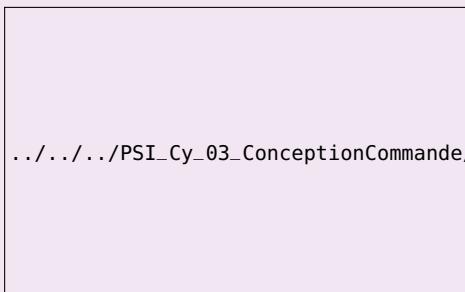
## Correction

- Marge de gain 10 dB : la boucle ouverte est d'ordre 2. La phase est donc toujours supérieure à  $-180^\circ$  et la marge de gain est infinie. Le critère est respecté.
- Marge de phase supérieure à  $70^\circ$  : il est donc nécessaire que le gain (dB) de la boucle ouverte soit nul lorsque la phase est égale à  $120^\circ$ . D'après la réponse fréquentielle en BO, il faut donc que  $20 \log K_i \leq 4 \Rightarrow K_i \leq 10^{\frac{4}{20}} = 1,58$ .



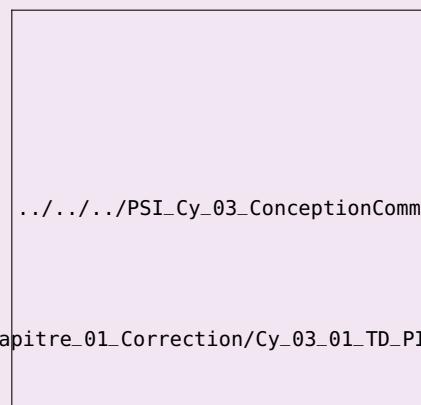
.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_01\_MC2E/images/bo\_cor.png

- Dépassement inférieur à 15% : l'abaque ci-dessous montre que pour une marge de phase de  $70^\circ$ , le dépassement sera inférieur à 15%. Ainsi, avec une marge de phase de  $70^\circ$ , le dépassement sera donc d'environ 2% et le coefficient d'amortissement sera d'environ 0,8.

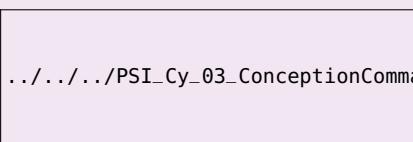


.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_01\_MC2E/images/abaque\_copie.png

- Temps de réponse à 5% inférieur à 0,5 s : en utilisant la réponse fréquentielle pour un gain de 0,4 ( $< 1,58$ ) on a  $\omega_0 \approx 15 \text{ rad s}^{-1}$ . En utilisant l'abaque du temps de réponse réduit, on a  $\omega_0 \cdot T_{r5\%} \approx 3,5$ ; donc  $T_{r5\%} \approx \frac{3,5}{15} = 0,23 \text{ s}$ .



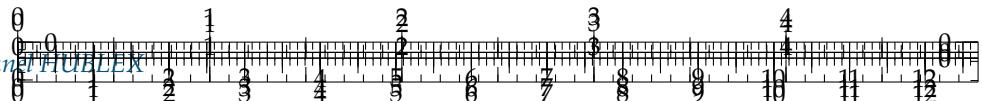
.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_01\_MC2E/images/bf\_cor.png



- D'après le diagramme de Bode en BF, le gain basse fréquence est nul. Le gain de la fonction de transfert est donc unitaire. L'erreur statique est donc nulle.

On propose donc  $K_i = 0,4 (< 1,58)$ .





## Retour sur le cahier des charges

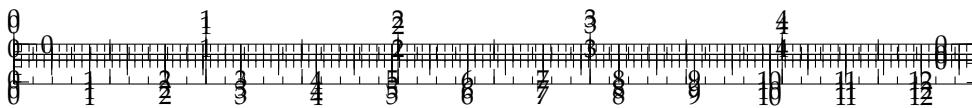
**Question 8** Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

### Correction

Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain	10 dB	$\infty$	OK
Marges de phase	$70^\circ$	$70^\circ$	OK
Dépassement	< 15 %	2%	OK
T5 %	< 0,5 s	0,23 s	OK
Erreur statique	Nulle	Nulle	OK

Le cahier des charges est donc respecté. (Réponse indicielle d'un second ordre avec un coefficient d'amortissement de 0,8 et un gain unitaire).





## TD 3

# Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Sujet

CCP – PSI – 2006.

### Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

C1-02

C2-04

### Objectif

La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

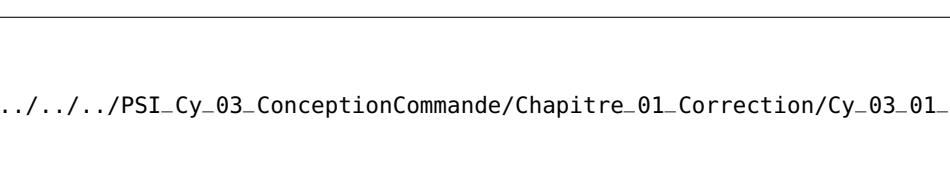
- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi;
- ▶ précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

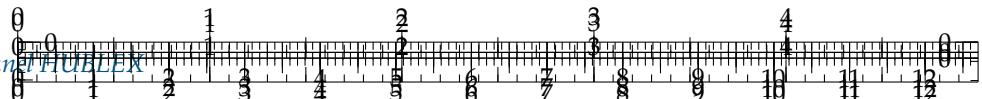
- ▶  $U_{tc}$  : tension de consigne;
- ▶  $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- ▶  $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- ▶  $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- ▶  $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_02\_Agitateur/images/fig\_03.png

Expérimentalement, on peut déterminer que  $FTBO(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}$ .





## Analyse des performances

On considère ici que  $C(p) = 1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

## Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p) = K$ .

**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

**Question 6** Calculer le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensations de pôles.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

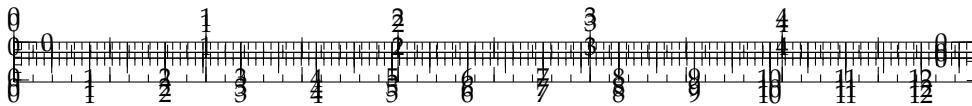
**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.

[http://.../PSI\\_Cy\\_03\\_ConceptionCommande/Chapitre\\_01\\_Correction/Cy\\_03\\_01\\_TD\\_PI\\_02\\_Agitateur/images/Cy\\_03\\_01\\_TD\\_PI\\_02\\_Agitateur\\_tracé\\_Bode\\_FTBO\\_NC.png](http://.../PSI_Cy_03_ConceptionCommande/Chapitre_01_Correction/Cy_03_01_TD_PI_02_Agitateur/images/Cy_03_01_TD_PI_02_Agitateur_tracé_Bode_FTBO_NC.png)

### Éléments de correction

1. 218 s.
2.  $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
3. .
4. Système stable (FTBO ordre 2 et critère du Revers respecté) ( $M_G \rightarrow \infty$ ,  $M_\varphi$  non définie).
5.  $K = 9$ .
6. 50 s,
7.  $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
8.  $U_a = 450$  V.
9.  $K = 10$  et  $T_i = 100$  s.
10.  $\varepsilon_p = 0$ .





## TD 3

# Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Corrigé

CCP – PSI – 2006.

### Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

C1-02

C2-04

### Objectif

La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

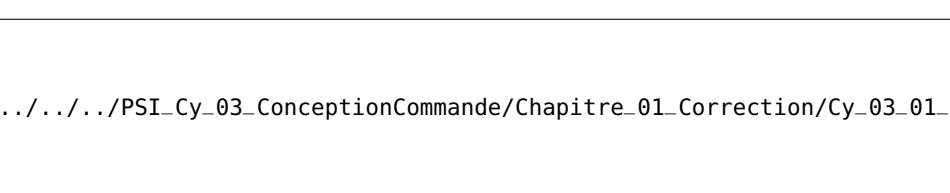
- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi;
- ▶ précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

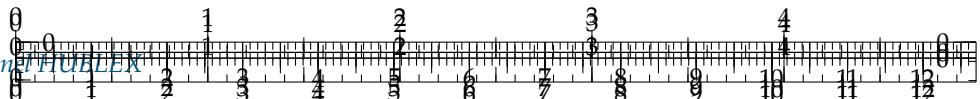
- ▶  $U_{tc}$  : tension de consigne;
- ▶  $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- ▶  $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- ▶  $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- ▶  $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_02\_Agitateur/images/fig\_03.png

Expérimentalement, on peut déterminer que  $FTBO(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}$ .





## Analyse des performances

On considère ici que  $C(p) = 1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

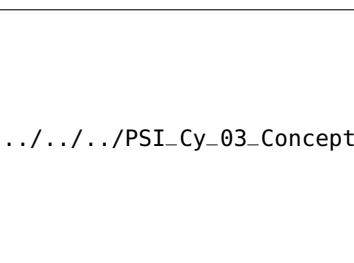
**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

## Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p) = K$ .



**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

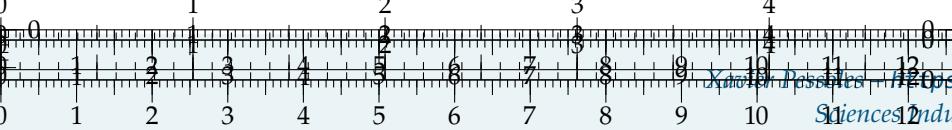
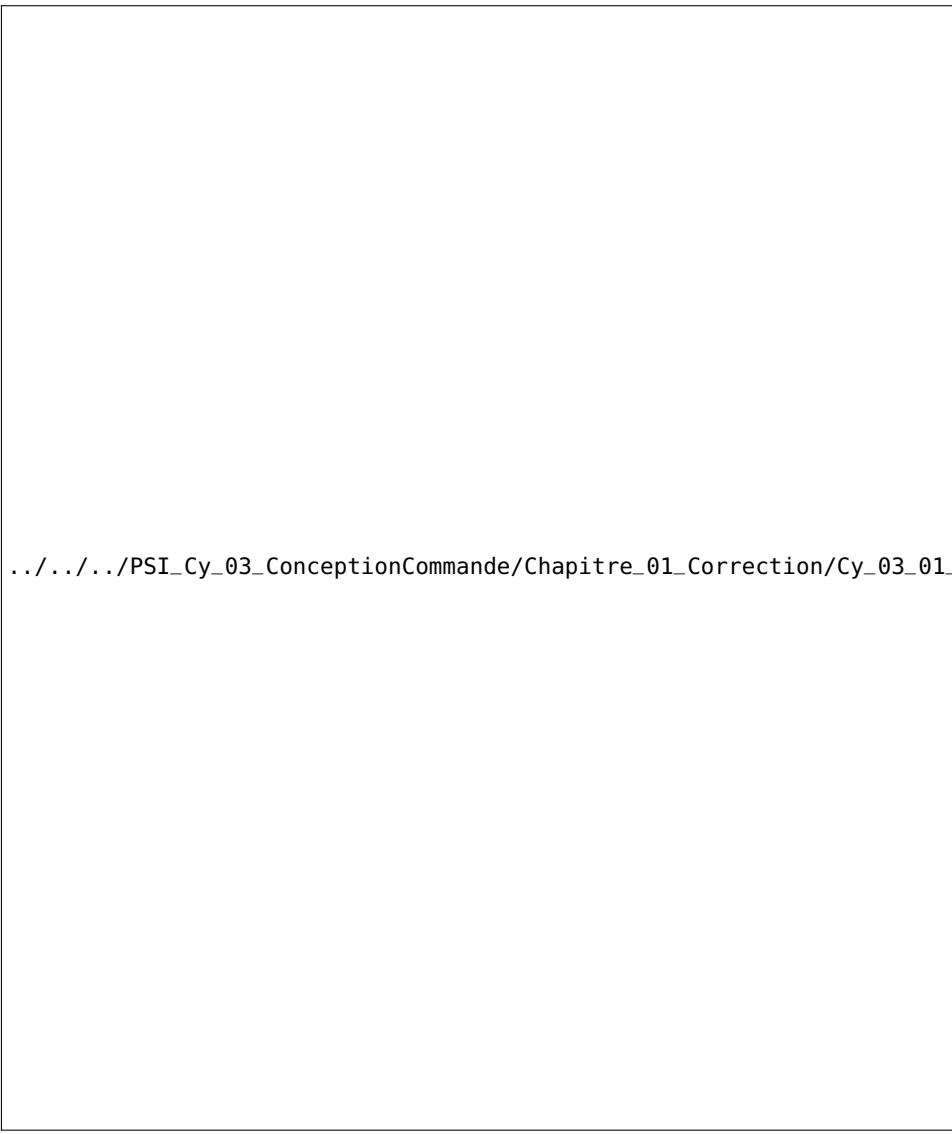
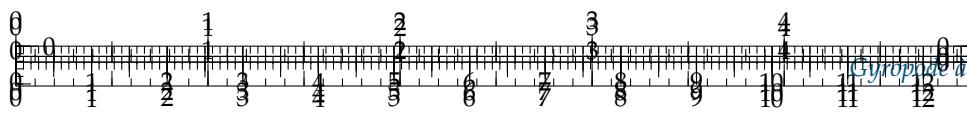
**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

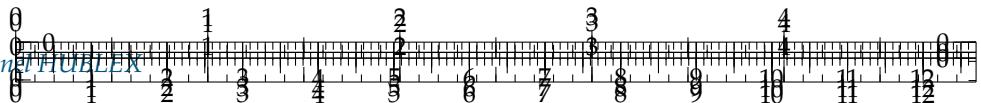
On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensation de pôles.

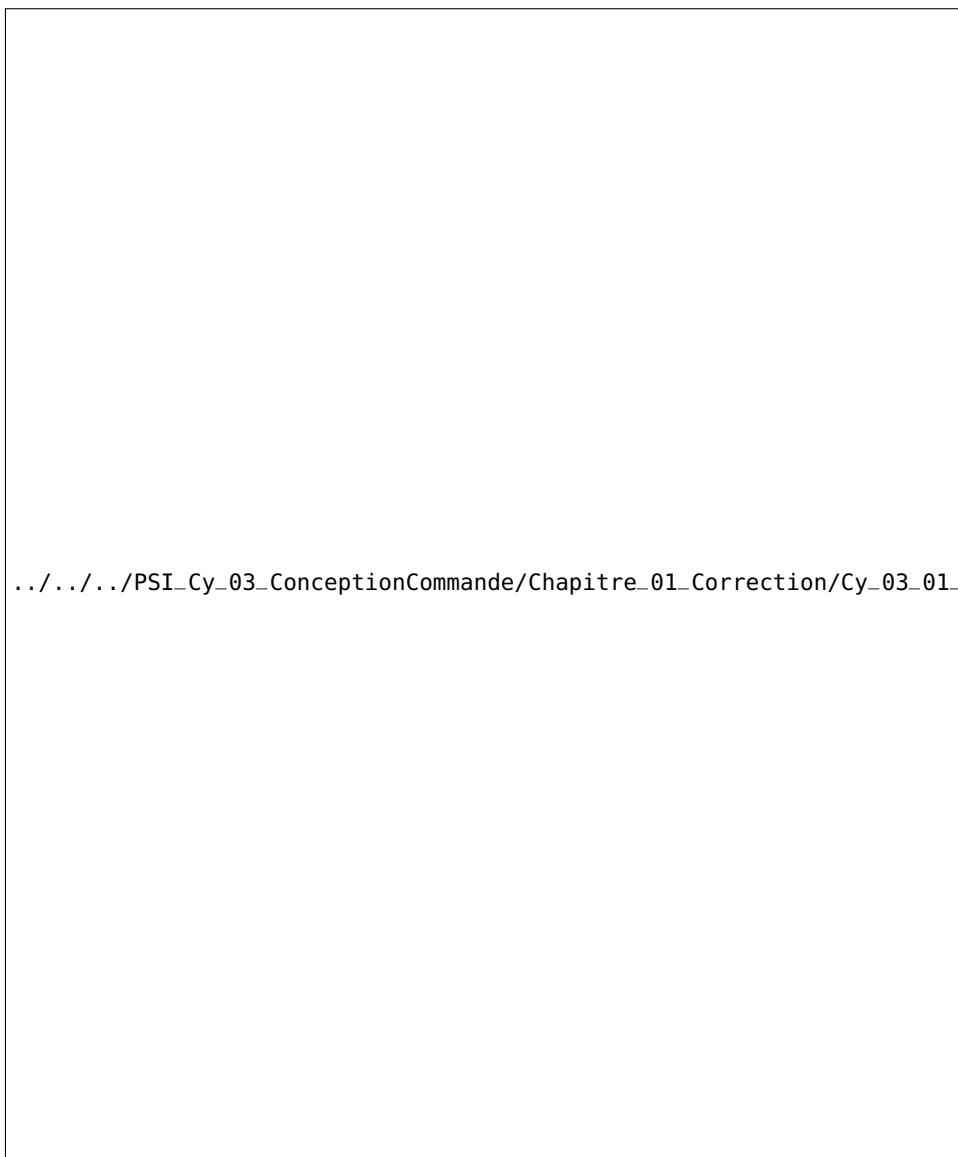
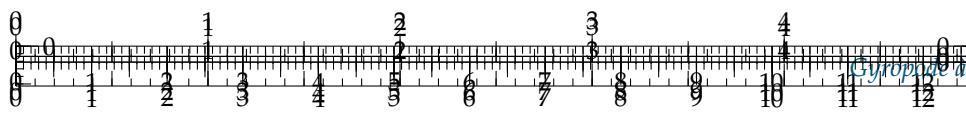
**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponse du système.

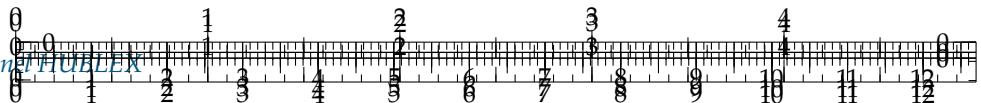
**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.





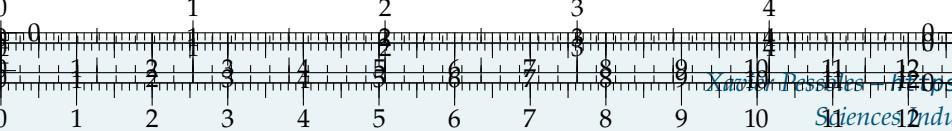
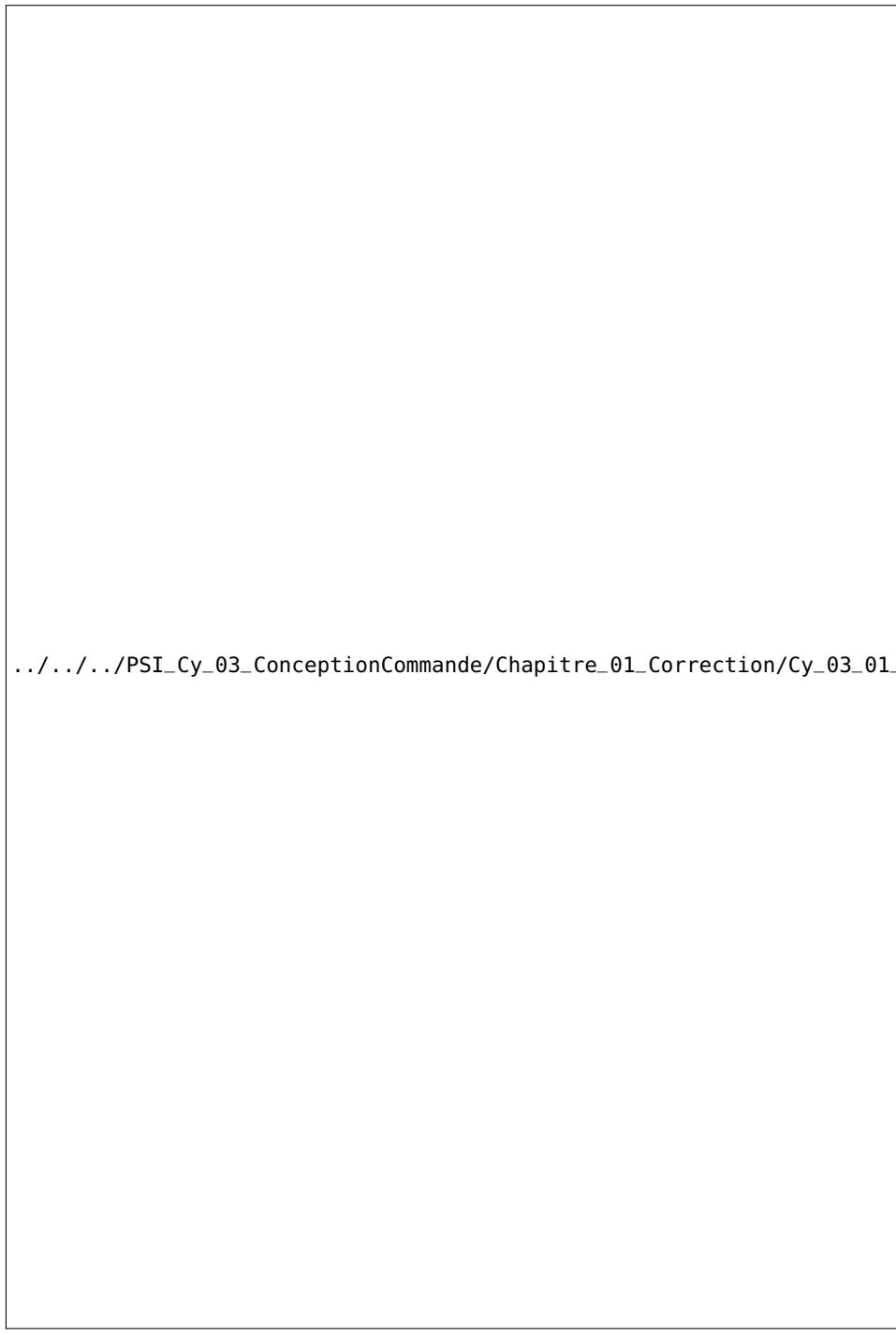
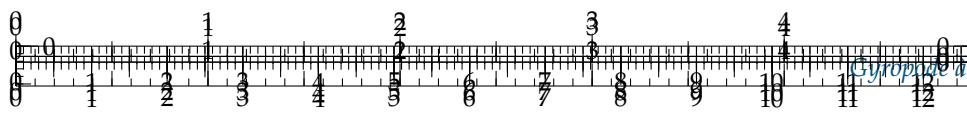


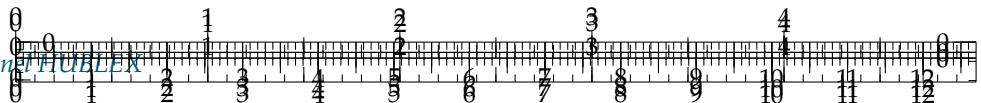




../../../../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_02

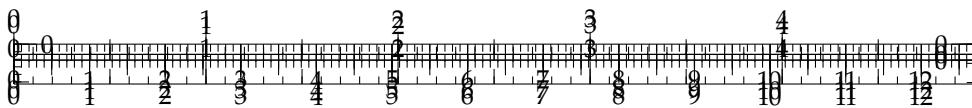






.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_02





## TD 4

# Machine de rééducation SysReeduc – Sujet

CCP PSI 2013.

### Mise en situation

*La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.*

C1-02

C2-04

#### Objectif

L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2 \text{ s}$
Pulsion au gain unité	$50 \text{ rad s}^{-1}$

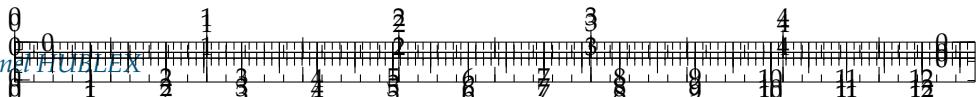
La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.

[3cm]

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_03\_SysReeduc/images/fig\_03.jpg

Soit le modèle donné dans la figure ci-contre.





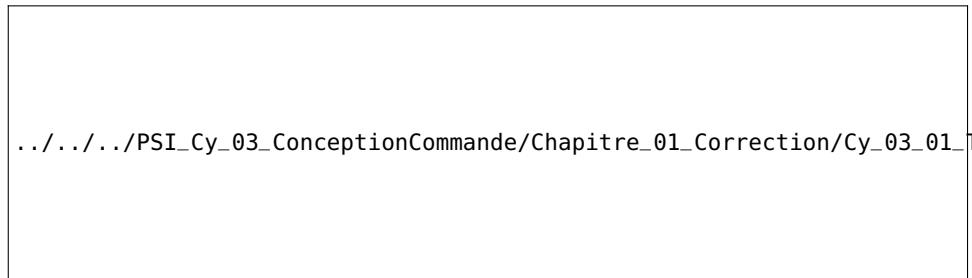
1: On p  
tion 3 p  
correcte

Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ;
- $e(t) = k_e \omega_m(t)$ ;
- $C_{M1}(t) = k_t i(t)$ .

## Éléments de modélisation<sup>1</sup>

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M + m) r \rho_1 \dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t).$$

On note :

- $M$  la masse du chariot et  $m$  la masse du support de pied;
- $\rho_1 = \frac{1}{10}$  le rapport de réduction du réducteur;
- $r = 46,1 \times 10^{-3}$  m le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie;
- $C_{M1}(t)$  le couple délivré par le moteur et  $F_p(t)$  l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $H_3(p)$ ,  $H_4(p)$ ,  $K_5$ ,  $K_6$ ,  $K_7$ ,  $K_8$  et  $K_9$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera  $A$ ,  $B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r$ ,  $\rho_1$ ,  $k_t$ ,  $k_e$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $m$  et  $K_8$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_03\_SysReeduc/images/fig\_08.png

**Correction proportionnelle**

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_c$ .

**Question 4** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Question 5** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

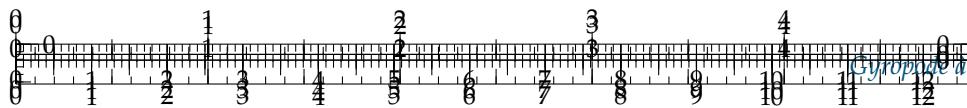
## Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que  $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_i$ .

**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.





**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système

$$FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$$
 en supposant que  $F_p = 0$ .

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

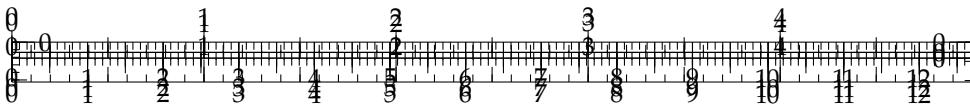
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception







## TD 4

# Machine de rééducation SysReeduc – Corrigé

CCP PSI 2013.

### Mise en situation

C1-02

C2-04

### Éléments de modélisation<sup>2</sup>

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $H_3(p)$ ,  $H_4(p)$ ,  $K_5$ ,  $K_6$ ,  $K_7$ ,  $K_8$  et  $K_9$ .

#### Correction

On a :

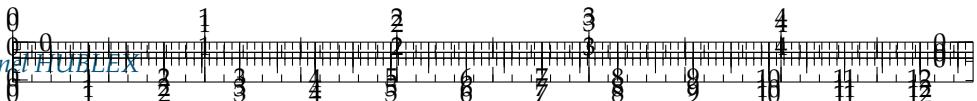
- ▶  $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$  et  $C_{M1}(p) = k_t I(p)$  donc  $K_2 = \frac{k_t}{R}$ ;
- ▶  $E(p) = k_e \Omega_m(p)$  et donc  $K_7 = k_e$ ;
- ▶  $(M + m) r \rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M + m) r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$  et donc  $K_9 = \rho_1 r$  et  $H_3(p) = \frac{1}{(M + m) r^2 \rho_1^2 p}$ ;
- ▶  $H_4(p)$  permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et  $H_4(p) = \frac{1}{p}$ ;
- ▶ un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit  $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$ ;
- ▶ en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement  $K_5 = \rho_1$  et  $K_6 = r$  (à convertir en mètres);
- ▶ enfin,  $K_1$  convertit des mètres en incrément.  $X_c$  est la consigne que doit respectée  $X$ . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc  $\varepsilon = 0$  et  $X = X_c$  soit  $\varepsilon = 0 = K_1 X_c - K_8 \theta_m = K_1 X_c - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$ . Au final,  $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$ .

2: On peut passer directement à la question 3 pour aborder plus rapidement les correcteurs.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera  $A$ ,  $B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r$ ,  $\rho_1$ ,  $k_t$ ,  $k_e$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $m$  et  $K_8$ .



**Correction**

$$\text{On montre } A = \frac{K_8}{k_e}, B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t} \text{ et } D = \frac{r^2\rho_1^2 R}{K_8 k_t}.$$

**Correction proportionnelle**

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_c$ .

**Correction**

$$\begin{aligned} \text{On a } \varepsilon_x(p) &= X_C(p) - X(p) = X_C(p) - \left( (C(p)\varepsilon_x(p) - F(p)D) \frac{A}{p(Bp+1)} \right) \\ \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left( 1 + \frac{AC(p)}{p(Bp+1)} \right) &= X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left( \frac{p(Bp+1) + AC(p)}{p(Bp+1)} \right) &= X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_x(p) = \frac{\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AC(p)} X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1) + AC(p)}}{\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C}} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) &= \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} F(p) \end{aligned}$$

**Question 4** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Correction**

$$\begin{aligned} \text{On a : } \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon_x(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} \frac{F_p}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} X_0 + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} F_p \\ &= \frac{D}{K_C} F_p \end{aligned}$$

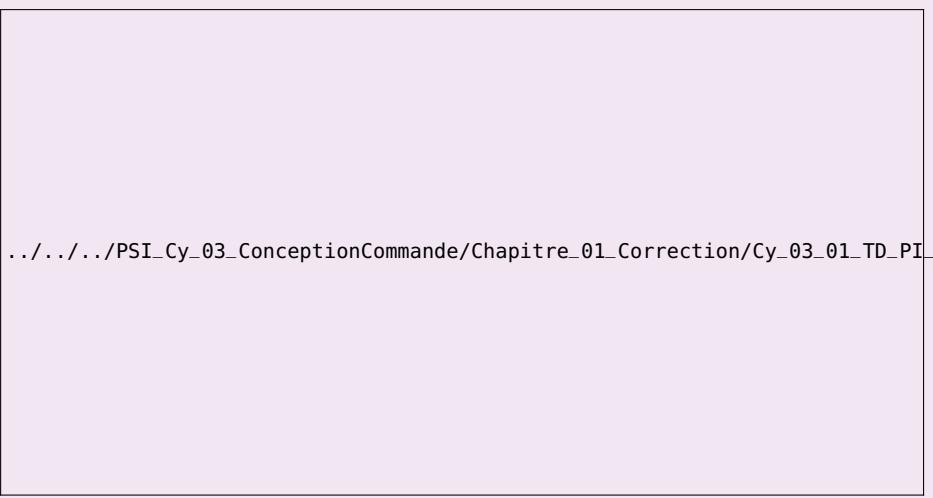
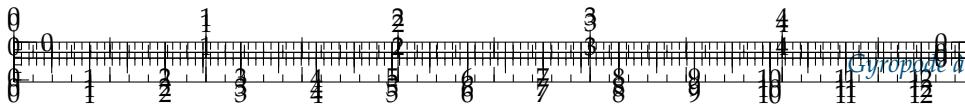
L'écart en position n'est donc pas nul.

**Question 5** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

**Correction**

$$\text{On a } \text{FTBO}(p) = \frac{A}{p(Bp+1)}.$$





La marge de phase n'est pas respectée.

## Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que  $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right)$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A, B, D$  et  $K_i$ .

### Correction

$$\varepsilon_x(p) = -\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}F(p)$$

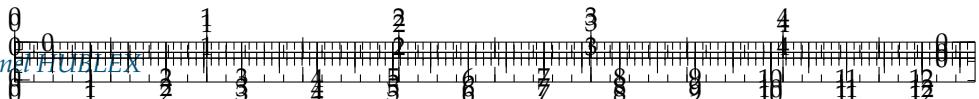
**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

### Correction

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{F_0}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pT_ip(Bp+1)}{pT_ip(Bp+1)+AK_i(T_ip+1)} X_0 + \frac{ADT_ip}{T_ip(Bp+1)+AK_i(T_ip+1)} F_0 = 0. \end{aligned}$$

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système  $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$  en supposant que  $F_p = 0$ .



**Correction**

$$\text{FTBO}(p) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}.$$

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

**Correction**

On souhaite que pour  $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\varphi(\omega) = -135^\circ$ .

$$\arg(\text{FTBO}(j\omega)) = \arg\left(\frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}\right) = -180 - \arg((Bp+1)) + \arg(1+T_ip)$$

$$= -180 - \arctan B\omega + \arctan T_i\omega. \text{ En } \omega = 50 \text{ rad s}^{-1} \text{ on a alors } -180 - \arctan 0,5 + \arctan 50T_i = -135 \Leftrightarrow \arctan 50T_i = -135 + 180 + \arctan 0,5 = 74. \text{ D'où } T_i = 0,05 \text{ s.}$$

**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

**Correction**

On souhaite que  $|\text{FTBO}(j\omega)| = 1$  pour  $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$ .

$$|\text{FTBO}(j\omega)| = \left| \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip} \right| = AK_i \frac{1}{\omega \sqrt{B^2\omega^2 + 1}} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{T_i\omega} = \frac{AK_i}{T_i\omega^2} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{\sqrt{B^2\omega^2 + 1}}.$$

$$\text{On a donc } K_i = \frac{T_i\omega^2 \sqrt{B^2\omega^2 + 1}}{A\sqrt{1+T_i^2\omega^2}} = 0,0077 \text{ Vm}^{-1}.$$

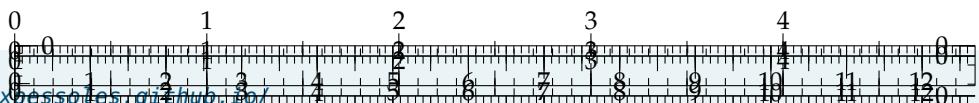
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

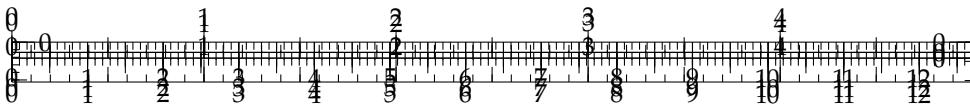
**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

**Correction**

- ▶ Ecart de position : nul  $\Rightarrow$  Exigence OK.
- ▶ Marge de gain : infine  $\Rightarrow$  Exigence OK.
- ▶ Marge de phase :  $\approx 45^\circ \Rightarrow$  Exigence OK.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_03\_SysReed





## TD 5

# Banc d'épreuve hydraulique – Sujet

CCP – PSI – 2010.

### Présentation

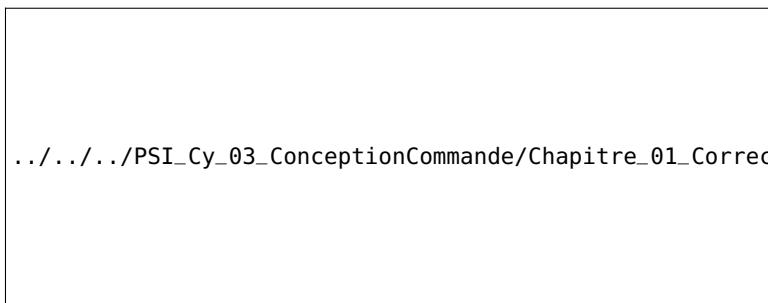
Vallourec & Mannesmann Tubes (V&M Tubes), entreprise du groupe Vallourec, est le leader mondial dans la production de tubes en acier sans soudure laminés à chaud.

C1-02

Afin de valider la caractéristique de tenue en pression des tubes, ceux-ci sont soumis à une pression hydraulique donnée durant un temps spécifié. Ces paramètres dépendent de la taille des tubes et de leur future utilisation.

C2-04

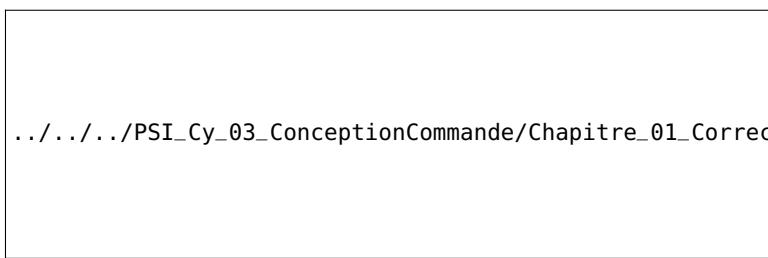
Un schéma hydraulique simplifié est donné figure suivante :



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception  
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_04\_GroupeHydrau/images/fi

### Mise en place d'un asservissement de pression.

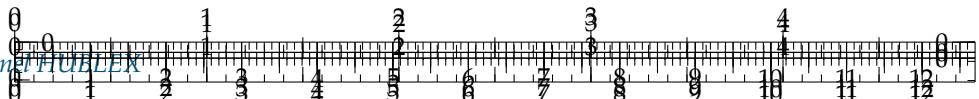
Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. L'objectif est ici de proposer un réglage du correcteur pour répondre aux critères du cahier des charges. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression. Le schéma-blocs de l'asservissement est défini ci-dessous.



Hypothèses :



- ▶  $P_{con}(p)$  : pression de consigne d'eau dans le tube (Pa);
- ▶  $P_e(p)$  : pression d'eau dans le tube (Pa);
- ▶  $U_c(p)$  : tension de commande du régulateur de pression (V);
- ▶  $P_r(p)$  : pression d'huile régulée (Pa);
- ▶  $\Delta Q_e(p)$  : débit de fuite ( $m^3/s$ );
- ▶  $U_m(p)$  : tension de mesure du capteur (V).



- quels que soient les résultats précédents, l'ensemble de mise sous pression {tube + distributeur + multiplicateur de pression} est défini par les transmittances suivantes :  $H_{\text{pre}}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$  et  $H_{\text{fui}}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$  avec  $K_m = 3,24$ ;  $K_f = 2,55 \cdot 10^{10} \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})$ ;  $T_1 = 10 \text{ s}$ ;
- l'ensemble {pompe+régulateur de pression} est modélisé par la fonction de transfert :  $H_{\text{pom}}(p) = \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p}$  avec  $K_{\text{pom}} = 1,234 \cdot 10^7 \text{ Pa/V}$ ;  $T_2 = 5 \text{ s}$ ;
- le capteur est modélisé par un gain pur :  $K_{\text{cap}} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ V/Pa}$ .

La pression de consigne est de  $P_{\text{con}} = 800 \text{ bars}$  et les débits de fuite sont estimés à  $\Delta Q_e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ .

On rappelle que le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant :

Stabilité :	marge de phase de $60^\circ$ marge de gain de $12 \text{ dB}$
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40 \text{ s}$
Précision :	erreur statique < 5% soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\varepsilon_{\text{con}} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\varepsilon_{\text{pert}} < 40 \text{ bars}$
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation :  $t_e \omega_{0 \text{ dB}} = 3$  où  $\omega_{0 \text{ dB}}$  désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et  $t_e$  le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$ , temps du 1<sup>er</sup> maximum si le dépassement est supérieur à 5%;
- $t_e = t_R$ , temps de réponse à 5% si le dépassement est nul ou inférieur à 5%.

### Correction proportionnelle

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

**Question 1** Transformer le schéma-blocs pour se ramener à un système à retour unitaire.

**Question 2** Déterminer, en fonction de  $K_p$ ,  $\varepsilon_{\text{con}}$  définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne  $P_{\text{con}}$  de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

**Question 3** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{\text{con}}$  à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

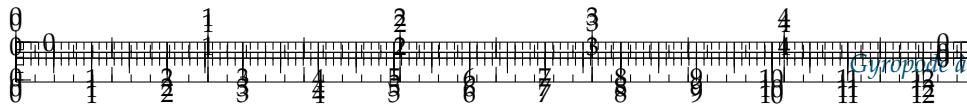
**Question 4** Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de  $K_p$   $\varepsilon_{\text{pert}}$  définie comme l'erreur statique pour une perturbation  $\Delta Q_e$  de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

**Question 5** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{\text{pert}}$  à la valeur spécifiée au cahier des charges.

**Question 6** Proposer un réglage de  $K_p$  pour vérifier le critère d'amortissement.

**Question 7** À partir des résultats des questions précédentes, conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.





## Correction proportionnelle intégrale

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma-blocs ci-dessous :

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert  $C(p)$  de ce correcteur.

**Question 9** Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients  $K_i$  et  $K_p$ .

**Question 10** Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité ? Justifier.

**Question 11** Quelle valeur faut-il donner à  $\omega_0 \text{dB}$  pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges ?

**Question 12** Déterminer alors le rapport  $T = K_p/K_i$  pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

**Question 13** En déduire les valeurs de  $K_p$  et de  $K_i$  qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

## Bilan

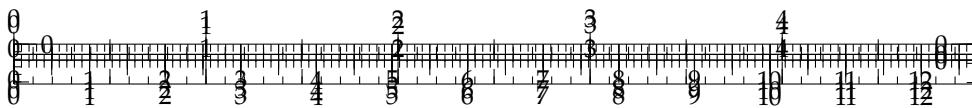
On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment.

On donne ensuite sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.

**Question 14** La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges ? Justifier.







## TD 5

# Banc d'épreuve hydraulique – Corrigé

CCP – PSI – 2010.

### Présentation

#### Mise en place d'un asservissement de pression.

C1-02

#### Correction proportionnelle

C2-04

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

**Question 1** Transformer le schéma-blocs pour se ramener à un système à retour unitaire.

#### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_04\_GroupeHydrau/images/cor\_01.png

**Question 2** Déterminer, en fonction de  $K_p$ ,  $\varepsilon_{\text{con}}$  définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne  $P_{\text{con}}$  de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

#### Correction

Dans ce cas, le système est de classe 0. L'erreur statique est donc de  $\varepsilon_{\text{con}} = \frac{P_{\text{con}}}{1 + K_{\text{cap}}K_pK_mK_{\text{pom}}}$ .

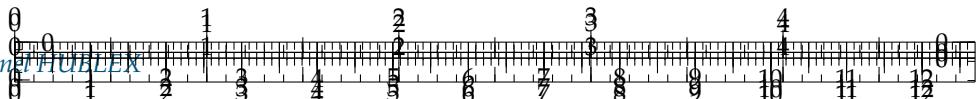
**Question 3** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{\text{con}}$  à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

#### Correction

Pour que l'erreur soit inférieure à 5% :

$$\frac{P_{\text{con}}}{1 + K_{\text{cap}}K_pK_mK_{\text{pom}}} < 0,05P_{\text{con}}$$





$$\Leftrightarrow 1 < 0,05 (1 + K_{\text{cap}} K_p K_m K_{\text{pom}})$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,95}{0,05 K_{\text{cap}} K_m K_{\text{pom}}} < K_p. \text{ On a donc } K_p > 19.$$

**Question 4** Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de  $K_p$   $\varepsilon_{\text{pert}}$  définie comme l'erreur statique pour une perturbation  $\Delta Q_e$  de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

#### Correction

Dans ce cas, on a toujours un système dont la BO est de classe 1 et :  $\varepsilon_{\text{pert}} = \frac{\Delta Q_e K_f}{1 + K_{\text{cap}} K_p K_m K_{\text{pom}}}$ .

**Question 5** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{\text{pert}}$  à la valeur spécifiée au cahier des charges.

#### Correction

Pour  $\Delta Q_e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$  on souhaite  $\varepsilon_{\text{pert}} < 40 \text{ bars}$ . En conséquence,

$$\frac{\Delta Q_e K_f}{1 + K_{\text{cap}} K_p K_m K_{\text{pom}}} < 40 \Leftrightarrow \frac{\Delta Q_e K_f - 40}{40 K_{\text{cap}} K_m K_{\text{pom}}} < K_p. \text{ On a donc } K_p > 2,19.$$

**Question 6** Proposer un réglage de  $K_p$  pour vérifier le critère d'amortissement.

#### Correction

Pour avoir aucun dépassement, il est nécessaire que, si la FTBF du système est d'ordre 2, on ait  $\xi \geq 1$ . (Si la FTBF est d'ordre 1, il n'y aura pas de dépassement, si la FTBF est d'ordre supérieur à 2 il n'y a pas de résultat connu.)

$$\begin{aligned} \text{On a donc, avec un débit de fuite nul, } \frac{P_e(p)}{P_{\text{con}}(p)} &= \frac{K_{\text{cap}} K_p \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p}}{1 + K_{\text{cap}} K_p \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p}} \\ &= \frac{K_{\text{cap}} K_p K_{\text{pom}} K_m}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) + K_{\text{cap}} K_p K_{\text{pom}} K_m} \\ &= \frac{K_{\text{cap}} K_p K_{\text{pom}} K_m}{(T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2 + 1 + K_{\text{cap}} K_p K_{\text{pom}} K_m}. \\ \text{On a alors : } \omega_0 &= \sqrt{\frac{1 + K_{\text{cap}} K_p K_{\text{pom}} K_m}{T_1 T_2}} \text{ et} \\ \xi &= \frac{1}{2} \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2 (1 + K_{\text{cap}} K_p K_{\text{pom}} K_m)}}. \\ \text{En conséquence, } \xi > 1 &\Leftrightarrow \frac{(T_1 + T_2)^2 - 4T_1 T_2}{4T_1 T_2 K_{\text{cap}} K_{\text{pom}} K_m} > K_p \text{ et donc } K_p < 0,125. \end{aligned}$$

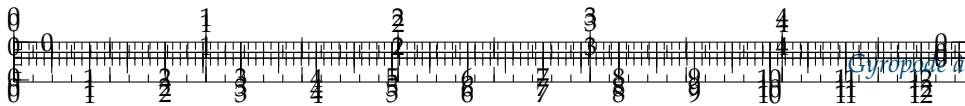
**Question 7** À partir des résultats des questions précédentes, conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

#### Correction

On a donc :

- $K_p > 19$ ;
- $K_p > 2,19$ ;
- $K_p < 0,125$ .





Les 3 conditions sont incompatibles. Un autre correcteur doit être envisagé.

## Correction proportionnelle intégrale

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma-blocs ci-dessous :

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert  $C(p)$  de ce correcteur.

### Correction

$$\text{On a } C(p) = \frac{K_i}{p} + K_p = \frac{K_i + K_p p}{p} = \frac{K_i}{p} \left(1 + \frac{K_p}{K_i} p\right).$$

**Question 9** Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients  $K_i$  et  $K_p$ .

### Correction

**Question 10** Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité ? Justifier.

### Correction

L'intégrateur va permettre d'annuler l'erreur (du à la consigne et à la perturbation). De plus, suivant le positionnement du correcteur, le déphasage de  $-90^\circ$  présent en basse fréquence peut déstabiliser le système.

**Question 11** Quelle valeur faut-il donner à  $\omega_{0 \text{ dB}}$  pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges ?

### Correction

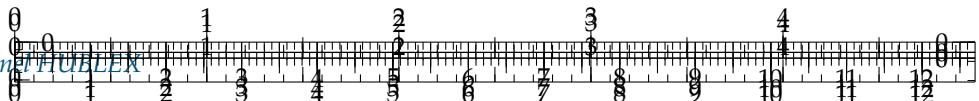
$$\text{On souhaite que } t_e < 40 \text{ s} \Leftrightarrow \frac{3}{\omega_{0 \text{ dB}}} < 40 \Leftrightarrow \frac{3}{40} < \omega_{0 \text{ dB}} \text{ et donc } \omega_{0 \text{ dB}} > 0,075 \text{ rad s}^{-1}.$$

**Question 12** Déterminer alors le rapport  $T = K_p / K_i$  pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

### Correction

On désire une marge de phase de  $60^\circ$ . Il faut donc que  $\varphi(\omega_{0 \text{ dB}}) = -120^\circ$ . On a  $FTBO(p) = \frac{K_i}{p} \left(1 + \frac{K_p}{K_i} p\right) K_{\text{cap}} \frac{K_m}{1 + T_1 p} \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p}$ . Et donc :  $\varphi(\omega) = -90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}\omega\right) - \arctan(T_1\omega) - \arctan(T_2\omega)$  en  $\omega_{0 \text{ dB}}$  on a :  $\varphi(0,075) = -90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) - 57 = -147 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right)$ . On cherche donc  $\frac{K_p}{K_i}$  tel que  $-147 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) = -120 \Rightarrow \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) = 27 \Rightarrow \frac{K_p}{K_i}0,075 = 0,51 \Rightarrow \frac{K_p}{K_i} = 6,79$ . Ainsi pour avoir une marge de phase supérieure à  $60^\circ$ , on doit avoir  $T = \frac{K_p}{K_i} > 6,79$ .





**Question 13** En déduire les valeurs de  $K_p$  et de  $K_i$  qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

#### Correction

On souhaite que le gain soit nul lorsque  $\omega_{0 \text{ dB}} = 0,075 \text{ rad s}^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{On a } G_{\text{dB}}(\omega) &= 20 \log \left( \sqrt{1 + \frac{K_p^2}{K_i^2} \omega^2} \right) + 20 \log K_i + 20 \log (K_{\text{cap}} K_{\text{pom}} K_m) - 20 \log \omega + \\ &20 \log \left( \sqrt{1 + \frac{K_p^2}{K_i^2} \omega^2} \right) - 20 \log \left( \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \right) - 20 \log \left( \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2} \right). \\ G_{\text{dB}}(\omega_{0 \text{ dB}}) = 0 \Rightarrow K_i &= 0,089 \text{ et } K_p = 0,615. \end{aligned}$$

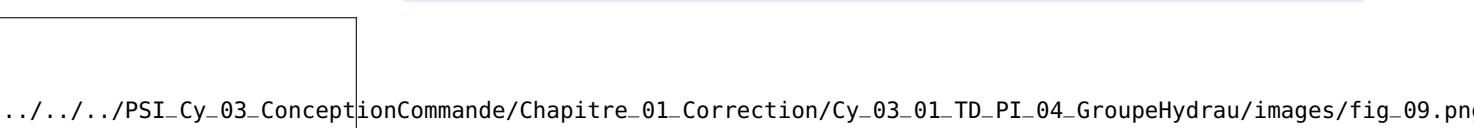
#### Bilan

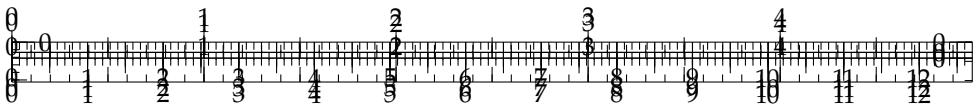
On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment.

On donne ensuite sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression demandée de 100 bars.

**Question 14** La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges ? Justifier.

#### Correction





## TD 6

# Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie – Sujet

Émilien Durif.

### Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

C1-02

C2-04

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni, est guidée en translation suivant  $\vec{y}$  par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant  $\vec{x}$  par rapport au bâti.

Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe  $\vec{z}$ ) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crêmaillère.

### Réglage de l'asservissement

La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous dans lequel  $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} \text{ N}^{-1}$ ,  $K_1 = 856 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ .

Le couple résistant  $C_r$  est constant et vaut  $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$ .

On suppose le correcteur proportionnel :  $H_{\text{cor}}(p) = K_p$ .

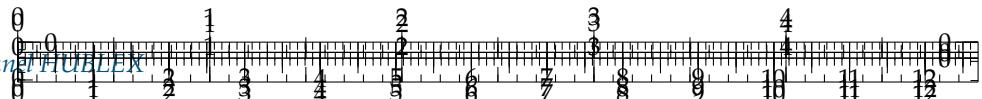
Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partiel.

**Question 1** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(p) = \left(\frac{Z(p)}{\epsilon(p)}\right)_{C_r(p)=0}$  ainsi que la fonction de transfert  $H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)}\right)_{Z_c=0}$ .

**Question 2** Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude  $Z_{c0}$  dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ( $C_{r0}$ ). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante  $C_{r0}$ , dans le cas d'une consigne de position nulle ( $Z_c = 0$ ). En déduire la valeur de  $K_p$  pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

**Question 3** Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de  $H_{bo}(p)$  pour  $K_p$  déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.





Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert :  $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$  avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1$  s.

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1$  s.

**Question 5** On souhaite une marge de phase d'au moins  $60^\circ$ . Proposer un réglage de  $K_p$  pour satisfaire au cahier des charges.

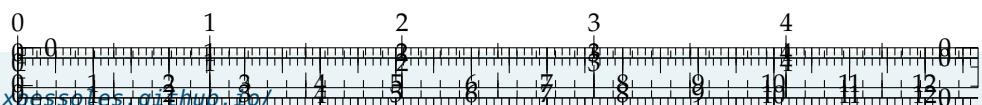
**Question 6** La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

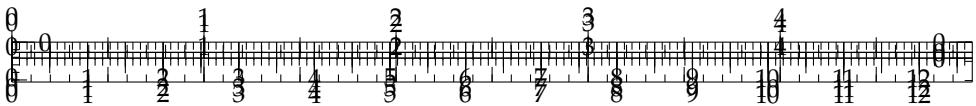
**Question 7** Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_05\_Chronometrie/images/matlab/re...

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_05\_Chronometrie/images/matlab/bod...

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_05\_Chronometrie/images/Cy\_03...





## TD 6

# Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie – Corrigé

Émilien Durif.

### Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

C1-02

C2-04

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni, est guidée en translation suivant  $\vec{y}$  par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant  $\vec{x}$  par rapport au bâti.

Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe  $\vec{z}$ ) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crêmaillère.

### Réglage de l'asservissement

La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous dans lequel  $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} \text{ N}^{-1}$ ,  $K_1 = 856 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ .

Le couple résistant  $C_r$  est constant et vaut  $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$ .

On suppose le correcteur proportionnel :  $H_{\text{cor}}(p) = K_p$ .

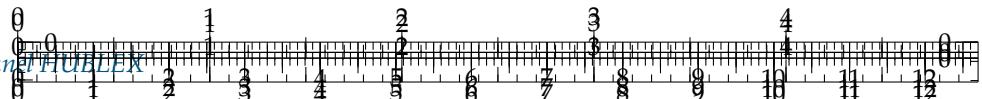
Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partiel.

**Question 1** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(p) = \left( \frac{Z(p)}{\epsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$  ainsi que la fonction de transfert  $H_{cr}(p) = \left( \frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$ .

**Question 2** Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude  $Z_{c0}$  dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ( $C_{r0}$ ). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante  $C_{r0}$ , dans le cas d'une consigne de position nulle ( $Z_c = 0$ ). En déduire la valeur de  $K_p$  pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

**Question 3** Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de  $H_{bo}(p)$  pour  $K_p$  déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.





Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert :  $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$  avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1$  s.

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1$  s.

**Question 5** On souhaite une marge de phase d'au moins  $60^\circ$ . Proposer un réglage de  $K_p$  pour satisfaire au cahier des charges.

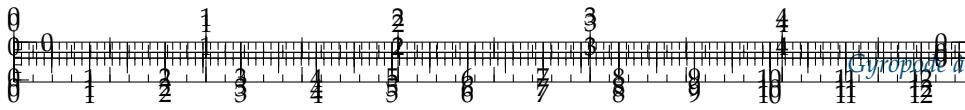
**Question 6** La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

**Question 7** Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_05\_Chronometrie/images/matlab/re

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_05\_Chronometrie/images/matlab/bod





**Question 8**  $H_{bo}(p) = \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} = H_{cor}(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p)} = \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)}$  et  $Z(p) = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p \varepsilon(p) - K_2 C_r(p)] = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p (-Z(p)) - K_2 C_r(p)] \Leftrightarrow Z(p)(1 + \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)}) = -\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)} C_r(p) \Leftrightarrow H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)}\right)_{Z_c=0} = \frac{-\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)}}{(1 + \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)})} = -\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p) + K_p K_1} = -\frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}}.$

**Question 9** L'erreur statique par rapport à une entrée échelon, la perturbation étant nulle, est égale à 0, car il y a une intégration dans la chaîne directe

Dans le cas d'une perturbation constante égale à  $C_{ro}$ , d'après la question précédente

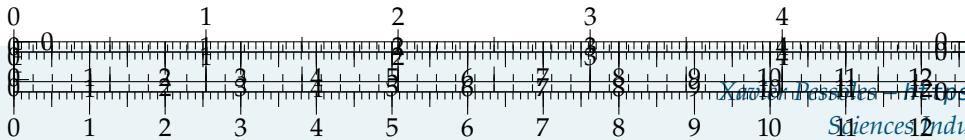
on peut écrire :  $Z(p) = -\frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} C_r(p) = -\frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} \frac{C_{ro}}{p}.$

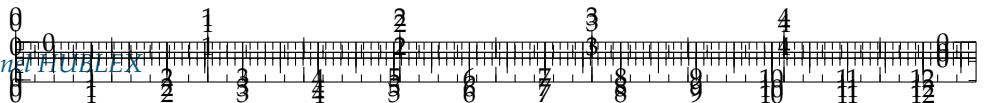
En utilisant la propriété du gain statique, on en déduit  $z_\infty = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p}$ , l'erreur vaut donc  $\varepsilon = -z_\infty = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p}$ .

Pour répondre à l'exigence de précision, on doit avoir  $\varepsilon = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p} < 1 \text{ mm}$ .

On en déduit  $\varepsilon = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p} < 10^{-3} \text{ m}$   
 $\Leftrightarrow K_p > \frac{K_2 C_{ro}}{10^{-3}} \Leftrightarrow K_p > \frac{2,78 \cdot 10^{-2} \cdot 2,3 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} \Leftrightarrow K_p > 0,075$ .

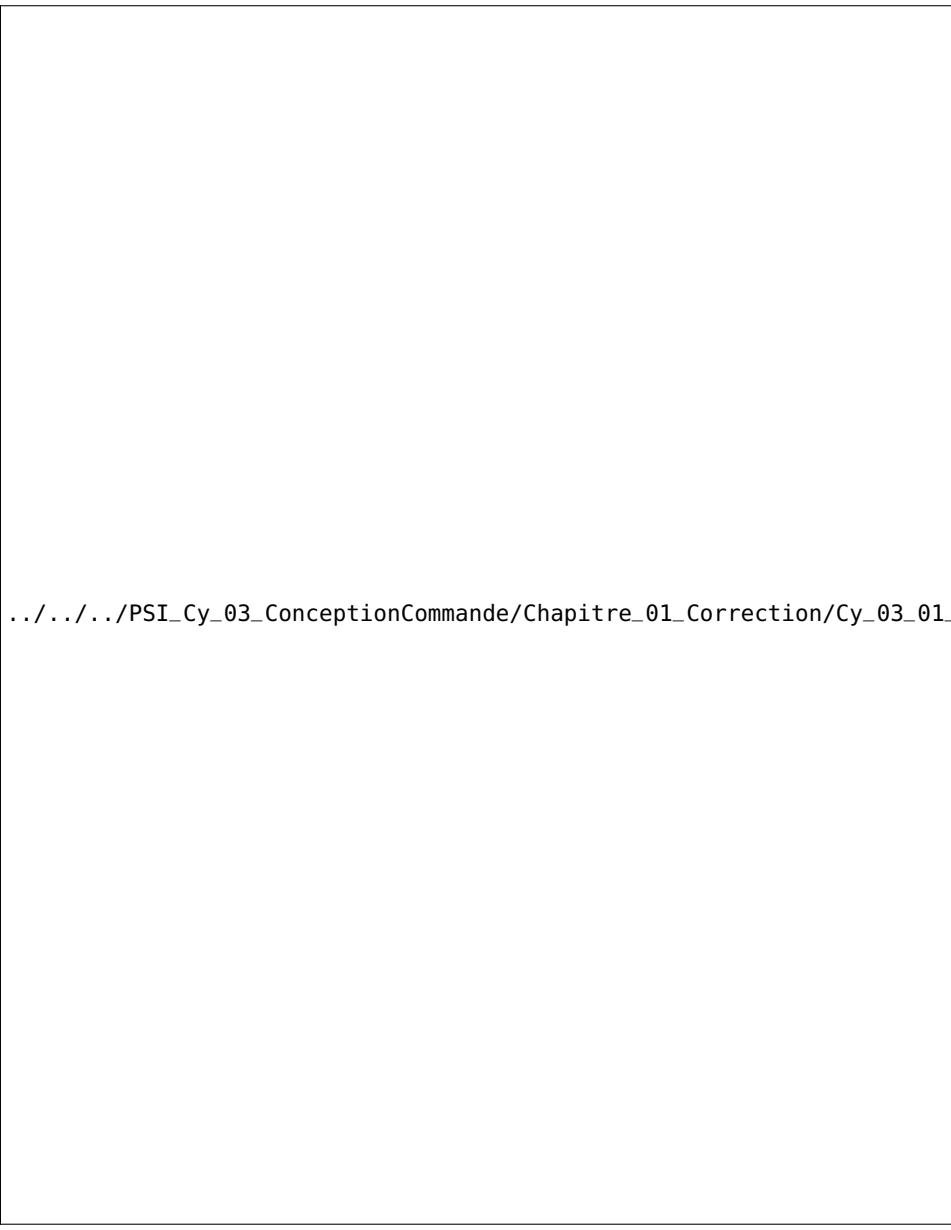
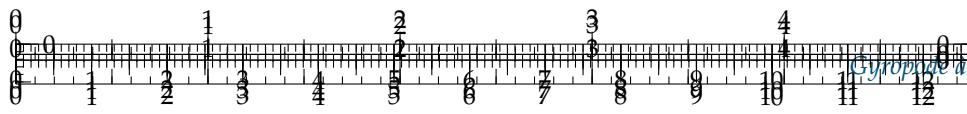
**Question 10** Avec  $K_p = 0,075$ , on obtient une marge de phase de  $35^\circ < 60^\circ$ , le critère de stabilité n'est donc pas vérifié.





.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_05...





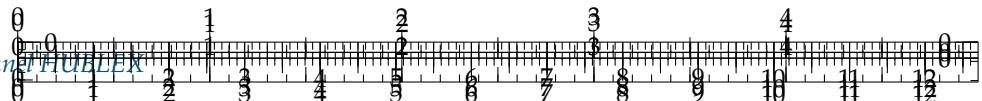
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_05\_Chronometrie/images/matlab/b0

**Question 11** On note qu'en la pulsation donnant une phase à  $-120^\circ$ , le gain en décibel est à peu près égal à  $-30dB$ . On règle donc  $K_p$  tel que :

$$K_p = 10^{-30/20} = 0,032.$$

On obtient alors le deuxième tracé.





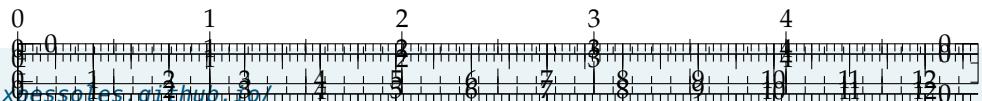
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_T...

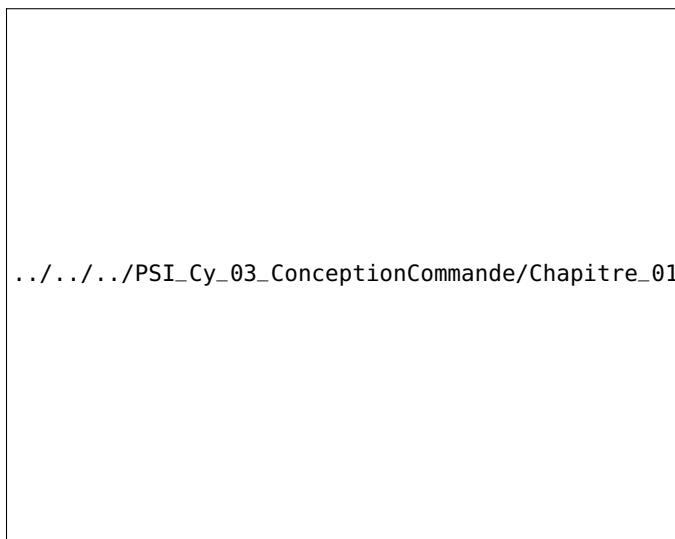
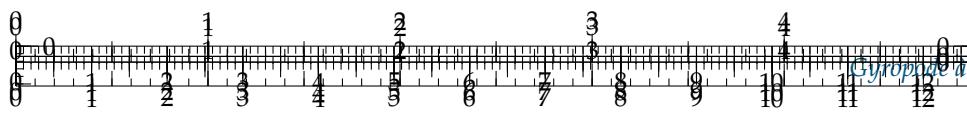
**Question 12** ► La valeur en régime permanent vaut  $50\text{mm}$  pour les trois réponses, l'erreur statique est nulle le critère de précision est respecté pour les trois réglages.

► Temps de réponse à 5% et dépassement :

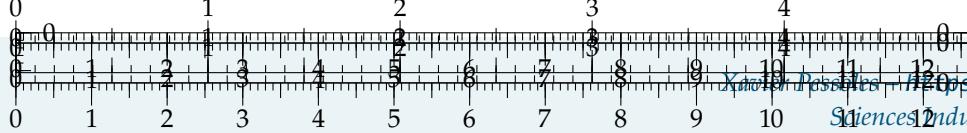
Type de correcteur	P	PI	PID
$tr_{5\%}$	0,17s	0,2s	0,08
Dépassement	29,72%	16,8%	9,4%

► Seul le PID vérifie le critère sur le premier dépassement car  $D_{1\%} = 9,4\% < 10\%$ . Le critère d'amortissement est donc respecté.

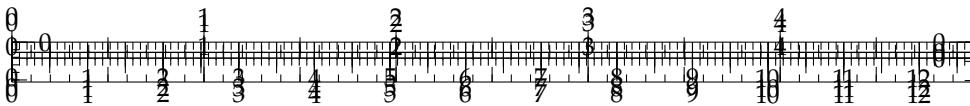




**Question 13** On trouve une marge de phase supérieure à  $60^\circ$  et une bande passante à  $0dB$  égale à  $100rad/s$  supérieure aux réglages précédents ce qui donne une réponse plus rapide et plus stable.







## TD 7

# La robotique au service du handicap – Sujet

Centrale Supélec – PSI 2010.

### Présentation

On s'intéresse à la conception de la loi de commande d'un des moteurs d'une orthèse d'épaule permettant d'améliorer le rétablissement de patients en cours de rééducation.

C1-02

C2-04

### Objectif

- ▶ Temps de réponse à 5% pour un échelon de consigne de couple :  $t \leq 2$  ms.
- ▶ Erreur statique pour un couple de référence constant  $C_{\text{ref} 0}$  :  $|\varepsilon_0| \leq 0,05C_{\text{ref} 0}$ .
- ▶ Couple maximal fourni sur l'axe de l'articulation  $C_{\text{max}} = 50$  Nm.

En pratique, le couple délivré par le moteur ne peut être mesuré directement, c'est pourquoi la grandeur asservie est le courant moteur. L'objet, dans cette phase de l'étude, est alors de déterminer une loi de commande pour la boucle d'asservissement et de valider les performances vis-à-vis du cahier des charges partiel.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

On donne partiellement le schéma-blocs de la commande.



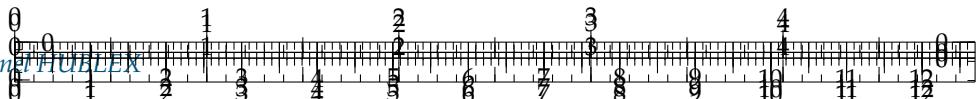
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_06\_Robotique/images/fig\_02.png

Le correcteur choisi est de type proportionnel-intégral (P.I.) de fonction de transfert :  $C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ . On adopte sans aucune justification que  $T_i = 0,3$  ms. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

$$H(p) = \frac{0,0326p \left( 1 + \frac{2 \times 0,08}{463}p + \frac{p^2}{463^2} \right)}{\left( 1 + \frac{p}{122} \right) \left( 1 + \frac{2 \times 0,09}{464}p + \frac{p^2}{464^2} \right) \left( 1 + \frac{p}{10^3} \right) \left( 1 + \frac{p}{10^4} \right)}$$

est donné en fin de document.  $i_{\text{mes}}(t)$  est la mesure du courant du moteur et  $u(t)$  la tension d'alimentation. Ce tracé pourra être utilisé sans aucune justification.





## Syntèse du régulateur PI de la boucle de courant

**Question 1** Compléter le diagramme de Bode par le tracé des diagrammes asymptotiques de la fonction  $H(p)$ .

**Question 2** En adoptant  $K = 1$ , tracer le diagramme de Bode (module et phase) de  $C(p)$  : diagrammes asymptotiques et allures des tracés réels avec les valeurs prises aux points caractéristiques.

**Question 3** En déduire les tracés asymptotiques et les allures des tracés réels du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (on différenciera les tracés par des couleurs différentes). Déterminer, sans calcul supplémentaire, la pulsation  $\omega_1$  telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est égale à  $-135^\circ$  et la valeur numérique du gain statique.

**Question 4** Déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer une marge de phase de  $45^\circ$ .

On considère maintenant le système corrigé avec le correcteur  $C(p)$  qui vient d'être déterminé.

**Question 5** Déterminer un ordre de grandeur de la marge de gain obtenue et conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

**Question 6** Déterminer l'écart statique  $\Delta i_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (i_c(t) - i_{\text{mes}}(t))$  en boucle fermée en réponse à un échelon de consigne  $i_c(t) = I_0 \Gamma(t)$  d'amplitude  $I_0$  et l'exprimer sous la forme  $\Delta i_0 = k I_0$  en précisant la valeur numérique de  $k$ .

La figure suivante représente la structure de l'actionneur moteur de courant du moteur étant fermée :  $i_c$  et  $i$  sont respectivement la consigne et le courant moteur,  $C_{\text{ref}}$  est le couple de référence souhaité,  $C_a$  est le couple appliqué par l'actionneur sur l'axe de l'articulation et  $G_{ic}$  est un gain pur correspondant à la relation entre le courant et le couple  $C_a$ . On suppose pour toute cette question que le couple de référence  $C_{\text{ref}}(t)$  est constant d'amplitude  $C_{\text{ref}} = C_{\text{ref}0}$ .

**Question 7** Exprimer  $G_{ic}$  en fonction de  $K_c$  et de  $N$ .

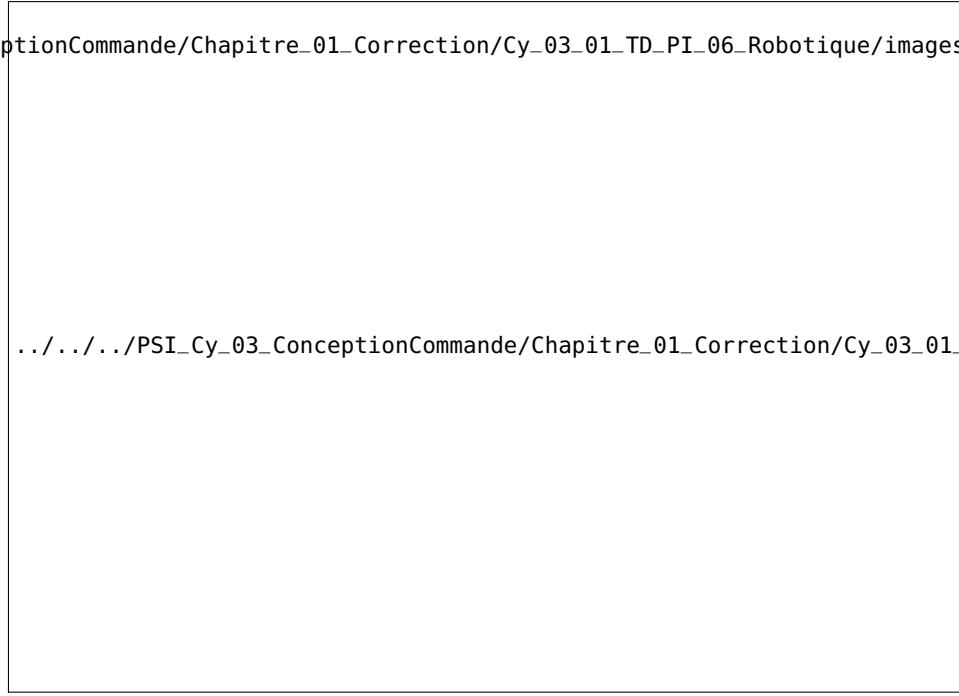
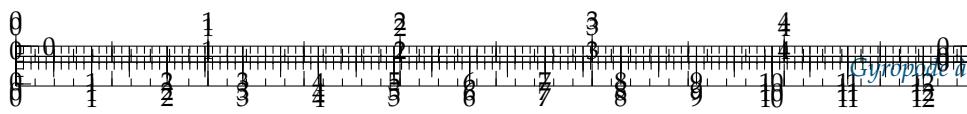
**Question 8** En supposant qu'en régime permanent l'erreur statique de la boucle d'asservissement de courant est nulle  $\Delta i_0 = 0$ , donner la valeur du gain  $G_0$  permettant d'assurer l'égalité des couples de référence  $C_{\text{ref}0}$  et appliqués  $C_a$ .

**Question 9** En remarquant que le gain statique du capteur de courant est de 1, montrer, lisant les résultats des questions précédentes, qu'en régime permanent l'erreur  $C_{\text{ref}} - C_a$  entre le couple de référence et le couple moteur exprimé sur l'axe de rotation est  $\Delta C = k_1 C_{\text{ref}0}$ . Déterminer  $k_1$  en fonction de  $k$ .

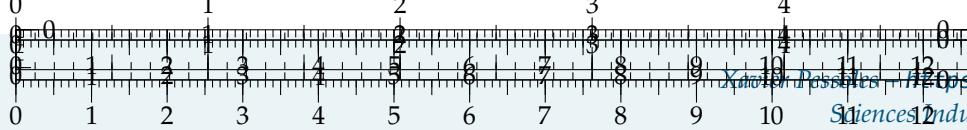
**Question 10** Vérifier alors si les différentes exigences du cahier des charges de l'ingénieur sont validées.

Il mettra sans aucune justification que la pulsation de coupure à 0 dB et le temps de réponse sont liés par la relation approximative  $\omega_c Tr \approx 3$ .

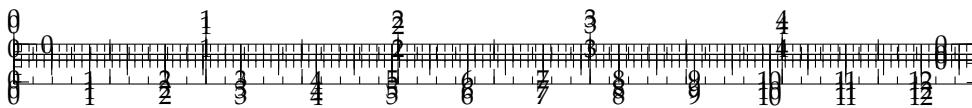




.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_06\_Robotique/images/fig\_01.png







## TD 7

# La robotique au service du handicap – Corrigé

Centrale Supélec – PSI 2010.

### Présentation

On s'intéresse à la conception de la loi de commande d'un des moteurs d'une orthèse d'épaule permettant d'améliorer le rétablissement de patients en cours de rééducation.

C1-02

C2-04

### Objectif

- ▶ Temps de réponse à 5% pour un échelon de consigne de couple :  $t \leq 2$  ms.
- ▶ Erreur statique pour un couple de référence constant  $C_{\text{ref} 0}$  :  $|\varepsilon_0| \leq 0,05C_{\text{ref} 0}$ .
- ▶ Couple maximal fourni sur l'axe de l'articulation  $C_{\text{max}} = 50$  Nm.

En pratique, le couple délivré par le moteur ne peut être mesuré directement, c'est pourquoi la grandeur asservie est le courant moteur. L'objet, dans cette phase de l'étude, est alors de déterminer une loi de commande pour la boucle d'asservissement et de valider les performances vis-à-vis du cahier des charges partiel.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

On donne partiellement le schéma-blocs de la commande.



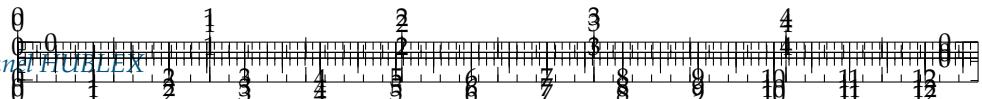
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_06\_Robotique/images/fig\_02.png

Le correcteur choisi est de type proportionnel-intégral (P.I.) de fonction de transfert :  $C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ . On adopte sans aucune justification que  $T_i = 0,3$  ms. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

$$H(p) = \frac{0,0326p \left( 1 + \frac{2 \times 0,08}{463}p + \frac{p^2}{463^2} \right)}{\left( 1 + \frac{p}{122} \right) \left( 1 + \frac{2 \times 0,09}{464}p + \frac{p^2}{464^2} \right) \left( 1 + \frac{p}{10^3} \right) \left( 1 + \frac{p}{10^4} \right)}$$

est donné en fin de document.  $i_{\text{mes}}(t)$  est la mesure du courant du moteur et  $u(t)$  la tension d'alimentation. Ce tracé pourra être utilisé sans aucune justification.





## Syntèse du régulateur PI de la boucle de courant

**Question 1** Compléter le diagramme de Bode par le tracé des diagrammes asymptotiques de la fonction  $H(p)$ .

**Correction**

**Question 2** En adoptant  $K = 1$ , tracer le diagramme de Bode (module et phase) de  $C(p)$  : diagrammes asymptotiques et allures des tracés réels avec les valeurs prises aux points caractéristiques.

**Correction**

**Question 3** En déduire les tracés asymptotiques et les allures des tracés réels du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (on différenciera les tracés par des couleurs différentes). Déterminer, sans calcul supplémentaire, la pulsation  $\omega_1$  telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est égale à  $-135^\circ$  et la valeur numérique du gain statique.

**Correction**

**Question 4** Déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Correction**

On considère maintenant le système corrigé avec le correcteur  $C(p)$  qui vient d'être déterminé.

**Question 5** Déterminer un ordre de grandeur de la marge de gain obtenue et conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

**Correction**

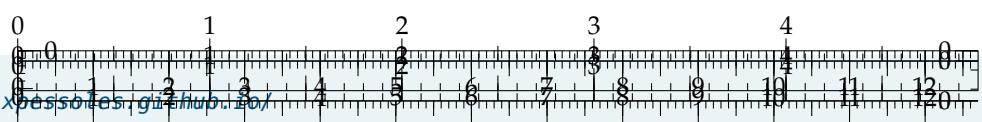
**Question 6** Déterminer l'écart statique  $\Delta i_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (i_c(t) - i_{\text{mes}}(t))$  en boucle fermée en réponse à un échelon de consigne  $i_c(t) = I_0 \Gamma(t)$  d'amplitude  $I_0$  et l'exprimer sous la forme  $\Delta i_0 = k I_0$  en précisant la valeur numérique de  $k$ .

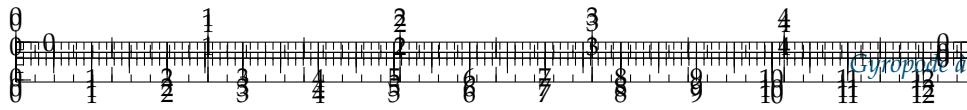
**Correction**

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

La figure suivante représente la structure de l'actionneur (la boucle de courant du moteur étant fermée) :  $i_c$  et  $i$  sont respectivement la consigne et le courant moteur,  $C_{\text{ref}}$  est le couple de référence souhaité,  $C_a$  est le couple appliqué par l'actionneur sur l'axe de l'articulation et  $G_{ic}$  est un gain pur correspondant à la relation entre le courant et le couple  $C_a$ . On suppose pour toute cette question que le couple de référence  $C_{\text{ref}}(t)$  est constant d'amplitude  $C_{\text{ref}} = C_{\text{ref}0}$ .

**Question 7** Exprimer  $G_{ic}$  en fonction de  $K_c$  et de  $N$ .





### Correction

**Question 8** En supposant qu'en régime permanent l'erreur statique de la boucle d'asservissement de courant est nulle  $\Delta i_0 = 0$ , donner la valeur du gain  $G_0$  permettant d'assurer l'égalité des couples de référence  $C_{\text{ref}0}$  et appliqué  $C_a$ .

### Correction

**Question 9** En remarquant que le gain statique du capteur de courant est de 1, montrer, en utilisant les résultats des questions précédentes, qu'en régime permanent l'erreur  $\Delta C = C_{\text{ref}} - C_a$  entre le couple de référence et le couple moteur exprimé sur l'axe de l'articulation est  $\Delta C = k_1 C_{\text{ref}0}$ . Déterminer  $k_1$  en fonction de  $k$ .

### Correction

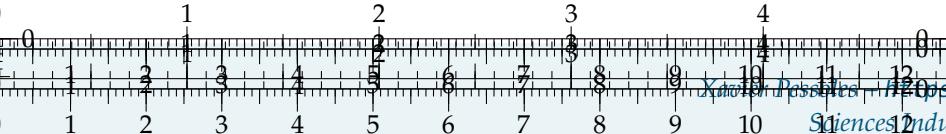
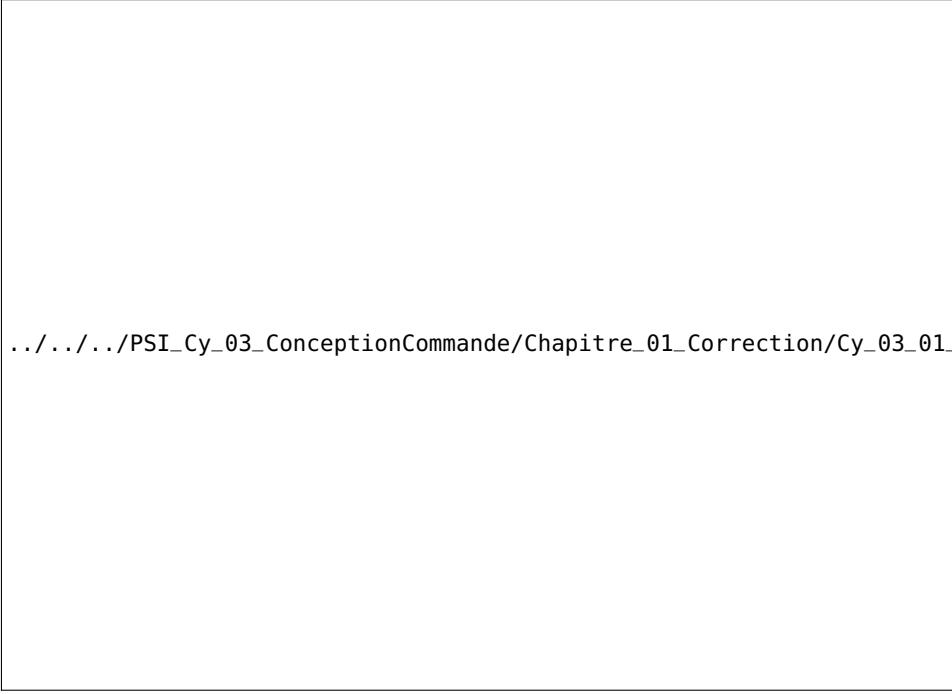
**Question 10** Vérifier alors si les différentes exigences du cahier des charges de l'actionneur sont validées.

### Correction

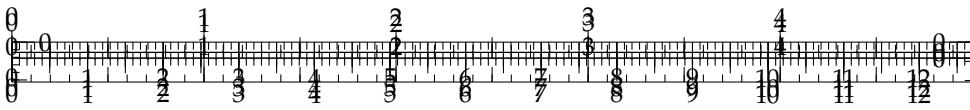
On admettra sans aucune justification que la pulsation de coupure à 0 dB et le temps de réponse sont liés par la relation approximative  $\omega_c T_r \simeq 3$ .

### Éléments de correction

1. .
2. .
3.  $\omega_1 = 3300 \text{ rad s}^{-1}$  et gain statique de 1,4.
4.  $K = 0,7$ .
5. Marge de gain infinie, marge de phase positive.
6.  $\Delta i_0 = \frac{1}{1 + K_{bo}} I_0$ .
7.  $G_{ic} = K_c N$ .
8.  $G_0 = \frac{1}{G_{ic}}$ .
9.  $k_1 = k$ .
10. OK.







## TD 8

# Asservissement par traitement d'image d'une plate-forme Hexapode – Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2016.

## Mise en situation

### Objectif

C1-02

C2-04

En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure ci-contre.

On suppose :

- ▶ qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques ;
- ▶ pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont  $F_u(p)$  est la transformée de Laplace ;
- ▶ que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont  $D(p)$  est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe ;
- ▶ pour l'axe considéré que  $L^m(p)$ ,  $L^d(p)$  et  $L^{de}(p)$  sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur  $L^m$  est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur) ;
- ▶ que  $U(p)$  représente la transformée de Laplace de la grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert  $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$ , la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisées en temps continu comme un retard pur  $\tau = 0,04$  s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel est le suivant :

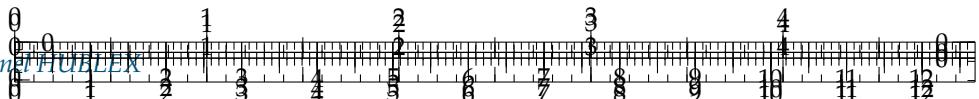
- ▶ pulsation de coupure  $\omega_c$  à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$  ;
- ▶ marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$  ;



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conc

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

**FIGURE 4.11** – Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement



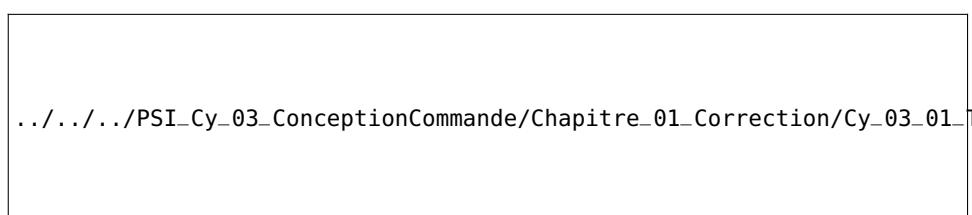
- ▶ temps de réponse vis-à-vis de la consigne doit être inférieur à 50 ms;
- ▶ temps de réponse vis-à-vis de la perturbation doit être inférieur à 100 ms.

Pour la conception de la loi de commande, il s'agira :

- ▶ de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel;
- ▶ d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images);
- ▶ de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

### Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation  $L^{de}(t)$  de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté  $C_1(p)$  et la consigne  $L^*(p)$ , est représentée par le schéma de la figure suivante.



**FIGURE 4.12** – Structure de commande à une boucle

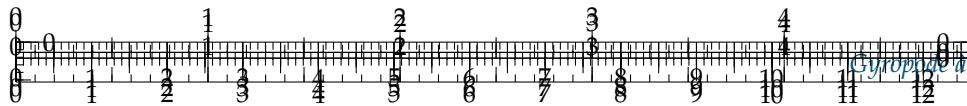
En raison de la présence de bruits de mesure (signaux non représentés sur les schémas fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

**Question 1** La figure en toute fin de document montre le diagramme de Bode de la fonction  $H(p)$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant  $C_1(p) = 1$ ).

**Question 2** Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

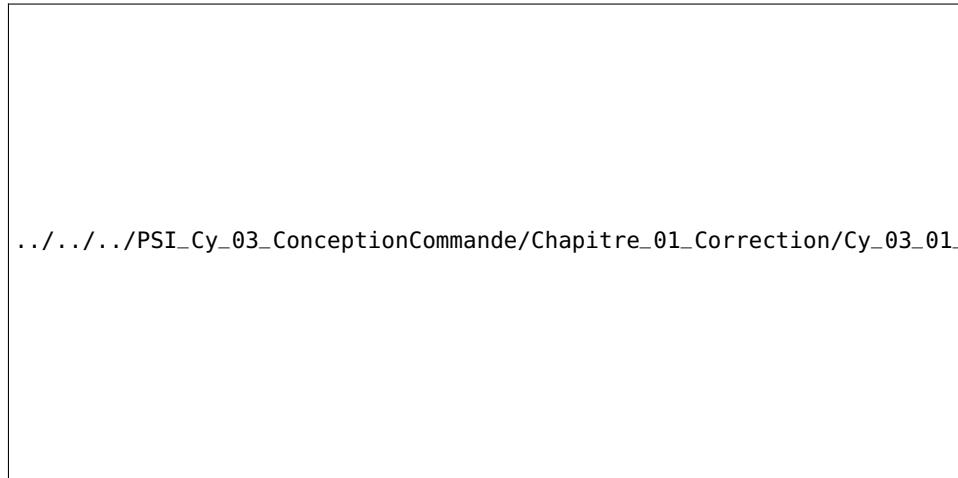
- ▶ compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur  $C_1(j\omega)$  doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur  $\tau$ ;
- ▶ en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral  $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_{i1}p}\right)$ , justifier qu'un correcteur de ce type :
  - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure;
  - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.





## Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards. La figure suivante montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel (a) représentant la réalisation de la commande ( $X(p)$ ) est la transformée de Laplace d'une grandeur  $x(t)$  interne au régulateur), d'autre part un schéma fictif (b).



**Question 3** En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral  $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$  permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit  $\arg(C(j\omega))$ , que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale  $T_i$ ;
- ▶ pour la valeur de  $T_i$  obtenue, déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

**Question 4** Pour une consigne nulle  $L^*(t)$ , une perturbation en sortie nulle  $d(t) = 0$  et un échelon de perturbation en entrée  $f_u(t) = F_0 h(t)$  où  $h(t)$  est l'échelon d'Heaviside :

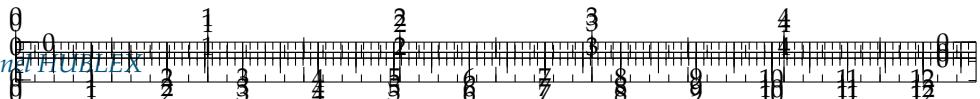
- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- ▶ compte tenu de la forme de  $H(p)$ , en déduire alors le comportement de la grandeur  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

## Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

- ▶ une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe  $L^m(t)$  permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence  $L^{m*}(t)$ . Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et





on note  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$  la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne;

- la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée  $L^{de}(t)$ .

La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée  $T(p)$  où :

- $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$  est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure);
- $L^{m*}(p)$  est la consigne de l'asservissement de la boucle interne;
- l'effet de la perturbation  $F_u(p)$  est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée;
- les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace  $D(p)$ .

Pour la conception de la loi de commande :

- une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée;
- on synthétise dans ce cas un correcteur  $C_2(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p}\right)$  de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur  $R_e(p)$  est réalisé en utilisant  $C_2(p)$  selon une structure identique à celle de la figure précédente (a);
- le calcul du régulateur  $C_2(p)$  ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_07

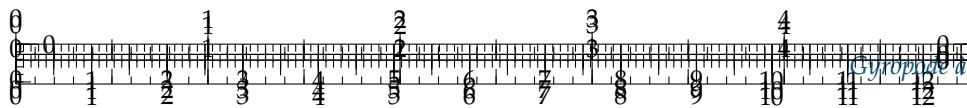
**FIGURE 4.14** – Modèle de commande avec une boucle interne intégrée

**Question 5** En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur  $L^m(t)$  en régime permanent, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$ , en réponse à une perturbation  $d(t)$  en échelon  $d(t) = D_0 h(t)$ . Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur  $R_e(p)$  selon le schéma de la figure 3(a) reste stable du point de vue interne.

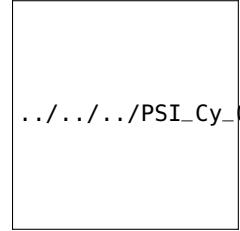
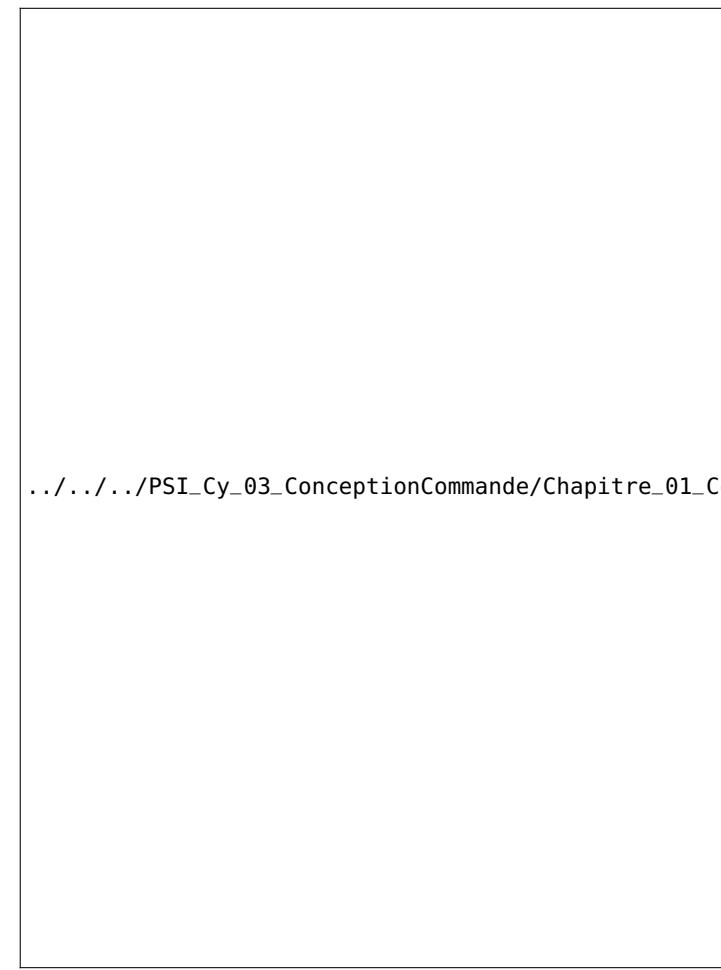
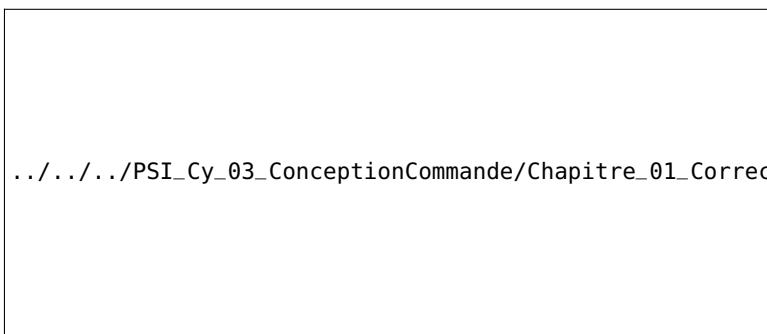
### Retour sur le cahier des charges

La figure suivante montre les évolutions temporelles de la position  $L^d(t)$  en réponse à une consigne en échelon  $L^*(t) = L_0 h(t - 0,02)$  avec  $L_0 = 10 \text{ mm}$  et à une perturbation en échelon  $D^*(t) = D_0 h(t - 0,02)$  avec  $D_0 = 10 \mu\text{m}$ .

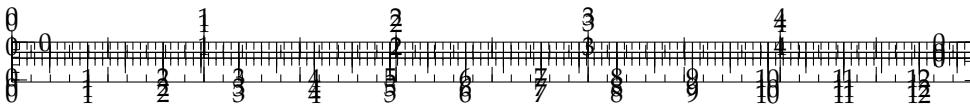




**Question 6** Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.







## TD 8

# Asservissement par traitement d'image d'une plate-forme Hexapode – Corrigé

Concours Centrale Supelec PSI 2016.

## Mise en situation

### Analyse d'une structure mono-boucle

C1-02

C2-04

**Question 1** La figure en toute fin de document montre le diagramme de Bode de la fonction  $H(p)$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant  $C_1(p) = 1$ ).

#### Correction

La fonction de transfert de la FTBO non corrigée est donc  $F_{BO}(p) = H(p)e^{-\tau p}$ .

On note  $G_{dB}(\omega)$  le gain de la fonction de transfert et  $\varphi(\omega)$  la phase.

$e^{-\tau j\omega}$  est un nombre complexe de gain 1 et de phase  $-\tau\omega = -0,04\omega$  (en rad). En degrés, le retard ajoute un déphasage de  $-0,04\omega \frac{180}{\pi}$ . Ainsi :

- ▶ pour  $\omega = 1$  rad/s, la phase est baissée de  $2^\circ$ ,
- ▶ pour  $\omega = 10$  rad/s, la phase est baissée de  $20^\circ$ ,
- ▶ pour  $\omega = 50$  rad/s, la phase est baissée de  $100^\circ$ ,
- ▶ pour  $\omega = 100$  rad/s, la phase est baissée de  $220^\circ$ ...

Ce qui permet de modifier le diagramme de bode de la phase.

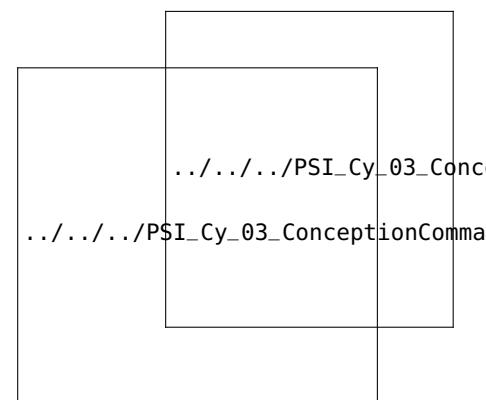
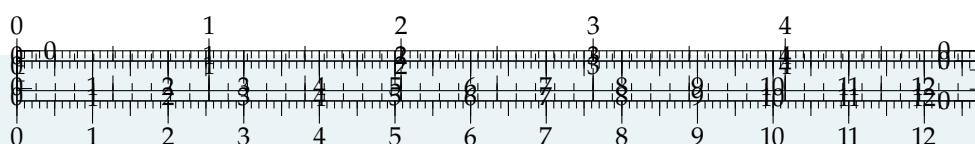
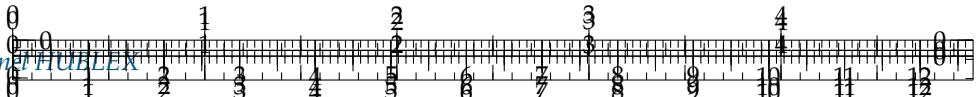


FIGURE 4.15 – FTBO retardée.

**Question 2** Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- ▶ compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur  $C_1(j\omega)$  doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur  $\tau$ ;
- ▶ en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral  $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_{i1}p}\right)$ , justifier qu'un correcteur de ce type :
  - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure;
  - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.





### Correction

D'après le cahier des charges :

- ▶ pulsation de coupure  $\omega_c$  à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- ▶ marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$ .

Pour le système non retardé, le correcteur PI permettra de remonter le gain de 45 dB afin d'obtenir la pulsation de coupure souhaitée. En réglant  $T_i$  tel que  $1/T_i = 60/10$ , on pourra conserver une marge de phase de 55 à 60° ce qui est compatible avec le cahier des charges (ou la descentre à 45° en affinant la valeur de  $T_i$ ).

Pour le système retardé, le correcteur PI permettra de régler la pulsation de coupure, mais la phase est trop basse pour espérer la corriger ainsi.

## Structure de commande adaptée à un système avec retard

**Question 3** En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral  $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$  permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit  $\arg(C(j\omega))$ , que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale  $T_i$ ;
- ▶ pour la valeur de  $T_i$  obtenue, déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

### Correction

Le système non corrigé a une marge de phase de 60°. On veut que la pulsation de coupure soit de 60 rad/s.

On cherche donc  $T_i$ , tel que  $\arg\left(K \frac{T_i p + 1}{T_i p}\right) = -15^\circ$  pour 60 rad/s. Soit  $\arctan(60T_i) - 90 = -15$  soit  $T_i = \frac{\tan 75}{60} \simeq 0,062 \text{ s}$ .

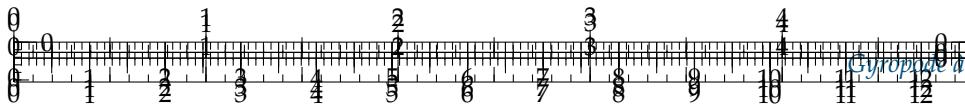
De plus pour que la pulsation de coupure soit à 60 rad/s, il faut que  $\left|K \frac{T_i p + 1}{T_i p}\right| = 10^{\frac{45}{20}}$  pour 60 rad/s.

$$\text{On a donc } K \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} = 60T_i \times 10^{\frac{45}{20}} \text{ et } K = \frac{0,062 \times 60 \times 10^{\frac{45}{20}}}{\sqrt{0,062^2 \times 60^2 + 1}} = 171.$$

**Question 4** Pour une consigne nulle  $L^*(t)$ , une perturbation en sortie nulle  $d(t) = 0$  et un échelon de perturbation en entrée  $f_u(t) = F_0 h(t)$  où  $h(t)$  est l'échelon d'Heaviside :

- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- ▶ compte tenu de la forme de  $H(p)$ , en déduire alors le comportement de la grandeur  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.



**Correction**

Pour le schéma  $a$ , on a  $U(p) = -L^d(p)e^{-\tau p} \times \frac{C(p)}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p})}$  et  $L^d(p) = H(p)(U(p) + F_u(p))$ . On a donc  $U(p) = -H(p)(U(p) + F_u(p))e^{-\tau p} \times \frac{C(p)}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p})}$ .

$$\Rightarrow U(p) \left( 1 + \frac{C(p)H(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p})} \right) = -\frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p})}$$

$$\Rightarrow U(p) \frac{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p}) + C(p)H(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p})} = -\frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p})}$$

$$\Rightarrow U(p) = -\frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{-\tau p}) + C(p)H(p)e^{-\tau p}}$$

$$\Rightarrow U(p) = -\frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)}$$

On a alors,  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{p \rightarrow 0} -p \frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)}$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{K \frac{1 + T_i p}{T_i p} \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)} F_0 e^{-\tau p}}{1 + K \frac{1 + T_i p}{T_i p} \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}} = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{0,5K(1 + T_i p)F_0 e^{-\tau p}}{T_i p^2(1 + 0,01p) + 0,5K(1 + T_i p)} = -F_0$$

Le signal de commande sera ensuite intégré par la fonction de transfert  $H(p)$ .  $X(p)$  divergera donc. La commande n'est donc pas stable.

**Analyse d'une structure de commande à deux boucles**

**Question 5** En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur  $L^m(t)$  en régime permanent, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$ , en réponse à une perturbation  $d(t)$  en échelon  $d(t) = D_0 h(t)$ . Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur  $R_e(p)$  selon le schéma de la figure 3(a) reste stable du point vue interne.

**Correction**

On a  $L^m(p) = -L^d(p)e^{-\tau p} \frac{C_2(p)}{1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p)} T(p)$  et  $L^d(p) = L^m(p) + D(p)$ . Ainsi,

$$L^m(p) = -(L^m(p) + D(p))e^{-\tau p} \frac{C_2(p)}{1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p)} T(p)$$

$$\Rightarrow L^m(p) \left( 1 + \frac{C_2(p)T(p)e^{-\tau p}}{1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p)} \right) = -\frac{C_2(p)D(p)T(p)e^{-\tau p}}{1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p)}$$

$$\Rightarrow L^m(p)(1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p) + C_2(p)T(p)e^{-\tau p}) = -C_2(p)D(p)T(p)e^{-\tau p}$$

$$\Rightarrow L^m(p) = -\frac{C_2(p)D(p)T(p)e^{-\tau p}}{1 + C_2(p)T(p)}$$

$$K_2 \left( 1 + \frac{1}{T_{i2}p} \right) \frac{1}{(1 + 0,05p)^2} e^{-\tau p}$$

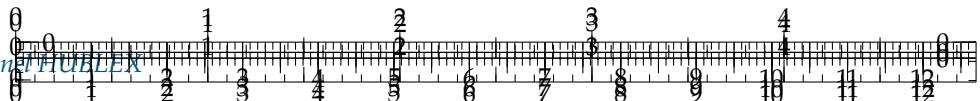
On a donc  $L^m(p) = -\frac{K_2 \left( 1 + \frac{1}{T_{i2}p} \right) \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}}{1 + K_2 \left( 1 + \frac{1}{T_{i2}p} \right) \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}} D(p)$

$$= -\frac{K_2 \frac{T_{i2}p + 1}{T_{i2}p} \frac{1}{(1 + 0,05p)^2} e^{-\tau p}}{1 + K_2 \frac{T_{i2}p + 1}{T_{i2}p} \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}} D(p) = -\frac{K_2(T_{i2}p + 1)e^{-\tau p}}{T_{i2}p(1 + 0,05p)^2 + K_2(T_{i2}p + 1)} D(p)$$

On a alors,  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pL^m(p) = -D_0 \frac{K_2}{K_2} = -D_0$ .

On a alors  $L^d(t) = D_0 - D_0 = 0$ .





## Retour sur le cahier des charges

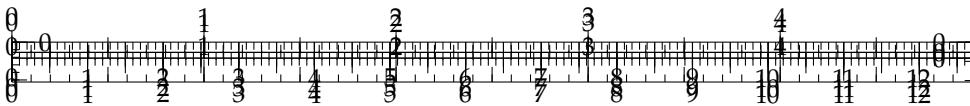
**Question 6** Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.

### Correction

D'après le cahier des charges :

- ▶ temps de réponse vis-à-vis de la consigne doit être inférieur à 50 ms, le temps de réponse à 5% mesuré est de  $0,06 - 0,02 = 0,04 \text{ s} < 0,05 \text{ s}$ . Critère validé;
- ▶ temps de réponse vis-à-vis de la perturbation doit être inférieur à 100 ms. Le temps de réponse à 5% mesuré vis-à-vis de la perturbation est de 80 ms. CDC respecté.





## TD 9

# Vision en réalité augmentée pour hélicoptère – Sujet

Concours Centrale Supelec 2014.

### Mise en situation

Le FLIR est une boule optronique modulaire pouvant intégrer plusieurs capteurs différents dont une caméra thermique, une caméra couleur TV HD, ainsi qu'une caméra très bas niveau de lumière. Cet ensemble est orientable et gyrostabilisé, c'est-à-dire en particulier que les caméras sont capables de garder une même ligne de visée par rapport au référentiel terrestre, quels que soient les mouvements de l'hélicoptère NH90 qui sera appelé porteur dans la suite du sujet.

Afin de limiter l'influence des vibrations du porteur sur la ligne de visée et augmenter la précision de son orientation, les ingénieurs ont choisi de décomposer l'axe motorisé d'élévation en deux étages. Le premier étage, appelé étage gros d'élévation (*ge*), est en prise directe avec l'air et est donc soumis aux effets aérodynamiques lors des mouvements du porteur. L'étage gros d'élévation est lui-même en liaison pivot, d'axe  $(P, \vec{y}_e)$ , avec l'axe motorisé d'azimut. Le second, appelé étage fin d'élévation (*fe*), est protégé des effets aérodynamiques grâce au carter sphérique solidaire de l'étage gros. Cet étage est en liaison pivot, d'axe  $(P, \vec{y}_e)$ , avec l'étage gros d'élévation. L'inertie des éléments déplacés par l'étage fin d'élévation est plus faible que celle de l'étage gros d'élévation et les choix de guidage et de motorisation permettent d'atteindre des accélérations et des vitesses élevées. Cependant, l'amplitude du mouvement de l'étage fin est limitée.

Les performances de l'étage fin d'élévation sont données dans le tableau ci-contre.

La consigne de vitesse  $\dot{\theta}_{fe0\ cons}(t) = \omega_{fe0\ cons}(t)$  est établie par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$ . Elle est calculée à partir de la détection de posture de la tête du pilote et des informations d'orientation du porteur par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_0$  obtenues par la centrale inertielle du porteur.

C1-02

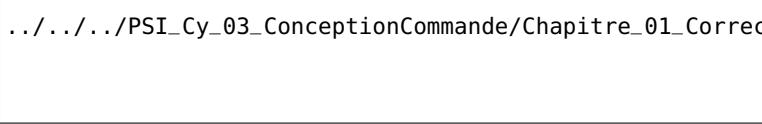
C2-04

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

Exigence	Valeur
Temps de réponse à 5%	<40 ms
Écart statique	nul
Marge de phase	$\Delta\phi = 60^\circ$

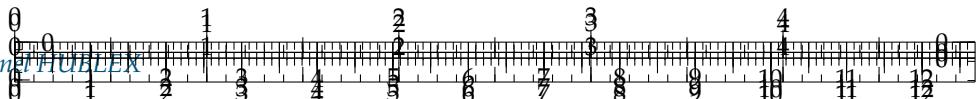
$k_{cfe} = 10,2 \text{ N A}^{-1}$ ,  $k_{vfe} = 10,2 \text{ V s m}^{-1}$ ,  
on note  $K_{fe} = k_{cfe} = k_{vfe}$ ,  $R_{fe} = 7,5 \Omega$ .



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_08\_FLIR/images/fig\_02.png

On a  $H_{gyro}(p) = \frac{1}{1 + \tau_{gyro}p}$ . Dans un premier temps, l'asservissement de vitesse n'est pas corrigé, c'est-à-dire que  $H_{cor\ fe}(p) = 1$ .





**Question 1** Exprimer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert

$$H_{fe1}(p) = \frac{\Omega_{fe0}(p)}{\Omega_{fe0 \text{ cons}}(p)}, \text{ en fonction de } K_1, \tau_{\text{gyro}}, M_{\text{eq}}, K_{fe} \text{ et } R_{fe}.$$

Compte tenu des temps de réponse à observer, on montre que  $H_{fe1}(p)$  peut se mettre sous la forme simplifiée suivante :  $H_{fe1}(p) = \frac{0,5}{1 + 3,65 \times 10^{-1}p + 6 \times 10^{-4}p^2}$ .

**Question 2** En utilisant l'abaque de la figure suivante, déterminer le temps de réponse à 5% et l'écart statique de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation en réponse à un échelon de vitesse unitaire. Conclure sur le respect des performances en rapidité et en précision.

On propose d'utiliser un correcteur proportionnel intégral de la forme  $H_{cor fe}(p) = K_{pfe} \left( 1 + \frac{1}{T_{ife}p} \right)$ . La fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation en réponse à un échelon de vitesse unitaire est :

$$H_{BOfe}(p) = K_{pfe} \left( 1 + \frac{1}{T_{ife}p} \right) \frac{1}{1 + 0,75p} \frac{1}{1 + 1,6 \times 10^{-3}p}.$$

La figure suivante correspond aux tracés des diagrammes de Bode réels de  $H_{BOfe}(j\omega)$  pour  $K_{pfe} = 1$  et  $T_{ife} = 0,1$  s puis  $T_{ife} = 0,01$  s.

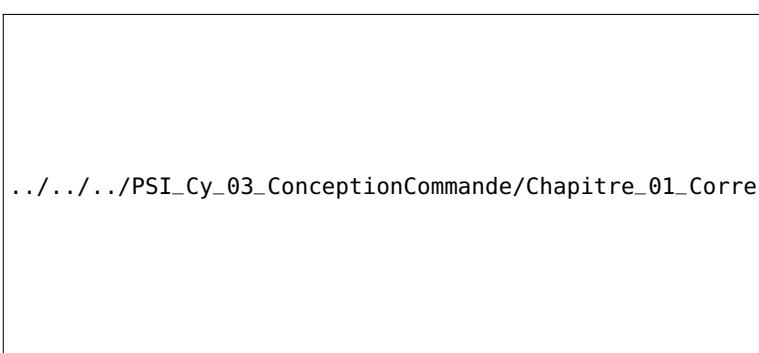
**Question 3** Sur cette même figure, tracer le diagramme de phase asymptotique de  $H_{BOfe}(j\omega)$  (Bode) pour  $T_{ife} = 0,1$  s, en indiquant la pulsation  $\frac{1}{T_{ife}}$ .

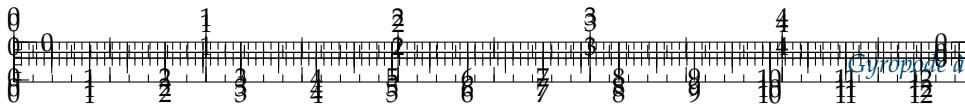
La lecture du tracé réel de la phase met en évidence un maximum à la pulsation  $\omega_{\max}$  pour  $T_{ife} = 0,1$  s.

**Question 4** En supposant que le tracé réel semi-logarithmique de la phase est symétrique autour de  $\omega_{\max}$ , calculer la valeur de  $T_{ife}$  comprise dans la décade  $[0,01; 0,1]$  s qui permet de régler ce maximum à  $-120^\circ$ .

**Question 5** Pour le réglage de  $T_{ife}$  calculé à la question précédente avec  $K_{pfe} = 1$  et à partir des tracés réels du document réponse, calculer la valeur de  $K_{pfe}$  qui permet de respecter le critère de marge de phase.

Le modèle est complété en utilisant les réglages déterminés aux deux questions précédentes pour  $K_{pfe}$  et  $T_{ife}$ . Afin de prendre en compte les caractéristiques du moteur linéaire, une saturation d'alimentation du moteur à 24 V est ajoutée ainsi qu'une modification de la commande associée qui n'est pas étudiée ici et qui ne modifie pas les réglages de  $K_{pfe}$  et  $T_{ife}$  déterminés précédemment. La réponse simulée  $\omega_{fe0}(p)$  de l'étage fin d'élévation à une consigne de vitesse en échelon  $\omega_{fe0 \text{ cons}}(t) = 1 \text{ rad s}^{-1}$  est donnée sur la figure suivante.





**Question 6** D'après la figure précédente, définir le temps pendant lequel la tension du moteur linéaire a été saturée et expliquer les effets de cette saturation sur les performances simulées par rapport aux performances simulées en gardant le modèle linéaire. Conclure sur la pertinence de la prise en compte de la saturation et sur les performances de l'étage fin d'élévation.

## Synthèse : validation des performances simulées du FLIR

### Objectif

Simuler le comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR et vérifier s'il respecte le cahier des charges.

À l'instar de l'étage fin d'élévation, l'étage gros d'élévation est également asservi, mais en position angulaire. Il doit permettre à l'étage fin d'élévation de vérifier l'hypothèse émise précédemment, soit  $\vec{u} \approx \vec{z}_e$ , c'est-à-dire que l'angle  $\beta(t)$  doit rester dans l'intervalle  $[-5^\circ, +5^\circ]$ . Un capteur LVDT (Linear Variable Differential Transformer) permet de mesurer l'écart entre l'orientation de l'étage fin d'élévation et l'étage gros d'élévation  $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{ge0}(t)$ . Le modèle d'asservissement de l'axe motorisé d'élévation est alors celui donné sur la figure suivante.



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_08\_FLIR/images/fig\_06.png

La figure ci-contre correspond à une mesure expérimentale du taux de rotation de la tête d'un pilote pour un mouvement d'élévation de sa ligne de visée. Ce signal peut alors être utilisé comme signal de consigne envoyé à l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

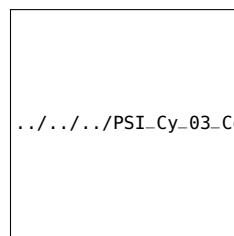
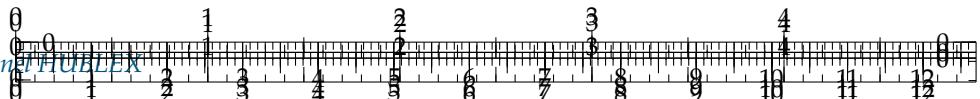
Pour simuler le modèle de l'axe motorisé d'élévation et comparer ses performances au cahier des charges, il est nécessaire de définir un signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  composé des signaux canoniques utilisés en automatique.

**Question 7** À partir de la figure précédente et en utilisant les signaux échelon et/ou rampe, proposer un modèle temporel associé au signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  exprimé en  $\text{rad s}^{-1}$ , sous la forme d'un tracé simple en fonction du temps en seconde. Tracer l'allure de  $\theta_{fe0\ cons}(t)$ , exprimé en rad, qui correspond à l'évolution temporelle de la ligne de visée du pilote dans ce cas. Préciser les valeurs des points caractéristiques de ces deux courbes.

**Question 8** À partir des deux tracés précédents, indiquer quels critères du cahier des charges peuvent être validés en utilisant ce signal de consigne dans la simulation du comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

Après avoir dimensionné et implanté le correcteur proportionnel intégral (noté PI) au sein du modèle de l'étage gros d'élévation, on simule l'évolution de  $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{ge0}(t)$  pour le signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  établi à partir de la mesure de la figure précédente. Les résultats de simulation sont donnés sur les figures suivantes.



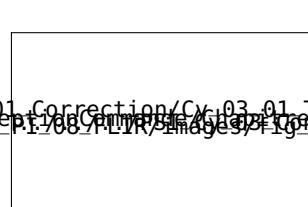
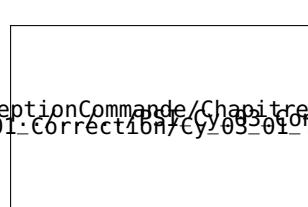
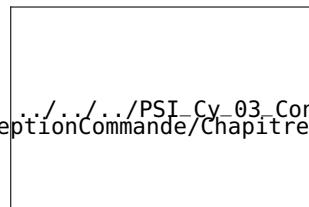
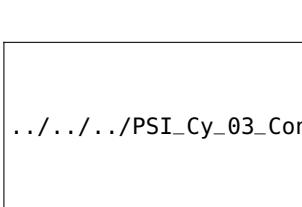


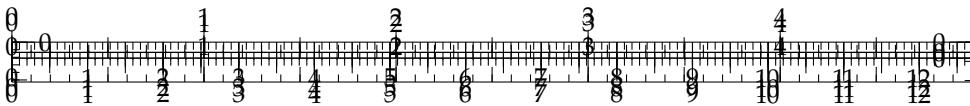
**Question 9** À partir des figures suivantes :

- vérifier si l'hypothèse  $\vec{u} \approx \vec{z}_e$  reste valide;

.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01/Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PT\_08\_FLIR\_qr.pdf pour chaque critère du cahier des charges à l'aide de tracés sur les figures et conclure sur l'aptitude du FLIR à respecter les performances du cahier des charges en comparant les valeurs numériques mesurées sur les résultats de simulation à celles du cahier des charges.

**TABLE 4.1** – Zooms de  $\theta_{fe0}(t)$  (trait plein) et  $\theta_{fe0\ cons}(t)$  (pointillés) en fonction de temps





## TD 9

# Vision en réalité augmentée pour hélicoptère – Corrigé

Concours Centrale Supelec 2014.

### Mise en situation

Le FLIR est une boule optronique modulaire pouvant intégrer plusieurs capteurs différents dont une caméra thermique, une caméra couleur TV HD, ainsi qu'une caméra très bas niveau de lumière. Cet ensemble est orientable et gyrostabilisé, c'est-à-dire en particulier que les caméras sont capables de garder une même ligne de visée par rapport au référentiel terrestre, quels que soient les mouvements de l'hélicoptère NH90 qui sera appelé porteur dans la suite du sujet.

Afin de limiter l'influence des vibrations du porteur sur la ligne de visée et augmenter la précision de son orientation, les ingénieurs ont choisi de décomposer l'axe motorisé d'élévation en deux étages. Le premier étage, appelé étage gros d'élévation (*ge*), est en prise directe avec l'air et est donc soumis aux effets aérodynamiques lors des mouvements du porteur. L'étage gros d'élévation est lui-même en liaison pivot, d'axe  $(P, \vec{y}_e)$ , avec l'axe motorisé d'azimut. Le second, appelé étage fin d'élévation (*fe*), est protégé des effets aérodynamiques grâce au carter sphérique solidaire de l'étage gros. Cet étage est en liaison pivot, d'axe  $(P, \vec{y}_e)$ , avec l'étage gros d'élévation. L'inertie des éléments déplacés par l'étage fin d'élévation est plus faible que celle de l'étage gros d'élévation et les choix de guidage et de motorisation permettent d'atteindre des accélérations et des vitesses élevées. Cependant, l'amplitude du mouvement de l'étage fin est limitée.

Les performances de l'étage fin d'élévation sont données dans le tableau ci-contre.

La consigne de vitesse  $\dot{\theta}_{fe0\ cons}(t) = \omega_{fe0\ cons}(t)$  est établie par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$ . Elle est calculée à partir de la détection de posture de la tête du pilote et des informations d'orientation du porteur par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_0$  obtenues par la centrale inertielle du porteur.

C1-02

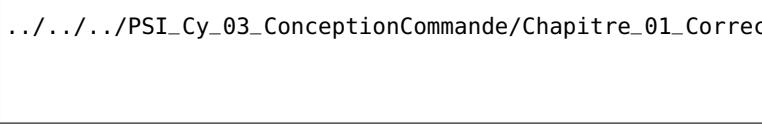
C2-04

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

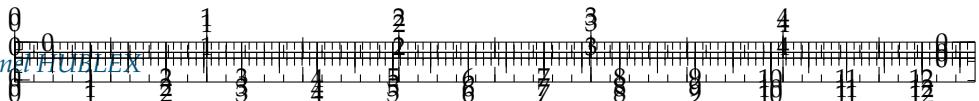
Exigence	Valeur
Temps de réponse à 5%	<40 ms
Écart statique	nul
Marge de phase	$\Delta\phi = 60^\circ$

$k_{cfe} = 10,2 \text{ N A}^{-1}$ ,  $k_{vfe} = 10,2 \text{ V s m}^{-1}$ ,  
on note  $K_{fe} = k_{cfe} = k_{vfe}$ ,  $R_{fe} = 7,5 \Omega$ .



On a  $H_{gyro}(p) = \frac{1}{1 + \tau_{gyro}p}$ . Dans un premier temps, l'asservissement de vitesse n'est pas corrigé, c'est-à-dire que  $H_{corfe}(p) = 1$ .





**Question 1** Exprimer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert

$$H_{fe1}(p) = \frac{\Omega_{fe0}(p)}{\Omega_{fe0 \text{ cons}}(p)}, \text{ en fonction de } K_1, \tau_{\text{gyro}}, M_{\text{eq}}, K_{fe} \text{ et } R_{fe}.$$

#### Correction

$$\text{En utilisant la formule de Black sur la boucle interne, on a : } F(p) = \frac{\frac{K_{fe}}{R_{fe}} \frac{1}{M_{eq}p}}{1 + \frac{K_{fe}}{R_{fe}} \frac{1}{M_{eq}p}}$$

$$= \frac{K_{fe}}{R_{fe}M_{eq}p + K_{fe}^2} = \frac{\frac{1}{K_{fe}}}{\frac{R_{fe}M_{eq}}{K_{fe}^2}p + 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } H_{fe1}(p) &= \frac{\frac{K_{fe}}{R_{fe}M_{eq}p + K_{fe}^2} K_1}{1 + \frac{K_{fe}}{R_{fe}M_{eq}p + K_{fe}^2} K_1 \frac{1}{1 + \tau_{\text{gyro}}p}} = \frac{K_{fe}K_1}{R_{fe}M_{eq}p + K_{fe}^2 + \frac{K_{fe}K_1}{1 + \tau_{\text{gyro}}p}} \\ &= \frac{(1 + \tau_{\text{gyro}}p) K_{fe}K_1}{(1 + \tau_{\text{gyro}}p) R_{fe}M_{eq}p + K_{fe}^2 + K_{fe}K_1} = \frac{(1 + \tau_{\text{gyro}}p) \frac{K_1}{K_{fe} + K_1}}{(1 + \tau_{\text{gyro}}p) \frac{R_{fe}M_{eq}}{K_{fe}^2 + K_{fe}K_1} p + 1} \end{aligned}$$

Compte tenu des temps de réponse à observer, on montre que  $H_{fe1}(p)$  peut se mettre sous la forme simplifiée suivante :  $H_{fe1}(p) = \frac{0,5}{1 + 3,65 \times 10^{-1}p + 6 \times 10^{-4}p^2}$ .

**Question 2** En utilisant l'abaque de la figure suivante, déterminer le temps de réponse à 5% et l'écart statique de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation en réponse à un échelon de vitesse unitaire. Conclure sur le respect des performances en rapidité et en précision.

#### Correction

$$\text{On a } \frac{1}{\omega_0^2} = 6 \times 10^{-4} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{6 \times 10^{-4}}} = 40 \text{ rad/s.}$$

$$\text{De plus } \frac{2\xi}{\omega_0} = 3,65 \times 10^{-1} \Rightarrow \xi = \frac{3,65}{2} \times 10^{-1} \times 40 = 7,45.$$

En utilisant l'abaque, on a alors  $\omega_0 \times t_5 = 40$  soit un temps de réponse à 5% de 1 s.

On propose d'utiliser un correcteur proportionnel intégral de la forme  $H_{cor fe}(p) = K_{pfe} \left( 1 + \frac{1}{T_{ife}p} \right)$ . La fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation devient alors [fig\\_03.png](#)

$$H_{BOfe}(p) = K_{pfe} \left( 1 + \frac{1}{T_{ife}p} \right) \frac{1}{1 + 0,75p} \frac{1}{1 + 1,6 \times 10^{-3}p}.$$

La figure suivante correspond aux tracés des diagrammes de Bode réels de  $H_{BOfe}(j\omega)$  pour  $K_{pfe} = 1$  et  $T_{ife} = 0,1$  s puis  $T_{ife} = 0,01$  s.

**Question 3** Sur cette même figure, tracer le diagramme de phase asymptotique de  $H_{BOfe}(j\omega)$  (Bode) pour  $T_{ife} = 0,1$  s, en indiquant la pulsation  $\frac{1}{T_{ife}}$ .

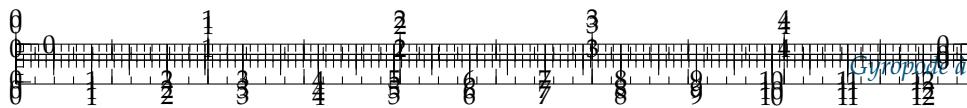
[.../.../.../PSI\\_Cy\\_03\\_Conception](#)

[Commande/Chapitre\\_01\\_Correction/Cy\\_03\\_01\\_TD\\_PI\\_08\\_FLIR/images/fig\\_03.png](#)

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_03\\_Conception](#)

[Commande/Chapitre\\_01\\_Correction/Cy\\_03\\_01\\_TD\\_PI\\_08\\_FLIR/images/fig\\_04.png](#)





### Correction

La lecture du tracé réel de la phase met en évidence un maximum à la pulsation  $\omega_{\max}$  telle que  $\omega_{\max} \in \left[ \frac{1}{T_{ife}}; 600 \right] \text{ rad s}^{-1}$ .

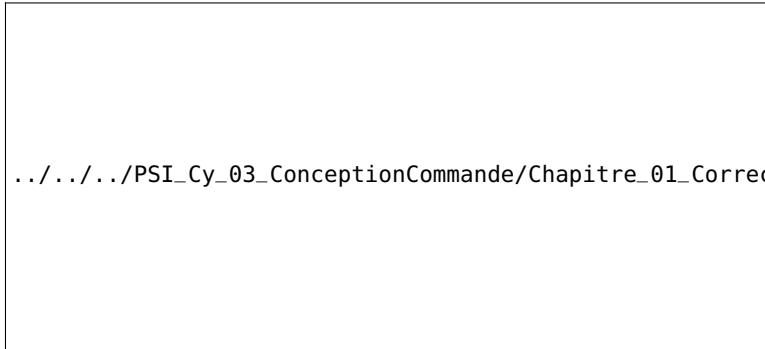
**Question 4** En supposant que le tracé réel semi-logarithmique de la phase est symétrique autour de  $\omega_{\max}$ , calculer la valeur de  $T_{ife}$  comprise dans la décade  $[0,01 \text{ s}; 0,1 \text{ s}]$  qui permet de régler ce maximum à  $-120^\circ$ .

### Correction

**Question 5** Pour le réglage de  $T_{ife}$  calculé à la question précédente avec  $K_{pfe} = 1$  et à partir des tracés réels du document réponse, calculer la valeur de  $K_{pfe}$  qui permet de respecter le critère de marge de phase.

### Correction

Le modèle est complété en utilisant les réglages déterminés aux deux questions précédentes pour  $K_{pfe}$  et  $T_{ife}$ . Afin de prendre en compte les caractéristiques du moteur linéaire, une saturation d'alimentation du moteur à 24 V est ajoutée ainsi qu'une modification de la commande associée qui n'est pas étudiée ici et qui ne modifie pas les réglages de  $K_{pfe}$  et  $T_{ife}$  déterminés précédemment. La réponse simulée  $\omega_{fe0}(p)$  de l'étage fin d'élévation à une consigne de vitesse en échelon  $\omega_{fe0 \text{ cons}}(t) = 1 \text{ rad s}^{-1}$  est donnée sur la figure suivante.

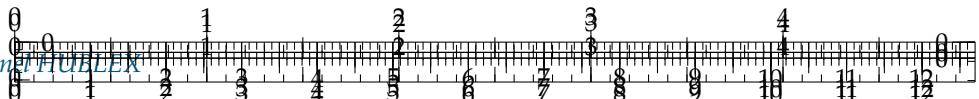


.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_08\_FLIR/images/fig\_05\_a.p

**Question 6** D'après la figure précédente, définir le temps pendant lequel la tension du moteur linéaire a été saturée et expliquer les effets de cette saturation sur les performances simulées par rapport aux performances simulées en gardant le modèle linéaire. Conclure sur la pertinence de la prise en compte de la saturation et sur les performances de l'étage fin d'élévation.

### Correction





## Synthèse : validation des performances simulées du FLIR

### Objectif

Simuler le comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR et vérifier s'il respecte le cahier des charges.

À l'instar de l'étage fin d'élévation, l'étage gros d'élévation est également asservi, mais en position angulaire. Il doit permettre à l'étage fin d'élévation de vérifier l'hypothèse émise précédemment, soit  $\vec{u} \approx \vec{z}_e$ , c'est-à-dire que l'angle  $\beta(t)$  doit rester dans l'intervalle  $[-5^\circ, +5^\circ]$ . Un capteur LVDT (Linear Variable Differential Transformer) permet de mesurer l'écart entre l'orientation de l'étage fin d'élévation et l'étage gros d'élévation  $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{ge0}(t)$ . Le modèle d'asservissement de l'axe motorisé d'élévation est alors celui donné sur la figure suivante.

[http://.../PSI\\_Cy\\_03\\_ConceptionCommande/Chapitre\\_01\\_Correction/Cy\\_03\\_01\\_T1.pdf](http://.../PSI_Cy_03_ConceptionCommande/Chapitre_01_Correction/Cy_03_01_T1.pdf)

[http://.../PSI\\_Cy\\_03\\_ConceptionCommande/Chapitre\\_01\\_Correction/Cy\\_03\\_01\\_T1.pdf](http://.../PSI_Cy_03_ConceptionCommande/Chapitre_01_Correction/Cy_03_01_T1.pdf)

La figure ci-contre correspond à une mesure expérimentale du taux de rotation de la tête d'un pilote pour un mouvement d'élévation de sa ligne de visée. Ce signal peut être obtenu à partir du signal de consigne obtenu par l'expérimentation d'élévation du FLIR.

Pour simuler le modèle de l'axe motorisé d'élévation et comparer ses performances au cahier des charges, il est nécessaire de définir un signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  composé des signaux canoniques utilisés en automatique.

**Question 7** À partir de la figure précédente et en utilisant les signaux échelon et/ou rampe, proposer un modèle temporel associé au signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  exprimé en rad  $s^{-1}$ , sous la forme d'un tracé simple en fonction du temps en seconde. Tracer l'allure de  $\theta_{fe0\ cons}(t)$ , exprimé en rad, qui correspond à l'évolution temporelle de la ligne de visée du pilote dans ce cas. Préciser les valeurs des points caractéristiques de ces deux courbes.

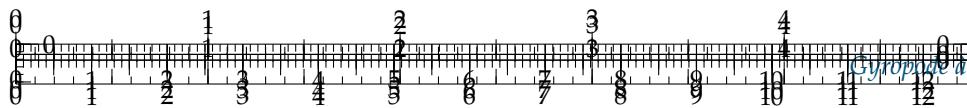
### Correction

**Question 8** À partir des deux tracés précédents, indiquer quels critères du cahier des charges peuvent être validés en utilisant ce signal de consigne dans la simulation du comportement de l'axe motorisé d'élévation du FLIR.

### Correction

Après avoir dimensionné et implanté le correcteur proportionnel intégral (noté PI) au sein du modèle de l'étage gros d'élévation, on simule l'évolution de  $\beta(t) = \theta_{fe0}(t) - \theta_{ge0}(t)$  pour le signal de consigne  $\omega_{fe0\ cons}(t)$  établi à partir de la mesure de la figure précédente. Les résultats de simulation sont donnés sur les figures suivantes.

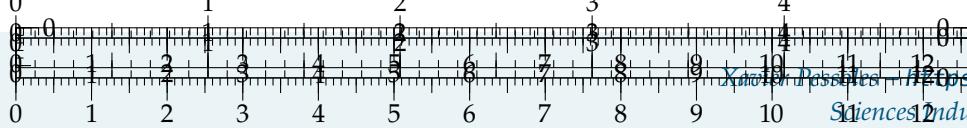




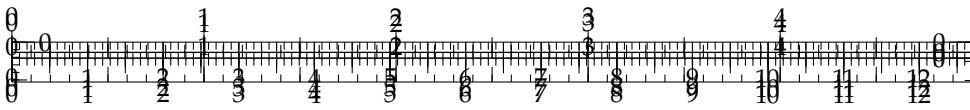
**Question 9** À partir des figures suivantes :

- ▶ vérifier si l'hypothèse  $\vec{u} \approx \vec{z}_e$  reste valide ;
- ▶ pour chaque critère du cahier des charges à l'aide de tracés sur les figures, conclure sur l'aptitude du FLIR à respecter les performances du cahier des charges en comparant les valeurs numériques mesurées sur les résultats de simulation à celles du cahier des charges.

**Correction**







## TD 10

# Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Sujet

Centrale Supélec – PSI – 2006.

### Présentation

Par sécurité, il est nécessaire que la distance d'arrêt d'une rame de TGV soit inférieure à 2500 m.

C1-02

Lors du freinage il est indispensable que les roues du train ne se bloquent pas. Le phénomène de blocage appelé enrayage a pour effet de déformer les roues et les rails et peut entraîner le déraillement du train.

C2-04

### Dispositif d'anti-enrayage

L'objectif de cette partie est l'étude de la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation en vue de satisfaire un cahier des charges qui sera exprimé par la suite.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

Le glissement relatif entre la roue et le rail est noté  $\nu$  et peut s'exprimer sous la forme  $\nu = 1 - \frac{V_R}{V_T}$  où  $V_T$  est la vitesse de translation du train par rapport aux rails et  $V_R$  l'opposée de la vitesse du point de contact appartenant à la roue par rapport à son support (bogie).

Dans le cadre de cette étude, on supposera que :

- ▶ les vitesses  $V_R$  et  $V_T$  sont directement accessibles à la mesure, éventuellement entachées d'une erreur ;
- ▶ la régulation peut se ramener directement à celle du glissement ;
- ▶ le comportement de l'actionneur et de sa « commande rapprochée » est modélisé par une fonction de transfert linéaire correspondant à un comportement « moyen ».

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure ?? où est la consigne de glissement.

- ▶  $H_1(p)$  : fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électro-valve) ;
- ▶  $H_2(p)$  : fonction de transfert de la roue au freinage ;
- ▶  $C(p)$  : correcteur de la boucle de régulation ;
- ▶  $M(p)$  : fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement obtenu à partir des vitesses  $V_T$  et  $V_R$ , cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure ;
- ▶  $\nu_m$  : glissement estimé à partir de  $V_T$  et de  $V_R$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

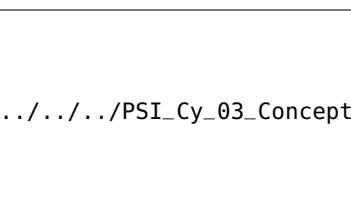
**FIGURE 4.16** – Structure de la chaîne de régulation de glissement





On adoptera pour la suite :  $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$ ,  $H_2(p) = \frac{K_h}{p} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}$  et  $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

Pour une vitesse  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ , le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse  $V_T$  ne font pas l'objet de cette étude.



### Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_09\_FreinageTGV/images/fig\_02.png

*En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni en figure suivante en justifiant le tracé.*

### Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type PI dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

**Question 1** Donner l'allure du diagramme de Bode de ce correcteur.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_09\_FreinageTGV/images/fig\_03.png

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Question 3** Calculer la valeur minimale  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées.

**Question 5** Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain (avec très peu de calcul). Conclure sur les marges de stabilité obtenues.

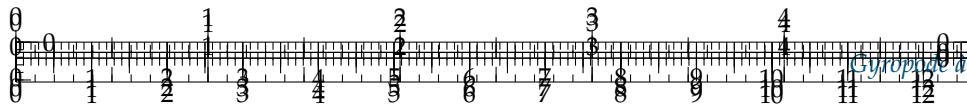
### Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérification concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de glissement : temps du 1<sup>er</sup> maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)}$ , on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}.$$





On suppose sans aucune justification que  $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$ .

**Question 6** En examinant les diagrammes de Bode fournis sur la figure suivante de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)}$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

**Question 7** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Question 8** En justifiant, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert par la forme suivante :  $F(p) = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

### Objectif

Calcul de la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement.

**Question 9** En utilisant la relation ci-dessous, montrer que l'évolution temporelle de la réponse impulsionnelle  $f(t)$  du système décrit par la fonction de transfert  $F(p)$ , peut être exprimée par la relation suivante où  $y(t)$  est une fonction que vous préciserez,  $a$  et  $b$  deux constantes que vous exprimerez en fonction de  $K_f$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  :  $f(t) = ay(t) + b\dot{y}(t)$ .

On donne  $\mathcal{L}[t^n e^{-at} h(t)] = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$  ( $h(t)$  fonction de heaviside – échelon unité).

**Question 10** À partir de cette réponse, calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $\nu_c(t) = \nu_{c0}h(t)$ .

**Question 11** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

## Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

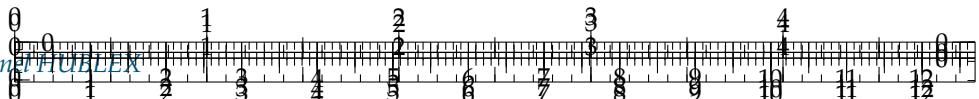
La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive  $f_{ext}$ . On admet que cette modélisation conduit au schéma-blocs représenté sur la figure ci-dessous.

On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

**Question 12** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{\nu_1(p)}{F_{ext}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (On rappelle qu'en régulation on considère l'entrée principale égale à 0). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left( \|H_2(j\omega)\|; \left\| \frac{1}{C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)} \right\| \right).$$





### Objectif

Calcul de la fonction de transfert  $F_2(p)$ .

On donne le tracé de la fonction  $\left| \frac{1}{C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)} \right|$ .

**Question 13** Tracer le diagramme asymptotique de  $|H_2(j\omega)|$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

**Question 14** Étudier la fonction de transfert  $F_2(p)$  et donner  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$ .

En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

### Objectif

Calcul de l'évolution du glissement en réponse à une variation de l'adhérence.

**Question 15** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

**Question 16** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 h(t)$  avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

**Question 17** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale (valeurs à considérer en valeur absolue).

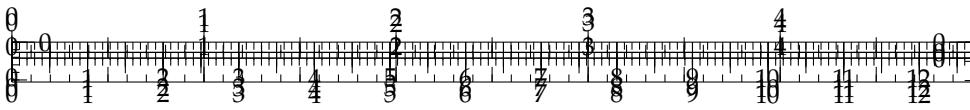
.../.../.../PSI\_Cy\_

**Question 18** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

### Éléments de correction

1. .
2. .
3.  $-20^\circ$ .
4.  $T_i \geq 2,75$ .
5.  $K = 11$ .
6.  $MG = 18 \text{ dB}$  et  $M\varphi = 60^\circ$ .
7. .
8.  $K_f = 1$ ,  $\tau_1 = 1/0,3$ ,  $\tau_2 = 1/0,6$ ,  $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\xi < 0,7$ .
9.  $\frac{1+3,3p}{(1+1,66p)^2}$ .
10.  $f(t) = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-t/\tau_2} h(t)$ .
11.  $t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} = 3,3 \text{ s}$  et dépassement de 13%.
12. .
13. .
14. .
15.  $F_2(p) = -\frac{p}{(1+2,8p)(1+0,5p)}$ .
16.  $p_1 = -0,35$  et  $p_2 = -2$ .  $F_2(p) = -\frac{p}{(1+2,8p)}$ .
17.  $v_1(t) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t/T} h(t)$ .





## TD 10

# Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Corrigé

Centrale Supélec – PSI – 2006.

### Présentation

Par sécurité, il est nécessaire que la distance d'arrêt d'une rame de TGV soit inférieure à 2500 m.

C1-02

Lors du freinage il est indispensable que les roues du train ne se bloquent pas. Le phénomène de blocage appelé enrayage a pour effet de déformer les roues et les rails et peut entraîner le déraillement du train.

C2-04

### Dispositif d'anti-enrayage

L'objectif de cette partie est l'étude de la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation en vue de satisfaire un cahier des charges qui sera exprimé par la suite.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

Le glissement relatif entre la roue et le rail est noté  $\nu$  et peut s'exprimer sous la forme  $\nu = 1 - \frac{V_R}{V_T}$  où  $V_T$  est la vitesse de translation du train par rapport aux rails et  $V_R$  l'opposée de la vitesse du point de contact appartenant à la roue par rapport à son support (bogie).

Dans le cadre de cette étude, on supposera que :

- ▶ les vitesses  $V_R$  et  $V_T$  sont directement accessibles à la mesure, éventuellement entachées d'une erreur ;
- ▶ la régulation peut se ramener directement à celle du glissement ;
- ▶ le comportement de l'actionneur et de sa « commande rapprochée » est modélisé par une fonction de transfert linéaire correspondant à un comportement « moyen ».

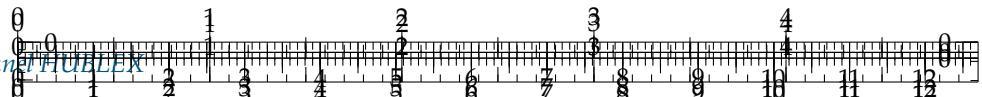
On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure ?? où est la consigne de glissement.

- ▶  $H_1(p)$  : fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électro-valve) ;
- ▶  $H_2(p)$  : fonction de transfert de la roue au freinage ;
- ▶  $C(p)$  : correcteur de la boucle de régulation ;
- ▶  $M(p)$  : fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement obtenu à partir des vitesses  $V_T$  et  $V_R$ , cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure ;
- ▶  $\nu_m$  : glissement estimé à partir de  $V_T$  et de  $V_R$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

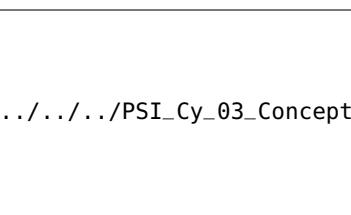
**FIGURE 4.17** – Structure de la chaîne de régulation de glissement





On adoptera pour la suite :  $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$ ,  $H_2(p) = \frac{K_h}{p} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}$  et  $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

Pour une vitesse  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ , le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse  $V_T$  ne font pas l'objet de cette étude.



### Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_09\_FreinageTGV/images/fig\_02.png

*En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni en figure suivante en justifiant le tracé.*

### Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type PI dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

**Question 1** Donner l'allure du diagramme de Bode de ce correcteur.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_PI\_09\_FreinageTGV/images/fig\_03.png

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Question 3** Calculer la valeur minimale  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées.

**Question 5** Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain (avec très peu de calcul). Conclure sur les marges de stabilité obtenues.

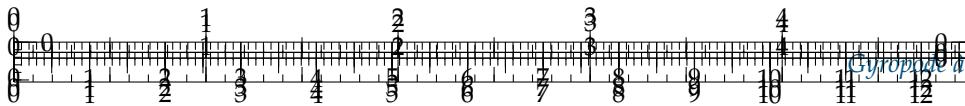
### Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérification concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de glissement : temps du 1<sup>er</sup> maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)}$ , on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}.$$





On suppose sans aucune justification que  $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$ .

**Question 6** En examinant les diagrammes de Bode fournis sur la figure suivante de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)}$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

**Question 7** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Question 8** En justifiant, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert par la forme suivante :  $F(p) = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

### Objectif

Calcul de la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement.

**Question 9** En utilisant la relation ci-dessous, montrer que l'évolution temporelle de la réponse impulsionnelle  $f(t)$  du système décrit par la fonction de transfert  $F(p)$ , peut être exprimée par la relation suivante où  $y(t)$  est une fonction que vous préciserez,  $a$  et  $b$  deux constantes que vous exprimerez en fonction de  $K_f$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  :  $f(t) = ay(t) + b\dot{y}(t)$ .

On donne  $\mathcal{L}[t^n e^{-at} h(t)] = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$  ( $h(t)$  fonction de heaviside – échelon unité).

**Question 10** À partir de cette réponse, calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $\nu_c(t) = \nu_{c0}h(t)$ .

**Question 11** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

## Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

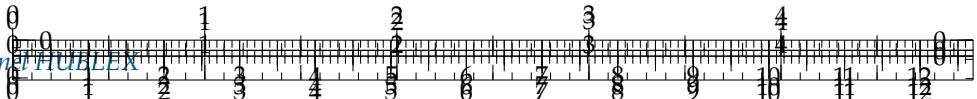
La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive  $f_{ext}$ . On admet que cette modélisation conduit au schéma-blocs représenté sur la figure ci-dessous.

On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

**Question 12** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{\nu_1(p)}{F_{ext}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (On rappelle qu'en régulation on considère l'entrée principale égale à 0). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left( \|H_2(j\omega)\|; \left\| \frac{1}{C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)} \right\| \right).$$





### Objectif

Calcul de la fonction de transfert  $F_2(p)$ .

On donne le tracé de la fonction  $\left| \frac{1}{C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)} \right|$ .

**Question 13** Tracer le diagramme asymptotique de  $|H_2(j\omega)|$ .

**Question 14** En déduire la fonction de transfert  $F_2(p)$ .

En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

### Objectif

Calcul de l'évolution du glissement en réponse à une variation de l'adhérence.

**Question 15** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

**Question 16** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(p)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 h(t)$  avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

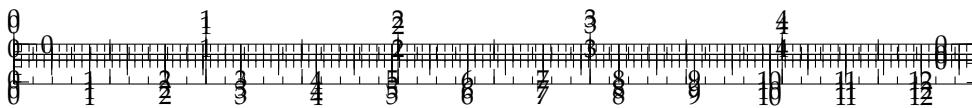
**Question 17** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(p)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale (valeurs à considérer en valeur absolue).

**Question 18** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

### Éléments de correction

1. .
2. .
3.  $-20^\circ$ .
4.  $T_i \geq 2,75$ .
5.  $K = 11$ .
6.  $MG = 18 \text{ dB}$  et  $M\varphi = 60^\circ$ .
7. .
8.  $K_f = 1$ ,  $\tau_1 = 1/0,3$ ,  $\tau_2 = 1/0,6$ ,  $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\xi < 0,7$ .
9.  $\frac{1+3,3p}{(1+1,66p)^2}$ .
10.  $f(t) = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-t/\tau_2} h(t)$ .
11.  $t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} = 3,3 \text{ s}$  et dépassement de 13%.
12. .
13. .
14. .
15.  $F_2(p) = -\frac{p}{12100} \frac{1}{(1+2,8p)(1+0,5p)}$ .
16.  $p_1 = -0,35$  et  $p_2 = -2$ .  $F_2(p) = -\frac{p}{12100} \frac{1}{(1+2,8p)}$ .
17.  $v_1(t) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t/T} h(t)$ .





## TD 11

# Avance de Phase – Train d'atterrissage d'hélicoptère – Sujet

Banque PT – SIA 2014.

### Mise en situation

Lors d'atterrissements d'hélicoptères à grande vitesse, les oscillations induites par l'impact au sol du train d'atterrissage principal génèrent des contraintes mécaniques importantes à la liaison du pylône de queue avec la cabine. Les oscillations du pylône de queue de l'appareil ne sont pas négligeables. Lors de ces atterrissages, les vitesses verticales minimales sont de l'ordre de  $2 \text{ m s}^{-1}$  mais peuvent atteindre des valeurs plus importantes lors d'appontage sur un bateau à cause des mouvements du bateau dus à la houle. La résistance aux chocs correspond à la possibilité de garder opérationnel un appareil qui aurait atterri avec une vitesse d'impact pouvant atteindre  $4 \text{ m s}^{-1}$ .

C1-02

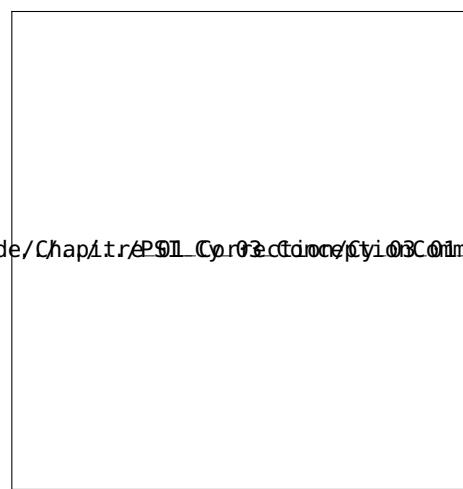
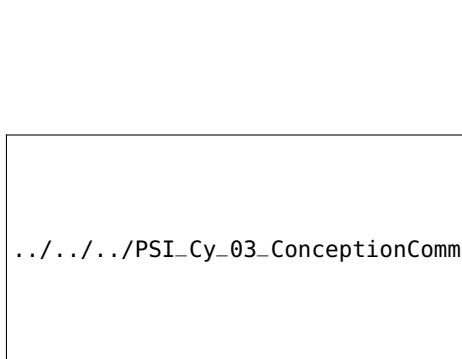
C2-04

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

### Objectif

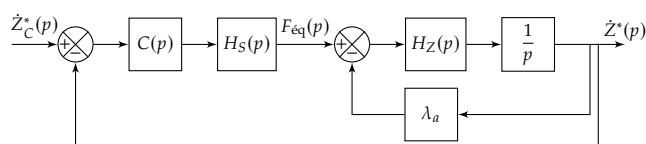
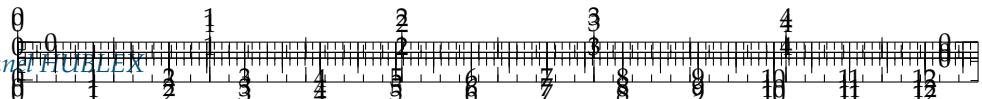
Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération de la queue doit rester inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

On donne une modélisation cinématique du train principal.



La vitesse d'impact lors de l'atterrissage de l'hélicoptère correspond alors à la vitesse de la tige 5 de l'amortisseur par rapport au cylindre 4. Cette vitesse est notée  $Z^*$ . On se propose d'étudier la stabilité vis-à-vis de la seule consigne  $\dot{Z}_c^*(p)$ . On adoptera pour le réglage de la correction le schéma suivant.





On note dans ce schéma :

- ▶  $\dot{Z}^*(p)$  la transformée de  $\dot{z}^*(t) = \dot{z}(t) + V_0$  avec  $V_0$  la vitesse d'impact et  $\dot{z}(t)$  la vitesse absolue de la cabine par rapport au sol;
- ▶  $F_{\text{eq}}(p)$  l'effort équivalent ramené au déplacement de la cabine et fourni par la partie active de l'amortisseur;
- ▶  $\lambda_a$  le coefficient d'amortissement passif équivalent ramené au déplacement de la cabine;
- ▶  $H_S(p) = \frac{K_S}{1 + T_S p}$  la fonction de transfert de la partie active de l'amortisseur. On prendra :  $K_S = 12 \times 10^4 \text{ N A}^{-1}$  et  $T_S = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$ ;
- ▶  $H_Z(p) = \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}$  la fonction de transfert traduisant le comportement dynamique du train.
- ▶  $C(p)$  la fonction de transfert du correcteur dont le réglage fait l'objet de cette partie.

## Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

### Objectif

Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

**Question 1** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{\text{eq}}(p)}$ .

**Question 2** Déterminer littéralement la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée  $H_{\text{BONC}}(p)$ .

On donne le diagramme de Bode de  $H_F(p)$ .

**Question 3** Justifier la forme de ce diagramme en traçant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de  $K_z$  et  $\omega_z$ . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction  $H_{\text{BONC}}(p)$ . On prendra pour cela  $20 \log K_S \approx 100 \text{ dB}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_AP\_01\_TrainHelico/images/fig\_03.png  
**Choix et réglage de la correction**

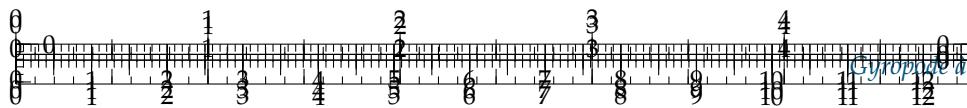
### Objectif

Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin de satisfaire les exigences, une étude complémentaire non abordée dans ce sujet montre que la boucle d'asservissement doit posséder les performances suivantes :

- ▶ erreur statique nulle;





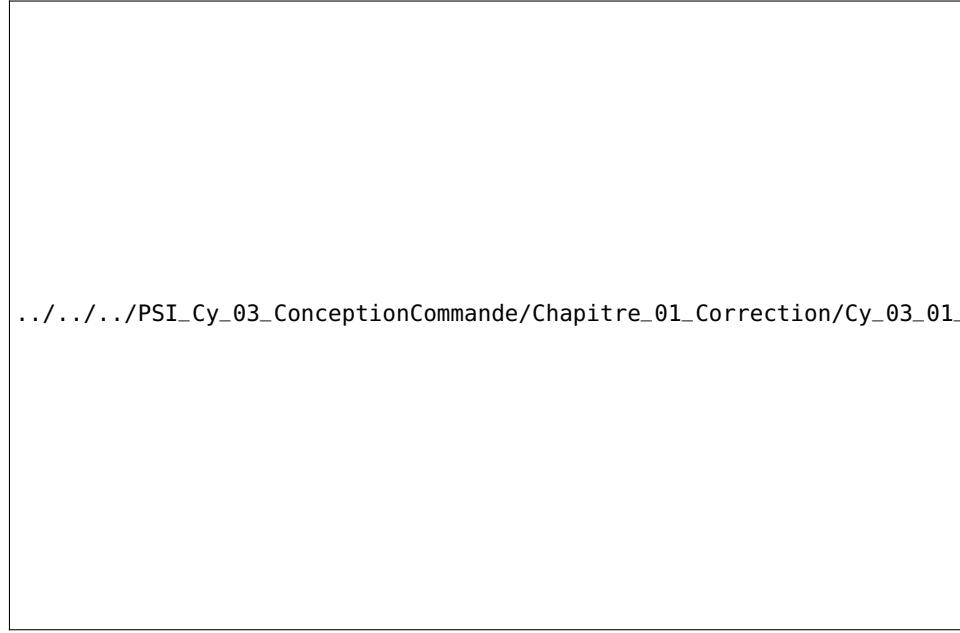
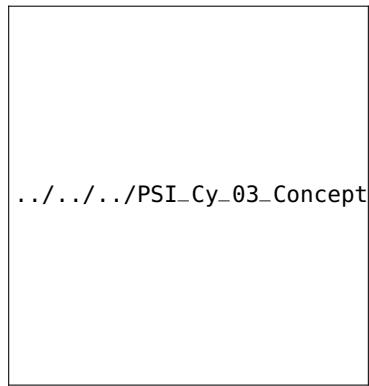
- ▶ pulsation de coupure à 0 dB et  $\omega_{0 \text{ dB}} = 6 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- ▶ marge de phase  $M\varphi = 45^\circ$ ;
- ▶ marge de gain  $MG > 6 \text{ dB}$ .

**Question 4** Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

On choisit dans un premier temps un correcteur de la forme  $C(p) = \frac{K_p}{p^2}$ . On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système ainsi corrigé pour  $K_p = 1$ .

**Question 5** Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de  $K_p$  garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

On choisit finalement un correcteur de la forme  $C(p) = \frac{K_p}{p^2} \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$  avec  $\mu > 1$ . Les caractéristiques du terme en  $K_p \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$  ainsi que des abaques de calcul sont donnés ci-dessous.

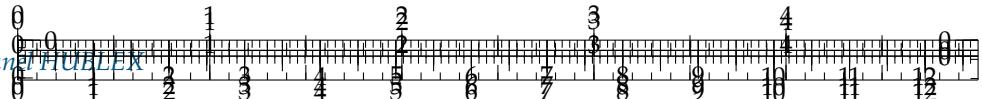


**Question 6** Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

**Question 7** Quelle valeur doit-on donner à  $\mu$  pour garantir le critère de marge de phase ?

**Question 8** En déduire les valeurs de  $T$  et de  $K_p$  permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?





## Validation des performances

### Objectif

Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_AP\_01\_TrainHelico/images/fig\_06.png

On donne le résultat d'une simulation du système complet piloté à l'aide du correcteur PID de la partie 1.1.1. Chapitre 01 Correction Cy\_03\_01\_TD\_AP\_01\_TrainHelico/images/fig\_06.png

**Question 9** En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_AP\_01\_TrainHelico/images/fig\_06.png

### Éléments de correction

$$1. H_F(p) = \frac{K_Z p}{1 + \left( \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}.$$

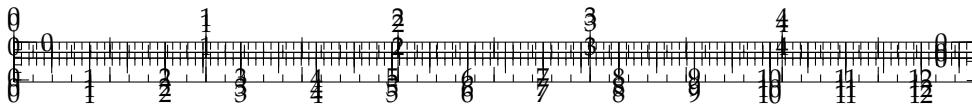
$$2. H_{BONC}(p) = \frac{K_Z p}{1 + \left( \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \cdot \frac{K_S}{1 + T_S p}.$$

$$3. \omega_Z = 5,5 \text{ rad s}^{-1} \text{ et } K_Z = 5 \times 10^{-6}.$$

4.

5.





## TD 11

# Avance de Phase – Train d'atterrissage d'hélicoptère – Corrigé

Banque PT – SIA 2014.

## Mise en situation

C1-02

C2-04

### Objectif

Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération de la queue doit rester inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

## Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

### Objectif

Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

**Question 1** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert

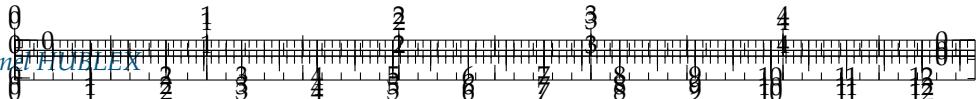
$$H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{\text{eq}}(p)}.$$

### Correction

$$\begin{aligned} H_F(p) &= \frac{H_Z(p) \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a H_Z(p) \frac{1}{p}} = \frac{\frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a \frac{\frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}} = \frac{K_Z p^2}{p \left( 1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2} \right) + \lambda_a K_Z p^2} \\ &= \frac{K_Z p}{1 + \left( \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}. \end{aligned}$$

**Question 2** Déterminer littéralement la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée  $H_{\text{BONC}}(p)$ .



**Correction**

$$H_{\text{BONC}}(p) = \frac{K_Z p}{1 + \left( \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \cdot \frac{K_S}{1 + T_S p}.$$

On donne le diagramme de Bode de  $H_F(p)$ .

**Question 3** Justifier la forme de ce diagramme en traçant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de  $K_z$  et  $\omega_z$ . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction  $H_{\text{BONC}}(p)$ . On prendra pour cela  $20 \log K_S \approx 100 \text{ dB}$ .

**Correction**

$H_F$  est un second ordre dérivé de coefficient d'amortissement  $\xi_F$  et de pulsation propre  $\omega_Z$ . Ne pouvant pas calculer  $\xi_F$ , l'allure du diagramme de Bode suggère que  $\xi_F < 1$  car il y a une seule rupture de pente à  $\omega = 5,5 \text{ rad s}^{-1}$ .

Pour  $\omega < \omega_Z$  l'asymptote du second ordre à un gain de 0 dB. Seul le déivateur est influent. En conséquence, pour  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ , on a donc  $|K_Z p|_{\text{dB}} = 20 \log K_Z = -106$ . On a donc  $K_Z = 5 \times 10^{-6}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_AP\_01\_TrainHe

**Choix et réglage de la correction****Objectif**

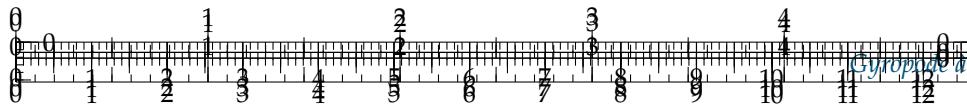
Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

**Question 4** Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

**Correction**

Pour que l'erreur statique soit nulle, il faut que la classe de la FTBO soit de 1. La classe de la FTBO non corrigée étant de «-1», il faut donc que le correcteur soit de classe 2 pour que le critère de précision soit garanti.





**Question 5** Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de  $K_p$  garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

#### Correction

La marge de gain est de 18 dB et la marge de phase est de 85°.

Pour avoir une pulsation de coupure à 0 dB de  $6 \text{ rad s}^{-1}$ , il faut relever le gain de 20 dB soit  $K_p = 10$ . Dans ces conditions, la marge de phase est de  $-15^\circ$  et la marge de gain est  $-2 \text{ dB}$ . En conséquences, le système est précis (écart nul) et la pulsation de coupure du cahier des charges est respectée. Les marges ne sont plus satisfaites.

**Question 6** Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

#### Correction

L'action de correction obtenue est de l'avance de phase.

**Question 7** Quelle valeur doit-on donner à  $\mu$  pour garantir le critère de marge de phase ?

#### Correction

**Cas 1 : on conserve**  $K_p = 10$ . Le correcteur doit ajouter  $60^\circ$  de phase pour  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ . Il faut donc  $\mu = 14$ .

**Cas 2 : on prend**  $K_p = 1$ . Dans ce cas, on souhaite que lorsque  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\varphi$  soit égal à  $45^\circ$ . Il faut donc ajouter  $65^\circ$  de phase à cette pulsation. Dans ces conditions,  $\mu = 20$ .

Le critère de précision reste validé car il y a toujours les deux intégrateurs dans le correcteur.

**Question 8** En déduire les valeurs de  $T$  et de  $K_p$  permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

#### Correction

**Dans le cas 1 :**  $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{14}} = 0,045 \text{ s}$ . Le gain  $K_p$  déjà déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Il faut donc que le gain du correcteur à avance de phase soit nul à la pulsation de coupure à  $\omega_0 \text{ dB}$ .

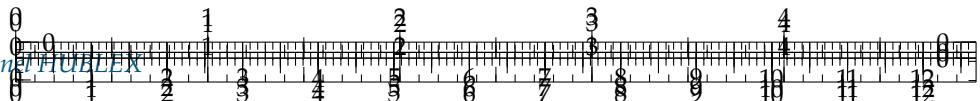
Il faut donc que  $\frac{1}{2} (20 \log (\mu K'_p) + 20 \log K'_p) = 0 \Rightarrow \log (\mu K'^2_p) = 0 \Rightarrow \mu K'^2_p = 1 \Rightarrow K'_p = \sqrt{1/\mu} = 0,267$ .

**Dans le cas 2 :**  $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{20}} = 0,037 \text{ s}$ .

Actuellement, le gain est de  $-20 \text{ dB}$  pour  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ . Il faut donc augmenter le gain de 20 dB pour la pulsation  $\frac{1}{T\sqrt{\mu}}$ . Ceci revient donc à résoudre  $20 \log K_p + \frac{1}{2} (20 \log \mu K_p - 20 \log K_p) = 20 \Rightarrow \log K_p + \log \sqrt{\mu} = 1 \Rightarrow K_p \sqrt{\mu} = 10 \Rightarrow K_p = 10/\sqrt{20} = 2,6$ .

**Remarque :** dans le cas 1 le gain du correcteur est  $K_p \times K'_p = 2,6$ . Dans le cas 2  $K_p = 2,6$ .





## Validation des performances

### Objectif

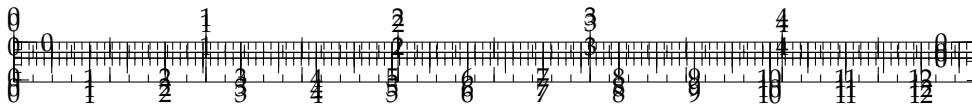
Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

**Question 9** En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.

### Correction

Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération reste bien inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .





## TD 12

# Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway – Sujet

Centrale Supelec – PSI – 2008.

### Présentation

#### Étude du régulateur de la boucle de vitesse

C1-02

C2-04

#### Objectif

Déterminer un régulateur de vitesse permettant d'atteindre les exigences suivantes :

- ▶ écart nul en régime permanent pour une consigne de vitesse constante et un effort perturbateur, dû à la poussée des passagers, constant;
- ▶ marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$  pour un modèle nominal qui sera précisé par la suite;
- ▶ bande passante la plus grande possible compte tenu de la contrainte de marge de phase;
- ▶ temps de réponse inférieur à 0,2 s en réponse à une variation en échelon de l'effort perturbateur.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

La chaîne de régulation de vitesse est décrite par le schéma-blocs suivant où la fonction de transfert représente la chaîne de mesure de vitesse comportant un filtre du 1<sup>er</sup> ordre, de constante de temps  $\tau_f = 10$  ms, permettant de limiter l'impact des bruits de mesure et  $G$  est le gain de l'amplificateur de puissance alimentant le moteur.

On choisit d'adopter pour cette chaîne un régulateur de type proportionnel-intégral dont la fonction de transfert est :  $R(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right)$ .

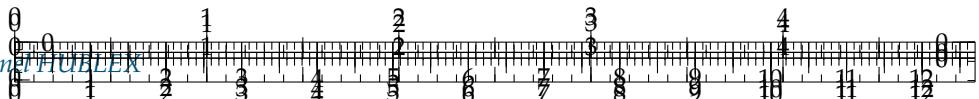
**Question 1** Au regard des exigences du cahier des charges, justifier le choix de ce type de régulateur.

On cherche d'abord à évaluer le temps de réponse vis-à-vis des perturbations.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $T(p) = \frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  entre les perturbations dues à la poussée des passagers et la vitesse du moteur, en fonction des différentes fonctions de transfert de la figure précédente. Montrer que la réponse fréquentielle peut être approchée par la relation :

$$\|T(j\omega)\| = \|H_2(j\omega)\| \cdot \min \left( \|H_1(j\omega)\|, \left\| \frac{1}{R(j\omega)GH_3(j\omega)} \right\| \right)$$





$$= ||H_2(j\omega)|| |M(j\omega)|.$$

Pour la suite, on adopte les modèles de commande simplifiés suivants :

$$H_1(p) = \frac{10}{p} \quad H_2(p) = 0,05 \quad H_3(p) = \frac{0,1}{1 + 0,01p} \quad G = 10.$$

Afin de limiter le périmètre de l'étude, on adopte sans justification les hypothèses suivantes :

- $1/T_i < 100 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- la situation considérée est celle de la figure suivante représentant le diagramme asymptotique de la fonction  $\left| \frac{1}{R(j\omega)GH_3(j\omega)} \right|_{\text{dB}}$  où  $20 \log G_0 < 0$ .

**Question 3** Exprimer  $G_0$  en fonction de  $K_r$ . En utilisant la figure précédente, tracer le diagramme asymptotique de la fonction  $\|H_1(j\omega)\|$  (veiller au respect des pentes) et celui de  $\|M(j\omega)\|$  en adoptant l'approximation de la question précédente.

**Question 4** En déduire alors une approximation de la fonction de transfert  $T(p) = \frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  en exprimant toutes les brisures en fonction de  $K_r$  et  $T_i$ .

**Question 5** Proposer une nouvelle expression approchée de  $T(p)$  sous la forme  $T_a(p) = \frac{N(p)}{1 + \tau p}$  où  $N(p)$  est le numérateur de  $T(p)$ ? En utilisant la forme approchée de  $T_a(p)$ , déterminer l'évolution de la vitesse  $\Omega_1(t)$  en réponse à un échelon de la force de perturbation et tracer son allure.

**Question 6** En se référant à des fonctions types connues donner, en fonction de  $T_i$ , un ordre de grandeur du temps de réponse vis-à-vis de la force perturbatrice.

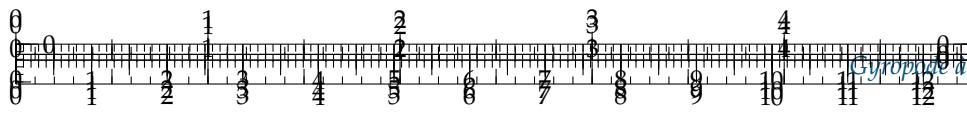
**Question 7** Justifier alors l'intérêt d'adopter pour  $T_i$  la valeur la plus petite possible.

**Question 8** En vous aidant de tracés succincts de diagrammes de Bode, analyser la stabilité du système bouclé dans les deux cas :  $\frac{1}{T_i} > 100 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\frac{1}{T_i} < 100 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 9** En prenant  $K_r = 1$ , tracer les diagrammes de Bode asymptotiques (module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée et l'allure de la courbe réelle du diagramme de phase. Veiller à effectuer ce tracé de façon à respecter une situation stable du système en boucle fermée.

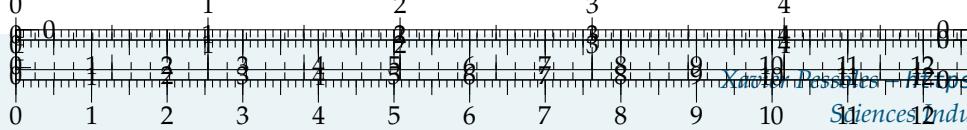
**Question 10** En utilisant la représentation dans le plan de Bode donnée figure suivante, déterminer quelle est la valeur  $T_{i,\min}$  la plus petite possible que l'on peut conférer à  $T_i$  compatible avec la marge de phase minimale exigée par le cahier des charges (cette fonction servira uniquement à calculer en plaçant judicieusement pour obtenir la marge de phase souhaitée).



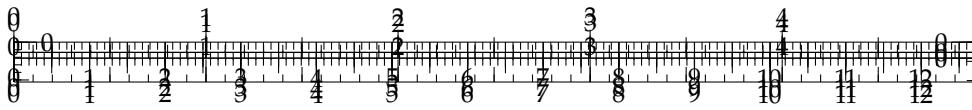


**Question 11** En conservant la valeur  $T_{i\min}$  calculée précédemment, en déduire alors la valeur du gain  $K_r$  du régulateur permettant d'assurer la marge de phase souhaitée.

**Question 12** Vérifier si le cahier des charges est validé, et conclure sur l'adéquation du régulateur calculé vis-à-vis du problème posé.







## TD 12

# Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway – Corrigé

Centrale Supelec – PSI – 2008.

## Présentation

### Étude du régulateur de la boucle de vitesse

C1-02

C2-04

#### Objectif

Déterminer un régulateur de vitesse permettant d'atteindre les exigences suivantes :

- ▶ écart nul en régime permanent pour une consigne de vitesse constante et un effort perturbateur, dû à la poussée des passagers, constant;
- ▶ marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$  pour un modèle nominal qui sera précisé par la suite;
- ▶ bande passante la plus grande possible compte tenu de la contrainte de marge de phase;
- ▶ temps de réponse inférieur à 0,2 s en réponse à une variation en échelon de l'effort perturbateur.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

La chaîne de régulation de vitesse est décrite par le schéma-blocs suivant où la fonction de transfert représente la chaîne de mesure de vitesse comportant un filtre du 1<sup>er</sup> ordre, de constante de temps  $\tau_f = 10$  ms, permettant de limiter l'impact des bruits de mesure et  $G$  est le gain de l'amplificateur de puissance alimentant le moteur.

On choisit d'adopter pour cette chaîne un régulateur de type proportionnel-intégral dont la fonction de transfert est :  $R(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right)$ .

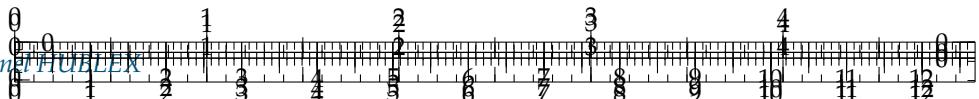
**Question 1** Au regard des exigences du cahier des charges, justifier le choix de ce type de régulateur.

On cherche d'abord à évaluer le temps de réponse vis-à-vis des perturbations.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $T(p) = \frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  entre les perturbations dues à la poussée des passagers et la vitesse du moteur, en fonction des différentes fonctions de transfert de la figure précédente. Montrer que la réponse fréquentielle peut être approchée par la relation :

$$\|T(j\omega)\| = \|H_2(j\omega)\| \cdot \min \left( \|H_1(j\omega)\|, \left\| \frac{1}{R(j\omega)GH_3(j\omega)} \right\| \right)$$





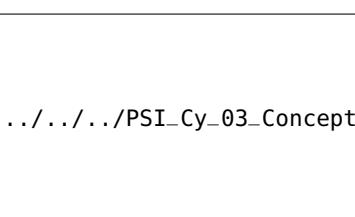
$$= \|H_2(j\omega)\| \|M(j\omega)\|.$$

Pour la suite, on adopte les modèles de commande simplifiés suivants :

$$H_1(p) = \frac{10}{p} \quad H_2(p) = 0,05 \quad H_3(p) = \frac{0,1}{1 + 0,01p} \quad G = 10.$$

Afin de limiter le périmètre de l'étude, on adopte sans justification les hypothèses suivantes :

- $1/T_i < 100 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- la situation considérée est celle de la figure suivante représentant le diagramme asymptotique de la fonction  $\left\| \frac{1}{R(j\omega)GH_3(j\omega)} \right\|_{\text{dB}}$  où  $20 \log G_0 < 0$ .



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_AP\_02\_Porteframway/Images/fig\_02.png

**Question 3** Exprimer  $G_0$  en fonction de  $K_r$ . En utilisant la figure précédente, tracer le diagramme asymptotique de la fonction  $\|H_1(j\omega)\|$  (veiller au respect des pentes) et celui de  $\|M(j\omega)\|$  en adoptant l'approximation de la question précédente.

**Question 4** En déduire alors une approximation de la fonction de transfert  $T(p) = \frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  en exprimant toutes les brisures en fonction de  $K_r$  et  $T_i$ .

**Question 5** Proposer une nouvelle expression approchée de  $T(p)$  sous la forme  $T_a(p) = \frac{N(p)}{1 + \tau p}$  où  $N(p)$  est le numérateur de  $T(p)$ ? En utilisant la forme approchée de  $T_a(p)$ , déterminer l'évolution de la vitesse  $\Omega_1(t)$  en réponse à un échelon de la force de perturbation et tracer son allure.

**Question 6** En se référant à des fonctions types connues donner, en fonction de  $T_i$ , un ordre de grandeur du temps de réponse vis-à-vis de la force perturbatrice.

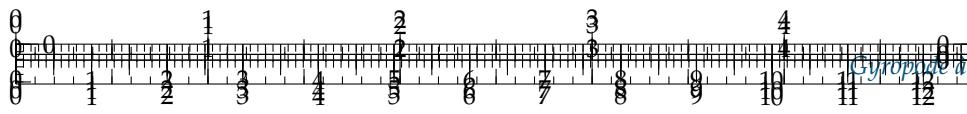
**Question 7** Justifier alors l'intérêt d'adopter pour  $T_i$  la valeur la plus petite possible.

**Question 8** En vous aidant de tracés succincts de diagrammes de Bode, analyser la stabilité du système bouclé dans les deux cas :  $\frac{1}{T_i} > 100 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\frac{1}{T_i} < 100 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 9** En prenant  $K_r = 1$ , tracer les diagrammes de Bode asymptotiques (module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée et l'allure de la courbe réelle du diagramme de phase. Veiller à effectuer ce tracé de façon à respecter une situation stable du système en boucle fermée.

**Question 10** En utilisant la représentation dans le plan de Bode donnée figure suivante, déterminer quelle est la valeur  $T_{i\min}$  la plus petite possible que l'on peut conférer à  $T_i$  compatible avec la marge de phase minimale exigée par le cahier des charges (cette fonction servira uniquement à calculer en plaçant judicieusement pour obtenir la marge de phase souhaitée).

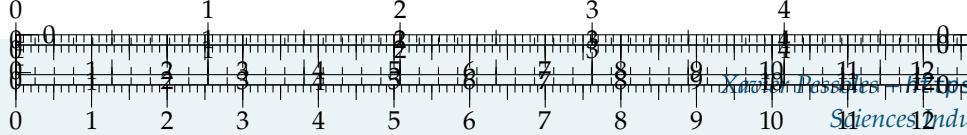




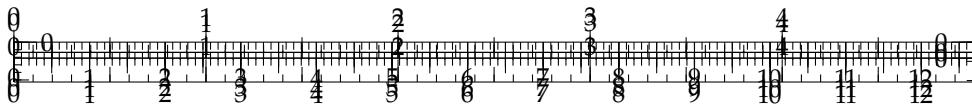
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_AP\_02\_PorteTramway/images/fig\_03.png

**Question 11** En conservant la valeur  $T_{i\min}$  calculée précédemment, en déduire alors la valeur du gain  $K_r$  du régulateur permettant d'assurer la marge de phase souhaitée.

**Question 12** Vérifier si le cahier des charges est validé, et conclure sur l'adéquation du régulateur calculé vis-à-vis du problème posé.







## Colle 5

# Quille pendulaire – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

C1-02

C2-04

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

### Objectif

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

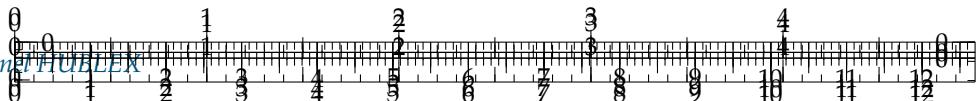
FIGURE 4.18 – Modèle volumique 3D

### Modélisation du vérin

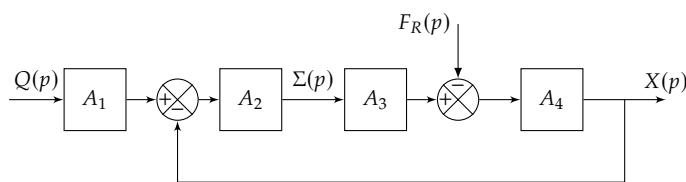
La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit  $q(t)$  proportionnel à sa tension de commande  $v(t)$ . Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servo valves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne





et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$  (a);
- $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$  (b).

On a :

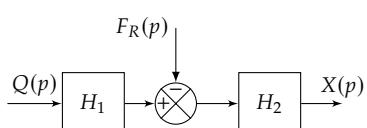
- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$  : débit d'alimentation du vérin [ $m^3 s^{-1}$ ];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$  : différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$  : position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$  : composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

Les constantes sont les suivantes :

- $S$  : section du vérin [ $m^2$ ];
- $k$  : raideur mécanique du vérin [ $N m^{-1}$ ];
- $V$  : volume d'huile de référence [ $m^3$ ];
- $B$  : coefficient de compressibilité de l'huile [ $N m^{-2}$ ];
- $M$  : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];
- $\lambda$  : coefficient de frottement visqueux [ $N m^{-1}s$ ].

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

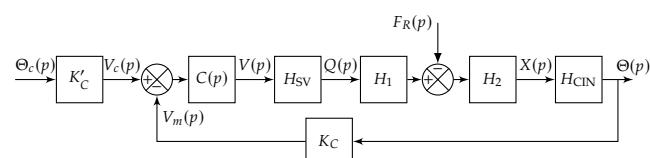
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

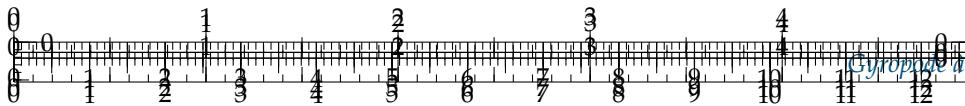
Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par  $F_R(p)$  ne sera pas prise en compte.



On a :

- $\mathcal{L}(\Theta_c(t)) = \Theta_c(p)$  : consigne de position angulaire [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(\Theta(t)) = \Theta(p)$  : position angulaire de la quille [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$  : tension de commande de la servo valve [V];





- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$  : tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$  : tension image de la position [V].

On a de plus :

- $K_c$  : gain du capteur angulaire potentiométrique [V/ $^{\circ}$ ];
- $K'_c$  : gain du bloc d'adaptation réglé tel que  $K'_c = K_c = 1,1 \text{ V}/^{\circ}$ ;
- $C(p)$  : correcteur de position;
- $H_{\text{CIN}}$  : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation.  
 $H_{\text{CIN}} = K_\theta [^{\circ} \cdot \text{m}^{-1}]$ ;
- $H_{\text{SV}}$  : fonction de transfert de la servo valve.

### Comportement pour une commande de faible amplitude

On étudie la réponse du système non corrigé ( $C(p) = 1$ ) à une entrée échelon de  $5^{\circ}$  d'amplitude avec  $F_R = 0$ . Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est :  $H_{\text{BO}}(p) = K_{\text{SV}}H_1H_2K_\theta K_C$  et  $H_{\text{BO}}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$ .

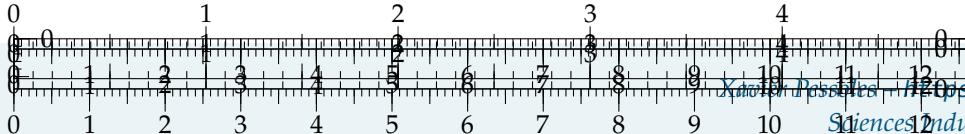
Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de  $5^{\circ}$  d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

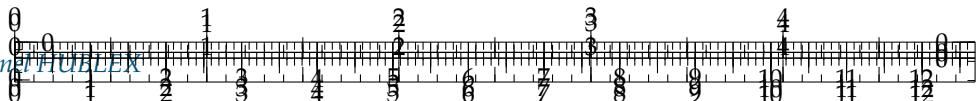
- $C(p) = 1$  : la courbe présente des dépassemens, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée;
- $C(p) = 0,44$  : toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).

À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation générait dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

**Question 4** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{\text{BO}}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.





.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Colle\_RP\_01\_Quille/images/fig\_08.png

**Question 5** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Question 6** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de  $C(p)$  permettant d'abaisser l'amplitude de  $\Delta K$  à la pulsation  $\omega_r$ . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert  $C(p) = K_{COR} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$  avec  $b > 1$ .

Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation  $\omega^*$  tel que :

$$\sin[\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b} \quad \text{et} \quad \omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$$

L'étude consiste à déterminer les valeurs de  $T$  et  $b$ .

**Question 7** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{COR} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

**Question 8** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{dB}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

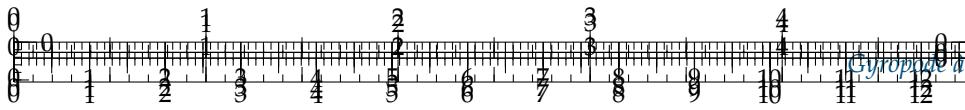
**Question 9** Pour  $K_{COR} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{BO}$  à  $\omega^*$  :

- ▶ calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$  ;
- ▶ calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

### Validation du cahier des charges

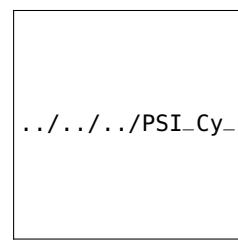
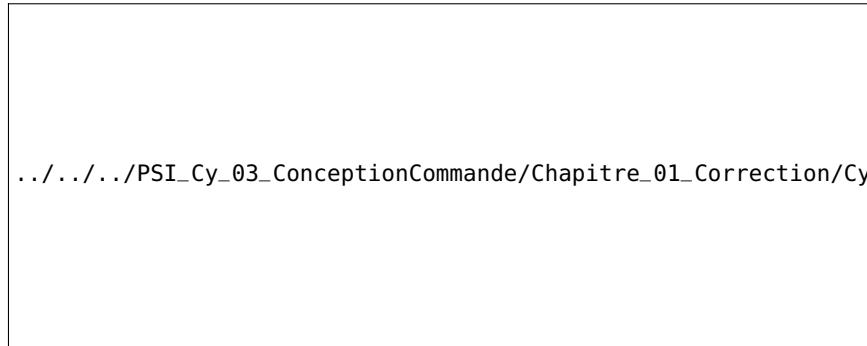
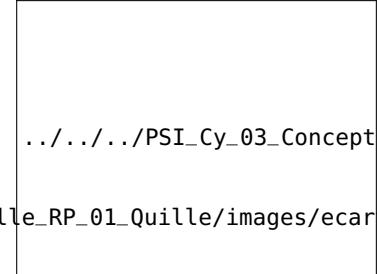
La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain  $K_{COR}$  a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.





**Question 10** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

**Question 11** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Colle\_RP\_01\_Quille/images/ecart.png

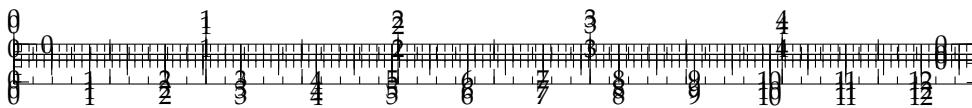
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Colle\_RP\_01\_Quille/images/PositionO

Eléments de correction

1.  $A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S$   
et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .
2.  $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$ .
3.  $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$
4.  $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$ .  
Pour  $t < 1,9 \text{ s}$  : BO et  $t > 1,9 \text{ s}$  : BF.
- 5.
6.  $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$ .
- 7.
- 8.
9.  $\omega_r \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}$ .
10.  $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$ .
- 11.
12.  $-10 \log b$ .
13.  $b = 3,02, T = 0,127 \text{ s}, \phi(\omega^*) \approx -28,79^\circ$ .
14.  $t_5 \% \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s } 4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$ .







## Colle 5

# Quille pendulaire – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

### Mise en situation

#### Objectif

C1-02

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

C2-04

### Modélisation du vérin

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

#### Correction

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace :  $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$  et  $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$ .

En utilisant le schéma-blocs, on a  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$ .

Par ailleurs  $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}p} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$ . On a donc  $A_2 = \frac{S2B}{V}, A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$  soit  $A_1 = \frac{2B}{Vp}\frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}$ .

On a aussi  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$ . Par ailleurs,  $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$ . On a donc :  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$  et  $A_3 = S$ .

Au final,  $A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

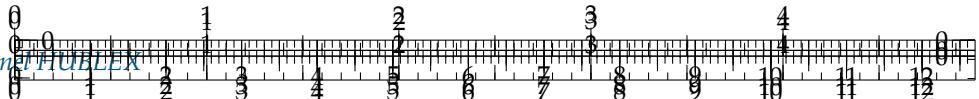
#### Correction

**Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes** On a  $X(p) = (H_1Q(p) - F_R(p))H_2(p)$ .

Par ailleurs, on a vu que  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p))$  et  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p))$ .

On a donc  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2(A_1Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) =$

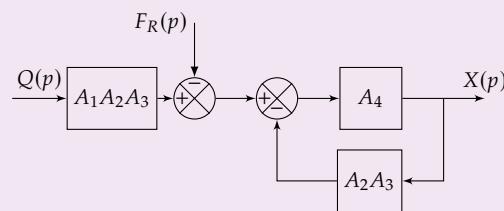




$A_4 (-F_R(p) + A_3 A_2 A_1 Q(p))$ . On a donc  $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$ .

**Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs** Revient à utiliser la méthode précédente.

**Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs** Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$$A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S \text{ et } A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}.$$

$$\begin{aligned} \text{En faisant le calcul on obtient : } H_1(p) &= \frac{2BS}{pV} \text{ et } H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} \\ &= \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}. \end{aligned}$$

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

#### Correction

$$\text{Dans ce cas, } \frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}.$$

### Comportement pour une commande de faible amplitude

**Question 4** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{BO}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

#### Correction

On a :  $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$ . En conséquences,  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,04$  et  $\omega_0 = 5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\frac{2\xi}{\omega_0} = 0,12 \Leftrightarrow \xi = 0,3$ .

On a donc une asymptote de  $-20 \text{ dB/decade}$  pour  $\omega < 5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $-60 \text{ dB/decade}$  pour  $\omega > 5 \text{ rad s}^{-1}$ .

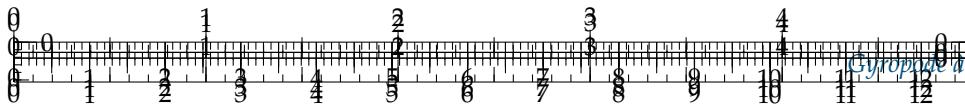
De plus, pour  $\omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$ , on a  $20 \log \frac{2,2}{5} = -7,1 \text{ dB}$ .

**Question 5** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

#### Correction

$$\text{On a } \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = 5 \times \sqrt{1 - 2 \times 0,3^2} \simeq 4,5 \text{ rad s}^{-1}.$$





**Question 6** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

#### Correction

L'amplitude de résonance ne dépend que du système du second ordre. On a alors (résultat de cours sur le second ordre) :  $\Delta K = 20 \log \left( \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \right) = 20 \log \left( \frac{1}{2 \times 0,3\sqrt{1-0,3^2}} \right) = 4,8 \text{ dB.}$

**Question 7** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{\text{COR}} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

#### Correction

On a  $b > 1$  donc  $T < bT$  et  $\frac{1}{T} > \frac{1}{bT}$ .

Pour  $\omega < \frac{1}{bT}$  on a donc un gain de pente nulle et un déphasage nul.

Pour  $\frac{1}{bT} < \omega < \frac{1}{T}$  on a donc un gain de pente  $-20 \text{ dB/decade}$  et un déphasage de  $-180^\circ$ .

Pour  $\omega > \frac{1}{T}$  on a donc un gain de pente  $0 \text{ dB/decade}$  et un déphasage de  $0^\circ$ .

**Question 8** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{\text{dB}}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

#### Correction

$$|C(j\omega^*)|_{\text{dB}} = 10 \log \frac{1 + T^2 \frac{1}{T^2 b}}{1 + b^2 T^2 \frac{1}{T^2 b}} = 10 \log \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + b} = 10 \log \frac{1}{b} \frac{1 + b}{1 + b} = -10 \log b.$$

**Question 9** Pour  $K_{\text{COR}} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{\text{BO}}$  à  $\omega^*$  :

- ▶ calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$  ;
- ▶ calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

#### Correction

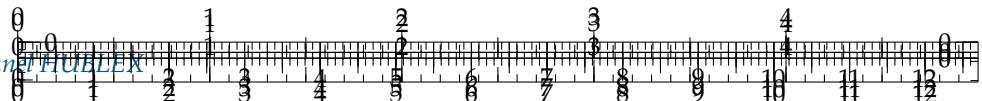
D'une part, on veut que  $|C(j\omega^*)|_{\text{dB}} = -4,8$  soit  $10 \log b = 4,8$  et  $b = 3,02$ . D'autre part,  $\omega^* = \omega_r$  et  $T = \frac{1}{\omega_r \sqrt{b}} = 0,127 \text{ s.}$

Par ailleurs, on a donc  $\phi(\omega^*) = \arcsin \left( \frac{1-b}{1+b} \right) = \arcsin \left( \frac{1-3,02}{1+3,02} \right) \simeq -28,79^\circ.$

## Validation du cahier des charges

**Question 10** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.



**Correction**

En regardant où la courbe a la pente la plus importante, on a approximativement  $2/0,5 \approx 4^\circ/s$ .  
 $t_5 \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$   $4^\circ/s < 8^\circ/s$ .

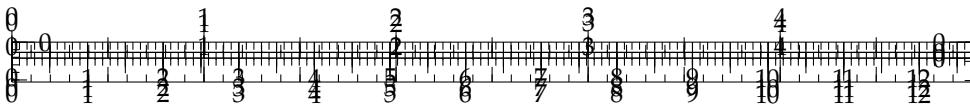
CDCF validé.

**Question 11** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

**Correction**

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_Colle\_RP\_01\_Quil





## TD 13

# Quille pendulaire – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

C1-02

C2-04

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

### Objectif

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

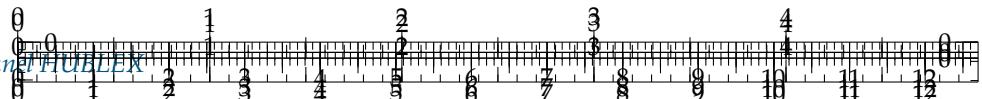
### Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit  $q(t)$  proportionnel à sa tension de commande  $v(t)$ . Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servo valves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

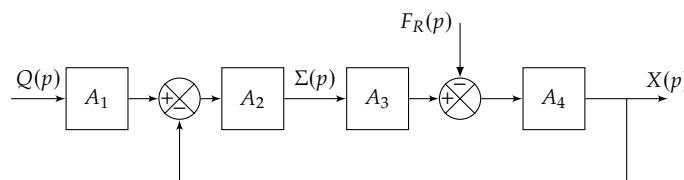
Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne



FIGURE 4.19 – Modèle volumique 3D



et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



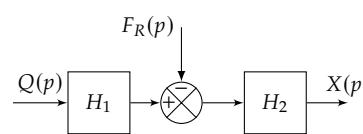
On a :

- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$  : débit d'alimentation du vérin [ $m^3 s^{-1}$ ];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$  : différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$  : position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$  : composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

On a :

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

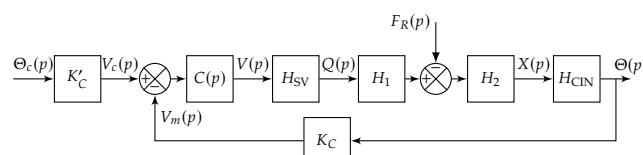
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par  $F_R(p)$  ne sera pas prise en compte.



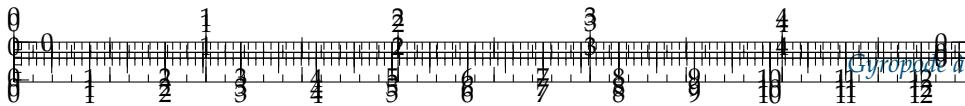
On a :

- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$  : consigne de position angulaire [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$  : position angulaire de la quille [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$  : tension de commande de la servo valve [V];
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$  : tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$  : tension image de la position [V].

On a de plus :

- $K_c$  : gain du capteur angulaire potentiométrique [V/ $^\circ$ ];
- $K'_c$  : gain du bloc d'adaptation réglé tel que  $K'_c = K_c = 1,1$  V/ $^\circ$ ;
- $C(p)$  : correcteur de position;
- $H_{CIN}$  : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation.  $H_{CIN} = K_\theta$  [ $^\circ.m^{-1}$ ];
- $H_{SV}$  : fonction de transfert de la servo valve.





## Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

La servovalve présente un fonctionnement non-linéaire provenant d'un phénomène de saturation qui est défini par la courbe de la figure suivante donnant les évolutions du débit  $q(t)$  fourni par la servovalve en fonction de sa tension de commande  $v(t)$ .

Ainsi :

- pour  $v(t) > -v_{\max}$  et  $v(t) < v_{\max}$  :  $H_{sv} = K_{sv} \left[ \text{m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \right]$
- pour  $v(t) < -v_{\max}$  :  $q(t) = -q_{\max}$ ;
- pour  $v(t) > v_{\max}$  :  $q(t) = +q_{\max}$ ,  $v_{\max} = 10 \text{ V}$ .

Le système n'est pas encore corrigé,  $C(p) = 1$  et on souhaite simuler le fonctionnement où le navigateur veut déplacer la quille avec une consigne angulaire de position de  $45^\circ$ . Cette demande est modélisée par une consigne  $\theta_c(t)$  en échelon, soit :  $\theta_c(t) = \theta_0 u(t)$  avec  $\theta_0 = 45^\circ$  et  $u(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $u(t) = 1$  pour  $t > 0$ . La figure suivante présente dans ces conditions les évolutions temporelles de deux grandeurs de la boucle d'asservissement, le débit sortant de la servo valve  $q(t)$  et la position angulaire de la quille  $\theta(t)$ .

Sur la figure précédente, la courbe représentative de  $q(t)$  présente un palier où  $q(t)$  garde une valeur constante.

**Question 4** À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de  $K_{sv}$ ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

**Question 5** Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

## Comportement pour une commande de faible amplitude

On étudie la réponse du système non corrigé ( $C(p) = 1$ ) à une entrée échelon de  $5^\circ$  d'amplitude avec  $F_R = 0$ . Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est :  $H_{BO}(p) = K_{SV} H_1 H_2 K_\theta K_C$  et  $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$ .

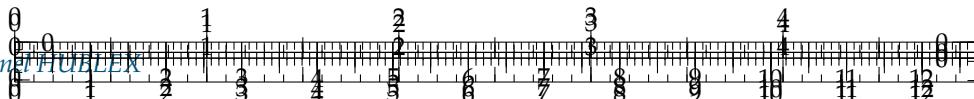
**Question 6** Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension  $v(t)$  à l'instant initial  $t = 0^+$ ,  $v(0^+)$ . Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

**Question 7** De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de  $5^\circ$  d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- $C(p) = 1$  : la courbe présente des dépassemens, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée;
- $C(p) = 0,44$  : toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).





À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation générait dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

**Question 8** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{BO}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

**Question 9** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Question 10** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\bar{\omega}_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de  $C(p)$  permettant d'abaisser l'amplitude de  $\Delta K$  à la pulsation  $\omega_r$ . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert  $C(p) = K_{COR} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$  avec  $b > 1$ .

Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation  $\omega^*$  tel que :

$$\sin [\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b} \text{ et } \omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$$

**Question 11** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{COR} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

**Question 12** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{dB}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

**Question 13** Pour  $K_{COR} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{BO}$  à  $\omega^*$  :

- ▶ calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$ ;
- ▶ calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

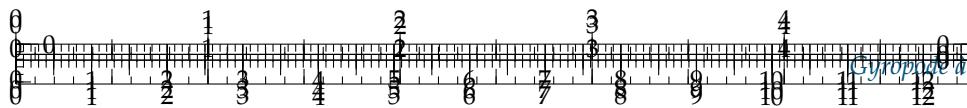
### Validation du cahier des charges

La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain  $K_{COR}$  a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

**Question 14** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

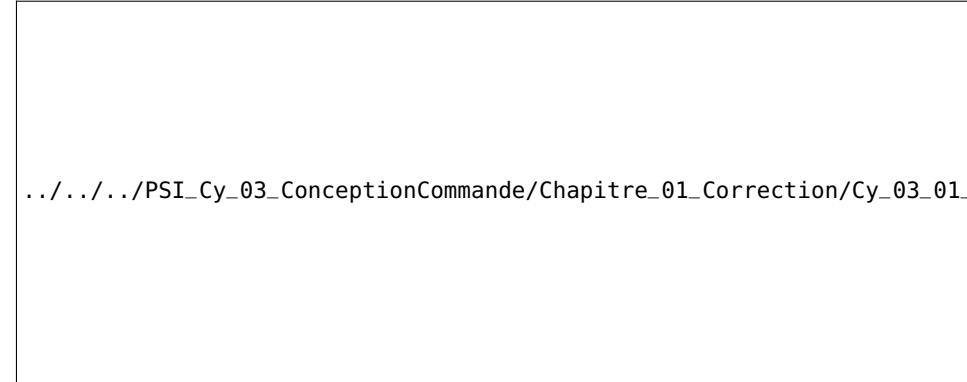
**Question 15** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



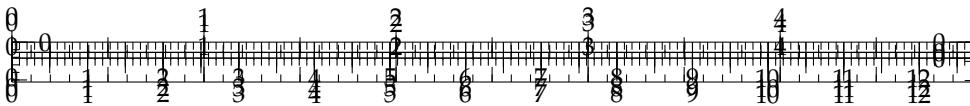


### Éléments de correction

1.  $A_1 = \frac{1}{Sp}$ ,  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .
2.  $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$ .
3.  $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$ .
4.  $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$ . Pour  $t < 1,9 \text{ s}$  : BO et  $t > 1,9 \text{ s}$  : BF.
- 5.
6.  $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$ .
- 7.
- 8.
9.  $\omega_r \simeq 4,5 \text{ rad s}^{-1}$ .
10.  $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$ .
- 11.
12.  $-10 \log b$ .
13.  $b = 3,02$ ,  $T = 0,127 \text{ s}$ ,  $\phi(\omega^*) \simeq -28,79^\circ$ .
14.  $t_{5\%} \simeq 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$   $4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$ .







## TD 13

# Quille pendulaire – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

### Mise en situation

#### Objectif

C1-02

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

C2-04

### Modélisation du vérin

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Concept

#### Correction

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace :  $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$  et  $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$ .

En utilisant le schéma-blocs, on a  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$ .

Par ailleurs  $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}p} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$ . On a donc  $A_2 = \frac{S2B}{V}, A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$  soit  $A_1 = \frac{2B}{Vp}\frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}$ .

On a aussi  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$ . Par ailleurs,  $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$ . On a donc :  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$  et  $A_3 = S$ .

Au final,  $A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .

**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

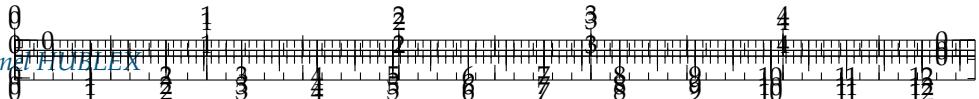
#### Correction

**Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes** On a  $X(p) = (H_1Q(p) - F_R(p))H_2(p)$ .

Par ailleurs, on a vu que  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p))$  et  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p))$ .

On a donc  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2(A_1Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) =$

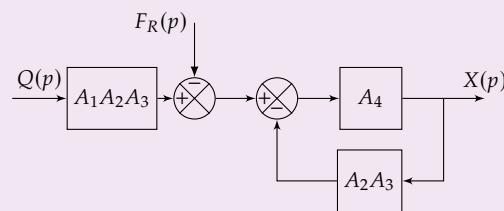




$A_4 (-F_R(p) + A_3 A_2 A_1 Q(p))$ . On a donc  $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$ .

**Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs** Revient à utiliser la méthode précédente.

**Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs** Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$$A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S \text{ et } A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}.$$

$$\begin{aligned} \text{En faisant le calcul on obtient : } H_1(p) &= \frac{2BS}{pV} \text{ et } H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} \\ &= \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}. \end{aligned}$$

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

#### Correction

Dans ce cas,  $\frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda p V + kV + 2BS^2)}$ .

### Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

**Question 4** À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

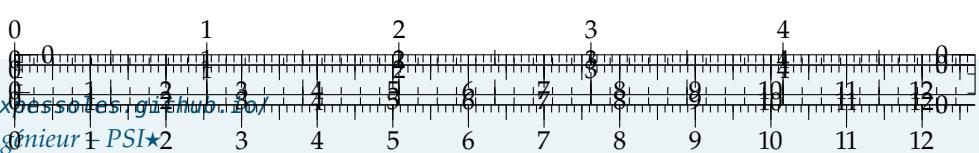
1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de  $K_{SV}$  ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

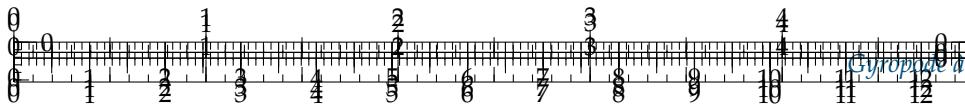
#### Correction

En début de simulation, il y a une saturation du débit à  $20 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1}$ . La tension de commande en régime saturé étant de 10 V, on a  $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$ .

Jusqu'à 1,9 seconde, le retour n'a aucune influence sur la commande. On est donc en BO. Au-delà, la régulation entre en jeu. On est donc en BF.

**Question 5** Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».



**Correction**

Exigences	Niveau	Simulation	Validation
Stabilité : C11 : Marge de gain C12 : Dépassement vis-à-vis d'une entrée en échelon	10 dB Aucun	– Dépassement faible	– NON
Rapidité : C21 : Temps de réponse à 5 % C22 : Vitesse angulaire de rotation de la quille	4 s maxi 8°/s maxi	≈ 2,5 s ≈ 20° s <sup>-1</sup>	OUI NON
Précision C3 : Erreur statique vis-à-vis d'une entrée en échelon	Nulle	Difficile à mesurer	–

**Comportement pour une commande de faible amplitude**

**Question 6** Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension  $v(t)$  à l'instant initial  $t = 0^+$ ,  $v(0^+)$ . Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

**Correction**

En BO, on va avoir  $v(0^+) = 5 \cdot K'_C = 5,5 \text{ V}$ .  
 $v(0^+) < 10 \text{ V}$ . On est ici en BO. La tension ne peut donc pas dépasser la tension de saturation.

**Question 7** De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

**Correction**

Pour de telles tension, on est donc en régime linéaire.

**Question 8** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{\text{BO}}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

**Correction**

On a :  $H_{\text{BO}}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$ . En conséquences,  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,04$  et  $\omega_0 = 5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\frac{2\xi}{\omega_0} = 0,12 \Leftrightarrow \xi = 0,3$ .

On a donc une asymptote de  $-20 \text{ dB/decade}$  pour  $\omega < 5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $-60 \text{ dB/decade}$  pour  $\omega > 5 \text{ rad s}^{-1}$ .

De plus, pour  $\omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$ , on a  $20 \log \frac{2,2}{5} = -7,1 \text{ dB}$ .

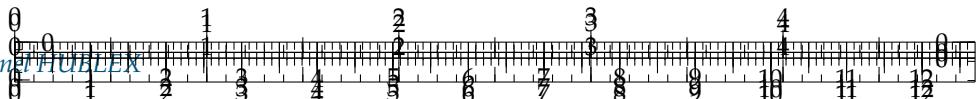
**Question 9** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Correction**

On a  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = 5 \times \sqrt{1 - 2 \times 0,3^2} \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 10** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la





différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

#### Correction

L'amplitude de résonance ne dépend que du système du second ordre. On a alors (résultat de cours sur le second ordre) :  $\Delta K = 20 \log \left( \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \right) = 20 \log \left( \frac{1}{2 \times 0,3\sqrt{1-0,3^2}} \right) = 4,8 \text{ dB.}$

**Question 11** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{\text{COR}} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

#### Correction

On a  $b > 1$  donc  $T < bT$  et  $\frac{1}{T} > \frac{1}{bT}$ .

Pour  $\omega < \frac{1}{bT}$  on a donc un gain de pente nulle et un déphasage nul.

Pour  $\frac{1}{bT} < \omega < \frac{1}{T}$  on a donc un gain de pente -20 dB/decade et un déphasage de  $-180^\circ$ .

Pour  $\omega > \frac{1}{T}$  on a donc un gain de pente 0 dB/decade et un déphasage de  $0^\circ$ .

**Question 12** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{\text{dB}}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

#### Correction

$$|C(j\omega^*)|_{\text{dB}} = 10 \log \frac{1 + T^2 \frac{1}{T^2 b}}{1 + b^2 T^2 \frac{1}{T^2 b}} = 10 \log \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + b} = 10 \log \frac{1}{b} \frac{1+b}{1+b} = -10 \log b.$$

**Question 13** Pour  $K_{\text{COR}} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{\text{BO}}$  à  $\omega^*$  :

- ▶ calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$  ;
- ▶ calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

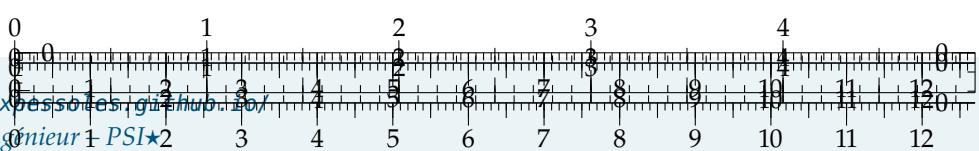
#### Correction

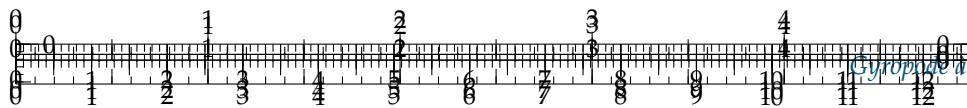
D'une part, on veut que  $|C(j\omega^*)|_{\text{dB}} = -4,8$  soit  $10 \log b = 4,8$  et  $b = 3,02$ . D'autre part,  $\omega^* = \omega_r$  et  $T = \frac{1}{\omega_r \sqrt{b}} = 0,127 \text{ s.}$

Par ailleurs, on a donc  $\phi(\omega^*) = \arcsin \left( \frac{1-b}{1+b} \right) = \arcsin \left( \frac{1-3,02}{1+3,02} \right) \simeq -28,79^\circ.$

## Validation du cahier des charges

**Question 14** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.





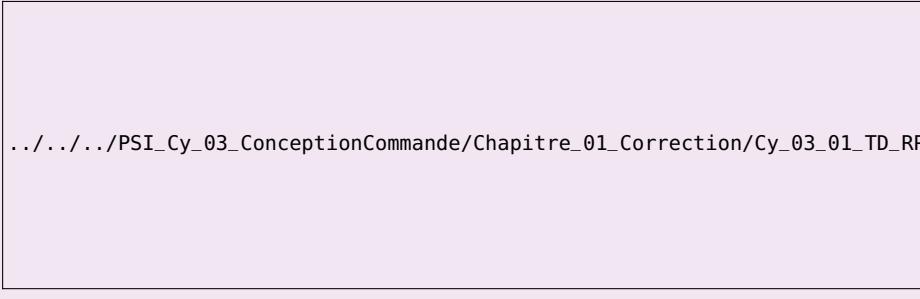
### Correction

En regardant où la courbe a la pente la plus importante, on a approximativement  $2/0,5 \approx 4^\circ/s$ .  
 $t_5\% \approx 2,3\text{ s} < 4\text{ s}$   $4^\circ/s < 8^\circ/s$ .

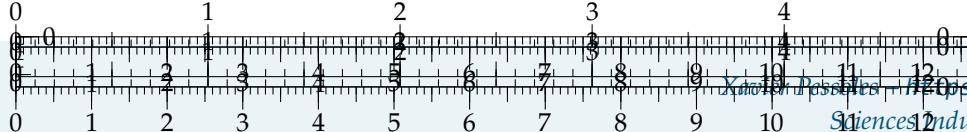
CDCF validé.

**Question 15** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

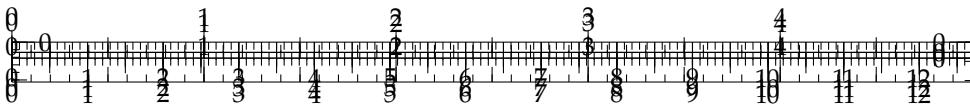
### Correction



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_RP\_01\_Quille/images/ecart\_cor.png







## TD 14

# La robotique au service du handicap – Sujet

Centrale Supélec – PSI 2010.

### Synthèse d'une loi de commande pour l'exosquelette

#### Objectif

L'objectif de cette partie est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force pré-déterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion. La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

C1-02

C2-04

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Co

Le cahier des charges est rappelé partiellement par les exigences données dans le tableau suivant. Les actionneurs peuvent fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent.

La structure des axes étudiés est donnée dans la figure ci-contre.

On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras ( $\gamma, \delta$ ) et de la variation de force  $Z_F$  exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs ( $K_1, K_2$ ).

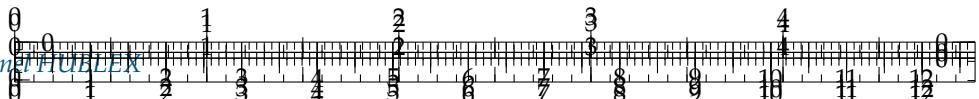
Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs ( $K_1, K_2$ ) de maintien (pour ce critère, seule la force $Z_F$ est considérée)	$ \Delta Z_F / \Delta \gamma  = K_1 > 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$ $ \Delta Z_F / \Delta \delta  = K_2 > 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- $q$  et  $\dot{q}$  sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations ;





- ▶ une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail;
- ▶ une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire;
- ▶ un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence  $C_a = C_{\text{ref}}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Commande\_01\_Robotique/images/fig\_04

## Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

### Objectif

Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

L'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité  $B$  de l'avant-bras et définie par :  $\{\mathcal{T}(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$ .

L'action du premier actionneur sur le solide {Bras} :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{array} \right\}_O$  où le couple  $C_1(t)$  exercé est connu au cours du temps. Les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées :

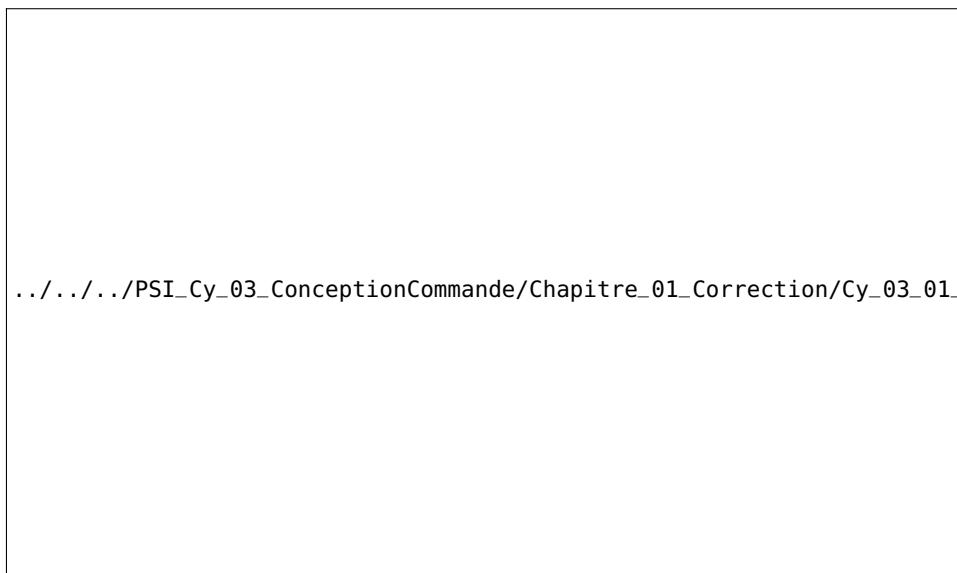
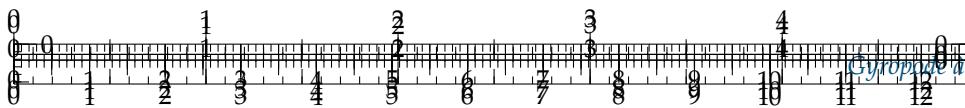
$\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  et  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  où le couple  $C_2(t)$  exercé est connu au cours du temps.

En utilisant le PFD on peut établir les lois de commandes suivantes pour piloter chacun des deux axes :

$$\begin{aligned} C_1(t) = & (B_1 + B_2 + m_1 \lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 \lambda_2^2) \ddot{\gamma} + (B_2 + m_2 \lambda_2^2) \ddot{\delta} \\ & + m_2 l_1 (\lambda_2 (2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2) \sin \delta) \\ & + m_1 g \lambda_1 \sin \gamma + m_2 g (l_1 \sin \gamma + \lambda_2 \sin (\gamma + \delta)) \\ & - X_F (l_1 \cos \gamma + l_2 \cos (\gamma + \delta)) + Z_F (l_1 \sin \gamma + l_2 \sin (\gamma + \delta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2(t) = & -l_2 X_F \cos (\gamma + \delta) + l_2 Z_F \sin (\gamma + \delta) + \lambda_2 m_2 g \sin (\gamma + \delta) \\ & + \ddot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) \\ & + \ddot{\delta} (B_2 + m_2 \lambda_2^2) + m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta \end{aligned}$$





Montrer que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Z_F \end{pmatrix}$  où  $C$  est un vecteur et  $A$ ,  $B$  et  $Q$  sont des matrices  $2 \times 2$  que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement ( $\gamma, \delta$ ) et de leurs dérivées premières ( $\dot{\gamma}, \dot{\delta}$ ).

**Question 1** Calculer les couples ( $C_1, C_2$ ) exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ( $X_F = 0, Z_F = 0$ ) et dans une position statique. Discuter de la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 2** Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

## Synthèse d'une loi de commande « deux axes »

### Objectif

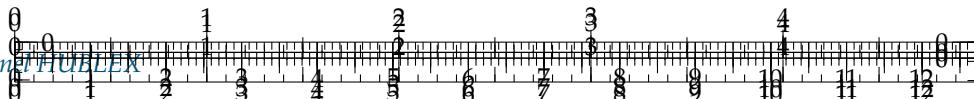
L'objectif de cette partie est de déterminer une loi de commande afin que la relation entre les variations des positions  ${}^t(\gamma, \delta)$  du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force  $Z_F$  exercée par le patient soit celle d'une raideur en torsion de valeurs ( $K_1; K_2$ ) données dans le cahier des charges. La raideur comparativement à la force  $X_F$  ne sera pas à vérifier dans ce cas d'étude.

L'équation dynamique décrivant le comportement de l'exosquelette est de la forme  $A(q, \dot{q})\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q}) + Q(q, \dot{q})F = C_a$  où  $C_a = {}^t(C_1 \quad C_2)$ ,  $q = {}^t(\gamma \quad \delta)$  et  $F = {}^t(X_F \quad Z_F)$ . On note sous forme vectorielle  $q_{\text{ref}} = {}^t(\gamma_{\text{ref}} \quad \delta_{\text{ref}})$  les consignes de positions angulaires. La loi de commande adoptée est organisée selon deux boucles :

- ▶ une boucle externe linéaire ;
- ▶ une boucle interne non linéaire qui détermine le couple  $C_a$  par la relation  $C_a = B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q}) + A(q, \dot{q})U$ .

où  $U = {}^t(U_1 \quad U_2)$  sont les deux nouvelles commandes issues du correcteur linéaire de la boucle externe.





Le principe de cette loi de commande est donné par la structure représentée par le schéma suivant.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

**Question 3** Donner au moins un argument en faveur vis à vis du caméra des charges souhaité, de l'intérêt de la boucle interne correspondant à la loi non linéaire donnée précédemment.

Pour la synthèse de la loi de commande, il est nécessaire de linéariser le modèle dynamique autour d'un point de fonctionnement défini par les positions articulaires  ${}^t(\gamma_0 \quad \delta_0)$  et les forces  ${}^t(X_{F0} \quad Z_{F0})$ . On note autour de ce point de fonctionnement :

- $u = {}^t(u_1 \quad u_2)$  les variations des grandeurs de commande autour de  $U_0 = {}^t(U_{10} \quad U_{20})$ ;
- $q_1 = {}^t(\gamma_1 \quad \delta_1)$  les variations des positions angulaires des deux articulations autour de  $q_0 = {}^t(\gamma_0 \quad \delta_0)$ ;
- $f = {}^t(x_F \quad z_F)$  les variations des efforts exercés par le patient autour de  $F_0 = {}^t(X_{F0} \quad Z_{F0})$ .

En utilisant la loi correspondant à la boucle interne, le modèle dynamique peut-être réécrit selon la forme  $\ddot{q} = U + N(q, \dot{q}, F)$ , où  $N(q, \dot{q}, F) = M(q, \dot{q})F$ .

**Question 4** Préciser l'expression de la matrice  $M$  en fonction de  $A$  et de  $Q$ .

**Question 5** Donner, par exemple sous forme algorithmique, une démarche permettant de linéariser le modèle dynamique selon la forme  $\ddot{q}_1 = \tilde{A}q_1 + \tilde{B}\dot{q}_1 + \tilde{G}u + \tilde{H}f$  où  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{G}$  et  $\tilde{H}$  sont des matrices constantes, éventuellement dépendantes du point de fonctionnement.

Indication : la démarche de linéarisation fait intervenir  $\frac{\partial N}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial \dot{q}}$  et  $\frac{\partial N}{\partial F}$ ; l'expression explicite du modèle linéarisé en fonction de  $M$  n'est pas demandée.

On admet pour la suite que le modèle linéarisé, décrivant les variations des positions  ${}^t(\gamma_1 \quad \delta_1)$  du bras, autour du point de fonctionnement  $q_0 = {}^t(0, 60, 7)$  rad et  $F_0 = {}^t(0 \quad -5)$  N, est représenté par le système d'équations différentielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\gamma}_1 \\ \ddot{\delta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18,4 & -33 \\ 4 & -56,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3,9 \\ -45,4 \end{pmatrix} z_F.$$

On note  $q_{1\text{ref}} = {}^t(\gamma_{\text{ref}}, \delta_{\text{ref}})$  les variations de consignes de position. L'objectif des questions suivantes est la synthèse d'une loi de commande linéaire en vue d'assurer la raideur souhaitée entre les variations des positions  ${}^t(\gamma_1, \delta_1)$  des deux articulations et la variation de l'effort  $z_F$  exercé par le patient. L'adaptation de la loi de commande au point de fonctionnement ne fait pas partie du cadre de cette étude.

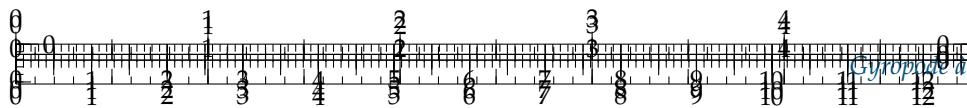
**Question 6** En justifiant la réponse, étudier la stabilité du modèle donné ci-dessus.

**Question 7** En utilisant un raisonnement qualitatif (sans calcul), et en supposant que le système bouclé est stable, justifier qu'une régulation de type proportionnelle-intégrale (sur chaque composante des positions du bras) :  $\frac{U_1(p)}{\varepsilon_1(p)} = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right)$

et  $\frac{U_2(p)}{\varepsilon_2(p)} = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_2 p}\right)$  où  $\varepsilon_1(p) = \gamma_{1\text{ref}} - \gamma_1$  et  $\varepsilon_2(p) = \delta_{1\text{ref}} - \delta_1$  sont les écarts sur chaque axe d'articulation étudié, ne permet pas d'assurer l'objectif escompté, c'est-à-dire un comportement de type raideur entre les variations des positions  $\gamma_1$  et  $\delta_1$ , du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force  $z_F$  exercée par le patient.

Pour la suite, on adopte la loi de commande  $u(t) = K_p (q_{1\text{ref}} - q_1) + K_v (\dot{q}_{1\text{ref}} - \dot{q}_1)$  avec :





$$K_p = \begin{pmatrix} k_{p11} & k_{p12} \\ k_{p21} & k_{p22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_v = \begin{pmatrix} k_{v11} & k_{v12} \\ k_{v21} & k_{v22} \end{pmatrix}.$$

Par souci de simplicité, on pourra utiliser  $q_{1\text{ref}} = 0$  et  $\dot{q}_{1\text{ref}} = 0$ .

**Question 8** Déterminer les coefficients des matrices  $K_p$  et  $K_v$  afin que le comportement entrée-sortie entre les positions du bras et de l'avant bras, et les forces exercées par le patient, soit celui de fonctions du deuxième ordre :  $\frac{\gamma_1(p)}{Z_F(p)} = \frac{K_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_1}p + \frac{p^2}{\omega_1^2}}$  et

$$\frac{\delta_1(p)}{Z_F(p)} = \frac{K_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_2}p + \frac{p^2}{\omega_2^2}}$$

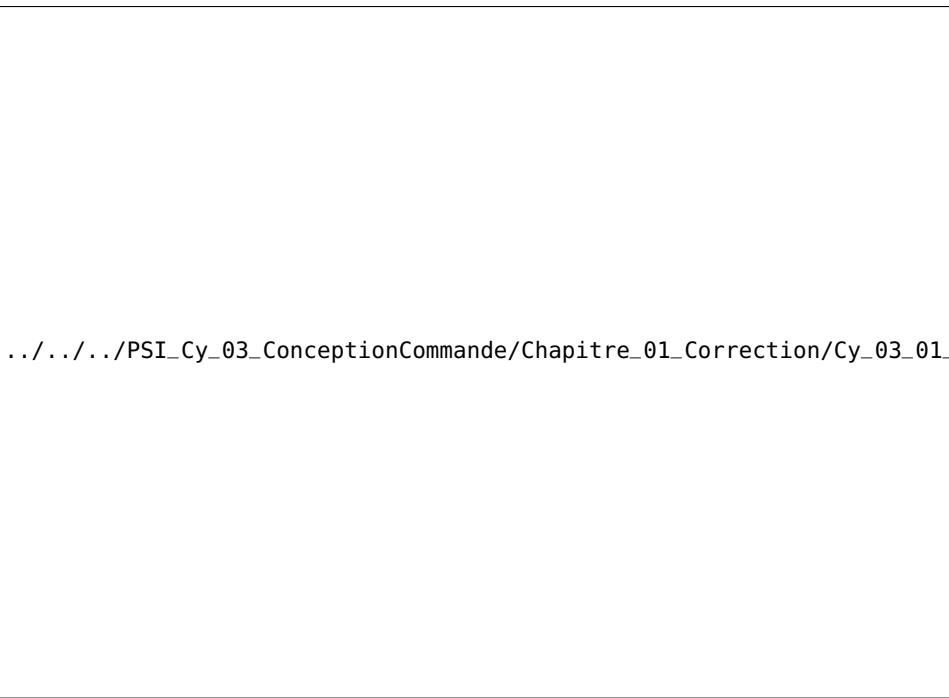
permettant d'obtenir les valeurs des raideurs souhaitées et caractérisées par un coefficient d'amortissement  $\xi = 0,7$ . Justifier alors que la bande passante ne peut pas être choisie d'une manière arbitraire.

Les figures suivantes montrent un ensemble de résultats correspondant à deux types d'essais :

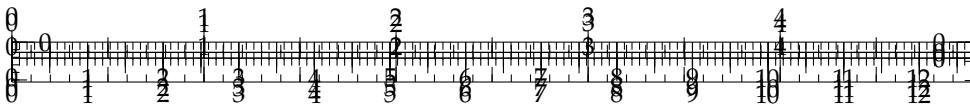
- ▶ pour le réglage de la loi de commande correspondant à celui de la question précédente, la première figure suivante montre les évolutions des positions angulaires du bras et de l'avant-bras (à partir du point de fonctionnement  ${}^t(0, 6 \quad 0, 7) \text{ rad}$ ) et des couples sur les axes des articulations, en réponse à une variation intervenant à  $t_0 = 1 \text{ s}$  de la force  $Z_F = \Delta Z_F = -1 \text{ N}$ ;
- ▶ la seconde figure montre le ralliement à une position de référence avec des efforts constants,  $X_F = 50 \text{ N}$  et  $Z_F = -50 \text{ N}$  en partant de conditions initiales nulles.

**Question 9** Commenter ces courbes et conclure sur l'adéquation de la loi de commande proposée comparativement au cahier des charges.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception







## TD 14

# La robotique au service du handicap – Corrigé

Centrale Supélec – PSI 2010.

### Synthèse d'une loi de commande pour l'exosquelette

#### Objectif

C1-02

C2-04

L'objectif de cette partie est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force pré-déterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion. La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

Le cahier des charges est rappelé partiellement par les exigences données dans le tableau suivant. Les actionneurs peuvent fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent.

La structure des axes étudiés est donnée dans la figure ci-contre.

On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras  $(\gamma, \delta)$  et de la variation de force  $Z_F$  exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs ( $K_1, K_2$ ).

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Co

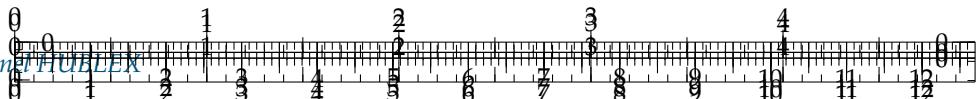
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs ( $K_1, K_2$ ) de maintien (pour ce critère, seule la force $Z_F$ est considérée)	$ \Delta Z_F / \Delta \gamma  = K_1 > 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$ $ \Delta Z_F / \Delta \delta  = K_2 > 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$

La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- $q$  et  $\dot{q}$  sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations ;





- ▶ une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail;
- ▶ une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire;
- ▶ un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence  $C_a = C_{\text{ref}}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Commande\_01\_Robotique/images/fig\_04

## Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

### Objectif

Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

L'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité  $B$  de l'avant-bras et définie par :  $\{\mathcal{T}(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$ .

L'action du premier actionneur sur le solide {Bras} :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{array} \right\}_O$  où le couple  $C_1(t)$  exercé est connu au cours du temps. Les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées :

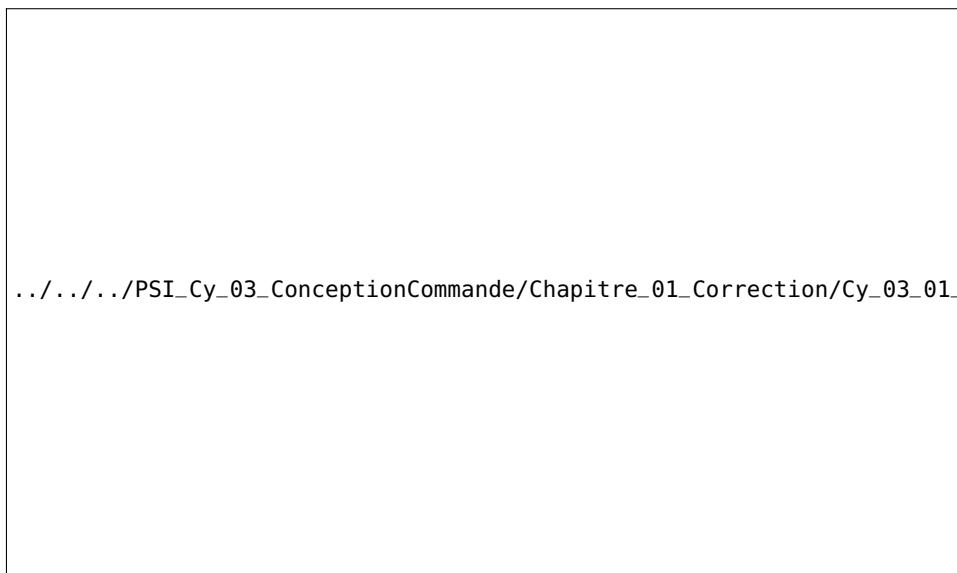
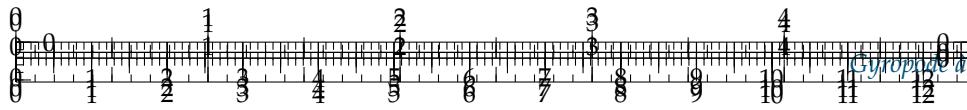
$\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  et  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  où le couple  $C_2(t)$  exercé est connu au cours du temps.

En utilisant le PFD on peut établir les lois de commandes suivantes pour piloter chacun des deux axes :

$$\begin{aligned} C_1(t) = & (B_1 + B_2 + m_1 \lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 \lambda_2^2) \ddot{\gamma} + (B_2 + m_2 \lambda_2^2) \ddot{\delta} \\ & + m_2 l_1 (\lambda_2 (2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2) \sin \delta) \\ & + m_1 g \lambda_1 \sin \gamma + m_2 g (l_1 \sin \gamma + \lambda_2 \sin (\gamma + \delta)) \\ & - X_F (l_1 \cos \gamma + l_2 \cos (\gamma + \delta)) + Z_F (l_1 \sin \gamma + l_2 \sin (\gamma + \delta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2(t) = & -l_2 X_F \cos (\gamma + \delta) + l_2 Z_F \sin (\gamma + \delta) + \lambda_2 m_2 g \sin (\gamma + \delta) \\ & + \ddot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) \\ & + \ddot{\delta} (B_2 + m_2 \lambda_2^2) + m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta \end{aligned}$$





Montrer que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Z_F \end{pmatrix}$  où  $C$  est un vecteur et  $A$ ,  $B$  et  $Q$  sont des matrices  $2 \times 2$  que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement  $(\gamma, \delta)$  et de leurs dérivées premières  $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$ .

#### Correction

**Question 1** Calculer les couples  $(C_1, C_2)$  exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ( $X_F = 0, Z_F = 0$ ) et dans une position statique. Discuter de la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

#### Correction

**Question 2** Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

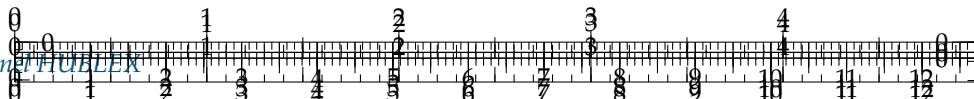
#### Correction

### Synthèse d'une loi de commande « deux axes »

#### Objectif

L'objectif de cette partie est de déterminer une loi de commande afin que la relation entre les variations des positions  $t$  ( $\gamma, \delta$ ) du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force  $Z_F$  exercée par le patient soit celle d'une raideur en torsion de valeurs  $(K_1; K_2)$  données dans le cahier des charges. La raideur comparativement à la force  $X_F$  ne sera pas à vérifier dans ce cas d'étude.





L'équation dynamique décrivant le comportement de l'exosquelette est de la forme  $A(q, \dot{q})\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q}) + Q(q, \dot{q})F = C_a$  où  $C_a = {}^t(C_1 \quad C_2)$ ,  $q = {}^t(\gamma \quad \delta)$  et  $F = {}^t(X_F \quad Z_F)$ . On note sous forme vectorielle  $q_{\text{ref}} = {}^t(\gamma_{\text{ref}} \quad \delta_{\text{ref}})$  les consignes de positions angulaires. La loi de commande adoptée est organisée selon deux boucles :

- ▶ une boucle externe linéaire ;
- ▶ une boucle interne non linéaire qui détermine le couple  $C_a$  par la relation  $C_a = B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q}) + A(q, \dot{q})U$ .

où  $U = {}^t(U_1 \quad U_2)$  sont les deux nouvelles commandes issues du correcteur linéaire de la boucle externe.

Le principe de cette loi de commande est donné par la structure représentée par le schéma suivant.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

Question 3 Donner la correction Cy\_03\_01\_Tp\_Commande\_v01\_Robotique\_mechaniques/fig\_07

charges souhaité, de l'intérêt de la boucle interne correspondant à la loi non linéaire donnée précédemment.

Pour la synthèse de la loi de commande, il est nécessaire de linéariser le modèle dynamique autour d'un point de fonctionnement défini par les positions articulaires  ${}^t(\gamma_0 \quad \delta_0)$  et les forces  ${}^t(X_{F0} \quad Z_{F0})$ . On note autour de ce point de fonctionnement :

- ▶  $u = {}^t(u_1 \quad u_2)$  les variations des grandeurs de commande autour de  $U_0 = {}^t(U_{10} \quad U_{20})$  ;
- ▶  $q_1 = {}^t(\gamma_1 \quad \delta_1)$  les variations des positions angulaires des deux articulations autour de  $q_0 = {}^t(\gamma_0 \quad \delta_0)$  ;
- ▶  $f = {}^t(x_F \quad z_F)$  les variations des efforts exercés par le patient autour de  $F_0 = {}^t(X_{F0} \quad Z_{F0})$ .

En utilisant la loi correspondant à la boucle interne, le modèle dynamique peut-être réécrit selon la forme  $\ddot{q} = U + N(q, \dot{q}, F)$ , où  $N(q, \dot{q}, F) = M(q, \dot{q})F$ .

**Question 4** Préciser l'expression de la matrice  $M$  en fonction de  $A$  et de  $Q$ .

#### Correction

**Question 5** Donner, par exemple sous forme algorithmique, une démarche permettant de linéariser le modèle dynamique selon la forme  $\ddot{q}_1 = \tilde{A}q_1 + \tilde{B}\dot{q}_1 + \tilde{G}u + \tilde{H}f$  où  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{G}$  et  $\tilde{H}$  sont des matrices constantes, éventuellement dépendantes du point de fonctionnement.

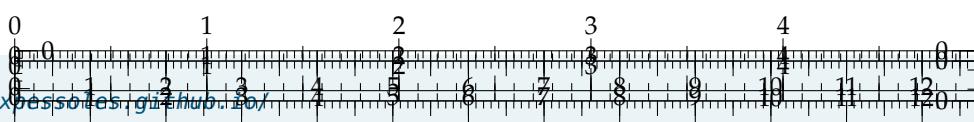
#### Correction

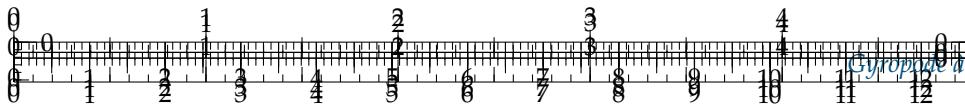
Indication : la démarche de linéarisation fait intervenir  $\frac{\partial N}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial \dot{q}}$  et  $\frac{\partial N}{\partial F}$ ; l'expression explicite du modèle linéarisé en fonction de  $M$  n'est pas demandée.

On admet pour la suite que le modèle linéarisé, décrivant les variations des positions  ${}^t(\gamma_1 \quad \delta_1)$  du bras, autour du point de fonctionnement  $q_0 = {}^t(0, 60, 7)$  rad et  $F_0 = {}^t(0 \quad -5)$  N, est représenté par le système d'équations différentielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\gamma}_1 \\ \ddot{\delta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18,4 & -33 \\ 4 & -56,5 \ddot{\delta}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3,9 \\ -45,4 \end{pmatrix} z_F.$$

On note  $q_{1\text{ref}} = {}^t(\gamma_{\text{ref}}, \delta_{\text{ref}})$  les variations de consignes de position. L'objectif des questions suivantes est la synthèse d'une loi de commande linéaire en vue d'assurer la





raideur souhaitée entre les variations des positions  ${}^t(\gamma_1, \delta_1)$  des deux articulations et la variation de l'effort  $Z_F$  exercé par le patient. L'adaptation de la loi de commande au point de fonctionnement ne fait pas partie du cadre de cette étude.

**Question 6** En justifiant la réponse, étudier la stabilité du modèle donné ci-dessus.

#### Correction

**Question 7** En utilisant un raisonnement qualitatif (sans calcul), et en supposant que le système bouclé est stable, justifier qu'une régulation de type proportionnelle-intégrale (sur chaque composante des positions du bras) :  $\frac{U_1(p)}{\varepsilon_1(p)} = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right)$  et  $\frac{U_2(p)}{\varepsilon_2(p)} = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_2 p}\right)$  où  $\varepsilon_1(p) = \gamma_{1\text{ref}} - \gamma_1$  et  $\varepsilon_2(p) = \delta_{1\text{ref}} - \delta_1$  sont les écarts sur chaque axe d'articulation étudié, ne permet pas d'assurer l'objectif escompté, c'est-à-dire un comportement de type raideur entre les variations des positions  $\gamma_1$  et  $\delta_1$ , du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force  $Z_F$  exercée par le patient.

#### Correction

Pour la suite, on adopte la loi de commande  $u(t) = K_p (q_{1\text{ref}} - q_1) + K_v (\dot{q}_{1\text{ref}} - \dot{q}_1)$  avec :

$$K_p = \begin{pmatrix} k_{p11} & k_{p12} \\ k_{p21} & k_{p22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_v = \begin{pmatrix} k_{v11} & k_{v12} \\ k_{v21} & k_{v22} \end{pmatrix}.$$

Par souci de simplicité, on pourra utiliser  $q_{1\text{ref}} = 0$  et  $\dot{q}_{1\text{ref}} = 0$ .

**Question 8** Déterminer les coefficients des matrices  $K_p$  et  $K_v$  afin que le comportement entrée-sortie entre les positions du bras et de l'avant bras, et les forces exercées par le patient, soit celui de fonctions du deuxième ordre :  $\frac{\gamma_1(p)}{Z_F(p)} = \frac{K_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_1}p + \frac{p^2}{\omega_1^2}}$  et

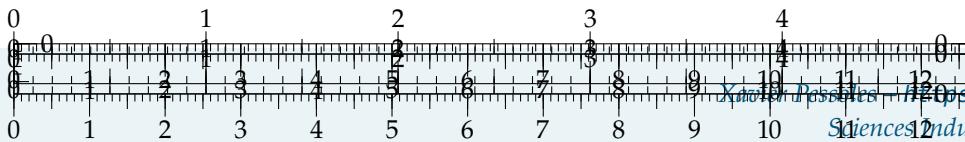
$$\frac{\delta_1(p)}{Z_F(p)} = \frac{K_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_2}p + \frac{p^2}{\omega_2^2}}$$

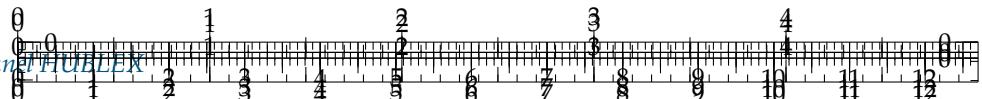
permettant d'obtenir les valeurs des raideurs souhaitées et caractérisées par un coefficient d'amortissement  $\xi = 0,7$ . Justifier alors que la bande passante ne peut pas être choisie d'une manière arbitraire.

#### Correction

Les figures suivantes montrent un ensemble de résultats correspondant à deux types d'essais :

- ▶ pour le réglage de la loi de commande correspondant à celui de la question précédente, la première figure suivante montre les évolutions des positions angulaires du bras et de l'avant-bras (à partir du point de fonctionnement  ${}^t(0, 6 \ 0, 7)$  rad) et des couples sur les axes des articulations, en réponse à une variation intervenant à  $t_0 = 1$  s de la force  $Z_F = \Delta Z_F = -1$  N;
- ▶ la seconde figure montre le ralliement à une position de référence avec des efforts constants,  $X_F = 50$  N et  $Z_F = -50$  N en partant de conditions initiales nulles.



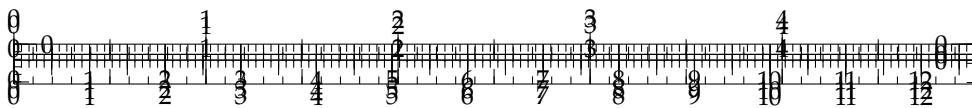


**Question 9** Commenter ces courbes et conclure sur l'adéquation de la loi de commande proposée comparativement au cahier des charges.

**Correction**

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Commande





## TD 15

# Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles – Sujet

CCP – PSI 2015.

### Présentation

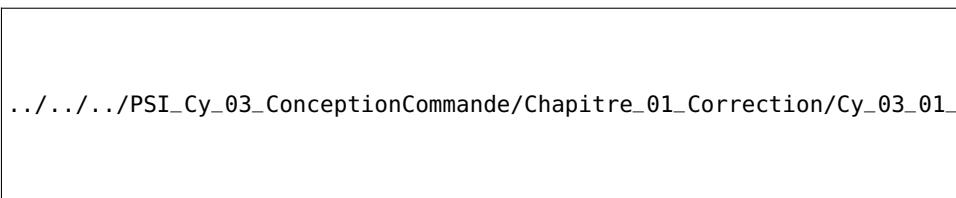
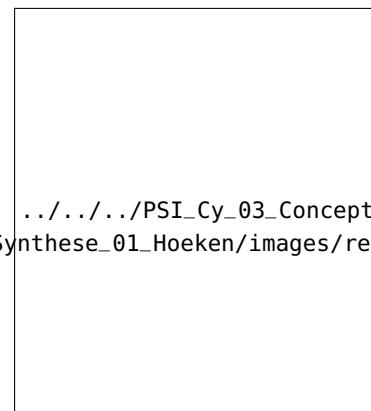
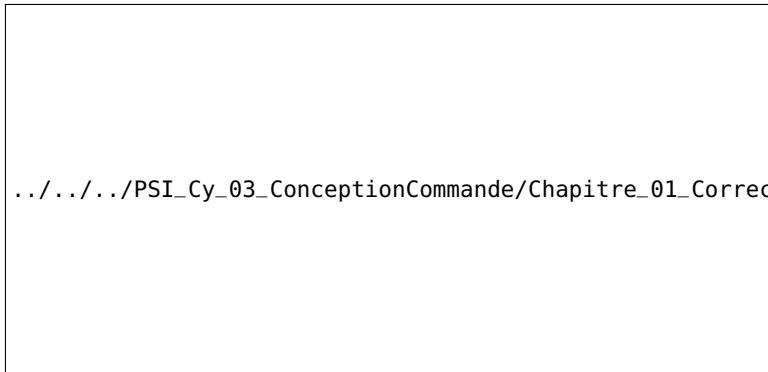
#### Réalisation de la commande de l'esclave

C1-02

C2-04

##### Objectif

Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).



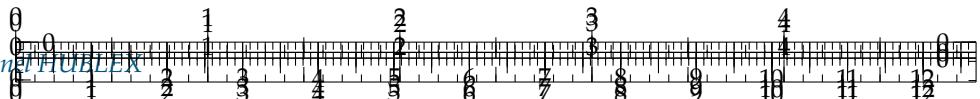
#### Modélisation et étude des performances du système sans correction

##### Objectif

Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

La modélisation permettant de relier la consigne  $x_m(t)$  issue du dispositif maître au déplacement  $x_v(t)$  de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.





.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_01\_Hoeken/images/fig\_03.png

- $H_{ad}(p) = k_a = 1 \text{ Nm}^{-1}$  permet d'adapter la consigne position en consigne force;
- $H_S(p) = \frac{X_S(p)}{F_S(p)} = \frac{k_S}{p(m_S p + b_S)}$  avec  $k_S = 1 \text{ m N}^{-1}$ ,  $m_S = 0,152 \text{ kg}$  et  $b_S = 1,426 \text{ Nsm}^{-1}$ ;
- $k_e = 200 \text{ N m}^{-1}$ .

**Question 1** Simplifier le schéma-blocs précédent pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer  $H_t(p)$  et  $H(p)$  en fonction de  $k_e$ ,  $k_a$  et  $H_S(p)$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_01\_Hoeken/images/fig\_03.png

**Vérification des exigences sans correction :  $C(p) = 1$**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle :  $X_e^*(p) = 0$ ) :  $F_{BF1}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)}$ , puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique ( $K$ ), pulsation propre ( $\omega_0$ ) et coefficient d'amortissement ( $z$ ). Faire l'application numérique.

**Question 3** En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_01\_Hoeken/images/fig\_04.png

### Modélisation et étude des performances du système avec correction intégrale : $C(p) = \frac{K_i}{p}$

#### Objectif

Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_01\_Hoeken/images/fig\_05.png

**Question 4** Les résultats d'une simulation pour un gain  $K_i = 100$  sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

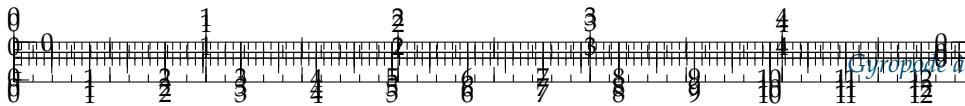
**Question 5** Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_01\_Hoeken/images/dr\_01.png

**Question 6** Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain  $K_i$ . Déterminer la valeur  $K_{imax}$  du coefficient  $K_i$  qui permet de respecter les marges de stabilité.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_01\_Hoeken/images/dr\_01.png





**Question 8** Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction  $F_{BF2}(j\omega) = \frac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$  pour  $K_i = K_{i\max}$ . Quelle sera l'atténuation minimale  $|F_{BF2}(j\omega)|_{\min}$  de la perturbation  $x_e^*$  (en %) sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$ . Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».

## Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

### Objectif

Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.

Avec  $F(p)$  la fonction de transfert d'un filtre de la forme  $F(p) = \frac{1}{(1 + Tp)^2}$  et la fonction de transfert  $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$ .

La grandeur de sortie  $X_v(p)$  peut s'exprimer par l'équation :  $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$  avec  $A(p) = \frac{1}{(1 + Tp)^2}$  et  $B(p) = \frac{Tp(2 + Tp)}{(1 + Tp)^2}$ .

**Question 9** Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne  $x_m(t) = x_0$  (on prendra  $Q(p) = 0$  pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

**Question 10** Le diagramme de Bode de  $B(j\omega)$  pour  $T = 1 \text{ s}$  est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$ . Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

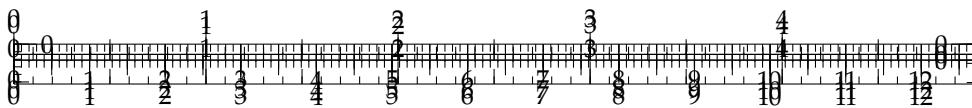
### Éléments de correction

$$1. H(p) = \frac{K_a H_S(p)}{1 + k_e H_S(p)} \text{ et} \\ H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e H(p)}.$$

$$\frac{1 + k_e}{1 + k_e} \sqrt{\frac{1 + k_e}{m_s}},$$

Liens utiles : <https://xpressoles.github.io/>





## TD 15

# Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles – Corrigé

CCP – PSI 2015.

### Présentation

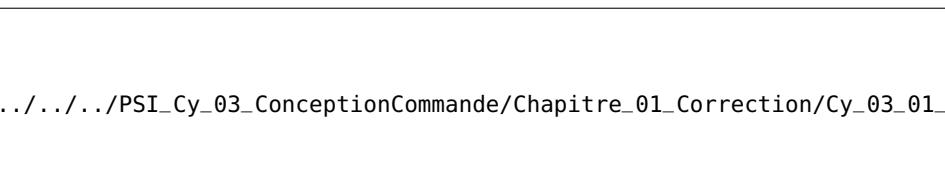
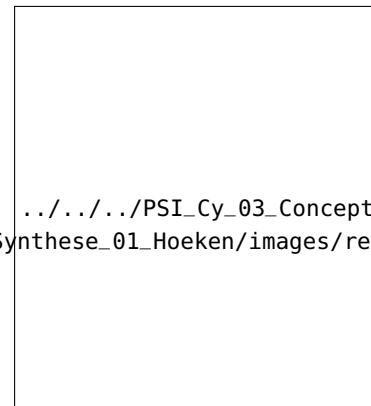
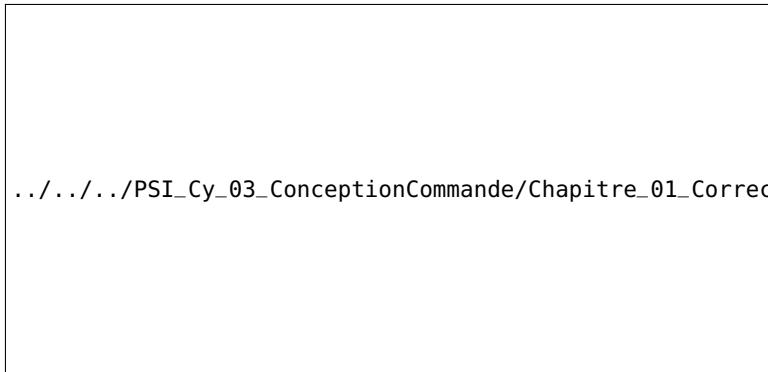
#### Réalisation de la commande de l'esclave

C1-02

C2-04

##### Objectif

Concevoir la commande du dispositif esclave de façon à satisfaire l'ensemble des exigences incluses dans l'exigence « Commande » (id 1.1).



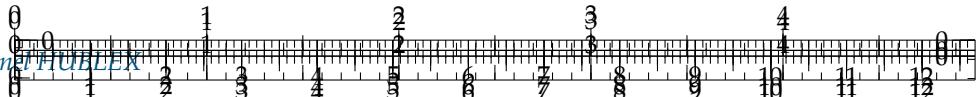
#### Modélisation et étude des performances du système sans correction

##### Objectif

Identifier les performances non satisfaites afin de choisir un correcteur adapté.

La modélisation permettant de relier la consigne  $x_m(t)$  issue du dispositif maître au déplacement  $x_v(t)$  de l'organe terminal est représentée par le schéma-blocs suivant.





.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthe

- $H_{ad}(p) = k_a = 1 \text{ Nm}^{-1}$  permet d'adapter la consigne position en consigne force;
- $H_s(p) = \frac{X_s(p)}{F_s(p)} = \frac{k_s}{p(m_s p + b_s)}$  avec  $k_s = 1 \text{ m N}^{-1}$ ,  $m_s = 0,152 \text{ kg}$  et  $b_s = 1,426 \text{ Nsm}^{-1}$ ;
- $k_e = 200 \text{ N m}^{-1}$ .

**Question 1** Simplifier le schéma-blocs précédent pour lui donner la forme illustrée par la figure suivante. Exprimer  $H_t(p)$  et  $H(p)$  en fonction de  $k_e$ ,  $k_a$  et  $H_s(p)$ .

#### Correction

(Il faudrait faire un schéma :)) On commence par décaler le sommeteur de droite vers la gauche. Il faut donc ajouter un bloc  $\frac{1}{H_s(p)}$  dans la perturbation.

On a alors le bloc  $C(p)$ , le bloc  $H_{ad}(p)$ , le sommeteur et une FTBF :  $F(p) = \frac{H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)}$ .

On redécale le sommeteur vers la gauche.

On a donc  $H(p) = H_{ad}(p)F(p) = \frac{H_{ad}(p)H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)}$  et le bloc  $\frac{1}{H_s(p)H_{ad}(p)}$  dans la perturbation.

On redécale la perturbation vers la droite et  $H_t(p) = \frac{H(p)}{H_s(p)H_{ad}(p)} = \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}$ .

Conclusion :  $H(p) = \frac{H_{ad}(p)H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)}$  et  $H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthe

Vérification des exigences sans correction :  $C(p) = 1$

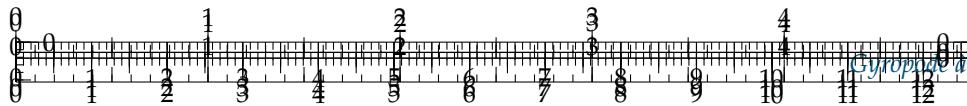
**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle :  $X_e^*(p) = 0$ ) :  $F_{BF1}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)}$ , puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique ( $K$ ), pulsation propre ( $\omega_0$ ) et coefficient d'amortissement ( $z$ ). Faire l'application numérique.

#### Correction

$$\text{On a } F_{BF1}(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{\frac{1}{m_s p^2 + b_s p + k_e}}{1 + \frac{1}{m_s p^2 + b_s p + k_e}} = \frac{1}{m_s p^2 + b_s p + k_e + 1} =$$

$$\frac{\frac{1}{k_e + 1}}{\frac{m_s}{k_e + 1} p^2 + \frac{b_s}{k_e + 1} p + 1}.$$





On a donc  $K = \frac{1}{1+k_e}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_e+1}{m_S}}$  et  $2\xi/\omega_0 = \frac{b_S}{k_e+1}$  soit  $\xi = \frac{1}{2} \frac{b_S}{k_e+1} \sqrt{\frac{k_e+1}{m_S}} = \frac{b_S}{2\sqrt{m_S(k_e+1)}}$ .

Application numériques :  $K = \frac{1}{1+200} = 0,005$ ,  $\xi = \frac{1,426}{2 \times \sqrt{0,152 \times (200+1)}} = 0,13$  et  $\omega_0 = 36,4 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 3** En vous aidant des abaques de la figure suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).

#### Correction

- Stabilité :
  - Amortissement : pas de dépassement : **Non respecté** :  $\xi < 1$ .
  - Marge de gain : 7,5 dB mini.
  - Marge de phase : 45°
- Rapidité : temps de réponse à 5% : inférieur à 0,1 s :  $\xi = 0,1 \Rightarrow t_{5\%} = 30 \text{ soit } t_{5\%} = 30/36,4 = 0,8 \text{ s } \textbf{Non respecté}$ .
- Précision : erreur statique inférieur à 1% : **Système de classe 0**,  $\varepsilon_S = \frac{1}{1+K} = 0,995 \gg 0,1$ , **non respecté**.

**Modélisation et étude des performances du système avec correction**

$$\text{intégrale : } C(p) = \frac{K_i}{p}$$

#### Objectif

Vérifier la capacité d'une correction intégrale à atteindre les exigences.

**Question 4** Les résultats d'une simulation pour un gain  $K_i = 100$  sont donnés sur les figures suivantes. Vérifier les exigences « stabilité », « rapidité », « précision » (uniquement l'erreur statique).

#### Correction

**Question 5** Justifier exhaustivement le tracé des diagrammes de Bode. Tracer le diagramme asymptotique.

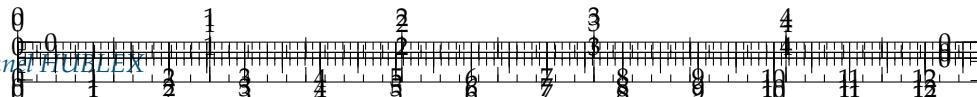
#### Correction

**Question 6** Pour améliorer la rapidité, il faut augmenter le gain  $K_i$ . Déterminer la valeur  $K_{i\max}$  du coefficient  $K_i$  qui permet de respecter les marges de stabilité.

#### Correction

**Question 7** En analysant la courbe suivante, conclure sur la capacité du correcteur à





valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».

### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

**Question 8** Le diagramme de Bode de la figure suivante représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction  $F_{BF2}(j\omega) = \frac{X_v(j\omega)}{K_i}$  pour  $K_i = K_{\max}$ . Quelle sera l'atténuation minimale  $|F_{BF2}(j\omega)|_{\min}$  de la perturbation  $x_e^*$  (en %) sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$ . Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».

### Correction

En  $1,25 \text{ rad s}^{-1}$  l'atténuation est de  $-55 \text{ dB}$ . On a  $20 \log K = -55$  soit  $K = 0,002$  (inférieur à 1%). En  $12,5 \text{ rad s}^{-1}$  l'atténuation est de  $-30 \text{ dB}$ . On a  $20 \log K = -30$  soit  $K = 0,03$  (supérieur à 1%).

Le critère d'atténuation n'est pas vérifié sur l'ensemble de l'intervalle.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

## Modélisation et étude des performances du système avec correction IMC

### Objectif

Améliorer la rapidité tout en atténuant la perturbation sinusoïdale.

Pour améliorer l'atténuation de la perturbation sinusoïdale, il est possible de changer la structure de l'asservissement et d'opter pour une correction IMC (Internal Model Corrector) dont le schéma-blocs est donné sur la figure suivante.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_Conception

Avec  $F(p)$  la fonction de transfert d'un filtre de la forme  $F(p) = \frac{1}{(1+Tp)}$  et la fonction de transfert  $H(p) = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + k_e}$ .

La grandeur de sortie  $X_v(p)$  peut s'exprimer par l'équation :  $X_v(p) = A(p)X_m(p) + B(p)Q(p)$  avec  $A(p) = \frac{1}{(1+Tp)^2}$  et  $B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}$ .

**Question 9** Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne  $x_m(t) = x_0$  (on prendra  $Q(p) = 0$  pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

### Correction

En utilisant la formulation proposée, on a  $X_v(p) = A(p)X_m(p) = \frac{X_m(p)}{(1+Tp)^2}$ .

Pour améliorer le temps de réponse du système, il faut diminuer  $T$ .

**Justification** On a  $G(p) = \frac{1}{1+T^2p^2+2Tp}$ . On a donc  $\frac{1}{\omega_0^2} = T^2$  et  $\frac{2\xi}{\omega_0} = 2T$ . On a donc  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  et  $\xi = 1$ .

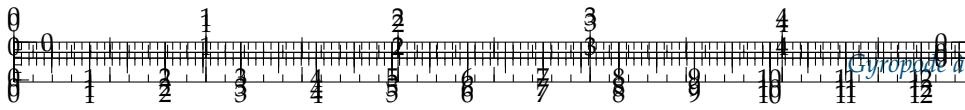
Pour  $\xi = 1$ ,  $t_{5\%}\omega_0 = 5$ . Ainsi pour réduire le temps de réponse à 5% il faut augmenter  $\omega_0$  et donc diminuer  $T$ .



.../.../.../Style/png/logo\_lycee.png

Xavier Pessoles – <https://xavier.pessoles.gforge.soissons.fr/>

Sciences Industrielles de l'Ingénieur 1 PSI★2



Groupe d'usage professionnel HUBLEX

Pour un temps de réponse à 5% de 0,1 s, il faut  $\omega_0 = \frac{5}{0,1} = 50 \text{ rad s}^{-1}$  et  $T = 0,02 \text{ s}$  (valeur maximale).

505

**Question 10** Le diagramme de Bode de  $B(j\omega)$  pour  $T = 1 \text{ s}$  est donné ci-après. Indiquer sur la copie s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de  $T$  pour minimiser l'effet de la perturbation sur l'intervalle  $[1,25 \text{ rad s}^{-1}; 12,5 \text{ rad s}^{-1}]$ . Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de  $T$  permettant de satisfaire l'atténuation de la perturbation liée à l'exigence de « précision » sur cet intervalle.

#### Correction

$$\text{On a } B(p) = \frac{Tp(2+Tp)}{(1+Tp)^2}.$$

Pour minimiser l'effet de la perturbation, il faut que décaler la cassure vers la droite. D'après le cahier des charges, l'effet de la perturbation doit être divisé par 100. L'atténuation en dB doit donc être de  $20 \log \frac{1}{100} = -40 \text{ dB}$ .

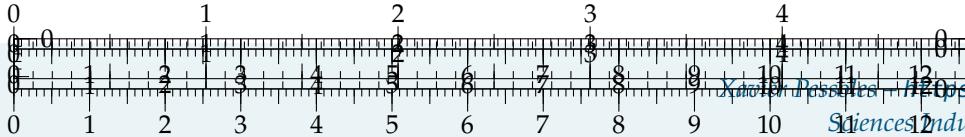
Il faut donc chercher  $T$  pour lequel le gain est de  $-40 \text{ dB}$ . En passant  $B(p)$  sous forme canonique et en se plaçant en basse fréquence, on a  $B(p) \approx 2Tp$ . On a donc  $B_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(2T\omega)$ .

On veut  $B_{\text{dB}}(12,5) = 20 \log(2T \times 12,5) < -40$  soit  $\log(2T \times 12,5) < -2 \Rightarrow 2T \times 12,5 < e^{-2} \Rightarrow T < e^{-2}/25$  et  $T < 0,005 \text{ s}$ .

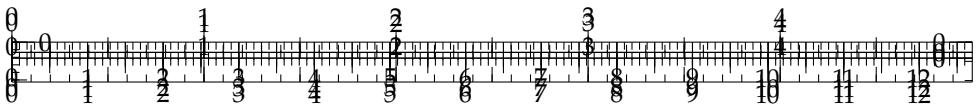
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande

#### Éléments de correction

1.  $H(p) = \frac{K_a H_s(p)}{1 + k_e H_s(p)}$  et  
 $H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e H_s(p)}$ .
2.  $K = \frac{1}{1 + k_e}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + k_e}{m_s}}$   
 $\xi = \frac{b_s}{2\sqrt{m_s(1 + k_e)}}$ .
3. .
4. .
5. .
6.  $K_{i\max} = 133$ .
7.  $G_{\text{dB max}} = -30 \text{ dB}$ .
8.  $T \leq 0,02 \text{ s}$ .
9.  $T \leq 0,4 \text{ ms}$ .







## TD 16

# Vanoise Express – Sujet

E3A – PSI – 2014.

C1-02

C2-04

### Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_02\_VanoiseExp/images/fig\_0

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_02\_VanoiseExp/images/fig\_0

### Modélisation du moteur à courant continu<sup>3</sup>

Hypothèses et données :

- ▶ on suppose les conditions initiales nulles;
- ▶ les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique;
- ▶  $L = 0,59 \text{ mH}$  inductance d'un moteur;
- ▶  $R = 0,0386 \Omega$  résistance interne d'un moteur;
- ▶  $f = 6 \text{ N m s/rad}$  coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs;
- ▶  $J = 800 \text{ kg m}^2$  moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs;
- ▶  $c_m(t) = k_T i(t)$  avec  $k_T = 5,67 \text{ Nm/A}$  (constante de couple d'un moteur);
- ▶  $e(t) = k_E \omega_m(t)$  avec  $k_E = 5,77 \text{ Vs/rad}$  (constante électrique d'un moteur)
- ▶ équations de la dynamique :  $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$ ;
- ▶ loi des mailles :  $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ .

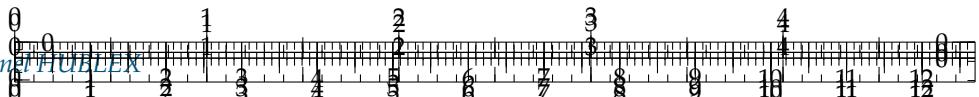
3: On peut passer directement à la question 6 pour aborder plus rapidement les asservissements.

Notations :

- ▶ on notera  $F(p)$  la transformée de Laplace d'une fonction du temps  $f(t)$ ;
- ▶  $u(t)$  tension d'alimentation des moteurs;
- ▶  $i(t)$  intensité traversant un moteur;
- ▶  $e(t)$  force contre électromotrice d'un moteur;
- ▶  $\omega_m(t)$  vitesse de rotation d'un moteur;
- ▶  $c_m(t)$  couple d'un seul moteur;
- ▶  $c_r(t)$  couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

**Question 1** Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminer les fonctions de transfert  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$  écrites dans le domaine de Laplace.





.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_02\_VanoiseExp/images/fig\_001

**Question 2**  $\Omega_m(p)$  peut se mettre sous la forme :  $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$ . Exprimer les fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  en fonction de  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$ .

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V (le couple de perturbation  $c_r(t)$  est nul);
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m (la tension  $u(t)$  est nulle).

**Question 3** Choisir et justifier un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminer numériquement les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$ .

En faisant l'approximation que les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_02\_VanoiseExp/images/fig\_002

**FIGURE 4.20** – Réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V.

**FIGURE 4.21** – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m.

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

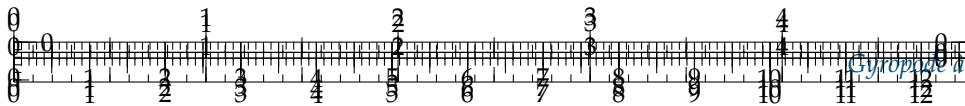
- ▶ La consigne de vitesse  $v_c(t)$  est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension  $\rho_c(t)$  avec le gain  $F$ .
- ▶ Une génératrice tachymétrique de gain  $g_1 = 0,716 \text{ Vs/rad}$  transforme la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  du moteur en une tension  $\rho_m(t)$ .
- ▶ Un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  corrige la différence  $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$  et l'envoie à un amplificateur de gain  $A$ , qui alimente les deux moteurs électriques.
- ▶ La vitesse de rotation des moteurs  $\omega_m(t)$  est transformée en vitesse du téléphérique  $v(t)$  avec le gain  $E = 0,1 \text{ m}$  (réducteur et rayon de la poulie).

**Question 5** Déterminer l'expression du gain  $F$  pour que  $\varepsilon(t) = 0$  entraîne  $v_c(t) = v(t)$ . Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_02\_VanoiseExp/images/fig\_003





Les coefficients  $E$  et  $F$  calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients  $A'$  et  $G$ . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes :  $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4$  sN ;  $G = 6 \cdot 10^{-5}$  m/(sNm) et  $T = 0,47$  s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

## Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

**Question 6** Justifier en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

**Question 7** On suppose  $C_r(p) = 0$ . Calculer en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $V_0$  l'expression de l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12$  m/s. Faire l'application numérique.

On suppose  $V_c(p) = 0$ .

**Question 8** Calculer en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $C_{r0}$  l'expression de l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation en échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270$  Nm qui modélisera la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

**Question 9** Faire également une application numérique si  $C_{r0} = 7460$  Nm qui modéliserait la montée vers La Plagne.

**Question 10** Donner numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$  dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

**Question 11** Existe-t-il une valeur réaliste de  $C_0$  pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifier.

## Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur  $C(p) = \frac{C_i}{p}$ .

**Question 12** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée  $FTBO(p)$ . Faire l'application numérique pour  $C_i = 1$ .

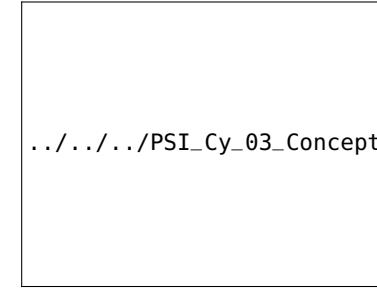
**Question 13** Tracer le diagramme asymptotique de Bode de  $FTBO(p)$ . Tracer également l'allure des courbes.

**Question 14** Donner la valeur maximale de  $C_i$  permettant de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

**Question 15** Trouver la valeur minmale de  $C_i$  permettant de respecter le critère de « Pulsion de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifier.

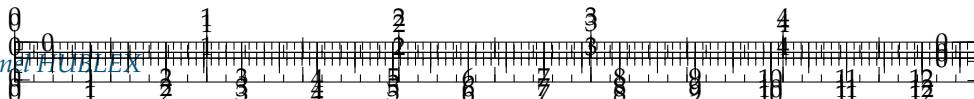
**Question 16** On suppose  $Cr(p)=0$ . Calculer numériquement l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12$  m/s.

**Question 17** On suppose  $V_c(p) = 0$ . Calculer numériquement l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270$  Nm qui modélisera la descente des « Arcs ».



...//...//.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionComma

FIGURE 4.22 – Diagramme de Bode correspondant à la question 13.



**Question 18** Donner numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ . Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » est-il vérifié ? Justifier.

On suppose  $C_r(p) = 0$ .

**Question 19** Calculer l'expression de l'écart de traînage  $\varepsilon_v$  engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifier.

### Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur  $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$ , produit de la fonction  $C_a(p) = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$  avec  $a > 1$  (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1 + Tp)}$ , qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans  $C_a(p)$  (c'est-à-dire pour  $C_a(p) = 1$ ).

**Question 20** Montrer que le système n'est pas stable sans la fonction  $C_a(p)$  ?

La fonction  $C_a(p)$  va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

**Question 21** Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de  $-135^\circ$  ?

**Question 22** Tracer en fonction de  $a$ ,  $\tau$  et  $K$  les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur  $C_a(p) = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$  avec  $a > 1$ . Préciser clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Préciser de même les pulsations des points particuliers.

**Question 23** La phase maximum  $\varphi_{\max}$  ajoutée par  $C_a(p)$  peut être calculée par la formule :  $\sin \varphi_{\max} = \frac{a - 1}{a + 1}$ . Calculer numériquement  $a$  pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

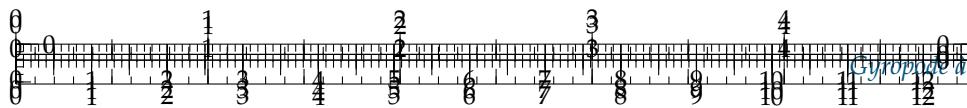
**Question 24** Donner l'expression en fonction de  $a$  et  $\tau$  de la pulsation  $\omega$  pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

**Question 25** En déduire la valeur numérique de  $\tau$  pour que  $\varphi_{\max}$  soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_02\_VanoiseExp/images/fig\_01\_cahier\_des\_charges? Préciser la démarche utilisée.

**Question 27** Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifier.





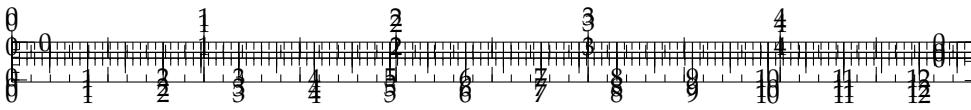
**Question 28** Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ?  
Justifier.

#### Éléments de correction

1.  $G_1(p) = \frac{1}{R + Lp}$ ,  $G_2(p) = k_T$ ,  $G_3(p) = \frac{1}{f + Jp}$ ,  $G_1(p) = k_E$ .
2.  $F_1(p) = \frac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$  et  $F_2(p) = \frac{G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ .
3.  $F_1(p) = \frac{0,1725}{1 + 0,47p}$  et  $F_2(p) = \frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{1 + 0,47p}$ .
4.  $B = 297,4 \text{ N m V}^{-1}$ ,  $D = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}\text{Nm}$  et  $T = 0,47 \text{ s}$ .
5.  $F = \frac{\mu}{E} = 7,16 \text{ V s m}^{-1}$
6. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
7. FTBO de classe 0  $\varepsilon'_S = \frac{V_0}{1 + C_0 A' B G} = 4,286 \text{ m s}^{-1}$ .
8.  $\varepsilon''_S = -0,156 \text{ m s}^{-1}$  – à vérifier.
9.  $\varepsilon''_S = 0,160 \text{ m s}^{-1}$ .
10.  $\varepsilon'_S = 4,13 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\varepsilon'_S = 4,46 \text{ m s}^{-1}$ .
11.  $C_0$  infini
12.  $\text{FTBO}(p) = \frac{1,8}{p(1 + 0,47p)}$
- 13.
14.  $\omega_{0\text{dB}} \leq 2,13 \text{ rad s}^{-1}$  et  $C_i \leq 1,67$ .
15.  $C_i \geq 0,61$ .
16. FTBO de classe 1  $\varepsilon'_S = 0$ .
17. Intégrateur en amont de la perturbation  $\varepsilon''_S = 0$ .
18. CDCF OK.
19.  $\varepsilon_v = \frac{1}{C_i A' B G}$
20. Marge négative, système instable.
21. 70° de phase à ajouter.
- 22.
23.  $a = 32,16$
24.  $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
25.  $\tau = 0,176 \text{ s}$
26.  $K = 0,109$
- 27.
- 28.







# TD 16

## Vanoise Express – Corrigé

E3A – PSI – 2014.

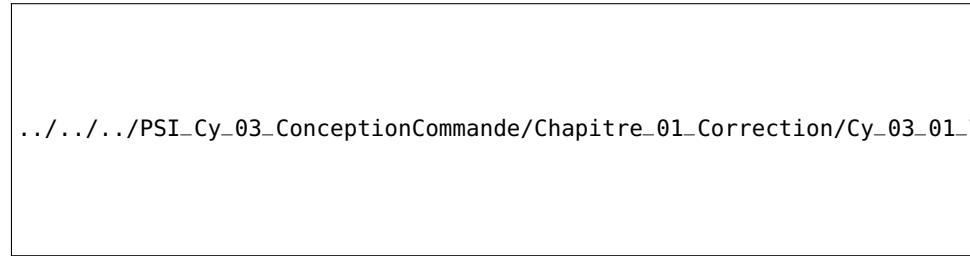
C1-02

C2-04

### Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :



.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_02\_VanoiseExp/images/fig\_0

### Modélisation du moteur à courant continu<sup>4</sup>

Hypothèses et données :

- ▶ on suppose les conditions initiales nulles ;
- ▶ les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- ▶  $L = 0,59 \text{ mH}$  inductance d'un moteur ;
- ▶  $R = 0,0386 \Omega$  résistance interne d'un moteur ;
- ▶  $f = 6 \text{ N m s/rad}$  coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- ▶  $J = 800 \text{ kg m}^2$  moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- ▶  $c_m(t) = k_T i(t)$  avec  $k_T = 5,67 \text{ Nm/A}$  (constante de couple d'un moteur) ;
- ▶  $e(t) = k_E \omega_m(t)$  avec  $k_E = 5,77 \text{ Vs/rad}$  (constante électrique d'un moteur)
- ▶ équations de la dynamique :  $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$  ;
- ▶ loi des mailles :  $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ .

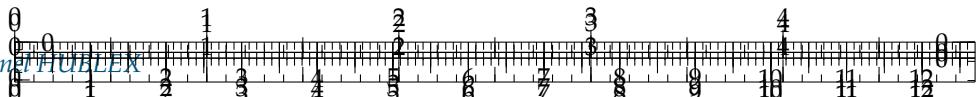
4: On peut passer directement à la question 6 pour aborder plus rapidement les asservissements.

Notations :

- ▶ on notera  $F(p)$  la transformée de Laplace d'une fonction du temps  $f(t)$  ;
- ▶  $u(t)$  tension d'alimentation des moteurs ;
- ▶  $i(t)$  intensité traversant un moteur ;
- ▶  $e(t)$  force contre électromotrice d'un moteur ;
- ▶  $\omega_m(t)$  vitesse de rotation d'un moteur ;
- ▶  $c_m(t)$  couple d'un seul moteur ;
- ▶  $c_r(t)$  couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

**Question 1** Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminer les fonctions de transfert  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$  écrites dans le domaine de Laplace.





.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_02\_VanoiseExp/images/fig\_0001.jpg

**Question 2**  $\Omega_m(p)$  peut se mettre sous la forme :  $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$ . Exprimer les fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  en fonction de  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$ .

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V (le couple de perturbation  $c_r(t)$  est nul);
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m (la tension  $u(t)$  est nulle).

**Question 3** Choisir et justifier un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminer numériquement les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$ .

En faisant l'approximation que les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_02\_VanoiseExp/images/fig\_0002.jpg

**FIGURE 4.23** – Réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V.

**Question 4** Donner la valeur numérique des trois constantes  $B$ ,  $D$  et  $T$ .

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

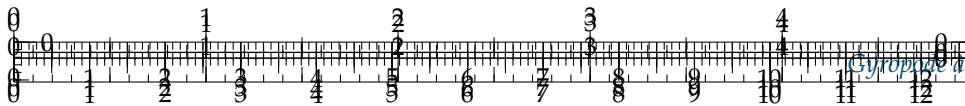
- ▶ La consigne de vitesse  $v_c(t)$  est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension  $\rho_c(t)$  avec le gain  $F$ .
- ▶ Une génératrice tachymétrique de gain  $0,1 = 0,716 \text{ Vs/rad}$  transforme la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  du moteur en une tension  $\rho_m(t)$ .
- ▶ Un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  corrige la différence  $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$  et l'envoie à un amplificateur de gain  $A$ , qui alimente les deux moteurs électriques.
- ▶ La vitesse de rotation des moteurs  $\omega_m(t)$  est transformée en vitesse du téléphérique  $v(t)$  avec le gain  $E = 0,1 \text{ m}$  (réducteur et rayon de la poulie).

**Question 5** Déterminer l'expression du gain  $F$  pour que  $\varepsilon(t) = 0$  entraîne  $v_c(t) = v(t)$ . Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :

.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_02\_VanoiseExp/images/fig\_0003.jpg





Les coefficients  $E$  et  $F$  calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients  $A'$  et  $G$ . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes :  $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4 \text{ sN}$ ;  $G = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m/(sNm)}$  et  $T = 0,47 \text{ s}$ .

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

## Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

**Question 6** Justifier en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

**Question 7** On suppose  $C_r(p) = 0$ . Calculer en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $V_0$  l'expression de l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12 \text{ m/s}$ . Faire l'application numérique.

On suppose  $V_c(p) = 0$ .

**Question 8** Calculer en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $C_{r0}$  l'expression de l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation en échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$  qui modéliseraient la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

**Question 9** Faire également une application numérique si  $C_{r0} = 7460 \text{ Nm}$  qui modéliserait la montée vers La Plagne.

**Question 10** Donner numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$  dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

**Question 11** Existe-t-il une valeur réaliste de  $C_0$  pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifier.

## Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur  $C(p) = \frac{C_i}{p}$ .

**Question 12** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée  $FTBO(p)$ . Faire l'application numérique pour  $C_i = 1$ .

**Question 13** Tracer le diagramme asymptotique de Bode de  $FTBO(p)$ . Tracer également l'allure des courbes.

**Question 14** Donner la valeur maximale de  $C_i$  permettant de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

**Question 15** Trouver la valeur minmale de  $C_i$  permettant de respecter le critère de « Pulsion de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifier. Il faut que la pulsation de coupure à 0 dB soit supérieure à 1 rad/s. Sur la BO non corrigée, on mesure que le gain vaut 4,23 dB pour cette pulsation. On a donc  $C_{i \min} = 0,61$ .

**Question 16** On suppose  $C_r(p)=0$ . Calculer numériquement l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12 \text{ m/s}$ .

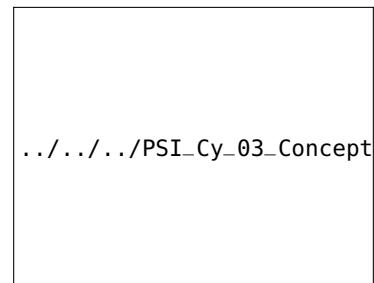
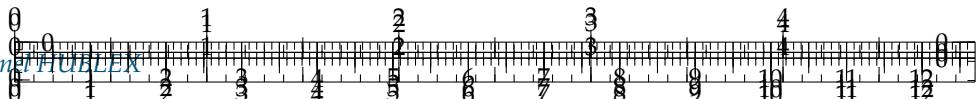


FIGURE 4.25 – Diagramme de Bode correspondant à la question 13.



**Question 17** On suppose  $V_c(p) = 0$ . Calculer numériquement l'écart statique en régulation  $\varepsilon_s''$  engendré par une perturbation échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$  qui modélisera la descente des « Arcs ».

**Question 18** Donner numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon_s' + \varepsilon_s''$ . Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » est-il vérifié ? Justifier.

On suppose  $C_r(p) = 0$ .

**Question 19** Calculer l'expression de l'écart de traînage  $\varepsilon_v$  engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifier.

### Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur  $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$ , produit de la fonction  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a > 1$  (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1+Tp)}$ , qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans  $C_a(p)$  (c'est-à-dire pour  $C_a(p) = 1$ ).

**Question 20** Montrer que le système n'est pas stable sans la fonction  $C_a(p)$  ?

La fonction  $C_a(p)$  va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsion de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

**Question 21** Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de  $-135^\circ$  ?

**Question 22** Tracer en fonction de  $a$ ,  $\tau$  et  $K$  les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a > 1$ . Préciser clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Préciser de même les pulsations des points particuliers.

**Question 23** La phase maximum  $\varphi_{\max}$  ajoutée par  $C_a(p)$  peut être calculée par la formule :  $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$ . Calculer numériquement  $a$  pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

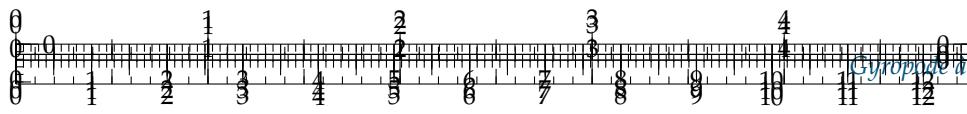
Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

**Question 24** Donner l'expression en fonction de  $a$  et  $\tau$  de la pulsation  $\omega$  pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

**Question 25** En déduire la valeur numérique de  $\tau$  pour que  $\varphi_{\max}$  soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

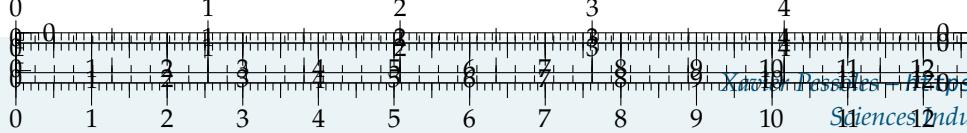
.../.../.../PSI\_Cy\_03\_ConceptionCommande/Chapitre\_01\_Correction/Cy\_03\_01\_TD\_Synthese\_02\_VanoiseExp/images/fig\_0



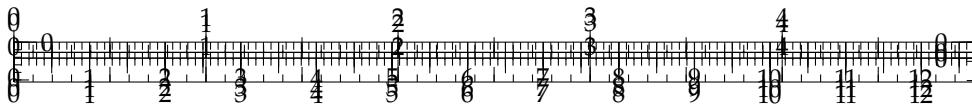


**Question 27** Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifier.

**Question 28** Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifier.







.../.../.../Style/png/Fond\_CIN.png

## 5 Détermination des liaisons équivalentes

### 5.1 Introduction

#### 5.1.1 Rappel sur les torseurs des liaisons

B2-12

B2-15

##### Définition – Torseur cinématique

De manière générale, le torseur cinématique peut être noté :

$$\{\mathcal{V}(i/j)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(i/j)}}{V(P, i/j)} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{l} p_{ij} \vec{x} + q_{ij} \vec{y} + r_{ij} \vec{z} \\ u_{ij} \vec{x} + v_{ij} \vec{y} + w_{ij} \vec{z} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{ll} p_{ij} & u_{ij} \\ q_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{array} \right\}_{P,\mathcal{R}}.$$

On notera  $n_c$  le nombre d'inconnues cinématiques d'une liaison. En d'autres termes,  $n_c$  correspond donc au nombre de mobilités de la liaison.

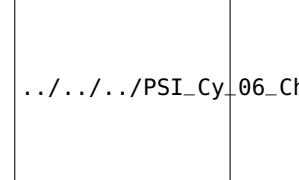


FIGURE 5.1 – Robot humanoïde Lola

##### Définition – Torseur statique

De manière générale, le torseur statique peut être noté :

$$\{\mathcal{T}(i \rightarrow j)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(i \rightarrow j)}}{\mathcal{M}(P, i \rightarrow j)} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{l} X_{ij} \vec{x} + Y_{ij} \vec{y} + Z_{ij} \vec{z} \\ L_{ij} \vec{x} + M_{ij} \vec{y} + N_{ij} \vec{z} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{ll} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_{P,\mathcal{R}}.$$

On notera  $n_s$  le nombre d'inconnues statiques d'une liaison. En d'autres termes,  $n_s$  correspond au degré de liaison. On a  $n_s = 6 - n_c$ .

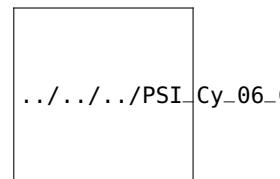


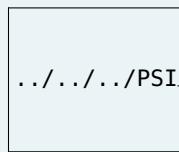
FIGURE 5.2 – Simulateur de vol Lockheed Martin

#### 5.1.2 Graphe des liaisons

##### Définition – Chaînes et cycles

Selon la forme du graphe de liaisons, on peut distinguer 3 cas :

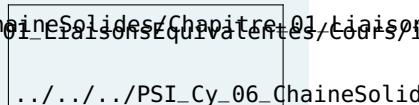


**Les chaînes ouvertes**

.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cours/

**Les chaînes fermées**

.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cours/

**Les chaînes complexes**

.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cours/

On appelle cycle, un chemin fermé ne passant pas deux fois par le même sommet. À partir d'un graphe des liaisons donné, il est possible de vérifier qu'il existe un nombre maximal de cycles indépendants. Ce nombre est appelé **nombre cyclomatique**.

**En notant  $L$  le nombre de liaisons et  $S$  le nombre de solides, on note  $\gamma$  le nombre cyclomatique et on a :  $\gamma = L - S + 1$ .**

**Remarques**

- Dans le cas d'une chaîne ouverte,  $\gamma$  est nul.
- Le degré d'hyperstatisme d'une chaîne fermée « simple » ne peut pas excéder 6.
- À partir du graphe de structure, il est possible de déterminer le nombre cyclomatique d'une chaîne complexe... si elle n'est pas trop complexe.

## 5.2 Liaisons équivalentes

**Objectif**

La détermination de la liaison équivalente correspondant à l'association de plusieurs liaisons doit permettre :

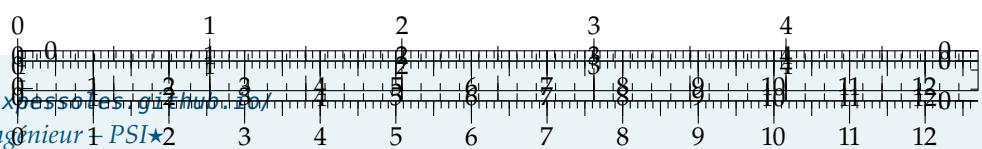
- de transmettre les mêmes actions mécaniques que l'association de liaisons;
- d'autoriser les mêmes mouvements relatifs que l'association de liaisons.

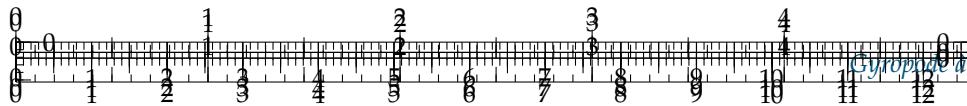
### 5.2.1 Liaisons en parallèles

**Méthode –**

La liaison équivalente aux liaisons en parallèles doit permettre de transmettre la somme de chacune des actions mécaniques. Ainsi :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}_i .$$





### Remarque

La liaison équivalente devant permettre les même mobilités que les liaisons en série, il est donc aussi possible de déterminer la liaison équivalente en résolvant le système d'équation suivant :

$$\{\mathcal{V}(1/2)\}_{\text{eq}} = \{\mathcal{V}(1/2)\}_1 = \{\mathcal{V}(1/2)\}_2 = \dots = \{\mathcal{V}(1/2)\}_n.$$

Cependant cette méthode dite « cinématique » est moins aisée à mettre en œuvre que la première.

### 5.2.2 Liaisons en série

#### Méthode –

La liaison équivalente aux liaisons en série se détermine en utilisant la composition du torseur cinématique. En effet :

$$\{\mathcal{T}(1/n)\}_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^{n-1} \{\mathcal{T}(i/i+1)\}.$$

### Remarque

L'application successive du principe fondamental de la statique à chacun des solides permet de déterminer le torseur équivalent de la liaison :

$$\{\mathcal{T}(n \rightarrow 1)\}_{\text{eq}} = \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\} = \dots = \{\mathcal{T}(n \rightarrow n-1)\}.$$

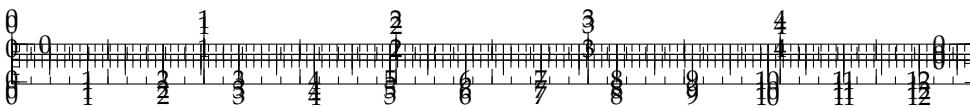
L'observation de la forme du torseur de la liaison équivalente ne suffit pas à déduire le nom de la liaison : il faut aussi s'assurer que les composantes du torseur sont bien indépendantes.

### 5.2.3 Décomposition des liaisons

Chacune des liaisons normalisées à  $n$  degré de liberté peut être décomposée en  $n$  liaisons ponctuelles en parallèles (sphère – plan). Par exemple, une liaison rotule (sphérique) est équivalente à 3 liaisons ponctuelles en parallèles dont les normales sont non coplanaires et concourantes en un point.





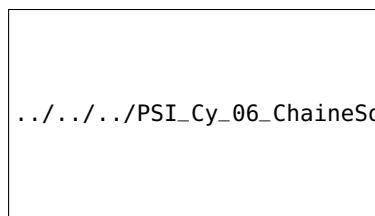
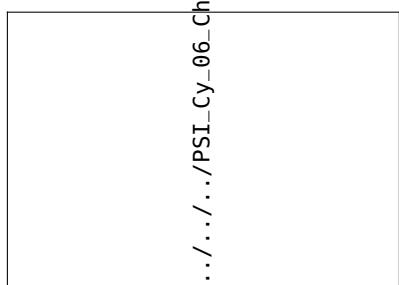
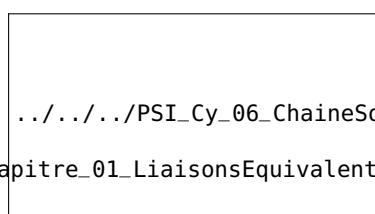
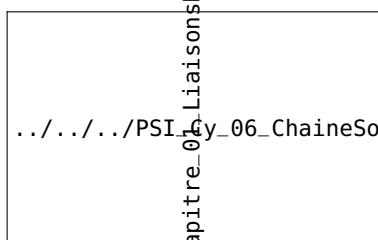
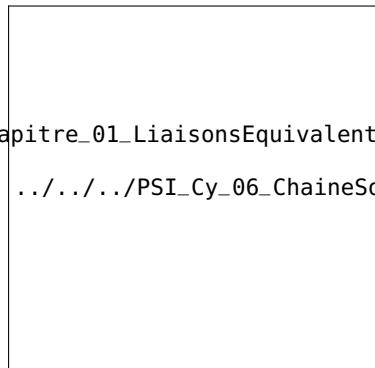
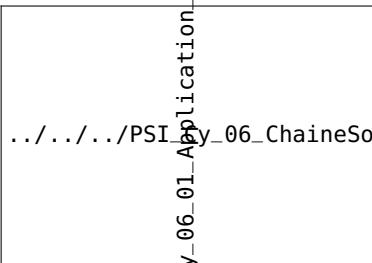


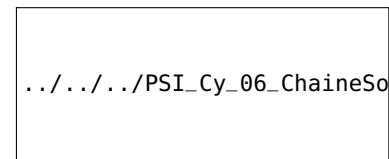
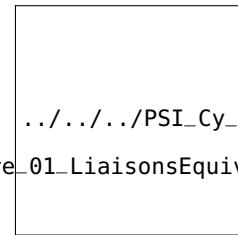
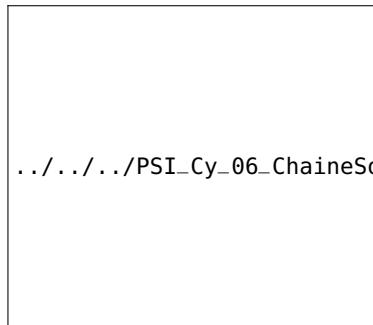
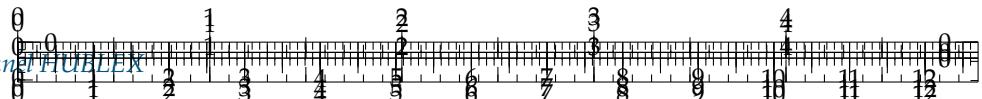
## Application 1 : Liaisons équivalentes – Sujet

D'après P. Dupas.

### Liaisons en parallèle

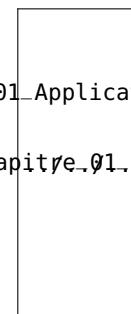
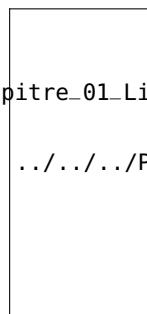
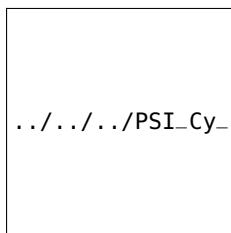
Question 1 Déterminer la liaison équivalente des liaisons suivantes.





### Liaisons en série

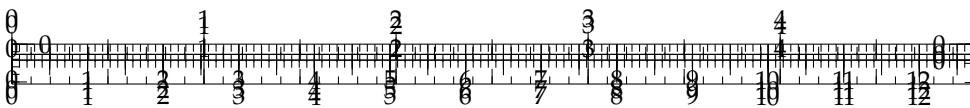
**Question 2** Déterminer la liaison équivalente des liaisons suivantes.



.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_Application\_01/images/Cy\_06\_01\_01.jpg

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_02.jpg



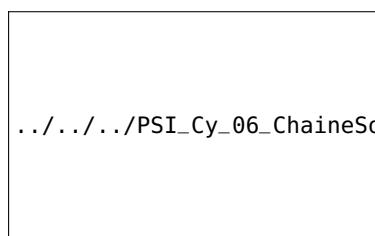
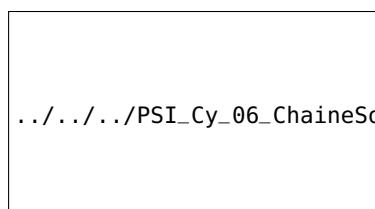
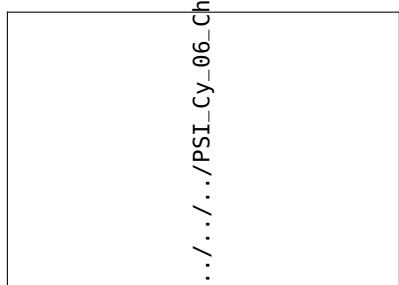
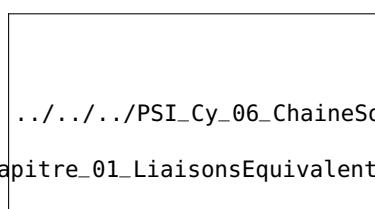
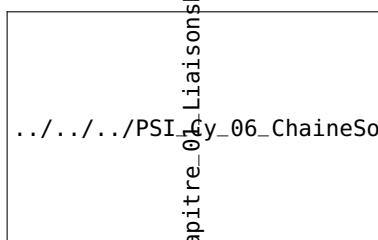
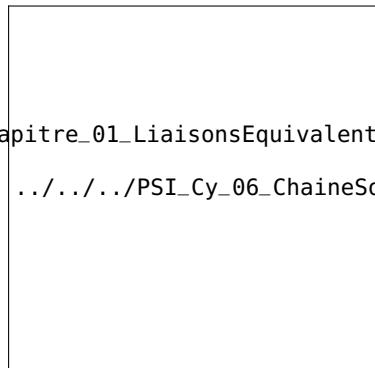
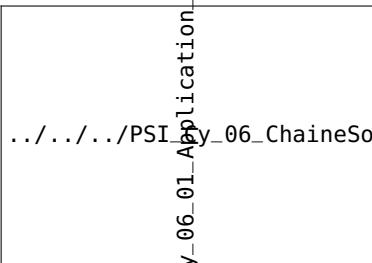


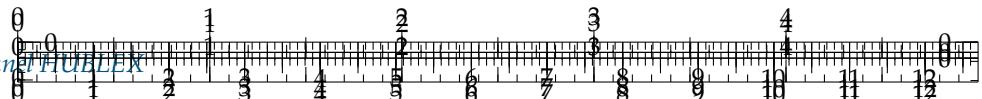
## Application 1 : Liaisons équivalentes – Corrigé

D'après P. Dupas.

### Liaisons en parallèle

Question 1 Déterminer la liaison équivalente des liaisons suivantes.





.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/  
.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01

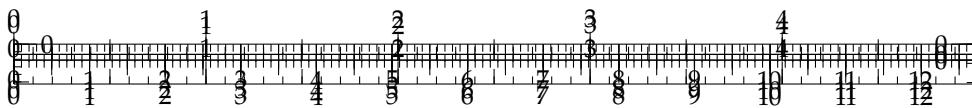
### Liaisons en série

**Question 2** Déterminer la liaison équivalente des liaisons suivantes.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01





## Application 2 : Tour de la terreur – Sujet

D'après Livre Ed. Vuibert.

La Tour de la terreur du parc Walt Disney Studios propose aux visiteurs d'entrer dans une tour et d'effectuer une chute de 13 étages dans un ascenseur. L'ascenseur est guidé en translation sur deux rails par 12 galets répartis sur 4 systèmes de guidage.

B2-15

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_06\\_ChaineSolides/Cy\\_06\\_01\\_Application\\_02\\_Terre...](http://.../.../.../PSI_Cy_06_ChaineSolides/Cy_06_01_Application_02_Terre...)

### Cahier des charges

Le diagramme des exigences partiel de la Tour de la terreur est donné figure suivante.

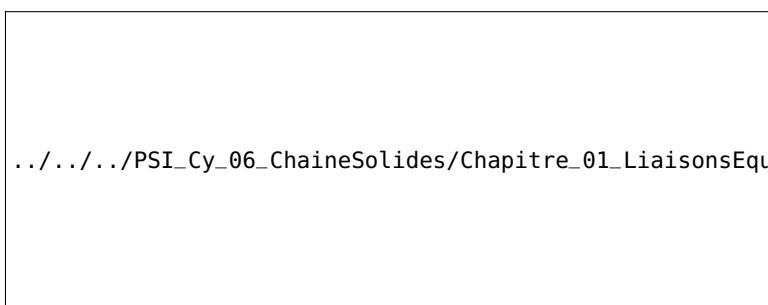
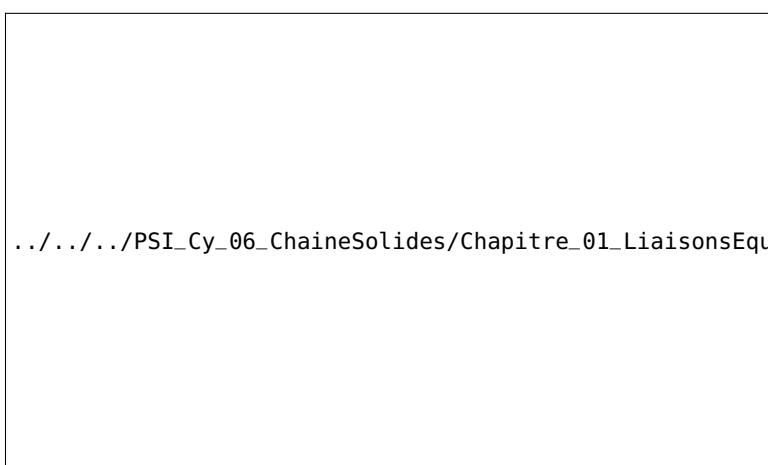


FIGURE 5.3 – Guidage de l'ascenseur.

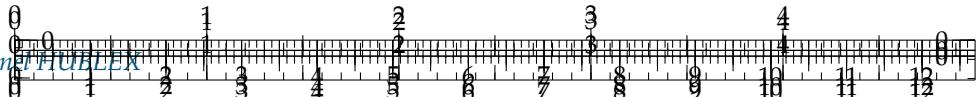
### Objectif

L'objectif est d'analyser différentes liaisons en parallèle ou en série de la Tour de la terreur afin de valider l'exigence de précision du guidage lors de la descente.



[.../.../.../PSI\\_Cy\\_06\\_ChaineSolides/Cy\\_06\\_01\\_Application\\_02\\_Terre...](http://.../.../.../PSI_Cy_06_ChaineSolides/Cy_06_01_Application_02_Terre...)





On modélise chaque contact entre un galet et le rail par une liaison ponctuelle. On modélise chaque liaison entre un galet et la cabine par une liaison pivot.

Afin de simplifier l'étude, nous nous intéressons d'abord à la liaison équivalente à une liaison pivot en série avec une liaison ponctuelle (liaison réalisée entre la cabine et un rail par l'intermédiaire d'un seul galet).

**Question 1** En utilisant le modèle de la figure précédente, déterminer la liaison équivalente à l'association en série d'une ponctuelle de normale  $\vec{n}$  et d'une liaison pivot d'axe  $\vec{z}$ .

**FIGURE 5.6 – Association en série d'une liaison pivot et d'une liaison ponctuelle.**

Dans la suite, nous considérerons cette simplification pour tous les galets.

**Question 2** Proposer un graphe des liaisons faisant intervenir les modèles des 12 galets entre le rail et l'ascenseur.

**Question 3** Donner le torseur cinématique d'une liaison ponctuelle ou sphère-plan en précisant le point d'écriture et la base.

**Question 4** Donner la liaison équivalente à l'association de trois liaisons ponctuelles en parallèle au niveau d'un guidage ( $A, B, C$  ou  $D$ ).

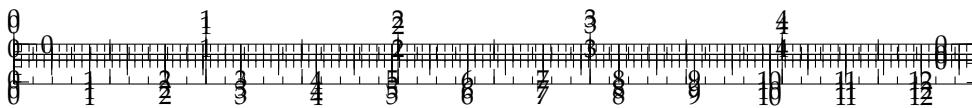
**Question 5** Montrer que l'association en parallèle de deux liaisons sphère-cylindre de même axe est équivalente à une liaison pivot glissant.

**Question 6** Conclure sur la liaison équivalente entre la cabine et le rail compte tenu des résultats précédents.

**Question 7** Pourquoi utilise-t-on cette solution pour guider la cabine de l'ascenseur ?

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_Application\_02\_Terreur/images





## Application 2 : Tour de la terreur – Corrigé

D'après Livre Ed. Vuibert.

La Tour de la terreur du parc Walt Disney Studios propose aux visiteurs d'entrer dans une tour et d'effectuer une chute de 13 étages dans un ascenseur. L'ascenseur est guidé en translation sur deux rails par 12 galets répartis sur 4 systèmes de guidage.

B2-15

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_06\\_ChaineSolides/Cy\\_06\\_01\\_Application\\_02\\_Terre...](http://.../.../.../PSI_Cy_06_ChaineSolides/Cy_06_01_Application_02_Terre...)

### Cahier des charges

Le diagramme des exigences partiel de la Tour de la terreur est donné figure suivante.

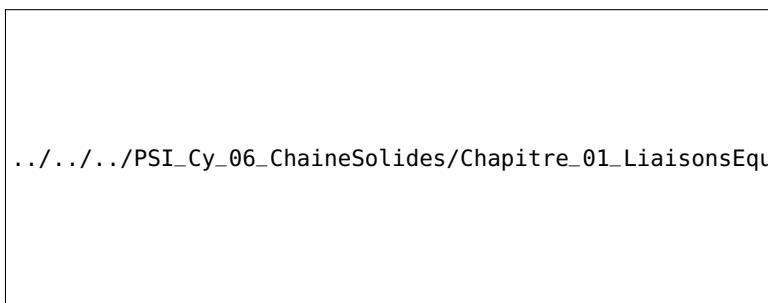
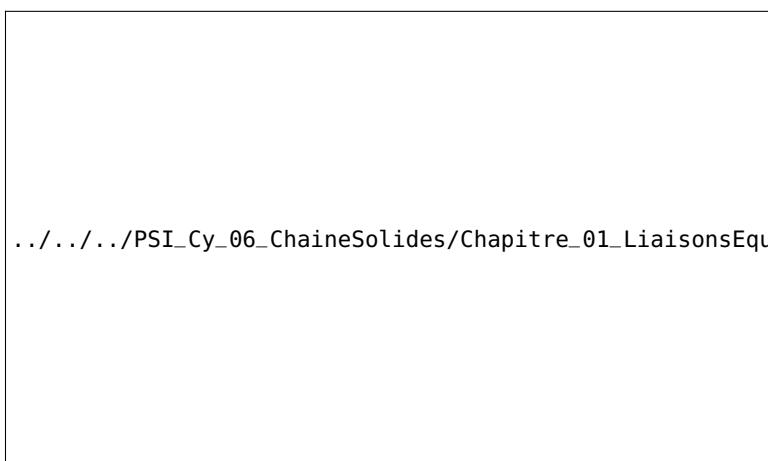
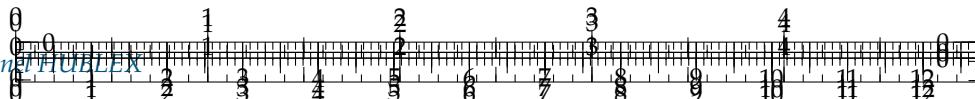


FIGURE 5.7 – Guidage de l'ascenseur.

### Objectif

L'objectif est d'analyser différentes liaisons en parallèle ou en série de la Tour de la terreur afin de valider l'exigence de précision du guidage lors de la descente.





On modélise chaque contact entre un galet et le rail par une liaison ponctuelle. On modélise chaque liaison entre un galet et la cabine par une liaison pivot.

Afin de simplifier l'étude, nous nous intéressons d'abord à la liaison équivalente à une liaison pivot en série avec une liaison ponctuelle (liaison réalisée entre la cabine et un rail par l'intermédiaire d'un seul galet).

**Question 1** En utilisant le modèle de la figure précédente, déterminer la liaison équivalente à l'association en série d'une ponctuelle de normale  $\vec{n}$  et d'une liaison pivot d'axe  $\vec{z}$ .

FIGURE 5.10 – Association en série d'une liaison pivot et d'une liaison ponctuelle.

Dans la suite, nous considérerons cette simplification pour tous les galets.

**Question 2** Proposer un graphe des liaisons faisant intervenir les modèles des 12 galets entre le rail et l'ascenseur.

**Question 3** Donner le torseur cinématique d'une liaison ponctuelle ou sphère-plan en précisant le point d'écriture et la base.

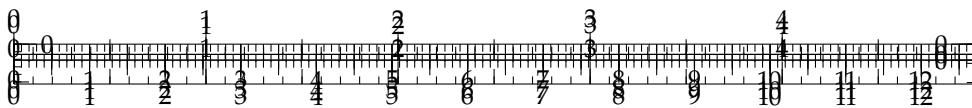
**Question 4** Donner la liaison équivalente à l'association de trois liaisons ponctuelles en parallèle au niveau d'un guidage ( $A, B, C$  ou  $D$ ).

**Question 5** Montrer que l'association en parallèle de deux liaisons sphère-cylindre de même axe est équivalente à une liaison pivot glissant.

**Question 6** Conclure sur la liaison équivalente entre la cabine et le rail compte tenu des résultats précédents.

**Question 7** Pourquoi utilise-t-on cette solution pour guider la cabine de l'ascenseur ?



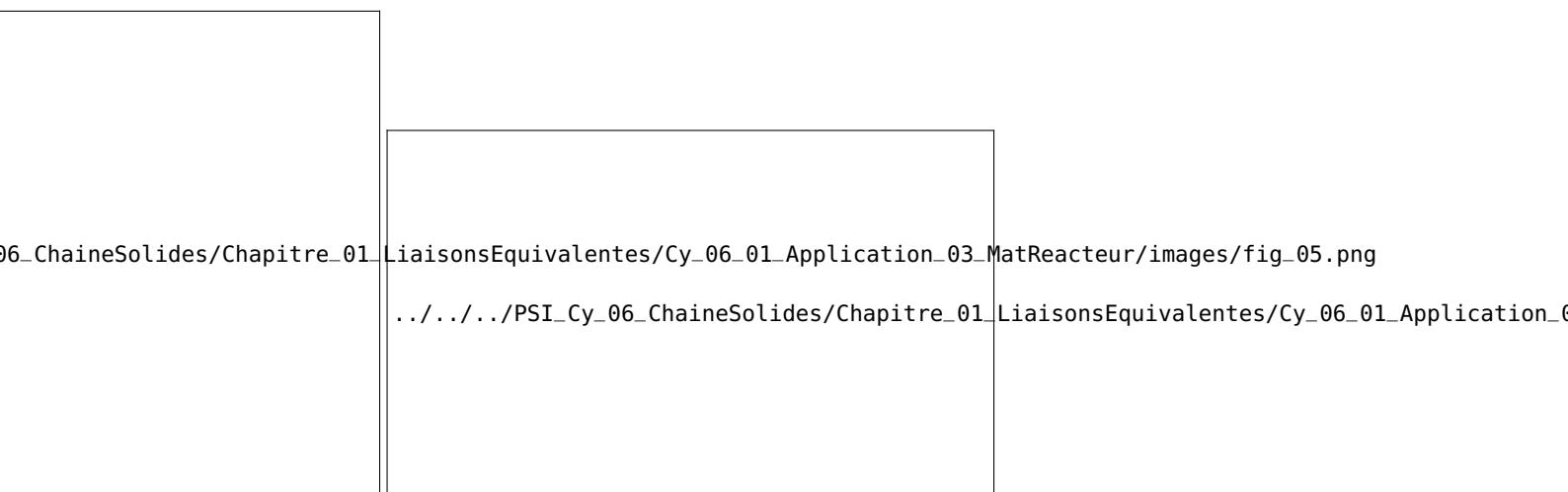


## Application 3 : Mât réacteur A320 – Sujet

D'après F. Weiss.

L'étude porte sur la solution d'assemblage choisie entre le mât-réacteur et l'aile de l'avion A320. Les figures suivantes présentent les différentes pièces de cet assemblage ainsi que la disposition des liaisons dans le plan  $(\vec{X}, \vec{Z})$ .

B2-15



Le mât-réacteur (1) est suspendu à l'aile (0) grâce aux deux bielles (4) et (5). Les articulations réalisées aux points  $A, B, N$  et  $M$  sont considérées comme des liaisons « sphériques ». On a :  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN} = a\vec{z}$ . Les mouvements du mât-réacteur (1) par rapport à l'aile (0) sont stoppés par la présence de deux triangles (2) et (3). Le triangle (2) est articulé sur (1) par deux liaisons « shériques » de centres  $E$  et  $F$ , et sur (0) par une liaison « sphérique » de centre  $H$ . On a :  $\overrightarrow{EF} = e\vec{y}$  et  $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}e\vec{y} + h\vec{z}$ .

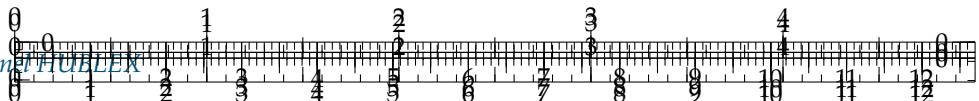
Le triangle (3) est articulé sur (1) par deux liaisons « shériques » de centres  $C$  et  $D$ , et sur (0) par une liaison « sphérique » de centre  $J$ . On a :  $\overrightarrow{CD} = a\vec{y}$  et  $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}c\vec{y} - j\vec{x}$ .

**Question 1** Tracer le graphe de structure de l'assemblage.

**Question 2** Déterminer la liaison équivalente entre (1) et (0) réalisée par la bielette (4) puis par la bielette (5).

**Question 3** Déterminer la liaison équivalente réalisée entre (1) et (0) par le triangle (2) puis par le triangle (3).



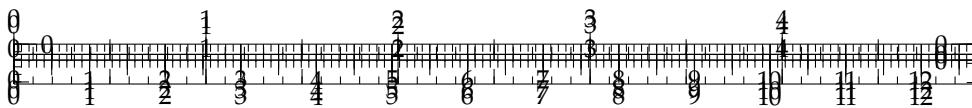


**Question 4** Tracer en perspective le schéma architectural de l'assemblage du mât (1) sur l'aile (0) en utilisant les modèles des liaisons équivalentes déterminées aux questions précédentes.

**Question 5** Déterminer le degré d'hyperstatisme de l'assemblage (1)/(0); justifier l'intérêt du résultat en raisonnant sur les dilatations provoquées par des températures et des matériaux différents pour l'aile et le mât-réacteur.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_Application\_03\_MatReacteur/in



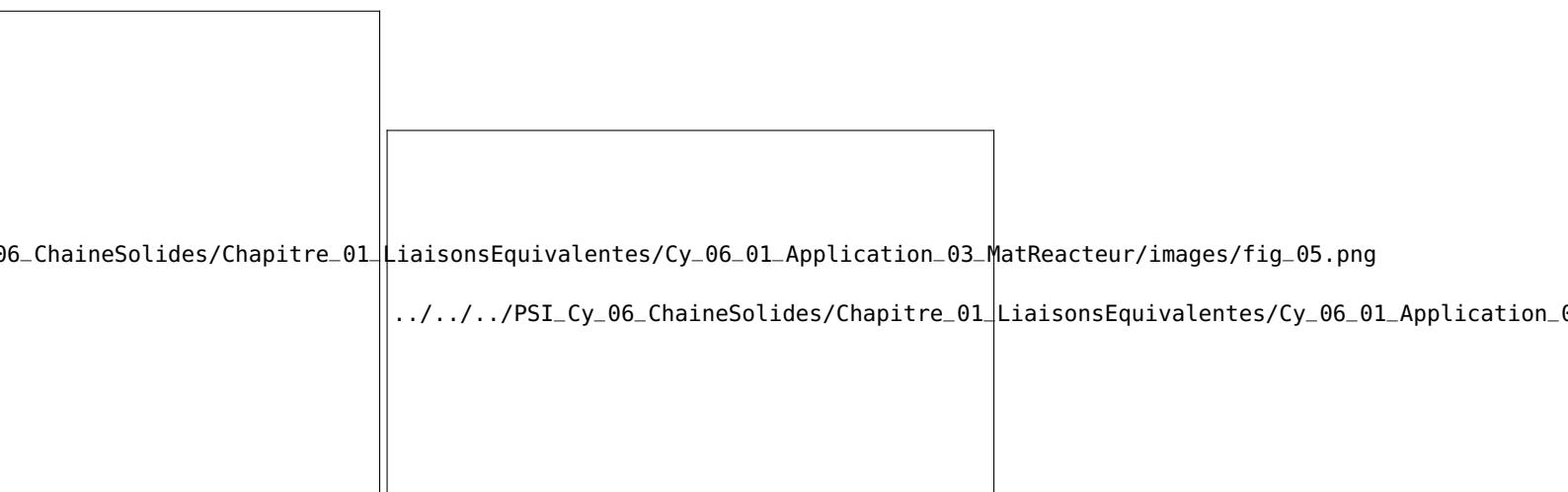


## Application 3 : Mât réacteur A320 – Corrigé

D'après F. Weiss.

L'étude porte sur la solution d'assemblage choisie entre le mât-réacteur et l'aile de l'avion A320. Les figures suivantes présentent les différentes pièces de cet assemblage ainsi que la disposition des liaisons dans le plan  $(\vec{X}, \vec{Z})$ .

B2-15



Le mât-réacteur (1) est suspendu à l'aile (0) grâce aux deux bielles (4) et (5). Les articulations réalisées aux points  $A, B, N$  et  $M$  sont considérées comme des liaisons « sphériques ». On a :  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN} = a\vec{z}$ . Les mouvements du mât-réacteur (1) par rapport à l'aile (0) sont stoppés par la présence de deux triangles (2) et (3). Le triangle (2) est articulé sur (1) par deux liaisons « shériques » de centres  $E$  et  $F$ , et sur (0) par une liaison « sphérique » de centre  $H$ . On a :  $\overrightarrow{EF} = e\vec{y}$  et  $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}e\vec{y} + h\vec{z}$ .

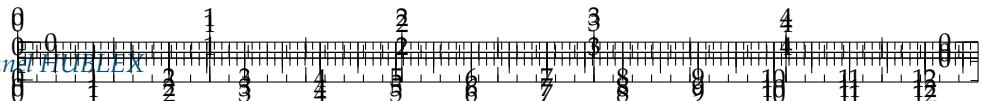
Le triangle (3) est articulé sur (1) par deux liaisons « shériques » de centres  $C$  et  $D$ , et sur (0) par une liaison « sphérique » de centre  $J$ . On a :  $\overrightarrow{CD} = a\vec{y}$  et  $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}c\vec{y} - j\vec{x}$ .

**Question 1** Tracer le graphe de structure de l'assemblage.

**Question 2** Déterminer la liaison équivalente entre (1) et (0) réalisée par la billette (4) puis par la billette (5).

**Question 3** Déterminer la liaison équivalente réalisée entre (1) et (0) par le triangle (2) puis par le triangle (3).



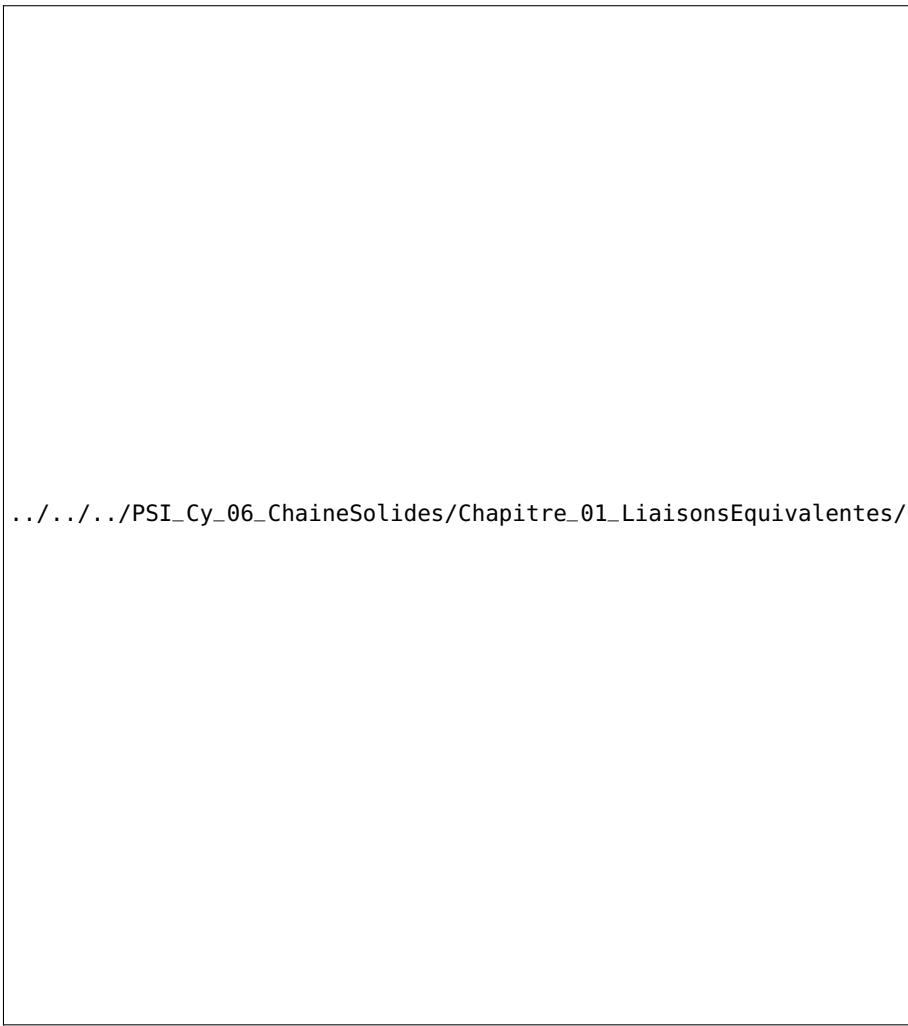
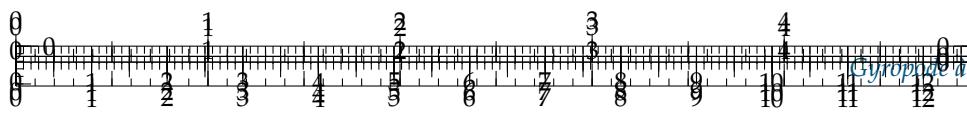


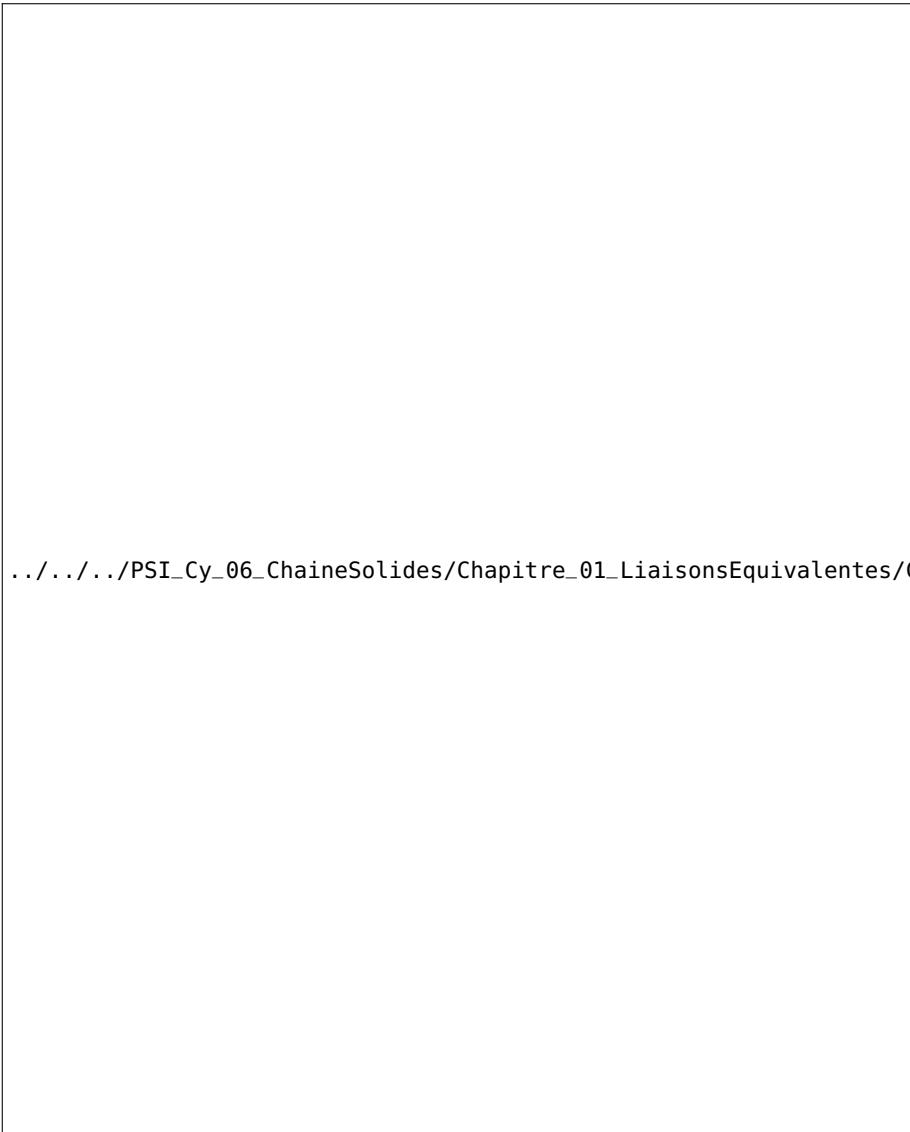
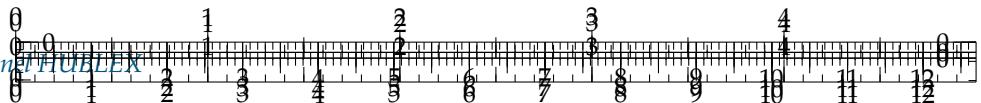
**Question 4** Tracer en perspective le schéma architectural de l'assemblage du mât (1) sur l'aile (0) en utilisant les modèles des liaisons équivalentes déterminées aux questions précédentes.

**Question 5** Déterminer le degré d'hyperstatisme de l'assemblage (1)/(0) ; justifier l'intérêt du résultat en raisonnant sur les dilatations provoquées par des températures et des matériaux différents pour l'aile et le mât-réacteur.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy

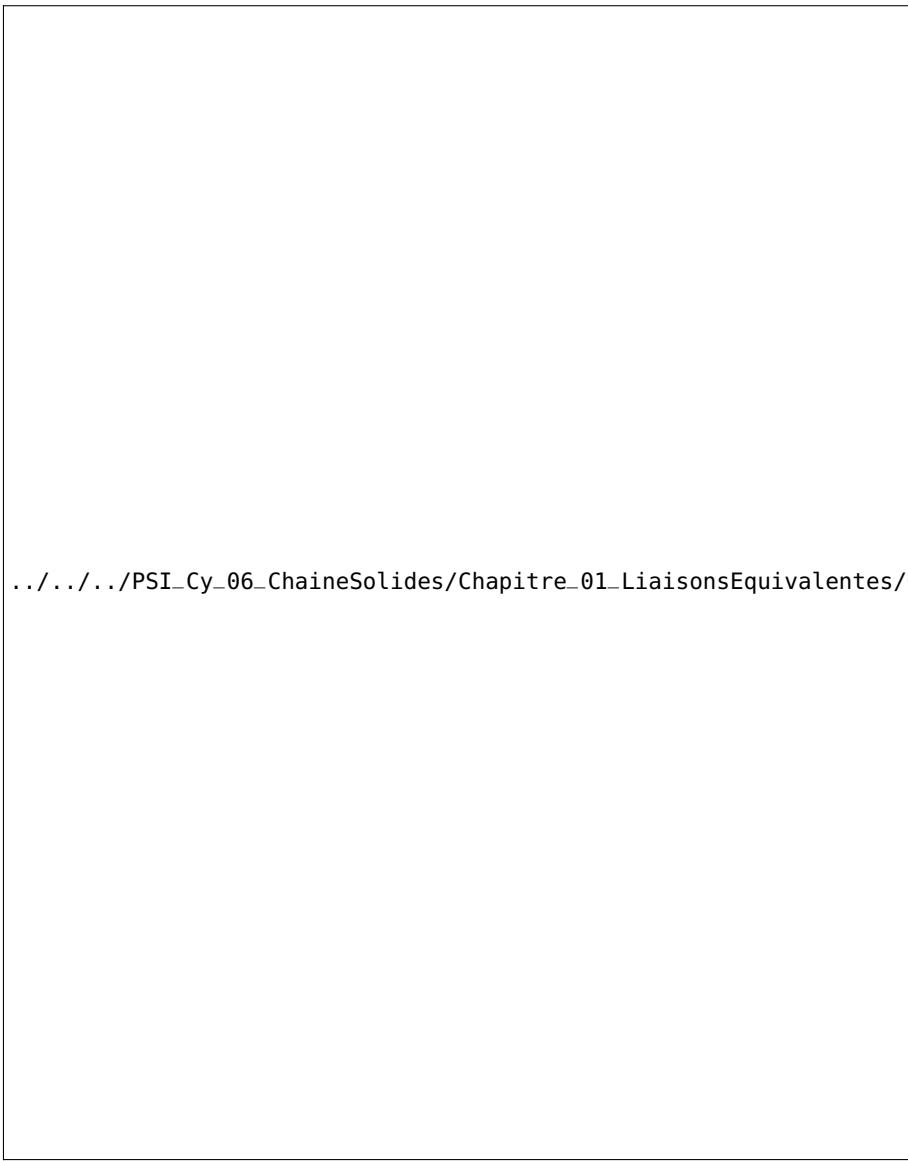
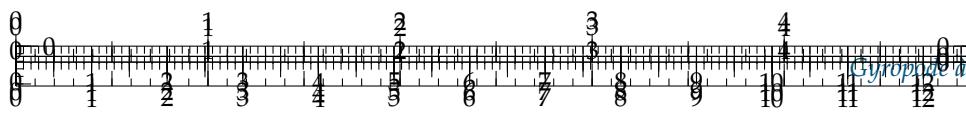






.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_Ap

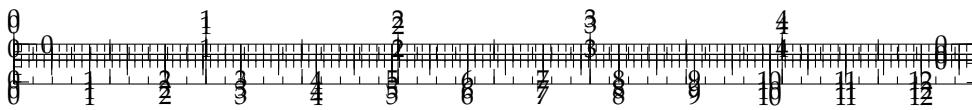




../../../../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_Application\_03\_MatReacteur/images/







## TD 1

# Conception de la commande d'un robot chirurgical – Sujet

CCS PSI – 2015.

On s'intéresse au bras esclave d'un robot chirurgical.

### Objectif

C1-02

Justifier la structure du bras esclave par rapport au cahier des charges.

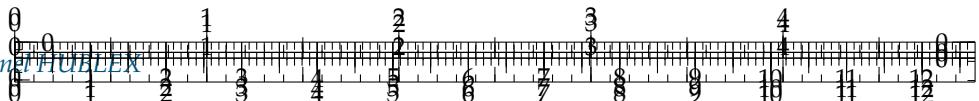
C2-04

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineS

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_TD\_01\_RobotChirurgical/images/fig

On donne le schéma cinématique partiel du bras esclave.





.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_TD\_01.html

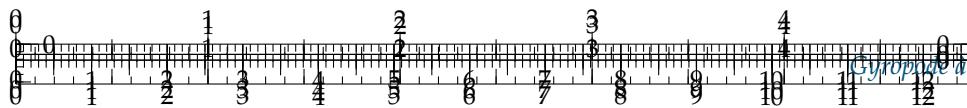
.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_TD\_02.html

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_TD\_03.html

Le point  $T$  est situé à l'intersection des axes  $(A', \vec{x}_0)$  et  $(P', \vec{y}_2')$ . Le vecteur vitesse du point  $T$  de  $7'$  par rapport à  $0$ , noté  $\overrightarrow{V(T, 7'/0)}$ , doit être colinéaire à  $\vec{y}_2'$ .

**Question 1** En s'appuyant sur la figure précédente, calculer  $\overrightarrow{V(P', 7'/0)}$  par dérivation du vecteur position.



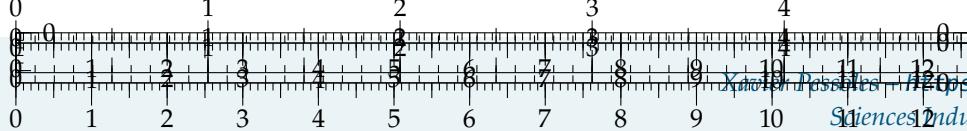


**Question 2** Exprimer  $\overrightarrow{V(T, 7'/0)}$  dans la base  $(\vec{x}_2', \vec{y}_2', \vec{z}_2')$  en fonction des données de l'énoncé. Il est conseillé d'utiliser la relation de Varignon en passant par le point  $P'$ .

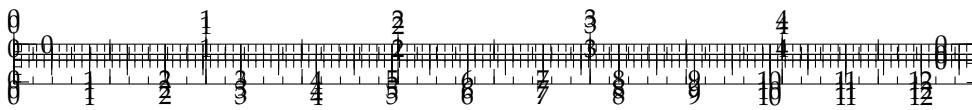
**Question 3** Exprimer le torseur cinématique de  $7'/0$  réduit en  $T$ , par ses composantes dans la base  $(\vec{x}_2', \vec{y}_2', \vec{z}_2')$  et donner la liaison équivalente entre  $7'$  et  $0$  au point  $T$ .

**Question 4** Quelle exigence du cahier des charges (document réponse) justifie cette structure ? Expliquer sans calcul.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSoli







## TD 1

# Conception de la commande d'un robot chirurgical – Corrigé

CCS PSI – 2015.

On s'intéresse au bras esclave d'un robot chirurgical.

### Objectif

C1-02

Justifier la structure du bras esclave par rapport au cahier des charges.

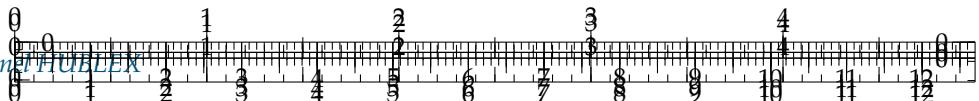
C2-04

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineS

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_TD\_01\_RobotChirurgical/images/fig

On donne le schéma cinématique partiel du bras esclave.





.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_TD\_01

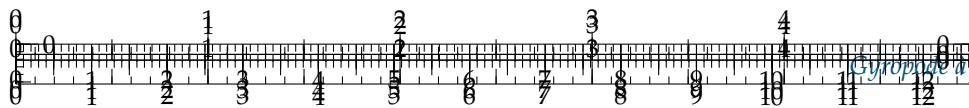
.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_TD\_01

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_01\_LiaisonsEquivalentes/Cy\_06\_01\_TD\_01

Le point  $T$  est situé à l'intersection des axes  $(A', \vec{x}_0)$  et  $(P', \vec{y}_2')$ . Le vecteur vitesse du point  $T$  de  $7'$  par rapport à  $0$ , noté  $\overrightarrow{V(T, 7'/0)}$ , doit être colinéaire à  $\vec{y}_2'$ .

**Question 1** En s'appuyant sur la figure précédente, calculer  $\overrightarrow{V(P', 7'/0)}$  par dérivation du vecteur position.





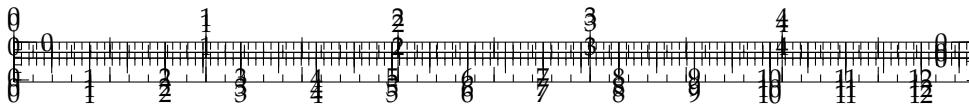
**Question 2** Exprimer  $\overrightarrow{V(T, 7'/0)}$  dans la base  $(\vec{x}_2', \vec{y}_2', \vec{z}_2')$  en fonction des données de l'énoncé. Il est conseillé d'utiliser la relation de Varignon en passant par le point  $P'$ .

**Question 3** Exprimer le torseur cinématique de  $7'/0$  réduit en  $T$ , par ses composantes dans la base  $(\vec{x}_2', \vec{y}_2', \vec{z}_2')$  et donner la liaison équivalente entre  $7'$  et  $0$  au point  $T$ .

**Question 4** Quelle exigence du cahier des charges (document réponse) justifie cette structure ? Expliquer sans calcul.







.../.../.../Style/png/Fond\_CIN.png

## 6 Théorie des mécanismes

### 6.1 Degrés de mobilité

#### Définition – Mobilité cinématique

On appelle  $m_c = m_u + m_i$  le **degrés de mobilité cinématique** d'une liaison ou d'un mécanisme, avec :

B2-16

- ▶  $m_u$  : le nombre de mobilités dites **utile**;
- ▶  $m_i$  : le nombre de mobilités dites **interne**.

Pour une liaison seule :

- ▶  $m_c = 0$  : liaison complète ou rigide;
- ▶  $m_c > 0$  : liaison mobile à  $m_c$  degrés de liberté.

#### Remarque

- ▶ Dans un mécanisme, une mobilité utile est une mobilité **recherchée dans la fonction du mécanisme**. On différenciera **seulement** les mobilités utiles **indépendantes**. Si une relation existe, par exemple, entre un mouvement d'entrée et un mouvement de sortie, alors cela sera considéré comme une seule mobilité.
- ▶ Les mobilités internes sont des mobilités indépendantes résiduelles à l'intérieur du mécanisme.

Les mobilités utiles et internes peuvent être déterminées intuitivement. Cependant, il est possible de déterminer le nombre de mobilités analytiquement.

#### Méthode – Méthode cinématique

Il faut commencer par écrire la (ou les) fermetures de chaînes cinématiques. Une fermeture de chaîne permet d'écrire un système de 6 équations. On note  $r_c$  le rang du système d'équations cinématiques.

On a alors  $m_c = I_c - r_c$ .

#### Méthode – Méthode statique

Il faut commencer par appliquer le PFS à chacune des pièces du système. Un PFS permet d'écrire un système de 6 équations. On note  $r_s$  le rang du système d'équations statiques.

On a alors  $m_c = E_S - r_s$ .

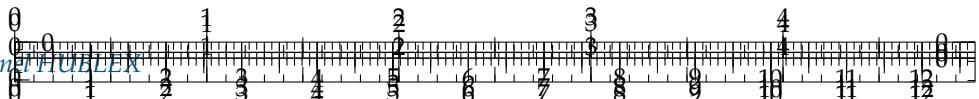
.../.../.../PSI\_Cy\_06\_CH

FIGURE 6.1 – Robot humanoïde Lola

.../.../.../PSI\_Cy\_06...

FIGURE 6.2 – Simulateur de vol Lockheed Martin





## 6.2 Hyperstatisme

### 6.2.1 Définition

On appelle  $h$  le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme. Il traduit l'impossibilité à résoudre un problème de mécanique, par la redondance abusive des liaisons.

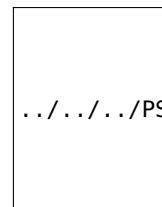


FIGURE 6.3 – Mickey,  $h = M - I_c + E_y$

#### Méthode – en cinématique

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_Chain

$$h = m_c - I_c + E_c$$

#### Méthode – en statique

$$h = m_c - E_s + I_s$$

- ▶  $h = 0$  : liaison ou mécanisme **isostatique**;
- ▶  $h > 0$  : liaison ou mécanisme **hyperstatique**;
- ▶ si  $h < 0$  refaites vos calculs, ce n'est possible!

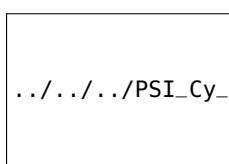


FIGURE 6.4 – Messi,  $h = M - E_s + I_s$

#### Définition – Notations

$I_c$  et  $I_s$  sont respectivement les **nombres d'inconnues cinématiques et statiques** d'un système et ils dépendent du type de modélisation (2D ou 3D).

#### Méthode cinématique

On rappelle que le **nombre cyclomatique**  $\gamma$  est tel que  $\gamma = L - S + 1$  ( $S$  nombre de classes d'équivalence et  $L$  le nombre de liaisons).

On note  $E_c$  le nombre d'équations cinématique :

- ▶ en 3D :  $E_c = 6\gamma$ ;
- ▶ en 2D :  $E_c = 3\gamma$ .

#### Méthode statique

$E_s$  est le nombre d'équations statique :

- ▶ en 3D :  $E_s = 6(S - 1)$ ;
- ▶ en 2D :  $E_s = 3(S - 1)$ .

#### Remarques

- ▶ Un système en **chaîne ouverte** est toujours **isostatique**.
- ▶ Une liaison hélicoïdale a **5 inconnues statiques et 1 inconnue cinématique**.
- ▶ Le degré d'hyperstatisme d'une chaîne bouclé **simple** ne peut pas excéder 6.

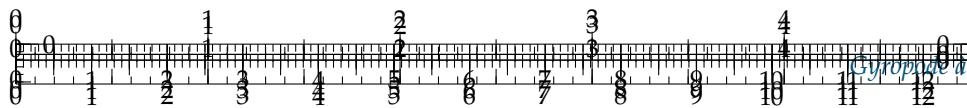
### 6.2.2 Le système est hyperstatique... et alors ?

Tout d'abord, d'un point de vue calcul mécanique, l'intérêt d'un système isostatique est qu'il est possible de calculer les efforts dans chacune des liaisons. Un système isostatique sera de plus facile à assembler car le positionnement des pièces les unes avec les autres est « unique ».

Pour les systèmes hyperstatiques, il n'est pas possible de connaître chacun des efforts. En revanche, la détermination des lois de mouvement des systèmes reste possible. Les systèmes hyperstatiques sont plus rigides que des systèmes isostatiques mais nécessitent de prendre des précautions au montage ou à la fabrication des pièces :

- ▶ les dimensions des pièces fabriquées doivent être maîtrisées;
- ▶ le parallélisme dans l'espace entre des axes doit être maîtrisé;
- ▶ du jeu doit être prévu pour garantir l'assemblage;
- ▶ des dispositifs de réglage peuvent être proposés.





Un système hyperstatique peut donc être plus cher à réaliser, mais peut être plus rigide et d'une plus grande durée de vie.

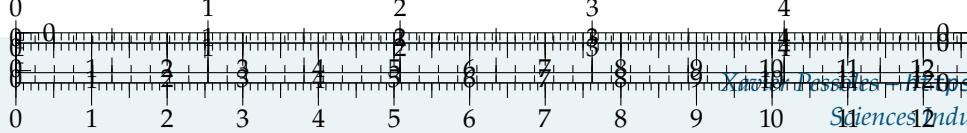
Pour calculer les efforts dans un système hyperstatique, plusieurs solutions sont possibles : on peut par exemple faire des hypothèses sur une répartition d'efforts.

### Méthode – Conditions de montage

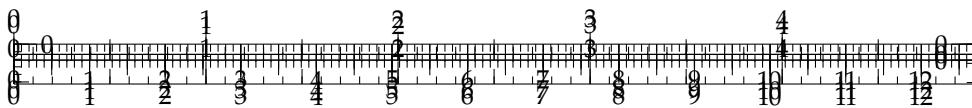
Pour déterminer les conditions de montage, il est possible d'exploiter les équations  $0 = 0$  issues des fermetures de chaînes cinématiques. En effet, ce nombre d'équations correspond au degré d'hyperstatisme :

- ▶ une équation de type  $0 = 0$  issue de la fermeture des vecteurs taux de rotation impose de spécifier un parallélisme ;
- ▶ une équation de type  $0 = 0$  issue de la fermeture des vecteurs vitesse impose de spécifier une distance.

Il est parfois demandé de diminuer le degré d'hyperstatisme d'un système. Pour cela, il faut rajouter des degrés de liberté à certaines liaisons, sans pour autant modifier le comportement du système.







## Application 1 : Pompe à pistons axiaux – Sujet

D'après É. Durif.

### Présentation

On considère, la pompe à pistons axiaux suivante. Nous avons retenu une modélisation avec 4 classes d'équivalence y compris le bâti.

On note  $n$  le nombre de classes d'équivalence hors bâti (ici  $n = 3$ ). Dans cette étude, on se place directement dans la base  $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  qui est en rotation par rapport à la base  $B_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour de l'axe  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$  avec le paramètre de rotation  $\theta$ . Le plateau inclinable est supposé fixe au cours du temps. On lui associe le repère  $R_{0*} = (\vec{x}_{0*}, \vec{y}_{0*}, \vec{z}_{0*})$  qui est en rotation par rapport au repère  $R_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour de l'axe  $\vec{y}_0$  avec le paramètre angulaire  $\alpha$ . On introduit le repère  $R_{1*} = (\vec{x}_{1*}, \vec{y}_{1*}, \vec{z}_{1*})$  directement obtenu à partir de  $R_{0*}$  par une rotation autour de  $\vec{z}_{0*}$  et d'angle  $\theta$ . On donne également :  $\vec{AB} = L_1 \vec{z}_0$ ,  $\vec{BC} = -R \vec{x}_1$ ,  $\vec{CD} = \lambda \vec{z}_1$ ,  $\vec{DE} = h \vec{z}_{1*}$ .

- 0 : bâti;
- 1 : barillet;
- 2 : piston;
- 3 : pousoir.

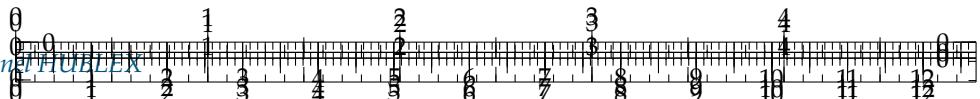
.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Activation\_01/images/pompe.pdf

ogique

Les liaisons entre les différentes classes d'équivalence permettent de modéliser le système avec le schéma cinématique ci-après.

- Les liaisons sont parfaites : sans frottements ni jeux.
- Le poids et les effets d'inerties sont négligés.
- On introduit une action de pression s'exerçant sur le piston 2 assimilable à un glisseur d'axe central  $(C, \vec{z}_1)$  et qui a pour résultante en effort :  $\vec{F}_p = F_p \vec{z}_1$





**FIGURE 6.6** – Schéma cinématique d'une pompe à pistons axiaux

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Activation\_01/images/Cy\_06\_02\_Activation\_01.png

### Etude préliminaire

**Question 1** Tracer le graphe de structure du mécanisme.

**Question 2** En utilisant les formules globales de l'hyperstatisme, déterminer le degré d'hyperstatisme en utilisant la méthode statique puis la méthode cinématique.

### Étude statique

**Question 3** Isoler successivement les pièces 1, 2 puis 3 et réaliser le PFS en *B*, *C* et *D*.

**Question 4** Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

### Étude cinématique

**Question 5** Écrire les fermetures de chaînes associées au mécanisme.

**Question 6** Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

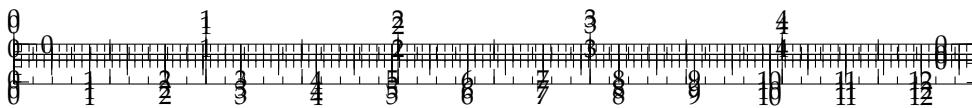
### Hyperstatisme

**Question 7** Proposer des conditions géométriques permettant d'assurer l'assemblage du système.

**Question 8** Proposer une modèle isostatique cinématiquement équivalent.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Activation\_01/images/Cy\_06\_02\_Activation\_01.png





## Application 1 : Pompe à pistons axiaux – Corrigé

D'après É. Durif.

### Présentation

On considère, la pompe à pistons axiaux suivante. Nous avons retenu une modélisation avec 4 classes d'équivalence y compris le bâti.

On note  $n$  le nombre de classes d'équivalence hors bâti (ici  $n = 3$ ). Dans cette étude, on se place directement dans la base  $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  qui est en rotation par rapport à la base  $B_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour de l'axe  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$  avec le paramètre de rotation  $\theta$ . Le plateau inclinable est supposé fixe au cours du temps. On lui associe le repère  $R_{0*} = (\vec{x}_{0*}, \vec{y}_{0*}, \vec{z}_{0*})$  qui est en rotation par rapport au repère  $R_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour de l'axe  $\vec{y}_0$  avec le paramètre angulaire  $\alpha$ . On introduit le repère  $R_{1*} = (\vec{x}_{1*}, \vec{y}_{1*}, \vec{z}_{1*})$  directement obtenu à partir de  $R_{0*}$  par une rotation autour de  $\vec{z}_{0*}$  et d'angle  $\theta$ . On donne également :  $\vec{AB} = L_1 \vec{z}_0$ ,  $\vec{BC} = -R \vec{x}_1$ ,  $\vec{CD} = \lambda \vec{z}_1$ ,  $\vec{DE} = h \vec{z}_{1*}$ .

- 0 : bâti;
- 1 : barillet;
- 2 : piston;
- 3 : pousoir.

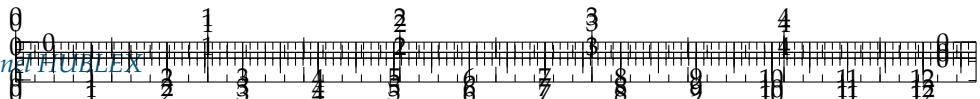
.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Activation\_01/images/pompe.pdf

ogique

Les liaisons entre les différentes classes d'équivalence permettent de modéliser le système avec le schéma cinématique ci-après.

- Les liaisons sont parfaites : sans frottements ni jeux.
- Le poids et les effets d'inerties sont négligés.
- On introduit une action de pression s'exerçant sur le piston 2 assimilable à un glisseur d'axe central  $(C, \vec{z}_1)$  et qui a pour résultante en effort :  $\vec{F}_p = F_p \vec{z}_1$





**FIGURE 6.8** – Schéma cinématique d'une pompe à pistons axiaux

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02

### Etude préliminaire

**Question 1** Tracer le graphe de structure du mécanisme.

**Question 2** En utilisant les formules globales de l'hyperstatisme, déterminer le degré d'hyperstatisme en utilisant la méthode statique puis la méthode cinématique.

### Étude statique

**Question 3** Isoler successivement les pièces 1, 2 puis 3 et réaliser le PFS en *B*, *C* et *D*.

**Question 4** Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

### Étude cinématique

**Question 5** Écrire les fermetures de chaînes associées au mécanisme.

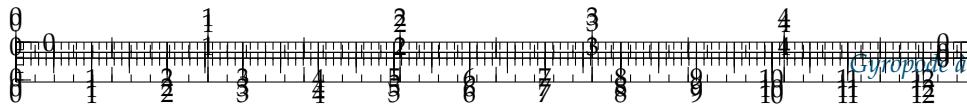
**Question 6** Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

### Hyperstatisme

**Question 7** Proposer des conditions géométriques permettant d'assurer l'assemblage du système.

**Question 8** Proposer une modèle isostatique cinématiquement équivalent.





## Bilan des actions mécanique pour chacune des classes d'équivalence

### Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 1

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point  $B$  :

► Action de 0 sur 1 en A :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1A})\} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & 0 \\ Y_{A01} & 0 \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & L_1 Y_{A01} \\ Y_{A01} & -L_1 X_{A01} \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

► Action de 0 sur 1 en B :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1B})\} = \begin{Bmatrix} X_{B01} & L_{B01} \\ Y_{B01} & M_{B01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

► Action de 2 sur 1 en C :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & -R Y_{21} \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

## Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 2

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point  $C$  :

► Action de 3 sur 2 en D :

$$\{\mathcal{T}(S_3 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{32} & -\lambda Y_{32} \\ Y_{32} & \lambda X_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

► Action de 1 sur 2 en C :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} -X_{21} & -L_{21} \\ -Y_{21} & -M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

► Action de la pression en C :

$$\{\mathcal{T}(\text{pression} \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_p & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

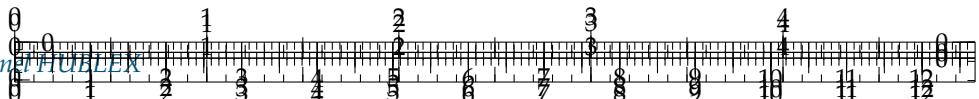
## Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 3

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point D :

► Action de 2 sur 3 en D :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} = \begin{Bmatrix} -X_{32} & 0 \\ -Y_{32} & 0 \\ -Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1}$$





► Action de 0 sur 3 en E :

$$\{\mathcal{T}(S0 \rightarrow S3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_{1*}} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_{1*}} = \begin{Bmatrix} Z_{03} \sin(\alpha) & L_{03} \cos(\alpha) \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} \cos(\alpha) & -L_{03} \sin(\alpha) \end{Bmatrix}$$

### Résolution d'un système linéaire homogène

En appliquant successivement le principe fondamental de la statique pour chacun des trois ensemble on obtient un système de 18 équations :

- |                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| (1)résultante suivant $\vec{x}_1$   | $X_{A01} + X_{B01} + X_{C21} = 0$      |
| (2)résultante suivant $\vec{y}_1$   | $Y_{A01} + Y_{B01} + Y_{C21} = 0$      |
| (3)résultante suivant $\vec{z}_1$   | $Z_{A01} = 0$                          |
| (4)moment suivant $(B, \vec{x}_1)$  | $L_1 Y_{A01} + L_{B01} + L_{C21} = 0$  |
| (5)moment suivant $(B, \vec{y}_1)$  | $-L_1 X_{A01} + M_{B01} + M_{C21} = 0$ |
| (6)moment suivant $(B, \vec{z}_1)$  | $-R Y_{C21} = 0$                       |
| (7)résultante suivant $\vec{x}_1$   | $X_{D32} - X_{C21} = 0$                |
| (8)résultante suivant $\vec{y}_1$   | $Y_{D32} - Y_{C21} = 0$                |
| (9)résultante suivant $\vec{z}_1$   | $Z_{D32} + F_p = 0$                    |
| (10)moment suivant $(C, \vec{x}_1)$ | $-\lambda Y_{D32} - L_{C21} = 0$       |
| (11)moment suivant $(C, \vec{y}_1)$ | $\lambda X_{D32} - M_{C21} = 0$        |
| (12)moment suivant $(C, \vec{z}_1)$ | $0 = 0$                                |
| (13)résultante suivant $\vec{x}_1$  | $-X_{D32} + Z_{E03} \sin(\alpha) = 0$  |
| (14)résultante suivant $\vec{y}_1$  | $-Y_{D32} = 0$                         |
| (15)résultante suivant $\vec{z}_1$  | $-Z_{D32} + Z_{E03} \cos(\alpha) = 0$  |
| (16)moment suivant $D\vec{x}_1$     | $L_{E03} \cos(\alpha) = 0$             |
| (17)moment suivant $D\vec{y}_1$     | $M_{E03} = 0$                          |
| (18)moment suivant $D\vec{z}_1$     | $-M_{E03} \sin(\alpha) = 0$            |

### Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

#### Bilan de l'approche statique

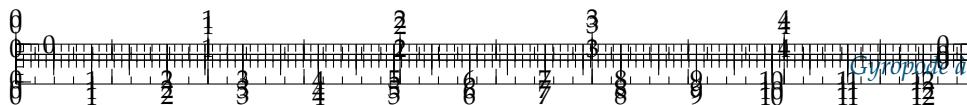
- On obtient alors un système de  $E_s = 18$  équations statiques.
- La modélisation comporte  $I_s = 17$  inconnues statiques.
- Certaines de ces équations ne sont pas significatives, elles correspondent aux mobilités cinématiques du mécanisme :

- Équation (12) "0 = 0" : mobilité de rotation de piston autour de  $(C, \vec{z}_1)$ .
- Les équations (6) (8) et (14) sont équivalentes à deux équations libres : mobilité de rotation du barillet autour de  $(B, \vec{z}_1)$ .
- Équation (18) liée à (17) : rotation du poussoir autour de  $(E, \vec{z}_{1*})$ .

Le système possède alors 3 mobilités cinématiques ( $m_c = 3$ ).

Pour résoudre ce système on se retrouve donc avec  $r_s = 15$  équations significatives (rang du système d'équations statiques  $r_s$ ) pour  $I_s = 17$  inconnues. Nous avons donc un déficit de 2 équations ou encore 2 inconnues statiques de trop





pour résoudre le problème. Le système est donc **hyperconstraint**. On dit que la **modélisation du système est hyperstatique d'ordre 2**

$$h = I_s - r_s = I_s - (E_s - m_c) \quad (6.1)$$

## Étude cinématique

### Objectifs

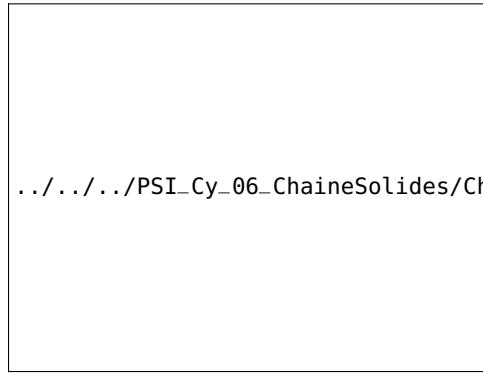
- ▶ La résolution cinématique a pour but de déterminer les caractéristiques cinématiques au niveau de toutes les liaisons de la chaîne.
- ▶ Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypertstaticité en vue de déterminer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.
- ▶ Elle permet enfin de déterminer la loi entrée-sortie cinématique du mécanisme.

### Démarche

Le graphe de liaison donné ci-après montre que le mécanisme possède deux chaînes fermées :

- ▶ Chaîne 1 : {0 – 3 – 2 – 1 – 0}.
- ▶ Chaîne 2 : {0 – 1 – 0}.

L'approche cinématique consiste à écrire pour chaque chaîne la fermeture cinématique à l'aide des torseurs.



Graphe de structure de la pompe

### Fermeture de chaîne cinématique

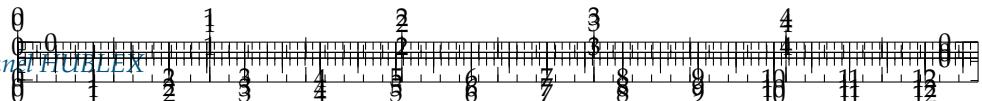
#### Chaine cinématique 1

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en C :





►  $\{\mathcal{V}(3/0)\}$  :

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}(3/0)\} &= \begin{Bmatrix} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{Bmatrix}_{E,R_{1*}} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_{1*}} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{30} \cos(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) \end{Bmatrix}_{D,R_1} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 & u_{30} \cos(\alpha) - \lambda r_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) \end{Bmatrix}_{C,R_1}\end{aligned}$$

►  $\{\mathcal{V}(3/2)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} = \begin{Bmatrix} p_{32} & 0 \\ q_{32} & 0 \\ r_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1} = \begin{Bmatrix} p_{32} & -\lambda q_{32} \\ q_{32} & \lambda p_{32} \\ r_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

►  $\{\mathcal{V}(2/1)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & w_{21} \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

►  $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R r_{B10} \\ r_{B10} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

## Chaine cinématique 2

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \{\mathcal{V}(1_B/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en  $A$  :

►  $\{\mathcal{V}(1_A/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \begin{Bmatrix} p_{A10} & 0 \\ q_{A10} & 0 \\ r_{A10} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1}$$

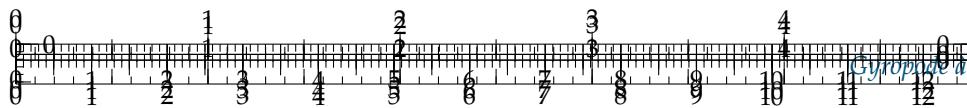
►  $\{\mathcal{V}(1_B/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1_B/0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & w_{B10} \end{Bmatrix}_{A,R_1}$$

## Résolution

On écrit alors la fermeture cinématique pour chaque fermeture cinématique. Cela donnera 12 équation pour 13 inconnues avec les deux fermetures de chaines :





$$\left\{ \mathcal{V}_{(1/0)}^A \right\} - \left\{ \mathcal{V}_{(1/0)}^B \right\} = \{0\}$$

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} - \{\mathcal{V}(3/0)\} = \{0\}$$

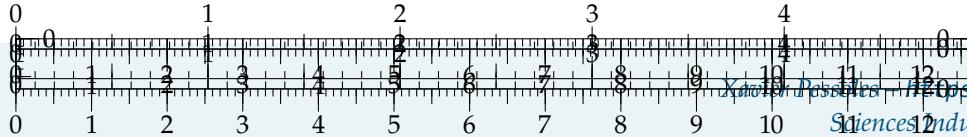
$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (3) & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (7) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (9) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 & 1 \\ (10) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & \lambda \sin(\alpha) & 0 & -\lambda & 0 \\ (11) & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ (12) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{A10} \\ q_{A10} \\ r_{A10} \\ r_{B10} \\ w_{B10} \\ u_{30} \\ v_{30} \\ r_{30} \\ p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \\ r_{21} \\ w_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

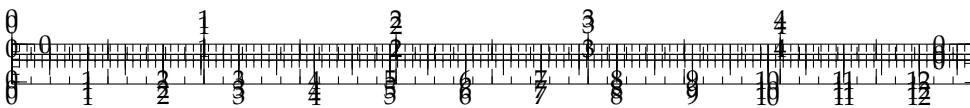
### Approche cinématique

- ▶ Avec deux cycles fermés, on obtient alors un système de  $E_c = 12$  équations.
- ▶ La modélisation comporte  $I_c = 13$  inconnues cinématiques.
- ▶ Le rang du système vaut  $r_c = 10$  car deux équations ((4) et (5)) donnent “ $0 = 0$ ” et ne sont donc pas significatives.
- ▶ Le nombre d'équations non-significatives correspond directement à l'**hyperstaticité** (ici  $h = 2$ )
- ▶ La mobilité cinématique se définit comme la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques ( $I_c$ ) et le nombre d'équations significatives ( $r_c$ ) : **ici**  $m_c = 3$

$$m_c = I_c - r_c = I_c - (E_c - h). \quad (6.2)$$







## Application 2 : Exercices d'application – Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie.

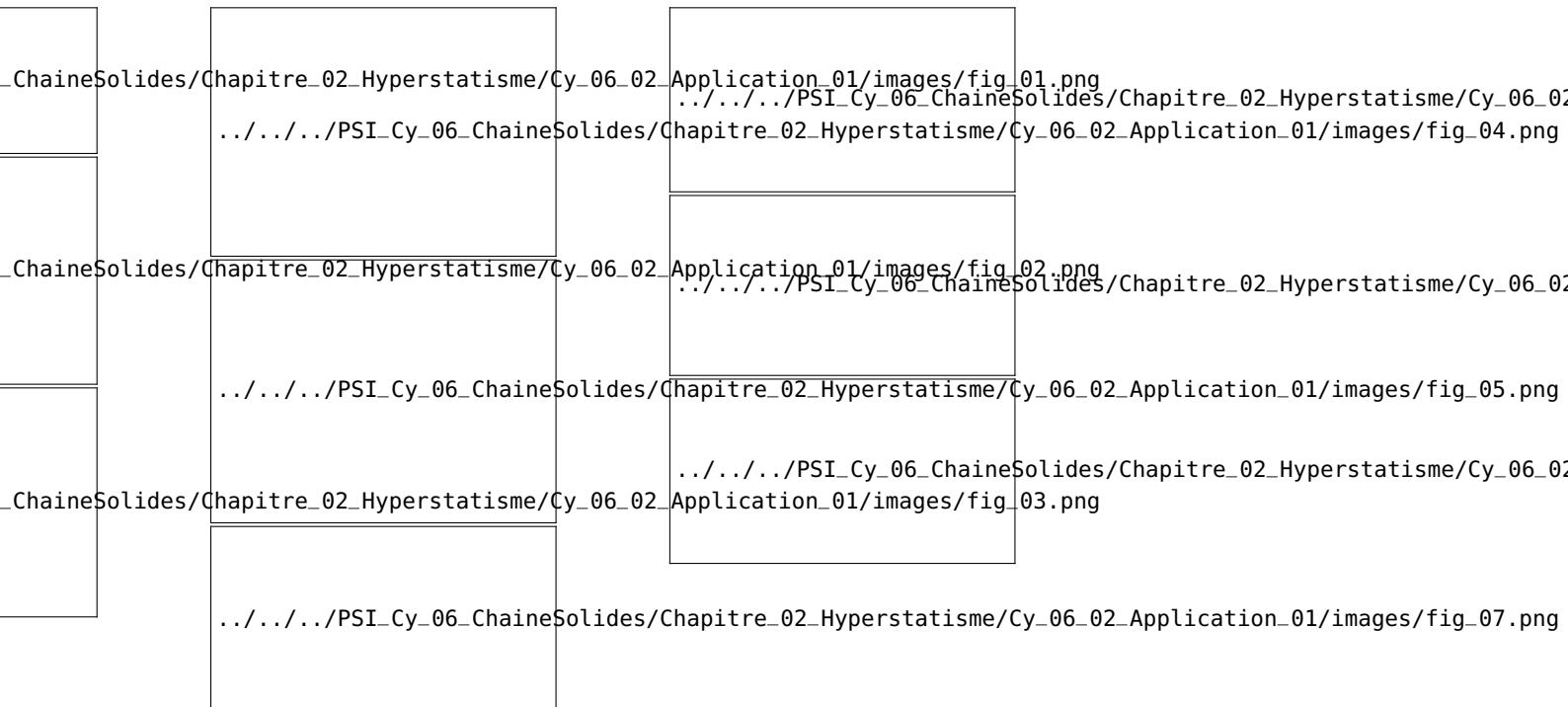
### Exercice 1 –Applications directes

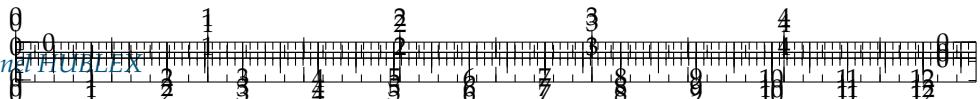
B2-16

**Question 1** Pour chacun des mécanismes suivants, déterminer le degré d'hyperstatisme.

**Question 2** Lorsque le modèle est hyperstatique, proposer :

- *des conditions d'assemblage (intuitivement);*
- *un modèle isostatique.*





Banque PT SIA – 2008.

## Exercice 2 – Déphasage d'arbre à cames

L'optimisation d'un moteur 4 temps passe (entre autre) par une bonne maîtrise des lois de levée des soupapes. Il est ainsi possible de positionner entre la poulie 1 (entraînée par le vilebrequin via une chaîne) et l'arbre à came 2 un système permettant de créer un déphasage entre ces pièces.

On propose ci-dessous un modèle cinématique du système de déphasage. On retrouve la culasse 0, la poulie d'entraînement 1, l'arbre à cames 2, le piston 3 et le coulisseau 4.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Application\_01/images/calage\_1.png

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_App

**Question 3** Établir le graphe des liaisons du mécanisme.

**Question 4** Déterminer le degré d'hyperstatisme en précisant la démarche utilisée.  
(On utilisera la méthode cinématique et la méthode statique).

## Exercice 3 – Simulateur de vol pour la formation de pilotes en aéroclub

Centrale Supelec 2017 – PSI.

On s'intéresse à un simulateur de vol à plate-forme dynamique. Deux moteurs permettent d'assurer le mouvement de tangage. Ils entraînent respectivement les liaisons pivots de centres  $H$  et  $O$ .

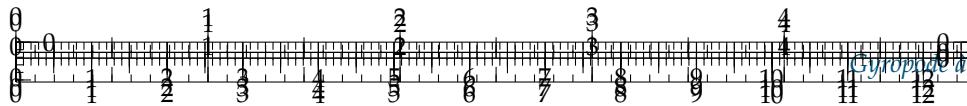
On propose le modèle plan suivant (la pièce 6 est en traits pointillés pour la démarquer des autres pièces).

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Application\_01/images/aero\_04.png

**Question 5** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_App





## Exercice 5 – Pousseur de tablier

Une technique pour construire un pont et de commencer par ériger les piles définitives en béton et les piles temporaires en acier. On peut alors assembler tronçon par tronçon, les 2 tabliers sur la terre ferme et enfin pousser les deux parties du tablier assemblées sur les piles afin de réaliser la jonction. Cette opération de poussée est réalisée à l'aide de systèmes hydrauliques nommés « pousseurs de tablier ».

Le pousseur de tablier est soutenu par plusieurs vérins de balancelle verticaux (non étudiés) qui assurent le positionnement de la semelle afin que la cale de poussée soit parallèle et à la bonne distance du plan inférieur du tablier.

On suppose dans cette partie, que l'angle que fait le plan supérieur de la cale de levage avec l'horizontale est petit. Ce qui revient à considérer que les contacts dans les liaisons planes sont maintenus durant tout le mouvement. Une première étude conduit à la modélisation suivante.

**Question 6** Proposer un modèle pour tenir compte de l'hypothèse des angles « petits ».

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

**Question 7** Estimer le degré de mobilité du modèle proposé.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

**Question 8** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

**Question 9** Proposer des modifications pour rendre le système isostatique. Faire un nouveau schéma cinématique tenant compte de ces modifications.

**Question 10** Le constructeur a fait le choix de mettre une liaison glissière de direction horizontale à la place de la liaison plane entre la cale de levage (2) et la semelle (3) (figure 6). Qu'est-ce qui justifie un tel choix ? Comment peut-on rendre ce modèle isostatique ?

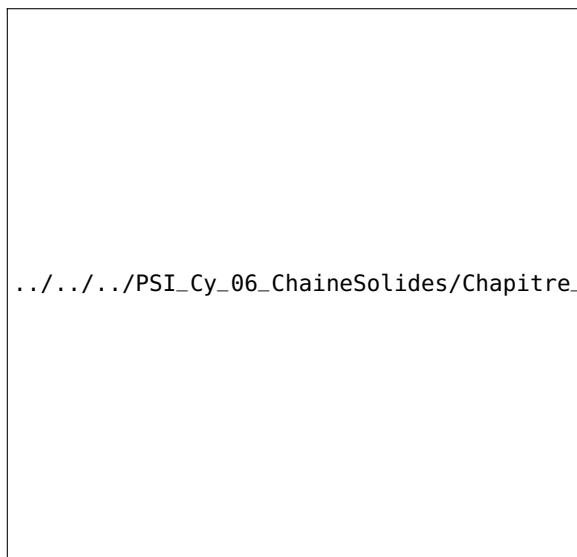
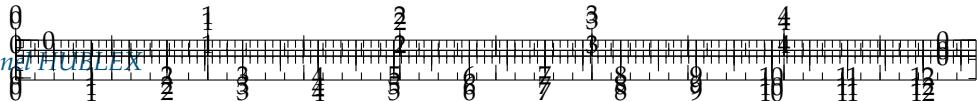
.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

## Exercice 6 – Planeur sous marin

Le planeur sous-marin est un dispositif autonome développé par l'IFREMER dont le but est de réaliser des mesures océanographiques. Il ressemble à un mini sous-marin qui plane en dents de scie vers un point prédéfini. Il remonte régulièrement à la surface afin de communiquer avec son opérateur par satellite afin d'envoyer les données acquises pendant sa plongée pour évaluer sa dérive due aux courants.

Dans le but de modifier l'orientation et l'équilibrage du planeur, l'apartie centrale du planeur comporte un dispositif qui permet de positionner le centre de gravité axialement 24 et radialement 11.

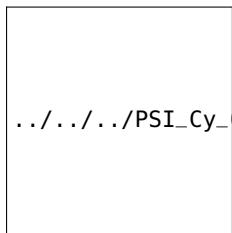


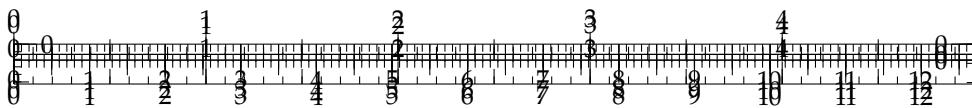


**Question 11** Réaliser le graphe de liaison associé au schéma cinématique minimal proposé. Identifier le nombre de mobilités.

On supposera que la liaison entre deux roues dentées est une liaison ponctuelle.

**Question 12** Déterminer le degré d'hyperstatisme. Si celui-ci est non nul, indiquer la ou les contraintes géométriques associées.





## Application 2 : Exercices d'application – Corrigé

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie.

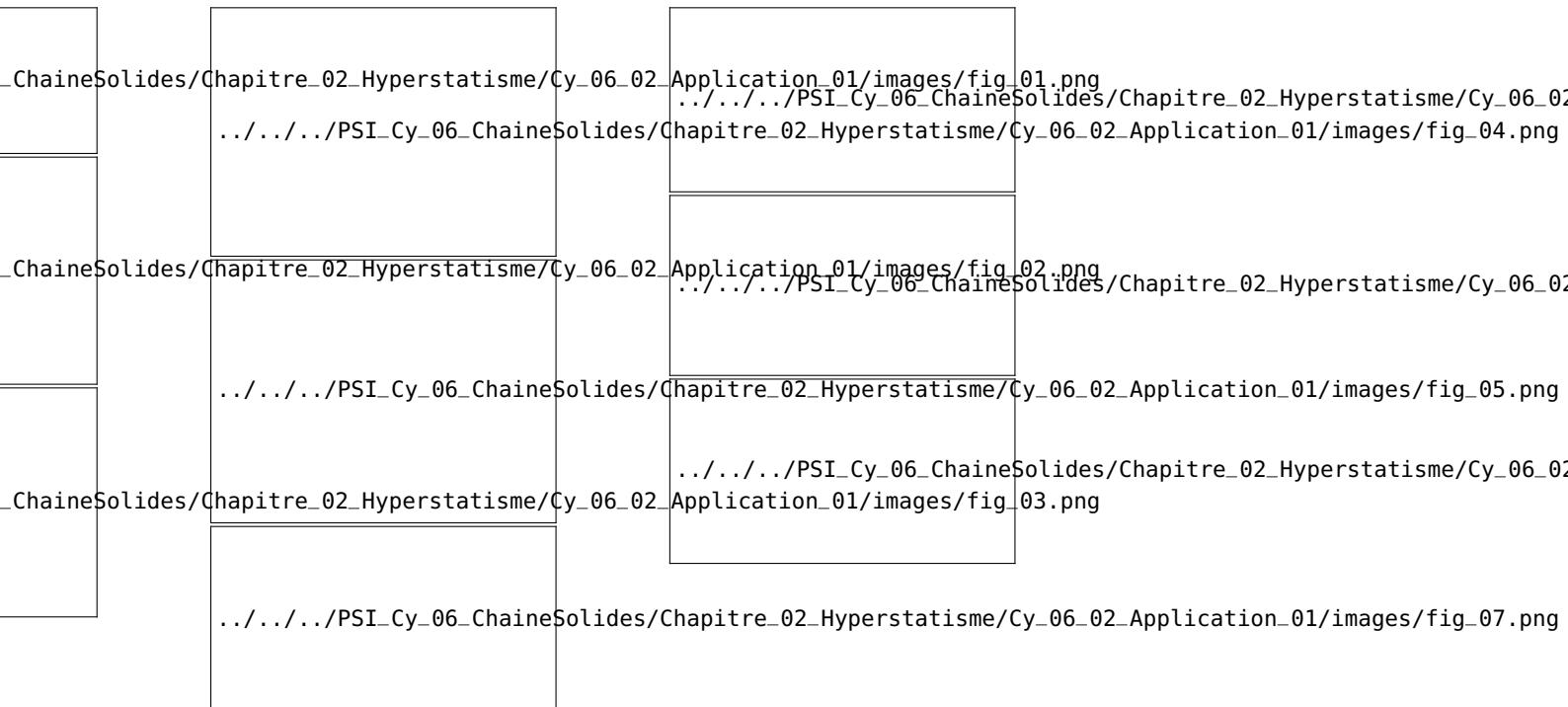
### Exercice 1 – Applications directes

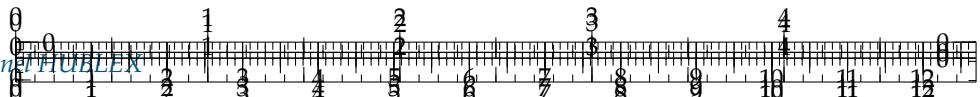
B2-16

**Question 1** Pour chacun des mécanismes suivants, déterminer le degré d'hyperstatisme.

**Question 2** Lorsque le modèle est hyperstatique, proposer :

- *des conditions d'assemblage (intuitivement);*
- *un modèle isostatique.*





## Exercice 2 – Déphasage d'arbre à cames

Banque PT SIA – 2008.

L'optimisation d'un moteur 4 temps passe (entre autre) par une bonne maîtrise des lois de levée des soupapes. Il est ainsi possible de positionner entre la poulie **1** (entraînée par le vilebrequin via une chaîne) et l'arbre à came **2** un système permettant de créer un déphasage entre ces pièces.

On propose ci-dessous un modèle cinématique du système de déphasage. On retrouve la culasse **0**, la poulie d'entraînement **1**, l'arbre à cames **2**, le piston **3** et le coulisseau **4**.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Application\_01/images/calage\_1.png

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_App

**Question 3** Établir le graphe des liaisons du mécanisme.

**Correction**

**Question 4** Déterminer le degré d'hyperstatisme en précisant la démarche utilisée. (On utilisera la méthode cinématique et la méthode statique).

**Correction**

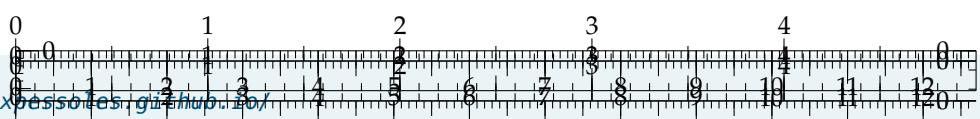
## Exercice 3 – Simulateur de vol pour la formation de pilotes en aéroclub

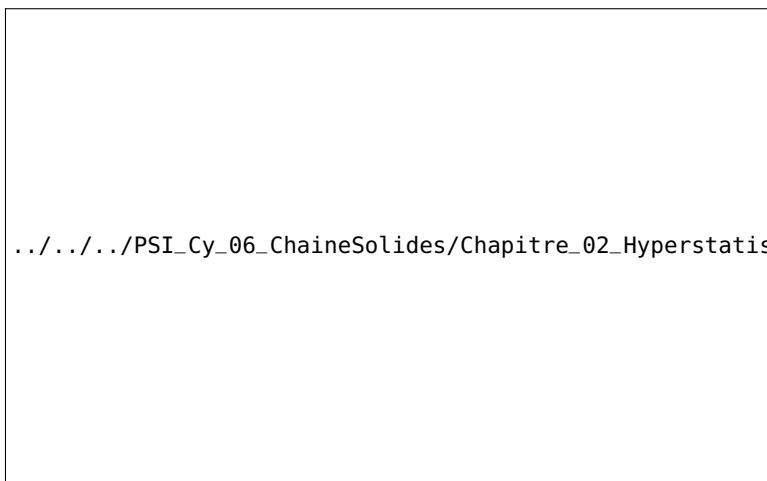
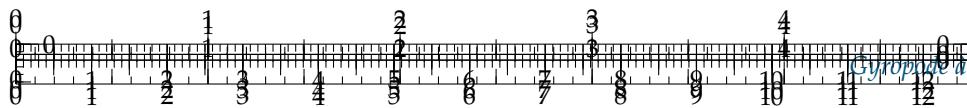
Centrale Supelec 2017 – PSI.

On s'intéresse à un simulateur de vol à plate-forme dynamique. Deux moteurs permettent d'assurer le mouvement de tangage. Ils entraînent respectivement les liaisons pivots de centres *H* et *O*.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Application\_01/images/aero\_04.png

**Question 5** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.





### Exercice 5 – Pousseur de tablier

Banque PT 2008 – SIC.

Une technique pour construire un pont et de commencer par ériger les piles définitives en béton et les piles temporaires en acier. On peut alors assembler tronçon par tronçon, les 2 tabliers sur la terre ferme et enfin pousser les deux parties du tablier assemblées sur les piles afin de réaliser la jonction. Cette opération de poussée est réalisée à l'aide de systèmes hydrauliques nommés « pousseurs de tablier ».

Le pousseur de tablier est soutenu par plusieurs vérins de balancelle verticaux (non étudiés) qui assurent le positionnement de la semelle afin que la cale de poussée soit parallèle et à la bonne distance du plan inférieur du tablier.

On suppose dans cette partie, que l'angle que fait le plan supérieur de la cale de levage avec l'horizontale est petit. Ce qui revient à considérer que les contacts dans les liaisons planes sont maintenus durant tout le mouvement. Une première étude conduit à la modélisation suivante.

**Question 6** Proposer un modèle pour tenir compte de l'hypothèse des angles « petits ».

**Correction**

**Question 7** Estimer le degré de mobilité du modèle proposé.

**Correction**

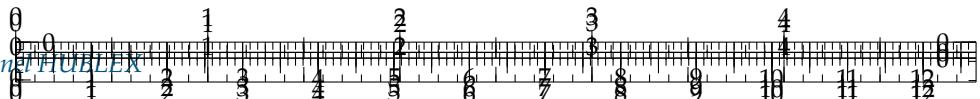
**Question 8** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.

**Correction**

**Question 9** Proposer des modifications pour rendre le système isostatique. Faire un nouveau schéma cinématique tenant compte de ces modifications.

**Correction**





**Question 10** Le constructeur a fait le choix de mettre une liaison glissière de direction horizontale à la place de la liaison plane entre la cale de levage (2) et la semelle (3) (figure 6). Qu'est-ce qui justifie un tel choix ? Comment peut-on rendre ce modèle isostatique ?

#### Correction

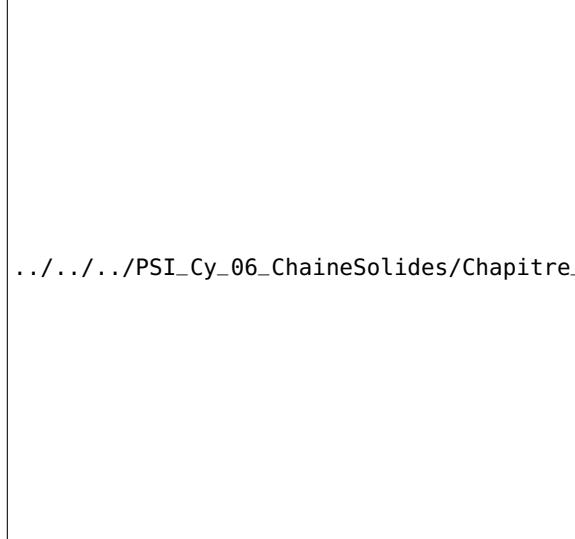
Banque PT 2012 – SIC.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Application\_01/images/plan\_01.png

### Exercice 6 – Planeur sous marin

Le planeur sous-marin est un dispositif autonome développé par l'IFREMER dont le but est de réaliser des mesures océanographiques. Il ressemble à un mini sous-marin qui plane en dents de scie vers un point prédefini. Il remonte régulièrement à la surface afin de communiquer avec son opérateur par satellite afin d'envoyer les données acquises pendant sa plongée pour évaluer sa dérive due aux courants.

Dans le but de modifier l'orientation et l'équilibrage du planeur, l'apartie centrale du planeur comporte un dispositif qui permet de positionner le centre de gravité axialement **24** et radialement **11**.



**Question 11** Réaliser le graphe de liaison associé au schéma cinématique minimal proposé. Identifier le nombre de mobilités.

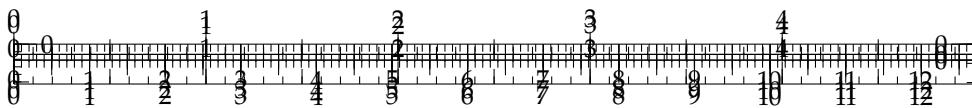
#### Correction

On supposera que la liaison entre deux roues dentées est une liaison ponctuelle.

**Question 12** Déterminer le degré d'hyperstatisme. Si celui-ci est non nul, indiquer la ou les contraintes géométriques associées.

#### Correction





## TD 1 : Suspension de l'AddBike – Sujet

### Présentation

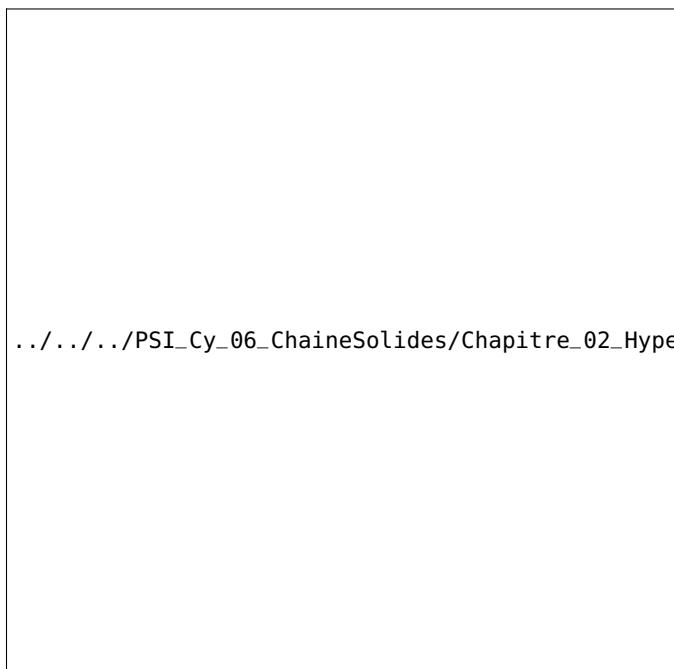
L'Add-Bike est un système pouvant s'adapter à tous types de vélo et doit permettre de transporter des marchandises (colis ou courses du quotidien) ou des enfants.

Il est équipé d'un système de suspension permettant de limiter le mouvement de roulis dans les virages.

Agrégation Sciences Industrielles de l'Ingénieur – 2018.

B2-16

[.../.../PSI\\_Cy\\_06\\_ChaineSolides/C](http://.../.../PSI_Cy_06_ChaineSolides/C)



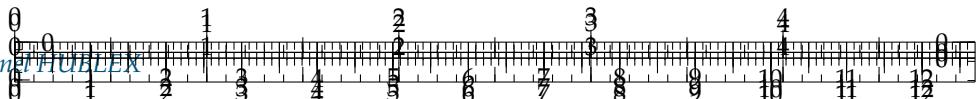
[.../.../PSI\\_Cy\\_06\\_ChaineSolides/Cy\\_06\\_02\\_TD\\_01\\_AddBike/images/add\\_04.pr](http://.../.../PSI_Cy_06_ChaineSolides/Cy_06_02_TD_01_AddBike/images/add_04.pr)

### Exigence 1.2 : Stabilité des occupants et des marchandises

#### Objectif

Pour assurer la stabilité des occupants du bi-roue, il est nécessaire de déterminer les conditions géométriques permettant de limiter l'angle de roulis (exigence 1.2.1). Ainsi, cet angle roulis ne doit pas dépasser  $\beta = 5^\circ$  lorsque le cycliste penche le mât vertical de  $\alpha = 30^\circ$ .





.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_01\_AddeB

Pour pouvoir tourner, le cycliste penche le mât vertical 04 par l'intermédiaire du guidon, ce qui conduit à la déformation du parallélogramme  $ACDF$  donné dans la figure suivante et à la rotation des roues autour de l'axe horizontal longitudinal  $\vec{x}_0$ . Lors de la déformation du parallélogramme, les bielles 01 et 03 ne restent pas parfaitement horizontales ; le passager assis dans le siège lié à la bielle 03, subit donc du roulis, c'est-à-dire un pivotement autour de l'axe horizontal longitudinal  $\vec{x}_0$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02

L'angle  $\beta$  correspond à l'angle de roulis des bielles 01 et 03.

**Question 1** En réalisant une fermeture géométrique, déterminer la relation liant l'angle  $\beta$  et l'excentricité  $e$  des fusées 02g et 02d.

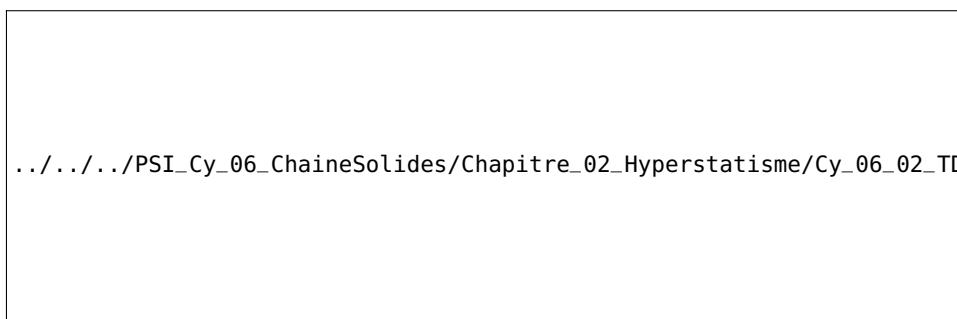
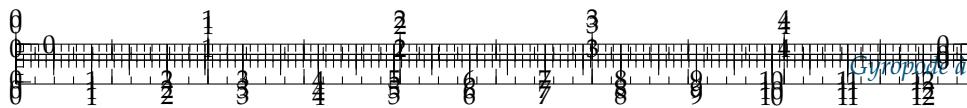
**Question 2** En déduire une valeur de l'excentricité  $e$  permettant de valider l'exigence 1.2.1.

### Exigence 1.5 : Exigences économiques – Assemblage

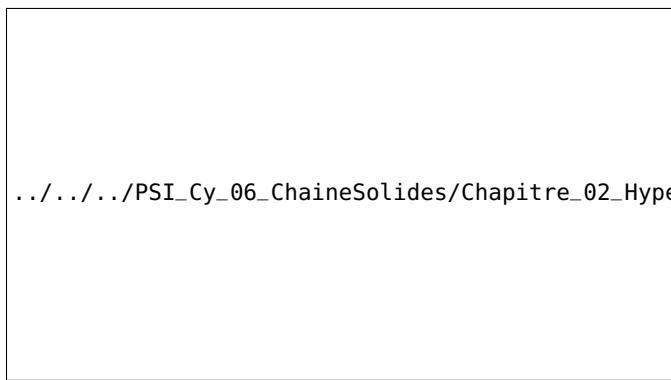
#### Objectif

Afin de pouvoir vendre son produit à un prix attractif, la start-up doit pouvoir fabriquer et assembler son produit à un coût satisfaisant. Une maîtrise des coûts passe par la maîtrise des spécifications garantissant l'assemblage du système et par des coûts de fabrication réduits. Les objectifs sont ici de : spécifier des conditions géométriques sur les dimensions de la bielle inférieure (03) à partir des conditions de fonctionnement.





**Question 3** Après avoir fait un graphe de structure et sans tenir compte des roues et de leurs liaisons au sol, donner le degré d'hyperstatisme du modèle cinématique suivant.



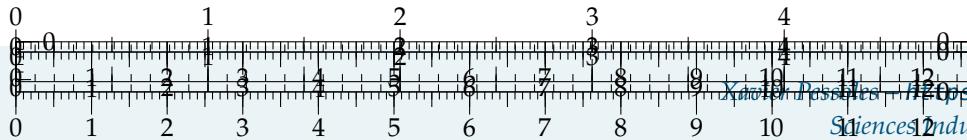
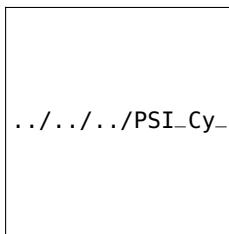
**Question 4** Donner les torseurs cinématiques  $\{\mathcal{V} (2/3)\}, \{\mathcal{V} (1/2)\}, \{\mathcal{V} (4/3)\}, \{\mathcal{V} (1/4)\}$  ■

**Question 5** En utilisant une fermeture de chaîne cinématique, donner le système d'équations liant les différentes variables.

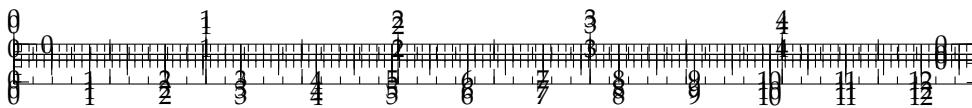
**Question 6** En déduire les conditions géométriques à imposer sur la bielle (03) afin de satisfaire l'assemblage du mécanisme.

## Synthèse

**Question 7** Conclure sur les méthodes qui ont permis de répondre aux exigences 1.4 et 1.5.







## TD 1 : Suspension de l'AddBike – Corrigé

### Présentation

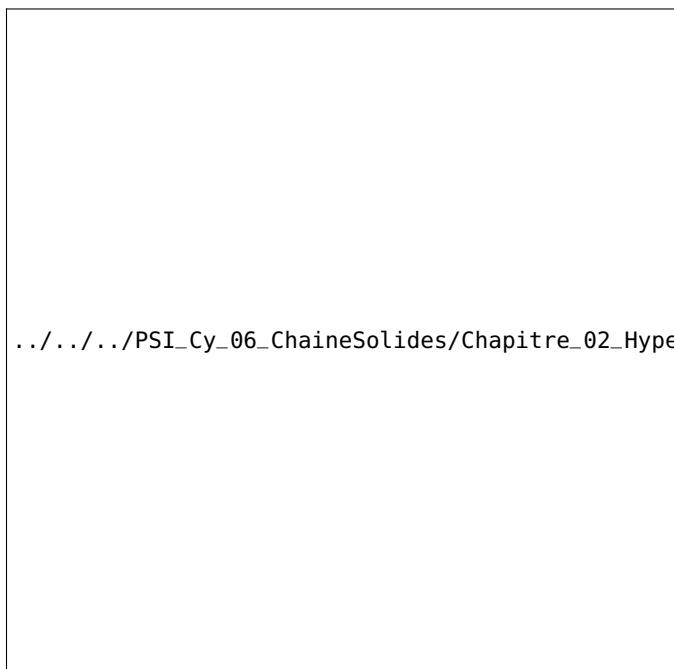
L'Add-Bike est un système pouvant s'adapter à tous types de vélo et doit permettre de transporter des marchandises (colis ou courses du quotidien) ou des enfants.

Il est équipé d'un système de suspension permettant de limiter le mouvement de roulis dans les virages.

Agrégation Sciences Industrielles de l'In-génieur – 2018.

B2-16

[.../PSI\\_Cy\\_06\\_ChaineSolides/C](http://.../PSI_Cy_06_ChaineSolides/C)



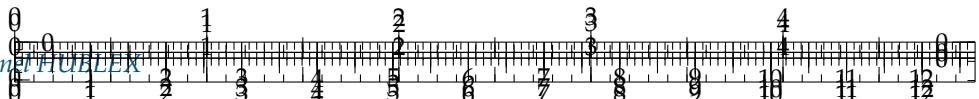
[.../PSI\\_Cy\\_06\\_ChaineSolides/C](http://.../PSI_Cy_06_ChaineSolides/C)

### Exigence 1.2 : Stabilité des occupants et des marchandises

#### Objectif

Pour assurer la stabilité des occupants du bi-roue, il est nécessaire de déterminer les conditions géométriques permettant de limiter l'angle de roulis (exigence 1.2.1). Ainsi, cet angle roulis ne doit pas dépasser  $\beta = 5^\circ$  lorsque le cycliste penche le mât vertical de  $\alpha = 30^\circ$ .





.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_01\_AddeB

Pour pouvoir tourner, le cycliste penche le mât vertical 04 par l'intermédiaire du guidon, ce qui conduit à la déformation du parallélogramme  $ACDF$  donné dans la figure suivante et à la rotation des roues autour de l'axe horizontal longitudinal  $\vec{x}_0$ . Lors de la déformation du parallélogramme, les bielles 01 et 03 ne restent pas parfaitement horizontales ; le passager assis dans le siège lié à la bielle 03, subit donc du roulis, c'est-à-dire un pivotement autour de l'axe horizontal longitudinal  $\vec{x}_0$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02

L'angle  $\beta$  correspond à l'angle de roulis des bielles 01 et 03.

**Question 1** En réalisant une fermeture géométrique, déterminer la relation liant l'angle  $\beta$  et l'excentricité  $e$  des fusées 02g et 02d.

**Question 2** En déduire une valeur de l'excentricité  $e$  permettant de valider l'exigence 1.2.1.

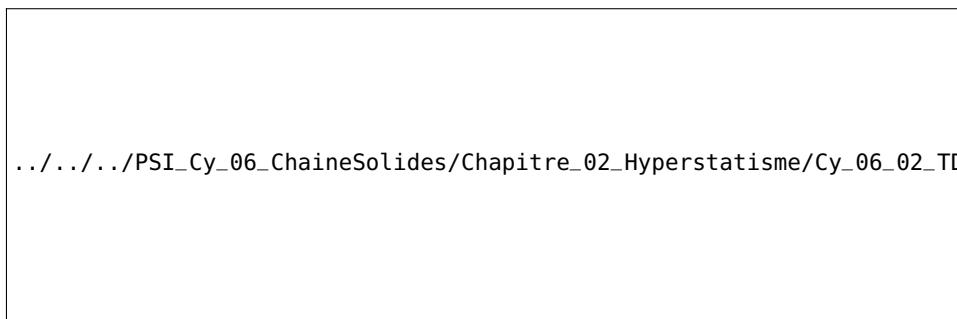
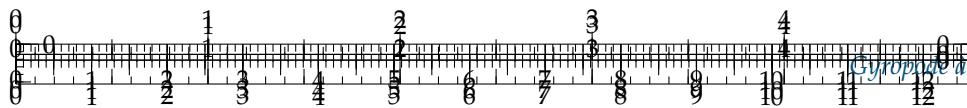
#### Correction

### Exigence 1.5 : Exigences économiques – Assemblage

#### Objectif

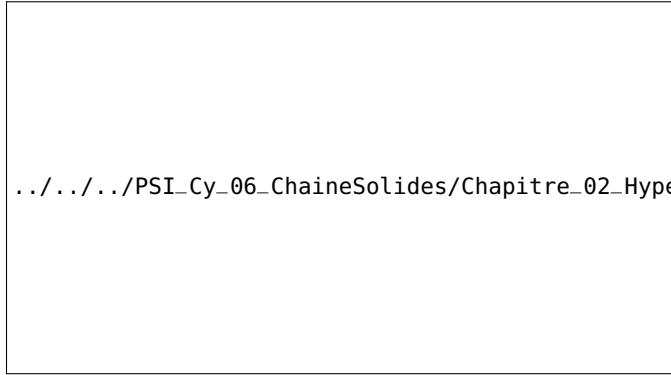
Afin de pouvoir vendre son produit à un prix attractif, la start-up doit pouvoir fabriquer et assembler son produit à un coût satisfaisant. Une maîtrise des coûts passe par la maîtrise des spécifications garantissant l'assemblage du système et par des coûts de fabrication réduits. Les objectifs sont ici de : spécifier des conditions géométriques sur les dimensions de la bielle inférieure (03) à partir des conditions de fonctionnement.





**Question 3** Après avoir fait un graphe de structure et sans tenir compte des roues et de leurs liaisons au sol, donner le degré d'hyperstatisme du modèle cinématique suivant.

#### Correction



**Question 4** Donner les torseurs cinématiques  $\{\mathcal{V} (2/3)\}, \{\mathcal{V} (1/2)\}, \{\mathcal{V} (4/3)\}, \{\mathcal{V} (1/4)\}$  ■

#### Correction

**Question 5** En utilisant une fermeture de chaîne cinématique, donner le système d'équations liant les différentes variables.

#### Correction

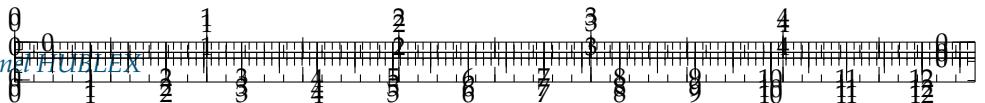
**Question 6** En déduire les conditions géométriques à imposer sur la bielle (03) afin de satisfaire l'assemblage du mécanisme.

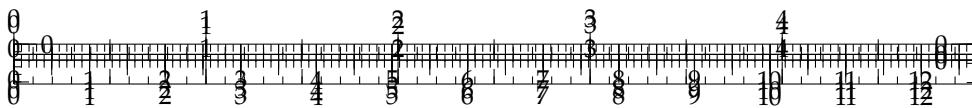
#### Correction

## Synthèse

**Question 7** Conclure sur les méthodes qui ont permis de répondre aux exigences 1.4 et 1.5.



**Correction**



## TD 2 :

# Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E) – Sujet

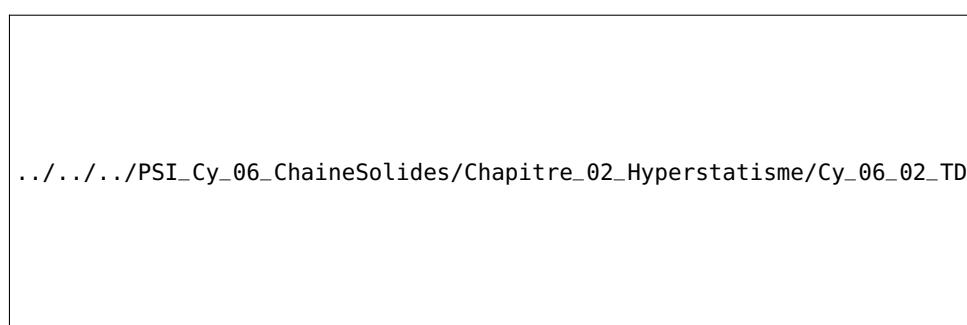
Concours Commun Mines Ponts – 2016.

## Mise en situation

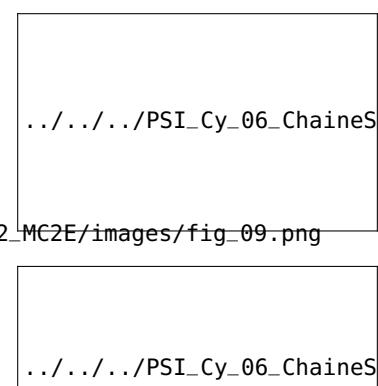
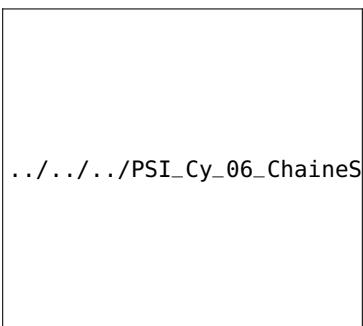
Le robot MC<sup>2</sup>E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

On appelle trocart la pièce qui fait l'interface avec l'abdomen du patient et qui va guider l'ensemble des instruments.



B2-16



La figure au verso donne un extrait du cahier des charges.

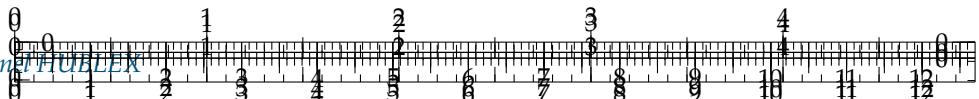
## Travail demandé

On s'intéresse à la phase de vie pendant laquelle la pince est introduite dans le trocart au travers d'un guide (étanche). Une phase de calibration du robot démarre ensuite.

### Objectif

- ▶ Modéliser la liaison entre l'abdomen et la pince (4) en analysant la chaîne ouverte de solides du robot.
- ▶ Analyser les conséquences de la fermeture de la chaîne par la liaison peau-trocart.





Dans cette phase, la pince du MC<sup>2</sup>E est dans l'abdomen du patient, via le trocart. On souhaite étudier ici quelques aspects de la géométrie et de la cinématique du robot liés notamment à la nécessité que le point d'incision  $O_0 = O_{0,1,2,3}$  soit un point fixe.

Le torseur cinématique du solide (**i**) par rapport au solide (**j**), réduit en  $P$ , sera noté :

$$\{\mathcal{V}(i/j)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(i/j)}}{V(P, i/j)} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{xij} \\ \omega_{yij} \\ \omega_{zij} \\ V_{xij} \\ V_{yij} \\ V_{zij} \end{array} \right\}_{P, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k}.$$

### Hypothèses

- L'abdomen (**0**) est supposé fixe.
- La pince (**4**) est déjà introduite dans l'abdomen (**0**) du patient.
- Il n'y a pas encore de contact avec l'organe.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_02\_MC2E/images/fig\_10.png

On donne le graphe des liaisons du mécanisme ainsi modélisé.

La liaison entre la pince (**4**) et l'abdomen (**0**) n'est pas définie ici car elle est complexe : elle est notamment imposée par la forme du trocart, que l'on suppose lié à l'abdomen du patient. On va dans un premier temps considérer la chaîne ouverte de solides allant de (**0**) à (**4**) par l'intermédiaire des trois liaisons pivot et de la liaison glissière.

**Question 1** On considère la chaîne ouverte de solides (**0+1+2+3+4**). Par la méthode de votre choix, définir le torseur cinématique de la liaison équivalente 4/0 noté  $\{\mathcal{V}^{\text{eq}}(4/0)\}$ . En déduire la mobilité cinématique  $m_c$  de cette chaîne de solides.

On envisage deux modélisations pour la liaison entre la pince (**4**) et la peau de l'abdomen par l'intermédiaire du trocart :

- modélisation 1 : liaison sphère-cylindre en  $O_0$  d'axe  $(O_0, \vec{z}_3)$ ;
- modélisation 2 : liaison libre : pas de liaison entre le bâti et la pince.

**Question 2** Dans le cadre des deux modélisations retenues, quels sont alors le degré d'hyperstatisme et la mobilité cinématique de la chaîne fermée. Compléter le tableau du document réponse concernant les implications du modèle retenu sur le robot et les interactions patient / robot. Quelle modélisation vous paraît la plus proche de la réalité ? Argumenter votre réponse.

	Liaison linéaire annulaire	Liaison libre
$m_c =$		
$h =$		
Efforts au point d'insertion*		
Facilité de montage?*		
Rigidité du robot?*		

\* : Remplir par oui ou non

### Éléments de correction

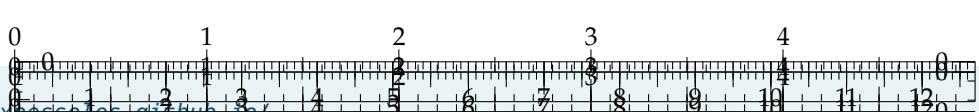
1. Liaison sphère cylindre d'axe  $(O, \vec{z}_3)$ .

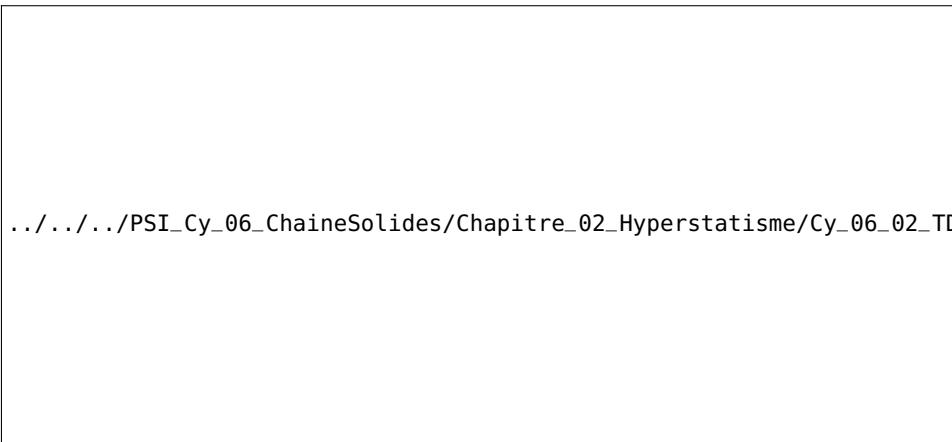
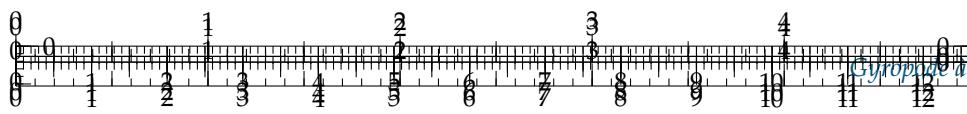
2. Cas 1 :  $m_c = 4, h = 2$ .

Cas 2 :  $m_c = 4, h = 0$ .

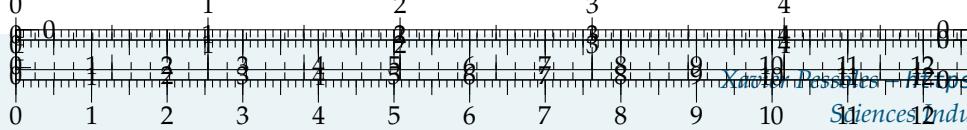
3. Exigence 1.3.

**Question 3** Quelle exigence le mécanisme utilisé permet-il de satisfaire ? Expliquer en 2 lignes comment cette exigence est satisfaite.

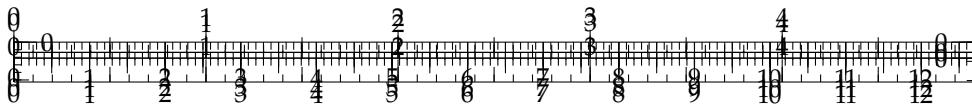




.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_02\_MC2E/images/fig\_03.png







## TD 2 :

# Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E) – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts – 2016.

B2-16

## Mise en situation

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

## Travail demandé

**Question 1** On considère la chaîne ouverte de solides (0+1+2+3+4). Par la méthode de votre choix, définir le torseur cinématique de la liaison équivalente 4/0 noté  $\{\mathcal{V}^{\text{eq}}(4/0)\}$ . En déduire la mobilité cinématique  $m_c$  de cette chaîne de solides.

### Correction

Les 4 solides étant en série, on a  $\{\mathcal{V}^{\text{eq}}(4/0)\} = \{\mathcal{V}(4/3)\} + \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$ .

$O$  étant le point de concours de chacun des axes, les torseurs des liaisons pivots sont tous de

la forme :  $\{\mathcal{V}(i/i-1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_i \vec{z}_i \\ 0 \end{array} \right\}_O$ . De plus,  $\{\mathcal{V}(4/3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \lambda \vec{z}_3 \end{array} \right\}_O$ .

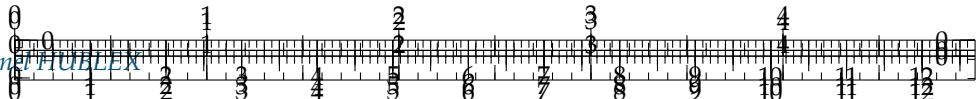
Au final,  $\{\mathcal{V}^{\text{eq}}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 + \dot{\theta}_3 \vec{z}_3 \\ \lambda \vec{z}_3 \end{array} \right\}_O$ .

Il s'agit d'une liaison sphère-cylindre(linéaire annulaire) d'axe  $(O, \vec{z}_3)$ . En conséquences  $m_c = 4$ .

**Question 2** Dans le cadre des deux modélisations retenues, quels sont alors le degré d'hyperstatisme et la mobilité cinématique de la chaîne fermée. Compléter le tableau du document réponse concernant les implications du modèle retenu sur le robot et les interactions patient / robot. Quelle modélisation vous paraît la plus proche de la réalité ? Argumenter votre réponse.

### Correction





	Liaison linéaire annulaire	Liaison libre
$m_c =$	4	4
$h =$	$m - I_c + E_c = 4 - (4 + 4) + 6 = 2$	0 (Chaîne ouverte)
$h =$	$m - E_s + I_s = 4 - 24 + 22 = 2$	0 (Chaîne ouverte)
Efforts au point d'insertion*	Oui (à cause de l'hyperstatisme)	Non
Facilité de montage?**	Non (à cause de l'hyperstatisme)	Oui
Rigidité du robot*	Oui...	Oui...

\* : Remplir par oui ou non

Les réponses données dans le tableau sont qualitative et critiquable... L'hyperstatisme impose des contraintes dans la fabrication l'assemblage du robot qui peuvent se traduire par des efforts à «vaincre» lors de l'assemblage ou de la mise en position du robot.

Un système hyperstatique est réputé plus rigide qu'un système isostatique. Cependant, lorsqu'un système est isostatique, sans jeu et avec des frottements, on peut aussi le considérer comme étant rigide...

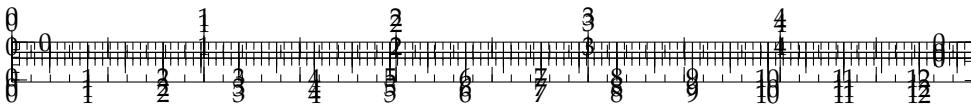
## Retour sur le cahier des charges

**Question 3** Quelle exigence le mécanisme utilisé permet-il de satisfaire ? Expliquer en 2 lignes comment cette exigence est satisfaite.

### Correction

La structure du robot permet de satisfaire l'exigence 1.3 : « Ne pas endommager l'abdomen du patient ». En effet, le fait que les axes des 3 pivots s'intersectent en un point permet d'avoir un seul point d'entrée de la pince dans l'abdomen. Ainsi, on diminue les risques de « blesser » davantage le patient lors de l'opération de la vésicule.





## TD 3 : Système de dépose de poudre – Sujet

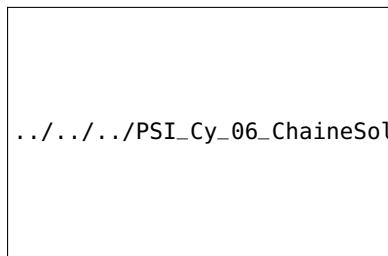
Concours Centrale Supélec – TSI 2016.

### Mise en situation

On s'intéresse à un système permettant de créer des motifs sur de la poudre de maquillage compactée. Le poste de pulvérisation est en partie constitué d'un robot cartésien 3 axes permettant de déplacer des godets de poudre compactée (grâce à un préhenseur) en dessous de la buse de pulvérisation.

B2-16

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C



### Objectif

L'objectif de cette partie est de proposer un modèle du mécanisme constituant le déplacement de l'axe  $\vec{x}$  et de justifier certains choix technologiques.

Le préhenseur repose sur des plaques support qui le lient en liaison encastrement au bâti. Les rails guidant le préhenseur suivant l'axe  $\vec{x}$  supportent les autres rails guidant les déplacement du préhenseur suivant les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ .

Le guidage est réalisé par deux axes munis de patins à billes.

Le moteur actionnant l'axe  $\vec{x}$  est lié à un réducteur qui entraîne deux ensembles poulies-courroies. Les poulies motrices sont guidées chacune par deux roulements à billes. Les deux poulies motrices sont liées par un arbre de transmission (Arbre 1). La figure suivante représente le schéma cinématique de l'ensemble.

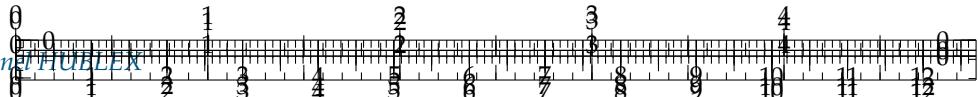
.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

### Travail demandé

La courroie étant un élément déformable, on n'en tiendra pas compte dans l'étude suivante.





**Question 1** Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison entre les solides 0 et 1.

Pour lever l'hyperstatisme de cette liaison, le constructeur a mis en place deux soufflets métalliques en les implantant de part et d'autre de l'arbre de transmission (figure suivante).

Un soufflet métallique est un joint d'accouplement autorisant des défauts d'alignement radiaux, axiaux et angulaires. Ainsi, pour un soufflet liant deux solides  $S_1$  et  $S_2$

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_03\_Prehenseur/images/fig\_06.png

$$\blacktriangleright \text{ le torseur statique transmissible est de la forme } \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P,(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}$$

$\blacktriangleright$  le torseur cinématique du mouvement de  $S_1$  par rapport à  $S_2$  est de la forme

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_{x12} \\ q_{12} & v_{y12} \\ r_{12} & v_{z12} \end{Bmatrix}_{P,(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}.$$

L'introduction des deux soufflets métalliques impose de décomposer l'arbre 1 de la question 1 en 3 solides distincts  $1_A$ ,  $1_B$  et  $1_C$ , le solide  $1_B$  étant lié aux deux solides  $1_A$  et  $1_C$  par les deux soufflets métalliques.

**Question 2** Tracer le nouveau graphe de liaisons en tenant compte de l'introduction des deux soufflets métalliques.

**Question 3** Déterminer en le justifiant le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé en question précédente.

**Question 4** En déduire le degré d'hyperstatisme du système avec ses deux soufflets métalliques.

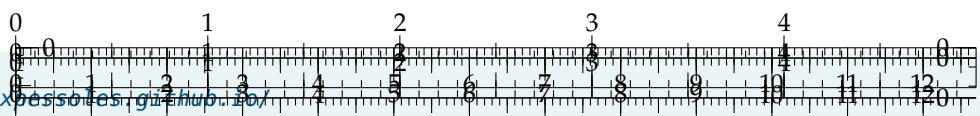
#### Éléments de correction

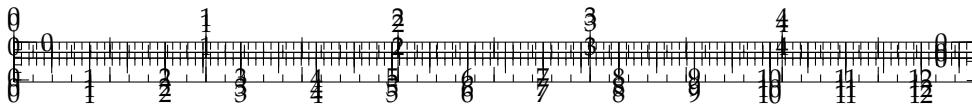
1.  $h = 5$ .
2. ...
3.  $m = 6$ .
4.  $h = 0$ .
5. ...

#### Retour sur le cahier des charges

**Question 5** Conclure en justifiant l'utilisation des soufflets.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_03\_Prehenseur/images/Cy\_06\_02\_TD\_03\_Prehenseur/images/fig\_06.png





## TD 3 : Système de dépose de poudre – Corrigé

Concours Centrale Supélec – TSI 2016.

B2-16

### Mise en situation

#### Objectif

L'objectif de cette partie est de proposer un modèle du mécanisme constituant le déplacement de l'axe  $\vec{x}$  et de justifier certains choix technologiques.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

### Travail demandé

**Question 1** Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison entre les solides 0 et 1.

#### Correction

##### Méthode cinématique :

- mobilité utile :  $m_u = 1$ ;
- mobilité interne :  $m_i = 0$ ;
- nombre de cycles :  $\gamma = 1$ ;
- nombre d'équations cinématiques :  $E_c = 6\gamma = 6$ ;
- nombres d'inconnues cinématiques :  $I_c = 2 \cdot 1 = 2$ .

Au final :  $h = m - I_c + E_c = 1 - 2 + 6 = 5$ .

##### Méthode statique

- mobilité utile :  $m_u = 1$ ;
- mobilité interne :  $m_i = 0$ ;
- nombre d'équations cinématiques :  $E_s = 6(p - 1) = 6(2 - 1) = 6$ ;
- nombres d'inconnues cinématiques :  $I_s = 2 \cdot 5 = 10$ .

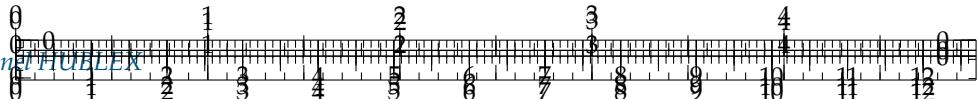
Au final :  $h = m - E_s + I_s = 1 - 6 + 10 = 5$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

**Question 2** Tracer le nouveau graphe de liaisons en tenant compte de l'introduction des deux soufflets métalliques.

#### Correction





.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD

**Question 3** Déterminer en le justifiant le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé en question précédente.

#### Correction

En réalisant une fermeture cinématique, on a  $\{\mathcal{V}(1_a/0)\} + \{\mathcal{V}(1_b/1_a)\} + \{\mathcal{V}(1_c/1_b)\} = \{\mathcal{V}(1_c/0)\}$ . Les torseurs étant considérés écrits au même point  $P$ , on a :

$$\begin{cases} p_{ba} + p_{cb} = 0 \\ q_{ba} + q_{cb} = 0 \\ r_{a0} = r_{c0} \end{cases} \quad \begin{cases} v_{xba} + v_{xcb} = 0 \\ v_{yba} + v_{ycb} = 0 \\ v_{zba} + v_{zcb} = 0 \end{cases} .$$

Il s'agit d'un système de rang 6 avec 12 inconnues. On a donc  $m = I_c - r_c = 12 - 6 = 6$ .

**Question 4** En déduire le degré d'hyperstatisme du système avec ses deux soufflets métalliques.

#### Correction

On a  $h = m - I_c + E_c = 6 - 12 + 6 = 0$ .

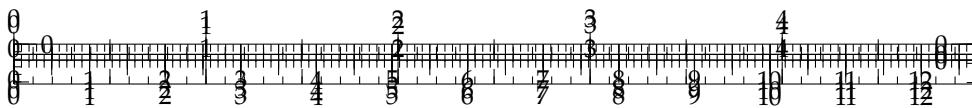
### Retour sur le cahier des charges

**Question 5** Conclure en justifiant l'utilisation des soufflets.

#### Correction

Le soufflet permet donc de rendre le système isostatique. Il est ainsi possible de monter le système sans avoir à imposer des contraintes géométriques sur le mécanisme.





## TD 4

# Tuyère à ouverture variable – Sujet

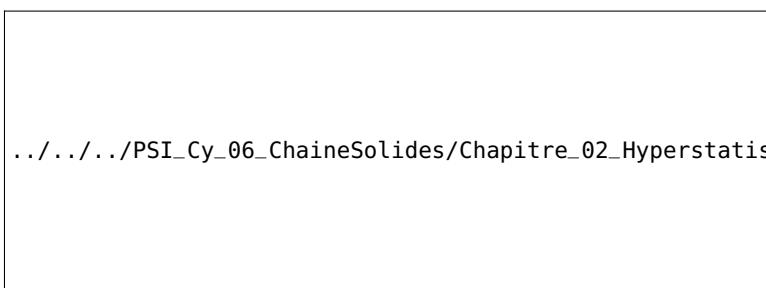
Banque PT – SIA 2011.

### Mise en situation

Dans le but de calibrer un banc d'essai de turboréacteur, les ingénieurs de la DGA (Direction Générale de l'Armement) a conçu une tuyère à ouverture variable afin de se substituer au turboréacteur.

C1-02

C2-04



### Objectif

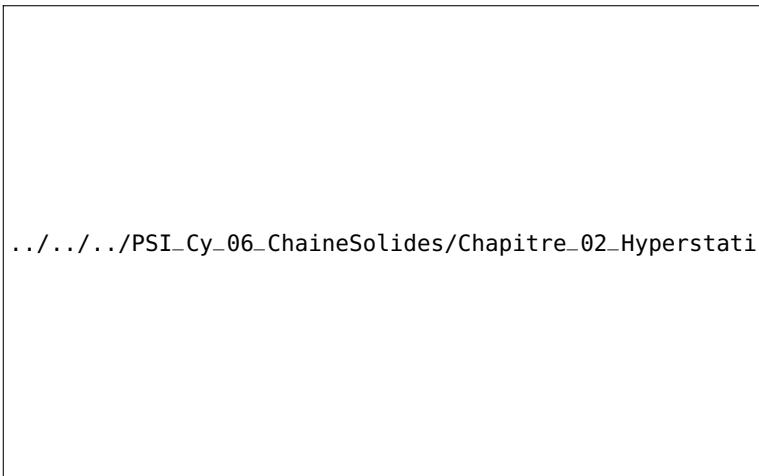
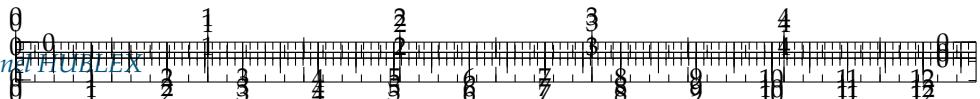
L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Le mouvement de chacun des volets doit être identique. Pour cela, les exigences suivantes doivent être vérifiées :

- ▶ le mouvement de rotation des volets autour d'un axe orthogonal à l'axe de la veine fluide doit respecter les exigences suivantes :
  - position de l'axe de rotation : orthogonal ;
  - débattement angulaire :  $40^\circ \pm 0,5^\circ$  ;
  - précision angulaire :  $0,2^\circ$  ;
- ▶ commande simultanée des 16 volets :
  - interface unique en liaison glissière par rapport à la tuyère ;
  - nombre d'actionneurs : minimum ;
  - rigidité globale :  $\Delta x < 0,2 \text{ mm}$  ;
  - temps de montée en vitesse : inférieur à  $0,1 \text{ s}$ .
- ▶ adaptation aux efforts aérodynamiques :
  - résistance : 50% de la limite élastique ;
  - déformation : compatible avec la précision.

La figure suivante présente les éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude.





Pour synchroniser la commande des volets, on a adopté une solution consistant à les relier à une pièce unique en forme de tore entourant la tuyère et dont le déplacement assure la commande de tous les volets simultanément. Le tore repose sur deux barres de guidage fixées dans la partie supérieure du carter et parallèles à l'axe de la tuyère. Il est actionné par quatre vérins hydrauliques. On cherche, dans cette partie, à valider le critère d'appréciation sur la rigidité globale de la structure de commande des volets à interface unique.

Les notations adoptées sont les suivantes.

La base orthonormée directe liée au solide  $i : \mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ . Le torseur cinématique du mouvement possible par une liaison  $L_k$ , d'un solide  $j$  par rapport à un solide  $i$  (ou par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_i$  lié à celui-ci) réduit en  $A$ , sera noté  $\{\mathcal{V}_k\} = \left\{ \begin{array}{l} p_k \vec{x} + q_k \vec{y} + r_k \vec{z} \\ u_k \vec{x} + v_k \vec{y} + w_k \vec{z} \end{array} \right\}_A$  où  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est une base orthonormée associée à la liaison  $L_k$ .

Le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison  $L_k$  du solide  $i$  sur le solide  $j$ , réduit en  $A$  sera noté  $\{\mathcal{F}_k\} = \left\{ \begin{array}{l} X_k \vec{x} + Y_k \vec{y} + Z_k \vec{z} \\ L_k \vec{x} + M_k \vec{y} + N_k \vec{z} \end{array} \right\}_A$  où  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est une base orthonormée associée à la liaison  $L_k$ .

## Étude d'une commande avec un seul actionneur

### Objectif

On cherche, dans un premier temps, à estimer la capacité d'une structure composée d'un seul vérin à transmettre le mouvement attendu.

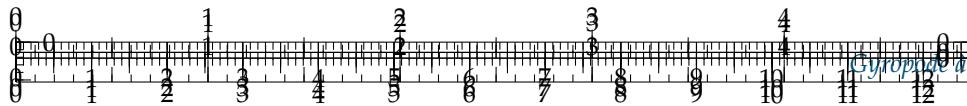
On précise que le solide 2 représente la tige du vérin et que les liaisons en  $I_1$  et  $I_2$  représentent les contacts du tore 3 avec les deux barres sur lesquelles il repose.

**Question 1** Compléter le graphe de structure.

**Question 2** Le modèle proposé est-il isostatique ?

**Question 3** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq34}$  aux deux liaisons  $L_3$  et  $L_4$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq34}$ .





**Question 4** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq12}$  aux deux liaisons  $L_1$  et  $L_2$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq12}$ .

**Question 5** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq12}$  aux deux liaisons  $L_{eq34}$  et  $L_{eq12}$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq}$ . Justifier que la commande avec un seul vérin ne satisfait pas le cahier des charges.

## Étude d'une commande avec deux actionneurs

### Objectif

On cherche, dans un deuxième temps, à estimer la capacité d'une structure composée de deux vérins à transmettre le mouvement attendu.

**Question 6** À partir du graphe de structure (graphe des liaisons) et en vous inspirant des résultats trouvés précédemment déterminer la liaison équivalente  $L_{eq1}$  aux liaisons  $L_{11}$ ,  $L_{21}$  et la liaison équivalente  $L_{eq2}$  aux liaisons  $L_{12}$  et  $L_{22}$  entre les solides 1 et 3.

**Question 7** Déterminer par la méthode de votre choix, la liaison équivalente  $L'_{eq1}$  aux deux liaisons  $L_{eq34}$ ,  $L_{eq1}$  et  $L_{eq2}$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}'_{eq}$  puis le torseur cinématique cinématique  $\mathcal{V}'_{eq}$ . Le cahier des charges est-il vérifié pour une commande avec deux vérins ?

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

## Étude de la structure adoptée par le constructeur

### Objectif

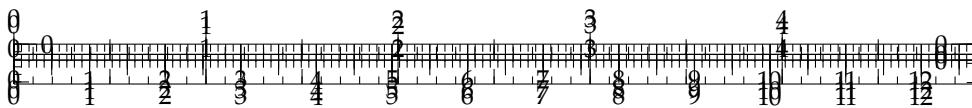
On cherche finalement à estimer la capacité de réalisation d'une structure composée des quatre vérins.

**Question 8** Pour des raisons d'encombrement des vérins et de capacité à fournir les actions mécaniques de poussée, le bureau d'étude a finalement choisi de commander le tore avec 4 vérins pour obtenir la liaison glissière comme liaison équivalente entre les solides 1 et 3. Quel est, dans ces conditions, le degré d'hyperstatisme du groupe de liaisons initial réalisant la liaison glissière ? Vous expliquerez brièvement, mais clairement votre raisonnement. Que pensez vous de ce résultat sur la capacité de réalisation de cette structure ?

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C







## TD 4

# Tuyère à ouverture variable – Corrigé

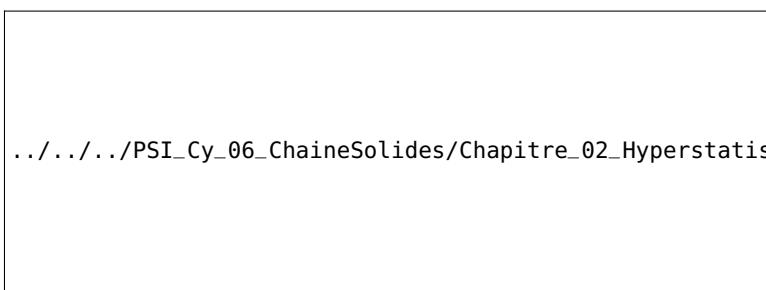
Banque PT – SIA 2011.

### Mise en situation

Dans le but de calibrer un banc d'essai de turboréacteur, les ingénieurs de la DGA (Direction Générale de l'Armement) a conçu une tuyère à ouverture variable afin de se substituer au turboréacteur.

C1-02

C2-04



### Objectif

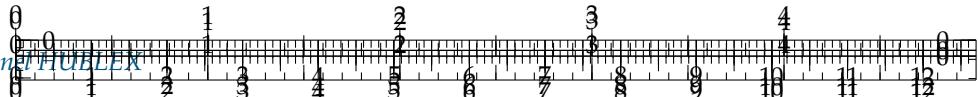
L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Le mouvement de chacun des volets doit être identique. Pour cela, les exigences suivantes doivent être vérifiées :

- ▶ le mouvement de rotation des volets autour d'un axe orthogonal à l'axe de la veine fluide doit respecter les exigences suivantes :
  - position de l'axe de rotation : orthogonal ;
  - débattement angulaire :  $40^\circ \pm 0,5^\circ$  ;
  - précision angulaire :  $0,2^\circ$  ;
- ▶ commande simultanée des 16 volets :
  - interface unique en liaison glissière par rapport à la tuyère ;
  - nombre d'actionneurs : minimum ;
  - rigidité globale :  $\Delta x < 0,2 \text{ mm}$  ;
  - temps de montée en vitesse : inférieur à  $0,1 \text{ s}$ .
- ▶ adaptation aux efforts aérodynamiques :
  - résistance : 50% de la limite élastique ;
  - déformation : compatible avec la précision.

La figure suivante présente les éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude.





.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_01

Pour synchroniser la commande des volets, on a adopté une solution consistant à les relier à une pièce unique en forme de tore entourant la tuyère et dont le déplacement assure la commande de tous les volets simultanément. Le tore repose sur deux barres de guidage fixées dans la partie supérieure du carter et parallèles à l'axe de la tuyère. Il est actionné par quatre vérins hydrauliques. On cherche, dans cette partie, à valider le critère d'appréciation sur la rigidité globale de la structure de commande des volets à interface unique.

Les notations adoptées sont les suivantes.

La base orthonormée directe liée au solide  $i : \mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ . Le torseur cinématique du mouvement possible par une liaison  $L_k$ , d'un solide  $j$  par rapport à un solide  $i$  (ou par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_i$  lié à celui-ci) réduit en  $A$ , sera noté  $\{\mathcal{V}_k\} = \begin{Bmatrix} p_k \vec{x} + q_k \vec{y} + r_k \vec{z} \\ u_k \vec{x} + v_k \vec{y} + w_k \vec{z} \end{Bmatrix}_A$  où  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est une base orthonormée associée à la liaison  $L_k$ .

Le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison  $L_k$  du solide  $i$  sur le solide  $j$ , réduit en  $A$  sera noté  $\{\mathcal{T}_k\} = \begin{Bmatrix} X_k \vec{x} + Y_k \vec{y} + Z_k \vec{z} \\ L_k \vec{x} + M_k \vec{y} + N_k \vec{z} \end{Bmatrix}_A$  où  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est une base orthonormée associée à la liaison  $L_k$ .

## Étude d'une commande avec un seul actionneur

### Objectif

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_01

On cherche, dans un premier temps, à estimer la capacité d'une structure composée d'un seul vérin à transmettre le mouvement attendu.

On précise que le solide 2 représente la tige du vérin et que les liaisons en  $I_1$  et  $I_2$  représentent les contacts du tore 3 avec les deux barres sur lesquelles il repose.

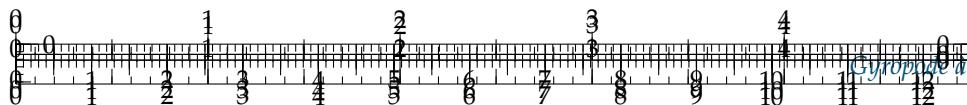
**Question 1** Compléter le graphe de structure.

### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_01

ng





Liaison	Caractéristique	Torceur cinématique	Torseur statique
$L_1$	Glissière de direction $\vec{x}_1$	$\begin{Bmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}$
$L_2$	Rotule de centre $D \vec{x}_1$	$\begin{Bmatrix} p_2 & 0 \\ q_2 & 0 \\ r_2 & 0 \end{Bmatrix}_D$	$\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}_D$
$L_3$	Sphère-plan de normale $(I_1, \vec{n}_1)$	$\begin{Bmatrix} p_3 & u_3 \\ q_3 & 0 \\ r_3 & w_3 \end{Bmatrix}_{I_1}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I_1}$
$L_4$	Sphère-plan de normale $(I_2, \vec{n}_2)$	$\begin{Bmatrix} p_4 & u_4 \\ q_4 & 0 \\ r_4 & w_4 \end{Bmatrix}_{I_2}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I_2}$
$L_5$	Pivot $(A, \vec{z}_3)$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_5 & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_5 & L_5 \\ Y_5 & M_5 \\ Z_5 & 0 \end{Bmatrix}_A$
$L_6$	Pivot $(B, \vec{z}_3)$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_6 & 0 \end{Bmatrix}_B$	$\begin{Bmatrix} X_6 & L_6 \\ Y_6 & M_6 \\ Z_6 & 0 \end{Bmatrix}_B$
$L_7$	Pivot $(C, \vec{z}_3)$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_7 & 0 \end{Bmatrix}_C$	$\begin{Bmatrix} X_7 & L_7 \\ Y_7 & M_7 \\ Z_7 & 0 \end{Bmatrix}_C$

**Question 2** Le modèle proposé est-il isostatique ?

**Question 3** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq34}$  aux deux liaisons  $L_3$  et  $L_4$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq34}$ .

#### Correction

Les liaisons sont en parallèles, on priviliege donc la méthode statique :  $\mathcal{F}_{eq34} = \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1_{L_3})\} + \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1_{L_4})\} \mathcal{F}_{eq34} = \left\{ \begin{array}{c} Y_3 \vec{n}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_O + \left\{ \begin{array}{c} Y_4 \vec{n}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} Y_3 \vec{n}_1 + Y_4 \vec{n}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_O$ .  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  ne sont pas colinéaires.  $\vec{x}_1$  est orthogonal à  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ . La liaison est donc une sphère cylindre d'axe  $(O, \vec{x}_1)$ .

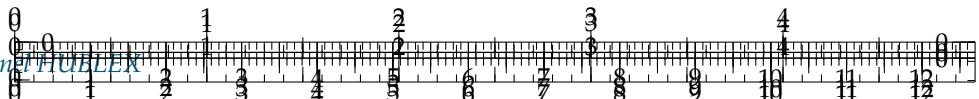
**Question 4** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq12}$  aux deux liaisons  $L_1$  et  $L_2$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq12}$ .

#### Correction

**Question 5** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq12}$  aux deux liaisons  $L_{eq34}$  et  $L_{eq12}$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq}$ . Justifier que la commande avec un seul vérin ne satisfait pas le cahier des charges.

#### Correction





## Étude d'une commande avec deux actionneurs

### Objectif

On cherche, dans un deuxième temps, à estimer la capacité d'une structure composée de deux vérins à transmettre le mouvement attendu.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/chapitre\_02\_Hyperstatisme/cy\_06\_02\_TD\_04\_Tuyere/images/fig\_05.png

**Question 6** À partir du graphe de structure (graphe des liaisons) et en vous inspirant des résultats trouvés précédemment déterminer la liaison équivalente  $L_{eq1}$  aux liaisons  $L_{11}, L_{12}$  et la liaison équivalente  $L_{eq2}$  aux liaisons  $L_{21}$  et  $L_{22}$  entre les solides 1 et 3.

### Correction

**Question 7** Déterminer par la méthode de votre choix, la liaison équivalente  $L'_{eq1}$  aux deux liaisons  $L_{eq34}, L_{eq1}$  et  $L_{eq2}$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}'_{eq}$  puis le torseur cinématique cinématique  $\mathcal{V}'_{eq}$ . Le cahier des charges est-il vérifié pour une commande avec deux vérins ?

### Correction

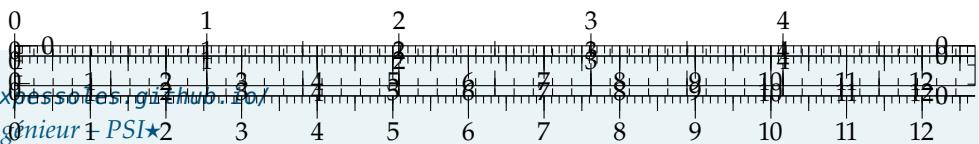
## Étude de la structure adoptée par le constructeur

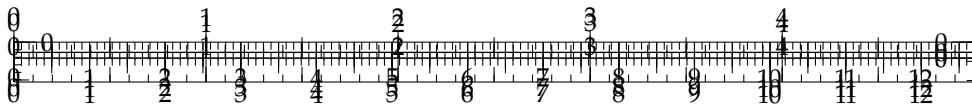
### Objectif

On cherche finalement à estimer la capacité de réalisation d'une structure composée des quatre vérins.

**Question 8** Pour des raisons d'encombrement des vérins et de capacité à fournir les actions mécaniques de poussée, le bureau d'étude a finalement choisi de commander le tore avec 4 vérins pour obtenir la liaison glissière comme liaison équivalente entre les solides 1 et 3. Quel est, dans ces conditions, le degré d'hyperstatisme du groupe de liaisons initial réalisant la liaison glissière ? Vous expliquerez brièvement, mais clairement votre raisonnement. Que pensez vous de ce résultat sur la capacité de réalisation de cette structure ?

### Correction





## TD 5 :

# Système d'inspection pour tubes de guidage – Sujet

Banque PT – SIA 2009.

### Objectif

L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Les figures suivantes donnent quelques éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude. On y trouve notamment l'extrémité de la perche sur laquelle est fixée à la tête d'accrochage. La liaison démontable est réalisée par trois griffes pivotantes qui viennent se loger dans une gorge de la pièce insérée dans le corps de l'outil d'inspection. Le pivotement des griffes est commandé par une tige coulissant dans la perche sur toute sa longueur puisque la commande pneumatique ou manuelle est effectuée en haut de la perche, hors d'eau. On souhaite valider deux des critères d'appréciation :

- critère 1 : la commande par obstacle dans les deux sens (accrochage et décrochage) ;
- critère 2 : la durée de l'accrochage.

Les notations adoptées sont les suivantes.

La base orthonormée directe liée au solide  $i$  est notée  $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ . Le torseur cinématique du mouvement d'un solide  $j$  par rapport à un solide  $i$  (ou par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_i$  lié à celui-ci), réduit en  $A$ , sera noté  $\{\mathcal{V}(j/i)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(j/i)} \\ \overrightarrow{V(A, j/i)} \end{array} \right\}_A$

$$= \left\{ \begin{array}{c} p_{ji} \vec{x} + q_{ji} \vec{y} + r_{ji} \vec{z} \\ u_{ji} \vec{x} + v_{ji} \vec{y} + w_{ji} \vec{z} \end{array} \right\}_A.$$

Le torseur des actions mécaniques exercées par un solide  $i$  sur un solide  $j$ , réduit en  $A$  sera noté  $\{\{\mathcal{F}(i \rightarrow j)\}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(i \rightarrow j)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, i \rightarrow j)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_{ij} \vec{x} + Y_{ij} \vec{y} + Z_{ij} \vec{z} \\ L_{ij} \vec{x} + M_{ij} \vec{y} + N_{ij} \vec{z} \end{array} \right\}_A$ .

### Validation de la transmission du mouvement de commande

#### Étude préliminaire d'un modèle simplifié

On adopte dans un premier temps, un modèle simplifié, pour une seule griffe, défini par le schéma cinématique donné dans la figure suivante.

**Question 1** En considérant que le modèle est spatial, donner le graphe de structure (graphe des liaisons) associé au schéma cinématique proposé en précisant les éléments



B2-16

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C



géométriques caractéristiques de chaque liaison puis la forme de leur torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(j/i)\}$ , c'est-à-dire l'expression des éléments de réduction en fonction des paramètres  $p_{ij}$ ,  $q_{ij}$ ,  $r_{ij}$ ,  $u_{ij}$ ,  $v_{ij}$  et  $w_{ij}$  dans la base locale de la liaison.

**Question 2** Établir le système de six équations, en projection dans la base  $\mathcal{B}_3$  liée au solide 3, traduisant la fermeture cinématique du mécanisme, en fonction des paramètres cinématiques introduits à la question précédente et des paramètres géométriques définis sur la figure précédente.

**Question 3** Évaluer le rang du système d'équations obtenu et en déduire le degré de mobilité du mécanisme. On supposera que le paramètre cinématique d'entrée  $w_{21}$  est connu et que l'angle  $\beta$  est différent de zéro. Si on fait l'hypothèse que les liaisons sont parfaites, ce modèle est-il hyperstatique ?

### Étude du modèle associé à la commande d'une griffe

Afin d'obtenir une commande par obstacle dans les deux sens de commande, le modèle est complété par une seconde liaison sphère-plan, telle que le schéma cinématique devienne celui de la figure suivante.

#### Objectif

On cherche ici à montrer qu'il est impossible d'obtenir ce double contact avec la géométrie actuelle.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_05\_Eclipse/images/fig\_04.png

**Question 4** En vous appuyant sur les résultats précédents et en supposant que les angles  $\beta$  et  $\beta'$  sont différents de zéro, donner la valeur du degré de mobilité de ce modèle puis son degré d'hyperstatisme. Que concluez-vous de ces résultats ? On notera  $\{\mathcal{V}(3/2)\}$  le torseur cinématique de la liaison sphère-plan de centre  $J$  dont on précisera la normale.

**Question 5** En supposant que les normales, à préciser, aux liaisons sphère-plan, de centres  $I$  et  $J$ , sont concourantes au point que l'on notera  $I_{32}$ , déterminer, en utilisant l'équivalence statique, la liaison équivalente entre les solides 3 et 2 au point  $I_{32}$ .

**Question 6** Compléter le schéma cinématique avec la liaison équivalente.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_05\_Eclipse/images/fig\_04.png

**Question 7** Calculer le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé et comparer cette valeur à celle trouvée à la question ?? en supposant les valeurs de  $a$  et  $b$  quelconques, définies par  $AI_{32} = ax_1 + by_1$ .

**Question 8** Indiquer à quelle condition sur  $a$  et/ou  $b$ , le degré de mobilité serait égal à 1. Commentez ce résultat en regard de l'objectif énoncé plus haut.

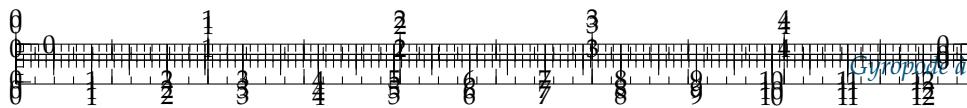
Les valeurs de  $a$  et  $b$  étant des fonctions du temps, on constate que la condition trouvée ne peut être réalisée à chaque instant du mouvement d'accrochage, en conservant, sur la pièce 3, deux rampes rectilignes pour les contacts ponctuels en  $I$  et  $J$ .

Une simulation informatique du mécanisme montre que si on décide de conserver la rampe rectiligne uniquement au contact en  $I$ , il est nécessaire d'avoir un profil bombé, donné sur la figure suivante, pour le contact en  $J$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_05\_Eclipse/images/fig\_05.png

**Question 9** Expliquer et effectuer, le tracé permettant de trouver exactement la position du point de contact  $J$ , entre la surface sphérique de la tige de commande et le profil bombé de la griffe, obtenu dans la position représentée.





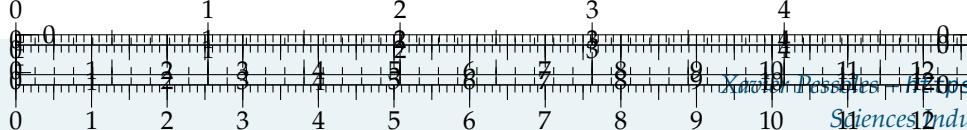
**Question 10** Le bureau d'étude a finalement décidé de conserver les deux rampes rectilignes repérées  $\Delta I$  et  $\Delta J$  sur la figure. Quelle conséquence a ce choix sur le fonctionnement du mécanisme d'accrochage ? Peut-on valider le critère étudié de la FT 2.1.1?

### Validation de la transmission de l'effort de commande

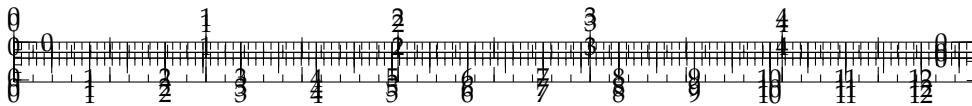
On souhaite vérifier que le mouvement de commande de la griffe est toujours possible. Pour cela, on se place dans la configuration du modèle simplifié donné figure 5 de l'Annexe 4. On suppose que seule la liaison sphère-plan de centre  $I$  n'est pas parfaite avec un coefficient de frottement au contact  $f$  de 0,2. On suppose négligeable le poids de la griffe 3 devant les actions mécaniques transmises. On précise que  $d = 10$  mm et que  $y$  varie entre 20 et 32 mm.

**Question 11** Préciser, en justifiant votre réponse, si un phénomène d'arc-boutement peut se produire au cours du mouvement de la griffe ? Peut-on valider la solution proposée ?

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSoli







## TD 5 :

# Système d'inspection pour tubes de guidage – Corrigé

Banque PT – SIA 2009.

### Objectif

L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Les figures suivantes donnent quelques éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude. On y trouve notamment l'extrémité de la perche sur laquelle est fixée à la tête d'accrochage. La liaison démontable est réalisée par trois griffes pivotantes qui viennent se loger dans une gorge de la pièce insérée dans le corps de l'outil d'inspection. Le pivotement des griffes est commandé par une tige coulissant dans la perche sur toute sa longueur puisque la commande pneumatique ou manuelle est effectuée en haut de la perche, hors d'eau. On souhaite valider deux des critères d'appréciation :

- critère 1 : la commande par obstacle dans les deux sens (accrochage et décrochage) ;
- critère 2 : la durée de l'accrochage.

Les notations adoptées sont les suivantes.

La base orthonormée directe liée au solide  $i$  est notée  $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ . Le torseur cinématique du mouvement d'un solide  $j$  par rapport à un solide  $i$  (ou par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_i$  lié à celui-ci), réduit en  $A$ , sera noté  $\{\mathcal{V}(j/i)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(j/i)} \\ \overrightarrow{V(A, j/i)} \end{array} \right\}_A$

$$= \left\{ \begin{array}{c} p_{ji} \vec{x} + q_{ji} \vec{y} + r_{ji} \vec{z} \\ u_{ji} \vec{x} + v_{ji} \vec{y} + w_{ji} \vec{z} \end{array} \right\}_A.$$

Le torseur des actions mécaniques exercées par un solide  $i$  sur un solide  $j$ , réduit en  $A$  sera noté  $\{\{\mathcal{F}(i \rightarrow j)\}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(i \rightarrow j)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, i \rightarrow j)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_{ij} \vec{x} + Y_{ij} \vec{y} + Z_{ij} \vec{z} \\ L_{ij} \vec{x} + M_{ij} \vec{y} + N_{ij} \vec{z} \end{array} \right\}_A$ .

### Validation de la transmission du mouvement de commande

#### Étude préliminaire d'un modèle simplifié

On adopte dans un premier temps, un modèle simplifié, pour une seule griffe, défini par le schéma cinématique donné dans la figure suivante.

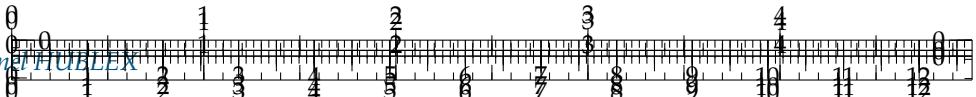
**Question 1** En considérant que le modèle est spatial, donner le graphe de structure (graphe des liaisons) associé au schéma cinématique proposé en précisant les éléments



B2-16

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C



géométriques caractéristiques de chaque liaison puis la forme de leur torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(j/i)\}$ , c'est-à-dire l'expression des éléments de réduction en fonction des paramètres  $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij}, u_{ij}, v_{ij}$  et  $w_{ij}$  dans la base locale de la liaison.

## Correction

**Question 2** Établir le système de six équations, en projection dans la base  $\mathcal{B}_3$  liée au solide 3, traduisant la fermeture cinématique du mécanisme, en fonction des paramètres cinématiques introduits à la question précédente et des paramètres géométriques définis sur la figure précédente.

## Correction

**Question 3** Évaluer le rang du système d'équations obtenu et en déduire le degré de mobilité du mécanisme. On supposera que le paramètre cinématique d'entrée  $w_{21}$  est connu et que l'angle  $\beta$  est différent de zéro. Si on fait l'hypothèse que les liaisons sont parfaites, ce modèle est-il hyperstatique ?

## Correction

## Étude du modèle associé à la commande d'une griffe

Afin d'obtenir une commande par obstacle dans les deux sens de commande, le modèle est complété par une seconde liaison sphère-plan, telle que le schéma cinématique devienne celui de la figure suivante.

## Objectif

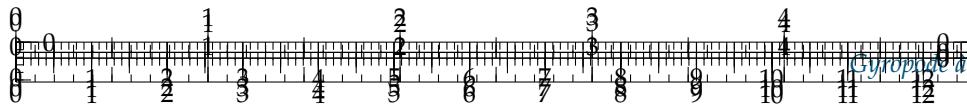
On cherche ici à montrer qu'il est impossible d'obtenir ce double contact avec la géométrie actuelle.

Question 4 En vous appuyant sur les résultats précédents et en supposant que les angles  $\beta$  et  $\beta'$  sont différents de zéro, donner la valeur du degré de mobilité de ce modèle puis son degré d'hyperstatisme. Que concluez-vous de ces résultats ? On notera  $\{\mathcal{V}('3/2)\}$  le torseur cinématique de la liaison sphère-plan de centre  $J$  dont on précisera la normale.

## Correction

**Question 5** En supposant que les normales, à préciser, aux liaisons sphère-plan, de centres  $I$  et  $J$ , sont concourantes au point que l'on notera  $I_{32}$ , déterminer, en utilisant l'équivalence statique, la liaison équivalente entre les solides 3 et 2 au point  $I_{32}$ .





### Correction

**Question 6** Compléter le schéma cinématique avec la liaison équivalente.

### Correction

**Question 7** Calculer le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé et comparer cette valeur à celle trouvée à la question ??, en supposant les valeurs de  $a$  et  $b$  quelconques, définies par  $\vec{AI}_{32} = a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

### Correction

**Question 8** Indiquer à quelle condition sur  $a$  et/ou  $b$ , le degré de mobilité serait égal à 1. Commentez ce résultat en regard de l'objectif énoncé plus haut.

### Correction

Les valeurs de  $a$  et  $b$  étant des fonctions du temps, on constate que la condition trouvée ne peut être réalisée à chaque instant du mouvement d'accrochage, en conservant, sur la pièce 3, deux rampes rectilignes pour les contacts ponctuels en  $I$  et  $J$ .

Une simulation informatique du mécanisme montre que si on décide de conserver la rampe rectiligne uniquement au contact en  $I$ , il est nécessaire d'avoir un profil bombé, donné sur la figure suivante, pour le contact en  $J$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

### Correction

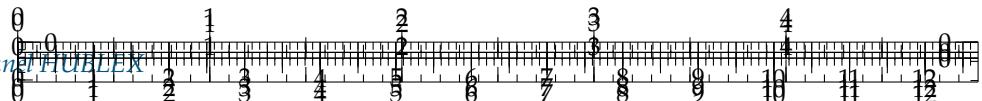
**Question 10** Le bureau d'étude a finalement décidé de conserver les deux rampes rectilignes repérées  $\Delta I$  et  $\Delta J$  sur la figure. Quelle conséquence a ce choix sur le fonctionnement du mécanisme d'accrochage ? Peut-on valider le critère étudié de la FT 2.1.1?

### Correction

## Validation de la transmission de l'effort de commande

On souhaite vérifier que le mouvement de commande de la griffe est toujours possible. Pour cela, on se place dans la configuration du modèle simplifié donné figure 5 de



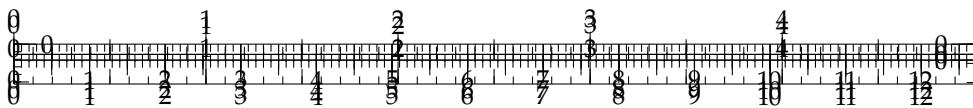


l'Annexe 4. On suppose que seule la liaison sphère-plan de centre  $I$  n'est pas parfaite avec un coefficient de frottement au contact  $f$  de 0,2. On suppose négligeable le poids de la griffe 3 devant les actions mécaniques transmises. On précise que  $d = 10 \text{ mm}$  et que  $y$  varie entre 20 et 32 mm.

**Question 11** Préciser, en justifiant votre réponse, si un phénomène d'arc-boutement peut se produire au cours du mouvement de la griffe ? Peut-on valider la solution proposée ?

#### Correction





## TD 6 : Robovolc – Sujet

X ENS – PSI 2017.

**B2-16**

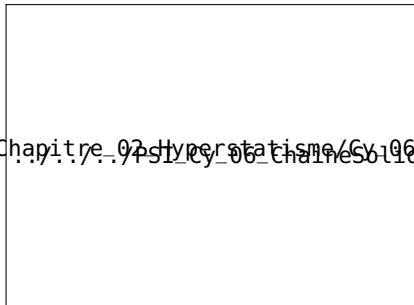
### Mise en situation

#### Objectif

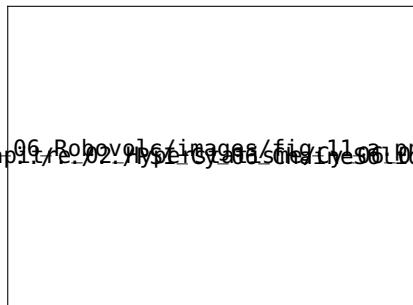
Dans cette sous-partie, on établit un modèle statique du châssis de ROBOVOLC.

La mobilité sur terrain accidenté est obtenue, en plus de par la motorisation indépendante des roues, par l'utilisation d'un châssis articulé. Celui-ci a une structure tubulaire avec des articulations passives (non actionnées) permettant à ROBOVOLC de s'adapter à toute surface non plane. Une illustration des cinq mouvements indépendants permis par les articulations est donnée sur la ??.

Mouvement 1 : rotation de l'essieu avant  
autour de l'axe longitudinal

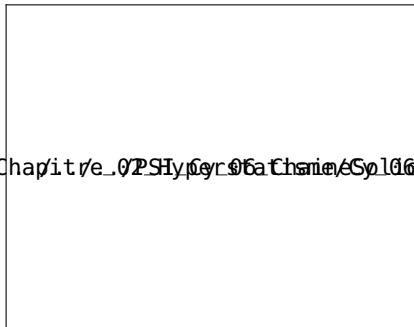


Mouvement 2 : rotation de l'essieu central  
autour de l'axe longitudinal

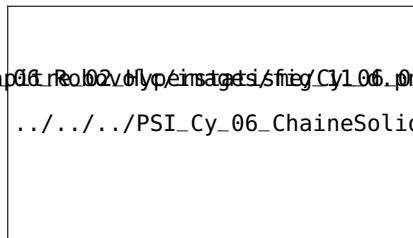


de l'essieu  
longitudinal

Mouvement 4 : rotation de l'arbre  
avant autour de l'axe transversal

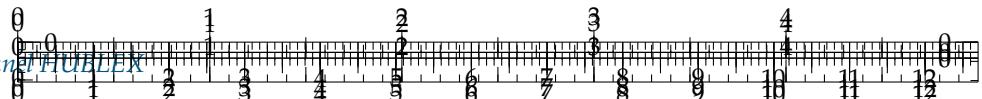


Mouvement 5 : rotation de l'arbre  
arrière autour de l'axe transversal



... mouvements de déformation du châssis



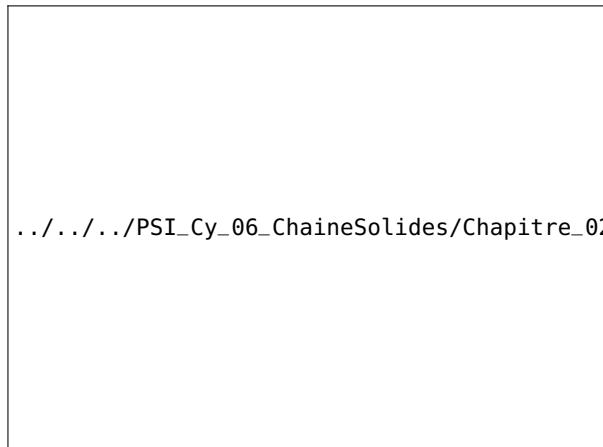


Le châssis est composé de cinq parties orientables les unes par rapport aux autres (??) :

- l'essieu avant, noté EAV, reliant les roues avant 1 et 2;
- l'essieu central, noté EC, reliant les roues centrales 3 et 4;
- l'essieu arrière, noté EAR, reliant les roues arrière 5 et 6;
- l'arbre avant, noté AAV, connectant les essieux EAV et EC;
- l'arbre arrière, noté AAR, connectant les essieux EC et EAR.

On rappelle que l'empattement entre deux essieux successifs est noté  $a$ , et que la distance entre deux roues d'un même essieu est notée  $2e$ . Les différentes parties sont reliées entre elles par des articulations possédant une raideur en rotation imposée. Par la suite, on supposera cette raideur négligeable devant les autres actions mécaniques mises en jeu. Un schéma cinématique de la plateforme (châssis+roues) est présenté sur la ??.

**FIGURE 6.10** – Schéma cinématique de la plateforme



.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02

Les deux articulations EC-AAV et EC-AAR, situées à une distance longitudinale  $\pm b$  de l'essieu EC, autorisent une rotation selon les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ ; elles sont modélisées par des liaisons rotule à doigt de centres respectifs  $B$  et  $C$ . Les deux articulations EAV-AAV et EAR-AAR autorisent une rotation selon la direction  $\vec{x}$  seulement; elles sont modélisées par des liaisons pivot d'axe  $(O, \vec{x})$ .

D'autre part, les six liaisons essieu-roue sont modélisées par des liaisons pivot d'axe  $(A, \vec{y})$  (roues avant),  $(O, \vec{y})$  (roues centrales) ou  $(D, \vec{y})$  (roues arrière). De plus, le contact de chaque roue  $i$  avec le sol est modélisé en première approche par une liaison ponctuelle de normale  $(P_i, \vec{z})$ .

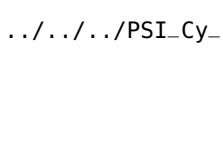
On considère dans les questions ?? et ?? que les liaisons sont parfaites sans frottements.

**Question 1** Déterminer le nombre de mobilités du modèle du système.

**Question 2** Montrer que le modèle est isostatique. Conclure quant à la capacité du châssis à maintenir les roues au contact du sol en toute circonstance.

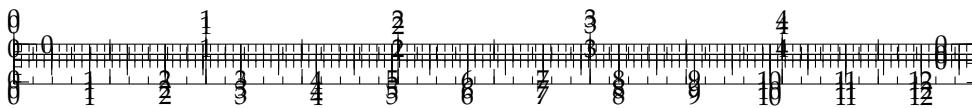
**Question 3** Proposer un modèle de liaison parfaite pour le contact roue-sol qui permet de tenir compte, dans une étude de statique sans glissement, du frottement longitudinal et transversal. Peut-on calculer toutes les incertitudes statiques de liaison dans ce cas?

...



.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_TD\_06





## TD 6 : Robovolc – Corrigé

X ENS – PSI 2017.

**B2-16**

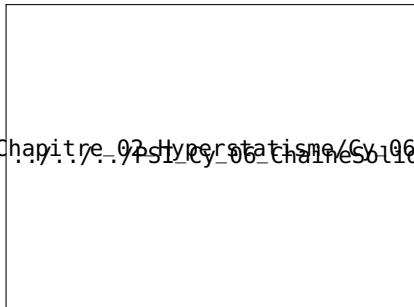
### Mise en situation

#### Objectif

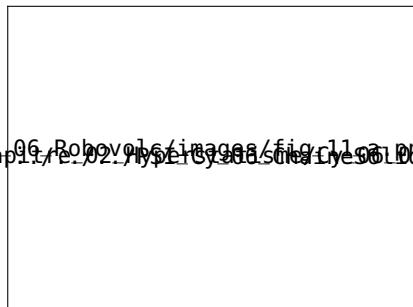
Dans cette sous-partie, on établit un modèle statique du châssis de ROBOVOLC.

La mobilité sur terrain accidenté est obtenue, en plus de par la motorisation indépendante des roues, par l'utilisation d'un châssis articulé. Celui-ci a une structure tubulaire avec des articulations passives (non actionnées) permettant à ROBOVOLC de s'adapter à toute surface non plane. Une illustration des cinq mouvements indépendants permis par les articulations est donnée sur la ??.

Mouvement 1 : rotation de l'essieu avant  
autour de l'axe longitudinal

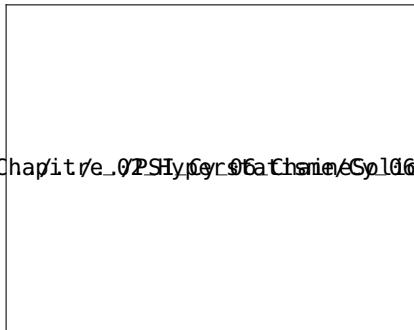


Mouvement 2 : rotation de l'essieu central  
autour de l'axe longitudinal

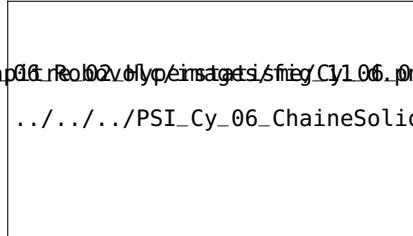


de l'essieu  
longitudinal

Mouvement 4 : rotation de l'arbre  
avant autour de l'axe transversal

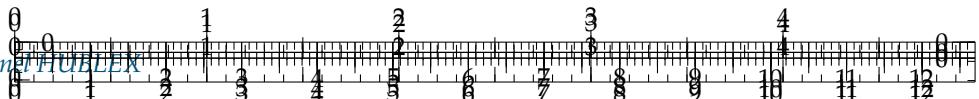


Mouvement 5 : rotation de l'arbre  
arrière autour de l'axe transversal



uvements de déformation du châssis



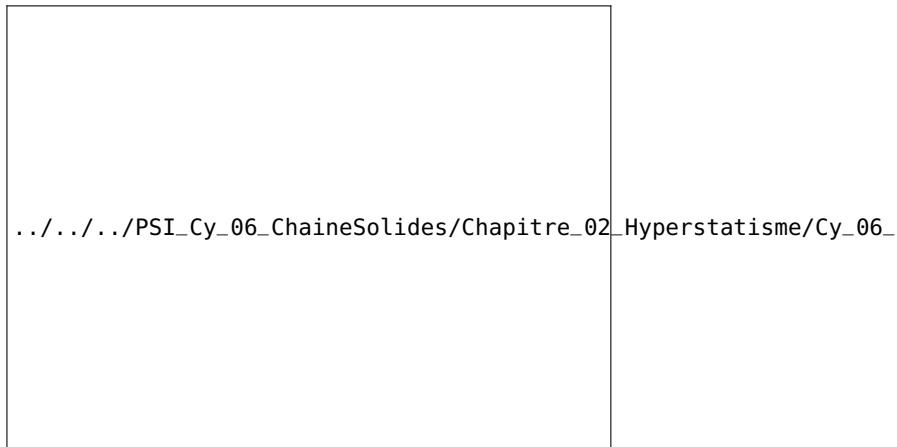


Le châssis est composé de cinq parties orientables les unes par rapport aux autres (??) :

- ▶ l'essieu avant, noté EAV, reliant les roues avant 1 et 2;
- ▶ l'essieu central, noté EC, reliant les roues centrales 3 et 4;
- ▶ l'essieu arrière, noté EAR, reliant les roues arrière 5 et 6;
- ▶ l'arbre avant, noté AAV, connectant les essieux EAV et EC;
- ▶ l'arbre arrière, noté AAR, connectant les essieux EC et EAR.

On rappelle que l'empattement entre deux essieux successifs est noté  $a$ , et que la distance entre deux roues d'un même essieu est notée  $2e$ . Les différentes parties sont reliées entre elles par des articulations possédant une raideur en rotation imposée. Par la suite, on supposera cette raideur négligeable devant les autres actions mécaniques mises en jeu. Un schéma cinématique de la plateforme (châssis+roues) est présenté sur la ??.

**FIGURE 6.12** – Schéma cinématique de la plateforme



Les deux articulations EC-AAV et EC-AAR, situées à une distance longitudinale  $\pm b$  de l'essieu EC, autorisent une rotation selon les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ ; elles sont modélisées par des liaisons rotule à doigt de centres respectifs  $B$  et  $C$ . Les deux articulations EAV-AAV et EAR-AAR autorisent une rotation selon la direction  $\vec{x}$  seulement; elles sont modélisées par des liaisons pivot d'axe  $(O, \vec{x})$ .

D'autre part, les six liaisons essieu-roue sont modélisées par des liaisons pivot d'axe  $(A, \vec{y})$  (roues avant),  $(O, \vec{y})$  (roues centrales) ou  $(D, \vec{y})$  (roues arrière). De plus, le contact de chaque roue  $i$  avec le sol est modélisé en première approche par une liaison ponctuelle de normale  $(P_i, \vec{z})$ .

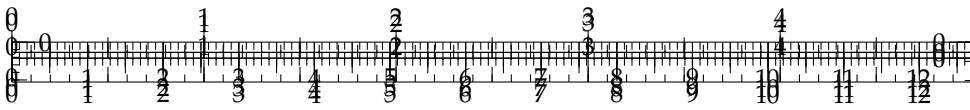
On considère dans les questions ?? et ?? que les liaisons sont parfaites sans frottements.

**Question 1** Déterminer le nombre de mobilités du modèle du système.

**Question 2** Montrer que le modèle est isostatique. Conclure quant à la capacité du châssis à maintenir les roues au contact du sol en toute circonstance.

**Question 3** Proposer un modèle de liaison parfaite pour le contact roue-sol qui permet de tenir compte, dans une étude de statique sans glissement, du frottement longitudinal et transversal. Peut-on calculer toutes les inconnues statiques de liaison dans ce cas ?





## Colle 1

# Pompe à chaleur à compresseur Scroll – Sujet

XENS – PSI – 2018.

### Présentation

Le compresseur Scroll utilise deux spirales de géométrie identique emboîtées l'une dans l'autre. L'une des spirales est fixe tandis que la seconde est mobile et mise en mouvement grâce à un arbre muni d'un excentrique.

### Etude préliminaire d'un joint de Oldham

Le joint de Oldham est un accouplement utilisé en général entre 2 axes parallèles mais non-coaxiaux. La figure ci-après en donne les constituants de principe :

- ▶ un arbre d'entrée (noté 1) pouvant tourner autour de l'axe  $(O_1, \vec{z}_{p1})$  par rapport à un bâti;
- ▶ un arbre de sortie (noté 2) pouvant tourner autour de l'axe  $(O_2, \vec{z}_{p2})$  par rapport à un bâti;
- ▶ une pièce intermédiaire appelée en général « noix » ou « croix » (notée 3).

.../.../PSI\_Cy\_06\_Chain

.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_01\_Scroll/images/fig

La transmission de la rotation de l'arbre 1 à l'arbre 2 est rendue possible par les caractéristiques des liaisons avec la noix 3 : il est nécessaire d'avoir deux glissières orthogonales au niveau de la noix. Ainsi, on retrouve :

- ▶ une glissière de direction  $\vec{y}_{p1}$  entre 1 et 3;
- ▶ une glissière de direction  $\vec{x}_{p2}$  entre 3 et 2.

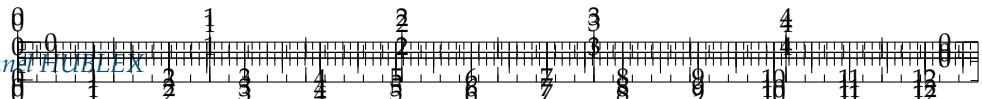
Ces 2 glissières sont par construction constamment orthogonales.

La figure ci-après représente le paramétrage de ce même joint de Oldham avec  $\mathcal{B}_0 (\vec{x}_{p0}, \vec{y}_{p0}, \vec{z}_{p0})$  la base fixe liée au bâti 0.



Paramétrage :

- ▶  $\vec{O_1 O_2} = -e\vec{x}_{p0} + h\vec{z}_{p0};$
- ▶  $\vec{L_1 O_1} = l_1 \vec{z}_{p1};$
- ▶  $\vec{O_1 L_2} = \lambda_2 \vec{y}_{p1};$
- ▶  $\vec{O_2 L_4} = l_2 \vec{z}_{p2}$
- ▶  $\vec{L_3 O_2} = \lambda_2 \vec{x}_{p2}.$



.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_01

Les liaisons entre le bâti 0 et les pièces 1 et 2 sont toutes deux des liaisons pivots d'axes respectifs  $(L_1, \vec{z}_P)$  et  $(L_4, \vec{z}_P)$ .

**Question 1** Représenter la figure plane de calcul reliant la base  $\mathcal{B}_1 (\vec{x}_{P1}, \vec{y}_{P1}, \vec{z}_{P0})$  à la base  $\mathcal{B}_0$  ainsi que celle reliant la base  $\mathcal{B}_2 (\vec{x}_{P2}, \vec{y}_{P2}, \vec{z}_{P0})$  à la base  $\mathcal{B}_0$ . Exprimer  $\vec{y}_{P1}$  et  $\vec{x}_{P2}$  dans la base  $\mathcal{B}_0$  en fonction respectivement de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

**Question 2** Étant donnée l'orthogonalité entre  $\vec{y}_{P1}$  et  $\vec{x}_{P2}$ , montrer que  $\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$ .

On note  $\dot{\theta}_1 = \omega_1$  et  $\dot{\theta}_2 = \omega_2$ .

**Question 3** Justifier, à partir du résultat précédent, que l'accouplement en rotation par joint de Oldham soit qualifié de « homocinétique en rotation », c'est-à-dire que le rapport de transmission entre la vitesse de rotation de 1 par rapport à 0,  $\omega_1$ , et celle de 2 par rapport à 0,  $\omega_2$ , est constant dans le temps.

**Question 4** Calculer le degré d'hyperstatisme de ce modèle d'accouplement à partir des grandeurs cinématiques.

Afin de baisser l'hyperstatisme de l'accouplement, une version alternative est proposée en remplaçant les liaisons  $L_2$  et  $L_3$  par des liaisons pivot-glissant toujours d'axes respectifs  $(O_1, \vec{y}_{P1})$  et  $(O_2, \vec{x}_{P2})$ .

**Question 5** Vérifier, à partir d'une analyse basée sur les grandeurs statiques, que le degré d'hyperstatisme a bien diminué suite à cette modification.

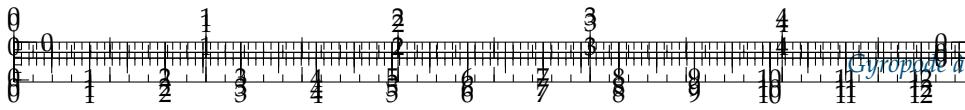
**Question 6** Proposer une modification permettant de rendre le système isostatique en conservant sa fonctionnalité.

### Etude cinématique du compresseur Scroll complet

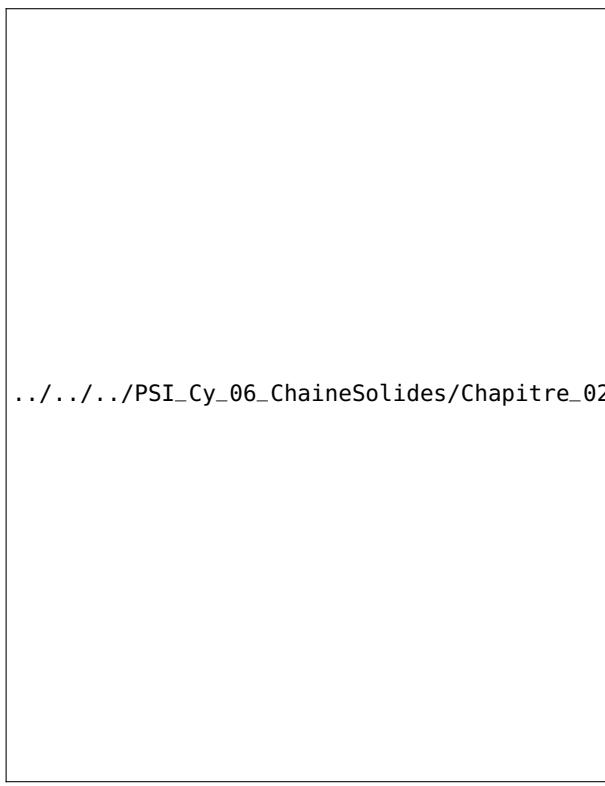
La vue éclatée présentée sur la figure suivante permet d'identifier les différents composants du compresseur.

- le bâti fixe composé du carter extérieur, du stator du moteur électrique, de la butée médiane et de la spirale fixe placée en partie haute;
- l'axe principal composé d'un vilebrequin, du rotor moteur, du contrepoids et de masselottes d'équilibrage;
- la spirale mobile;
- la croix.





Le schéma cinématique proposé reprend les éléments précédents en conservant les ensembles cinématiques. Les contacts entre les spirales fixe et mobile sont négligés dans cette modélisation.



Liaisons supposées parfaites :

- ▶ entre le vilebrequin  $S_1$  et le bâti 0 :
  - liaison rotule de centre  $O$  ;
  - liaison linéaire annulaire de centre  $A$  et d'axe  $\vec{A}z_0$  ;
- ▶ entre le vilebrequin  $S_1$  et la spirale mobile  $S_2$  : liaison pivot glissant d'axe  $(C, \vec{z}_0)$  ;
- ▶ entre la spirale mobile  $S_2$  et la croix  $S_3$  : liaison glissière de direction  $\vec{x}_0$  ;
- ▶ entre la croix  $S_3$  et le bâti 0 : liaison glissière de direction  $\vec{y}_0$ .

Liaison non parfaite :

- ▶ entre la spirale mobile  $S_2$  et le bâti 0 :
  - liaison appui-plan avec frottement de normale  $\vec{z}_0$ .

#### Paramétrage :

- ▶  $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est le repère associé au bâti 0 ;
- ▶  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est le repère associé au au vilebrequin 1 :
  - la rotation de  $S_1$  par rapport à 0 est repérée par l'angle  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  ;
  - la vitesse de rotation est notée  $\omega = \dot{\theta} = 3600 \text{ tr/min}$ .
- ▶  $\vec{OA} = a\vec{z}_1$  avec  $a = 340 \text{ mm}$  ;
- ▶  $\vec{AC} = R_{\text{orb}}\vec{x}_1 + d\vec{z}_1$  avec  $R_{\text{orb}} = 8 \text{ mm}$  et  $d = 80 \text{ mm}$ .

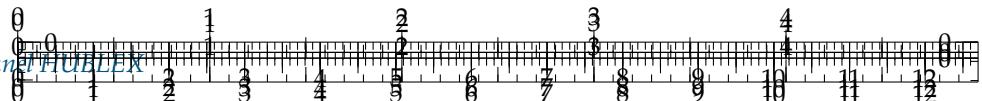
**Question 7** Tracer le graphe des liaisons du système tel que modélisé sur la Figure précédente en faisant apparaître chaque liaison avec ses caractéristiques.

**Question 8** Démontrer par le calcul que l'association des liaisons en  $O$  et en  $A$  entre le vilebrequin et le carter forme une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$ .

**Question 9** Indiquer la valeur de l'indice de mobilité du système dans cette modélisation à partir à partir de l'analyse du schéma cinématique. Proposer une démarche qui, sans utiliser le degré d'hyperstatisme du système, permettrait de retrouver analytiquement cette valeur.

Il est intéressant de remarquer que la croix  $S_3$  réalise un accouplement de type joint de Oldham entre la spirale mobile  $S_2$  et le bâti 0.



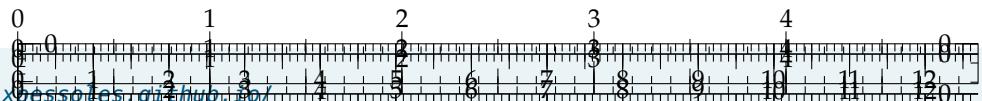


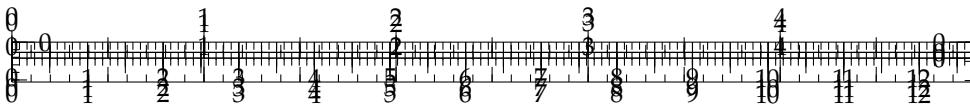
**Question 10** Justifier alors que la vitesse de rotation de  $S_2$  par rapport à 0 est nulle.

**Question 11** Exprimer, dans la base  $\mathcal{B}_1$ , la vitesse instantanée du point C appartenant à  $S_2$  dans son mouvement par rapport à 0. Faire l'application numérique.

**Question 12** Déduire des questions précédentes le type de mouvement de la spirale mobile  $S_2$  dans son déplacement par rapport à 0 ainsi que ses qualificatifs et caractéristiques.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_01\_Scroll/images/Cy\_06\_02\_Col





## Colle 1

# Pompe à chaleur à compresseur Scroll – Corrigé

XENS – PSI – 2018.

### Présentation

Le compresseur Scroll utilise deux spirales de géométrie identique emboîtées l'une dans l'autre. L'une des spirales est fixe tandis que la seconde est mobile et mise en mouvement grâce à un arbre muni d'un excentrique.

### Etude préliminaire d'un joint de Oldham

Le joint de Oldham est un accouplement utilisé en général entre 2 axes parallèles mais non-coaxiaux. La figure ci-après en donne les constituants de principe :

- ▶ un arbre d'entrée (noté 1) pouvant tourner autour de l'axe  $(O_1, \vec{z}_{p1})$  par rapport à un bâti;
- ▶ un arbre de sortie (noté 2) pouvant tourner autour de l'axe  $(O_2, \vec{z}_{p2})$  par rapport à un bâti;
- ▶ une pièce intermédiaire appelée en général « noix » ou « croix » (notée 3).

.../.../PSI\_Cy\_06\_Chain

.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_01\_Scroll/images/fig

La transmission de la rotation de l'arbre 1 à l'arbre 2 est rendue possible par les caractéristiques des liaisons avec la noix 3 : il est nécessaire d'avoir deux glissières orthogonales au niveau de la noix. Ainsi, on retrouve :

- ▶ une glissière de direction  $\vec{y}_{p1}$  entre 1 et 3;
- ▶ une glissière de direction  $\vec{x}_{p2}$  entre 3 et 2.

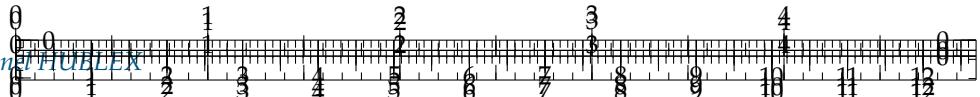
Ces 2 glissières sont par construction constamment orthogonales.

La figure ci-après représente le paramétrage de ce même joint de Oldham avec  $\mathcal{B}_0 (\vec{x}_{p0}, \vec{y}_{p0}, \vec{z}_{p0})$  la base fixe liée au bâti 0.



Paramétrage :

- ▶  $\vec{O_1 O_2} = -e\vec{x}_{p0} + h\vec{z}_{p0};$
- ▶  $\vec{L_1 O_1} = l_1 \vec{z}_{p1};$
- ▶  $\vec{O_1 L_2} = \lambda_2 \vec{y}_{p1};$
- ▶  $\vec{O_2 L_4} = l_2 \vec{z}_{p2}$
- ▶  $\vec{L_3 O_2} = \lambda_2 \vec{x}_{p2}.$



.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_01

Les liaisons entre le bâti 0 et les pièces 1 et 2 sont toutes deux des liaisons pivots d'axes respectifs  $(L_1, \vec{z}_P)$  et  $(L_4, \vec{z}_P)$ .

**Question 1** Représenter la figure plane de calcul reliant la base  $\mathcal{B}_1 (\vec{x}_{P1}, \vec{y}_{P1}, \vec{z}_{P0})$  à la base  $\mathcal{B}_0$  ainsi que celle reliant la base  $\mathcal{B}_2 (\vec{x}_{P2}, \vec{y}_{P2}, \vec{z}_{P0})$  à la base  $\mathcal{B}_0$ . Exprimer  $\vec{y}_{P1}$  et  $\vec{x}_{P2}$  dans la base  $\mathcal{B}_0$  en fonction respectivement de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

**Question 2** Étant donnée l'orthogonalité entre  $\vec{y}_{P1}$  et  $\vec{x}_{P2}$ , montrer que  $\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$ .

On note  $\dot{\theta}_1 = \omega_1$  et  $\dot{\theta}_2 = \omega_2$ .

**Question 3** Justifier, à partir du résultat précédent, que l'accouplement en rotation par joint de Oldham soit qualifié de « homocinétique en rotation », c'est-à-dire que le rapport de transmission entre la vitesse de rotation de 1 par rapport à 0,  $\omega_1$ , et celle de 2 par rapport à 0,  $\omega_2$ , est constant dans le temps.

**Question 4** Calculer le degré d'hyperstatisme de ce modèle d'accouplement à partir des grandeurs cinématiques.

Afin de baisser l'hyperstatisme de l'accouplement, une version alternative est proposée en remplaçant les liaisons  $L_2$  et  $L_3$  par des liaisons pivot-glissant toujours d'axes respectifs  $(O_1, \vec{y}_{P1})$  et  $(O_2, \vec{x}_{P2})$ .

**Question 5** Vérifier, à partir d'une analyse basée sur les grandeurs statiques, que le degré d'hyperstatisme a bien diminué suite à cette modification.

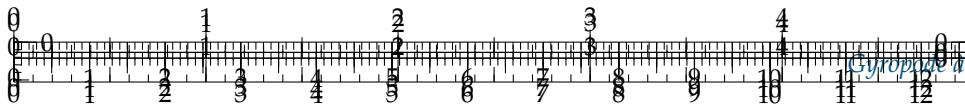
**Question 6** Proposer une modification permettant de rendre le système isostatique en conservant sa fonctionnalité.

### Etude cinématique du compresseur Scroll complet

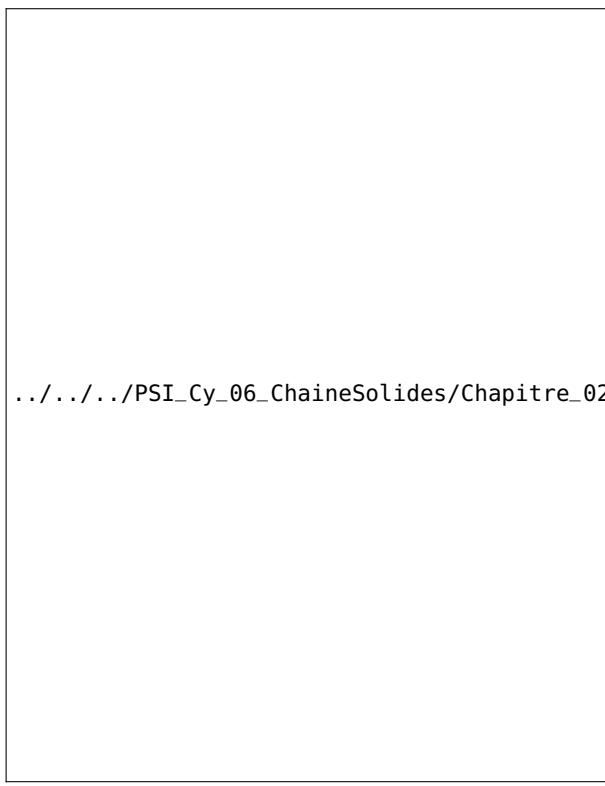
La vue éclatée présentée sur la figure suivante permet d'identifier les différents composants du compresseur.

- le bâti fixe composé du carter extérieur, du stator du moteur électrique, de la butée médiane et de la spirale fixe placée en partie haute;
- l'axe principal composé d'un vilebrequin, du rotor moteur, du contrepoids et de masselottes d'équilibrage;
- la spirale mobile;
- la croix.





Le schéma cinématique proposé reprend les éléments précédents en conservant les ensembles cinématiques. Les contacts entre les spirales fixe et mobile sont négligés dans cette modélisation.



.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_01\_Scroll/images/fig...

Liaisons supposées parfaites :

- ▶ entre le vilebrequin  $S_1$  et le bâti 0 :
  - liaison rotule de centre  $O$  ;
  - liaison linéaire annulaire de centre  $A$  et d'axe  $\vec{A}z_0$  ;
- ▶ entre le vilebrequin  $S_1$  et la spirale mobile  $S_2$  : liaison pivot glissant d'axe  $(C, \vec{z}_0)$  ;
- ▶ entre la spirale mobile  $S_2$  et la croix  $S_3$  : liaison glissière de direction  $\vec{x}_0$  ;
- ▶ entre la croix  $S_3$  et le bâti 0 : liaison glissière de direction  $\vec{y}_0$ .

Liaison non parfaite :

- ▶ entre la spirale mobile  $S_2$  et le bâti 0 :
  - liaison appui-plan avec frottement de normale  $\vec{z}_0$ .

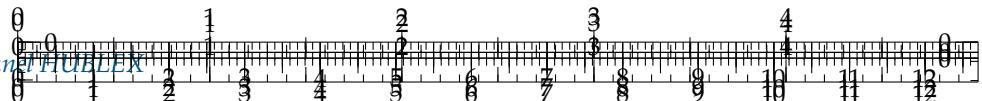
**Question 7** Tracer le graphe des liaisons du système tel que modélisé sur la Figure précédente en faisant apparaître chaque liaison avec ses caractéristiques.

**Question 8** Démontrer par le calcul que l'association des liaisons en  $O$  et en  $A$  entre le vilebrequin et le carter forme une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$ .

**Question 9** Indiquer la valeur de l'indice de mobilité du système dans cette modélisation à partir à partir de l'analyse du schéma cinématique. Proposer une démarche qui, sans utiliser le degré d'hyperstatisme du système, permettrait de retrouver analytiquement cette valeur.

Il est intéressant de remarquer que la croix  $S_3$  réalise un accouplement de type joint de Oldham entre la spirale mobile  $S_2$  et le bâti 0.



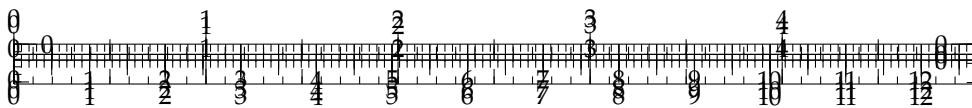


**Question 10** Justifier alors que la vitesse de rotation de  $S_2$  par rapport à 0 est nulle.

**Question 11** Exprimer, dans la base  $\mathcal{B}_1$ , la vitesse instantanée du point C appartenant à  $S_2$  dans son mouvement par rapport à 0. Faire l'application numérique.

**Question 12** Déduire des questions précédentes le type de mouvement de la spirale mobile  $S_2$  dans son déplacement par rapport à 0 ainsi que ses qualificatifs et caractéristiques.





## Colle 2

### Interface maître et esclave d'un robot – Sujet

CCP PSI 2015.

#### Mise en situation

La téléopération consiste à mettre en relation deux manipulateurs appelés communément maître et esclave. Le manipulateur maître permet au chirurgien de donner sa consigne de déplacement à l'aide d'un levier de commande tandis que l'esclave l'exécute au contact de l'environnement (l'organe à opérer). Les deux sous-systèmes échangent des informations de déplacement et d'effort au travers d'un ou plusieurs canaux de communication. Un retour visuel est également mis en place en parallèle à ce dispositif.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_02\_Hoeken/images/fig\_00a.png

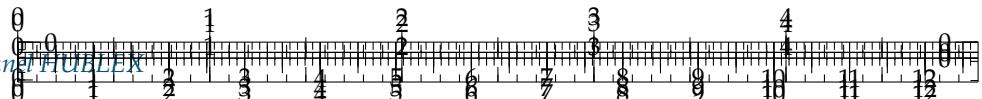
#### Modélisation de l'interface maître

Ce mécanisme est constitué de 4 barres reliées par des liaisons pivots.

##### Objectif

Vérifier que les exigences « Amplitude déplacement » (id 1.2.1.1), « Mouvement rectiligne » (id 1.2.1.2), « Linéarité déplacement » (id 1.2.1.3) peuvent être satisfaites par le mécanisme de HOEKEN.





.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_02\_Ho

- Solide  $S_0$ , repère  $\mathcal{R}_0(A; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ,  $\overrightarrow{AB} = L_0 \vec{x}_0$  avec  $L_0 = 50 \text{ mm}$ .
- Solide  $S_1$ , repère  $\mathcal{R}_1(B; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ ,  $\overrightarrow{BC} = L_1 \vec{x}_1$  avec  $L_1 = 25 \text{ mm}$ ,  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .
- Solide  $S_2$ , repère  $\mathcal{R}_2(A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ ,  $\overrightarrow{AD} = L_2 \vec{x}_2$  avec  $L_2 = 62,5 \text{ mm}$ ,  $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ .
- Solide  $S_3$ , repère  $\mathcal{R}_3(C; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ ,  $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DC} = L_2 \vec{x}_3$  avec  $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$ .

**Question 1** Donner une relation algébrique reliant les paramètres  $L_0, L_1, L_2, \theta_1$  et  $\theta_3$ .

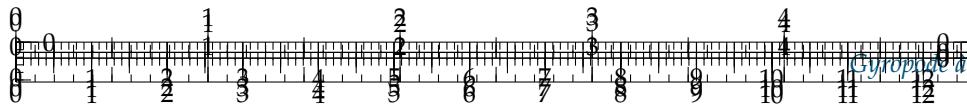
**Question 2** De même, exprimer le vecteur position du point  $E(\overrightarrow{AE})$  dans la base du repère  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $L_0, L_1, L_2, \theta_1$  et  $\theta_3$ .

La résolution analytique du système d'équations permettant d'obtenir le déplacement du point  $E$  en fonction de l'angle de rotation  $\theta_1$  du moteur et des différentes longueurs du mécanisme n'étant pas triviale, seuls les résultats d'une simulation numérique seront analysés.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_02\_Ho

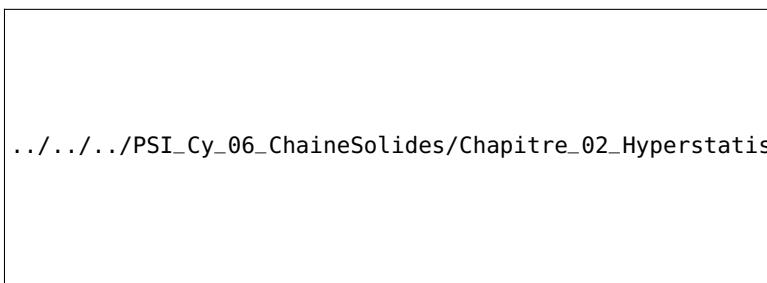
**Question 3** Vérifier, à l'aide des figures précédentes, que le déplacement du point  $E$  est compatible avec les exigences « Amplitude déplacement » (id 1.2.1.1) et « Mouvement rectiligne » (id 1.2.1.2) sur l'intervalle  $X_E \in [-60 \text{ mm}; 40 \text{ mm}]$ .



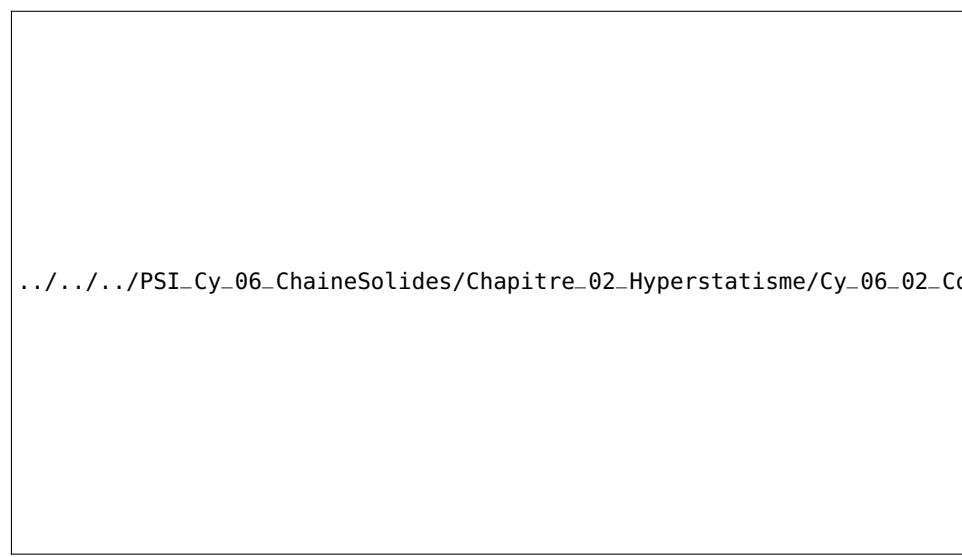


**Question 4** Proposer, à partir de la dernière figure, une démarche permettant de vérifier l'exigence « Linéarité déplacement » (id 1.2.1.3) sur l'intervalle  $X_E \in [-60 \text{ mm}; 40 \text{ mm}]$ .

## Modélisation de l'interface esclave



.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_02\_Hoeken/images/fig\_06.png



.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineS

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_02\_Hoeken/images/fig\_07.png

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineS

### Objectif

Modéliser le comportement dynamique de l'interface esclave de façon à évaluer son comportement au sein d'une boucle d'asservissement.

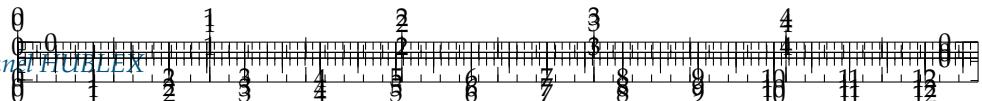
On note  $\{\mathcal{T}(\text{mot} \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{z} \end{array} \right\}_{\forall P}$  l'expression, dans la base  $\mathcal{B}_0$  du torseur de l'action mécanique exercée par le moteur sur le solide  $S_1$  et l'accélération de la pesanteur sera représentée par le vecteur  $\vec{g} = -g\vec{y}_0$ .

**Question 5** Tracer le graphe des liaisons du dispositif esclave. Préciser les actions mécaniques extérieures Donner le degré d'hyperstatisme de la modélisation de ce mécanisme.

**Question 6** Proposer une modification simple pour le rendre isostatique.

**Question 7** Montrer que le mouvement de  $S_3/S_0$  ne peut être qu'une translation de direction  $\vec{x}_0$ .





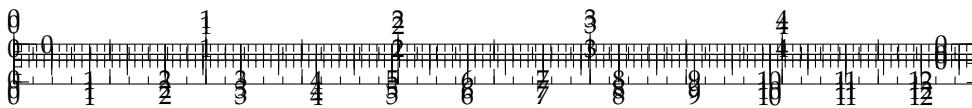
**Question 8** En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'équation de mouvement liant les paramètres  $C_m$ ,  $\dot{\theta}_1$ ,  $\ddot{\theta}_1$ ,  $\dot{x}_s$ ,  $\ddot{x}_s$ ,  $f_v$ ,  $M_3$  et  $I_1$ .

**Question 9** La relation géométrique liant les paramètres  $x_s$  et  $\theta_1$  n'étant pas triviale, on propose de la linéariser autour du point de fonctionnement par l'expression  $\theta_1(t) \simeq \alpha x_s(t)$  avec  $\alpha = -30 \text{ m}^{-1}$ . En déduire l'équation différentielle liant les paramètres  $C_m$ ,  $\dot{x}_s$ ,  $\ddot{x}_s$ ,  $f_v$ ,  $M_3$ ,  $I_1$  et  $\alpha$ .

...

**Question 10** Donner, dans les conditions d'Heaviside et sous forme canonique, la fonction de transfert modélisant le comportement dynamique du manipulateur esclave :  $H(p) = \frac{X_s(p)}{C_m(p)}$  sachant que  $X_s(p) = \mathcal{L}[x_s(t)]$  et  $C_m(p) = \mathcal{L}[c_m(t)]$ . Faire l'application numérique.





## Colle 2

### Interface maître et esclave d'un robot – Corrigé

CCP PSI 2015.

#### Mise en situation

#### Modélisation de l'interface maître

**Question 1** Donner une relation algébrique reliant les paramètres  $L_0, L_1, L_2, \theta_1$  et  $\theta_3$ .

##### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/C

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_02\_Hoeken/images/cor\_01.png

En réalisant une fermeture géométrique on a  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$ .

On a alors,  $L_0\vec{x}_0 + L_1\vec{x}_1 - L_2\vec{x}_3 - L_2\vec{x}_2 = \vec{0}$ .

$$\Leftrightarrow L_0\vec{x}_0 + L_1(\cos \theta_1\vec{x}_0 + \sin \theta_1\vec{y}_0) - L_2(\cos \theta_3\vec{x}_0 + \sin \theta_3\vec{y}_0) - L_2(\cos \theta_2\vec{x}_0 + \sin \theta_2\vec{y}_0) = \vec{0}.$$

En projetant dans la base  $\mathcal{B}_0$ , on a :

$$\begin{cases} L_0 + L_1 \cos \theta_1 - L_2 \cos \theta_3 - L_2 \cos \theta_2 = 0 \\ L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin \theta_3 - L_2 \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Il faut supprimer  $\theta_2$  :

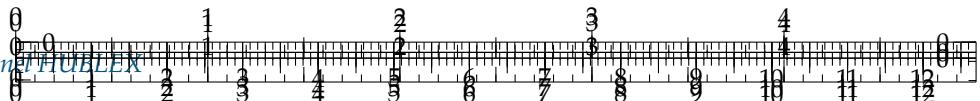
$$\begin{cases} L_0 + L_1 \cos \theta_1 - L_2 \cos \theta_3 = L_2 \cos \theta_2 \\ L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin \theta_3 = L_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

En passant les expressions au carré et en les sommant, on a :

$$(L_0 + L_1 \cos \theta_1 - L_2 \cos \theta_3)^2 + (L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin \theta_3)^2 = L_2^2$$

**Question 2** De même, exprimer le vecteur position du point  $E$  ( $\vec{AE}$ ) dans la base du repère  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $L_0, L_1, L_2, \theta_1$  et  $\theta_3$ .



**Correction**

On a  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$  et donc  $\overrightarrow{AE} = L_0 \vec{x}_0 + L_1 \vec{x}_1 - 2L_2 \vec{x}_3$ .  
 $\overrightarrow{AE} = L_0 \vec{x}_0 + L_1 \left( \cos \theta_1 \vec{x}_0 + \sin \theta_1 \vec{y}_0 \right) - 2L_2 \left( \cos \theta_3 \vec{x}_0 + \sin \theta_3 \vec{y}_0 \right)$ .  
Et  $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} L_0 + L_1 \cos \theta_1 - 2L_2 \cos \theta_3 \\ L_1 \sin \theta_1 - 2L_2 \sin \theta_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0}$

**Question 3** Vérifier, à l'aide des figures précédentes, que le déplacement du point  $E$  est compatible avec les exigences « Amplitude déplacement » (id 1.2.1.1) et « Mouvement rectiligne » (id 1.2.1.2) sur l'intervalle  $X_E \in [-60 \text{ mm}; 40 \text{ mm}]$ .

**Correction**

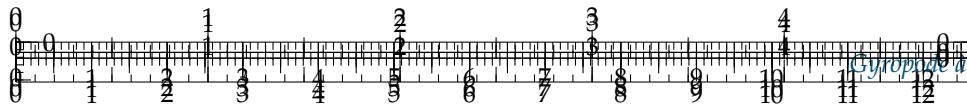
- ▶ Amplitude déplacement de 50 mm minimum : OK (amplitude de 100 mm).
- ▶ Mouvement rectiligne d'une amplitude  $\Delta Y = 0,5 \text{ mm}$  maximum : OK (amplitude de 0,25 mm).
- ▶ Mouvement rectiligne d'une amplitude taux de variation  $\frac{dY_E}{dX_E} < 2\%$  : OK (amplitude de  $\pm 2\%$ ).

**Question 4** Proposer, à partir de la dernière figure, une démarche permettant de vérifier l'exigence « Linéarité déplacement » (id 1.2.1.3) sur l'intervalle  $X_E \in [-60 \text{ mm}; 40 \text{ mm}]$ .

**Correction**

Il serait possible de faire une régression linéaire sur l'intervalle  $[-60 \text{ mm}; 40 \text{ mm}]$  et de vérifier que le coefficient de corrélation est supérieur à 0,99.





## Modélisation de l'interface esclave

### Objectif

Modéliser le comportement dynamique de l'interface esclave de façon à évaluer son comportement au sein d'une boucle d'asservissement.

**Question 5** Tracer le graphe des liaisons du dispositif esclave. Préciser les actions mécaniques extérieures. Donner le degré d'hyperstatisme de la modélisation de ce mécanisme.

### Correction

#### Méthode statique

- ▶ Nombre de mobilité :  $m = 1$ .
- ▶ Nombre d'inconnues : 6 liaisons pivot.  $I_S = 30$ .
- ▶ Nombre d'équations : 5 solides.  $E_S = 30$ .
- ▶  $h = m - E_S + I_S = 1 - 30 + 30 = 1$ .

#### Méthode cinématique

- ▶ Nombre de mobilité :  $m = 1$ .
- ▶ Nombre d'inconnues : 6 liaisons pivot.  $I_c = 6$ .
- ▶ Nombre d'équations : 1 cycle.  $E_c = 6$ .
- ▶  $h = m - I_c + E_c = 1 - 6 + 6 = 1$ .

**Question 6** Proposer une modification simple pour le rendre isostatique.

### Correction

Pour rendre le système isostatique il faudrait ajouter une inconnue cinématique sans ajouter de mobilité. On peut par exemple remplacer une des liaison pivot par une liaison sphérique à doigt.

**Question 7** Montrer que le mouvement de  $S_3/S_0$  ne peut être qu'une translation de direction  $\vec{x}_0$ .

### Correction

D'une part,  $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \overrightarrow{\Omega(3/2)} + \overrightarrow{\Omega(2/1)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\theta}_{30} \vec{z}_0$  (pivots parallèles d'axe  $\vec{z}_0$ ).

D'autre part,  $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \overrightarrow{\Omega(3/5)} + \overrightarrow{\Omega(5/4)} + \overrightarrow{\Omega(4/0)} = \dot{\theta}'_{30} \vec{y}_0$  (pivots parallèles d'axe  $\vec{y}_0$ ).

On a donc  $\dot{\theta}_{30} \vec{z}_0 = \dot{\theta}'_{30} \vec{y}_0$  et donc nécessairement  $\dot{\theta}_{30} = \dot{\theta}'_{30} = 0$ .

Le mouvement de 3/0 est donc une translation.

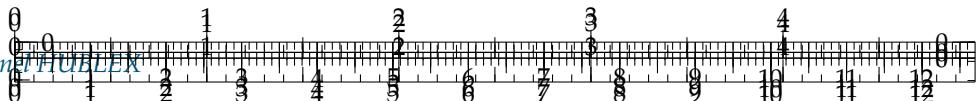
**Question 8** En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'équation de mouvement liant les paramètres  $C_m$ ,  $\dot{\theta}_1$ ,  $\ddot{\theta}_1$ ,  $\dot{x}_s$ ,  $\ddot{x}_s$ ,  $f_v$ ,  $M_3$  et  $I_1$ .

### Correction

On isole  $\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$ .

**Calcul de l'énergie cinétique :**  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \mathcal{E}_c(S_1/0) + \mathcal{E}_c(S_3/0)$  car les masses et les inerties des autres solides sont négligées. On a donc  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}M_3\overrightarrow{V(C,3/0)^2}$  (car le





mouvement de 3/0 est une translation.  $\overrightarrow{V(C, 3/0)} = \frac{d\vec{AC}}{dt} = \dot{x}_s \vec{x}_0$ .

$$\text{Au final, } \mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} M_3 \dot{x}_s^2.$$

**Bilan des puissances intérieures :** il n'y a pas de frottements ; donc  $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$ .

**Bilan des puissances extérieures :**

- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/0) M g \vec{y}_0 \cdot \dot{x}_s \vec{x}_0 = 0$ ;
- $\mathcal{P}(0 \rightarrow 1/0)_{\text{mot}} = C_m \dot{\theta}_1$ ;
- $\mathcal{P}(0 \rightarrow 1/0)_{\text{frot}} = -f_v \dot{\theta}_1^2$ .

**Application du théorème de l'énergie cinétique :** on a  $\frac{d\mathcal{E}_c(\Sigma/0)}{dt} = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0)$ ,

et donc

$$I_1 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 + M_3 \dot{x}_s \ddot{x}_s = C_m \dot{\theta}_1 - f_v \dot{\theta}_1^2.$$

**Question 9** La relation géométrique liant les paramètres  $x_s$  et  $\theta_1$  n'étant pas triviale, on propose de la linéariser autour du point de fonctionnement par l'expression  $\theta_1(t) \approx \alpha x_s(t)$  avec  $\alpha = -30 \text{ m}^{-1}$ . En déduire l'équation différentielle liant les paramètres  $C_m$ ,  $\dot{x}_s$ ,  $\ddot{x}_s$ ,  $f_v$ ,  $M_3$ ,  $I_1$  et  $\alpha$ .

#### Correction

On a directement  $I_1 \alpha \dot{x}_s(t) \alpha \ddot{x}_s(t) + M_3 \dot{x}_s \ddot{x}_s(t) = C_m \alpha \dot{x}_s(t) - f_v \alpha^2 \dot{x}_s(t)^2 \Leftrightarrow I_1 \alpha^2 \ddot{x}_s(t) + M_3 \ddot{x}_s = C_m \alpha - f_v \alpha^2 \dot{x}_s(t)$

**Question 10** Donner, dans les conditions d'Heaviside et sous forme canonique, la fonction de transfert modélisant le comportement dynamique du manipulateur esclave :

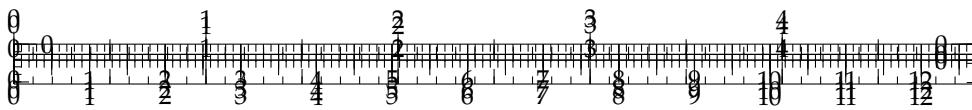
$H(p) = \frac{X_s(p)}{C_m(p)}$  sachant que  $X_s(p) = \mathcal{L}[x_s(t)]$  et  $C_m(p) = \mathcal{L}[c_m(t)]$ . Faire l'application numérique.

#### Correction

En transformant l'équation dans le domaine de Laplace, on a :  $I_1 \alpha^2 p^2 X_s(p) + M_3 p^2 X_s(p) = C_m(p) \alpha - f_v \alpha^2 p X_s(p) \Leftrightarrow X_s(p) (I_1 \alpha^2 p^2 + M_3 p^2 + f_v \alpha^2 p) = C_m(p) \alpha \Leftrightarrow H(p) = \frac{\alpha}{p ((I_1 \alpha^2 + M_3) p + f_v \alpha^2)} \Leftrightarrow H(p) = \frac{1/(f_v \alpha)}{p \left( \frac{I_1 \alpha^2 + M_3}{f_v \alpha^2} p + 1 \right)}$ .

$$\text{On a alors } K = -20,83, \tau = \frac{0,0513 + 0,1}{1,44} = 0,105 \text{ s.}$$





## Colle 3

# Conception de la commande d'un robot chirurgical – Sujet

CCS PSI 2015.

On s'intéresse au bras esclave d'un robot chirurgical.

### Objectif

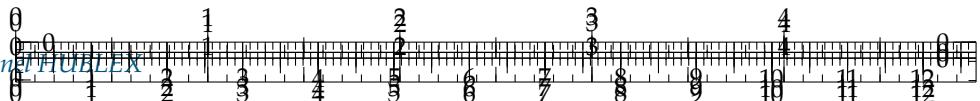
Justifier la structure du bras esclave par rapport au cahier des charges.

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_Chain

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_03\_DaVinci/images/fig\_02.png

On donne le schéma cinématique partiel du bras esclave.





.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_03\_Da

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Col

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_03\_Da

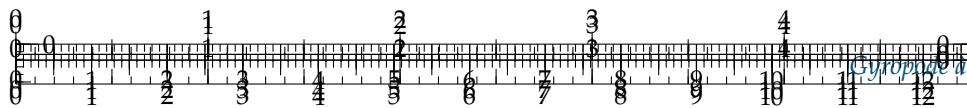
Le point  $T$  est situé à l'intersection des axes  $(A', \vec{x}_0)$  et  $(P', \vec{y}_2')$ . Le vecteur vitesse du point  $T$  de  $7'$  par rapport à  $0$ , noté  $\overrightarrow{V(T, 7'/0)}$ , doit être colinéaire à  $\vec{y}_2'$ .

**Question 1** Tracer le graphe de liaison.

**Question 2** En s'appuyant sur le schéma cinématique, calculer  $\overrightarrow{V(P, 7'/0)}$  par dérivation du vecteur position.

**Question 3** Exprimer  $\overrightarrow{V(T, 7'/0)}$  dans la base  $(\vec{x}_2', \vec{y}_2', \vec{z}_2')$  en fonction des données de l'énoncé. Il est conseillé d'utiliser la relation de Varignon en passant par le point  $P'$ .





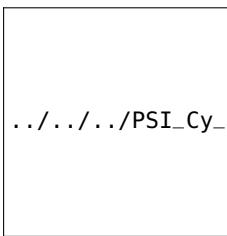
**Question 4** Exprimer le torseur cinématique de  $7'/0$  réduit en  $T$ , par ses composantes dans la base  $(\vec{x}_2', \vec{y}_2', \vec{z}_2')$  et donner la liaison équivalente entre  $7'$  et  $0$  au point  $T$ .

**Question 5** Quelle exigence du cahier des charges (document réponse) justifie cette structure ? Expliquer sans calcul.

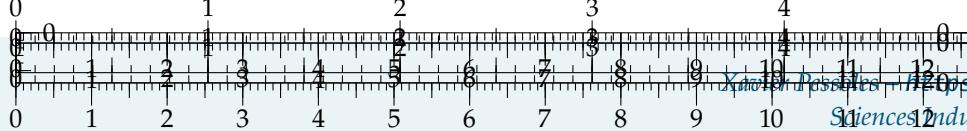
**Question 6** Mettre à jour le graphe de liaisons et donner le degré d'hyperstatisme du modèle. Vous utiliserez la méthode statique et la méthode cinématique.

**Question 7** Quel peut être l'avantage de disposer d'un système hyperstatique ?

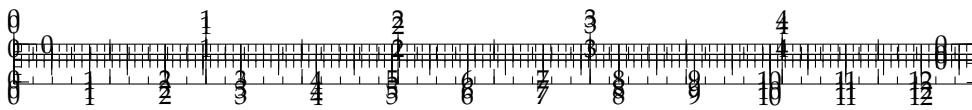
**Question 8** En conservant l'architecture du mécanisme, proposer des modifications de liaisons permettant de rendre le modèle isostatique.



.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSoli







## Colle 3

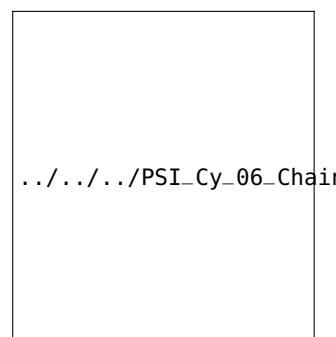
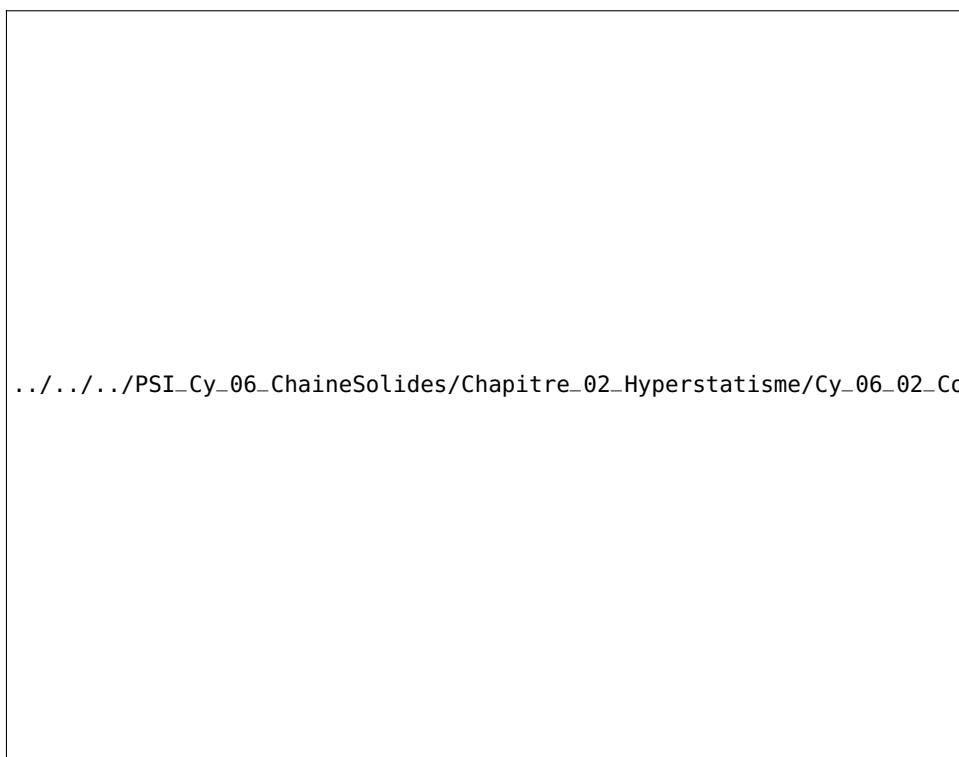
# Conception de la commande d'un robot chirurgical – Corrigé

CCS PSI 2015.

On s'intéresse au bras esclave d'un robot chirurgical.

### Objectif

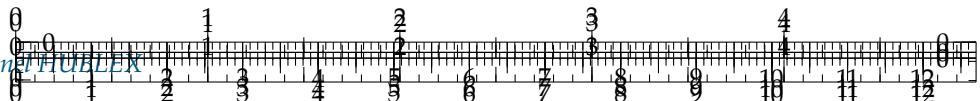
Justifier la structure du bras esclave par rapport au cahier des charges.



[.../PSI\\_Cy\\_06\\_ChaineSolides/Chapitre\\_02\\_Hyperstatisme/Cy\\_06\\_02\\_Colle\\_03\\_DaVinci/images/fig\\_02.png](http://.../PSI_Cy_06_ChaineSolides/Chapitre_02_Hyperstatisme/Cy_06_02_Colle_03_DaVinci/images/fig_02.png)

On donne le schéma cinématique partiel du bras esclave.





.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_03\_Da

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Col

.../.../.../PSI\_Cy\_06\_ChaineSolides/Chapitre\_02\_Hyperstatisme/Cy\_06\_02\_Colle\_03\_Da

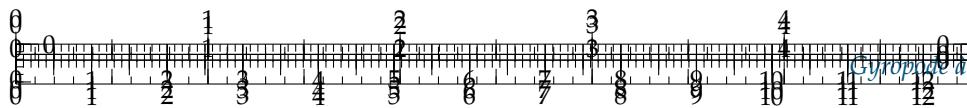
Le point  $T$  est situé à l'intersection des axes  $(A', \vec{x}_0)$  et  $(P', \vec{y}_2')$ . Le vecteur vitesse du point  $T$  de  $7'$  par rapport à  $0$ , noté  $\overrightarrow{V(T, 7'/0)}$ , doit être colinéaire à  $\vec{y}_2'$ .

**Question 1** Tracer le graphe de liaison.

**Question 2** En s'appuyant sur le schéma cinématique, calculer  $\overrightarrow{V(P, 7'/0)}$  par dérivation du vecteur position.

**Question 3** Exprimer  $\overrightarrow{V(T, 7'/0)}$  dans la base  $(\vec{x}_2', \vec{y}_2', \vec{z}_2')$  en fonction des données de l'énoncé. Il est conseillé d'utiliser la relation de Varignon en passant par le point  $P'$ .





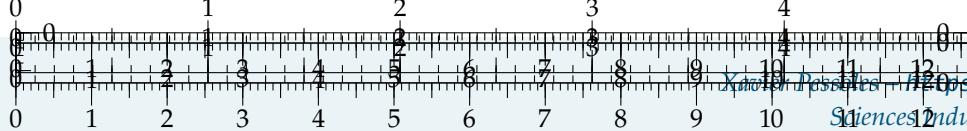
**Question 4** Exprimer le torseur cinématique de  $7'/0$  réduit en  $T$ , par ses composantes dans la base  $(\vec{x}_2', \vec{y}_2', \vec{z}_2')$  et donner la liaison équivalente entre  $7'$  et  $0$  au point  $T$ .

**Question 5** Quelle exigence du cahier des charges (document réponse) justifie cette structure ? Expliquer sans calcul.

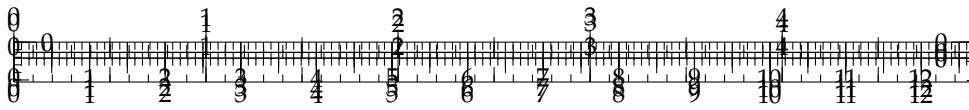
**Question 6** Mettre à jour le graphe de liaisons et donner le degré d'hyperstatisme du modèle. Vous utiliserez la méthode statique et la méthode cinématique.

**Question 7** Quel peut être l'avantage de disposer d'un système hyperstatique ?

**Question 8** En conservant l'architecture du mécanisme, proposer des modifications de liaisons permettant de rendre le modèle isostatique.







.../.../.../Style/png/Fond\_CIN.png

## 7 Résolution des problèmes de dynamique plans à une mobilité

### 7.1 Introduction

#### Objectif

L'objectif de ce cycle est triple. L'étude dynamique des systèmes de solide permet de :

- ▶ déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en tenant compte des masses (et des répartitions de masses) des pièces ou des classes d'équivalence cinématique;
- ▶ dimensionner les actionneurs permettant d'actionner un système;
- ▶ déterminer les équations de mouvement.

C1-05

C2-08

C2-09

On distingue deux principaux types de problèmes en dynamique :

▶ **type 1 :**

- on connaît : les actionneurs et les inerties,
- on détermine : les lois de mouvement et les actions mécaniques dans les liaisons;

▶ **type 2 :**

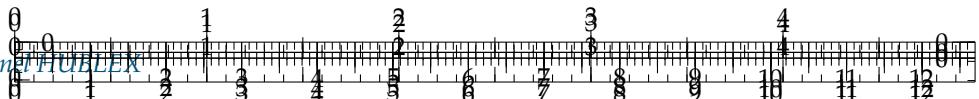
- on connaît : les lois de mouvement et inerties,
- on détermine : les caractéristiques des actionneurs et les actions mécaniques de liaison.

#### Définition – Référentiel galiléen

Un **référentiel galiléen** se définit à partir d'une repère spatial (orthonormé direct  $(O_g; \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ ) et d'une base de temps ( $t$ ) et est animé d'un mouvement de **translation rectiligne uniforme** (à vitesse constante) par rapport à un référentiel absolu fixe ou à un autre référentiel galiléen  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

On peut également le définir comme un référentiel « dans lequel le principe fondamental de la dynamique s'applique ».





### Remarques

Dans la pratique, on fera toujours la **supposition qu'un repère est galiléen**. Cela dépendra effectivement des mouvements mis en jeu et des échelles temporelles et spatiales considérées. Par exemple :

- ▶ pour étudier des mouvements de l'ordre de quelques minutes à l'échelle humaine, le **référentiel terrestre** (origine liée au centre de la terre et les trois axes liés au globe terrestre) est approprié;
- ▶ pour étudier les effets météorologiques (ouragans, courants marins), ou les mouvements des satellites, il convient alors de tenir compte de l'inertie de la terre et on pourra choisir le **référentiel géocentrique** (origine liée au centre de la terre et les trois axes dirigés vers trois étoiles très éloignées) comme référentiel galiléen;
- ▶ pour étudier le mouvement des planètes, il convient mieux d'utiliser le **référentiel héliocentrique** (origine liée au centre du soleil et les trois axes dirigés vers trois étoiles très éloignées).

Une chronologie galiléenne est obtenue par une horloge précise (Quartz, atomique, ou mouvement des astres). En mécanique classique (ou Newtonienne), les deux repères d'**espace et de temps** sont supposés **indépendants** ce qui n'est pas le cas de la mécanique relativiste.

## 7.2 Première approche du Principe Fondamental de la Dynamique

### 7.2.1 Principe Fondamental de la Dynamique

#### Définition – Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique

Dans le cas général, soit un ensemble matériel  $E$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), alors la somme des actions mécaniques extérieures (**torseur des actions mécaniques extérieures** s'appliquant sur  $E$ ) est égale au **torseur dynamique** du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\} = \{\mathcal{D}(E/R_0)\}.$$

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(P, E/R_0)} \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m_E \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)}. G \text{ d}$$

le centre d'inertie de  $E$ .

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel la relation est vérifiée. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

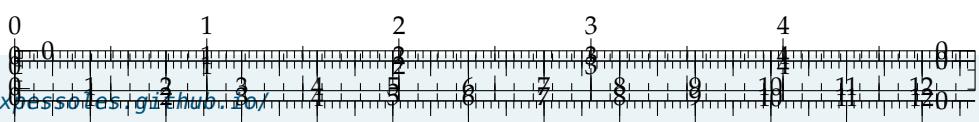
#### Résultat – Relation de Varignon

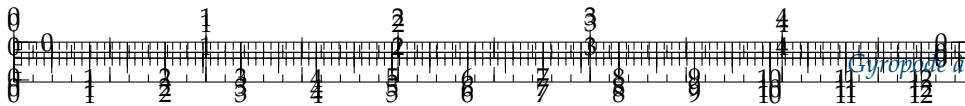
Le torseur dynamique étant un torseur, on peut utiliser la relation de Varignon pour changer le point d'application du torseur dynamique :

$$\overrightarrow{\delta(B, S_2/S_1)} = \overrightarrow{\delta(A, S_2/S_1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d(S_2/S_1)}.$$

### Remarques

- ▶ Les méthodes permettant de déterminer le torseur dynamique dans un cas quelconque seront vues ultérieurement.





- La démarche de calcul du torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur  $E$  est la même que celle vu lors de l'utilisation du PFS (ce sont les mêmes torseurs).

## 7.2.2 Équations de mouvement

### Définition – Équations de mouvement

Une **équation de mouvement** est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure **aucune composante inconnue d'action mécanique**. Il est parfois nécessaire d'écrire plusieurs équations pour trouver par substitution une équation de mouvement. On nomme « **intégrale première du mouvement** » une équation différentielle du premier ordre avec un second membre constant, obtenue par intégration d'une équation de mouvement.

## 7.2.3 Théorèmes généraux

Du principe fondamental de la dynamique découle plusieurs théorèmes généraux.

### Théorème – Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  et de centre de gravité  $G$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur  $E$  est égale à la résultante dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  (notée  $\overrightarrow{R_d}(E/R_0)$ ) :

$$\overrightarrow{R}(\bar{E} \rightarrow E) = \overrightarrow{R_d}(E/R_0) = m\overrightarrow{\Gamma}(G, E/R_0).$$

### Théorème – Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur  $E$  en un point quelconque  $A$  est égale au moment dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  en  $A$  (noté  $\overrightarrow{\delta}(A, E/R_0)$ ) :

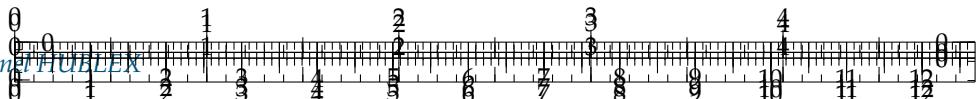
$$\overrightarrow{M}(A, \bar{E} \rightarrow E) = \overrightarrow{\delta}(A, E/R_0).$$

### Théorème – Théorème des actions mutuelles

Soient ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ) deux sous-ensembles matériels de ( $E$ ), en mouvement par rapport à un référentiel galiléen, et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. Alors :

$$\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = -\{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\}.$$





## 7.2.4 Principe Fondamental de la Dynamique : applications simplifiées

### Définition – Solide en translation par rapport à un référentiel galiléen

Si un ensemble matériel  $E$  (de centre d'inertie  $G$ ) est en mouvement de translation dans un référentiel galiléen ( $R_g$ ) alors :

- ▶ d'après le **théorème de la résultante dynamique** : la résultante des efforts extérieurs est égale au produit de la masse par l'accélération de  $G$  par rapport à  $R_g$  :  $m \overrightarrow{\Gamma}(G, E/R_g) = R(\bar{E} \rightarrow E)$ ;
- ▶ d'après le **théorème du moment dynamique** : le moment des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur  $E$  est égal au vecteur nul en tout point :  $\overrightarrow{\mathcal{M}}(A, \bar{E} \rightarrow E) = \vec{0} \forall A$ .

### Définition – Solide en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen

Si un ensemble matériel  $E$  (de centre d'inertie  $G$ ) est en mouvement de rotation autour d'un axe  $\Delta$  (dirigé par  $\vec{u}$  unitaire) fixe dans un référentiel galiléen ( $R_g$ ) alors, d'après le **théorème du moment dynamique** :  $\overrightarrow{\mathcal{M}}(A, \bar{E} \rightarrow E) \cdot \vec{u} = J_\Delta(E) \cdot \ddot{\theta} \quad \forall A \in \Delta$  avec :

- ▶  $J_\Delta(E)$  le moment d'inertie de  $E$  par rapport à l'axe  $\Delta$  (en  $\text{kg m}^2$ );
- ▶  $\ddot{\theta}$ , l'accélération angulaire de  $E$  par rapport à  $R_g$  suivant  $\Delta$  :  $\vec{\Omega}(E/R_g) \cdot \vec{u}$ .

## 7.2.5 Méthodologie

### Méthode – Résolution du PFD

La méthodologie de résolution d'un problème de dynamique est très similaire à celle utilisée lors de la détermination des performances statiques des systèmes.

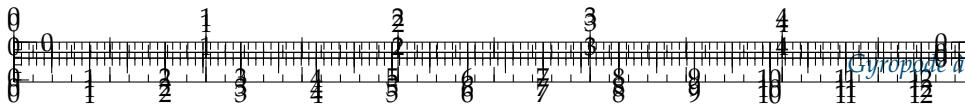
1. On choisit un repère galiléen et on effectue le bilan complet des données d'entrée du problème.
2. On construit un graphe de structure.
3. On isole le solide ou le système de solides considérés.
4. On effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures agissant sur le système isolé.
5. On écrit le PFD.
6. On projette les relations vectorielles sur les axes choisis.
7. On injecte les lois de comportement (ressort, loi de Coulomb, ...).
8. On effectue la résolution.

### Méthode – Équations de mouvement

Idée de base : minimiser le nombre d'équations à écrire.

- ▶ Si on cherche à déterminer un couple moteur, on écrira plutôt un théorème du moment dynamique en projection sur l'axe de rotation.
- ▶ Si on cherche à déterminer l'effort transmis par un vérin, on écrira plutôt un théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe de translation.





## 7.3 Théorème de l'énergie cinétique dans des particuliers (mais fréquents)

### Hypothèse

Nous allons traiter ici de cas particuliers du théorème de l'énergie cinétique. Une formulation plus générale sera vue ultérieurement. Les solides isolés seront forcément :

- ou bien en translation par rapport à un référentiel galiléen;
- ou bien en rotation par rapport à un axe fixe d'un référentiel galiléen;
- ou bien de masse (ou d'inertie) négligeable.

### 7.3.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide

#### Définition – Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ( $S$ )

**La puissance d'une action mécanique extérieure** à un solide ( $S$ ) en mouvement dans un référentiel  $R$  peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit ( $S$ ) et le torseur cinématique du mouvement de  $S$  dans le référentiel  $R$ .

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}.$$

#### Remarque

- Lorsque le torseur cinématique de  $S/R$  est un couple (mouvement de translation) alors en tout point  $A$  la puissance est alors donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} \forall P$ .
- Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)} \forall P$ .

Le comoment des torseurs est défini par :  $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}$

$$= \left\{ \frac{\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}}{\overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)}} \right\}_P \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(S/R)}}{\overrightarrow{V(P, S/R)}} \right\}_P = \frac{\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}}{\overrightarrow{V(P, S/R)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}}.$$

On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point**.

### 7.3.2 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

#### Définition – Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

Si deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}.$$

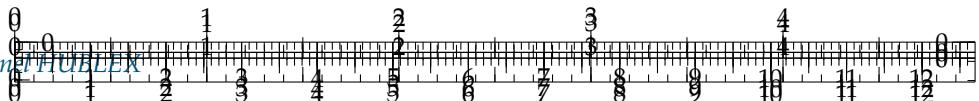
La **liaison parfaite** si et seulement si quel que soit le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre  $S_1$  et  $S_2$  est nulle**.

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$

#### Remarque

- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solide  $S_1$  et  $S_2$ . Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.





- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

### 7.3.3 Énergie cinétique

Il faudra bien veiller à ce que chaque des torseurs soit exprimé en un même point pour effectuer le comoment.

#### Définition – Expression avec les comoments

L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(S/R) \} \otimes \{ \mathcal{C}(S/R) \}.$$

#### Propriété – titre

- Solide  $S$  de masse  $M$  de centre d'inertie  $G$  en mouvement de **translation** par rapport à  $R$  :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} M \overrightarrow{V(G, S/R)}^2.$$

- Solide  $S$  de moment d'inertie  $I_{Oz}(S)$  en mouvement de rotation par rapport à l'**axe fixe**  $(O, \vec{z})$  par rapport  $R$  :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} I_{Oz}(S) \overrightarrow{\Omega(S/R)}^2.$$

### 7.3.4 Énergie cinétique équivalente

#### Définition – Énergie cinétique équivalente

Lorsqu'un problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et pour simplifier les calculs, on peut exprimer l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$  en fonction d'un seul paramètre cinématique. On peut alors écrire  $E_c(E/R)$

- avec **son inertie équivalente**  $J_{eq}(E)$  (en  $\text{kg m}^2$ ) rapportée à un paramètre de rotation  $\dot{\theta}(t)$  :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} J_{eq}(E) \dot{\theta}^2.$$

- avec **sa masse équivalente**  $M_{eq}(E)$  (en kg) rapportée à un paramètre de translation  $\dot{x}(t)$  :

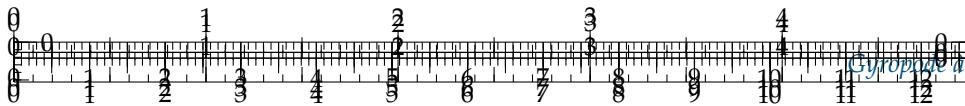
$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} M_{eq}(E) \dot{x}^2.$$

### 7.3.5 Théorème de l'énergie cinétique

#### Théorème – Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_g$  est égale à la puissance galiléenne





des actions mécaniques extérieures à  $S$ . Soit :

$$\frac{dE_c(S/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{S} \rightarrow S/R_g).$$

### 7.3.6 Méthodologie

#### Méthode – Équations de mouvement

- ▶ On réalise le graphe de liaisons exhaustif.
- ▶ On isole l'ensemble du mécanisme (à l'exclusion du bâti).
- ▶ On fait un bilan des puissances extérieures (et on les calcule).
- ▶ On fait un bilan des puissances intérieures (et on les calcule).
- ▶ On calcule l'énergie cinétique de l'ensemble isolé.
- ▶ On applique le théorème de l'énergie cinétique (TEC).

## 7.4 Loi de mouvement en trapèze

Une des lois usuellement suivie par un actionneur pour aller d'un point à un autre est une loi de mouvement de vitesse en trapèze. Ce mouvement peut être décomposé en 3 phases :

- ▶ phase 1 : mouvement uniformément décéléré. L'accélération est donc constante, la vitesse croît de façon linéaire et la position de façon parabolique ;
- ▶ phase 2 : mouvement uniforme. L'accélération est nulle, la vitesse est constante et la position évolue linéairement ;
- ▶ phase 3 : mouvement uniformément décéléré. L'accélération est constante et négative, la vitesse décroît linéairement et la position évolue de façon parabolique.

Dans le cas général, il sera souvent inutile d'écrire les équations horaires de chacune des phases. En effet, les questions liées à ces lois de mouvements sont généralement :

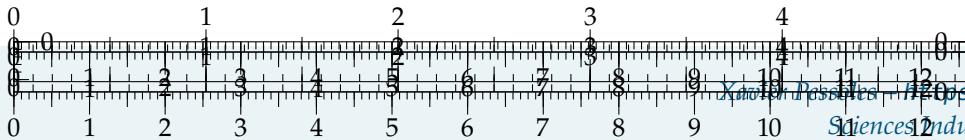
- ▶ d'identifier le « pire des cas » en terme de vitesse/accélération ;
- ▶ de déterminer les temps de une ou plusieurs des phases en fonction de la distance à parcourir, la vitesse maximale, l'accélération accélérations maximale ;
- ▶ de déterminer la hauteur du palier de vitesse ;
- ▶ de déterminer la distance parcourue.

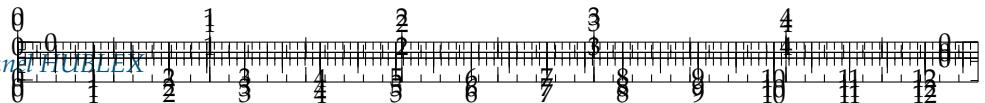
#### Résultat –

Dans les 3 derniers points, il est souvent suffisant de remarquer en utilisant les courbes que :

- ▶  $t_1 = \frac{\dot{x}_m}{\ddot{x}_m}$  ;
- ▶ en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors de l'accélération est donnée par  $\frac{1}{2}t_1\dot{x}_m$  ;
- ▶ en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors des 3 phases est donnée par  $2 \cdot \frac{1}{2}t_1\dot{x}_m + (t_2 - t_1)\dot{x}_m$ .

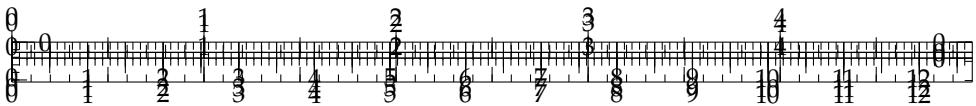
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys





	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Équation de position	$x(t) = \frac{1}{2} \ddot{x}_m t^2$	$x(t) = \dot{x}_m(t)(t - t_1) + x_m(t_1)$	$x(t) = -\frac{1}{2} \ddot{x}_m (t - t_2)^2 + \dot{x}_m(t)(t - t_2) + x_m(t_2)$
Équation de vitesse	$\dot{x}(t) = \ddot{x}_m t$	$\dot{x}(t) = \dot{x}_m$	$\dot{x}(t) = -\ddot{x}_m (t - t_2) + \dot{x}_m$
Équation d'accélération	$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_m$	$\ddot{x}(t) = 0$	$\ddot{x}(t) = -\ddot{x}_m$





## Application 1

### Pompe à plateau – Sujet

D'après C. Gamelon & P. Dubois.

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.

L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en  $I$  avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

#### Paramétrage

Le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère  $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

- $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$ ;
- $\overrightarrow{OB} = e\vec{z}_1$ ,  $\overrightarrow{BI} = R\vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{OA} = z\vec{z}_0$ .

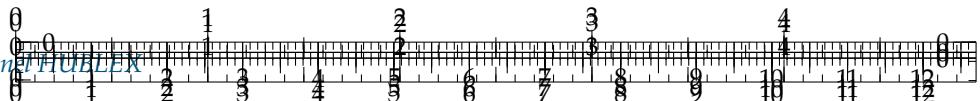
Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie  $I_1$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Le piston (2) possède une masse  $m_2$ . Le ressort (r), de raideur  $k$ , est toujours comprimé. Pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , l'effort de compression est égal à  $\vec{F}_0 = -F_0 \vec{z}_0$ .

Un moteur exerce un couple connu de moment  $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$  sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et de résultante  $\vec{F}_h = -F_h \vec{z}_0$ .

#### Résolution cinématique

**Question 1** En utilisant une fermeture géométrique ou la méthode de votre choix, déterminer la exprimer  $z$  en fonction de  $\theta$  et de constantes du problème. Déterminer alors  $\overrightarrow{V(A, 2/0)}$  et  $\overrightarrow{\Gamma(A, 2/0)}$ .





### Résolution dynamique

**Question 2** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le PFD.

**Question 3** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

### Résolution énergétique – Pour plus tard...

**Question 4** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

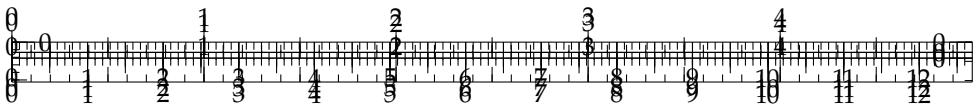
**Question 5** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

### Pour aller plus loin...

**Question 6** En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_03\_DynamiqueEnergetique1D/Cy\_01\_Ch\_03\_Application\_01\_Pompe/





## Application 1

### Pompe à plateau – Corrigé

D'après C. Gamelon & P. Dubois.

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.

L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en  $I$  avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

#### Paramétrage

Le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère  $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

- $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$ ;
- $\overrightarrow{OB} = e\vec{z}_1$ ,  $\overrightarrow{BI} = R\vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{OA} = z\vec{z}_0$ .

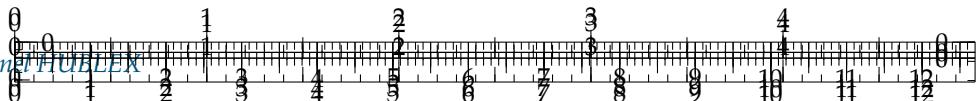
Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie  $I_1$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Le piston (2) possède une masse  $m_2$ . Le ressort (r), de raideur  $k$ , est toujours comprimé. Pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , l'effort de compression est égal à  $\vec{F}_0 = -F_0 \vec{z}_0$ .

Un moteur exerce un couple connu de moment  $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$  sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et de résultante  $\vec{F}_h = -F_h \vec{z}_0$ .

#### Résolution cinématique

**Question 1** En utilisant une fermeture géométrique ou la méthode de votre choix, déterminer la exprimer  $z$  en fonction de  $\theta$  et de constantes du problème. Déterminer alors  $\overrightarrow{V(A, 2/0)}$  et  $\overrightarrow{\Gamma(A, 2/0)}$ .





### Résolution dynamique

**Question 2** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le PFD.

**Question 3** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

### Résolution énergétique – Pour plus tard...

**Question 4** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

**Question 5** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

### Pour aller plus loin...

**Question 6** En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

#### Fermerture géométrique.

On a :  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$ .

En projection sur  $\overrightarrow{z_0}$  :  $e \cos \theta + R = z$ . Par dérivation successive, on a :  $-e\dot{\theta} \sin \theta = \dot{z}$  et  $-e\ddot{\theta} \sin \theta - e\dot{\theta}^2 \cos \theta = \ddot{z}$ .

**On isole le solide (1).**

**On réalise le bilan des actions mécaniques.**

$$\blacktriangleright \text{ Liaison pivot: } \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01}\vec{x}_0 + Y_{01}\vec{y}_0 + Z_{01}\vec{z}_0 \\ M_{01}\vec{y}_0 + N_{01}\vec{z}_0 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{y}_0 + Z_{01}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

$$\blacktriangleright \text{ Liaison ponctuelle : } \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{21}\vec{y}_0 + Z_{21}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I. \text{ On a } Z_{21} < 0, Y_{21} > 0$$

et à la limite du glissement,  $Y_{21} = -fZ_{21}$ .

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}(O, 2 \rightarrow 1)} &= \overline{\mathcal{M}(I, 2 \rightarrow 1)} + \overline{\vec{OI}} \wedge \overline{\vec{R}(2 \rightarrow 1)} = (\overrightarrow{e\vec{z}_1} + \overrightarrow{R\vec{z}_0}) \wedge (\overrightarrow{Y_{21}\vec{y}_0} + \overrightarrow{Z_{21}\vec{z}_0}) \\ &= -eY_{21} \cos \theta \vec{x}_0 - eZ_{21} \sin \theta \vec{x}_0 - RY_{21} \vec{x}_0 = -((e \cos \theta + R) Y_{21} + eZ_{21} \sin \theta) \vec{x}_0. \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \text{ Couple moteur : } \{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{array} \right\}_O.$$

**Calcul de  $\overline{\delta(O, 1/0)} \cdot \vec{x}_0$ .**

O est un point fixe et  $I_1$  moment d'inertie par rapport à  $(O, \vec{x}_0)$  on a donc :  $\overline{\delta(O, 1/0)} \cdot$

$$\vec{x}_0 = \left[ \frac{d\sigma(O, 1/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \vec{x}_0 = \left[ \frac{d\sigma(O, 1/0) \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{dI_O(1) \overline{\Omega(1/0)} \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{dI_1 \dot{\theta} \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = I_1 \ddot{\theta}.$$

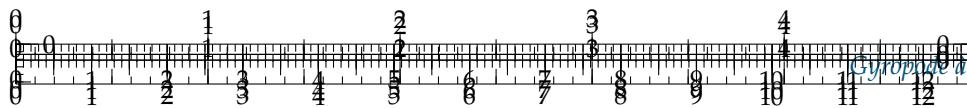
**Application du théorème du moment dynamique en projection sur  $\vec{x}_0$ .**

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + eZ_{21} \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

**On isole le solide (2).**

**On réalise le bilan des actions mécaniques.**





- Liaison pivot glissant :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{02}\vec{y}_0 \\ L_{02}\vec{x}_0 \end{array} \right\}_O$ .
- Liaison ponctuelle :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -Y_{21}\vec{y}_0 - Z_{21}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$ .
- Ressort :  $\{\mathcal{T}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_0 - kz\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ .
- Pesanteur :  $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_2g\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ .
- Fluide :  $\{\mathcal{T}(\text{Fluide} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_h\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ .

**Calcul de  $\overline{R_d(2/0)} \cdot \vec{z}_0$ .**

$$\overline{R_d(2/0)} \cdot \vec{z}_0 = m_2\ddot{z}$$

**Application du théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{z}_0$ .**

$$-F_h - Z_{21} - F_0 - kz - m_2g = m_2\ddot{z}.$$

**Bilan :**

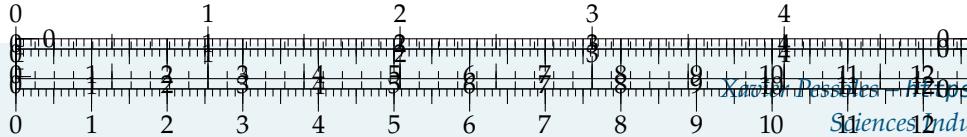
$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e (-F_h - F_0 - kz - m_2g - m_2\ddot{z}) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On a alors :

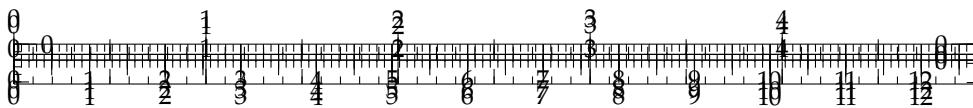
$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} - e (F_h + F_0 + k (e \cos \theta + R) + m_2g - em_2 (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}. \blacksquare$$

**Bilan sans frottement :**

$$C_m + e (F_h + F_0 + k (e \cos \theta + R) + m_2g - em_2 \sin \theta (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) = I_1 \ddot{\theta}.$$







## Application 2 Réducteur – Sujet

D'après C. Gamelon & P. Dubois.

### Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec  $Z_1, Z_{21}, Z_{23}$  et  $Z_3$  le nombre de dents des roues dentées. On nomme  $k_1$  le rapport du train de  $S_1$  et  $S_2$  avec  $k_1 = \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$  et  $k_2$  le rapport de  $S_2$  et  $S_3$  avec  $k_2 = \frac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$ .

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$

On rappelle que pour les engrenages à denture droite  $d = mz$  avec  $d$  le diamètre primitif,  $m$  le module,  $z$  le nombre de dents du pignon.  $\omega(1/0)$ ,  $\omega(2/0)$  et  $\omega(3/0)$  sont les vitesses de rotation de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  autour des axes  $(O_1, \vec{x}_g)$ ,  $(O_2, \vec{x}_g)$  et  $(O_3, \vec{x}_g)$ . Le repère galiléen  $\mathcal{R}_g$  est lié au solide  $S_0$ . Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les moments d'inertie sont définies aux centres de masse  $G_1 = O_1$ ,  $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$  associées aux solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  suivant l'axe  $\vec{z}_0$  sont de notés  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$ .

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur  $C_m$  agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une poulie de rayon  $R$  est placée sur l'extrémité droite de l'arbre 3. Une charge de masse  $M$  y est suspendue.

**Question 1** Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.

**Question 2** Déterminer l'inertie équivalente du réducteur seul ramené à l'axe moteur.

**Question 3** Déterminer l'inertie équivalente de l'ensemble réducteur et charge ramené à l'arbre moteur.

**Question 4** Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.

**Question 5** Déterminer la relation entre le couple d'entrée, les grandeurs inertielles et l'accélération de l'arbre 1.



C1-05

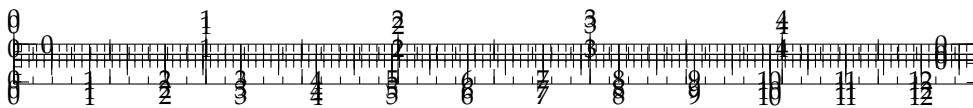
C2-08

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisati





## Application 2

### Réducteur – Corrigé

D'après C. Gamelon & P. Dubois.

#### Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec  $Z_1, Z_{21}, Z_{23}$  et  $Z_3$  le nombre de dents des roues dentées. On nomme  $k_1$  le rapport du train de  $S_1$  et  $S_2$  avec  $k_1 = \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$  et  $k_2$  le rapport de  $S_2$  et  $S_3$  avec  $k_2 = \frac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$ .

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$

On rappelle que pour les engrenages à denture droite  $d = mz$  avec  $d$  le diamètre primitif,  $m$  le module,  $z$  le nombre de dents du pignon.  $\omega(1/0)$ ,  $\omega(2/0)$  et  $\omega(3/0)$  sont les vitesses de rotation de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  autour des axes  $(O_1, \vec{x}_g)$ ,  $(O_2, \vec{x}_g)$  et  $(O_3, \vec{x}_g)$ . Le repère galiléen  $\mathcal{R}_g$  est lié au solide  $S_0$ . Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les moments d'inertie sont définies aux centres de masse  $G_1 = O_1$ ,  $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$  associées aux solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  suivant l'axe  $\vec{z}_0$  sont de notés  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$ .

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur  $C_m$  agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une poulie de rayon  $R$  est placée sur l'extrémité droite de l'arbre 3. Une charge de masse  $M$  y est suspendue.

**Question 1** Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.

**Question 2** Déterminer l'inertie équivalente du réducteur seul ramené à l'axe moteur.

**Question 3** Déterminer l'inertie équivalente de l'ensemble réducteur et charge ramené à l'arbre moteur.

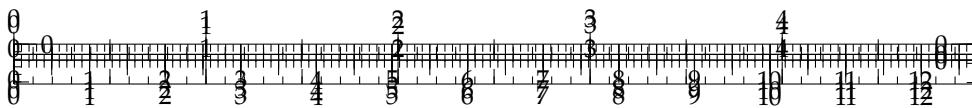
**Question 4** Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.

**Question 5** Déterminer la relation entre le couple d'entrée, les grandeurs inertielles et l'accélération de l'arbre 1.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys







## Application 3

### Axe numérique – Sujet

Pour aller rechercher des produits dans leurs rayons, Amazon utilise des axes linéaires afin de déplacer un préhenseur.

Les performances dynamique de l'axe demandées sont les suivantes :

- ▶ vitesse linéaire maximale :  $50 \text{ m min}^{-1}$ ;
- ▶ accélération linéaire maximale :  $9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

La loi de commande suivie par l'axe est un trapèze de vitesse. Dans le cas d'un système à un seul axe, l'accélération maximale est toujours atteinte, la vitesse maximale, non.

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_01\\_ModelisationSys](#)

#### Objectif

L'objectif de ce travail est de déterminer les caractéristiques du moteur (vitesse et couple) permettant d'atteindre ces performances.

**Question 1** Quelle est la vitesse maximale que l'axe peut atteindre en  $\text{m s}^{-1}$ .

**Question 2** Combien de temps l'axe met-il pour atteindre la vitesse maximale ?

**Question 3** Quelle distance l'axe parcourt-il pour atteindre la vitesse maximale ?

**Question 4** Quelle est la longueur minimale à commander pour que l'axe puisse atteindre la vitesse maximale ?

**Question 5** Donner les profils de position, vitesse et accélération pour réaliser 5 cm.

**Question 6** Tracer le profil de la position, de la vitesse et de l'accélération pour parcourir une distance de 50 cm. On cherchera à atteindre les performances maximales de l'axe.

Un motoréducteur permet d'entraîner un système poulie – courroie permettant de déplacer la charge. On considère :

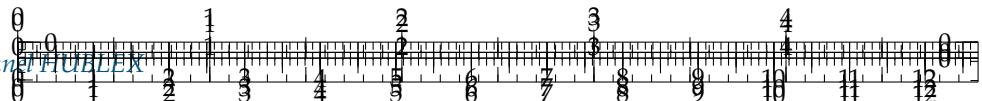
- ▶ une charge de masse 1 kg;
- ▶ un poulie de rayon 5 cm;
- ▶ un réducteur de rapport de transmission 1 : 20.

**Question 7** Déterminer le couple à fournir par la poulie pour déplacer la charge lorsque l'accélération est au maximum.

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_01\\_ModelisationSys](#)

**Question 8** Déterminer la vitesse et le couple à fournir par le moteur en considérant que l'inertie du motoréducteur est négligeable.





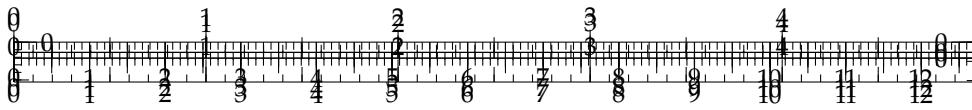
**Question 9** Donner la méthode permettant de prendre en compte l'inertie  $J$  du motoréducteur ? Quel serait l'impact de la prise en compte de cette hypothèse ?

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_03\_DynamiqueEnergetique1D/Cy\_01\_Ch\_03\_Application\_03\_AxeNumerique



Xavier Pessoles - <https://xavier.pessoles.gitehup.fr/>  
Sciences Industrielles de l'Ingénieur 1 PSI★2

.../.../.../Style/png/logo\_lycee.png



## Application 3

### Axe numérique – Corrigé

Pour aller rechercher des produits dans leurs rayons, Amazon utilise des axes linéaires afin de déplacer un préhenseur.

Les performances dynamique de l'axe demandées sont les suivantes :

- vitesse linéaire maximale :  $50 \text{ m min}^{-1}$ ;
- accélération linéaire maximale :  $9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

La loi de commande suivie par l'axe est un trapèze de vitesse. Dans le cas d'un système à un seul axe, l'accélération maximale est toujours atteinte, la vitesse maximale, non.

[.../PSI\\_Cy\\_01\\_ModelisationSysteme.pdf](http://.../PSI_Cy_01_ModelisationSysteme.pdf)

#### Objectif

L'objectif de ce travail est de déterminer les caractéristiques du moteur (vitesse et couple) permettant d'atteindre ces performances.

**Question 1** Quelle est la vitesse maximale que l'axe peut atteindre en  $\text{m s}^{-1}$ .

#### Correction

$$V = 0,83 \text{ ms}^{-1}$$

**Question 2** Combien de temps l'axe met-il pour atteindre la vitesse maximale?

#### Correction

$$T_a = 0,83/9,8 = 0,08s$$

**Question 3** Quelle distance l'axe parcourt-il pour atteindre la vitesse maximale?

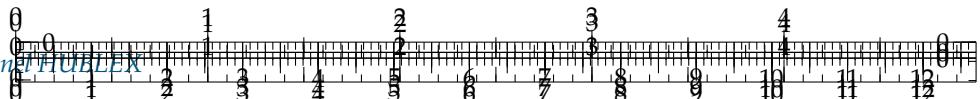
#### Correction

**Question 4** Quelle est la longueur minimale à commander pour que l'axe puisse atteindre la vitesse maximale?

#### Correction

**Question 5** Donner les profils de position, vitesse et accélération pour réaliser 5 cm.





### Correction

**Question 6** Tracer le profil de la position, de la vitesse et de l'accélération pour parcourir une distance de 50 cm. On cherchera à atteindre les performances maximales de l'axe.

### Correction

Un motoréducteur permet d'entraîner un système poulie – courroie permettant de déplacer la charge. On considère :

- ▶ une charge de masse 1 kg ;
- ▶ un poulie de rayon 5 cm ;
- ▶ un réducteur de rapport de transmission 1 : 20.

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSystemes/Ch\_03\_DynamiqueEnergetique1D/Cy\_01\_Ch\_03\_Application\_03\_AxeNumerique

### Correction

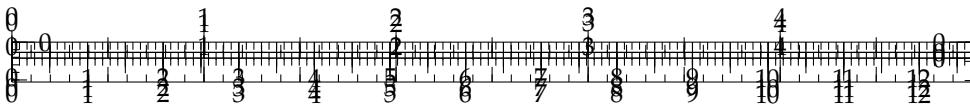
**Question 8** Déterminer la vitesse et le couple à fournir par le moteur en considérant que l'inertie du motoréducteur est négligeable.

### Correction

**Question 9** Donner la méthode permettant de prendre en compte l'inertie  $J$  du motoréducteur ? Quel serait l'impact de la prise en compte de cette hypothèse ?

### Correction





# TD 1

## Véhicule TIM – Sujet

L'éco-marathon SHELL est une compétition relative à la consommation énergétique des moyens de propulsion automobile. Les concurrents doivent concevoir et piloter leur véhicule sur une distance fixée avec une vitesse minimale imposée. Les candidats sont ensuite classés en fonction de la consommation de leur véhicule, exprimée en « kilomètre par litre » de carburant. L'étude sur ce sujet, issue d'un projet élaboré par l'équipe T.I.M. de l'INSA Toulouse, a pour objet de quantifier les effets résistants et dissipatifs que sont la résistance au roulement et les actions aérodynamiques sur les performances de leur véhicule. Les effets inertIELS étant plutôt quantifiés numériquement au niveau de la conception assistée par ordinateur du véhicule.

Florestan Mathurin.

C1-05

C2-08

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

### Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

Le principe est présenté sur la figure 1. On place 2 roues lestées sur un dispositif inclinable. On considère ensuite que l'angle d'inclinaison minimum de la pente, où il y a début du mouvement des roues, est représentatif de la résistance au roulement. L'ensemble des 2 roues lestées peut être assimilé au solide 1 représenté sur la figure 1, de masse  $m$ , de rayon  $R$  et de centre de masse  $G$ .

L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  tel que  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ .

L'action de contact entre l'ensemble des roues **1** et le plan **0**, incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, est modélisé comme un contact ponctuel avec frottement où l'on tient compte de la résistance au roulement.

**Question 1** Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide **1** réduit au point  $G$  en projection sur la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 2** Déterminer l'expression analytique de l'angle  $\alpha_{\lim}$  à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide **1** sur le plan **0**.

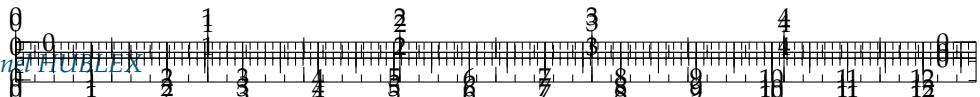
Pour une masse du solide **1**  $m = 50 \text{ kg}$  et pour un rayon  $R = 0,25 \text{ m}$  le roulement se produit à partir d'un angle  $\alpha_{\lim}$  tel que  $\tan \alpha_{\lim} = 0,008$ .

**Question 3** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $r$ .

**Question 4** Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en  $A_1$  si le coefficient de frottement au contact vaut  $f = 0,5$ .



1: Cette action de contact peut s'écrire :  $\{T(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{01}\vec{x} + N_{01}\vec{z} \\ -C_r\vec{y} \end{array} \right\}_{A_1}$  où  $C_r$  représente le couple de résistance au roulement qui s'oppose au roulement tel que :  $|C_r| = r|N_{01}|$  à la limite de l'équilibre et  $|C_r| < r|N_{01}|$  à l'équilibre.

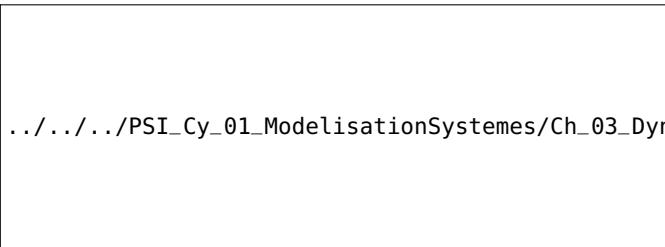


## Modélisation du véhicule

L'objectif est d'établir un modèle analytique du véhicule, lors d'une phase de roulement sans glissement sur une ligne droite inclinée d'un angle  $\alpha$ , en l'absence de vent. En adoptant des conditions particulières d'essai, il sera possible d'identifier précisément, grâce à ce modèle, les actions aérodynamiques.

L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  telle que  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ .

Le modèle est donné figure suivante.



Les roues sont en contact ponctuel avec frottement avec le sol 0. Afin de tenir compte de la résistance au roulement du pneu sur le sol, les actions de contact peuvent être modélisées en dynamique par :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{0i}\vec{x} + N_{0i}\vec{z} \\ -N_{0i}r\vec{y} \end{array} \right\}_{A_i}$  avec  $i = 4$  ou  $23$ .

L'ensemble du véhicule dont la carrosserie est soumis lors de son mouvement à un effort de traînée aérodynamique qui peut être modélisée par le torseur  $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\rho SC_x\dot{x}^2\vec{x} \\ 0 \end{array} \right\}_{O_{23}}$  avec  $\rho$  masse volumique du véhicule,  $S$  surface alaire,  $C_x$  coefficient de traînée du véhicule,  $\dot{x}$  vitesse relative du véhicule par rapport à l'air ambiant.

On considère que le véhicule se déplace sur une pente inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Le véhicule est constitué :

- ▶ d'un châssis avec son pilote : solide 1 de centre d'inertie  $G$ , de masse  $M$  en translation par rapport au repère galiléen  $R$  avec  $\overrightarrow{OG} = x\vec{x} + R\vec{z}$  ;
- ▶ de deux roues avant : solide 23 de centre d'inertie  $O_{23}$ , de masse  $2m$ , de rayon  $R$ , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O_{23}, \vec{y})$  sera noté  $2I$ . Le solide 23 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe  $(O_{23}, \vec{y})$  caractérisé par le paramètre  $\theta_{23}$  ;
- ▶ d'une roue arrière motrice : solide 4 de centre d'inertie  $O_4$ , de masse  $m$ , de rayon  $R$ , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O_4, \vec{y})$  sera noté  $I$ . Le solide 4 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe  $(O_4, \vec{y})$  caractérisé par le paramètre  $\theta_4$  ;
- ▶ un moteur d'entraînement du véhicule dont le corps est solidaire du châssis 1 exerce sur la roue 4 un couple moteur noté  $C_m\vec{y}$ .

**Question 5** Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point  $A_{23}$  et  $A_4$ .

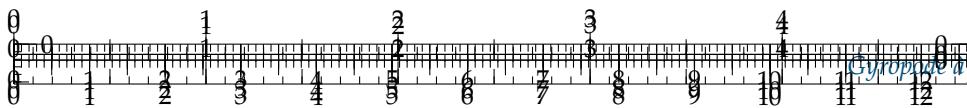
**Question 6** En isolant l'ensemble  $E = 1 + 2 + 3 + 4$ , écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

**Question 7** Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en  $O_{23}$  et  $O_4$  en projection sur  $\vec{y}$ .

**Question 8** Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur  $C_m$  vaut :  $C_m = (M + 3m)g \cos \alpha r + \left[ \frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right] \ddot{x} - R(M + 3m)g \sin \alpha + \frac{1}{2}R\rho S C_x \dot{x}^2$ .

**Question 9** Identifier dans l'expression de  $C_m$  les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.





**Question 10** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  quand le véhicule a une vitesse constante  $V$  sur une piste horizontale.

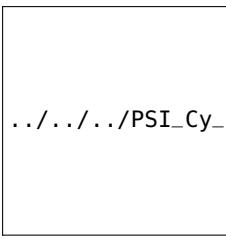
On réalise un essai du véhicule sur terrain horizontal, le moteur du véhicule délivrant un couple  $C_m$  constant. L'acquisition des paramètres vitesse véhicule et distance parcourue sont visualisés par les graphes ci-contre.

delisationSystemes/Ch\_03\_DynamiqueEnergetique1D/Cy\_01\_Ch\_03\_TD\_01\_TIM/images/fig\_04.png

**Question 11** Déterminer dans les conditions d'essais le produit  $\frac{1}{2}\rho S C_x$  caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

**Question 12** Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de  $5 \text{ km h}^{-1}$  (on négligera le couple de résistance au roulement).

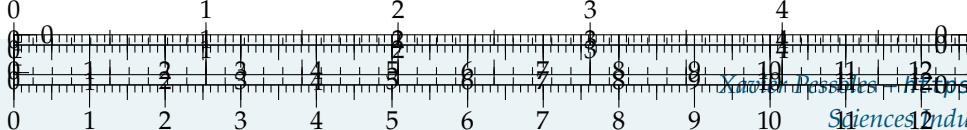
$m = 70 \text{ kg}$ ,  
 $r = 0,25 \text{ m}$ ,



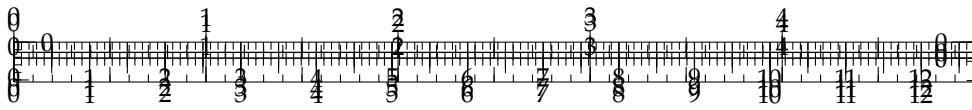
.../.../.../PSI\_Cy\_01\_Modelisati

#### Éléments de correction

1.  $-T_{01} + mg \sin \alpha = 0; N_{01} - mg \cos \alpha = 0; C_r = RT_{01} - \frac{r}{R}$ .
2.  $\tan \alpha_{\lim} = \frac{r}{R}$ .
3.  $r = 0,002 \text{ m}$ .
4. Pour  $\tan \alpha_{\lim} < f$  il y a donc roulement sans glissement.
5.  $\dot{x} = R\dot{\theta}_{23}$  et  $\ddot{x} = R\ddot{\theta}_4$ .
6.  $(M + 3m)g \sin \alpha - \frac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M + 3m)\ddot{x}$  et  $-(M + 3m)g \cos \alpha + N_{04} + N_{023} = 0$ .
7.  $-rN_{023} + RT_{023} = 2I\ddot{\theta}_{23}$  et  $-rN_{04} + RT_{04} + C_m = I\ddot{\theta}_4$ .
- 8.
- 9.
- 10.
11.  $\frac{1}{2}\rho S C_x = 0,025 \text{ kg m}^{-1}$ .
12.  $\alpha = 1^\circ$ .







## TD 1

### Véhicule TIM – Corrigé

Florestan Mathurin.

C1-05

C2-08

C2-09

#### Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

**Question 1** Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 réduit au point G en projection sur la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_01\_ModelisationSys

##### Correction

- ▶ On isole le solide 1.
- ▶ Le solide est soumis à l'action de pesanteur et à l'action du sol.
- ▶ On applique le PFS :
  - TRS :  $-T_{01}\vec{x} + N_{01}\vec{z} = -mg\vec{z}_0 = -mg(\cos\alpha\vec{z} - \sin\alpha\vec{x})$ ;
  - TMS en G en projection sur  $\vec{y}$  :  $-C_r + RT_{01} = 0$ .
- ▶ On résout :
  - $-T_{01} + mg \sin \alpha = 0$ ;
  - $N_{01} - mg \cos \alpha = 0$ ;
  - $C_r = RT_{01}$ .

**Question 2** Déterminer l'expression analytique de l'angle  $\alpha_{\lim}$  à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

##### Correction

À la limite du roulement, on a  $C_r = rN_{01} \Leftrightarrow RT_{01} = rN_{01} \Leftrightarrow Rmg \sin \alpha_{\lim} = rmg \cos \alpha_{\lim}$  et  $\tan \alpha_{\lim} = \frac{r}{R}$ .

Pour une masse du solide 1  $m = 50 \text{ kg}$  et pour un rayon  $R = 0,25 \text{ m}$  le roulement se produit à partir d'un angle  $\alpha_{\lim}$  tel que  $\tan \alpha_{\lim} = 0,008$ .

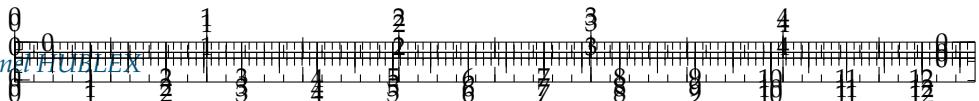
**Question 3** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $r$ .

##### Correction

$$r = 0,002 \text{ m.}$$

**Question 4** Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en A<sub>1</sub> si le coefficient de frottement au contact vaut  $f = 0,5$ .



**Correction**

À la limite du glissement, on a  $T_{01} = fN_{01}$  et  $\frac{T_{01}}{N_{01}} = \tan \alpha$ . Pour  $\tan \alpha_{\lim} < f$  il y a donc roulement sans glissement.

**Modélisation du véhicule**

**Question 5** Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point  $A_{23}$  et  $A_4$ .

**Correction**

En  $A_{23}$ , on a :  $\overrightarrow{V(A_{23}, 23/0)} = \vec{0}$ . On a alors  $\overrightarrow{V(A_{23}, 23/0)} = \overrightarrow{V(A_{23}, 23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23}, 1/0)}$  et  $\vec{0} = \overrightarrow{V(O_{23}, 23/1)} + \overrightarrow{A_{23}O_{23}} \wedge \overrightarrow{\Omega(23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23}, 1/0)} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} + R\vec{z} \wedge \theta_{23}\vec{y} + \dot{x}\vec{x}$   
 $\Rightarrow 0 = -R\dot{\theta}_{23} + \dot{x}$ .  
 De même en  $A_4$ ,  $0 = -R\dot{\theta}_4 + \dot{x}$ .

**Question 6** En isolant l'ensemble  $E = 1 + 2 + 3 + 4$ , écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

**Correction**

- On isole  $E$ .
- BAME :

- Pesanteur :  $\{\mathcal{T}(\text{Pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{l} -(M+3m)g\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_E} = \left\{ \begin{array}{l} -(M+3m)g(\cos \alpha \vec{z} - \sin \alpha \vec{x}) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_E}$ .
- Résistance au roulement :  $\{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_i = \left\{ \begin{array}{l} -T_{0i}\vec{x} + N_{0i}\vec{z} \\ -C_r\vec{y} \end{array} \right\}_{A_i}$ .
- Traînée :  $\{\mathcal{T}(\text{Trainee} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_{23}}$ .

- La résultante dynamique est donnée par  $(M+3m)\overrightarrow{\Gamma(G, E/0)} = (M+3m)\vec{x}\dot{x}$ .
- On applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  :

- $(M+3m)g \sin \alpha - \frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M+3m)\ddot{x}$
- $-(M+3m)g \cos \alpha + N_{04} + N_{023} = 0$

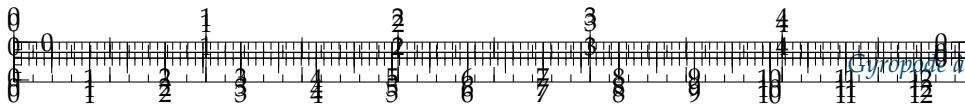
**Question 7** Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en  $O_{23}$  et  $O_4$  en projection sur  $\vec{y}$ .

**Correction**

- On isole 23.
- BAME :

- 23 est soumis à la pesanteur;
- action de la pivot sans frottement avec le solide 1;
- résistance au roulement :  $\{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_{23} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{023}\vec{x} + N_{023}\vec{z} \\ -N_{023}r\vec{y} \end{array} \right\}_{A_{23}} =$





$$\left\{ \begin{array}{l} -T_{023} \vec{x} + N_{023} \vec{z} \\ (-rN_{023} + RT_{023}) \vec{y} \end{array} \right\}_{O_{23}}.$$

- Le moment dynamique de  $O_{23}$  centre d'inertie des roues en projection sur  $\vec{y}_0$  s'écrit  
 $\delta(O_{23}, 23/0) \vec{y}_0 = 2I \ddot{\theta}_{23}$ .
- TMD en  $O_{23}$  en projection sur  $\vec{y}_0$  s'écrit donc  $-rN_{023} + RT_{023} = 2I \ddot{\theta}_{23}$ .

De même pour la roue 4 en ajoutant la sollicitation du couple moteur :  $-rN_{04} + RT_{04} + C_m = I \ddot{\theta}_4$ .

**Question 8** Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le

couple moteur  $C_m$  vaut :  $C_m = (M + 3m) g \cos \alpha r + \left[ \frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right] \ddot{x} - R(M + 3m) g \sin \alpha + \boxed{\frac{1}{2} R \rho S C_x \dot{x}^2}$

#### Correction

$$\begin{aligned} \text{On a : } C_m &= I \ddot{\theta}_4 + rN_{04} - RT_{04} = \frac{I}{R} \ddot{x} + rN_{04} - RT_{04} = \frac{I}{R} \ddot{x} - rN_{023} + r(M + 3m) g \cos \alpha - RT_{04} \\ &= \frac{I}{R} \ddot{x} - RT_{023} + 2I \ddot{\theta}_{23} + r(M + 3m) g \cos \alpha - RT_{04} = \frac{I}{R} \ddot{x} + \frac{2I}{R} \ddot{\theta}_{23} + r(M + 3m) g \cos \alpha - \\ &\quad R \left( (M + 3m) g \sin \alpha - \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 - (M + 3m) \ddot{x} \right). \\ C_m &= r(M + 3m) g \cos \alpha + \left( \frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right) \ddot{x} + \left( -R(M + 3m) g \sin \alpha + R \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 \right). \end{aligned}$$

CQFD.

**Question 9** Identifier dans l'expression de  $C_m$  les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

#### Correction

$$C_m = \underbrace{(M + 3m) gr \cos \alpha}_{\text{Résistance au roulement}} - \underbrace{(M + 3m) gR \sin \alpha}_{\text{Couple pour monter la pente}} + \underbrace{\left( \frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right) \ddot{x}}_{\text{Couple pour vaincre les effets d'inertie}} + \underbrace{R \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

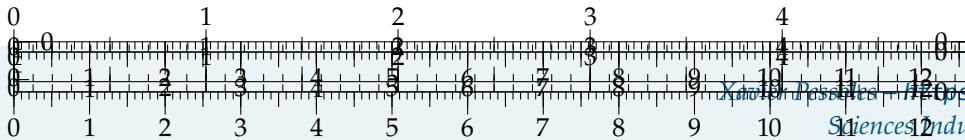
**Question 10** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  quand le véhicule a une vitesse constante  $V$  sur une piste horizontale.

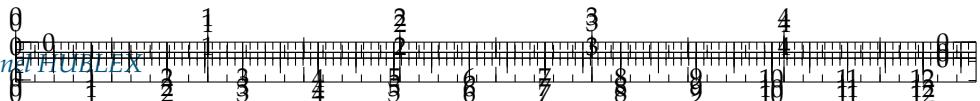
#### Correction

À vitesse constante sur du plat, on a :

$$C_m = \underbrace{(M + 3m) gr}_{\text{Résistance au roulement}} + \underbrace{R \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

**Question 11** Déterminer dans les conditions d'essais le produit  $\frac{1}{2} \rho S C_x$  caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

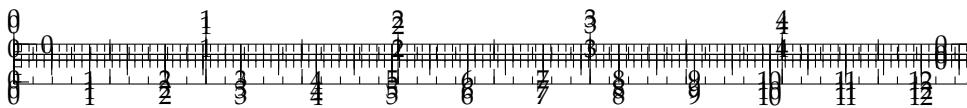


**Correction**

La vitesse constante atteinte sur les graphes est de  $17 \text{ m s}^{-1}$ . Par ailleurs  $\frac{1}{2}\rho SC_x = \frac{C_m - (M + 3m) gr}{R\dot{x}^2} = \frac{3,245 - (70 + 3 \cdot 1) \cdot 10 \cdot 0,002}{0,25 \cdot 17^2} = 0,025 \text{ kg m}^{-1}$ .

**Question 12** Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de  $5 \text{ km h}^{-1}$  (on négligera le couple de résistance au roulement).

**Correction**



.../.../.../Style/png/Fond\_CIN.png

## 8 Caractérisation inertielle des solides

### 8.1 Masse et centre de masse (centre d'inertie)

#### 8.1.1 Définitions

##### Définition –

Masse d'un solide indéformable On peut définir la masse totale d'un solide  $S$  par :  $M = \int_{P \in S} dm$ . Si de plus l'ensemble est fait d'un matériau homogène de masse volumique  $\mu$ , on a  $M = \mu \int_{P \in S} dV$ .

##### Définition –

Centre d'inertie d'un solide La position du centre d'inertie  $G$  d'un solide  $S$  est définie par  $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \overrightarrow{0}$ .

Pour déterminer la position du centre d'inertie d'un solide  $S$ , on passe généralement par l'origine du repère associé à  $S$ . On a alors  $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \int_{P \in S} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) dm = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \int_{P \in S} \overrightarrow{OG} dm = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm \Leftrightarrow M\overrightarrow{OG} = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm$ .

##### Méthode – Coordonnées du centre d'inertie

Pour déterminer les coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$  du centre d'inertie  $G$  du solide  $S$  dans la base  $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , on a donc :

$$\begin{cases} Mx_G = \mu \int_{P \in S} x_P dV \\ My_G = \mu \int_{P \in S} y_P dV \\ Mz_G = \mu \int_{P \in S} z_P dV \end{cases} \quad \text{avec } dV \text{ volume élémentaire du solide } S.$$

Pour simplifier les calculs, on peut noter que le centre d'inertie appartient au(x) éventuel(s) plan(s) de symétrie du solide.



##### B2-10

**Emilien Durif**, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

**Florestan Mathurin**, *Géométrie des masses*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

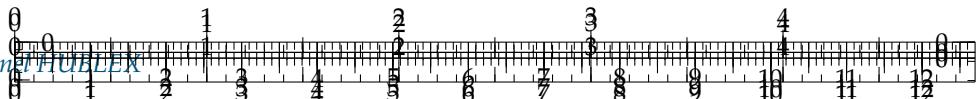
**Robert Papanicola**, *Opérateurs d'inertie*, Lycée Charlemagne, Paris, <http://sciences-indus-cpge-papanicola.info/>.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Model

FIGURE 8.1 – Toupie

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Model

FIGURE 8.2 – Volants d'inertie d'un vilebrequin



### Remarque

Centre d'inertie et centre de gravité sont confondus lorsque le champ de pesanteur est considéré comme uniforme en tout point de l'espace.

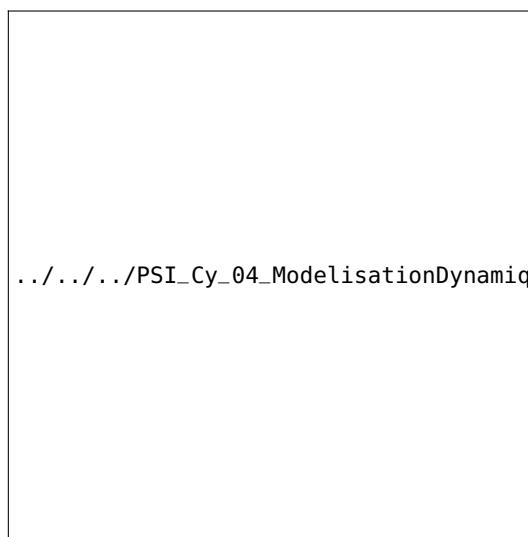
## 8.1.2 Centre d'inertie d'un ensemble de solides encastrés entre eux

### Méthode – Barycentre d'un assemblage

Soit un solide composé de  $n$  solides élémentaires dont la position des centres d'inertie  $G_i$  et les masses  $M_i$  sont connues. On note  $M = \sum_{i=1}^n M_i$ . La position du centre d'inertie  $G$  de l'ensemble  $S$  est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n M_i \overrightarrow{OG_i}.$$

## 8.1.3 Méthode pour déterminer le centre d'inertie d'un solide [2]



## 8.2 Matrice d'inertie d'un solide

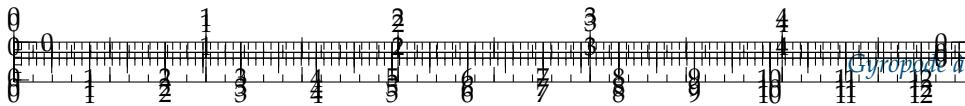
### 8.2.1 Opérateur et matrice d'inertie

#### Définition – Opérateur d'inertie

Soient :

- ▶ un solide  $S$  de masse  $m$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ ;
- ▶  $\mathcal{R}_S = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le repère lié au solide  $S$ ;
- ▶  $P$  un point de  $S$  tel que  $\overrightarrow{OP} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{k}$ ;
- ▶  $\vec{u}$  un vecteur unitaire lié au solide  $S$  tel que  $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ .





On appelle opérateur d'inertie l'application linéaire définie par :

$$\vec{u} \rightarrow \overline{J_{(O,S)}}(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}) dm$$

On appelle matrice d'inertie du solide  $S$  en  $O$ ,  $I_O(S)$ , l'image de cette application linéaire :  $\overline{J_{(O,S)}}(\vec{u}) = I_O(S) \vec{u}$ .

### Définition – Matrice d'inertie

La matrice d'inertie s'écrit ainsi :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} \int_S (y_p^2 + z_p^2) dm & -\int_S (x_p y_p) dm & -\int_S (x_p z_p) dm \\ -\int_S (x_p y_p) dm & \int_S (x_p^2 + z_p^2) dm & -\int_S (y_p z_p) dm \\ -\int_S (x_p z_p) dm & -\int_S (y_p z_p) dm & \int_S (x_p^2 + y_p^2) dm \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S}$$

$$= \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S}.$$

On appelle moments d'inertie par rapport aux axes  $(O, \vec{x})$ ,  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$  les termes  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

On appelle produit d'inerties par rapport aux axes  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$ ,  $(O, \vec{x})$  et  $(O, \vec{z})$ ,  $(O, \vec{x})$  et  $(O, \vec{y})$  les termes  $D$ ,  $E$  et  $F$ .

### Propriété –

- La matrice d'inertie est une matrice symétrique. Il existe une base dans laquelle elle est diagonalisable. Cette base est appelée base principale d'inertie.
- Si  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  est un plan de symétrie du solide,  $D$  et  $E$  sont nuls.
- Si  $(O, \vec{z}, \vec{x})$  est un plan de symétrie du solide,  $D$  et  $F$  sont nuls.
- Si  $(O, \vec{y}, \vec{z})$  est un plan de symétrie du solide,  $E$  et  $F$  sont nuls.
- Si un solide admet 2 plans de symétrie, alors  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont nuls.

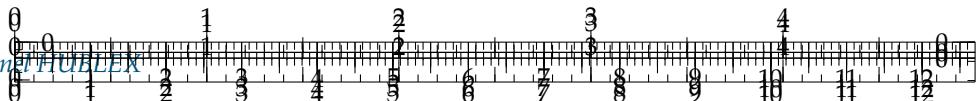
### Définition – Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

Le moment d'inertie caractérise la répartition de masse d'un solide autour d'un axe  $\Delta(O, \vec{u})$ . Plus la valeur de l'inertie est grande plus il sera difficile de mettre en mouvement de rotation ce solide autour de l'axe  $\Delta$ . On note  $I_\Delta(S)$ , le moment d'inertie du solide  $S$  autour de l'axe  $\Delta$ . Son unité est en  $\text{kg.m}^2$ .

Si on connaît  $I_O(S)$ , alors  $I_\Delta(S) = \vec{u}^\top I_O(S) \vec{u}$  avec  $\vec{u}$  vecteur unitaire.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn





### Remarque

On a aussi :

$$I_{\Delta}(S) = \int_S d_{\Delta}^2 dm \quad \text{où } d_{\Delta} \text{ est la distance entre le point courant } P \text{ et l'axe } \Delta.$$

## 8.2.2 Déplacement d'une matrice d'inertie – Théorème de Huygens

### Théorème – Théorème de Huygens

Soit  $S$  un solide de centre d'inertie  $G$ , de masse  $m$ , d'inertie  $I_G(S)$  et d'inertie  $I_O(S)$  avec  $\overrightarrow{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$ . Les matrices  $I_G(S)$  et  $I_O(S)$  exprimées dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  sont liées par :

$$\begin{pmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$+ \begin{pmatrix} m(b^2 + c^2) & -mab & -mac \\ -mab & m(a^2 + c^2) & -mbc \\ -mac & -mbc & m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Si le solide est modélisé par une masse ponctuelle  $m$  en  $G$  et si on souhaite connaître le moment d'inertie pour un point situé à une distance  $d$  de  $G$ , on a  $I = md^2$ .

## 8.2.3 Changement de base de la matrice d'inertie

### Définition – Matrice de Passage

On appelle  $P_{12}$  la matrice de passage permettant de passer de la base  $\mathcal{B}_1$  à la base  $\mathcal{B}_2$ . Cette matrice est constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_2$  écrits dans la base d'origine  $\mathcal{B}_1$ . On l'appelle aussi matrice de changement de base. Cette matrice est inversible.

Dans le cas des matrices de rotation,  $P_{12}^{-1} = P_{12}^T$ .

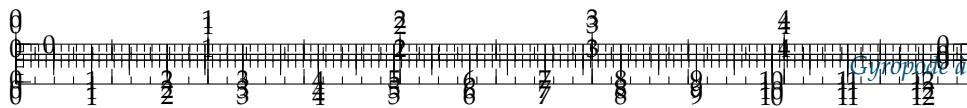
### Exemple –

Soit  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  et  $\mathcal{R}_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  avec  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On a alors  $\vec{x}_2 = \cos \beta \vec{x}_1 + \sin \beta \vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2 = \cos \beta \vec{y}_1 - \sin \beta \vec{x}_1$ . En conséquences,  $P_{12} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

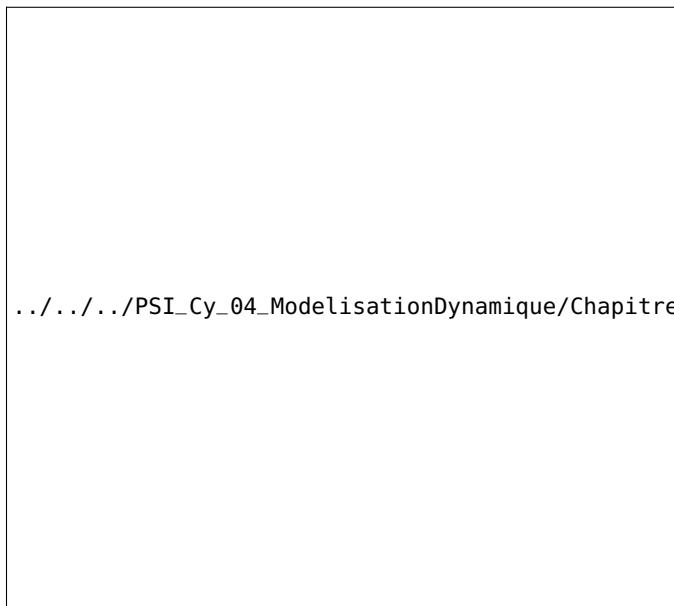
### Résultat –

Pour passer  $I_A(S)_{\mathcal{B}_1}$  de  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  de la on a  $I_A(S)_{\mathcal{B}_2} = P_{12}^{-1} I_A(S)_{\mathcal{B}_1} P_{12}$ .





#### 8.2.4 Détermination de la matrice d'inertie d'un solide [2]

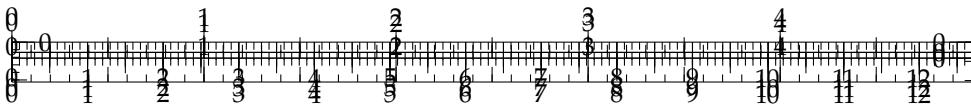


.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_01\_GeometrieMasses/Cours/images/fig\_05.png

#### 8.2.5 Matrice d'inertie de solides usuels [3]







.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_01\_GeometrieMasses/Cy\_04\_01\_Activation\_01\_BARRIERE/images/bandeau.

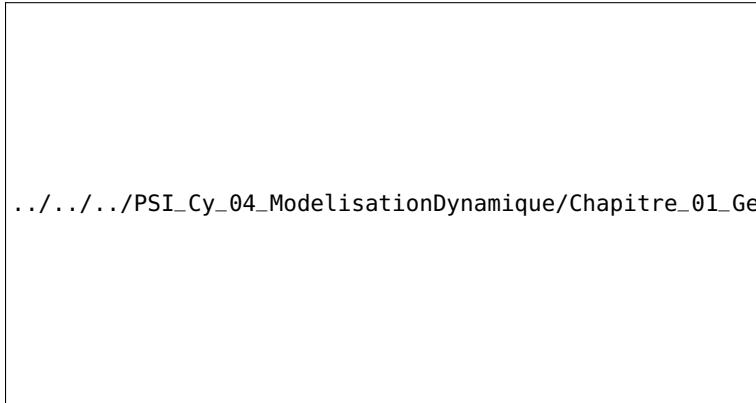
## Application 1

### Barrière sur la Tamise – Sujet

Florestan Mathurin.

**B2-10**

Le barrage sur la Tamise permet de protéger Londres des grandes marées évitant ainsi des crues qui pourraient survenir. Ce barrage est constituée de dix portes dont une modélisation est donnée ci-dessous.



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_01\_GeometrieMasses/Cy\_04\_01\_Activation\_01\_BARRIERE/

On donne :

- $L = 58 \text{ m}$  la longueur de la porte;
- $R = 12,4 \text{ m}$  le rayon de la porte;
- $e = 0,05 \text{ m}$  l'épaisseur de la porte, considérée négligeable devant  $R$ ;
- $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ ;
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

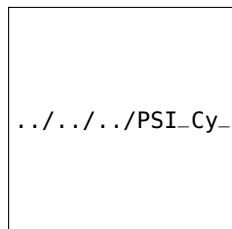
**Question 1** Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la porte :

1. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G_P$  de la plaque;
2. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G_C$  de la portion cylindrique;
3. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G$  de la porte.

**Question 2** Déterminer la forme de la matrice d'inertie de la porte :

1. donner la forme de la matrice d'inertie de la plaque  $P$  en  $G_P$ ;
2. donner la forme de la matrice d'inertie du cylindre  $C$  en  $G_C$ ;
3. donner la forme de la matrice d'inertie de la porte  $P$  en  $G$ .

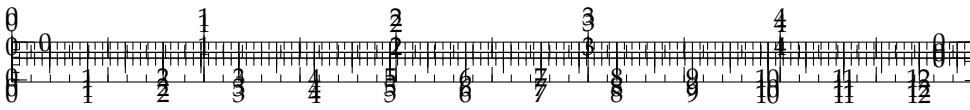
**Question 3** Déterminer le moment d'inertie de la porte par rapport à  $(O, \vec{z})$ .



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisati







.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_01\_GeometrieMasses/Cy\_04\_01\_Activation\_01\_BARRIERE/images/bandeau...

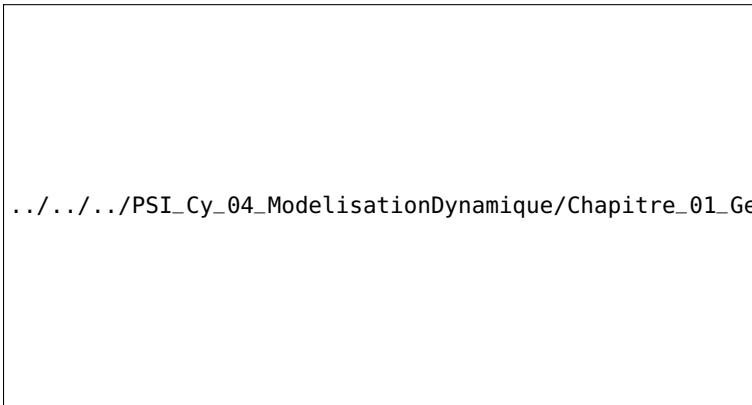
## Application 1

### Barrière sur la Tamise – Corrigé

Florestan Mathurin.

**B2-10**

Le barrage sur la Tamise permet de protéger Londres des grandes marées évitant ainsi des crues qui pourraient survenir. Ce barrage est constituée de dix portes dont une modélisation est donnée ci-dessous.



**Question 1** Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la porte :

1. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G_P$  de la plaque ;
2. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G_C$  de la portion cylindrique ;
3. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G$  de la porte.

#### Correction

**Coordonnées de  $G_P$**  On a  $\overrightarrow{OG_P} = -\cos \alpha \vec{y} - \frac{L}{2} \vec{z}$ .

**Coordonnées de  $G_C$**  Pour des raisons de symétrie, on a  $\overrightarrow{OG_C} = Y_C \vec{y} - \frac{L}{2} \vec{z}$ .

Par définition, on a alors  $m_c Y_C = \int y_p dm$ .

On a, en coordonnées cylindriques,  $Y_p = -R \cos \theta$ ,  $dm = \rho L R d\theta$  avec  $\theta$  variant de  $-\alpha$  à  $\alpha$ .

Par suite,  $m_c Y_C = - \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \theta \rho L R d\theta = -\rho R^2 L [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} = -2\rho R^2 L \sin \alpha$ .

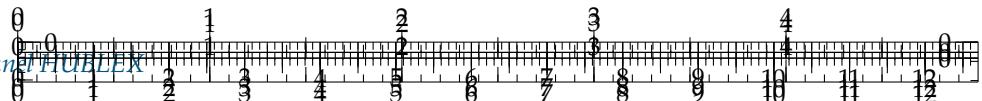
Or,  $m_c = 2R\alpha L\rho$ . En conséquences,  $2R\alpha L\rho Y_C = -2L\rho R^2 \sin \alpha$  et  $Y_C = -R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ .

**Coordonnées de  $G$**  En utilisant la définition du barycentre, on a  $m \overrightarrow{OG} = m_P \overrightarrow{OG_P} + m_C \overrightarrow{OG_C}$ .

**Question 2** Déterminer la forme de la matrice d'inertie de la porte :

1. donner la forme de la matrice d'inertie de la plaque  $P$  en  $G_P$  ;

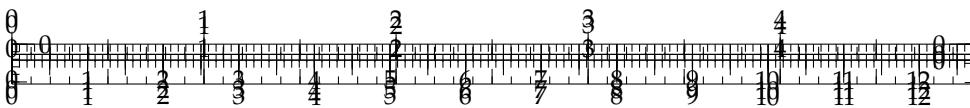




2. donner la forme de la matrice d'inertie du cylindre C en  $G_C$  ;
3. donner la forme de la matrice d'inertie de la porte P en G.

**Question 3** Déterminer le moment d'inertie de la porte par rapport à  $(O, \vec{z})$ .





## Application 2

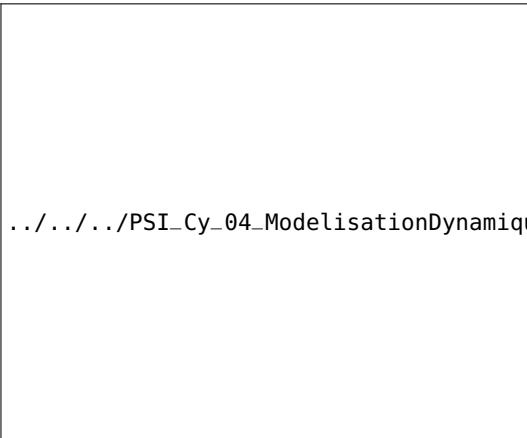
### Vilebrequin de moteur – Sujet

Un vilebrequin est réalisé en mécanosoudage pour faire fonctionner un prototype de moteur. Les géométries sont par conséquent simples : assemblage de tôles ou cylindres en acier.

C. Gamelon & P. Dubois.

**B2-10**

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_01\_GeometrieMasses/Cy\_04\_01\_Application\_01\_Vilebrequin/images/band



On note :

- $\rho = 7200 \text{ kg m}^{-3}$  la masse volumique du matériau;
- $a = 20 \text{ mm}$  ;  
►  $b = 30 \text{ mm}$  ;
- $e = 5 \text{ mm}$  ;
- $l = 20 \text{ mm}$  ;
- $r = 5 \text{ mm}$  ;
- $L = 50 \text{ mm}$  ;
- $r_4 = 7,5 \text{ mm}$  ;
- $h = 20 \text{ mm}$ .

L'origine  $O$  repère  $\mathcal{R}$  est située dans le plan de contact du cylindre 1 et du parallélépipède 2.

**Question 1** Calculer les masses des différentes pièces :  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  et  $m_4$ .

**Question 2** Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.

**Question 3** Déterminer la valeur de  $R$  afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.

**Question 4** Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 5** Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en  $O$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

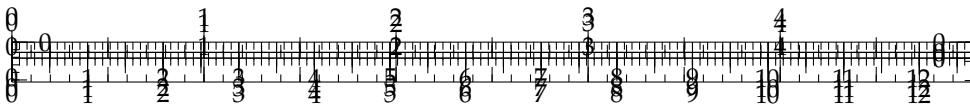
Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

**Question 6** Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe  $\overrightarrow{OA}$ .



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisati





.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_01\_GeometrieMasses/Cy\_04\_01\_Application\_01\_Vilebrequin/images/band

## Application 2

### Vilebrequin de moteur – Corrigé

C. Gamelon & P. Dubois.

**B2-10**

**Question 1** Calculer les masses des différentes pièces :  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  et  $m_4$ .

#### Correction

On a :

- $m_1 = \mu\pi r_1^2 l_1$ ;
- $m_2 = \mu abe$
- $m_3 = \mu \frac{1}{2}\pi R^2 e$ ;
- $m_4 = \mu\pi r_3^2 L$ .

**Question 2** Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.

#### Correction

On a :

- $\overrightarrow{OG_1} = h\vec{y} + \frac{l_1}{2}\vec{z}$ ;
- $\overrightarrow{OG_2} = \frac{b}{2}\vec{y} - \frac{e}{2}\vec{z}$ ;
- $\overrightarrow{OG_4} = -\left(e + \frac{L}{2}\right)\vec{z}$ .

Le solide 3 a deux plans de symétrie :  $(\vec{x}, \vec{y})$  et  $(\vec{y}, \vec{z})$ . On ne cherche donc la composante du centre d'inertie que dans la direction  $\vec{y}$ .

$m_3 \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} = \int \overrightarrow{OP} \cdot \vec{y} dm$  avec  $dm = \mu\rho d\rho d\theta e$  ( $\rho$  variant de 0 à  $R$  et  $\theta$  variant de  $-\pi$  à  $0$ ) et  $\overrightarrow{OP} = \rho (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y})$ .

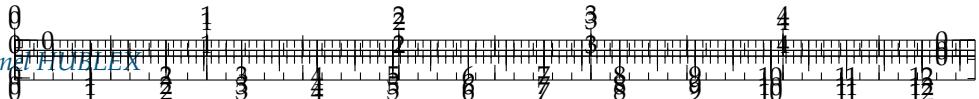
On a donc :

$$\begin{aligned} \mu \frac{1}{2}\pi R^2 e \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} &= \int \rho (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) \cdot \vec{y} \mu e \rho d\rho d\theta \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi R^2 \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} = \int \rho^2 \sin \theta \vec{y} \rho d\rho d\theta \Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi R^2 \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} = -\frac{R^3}{3} [\cos \theta]_{-\pi}^0 \vec{y} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} = -2\frac{R}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG_3} \cdot \vec{y} = -4\frac{R}{3\pi} \vec{y} \end{aligned}$$

Au final :  $\overrightarrow{OG_3} = -\frac{4R}{3\pi} \vec{y} - \frac{e}{2} \vec{z}$

**Question 3** Déterminer la valeur de  $R$  afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.



**Correction**

$$\begin{aligned}
 & \text{On a } (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \overrightarrow{OG} \cdot \vec{y} = 0 \\
 & \Leftrightarrow m_1 \overrightarrow{OG}_1 \cdot \vec{y} + m_2 \overrightarrow{OG}_2 \cdot \vec{y} + m_3 \overrightarrow{OG}_3 \cdot \vec{y} + m_4 \overrightarrow{OG}_4 \cdot \vec{y} = 0 \\
 & \Leftrightarrow \left( \mu \pi r_1^2 l_1 \right) h + (\mu a b e) \frac{b}{2} - \left( \mu \frac{1}{2} \pi R^2 e \right) \frac{4R}{3\pi} + \left( \mu \pi r_3^2 L \right) \cdot 0 = 0 \\
 & \Leftrightarrow \pi r_1^2 l_1 h + a b e \frac{b}{2} - \frac{1}{2} R^2 e \frac{4R}{3} = 0 \\
 & \Leftrightarrow \pi r_1^2 l_1 h \frac{3}{2} + a b^2 e \frac{3}{4} = R^3 e \Leftrightarrow R^3 = \pi r_1^2 l_1 h \frac{3}{2e} + a b^2 \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

**Question 4** Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Correction**

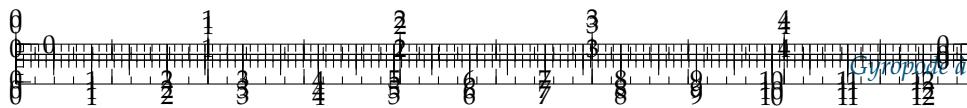
$$\begin{aligned}
 I_{G_1}(S_1) &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_R \quad I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_R \quad I_{G_3}(S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_R \\
 I_{G_4}(S_4) &= \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_R
 \end{aligned}$$

**Question 5** Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en  $O$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Correction**

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OG}_1 &= h \vec{y} + \frac{l_1}{2} \vec{z} \\
 I_O(S_1) &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_R + m_1 \begin{pmatrix} h^2 + \frac{l_1^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_1^2}{4} & -\frac{hl_1}{2} \\ 0 & -\frac{hl_1}{2} & h^2 \end{pmatrix}_R \\
 \overrightarrow{OG}_2 &= \frac{b}{2} \vec{y} - \frac{e}{2} \vec{z} \\
 I_O(S_2) &= \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_R + m_2 \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} + \frac{e^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^2}{4} & -\frac{be}{2} \\ 0 & -\frac{be}{2} & \frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_R \\
 \overrightarrow{OG}_3 &= -\frac{4R}{3\pi} \vec{y} - \frac{e}{2} \vec{z} \\
 I_O(S_3) &= \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_R + m_3 \begin{pmatrix} \frac{16R^2}{9\pi^2} + \frac{e^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^2}{4} & -\frac{4R}{3\pi} \frac{e}{2} \\ 0 & -\frac{4R}{3\pi} \frac{e}{2} & \frac{16R^2}{9\pi^2} \end{pmatrix}_R \\
 \overrightarrow{OG}_4 &= -\left( e + \frac{L}{2} \right) \vec{z}.
 \end{aligned}$$





$$I_O(S_4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_R + m_4 \begin{pmatrix} \left(e + \frac{L}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(e + \frac{L}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_R$$

On a :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_R$$

Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

**Question 6** Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe  $\overrightarrow{OA}$ .

#### Correction

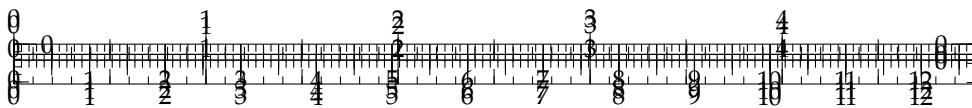
$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} = \frac{L_1 \vec{z} + h \vec{y}}{\sqrt{L_1^2 + h^2}}$$

$$J_\Delta = (0 \quad u_y \quad u_z) \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_R \begin{pmatrix} 0 \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = (0 \quad u_y \quad u_z) \begin{pmatrix} 0 \\ Bb - Dc \\ -Db + Cc \end{pmatrix}$$

$$J_\Delta = (Bb - Dc) u_y + (-Db + Cc) u_z$$



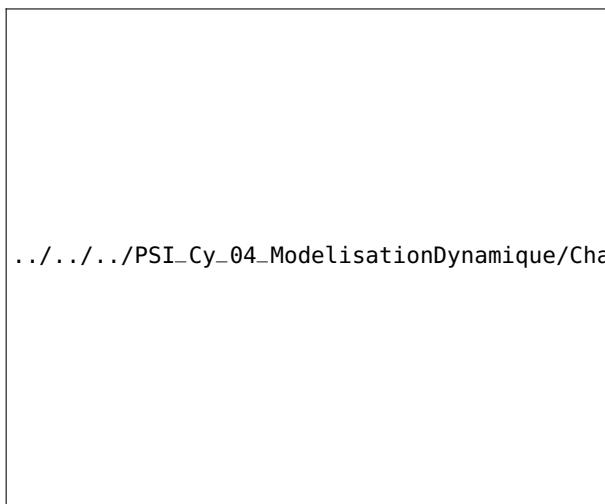




## Application 3 Triaxe – Sujet

On donne le plan d'un triaxe constitué des 3 axes  $A_1, A_2, A_3$  et du moyeu central noté  $M$ . On note  $T$  l'ensemble.

B2-10



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_01\_GeometrieMasses/Cy\_04\_01\_Application\_02\_Tri...

On note :

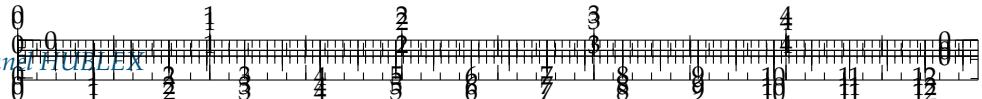
- $\vec{z}$  l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On se place ci-dessus dans le plan de symétrie  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ ;
- $\mathcal{R}_i$  le repère  $(O_i; \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  et  $\mathcal{B}_i$  la base associée.

**TOUS LES CALCULS SE FERONT DE MANIÈRE LITTERALE!**

- $D_1 = 18 \text{ mm}$  et  $H_1 = 25 \text{ mm}$ .
- $D = 46 \text{ mm}$ ,  $d = 30 \text{ mm}$  et  $H = 48 \text{ mm}$ .
- $\alpha_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1) = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = (\vec{x}, \vec{x}_2) = -150^\circ$  et  $\alpha_3 = (\vec{x}, \vec{x}_3) = -30^\circ$ .

On donne ci-dessous le paramétrage d'un axe  $A_i$ .





.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_01\_GeometrieMasses/Cy\_04\_01\_Application\_02\_Triaxe/imag

**Question 1** Déterminer (sans calcul) la position du centre de gravité du triaxe.

**Question 2** Déterminer analytiquement la position du centre de gravité  $G_i$  du solide  $A_i$  dans le repère  $\mathcal{R}_i$ .

**Question 3** Déterminer (sans calcul) la **forme** de la matrice d'inertie du triaxe.

**Question 4** Déterminer analytiquement la matrice d'inertie du solide  $A_i$  en  $G_i$  dans  $\mathcal{R}_i$ . On note  $I_{G_i}(A_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_i}$  où les constantes seront à déterminer littéralement.

**Question 5** Déterminer  $I_{G_i}(A_i)$  dans la base  $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  puis  $I_O(A_i)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Question 6** Déterminer  $I_O(B)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Question 7** Proposer une méthode pour déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en  $O$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

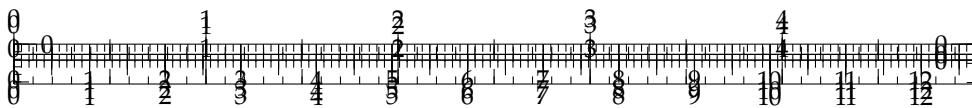
**Question 8** Déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en  $O$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Question 9** Déterminer  $I_O(M)$  la matrice d'inertie du moyeu  $M$ .

**Question 10** Déterminer  $I_O(T)$  la matrice d'inertie du triaxe  $T$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_01\_GeometrieMasses/Cy\_04\_01\_Application\_02\_Triaxe/imag

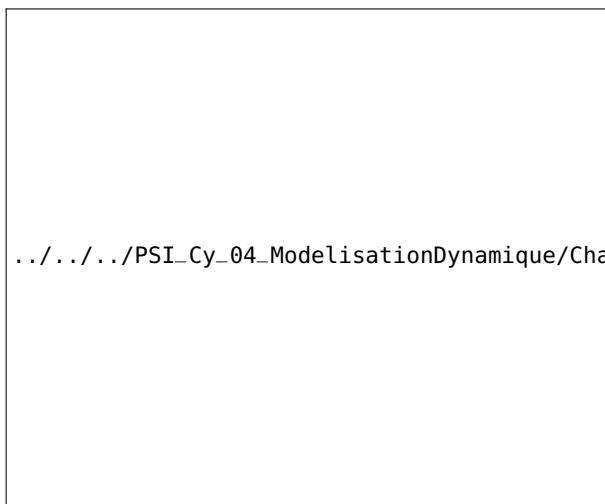




## Application 3 Triaxe – Corrigé

On donne le plan d'un triaxe constitué des 3 axes  $A_1, A_2, A_3$  et du moyeu central noté  $M$ . On note  $T$  l'ensemble.

B2-10



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_01\_GeometrieMasses/Cy\_04\_01\_Application\_02\_Tri...

On note :

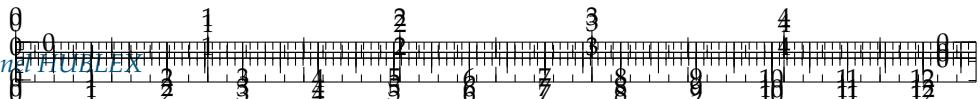
- ▶  $\vec{z}$  l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On se place ci-dessus dans le plan de symétrie  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ ;
- ▶  $\mathcal{R}_i$  le repère  $(O_i; \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  et  $\mathcal{B}_i$  la base associée.

**TOUS LES CALCULS SE FERONT DE MANIÈRE LITTERALE!**

- ▶  $D_1 = 18 \text{ mm}$  et  $H_1 = 25 \text{ mm}$ .
- ▶  $D = 46 \text{ mm}$ ,  $d = 30 \text{ mm}$  et  $H = 48 \text{ mm}$ .
- ▶  $\alpha_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1) = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = (\vec{x}, \vec{x}_2) = -150^\circ$  et  $\alpha_3 = (\vec{x}, \vec{x}_3) = -30^\circ$ .

On donne ci-dessous le paramétrage d'un axe  $A_i$ .





.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_01\_GeometrieM

**Question 1** Déterminer (sans calcul) la position du centre de gravité du triaxe.

#### Correction

Le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  est plan de symétrie du triaxe; donc  $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{z} = 0$

Le plan  $(O, \vec{y}, \vec{z})$  est plan de symétrie du triaxe; donc  $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{x} = 0$

Reste la coordonnée selon  $\vec{y}$ .

Les plans  $(O, \vec{z}, \vec{x}_2)$  et  $(O, \vec{z}, \vec{x}_3)$  étant plans de symétrie, on a  $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{y}_2 = 0$  et  $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{y}_3 = 0$ .

Or  $\overrightarrow{OG} = y_g \vec{y} = y_g \cos \alpha_2 \vec{y}_2 - y_g \sin \alpha_2 \vec{x}_2$ . Il en résulte que  $y_g \cos \alpha_2 = 0$  et donc nécessairement  $y_g = 0$  car  $\alpha_2 \neq 0$ .

**Question 2** Déterminer analytiquement la position du centre de gravité  $G_i$  du solide  $A_i$  dans le repère  $\mathcal{R}_i$ .

#### Correction

On pourrait répondre directement en disant que le solide à 3 plans de symétrie orthogonaux entre eux. En utilisant la définition on a :

$$\blacktriangleright M_1 = \mu H_1 \pi \frac{D_1^2}{4};$$

► en coordonnées cylindriques,  $\overrightarrow{O_i P_i} = x \vec{x}_i + \rho \cos \theta \vec{y}_i + \rho \sin \theta \vec{z}_i$  et  $dV = \rho d\rho d\theta dx$  avec  $x \in [0, H_1]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\rho \in [0, D_1/2]$ ;

$$\blacktriangleright m_i x_{G_i} = \mu \iiint x_P dV = \mu \iiint x \rho d\rho d\theta dx = \mu \frac{H_1^2}{2} 2\pi \frac{D_1^2}{8};$$

$$\blacktriangleright m_i y_{G_i} = \mu \iiint y_P dV = \mu \iiint \rho \cos \theta d\rho d\theta dx = 0;$$

$$\blacktriangleright m_i z_{G_i} = \mu \iiint z_P dV = \mu \iiint \rho \sin \theta d\rho d\theta dx = 0.$$

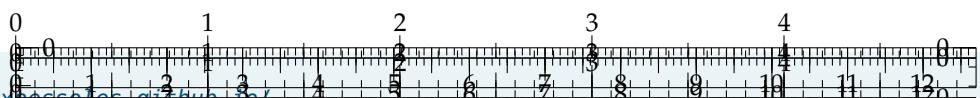
$$\text{Au final, } \mu H_1 \pi \frac{D_1^2}{4} x_{G_1} = \mu \frac{H_1^2}{2} 2\pi \frac{D_1^2}{8} \Leftrightarrow x_{G_1} = \frac{H_1}{2}.$$

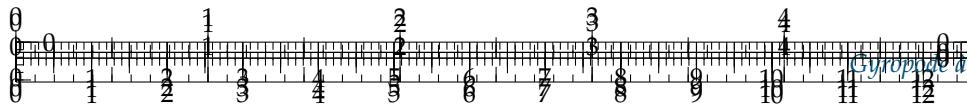
**Question 3** Déterminer (sans calcul) la **forme** de la matrice d'inertie du triaxe.

#### Correction

Le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  est plan de symétrie du triaxe; donc  $E = \iiint xz dm = 0$  et  $D = \iiint yz dm = 0$ .

Le plan  $(O, \vec{y}, \vec{z})$  est plan de symétrie du triaxe; donc  $E = \iiint xz dm = 0$  et  $F = \iiint xy dm = 0$ .





La matrice est donc diagonale et de la forme  $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ .

**Question 4** Déterminer analytiquement la matrice d'inertie du solide  $A_i$  en  $G_i$  dans

$\mathcal{R}_i$ . On note  $I_{G_i}(A_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_i}$  où les constantes seront à déterminer littéralement.

#### Correction

Le solide étant axisymétrique, on a :  $D_i = E_i = F_i = 0$  et  $C_i = B_i$ . D'où  $I_{G_i}(A_1) =$

$$\begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & B_i \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}.$$

Calculons  $A_i = \iiint (y^2 + z^2) dm = \mu \iiint (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta dx$

$$= \mu \iiint \rho^3 d\rho d\theta dz = \mu \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{D_1/2} 2\pi H_1 = \mu \frac{D_1^4}{16 \cdot 4} 2\pi H_1 = M_1 \frac{D_1^2}{8}.$$

Calculons  $B_i = \iiint (x^2 + z^2) dm = \mu \iiint (x^2 + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta dx$

$$B_x = \mu \iiint x^2 \rho d\rho d\theta dx + \mu \iiint \rho^2 \sin^2 \theta \rho d\rho d\theta dx = \mu \iiint x^2 \rho d\rho d\theta dx = \mu \frac{H_1^3}{4 \cdot 3} \frac{D_1^2}{8} 2\pi = M \frac{H_1^2}{12}$$

$$B_z = \mu \iiint \rho^2 \sin^2 \theta \rho d\rho d\theta dx = \mu \iiint \rho^3 \frac{1 - \cos 2x}{2} \theta d\rho d\theta dx = \mu \iiint \frac{\rho^3}{2} \theta d\rho d\theta dx = \mu \frac{D_1^4}{2 \cdot 16 \cdot 4} 2\pi H_1 = M \frac{D_1^2}{16}.$$

Au final,  $A_i = M_1 \frac{D_1^2}{8}$  et  $B_i = M \left( \frac{H_1^2}{12} + \frac{D_1^2}{16} \right)$ .

**Question 5** Déterminer  $I_{G_i}(A_i)$  dans la base  $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  puis  $I_O(A_i)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

#### Correction

On a  $\vec{x}_i = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}$ ,  $\vec{y}_i = \cos \alpha \vec{y} - \sin \alpha \vec{x}$ . En conséquences, on a :  $P_{10} =$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

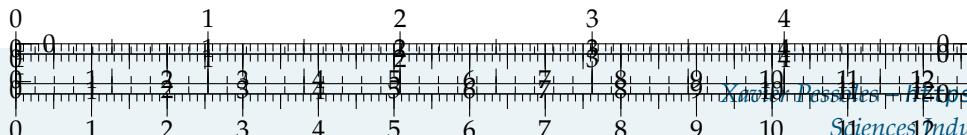
On a donc  $I_{G_1}(A_1)_{\mathcal{R}} = P_{10}^{-1} I_{G_1}(A_1)_{\mathcal{R}_1} P_{10}$ .

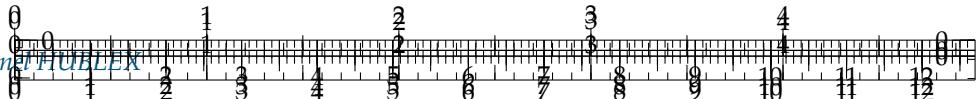
$$I_{G_1}(A_1)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos \alpha & -A_1 \sin \alpha & 0 \\ B_1 \sin \alpha & B_1 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \cos^2 \alpha + B_1 \sin^2 \alpha & -A_1 \sin \alpha \cos \alpha + B_1 \cos \alpha \sin \alpha & 0 \\ -A_1 \sin \alpha \cos \alpha + B_1 \cos \alpha \sin \alpha & A_1 \sin^2 \alpha + B_1 \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs,  $\overrightarrow{OG_i} = \frac{H+D}{2} \vec{x}_i = \frac{H+D}{2} (\cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y})$ ; donc :





$$I_O(A_i)_{\mathcal{R}} = I_{G_i}(A_i)_{\mathcal{R}} + M_1 \begin{pmatrix} \left(\frac{H+D}{2} \sin \alpha\right)^2 & \left(\frac{H+D}{2} \cos \alpha\right)\left(\frac{H+D}{2} \sin \alpha\right) \\ \left(\frac{H+D}{2} \cos \alpha\right)\left(\frac{H+D}{2} \sin \alpha\right) & \left(\frac{H+D}{2} \cos \alpha\right)^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$$I_O(A_i)_{\mathcal{R}} = I_{G_i}(A_i)_{\mathcal{R}} + M_1 \begin{pmatrix} \left(\frac{H+D}{2} \sin \alpha\right)^2 & \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \cos \alpha \sin \alpha & 0 \\ \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \cos \alpha \sin \alpha & \left(\frac{H+D}{2} \cos \alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

Au final,  $I_O(A_i)_{\mathcal{R}} =$

$$\begin{pmatrix} A_1 \cos^2 \alpha + B_1 \sin^2 \alpha + M_1 \left(\frac{H+D}{2} \sin \alpha\right)^2 & (B_1 - A_1) \sin \alpha \cos \alpha + M_1 \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \cos \alpha \sin \alpha \\ (B_1 - A_1) \sin \alpha \cos \alpha + M_1 \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \cos \alpha \sin \alpha & A_1 \sin^2 \alpha + B_1 \cos^2 \alpha + M_1 \left(\frac{H+D}{2} \cos \alpha\right)^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note  $I_O(A_i)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} f(\alpha) & fg(\alpha) & 0 \\ fg(\alpha) & g(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & h(\alpha) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ .

**Question 6** Déterminer  $I_O(B)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Question 7** Proposer une méthode pour déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en  $O$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Question 8** Déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en  $O$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Correction**

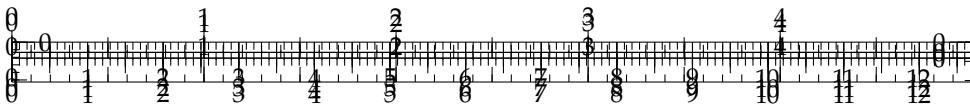
**Question 9** Déterminer  $I_O(M)$  la matrice d'inertie du moyeu  $M$ .

**Correction**

**Question 10** Déterminer  $I_O(T)$  la matrice d'inertie du triaxe  $T$ .

**Correction**





.../.../.../Style/png/Fond\_CIN.png

## 9 Application du Principe Fondamental de la Dynamique

### 9.1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

#### Définition – Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique

Soit un ensemble matériel  $E$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur  $E$  est égale au torseur dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \mathcal{T}(\overline{E} \rightarrow E) \right\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)} \end{array} \right\}_A.$$

- On note  $\overrightarrow{R_d(S/R_0)}$  la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie  $G$ .
- Le **moment dynamique** dépend du point A et se note  $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$ .

Du Principe Fondamental de la dynamique découlent plusieurs **théorèmes généraux**.

#### 9.1.1 Théorème de la résultante dynamique

#### Théorème – Théorème de la résultante dynamique

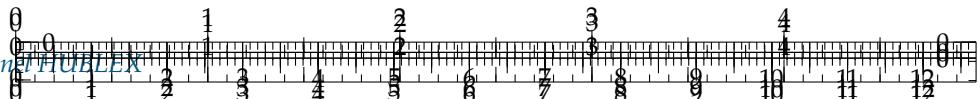
Pour tout ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur  $E$  est égale à la résultante dynamique du mouvement

**B2-10**

**Emilien Durif**, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

**Florestan Mathurin**, *Géométrie des masses*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.





de  $E$  par rapport à  $R_0$  :

$$\overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)}.$$

### 9.1.2 Théorème du moment dynamique

#### Théorème – Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur  $E$  en un point quelconque  $A$  est égale au moment dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  en  $A$  :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}.$$

## 9.2 Torseur cinétique

### 9.2.1 Définition

#### Définition –

Le **torseur cinétique** d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$  se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c}(S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- ▶ La résultante du torseur cinétique,  $\overrightarrow{R_c}(S/R_0)$  ne dépend pas du point  $A$  mais uniquement du centre de gravité  $G$  de  $S$  (de masse  $m$ ) et vérifie :  $\overrightarrow{R_c}(S/R_0) = m \overrightarrow{V}(G/R_0)$ .
- ▶ Le moment cinétique dépend du point  $A$  et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point :  $\overrightarrow{\sigma}(B, S/R_0) = \overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$ .

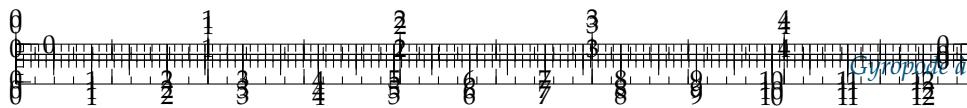
### 9.2.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

#### Propriété –

Pour un solide  $S$  de masse  $m$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  et soit un point  $A$  quelconque.

$$\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A, S/R_0)}.$$



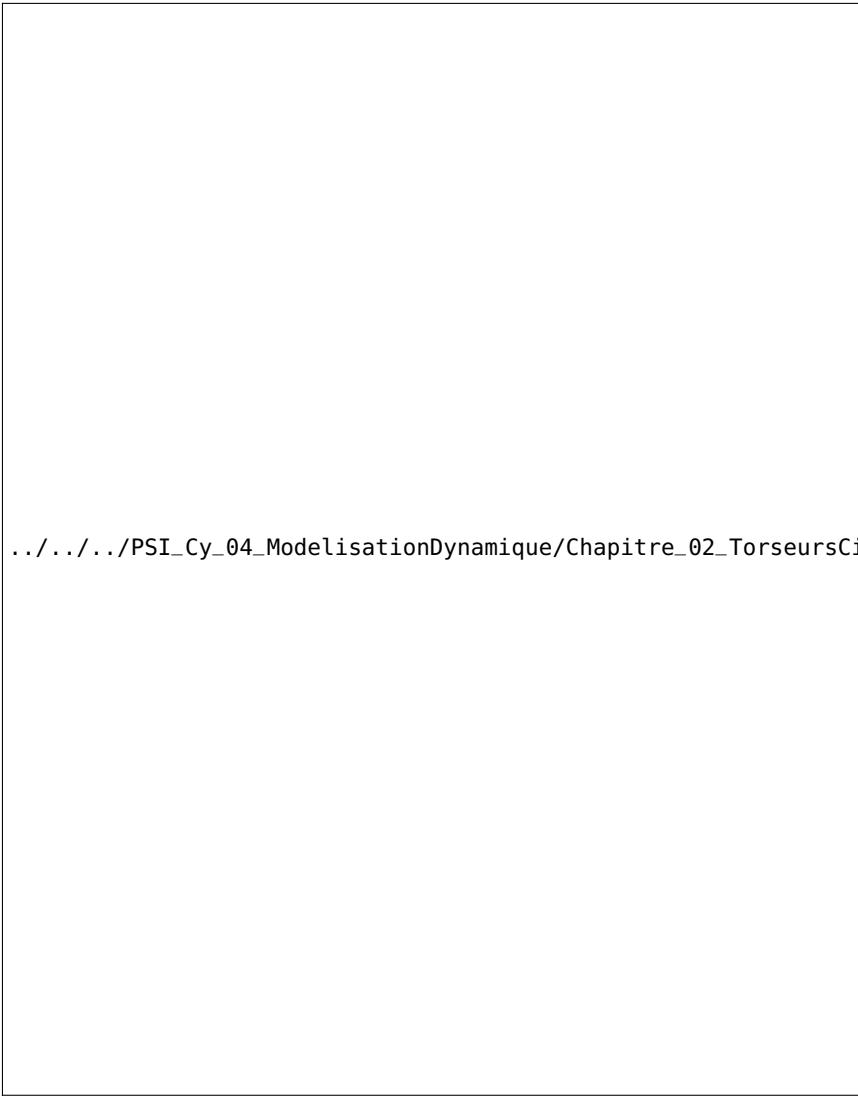


### 9.2.3 Cas particuliers

- ▶ En appliquant cette formule en un point  $A$  fixe dans le mouvement de  $S/R_0$ , on a :  $\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$ .
- ▶ En appliquant cette formule en  $G$ , **centre d'inertie** de  $S$ , on a :  $\overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)} = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$ .

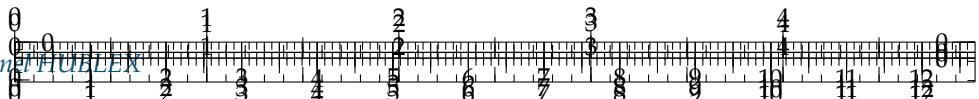
### 9.2.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel  $E$  composé de solides  $S_i$ . On étudie son mouvement dans le référentiel  $R_0$ . On donne la méthodologie de calcul du moment cinétique en un point  $A$  sur la figure suivante.



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cours/images/algorigramme





## 9.3 Torseur dynamique

### 9.3.1 Définition

#### Définition – Torseur dynamique

Le **torseur dynamique** d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$  se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- ▶ La résultante du torseur dynamique,  $\overrightarrow{R_d}(S/R_0)$  ne dépend pas du point  $A$  mais uniquement du centre de gravité  $G$  de  $S$  (de masse  $m$ ) et vérifie :  $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0)$ .
- ▶ Le moment dynamique dépend du point  $A$  et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point :  $\overrightarrow{\delta(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R_0)$ .

### 9.3.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

#### Propriété –

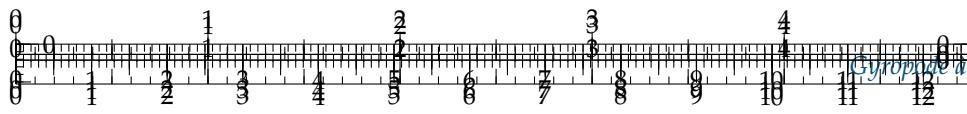
**Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques** Pour un solide  $S$  de masse  $M$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  et soit un point  $A$  quelconque.

- ▶ Relation entre les **résultantes** :  $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{R_c}(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$ .
- ▶ Relation entre les **moments** :  $\overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$ .

### 9.3.3 Cas particuliers

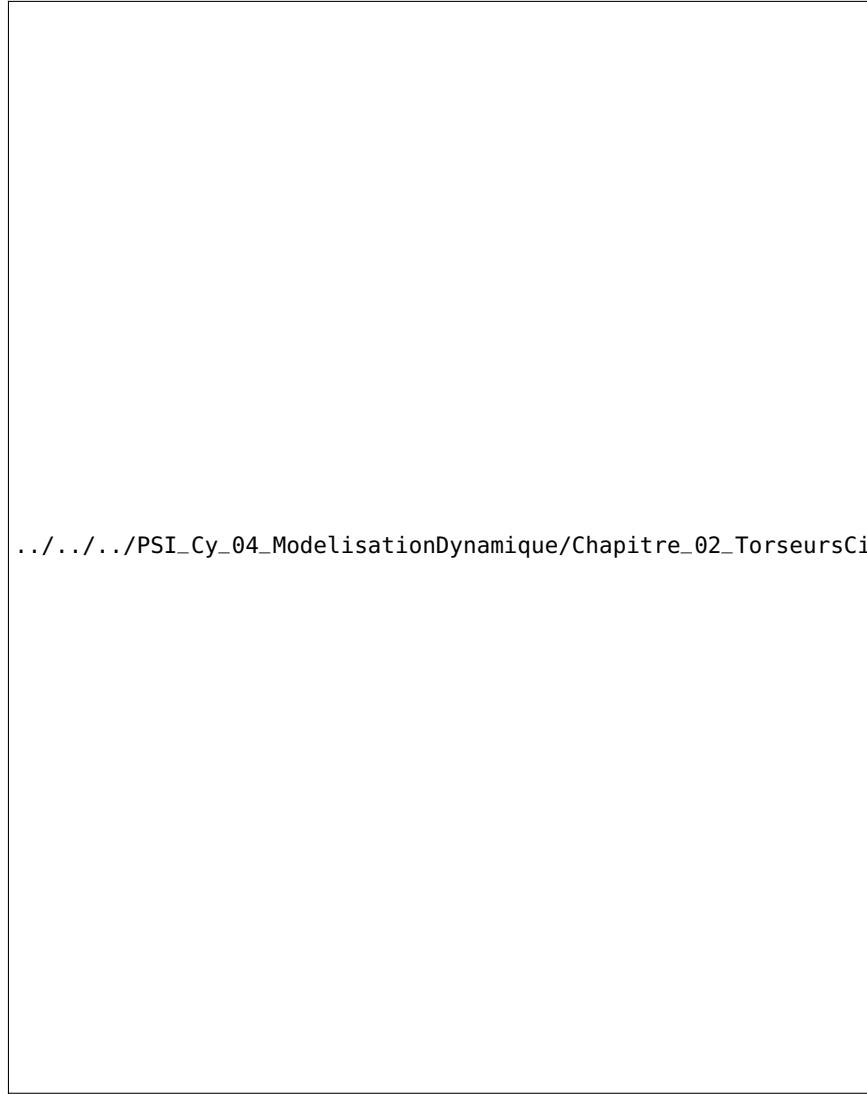
- ▶ En appliquant cette formule en un point  $O$  fixe dans  $R_0$ , on a :  $\overrightarrow{\delta(O, S/R_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\delta(O, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0}$ .
- ▶ En appliquant cette formule en un point  $G$ , **centre d'inertie de  $S$** , on a :  $\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0}$ .

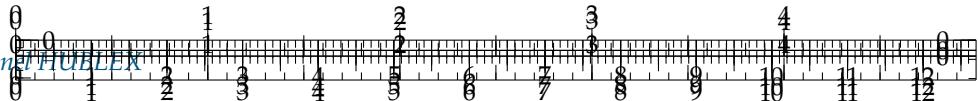




#### 9.3.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel  $E$  composé de solides  $S_i$ . On étudie son mouvement dans le référentiel  $R_0$ . On donne l'algorigramme de calcul du moment dynamique en un point  $A$  sur la figure ci-dessous.

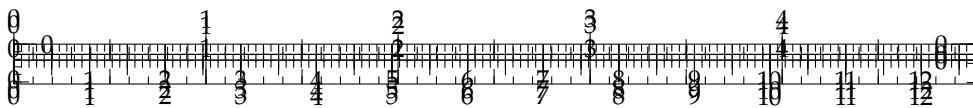




## Bilan

Point considéré	Point quelconque $A$	Centre de gravité $G$	Point fixe dans $\mathcal{R}_0$ A
Torseur cinétique $\{\mathcal{E}(S/R_0)\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \sigma(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \Omega(S/R_0) + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A, S/R_0)} \end{array} \right\}_A$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \sigma(G, S/R_0) = I_G(S) \cdot \Omega(S/R_0) \end{array} \right\}_G$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \sigma(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \Omega(S/R_0) \end{array} \right\}_A$
Torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_0)\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\tilde{T}(G, S/R_0)} \\ \delta(A, S/R_0) = \left[ \frac{d\alpha(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_0)} \end{array} \right\}_A$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\tilde{T}(G, S/R_0)} \\ \delta(G, S/R_0) = \left[ \frac{d\alpha(G, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_G$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\tilde{T}(G, S/R_0)} \\ \delta(A, S/R_0) = \left[ \frac{d\alpha(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_A$





## Application 1

# Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

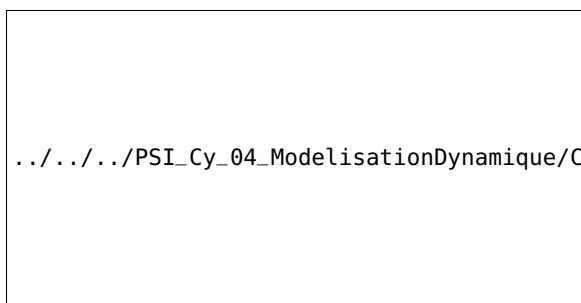
### Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.

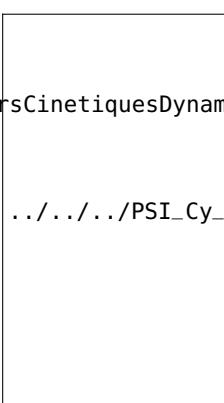
C1-05

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_Act



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique

#### Objectif

Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

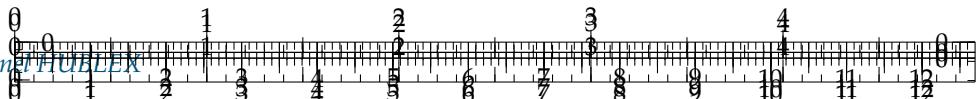
### Élaboration du modèle dynamique

#### Objectif

Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

Ces calculs visent à déterminer l'équation dynamique qui permet d'obtenir le couple moteur (minimal) en fonction des caractéristiques géométriques et massique de la charge à soulever ainsi que des conditions d'utilisation. Le modèle d'étude est celui représenté à la figure suivante correspondant au modèle d'étude plan position fléchie.





.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_Activation

#### Données :

- $\overrightarrow{O_1 G_4} = \lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0}$ ;
- accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;
- longueur de la cuisse  $l_1 = 43,1 \text{ cm}$ .
- longueur de la jambe  $l_2 = 43,3 \text{ cm}$ .
- longueur de l'articulation de la cheville à la plante arrière du pied  $l_3 = 6,9 \text{ cm}$ .
- longueur de la plante arrière du pied au point d'appui sur le sol  $l_4 = 13 \text{ cm}$ .
- longueur  $\overrightarrow{O_0 O_1} = L \overrightarrow{y_1}$  avec  $L = 51,8 \text{ cm}$ .
- rapport de réduction :  $r = \frac{\omega_r}{\omega_m} = \frac{1}{120}$ .

#### Hypothèses :

- L'étude est modélisable dans le plan.
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- Les inerties des pièces sont négligées.
- Toutes les masses sont négligées **sauf la masse  $m_4$  de la charge à soulever**.
- L'angle  $\alpha$  entre la charge transportée et la verticale  $\overrightarrow{z_0}$  reste constant.
- $G_4$ , centre de gravité de la charge transportée (4), reste en permanence à la verticale du point  $A$  d'appui au sol.

On note  $E = \{\text{cuisse}(2) + \text{charge transportée}(4)\}$ .

**Question 1** Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0}$  en fonction de  $m_4$ ,  $\dot{h}(t)$ ,  $L$  et  $\cos \theta_{10}$ .

**Question 3** Déduire  $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0}$  en fonction de  $m_4$ ,  $\ddot{h}(t)$ ,  $L$  et  $\cos \theta_{10}$ .

La loi d'évolution de la vitesse de la hanche est donnée à la figure ci-contre.

**Question 4** Déterminer les expressions littérales du couple  $C_m$  au niveau de l'arbre moteur du genou imposé par la loi d'évolution de la hanche. Calculer numériquement ce couple pour une valeur de  $\theta_{10}$  égale à  $54,5^\circ$  correspondant à la valeur maximale du couple.

**Question 5** Calculer le couple  $C_m$  au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte  $\eta = 0,75$  (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

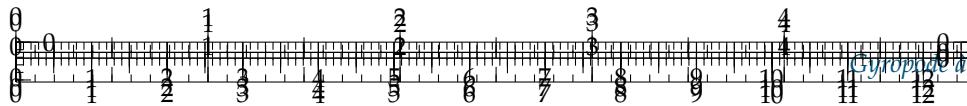
**Question 6** Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

## Validation du dimensionnement du moteur

### Objectif

Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.





Le cycle suivant obtenu à l'aide du modèle multiphysique de représente l'évolution du couple moteur, et ce en tenant compte du moment d'inertie du rotor, sur un cycle de période  $T = 15$  s.

Quatre phases sont définies sur cette période :

- ▶ phase 1 pour  $0 \leq t < 2$  s, valeur efficace du couple moteur  $C_1 = 0,838$  Nm;
- ▶ phase 2 pour  $2 \leq t < 4$  s, couple moteur constant  $C_2 = -0,912$  Nm;
- ▶ phase 3 pour  $4 \leq t < 6$  s, valeur efficace du couple moteur  $C_3 = 0,838$  Nm;
- ▶ phase 4 pour  $6 \leq t < 15$  s, couple moteur nul.

**Question 7** Préciser à quels mouvements correspondent les 4 phases de ce cycle.

Le couple efficace est également appelé couple thermiquement équivalent, il est défini

par :  $C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T c(t)^2 dt}$ . On a aussi  $C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i}$

**Question 8** Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

## Retour sur l'objectif

Le couple moteur varie entre  $-1,156$  Nm et  $0,596$  Nm. Les caractéristiques du moteur choisi sont :

- ▶ vitesse à vide de  $3120 \text{ tr min}^{-1}$  pour une alimentation nominale en amont de l'onduleur de  $36$  V;
- ▶ couple permanent admissible de  $0,560$  Nm;
- ▶ pente de la courbe de la vitesse en fonction du couple de  $423 \text{ tr min}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

De plus une étude cinématique précédente a montré que le moteur permettant d'actionner le moteur doit pouvoir atteindre une vitesse de  $2200 \text{ tr min}^{-1}$ .

**Question 9** Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique

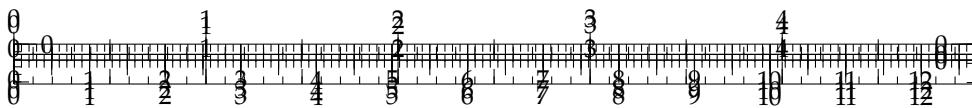
### Éléments de correction

1.  $\vec{\sigma}(O_1, E/0) \cdot \vec{x}_0 =$
2.  $-Lm_4 \cos \theta_{10} \dot{h}(t).$
3.  $\delta(O_1, E/0) \cdot \vec{x}_0 =$
4.  $-Lm_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t).$
5.  $C_r =$
6.  $-190,5 \text{ Nm}.$
7.  $C_m \approx 2,12 \text{ Nm}.$
8.  $C_{\text{eff}} \approx 0,546 \text{ Nm}.$

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisati







## Application 1

# Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

### Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

#### Objectif

Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

C1-05

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique

### Élaboration du modèle dynamique

#### Objectif

Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

C1-05

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique

#### Correction

Étant donné que l'on souhaite que l'angle  $\alpha$  reste constant pendant la levée d'une charge, le mouvement de 4 sera donc un mouvement de translation rectiligne.

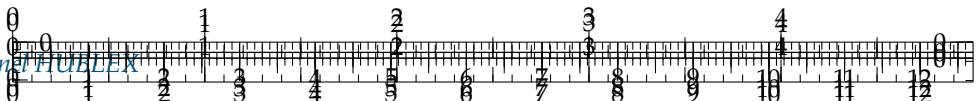
.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_Activation\_01\_Exercice

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$  en fonction de  $m_4$ ,  $\dot{h}(t)$ ,  $L$  et  $\cos \theta_{10}$ .

#### Correction

$E$  étant en translation, on a  $\overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)} = \vec{0}$ . On a alors  $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} = \overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)} + \overrightarrow{O_1G_4} \wedge \overrightarrow{R_c(E/0)}$ .





Par ailleurs,  $\overrightarrow{R_c(E/0)} = m_4 \overrightarrow{V(G_4, E/0)} = m_4 \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}$ .

On a donc :  $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = (\overrightarrow{(\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0})} \wedge m_4 \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = -L m_4 \cos \theta_{10} \dot{h}(t)$ .

**Question 3** Déduire  $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0}$  en fonction de  $m_4$ ,  $\ddot{h}(t)$ ,  $L$  et  $\cos \theta_{10}$ .

#### Correction

##### Méthode 1 – Calcul de $\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)}$ et déplacement

On a  $\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)} = \frac{d\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)}}{dt} = \overrightarrow{0}$ . En conséquences,  $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = (\overrightarrow{(\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0})} \wedge m_4 \ddot{h}(t) \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$ .

##### Méthode 2 – Calcul de $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)}$

On a aussi  $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} = \left( \frac{d\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)}}{dt} \right) + m_4 \overrightarrow{V(O_1/0)} \wedge \overrightarrow{V(G_4, E/0)}$ .

Par suite on a  $(\overrightarrow{V(O_1, E/0)} \wedge \overrightarrow{V(G_4, E/0)}) \overrightarrow{x_0} = (\overrightarrow{(Ly_1 \wedge \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{x_0})} \wedge \overrightarrow{\dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}}) \overrightarrow{x_0} = (-L \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{\dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}}) \overrightarrow{x_0} = -L \dot{\theta}_{10} \dot{h}(t) \sin \theta_{10}$ .

Enfin,  $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t) + L m_4 \dot{\theta}_{10} \sin \theta_{10} \dot{h}(t) - m_4 L \dot{\theta}_{10} \dot{h}(t) \sin \theta_{10} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$ .

**Question 4** Déterminer l'expression littérale du couple  $C_r$  exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche. Calculer numériquement ce couple pour une valeur de  $\theta_{10}$  égale à  $54,5^\circ$  correspondant à la valeur maximale du couple.

#### Correction

- On isole l'ensemble  $E$ .
- On réalise le bilan des actions mécaniques :

• action de la liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(1 \rightarrow E)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \end{array} \right\}_{O_1}$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = 0$ ;

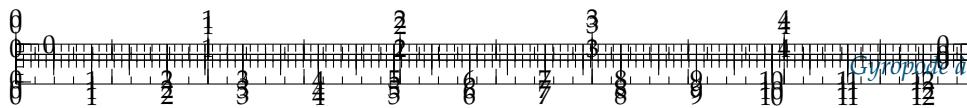
• action du réducteur :  $\{\mathcal{T}(1_r \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r \overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}_{O_1}$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = 0$ ;

• action de la pesanteur :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_4 g \overrightarrow{z_0} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_4}$ . On a alors  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, \text{pes} \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{\mathcal{M}(G_4, \text{pes} \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} + (\overrightarrow{O_1 G_4} \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = (\overrightarrow{(\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0})} \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = (-L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0} \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = m_4 g L \cos \theta_{10}$ .

- $E$  étant en pivot d'axe  $(O_1, \overrightarrow{x_1})$ , on applique le théorème du moment dynamique en  $O_1$  en projection sur  $\overrightarrow{x_1}$  :  $-L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t) = C_r + m_4 g L \cos \theta_{10} \Leftrightarrow C_r = -m_4 L \cos \theta_{10} (g + \ddot{h}(t))$ .

En réalisant l'application numérique, on a :  $C_r = -60 \times 51,8 \times 10^{-2} \times \cos 54,5 (9,81 + \frac{0,425}{0,5}) \approx -190,5 \text{ Nm}$ .





**Question 5** Calculer le couple  $C_m$  au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte  $\eta = 0,75$  (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

#### Correction

En régime permanent, on a  $\eta = \frac{C_r \omega_r}{C_m \omega_m} = r \frac{C_r}{C_m}$  et  $C_m = \frac{r}{\eta} C_r = \frac{1}{0,75 \times 120} \times 190,5 \approx 2,12 \text{ Nm.}$

**Question 6** Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

#### Correction

Si on en avait la possibilité, il faudrait mettre un capteur de puissance au niveau de la commande (mesure de la vitesse et du couple de commande) puis un capteur de puissance au niveau de la charge (mesure de vitesse et du couple en sortie au niveau du genou). Le rendement peut s'observer en régime permanent en faisant le rapport des puissances. Pour observer une perte de rendement, il est nécessaire que soient modélisées les actions de frottement.

## Validation du dimensionnement du moteur

#### Objectif

Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

**Question 7** Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

#### Correction

$$C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i} = \sqrt{\frac{1}{15} (0,838^2 \times 2 + 0,912^2 \times 2 + 0,838^2 \times 2)} \approx 0,546 \text{ Nm.}$$

## Retour sur l'objectif

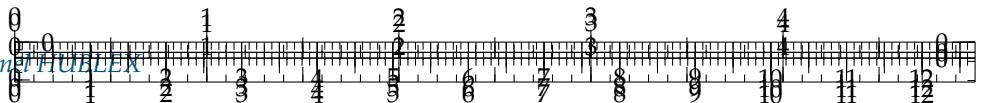
**Question 8** Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.

#### Correction

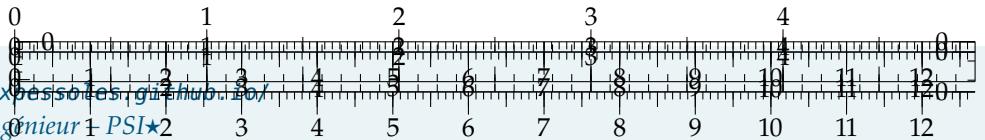
1. Le couple thermiquement équivalent calculé est de 0,546 Nm ce qui est inférieur aux couple admissible par le moteur.
2. La fréquence de rotation à atteindre par le moteur est de  $2200 \text{ tr min}^{-1}$ . Le moteur proposé tourne à  $3120 \text{ tr min}^{-1}$  à vide. On peut donc supposer qu'en charge, il atteindra les  $2200 \text{ tr min}^{-1}$ .

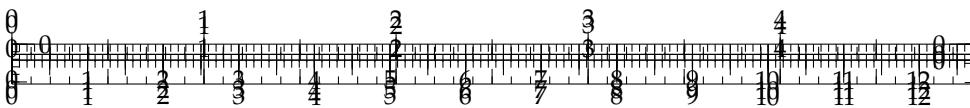
Su ces deux critères le moteur proposé est donc validé.





.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiq



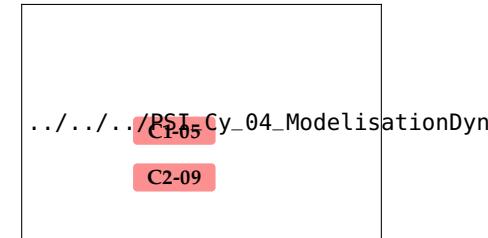
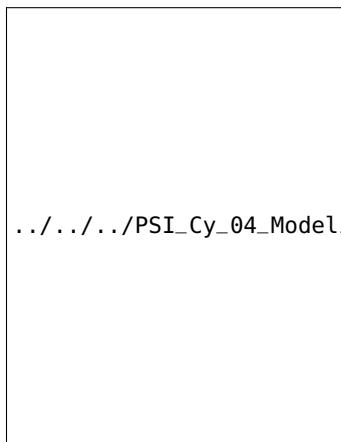


## Application 2

### Éolienne bipale – Sujet

Émilien Durif.

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.

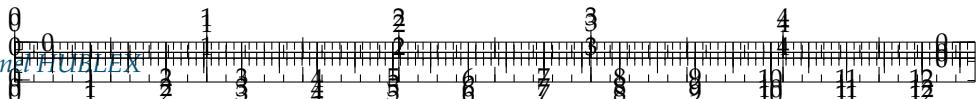


Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides. On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 crée un couple  $C_m$  selon la direction  $\vec{z}_0$ .

L'éolienne est composée de :

- ▶ un support **0**, auquel on associe un repère  $R_0 = (K; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ;
- ▶ une girouette **1** (de centre d'inertie  $K$ ) en liaison pivot d'axe  $(K, \vec{z}_{0,1})$  avec le support **0**. On lui associe un repère  $R_1 = (K; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$  et on pose  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ . On note  $J$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(K, \vec{z}_1)$  :  $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$ ;
- ▶ une hélice **2**, en liaison pivot d'axe  $(K, \vec{x}_{1,2})$  avec **1**. On lui associe un repère  $R_2 = (K; \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  choisi tel que  $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$  et on pose  $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ . On note  $M$





sa masse,  $G$  son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose  $\vec{KG} = a \vec{x}_1$ .  
On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point  $G$  :

$$\bar{\bar{I}}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd 3 assimilé à une masse ponctuelle  $m$  au point  $Q$ . On pose  $\vec{GQ} = -b \vec{z}_2$ .

**Question 1** Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

**Question 2** Déterminer le théorème à utiliser pour relier  $C_m$  aux paramètres dynamiques du problème.

**Question 3** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment cinétique au point  $K$  de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée  $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0$ .

**Question 4** Déterminer le moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$  calculé au point  $K$  de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

**Question 5** Déterminer le moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)}$

**Question 6** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)}$ .

**Question 7** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment dynamique  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$ .

**Question 8** Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon  $\vec{z}_0 : \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$ .

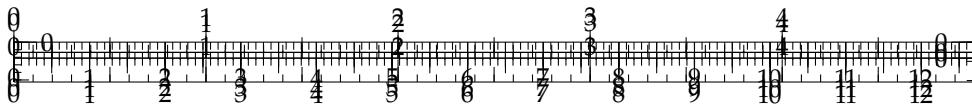
**Question 9** Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ( $\dot{\beta}$ ) constante et dans le cas où l'angle  $\alpha$  est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple  $C_m$  que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modeli

### Éléments de correction

- 1.
2.  $C_m = (\overrightarrow{\delta(K, 1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 3/R_0)}) \cdot \vec{z}_0$
3.  $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J\dot{\alpha}$
4.  $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \sin \beta + M \cdot a^2 \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cos \beta + M \cdot a^2 \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$
5.  $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = m [ab\dot{\beta}\vec{z}_2 + a^2\dot{\alpha}\vec{x}_1 + b^2\dot{\beta}\vec{x}_2 + ba\dot{\alpha}\cos\beta \cdot \vec{x}_1 + b^2\dot{\alpha}\sin\beta\vec{y}_2]$
6.  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = J\ddot{\alpha}$ .
7.  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot{\alpha} [B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + Ma^2] + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \sin \beta [B - C]$ .
8.  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = m [ab (\dot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)]$
9.  $C_m = -mab\dot{\beta}^2 \sin \beta$





## Application 2

### Éolienne bipale – Corrigé

Émilien Durif.

**Question 1** Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

#### Correction

**Question 2** Déterminer le théorème à utiliser pour relier  $C_m$  aux paramètres dynamiques du problème.

.../.../.../PST-Cy\_04\_ModelisationDyn

C2-09

#### Correction

On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ( $E = \{1 + 2 + 3\}$ ) en projection sur l'axe  $(K, \vec{z}_0)$  :  $\overrightarrow{\mathcal{M}(K, \bar{E} \rightarrow E)} \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{\delta(K, E/R_0)} \cdot \vec{z}_0$   
 $\Leftrightarrow C_m = (\overrightarrow{\delta(K, 1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 3/R_0)}) \cdot \vec{z}_0.$

**Question 3** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment cinétique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée  $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0$ .

#### Correction

- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe  $(K, \vec{z}_0)$  :
- $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = (\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \vec{\Omega}(1/0)) \cdot \vec{z}_0 = (\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0) \cdot \vec{z}_0.$

Or on note  $J$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(K, \vec{z})$  soit :  $\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0 = J$ .

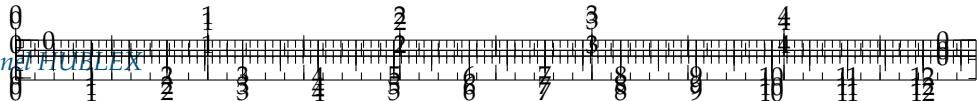
Ainsi :  $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J\dot{\alpha}$ .

#### Remarque

En considérant que  $\bar{\bar{I}}_K(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & J \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ ,  $\bar{\bar{I}}_K(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \begin{pmatrix} -E_1\dot{\alpha} \\ -D_1\dot{\alpha} \\ J\dot{\alpha} \end{pmatrix}$  et  
 $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J\dot{\alpha}$ .

**Question 4** Déterminer le moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$  calculé au point K de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.



**Correction**

- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- On connaît l'opérateur d'inertie en  $G$ , on calcule donc :  $\overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) : \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) = \bar{I}_G(2) \cdot \overrightarrow{\Omega}(2/0)$ .
- On calcule  $\overrightarrow{\Omega}(2/0) : \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} (\cos \beta \vec{z}_2 + \sin \beta \vec{y}_2)$ .
- On calcule  $\overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) : \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$   
 $= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$ .
- On calcule  $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) :$ 
  - $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) = \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{R_c}(2/0) = \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) + a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0)$
  - On calcule  $\vec{V}(G \in 2/0) : \vec{V}(G \in 2/0) = \vec{V}(K \in 2/0) + \overrightarrow{GK} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \vec{0} - a \cdot \vec{x}_1 \wedge (\dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1) = a \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1$
  - On calcule  $a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0) : a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0) = a \cdot \vec{x}_1 \wedge M (a \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1) = M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$
  - On en déduit  $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) : \overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$

**Question 5** Déterminer le moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma}(K, 3/0)$

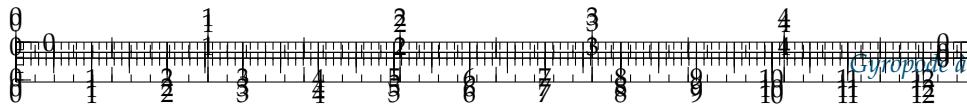
**Correction**

- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi  $\overrightarrow{\sigma}(Q, 3/0) = \vec{0}$ .
- $\overrightarrow{\sigma}(K, 3/0) = \overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \vec{V} (Q \in 3/0) :$ 
  - On calcule  $\overrightarrow{KQ} : \overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2$
  - On calcule  $\vec{V}(Q \in 3/0) : \vec{V}(Q \in 3/0) = \vec{V}(Q \in 3/2) + \vec{V}(Q \in 2/1) + \vec{V}(Q \in 1/0) = \vec{0} + \vec{V}(G \in 2/1) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \vec{V}(G \in 1/0) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \vec{0} + b \cdot \vec{z}_2 \wedge \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + b \cdot \vec{z}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}$
  - On calcule  $\overrightarrow{KQ} \wedge m \vec{V}(Q \in 3/0) :$ 

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KQ} \wedge m \vec{V}(Q \in 3/0) &= m \cdot [a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2] \wedge [b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}] \\ &= m [a \cdot b \cdot \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2] \end{aligned}$$
- $\overrightarrow{\sigma}(K, 3/0) = m [a \cdot b \cdot \dot{\beta} \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2]$

**Question 6** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta}(K, 1/0)$ .



**Correction**

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} - \frac{d}{dt} [z_0]_{R_0} \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

**Question 7** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment dynamique  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$ .

**Correction**

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} - \frac{d}{dt} [z_0]_{R_0} \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$$

Or,  $\vec{z}_{0,1} = \cos \beta \cdot \vec{z}_2 + \sin \beta \cdot \vec{y}_2$ ,

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} &= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \\ &= \dot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] \end{aligned}$$

d'où,

$$\boxed{\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] + 2 \cdot \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta [B - C].}$$

**Question 8** Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon  $\vec{z}_0 : \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$ .

**Correction**

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)} &= m \frac{d[a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cos \beta + a^2 \cdot \dot{\alpha} + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin^2 \beta]}{dt} \\ &= m [a \cdot b \cdot (\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 \cdot (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)] \end{aligned}$$

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisati

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_2 = \cos \beta$$

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_1 = 1$$

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_0 = 0$$

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_1 = 0$$

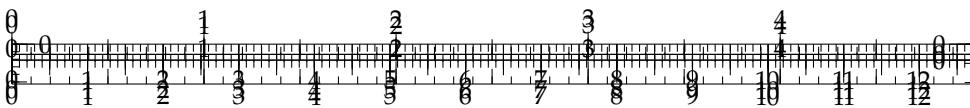
$$\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 = \sin \beta$$

**Correction**

Le théorème du moment dynamique autour de l'axe  $(K, \vec{z}_{0,1})$  donne :  $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta$ .







## Application 3

### Le robot humanoïde Lola – Sujet

Concours Mines Ponts – PSI 2015.

#### Mise en situation

Le développement de robots à forme humaine est en croissance constante depuis quelques dizaines d'années. En robotique, il est difficile d'affirmer que tous les robots remplaçant l'homme dans ses tâches doivent être de forme humaine. Les véhicules autonomes, par exemple, ne sont pas anthropomorphes. Les tâches auxquelles sont destinées les robots définissent leur forme idéale. Si nous souhaitons un jour que les robots remplacent l'homme dans ses tâches ennuyeuses, ils devront s'intégrer au mieux à notre société, à notre environnement et à notre ergonomie.

Les dimensions d'une maison et la hauteur des meubles sont adaptées à notre forme humaine. L'avantage des robots humanoïdes devient alors économique : il n'est pas indispensable de modifier l'environnement quotidien pour les utiliser.

Le robot humanoïde LOLA, développé par l'Université de Munich, est un robot de forme humaine conçu pour un mode de marche rapide. LOLA possède une structure à 25 degrés de liberté lui permettant une flexibilité accrue. Chaque jambe possède 7 degrés de liberté, le haut du corps 8 et la tête 3. Le robot est équipé d'une caméra stéréoscopique haute définition afin de percevoir son environnement, d'une centrale inertuelle équipée de 3 gyroscopes et de 3 accéléromètres. Chaque articulation possède un codeur angulaire absolu et chaque pied est muni d'un capteur d'effort 6 axes permettant d'obtenir l'effort de contact avec le sol. Les caractéristiques techniques de LOLA sont données dans le tableau suivant.

#### Stabilité du robot

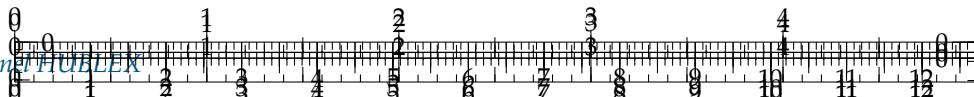
Par définition, le robot humanoïde bipède s'appuie sur ses deux jambes. Comme tout système de solides en équilibre statique, LOLA est à l'équilibre si la projection de son centre de gravité sur le sol est contenu dans le polygone de sustentation qui est tracé en rouge autour de ses deux pieds sur la figure suivante. Lorsque le robot marche, il y a une phase où il n'est en appui que sur un seul pied. Dans ce cas, le polygone de sustentation est réduit à un seul pied.

C1-05	F2-09	.../.../.../PSI_Cy_04_ModelisationDyn
-------	-------	---------------------------------------

Caractéristiques	Valeurs
Hauteur	180 cm
Masse	55 kg
Nombre de degrés de liberté	25
Vitesse de marche	5 km h <sup>-1</sup> maxi
Hauteur du centre de gravité	105 cm

.../.../.../PSI_Cy_04_Modelisation
------------------------------------





.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisation

Dynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinétiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_Activation\_03\_Lola

Exigence 1.1 : Le robot doit pouvoir attendre les performances cibles

1.1.4 La longueur d'une foulée est de 150 cm au maximum

1.1.3 Le robot peut accélérer jusqu'à  $1,39 \text{ m s}^{-2}$

Le contact du pied sur le sol est modélisé sans frottement sur la figure ci-contre.

## Modélisation de l'effort de contact entre le sol et le robot

Sous la semelle du robot, la pression de contact avec le sol est supposée répartie de manière uniforme transversalement (suivant la direction  $\vec{x}_0$ ). Le problème se ramène donc à une répartition linéaire de pression sur les deux segments de contact  $[O_S; A_S]$  et  $[B_S; C_S]$ . En chaque point  $M$  (d'ordonnée  $\vec{y}$ ) de ces segments, la densité d'efforts de contact est  $p(M)\vec{z}_0$ , avec  $p(M)$  en  $\text{N m}^{-2}$ . On notera que si le robot n'est pas équipé de semelles magnétiques ou adhésives, on a  $p(M) > 0$ . Ainsi, en notant  $b$  la largeur de la semelle suivant  $\vec{x}_0$  et  $\Sigma = [O_S, A_S] \cup [B_S, C_S]$ , le modèle global d'action mécanique de contact du sol sur le pied peut être donné par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} = b \int_{M \in \Sigma} p(M) \vec{z}_0 dy \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z}_0 dy \end{array} \right\}_{O_S}.$$

**Question 1** Montrer que  $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$  est un glisseur.

Soit  $H_S$  le point de la droite  $(O_S, \vec{y}_0)$  tel que  $\overrightarrow{\mathcal{M}(H_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \vec{0}$ , on notera  $\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{H_S} \vec{y}_0$ . Ce point est fondamental en robotique humanoïde, il prend le nom de Zero Moment Point (ZMP) : de l'anglais « point de moment nul ».

**Question 2** Montrer que  $H_S \in [O_S; C_S]$ , c'est à-dire qu'il est situé sous le pied du robot.

**Question 3** Donner la forme du torseur  $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$  dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à-dire que la densité d'efforts de contact est  $p(M)\vec{z}_0 + t(M)\vec{y}_0$ ). Montrer que les résultats des questions 1 et 2 sont inchangés.

## Établissement de la condition de non-basculement

Considérons le robot en marche avec le torse ayant un mouvement de translation vers l'avant suivant  $+\vec{y}_0$ . Le robot est toujours dans la phase d'appui d'un seul pied sur le sol, via une des deux jambes notées (2).

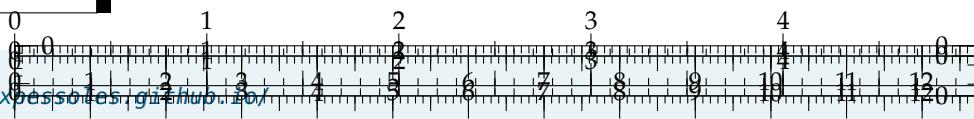
Données et paramètres :

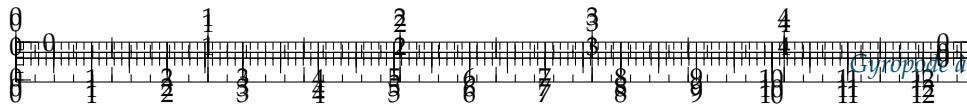
► Torse (1) :

- masse  $m_1$ , accélération de la pesanteur :  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$  avec  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;
- centre de gravité :  $G$ , tel que  $\overrightarrow{O_S G} = Y_G(t)\vec{y}_0 + Z_G(t)\vec{z}_0$ ;
- le torse est supposé en mouvement de translation rectiligne, de direction  $\vec{y}_0$  par rapport au sol, on a :  $\{\mathcal{V}(1/\text{Sol})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \frac{dY_G}{dt}\vec{y}_0 \end{array} \right\}_G$ .

► Jambe avec les pieds (2) :

- masses et inerties négligeables dans cette phase;





- le pied d'appui est sans mouvement par rapport au sol;
- l'action mécanique du sol sur la semelle du pied est modélisée par le glisseur :  $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{H_S}$  où :  $H_S$  est le

ZMP, point mis en évidence à la question 2 tel que  $\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{H_S} \overrightarrow{y_0}$ ,  
 $\overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} = N_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \overrightarrow{z_0} + T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \overrightarrow{y_0}$ , avec à la limite du glissement  $|T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}| = \mu N_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}$  où  $\mu$  est le facteur de frottement du contact sol / semelle.

**Question 4** En appliquant le théorème du moment dynamique, puis le théorème de la résultante dynamique au système {1+2}, montrer que la condition de stabilité (non basculement) s'écrit :  $Y_{H_S} = Y_G - \frac{Z_G}{g} \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$ .

Conformément au résultat de la question 2, le calculateur du robot contrôle en permanence la position du point  $H_S$  (ZMP) : s'il est positionné à l'intérieur du segment  $[O_S; C_S]$ , le robot ne bascule pas. On appelle foulée, la longueur entre deux emplacements successifs d'appui du même pied. Lors du premier pas, le centre de gravité se déplace de sorte que  $Y_G \in \left[ -\frac{\text{foulée}}{4}, +\frac{\text{foulée}}{4} \right]$ , car pour une accélération constante, les deux pas qui constituent une foulée sont de même longueur.

Le cahier des charges stipule qu'à partir de la station immobile, le robot doit atteindre la vitesse cible de  $5 \text{ kmh}^{-1}$  en une seconde, avec une accélération constante du centre de gravité  $\frac{d^2 Y_G}{dt^2} = 1,39 \text{ m s}^{-2}$ . On rappelle que  $Z_G = 105 \text{ cm}$ .

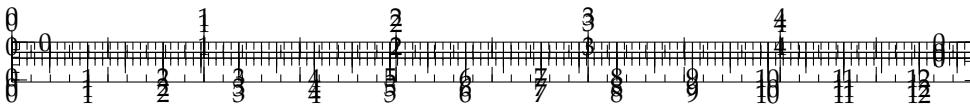
**Question 5** Sachant que la longueur de la semelle du robot  $[O_S; C_S]$  est  $L = 300 \text{ mm}$ , déterminez la longueur de la première foulée du robot qui garantit la condition de non-basculement. Est-ce compatible avec le cahier des charges ?

**Question 6** Dans le cas d'un sol relativement glissant, avec un facteur de frottement du contact sol/semelle  $\mu = 0,1$ , quelle accélération maximale  $\left[ \frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \right]_{\max}$  le robot peut-il avoir ? Est-ce compatible avec le cahier des charges pour la phase de démarrage ?

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisati







## Application 3

### Le robot humanoïde Lola – Corrigé

Concours Mines Ponts – PSI 2015.

#### Mise en situation

#### Stabilité du robot

##### Objectif

L'objectif de cette partie est de trouver à quelle condition le maintien du contact sur le sol est possible lorsque le robot marche et si l'accélération est compatible avec le cahier des charges, dont un extrait est donné ci-après.

C1-05

.../.../.../PSI<sup>09</sup>Cy\_04\_ModelisationDyn

#### Modélisation de l'effort de contact entre le sol et le robot

**Question 1** Montrer que  $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$  est un glisseur.

##### Correction

L'automoment est un des invariants du torseur :  $\forall P, \overrightarrow{R}(\text{sol} \rightarrow \text{pied}) \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}(O_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \text{cst}$ . Dans le cas d'un glisseur, il existe un point tel que le moment est nul. L'automoment est donc nul en tous points de l'espace.

Dans notre cas,  $b \int_{M \in \Sigma} p(M) \vec{z}_0 dy \cdot b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z}_0 dy = 0$  (permutation circulaire du produit mixte).

**Question 2** Montrer que  $H_S \in [O_S; C_S]$ , c'est à-dire qu'il est situé sous le pied du robot.

##### Correction

On cherche  $H_S$  tel que  $\overrightarrow{\mathcal{M}(H_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \vec{0}$ .

On a donc  $b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S M} \wedge p(M) \vec{z}_0 dy = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{H_S O_S} + \overrightarrow{O_S M}) \wedge p(M) \vec{z}_0 dy = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S O_S} \wedge p(M) \vec{z}_0 dy + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z}_0 dy = \vec{0}$$

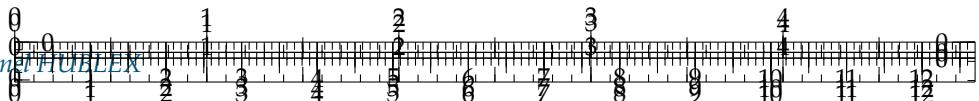
$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} -Y_{H_S} \vec{y}_0 \wedge p(M) \vec{z}_0 dy + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z}_0 dy = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy \vec{x}_0 + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z}_0 dy = \vec{0}$$

Projetons cette expression sur  $\vec{x}_0$  :  $-Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 dy = 0$

$$\Leftrightarrow -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} p(M) \vec{y}_0 \cdot \overrightarrow{O_S M} dy = 0$$





$$\Leftrightarrow -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} Y_M p(M) dy = 0 \text{ soit } Y_{H_S} = \frac{\int_{M \in \Sigma} Y_M p(M) dy}{\int_{M \in \Sigma} p(M) dy}.$$

On a, en raison du parmaétrage,  $Y_M > 0$ . Nécessairement,  $H_S$  est donc à droite du point  $O_S$ .

De même, on a donc  $b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{H_S C_S} + \overrightarrow{C_S M}) \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S C_S} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{C_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

On a  $\overrightarrow{C_S M} = -\lambda \overrightarrow{y_0}$  avec  $\lambda > 0$  ( $M \in \Sigma$ ) et  $\overrightarrow{H_S C_S} = \mu \overrightarrow{y}$ . En projetant de plus suivant  $\overrightarrow{x_0}$ , on

a :

$$\left( \int_{M \in \Sigma} \mu \overrightarrow{y_0} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} -\lambda \overrightarrow{y_0} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy \right) \overrightarrow{x_0} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{M \in \Sigma} \mu p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} -\lambda p(M) dy = 0 \text{ soit } \mu = \frac{\int_{M \in \Sigma} \lambda p(M) dy}{\int_{M \in \Sigma} p(M) dy}.$$

$\mu$  est donc nécessairement positif et  $H_S$  est à gauche de  $C_S$ .

Au final,  $H_S$  appartient à  $[O_S C_S]$ .

**Question 3** Donner la forme du torseur  $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$  dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à dire que la densité d'efforts de contact est  $p(M)\overrightarrow{z_0} + t(M)\overrightarrow{y_0}$ ). Montrer que les résultats des questions 1 et 2 sont inchangés.

#### Correction

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\} &= \left\{ \begin{array}{l} b \int_{M \in \Sigma} (p(M) \overrightarrow{z_0} + t(M) \overrightarrow{y_0}) dy \\ b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy \end{array} \right\}_{O_S} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} b \int_{M \in \Sigma} p(M) \overrightarrow{z_0} dy \\ b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy \end{array} \right\}_{O_S} + \left\{ \begin{array}{l} b \int_{M \in \Sigma} t(M) \overrightarrow{y_0} dy \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_S}. \end{aligned}$$

Le premier torseur vérifie bien les deux premières questions. Le second torseur est bien un glisseur (automoment nul).

(...)

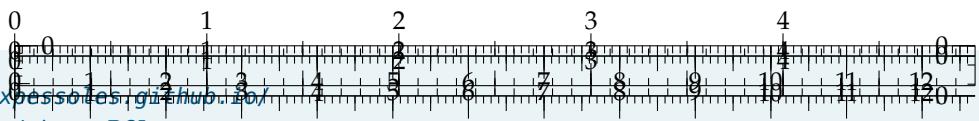
## Établissement de la condition de non-basculement

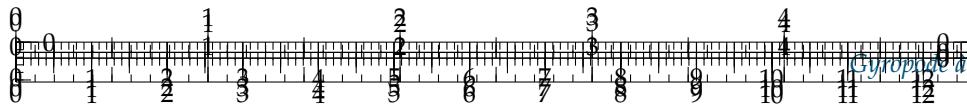
**Question 4** En appliquant le théorème du moment dynamique, puis le théorème de la résultante dynamique au système {1+2}, montrer que la condition de stabilité (non basculement) s'écrit :  $Y_{H_S} = Y_G - \frac{Z_G}{g} \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$ .

#### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiques

- On isole 1+2.
- Bilan des actions mécaniques :
  - action de la pesanteur;
  - action du sol.
- On applique le TMD au point  $H_S$  en projection sur  $\overrightarrow{y_0}$ .





- $\frac{\delta(1, 0/G)}{R_d(1/0)} = \vec{0}$  (mouvement de translation).  $\delta(1, 0/H_S) = \delta(1, 0/G) + \vec{H_S G} \wedge$   
 $= m_1 (-Y_{H_S} \vec{y}_0 + Y_G(t) \vec{y}_0 + Z_G(t) \vec{z}_0) \wedge \vec{Y_G} \vec{y}_0 = -m_1 Z_G(t) \vec{Y_G} \vec{x}_0.$
- Déplacement de l'action de la pesanteur :  $(-Y_{H_S} \vec{y}_0 + Y_G(t) \vec{y}_0 + Z_G(t) \vec{z}_0) \wedge -m_1 g \vec{z}_0$   
 $= -m_1 g (-Y_{H_S} \vec{x}_0 + Y_G(t) \vec{x}_0).$
- Au final,  $-m_1 g (-Y_{H_S} + Y_G(t)) = -m_1 Z_G(t) \vec{Y_G} \Leftrightarrow g (-Y_{H_S} + Y_G(t)) = Z_G(t) \vec{Y_G}$ . On a donc  $g Y_G(t) - Z_G(t) \vec{Y_G} = g Y_{H_S}$  et  $Y_{H_S} = \frac{g Y_G(t) - Z_G(t) \vec{Y_G}}{g}$ .

En faisant le TMD au point  $H_S$  il est inutile de faire le TRD.

**Question 5** Sachant que la longueur de la semelle du robot  $[O_S; C_S]$  est  $L = 300$  mm, déterminez la longueur de la première foulée du robot qui garantit la condition de non-basculement. Est-ce compatible avec le cahier des charges ?

#### Correction

Le cas limite de basculement est lorsque  $H_S = C_S$  et donc  $Y_{H_S} = L$ .

On a donc  $Y_G(t) = Y_{H_S} + \frac{Z_G(t) \vec{Y_G}}{g} = 300 + \frac{1050 \times 1390}{9810} = 449$  mm.

La foulée est donnée par  $4Y_G \approx 1,795$  m < 1,50 m. L'exigence 1.1.4 n'est pas respectée.

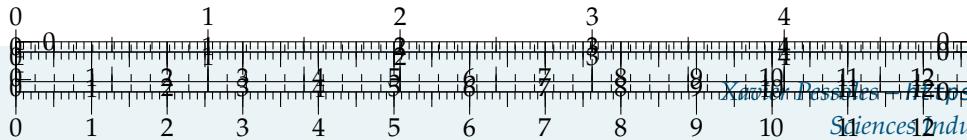
**Question 6** Dans le cas d'un sol relativement glissant, avec un facteur de frottement du contact sol/semelle  $\mu = 0,1$ , quelle accélération maximale  $\left[ \frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \right]_{\max}$  le robot peut-il avoir ? Est-ce compatible avec le cahier des charges pour la phase de démarrage ?

#### Correction

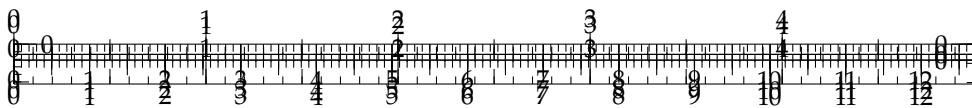
On isole (1+2) et on réalise le TRD :

- projection sur  $\vec{y}_0$  :  $b \int_{M \in \Sigma} t(M) dy = m_1 \frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2}$ ;
- projection sur  $\vec{z}_0$  :  $b \int_{M \in \Sigma} p(M) dy - m_1 g = 0$ .

À la limite du glissement, on a  $b \int_{M \in \Sigma} t(M) dy = \mu b \int_{M \in \Sigma} p(M) dy$  soit  $\left[ \frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \right]_{\max} = \mu g = 0,1 \times 9,81 = 0,981 \text{ m s}^{-2} < 1,39 \text{ m s}^{-2}$ . L'exigence 1.1.3 n'est pas respectée.







## Application 4

### Régulateur centrifuge – Sujet

C. Gamelon & P. Dubois.

On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor ( $S_1$ ) et la masselotte ( $S_2$ ) représentés schématiquement ci-contre.

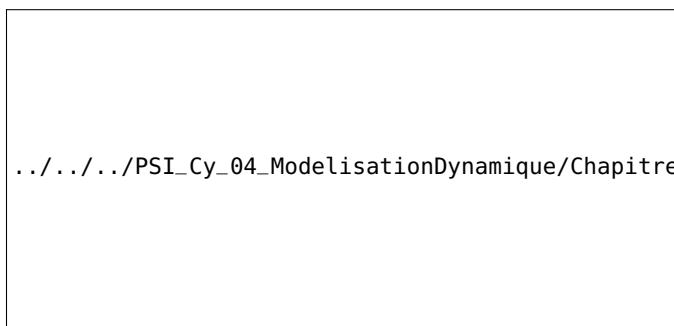
C1-05

C2-09

- ( $S_1$ ) est en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$  avec ( $S_0$ ).
- ( $S_2$ ) est en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{x}_1)$  avec ( $S_1$ ).
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$ .
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$ .
- $\overrightarrow{O_0G_1} = h_1 \vec{z}_0$ .
- $\overrightarrow{O_0O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$ .
- $\overrightarrow{O_2G_2} = L_2 \vec{y}_2$ .

Pour chacun des solides  $S_i$  on note  $m_i$  la masse,  $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$ .

On note  $E = \{S_1, S_2\}$ . Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelis

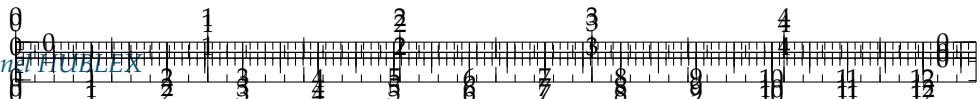
Dynamiques/Cy\_04\_02\_Applica

**Question 1** Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Afin de moins alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$ .

**Question 2** Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.





**Question 3** Déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$  en  $O_1$  et le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$  en  $O_2$ .

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$ .

**Question 5** Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$  en  $O_2$ ?

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_Application\_01\_Req

**Question 6** Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

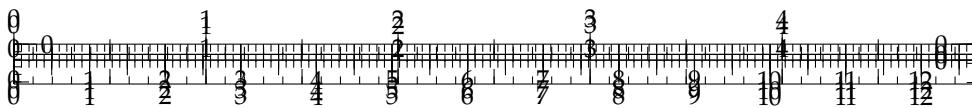
Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre  $S_1$  et  $S_2$

(couple maximal 0,46 Nm), une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm)

**Question 7** Commenter ces résultats.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_Application\_01\_Req





## Application 4

### Régulateur centrifuge – Corrigé

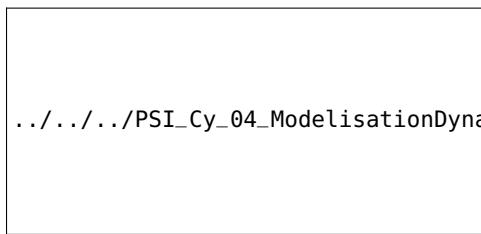
C. Gamelon & P. Dubois.

On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor ( $S_1$ ) et la masselotte ( $S_2$ ) représentés schématiquement ci-contre.

- ( $S_1$ ) est en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$  avec ( $S_0$ ).
- ( $S_2$ ) est en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{x}_1)$  avec ( $S_1$ ).
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$ .
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$ .
- $\overrightarrow{O_0G_1} = h_1 \vec{z}_0$ .
- $\overrightarrow{O_0O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$ .
- $\overrightarrow{O_2G_2} = L_2 \vec{y}_2$ .

Pour chacun des solides  $S_i$  on note  $m_i$  la masse,  $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$ .

On note  $E = \{S_1, S_2\}$ . Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelis

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelis

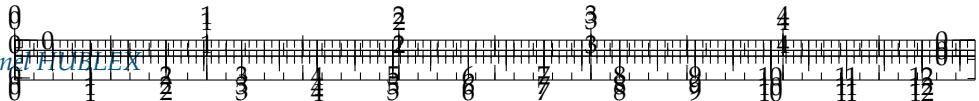
**Question 1** Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

#### Correction

Le solide 1 est axisymétrique. En tout point de l'axe du solide, la matrice d'inertie sera diagonale. On a donc  $I_{O_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}$ .

Le solide 2 admet le plan  $(\vec{y}_2, \vec{z}_2)$  comme plan de symétrie. Les produits d'inertie dépendant





de  $x$  sont nuls. On a donc  $I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}$ .

Afin de moins alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$ .

**Question 2** Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

**Question 3** Déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$  en  $O_1$  et le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$  en  $O_2$ .

### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiques

#### Mouvement du solide 1/0

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1}.$$

$O_1$  est un point fixe dans  $R_0$ .

$$\{\mathcal{C}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ I_{O_1}(S_1) \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1} \text{ et } \{\mathcal{D}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1}.$$

#### Mouvement du solide 2/0

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_2/R_0)\} = \left\{ \frac{\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2}{V(G_2, S_2/R_0)} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 \\ L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 L_1 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_2}.$$

$$\overrightarrow{V(G_2, S_2/R_0)} = \overrightarrow{V(G_2, S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(G_2, S_1/R_0)}$$

$$= \left( \underbrace{\overrightarrow{V(O_2, S_2/S_1)} + \overrightarrow{G_2 O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}}_{\vec{0}} \right) + \left( \underbrace{\overrightarrow{V(O_0, S_1/R_0)} + \overrightarrow{G_2 O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)}}_{\vec{0}} \right)$$

$$= (-L_2 \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) + (-(\vec{d}_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1 + L_2 \vec{y}_2) \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_1) = L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1$$

$G_2$  est le centre de gravité de  $S_2$ .

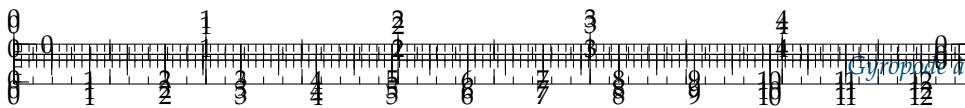
$$\{\mathcal{C}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_2 (L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1) \\ I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 = \dot{\theta}_1 (\cos \theta_2 \vec{z}_2 + \sin \theta_2 \vec{y}_2) + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2$$

$$I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} =$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \dot{\theta}_2 \\ B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$





$$\begin{aligned} \{\mathcal{D}(S_2/R_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, S_2/R_0)} \\ \left[ \frac{d}{dt} \left( I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right) \right]_{R_0} \end{array} \right\}_{G_2} \\ \overrightarrow{\Gamma(G_2, S_2/R_0)} &= \left[ \frac{d \left( L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 \right)}{dt} \right]_{R_0} \\ &= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 + L_2 \dot{\theta}_2 \left( \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \right) - \ddot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1 (-L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \vec{x}_1 - \\ &\quad \dot{\theta}_1^2 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1 \\ &= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{y}_2 + (2L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \ddot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2)) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1^2 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1 \\ \left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} &= \dots \\ &= \begin{pmatrix} A_2 \ddot{\theta}_2 \\ B_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + B_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -D_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} \\ &+ A_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 \quad + \quad (B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) \left( -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \right) \quad + \\ &(-D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) \left( \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \right) \\ \left[ \frac{d \vec{z}_2}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d \vec{z}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \\ \left[ \frac{d \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \\ \left[ \frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_1} = \left[ \frac{d \vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 \end{aligned}$$

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$ .

#### Correction

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2 &= \left( \overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2 \\ &= \left( \left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2 \\ \left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} \cdot \vec{x}_2 + \\ \left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0} & \end{aligned}$$

**Question 5** Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$  en  $O_2$  ?

**Question 6** Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre  $S_1$  et  $S_2$  (couple maximal 0,46 Nm), une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

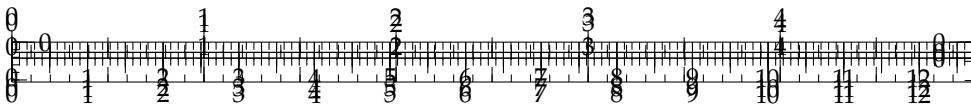
**Question 7** Commenter ces résultats.



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn  
.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn





## Application 5

# Conducteur virtuel pour véhicule automobile – Sujet

Centrale Supélec PSI 2014.

L'accroissement de la circulation automobile dans les grandes agglomérations menace de saturation leur réseau d'autoroutes. Une des solutions consiste à augmenter les flux en automatisant les voitures sur ces dernières. Après une évaluation du gain en terme de flux d'automobiles que peut apporter ce concept, l'étude portera sur le système de guidage automatique latéral d'une automobile sur une autoroute dite « intelligente ».

C1-05

C2-09

### Objectif

L'objet de cette partie est de déterminer un modèle mécanique du véhicule en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au véhicule. L'idée est d'utiliser un modèle mécanique relativement simple, associé à une commande très robuste.

Une approche simplifiée permettant d'aborder le problème consiste à adopter un modèle dit « bicyclette », représenté sur la figure suivante, qui assimile le comportement du véhicule à celui d'une bicyclette :

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelis...

- ▶ le train avant directeur se réduit à une seule roue (12) sur laquelle s'appliquent les actions exercées sur les deux roues avant (1) et (2) du véhicule, de même la roue arrière (34) supporte les actions exercées par l'essieu arrière portant les roues (3) et (4), les pneumatiques avant et arrière ont les mêmes caractéristiques, en particulier le même coefficient de dérive (celui-ci sera défini plus loin);
- ▶ le modèle choisi est un modèle à 2 degrés de liberté : l'angle de lacet  $\psi(t) = (\vec{X}_g, \vec{X}_L)$  et l'angle d'attitude  $\alpha(t) = (\vec{X}_L, \vec{U})$ . La rotation de chaque roue autour de son axe n'est pas prise en compte;
- ▶ on notera que l'angle de braquage des roues  $\beta(t) = (\vec{X}_L, \vec{X}_W)$  avant est imposé au moyen d'un asservissement qui ne sera pas étudié dans le cadre de ce problème;
- ▶ les roues ont une masse supposée négligeable.

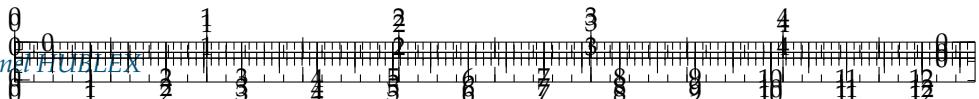
Cette modélisation ne prend pas en compte les mouvements suivants : tangage (rotation autour de  $\vec{Y}_L$ ) et roulis (rotation autour de  $\vec{X}_L$ ).

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn...

Les différents repères sont les suivants :

- ▶ repère galiléen :  $\mathcal{R}_g(O; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$ ,  $O_R$  est lié à la route,  $\Pi_R = (\vec{X}_g, \vec{Y}_g)$  plan fixe par rapport à la route;
- ▶ repère intermédiaire :  $\mathcal{R}_1(O_1; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$ ,  $\overrightarrow{O_R O_1} = a \vec{Y}_g$ ;
- ▶ repère intermédiaire :  $\mathcal{R}_0(O; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$ ,  $O$  lié au châssis et  $\overrightarrow{O_1 O} = b \vec{X}_L$ ,  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_0/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$ ,  $\vec{V}(O, \mathcal{R}_0/\mathcal{R}_g) = V \vec{U}$  avec  $\overrightarrow{O_R O} \cdot \vec{Z}_g = 0$  et  $V$  constante





positive;

- repère lacet  $\mathcal{R}_0 \left( G; \vec{X}_L, \vec{Y}_L, \vec{Z}_L \right)$ ,  $\vec{OG} = h\vec{Z}_g$  avec  $G$  centre d'inertie lié du châssis lié au véhicule,  $\vec{Z}_L = \vec{Z}_g$  et  $(\vec{Y}_g, \vec{Y}_L) = (\vec{X}_g, \vec{X}_L) = \psi(t)$  angle de lacet,  $h$  constate positive;
- repère lié à la roue  $\mathcal{R}_W \left( A_i; \vec{X}_W, \vec{Y}_W, \vec{Z}_W \right)$ ,  $A_i$  centre de la roue  $R_i$  (assimilée à un disque),  $\vec{Z}_W = \vec{Z}_L$  avec  $\vec{OA}_{12} = l_1 \vec{X}_L$  et  $\vec{OA}_{34} = -l_2 \vec{X}_L$ ,  $(\vec{Y}_L, \vec{Y}_W) = (\vec{X}_L, \vec{X}_W) = \beta(t)$  angle de braquage.

On appelle :

- $\alpha(t) = (\vec{X}_L, \vec{U})$  : angle d'attitude,
- $\psi(t) = (\vec{X}_G, \vec{X}_L)$  : angle de lacet,
- $\beta(t) = (\vec{X}_L, \vec{X}_W)$  : angle de braquage de la roue avant.

Le torseur cinématique du mouvement du véhicule (VH) par rapport à  $\mathcal{R}_g$ , au point

$$\text{O, est noté : } \{ \mathcal{V} (\text{VH}/\mathcal{R}_g) \} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega (\text{VH}/\mathcal{R}_g)} \\ \overrightarrow{V(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g)} = V\vec{U} \end{array} \right\}_O.$$

.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisation

La roue munie d'un pneumatique se comporte différemment d'une roue rigide au niveau du contact avec le sol. On adoptera le modèle représenté sur la figure ci-contre.

Le contact roue/sol pour chaque roue est modélisé par le torseur d'efforts suivant :

$$\{ \mathcal{T} (\text{Sol} \rightarrow \mathcal{R}_i) \} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Sol} \rightarrow \mathcal{R}_i)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M_i, \text{Sol} \rightarrow \mathcal{R}_i)} \end{array} \right\}_{M_i} \text{ avec } i \in \{12, 34\} \text{ avec } \overrightarrow{OM_{12}} = \ell_1 \vec{X}_L - R\vec{Z}_L \text{ et } \overrightarrow{OM_{34}} = -\ell_2 \vec{X}_L - R\vec{Z}_L.$$

L'angle de dérive d'un pneumatique est défini par :  $\delta_i = (\vec{X}_W, \overrightarrow{V(M_i/\mathcal{R}_g)})$ . Si  $D$  désigne le coefficient de dérive du pneumatique, on admettra qu'on peut écrire  $Y_i = -D\delta_i$ , soit ici  $Y_{12} = -2D\delta_{12}$  et  $Y_{34} = -2D\delta_{34}$ . Comme la vitesse du véhicule est supposée constante et la roue arrière n'est pas motrice, on peut considérer :  $X_{12} = 0$  et  $X_{34} = 0$ . La matrice d'inertie du véhicule de masse  $M$ , dans le repère  $\mathcal{R}_L$ , est de la

forme :  $I_G (\text{VH}) = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$  Remarque : le véhicule comprend la caisse, les roues, et sera modélisé dans la mise en équation comme un solide indéformable.

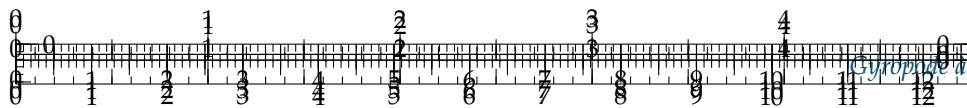
## Modélisation du comportement dynamique du véhicule

**Question 1** Déterminer les composantes dans le repère  $\mathcal{R}_L$  du moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g)}$  au point O, du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_g$ , en fonction de  $\dot{\psi}, \alpha, h, V$  et des caractéristiques inertielles.

**Question 2** Déterminer les composantes dans le repère  $\mathcal{R}_L$  du moment dynamique  $\overrightarrow{\delta(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g)}$  au point O, du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_g$ , en fonction de  $\dot{\psi}, \ddot{\psi}, \dot{\alpha}, \alpha, h, V$  et des caractéristiques inertielles.

**Question 3** On note  $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)}$  le vecteur accélération de appartenant à (VH) dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_G$ . Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{Y}_L$  en fonction de  $\dot{\psi}, \ddot{\alpha}, \alpha, V$ . Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par  $\alpha = 0, \psi = 0$  et  $\beta = 0$ .





**Question 4** En admettant que l'angle de dérive de la roue avant s'écrit :  $\delta_{12} \simeq \alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V} \dot{\psi}$

et celui de la roue arrière  $\delta_{34} \simeq \alpha - \frac{\ell_2}{V} \dot{\psi}$ , en déduire l'expression de  $\overrightarrow{R}(\overline{\text{VH}} \rightarrow \text{VH}) \cdot \vec{Y_L}$ .

Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par  $\alpha = 0$ ,  $\psi = 0$  et  $\beta = 0$ .

**Question 5** Montrer que l'on obtient le système d'équations différentielles suivant en indiquant clairement (point, vecteur unitaire, résultante ou moment, ...) à quelle équation scalaire issue du PFD correspond chaque relation :

$$\begin{cases} \left( MV + \frac{2D(\ell_1 - \ell_2)}{V} \right) \dot{\psi} + MV\dot{\alpha} + 4D\alpha = 2D\beta \\ C\ddot{\psi} + \frac{2D(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{V} \dot{\psi} + 2D(\ell_1 - \ell_2)\alpha = 2D\ell_1\beta \end{cases}.$$

Avec les valeurs numériques :  $\ell_1 = 1 \text{ m}$ ,  $\ell_2 = 1,5 \text{ m}$ ,  $D = 21\,000 \text{ N rad}^{-1}$ ,  $C = 3100 \text{ kg m}^2$ ,  $M = 1500 \text{ kg}$ ,  $V = 15 \text{ m s}^{-1}$ , on obtient le système d'équations différentielles suivant, permettant de décrire l'évolution du véhicule (données en unités S.I.) :

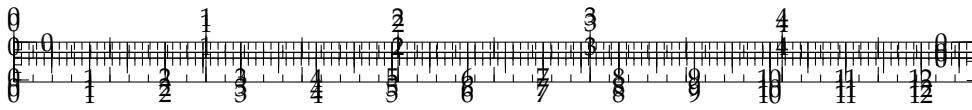
$$\begin{cases} 211\dot{\psi}(t) + 225\dot{\alpha}(t) + 840\alpha(t) = 420\beta(t) \\ 31\ddot{\psi}(t) + 91\dot{\psi}(t) - 210\alpha(t) = 420\beta(t) \end{cases}.$$

**Question 6** En supposant que les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression numérique de la fonction de transfert  $H_2(p)$  entre l'angle de lacet  $\psi(p)$  et l'angle de braquage  $\beta(p)$  de la roue avant :  $H_2(p) = \frac{\psi(p)}{\beta(p)}$ . Discuter de la stabilité de ce modèle.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisati







## Application 5

# Conducteur virtuel pour véhicule automobile – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2014.

### Objectif

L'objet de cette partie est de déterminer un modèle mécanique du véhicule en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au véhicule. L'idée est d'utiliser un modèle mécanique relativement simple, associé à une commande très robuste.

C1-05

C2-09

### Modélisation du comportement dynamique du véhicule

**Question 1** Déterminer les composantes dans le repère  $\mathcal{R}_L$  du moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}$  au point  $O$ , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_g$ , en fonction de  $\dot{\psi}$ ,  $\alpha$ ,  $h$ ,  $V$  et des caractéristiques inertielles.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelis

### Correction

La matrice d'inertie étant donnée en  $G$ , commençons par calculer  $\overrightarrow{\sigma(G, VH/\mathcal{R}_g)} = I_G(VH)\overrightarrow{\Omega(VH/\mathcal{R}_g)} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \dot{\psi} \vec{Z}_g = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$ .

Il faut alors déplacer le moment cinétique. On aura pour cela besoin de  $\overrightarrow{V(G, VH/\mathcal{R}_g)} = \overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega(VH/\mathcal{R}_g)} = \vec{V}\vec{U} - h\vec{Z}_g \wedge \dot{\psi} \vec{Z}_g = \vec{V}\vec{U}$ .

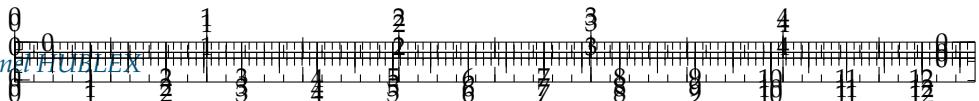
Au final,  $\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)} = \overrightarrow{\sigma(G, VH/\mathcal{R}_g)} + \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{V}\vec{U} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + h\vec{Z}_g \wedge M\vec{V}\vec{U} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV\vec{V} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV(\cos\alpha\vec{Y}_L - \sin\alpha\vec{X}_L) = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} - hMV\sin\alpha \\ hMV\cos\alpha \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$ .

– Je note  $\vec{V}$  le vecteur tel que  $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{Z}_L)$  est une base. –

**Question 2** Déterminer les composantes dans le repère  $\mathcal{R}_L$  du moment dynamique  $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)}$  au point  $O$ , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_g$ , en fonction de  $\dot{\psi}$ ,  $\ddot{\psi}$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\alpha$ ,  $h$ ,  $V$  et des caractéristiques inertielles.

### Correction





On a en un point quelconque  $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)} = \left[ \frac{d\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} \wedge \overrightarrow{MV(G, VH/\mathcal{R}_g)}.$

D'une part,  $\left[ \frac{d\vec{X}_L}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = \dot{\psi} \vec{Y}_L$  et  $\left[ \frac{d\vec{Y}_L}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = -\dot{\psi} \vec{X}_L$ . On a donc  $\left[ \frac{d\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = \begin{pmatrix} -E\ddot{\psi} - \dot{\alpha}hMV \cos \alpha - \dot{\psi}(hMV \cos \alpha) \\ -\dot{\alpha}hMV \sin \alpha + \dot{\psi}(-E\ddot{\psi} - hMV \sin \alpha) \\ C\ddot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$ .

D'autre part,  $\overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} \wedge \overrightarrow{MV(G, VH/\mathcal{R}_g)} = V\vec{U} \wedge MV\vec{U} = \vec{0}$ .

Au final,  $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)} = \begin{pmatrix} -E\ddot{\psi} - (\dot{\alpha} + \dot{\psi})(hMV \cos \alpha) \\ -E\ddot{\psi}^2 - (\dot{\alpha} + \dot{\psi})hMV \sin \alpha \\ C\ddot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$ .

**Question 3** On note  $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)}$  le vecteur accélération de appartenant à (VH) dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_G$ . Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{Y}_L$  en fonction de  $\dot{\psi}, \dot{\alpha}, \alpha, V$ . Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par  $\alpha = 0, \psi = 0$  et  $\beta = 0$ .

#### Correction

On a vu que  $\overrightarrow{V(G, VH/\mathcal{R}_g)} = V\vec{U}$ , donc  $\overrightarrow{\Gamma(G, VH/\mathcal{R}_g)} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})\vec{V} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})(\cos \alpha \vec{Y}_L - \sin \alpha \vec{X}_L)$ . On a donc  $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{Y}_L = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha}) \cos \alpha$ . En linéarisant cette relation, on a  $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{Y}_L = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})$ .

**Question 4** En admettant que l'angle de dérive de la roue avant s'écrit :  $\delta_{12} \simeq \alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}$  et celui de la roue arrière  $\delta_{34} \simeq \alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}$ , en déduire l'expression de  $\overrightarrow{R(VH \rightarrow VH)} \cdot \vec{Y}_L$ . Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par  $\alpha = 0, \psi = 0$  et  $\beta = 0$ .

#### Correction

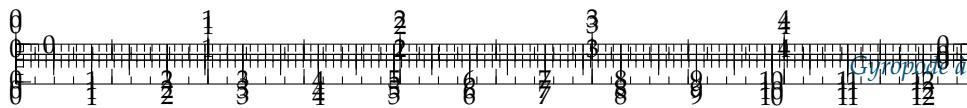
On a  $Y_{12} = -2D\delta_{12}$  et  $Y_{34} = -2D\delta_{34}$ . En conséquence,  $Y_{12} = -2D\left(\alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right)$  et  $Y_{34} = -2D\left(\alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$ .

Au final,  $\overrightarrow{R(VH \rightarrow VH)} \cdot \vec{Y}_L = -2D\left(\alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right) - 2D\left(\alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right) = -2D\left(2\alpha - \beta + \frac{\ell_1 - \ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$ .

**Question 5** Montrer que l'on obtient le système d'équations différentielles suivant en indiquant clairement (point, vecteur unitaire, résultante ou moment, ...) à quelle équation scalaire issue du PFD correspond chaque relation :

$$\begin{cases} \left(MV + \frac{2D(\ell_1 - \ell_2)}{V}\right)\dot{\psi} + MV\dot{\alpha} + 4D\alpha = 2D\beta \\ C\ddot{\psi} + \frac{2D(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{V}\dot{\psi} + 2D(\ell_1 - \ell_2)\alpha = 2D\ell_1\beta \end{cases}.$$





Avec les valeurs numériques :  $\ell_1 = 1 \text{ m}$ ,  $\ell_2 = 1,5 \text{ m}$ ,  $D = 21\,000 \text{ N rad}^{-1}$ ,  $C = 3100 \text{ kg m}^2$ ,  $M = 1500 \text{ kg}$ ,  $V = 15 \text{ m s}^{-1}$ , on obtient le système d'équations différentielles suivant, permettant de décrire l'évolution du véhicule (données en unités S.I.) :

$$\begin{cases} 211\dot{\psi}(t) + 225\dot{\alpha}(t) + 840\alpha(t) = 420\beta(t) \\ 31\ddot{\psi}(t) + 91\dot{\psi}(t) - 210\alpha(t) = 420\beta(t) \end{cases}.$$

### Correction

La première équation correspond au théorème de la résultante dynamique appliqué à VH en projection sur  $\vec{Y}_L$ .

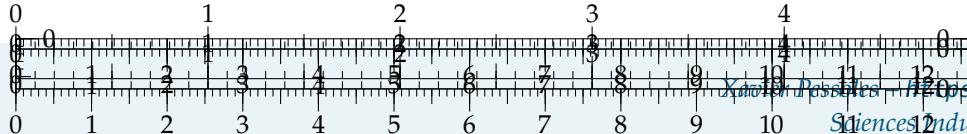
La seconde équation correspond au théorème du moment dynamique appliqué à VH en O projection sur  $\vec{Z}_L$ .

**Question 6** En supposant que les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression numérique de la fonction de transfert  $H_2(p)$  entre l'angle de lacet  $\psi(p)$  et l'angle de braquage  $\beta(p)$  de la roue avant :  $H_2(p) = \frac{\psi(p)}{\beta(p)}$ . Discuter de la stabilité de ce modèle.

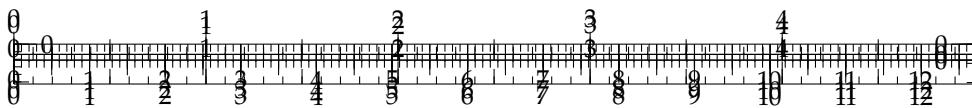
### Correction

Dans le domaine de Laplace, on a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 211p\psi(p) + 225p\alpha(p) + 840\alpha(p) = 420\beta(p) \\ 31p^2\psi(p) + 91p\psi(p) - 210\alpha(p) = 420\beta(p) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} (225p + 840)\alpha(p) = 420\beta(p) - 211p\psi(p) \\ (31p^2 + 91p)\psi(p) - 210\alpha(p) = 420\beta(p) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \alpha(p) = \frac{420\beta(p) - 211p\psi(p)}{225p + 840} \\ (31p^2 + 91p)\psi(p) - 210\frac{420\beta(p) - 211p\psi(p)}{225p + 840} = 420\beta(p) \end{cases} \\ & \left(31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}\right)\psi(p) - 210\frac{420\beta(p)}{225p + 840} = 420\beta(p) \\ & \Rightarrow \left(31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}\right)\psi(p) + \left(\frac{-210 \times 420}{225p + 840} - 420\right)\beta(p) = 0 \\ & \Rightarrow H_2(p) = \frac{\frac{210 \times 420}{225p + 840} + 420}{31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}} = \frac{210 \times 420 + 420(225p + 840)}{(225p + 840)(31p^2 + 91p) + 210 \times 211p} \\ & = \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p((225p + 840)(31p + 91) + 210 \times 211)} \\ & = \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p(225 \times 31p^2 + 840 \times 31p + 91 \times 225p + 91 \times 840 + 210 \times 211)} \\ & = \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p(225 \times 31p^2 + 840 \times 31p + 91 \times 225p + 91 \times 840 + 210 \times 211)} \\ & = \frac{441000 + 94500p}{p(6975p^2 + 46515p + 120750)} \end{aligned}$$







## Application 6

### Kart – Sujet

C. Gamelon & P. Dubois.

Au démarrage, le kart est bridé au sol. Le démarreur électrique exerce un couple de  $C_m = 1 \text{ N m}$  sur le vilebrequin et lorsque la vitesse de rotation atteint 1200 tr/min, la combustion du mélange air essence commence et le moteur thermique démarre. Dans cette phase de démarrage l'embrayage est ouvert et ne transmet pas de mouvement. Le vilebrequin est guidé en rotation par rapport au carter moteur. Ce guidage est modélisé par une liaison rotule en  $O$  et linéaire annulaire en  $B$  d'axe  $(O, \vec{z})$ .  $\overrightarrow{OB} = a \vec{z}$ .

Le vilebrequin est de masse  $m_2$  et de centre de gravité  $G_2$  avec  $\overrightarrow{OG_2} = l_2 \vec{z}$ . On a :

$$I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}.$$

**Question 1** Faire un graphe de liaison correspondant à la situation de démarrage.

**Question 2** Déterminer le temps de démarrage du moteur (équation du mouvement) et les actions dans le guidage en rotation.

Nouvelle situation de démarrage : le kart de masse  $m_1$  et centre inertie  $G_1$  n'est plus bridé et peut de déplacer horizontalement.  $\overrightarrow{O_0G_1} = \lambda \vec{x} + h \vec{y}$  et  $\overrightarrow{OG_1} = b \vec{y}$ .

**Question 3** Faire un graphe de liaison correspondant à la nouvelle situation de démarrage.

**Question 4** Déterminer les déplacements du kart au démarrage.

**Question 5** Identifier les modifications des résultats si  $\overrightarrow{OG_2} = l_2 \vec{z} + e \vec{y}_2$ .

C1-05

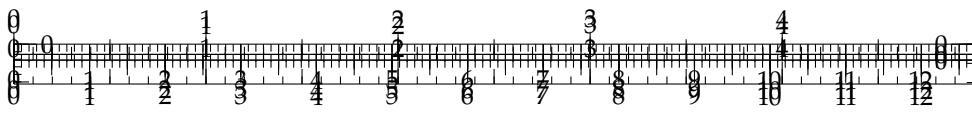
C2-09

...//.../PSI\_Cy\_04\_Modelis

...//.../PSI\_Cy\_04\_Modelis





## Application 6 Kart – Corrigé

C. Gamelon & P. Dubois.

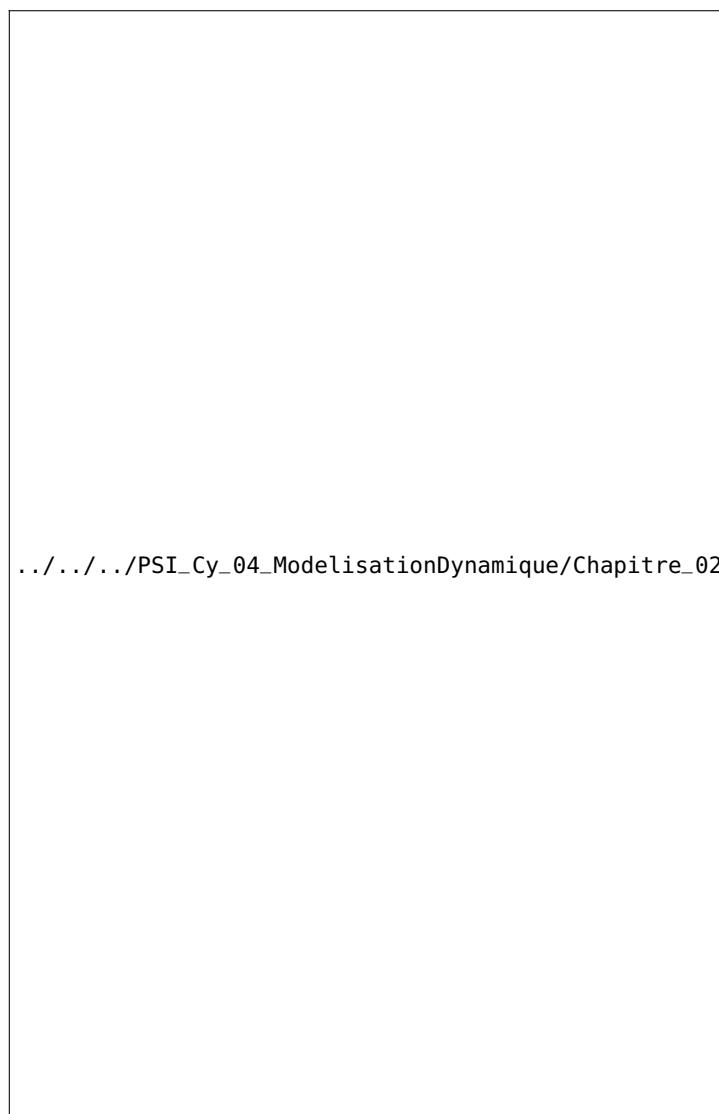
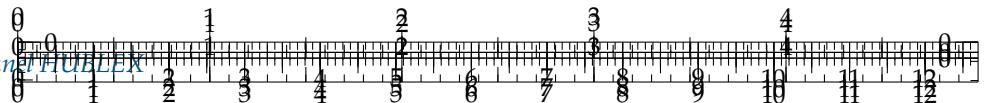
C1-05

C2-09

../../../../PSI\_Cy\_04\_Modelis

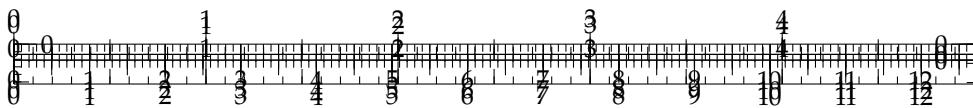
../../../../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_Applicat





.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiques





## Application 7 Pendule – Sujet

### Mise en situation

On s'intéresse à un pendule guidé par une glissière. On fait l'hypothèse que le problème est plan.

- ▶ On note 1 la pièce de masse  $M_1$  et de centre de gravité  $G_1$ .  $\overrightarrow{OA} = \lambda(t)\overrightarrow{x_0} - h\overrightarrow{y_0}$ .
- ▶ On note 2 la pièce de masse  $M_2$  et de centre de gravité  $G$  et de matrice d'inertie  $I_1(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ . On a  $\overrightarrow{AG} = L\overrightarrow{x_2}$

C1-05

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

### Travail à réaliser

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)}$  en utilisant deux méthodes différentes.

**Question 2** En déduire le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ .

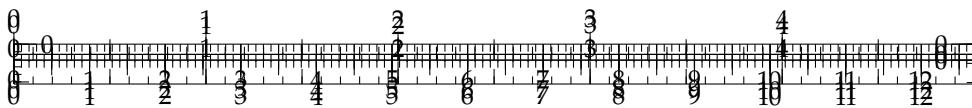
**Question 3** Isoler 2 et écrire le théorème du moment dynamique en  $A$  en projection sur  $\overrightarrow{z_0}$ .

**Question 4** Isoler {1+2} et écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\overrightarrow{x_0}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisati







## Application 7 Pendule – Corrigé

### Mise en situation

On s'intéresse à un pendule guidé par une glissière. On fait l'hypothèse que le problème est plan.

C1-05

C2-09

- On note 1 la pièce de masse  $M_1$  et de centre de gravité  $G_1$ .  $\overrightarrow{OA} = \lambda(t)\overrightarrow{x_0} - h\overrightarrow{y_0}$ .
- On note 2 la pièce de masse  $M_2$  et de centre de gravité  $G$  et de matrice d'inertie  $I_1(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ . On a  $\overrightarrow{AG} = L\overrightarrow{x_2}$

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

### Travail à réaliser

**Question 1** Déterminer  $\overline{\delta(A, 2/0)}$  en utilisant deux méthodes différentes.

#### Correction

##### Cinématique

$$\text{On a } \overline{V(G, 2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{OG} \right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} \left[ \lambda \overrightarrow{x_0} - h \overrightarrow{y_0} + L \overrightarrow{x_2} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{x_0} + L \dot{\theta} \overrightarrow{y_2}.$$

$$\text{On a } \overline{\Gamma(G, 2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overline{V(G, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{x_0} + L \ddot{\theta} \overrightarrow{y_2} - L \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_2}.$$

##### Cinétique & dynamique

$$\text{On a } \overline{\delta(G, 2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overline{\sigma(G, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

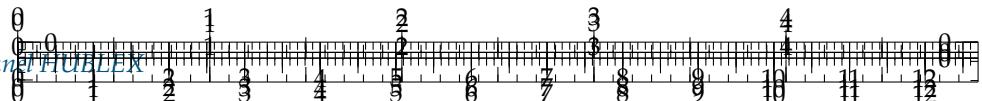
**Question 2** En déduire le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$ .

#### Correction

**Question 3** Isoler 2 et écrire le théorème du moment dynamique en  $A$  en projection sur  $\overrightarrow{z_0}$ .

#### Correction

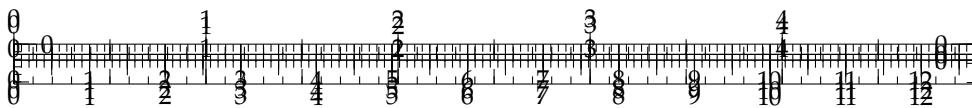




**Question 4** Isoler  $\{1+2\}$  et écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}_0$ .

**Correction**





## Application 8

### Pompe turbo-moléculaire – Sujet

Centrale Supélec PSI 2009.

Le comportement dynamique du rotor est étudié sur un modèle à 6 degrés de liberté : le rotor n'étant en contact avec aucun solide, il dispose des 6 mouvements de corps rigide. On suppose le rotor indéformable. La figure suivante montre à gauche le rotor dans sa position nominale ( $\alpha = \beta = \theta = x = y = z = 0$ ) et à droite le rotor dans une position quelconque. On note  $A_0$  et  $B_0$  les centres des paliers magnétiques radiaux et  $A$  et  $B$  les points appartenant à l'arbre et confondus avec et dans la position nominale.

C1-05

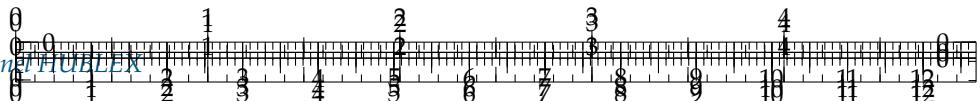
C2-09



On note  $O$  le milieu de  $[A_0B_0]$  et  $M$  le milieu de  $[AB]$ . Bien qu'un soin très important soit apporté à la fabrication du rotor, il est impossible d'annuler totalement les défauts d'équilibrage. Le centre de gravité n'est donc pas exactement situé sur l'axe  $(AB)$ , mais à une distance de celui-ci telle que  $\overrightarrow{MG} = r_0\vec{y}_3$ .

De même, la matrice d'inertie  $I_{G,3}$  n'est pas parfaitement diagonale et présente un produit d'inertie  $D$  non nul. On admet toutefois que  $r \ll L$  et  $D \ll (A, B, C)$ , où  $A$ ,





$B, C$  sont les moments d'inertie. Le mouvement du rotor, auquel on associe le repère 3, par rapport au bâti est paramétré par les trois déplacements  $(x, y, z)$  du point M dans le repère  $\mathcal{R}_0(0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :  $\overrightarrow{OM} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$  ainsi que par trois rotations  $(\alpha, \beta, \gamma)$  telles que :

- ▶  $\alpha$  paramètre la rotation d'une base  $\mathcal{B}_1(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  par rapport à  $\mathcal{B}_0$  autour de l'axe  $\vec{x}_0$ ;
- ▶  $\beta$  paramètre la rotation d'une base  $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$  par rapport à  $\mathcal{B}_1$  autour de l'axe  $\vec{y}_1$ ;
- ▶  $\theta$  paramètre la rotation d'une base  $\mathcal{B}_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$  par rapport à  $\mathcal{B}_2$  autour de l'axe  $\vec{z}_2$ .

Si le rotor présente 6 degrés de liberté, il est bien évident qu'à part la rotation propre principale  $\theta$ , ces mouvements sont très petits.

En notant  $\varepsilon(x)$  une fonction telle que  $|\varepsilon(x)| \ll |x|$ , on peut écrire :  $\begin{cases} x, y, z \simeq \varepsilon(L) \\ \alpha, \beta \simeq \varepsilon(1) \end{cases}$ .

On suppose que la vitesse de rotation du rotor est constante :  $\dot{\theta} = \omega$  et  $\ddot{\theta} = 0$ .

### Efforts des paliers et du moteur sur le rotor

Pour le dimensionnement dynamique, on modélise les actions des trois paliers magnétiques et l'action du moteur électrique sous la forme :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3A)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A, \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3B)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_B \vec{x}_0 + Y_B \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B, \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3C)\} = \left\{ \begin{array}{c} Z_C \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C, \{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{array} \right\}_G.$$

$$\text{Avec } \begin{cases} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 = -k \left[ \overrightarrow{A_0 A} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} - c \left[ \overrightarrow{V(A, 3/0)} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \\ X_B \vec{x}_0 + Y_B \vec{y}_0 = -k \left[ \overrightarrow{B_0 B} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} - c \left[ \overrightarrow{V(B, 3/0)} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \\ Z_C = -k \overrightarrow{C_0 C} \vec{z}_0 - c \overrightarrow{V(C, 3/0)} \cdot \vec{z}_0 \end{cases} \text{ et } k = 50 \times 10^4 \text{ Nm}^{-1}$$

et  $c = 970 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$ . La notation  $\left[ \vec{V} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}$  désigne la projection dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  du vecteur  $\vec{V}$ . Les actions de la pesanteur sont négligées. Le bâti est supposé être un référentiel galiléen.

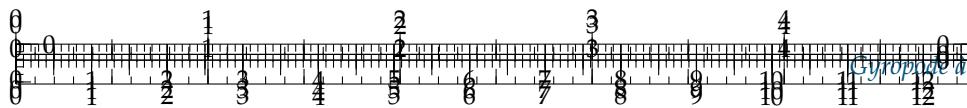
Le rotor, tel que  $L = 50 \text{ mm}$ , a pour masse  $m = 10 \text{ kg}$ , pour centre de gravité G tel que  $\overrightarrow{MG} = r_0 \vec{y}_3$  où  $r_0 = 0,05 \text{ mm}$ , et pour matrice d'inertie en G :  $I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{B_3}$  où  $A = 0,08 \text{ kg m}^2$ ,  $C = 0,04 \text{ kg m}^2$  et  $D = 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

On admet que  $r_0 \simeq \varepsilon(L)$  et  $D \simeq \varepsilon(A) \simeq \varepsilon(C)$ .

### Objectif

Proposer un modèle de comportement dynamique du rotor en phase de rotation.





**Question 1** Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au rotor et l'exprimer sous forme torsorielle.

Les questions suivantes visent à déterminer le système d'équations issu de cette équation torsorielle.

**Question 2** Montrer quel'expression au premier ordre de la vitesse du centre de gravité  $G$  du rotor par rapport au bâti s'écrit :  $\overrightarrow{V(G, 3/0)} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 - r_0\omega\vec{x}_3$ .

**Question 3** Déterminer l'expression au premier ordre de l'accélération du centre de gravité  $G$  du rotor par rapport au bâti 0 :  $\overrightarrow{\Gamma(G, 3/0)}$ .

On admet que par changement de base, la matrice  $I_{G,3}$  s'écrit dans la base  $B_2$  :

$$I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & D \sin \theta \\ 0 & A & -D \cos \theta \\ D \sin \theta & -D \cos \theta & C \end{pmatrix}_{B_2}.$$

**Question 4** Montrer que l'expression au premier ordre du moment cinétique en  $G$  du rotor par rapport au bâti s'écrit :  $\overrightarrow{\sigma(G, 3/0)} = \begin{pmatrix} A\ddot{\alpha} + D\omega \sin \theta \\ A\dot{\beta} - D\omega \cos \theta \\ C\omega \end{pmatrix}_{B_2}$ .

**Question 5** Déterminer l'expression au premier ordre du moment dynamique en  $G$  du rotor par rapport au bâti 0 :  $\overrightarrow{\delta(G, 3/0)}$ , dans la base  $B_2$ .

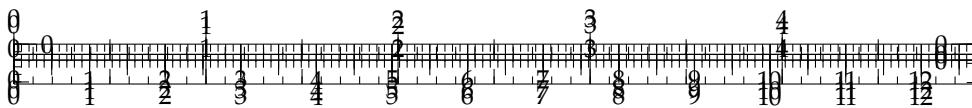
Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au rotor 3, réduit en  $G$ , conduit alors à :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = -mr_0\omega^2 \sin \theta \\ m\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = mr_0\omega^2 \cos \theta \\ A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + 2cL\dot{\alpha} + 2kL\alpha = -D\omega^2 \cos \theta \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} + 2cL\dot{\beta} + 2kL\beta = -D\omega^2 \sin \theta \\ C_m = 0 \end{cases}$$

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisati







## Application 8

### Pompe turbo-moléculaire – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2009.

Le comportement dynamique du rotor est étudié sur un modèle à 6 degrés de liberté : le rotor n'étant en contact avec aucun solide, il dispose des 6 mouvements de corps rigide. On suppose le rotor indéformable. La figure suivante montre à gauche le rotor dans sa position nominale ( $\alpha = \beta = \theta = x = y = z = 0$ ) et à droite le rotor dans une position quelconque. On note  $A_0$  et  $B_0$  les centres des paliers magnétiques radiaux et  $A$  et  $B$  les points appartenant à l'arbre et confondus avec et dans la position nominale.

C1-05

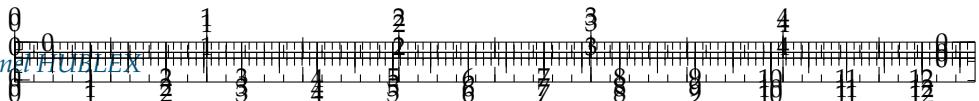
C2-09



On note  $O$  le milieu de  $[A_0B_0]$  et  $M$  le milieu de  $[AB]$ . Bien qu'un soin très important soit apporté à la fabrication du rotor, il est impossible d'annuler totalement les défauts d'équilibrage. Le centre de gravité n'est donc pas exactement situé sur l'axe  $(AB)$ , mais à une distance de celui-ci telle que  $\overrightarrow{MG} = r_0\vec{y}_3$ .

De même, la matrice d'inertie  $I_{G,3}$  n'est pas parfaitement diagonale et présente un produit d'inertie  $D$  non nul. On admet toutefois que  $r \ll L$  et  $D \ll (A, B, C)$ , où  $A$ ,





$B, C$  sont les moments d'inertie. Le mouvement du rotor, auquel on associe le repère 3, par rapport au bâti est paramétré par les trois déplacements  $(x, y, z)$  du point M dans le repère  $\mathcal{R}_0(0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :  $\overrightarrow{OM} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$  ainsi que par trois rotations  $(\alpha, \beta, \gamma)$  telles que :

- ▶  $\alpha$  paramètre la rotation d'une base  $\mathcal{B}_1(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  par rapport à  $\mathcal{B}_0$  autour de l'axe  $\vec{x}_0$ ;
- ▶  $\beta$  paramètre la rotation d'une base  $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$  par rapport à  $\mathcal{B}_1$  autour de l'axe  $\vec{y}_1$ ;
- ▶  $\theta$  paramètre la rotation d'une base  $\mathcal{B}_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$  par rapport à  $\mathcal{B}_2$  autour de l'axe  $\vec{z}_2$ .

Si le rotor présente 6 degrés de liberté, il est bien évident qu'à part la rotation propre principale  $\theta$ , ces mouvements sont très petits.

En notant  $\varepsilon(x)$  une fonction telle que  $|\varepsilon(x)| \ll |x|$ , on peut écrire :  $\begin{cases} x, y, z \approx \varepsilon(L) \\ \alpha, \beta \approx \varepsilon(1) \end{cases}$ .

On suppose que la vitesse de rotation du rotor est constante :  $\dot{\theta} = \omega$  et  $\ddot{\theta} = 0$ .

### Efforts des paliers et du moteur sur le rotor

Pour le dimensionnement dynamique, on modélise les actions des trois paliers magnétiques et l'action du moteur électrique sous la forme :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3A)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A, \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3B)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_B \vec{x}_0 + Y_B \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B, \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3C)\} = \left\{ \begin{array}{c} Z_C \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C, \{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{array} \right\}_G.$$

$$\text{Avec } \begin{cases} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 = -k \left[ \overrightarrow{A_0 A} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} - c \left[ \overrightarrow{V(A, 3/0)} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \\ X_B \vec{x}_0 + Y_B \vec{y}_0 = -k \left[ \overrightarrow{B_0 B} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} - c \left[ \overrightarrow{V(B, 3/0)} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \\ Z_C = -k \overrightarrow{C_0 C} \vec{z}_0 - c \overrightarrow{V(C, 3/0)} \cdot \vec{z}_0 \end{cases} \text{ et } k = 50 \times 10^4 \text{ Nm}^{-1}$$

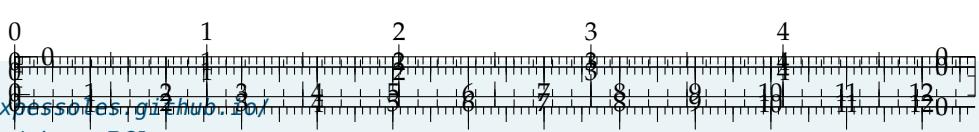
et  $c = 970 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$ . La notation  $\left[ \vec{V} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}$  désigne la projection dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  du vecteur  $\vec{V}$ . Les actions de la pesanteur sont négligées. Le bâti est supposé être un référentiel galiléen.

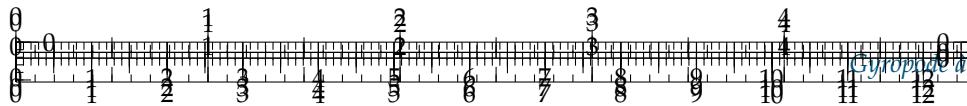
Le rotor, tel que  $L = 50 \text{ mm}$ , a pour masse  $m = 10 \text{ kg}$ , pour centre de gravité G tel que  $\overrightarrow{MG} = r_0 \vec{y}_3$  où  $r_0 = 0,05 \text{ mm}$ , et pour matrice d'inertie en G :  $I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{B_3}$  où  $A = 0,08 \text{ kg m}^2$ ,  $C = 0,04 \text{ kg m}^2$  et  $D = 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

On admet que  $r_0 \approx \varepsilon(L)$  et  $D \approx \varepsilon(A) \approx \varepsilon(C)$ .

### Objectif

Proposer un modèle de comportement dynamique du rotor en phase de rotation.





**Question 1** Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au rotor et l'exprimer sous forme torsorielle.

#### Correction

Les questions suivantes visent à déterminer le système d'équations issu de cette équation torsorielle.

**Question 2** Montrer quel'expression au premier ordre de la vitesse du centre de gravité  $G$  du rotor par rapport au bâti s'écrit :  $\overrightarrow{V(G, 3/0)} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 - r_0\omega\vec{x}_3$ .

#### Correction

**Question 3** Déterminer l'expression au premier ordre de l'accélération du centre de gravité  $G$  du rotor par rapport au bâti 0 :  $\overrightarrow{\Gamma(G, 3/0)}$ .

#### Correction

On admet que par changement de base, la matrice  $I_{G,3}$  s'écrit dans la base  $B_2$  :

$$I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & D \sin \theta \\ 0 & A & -D \cos \theta \\ D \sin \theta & -D \cos \theta & C \end{pmatrix}_{B_2}.$$

**Question 4** Montrer que l'expression au premier ordre du moment cinétique en  $G$  du rotor par rapport au bâti s'écrit :  $\overrightarrow{\sigma(G, 3/0)} = \begin{pmatrix} A\ddot{\alpha} + D\omega \sin \theta \\ A\dot{\beta} - D\omega \cos \theta \\ C\omega \end{pmatrix}_{B_2}$ .

#### Correction

**Question 5** Déterminer l'expression au premier ordre du moment dynamique en  $G$  du rotor par rapport au bâti 0 :  $\overrightarrow{\delta(G, 3/0)}$ , dans la base  $B_2$ .

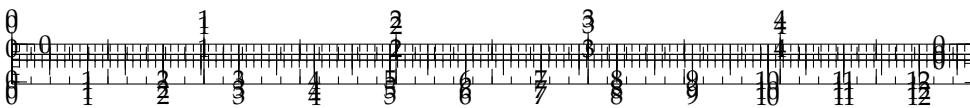
#### Correction

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au rotor 3, réduit en  $G$ , conduit alors à :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = -mr_0\omega^2 \sin \theta \\ m\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = mr_0\omega^2 \cos \theta \\ A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + 2cL\dot{\alpha} + 2kL\alpha = -D\omega^2 \cos \theta \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} + 2cL\dot{\beta} + 2kL\beta = -D\omega^2 \sin \theta \\ C_m = 0 \end{cases}$$







# TD 1

## Orthèse d'épaule – Sujet

Centrale Supélec PSI 2010.

### Mise en situation

Le support de cette étude est une orthèse portable, de type exosquelette, qui contribue au développement de la tonicité musculaire de l'épaule et du bras. Installée dans le dos de l'individu et liée à la fois au bras et à la main, elle offre une résistance aux mouvements de la main. Ainsi, le thérapeute peut réaliser des protocoles très fins de rééducation en programmant des spectres d'efforts résistants pour chaque mouvement du patient. Le travail du patient peut également être optimisé en le plaçant dans un environnement de réalité virtuelle permettant de visualiser les situations de travail conçues par le thérapeute.

C1-05

C2-09

### Objectif

L'objectif est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force prédéterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Mod

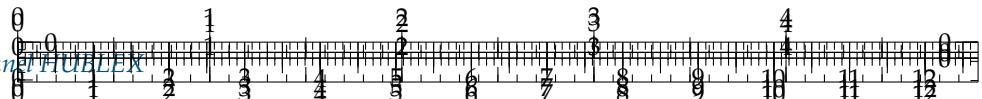
La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs ( $K_1, K_2$ ) de maintien (pour ce critère, seule la force $Z_F$ est considérée).	$ \Delta Z_F / \Delta \gamma  = K_1 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$ $ \Delta Z_F / \Delta \delta  = K_2 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelis

L'actionneur ne peut fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation qu'un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose, de plus, qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent. On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras ( $\gamma$  et  $\delta$ ) et la variation de la force  $Z_F$  (ces grandeurs seront définies par la suite) exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs ( $K_1, K_2$ ).





La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- ▶  $q$  et  $\dot{q}$  sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations;
- ▶ une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail;
- ▶ une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire;
- ▶ un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence  $C_a = C_{\text{ref}}$ .

`.../.../.../PSI_Cy_04_ModelisationDynamique/Chapitre_02_TorseursCinetiquesDynamiques`

## Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

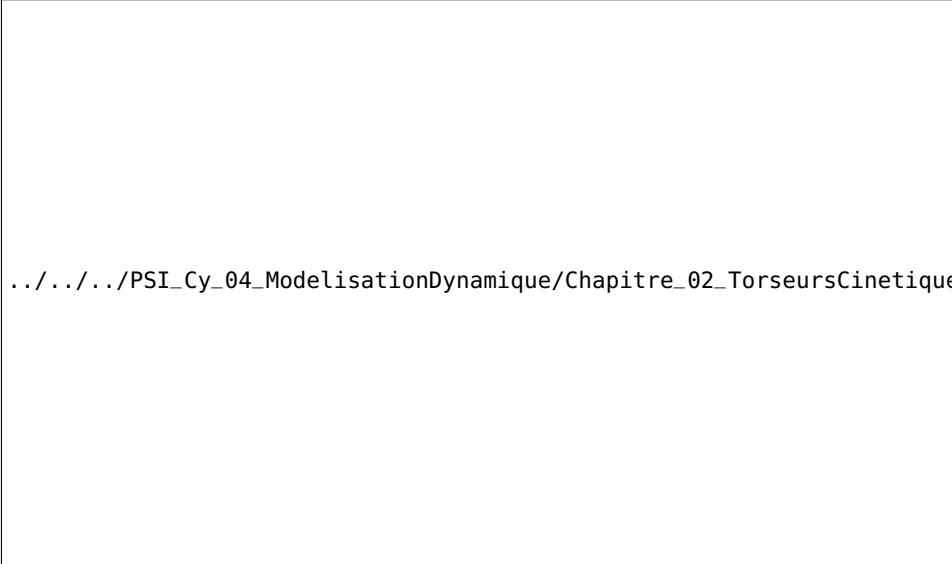
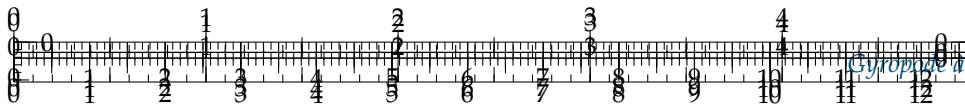
### Objectif

Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

Le système étudié se réduit donc à l'ensemble {Bras + Avant-bras} relativement au reste du dispositif supposé fixe : on suppose que les angles d'abduction/adduction et de rotation interne/rotation externe de l'épaule sont maintenus identiquement nuls par l'action des moteurs situés dans la partie dorsale du dispositif (non étudiée ici). Le paramétrage se réduit donc à la situation de la figure suivante qui représente l'ensemble étudié dans un plan  $(\vec{x}; \vec{z})$  donné, où l'on choisit  $\vec{z}$  vertical dans le sens descendant. Le tableau précise les différents paramètres utiles pour le calcul de dynamique envisagé.

`.../.../.../PSI_Cy_04_ModelisationDynamique/Chapitre_02_TorseursCinetiquesDynamiques`





**Question 1** Exprimer littéralement, au point  $G_2$  et dans le repère  $R_1$ , le torseur dynamique du mouvement du solide {Avant-bras} par rapport au référentiel fixe  $R_0$  supposé galiléen :  $\{\mathcal{T}(\text{Avant-bras}/R_0)\}_{G_2,(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$ .

Les différentes actions mécaniques agissant sur le dispositif sont les suivantes :

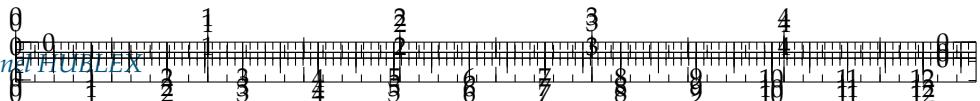
- ▶ l'action de la pesanteur sur les solides {Bras} et {Avant-bras} ;
- ▶ l'action du bâti sur le solide {Bras} au travers de la liaison pivot d'axe  $(O, \vec{y})$  et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante :  

$$\{\mathcal{T}(\text{Bâti} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_1 \vec{x}_1 + Y_1 \vec{y}_1 + Z_1 \vec{z}_1 \\ L_1 \vec{x}_1 + M_1 \vec{y}_1 + N_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_O$$

où les paramètres  $(X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1)$  sont inconnus;
- ▶ l'action du premier actionneur sur le solide {Bras} :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{array} \right\}_O$  où le couple  $C_1(t)$  exercé est connu au cours du temps ;
- ▶ l'action du solide {Bras} sur le solide {Avant-bras} au travers de la liaison pivot d'axe  $(A, \vec{y})$  et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante :  $\{\mathcal{T}(\text{Bras} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_2 \vec{x}_1 + Y_2 \vec{y} + Z_2 \vec{z}_1 \\ L_2 \vec{x}_1 + M_2 \vec{y} + N_2 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_A$  où les paramètres  $(X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2)$  sont inconnus ;
- ▶ les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  et  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  où le couple  $C_2(t)$  exercé est connu au cours du temps ;
- ▶ l'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité  $B$  de l'avant-bras et définie par :  $\{\mathcal{T}(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$

On veut déterminer les deux équations permettant de décrire le mouvement des deux axes de l'orthèse. On suppose pour cela que les deux liaisons pivots sont parfaites.





Le PFD permet d'obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} C_1(t) = & \left( B_1 + B_2 + m_1 \lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 \lambda_2^2 \right) \ddot{\gamma} + \left( B_2 + m_2 \lambda_2^2 \right) \ddot{\delta} \\ & + m_2 l_1 \left( \lambda_2 (2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2) \sin \delta \right) \\ & + m_1 g \lambda_1 \sin \gamma + m_2 g (l_1 \sin \gamma + \lambda_2 \sin (\gamma + \delta)) \\ & - X_F (l_1 \cos \gamma + l_2 \cos (\gamma + \delta)) + Z_F (l_1 \sin \gamma + l_2 (\gamma + \delta)) \end{aligned}$$

**Question 2** Détailler la démarche qui a permis d'obtenir cette équation, on précisera en particulier l'isolement, le bilan des Actions Mécaniques Extérieures et le choix des équations utilisées.

**Question 3** Appliquer la démarche pour retrouver l'équation donnée.

**Question 4** Écrire une deuxième relation issue du Principe Fondamental de la Dynamique, indépendante de la précédente, faisant intervenir le couple  $C_2(t)$ , et qui permette de ne pas faire apparaître les composantes  $L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2$  des torseurs des actions de liaison. On détaillera la démarche de la même façon que lors de la première question.

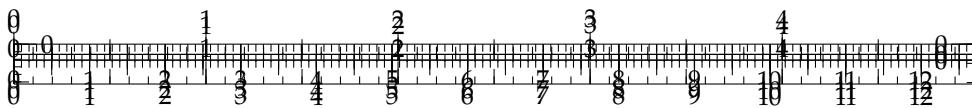
**Question 5** En déduire que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$  où  $C$  est un vecteur et  $A, B$  et  $Q$  sont des matrices  $2 \times 2$  que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement  $(\gamma, \delta)$  et de leurs dérivées premières  $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$ .

**Question 6** Calculer les couples  $(C_1, C_2)$  exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ( $X_F = 0, Z_F = 0$ ) et dans une position statique. Discuter de la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 7** Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_TD\_01\_Ortheses





# TD 1

## Orthèse d'épaule – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2010.

### Mise en situation

Le support de cette étude est une orthèse portable, de type exosquelette, qui contribue au développement de la tonicité musculaire de l'épaule et du bras. Installée dans le dos de l'individu et liée à la fois au bras et à la main, elle offre une résistance aux mouvements de la main. Ainsi, le thérapeute peut réaliser des protocoles très fins de rééducation en programmant des spectres d'efforts résistants pour chaque mouvement du patient. Le travail du patient peut également être optimisé en le plaçant dans un environnement de réalité virtuelle permettant de visualiser les situations de travail conçues par le thérapeute.

C1-05

C2-09

### Objectif

L'objectif est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force prédéterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Mod

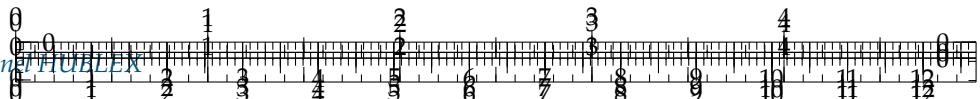
La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs ( $K_1, K_2$ ) de maintien (pour ce critère, seule la force $Z_F$ est considérée).	$ \Delta Z_F / \Delta \gamma  = K_1 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$ $ \Delta Z_F / \Delta \delta  = K_2 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelis

L'actionneur ne peut fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation qu'un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose, de plus, qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent. On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras ( $\gamma$  et  $\delta$ ) et la variation de la force  $Z_F$  (ces grandeurs seront définies par la suite) exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs ( $K_1, K_2$ ).





La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- ▶  $q$  et  $\dot{q}$  sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations;
- ▶ une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail;
- ▶ une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire;
- ▶ un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence  $C_a = C_{\text{ref}}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques

## Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

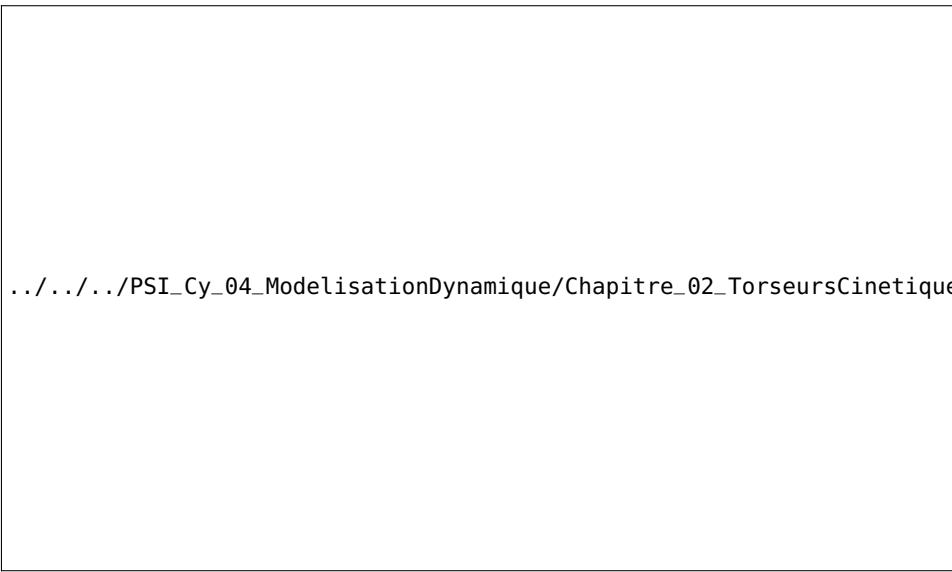
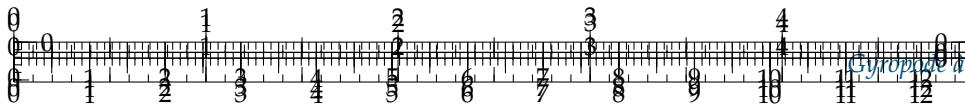
### Objectif

Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

Le système étudié se réduit donc à l'ensemble {Bras + Avant-bras} relativement au reste du dispositif supposé fixe : on suppose que les angles d'abduction/adduction et de rotation interne/rotation externe de l'épaule sont maintenus identiquement nuls par l'action des moteurs situés dans la partie dorsale du dispositif (non étudiée ici). Le paramétrage se réduit donc à la situation de la figure suivante qui représente l'ensemble étudié dans un plan  $(\vec{x}; \vec{z})$  donné, où l'on choisit  $\vec{z}$  vertical dans le sens descendant. Le tableau précise les différents paramètres utiles pour le calcul de dynamique envisagé.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques





**Question 1** Exprimer littéralement, au point  $G_2$  et dans le repère  $R_1$ , le torseur dynamique du mouvement du solide {Avant-bras} par rapport au référentiel fixe  $R_0$  supposé galiléen :  $\{\mathcal{T}(\text{Avant-bras}/R_0)\}_{G_2,(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$ .

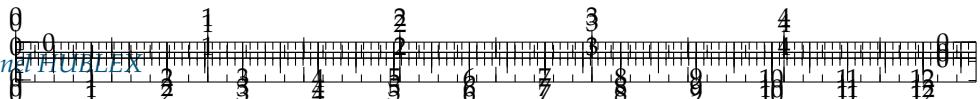
Les différentes actions mécaniques agissant sur le dispositif sont les suivantes :

- ▶ l'action de la pesanteur sur les solides {Bras} et {Avant-bras} ;
- ▶ l'action du bâti sur le solide {Bras} au travers de la liaison pivot d'axe  $(O, \vec{y})$  et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante :  

$$\{\mathcal{T}(\text{Bâti} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_1 \vec{x}_1 + Y_1 \vec{y}_1 + Z_1 \vec{z}_1 \\ L_1 \vec{x}_1 + M_1 \vec{y}_1 + N_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_O$$
où les paramètres  $(X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1)$  sont inconnus ;
- ▶ l'action du premier actionneur sur le solide {Bras} :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{array} \right\}_O$  où le couple  $C_1(t)$  exercé est connu au cours du temps ;
- ▶ l'action du solide {Bras} sur le solide {Avant-bras} au travers de la liaison pivot d'axe  $(A, \vec{y})$  et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante :  $\{\mathcal{T}(\text{Bras} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_2 \vec{x}_1 + Y_2 \vec{y} + Z_2 \vec{z}_1 \\ L_2 \vec{x}_1 + M_2 \vec{y} + N_2 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_A$  où les paramètres  $(X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2)$  sont inconnus ;
- ▶ les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  et  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  où le couple  $C_2(t)$  exercé est connu au cours du temps ;
- ▶ l'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité  $B$  de l'avant-bras et définie par :  $\{\mathcal{T}(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$

On veut déterminer les deux équations permettant de décrire le mouvement des deux axes de l'orthèse. On suppose pour cela que les deux liaisons pivots sont parfaites.





Le PFD permet d'obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} C_1(t) = & \left( B_1 + B_2 + m_1 \lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 \lambda_2^2 \right) \ddot{\gamma} + \left( B_2 + m_2 \lambda_2^2 \right) \ddot{\delta} \\ & + m_2 l_1 \left( \lambda_2 (2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2) \sin \delta \right) \\ & + m_1 g \lambda_1 \sin \gamma + m_2 g (l_1 \sin \gamma + \lambda_2 \sin(\gamma + \delta)) \\ & - X_F (l_1 \cos \gamma + l_2 \cos(\gamma + \delta)) + Z_F (l_1 \sin \gamma + l_2 (\gamma + \delta)) \end{aligned}$$

**Question 2** Détailler la démarche qui a permis d'obtenir cette équation, on précisera en particulier l'isolement, le bilan des Actions Mécaniques Extérieures et le choix des équations utilisées.

**Correction**

**Question 3** Appliquer la démarche pour retrouver l'équation donnée.

**Correction**

**Question 4** Écrire une deuxième relation issue du Principe Fondamental de la Dynamique, indépendante de la précédente, faisant intervenir le couple  $C_2(t)$ , et qui permette de ne pas faire apparaître les composantes  $L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2$  des torseurs des actions de liaison. On détaillera la démarche de la même façon que lors de la première question.

**Correction**

**Question 5** En déduire que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$  où  $C$  est un vecteur et  $A, B$  et  $Q$  sont des matrices  $2 \times 2$  que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement  $(\gamma, \delta)$  et de leurs dérivées premières  $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$ .

**Correction**

**Question 6** Calculer les couples  $(C_1, C_2)$  exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ( $X_F = 0, Z_F = 0$ ) et dans une position statique. Discuter de la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

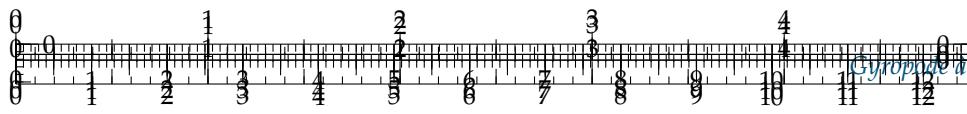
**Correction**

**Question 7** Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

**Correction**

### Question 8





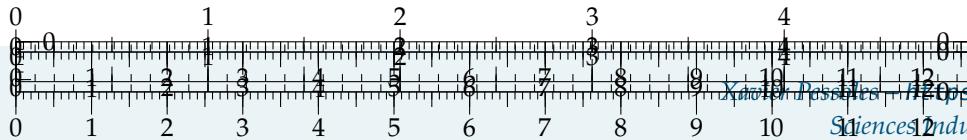
.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_TD\_01\_Orthese\_PFD

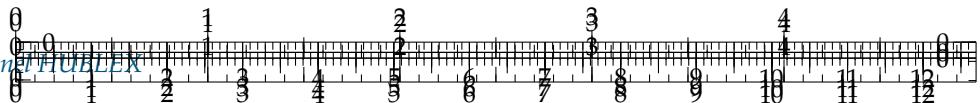
**Question 9**

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_TD\_01\_Orthese\_PFD

**Question 10**

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_TD\_01\_Orthese\_PFD

**Question 11**



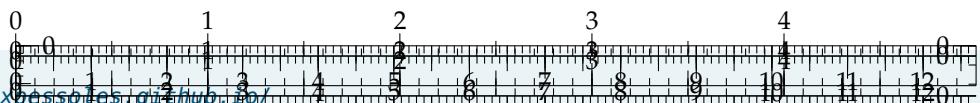
.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamique

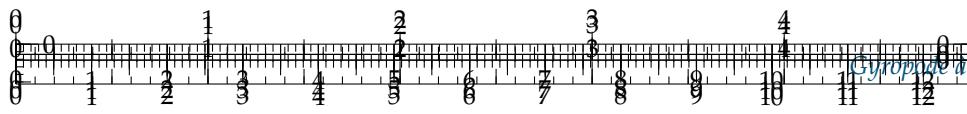
.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamique

### Question 12

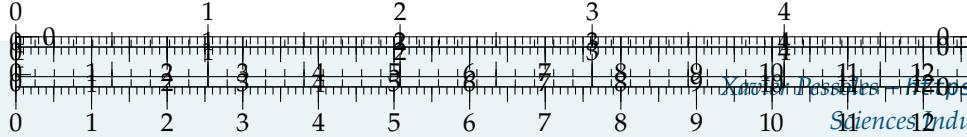
.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamique

### Question 13

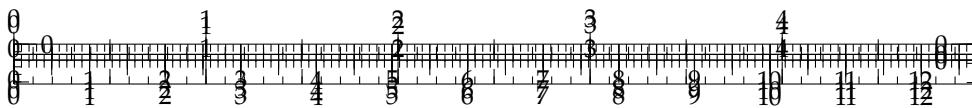


**Question 14**

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_TD\_01\_Orthese\_PFD







## TD 2

# Stabilisateur passif d'image – Sujet

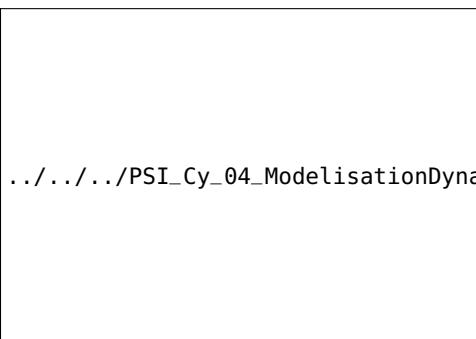
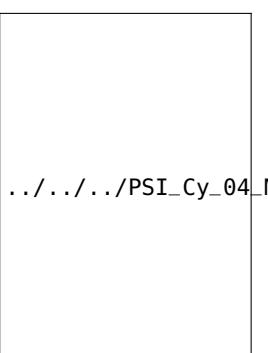
Mines Ponts 2018 – PSI.

### Mise en situation

Les appareils photos modernes fonctionnent en rafales : 8 à 10 images par seconde et en mode vidéo. Le besoin de stabilisation de l'image dans de telles conditions est impératif. Le but de ce sujet est de s'intéresser au support de la caméra assurant la liaison entre le bras de l'utilisateur et la caméra elle-même.

Le stabilisateur se compose principalement de trois objets :

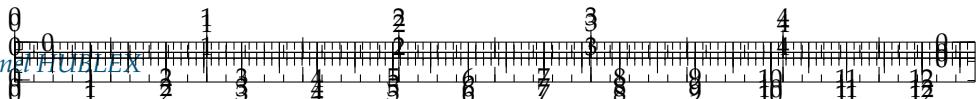
- ▶ une poignée orientable (1) manipulée directement par le photographe, liée au support (2) en  $O$  ;
- ▶ un support rigide (2) (**supposé sans masse**) sur lequel vient se fixer une caméra assimilée en première approximation à une masse ponctuelle  $m_c$  placée en  $G_c$  ;
- ▶ un contrepoids lié à (2) et assimilé à une masse ponctuelle  $m_{cp}$  placée en  $G_{cp}$ .



L'utilisateur tient fermement la poignée (1) dans une position angulaire quelconque, ce qui permet d'affirmer que le (**porteur + (1)**) ne forme qu'une seule classe d'équivalence. Afin de produire des images toujours fluides, sans à-coups, ce stabilisateur à main doit maintenir constamment la caméra dans une position verticale (parallèle au champ de gravité), que le porteur soit immobile (plan fixe) ou en mouvement (travelling).

Dans le cas général, le mouvement du bras par rapport au référentiel terrestre est quelconque (6 degrés de libertés). Ici, on se limite à un mouvement de translation. Dans le cas général, afin que la caméra soit en position verticale, le support doit permettre 3 rotations dans la liaison avec (**porteur + (1)**). Ici on se limite à la stabilisation d'une seule rotation.





### Objectif

Suite à une sollicitation brève de  $0,5 \text{ m s}^{-2}$ , l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les  $0,5^\circ$ .

### Travail demandé

On se place à présent dans une phase dite « dynamique ». Le porteur (**1**) est en mouvement par rapport au sol. On suppose qu'à l'instant initial, l'ensemble (**E**)=**Support(2)** + **Caméra(C)** + **Contrepoids(Cp)** est en équilibre stable en position verticale. On note

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(P, 1/0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} \end{array} \right\}_{\forall P}. \text{ On note } a(t) = \frac{dv(t)}{dt}. \text{ De plus, } \overrightarrow{OG_C} = L_C \overrightarrow{Z_2} \text{ et } \overrightarrow{OG_{CP}} = -L_{CP} \overrightarrow{Z_2}.$$

**Question 1** Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (**E**) dans (**0**) galiléen s'exprime comme  $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$ .

Afin de quantifier la modification d'attitude de (**E**), l'équation de mouvement est linéarisée autour de la position d'équilibre (verticale) en supposant que les valeurs de l'angle restent faibles. On transpose cette équation différentielle dans le domaine de Laplace et on note  $\mathcal{L}(\varphi(t)) = \Phi(p)$  et  $\mathcal{L}(a(t)) = A(p)$ . Afin de conserver la fluidité des images lors de travelling, les fluctuations indésirables des mouvements du porteur ne doivent pas être intégralement transmises à (**E**).

On suppose que  $a(t) = a_0 \sin(\omega_a t)$  avec  $a_0 = 0,5 \text{ m s}^{-2}$  et  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

**Question 2** Établir sous forme canonique la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$ . Donner l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  en fonction de  $m_c$ ,  $m_{cp}$ ,  $L_c$ ,  $L_{cp}$  et  $g$ .

**Question 3** Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain  $G_{dB} = f(\omega)$  de la fonction de transfert  $H(j\omega)$ . Placer les caractéristiques remarquables.

**Question 4** Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que  $\omega_0 = 0,1\omega_a$ . Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple  $(m_{cp}, L_{cp})$ . En utilisant le comportement asymptotique en gain de  $G_{dB}$ , estimer numériquement l'amplitude  $\Delta\varphi$  (en degrés) des oscillations de (**E**) selon l'axe  $(O, \overrightarrow{y_0})$ .

#### Éléments de correction

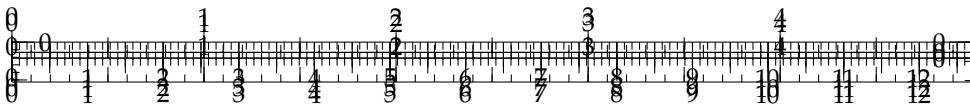
1.  $Q_1 = M_{CP}L_{CP}^2 + M_CL_C^2, \quad Q_2(t) = (L_{CP}M_{CP} - L_CM_C)g \sin \varphi, \quad Q_3(t) = (M_{CP}L_{CP} - M_CL_C)\cos \varphi.$
2.  $\omega_0^2 = \frac{(L_{CP}M_{CP} - L_CM_C)g}{M_{CP}L_{CP}^2 + M_CL_C^2}.$
3. .
4.  $0,03^\circ.$
5. .

ur sur le cahier des charges

**Question 5** Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

ConDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_TD\_02\_Stabilisat





## TD 2

# Stabilisateur passif d'image – Corrigé

Mines Ponts 2018 – PSI.

C1-05

C2-09

### Mise en situation

#### Objectif

Suite à une sollicitation brève de  $0,5 \text{ m s}^{-2}$ , l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les  $0,5^\circ$ .

### Travail demandé

**Question 1** Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans (0) galiléen s'exprime comme  $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Mod

#### Correction

(1) et (E) sont en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{Y}_0)$ . On va donc réaliser un théorème du moment dynamique appliqué à (E) en O en projection sur  $\vec{Y}_0$ .

#### Calcul de $\delta(O, E/0)$

**Méthode 1 – En passant par le calcul de  $\overrightarrow{\delta(O, 2/0)}$ ,  $\overrightarrow{\delta(O, C/0)}$  et  $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)}$**

Le support 2 étant sans masse, on a  $\overrightarrow{\delta(O, 2/0)} = \vec{0}$ . La caméra et le contrepoids étant considérés comme des masses ponctuelles, on a  $\overrightarrow{\delta(G_C, C/0)} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{\delta(G_{Cp}, Cp/0)} = \vec{0}$ .

#### Calcul de $\overrightarrow{\delta(O, C/0)}$

On a  $\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = \overrightarrow{\delta(G_C, C/0)} + \overrightarrow{OG_C} \wedge M_C \overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)}$ .

#### Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)}$

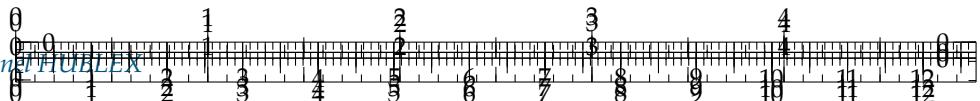
$\overrightarrow{V(G_C, C/0)} = \overrightarrow{V(G_C, C/1)} + \overrightarrow{V(G_C, 1/0)} = \overrightarrow{G_C O} \wedge \overrightarrow{\Omega(C/0)} + v(t) \vec{X}_0 = -L_C \vec{Z}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + v(t) \vec{X}_0 = L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 + v(t) \vec{X}_0$ .

De plus  $\overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t) \vec{X}_0$ .

Au final,  $\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = \overrightarrow{OG_C} \wedge M_C \overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \vec{Z}_2 \wedge M_C (L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t) \vec{X}_0)$

$\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = L_C M_C (L_C \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + a(t) \cos \varphi \vec{Y}_0)$ .



**Calcul de  $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)}$** 

On a  $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)} = \overrightarrow{\delta(G_{Cp}, Cp/0)} + \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, C/0)}$ .

**Calcul de  $\overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)}$** 

De même,  $\overrightarrow{V(G_{Cp}, Cp/0)} = \overrightarrow{V(G_{Cp}, Cp/1)} + \overrightarrow{V(G_{Cp}, 1/0)} = \overrightarrow{GCp} \wedge \overrightarrow{\Omega(Cp/0)} + v(t) \overrightarrow{X_0} = L_{Cp} \overrightarrow{Z_2} \wedge \phi \overrightarrow{Y_2} + v(t) \overrightarrow{X_0} = -L_{Cp} \phi \overrightarrow{X_2} + v(t) \overrightarrow{X_0}$ .

De plus  $\overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)} = -L_{Cp} \ddot{\phi} \overrightarrow{X_2} + L_{Cp} \dot{\phi}^2 \overrightarrow{Z_2} + a(t) \overrightarrow{X_0}$ .

Au final,  $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)} = \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)} = -L_{Cp} \overrightarrow{Z_2} \wedge M_{Cp} (-L_{Cp} \ddot{\phi} \overrightarrow{X_2} + L_{Cp} \dot{\phi}^2 \overrightarrow{Z_2} + a(t) \overrightarrow{X_0})$

On a donc  $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} = M_{Cp} L_{Cp}^2 \ddot{\phi} - M_{Cp} L_{Cp} a(t) \cos \varphi + M_C L_C^2 \ddot{\phi} + M_C L_C a(t) \cos \varphi$

**Méthode 2 – En passant par le calcul de  $I_O(E)$** 

On a  $I_O(C) = M_C \begin{pmatrix} L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$  et  $I_O(Cp) = M_{Cp} \begin{pmatrix} L_{Cp}^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_{Cp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$  et donc

$$I_O(E) = \begin{pmatrix} M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

$O$  est un point quelconque; donc  $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} =$

$$\overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(E/R_0)} \text{ et } \overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)} = I_O(E) \cdot$$

$$\overrightarrow{\Omega(E/R_0)} + M \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V(O, E/R_0)}.$$

$$\text{De plus, } \overrightarrow{OG} = \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{Z_2}, \overrightarrow{V(O, E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} \text{ et } \overrightarrow{V(G, E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} + \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\phi} \overrightarrow{X_2}.$$

$$\text{On a donc, } \overrightarrow{\sigma(O, S/R_0)} = \dot{\phi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} +$$

$$(M_C + M_{Cp}) \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{Z_2} \wedge v(t) \overrightarrow{X_0} = \dot{\phi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} +$$

$$(M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) v(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0}.$$

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\phi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} +$$

$$(M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) (a(t) \cos \varphi - v(t) \dot{\phi} \sin \varphi) \overrightarrow{Y_0}.$$

$$\overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} \wedge (M_C + M_{Cp}) \left( v(t) \overrightarrow{X_0} + \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\phi} \overrightarrow{X_2} \right)$$

$$= (M_C + M_{Cp}) \left( \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\phi} v(t) \sin \varphi \right) \overrightarrow{Y_2} =$$

$$(M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) \dot{\phi} v(t) \sin \varphi \overrightarrow{Y_2}.$$

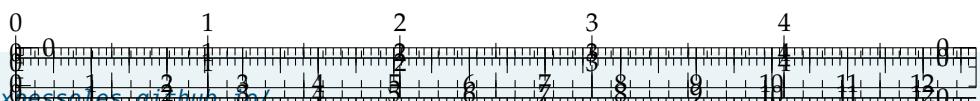
$$\text{Au final, } \overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \dot{\phi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} +$$

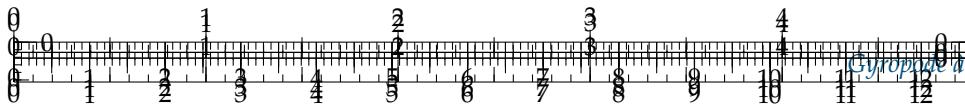
$$(M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0}$$

**Bilan des actions mécaniques en  $O$  agissant sur  $E$** 

► Liaison pivot  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\}$  avec  $\overrightarrow{M(O, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = 0$ .

►  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C)\}$  avec  $\overrightarrow{M(O, \text{pes} \rightarrow C)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = (\overrightarrow{OG} \wedge -M_C g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} = (L_C \overrightarrow{Z_2} \wedge -M_C g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} = L_C M_C g \sin \varphi \overrightarrow{Y_2}$ .





$$\blacktriangleright \{T(pes \rightarrow Cp)\} \text{ avec } \overrightarrow{M(O, pes \rightarrow Cp)} \cdot \vec{Y}_2 = \left( -L_{Cp} \vec{Z}_2 \wedge -M_{Cp} g \vec{Z}_0 \right) \vec{Y}_2 = -L_{Cp} M_{Cp} g \sin \varphi \vec{Y}_2.$$

**Théorème du moment dynamique en O en projection sur  $\vec{Y}_2$**

$$\ddot{\varphi} \left( M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 \right) + \left( M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp} \right) a(t) \cos \varphi = L_C M_C g \sin \varphi - L_{Cp} M_{Cp} g \sin \varphi.$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} \left( M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 \right) + \left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g \sin \varphi = - \left( M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp} \right) a(t) \cos \varphi.$$

$$\text{On a donc : } Q_1 = M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2, \quad Q_2(t) = \left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g \sin \varphi, \quad Q_3(t) = \left( M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C \right) \cos \varphi.$$

**Question 2** Établir sous forme canonique la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$ . Donner l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  en fonction de  $m_c$ ,  $m_{cp}$ ,  $L_c$ ,  $L_{cp}$  et  $g$ .

#### Correction

Dans les conditions précédentes, on a  $Q_1 = M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$ ,  $Q_2(t) = \left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g \varphi$  et  $Q_3(t) = \left( M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C \right)$ .

$$\text{L'équation de comportement devient donc } Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g \varphi = Q_3 a(t)$$

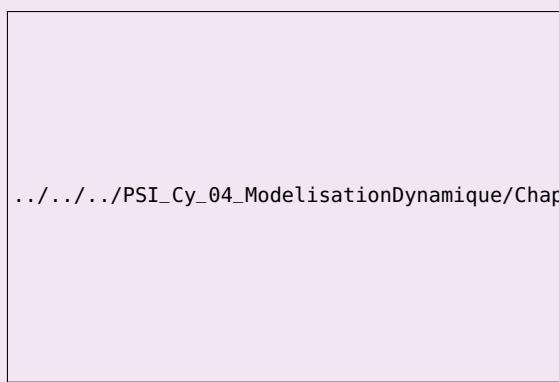
$$\Rightarrow Q_1 p^2 \Phi(p) + \left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g \Phi(p) = Q_3 A(p) \text{ et } H(p) = \frac{Q_3}{Q_1 p^2 + \left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g}.$$

$$\text{On a donc } \omega_0^2 = \frac{\left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g}{Q_1} = \frac{\left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g}{M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}. \text{ Le gain } K \text{ vaut}$$

$$\frac{M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C}{\left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g} = \frac{1}{g}.$$

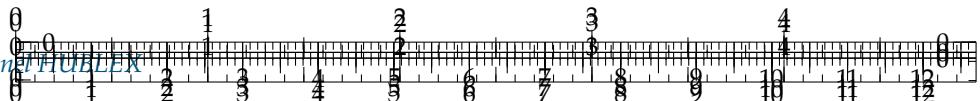
**Question 3** Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain  $G_{dB} = f(\omega)$  de la fonction de transfert  $H(j\omega)$ . Placer les caractéristiques remarquables.

#### Correction



**Question 4** Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que  $\omega_0 = 0,1\omega_a$ .





Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple  $(m_{cp}, L_{cp})$ . En utilisant le comportement asymptotique en gain de  $G_{dB}$ , estimer numériquement l'amplitude  $\Delta\varphi$  (en degrés) des oscillations de **(E)** selon l'axe  $(O, \vec{y}_0)$ .

#### Correction

On a  $\omega_a = 10\omega_0$ . Une décade après  $\omega_0$ ,  $G_{dB} = -20 \log 10 - 40 = -60$  dB. Une atténuation de  $-60$  dB correspond à un gain de  $10^{-\frac{60}{20}} = 0,001$ . L'amplitude des oscillations sera donc de  $0,001a_0 = 5 \times 10^{-4}$  rad soit  $0,03^\circ$ .

#### Retour sur le cahier des charges

##### Éléments de correction

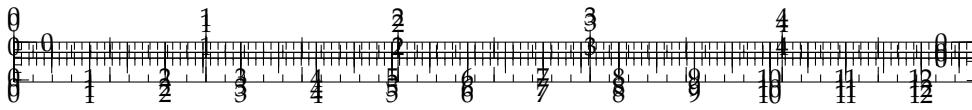
1.  $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2, \quad Q_2(t) = (L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C) g \sin \varphi, \quad Q_3(t) = (M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C) \cos \varphi.$
2.  $\omega_0^2 = \frac{(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C) g}{M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}.$
3. .
4.  $0,03^\circ$ .
5. .

**Élement de correction 5** Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

##### Conclusion

$0,03^\circ < 0,5^\circ$ . Le cahier des charges est vérifié au voisinage de  $10\omega_0$ .





## Colle 1 Porte outil – Sujet

C1-05

Le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage est composé de trois solides **1**, **2** et **3**.

Le repère  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , avec  $(O, \vec{z}_0)$  vertical ascendant, est lié au bâti **0** de la machine. Il est supposé galiléen. Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Le repère  $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  est lié au support tournant **1** en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti **0**. La position de **1** par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  est repérée par  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .

On note  $I_1$  le moment d'inertie de **1** par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et  $H$  le point tel que  $\overrightarrow{OH} = h\vec{x}_1$ .

Le repère  $\mathcal{R}_2 = (H; \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$  est lié au bras pivotant **2** en liaison pivot d'axe  $(H, \vec{y}_1)$  avec **1**. La position de **2** est repérée par  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$ .

On note  $m_2$  la masse de **(2)**, de centre d'inertie  $H$  de matrice d'inertie  $I_H(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$ .

Le repère  $\mathcal{R}_3 = (G; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$  est lié au porte-outil **(3)** (avec l'outil à affûter tenu par le mandrin) en liaison pivot glissant d'axe  $(H, \vec{z}_2)$  avec **(2)**.

La position de **(3)** est repérée par  $\gamma = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$  et par  $\overrightarrow{HG} = \lambda\vec{z}_2$ .

On note  $m_3$  la masse de **(3)**, de centre d'inertie  $G$  de matrice d'inertie  $I_G(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$ .

**Question 1** Justifier la forme de la matrice de la pièce **(3)**.

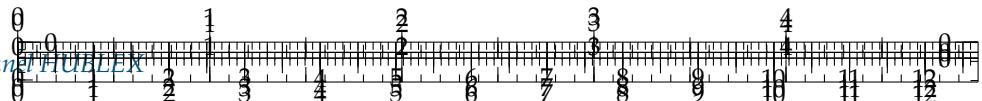
**Question 2** Calculer  $\overline{V}(G, 3/0)$ .

**Question 3** Indiquer la méthode permettant de calculer le torseur dynamique en  $G$  de **(3)** en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en projection sur  $\vec{z}_2$ .



C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

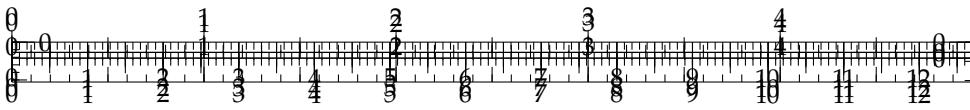


**Question 4** Calculer le moment dynamique en  $H$  appliqué à l'ensemble  $\{2, 3\}$  en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en projection sur  $\vec{y}_1$ .

**Question 5** Calculer le moment dynamique en  $O$  appliqué à l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$  en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en projection sur  $\vec{z}_0$ .

.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques/Cy\_04\_02\_Colle\_01\_Portrait





## Colle 1 Porte outil – Corrigé

C1-05

Le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage est composé de trois solides **1**, **2** et **3**.

Le repère  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , avec  $(O, \vec{z}_0)$  vertical ascendant, est lié au bâti **0** de la machine. Il est supposé galiléen. Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Le repère  $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  est lié au support tournant **1** en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti **0**. La position de **1** par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  est repérée par  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .

On note  $I_1$  le moment d'inertie de **1** par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et  $H$  le point tel que  $\overrightarrow{OH} = h\vec{x}_1$ .

Le repère  $\mathcal{R}_2 = (H; \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$  est lié au bras pivotant **2** en liaison pivot d'axe  $(H, \vec{y}_1)$  avec **1**. La position de **2** est repérée par  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$ .

On note  $m_2$  la masse de **(2)**, de centre d'inertie  $H$  de matrice d'inertie  $I_H(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$ .

Le repère  $\mathcal{R}_3 = (G; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$  est lié au porte-outil **(3)** (avec l'outil à affûter tenu par le mandrin) en liaison pivot glissant d'axe  $(H, \vec{z}_2)$  avec **(2)**.

La position de **(3)** est repérée par  $\gamma = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$  et par  $\overrightarrow{HG} = \lambda\vec{z}_2$ .

On note  $m_3$  la masse de **(3)**, de centre d'inertie  $G$  de matrice d'inertie  $I_G(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$ .

**Question 1** Justifier la forme de la matrice de la pièce **(3)**.

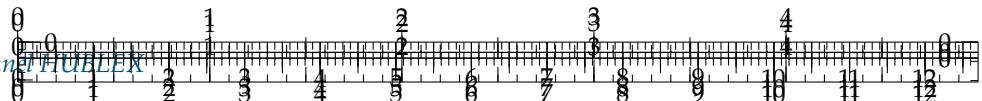
**Question 2** Calculer  $\overline{V}(G, 3/0)$ .

**Question 3** Indiquer la méthode permettant de calculer le torseur dynamique en  $G$  de **(3)** en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en projection sur  $\vec{z}_2$ .



C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn



**Question 4** Calculer le moment dynamique en  $H$  appliqué à l'ensemble  $\{2, 3\}$  en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en projection sur  $\vec{y}_1$ .

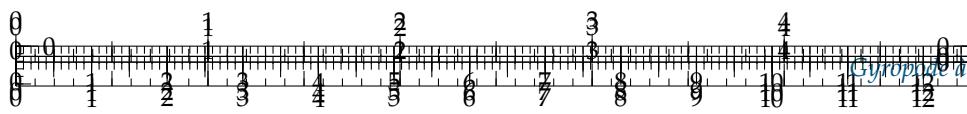
**Question 5** Calculer le moment dynamique en  $O$  appliqué à l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$  en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en projection sur  $\vec{z}_0$ .

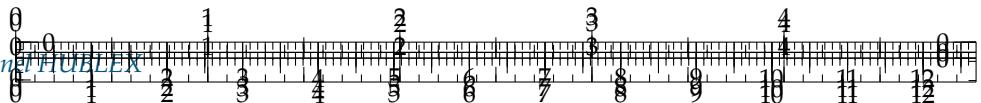
$$1. \quad \{\mathcal{V}(3/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}\vec{z}_0 + \dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\gamma}\vec{z}_2 \\ r\dot{\beta}\vec{x}_2 + (h + r \sin \beta) \dot{\alpha}\vec{y}_1 + \dot{r}\vec{z}_2 \end{array} \right\}_G.$$

$$2. \quad \overrightarrow{\Gamma(G, 3/\mathcal{R}_0)} = (2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta})\vec{x}_2 \\ + [2\dot{\alpha}(r \sin \beta + r\dot{\beta} \cos \beta) + (h + r \sin \beta) \ddot{\alpha}] \vec{y}_1 \\ - (h + r \sin \beta) \dot{\alpha}^2 \vec{x}_1 \\ + (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2) \vec{z}_2.$$

../../../../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques

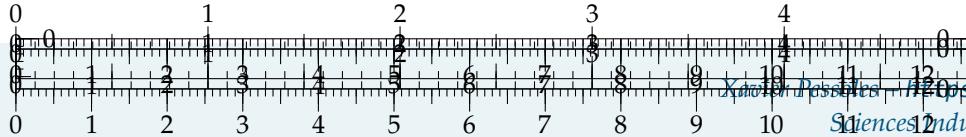
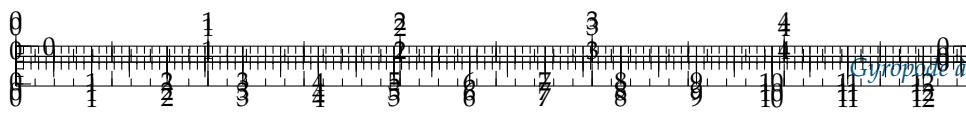




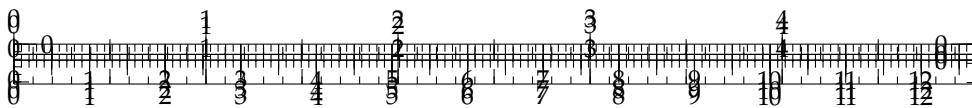


../../../../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamique









## Colle 2

### Disque déséquilibré – Sujet

Soit le rotor **(1)** défini ci-contre. Il est constitué d'un arbre de masse négligeable en liaison pivot par rapport à un bâti **(0)**. Sur cet arbre est monté, en liaison complète, un disque de masse  $M$ , de rayon  $R$  et d'épaisseur  $H$ . Le repère  $\mathcal{R}'_1 = (G; \vec{x}'_1, \vec{y}'_1, \vec{z}'_1)$  est attaché à ce solide.

La base  $\mathcal{B}'_1 = (\vec{x}'_1, \vec{y}'_1, \vec{z}'_1)$  se déduit de  $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  par une rotation d'angle  $\alpha$  autour de  $\vec{z}_1 = \vec{z}'_1$ .

La base  $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  se déduit de  $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$ .

Enfin, le rotor **1** est entraîné par un moteur (non représenté) fournissant un couple noté  $C_m \vec{x}_0$ . Le montage de ce disque présente deux défauts :

- ▶ un défaut de perpendicularité caractérisé par l'angle  $\alpha$ ;
- ▶ un défaut d'excentricité représenté par la cote  $e$ .

**Question 1** Déterminer la forme de la matrice d'inertie du cylindre en C dans la base  $\mathcal{B}'_1$ .

**Question 2** Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de **(1)** dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

**Question 3** Appliquer le PFD pour déterminer les inconnues de liaison.

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09

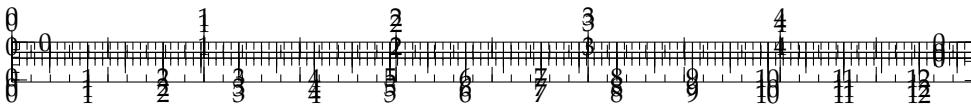
.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisati







## Colle 2

### Disque déséquilibré – Corrigé

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09

Soit le rotor (1) défini ci-contre. Il est constitué d'un arbre de masse négligeable en liaison pivot par rapport à un bâti (0). Sur cet arbre est monté, en liaison complète, un disque de masse  $M$ , de rayon  $R$  et d'épaisseur  $H$ . Le repère  $\mathcal{R}'_1 = (G; \vec{x}'_1, \vec{y}'_1, \vec{z}'_1)$  est attaché à ce solide.

La base  $\mathcal{B}'_1 = (\vec{x}'_1, \vec{y}'_1, \vec{z}'_1)$  se déduit de  $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  par une rotation d'angle  $\alpha$  autour de  $\vec{z}_1 = \vec{z}'_1$ .

La base  $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  se déduit de  $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$ .

Enfin, le rotor 1 est entraîné par un moteur (non représenté) fournissant un couple noté  $C_m \vec{x}_0$ . Le montage de ce disque présente deux défauts :

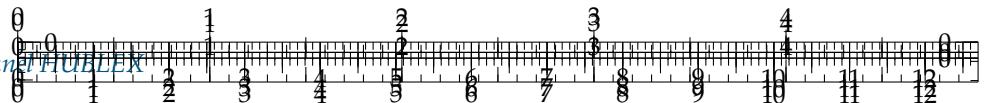
- ▶ un défaut de perpendicularité caractérisé par l'angle  $\alpha$ ;
- ▶ un défaut d'excentricité représenté par la cote  $e$ .

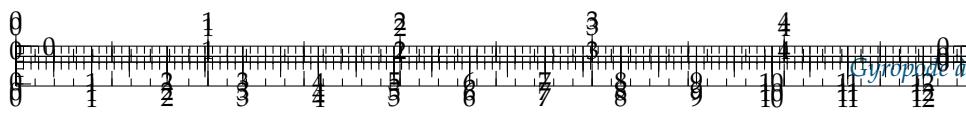
**Question 1** Déterminer la forme de la matrice d'inertie du cylindre en C dans la base  $\mathcal{B}'_1$ .

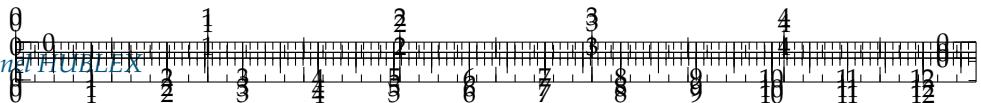
**Question 2** Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de (1) dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

**Question 3** Appliquer le PFD pour déterminer les inconnues de liaison.



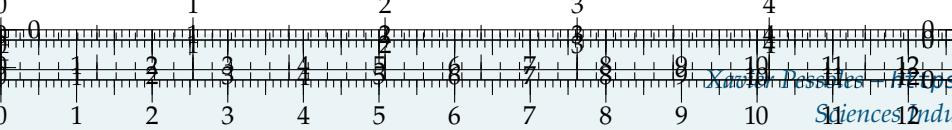
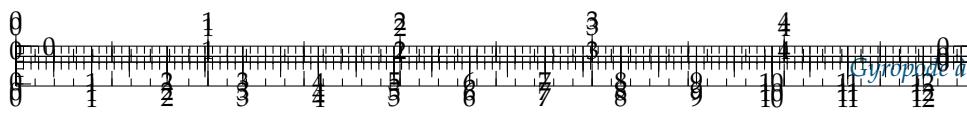


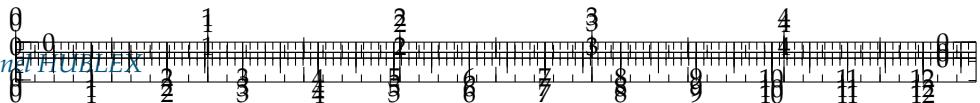




../../../../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamique

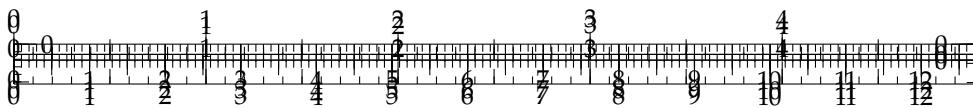






.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamiques





## Colle 3

### Régulateur – Sujet

C1-05

C2-09

Un système matériel est constitué de 5 solides reliés au bâti (0). Les solides (1), (2), (3) et (5) sont des barres sans épaisseur, articulées par des pivots en  $O$ ,  $A$  ou  $B$  de manière à demeurer dans un même plan noté  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$ . Cet ensemble est donc mobile en rotation autour de  $\vec{z}_1$ . On repère sa position angulaire par le paramètre  $\psi$ .

Au bâti (0), on associe le repère fixe  $\mathcal{R}_0$ .

À chaque  $S_i$  on associe une base  $\mathcal{B}_i (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ . Les repères  $\mathcal{R}_i$  sont d'origine  $O$  ou  $A$  selon le cas.

Les rotations internes sont définies par  $\theta_2$  autour de  $(O, \vec{y}_1)$  et  $\theta_3$  autour de  $(A, \vec{y}_1)$ .

Les barres (2) et (3) sont identiques, de longueur  $2a$  et de masse  $m_2 = m_3 = m$ .

Les barres (1) et (5) ont une masse  $m_i$  et des longueurs  $\ell_i$ . (4) est un volant d'inertie de masse  $M$  qui fait l'objet d'une liaison pivot d'axe  $(G, \vec{x}_3)$  avec la barre (3). Un repère  $\mathcal{R}_4$  est lié à ce volant dont on définit sa position par le paramètre angulaire  $\varphi$ .

On donne le paramétrage suivant.

**Question 1** Proposer une matrice d'inertie pour chacun des solides.

**Question 2** Déterminer les torseurs cinétiques suivants :  $\{\mathcal{C}(1/0)\}_O, \{\mathcal{C}(2/0)\}_O$ .

**Question 3** Déterminer les torseurs dynamiques suivants :  $\{\mathcal{D}(1/0)\}_O, \{\mathcal{D}(2/0)\}_O$ . En déduire  $\{\mathcal{D}(1 \cup 2/0)\}_O$

**Question 4** Déterminer les torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(4/0)\}_G$ .

**Question 5** Déterminer les torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5/0)\}_O$ .

**Question 6** Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble du système dans son mouvement par rapport au bâti.

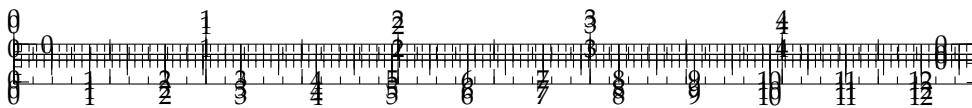
.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisati







## Colle 3

### Régulateur – Corrigé

C1-05

C2-09

Un système matériel est constitué de 5 solides reliés au bâti (0). Les solides (1), (2), (3) et (5) sont des barres sans épaisseur, articulées par des pivots en  $O$ ,  $A$  ou  $B$  de manière à demeurer dans un même plan noté  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$ . Cet ensemble est donc mobile en rotation autour de  $\vec{z}_1$ . On repère sa position angulaire par le paramètre  $\psi$ .

Au bâti (0), on associe le repère fixe  $\mathcal{R}_0$ .

À chaque  $S_i$  on associe une base  $\mathcal{B}_i (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ . Les repères  $\mathcal{R}_i$  sont d'origine  $O$  ou  $A$  selon le cas.

Les rotations internes sont définies par  $\theta_2$  autour de  $(O, \vec{y}_1)$  et  $\theta_3$  autour de  $(A, \vec{y}_1)$ .

Les barres (2) et (3) sont identiques, de longueur  $2a$  et de masse  $m_2 = m_3 = m$ .

Les barres (1) et (5) ont une masse  $m_i$  et des longueurs  $\ell_i$ . (4) est un volant d'inertie de masse  $M$  qui fait l'objet d'une liaison pivot d'axe  $(G, \vec{x}_3)$  avec la barre (3). Un repère  $\mathcal{R}_4$  est lié à ce volant dont on définit sa position par le paramètre angulaire  $\varphi$ .

On donne le paramétrage suivant.

**Question 1** Proposer une matrice d'inertie pour chacun des solides.

**Question 2** Déterminer les torseurs cinétiques suivants :  $\{\mathcal{C}(1/0)\}_O, \{\mathcal{C}(2/0)\}_O$ .

**Question 3** Déterminer les torseurs dynamiques suivants :  $\{\mathcal{D}(1/0)\}_O, \{\mathcal{D}(2/0)\}_O$ .  
En déduire  $\{\mathcal{D}(1 \cup 2/0)\}_O$

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

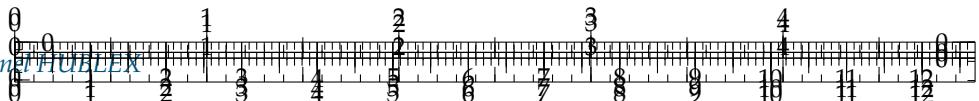
#### Correction

**Détermination de  $\{\mathcal{C}(1/0)\}_O$**   $O$  est un point fixe. On a donc :

$$\{\mathcal{C}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_1 \overrightarrow{V(G_1, 1/0)}}{\sigma(O_1, 1/0)} = I_O(1) \overrightarrow{\Omega(1/0)} \end{array} \right\}_O$$

(1) est une tige d'axe  $\vec{z}_0$  et de rayon négligeable. On a donc  $I_O(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$





avec  $A_1 = \frac{m_1 l_1^2}{3}$ . De plus,  $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\psi} \overrightarrow{z_1} \\ V(O, 1/0) = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$ . On a donc  $I_O(1) \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \left( \begin{array}{ccc} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_{\mathcal{R}_1} \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{array} \right)_{\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{0}$ . Au final :

$$\{\mathcal{C}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

**Détermination de  $\{\mathcal{C}(2/0)\}_O$**   $O$  est un point fixe. On a donc :

$$\{\mathcal{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_2 \overrightarrow{V(G_2, 2/0)} \\ \sigma(O, 2/0) \end{array} \right\}_O$$

(2) est une tige d'axe  $\overrightarrow{z_2}$  et de rayon négligeable. On a donc  $I_{O_2}(2) = \left( \begin{array}{ccc} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_{\mathcal{R}_2}$  avec

$$A_2 = \frac{4ma^2}{3} = . \text{ De plus, } \{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\psi} \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta} \overrightarrow{y_2} \\ V(G_2, 2/0) \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{V(G_2, 2/0)} = \overrightarrow{V(O, 2/0)} + \overrightarrow{G_2 O} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/0)} = -a \overrightarrow{z_2} \wedge (\dot{\psi} \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta} \overrightarrow{y_2}) = a (\dot{\psi} \sin \theta \overrightarrow{y_1} + \dot{\theta} \overrightarrow{x_2}) = a (\dot{\psi} \sin \theta \overrightarrow{y_1} + \dot{\theta} (\cos \theta \overrightarrow{x_1} - \sin \theta \overrightarrow{z_1}))$$

On a donc

$$I_{O_2}(2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \left( \begin{array}{ccc} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_{\mathcal{R}_2} \left( \begin{array}{c} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{array} \right)_{\mathcal{R}_2} = \left( \begin{array}{c} -A_2 \dot{\psi} \sin \theta \\ A_2 \dot{\theta} \\ 0 \end{array} \right)_{\mathcal{R}_2} .$$

Au final :

$$\{\mathcal{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} ma \left( \begin{array}{c} \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right)_{\mathcal{R}_1} \\ \left( \begin{array}{c} -A_2 \dot{\psi} \sin \theta \\ A_2 \dot{\theta} \\ 0 \end{array} \right)_{\mathcal{R}_2} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} ma \left( \begin{array}{c} \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right)_{\mathcal{R}_1} \\ \left( \begin{array}{c} -A_2 \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta \\ A_2 \dot{\theta} \\ A_2 \dot{\psi} \sin \theta \sin \theta \end{array} \right)_{\mathcal{R}_1} \end{array} \right\}_O$$

**Détermination de  $\{\mathcal{C}(3/0)\}_O$**  \*\*\*\*\* Au point  $G_3$ , on a :

$$\{\mathcal{C}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_3 \overrightarrow{V(G_3, 3/0)} \\ \sigma(G_3, 3/0) \end{array} \right\}_O$$

(3) est une tige d'axe  $\overrightarrow{x_3}$  et de rayon négligeable. On a donc  $I_{G_3}(3) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{array} \right)_{\mathcal{R}_3}$  avec

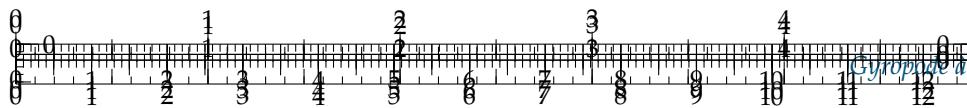
$$A_4 = \frac{4ma^2}{3} = . \text{ De plus, } \{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\psi} \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_3 \overrightarrow{y_3} \\ V(G_3, 3/0) \end{array} \right\}_{G_3}$$

$$\overrightarrow{V(G_3, 3/0)}$$

On a donc

$$I_{O_2}(2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \left( \begin{array}{ccc} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_{\mathcal{R}_2} \left( \begin{array}{c} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{array} \right)_{\mathcal{R}_2} = \left( \begin{array}{c} -A_2 \dot{\psi} \sin \theta \\ A_2 \dot{\theta} \\ 0 \end{array} \right)_{\mathcal{R}_2} .$$





Au final :

$$\{\mathcal{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} ma & \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\psi} \sin \theta & -\dot{\theta} \sin \theta \\ -A_2 \dot{\psi} \sin \theta & A_2 \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \right\}_O = \left\{ \begin{pmatrix} ma & \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\psi} \sin \theta & -\dot{\theta} \sin \theta \\ -A_2 \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta & A_2 \dot{\theta} \\ A_2 \dot{\psi} \sin \theta \sin \theta & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \right\}_O$$

**Question 4** Déterminer les torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(4/0)\}_G$ .

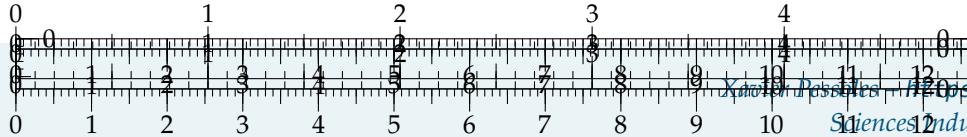
**Correction**

**Question 5** Déterminer les torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5/0)\}_O$ .

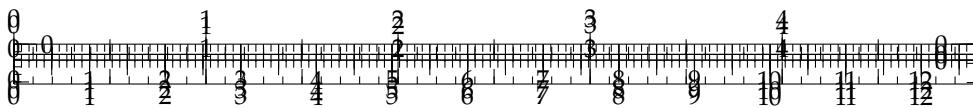
**Correction**

**Question 6** Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble du système dans son mouvement par rapport au bâti.

**Correction**







## Colle 4

### Culbuto – Sujet

Le schéma de la figure ci-contre représente un jouet d'enfant constitué d'un premier solide (1), assemblage d'un demi disque de rayon  $R_1$  et d'une tige, et d'un solide (2), guidé par une glissière de centre A sur la tige de (1). Un ressort (r), de raideur  $k$  et de longueur libre  $L_0$ , est interposé entre les deux solides. Le disque (1) est en contact ponctuel en H avec le sol (0). On suppose qu'il y a roulement sans glissement en H entre (0) et (1).

#### Paramétrage et éléments d'inertie

- Le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti est supposé galiléen. Le repère  $(C; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié au disque (1).
- La liaison glissière entre (1) et (2) est supposée sans frottement.
- On note :  $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$ ,  $\vec{CA} = \lambda_2 \vec{y}_1$ ,  $\vec{HC} = R_1 \vec{y}_0$ ,  $\vec{CG}_1 = -a_1 \vec{y}_1$ ,  $\vec{AG}_2 = a_2 \vec{y}_1$ .
- (1) : masse  $m_1$ ,  $I_{G_1}$  (1) =  $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- (2) : masse  $m_2$ ,  $I_{G_2}$  (2) =  $\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

**Question 1** Déterminer les équations différentielles du mouvement de (1) et de (2) par rapport au bâti (0).

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

C1-05

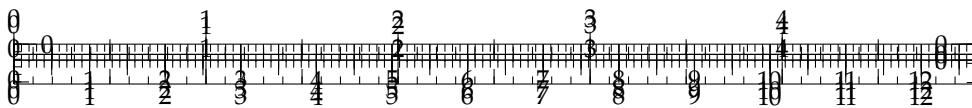
C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_Modelisati







## Colle 4

### Culbuto – Corrigé

Le schéma de la figure ci-contre représente un jouet d'enfant constitué d'un premier solide (1), assemblage d'un demi disque de rayon  $R_1$  et d'une tige, et d'un solide (2), guidé par une glissière de centre A sur la tige de (1). Un ressort (r), de raideur  $k$  et de longueur libre  $L_0$ , est interposé entre les deux solides. Le disque (1) est en contact ponctuel en  $H$  avec le sol (0). On suppose qu'il y a roulement sans glissement en  $H$  entre (0) et (1).

#### Paramétrage et éléments d'inertie

- Le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti est supposé galiléen. Le repère  $(C; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié au disque (1).
- La liaison glissière entre (1) et (2) est supposée sans frottement.
- On note :  $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$ ,  $\vec{CA} = \lambda_2 \vec{y}_1$ ,  $\vec{HC} = R_1 \vec{y}_0$ ,  $\vec{CG}_1 = -a_1 \vec{y}_1$ ,  $\vec{AG}_2 = a_2 \vec{y}_1$ .
- (1) : masse  $m_1$ ,  $I_{G_1}$  (1) =  $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- (2) : masse  $m_2$ ,  $I_{G_2}$  (2) =  $\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

**Question 1** Déterminer les équations différentielles du mouvement de (1) et de (2) par rapport au bâti (0).

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

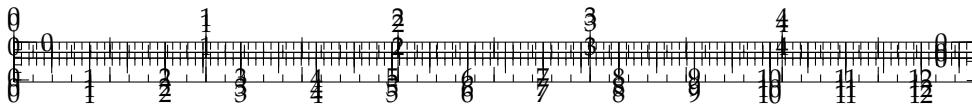
C1-05

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn







## Colle 5

### Mesure de moment d'inertie – Sujet

La figure ci-dessus représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie  $I$  d'un solide de révolution (2) par rapport à son axe. Soit  $R_0$  un repère galiléen lié au bâti ( $S_0$ ) tel que l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  soit vertical descendant. Les deux portées sur lesquelles roule le solide (2) sont des portions de la surface d'un cylindre de révolution d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et de rayon  $r$ . Le solide (2), de masse  $m$ , de centre d'inertie  $C$ , possède deux tourillons de même rayon  $a$ . Soit  $f$  le coefficient de frottement entre (2) et ( $S_0$ ). L'étude se ramène à celle d'un problème plan paramétré de la façon suivante :

- ▶ le tourillon de (2), de centre  $C$ , roule sans glisser en  $A$  sur la portée cylindrique de ( $S_0$ );
- ▶  $R_1$  est un repère tel que  $\overrightarrow{OA} = r\vec{x}_1$  et on pose  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ;
- ▶  $R_2$  est un repère lié à 2 avec  $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On suppose que  $\varphi = 0$  lorsque  $\theta = 0$ .

**Question 1** Donner la relation entre  $\varphi$  et  $\theta$ .

**Question 2** Déterminer l'équation du mouvement de (2) par rapport à ( $S_0$ ) en fonction de  $\theta$ .

**Question 3** On suppose que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du mouvement. Montrer que le mouvement est périodique et déterminer la période  $T$  des oscillations de (2).

**Question 4** En déduire le moment d'inertie  $I$  de (S) sachant que :  $T = 5 \text{ s}$ ;  $a = 12,5 \text{ mm}$ ;  $r = 141,1 \text{ mm}$ ;  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;  $m = 7217 \text{ g}$ ;  $f = 0,15$ .

**Question 5** Déterminer l'angle  $\theta_0$  maxi pour qu'il n'y ait pas glissement en  $A$ . Faire l'application numérique.

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

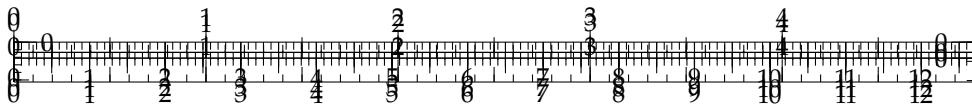
C1-05

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn







## Colle 5

### Mesure de moment d'inertie – Corrigé

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09

La figure ci-dessus représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie  $I$  d'un solide de révolution (2) par rapport à son axe. Soit  $R_0$  un repère galiléen lié au bâti ( $S_0$ ) tel que l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  soit vertical descendant. Les deux portées sur lesquelles roule le solide (2) sont des portions de la surface d'un cylindre de révolution d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et de rayon  $r$ . Le solide (2), de masse  $m$ , de centre d'inertie  $C$ , possède deux tourillons de même rayon  $a$ . Soit  $f$  le coefficient de frottement entre (2) et ( $S_0$ ). L'étude se ramène à celle d'un problème plan paramétré de la façon suivante :

- ▶ le tourillon de (2), de centre  $C$ , roule sans glisser en  $A$  sur la portée cylindrique de ( $S_0$ );
- ▶  $R_1$  est un repère tel que  $\overrightarrow{OA} = r\vec{x}_1$  et on pose  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ;
- ▶  $R_2$  est un repère lié à 2 avec  $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On suppose que  $\varphi = 0$  lorsque  $\theta = 0$ .

**Question 1** Donner la relation entre  $\varphi$  et  $\theta$ .

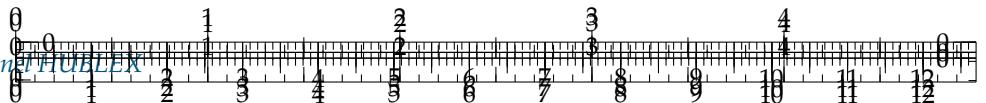
**Question 2** Déterminer l'équation du mouvement de (2) par rapport à ( $S_0$ ) en fonction de  $\theta$ .

**Question 3** On suppose que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du mouvement. Montrer que le mouvement est périodique et déterminer la période  $T$  des oscillations de (2).

**Question 4** En déduire le moment d'inertie  $I$  de (S) sachant que :  $T = 5 \text{ s}$ ;  $a = 12,5 \text{ mm}$ ;  $r = 141,1 \text{ mm}$ ;  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;  $m = 7217 \text{ g}$ ;  $f = 0,15$ .

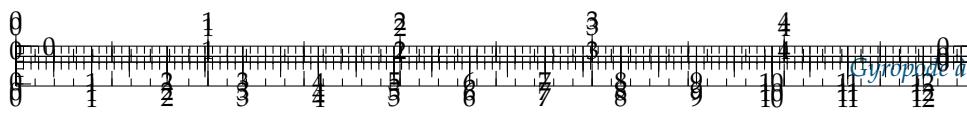
**Question 5** Déterminer l'angle  $\theta_0$  maxi pour qu'il n'y ait pas glissement en  $A$ . Faire l'application numérique.



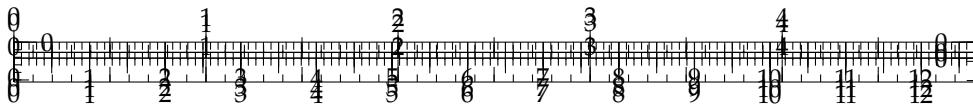


.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_02\_TorseursCinetiquesDynamique









# Application 1

## Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme – Su-jet

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

### Mise en situation

Les figures et le schéma ci-dessous représentent un micromoteur à combustion interne de modèle réduit. Du point de vue cinématique, il est basé sur un système bielle manivelle (2,1), associé à un piston (3), animé d'un mouvement de translation rectiligne alternatif.

On note :

- $\vec{AB} = e\vec{x}_1$ ,  $\vec{BC} = L_2\vec{y}_2$ ,  $\vec{AC} = \lambda_3\vec{y}_0$ ;
- $\vec{HG}_1 = a_1\vec{x}_1$ ,  $\vec{BG}_2 = a_2\vec{y}_2$ ,  $\vec{CG}_3 = a_3\vec{y}_0$ ;
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$ ,  $(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = \theta_2$ ;  $\omega_{10} = \dot{\theta}_1$  et  $\omega_{20} = \dot{\theta}_2$ ;
- $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  les masses des trois pièces mobiles (1), (2) et (3).

On note  $C_m\vec{z}_0$  le couple délivré par le moteur et  $F_e\vec{y}_0$  la force exercée sur le piston suite à l'explosion du mélange air – carburant. On néglige les effets de la pesanteur.

**Question 1** Exprimer la relation liant la vitesse de rotation  $\omega_{10}$  du vilebrequin (1) et la vitesse du piston (3), notée  $\dot{\lambda} = V_{3/0}$ .

Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

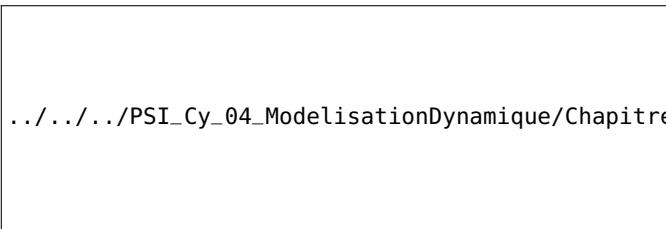
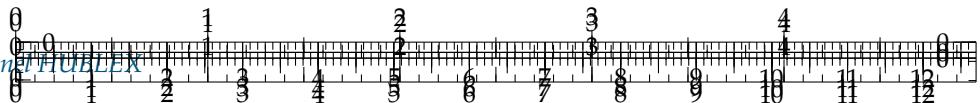
On note  $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(H;\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$  la matrice d'inertie en  $H$  de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré (1).

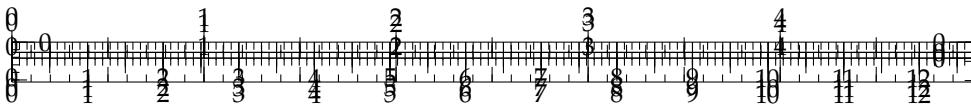
**Question 2** En considérant que seul le plan  $(H, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie  $I_A(1)$ ,  $I_{G_2}(2)$  et  $I_{G_3}(3)$  sont diagonales.

**Question 3** Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.







## Application 1

# Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme – Corrigé

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

### Mise en situation

**Question 1** Exprimer la relation liant la vitesse de rotation  $\omega_{10}$  du vilebrequin (1) et la vitesse du piston (3), notée  $\lambda = V_{3/0}$ .

#### Correction

On réalise une fermeture géométrique dans le triangle  $ABC$  et on a :  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow e\vec{x}_1 + L_2\vec{x}_2 - \lambda_3\vec{y}_0 \Leftrightarrow e(\cos \theta_1\vec{x}_0 + \sin \theta_1\vec{y}_0) + L_2(\cos \theta_2\vec{x}_0 + \sin \theta_2\vec{y}_0) - \lambda_3\vec{y}_0 = \vec{0}$ .

$$\text{On a donc : } \begin{cases} e \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 = 0 \\ e \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \cos \theta_2 = -e \cos \theta_1 \\ L_2 \sin \theta_2 = \lambda_3 - e \sin \theta_1 \end{cases} \text{ Au final, } L_2^2 = e^2 \cos^2 \theta_1 + (\lambda_3 - e \sin \theta_1)^2 \Leftrightarrow L_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1 = (\lambda_3 - e \sin \theta_1)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{L_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1} = \lambda_3 - e \sin \theta_1 \Rightarrow \lambda_3 = \sqrt{L_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1} + e \sin \theta_1.$$

.../.../.../F5105Cy\_04\_ModelisationDyn  
C2-09

**Question 2** En considérant que seul le plan  $(H, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.

#### Correction

On a donc une invariance suivant  $\vec{y}_1$  et  $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(H; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie  $I_A$  (1),  $I_{G_2}$  (2) et  $I_{G_3}$  (3) sont diagonales.

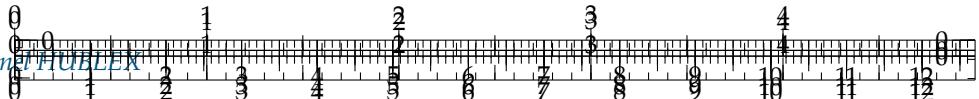
#### Correction

$H$  est un point fixe :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \{\mathcal{C}(1/0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(1/0)} = m_1 \overrightarrow{V(G_1, 1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(H, 1/0)} = I_H(1) \overrightarrow{\Omega(1/0)} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_H \\ \blacktriangleright \quad \{\mathcal{D}(1/0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(H, 1/0)} = \left[ \frac{d\delta(H, 1/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_H \end{aligned}$$

$G_3$  est le centre de gravité de 3. Le solide 3 est en translation par rapport à 0.





$$\blacktriangleright \{C(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(3/0)} = m_3 \overrightarrow{V(G_3, 3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3 \lambda_3 \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3}$$

$$\blacktriangleright \{D(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(3/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_3, 1/0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_3, 3/0)}}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3 \ddot{\lambda}_3 \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3}$$

$G_2$  est le centre de gravité de 2.

$$\blacktriangleright \{C(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(2/0)} = m_2 \overrightarrow{V(G_2, 2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_2, 2/0)} = I_{G_2}(2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (\dot{\lambda}_3 \vec{y}_0 + a_2 \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \\ C_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\blacktriangleright \{D(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (\ddot{\lambda}_3 \vec{y}_0 + a_2 \ddot{\theta}_2 \vec{x}_2 + a_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{y}_2) \\ C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{G_2}$$

Détail des calculs.

**Calcul de  $\overrightarrow{V(G_2, 2/0)}$ .**

$$\overrightarrow{V(G_2, 2/0)} = \overrightarrow{V(G_2, 2/3)} + \overrightarrow{V(G_2, 3/0)}$$

$$\overrightarrow{V(G_2, 2/3)} = \overrightarrow{V(C, 2/3)} + \overrightarrow{G_2 C} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/3)} = \vec{0} + a_2 \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 = a_2 \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 \quad \overrightarrow{V(G_2, 3/0)} = \dot{\lambda}_3 \vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{V(G_2, 2/0)} = \dot{\lambda}_3 \vec{y}_0 + a_2 \dot{\theta}_2 \vec{x}_2.$$

**Calcul de  $\overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)}$ .**

$$\overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} = \ddot{\lambda}_3 \vec{y}_0 + a_2 \ddot{\theta}_2 \vec{x}_2 + a_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{y}_2.$$

**Question 3** Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.

### Correction

► On isole (1).

► Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_A$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \cdot \vec{z}_0 = 0$  (pas de frottement dans la liaison).
- Liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \vec{z}_0 = 0$  (pas de frottement dans la liaison). Par ailleurs,  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 2 \rightarrow 1)} \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \vec{z}_0 + (\vec{AB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)}) \vec{z}_0 = (e \vec{x}_1 \wedge (X_{21} \vec{x}_2 + Y_{21} \vec{y}_2)) \vec{z}_0 = (e X_{21} \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 + e Y_{21} \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2) \vec{z}_0 = e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1)$
- Couple moteur :  $\{\mathcal{T}(0_m \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{array} \right\}_A$ .

► On applique le TMD en  $A$  en projection suivant  $\vec{z}$  :

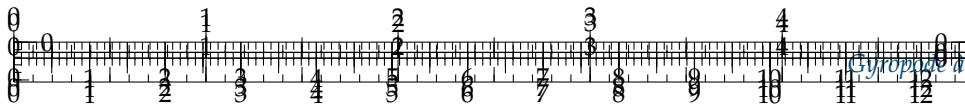
$$e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1) + C_m = C_1 \ddot{\theta}_1$$

► On isole (2).

► Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \vec{z}_0 = 0$  (pas de frottement dans la liaison).





- Liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 3)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_C$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$   
(pas de frottement dans la liaison).

► On applique le TMD en  $C$  en projection sur  $\overrightarrow{z_0}$  :

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z} &= \overrightarrow{\delta(C, 2/0)} \cdot \overrightarrow{z} \iff L_2 \overrightarrow{y_2} \wedge (X_{21} \overrightarrow{x_2} + Y_{21} \overrightarrow{y_2}) \cdot \overrightarrow{z} = (\overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} + \overrightarrow{CG_2} \wedge m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)}) \cdot \overrightarrow{z} \\ \implies -L_2 X_{21} &= C_2 \ddot{\theta}_2 \left( -a_2 \overrightarrow{y_2} \wedge (m_2 (\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2})) \right) \cdot \overrightarrow{z} \\ \implies -L_2 X_{21} &= C_2 \ddot{\theta}_2 + a_2 m_2 (\ddot{\lambda}_3 \sin \theta_2 - a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2}) \end{aligned}$$

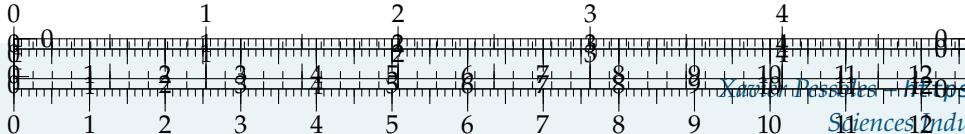
► On isole (2+3).

► Bilan des actions mécaniques extérieures :

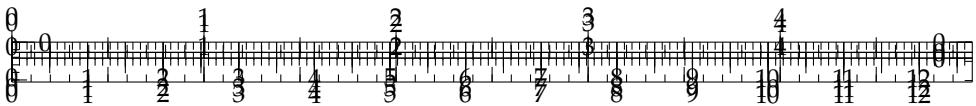
- Liaison glissière :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_A$  avec  $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{y_0} = 0$   
(pas de frottement dans la liaison).
- Liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$   
(pas de frottement dans la liaison).
- Force explosion :  $\{\mathcal{T}(0_e \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_y \overrightarrow{y} + F_z \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{C_{exp}} \end{array} \right\}_C$ .

► On applique le TRD en projection sur  $\overrightarrow{y_0}$  :

$$\begin{aligned} F_y - Y_{21} &= m_3 \ddot{\lambda}_3 + (m_2 (\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2})) \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \iff F_y - Y_{21} &= m_3 \ddot{\lambda}_3 + (m_2 (\ddot{\lambda}_3 + a_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + a_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2)) \end{aligned}$$







## Application 2

### Chaîne ouverte – Wheeling moto– Sujet

Équipe PT - La Martinière Monplaisir.

#### Modélisation

L'étude proposée concerne l'étude dynamique d'une moto dans une phase de wheeling. Il s'agit d'une figure acrobatique consistant à soulever la roue avant, et de ne garder que l'appui sous la roue arrière. La moto est supposée se déplacer en ligne droite, sur une route horizontale, et l'étude menée est cinématiquement plane. Le modèle d'étude est sur la figure ci-dessous.

- $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est un repère supposé galiléen, où  $\vec{x}_0$  est dirigé suivant la vitesse de la moto et  $\vec{y}_0$  suivant la verticale ascendante;
- $\mathcal{R}_1 = (G_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est un repère lié à l'ensemble considéré indéformable {cadre + bras arrière + fourche avant + pilote}. On note  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ;
- $\mathcal{R}_2 = (O_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est un repère lié à la roue avant (2), de rayon  $R$  et de centre  $O_2$  tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$ . On note  $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ ;
- $\mathcal{R}_3 = (O_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est un repère lié à la roue arrière (3), de rayon  $R$  et de centre  $O_3$  tel que  $\vec{z}_3 = \vec{z}_0$ . On note  $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$ . Les contacts entre les roues (2) et (3) et le sol (0) sont modélisés par des liaisons ponctuelles en  $H_2$  et  $H_3$ .

On note  $G_i$  le centre d'inertie,  $m_i$  la masse et  $C_i$  le moment d'inertie par rapport à l'axe de la pièce (i). **On fait l'hypothèse que le problème est plan.**

#### Étude dynamique

La transmission exerce sur la roue arrière un couple moteur  $\vec{C}_m = C_m \vec{z}_0$ . On suppose que l'adhérence roue/sol est suffisante pour assurer le roulement sans glissement de la roue (3) au contact en  $H$  avec le sol. La situation initiale est définie au moment où la roue avant quitte le contact avec le sol, avec  $\dot{\theta}_1 = 0$  (après  $\neq 0$ ).

**Question 1** Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling. Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en  $H_3$ .

**Question 2** En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer l'ensemble des équations de mouvement, en précisant :



C1-05

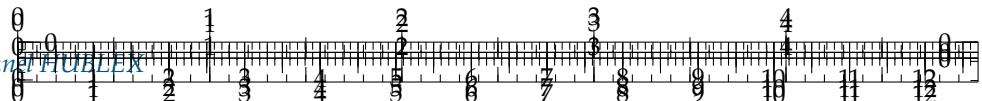
C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

On note :

- $\vec{O}O_3 = \lambda \vec{x}_0 + R \vec{y}_0$ ;
- $\vec{O}_3 O_2 = L_1 \vec{x}_1$ ;
- $\vec{O}_3 G_1 = a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1$ ;
- $\vec{H}_3 O_3 = R \vec{y}_0$ ;
- $\vec{H}_2 O_2 = R \vec{y}_0$ ;
- $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$ .

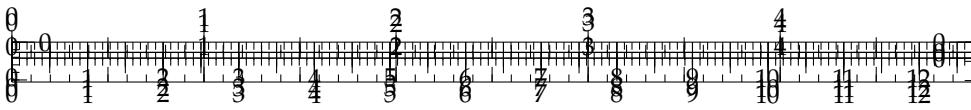


- ▶ élément(s) isolé(s);
- ▶ théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.

**Question 3** Mettre en place les équations précédentes. Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_C0/Cy\_04\_03\_PFD\_C0\_App\_01\_MotoWheel





## Application 2

### Chaîne ouverte – Wheeling moto– Corrigé

Équipe PT - La Martinière Monplaisir.

#### Modélisation

L'étude proposée concerne l'étude dynamique d'une moto dans une phase de wheeling. Il s'agit d'une figure acrobatique consistant à soulever la roue avant, et de ne garder que l'appui sous la roue arrière. La moto est supposée se déplacer en ligne droite, sur une route horizontale, et l'étude menée est cinématiquement plane. Le modèle d'étude est sur la figure ci-dessous.

- $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est un repère supposé galiléen, où  $\vec{x}_0$  est dirigé suivant la vitesse de la moto et  $\vec{y}_0$  suivant la verticale ascendante;
- $\mathcal{R}_1 = (G_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est un repère lié à l'ensemble considéré indéformable {cadre + bras arrière + fourche avant + pilote}. On note  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ;
- $\mathcal{R}_2 = (O_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est un repère lié à la roue avant (2), de rayon  $R$  et de centre  $O_2$  tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$ . On note  $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ ;
- $\mathcal{R}_3 = (O_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est un repère lié à la roue arrière (3), de rayon  $R$  et de centre  $O_3$  tel que  $\vec{z}_3 = \vec{z}_0$ . On note  $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$ . Les contacts entre les roues (2) et (3) et le sol (0) sont modélisés par des liaisons ponctuelles en  $H_2$  et  $H_3$ .

On note  $G_i$  le centre d'inertie,  $m_i$  la masse et  $C_i$  le moment d'inertie par rapport à l'axe de la pièce (i). **On fait l'hypothèse que le problème est plan.**

#### Étude dynamique

La transmission exerce sur la roue arrière un couple moteur  $\vec{C}_m = C_m \vec{z}_0$ . On suppose que l'adhérence roue/sol est suffisante pour assurer le roulement sans glissement de la roue (3) au contact en  $H$  avec le sol. La situation initiale est définie au moment où la roue avant quitte le contact avec le sol, avec  $\dot{\theta}_1 = 0$  (après  $\neq 0$ ).

**Question 1** Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling. Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en  $H_3$ .

#### Correction



C1-05

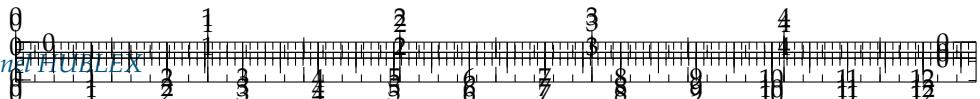
C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

On note :

- $\overrightarrow{OO_3} = \lambda \vec{x}_0 + R \vec{y}_0$ ;
- $\overrightarrow{O_3 O_2} = L_1 \vec{x}_1$ ;
- $\overrightarrow{O_3 G_1} = a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1$ ;
- $\overrightarrow{H_3 O_3} = R \vec{y}_0$ ;
- $\overrightarrow{H_2 O_2} = R \vec{y}_0$ ;
- $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$ .



**Question 2** En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer l'ensemble des équations de mouvement, en précisant :

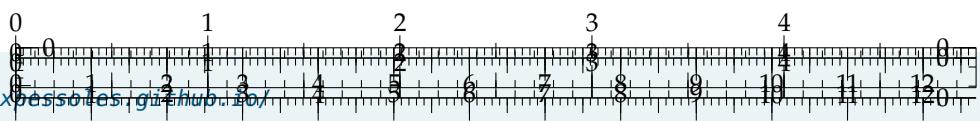
- ▶ élément(s) isolé(s);
- ▶ théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.

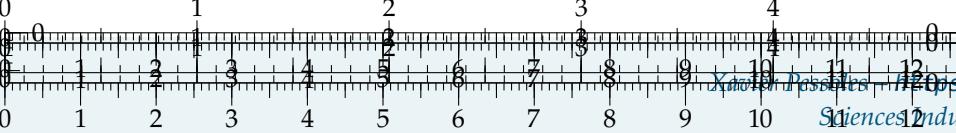
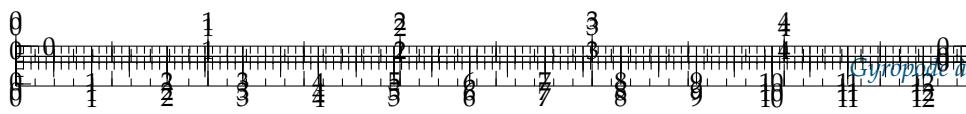
**Correction**

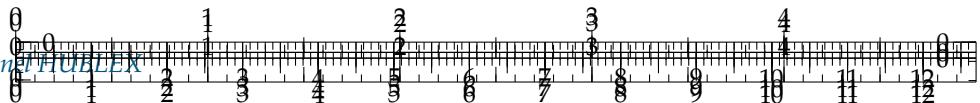
**Question 3** Mettre en place les équations précédentes. Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.

**Correction**

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_C

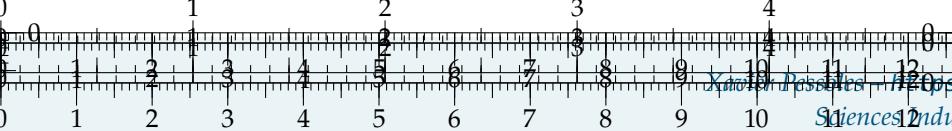
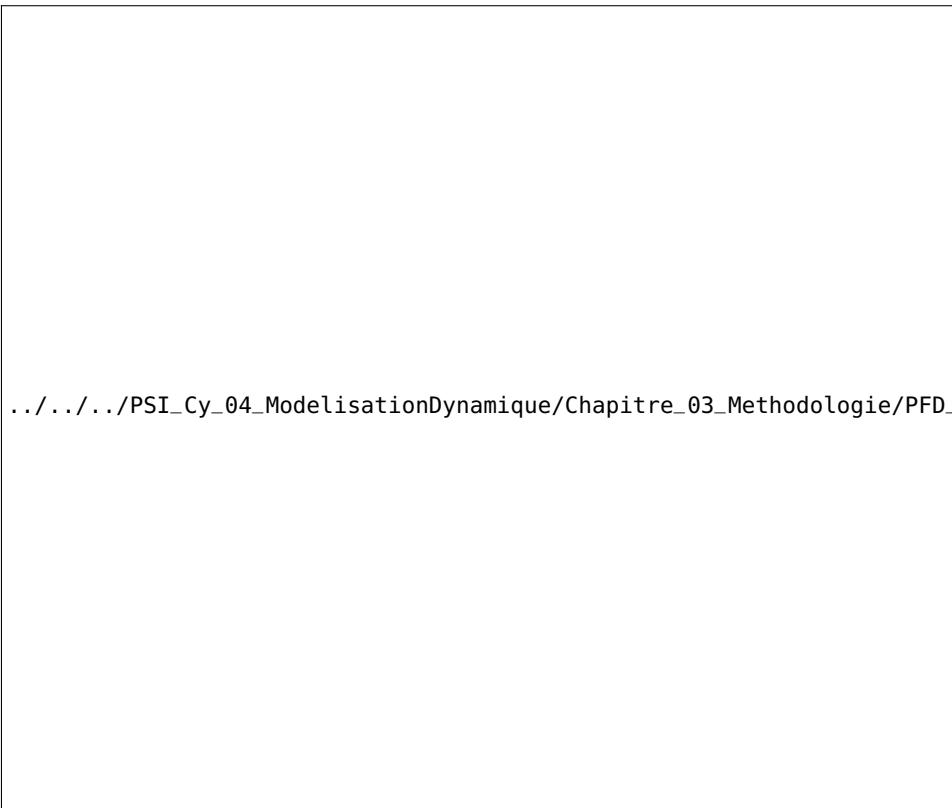
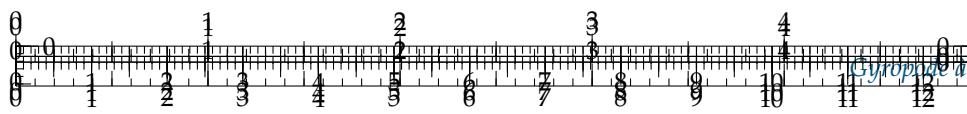




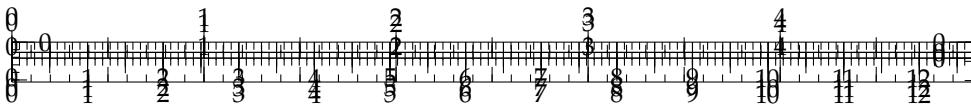


../../../../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_C0/Cy\_04









## Application 3

### Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant– Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

#### Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide  $S_1$ , de masse  $m_1$  en liaison glissière parfaite avec un support  $S_0$ , fixe par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  supposé galiléen.

Le solide  $S_1$  est rappelé par un ressort de longueur libre  $l_0$  et de raideur  $k$ . Une masse ponctuelle  $m_2$  excentrée, placée en  $P$ , tourne sur un rayon  $r$  et est entraînée à vitesse constante  $\Omega$ . Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur  $S_2$ .

Un pendule simple de longueur  $L$ , porte à son extrémité  $D$  une masse concentrée  $m_3$ , l'ensemble constitue le solide  $S_3$ , en liaison pivot parfaite d'axe  $(C, \vec{z}_0)$  avec  $S_1$ .

Les masses autres que  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  sont négligées.

C1-05

C2-09

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_04\\_ModelisationDyn](#)

#### Objectif

Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_04\\_ModelisationDyn](#)

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse du système.

**Question 2** Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant  $x$ ,  $\theta$  et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles.

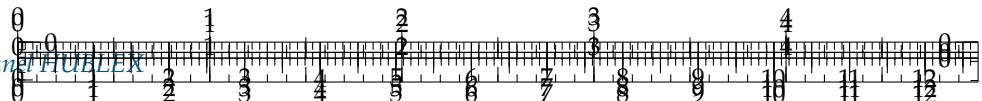
**Question 3** Déterminer ces deux équations. On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre  $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$  en supposant que  $x$ ,  $\theta$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{\theta}$  sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

**Question 4** Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme  $x(t) = A \cos(\Omega t)$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$ .

**Question 5** Déterminer le système d'équations permettant de calculer  $A$  et  $B$ .





**Question 6** Indiquer la condition que doit vérifier la longueur  $L$  afin d'assurer  $x(t) = 0$  en régime forcé.

**Éléments de correction**

$$1. (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} \cos \theta - m_3 L \dot{\theta}^2 \sin \theta = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t) \text{ et } \ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0.$$

$$2. (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t) \text{ et } \ddot{x} + L \ddot{\theta} + g \theta = 0.$$

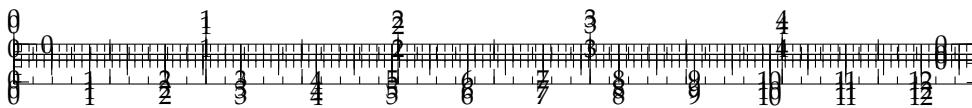
$$3. A = \frac{m_2 r \Omega^2 (-L \Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3) \Omega^2 + k] (-L \Omega^2 + g) - m_3 L \Omega^4} \quad \text{et} \quad B =$$

$$\frac{[-(m_1 + m_2 + m_3) \Omega^2 + k] (-L \Omega^2 + g) - m_3 L \Omega^4}{m_2 r \Omega^2}.$$

$$4. L = \frac{g}{\Omega^2}.$$

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_C0/Cy\_04\_03\_PFD\_C0\_App\_02\_BancVib...





## Application 3

### Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant– Corrigé

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

#### Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide  $S_1$ , de masse  $m_1$  en liaison glissière parfaite avec un support  $S_0$ , fixe par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  supposé galiléen.

Le solide  $S_1$  est rappelé par un ressort de longueur libre  $l_0$  et de raideur  $k$ . Une masse ponctuelle  $m_2$  excentrée, placée en  $P$ , tourne sur un rayon  $r$  et est entraînée à vitesse constante  $\Omega$ . Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur  $S_2$ .

Un pendule simple de longueur  $L$ , porte à son extrémité  $D$  une masse concentrée  $m_3$ , l'ensemble constitue le solide  $S_3$ , en liaison pivot parfaite d'axe  $(C, \vec{z}_0)$  avec  $S_1$ .

Les masses autres que  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  sont négligées.

C1-05

C2-09

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_04\\_ModelisationDyn](#)

#### Objectif

Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse du système.

#### Correction

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_04\\_ModelisationDyn](#)

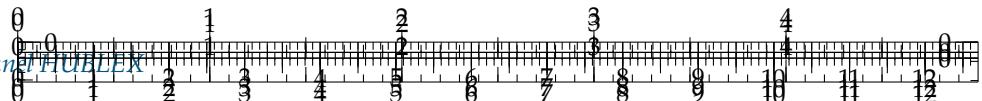
**Question 2** Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant  $x$ ,  $\theta$  et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles.

#### Correction

**Question 3** Déterminer ces deux équations.

#### Correction





On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre  $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$  en supposant que  $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$  sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

**Question 4** Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

#### Correction

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme  $x(t) = A \cos(\Omega t)$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$ .

**Question 5** Déterminer le système d'équations permettant de calculer  $A$  et  $B$ .

#### Correction

**Question 6** Indiquer la condition que doit vérifier la longueur  $L$  afin d'assurer  $x(t) = 0$  en régime forcé.

#### Correction

#### Éléments de correction

$$1. (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} \cos \theta - m_3 L \dot{\theta}^2 \sin \theta = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t) \text{ et } \ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0.$$

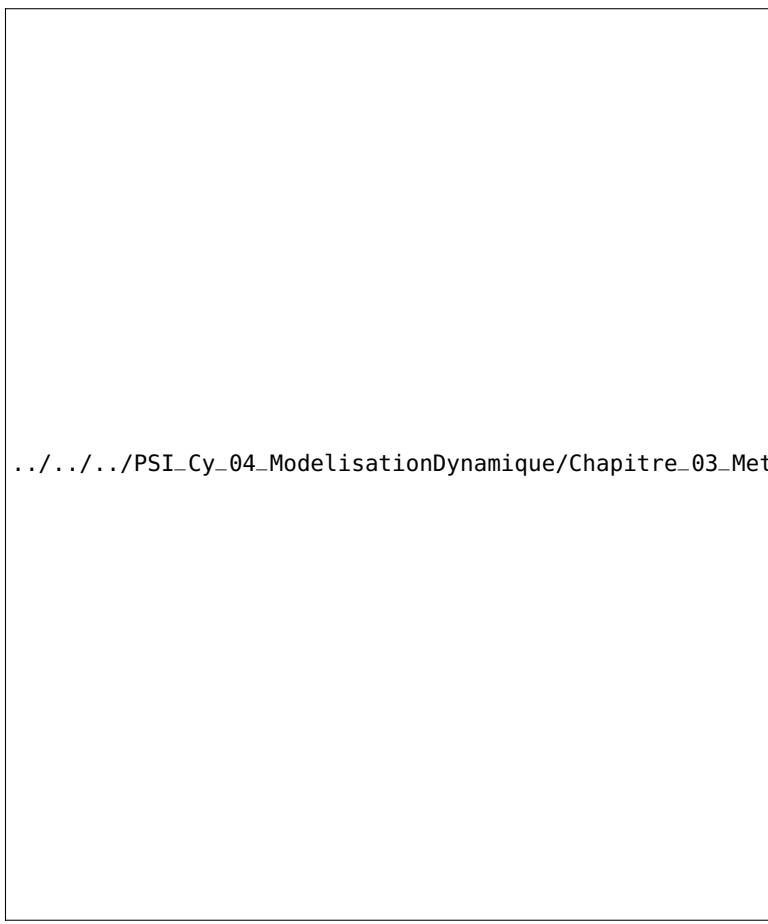
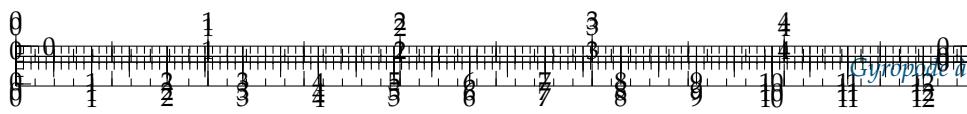
$$2. (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t) \text{ et } \ddot{x} + L \ddot{\theta} + g \theta = 0.$$

$$3. A = \frac{m_2 r \Omega^2 (-L \Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3) \Omega^2 + k] (-L \Omega^2 + g) - m_3 L \Omega^4} \text{ et } B =$$

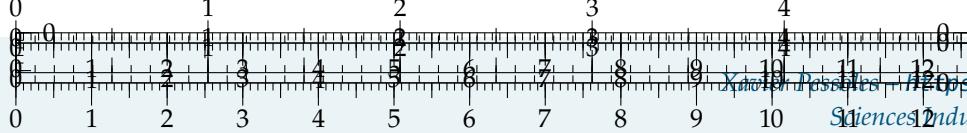
$$\frac{m_2 r \Omega^2}{[-(m_1 + m_2 + m_3) \Omega^2 + k] (-L \Omega^2 + g) - m_3 L \Omega^4}.$$

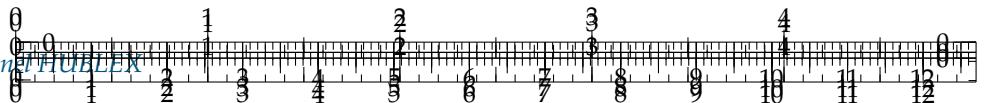
$$4. L = \frac{g}{\Omega^2}.$$





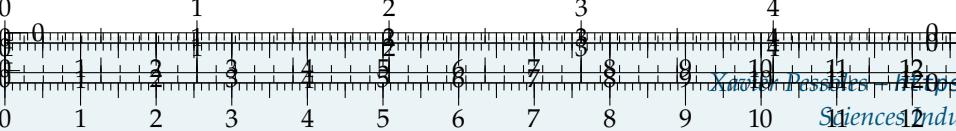
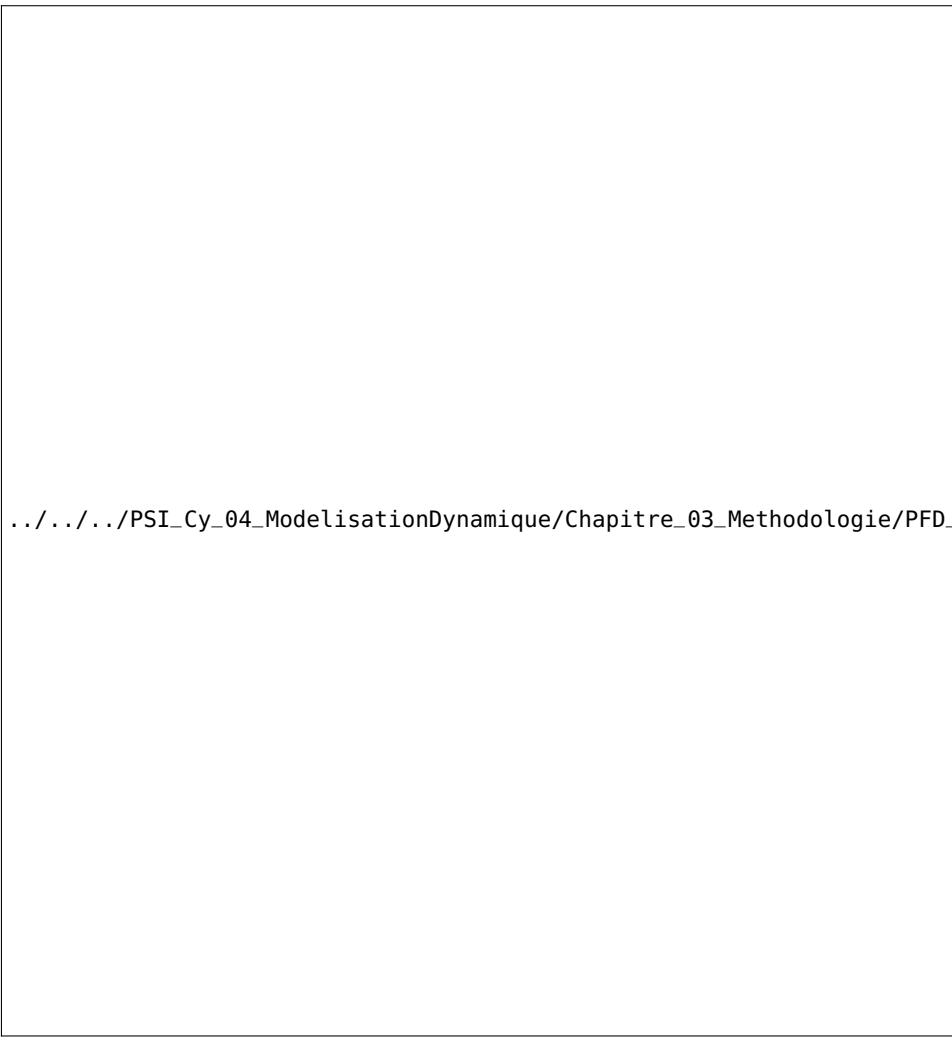
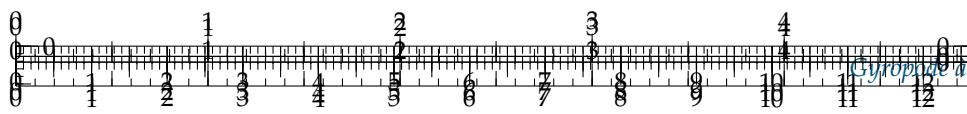
../../../../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_C0/Cy\_04\_03\_PFD\_C0\_App\_02\_BancV



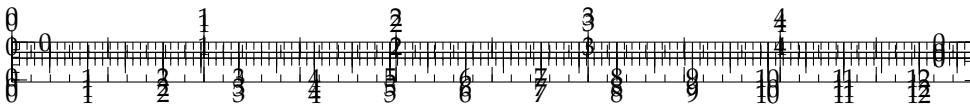


.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_C0/Cy\_04.









## Application 4

# Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique – Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie.

### Présentation

La géotechnique correspond aux activités liées aux applications de la mécanique des sols, de la mécanique des roches et de la géologie. À partir d'essais en laboratoire et in situ, la géotechnique fournit aux constructeurs de bâtiments et d'ouvrages les données indispensables pour le génie civil en ce qui concerne leur stabilité en fonction des sols. Aujourd'hui la modélisation physique d'ouvrage géotechnique en centrifugeuse est une approche expérimentale répandue. La centrifugation des modèles réduits permet de reproduire des états de contraintes dans les matériaux semblables à ceux régnant dans l'ouvrage grandeur nature. Le laboratoire central des Ponts et Chaussées (LCPC) de Nantes possède une centrifugeuse géotechnique dont les principales caractéristiques sont données ci-après :

- ▶ distance de l'axe à la plate-forme nacelle : 5,5 m;
- ▶ longueur du bras : 6,8 m;
- ▶ accélération maximale : 200 g;
- ▶ temps de montée à 200 g : 360 s.

On propose le modèle cinématique ci-contre.

Soit  $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère galiléen lié au bâti 0 de la centrifugeuse. L'axe  $(O, \vec{z})$  est dirigé suivant la verticale descendante. On désigne par  $\vec{g} = g \vec{z}$  le vecteur accélération de la pesanteur.

Le bras 1 est en liaison pivot sans frottement d'axe  $(O, \vec{z})$  avec le bâti 0. Soit  $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  un repère lié au bras 1. On pose  $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ , avec  $\alpha = \omega t$ , où  $\omega$  est une constante positive.

La nacelle 2 est en liaison pivot sans frottement d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  avec le bras 1, telle que  $\overrightarrow{OA} = a \vec{x}_1$  ( $a$  est une constante positive). Soit  $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$  un repère lié à la nacelle 2. On pose  $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$ .

On note :

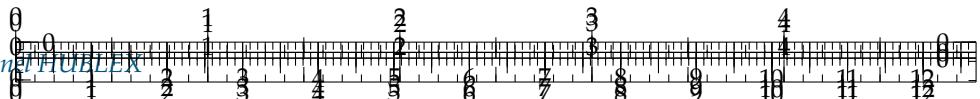
- ▶ bras 1 : moment d'inertie  $I$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{z})$ ;
- ▶ nacelle 2 : centre d'inertie  $G$ , tel que  $\overrightarrow{AG} = b \vec{z}_2$  ( $b$  est une constante positive),  
masse  $m$ , matrice d'inertie  $I_A(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn



Un moteur, fixé sur la bâti 0, exerce sur le bras 1 une action mécanique représentée par le couple  $C_m \vec{z}$ . Le bras 1 tourne à la vitesse constante  $\omega$  par rapport au bâti 0.

### Objectif

Déterminer les équations du mouvement de la centrifugeuse, ainsi que le couple moteur à fournir au cours du mouvement.

**Question 1** Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

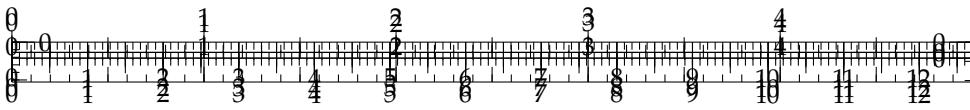
**Question 2** Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

On suppose que la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, et que  $mba \gg A \approx C$ .

**Question 3** Déterminer les expressions de l'angle  $\beta$  et du couple moteur  $C_m$  ?

../../../../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_C0/Cy\_04\_03\_PFD\_C0\_App\_03\_Centrifugeuse





## Application 4

# Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique – Corrigé

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie.

### Présentation

La géotechnique correspond aux activités liées aux applications de la mécanique des sols, de la mécanique des roches et de la géologie. À partir d'essais en laboratoire et in situ, la géotechnique fournit aux constructeurs de bâtiments et d'ouvrages les données indispensables pour le génie civil en ce qui concerne leur stabilité en fonction des sols. Aujourd'hui la modélisation physique d'ouvrage géotechnique en centrifugeuse est une approche expérimentale répandue. La centrifugation des modèles réduits permet de reproduire des états de contraintes dans les matériaux semblables à ceux régnant dans l'ouvrage grandeur nature. Le laboratoire central des Ponts et Chaussées (LCPC) de Nantes possède une centrifugeuse géotechnique dont les principales caractéristiques sont données ci-après :

- ▶ distance de l'axe à la plate-forme nacelle : 5,5 m;
- ▶ longueur du bras : 6,8 m;
- ▶ accélération maximale : 200 g;
- ▶ temps de montée à 200 g : 360 s.

On propose le modèle cinématique ci-contre.

Soit  $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère galiléen lié au bâti 0 de la centrifugeuse. L'axe  $(O, \vec{z})$  est dirigé suivant la verticale descendante. On désigne par  $\vec{g} = g\vec{z}$  le vecteur accélération de la pesanteur.

Le bras 1 est en liaison pivot sans frottement d'axe  $(O, \vec{z})$  avec le bâti 0. Soit  $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  un repère lié au bras 1. On pose  $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ , avec  $\alpha = \omega t$ , où  $\omega$  est une constante positive.

La nacelle 2 est en liaison pivot sans frottement d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  avec le bras 1, telle que  $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$  ( $a$  est une constante positive). Soit  $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$  un repère lié à la nacelle 2. On pose  $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$ .

On note :

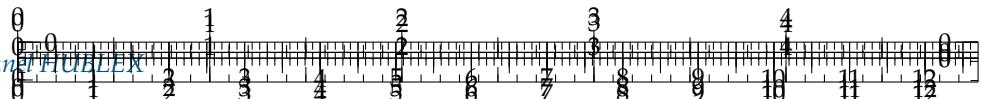
- ▶ bras 1 : moment d'inertie  $I$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{z})$ ;
- ▶ nacelle 2 : centre d'inertie  $G$ , tel que  $\overrightarrow{AG} = b\vec{z}_2$  ( $b$  est une constante positive),  
masse  $m$ , matrice d'inertie  $I_A(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn



Un moteur, fixé sur la bâti 0, exerce sur le bras 1 une action mécanique représentée par le couple  $C_m \vec{z}$ . Le bras 1 tourne à la vitesse constante  $\omega$  par rapport au bâti 0.

### Objectif

Déterminer les équations du mouvement de la centrifugeuse, ainsi que le couple moteur à fournir au cours du mouvement.

**Question 1** Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

### Correction

**Question 2** Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

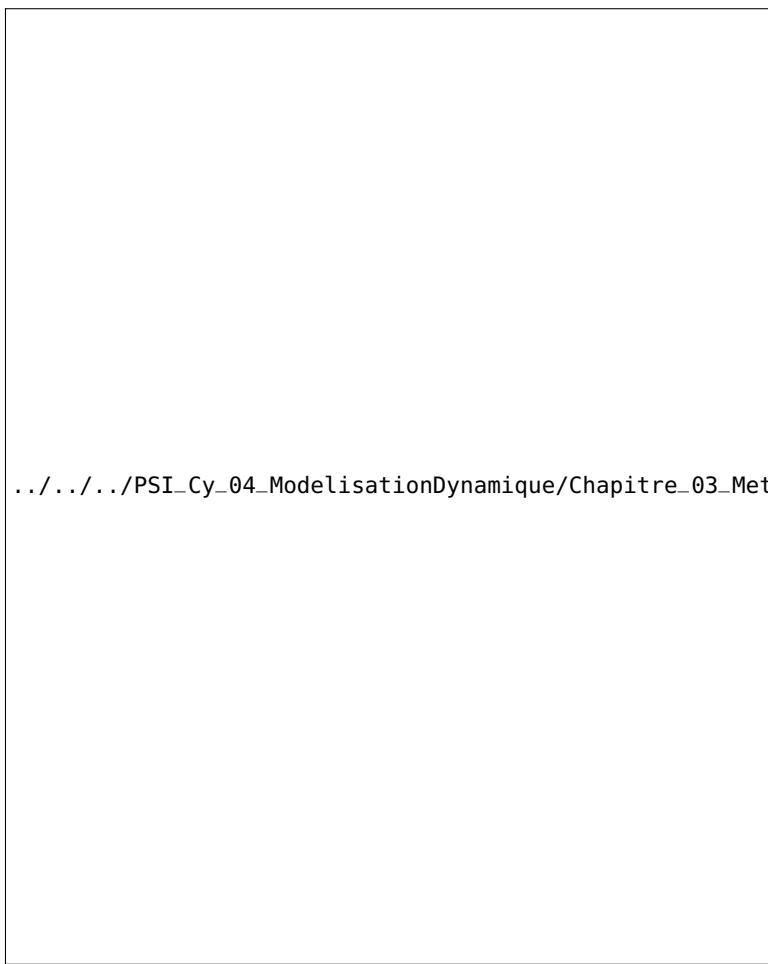
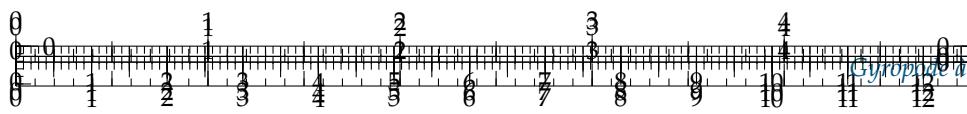
### Correction

On suppose que la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, et que  $m \vec{a} \gg \vec{A} \approx \vec{C}$ .

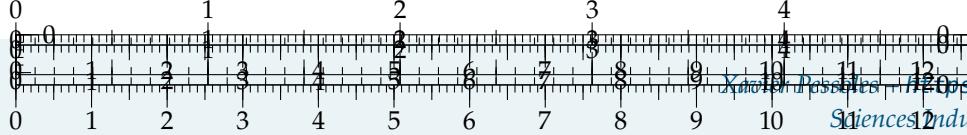
**Question 3** Déterminer les expressions de l'angle  $\beta$  et du couple moteur  $C_m$  ?

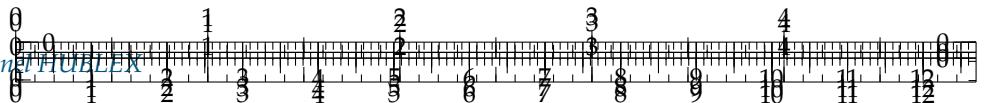
### Correction





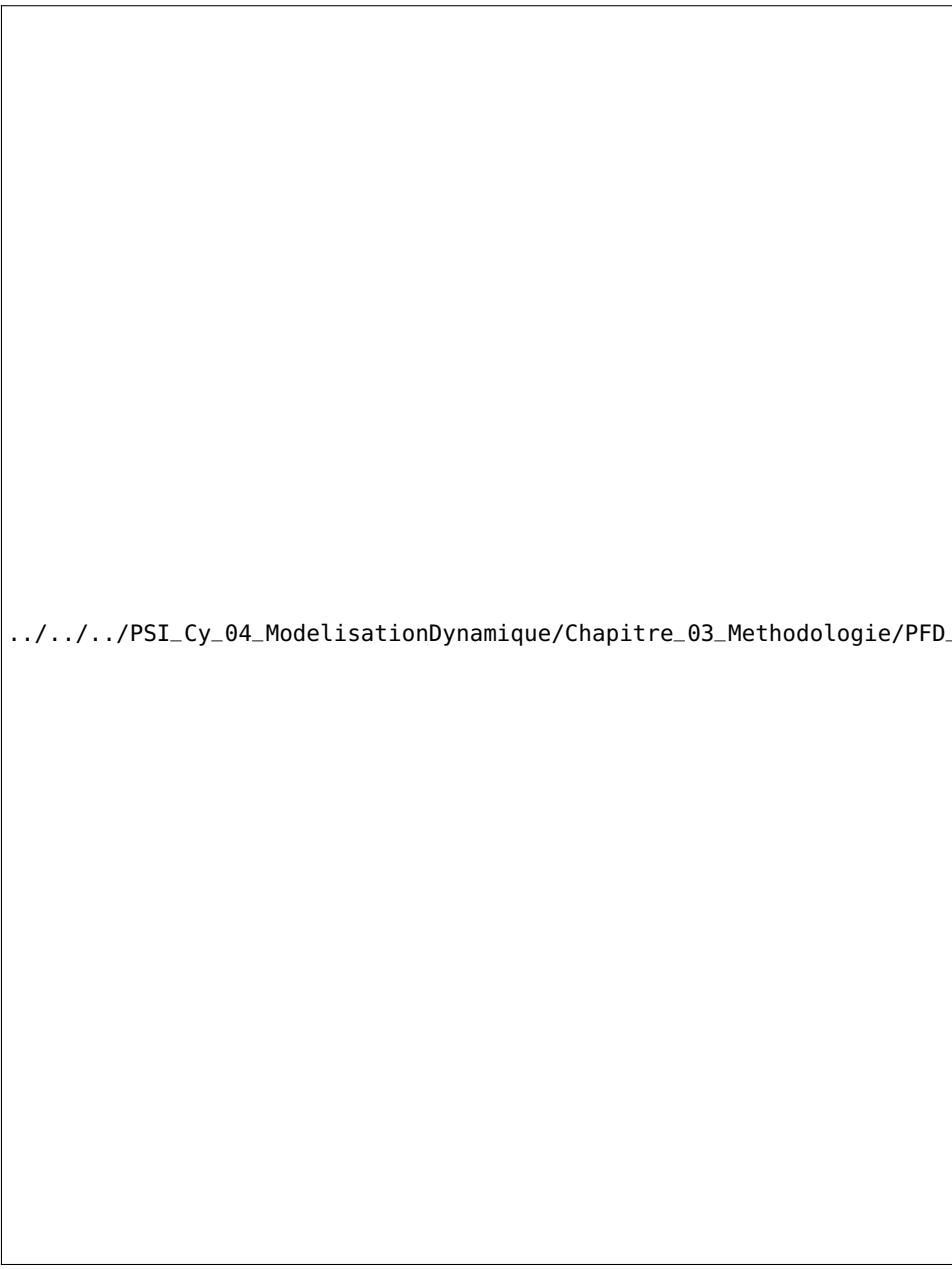
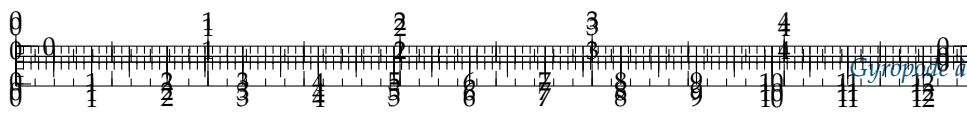
.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_CO/Cy\_04\_03\_PFD\_CO\_App\_03\_Centr

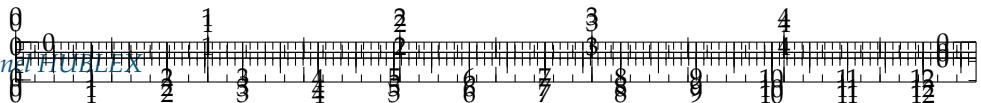




../../../../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_C0/Cy\_04.

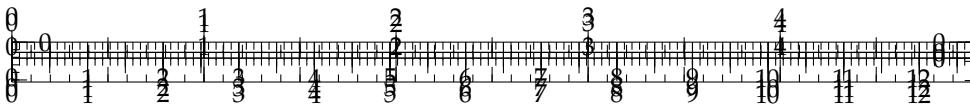






../../../../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_C0/Cy\_04





## Application 5

# Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs – Sujet

Centrale Supélec PSI 2013.

### Modélisation dynamique du comportement de la charge

#### Objectif

Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn  
C2-09

En vue d'élaborer une commande automatisée du déchargement des conteneurs, une bonne compréhension de la dynamique du système est nécessaire. Cette partie vise à établir les équations du mouvement du conteneur. La charge peut alors balancer selon le modèle présenté ci-après. Dans cette étude, la vitesse de vent nulle. On fait l'hypothèse que le conteneur est suspendu à un seul câble indéformable, en liaison pivot à ses extrémités. Les liaisons entre les solides 0, 1, 2 et 3 sont supposées parfaites. Le portique support du chariot est noté 0, le chariot 1, le câble 2 et l'ensemble {spreader + conteneur} 3.

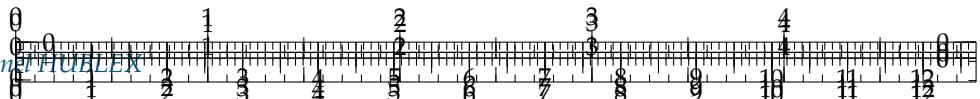
#### Paramétrage

- Le repère  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au portique fixe ; il est supposé galiléen avec  $\vec{z}_0$  l'axe vertical ascendant.
- La position du chariot telle que  $\overrightarrow{OE} = y_{ch}(t)\vec{y}_0$  est notée  $y_{ch}(t)$ ; l'angle  $(\vec{z}_0, \vec{z}_2)$  d'inclinaison du câble  $\theta(t)$  et l'angle  $(\vec{z}_2, \vec{z}_3)$  d'inclinaison du conteneur par rapport au câble  $\beta(t)$ .

#### Données

- $\mathcal{R}_1 = (E; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  repère lié au chariot de levage 1.
- $\mathcal{R}_2 = (E; \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  repère lié au câble 2 ;  $\ell_2 = 50 \text{ m}$  la longueur  $EF$  du câble ; la masse est négligée.
- $\mathcal{R}_3 = (F; \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  repère lié à l'ensemble {spreader + conteneur} ;  $m_3 = 50 \text{ tonnes}$  la masse du solide 3 ;  $G_3$  le centre de gravité du solide 3, tel que  $\overrightarrow{G_3F} = h_3\vec{z}_3$  où  $h_3 = 2,5 \text{ m}$  ; la matrice d'inertie du solide 3 s'écrit  $I_3(G_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$  où  $\begin{cases} A_3 = 52 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \\ B_3 = 600 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \\ C_3 = 600 \times 10^3 \text{ kg m}^2 \end{cases}$ .





- la motorisation  $M_D$  du mouvement de direction exerce, par l'intermédiaire de câbles, des actions mécaniques sur (1) qui se réduisent à un glisseur de la forme  $\overrightarrow{R(M_D \rightarrow 1)} = F_{y_0}$ ;
- l'action mécanique du câble sur le spreader est notée  $\overrightarrow{R(2 \rightarrow 3)} = F_{23} \vec{z}_2$ .

**Question 1** Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?

**Question 2** Déterminer littéralement, au point  $G_3$ , la vitesse  $\overrightarrow{V(G_3, 3/0)}$  puis le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(3/0)\}$  de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ .

**Question 3** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$ , sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

**Question 4** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $\dot{y}_{ch}(t)$  et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

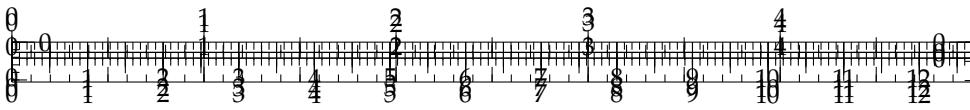
**Question 5** En supposant que  $\theta$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, linéariser les équations précédentes.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en  $y_{ch}(t)$  de 10 m.

**Question 6** Proposer une simplification de la modélisation précédente.

[http://.../PSI\\_Cy\\_04\\_ModelisationDynamique/Chapitre\\_03\\_Methodologie/PFD\\_C0/Cy\\_04\\_03\\_PFD\\_C0\\_App\\_04\\_Chargement](http://.../PSI_Cy_04_ModelisationDynamique/Chapitre_03_Methodologie/PFD_C0/Cy_04_03_PFD_C0_App_04_Chargement)





## Application 5

# Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2013.

### Modélisation dynamique du comportement de la charge

#### Objectif

Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

**Question 1** Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?

#### Correction

Le système a trois mobilités :

- ▶ la translation de la liaison glissière de longueur  $y_{ch}(t)$  (degré de liberté motorisé);
- ▶ la rotation du câble d'angle  $\theta(t)$  (degré de liberté non motorisé);
- ▶ la rotation du conteneur d'angle  $\beta(t)$  (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.

**Question 2** Déterminer littéralement, au point  $G_3$ , la vitesse  $\overrightarrow{V(G_3, 3/0)}$  puis le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(3/0)\}$  de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ .

#### Correction

$$\overrightarrow{V(G_3, 3/0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG_3}) \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d}{dt} (y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} - \ell_2\overrightarrow{z_2} - h_3\overrightarrow{z_3}) \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

On a :

- ▶  $\left[ \frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta}\overrightarrow{y_2};$
- ▶  $\left[ \frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_3} + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \overrightarrow{z_3} = (\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_3} = -(\dot{\theta} + \dot{\beta})\overrightarrow{y_3};$

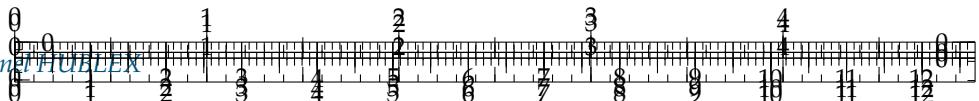


.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn



$$\begin{aligned} \blacktriangleright & \left[ \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \vec{z}_2; \\ \blacktriangleright & \left[ \frac{d\vec{y}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{z}_3. \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{V(G_3, 3/0)} = \ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \dot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{y}_3.$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/0)} = \ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3.$$

Par ailleurs,  $G_3$  étant le centre d'inertie, de 3, on a  $\overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} = \left[ \frac{d\sigma(G_3, 3/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} =$

$$\left[ \frac{dA_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0.$$

$$\text{On a donc, } \{\mathcal{D}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \\ A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{G_3}$$

**Question 3** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$ , sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

### Correction

D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant  $\vec{z}_2$ , on peut donc suggérer de réaliser le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur  $\vec{y}_2$ . Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3;
- action de 2 sur 3.

$$\text{On a donc: } -M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_2 = (M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3)) \cdot \vec{y}_2$$

$$\Leftrightarrow -M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$$

Résolution faisant intervenir  $F$  – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc (1+2+3) et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{y}_0$ .

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action du moteur sur 1.

$$\text{On applique le TRD sur } \vec{y}_0 : F = \overrightarrow{R_d(1+2+3/0)} \cdot \vec{y}_0 =$$

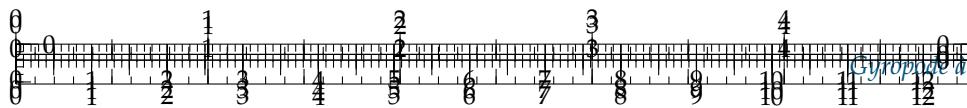
$$\underbrace{\overrightarrow{R_d(1/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse n\'egligeable})} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse n\'egligeable})} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(3/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse n\'egligeable})}$$

$$\Rightarrow F = (M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3)) \cdot \vec{y}_0$$

$$\Leftrightarrow F = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} \cos \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos(\beta + \theta) - \ell_2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin(\beta + \theta))$$

**Question 4** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$  et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.





### Correction

Le TRD appliqué à 3 en projection suivant  $\vec{z}_2$  se traduit par :

$$F - M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2 = \left( M_3 \left( \ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3 \right) \right) \cdot \vec{z}_2$$

$$\Leftrightarrow F - M_3 g \cos \theta = M_3 \left( -\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta \right).$$

Le TMD appliqué à 3 au point F en projection suivant  $\vec{x}_0$  se traduit par :

$$\overrightarrow{FG_3} \wedge (-M_3 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = \left( \overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} + \overrightarrow{FG_3} \wedge \overrightarrow{R_d(3/0)} \right) \cdot \vec{x}_0$$

$$\Leftrightarrow -h_3 \vec{z}_3 \wedge (-M_3 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$$

$$\Leftrightarrow -M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}).$$

**Question 5** En supposant que  $\theta, \beta, \dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, linéariser les équations précédentes.

### Correction

► On a  $-M_3 g \sin \theta = M_3 \left( \ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta \right)$ . En linéarisant, on obtient  $-M_3 g \theta = M_3 \left( \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \beta \right)$ . En considérant que  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, on a :  $-M_3 g \theta = M_3 \left( \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \right)$ .

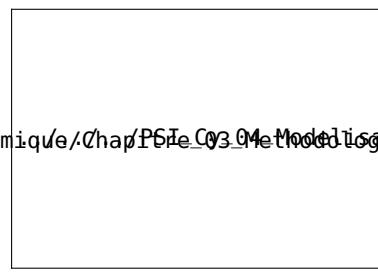
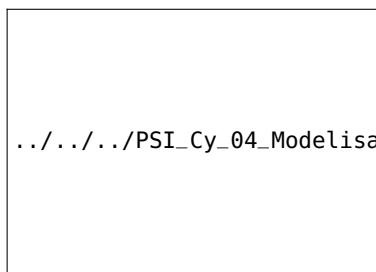
► On a :  $F - M_3 g \cos \theta = M_3 \left( -\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta \right)$

En linéarisant, on obtient :  $F - M_3 g = M_3 \left( -\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \beta \right)$

En considérant que  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, on a :  $F - M_3 g = M_3 \left( -\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta \right)$ .

► On a :  $M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$  En linéarisant, on obtient  $M_3 g h_3 (\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$ .

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en  $y_{ch}(t)$  de 10 m.



**Question 6** Proposer une simplification de la modélisation précédente.

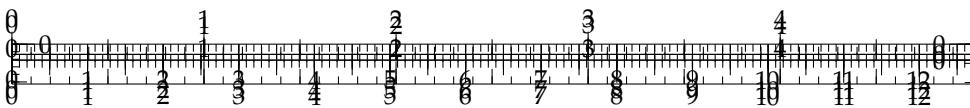
### Correction

L'amplitude des oscillations de  $\beta$  est 10 fois inférieure aux oscillations de  $\theta$ . En conséquences, on pourrait poser  $\beta = 0$  et :

- $-g\theta = \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 \ddot{\theta}$ ;
- $F - M_3 g = -M_3 \ddot{y}_{ch}(t) \theta$ ;
- $M_3 g h_3 \theta = A_3 \ddot{\theta}$ .







## Application 6

# Dynamique du véhicule – Chariot élévateur à bateaux– Sujet

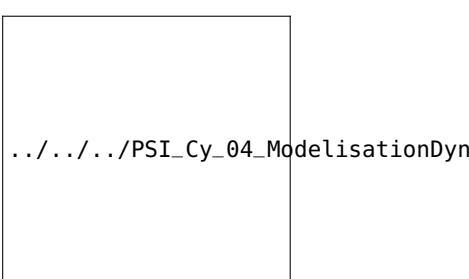
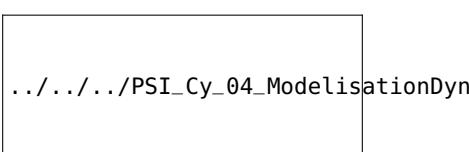
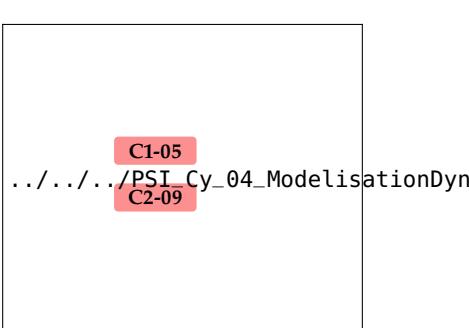
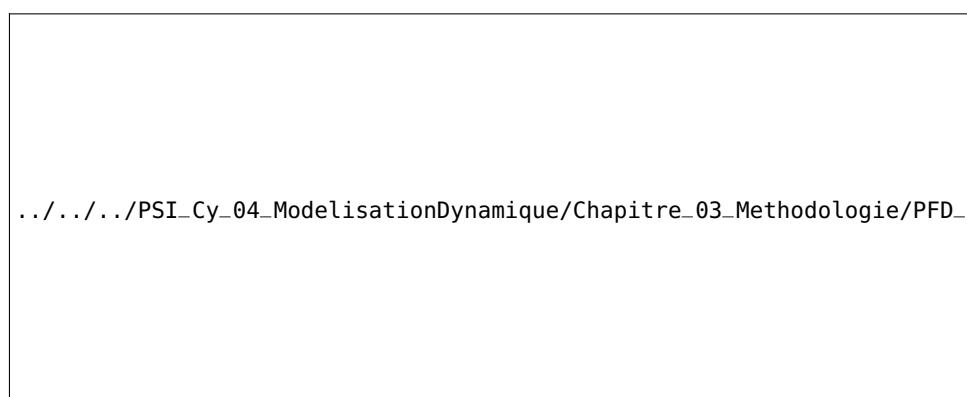
X – ENS – PSI – 2012.

### Présentation

Le chariot élévateur , objet de cette étude, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

- ▶ du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage ;
- ▶ du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépôse du bateau.

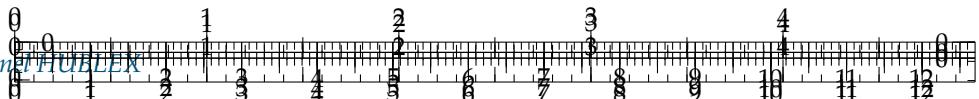
On considère que le chariot élévateur se déplace sur le trajet de référence de la Figure 1. Les basculements frontal et latéral des chariots élévateurs représentent le principal risque auquel est confronté le conducteur. L'objectif de cette partie est de définir les conditions de stabilité du chariot élévateur dans les phases de freinage et lors des virages afin de définir les conditions optimales de déplacement du chariot dans chacune des phases. La caractérisation partielle de l'exigence 2 est donnée sur la Figure 2.



### Objectif

L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req 2 : le conducteur peut déplacer le bateau en toute sécurité ».





## Étude de la position du centre de gravité

La position du centre de gravité de l'ensemble « chariot+tablier » influence directement la stabilité lors des déplacements. Il est impératif de connaître avec précision sa position. Étant donné qu'il est possible de monter, sur le même chariot, différents types de tabliers en fonction de l'utilisation souhaitée, le chariot est équipé d'un contrepoids qui permet de régler la position du centre de gravité de l'ensemble. Ce réglage est effectué en usine et dépend du contexte d'utilisation du chariot élévateur.

### Objectif

L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req C206 : la position du centre de gravité de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$  doit être situé à un tiers de l'empattement par rapport à l'axe des roues arrières».

La Figure ci-contre donne le paramétrage retenu pour l'étude. On note  $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  le repère lié au chariot. Le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  est un plan de symétrie matériel pour le chariot.

Le repère  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est un repère lié à la route, supposé galiléen pour les conditions de l'étude.

On note :

- $G_B$  : centre de gravité du bateau de masse  $m_B$ ;
- $G_T$  : centre de gravité du tablier de masse  $m_T$ ;
- $G_1$  : centre de gravité du chariot seul de masse  $m_1$ ;
- $G_C$  : centre de gravité du contrepoids de masse  $m_C$ ;
- $G$  : centre de gravité de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$ .

On donne :  $\overrightarrow{OG_B} = \begin{pmatrix} x_{G_B} \\ 0 \\ z_{G_B} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ ,  $\overrightarrow{OG_T} = \begin{pmatrix} x_{G_T} \\ 0 \\ z_{G_T} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ ,  $\overrightarrow{OG_1} = \begin{pmatrix} x_{G_1} \\ 0 \\ z_{G_1} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ ,  $\overrightarrow{OG_C} = \begin{pmatrix} x_{G_C} \\ 0 \\ z_{G_C} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ .

Afin de minimiser les risques de basculement du chariot élévateur, on souhaite que le point  $G$  soit confondu avec le point  $O$  (exigence req C206).

**Question 1** Déterminer l'expression de  $x_{G_C}$  afin de valider l'exigence req C206.

Pour toute la suite de l'étude, les points  $G$  et  $O$  sont supposés confondus et la masse totale de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$  est notée  $M$ .

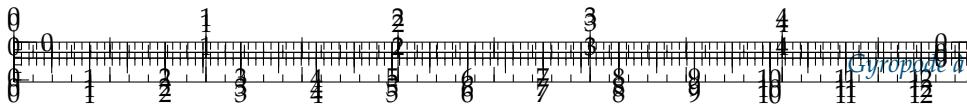
## Étude du basculement frontal

Afin d'éviter les risques de basculement frontal du chariot lors des phases de freinage, le dispositif de sécurité ADS permet au conducteur de choisir, à partir des commandes disponibles sur son tableau de bord, la valeur de la décélération à imposer au chariot avant l'arrêt total. Ainsi, lorsque le conducteur relâche complètement la pédale de l'accélérateur, le dispositif ADS entre en action et le chariot est alors animé d'un mouvement uniformément décéléré. Le choix de la valeur de la décélération est fait en fonction des conditions de chargement du chariot. Ce dispositif permet au conducteur de maîtriser parfaitement les distances d'arrêt tout en évitant le basculement frontal.

L'objectif de cette partie est de mettre en évidence l'intérêt d'un tel dispositif.

Le chariot est en phase de freinage sur une route horizontale, il transporte un bateau (B) de masse  $m_B$  et de centre de gravité  $G_B$ . La vitesse du centre de gravité de l'ensemble





$\Sigma$  est donnée par  $\overrightarrow{V(G, \Sigma/\mathcal{R}_0)} = V(t)\vec{x}_1$ . Tous les mouvements du tablier sont inactifs durant le déplacement. Il n'y a pas de mouvement relatif entre le bateau et l'ensemble  $\Sigma$  au cours de cette phase. L'objet est de déterminer la valeur de la décélération qui provoque le basculement frontal de l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$ . Le problème est traité en trois dimensions.

L'action mécanique exercée par le sol sur le pneu  $P_i$  est modélisée par le torseur

$$\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_i)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow P_i)} = -T_i \vec{x}_1 + N_i \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(I_i, \text{sol} \rightarrow P_i)} = \vec{0} \end{array} \right\}_{I_1} = \left\{ \begin{array}{ll} -T_i & 0 \\ 0 & 0 \\ N_i & 0 \end{array} \right\}_{I_i, \mathcal{R}_1}.$$

La masse et l'inertie des roues sont négligées. La décélération qui provoque le basculement de l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$  est notée  $\overrightarrow{\Gamma_{\text{dec}}}(\{\Sigma, B\}/\mathcal{R}_0) = -\text{dec}_x \vec{x}_1$

On admet, dans un premier temps, que le basculement a lieu avant le glissement. Cette hypothèse sera vérifiée par la suite.

**Question 2** Écrire les équations issues de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$ . Le théorème du moment dynamique sera appliqué au point  $I_4$ .

**Question 3** Donner les hypothèses qui peuvent être faites afin de réduire le nombre d'inconnues du problème.

On considère que le basculement a lieu lorsque les roues arrière perdent le contact avec le sol.

**Question 4** Déterminer alors l'expression de  $\text{dec}_x$ .

Le facteur d'adhérence entre le pneu et la route est noté  $f$ .

**Question 5** Donner les expressions de  $N_4$  et  $T_4$  et expliquer qualitativement comment vérifier que le basculement a lieu avant le glissement afin de justifier l'hypothèse faite en début d'étude.

## Étude du basculement latéral

Le centre de gravité de l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$  est noté  $G_{\Sigma B}$   $\overrightarrow{OG_{\Sigma B}} \begin{pmatrix} x_{G_{\Sigma B}} \\ y_{G_{\Sigma B}} \\ z_{G_{\Sigma B}} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ .

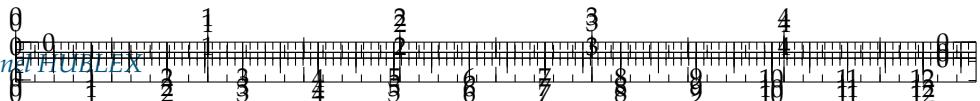
L'objet est de déterminer la vitesse maximale avec laquelle le chariot peut aborder le virage sans risque de basculement latéral. Le schéma retenu pour l'étude est présenté sur la Figure 24. Le chariot aborde un virage de rayon de courbure  $\rho$  avec  $\overrightarrow{O_0 G_{\Sigma B}} = -\rho \vec{y}_1$ . Tous les mouvements du tablier sont inactifs durant le déplacement. Il n'y a pas de mouvement relatif entre le bateau  $B$  et l'ensemble  $\Sigma$  au cours du mouvement. La vitesse du chariot est constante pendant toute la phase de virage et est notée  $\overrightarrow{V(G, \Sigma/\mathcal{R}_0)} = V \vec{x}_1$ . La masse et l'inertie des roues sont négligées. On admet que le basculement latéral a lieu avant le glissement, cette hypothèse pourra être vérifiée par la suite.

Le rayon de courbure du virage  $\rho$  est suffisamment grand devant l'empattement  $E$  du chariot pour pouvoir négliger l'influence du braquage des roues dans le modèle proposé. L'action mécanique exercée par le sol sur le pneu  $i$  est modélisée par le

$$\text{torseur : } \{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_i)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow P_i)} = -T_i \vec{x}_1 + N_i \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(I_i, \text{sol} \rightarrow P_i)} = \vec{0} \end{array} \right\}_{I_1} = \left\{ \begin{array}{ll} -T_i & 0 \\ 0 & 0 \\ N_i & 0 \end{array} \right\}_{I_i, \mathcal{R}_1}.$$



.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique

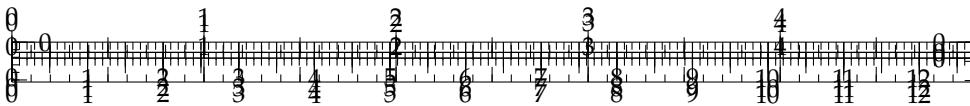


La matrice d'inertie de l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$  est de la forme  $I_{G_{\{\Sigma B\}}}(\{\Sigma, B\}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$

**Question 6** Quel théorème doit-on utiliser afin d'obtenir directement l'équation permettant de déterminer l'expression de  $V$  qui provoque le basculement latéral?

**Question 7** En déduire l'expression de  $V$  qui provoque le basculement latéral.





## Application 6

# Dynamique du véhicule – Chariot élévateur à bateaux– Corrigé

X – ENS – PSI – 2012.

### Présentation

#### Étude de la position du centre de gravité

##### Objectif

L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req C206 : la position du centre de gravité de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$  doit être situé à un tiers de l'empattement par rapport à l'axe des roues arrières».

**Question 1** Déterminer l'expression de  $x_{G_C}$  afin de valider l'exigence req C206.

##### Correction

On a  $\overrightarrow{OG} = \frac{m_T}{m_T + m_1 + m_C} \overrightarrow{OG_T} + \frac{m_1}{m_T + m_1 + m_C} \overrightarrow{OG_1} + \frac{m_C}{m_T + m_1 + m_C} \overrightarrow{OG_C}$ . On souhaite que  $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$ . On a donc  $0 = \frac{m_T}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_T} + \frac{m_1}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_1} + \frac{m_C}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_C}$  et donc :  $x_{G_C} = -\frac{m_T}{m_C} x_{G_T} - \frac{m_1}{m_C} x_{G_1}$ .

Pour toute la suite de l'étude, les points  $G$  et  $O$  sont supposés confondus et la masse totale de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$  est notée  $M$ .

#### Étude du basculement frontal

**Question 2** Écrire les équations issues de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$ . Le théorème du moment dynamique sera appliqué au point  $I_4$ .

##### Correction

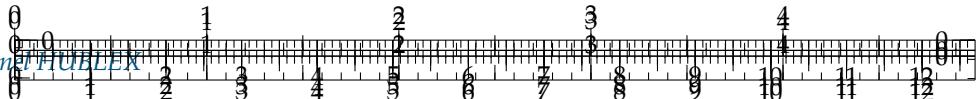
On isole  $\{\Sigma, B\}$ .

On fait le BAME.

$$\blacktriangleright \text{ Poids du bateau : } \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow B)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_B g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O =$$



C1-05  
.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn  
C2-09



$\left\{ \begin{array}{l} -m_B g \vec{z} \\ m_B g \vec{y} \left( x_{G_B} - \frac{2L}{3} \right) + E m_B g \vec{x} \end{array} \right\}_{I_4}.$

► Poids de  $\Sigma$  :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow \Sigma)\} = \left\{ \begin{array}{l} -M g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} -M g \vec{z} \\ -\frac{2MgL}{3} \vec{y} + EM g \vec{x} \end{array} \right\}_{I_4}.$

► Action du sol sur chaque roue :

- $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_1 \vec{x} + N_1 \vec{z} \\ LN_1 \vec{y} \end{array} \right\}_{I_4};$
- $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_1 \vec{x} + N_1 \vec{z} \\ -2EN_2 \vec{x} + LN_2 \vec{y} - 2ET_2 \vec{z} \end{array} \right\}_{I_4};$
- $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_3 \vec{x} + N_3 \vec{z} \\ -2EN_3 \vec{x} - 2ET_3 \vec{z} \end{array} \right\}_{I_4};$
- $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_4)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_4 \vec{x} + N_4 \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_4}.$

**Calcul du  $\{\mathcal{D}(\{\Sigma, B\}/0)\}$ .**

$$\{\mathcal{D}(\{\Sigma, B\}/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(\{\Sigma, B\}/0)} \\ \delta(I_4, \{\Sigma, B\}/0) \end{array} \right\}_{I_4}.$$

On a  $\overrightarrow{R_d(\{\Sigma, B\}/0)} = -(M + m_B) \text{dec}_x \vec{x}_1$ .  
Par ailleurs, on a  $\overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma, B\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G, \Sigma/0)} + \overrightarrow{\delta(G, B/0)}$ . Le bateau étant en translation par rapport au bâti, on a donc :

►  $\overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma\}/0)} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{\delta(I_4, \{\Sigma\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma\}/0)} + \overrightarrow{I_4 G} \wedge \overrightarrow{R_d(\{\Sigma\}/0)} = \left( -2\frac{L}{3} \vec{x}_1 - E \vec{y}_1 + h \vec{z}_1 \right) \wedge -M \text{dec}_x \vec{x}_1 = -M \text{dec}_x (E \vec{z}_1 + h \vec{y}_1);$

►  $\overrightarrow{\delta(G_B, \{B\}/0)} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{\delta(I_4, \{B\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G_B, \{B\}/0)} + \overrightarrow{I_4 G_B} \wedge \overrightarrow{R_d(\{B\}/0)} = \left( \left( -x_{G_B} + 2\frac{L}{3} \right) \vec{x}_1 + E \vec{y}_1 + (z_{G_B} + h) \vec{z}_1 \right) \wedge -m_B \text{dec}_x \vec{x}_1 = m_B \text{dec}_x (E \vec{z}_1 - (z_{G_B} + h) \vec{y}_1);$

► au final,  $\overrightarrow{\delta(I_4, \{\Sigma, B\}/0)} = m_B \text{dec}_x (E \vec{z}_1 - (z_{G_B} + h) \vec{y}_1) - M \text{dec}_x (E \vec{z}_1 + h \vec{y}_1).$

**On applique le PFD.**

► Théorème de la résultante dynamique :

- suivant  $\vec{x}_1 : -(M + m_B) \text{dec}_x = -\sum_{i=1}^4 T_i;$
- suivant  $\vec{y}_1 : 0 = 0;$
- suivant  $\vec{z}_1 : 0 = \sum_{i=1}^4 N_i - (M + m_B) g.$

► Théorème du moment dynamique :

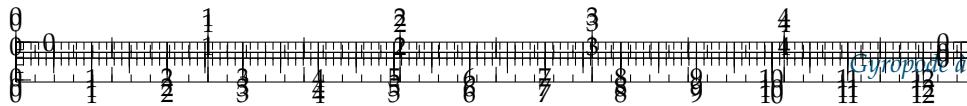
- suivant  $\vec{x}_1 : 0 = Em_B g + Em g - 2EN_2 - 2EN_3;$
- suivant  $\vec{y}_1 : -m_B \text{dec}_x (z_{G_B} + h) - M \text{dec}_x h = L(N_1 + N_2) + m_B g \left( x_{G_B} - 2\frac{L}{3} \right) - \frac{Mg2L}{3};$
- suivant  $\vec{z}_1 : m_B \text{dec}_x E - M \text{dec}_x E = -2ET_2 - 2ET_3.$

**Question 3** Donner les hypothèses qui peuvent être faites afin de réduire le nombre d'inconnues du problème.

#### Correction

La mise en équation précédente permet d'exprimer 8 inconnues ( $N_i$  et  $T_i$  pour  $i$  allant de 1 à 4).





En faisant l'hypothèse que le plan  $(G_1, \vec{z}_1, \vec{x}_1)$  est plan de symétrie, on peut considérer que  $N_4 = N_3$ ,  $T_4 = T_3$ ,  $N_1 = N_2$ ,  $T_1 = T_2$ . Il reste donc 4 inconnues.

De plus, à la limite du basculement frontal, les roues arrières se décolleraient. Il resterait donc les inconnues  $N_3$  et  $T_3$ .

On considère que le basculement a lieu lorsque les roues arrière perdent le contact avec le sol.

**Question 4** Déterminer alors l'expression de  $\text{dec}_x$ .

#### Correction

Le basculement frontal du véhicule peut se traduire par un théorème du moment dynamique appliquée en  $I_4$  en projection sur  $\vec{y}_1$ . On utilise les conditions précédentes. On a donc :

$$\begin{aligned} -m_B \text{dec}_x (z_{G_B} + h) - M \text{dec}_x h &= m_B g \left( x_{G_B} - 2 \frac{L}{3} \right) - \frac{M g 2L}{3} \quad \text{soit} \quad \text{dec}_x = \\ m_B g \left( x_{G_B} - 2 \frac{L}{3} \right) - \frac{M g 2L}{3} \\ \frac{-m_B (z_{G_B} + h) - Mh}{m_B (z_{G_B} + h) + 3Mh} \\ \Leftrightarrow \text{dec}_x = -g \frac{m_B (3x_{G_B} - 2L) - M2L}{3m_B (z_{G_B} + h) + 3Mh} \end{aligned}$$

Le facteur d'adhérence entre le pneu et la route est noté  $f$ .

**Question 5** Donner les expressions de  $N_4$  et  $T_4$  et expliquer qualitativement comment vérifier que le basculement a lieu avant le glissement afin de justifier l'hypothèse faite en début d'étude.

#### Correction

## Étude du basculement latéral

**Question 6** Quel théorème doit-on utiliser afin d'obtenir directement l'équation permettant de déterminer l'expression de  $V$  qui provoque le basculement latéral ?

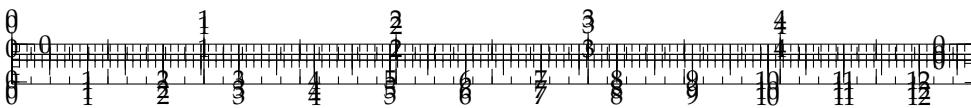
#### Correction

**Question 7** En déduire l'expression de  $V$  qui provoque le basculement latéral .

#### Correction







## Application 7

### Dynamique du véhicule – Véhicule à trois roues Clever– Sujet

Concours Banque PT – SIA 2013.

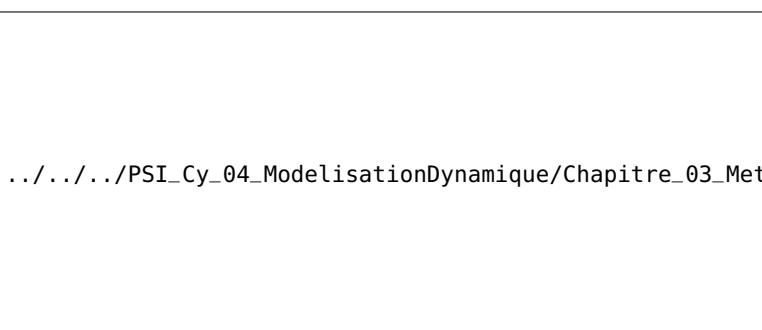
Le Cleverest un démonstrateur technologique développé par un tissu d'industriels européens.

Il se présente comme un véhicule à trois roues pouvant embarquer deux personnes assises en tandem. Il adopte une architecture pendulaire, c'est-à-dire qu'il se penche dans les virages (cf. ??). Le déplacement du centre de gravité qui en résulte lui confère une grande stabilité malgré une faible largeur du véhicule (légèrement inférieure à 1 m, contre 60 à 75 cm pour une moto, et 1,5 m pour une petite voiture). Cette étroitesse se veut une réponse aux problèmes d'encombrement dans les villes mais permet aussi une surface frontale moins importante que sur une voiture conventionnelle et donc des pertes aérodynamiques réduites. En outre, les sensations de conduite sont semblables à celle d'une moto mais avec un pilotage, à l'aide d'un volant, propre à un véhicule à 4 roues. Le moteur est un monocylindre à gaz naturel qui a été développé par l'IFP et dont les performances permettent d'atteindre une vitesse de pointe de  $100 \text{ km h}^{-1}$  avec une accélération en phase avec les attentes pour un véhicule urbain.

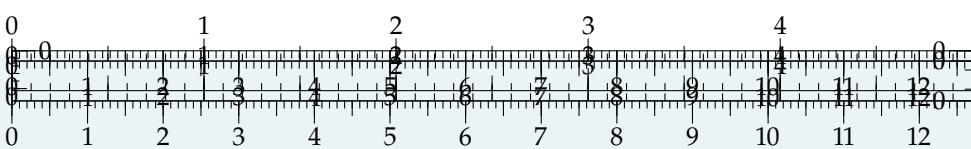
C1-05

C2-09

[.../PSI\\_Cy\\_04\\_ModelisationDynamique](http://.../PSI_Cy_04_ModelisationDynamique)



Du point de vue de l'architecture cinématique (cf. ??), le groupe motopropulseur est placé à l'arrière. À l'avant, l'habitacle repose sur une roue de moto et pivote par rapport au bloc arrière autour d'une liaison pilotée angulairement par le biais de deux vérins hydrauliques. L'inclinaison est contrôlée par un ordinateur de bord en fonction de l'angle au volant et de la vitesse. Le Tableau ?? regroupe les caractéristiques techniques annoncées par l'équipe de développement.

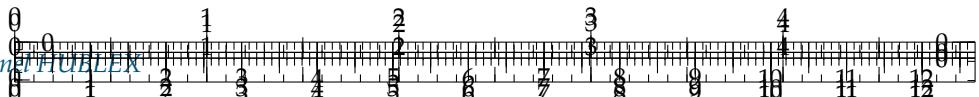


[.../PSI\\_Cy\\_04\\_ModelisationDynamique](http://.../PSI_Cy_04_ModelisationDynamique)

[.../PSI\\_Cy\\_04\\_03\\_PFD\\_Veh\\_App](http://.../PSI_Cy_04_03_PFD_Veh_App)

**FIGURE 9.1** – Diagramme partiel des interacteurs dans la phase d'utilisation normale

**FIGURE 9.3** – Vue de la cinématique pendulaire



## Validation de la fonction technique « Modifier l'inclinaison de l'habitacle »

### Objectif

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction technique « Modifier l'inclinaison de l'habitacle » qui a été proposée pour assurer les fonctions de service FS1 « Permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol » et FS3 « S'insérer facilement dans le trafic » du Tableau ?? donné en introduction. Ce choix doit en effet permettre de garantir la stabilité du Clever dans les virages tout en permettant une faible largeur du véhicule afin de s'insérer dans la circulation.

On donne ci-dessous deux extraits du cahier des charges relatifs aux fonctions de service FS1 et FS3.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_Vehicules

### Conditions de non renversement et d'adhérence

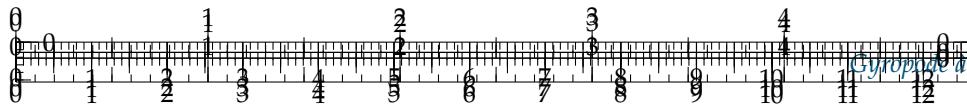
On se propose maintenant d'étudier l'influence du mécanisme d'inclinaison de l'habitacle du Clever sur la stabilité de celui-ci dans les virages. En particulier, on va montrer que cette technologie pendulaire lui permet d'avoir une largeur faible, comparée à une voiture qui n'est pas équipée de cette technologie, tout en assurant un non renversement à vitesse élevée.

Le mécanisme d'inclinaison peut être décrit globalement par la ???. Le groupe motopropulseur, comportant entre autres le moteur et les roues arrière, reste en permanence perpendiculaire au sol. La partie avant, constituée de l'habitacle et de la roue avant, peut au contraire s'incliner dans les virages grâce à un mécanisme hydraulique qui sera étudié ultérieurement dans le sujet. Les deux parties du Clever sont reliées par une liaison pivot d'axe parallèle au sol, schématisée sur la ???

Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse pas dans un premier temps à la roue avant, ce qui permet de se ramener au système schématisé sur la ???. On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- ▶ la route  $\mathbf{R}$  est munie du repère  $\mathcal{R}_g = (O; \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ . Le référentiel associé est supposé galiléen ;
- ▶ le groupe motopropulseur  $\mathbf{0}$  est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est  $O$ . Le rayon de courbure de la trajectoire du point  $C$  dans  $\mathcal{R}_g$  est  $R_C$ . Le repère lié à  $\mathbf{0}$  est  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  tel que  $\vec{z}_0 = \vec{z}_e$  et on note  $\theta = (\vec{x}_e, \vec{x}_0) = (\vec{y}_e, \vec{y}_0)$ . On a donc  $OC = R_C \vec{x}_0$ . On remarquera bien que  $\mathcal{R}_0$  est mobile par rapport à  $\mathcal{R}_g$  ;





- l'habitacle **1** est liée au groupe **0** par une liaison pivot d'axe  $(C, \vec{y}_0)$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_1 = (C; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est tel que  $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$ . On note  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$  l'angle d'inclinaison du système pendulaire. Le centre de gravité de **1** est  $G$  tel que  $\overrightarrow{CG} = e\vec{z}_1$  et sa masse est  $m$ . On note  $I_G(1)$  son opérateur d'inertie en  $G$ . On considérera que c'est un solide de forme quelconque dont la matrice est donnée dans la base  $\mathcal{B}_0$ .
- les roues arrière **2** et **3** sont liées au groupe **0** par des liaisons pivots d'axe  $(C, \vec{x}_0)$ .
- les contacts entre les roues **2** et **3** et la route **R** ont lieu en  $A$  et  $B$  définis par  $\overrightarrow{CA} = \frac{\ell}{2}\vec{x}_0 - r\vec{z}_0$  et  $\overrightarrow{CB} = -\frac{\ell}{2}\vec{x}_0 - r\vec{z}_0$ ,  $r$  désignant le rayon des roues et  $\ell$  la voie arrière du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres  $A$  et  $B$  et de normale  $\vec{z}_0$ . Le contact dans ces liaisons se fait avec frottement et le coefficient de frottement est noté  $f$  (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route  $R$  sur les roues **2** et **3** sont modélisées dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  par des glisseurs en  $A$  et  $B$  de résultantes  $\overrightarrow{R(R \rightarrow 2)} = T_A\vec{x}_0 + N_A\vec{z}_0$  et  $\overrightarrow{R(R \rightarrow 3)} = T_B\vec{x}_0 + N_B\vec{z}_0$ .

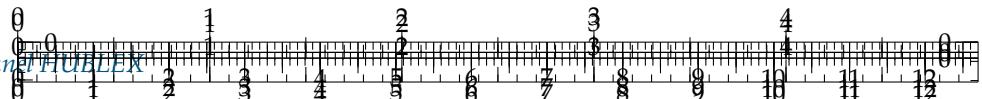
Dans les questions qui suivent, mises à part la liaison entre **R** et **2** et celle entre **R** et **3**, pour lesquelles le frottement est pris en compte, toutes les liaisons sont considérées parfaites. En outre, on négligera la masse des pièces **0**, **2** et **3** devant celle de l'habitacle **1**. On note  $E = 0 \cup 1 \cup 2 \cup 3$ . L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ .

On se place dans un cas où le rayon de courbure  $R_C$  de la trajectoire du point  $C$ , ainsi que la vitesse  $V$  de ce point par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_g$  sont constants. L'angle d'inclinaison  $\alpha$  du système pendulaire est lui aussi supposé constant.

**Question 1** Exprimer la vitesse, notée  $\overrightarrow{V(G/\mathcal{R}_g)}$ , du point  $G$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$  en fonction de  $V$ ,  $e$ ,  $R_C$  et  $\alpha$ .

**Question 2** Exprimer l'accélération, notée  $\overrightarrow{a(G/\mathcal{R}_g)}$ , du point  $G$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$  en fonction de  $V$ ,  $e$ ,  $R_C$  et  $\alpha$ .





**FIGURE 9.6 – Modélisation simplifiée du Clever en position inclinée**

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_

**On néglige le contact entre la roue avant et le sol.**

**Question 3** En rappelant que le rayon  $R_c$ , la vitesse  $V$  et l'angle  $\alpha$  sont supposés constants, calculer le moment dynamique en G, noté  $\delta(G, E/\mathcal{R}_g)$ , de l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$ .

**Question 4** En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$ , écrire les trois équations scalaires qui lient les actions mécaniques de contact entre le sol et les roues  $T_A, N_A, T_B$  et  $N_B$  aux données du problème.

**Question 5** Déduire de ces trois relations l'expression des efforts normaux  $N_A$  et  $N_B$  en fonction de  $m, \ell, r, e, g$  et  $R_c, \alpha, V$ . Tous les autres paramètres étant fixés, une augmentation de la vitesse  $V$  risque-t-elle de susciter un décollement de la roue intérieure ou de la roue extérieure au virage ?

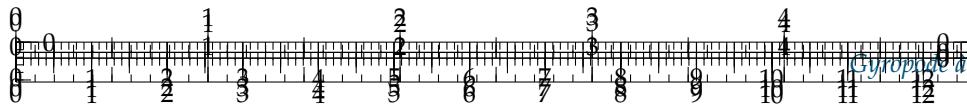
**Question 6** Déduire de la question précédente la condition de non renversement, écrite sous la forme d'une inéquation, qui lie le rapport  $V^2/R_c$  aux paramètres  $\ell, r, e, g$  et  $\alpha, R_c$ .

**Question 7** Exprimer les conditions d'adhérence liant  $T_A, T_B, N_A, N_B$  et  $f$ . En utilisant les équations qui avaient été montrées précédemment et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, en déduire la condition d'adhérence, écrite sous la forme d'une inéquation, qui lie le rapport  $\frac{V^2}{R_c}$  aux paramètres  $e, f, g$  et  $\alpha, R_c$ .

### Cas d'un véhicule sans architecture pendulaire

Afin de montrer l'intérêt de l'architecture pendulaire comme solution technique à la fonction de service FS3 « S'insérer facilement dans la circulation », on imagine





maintenant que le véhicule Clever n'en est pas équipé, ce qui se traduit par la condition  $\alpha = 0$ .

**Question 8** Réécrire les conditions d'adhérence et de non renversement dans ce cas particulier.

On se propose d'étudier la configuration suivante :

- ▶ rayon d'une roue,  $r = 30 \text{ cm}$ , position du centre de gravité,  $e = 50 \text{ cm}$ ;
- ▶ accélération de la pesanteur,  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  coefficient d'adhérence pneu-route,  $f = 0,8$ .

**Question 9** Calculer la valeur de la voie arrière du véhicule (largeur  $\ell$  entre les roues arrières) en dessous de laquelle le phénomène limitant la vitesse à laquelle on peut prendre un virage est le risque de renversement et non celui de dérapage. En déduire quel est le phénomène limitant dans le cas d'une voiture traditionnelle (voie de l'ordre de 1,5 m) et dans le cas d'un véhicule étroit comme le Clever (voie égale à 0,9 m) ?

**Question 10** Calculer la valeur de la vitesse maximale  $V$  à laquelle il est possible de prendre un virage de rayon de courbure  $R_c = 20 \text{ m}$  avec un véhicule étroit de voie  $\ell = 0,9 \text{ m}$  si celui-ci n'est pas inclinable. On exprimera cette vitesse en km/h. Celle-ci est-elle compatible avec la norme qui prescrit de pouvoir rouler à  $55 \text{ km h}^{-1}$  dans un virage de rayon de courbure 20 m ?

### Cas d'un véhicule à architecture pendulaire

On considère maintenant l'architecture pendulaire. L'angle  $\alpha$  peut varier dans la plage  $[-45^\circ, 45^\circ]$ .

Le graphique de la ??, représente, en fonction de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  et dans la configuration précédente (même géométrie et rayon de courbure  $R_c = 20 \text{ m}$ ), l'évolution de vitesse maximale  $V$  en dessous de laquelle il n'y a pas renversement.

**Question 11** Commenter le signe de l'angle  $\alpha$  pour contribuer au non renversement du Clever dans la configuration de la ?? (virage à gauche). Le véhicule doit-il s'incliner vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la trajectoire (comme c'est le cas sur la ?? en bas à droite) ?

**Question 12** En utilisant la ??, déterminer l'angle d'inclinaison  $\alpha$  qu'il faut imposer à l'habitacle pour respecter la norme.

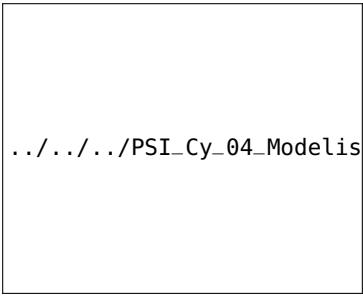
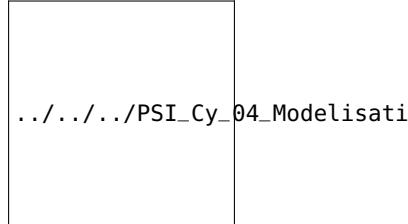
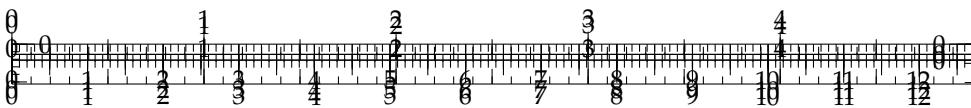


FIGURE 9.7 – Représentation graphique de la condition de non renversement







## Application 7

### Dynamique du véhicule – Véhicule à trois roues Clever– Corrigé

Concours Banque PT – SIA 2013.

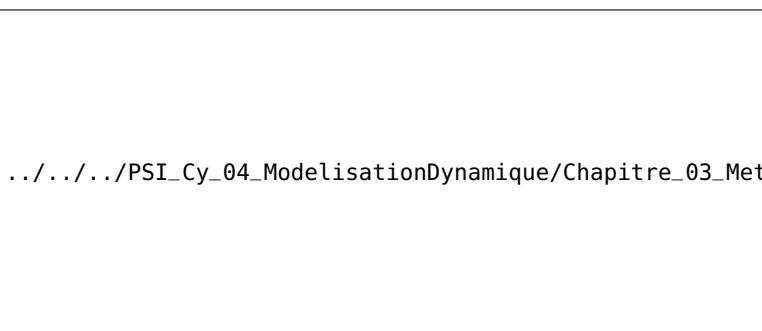
Le Cleverest un démonstrateur technologique développé par un tissu d'industriels européens.

Il se présente comme un véhicule à trois roues pouvant embarquer deux personnes assises en tandem. Il adopte une architecture pendulaire, c'est-à-dire qu'il se penche dans les virages (cf. ??). Le déplacement du centre de gravité qui en résulte lui confère une grande stabilité malgré une faible largeur du véhicule (légèrement inférieure à 1 m, contre 60 à 75 cm pour une moto, et 1,5 m pour une petite voiture). Cette étroitesse se veut une réponse aux problèmes d'encombrement dans les villes mais permet aussi une surface frontale moins importante que sur une voiture conventionnelle et donc des pertes aérodynamiques réduites. En outre, les sensations de conduite sont semblables à celle d'une moto mais avec un pilotage, à l'aide d'un volant, propre à un véhicule à 4 roues. Le moteur est un monocylindre à gaz naturel qui a été développé par l'IFP et dont les performances permettent d'atteindre une vitesse de pointe de  $100 \text{ km h}^{-1}$  avec une accélération en phase avec les attentes pour un véhicule urbain.

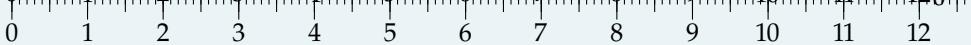
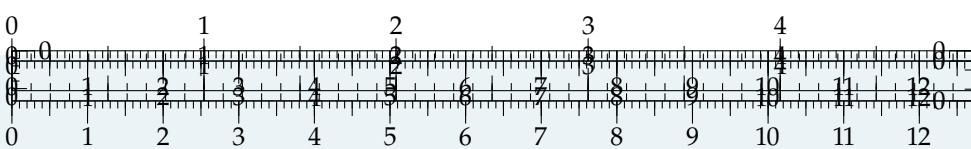
C1-05

C2-09

[.../PSI\\_Cy\\_04\\_ModelisationDynamique](http://.../PSI_Cy_04_ModelisationDynamique)



Du point de vue de l'architecture cinématique (cf. ??), le groupe motopropulseur est placé à l'arrière. À l'avant, l'habitacle repose sur une roue de moto et pivote par rapport au bloc arrière autour d'une liaison pilotée angulairement par le biais de deux vérins hydrauliques. L'inclinaison est contrôlée par un ordinateur de bord en fonction de l'angle au volant et de la vitesse. Le Tableau ?? regroupe les caractéristiques techniques annoncées par l'équipe de développement.



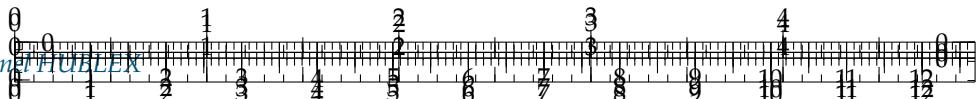
[.../PSI\\_Cy\\_04\\_ModelisationDynamique](http://.../PSI_Cy_04_ModelisationDynamique)

[.../PSI\\_Cy\\_04\\_ModelisationDynamique/Chapitre\\_03\\_Methodologie/PFD\\_Vehicles/Cy\\_04\\_03\\_PFD\\_Veh\\_App](http://.../PSI_Cy_04_ModelisationDynamique/Chapitre_03_Methodologie/PFD_Vehicles/Cy_04_03_PFD_Veh_App)

FIGURE 9.8 – Diagramme partiel des interacteurs dans la phase d'utilisation normale

[.../PSI\\_Cy\\_04\\_ModelisationDynamique](http://.../PSI_Cy_04_ModelisationDynamique)

FIGURE 9.10 – Vue de la cinématique pendulaire



## Validation de la fonction technique « Modifier l'inclinaison de l'habitacle »

### Objectif

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction technique « Modifier l'inclinaison de l'habitacle » qui a été proposée pour assurer les fonctions de service FS1 « Permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol » et FS3 « S'insérer facilement dans le trafic » du Tableau ?? donné en introduction. Ce choix doit en effet permettre de garantir la stabilité du Clever dans les virages tout en permettant une faible largeur du véhicule afin de s'insérer dans la circulation.

On donne ci-dessous deux extraits du cahier des charges relatifs aux fonctions de service FS1 et FS3.

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_Vehicules

### Conditions de non renversement et d'adhérence

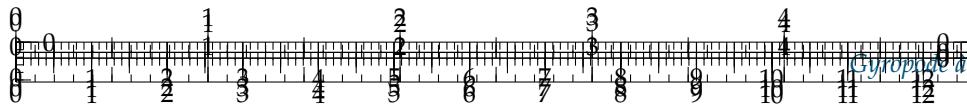
On se propose maintenant d'étudier l'influence du mécanisme d'inclinaison de l'habitacle du Clever sur la stabilité de celui-ci dans les virages. En particulier, on va montrer que cette technologie pendulaire lui permet d'avoir une largeur faible, comparée à une voiture qui n'est pas équipée de cette technologie, tout en assurant un non renversement à vitesse élevée.

Le mécanisme d'inclinaison peut être décrit globalement par la ???. Le groupe motopropulseur, comportant entre autres le moteur et les roues arrière, reste en permanence perpendiculaire au sol. La partie avant, constituée de l'habitacle et de la roue avant, peut au contraire s'incliner dans les virages grâce à un mécanisme hydraulique qui sera étudié ultérieurement dans le sujet. Les deux parties du Clever sont reliées par une liaison pivot d'axe parallèle au sol, schématisée sur la ???

Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse pas dans un premier temps à la roue avant, ce qui permet de se ramener au système schématisé sur la ???. On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- ▶ la route  $\mathbf{R}$  est munie du repère  $\mathcal{R}_g = (O; \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ . Le référentiel associé est supposé galiléen ;
- ▶ le groupe motopropulseur  $\mathbf{0}$  est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est  $O$ . Le rayon de courbure de la trajectoire du point  $C$  dans  $\mathcal{R}_g$  est  $R_C$ . Le repère lié à  $\mathbf{0}$  est  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  tel que  $\vec{z}_0 = \vec{z}_e$  et on note  $\theta = (\vec{x}_e, \vec{x}_0) = (\vec{y}_e, \vec{y}_0)$ . On a donc  $OC = R_C \vec{x}_0$ . On remarquera bien que  $\mathcal{R}_0$  est mobile par rapport à  $\mathcal{R}_g$  ;





- l'habitacle **1** est liée au groupe **0** par une liaison pivot d'axe  $(C, \vec{y}_0)$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_1 = (C; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est tel que  $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$ . On note  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$  l'angle d'inclinaison du système pendulaire. Le centre de gravité de **1** est  $G$  tel que  $\vec{CG} = e\vec{z}_1$  et sa masse est  $m$ . On note  $I_G(1)$  son opérateur d'inertie en  $G$ . On considérera que c'est un solide de forme quelconque dont la matrice est donnée dans la base  $\mathcal{B}_0$ .
- les roues arrière **2** et **3** sont liées au groupe **0** par des liaisons pivots d'axe  $(C, \vec{x}_0)$ .
- les contacts entre les roues **2** et **3** et la route **R** ont lieu en  $A$  et  $B$  définis par  $\vec{CA} = \frac{\ell}{2}\vec{x}_0 - r\vec{z}_0$  et  $\vec{CB} = -\frac{\ell}{2}\vec{x}_0 - r\vec{z}_0$ ,  $r$  désignant le rayon des roues et  $\ell$  la voie arrière du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres  $A$  et  $B$  et de normale  $\vec{z}_0$ . Le contact dans ces liaisons se fait avec frottement et le coefficient de frottement est noté  $f$  (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route  $R$  sur les roues **2** et **3** sont modélisées dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  par des glisseurs en  $A$  et  $B$  de résultantes  $\overrightarrow{R(R \rightarrow 2)} = T_A\vec{x}_0 + N_A\vec{z}_0$  et  $\overrightarrow{R(R \rightarrow 3)} = T_B\vec{x}_0 + N_B\vec{z}_0$ .

Dans les questions qui suivent, mises à part la liaison entre **R** et **2** et celle entre **R** et **3**, pour lesquelles le frottement est pris en compte, toutes les liaisons sont considérées parfaites. En outre, on négligera la masse des pièces **0**, **2** et **3** devant celle de l'habitacle **1**. On note  $E = 0 \cup 1 \cup 2 \cup 3$ . L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ .

On se place dans un cas où le rayon de courbure  $R_C$  de la trajectoire du point  $C$ , ainsi que la vitesse  $V$  de ce point par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_g$  sont constants. L'angle d'inclinaison  $\alpha$  du système pendulaire est lui aussi supposé constant.

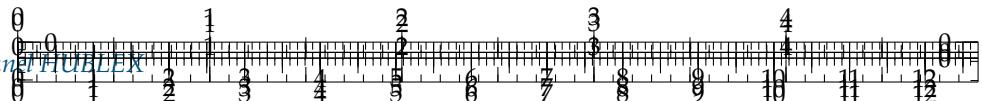
**Question 1** Exprimer la vitesse, notée  $\overrightarrow{V(G/\mathcal{R}_g)}$ , du point  $G$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$  en fonction de  $V, e, R_C$  et  $\alpha$ .

#### Correction

**Question 2** Exprimer l'accélération, notée  $\overrightarrow{a(G/\mathcal{R}_g)}$ , du point  $G$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$  en fonction de  $V, e, R_C$  et  $\alpha$ .

#### Correction





**FIGURE 9.13 – Modélisation simplifiée du Clever en position inclinée**

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDynamique/Chapitre\_03\_Methodologie/PFD\_

**On néglige le contact entre la roue avant et le sol.**

**Question 3** En rappelant que le rayon  $R_c$ , la vitesse  $V$  et l'angle  $\alpha$  sont supposés constants, calculer le moment dynamique en G, noté  $\delta \overrightarrow{(G, E/\mathcal{R}_g)}$ , de l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$ .

#### Correction

**Question 4** En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$ , écrire les trois équations scalaires qui lient les actions mécaniques de contact entre le sol et les roues  $T_A, N_A, T_B$  et  $N_B$  aux données du problème.

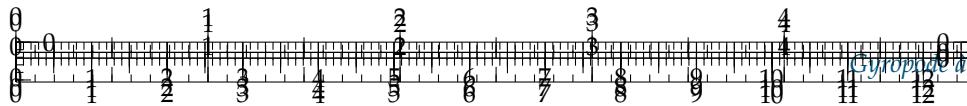
#### Correction

**Question 5** Déduire de ces trois relations l'expression des efforts normaux  $N_A$  et  $N_B$  en fonction de  $m, \ell, r, e, g$  et  $R_c, \alpha, V$ . Tous les autres paramètres étant fixés, une augmentation de la vitesse  $V$  risque-t-elle de susciter un décollement de la roue intérieure ou de la roue extérieure au virage ?

#### Correction

**Question 6** Déduire de la question précédente la condition de non renversement, écrite sous la forme d'une inéquation, qui lie le rapport  $V^2/R_c$  aux paramètres  $\ell, r, e, g$  et  $\alpha, R_c$ .





### Correction

**Question 7** Exprimer les conditions d'adhérence liant  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $N_A$ ,  $N_B$  et  $f$ . En utilisant les équations qui avaient été montrées précédemment et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, en déduire la condition d'adhérence, écrite sous la forme d'une inéquation, qui lie le rapport  $\frac{V^2}{R_c}$  aux paramètres  $e$ ,  $f$ ,  $g$  et  $\alpha$ ,  $R_c$ .

### Correction

## Cas d'un véhicule sans architecture pendulaire

Afin de montrer l'intérêt de l'architecture pendulaire comme solution technique à la fonction de service FS3 « S'insérer facilement dans la circulation », on imagine maintenant que le véhicule Clever n'en est pas équipé, ce qui se traduit par la condition  $\alpha = 0$ .

**Question 8** Réécrire les conditions d'adhérence et de non renversement dans ce cas particulier.

### Correction

On se propose d'étudier la configuration suivante :

- ▶ rayon d'une roue,  $r = 30 \text{ cm}$ , position du centre de gravité,  $e = 50 \text{ cm}$ ;
- ▶ accélération de la pesanteur,  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  coefficient d'adhérence pneu-route,  $f = 0,8$ .

**Question 9** Calculer la valeur de la voie arrière du véhicule (largeur  $\ell$  entre les roues arrières) en dessous de laquelle le phénomène limitant la vitesse à laquelle on peut prendre un virage est le risque de renversement et non celui de dérapage. En déduire quel est le phénomène limitant dans le cas d'une voiture traditionnelle (voie de l'ordre de 1,5 m) et dans le cas d'un véhicule étroit comme le Clever (voie égale à 0,9 m) ?

### Correction

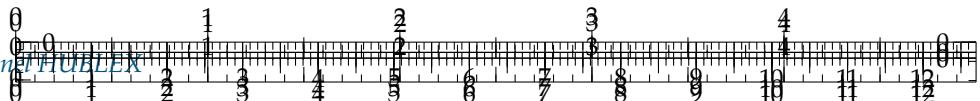
**Question 10** Calculer la valeur de la vitesse maximale  $V$  à laquelle il est possible de prendre un virage de rayon de courbure  $R_c = 20 \text{ m}$  avec un véhicule étroit de voie  $\ell = 0,9 \text{ m}$  si celui-ci n'est pas inclinable. On exprimera cette vitesse en km/h. Celle-ci est-elle compatible avec la norme qui prescrit de pouvoir rouler à  $55 \text{ km h}^{-1}$  dans un virage de rayon de courbure 20 m ?

### Correction

## Cas d'un véhicule à architecture pendulaire

On considère maintenant l'architecture pendulaire. L'angle  $\alpha$  peut varier dans la plage  $[-45^\circ, 45^\circ]$ .





Le graphique de la ??, représente, en fonction de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  et dans la configuration précédente (même géométrie et rayon de courbure  $R_c = 20\text{ m}$ ), l'évolution de vitesse maximale  $V$  en dessous de laquelle il n'y a pas renversement.

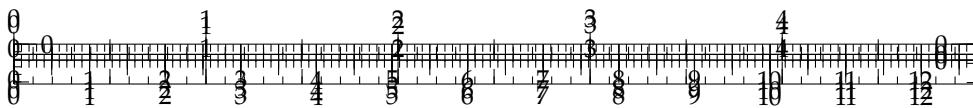
**Question 11** Commenter le signe de l'angle  $\alpha$  pour contribuer au non renversement du Clever dans la configuration de la ?? (virage à gauche). Le véhicule doit-il s'incliner vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la trajectoire (comme c'est le cas sur la ?? en bas à droite) ?

**Correction**

**Question 12** En utilisant la ??, déterminer l'angle d'inclinaison à qu'il faut imposer à l'habitacle pour respecter la norme.

**Correction**





## Application 8

# Dynamique du véhicule – Segway de première génération– Sujet

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

### Présentation

Le support de l'étude est le véhicule auto balancé Segway®. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, mais plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La première génération de Segway avait un guidon fixe et une poignée de direction). Cette technologie provoquait un effet de roulis qui pouvait conduire à un renversement. Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier le dérapage et le renversement d'un Segway de première génération.

La seconde génération de Segway a vu apparaître une technologie appelée LeanSteer avec guidon inclinable qui permet de faire tourner le Segway lorsque l'utilisateur penche son corps sur le côté (non étudié dans cet exercice).

On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- ▶ la route **(0)** est munie du repère  $\mathcal{R}_0 = \left( O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$ . Ce référentiel associé est supposé galiléen.
- ▶ la plate-forme **(1)** a pour centre de gravité  $C$ . Le conducteur **(2)** a pour centre de gravité  $G$ . Les roues 3 et 4, de masse et inertie négligeable, sont liées à 1 par des liaisons pivots d'axe  $\left( C, \vec{y}_1 \right)$ . L'ensemble  $E = 1 + 2$  forme le système matériel indéformable  $E$  de centre de gravité  $G_E$  et de masse  $m_E$ . Il est animée d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est  $O$ . Le rayon de courbure de la trajectoire du point  $G_E$  dans  $\mathcal{R}_0$  est  $\mathcal{R}_C$ . Le repère lié à 1 est  $\mathcal{R}_1$  tel que  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0 = \vec{z}_{01}$  et on note  $\theta = \left( \vec{x}_0, \vec{x}_1 \right) = \left( \vec{y}_0, \vec{y}_1 \right)$ .

On donne  $\overrightarrow{OG_E} = R_C \vec{y}_1 + h \vec{z}_{01}$ . L'opérateur d'inertie de  $E$  en  $G_E$  dans  $\mathcal{B}_1 = \left( \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \right)$

$$\text{est : } I_{G_E}(E) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} .$$

### Hypothèse

- ▶ Les contacts entre les roues 3 et 4 et la route 0 ont lieu en  $A$  et  $B$  définis par  $\overrightarrow{G_E A} = -l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$  et  $\overrightarrow{G_E B} = l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$ ,  $l$  désignant la demi voie du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres  $A$  et

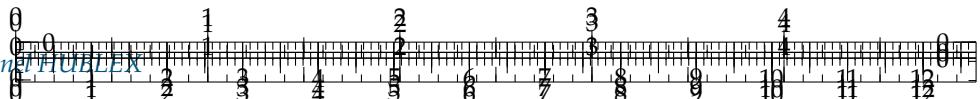


C1-05

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn



$B$  et de normale  $\vec{z}_0$ . Le contact dans ces liaisons se fait avec un coefficient de frottement noté  $f$  (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route 0 sur les roues 3 et 4 sont modélisées par des glisseurs en  $A$  et  $B$  de résultantes  $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} = -T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1$  et  $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 4)} = -T_B \vec{y}_1 + N_B \vec{z}_1$ .

- ▶ On se place dans un cas où le rayon de courbure  $R_C$  de la trajectoire du point  $C$ , ainsi que la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$  sont constants.
- ▶ L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g \vec{z}_0$ . Accélération de la pesanteur,  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ .
- ▶ On néglige la masse et les l'inertie des roues.

On donne :

- ▶ coefficient d'adhérence pneu-route :  $f = 1$ ;
- ▶ masse de  $E = 1 + 2$  :  $m_E = 134 \text{ kg}$ ;
- ▶ demi largeur des voies :  $l = 35 \text{ cm}$ ,  $h = 86 \text{ cm}$ .

### Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

## Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.1» Glissement du véhicule pour une vitesse de $20 \text{ km h}^{-1}$ dans un virage de rayon de courbure 10 m	Interdit

**Question 1** Exprimer la vitesse, notée  $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}$ , du point  $G_E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $R_C$ . Exprimer la vitesse linéaire  $V_L = ||\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}||$  du véhicule en fonction de  $R_C$  et  $\dot{\theta}$ .

## Étude du renversement en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.2» Renversement du véhicule pour une vitesse de $20 \text{ km h}^{-1}$ dans un virage de rayon de courbure 10 m.	Interdit

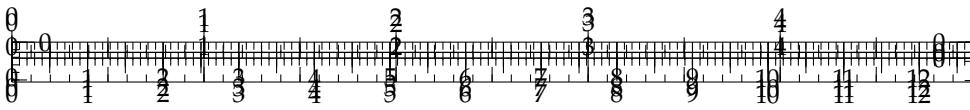
### Hypothèse

On suppose qu'il y a adhérence des roues en  $A$  et  $B$ .

On néglige  $I_{G_E}(E)$  pour simplifier l'application numérique.

**Question 2** Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.





## Application 8

# Dynamique du véhicule – Segway de première génération– Corrigé

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

### Présentation

#### Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

C1-05

C2-09

.../.../.../PSI\_Cy\_04\_ModelisationDyn

### Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

**Question 1** Exprimer la vitesse, notée  $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}$ , du point  $G_E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $R_C$ . Exprimer la vitesse linéaire  $V_L = \|\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}\|$  du véhicule en fonction de  $R_C$  et  $\dot{\theta}$ .

#### Correction

On a  $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)} = -R_C \dot{\theta} \vec{x}_1$ . On a alors  $V_L = R_C \dot{\theta}$ .

#### Correction

$$\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C \ddot{\theta} \vec{x}_1 - R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 = -R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \quad (\dot{\theta} \text{ est constant}).$$

#### Correction

La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc,  $T_A \leq f N_A$  et  $T_B \leq f N_B$ . En sommant les inégalités, on a donc  $T_A + T_B \leq f (N_A + N_B)$ .

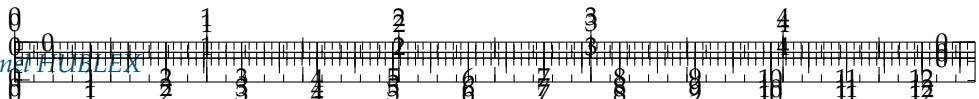
#### Correction

$E$  étant un ensemble indéformable, on a :  $\overrightarrow{R_d(E/\mathcal{R}_0)} = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$  (pas de projection sur  $\vec{z}_0$ ). On isole  $E$  et les roues et on réalise le BAME :

- pesanteur sur  $E$ ;
- action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur  $\vec{z}_{01}$ , on a donc :  $N_A + N_B - m_E g = 0$ .



**Correction**

En appliquant le TRD en projection sur  $\vec{y}_1$ , on a :  $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$ . En utilisant les résultats de la question précédente,  $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$ . En notant  $V_L = R_C \dot{\theta}$  la vitesse limite avant dérapage, on a  $\frac{V_L^2}{R_C} \leq f g$ . On a donc  $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$ .

**Correction**

La vitesse limite est donc de  $10 \text{ m s}^{-1}$  soient  $36 \text{ km h}^{-1}$  ce qui satisfait le cahier des charges.

**Étude du renversement en virage du véhicule Segway****Correction**

Au centre d'inertie de  $E$ , on a  $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$ . On a  $\overrightarrow{\Omega(E/\mathcal{R}_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0$ . On a donc,  $\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta} \vec{x}_1 - D \dot{\theta} \vec{y}_1 + C \dot{\theta} \vec{z}_{01}$ . On a donc  $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$ . En conséquence,  $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \\ -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_E}$ .

**Correction**

$$\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d(B/E)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + (h \vec{z}_0 - l \vec{y}_1) \wedge (-m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1) = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + h m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{x}_1. \overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1 = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2.$$

**Correction**

On a :

- $\overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \vec{z}_{01} = (-l \vec{y}_1 + h \vec{z}_0) \wedge -m_E g \vec{z}_{01} = l m_E g \vec{x}_1$ ;
- $\overrightarrow{BA} \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l \vec{y}_1 \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l N_A \vec{x}_1$ .

En appliquant le TMD en  $B$  suivant  $\vec{x}_1$ , on a :  $l m_E g - 2l N_A = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$ .

$$\text{Au final, } N_A = \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}.$$

**Correction**

Pour qu'il y ait non renversement,  $N_A$  doit rester positif ou nul.

On néglige  $I_{G_E}(E)$  pour simplifier l'application numérique.

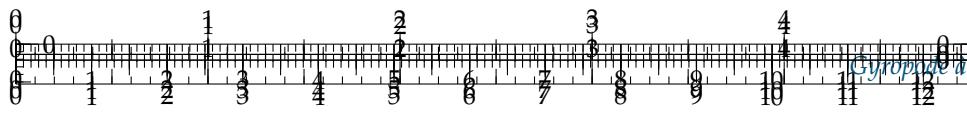
**Question 2** Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

**Correction**

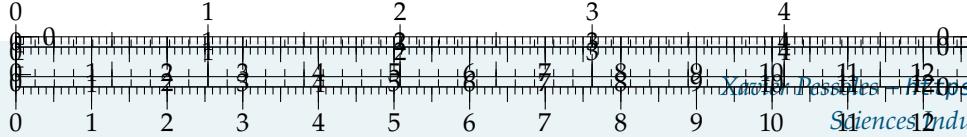
$$N_A \approx \frac{l m_E g - h m_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0. \text{ Ce qui est positif (pas de basculement).}$$

$$N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow l g - h R_C \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow l g - h V_L^2 / R_C \geq 0$$

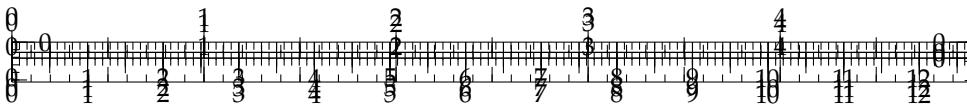




$$\Rightarrow lg \geq hV_L^2/R_C \Rightarrow \sqrt{\frac{R_C lg}{h}} \geq V_L \Rightarrow V_L \leq 6,38 \text{ m s}^{-1} = 22,9 \text{ km h}^{-1}. \text{ CDCF Validé.}$$







.../.../.../Style/png/Fond\_CIN.png

## 10 Approche énergétique

### 10.1 Introduction

#### 10.1.1 Objectif de la modélisation

Dans ce chapitre nous aborderons les notions de **puissance**, **travail**, et **énergie**. Ces notions sont fondamentales pour :

- ▶ dimensionner des composants d'une chaîne d'énergie en terme de puissance transmissible ;
- ▶ déterminer des équations de mouvement pour prévoir les performances d'un système ;
- ▶ estimer le rendement d'une chaîne complète d'énergie.

B2-10

**Émilien Durif**, *Approche énergétique*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

### 10.2 Puissance

#### 10.2.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

##### Définition – Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

On définit la **puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel** ( $E$ ) en mouvement par rapport à un référentiel  $R$  subissant une densité d'effort  $\vec{f}(M)$  (où  $M$  est un point courant de ( $E$ )) comme :

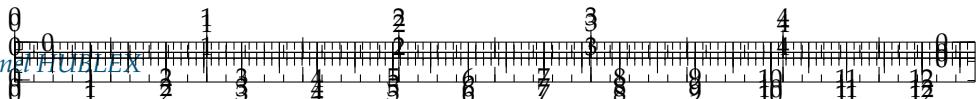
$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \overrightarrow{V(M, E/R)} dV.$$

##### Remarque

On appellera **puissance galiléenne**, la puissance d'un ensemble matériel ( $E$ ) en mouvement dans un **référentiel galiléen**  $\mathcal{R}_g$  :  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g)$ .

- ▶ Une puissance est une **grandeur scalaire** s'exprimant en **Watt**.
- ▶ Elle est homogène à un produit entre un effort et une vitesse et peut donc s'exprimer en unité SI en **Nms<sup>-1</sup>**.
- ▶ Historiquement on a utilisé longtemps les « chevaux » ou « cheval vapeur » (1 ch = 736 W).





### Propriété – Calcul des actions mécaniques s'appliquant sur un ensemble E

On considère un ensemble matériel  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$ .

Dans la pratique pour calculer la puissance totale des actions mécaniques s'appliquant sur  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  il faut sommer toutes les puissances s'appliquant sur les  $S_i$  venant de l'extérieur de  $E$  :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \sum_{\forall S_i \in E} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_i/R).$$

### 10.2.2 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide

#### Définition – Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ( $S$ )

La puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ( $S$ ) en mouvement dans un référentiel  $R$  peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit ( $S$ ) et le torseur cinématique du mouvement de  $S$  dans le référentiel  $R$ .

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}.$$

On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point**.

#### Remarque

- ▶ Le comoment des torseurs est défini par  $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}$   
 $= \left\{ \frac{\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}}{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \right\}_P \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(S/R)}}{\overrightarrow{V(P, S/R)}} \right\}_P = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}.$
- ▶ Lorsque le torseur cinématique de  $S/R$  est un couple (mouvement de translation) alors en tout point  $A$  la puissance est alors donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P, S/R)} \forall P$ .
- ▶ Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)} \forall P$ .

### 10.2.3 Puissance d'actions mutuelles entre deux solides

#### Définition – Puissance d'actions mutuelles entre deux solides

Soient deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) distincts, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. **La puissance des actions mutuelles** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ), dans leur mouvement par rapport au repère  $R$ , est :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R_g) = \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_g) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_g).$$

**La puissance des actions mutuelles** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) est **indépendante du repère R**. Ainsi,

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2).$$



### Remarque

- On peut parler parfois de **puissance des inter-efforts**.
- Pour un ensemble  $E$ , on peut exprimer l'ensemble de la puissance des inter-effort comme la puissance intérieure à l'ensemble  $E$  :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j).$$

## 10.2.4 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

### Définition – Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

Si deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}.$$

La **liaison parfaite** si et seulement si quel que soit le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre  $S_1$  et  $S_2$  est nulle**.

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$

### Remarque

- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solide  $S_1$  et  $S_2$ . Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.
- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

## 10.3 Énergie cinétique

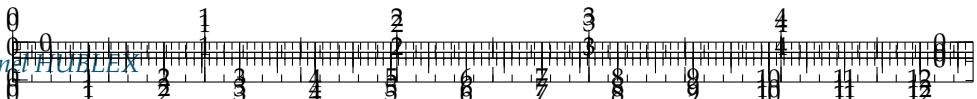
### 10.3.1 Définition

### Définition – Énergie cinétique

On définit l'**énergie cinétique**  $\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g)$  d'un système matériel  $S$  en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}_g$  comme la somme des carrés de la vitesse en chaque point courant  $P$  de  $S$  pondéré de la masse élémentaire :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} \left( \vec{V}(P/\mathcal{R}_g) \right)^2 dm.$$





### 10.3.2 Propriétés

#### Propriété – Expression avec les comoments

L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(S/\mathcal{R}_g) \} \otimes \{ \mathcal{C}(S/\mathcal{R}_g) \}.$$

Il faudra bien veiller à ce que chacun des torseurs soit exprimé en un même point.

#### Propriété – Cas particuliers

- Solide  $S$  de masse  $M$  de centre d'inertie  $G$  en mouvement de **translation** par rapport à  $R$  :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} M \overrightarrow{\mathcal{V}(G, S/\mathcal{R}_g)}^2.$$

- Solide  $S$  de moment d'inertie  $I_{Oz}(S)$  en mouvement de rotation par rapport à l'**axe fixe**  $(O, \vec{z})$  par rapport  $R$  :

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} I_{Oz}(S) \overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_g)}^2.$$

### 10.3.3 Inertie et masse équivalentes

#### Définition – Inertie et masse équivalentes

Lorsqu'un problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et pour simplifier les calculs, on peut exprimer l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$  en fonction d'un seul paramètre cinématique. On peut alors écrire  $\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)$  :

- avec **son inertie équivalente**  $J_{\text{eq}}(E)$  (en  $\text{kg m}^2$ ) rapportée à un paramètre de rotation  $\dot{\theta}(t)$  :

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} J_{\text{eq}}(E) \dot{\theta}^2.$$

- avec **sa masse équivalente**  $M_{\text{eq}}(E)$  (en  $\text{kg}$ ) rapportée à un paramètre de translation  $\dot{x}(t)$  :

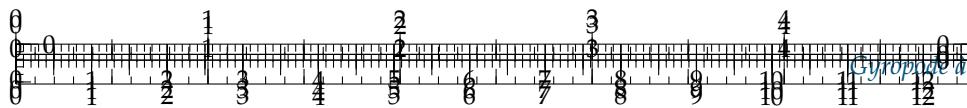
$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} M_{\text{eq}}(E) \dot{x}^2.$$

## 10.4 Théorème de l'énergie cinétique

### 10.4.1 Introduction

Le théorème de l'énergie cinétique est la traduction du Principe Fondamental de la Dynamique d'un point de vue énergétique.





### 10.4.2 Énoncé pour un solide

#### Théorème – Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à  $S$ . Soit :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g).$$

### 10.4.3 Énoncé pour un ensemble de solides

#### Théorème – Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides

Soit  $(E)$  un ensemble de  $n$  solide  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$  en mouvement par rapport à un repère galiléen  $\mathcal{R}_g$ . Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j/\mathcal{R}_g) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) + \mathcal{P}_{\text{int}}(E).$$

Avec :

- ▶  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$  la puissance intérieure à  $E$  qui est nulle si il n'y a pas d'apport d'énergie interne ni de dissipation (liaisons parfaites);
- ▶  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/\mathcal{R}_g)$ , la puissance galiléenne de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$ .

#### Remarque

- ▶ Dans le théorème de l'énergie cinétique, contrairement au principe fondamental de la dynamique, on tient compte de la puissance des actions mutuelles donc internes à l'ensemble matériel  $E$  que l'on considère.
- ▶ Ce théorème permet d'obtenir une seule équation scalaire. Cette méthode est donc moins riche que le principe fondamental de la dynamique mais permet d'obtenir quasiment directement les équations de mouvements.
- ▶ Pour obtenir une équation de mouvement (*i.e* éliminer les inconnues en actions mécaniques) il faut alors combiner d'autres équations issues des théorèmes généraux de la dynamique.

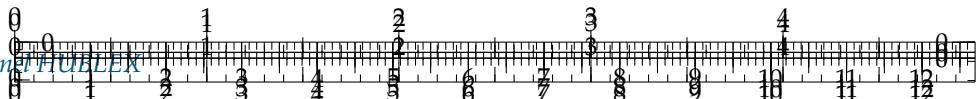
## 10.5 Notion de rendement énergétique

### 10.5.1 Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle

Une étude dynamique d'une chaîne fonctionnelle peut se décomposer en deux parties :

- ▶ **en régime permanent** (variation d'énergie cinétique négligeable) : étude des effets dissipatifs pour estimer une puissance nominale des actionneurs;
- ▶ **en régime transitoire** : évaluation du complément de puissance pour permettre au système de fonctionner.





### Définition – Rendement d'une chaîne fonctionnelle

Le rendement se définit en **régime permanent** comme la puissance utile sur la puissance d'entrée d'une chaîne fonctionnelle :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})}.$$

- $\eta \in [0, 1]$ ;
- $\mathcal{P}(\text{entrée}) > 0$  définit la puissance fournie par l'actionneur en **régime permanent**;
- $\mathcal{P}(\text{utile}) > 0$  définit la puissance fournie à l'aval d'une chaîne fonctionnelle (effecteur par exemple) en **régime permanent**.

### Propriété – Rendement global d'une chaîne d'énergie

Le **rendement global** d'une chaîne d'énergie comportant  $n$  éléments de rendements  $\eta_i$  est donné par :

$$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i \leq 1.$$

Chacun des rendements successifs  $\eta_i$  étant au plus égale à 1, le rendement global est nécessairement inférieur ou égal au plus mauvais rendement.

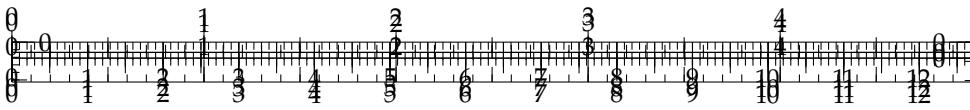
### 10.5.2 Détermination d'une puissance dissipée

#### Propriété – Estimation des dissipations

On peut évaluer en régime permanent les pertes ou puissance dissipée à partir de la connaissance du rendement  $\eta$  :

$$\mathcal{P}(\text{dissipée}) = (1 - \eta) \cdot \mathcal{P}(\text{entrée}).$$





# Application 1

## Système de dépose de composants électroniques – Sujet

Émilien Durif – E3A PSI 2011.

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée  $\vec{y}_0$ ) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

**Hypothèses :**

- ▶ le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
  - ▶ les solides seront supposés indéformables;
  - ▶ on notera  $J_1$  le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  :  $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$ ;
  - ▶ on note  $M_3$  et  $G_3$  respectivement la masse et le centre d'inertie du solide  $S_3$ ;
  - ▶ la position de  $G_3$  est définie par  $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
  - ▶ les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre  $S_0$  et  $S_3$  (Coefficient de frottement noté  $\mu$ ) et la pivot entre  $S_0$  et  $S_1$  (couple résistant noté  $C_r$ );
  - ▶ seul l'action de pesanteur sur  $S_3$  sera supposée non négligeable.
- 
- ▶  $S_0$  : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
  - ▶  $S_1$  : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
  - ▶  $S_2$  : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
  - ▶  $S_3$  : chariot supportant la tête de dépose (masse  $M_3$ ).

### Objectif

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- ▶ couple moteur transmis à  $S_1$  :  $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$ ;
- ▶ vitesse de rotation de  $S_1$  :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$ ;

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose  $S_3$ ) :

- ▶ masse :  $M_3$ ;
- ▶ cinématique de  $S_3$  :  $\vec{a}(G_3 R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{\theta}(t)$ .

On considère l'ensemble  $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$ .

**Question 1** Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.



Données numériques associées au système :

- ▶ Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) :  $\mu = 0,1$ .
- ▶ Pas de la vis à billes :  $p = 20$  mm.
- ▶ Diamètre de la vis à billes :  $D = 25$  mm.
- ▶ Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe  $\vec{y}_0$  :  $I_v = 2,15 \times 10^{-4}$  kg m<sup>2</sup>.
- ▶ Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) :  $C_r = 3$  Nm.
- ▶  $l$ , longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) : 1000 mm.



Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :

- couple maximal,  $C_{\max} = 21,2 \text{ Nm}$ ;
- fréquence de rotation maximale,  $N_m = 6000 \text{ tr/min}$ ;
- moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe  $\vec{y}_0$ ,  $I_m = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

**Question 2** Déterminer l'expression de  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

**Question 3** Calculer  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction des données du problème.

**Question 4** Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble  $E : \mathcal{P}_{\text{int}}(E)$ .

**Question 5** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$

**Question 6** Déterminer la mobilité du système.

**Question 7** Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

**Question 8** Déterminer l'inertie équivalente de  $E$  ramenée à la rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  et du paramètre  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 9** Déterminer la masse équivalente de  $E$  ramené à la translation selon la direction  $\vec{y}_0$  et du paramètre  $\dot{y}(t)$ .

**Question 10** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $E$ .

**Question 11** Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier  $C_m$  à  $y(t)$ .

**Question 12** Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre  $S_1$  et  $S_2$ . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement  $\eta$  défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

**Question 13** En considérant le système  $E_1 = \{S_1 + S_2\}$ , définir le rendement.

**Question 14** On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre  $S_1$  et  $S_2$ . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à  $S_2/R_0$  et  $S_1/R_0$  en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

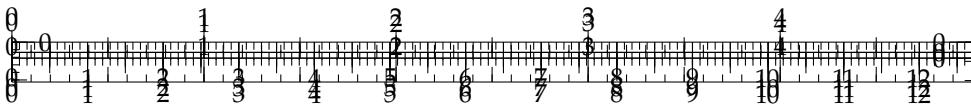
On donne :

- Rendement  $\eta$  dans la liaison hélicoïdale :  $\eta = 0,8$ ;

**Question 15** Déterminer dans ces conditions les dissipations.

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Activation\_01\_DeposeComposants/images/Cy





# Application 1

## Système de dépose de composants électroniques – Corrigé

Émilien Durif – E3A PSI 2011.

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée  $\vec{y}_0$ ) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

### Hypothèses :

- ▶ le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
  - ▶ les solides seront supposés indéformables;
  - ▶ on notera  $J_1$  le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  :  $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$ ;
  - ▶ on note  $M_3$  et  $G_3$  respectivement la masse et le centre d'inertie du solide  $S_3$ ;
  - ▶ la position de  $G_3$  est définie par  $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
  - ▶ les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre  $S_0$  et  $S_3$  (Coefficient de frottement noté  $\mu$ ) et la pivot entre  $S_0$  et  $S_1$  (couple résistant noté  $C_r$ );
  - ▶ seul l'action de pesanteur sur  $S_3$  sera supposée non négligeable.
- 
- ▶  $S_0$  : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
  - ▶  $S_1$  : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
  - ▶  $S_2$  : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
  - ▶  $S_3$  : chariot supportant la tête de dépose (masse  $M_3$ ).

### Objectif

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- ▶ couple moteur transmis à  $S_1$  :  $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$ ;
- ▶ vitesse de rotation de  $S_1$  :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$ ;

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose  $S_3$ ) :

- ▶ masse :  $M_3$ ;
- ▶ cinématique de  $S_3$  :  $\vec{a}(G_3R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}(t)$ .

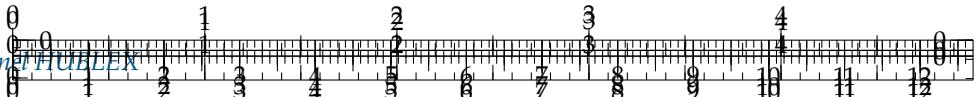
On considère l'ensemble  $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$ .

**Question 1** Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.



Données numériques associées au système :

- ▶ Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) :  $\mu = 0,1$ .
- ▶ Pas de la vis à billes :  $p = 20 \text{ mm}$ .
- ▶ Diamètre de la vis à billes :  $D = 25 \text{ mm}$ .
- ▶ Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe  $\vec{y}_0$  :  $I_v = 2,15 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .
- ▶ Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) :  $C_r = 3 \text{ Nm}$ .
- ▶  $l$ , longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) :  $1000 \text{ mm}$ .



### Correction

**Question 2** Déterminer l'expression de  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

### Correction

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow S_3/R_0)$$

Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :

- ▶ couple maximal,  $C_{\max} = 21,2 \text{ Nm}$ ;
- ▶ fréquence de rotation maximale,  $N_m = 6000 \text{ tr/min}$ ;
- ▶ moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe  $\vec{y}_0$ ,  $I_m = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

**Question 3** Calculer  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction des données du problème.

### Correction

On a :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow S_3/R_0)$$

- ▶  $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{01} \cdot \vec{y}_0 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ L_{01} \cdot \vec{x}_0 \pm C_r \cdot \vec{y}_0 + N_{01} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}(t) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0} = \pm C_r \cdot \dot{\theta}(t). \text{ Le signe de la composante suivant } \vec{y}_0 \text{ dépendra du sens du mouvement de } S_1/S_0.$
- ▶  $\mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) = \{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{-} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}(t) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0} = C_m \cdot \dot{\theta}(t).$
- ▶  $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{03} \cdot \vec{x}_0 \pm Y_{03} \cdot \vec{y}_0 + Z_{03} \cdot \vec{z}_0 \\ L_{03} \cdot \vec{x}_0 + M_{03} \cdot \vec{y}_0 + N_{03} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{-} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{-} = \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t).$
- ▶  $\mathcal{P}(\text{Poids} \rightarrow S_3/R_0) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -M_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{G_3} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{G_3} = 0.$

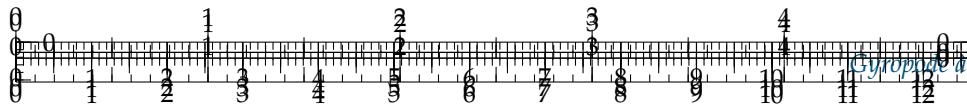
$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t)$$

**Question 4** Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble  $E : \mathcal{P}_{\text{int}}(E)$ .

### Correction

- ▶ D'après le graphe des liaisons :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) + \mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_3)$ .
- ▶ Calcul de  $\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \vec{x}_0 + Y_{12} \vec{y}_0 + Z_{12} \vec{z}_0 \\ L_{12} \vec{x}_0 + M_{12} \vec{y}_0 + N_{12} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{l} q_{21} \vec{y}_0 \\ v_{12} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_0} = Y_{12} \cdot v_{12} + q_{21} \cdot M_{12}. \text{ Or, } \left\{ \begin{array}{l} M_{12} = -\frac{p}{2\pi} Y_{12} \\ v_{12} = \frac{p}{2\pi} q_{21} \end{array} \right. . \text{ D'où : } \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = Y_{12} \cdot v_{12} + q_{21} \cdot M_{12} = \frac{p}{2\pi} [Y_{12} \cdot q_{21} - q_{21} \cdot Y_{12}] = 0.$
- ▶ Calcul de  $\mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_3) = \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} A \\ X_{23} \vec{x}_0 + Y_{23} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{\vec{0}} \otimes \left\{ \begin{array}{l} A \\ p_{32} \vec{x}_0 + q_{32} \vec{y}_0 + r_{32} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{w_{32} \cdot \vec{z}_0}$





$$= 0.$$

- On en déduit donc :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0$ .

**Question 5** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$

#### Correction

- Énergie cinétique de l'ensemble dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :

$$E_c(E/R_0) = E_c(1/R_0) + E_c(2/R_0) + E_c(3/R_0)$$

- Énergie cinétique de 1 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :  $E_c(1/R_0) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}(1/R_0) \} \otimes \{ \mathcal{V}(1/R_0) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\vec{\tau}}{\vec{I}_{O_0}(S_1)} \cdot \dot{\theta}(t) \vec{y}_0 \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \frac{\dot{\theta}(t) \vec{y}_0}{\vec{0}} \right\}_{O_0} = \frac{1}{2} [\dot{\theta}^2 \vec{I}_{O_0}(S_1) \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{y}_0] = \frac{1}{2} J_1 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2$ .
- Énergie cinétique de 2 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :  $E_c(2/R_0) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}(2/R_0) \} \otimes \{ \mathcal{V}(2/R_0) \} = 0$  car l'inertie de 2 est négligeable.
- Énergie cinétique de 3 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :  $E_c(3/R_0) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}(3/R_0) \} \otimes \{ \mathcal{V}(3/R_0) \} = \left\{ \begin{array}{c} - \\ M_3 \cdot \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{\vec{0}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} - \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0} = \frac{1}{2} M_3 \cdot \dot{y}^2(t)$ .
- L'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble  $E$  :  $E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)]$ .

**Question 6** Déterminer la mobilité du système.

#### Correction

Ici la mobilité vaut 1.

**Question 7** Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

#### Correction

Par une fermeture cinématique on pourrait montrer :  $\dot{y}(t) = -\frac{p}{2\pi} \dot{\theta}(t)$ .

**Question 8** Déterminer l'inertie équivalente de  $E$  ramenée à la rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  et du paramètre  $\dot{\theta}(t)$ .

#### Correction

$$E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)] = \frac{1}{2} \left[ (I_m + I_v) + M_3 \cdot \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \right] \cdot \dot{\theta}^2(t) \text{ d'où,}$$

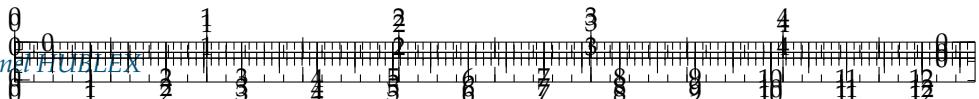
$$J_{\text{eq}}(E) = (I_m + I_v) + M_3 \cdot \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2.$$

**Question 9** Déterminer la masse équivalente de  $E$  ramené à la translation selon la direction  $\vec{y}_0$  et du paramètre  $\dot{y}(t)$ .

#### Correction

$$E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)] = \frac{1}{2} \left[ (I_m + I_v) \cdot \left( \frac{2\pi}{p} \right)^2 + M_3 \right] \cdot \dot{y}^2(t) \text{ d'où,}$$





$$M_{\text{eq}}(E) = (I_m + I_v) \cdot \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + M_3.$$

**Question 10** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $E$ .

#### Correction

En combinant les résultats des différentes questions précédentes, on obtient :  $M_{\text{eq}} \cdot \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t) + 0$ .

On peut postuler un sens de déplacement :  $\dot{y}(t) > 0$ , ainsi  $\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{p} \dot{y}(t) < 0$ ,  $C_r > 0$ ,  $Y_{03} < 0$  :

$$M_{\text{eq}} \cdot \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = \left[ -(C_m + C_r) \cdot \frac{2\pi}{p} + Y_{03} \right] \cdot \dot{y}(t)$$

**Question 11** Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier  $C_m$  à  $y(t)$ .

#### Correction

Il faut éliminer le paramètre  $Y_{03}$ . Pour cela on peut écrire le théorème de la résultante dynamique appliquée à  $S_3$  en projection selon  $\vec{z}_0$  :  $Z_{03} - M_3 \cdot g = 0$ .

Or la loi de Coulomb donne (avec  $Z_{03} > 0$  et  $Y_{03} < 0$ ) :  $Y_{03} = -\mu \cdot Z_{03} = -\mu \cdot M_3 \cdot g$ .

Ainsi l'équation de mouvement obtenue est (en éliminant  $\dot{y}(t) \neq 0$ ) :

$$M_{\text{eq}} \cdot \ddot{y}(t) = -(C_m + C_r) \cdot \frac{2\pi}{p} - \mu \cdot M_3 \cdot g.$$

**Question 12** Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

#### Correction

$$C_m = -\frac{p}{2\pi} [M_{\text{eq}} \ddot{y}_{\max} + M_3 \cdot g \cdot \mu] - C_r = -\frac{p}{2\pi} M_3 (\ddot{y}_{\max} + g \cdot \mu) - (I_m + I_v) \frac{2\pi}{p} \ddot{y}_{\max} - C_r$$

L'application numérique donne :  $C_m = -3,79 N \cdot m$

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre  $S_1$  et  $S_2$ . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement  $\eta$  défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

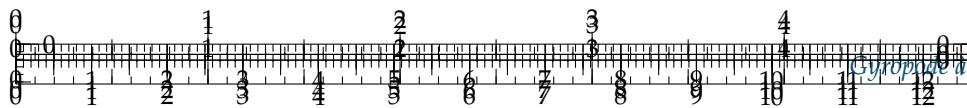
**Question 13** En considérant le système  $E_1 = \{S_1 + S_2\}$ , définir le rendement.

#### Correction

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})} = \frac{\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0)}{\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)}$$

**Question 14** On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre  $S_1$  et  $S_2$ . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à  $S_2/R_0$  et  $S_1/R_0$  en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.





### Correction

- ▶ Expression de  $\mathcal{P}(\text{dissipée})$  :  $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = -\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = -(\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0))$ ;
- ▶ TEC appliqué à  $S_2/R_0$  en régime permanent :  $\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) = -\mathcal{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0)$ ;
- ▶ TEC appliqué à  $S_1/R_0$  en régime permanent :  $\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = -\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0)$
- ▶ en combinant ces équations on obtient  $\mathcal{P}(\text{dissipée})$  :  $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = -(-\mathcal{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0) - \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)) = -\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = (1 - \eta) \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)$ .

On donne :

- ▶ Rendement  $\eta$  dans la liaison hélicoïdale :  $\eta = 0,8$ ;

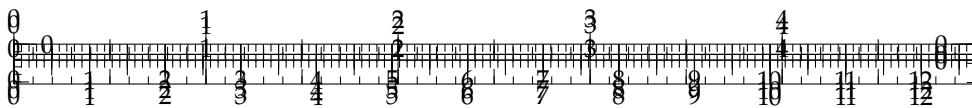
**Question 15** Déterminer dans ces conditions les dissipations.

### Correction

$$\mathcal{P}(\text{dissipée}) = C_{\max} \cdot \dot{\theta}_{\max} \cdot (\eta - 1) = 21,2 \times 6000 \frac{2\pi}{60} \cdot (1 - \eta) = 2664 \text{ W}$$







## Application 2

### Télécabine à stabilité accrue : le funitel – Sujet

Mines Ponts PSI – 2003.

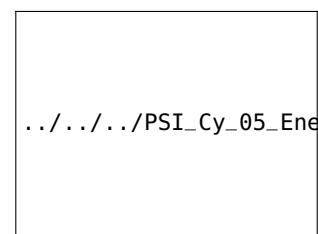
#### Mise en situation

Une télécabine est un système de transport de personnes permettant un changement d'altitude important dans une zone d'accès difficile, généralement en montagne.

Les télécabines sont tractées par un câbles mis en mouvement par un ensemble motorisation. Afin de procéder à une évaluation de la puissance nécessaire à l'entraînement du câble, on prendra comme modèle une ligne rectiligne supportée par 9 pylônes (voir figure au verso).

Le guidage des brins de câble est réalisé par des palonniers à galets fixés sur les pylônes, pour lesquels le contact peut être modélisé par un appui avec frottement sec avec un coefficient de frottement  $f = 0,03$ . 2 brins permettent l'ascension de la cabine, 2 brins permettent la descente. Cette donnée, associée à un calcul numérique des actions de contact des brins de câble sur les palonniers, a permis une estimation à 400 kW des pertes par frottement au niveau de ces palonniers (puissance galiléenne des actions des palonniers sur les brins de câble). L'action du vent sur une face d'une cabine est modélisable par une pression uniforme  $p$  :  $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2$  avec  $p$  en pascal,  $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$  masse volumique de l'air,  $V_a$  module de la vitesse relative de l'air par rapport à la cabine en m/s.

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/C



#### Objectif

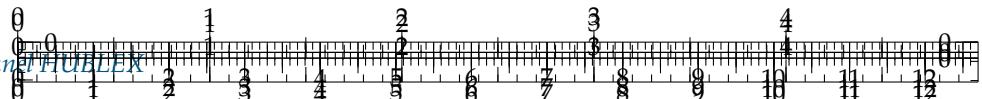
On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de  $0,15 \text{ m s}^{-2}$ . On se place à l'instant où la vitesse de  $7,2 \text{ m s}^{-1}$  va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse  $V_e = 30 \text{ m s}^{-1}$  souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

**Question 1** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $E_{cT}$ , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de  $M_c$ ,  $M_p$ ,  $\mu$ ,  $L$ ,  $V$ ,  $D_p$  et  $I_M$ .

**Question 2** Déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_p$ , des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de  $M_p$ ,  $V$ ,  $h$ ,  $g$  et  $L$ .

**Question 3** Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée





$P_v$  des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de  $\rho$ ,  $S_f$ ,  $V$ ,  $V_e$  et  $\alpha = \arcsin(h/L)$ .

**Question 4** En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée  $P_T$  pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.

Sur la ligne, les cabines se déplacent à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ . En gare, pour permettre l'embarquement et le débarquement des passagers, la vitesse maximum de la cabine doit être de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ . Lors de leur circulation en gare, les cabines sont donc libérées des brins de câble. On envisagera une accélération constante des cabines de  $a = 1,3 \text{ m s}^{-2}$ .

**Question 5** Quelle est alors la durée  $t$  de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur  $x$  (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de  $a$ ,  $v_0$ ,  $t$  et  $V$ . Pour que l'accélération de  $1,3 \text{ m s}^{-2}$  permette le lancement des cabines de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$  à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ , l'application numérique donne environ :  $x = 20 \text{ m}$ .

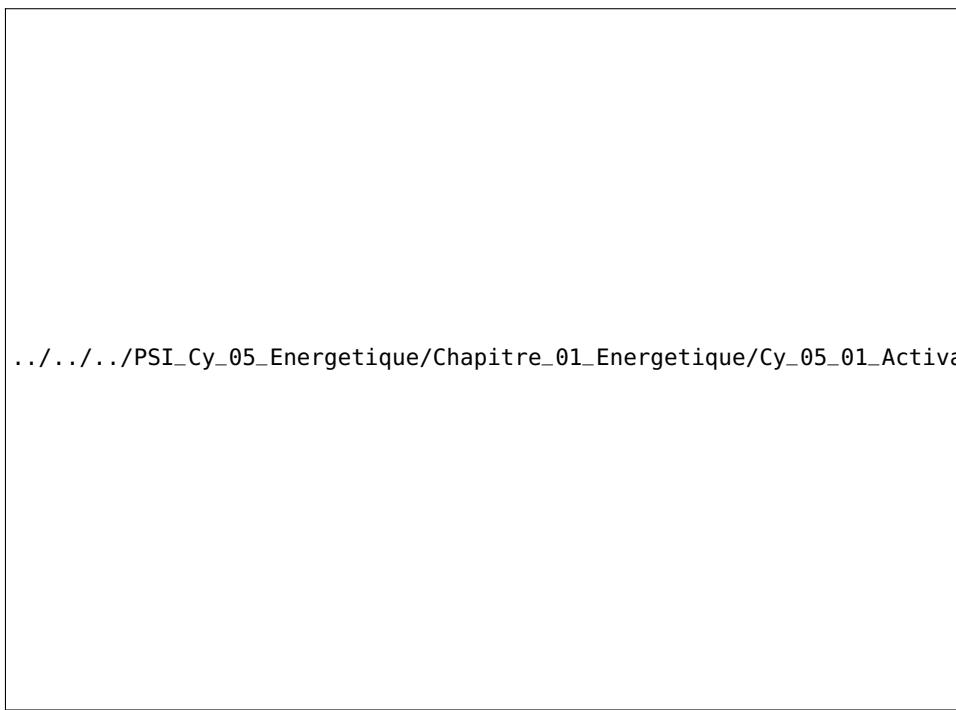
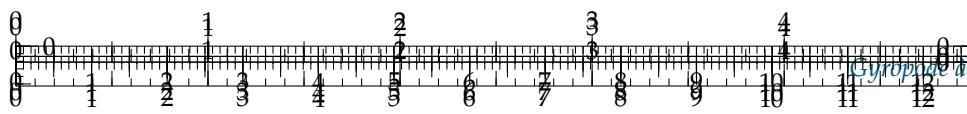
#### Éléments de correction

1.  $\mathcal{E}_c (\Sigma/0) = \frac{1}{2} \left( 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} \right) V^2 \simeq 6,7 \text{ MJ}.$
2.  $\mathcal{P} (\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = -8M_p g V \sin \alpha = -359\,289 \text{ W}.$
3.  $\mathcal{P} (\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -16S_f \rho V^2 V_e \cos \alpha = -218\,677 \text{ W}.$
4.  $P_T = 1266 \text{ kW}.$
5.  $\tau = \frac{V - v_0}{a} = 5,3 \text{ s}$  et  $x = \tau \cdot \frac{1}{2} (V + v_0) = 19,875 \text{ m}.$

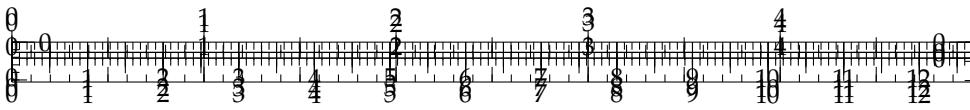
.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Activation\_02\_Funitel/images/Cy\_05\_01\_Ad

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Activation\_02\_Funitel/images/Cy\_05\_01\_Ad









## Application 2

### Télécabine à stabilité accrue : le funitel – Corrigé

Mines Ponts PSI – 2003.

#### Mise en situation

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/C

#### Objectif

On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de  $0,15 \text{ m s}^{-2}$ . On se place à l'instant où la vitesse de  $7,2 \text{ m s}^{-1}$  va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse  $V_e = 30 \text{ m s}^{-1}$  souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

**Question 1** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $E_{c_T}$ , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de  $M_c$ ,  $M_p$ ,  $\mu$ ,  $L$ ,  $V$ ,  $D_p$  et  $I_M$ .

#### Correction

- Énergie cinétique des 4 brins de câbles :  $\mathcal{E}_c (\text{cables}/0) = \frac{1}{2} 4L\mu V^2$ .
- Énergie cinétique des 8 cabines montantes :  $\mathcal{E}_c (C_m/0) = \frac{1}{2} 8(M_c + M_p)V^2$ .
- Énergie cinétique des 8 cabines descendantes :  $\mathcal{E}_c (C_d/0) = \frac{1}{2} 8M_c V^2$ .
- Énergie cinétique de la motorisation :  $\mathcal{E}_c (M/0) = \frac{1}{2} I_M \omega_M^2$ .

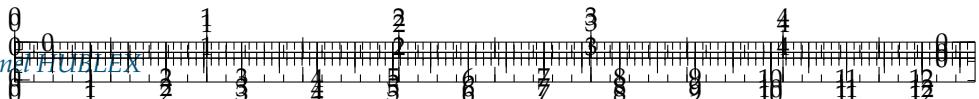
On a par ailleurs  $V = \omega_M \cdot \frac{D_p}{2}$ .

On a donc  $\mathcal{E}_c (\Sigma/0) = \frac{1}{2} \left( 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} \right) V^2$ .

On a donc  $M_{\text{eq}} = 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} = 4 \times 1669 \times 8,47 + 16 \times 2500 + 8 \times 2080 + 575 \times 10^3 \frac{4}{16} = 256\,936 \text{ kg}$  et  $\mathcal{E}_c (\Sigma/0) = 6,7 \text{ MJ}$ .

**Question 2** Déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_p$ , des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de  $M_p$ ,  $V$ ,  $h$ ,  $g$  et  $L$ .





### Correction

Les puissances de la pesanteur sur les cabines montantes s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_m/0) &= \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{l} - (M_c + M_p) g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} \\ &= -8 (M_c + M_p) g V \vec{z} \cdot \vec{i} = -8 (M_c + M_p) g V \sin \alpha. \end{aligned}$$

Les puissances de la pesanteur sur les cabines descendantes s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_d/0) &= \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C_d)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_d/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{l} -M_c g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} \\ &= 8 M_c g V \vec{z} \cdot \vec{i} \\ &= 8 M_c g V \sin \alpha. \end{aligned}$$

Remarque : la puissance de la pesanteur sur le câble sont opposées pour la partie montante et la partie descendante.

Ainsi,  $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = 8 M_c g V \sin \alpha - 8 (M_c + M_p) g V \sin \alpha = -8 M_p g V \sin \alpha = -359\,289 \text{ W}$ .

**Question 3** Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée  $P_v$  des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de  $\rho$ ,  $S_f$ ,  $V$ ,  $V_e$  et  $\alpha = \arcsin(h/L)$ .

### Correction

Le vent va dans le sens de la descente. En montée,  $\overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/C_m)} = \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c, C_m/0)} = -V_e \vec{i} - V \vec{i}$ .

En descente,  $\overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/C_d)} = \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c, C_d/0)} = -V_e \vec{i} + V \vec{i}$ .

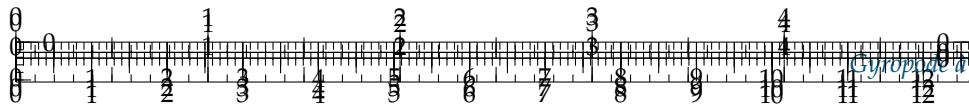
Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi :  $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2 = \frac{1}{2} \rho (-V - V_e)^2 \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{l} -p S_f \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} = -8 S_f V \frac{1}{2} \rho (V + V_e)^2 \cos \alpha$ .

Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi :  $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2 = \frac{1}{2} \rho (V - V_e)^2 \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{l} -p S_f \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} = 8 S_f V \frac{1}{2} \rho (V - V_e)^2 \cos \alpha$ .

Au final,  $\mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = 8 S_f V \frac{1}{2} \rho ((V - V_e)^2 - (V + V_e)^2) \cos \alpha = 8 S_f V \frac{1}{2} \rho (-4 V V_e) \cos \alpha = -16 S_f \rho V^2 V_e \cos \alpha$ . On a donc  $\mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -218\,677 \text{ W}$

**Question 4** En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée  $P_T$  pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.





### Correction

On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c(\Sigma/0)}{dt} = \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathcal{P}(\text{frottement} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow \Sigma/0).$$

On a donc, en régime permanent :  $0 = -229672 - 359289 - 400000 + P_T$ .  $P_T = 218677 + 359289 + 400000 = 977\,966 \text{ W} \approx 1000 \text{ kW}$ .

En tenant compte de l'accélération, on a  $P_T = 1000 \text{ kW} + M_{eq}V\dot{V} = 1000 \text{ kW} + M_{eq}7,2 \cdot 0,15 \approx 1266 \text{ kW}$ .

Le surplus de puissance est nécessaire en cas de situation plus défavorable (plus de vent, dépassement du nombre de passagers...).

**Question 5** Quelle est alors la durée  $t$  de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur  $x$  (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de  $a$ ,  $v_0$ ,  $t$  et  $V$ . Pour que l'accélération de  $1,3 \text{ m s}^{-2}$  permette le lancement des cabines de  $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$  à  $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$ , l'application numérique donne environ :  $x = 20 \text{ m}$ .

### Correction

On a  $v(t) = at + k$ . Par ailleurs,  $v(t_2) = V = at_2 + k$  et  $v(t_1) = v_0 = at_1 + k$ . On a donc

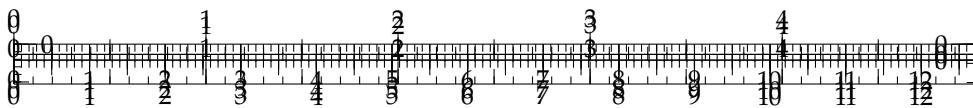
$$V - v_0 = a\tau \text{ soit } \tau = \frac{V - v_0}{a} = \frac{6,9}{1,3} = 5,3 \text{ s.}$$

La distance parcourue pendant la phase d'accélération correspond à l'intégrale de la vitesse sur l'aire sous la courbe. On a donc  $x = \tau \cdot \frac{1}{2} (V + v_0) =$

$$5,3 \times 0,5 \times 7,5 = 19,875 \text{ m.}$$







## Application 3

# Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E) – Sujet

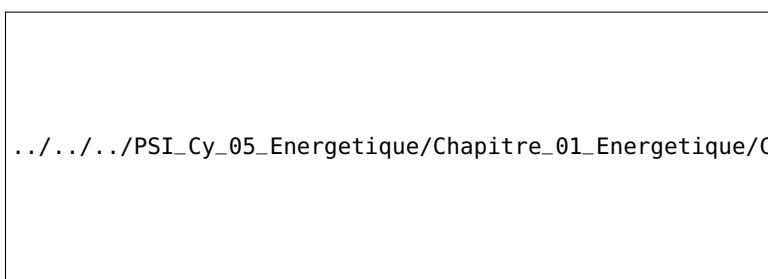
Concours Commun Mines Ponts 2016.

### Mise en situation

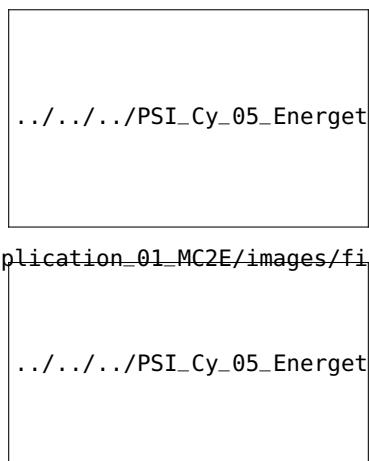
Le robot MC<sup>2</sup>E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

Les blocs permettant de réaliser le mouvement de translation sont présentés ci-dessous.



[.../.../.../PSI\\_Cy\\_05\\_Energetique/Chapitre\\_01\\_Energetique/Cy\\_05\\_01\\_Application\\_01\\_MC2E/images/fig\\_05.png](http://.../.../PSI_Cy_05_Energetique/Chapitre_01_Energetique/Cy_05_01_Application_01_MC2E/images/fig_05.png)



[.../.../.../PSI\\_Cy\\_05\\_Energetique/Chapitre\\_01\\_Energetique/Cy\\_05\\_01\\_Application\\_01\\_MC2E/images/fig\\_05.png](http://.../.../PSI_Cy_05_Energetique/Chapitre_01_Energetique/Cy_05_01_Application_01_MC2E/images/fig_05.png)

Pour cela un moteur réducteur entraîne via 3 systèmes poulie-courroie 3 galets qui entraînent la pince. 3 autres galets permettent de guider la pince. Au total 6 galets permettent d'entraîner et guider la pince par adhérence. Le premier étage de poulie-courroie permet de réduire la vitesse du moteur. Les deux autres étages ont un rapport de réduction unitaire (voir figure au verso).

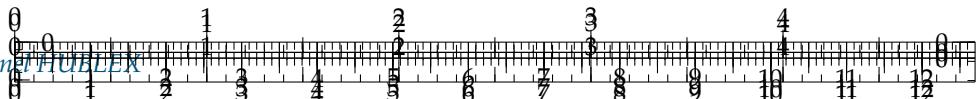
### Objectif

Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

### Équation de mouvement

### Hypothèses





Dans la suite, toutes les vitesses sont définies par rapport au bâti (0).

- ▶ La compensation de la pesanteur est parfaitement réalisée (système non étudié dans le cadre de cet exercice). On ne tiendra pas compte des actions mécaniques dues à la pesanteur par la suite.
- ▶ Les axes de rotation du MC<sup>2</sup>E sont asservis en position. En conséquence, les repères liés aux solides (1), (2) et (3) seront supposés fixes par rapport au repère lié au bâti (0) dont le repère associé est supposé galiléen.
- ▶ L'instrument chirurgical est vertical.
- ▶ Toutes les courroies sont inextensibles et il n'y a pas de glissement entre les galets et les courroies.
- ▶ Tous les galets  $G_i$  ont même rayon noté  $\mathcal{R}_g$  et roulent sans glisser sur la pince (4) au niveau des points  $I_1$  à  $I_6$ .
- ▶ La poulie réceptrice est liée à un pignon. Ce pignon entraîne un deuxième pignon de même rayon primitif pour assurer la transmission de puissance. Il n'y a pas de glissement en leur point de contact.

### Modélisation simplifiée du problème

- ▶ La vitesse de rotation du rotor moteur M4 par rapport à son stator fixe (lié au bâti (0)) est notée  $\omega_m(t)\vec{x}_0$  où  $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$  (vitesse de rotation avant réduction de rapport  $r$ ).
- ▶ La poulie motrice a un rayon  $R_i$  et tourne à la vitesse  $\omega_i(t)$  (vitesse de rotation après réduction de rapport  $r$ ).
- ▶ La poulie réceptrice a un rayon  $R_e$  et tourne à la vitesse  $\omega_e(t)$ .
- ▶ Les deux pignons en contact ont même rayon primitif, supposé égal à  $R_e$ .
- ▶ Le couple du stator sur le rotor moteur M4 est noté  $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$ .
- ▶ L'action mécanique qu'exerce le ressort sur la pince (4) est modélisable par un glisseur noté  $\{\mathcal{T}(\text{ressort} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{ressort} \rightarrow 4)} = -kz(t)\vec{z}_0 \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_4}$  où  $O_4$  est le point de contact entre la pince (4) et le ressort,  $k$  la raideur du ressort et  $z(t)$  la variation de position de l'extrémité de (4) autour de la position d'équilibre.
- ▶ On note  $\overrightarrow{V(O_4, 4/0)} = v(t)\vec{z}_0 = \frac{dz(t)}{dt}\vec{z}_0$ .
- ▶ Les masses des courroies sont négligées.

### Données

- ▶  $I_m$ , moment d'inertie de l'arbre moteur par rapport à son axe de rotation.
- ▶  $I_r$ , moment d'inertie du réducteur par rapport à son axe de rotation de sortie.
- ▶  $I_i$ , moment d'inertie de la poulie, de rayon  $R_i$ , par rapport à son axe de rotation.
- ▶  $I_e$ , moment d'inertie de la poulie, de rayon  $R_e$ , par rapport à son axe de rotation.
- ▶  $I_p$ , moment d'inertie de chaque pignon, de rayon  $R_e$ , par rapport à son axe de rotation.
- ▶  $I_g$ , moment d'inertie de chaque galet  $G_i$ , de rayon  $R_g$ , par rapport à son axe de rotation.
- ▶  $m_4$ , masse de la pince (4).
- ▶  $r = \frac{\omega_i(t)}{\omega_m(t)}$ , rapport de réduction constant du motoréducteur.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$  avec :

- ▶  $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur ;
- ▶  $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

### Travail demandé

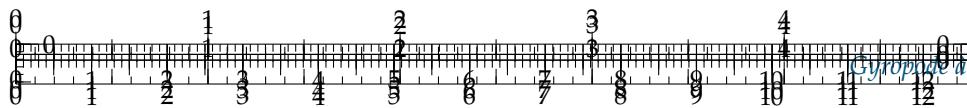
**Question 1** Déterminer la relation entre  $v(t)$  et  $\omega_m(t)$ . Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre  $z(t)$  et  $\theta_m(t)$ .

**Question 2** Réaliser le graphe de structure associé à la translation de la pince.

**Question 3** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à (0). Définir l'inertie équivalente  $J$  ramenée sur l'axe du moteur M4 en fonction, notamment, des moments d'inertie, de  $m_4$  et des données géométriques.

**Question 4** Effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures à ce même ensemble. Préciser l'expression analytique de chaque puissance.





**Question 5** Par l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à (0), déterminer l'expression du terme  $C_e(t)$  en fonction des données du problème et de  $\theta_m(t)$ .

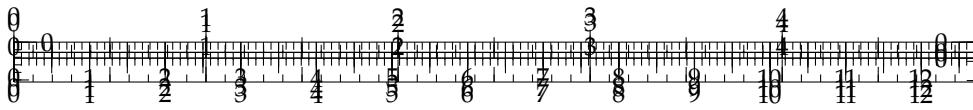
.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique

#### Éléments de correction

1.  $v(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t)$  et  
 $z(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e} \theta_m(t)$ .
2. .
3.  $J = I_m + (I_r + I_i) r^2 + (I_e + 2I_p + 6I_g) \left( \frac{R_i}{R_e} r \right)^2 + m_4 \left( R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2$ .
4.  $\mathcal{P}(\text{res} \rightarrow 4/\mathcal{R}_g) = -kz(t) \frac{R_g r R_i}{R_e} \omega_m(t)$ ,  
 $\mathcal{P}(\text{mot} \rightarrow 4/\mathcal{R}_g) = C_m \omega_m(t)$ ,  
 $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = 0$  et  
 $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0$ .
5.  $C_e(t) = k \left( R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \theta_m(t)$ .







## Application 3

# Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E) – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2016.

### Mise en situation

#### Objectif

Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

### Équation de mouvement

#### Travail demandé

**Question 1** Déterminer la relation entre  $v(t)$  et  $\omega_m(t)$ . Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre  $z(t)$  et  $\theta_m(t)$ .

#### Correction

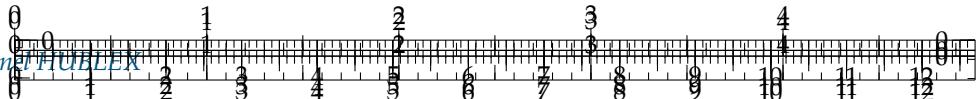
On a  $\omega_i(t) = r\omega_m(t)$ . De plus  $\frac{\omega_e(t)}{\omega_i(t)} = \frac{R_i}{R_e} \iff \omega_e(t) = \frac{R_i}{R_e}\omega_i(t)$  et donc :  $\omega_e(t) = \frac{R_i}{R_e}r\omega_m(t)$ .

Enfin,  $v(t) = R_g\omega_e(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t)$ . Les conditions initiales étant nulles,  $z(t) = R_g r \frac{R_i}{R_e} \theta_m(t)$ .

**Question 2** Réaliser le graphe de structure associé à la translation de la pince.

#### Correction





.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Applica

**Question 3** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à (0). Définir l'inertie équivalente  $J$  ramenée sur l'axe du moteur M4 en fonction, notamment, des moments d'inertie, de  $m_4$  et des données géométriques.

#### Correction

Tous les solides sont en mouvement « simples » par rapport au référentiel galiléen. On a :

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} I_m \omega_m(t)^2 + \frac{1}{2} (I_r + I_i) \omega_i(t)^2 + \frac{1}{2} (I_e + 2I_p + 6I_g) \omega_e(t)^2 + \frac{1}{2} m_4 v(t)^2$$

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} I_m \omega_m(t)^2 + \frac{1}{2} (I_r + I_i) (r \omega_m(t))^2 + \frac{1}{2} (I_e + 2I_p + 6I_g) \left( \frac{R_i}{R_e} r \omega_m(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 \left( R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t) \right)^2$$

$$\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \left( I_m + (I_r + I_i) r^2 + (I_e + 2I_p + 6I_g) \left( \frac{R_i}{R_e} r \right)^2 + m_4 \left( R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \right) \omega_m(t)^2$$

$$\text{On a donc } J = I_m + (I_r + I_i) r^2 + (I_e + 2I_p + 6I_g) \left( \frac{R_i}{R_e} r \right)^2 + m_4 \left( R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2.$$

**Question 4** Effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures à ce même ensemble. Préciser l'expression analytique de chaque puissance.

#### Correction

On isole l'ensemble.

##### Bilan des puissances extérieures

► Action du ressort :  $\mathcal{P}$  (ressort  $\rightarrow 4/\mathcal{R}_g$ ) =  $-kz(t)v(t) = -kz(t)R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t)$ .

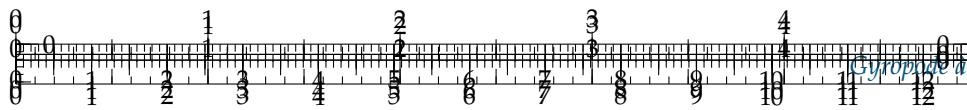
► Action du moteur :  $\mathcal{P}$  (moteur  $\rightarrow 4/\mathcal{R}_g$ ) =  $C_m \omega_m(t)$ .

► Action de la pesanteur :  $\mathcal{P}$  (pesanteur  $\rightarrow E/\mathcal{R}_g$ ) = 0 (La pesanteur est compensée par un système de compensation).

**Bilan des puissances intérieures** Toutes les liaisons étant supposées parfaites,  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0$ .

**Question 5** Par l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à (0), déterminer l'expression du terme  $C_e(t)$  en fonction des





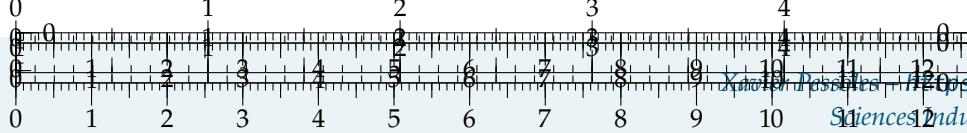
données du problème et de  $\theta_m(t)$ .

### Correction

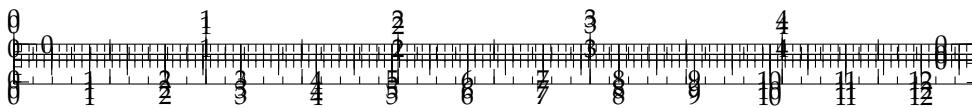
En appliquant le théorème de l'énergie cinétique on a :  $J\omega_m(t)\omega_m(t) = -kz(t)R_g r \frac{R_i}{R_e} \omega_m(t) + C_m \omega_m(t)$

$$C_m \omega_m(t) \Rightarrow J\dot{\omega}_m(t) = -k \left( R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \theta_m(t) + C_m.$$

En utilisant l'équation différentielle du mouvement on a alors :  $C_e(t) = k \left( R_g r \frac{R_i}{R_e} \right)^2 \theta_m(t)$ .







## Application 4

### Tapis de course – Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie.

On s'intéresse à un tapis de course dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. L'utilisateur court sur une courroie mobile qui est entraînée dans le sens inverse de la course. La vitesse de déplacement de la courroie mobile est réglable pour permettre au coureur de rester sur place. Le système propose un large choix de mode de fonctionnement cependant l'étude sera limitée à l'utilisation du programme de contrôle de la fréquence cardiaque. Avec ce programme, le système ajuste automatiquement la vitesse et l'inclinaison du tapis afin d'obtenir une fréquence cardiaque préréglée.

Le programme de contrôle de la fréquence cardiaque fonctionne de la façon suivante :

- ▶ dans un premier temps, le système commence par augmenter la vitesse de déplacement de la courroie mobile via la chaîne fonctionnelle 1 pour atteindre la fréquence cardiaque préréglée ;
- ▶ si la vitesse maximale ne suffit pas, le tapis de course s'incline via la chaîne fonctionnelle 2 pour augmenter encore l'effort.

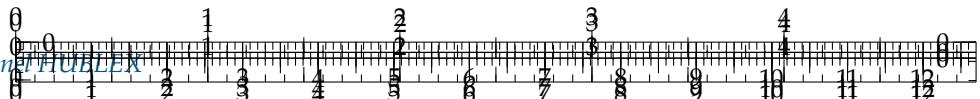
Extrait du cahier des charges :

Critères	Niveaux
Vitesse de course	De 0 à $19 \text{ km h}^{-1}$ par incrément de $0,1 \text{ km h}^{-1}$
Pente	De 0 % à 14 % par incrément de 0,5 %
Masse utilisateur	115 kg maxi

Hypothèses et données :

- ▶ on se place dans le cas où le tapis est réglé à l'horizontale ;
- ▶ la courroie 3, d'épaisseur négligeable, s'enroule sans glisser sur le rouleau 2. Le rayon d'enroulement de la courroie 3 sur le rouleau 2 est  $R_e = 24,5 \text{ mm}$ . La poulie 2 est liée au rouleau 2.
- ▶ la courroie 4, d'épaisseur négligeable, s'enroule sans glisser sur les poulies 1 et 2, ainsi que sur le galet. Les rayons primitifs de la poulie motrice 1 et de la poulie 2 sont respectivement  $R_{p1} = 27 \text{ mm}$  et  $R_{p2} = 44 \text{ mm}$  ;
- ▶ une étude préliminaire a montré que la présence d'un coureur de 115 kg entraîne un effort résistant tangentiel  $T_{\text{coureur} \rightarrow 3} = 230 \text{ N}$  sur la courroie 3 ;
- ▶ l'inertie équivalente des pièces en mouvement ramenée sur l'arbre moteur est  $I_{eq} = 0,1 \text{ kgm}^2$  ;
- ▶ le rendement global du système mécanique est  $\eta = 0,9$ .





### Objectif

Valider le choix de la motorisation de la chaîne fonctionnelle 1 vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 1** Déterminer la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m$  en rad/s en fonction de la vitesse de déplacement  $V_{30}$  en m/s de la courroie 3. En déduire la vitesse maximale du moteur  $\omega_{m \max}$  lorsque la courroie se déplace à la vitesse maximale indiquée dans le cahier des charges.

**Question 2** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  nécessaire pour mettre en mouvement la courroie 3 en régime permanent.

**Question 3** Déterminer la puissance développée par le moteur lorsque le coureur de 115 kg court en régime établi à 19 km/h. Le système possède un moteur courant continu ayant les caractéristiques ci-dessous.

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Application\_02

**Question 4** Conclure quant au bon dimensionnement du moteur vis-à-vis des performances attendues.

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Application\_02\_Tapis/images/Cy\_05\_01\_App

### Éléments de correction

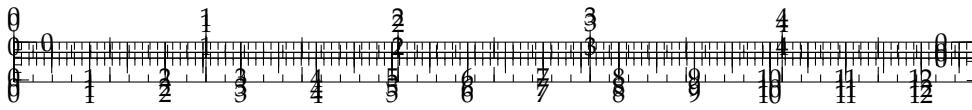
$$1. \omega_m = \frac{R_{p2}}{R_{p1} R_e} V_{30} \text{ et } \omega_{m \max} = 351 \text{ rad s}^{-1}.$$

$$2. C_m = \frac{1}{\eta} \left( T_{coureur \rightarrow 3} R_e \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \right).$$

$$3. P(0 \rightarrow 1/0) = \frac{1}{0,9} \left( T R_e \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \right) \omega_{\max} = 1349 \text{ W.}$$

4. ...





## Application 4

### Tapis de course – Corrigé

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie.

C1-05

C2-08

**Question 1** Déterminer la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m$  en rad/s en fonction de la vitesse de déplacement  $V_{30}$  en m/s de la courroie 3. En déduire la vitesse maximale du moteur  $\omega_{m \max}$  lorsque la courroie se déplace à la vitesse maximale indiquée dans le cahier des charges.

**Correction**

**Question 2** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  nécessaire pour mettre en mouvement la courroie 3 en régime permanent.

**Correction**

**Question 3** Déterminer la puissance développée par le moteur lorsque le coureur de 115 kg court en régime établi à 19 km/h.

**Correction**

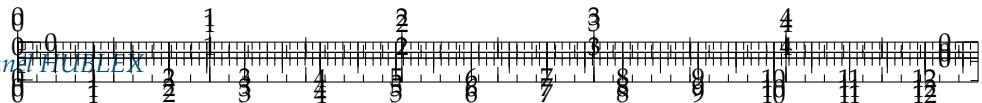
Le système possède un moteur courant continu ayant les caractéristiques ci-dessous.

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Application\_02\_Tapis/images/fig\_03.png

**Question 4** Conclure quant au bon dimensionnement du moteur vis-à-vis des performances attendues.

**Correction**





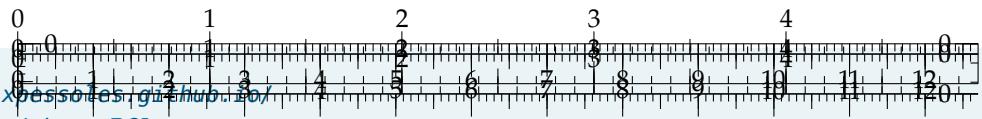
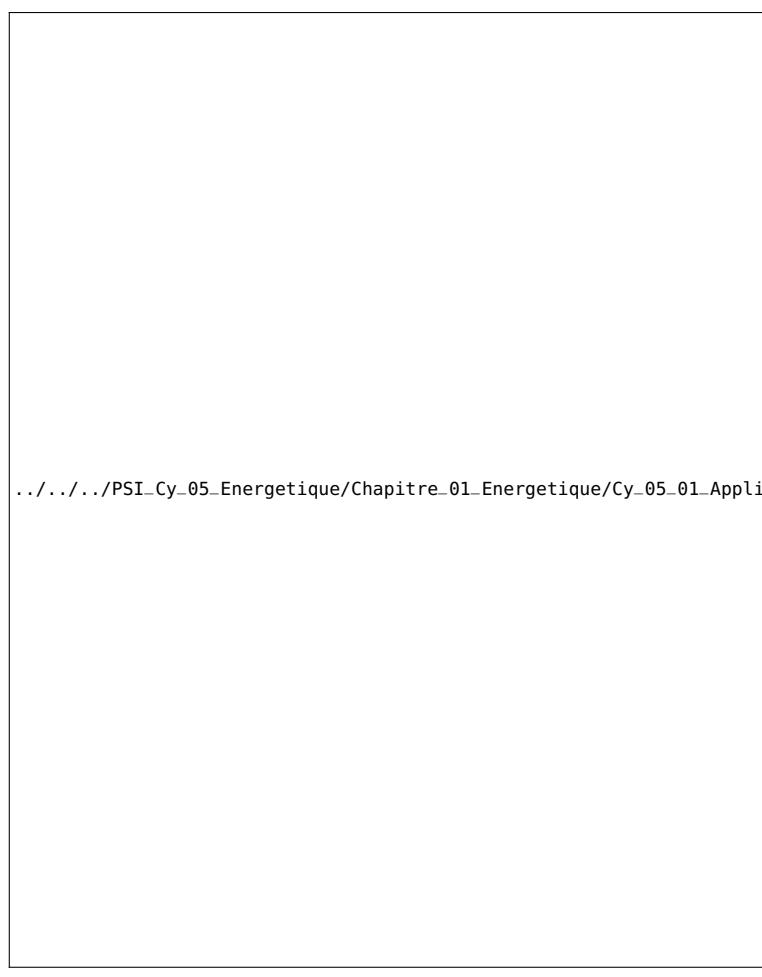
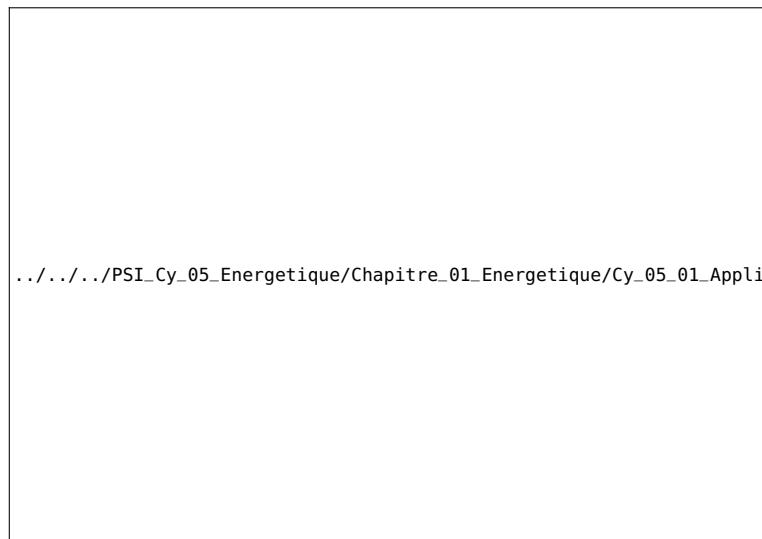
Élém

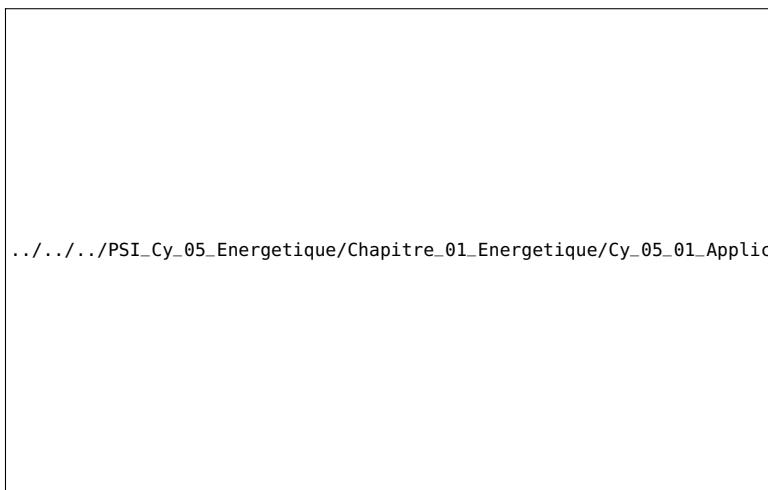
1

2

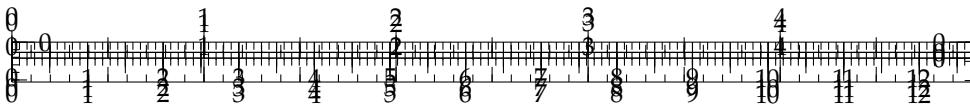
3

4









# Application 5

## Chariot élévateur à bateaux – Sujet

X – ENS – PSI – 2012.

### Présentation

Le chariot élévateur , objet de cette étude, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

- ▶ du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage;
- ▶ du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépose du bateau.

C1-05

C2-08

### Phase de levage du bateau

#### Objectif

Permettre au conducteur de charger et décharger le bateau en toute sécurité :

- ▶ req 102 : vitesse de levage en charge :  $0,33 \text{ m s}^{-1}$ ;
- ▶ req 103 : temps pour atteindre la vitesse de levage en charge : 0,4 s.

.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01

Dans cette partie, on considère que le chariot est à l'arrêt et que le levage est le seul mouvement actif. Le modèle retenu pour cette étude est le schéma de principe de la figure ci-contre. En raison de la symétrie du tablier par rapport à son plan médian vertical, le modèle d'étude peut se ramener à un système comprenant un seul vérin, une seule chaîne et une seule poulie. L'actionneur est un vérin hydraulique dont le corps est en liaison encastrement avec le mât inférieur. La tige est solidaire du mât supérieur. Le levage de l'ensemble S={T5,T6,T7,T8,T9,T10,T11} est obtenu à l'aide d'une chaîne présentant un point d'ancrage sur le mât inférieur et un point d'ancrage sur l'ensemble S. Cette chaîne roule sans glisser sur le pignon T12 qui est en liaison pivot par rapport au mât supérieur. Le bateau étant à l'arrêt en position basse, le conducteur actionne le levage du bateau. L'effort de poussée fourni par le vérin est  $F_V$  (considéré comme constant). On note  $I_{T12}$  le moment d'inertie de la poulie T12 par rapport à son axe de rotation,  $R_{T12}$  son rayon. Sa masse est négligée. Les masses des différents solides sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

Les liaisons sont parfaites. La chaîne est non dissipative. Le repère  $\mathcal{R}_3$  peut être considéré comme un référentiel galiléen pour les conditions de l'étude. Les axes  $\vec{z}_{T3}$  et  $\vec{z}_0$  sont confondus pour les conditions de l'étude.

**Question 1** Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

Solide	Masse
Ensemble (S)	$m_S$
Bateau (B)	$m_B$
Mât inférieur (T3)	$m_{T3}$
Mât supérieur (T4)	$m_{T4}$
Chaîne (C)	négligée

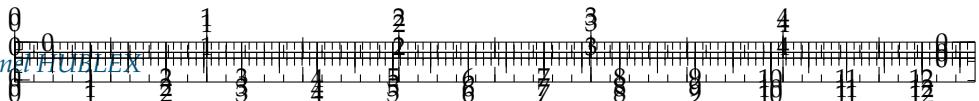
.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01

### Phase de déplacement

La zone de stockage des bateaux se situe nécessairement à une altitude supérieure à celle du quai de déchargement. Afin d'éviter le glissement du bateau lorsque le chariot descend une pente, un dispositif permet de maintenir les fourches horizontales durant le déplacement. Lors d'une phase de décélération, les fourches sont automatiquement inclinées vers l'arrière pour éviter le glissement du bateau. Ce mouvement, de faible amplitude, est assuré par l'asservissement des vérins d'inclinaison du tablier T1,T2 et T1', T2'. Ce dispositif présente l'avantage de prendre en charge de manière entièrement automatisée l'un des



.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01



mouvements du tablier. Le conducteur peut alors charger et mettre à l'eau le bateau sans avoir à gérer manuellement le mouvement d'inclinaison. La figure suivante permet de définir :

- l'angle de basculement  $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}_{T3})$ ;
- l'angle de la pente  $\delta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ ;
- l'angle à asservir  $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{z}_{T3}) = \alpha + \delta$ .

**Question 2** Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle  $\varphi(t)$  qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches ? Justifier.

Nous considérons dans cette partie que le seul mouvement actif est le basculement. L'objectif est d'obtenir un modèle dynamique du mécanisme de basculement à partir de la modélisation plane proposée sur la figure suivante.

Les solides pris en compte pour l'étude sont :

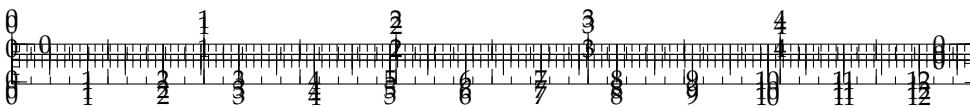
- l'ensemble  $S_2 = \{T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, B\}$  en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{y}_0)$  par rapport au chariot 1 de centre de gravité  $G_{S_2}$ . Le moment d'inertie de l'ensemble  $S_2$  par rapport à l'axe sera noté  $J_{S_2}$  et sa masse  $m_{S_2}$ . La liaison pivot entre l'ensemble  $S_2$  et le chariot (bâti) génère un couple résistant  $\vec{C}_\mu = -\mu \dot{\alpha} \vec{y}_0$  et  $\overrightarrow{O_1 O_{G_{S_2}}} = x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T3}$ ;
- un vérin équivalent  $V = \{T_1, T_2\}$  dont le corps est en liaison pivot d'axe  $(A_1, \vec{y}_0)$  par rapport au chariot (bâti) et la tige en liaison pivot d'axe  $(B_1, \vec{y}_0)$  par rapport à l'ensemble  $S_2$ . La masse et l'inertie du vérin sont négligées. Le vérin développe un effort au cours du mouvement qui sera noté  $\vec{F}_V = p(t) S \vec{z}_{T2}$  où  $p(t)$  est la différence de pression entre les deux chambres du vérin.

On pose  $\overrightarrow{A_1 B_1} = (\lambda_0 + \lambda) \vec{z}_{T2}$ . Le paramétrage est tel que si  $\alpha = 0$  alors  $\lambda = 0$ .

**Question 3** En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle  $\alpha$  est petit, montrer que  $\alpha(t)$  et  $p(t)$  sont liés par l'équation différentielle suivante :  $J_{eq} \ddot{\alpha}(t) + \mu \dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2} g x_{G_{S_2}}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Application\_03\_AscBateau/images/Cy\_05\_01\_Application\_03\_AscBateau





## Application 5

### Chariot élévateur à bateaux – Corrigé

X – ENS – PSI – 2012.

#### Présentation

**Question 1** Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

C1-05

C2-08

#### Correction

On isole l'ensemble : {bateau ; S ; chaîne ; T12 ; T4}. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble dans le référentiel terrestre supposé galiléen :  $P_{\text{int}}(E) + \mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt} [\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)]$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Application\_03\_AscBateau/images/

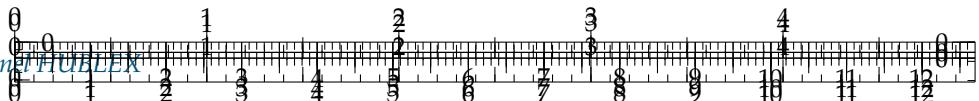
#### Relation cinématique :

- $\overrightarrow{V(G, S/T_3)} = V_B \vec{z}$  et  $\overrightarrow{V(G, T_4/T_3)} = V_V \vec{z}$
- $\overrightarrow{V(G, S/T_3)} = \overrightarrow{V(G, S/T_{12})} + \overrightarrow{V(G, T_{12}/T_4)} + \overrightarrow{V(G, T_4/T_3)}$ 
  - $\overrightarrow{V(G, S/T_{12})} = \overrightarrow{V(J, S/T_{12})} + \vec{G} \wedge \overrightarrow{\Omega(S/T_{12})} = R \vec{x} \wedge \omega(T_4/T_{12}) \vec{y} = R \omega(T_4/T_{12}) \vec{z}$
  - $V_B = R \omega(T_4/T_{12}) + V_V$
- $\overrightarrow{V(G, S/T_3)} = \overrightarrow{V(G, S/T_{12})} + \overrightarrow{V(G, T_{12}/T_3)}$ 
  - $\overrightarrow{V(G, T_{12}/T_3)} = \overrightarrow{V(I, T_{12}/T_3)} + \vec{G} \wedge \overrightarrow{\Omega(T_{12}/T_3)} = -R \vec{x} \wedge \omega(T_{12}/T_4) \vec{y} = R \omega(T_4/T_{12}) \vec{z}$
  - $V_B = R \omega(T_4/T_{12}) + R \omega(T_{12}/T_4) = 2R \omega(T_4/T_{12})$
- $V_B = V_B/2 + V_V \iff V_B = 2V_V \text{ et } \omega(T_4/T_{12}) = -\frac{V_B}{2R}$ .

(Remarque : erreur de signe éventuelle sur  $\omega(T_{12}/T_4)$ , non pénalisante pour la suite...)

#### Bilan des puissances extérieures :





- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = \left\{ \begin{array}{c} -(m_S + m_B)g \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_B} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V_B \vec{z} \end{array} \right\}_{G_B} = -(m_S + m_B)g V_B;$
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow T_4/\mathcal{R}_g) = \left\{ \begin{array}{c} -m_T 4g \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_{T_4}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V_V \vec{z} \end{array} \right\}_{G_{T_4}} = -m_T 4g V_V = -\frac{1}{2} m_T 4g V_B;$
- $\mathcal{P}(\text{pre} \rightarrow T_4/\mathcal{R}_g) = \left\{ \begin{array}{c} F_V \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_H \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V_V \vec{z} \end{array} \right\}_{G_B} ) = F_V V_V = \frac{1}{2} F_V V_B.$
- $\mathcal{P}(T_3 \rightarrow T_4/\mathcal{R}_g) = 0$  : glissière et pivot glissant sans frottement
- $\mathcal{P}(T_3 \rightarrow 12/\mathcal{R}_g) = 0$  : roulement sans glissement.
- $\mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = V_B (\frac{1}{2} F_V - \frac{1}{2} m_T 4g - (m_S + m_B)g)$

Bilan des puissances intérieures :

$$\mathcal{P}(E \xleftrightarrow{=} \dots).$$

Calcul de l'énergie cinétique :

- $\mathcal{E}_c(S/3) = \frac{1}{2}(m_S + m_B)V_B^2$  (mouvement de translation du bateau par rapport au référentiel galiléen);
- $\mathcal{E}_c(T_4/3) = \frac{1}{2}m_T 4V_V^2 = \frac{1}{8}m_T 4V_B^2$  (mouvement de translation du vérin par rapport au référentiel galiléen);
- $\mathcal{E}_c(T_{12}/3) = \frac{1}{2}J\omega(T_{12}/3)^2 = \frac{1}{2}\frac{JV_B^2}{4R^2}$  (mouvement de rotation et translation du solide 12 – masse négligeable) (Remarque : le terme 1/4 n'apparaît pas sur le corrigé initial).
- $\mathcal{E}_c(E/3) = \frac{1}{2}(m_S + m_B + 1/4m_T 4 + J/(4R^2))V_B^2$
- $\frac{d}{dt}[E_c(t)] = \left( m_S + m_B + \frac{1}{4}m_T 4 + \frac{J}{4R^2} \right) V_B \gamma$  et  $\gamma = \frac{d}{dt}[V_B(t)].$

Au final :  $\left( m_S + m_B + \frac{1}{4}m_T 4 + \frac{J}{4R^2} \right) V_B \gamma = V_B \left( \frac{1}{2}F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g \right)$  et  $\gamma = \frac{1}{2}F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g$   
 $\frac{m_S + m_B + 1/4m_T 4 + \frac{J}{4R^2}}{m_S + m_B + 1/4m_T 4 + \frac{J}{4R^2}}$  Cette valeur permet de valider l'exigence 1.1.3 car connaissant la vitesse de levage à atteindre en charge (cf. critère 1.1.2) et l'accélération, on peut connaître le temps du régime transitoire ( $t = \frac{V_{\text{levage}}}{\gamma}$ ).

## Phase de déplacement

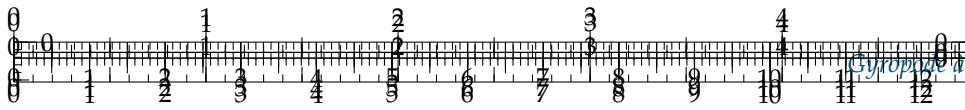
**Question 2** Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle  $\varphi(t)$  qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches ? Justifier.

### Correction

Quand le chariot avance à vitesse constante ( $\varphi_{dec} = 0$ ), il faut que l'angle  $\varphi(t)$  soit nul. Il faut donc envoyer une consigne  $\varphi_c = -\delta$ .

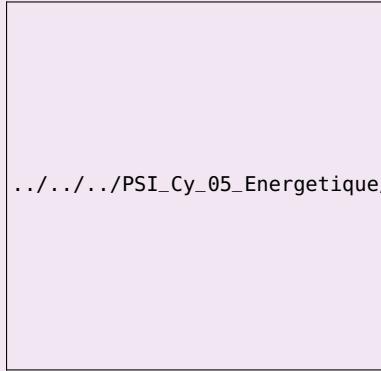
**Question 3** En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle  $\alpha$  est petit, montrer que  $\alpha(t)$  et  $p(t)$  sont liés par l'équation différentielle suivante :  $J_{eq}\ddot{\alpha}(t) + \mu\dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S2}gx_{G_{S2}}$ . Exprimer  $J_{eq}$ .





### Correction

On isole l'ensemble  $E = \{S_2; T_2\}$ . On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen :  $P_{\text{int}}(E) + \mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt} [\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)]$



[http://.../PSI\\_Cy\\_05\\_Energetique/Chapitre\\_01\\_Energetique/Cy\\_05\\_01\\_Application\\_03\\_AscBateau/images/...](http://.../PSI_Cy_05_Energetique/Chapitre_01_Energetique/Cy_05_01_Application_03_AscBateau/images/...)

### Calcul des puissances externes :

- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow S_2/1) = \left\{ \begin{array}{c} -m_{S_2} g \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_{S_2}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S_2/1)} = \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ \overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)} = -x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3} \end{array} \right\}_{G_{S_2}}$
- $= (-m_{S_2} g \vec{z}_1) \cdot (-x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3}) = -m_{S_2} g (-x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \cos \alpha + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \sin \alpha)$
- $\overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)} = \overrightarrow{V(O_1, S_2/1)} - (x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T_3}) \wedge \dot{\alpha} \vec{y}_1 = -x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \vec{x}_{T_3}.$
- $\mathcal{P}(1 \rightarrow S_2/1) = \left\{ \begin{array}{c} - \\ L_{12} \vec{x}_1 - \mu \dot{\alpha} \vec{y}_1 + N_{12} \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1} = -\mu \dot{\alpha}^2$
- $\mathcal{P}(T_1 \rightarrow T_2/1)_{\text{pivot glissant}} = 0$  (pivot glissant sans frottement)
- $\mathcal{P}(T_1 \rightarrow T_2/1)_{\text{vérin}} = \left\{ \begin{array}{c} p(t) S \vec{z}_{T_2} \\ - \end{array} \right\}_{B_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \end{array} \right\}_{B_1} = p(t) S \dot{\lambda} = p(t) S \frac{\dot{\alpha}}{k}$
- $\mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = -m_{S_2} g (-x_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \cos \alpha + z_{G_{S_2}} \dot{\alpha} \sin \alpha) - \mu \dot{\alpha}^2 + p(t) S \dot{\alpha}/k.$

Calcul des puissances internes  $\mathcal{P}(E \leftrightarrow =)$  pas de frottement dans la liaison pivot.

Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble : seules la masse et l'inertie de S2 sont à prendre en contact (elles sont négligeables pour T2).

$$\mathcal{E}_c(S_2/1) = \frac{1}{2} J_{S_2} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{S_2} \overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)}^2 = \frac{1}{2} (J(S_2) + m_{S_2} (x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2)) \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\alpha}^2$$

avec  $J_{\text{eq}} = J(S_2) + m_{S_2} (x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2)$ .

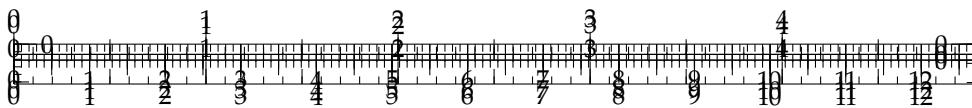
On trouve donc, au final :

$$J_{\text{eq}} \ddot{\alpha} + \mu \dot{\alpha} = \frac{p(t) S}{k} + m_{S_2} g (x_{G_{S_2}} \cos \alpha - z_{G_{S_2}} \sin \alpha).$$

Si on suppose l'angle  $\alpha$  nul (situation de la question précédente), on retrouve bien l'expression demandée.







## Application 6

# Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric) – Sujet

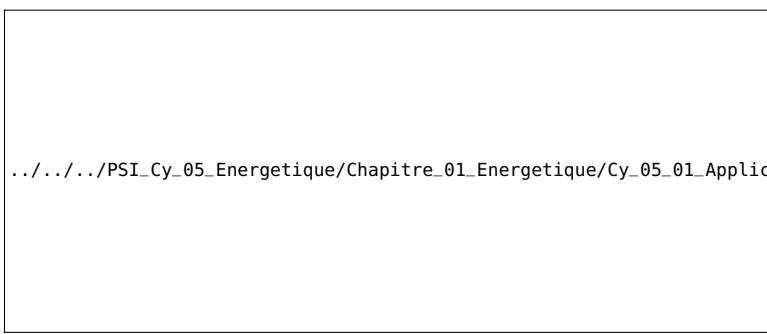
Centrale MP 2004.

### Mise en situation

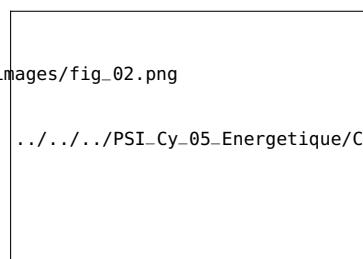
Le mammographe est utilisé pour rechercher la présence d'une tumeur dans un sein. Il est constitué des éléments génériques suivants.

C1-05

C2-08



.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Application\_04\_Mammographie/images/fig\_02.png



.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Application\_04\_Mammographie/images/fig\_03.png

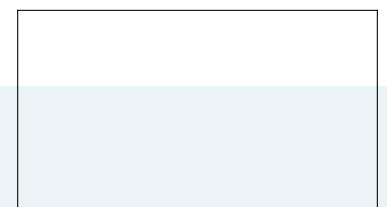
Un ascenseur en liaison glissière de direction verticale par rapport à la partie fixe du mammographe (bâti). Cette mobilité permet d'adapter le mammographe à la taille de la patiente. L'ascenseur supporte les éléments suivants : la « tête RX » qui permet d'émettre les rayons X et un collimateur qui permet de contrôler le faisceau afin d'optimiser le cliché. Le réglage angulaire de la tête RX est réalisé par un pivotement autour de l'axe de rotation du mammographe. La tête RX est donc en liaison pivot par rapport à l'ascenseur.

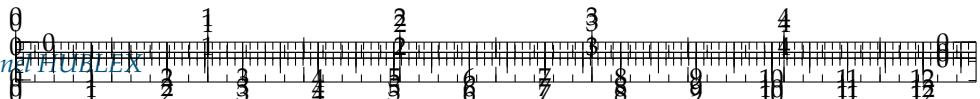
Le « bucky » sert de surface d'appui au sein et de support au film ou au capteur d'images. Le réglage angulaire du bucky est réalisé par un pivotement autour de l'axe de rotation du mammographe. Le bucky est en liaison pivot par rapport à l'ascenseur.

La « plaque de pression » permet de comprimer le sein et de le maintenir en position afin d'avoir une meilleure qualité de l'image. Elle fait l'objet d'une liaison glissière par rapport au bucky. À noter que les réglages angulaires des deux liaisons pivots sont indépendants. On peut, par exemple, faire tourner la tête sans faire tourner le bucky.

### Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »

Le mammographe doit être adapté à la taille de la patiente en faisant monter ou descendre l'ascenseur. La liaison glissière de l'ascenseur par rapport à la partie fixe du mammographe est réalisée par un guidage sur deux barres parallèles fixées sur le bâti. Le déplacement de l'ascenseur est obtenu à partir d'un moteur électrique qui entraîne en rotation une vis. La rotation de la vis entraîne ensuite l'écrou sur lequel est fixé l'ascenseur. Un vérin à gaz permet d'assister le moteur lors de la montée de l'ascenseur par l'intermédiaire d'une poulie montée à l'extrémité de la tige du vérin à gaz et d'une courroie crantée. Une des extrémités de la courroie est fixée sur le bâti du mammographe et l'autre extrémité est liée à l'ascenseur.





## Détermination de la motorisation

### Objectif

L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

Faire monter ou descendre l'ascenseur	
Critères	Niveaux
Ne pas stresser la patiente en déplaçant trop rapidement l'ascenseur : limiter la vitesse de déplacement rapide	$V_R = 0,15 \text{ m s}^{-1}$
Ne pas blesser la patiente lors de l'approche du bucky : respecter une vitesse lente $V_L$ lors de l'accostage	$V_L = 0,02 \text{ m s}^{-1}$
Respecter une course de réglage de la position de l'ascenseur	course = 0,8 m $\delta_{\text{course}} = \pm 10^{-3} \text{ m}$
Atteindre rapidement la vitesse de déplacement rapide $V_R$ : respecter la durée $t_a$ de la phase d'accélération constante	$t_a = 0,4 \text{ s (mini)}$

**Question 1** Déterminer la fréquence de rotation du moteur  $\omega$  en fonction de la vitesse de déplacement  $V$  de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\max}$  que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

Pour déterminer les performances minimales du moteur, on étudie la phase de montée de l'ascenseur définie par :

1. départ en position basse ( $y = 0$  à l'instant  $t = 0$ );
2. mise en mouvement ascendant de l'ascenseur à accélération constante  $a$  pour atteindre la vitesse  $V_R$  rapide en respectant les contraintes du cahier des charges;
3. arrêt de l'ascenseur à la position  $y = 0,8 \text{ m}$  (la phase de décélération est telle que la décélération est constante et sa durée égale à  $t_a$ ).

**Question 2** Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement  $y$  de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

## Solution sans assistance

On souhaite déterminer le couple moteur. Pour cela on propose d'appliquer le théorème de l'énergie-puissance au système isolé  $\Sigma$  (rotor du moteur + vis + ascenseur) en mouvement par rapport au bâti supposé galiléen.

On notera :

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energie\_Trajet\_Cyclique/fig\_10\_bis.png

- $C$  le couple exercé par le stator sur le rotor du moteur.

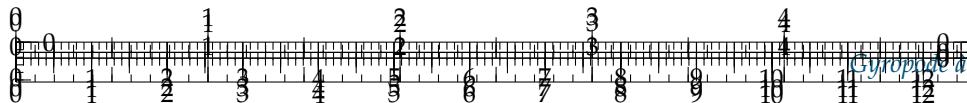
**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ , du système isolé. Mettre  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$  sous la forme :  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}M_e V^2$ . Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M_e$  et faire l'application numérique.

**Question 4** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Question 5** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\max}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire  $P_0$  de ce moteur.

**Question 6** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .





## Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

Le dispositif d'assistance a pour rôle de diminuer le couple moteur en compensant le poids de l'ascenseur. L'emplacement disponible, pour ce dispositif, est celui occupé par le vérin à gaz, voir figures précédentes.

Dans cette solution un contrepoids est choisi pour compenser exactement le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti et d'inertie négligeable. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre au contrepoids.

**Question 7** Faire un schéma de principe de ce dispositif.

**Question 8** Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M'_e$  et faire l'application numérique.

**Question 9** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Question 10** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur.

**Question 11** En déduire la puissance nécessaire  $P$  du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

**Question 12** Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique  $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section  $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$  et de hauteur  $1,4 \text{ m}$ . Cette solution est-elle envisageable ?

## Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

**Question 13** Faire un schéma de principe du dispositif.

**Question 14** L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum  $F_c \text{ maxi}$  qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement  $y$  de l'ascenseur.

L'emplacement disponible ne permet pas de placer un ressort de diamètre nominal  $D$  supérieur à  $0,1 \text{ m}$ . Le ressort de traction sera réalisé dans un acier allié de résistance élastique au glissement  $R_{eg} = 560 \text{ MPa}$  et de module de Coulomb  $G = 82\,000 \text{ MPa}$ . On prendra un coefficient de sécurité  $s = 2$ . Pour que le ressort résiste

à l'effort maximal  $F_c \text{ maxi}$ , il doit avoir un diamètre  $d \geq \sqrt[3]{\frac{8F_c \text{ maxi} D s}{\pi R_{eg}}}$ , c'est-à-dire  $d \geq 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{F_c \text{ maxi}}$ .

Pour obtenir un ressort de raideur  $r$  il faut un nombre de spires  $n = \frac{Gd^4}{8D^3r}$ , c'est-à-dire  $n \simeq 10^{13} \frac{d^4}{r}$ .

**Question 15** La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible ?

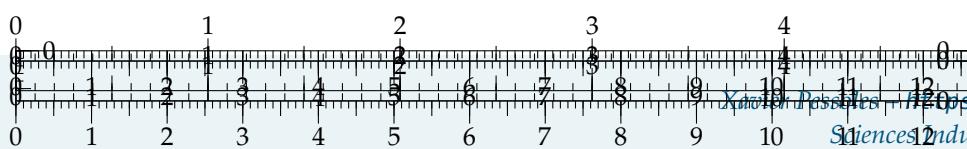
## Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

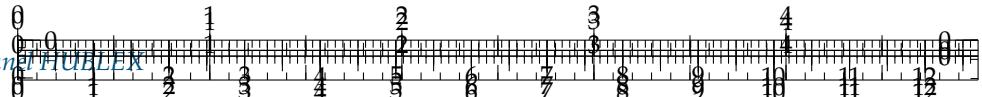
Le schéma de principe de ce dispositif a été donné précédemment. Le corps du vérin est lié au bâti. Une poulie crantée est en liaison pivot avec l'extrémité de la tige du vérin. Une courroie crantée s'enroule (un demi-tour) sur la poulie et est liée au bâti à une de ses extrémités. L'autre extrémité de la courroie est liée à l'ascenseur.

**Question 16** Déterminer la relation existante entre le déplacement  $y$  de l'ascenseur et le déplacement  $y_T$  de la tige du vérin. En déduire la course  $\Delta y_T$  nécessaire de la tige du vérin à gaz.

**Question 17** Le module de l'effort appliquée par la courroie sur l'ascenseur est noté  $F_c$ . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existante entre l'effort  $F$  développé par le vérin et l'effort de compensation  $F_c$ . En déduire l'effort minimum  $F_{\text{mini}}$  développé par le vérin.

Le vérin à gaz est présenté sur le dessin ci-contre.





.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Application\_04\_Mammographie/images/fig\_12.png

**Question 18** Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.

**Question 19** Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre  $d = 15 \times 10^{-3}$  m. On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée  $p_2$ .

Dans la gamme de vérin à gaz on choisit le vérin de diamètre le plus grand  $D = 57 \times 10^{-3}$  m. L'espace disponible permet de placer un vérin dont la chambre a une longueur maximale  $L = 1$  m. Soient  $p_1, F_1, V_1$  la pression, l'effort de poussée du vérin et le volume de gaz dans le vérin pour la position ascenseur en bas et  $p_2, F_{\text{mini}}, V_2$  pour la position ascenseur en haut. Pour cette position, la tige du vérin est complètement sortie.

**Question 20** Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de  $F_1, F_{\text{mini}}$  et  $\Delta y_T$ . Exprimer  $F_{\text{mini}}$  en fonction de  $p_2$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer  $F_1$  en fonction de  $p_1$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur  $r$  de ce vérin à gaz en fonction de  $F_{\text{mini}}, d, D, L$  et  $\Delta y_T$ .

**Question 21** On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur  $L$  et calculer la raideur  $r$ .

On prendra  $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$  pour la suite du problème.

**Question 22** Déterminer l'effort maximal  $F_{\text{Maxi}}$  développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de  $F$ .

**Question 23** Déterminer la relation  $F = F(y_T)$ .

On considérera dans cette question que l'effort de compensation  $F_c$  est constant.

**Question 24** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $a, M_e, F_c, M\dots$

**Question 25** Exprimer ensuite  $a$  en fonction de  $C, M_e, F_c, M\dots$

**Question 26** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur (prendre  $F_c = 1300$  N).

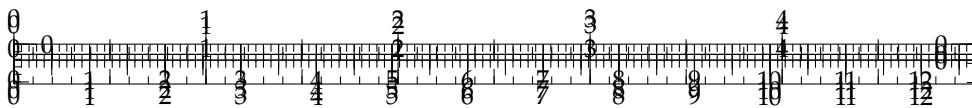
**Question 27** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

## Synthèse

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Application\_04\_Mammographie/images/fig\_01.png

**Question 28** On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges ? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante ?





## Application 6

# Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric) – Corrigé

Centrale MP 2004.

### Mise en situation

C1-05

C2-08

**Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »**

### Détermination de la motorisation

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Ch

#### Objectif

L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

**Question 1** Déterminer la fréquence de rotation du moteur  $\omega$  en fonction de la vitesse de déplacement  $V$  de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\max}$  que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

#### Correction

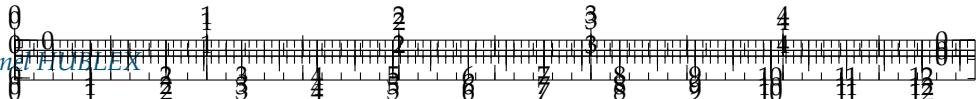
On a  $V = \omega \frac{p_v}{2\pi}$  et donc  $\omega_{\max} = V_R \frac{2\pi}{p_v}$ .

Application numérique :  $\omega_{\max} = 0,15 \frac{2\pi}{6 \cdot 10^{-3}} = 157 \text{ rad s}^{-1} = 1500 \text{ tr min}^{-1}$ .

**Question 2** Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement  $y$  de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

#### Correction





.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05...

$$\text{L'accélération } a_{\max} \text{ est donnée par } a_{\max} = \frac{V_R}{t_a} = \frac{0,15}{0,4} = 0,375 \text{ m s}^{-2}.$$

Les distances parcourues correspondent à l'aire sous la courbe du profil de vitesse. La distance d'accélération et de décélération sont données par  $d_a = \frac{1}{2} V_R t_a = \frac{1}{2} 0,15 \times 0,4 = 0,03 \text{ m}$ .

En conséquence, la distance à parcourir à vitesse constante est  $d_c = 0,8 - 2 \times 0,03 = 0,74 \text{ m}$ .

$$\text{Le temps pour parcourir cette distance est } t_c = \frac{d_c}{V_R} = \frac{0,74}{0,15} = 4,93 \text{ s.}$$

## Solution sans assistance

**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $\mathcal{E}_c (\Sigma/0)$ , du système isolé. Mettre  $\mathcal{E}_c (\Sigma/0)$  sous la forme :  $\mathcal{E}_c (\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$ . Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M_e$  et faire l'application numérique.

### Correction

$$\begin{aligned} \text{Calcul de l'énergie cinétique : } \mathcal{E}_c (\Sigma/0) &= \frac{1}{2} (J_R + J_V) \left( V \frac{2\pi}{p_v} \right)^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left( (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + M \right) V^2. \end{aligned}$$

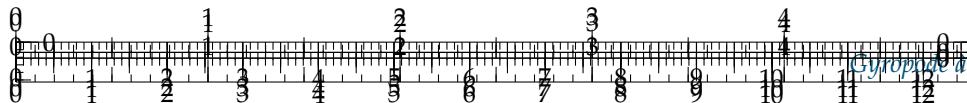
$$\begin{aligned} \text{On a donc } M_e &= (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + M = (2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}) \frac{4\pi^2}{(6 \times 10^{-3})^2} + 130 \\ &= (2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}) \frac{4\pi^2}{(6 \times 10^{-3})^2} + 150 = 547 \text{ kg.} \end{aligned}$$

**Question 4** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

### Correction

- On isole  $\Sigma$ .
- Bilan des puissances intérieures : liaisons parfaites  $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$ .
- Bilan des puissances extérieures :
  - $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow \text{Asc.}/0) = -MgV$ ;
  - $\mathcal{P}(\text{mot} \rightarrow \text{Asc.}/0) = C\omega$ .





► Calcul de l'énergie cinétique :  $\mathcal{E}_c (\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$

On applique le théorème de l'énergie cinétique :  $M_e V \dot{V} = C \frac{V 2\pi}{p_v} - MgV$  et donc  $M_e \dot{V} = C \frac{2\pi}{p_v} - Mg$ . Au final,  $C = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg)$ .

**Question 5** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire  $P_0$  de ce moteur.

#### Correction

Le couple maximal est nécessaire en phase d'accélération.

$$C_{\text{Max}} = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg) \\ = \frac{6 \times 10^{-3}}{\frac{2\pi}{2\pi}} (547 \times 0,15 + 130 \times 9,81) = 1,4 \text{ Nm.}$$

La puissance nécessaire est alors  $P_0 = C_{\text{Max}} \cdot \omega_{\text{maxi}} = 1,4 \times 157 = 222 \text{ W}$ .

**Question 6** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

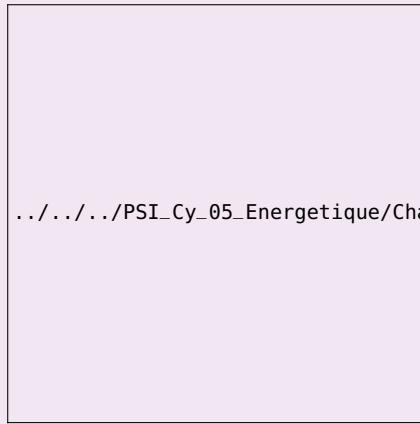
#### Correction

**Le rendement n'a vraiment de sens qu'en régime permanent.** Ici, le rendement va nous permettre de majorer la puissance motrice nécessaire. On a  $P = \frac{222}{0,3} = 740 \text{ W}$ .

## Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

**Question 7** Faire un schéma de principe de ce dispositif.

#### Correction

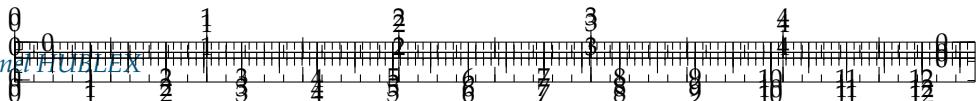


**Question 8** Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M'_e$  et faire l'application numérique.

#### Correction

En prenant un contrepoids de même masse que l'ascenseur et en négligeant l'inertie de la poulie, le contrepoids se déplaçant à la même vitesse que l'ascenseur (mais dans un sens





opposé), on a  $M'_e = (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + 2M$ , soit  $M'_e = 677 \text{ kg}$

**Question 9** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

#### Correction

Par rapport au TEC effectué précédemment, il faut ajouter la puissance des actions de pesanteurs sur le contrepoids. Cette puissance est opposée à la puissance des actions de pesanteur sur l'ascenseur.  $C = \frac{p_v}{2\pi} M'_e V$ .

**Question 10** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur.

#### Correction

$$C_{\text{Max}} = 0,24 \text{ Nm}, P_0 = 38 \text{ W.}$$

**Question 11** En déduire la puissance nécessaire  $P$  du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

#### Correction

Avec les mêmes précautions que précédemment,  $P = 127 \text{ W.}$

**Question 12** Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique  $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section  $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$  et de hauteur  $1,4 \text{ m}$ . Cette solution est-elle envisageable ?

#### Correction

Au vu de la section disponible, la hauteur du contrepoids sera de  $\frac{130}{0,1 \times 0,2 \times 9 \times 10^3} = 0,72 \text{ m}$ . Le contrepoids doit pouvoir se déplacer de  $0,8 \text{ m}$  soit un encombrement total de  $1,52 \text{ m}$  supérieur à  $1,4 \text{ m}$  disponible.

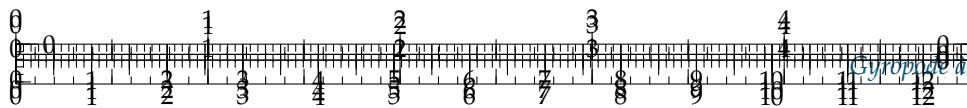
## Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

**Question 13** Faire un schéma de principe du dispositif.

#### Correction





.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Application\_04\_Mammographie/images

**Question 14** L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum  $F_{c \text{ maxi}}$  qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement  $y$  de l'ascenseur.

### Correction

La course maximale est de 0,8 m. La charge à compenser correspond au poids de l'ascenseur soit  $Mg$ . Lorsque l'ascenseur sera en bas,  $y$  sera minimal et le ressort sera tendu. L'effort sera donc maximal, soit  $1,1Mg$ . Lorsque l'ascenseur sera en haut,  $y$  sera maximal et le ressort sera « au repos ». L'effort doit compenser le poids. La raideur doit être de la forme  $k = \frac{1,1Mg - Mg}{0,8} = \frac{0,1 \times 130 \times 9,81}{0,8} \approx 159,4 \text{ N m}^{-1}$ .

.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Application\_04\_Mammographie/images

**Question 15** La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible ?

### Correction

Dans les conditions proposées ci-dessus, on a  $d = 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{1,1 \times Mg} = 0,011 \text{ m}$ . Le nombre de spires serait alors  $n = 872$ . Si les spires sont jointives, on a une longueur de ressort minimale de  $dn = 9,47 \text{ m}$  ce qui dépasse très largement les dimensions de la machine.

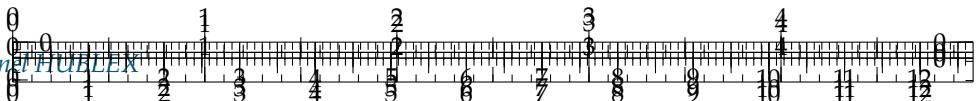
## Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

**Question 16** Déterminer la relation existant entre le déplacement  $y$  de l'ascenseur et le déplacement  $y_T$  de la tige du vérin. En déduire la course  $\Delta y_T$  nécessaire de la tige du vérin à gaz.

### Correction

En utilisant le roulement sans glissement de la poulie par rapport à la courroie en  $I$  on montre que  $y_T = \frac{1}{2}y$ .





.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy

**Question 17** Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté  $F_c$ . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existante entre l'effort  $F$  développé par le vérin et l'effort de compensation  $F_c$ . En déduire l'effort minimum  $F_{\min}$  développé par le vérin.

#### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy

Si on néglige la masse de la poulie, on peut appliquer le PFS (à la place du PFD).

- On isole la poulie de rayon  $R$ .
- La poulie est soumise au brin de gauche, au brin de droite et à l'effort du vérin.
- TMS en O, centre de la pivot :  $F_g R - RF_d = 0$  soit  $F_g = F_d$ .
- TRS :  $2F_d + F_v = 0$ .

En reprenant les notations de la question, on a  $2F_c = F$ . Comme au minimum,  $F_c = Mg$ , on a donc  $F_{\min} = 2Mg = 2550,6 \text{ N}$ .

**Question 18** Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.

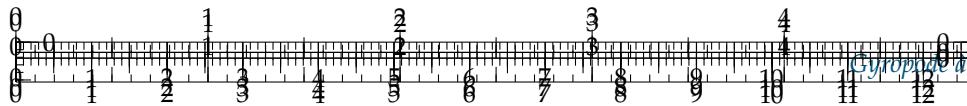
#### Correction

Soit  $D$  le diamètre du vérin et  $d$  le diamètre de la tige.

Dans le premier cas, on a, dans la chambre droite,  $F_d = +p\pi \frac{D^2 - d^2}{4}$  et  $F_g = -p\pi \frac{D^2}{4}$ . La résultante des forces est donc  $F_g + F_d = -p\pi \frac{d^2}{4}$ .

Dans le second cas, l'effort est  $-p\pi \frac{d^2}{4}$ . Les deux modèles sont donc équivalents.





**Question 19** Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre  $d = 15 \times 10^{-3}$  m. On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée  $p_2$ .

#### Correction

On a  $p_2 = \frac{F_{\text{mini}}}{\pi d^2} = 14\,433\,443 \text{ Pa}$  soient 144 bars.

**Question 20** Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de  $F_1$ ,  $F_{\text{mini}}$  et  $\Delta y_T$ . Exprimer  $F_{\text{mini}}$  en fonction de  $p_2$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer  $F_1$  en fonction de  $p_1$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur  $r$  de ce vérin à gaz en fonction de  $F_{\text{mini}}$ ,  $d$ ,  $D$ ,  $L$  et  $\Delta y_T$ .

#### Correction

►  $r = \frac{F_1 - F_{\text{mini}}}{\Delta y_T}$ .

►  $F_{\text{mini}} = p_2 \frac{\pi d^2}{4}$ ,  $F_1 = p_1 \frac{\pi d^2}{4}$ .

► On a  $p_1 V_1 = p_2 V_2 \Leftrightarrow F_{\text{mini}} V_1 = F_1 V_2 \Leftrightarrow F_{\text{mini}} \frac{V_1}{V_2} = F_1$ . D'où  $r = \frac{F_{\text{mini}} \frac{V_1}{V_2} - F_{\text{mini}}}{\Delta y_T}$

$$F_{\text{mini}} \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\Delta y_T}.$$

Par ailleurs,  $V_1 - V_2 = \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}$ ; donc  $V_2 = L \frac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}$ .

$$\text{On a donc } r = F_{\text{mini}} \frac{\frac{V_1 - V_2}{V_2}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}} \frac{\frac{V_1 - V_2}{V_2}}{\frac{L \frac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}}{\Delta y_T}} = F_{\text{mini}} \frac{\frac{\Delta y_T d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}} \frac{d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}$$

**Question 21** On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur  $L$  et calculer la raideur  $r$ .

#### Correction

Pour avoir la raideur la plus faible, il faut la longueur la plus grande soit 1 m.  $r = F_{\text{mini}} \frac{d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}$

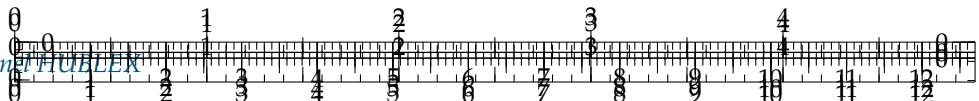
On prendra  $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$  pour la suite du problème.

**Question 22** Déterminer l'effort maximal  $F_{\text{Maxi}}$  développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de  $F$ .

#### Correction

$F_{\text{Maxi}} = F_{\text{Mini}} + r \Delta y_T = 2550 + 180,4 = 2622 \text{ N}$ .





La variation d'effort est de  $\frac{72}{2550} \simeq 3\%$ .

**Question 23** Déterminer la relation  $F = F(y_T)$ .

#### Correction

$$F = 2622 - ry_T.$$

On considérera dans cette question que l'effort de compensation  $F_c$  est constant.

**Question 24** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $a, M_e, F_c, M\dots$

#### Correction

En reprenant l'expression précédente et en ajoutant l'effort de la courroie  $F_c$  (de sens opposé au poids), on a  $C = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg - F_c)$ .

**Question 25** Exprimer ensuite  $a$  en fonction de  $C, M_e, F_c, M\dots$

#### Correction

$$\text{On a } a = \dot{V} \text{ et } a = \frac{1}{M_e} \left( \frac{2\pi C}{p_v} + F_c - Mg \right).$$

**Question 26** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur (prendre  $F_c = 1300 \text{ N}$ ).

#### Correction

On reprend l'expression de  $C$  et on a  $C = 0,22 \text{ Nm}$ .  $P_0 = 34,4 \text{ W}$

**Question 27** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

#### Correction

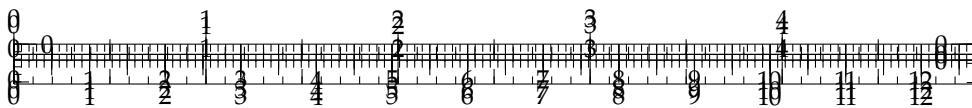
$$P = 115 \text{ W}$$

## Synthèse

**Question 28** On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges ? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante ?

#### Correction





## Application 7

### Mesure d'inertie – Sujet

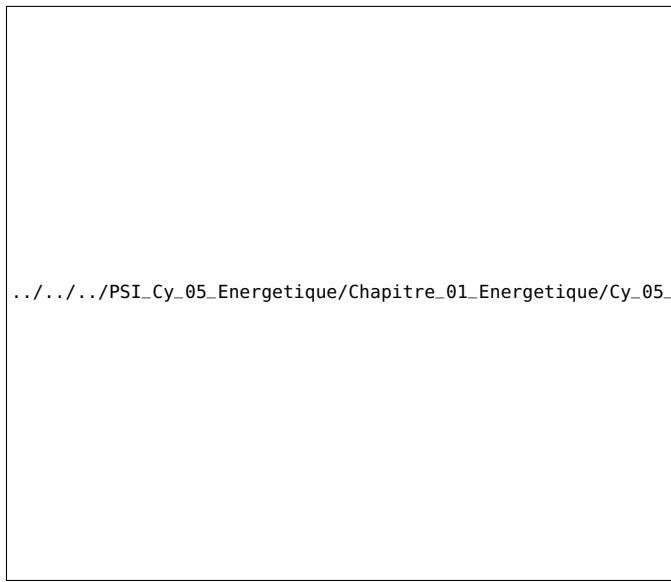
Un classique ...

#### Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide  $S$  par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti  $\Sigma$ .

C1-05

C2-08



.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_Application\_05\_MesureInertie/images/fig\_01.png

Soit  $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère galiléen lié au bâti  $\Sigma$ . On désigne par  $\vec{g} = g\vec{x}$  l'accélération de la pesanteur.

Les deux portées cylindriques de  $\Sigma$  sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe  $(O, \vec{z})$ , de rayon  $r$ . Le solide  $S$  de masse  $m$ , de centre d'inertie  $C$ , possède deux tourillons de même rayon  $a$  ( $a < r$ ).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

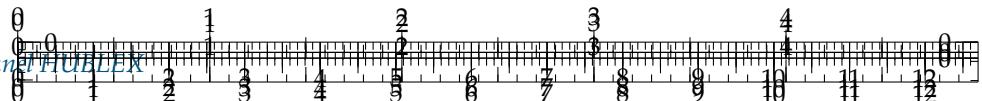
- ▶ le tourillon  $S$ , de centre  $C$ , roule sans glisser au point  $A$  sur la portée cylindrique de  $\Sigma$ ;
- ▶ soit  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  le repère, tel que le point  $C$  soit sur l'axe  $(O, \vec{x}_1)$ .  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ ;
- ▶ soit  $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  un repère lié à  $S$ . On pose  $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On suppose  $\varphi = 0$  lorsque  $\theta = 0$ .

Notons  $I$  le moment d'inertie de  $S$  par rapport à son axe de symétrie  $(C, \vec{z})$  et  $f$  le coefficient de frottement entre  $S$  et  $\Sigma$ .

On donne  $a = 12,3 \text{ mm}$ ;  $r = 141,1 \text{ mm}$ ;  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;  $m = 7217 \text{ g}$ ;  $f = 0,15$ .

**Question 1** Déterminer la relation entre  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\theta}$ .





**Question 2** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R$ . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur  $\theta$ .

**Question 3** En supposant que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du mouvement, déterminer la période  $T$  des oscillations de  $S$ .

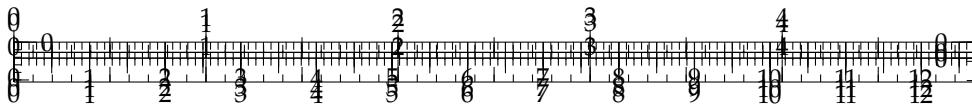
**Question 4** En déduire le moment d'inertie  $I$  de  $S$ , sachant que  $T = 5$  s.

En supposant toujours que l'angle  $\theta$  reste petit, on pose  $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{mg}{Cr_05a}}$ .

On suppose à la date  $t = 0$ , tel que  $\theta = \theta_0$  et  $\dot{\theta} = 0$ .

**Question 5** Déterminer la valeur maximale de  $\theta_0$  pour que  $S$  roule sans glisser sur  $\Sigma$ .





## Application 7

### Mesure d'inertie – Corrigé

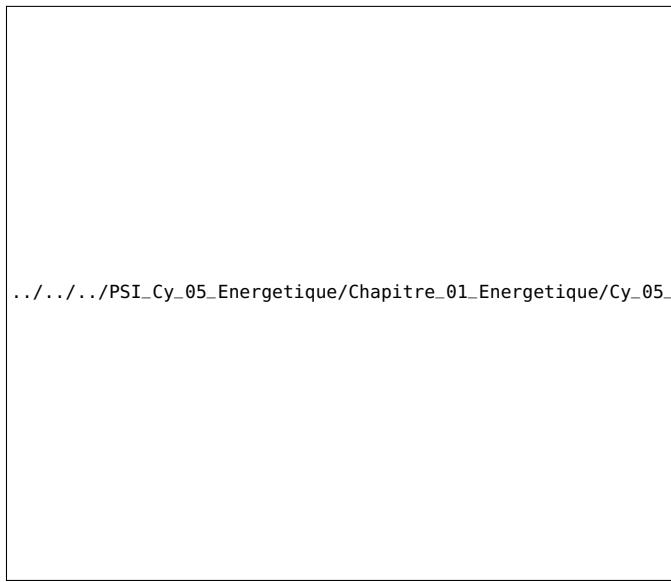
Un classique ...

#### Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide  $S$  par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti  $\Sigma$ .

C1-05

C2-08



[.../PSI\\_Cy\\_05\\_Energetique/Chapitre\\_01\\_Energetique/Cy\\_05\\_01\\_Application\\_05\\_MesureInertie/images/fig\\_01.png](http://.../PSI_Cy_05_Energetique/Chapitre_01_Energetique/Cy_05_01_Application_05_MesureInertie/images/fig_01.png)

Soit  $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère galiléen lié au bâti  $\Sigma$ . On désigne par  $\vec{g} = g\vec{x}$  l'accélération de la pesanteur.

Les deux portées cylindriques de  $\Sigma$  sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe  $(O, \vec{z})$ , de rayon  $r$ . Le solide  $S$  de masse  $m$ , de centre d'inertie  $C$ , possède deux tourillons de même rayon  $a$  ( $a < r$ ).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

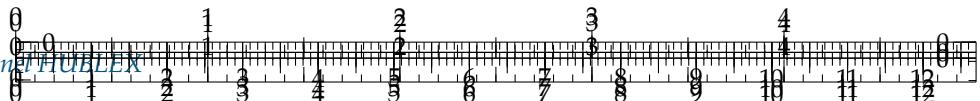
- ▶ le tourillon  $S$ , de centre  $C$ , roule sans glisser au point  $A$  sur la portée cylindrique de  $\Sigma$ ;
- ▶ soit  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  le repère, tel que le point  $C$  soit sur l'axe  $(O, \vec{x}_1)$ .  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ ;
- ▶ soit  $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  un repère lié à  $S$ . On pose  $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On suppose  $\varphi = 0$  lorsque  $\theta = 0$ .

Notons  $I$  le moment d'inertie de  $S$  par rapport à son axe de symétrie  $(C, \vec{z})$  et  $f$  le coefficient de frottement entre  $S$  et  $\Sigma$ .

On donne  $a = 12,3 \text{ mm}$ ;  $r = 141,1 \text{ mm}$ ;  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;  $m = 7217 \text{ g}$ ;  $f = 0,15$ .

**Question 1** Déterminer la relation entre  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\theta}$ .





**Question 2** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R$ . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur  $\theta$ .

**Question 3** En supposant que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du mouvement, déterminer la période  $T$  des oscillations de  $S$ .

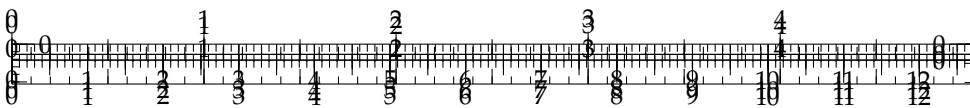
**Question 4** En déduire le moment d'inertie  $I$  de  $S$ , sachant que  $T = 5$  s.

En supposant toujours que l'angle  $\theta$  reste petit, on pose  $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)}}$ .

On suppose à la date  $t = 0$ , tel que  $\theta = \theta_0$  et  $\dot{\theta} = 0$ .

**Question 5** Déterminer la valeur maximale de  $\theta_0$  pour que  $S$  roule sans glisser sur  $\Sigma$ .





## TD 1

# Système de dépose de poudre – Sujet

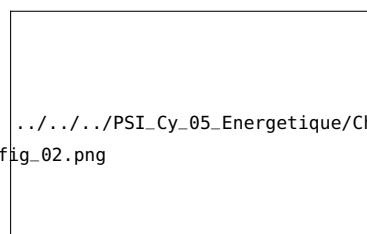
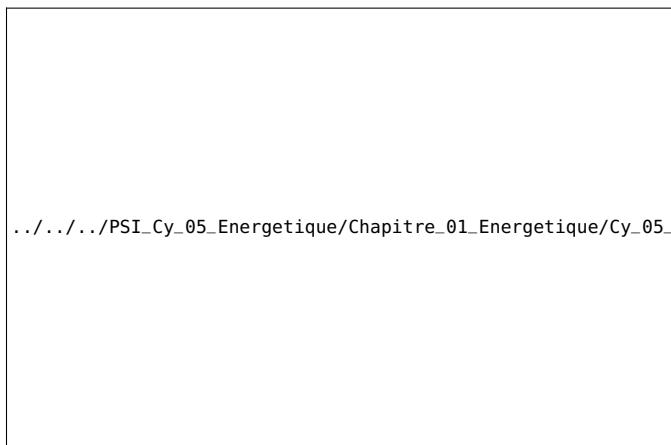
Concours Centrale Supelec – TSI 2016

### Mise en situation

On s'intéresse à un système permettant de créer des motifs sur de la poudre de maquillage compactée. Le poste de pulvérisation est en partie constitué d'un robot cartésien 3 axes permettant de déplacer des godets de poudre compactée (grâce à un préhenseur) en dessous de la buse de pulvérisation.

C1-05

C2-08



### Objectif

L'objectif est de valider le choix du moteur effectué par le concepteur du système.

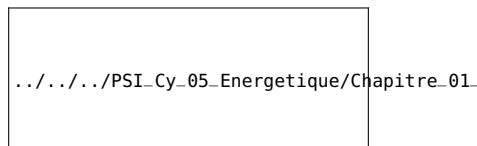
Le cahier des charges impose que la vitesse maximale du chariot sur l'axe  $\vec{x}$  soit de  $V_{\max} = 0,45 \text{ m s}^{-1}$  et que l'accélération maximale du chariot soit de  $\gamma_{\max} = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

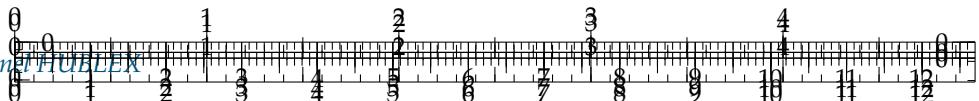
### Travail demandé

La transmission est réalisée de la façon suivante. L'arbre 1 est entraîné par un moto-réducteur dont le rapport de réduction est noté  $r$ .

#### Notations

- $\Omega$  : vitesse de rotation du moteur;
- $C_m$  : le couple exercé par le moteur;
- $r = n_{\text{axe poulie}}/n_{\text{moteur}} = \frac{1}{10}$  : rapport de réduction du réducteur entre le moteur et les poulies;
- $M_2 = 25 \text{ kg}$  : masse de l'ensemble mobile 2;
- $\phi = 28,65 \text{ mm}$  est le diamètre primitif des poulies;
- l'inertie des courroies est négligée;
- $J_m = 1,2 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$  : moment d'inertie de l'arbre moteur;
- $J_1 = 4 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$  : moment d'inertie de l'arbre 1;
- $C_r = 0,15 \text{ Nm}$  : couple de frottements secs dans les liaisons ramené à l'arbre moteur;





- $\mu = 0,001 \text{ N m s rad}^{-1}$  : coefficient de frottements visqueux dans les liaisons ramené à l'arbre moteur.

**Question 1** Déterminer la vitesse maximale de rotation du moteur  $\Omega_{\max}$ . Faire l'application numérique.

**Question 2** Déterminer l'accélération maximale du moteur  $\dot{\Omega}_{\max}$ . Faire l'application numérique.

**Question 3** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile dans son mouvement le long de l'axe  $\vec{x}$  par rapport au bâti notée  $\mathcal{E}_c$  (ensemble/0). En déduire l'inertie équivalente  $J$  de l'ensemble mobile rapportée à l'arbre du moteur. Faire l'application numérique.

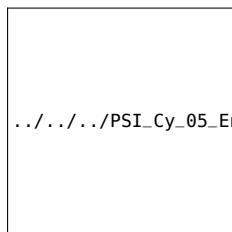
**Question 4** Établir l'expression du couple moteur maximal exercé par le moteur sur l'arbre moteur noté  $C_{\max}$ . Faire l'application numérique.

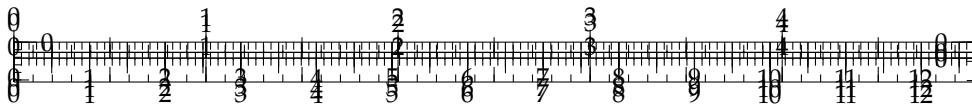
**Question 5** Donner l'expression de la puissance mécanique maximale que devra fournir le moteur électrique. Faire l'application numérique.

Le concepteur du système a choisi un moteur synchrone de vitesse nominale de  $3000 \text{ tr min}^{-1}$  et de puissance utile  $0,47 \text{ kW}$ .

**Question 6** Valider le choix du moteur en le justifiant. Argumenter la présence éventuelle d'écart entre la puissance mécanique maximale calculée et la puissance nominale du moteur choisi.

.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Question\_6\_Valider\_le\_choix\_du\_moteur\_en\_le\_justifiant\_Argumenter\_l'éventuelle\_d'écart\_entre\_la\_puissance\_mécanique\_maximale\_calculée\_et\_la\_puissance\_nominale\_du\_moteur\_choisi.





## TD 1

# Système de dépose de poudre – Corrigé

Concours Centrale Supelec – TSI 2016

## Mise en situation

C1-05

C2-08

### Objectif

L'objectif est de valider le choix du moteur effectué par le concepteur du système.  
Le cahier des charges impose que la vitesse maximale du chariot sur l'axe  $\vec{x}$  soit de  $V_{\max} = 0,45 \text{ m s}^{-1}$  et que l'accélération maximale du chariot soit de  $\gamma_{\max} = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

## Travail demandé

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Ch

**Question 1** Déterminer la vitesse maximale de rotation du moteur  $\Omega_{\max}$ . Faire l'application numérique.

### Correction

On a  $V_{\max} = \Omega_{\max} \cdot r \cdot \frac{\phi}{2}$ . En conséquence  $\Omega_{\max} = V_{\max} \frac{2}{r\phi}$ .

Application numérique :  $\Omega_{\max} = \frac{2 \cdot 0,45 \cdot 10}{28,65 \times 10^{-3}} \simeq 314 \text{ rad s}^{-1} \simeq 3000 \text{ tr min}^{-1}$ .

**Question 2** Déterminer l'accélération maximale du moteur  $\dot{\Omega}_{\max}$ . Faire l'application numérique.

### Correction

En suivant un raisonnement similaire :  $\dot{\Omega}_{\max} = \gamma_{\max} \frac{2}{r\phi}$ .

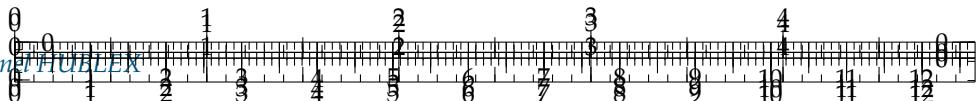
Application numérique :  $\dot{\Omega}_{\max} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10}{28,65 \times 10^{-3}} \simeq 6981 \text{ rad s}^{-2}$ .

**Question 3** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile dans son mouvement le long de l'axe  $\vec{x}$  par rapport au bâti notée  $\mathcal{E}_c$  (ensemble/0). En déduire l'inertie équivalente  $J$  de l'ensemble mobile rapportée à l'arbre du moteur. Faire l'application numérique.

### Correction

Le système peut être modélisé ainsi :





.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_TD\_01\_Prehe

$\mathcal{E}_c$  (ensemble/0) =  $\mathcal{E}_c$  (1/0) +  $\mathcal{E}_c$  (2/0). Le solide 1 et l'arbre moteur sont en rotation par rapport au bâti et le solide 2 est en translation par rapport au bâti, on a donc :

$$\blacktriangleright \mathcal{E}_c (1/0) = \frac{1}{2} (J_m \Omega^2 + J_1 (r\Omega)^2) = \frac{1}{2} (J_m + J_1 r^2) \Omega^2$$

$$\blacktriangleright \mathcal{E}_c (2/0) = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} M \Omega^2 \left( \frac{r\phi}{2} \right)^2.$$

$$\mathcal{E}_c \text{ (ensemble/0)} = \frac{1}{2} \left( (J_m + J_1 r^2) + M \left( \frac{r\phi}{2} \right)^2 \right) \Omega^2.$$

$$\text{Application numérique : } J_{eq} = (J_m + J_1 r^2) + M \left( \frac{r\phi}{2} \right)^2 = 5,9 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2.$$

**Question 4** Établir l'expression du couple moteur maximal exercé par le moteur sur l'arbre moteur noté  $C_{\max}$ . Faire l'application numérique.

#### Correction

**Question 5** Donner l'expression de la puissance mécanique maximale que devra fournir le moteur électrique. Faire l'application numérique.

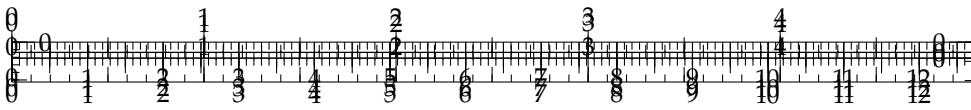
#### Correction

Le concepteur du système a choisi un moteur synchrone de vitesse nominale de  $3000 \text{ tr min}^{-1}$  et de puissance utile  $0,47 \text{ kW}$ .

**Question 6** Valider le choix du moteur en le justifiant. Argumenter la présence éventuelle d'écart entre la puissance mécanique maximale calculée et la puissance nominale du moteur choisi.

#### Correction





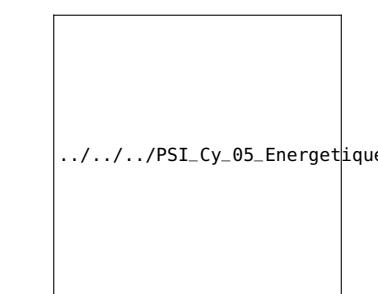
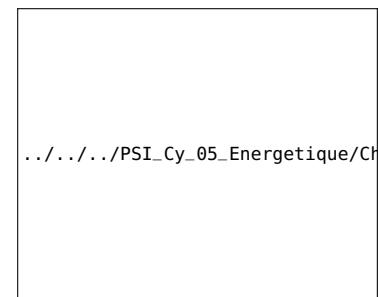
## TD 2

# Quille pendulaire – Sujet

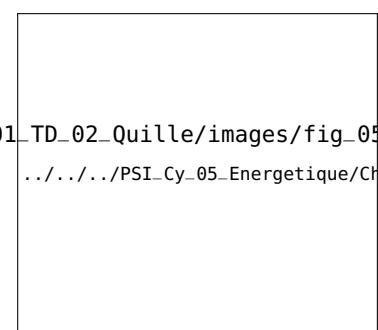
Concours Commun Mines Ponts 2014.

C1-05

C2-08



**FIGURE 10.1** – Modèle volumique 3D



**FIGURE 10.2** – Modèle 2D

### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

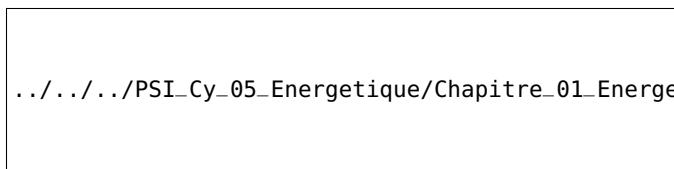
#### Objectif

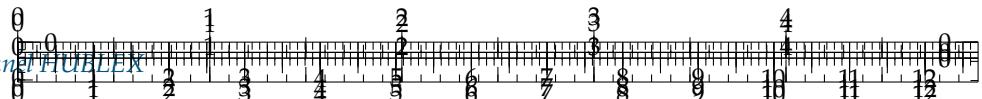
L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

#### Hypothèses

- ▶ Les liaisons sont toutes parfaites.
- ▶ Le bateau est à l'arrêt et son repère  $R_N$  est galiléen.
- ▶ Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que :  $F_{h2} > 0$  et  $F_{h3} = 0$ . Le vérin 2–4 est alors moteur et le vérin 3–5 est libre ( $F_{h2}$  désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2 ; on a donc  $-F_{h2}$  qui agit sur 4).
- ▶ Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures ci-contre.





Données géométriques, massiques et inertielles  $\overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1$ ;

$$\overrightarrow{CA} = x_{24}(t)\vec{x}_2; \overrightarrow{AB} = x_{35}(t)\vec{x}_3,$$

- Solide 1, masse  $M_1$ , centre d'inertie  $G_1$ ,  $\overrightarrow{OG_1} = -L_1\vec{y}_1$ ,  $I_{G_1}(1) =$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_N)}.$$

- Solide 2, masse  $M_2$ , centre d'inertie  $G_2$ ,  $\overrightarrow{AG_2} = -L_2\vec{x}_2$ ,  $I_{G_2}(2) =$

$$\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}.$$

- Solide 3, masse  $M_3 = M_2$ , centre d'inertie  $G_3$ ,  $\overrightarrow{AG_3} = L_2\vec{x}_3$ ,

$$I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}.$$

- Solide 4, masse  $M_4$ , centre d'inertie  $C$ ,  $I_C(4) =$

$$\begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}.$$

- Solide 5, masse  $M_5$ , centre d'inertie  $B$ ,  $I_B(5) =$

$$\begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}.$$

#### Actions mécaniques

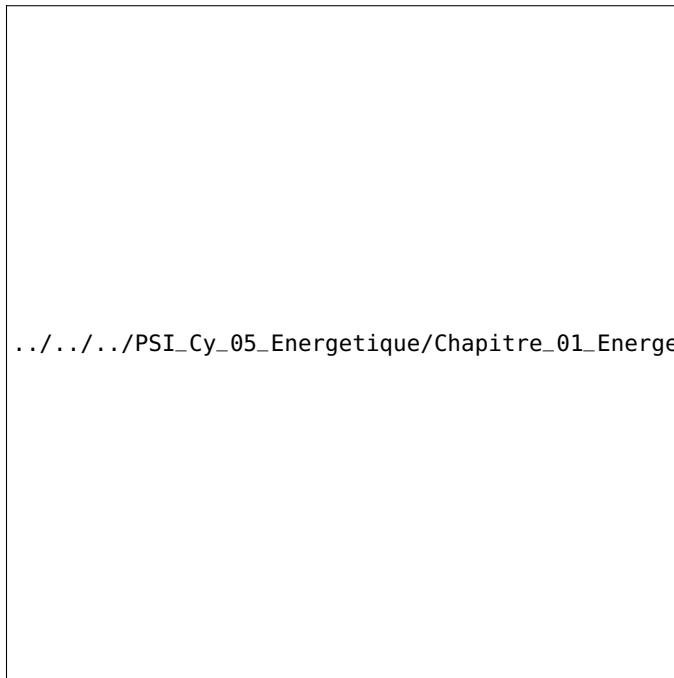
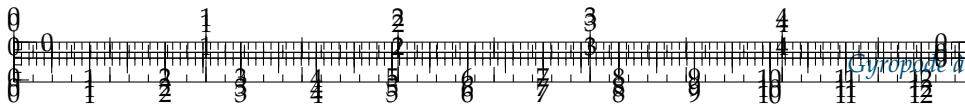
- Action de pression de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_{h2}\vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_C$ .
- Action de pression de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_{h3}\vec{x}_3 \\ 0 \end{array} \right\}_B$ .
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \vec{x}_3 \\ 0 \end{array} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action hydraulodynamique de l'eau sur 1 :  $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_p\vec{z}_1 + F_t\vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_P$  avec  $\overrightarrow{OP} = -h\vec{y}_1$ .

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position  $\theta_1 = 0$  à la position  $\theta_1 = 45^\circ$  en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position  $\theta_1 = 0$  en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_TD\_02\_Quille/images/fig\_06.png

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure ??.



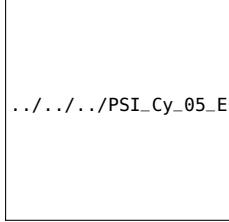


.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_TD\_02\_Quille/images/fig\_07.png

elle des

**Question 1** Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants  $t = 0 \text{ s}$ ,  $t = 1 \text{ s}$ ,  $t = 3 \text{ s}$  et  $t = 4 \text{ s}$ . Sur cet intervalle  $[0, 4 \text{ s}]$ , évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

**Question 2** Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

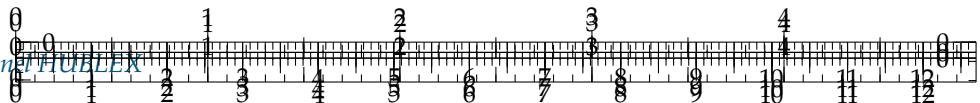


.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapit

#### Éléments de correction

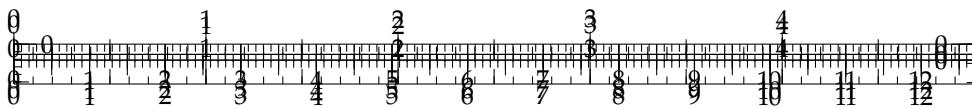
1. .
2. a)  $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)} = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1$ .  
b)  $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = -R \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2$ . On a aussi  $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2$ .  
c)  $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = -R \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 + L_2 \dot{\theta}_3 \vec{y}_3$ . On a aussi  $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = -\dot{x}_{35}(t) \vec{x}_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \vec{y}_3$ .  
d)  $\overrightarrow{V(A, 2/4)} = \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2$ .
3. a)  $\mathcal{E}_c(1/N) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2)$ .  
b)  $\mathcal{E}_c(2/N) = \frac{1}{2} \left( B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2) \right)$ .  
c)  $\mathcal{E}_c(4/N) = \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2$ .
4. ►  $\mathcal{P}(4 \leftrightarrow 2) = F_{h2} \dot{x}_{24}$ ;  
►  $\mathcal{P}(4 \leftrightarrow 2) = -k \dot{x}_{24}^2(t)$ ;  
►  $\mathcal{P}(3 \leftrightarrow 5) = F_h \dot{x}_{35}(t)$ ;  
►  $\mathcal{P}(3 \leftrightarrow 5) = -k \dot{x}_{35}^2(t)$ .
5. ► la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;  
►  $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1$ ;  
►  $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) = -M_2 g \dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 - M_2 g \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2$ ;  
►  $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/R_N) = -M_3 g (-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3)$ ;  
►  $\mathcal{P}(\text{eau} \rightarrow 1/R_N) = F_t h \dot{\theta}_1$ .





$$6. \quad \mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_N)}{dt}.$$





## TD 2

# Quille pendulaire – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

C1-05

C2-08

### Mise en situation

#### Objectif

L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

**Question 1** Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants  $t = 0\text{ s}$ ,  $t = 1\text{ s}$ ,  $t = 3\text{ s}$  et  $t = 4\text{ s}$ . Sur cet intervalle  $[0, 4\text{ s}]$ , évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01...

#### Correction

D'après UPSTI. À  $1\text{ s}$ ,  $2200 + 5800 + 2500 + 4000 = 14\,500\text{ W}$  à  $3\text{ s}$   $0 + 4000 + 2500 + 16000 = 22\,500\text{ W}$  Maximum à environ  $22,5\text{ kW}$ . Le maximum est bien sur cet intervalle car le poids y est résistant (le poids est moteur sur  $[5\text{ s} ; 8\text{ s}]$ ).

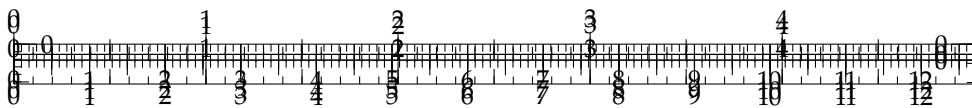
**Question 2** Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de  $30\text{ kW}$ . Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

#### Correction

D'après UPSTI. La différence est de  $7,5\text{ kW}$ . Elle ne peut pas provenir des hypothèses faites (liaisons parfaites et RN galiléen). Elle provient certainement du fait que le système est surdimensionné pour pallier les erreurs de modélisation des actions de l'eau, le vieillissement de la quille avec les algues collées qui rajoutent du poids...







## TD 3

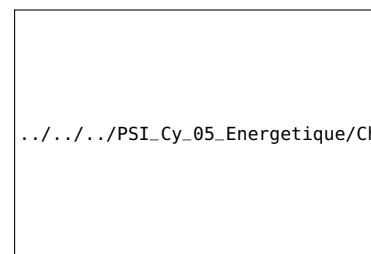
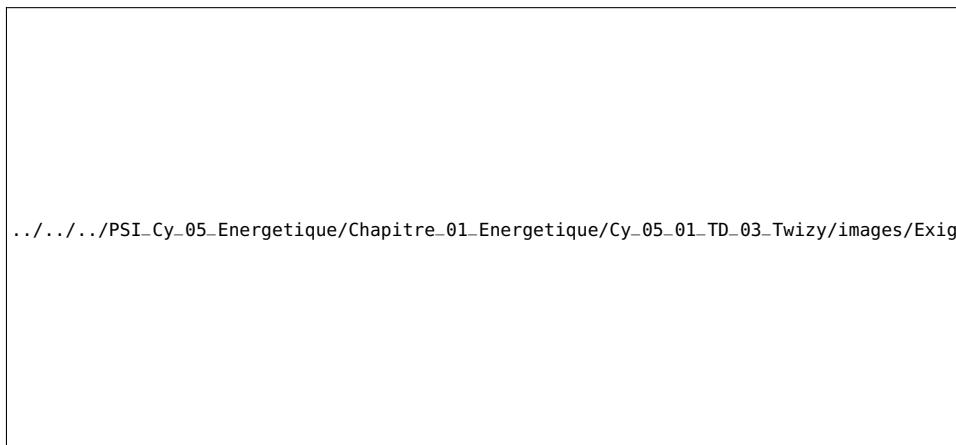
# Renault Twizy – Sujet

Concours Mines Ponts – PSI 2017.

C1-05

C2-08

### Mise en situation



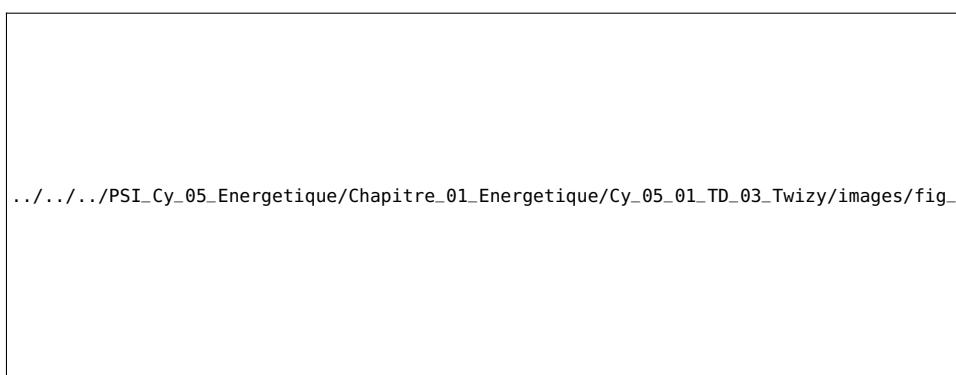
.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_TD\_03\_Twizy/images/Exigences.png

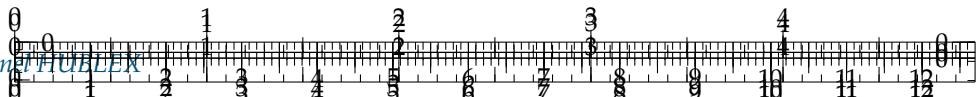
### Choix du motoréducteur

#### Objectif

Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.





.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_TD\_03\_Twizy/images/fig\_03.jpg

### Masses et inerties :

- ▶ le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe  $(A, \vec{y}_0)$  :  $J_m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- ▶ le moment d'inertie d'une roue autour de son axe  $(O_i, \vec{y}_0)$  :  $J_R = 0,1 \text{ kg m}^2$  (masse de la roue négligée);
- ▶ la masse du véhicule en charge :  $m = 685 \text{ kg}$ ;
- ▶ le centre de gravité du véhicule en charge sera noté  $G$ ;
- ▶ les autres inerties seront négligées.

### Hypothèses générales :

- ▶ le vecteur  $\vec{z}_0$  est vertical ascendant et on notera  $g$  l'accélération de la pesanteur;
- ▶ le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est galiléen; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est supposé rester dans le plan de symétrie de la voiture  $(O, \vec{z}_s, \vec{x}_s)$ ;
- ▶ toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- ▶ les roues roulent sans glisser sur le sol en  $I_i$ ;
- ▶ le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  est identique pour tous les contacts roue – sol :  $\mu = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$ . On pose  $\vec{l}_1 \vec{l}_1 = \mu \vec{x}_s$ , avec  $\mu > 0$  si le déplacement du véhicule est suivant  $+\vec{x}_s$ ;
- ▶ les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés; seules les roues arrière sont motrices.

**Actions mécaniques** Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues

$$\text{est : } \{\mathcal{T}(s \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{array}{l} T_i \vec{x}_s + N_i \vec{z}_s \\ 0 \end{array} \right\}_{J_i} \text{ avec } J_i \in (O, \vec{x}_s, \vec{y}_s) \text{ et } i = 1 \text{ (roues arrières) ou } 2 \text{ (roues avant). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que } \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_0 \end{array} \right\}_-$$

**Grandeur cinétiques** : Soit  $\omega_m$  la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3,  $\omega_{13}$  la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et  $\omega_{23}$  la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera  $r$  le rapport de transmission du réducteur tel que  $\omega_m = r \omega_{13}$ . On appellera  $\vec{V}(G, 3/0) = \vec{V}_{3/0} = v \vec{x}_s$  la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon  $R = 280 \text{ mm}$ .

### Notations :

- ▶ puissance extérieure des actions mécaniques du solide  $i$  sur le solide  $j$  dans le mouvement de  $i$  par rapport à 0 :  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/0)$ ;
- ▶ puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide  $i$  et le solide  $j$  :  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ;
- ▶ énergie cinétique du solide  $i$  dans son mouvement par rapport à 0 :  $\mathcal{E}_c(i/0)$ .

### Choix de l'ensemble moto-réducteur

### Équation de mouvement du véhicule

#### Objectif

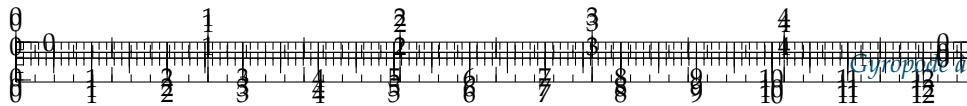
Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

**Question 1** Il est demandé de :

- ▶ écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliquée au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes;
- ▶ déterminer explicitement les différentes puissances extérieures;
- ▶ déterminer explicitement les différentes puissances intérieures;
- ▶ déterminer explicitement les énergies cinétiques;
- ▶ en déduire une équation faisant intervenir  $C_m, N_1, N_2, v, \omega_m, \omega_{1/0}, \omega_{2/0}, \dots$ ;
- ▶ expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.

**Question 2** À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer  $(N_1 + N_2)$ . Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.





**Question 3** Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre  $(v, \omega_{10}), (v, \omega_{20})$  et  $(\omega_m, \omega_{10})$ . Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme  $\frac{rC_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$  avec  $F_r(t)$  fonction de  $m, \mu, g, R$  et  $\alpha$  et  $M_{eq}$  fonction  $m, J_m, J_R, R$  et  $r$ .

### Détermination du coefficient de résistance au roulement $\mu$

#### Objectif

Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  suite à une expérimentation.

**Question 4** En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

- ▶ justifier dans quelle phase se placer ;
- ▶ définir la variable mesurée ;
- ▶ définir les hypothèses nécessaires ;
- ▶ énoncer les équations utilisées pour déterminer  $\mu$ .

### Choix du moto-réducteur

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01

#### Objectif

Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale  $\frac{dv(t)}{dt}$  du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission  $r$  issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

**Question 5** Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission  $r_{\min}$  pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.

**Question 6** Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission  $r_{\max}$  qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.

**Question 7** À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

### Validation du choix constructeur du moto-réducteur

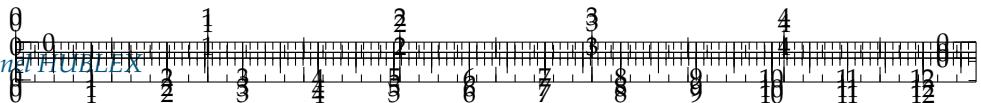
#### Objectif

Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

**Question 8** À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission  $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$  et conclure.

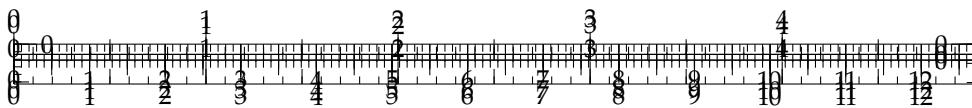
.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01





.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_TD\_03\_Twizy/images/fig\_05.jpg





## TD 3

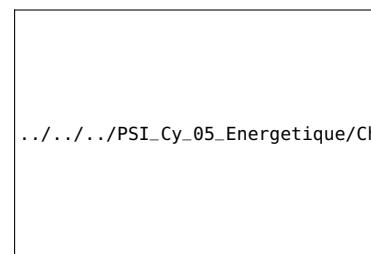
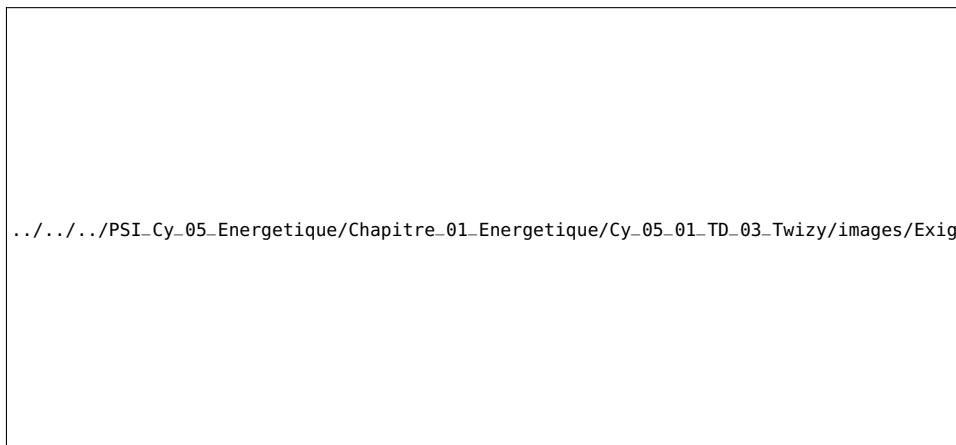
# Renault Twizy – Corrigé

Concours Mines Ponts – PSI 2017.

C1-05

C2-08

### Mise en situation



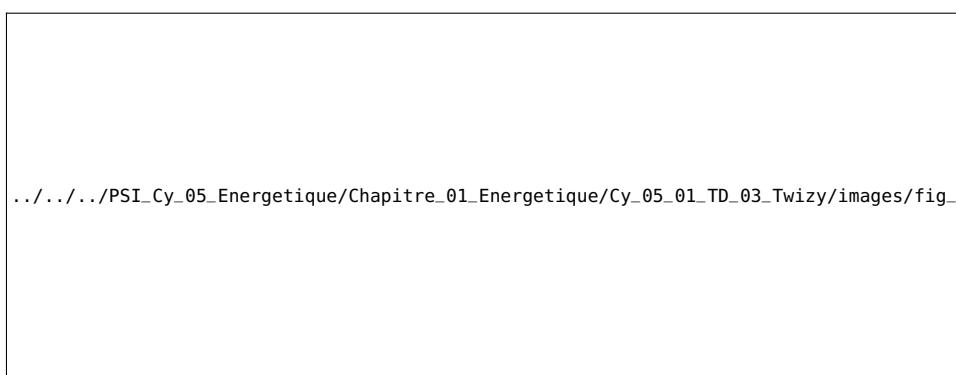
.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_TD\_03\_Twizy/images/Exigences.png

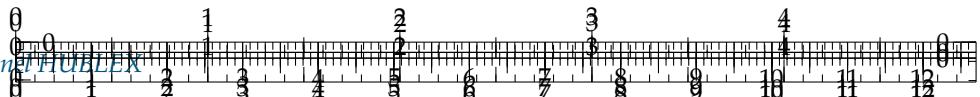
### Choix du motoréducteur

#### Objectif

Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.





.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_TD\_03\_Twizy/images/fig\_03.jpg

### Masses et inerties :

- ▶ le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe  $(A, \vec{y}_0)$  :  
 $J_m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- ▶ le moment d'inertie d'une roue autour de son axe  $(O_i, \vec{y}_0)$  :  $J_R = 0,1 \text{ kg m}^2$  (masse de la roue négligée);
- ▶ la masse du véhicule en charge :  $m = 685 \text{ kg}$ ;
- ▶ le centre de gravité du véhicule en charge sera noté  $G$ ;
- ▶ les autres inerties seront négligées.

### Hypothèses générales :

- ▶ le vecteur  $\vec{z}_0$  est vertical ascendant et on notera  $g$  l'accélération de la pesanteur;
- ▶ le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est galiléen; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est supposé rester dans le plan de symétrie de la voiture  $(O, \vec{z}_s, \vec{x}_s)$ ;
- ▶ toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue - sol;
- ▶ les roues roulent sans glisser sur le sol en  $I_i$ ;
- ▶ le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  est identique pour tous les contacts roue - sol :  $\mu = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$ .  
 On pose  $\vec{l}_1 \vec{l}_1 = \mu \vec{x}_s$ , avec  $\mu > 0$  si le déplacement du véhicule est suivant  $+\vec{x}_s$ ;
- ▶ les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés; seules les roues arrière sont motrices.

### Actions mécaniques

Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est :  $\{\mathcal{T}(s \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{array}{l} T_i \vec{x}_s + N_i \vec{z}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{J_i}$  avec  $J_i \in (O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$  et  $i = 1$  (roues arrières) ou  $2$  (roues avant). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que  $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_0 \end{array} \right\}$ .

**Grandeurs cinématiques :** Soit  $\omega_m$  la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3,  $\omega_{13}$  la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et  $\omega_{23}$  la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera  $r$  le rapport de transmission du réducteur tel que  $\omega_m = r \omega_{13}$ . On appellera  $\overrightarrow{V(G, 3/0)} = \vec{V}_{3/0} = v \vec{x}_s$  la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon  $R = 280 \text{ mm}$ .

### Notations :

- ▶ puissance extérieure des actions mécaniques du solide  $i$  sur le solide  $j$  dans le mouvement de  $i$  par rapport à 0 :  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/0)$ ;
- ▶ puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide  $i$  et le solide  $j$  :  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ;
- ▶ énergie cinétique du solide  $i$  dans son mouvement par rapport à 0 :  $\mathcal{E}_c(i/0)$ .

### Choix de l'ensemble moto-réducteur

### Équation de mouvement du véhicule

#### Objectif

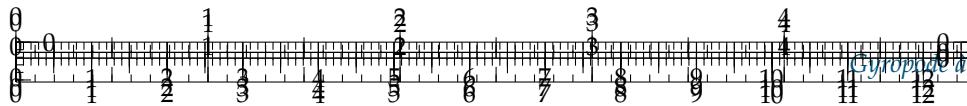
Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

#### Question 1

Il est demandé de :

- ▶ écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliquée au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes;
- ▶ déterminer explicitement les différentes puissances extérieures;
- ▶ déterminer explicitement les différentes puissances intérieures;
- ▶ déterminer explicitement les énergies cinétiques;
- ▶ en déduire une équation faisant intervenir  $C_m, N_1, N_2, v, \omega_m, \omega_{1/0}, \omega_{2/0} \dots \dots$ ;
- ▶ expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.





### Correction

**Question 2** À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer ( $N_1 + N_2$ ). Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.

### Correction

**Question 3** Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre  $(v, \omega_{10})$ ,  $(v, \omega_{20})$  et  $(\omega_m, \omega_{10})$ . Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme  $\frac{rC_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$  avec  $F_r(t)$  fonction de  $m$ ,  $\mu$ ,  $g$ ,  $R$  et  $\alpha$  et  $M_{eq}$  fonction  $m$ ,  $J_m$ ,  $J_R$ ,  $R$  et  $r$ .

### Correction

## Détermination du coefficient de résistance au roulement $\mu$

### Objectif

Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  suite à une expérimentation.

**Question 4** En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

- ▶ justifier dans quelle phase se placer;
- ▶ définir la variable mesurée;
- ▶ définir les hypothèses nécessaires;
- ▶ énoncer les équations utilisées pour déterminer  $\mu$ .

### Correction

## Choix du moto-réducteur

### Objectif

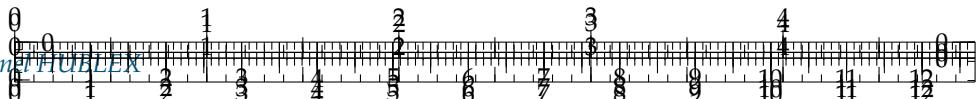
Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale  $\frac{dv(t)}{dt}$  du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission  $r$  issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

**Question 5** Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission  $r_{mini}$  pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.

### Correction





**Question 6** Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission  $r_{\max}$  qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.

#### Correction

**Question 7** À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

#### Correction

### Validation du choix constructeur du moto-réducteur

#### Objectif

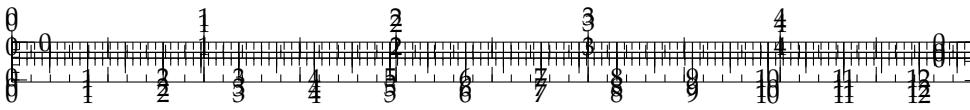
Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

**Question 8** À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission  $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$  et conclure.

#### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_TD\_03\_Twizy/images/fig\_05.jpg





## TD 4

# Robot de dépose de fibres optiques – Sujet

Concours Mines Ponts – PSI 2004.

C1-05

C2-08

### Présentation

L'objet de cette étude est un robot permettant la pose d'arceaux métalliques pour l'installation de réseaux souterrains de télécommunication par fibres optiques.

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01

### Objectif

En fin des mouvements des bras, on doit avoir  $\delta = 14^\circ$  et  $\dot{\delta} \leq 50^\circ.s^{-1}$ .

De façon à pouvoir dérouler les arceaux métalliques, le chariot est centré dans la canalisation à l'aide de quatre bras actionnés par un vérin hydraulique.

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01

Afin de valider le choix du vérin, et donc sa puissance, il faut déterminer l'action  $F$  du vérin qui permettra au robot de se positionner correctement dans la canalisation. Sous l'effet d'un vérin, les bras inférieurs vont soulever le robot qui va pivoter sur son train arrière. La fin du positionnement sera assurée lorsque les roulettes des bras supérieurs viendront en contact avec la paroi de la canalisation. À un instant  $t$ , le système est modélisé selon le schéma ci-dessous :

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01

### Hypothèses

L'étude dynamique est à faire dans le plan de symétrie longitudinale du robot.

Le robot est modélisé par le schéma ci-dessus. Il comprend :

- ▶ une tige **1** de longueur  $OB = L_1$ , de section négligeable, de masse  $m_1$ , et de centre d'inertie  $G_1$ , tel que  $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L_1}{2} \vec{x}_1$ ;
- ▶ une roue **4**, de centre  $O$ , de rayon  $R = 0,07$  m, de masse négligeable, qui correspond au train arrière. Cette roue est en liaison encastrement avec **1**;
- ▶ un bras **2** constitué de deux éléments  $BE$  et  $BM$  tels que  $\overrightarrow{BE} = -a \vec{y}_2$  et  $\overrightarrow{BM} = b \vec{x}_2$ , de section et de masse négligeables;
- ▶ une biellette **3** ( $NM$ ) de masse négligeable et dont la direction au cours du mouvement est sensiblement celle de la tige **1**;
- ▶ un vérin hydraulique de masse négligeable.

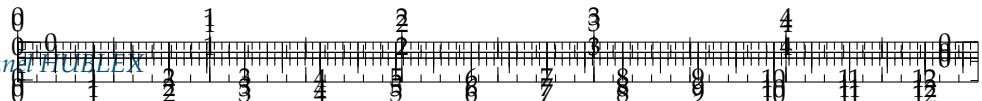
En  $I$ , le contact entre la roue **4** et la paroi **0** se fait par roulement sans glissement.

En  $E$ , le contact entre le bras **2** et la paroi **0** se fait sans frottement.

Toutes les autres liaisons sont considérées sans frottement.

L'action  $\vec{F}$  du vérin sur la biellette  $3a$ , à chaque instant, pour direction  $\vec{x}_1$  :  $\vec{F} = F \vec{x}_1$ .





## Repères et paramétrage

- $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , repère associé à la canalisation  $O$  et supposé galiléen.
- $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , repère associé à la tige 1.
- $R_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , repère associé au bras 2.
- $\delta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .
- $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ .

## Cahier des charges

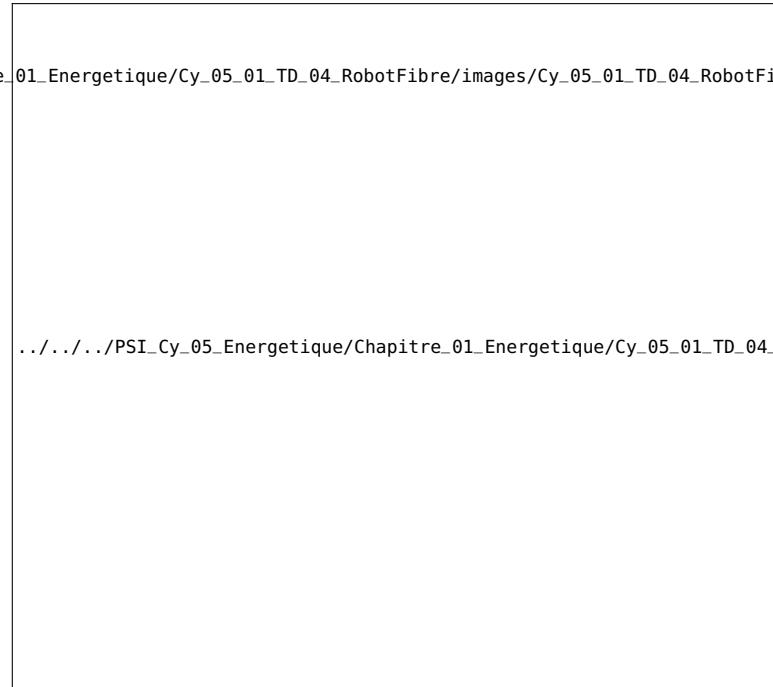
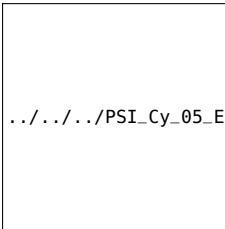
On désire avoir en fin de mouvement des bras, correspondant à  $\delta = 14^\circ$ , une vitesse  $\dot{\delta}$  inférieur à  $50^\circ/\text{s}$

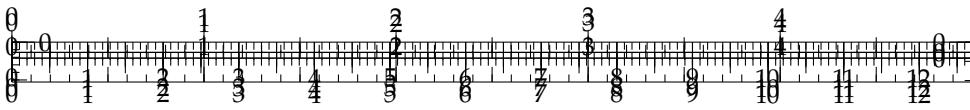
## Élévation dynamique

### Éléments de correction

1.  $E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left( R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right)$  on 1 Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble  $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$ , puis la
  2.  $\mathcal{P}_{\text{ext}} \rightarrow \Sigma/0 = -m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta$  on 2 Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur  $\Sigma$ .
  3.  $\mathcal{P}_{\text{int}}(\Sigma) = -F b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta)$  on 3 Donner la puissance intérieure à  $\Sigma$ .
  4.  $m_1 \ddot{\delta} \left[ \ddot{\delta} \left( R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 R L_1 \cos \delta \right] = -F b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta) - m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta$  on 4 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $\Sigma$  pour déterminer l'équation de mouvement
- Des simulations pour différentes valeurs de  $F$  donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de  $\dot{\delta}$  en fonction du temps.

**Question 5** Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses  $\dot{\delta}$  en fin de course. En déduire les valeurs de  $F$  respectant le cahier des charges.





## TD 4

# Robot de dépose de fibres optiques – Corrigé

Concours Mines Ponts – PSI 2004.

C1-05

C2-08

### Présentation

#### Objectif

En fin des mouvements des bras, on doit avoir  $\delta = 14^\circ$  et  $\dot{\delta} \leq 50^\circ.s^{-1}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Ch

### Hypothèses

### Repères et paramétrage

### Cahier des charges

### Modélisation dynamique

**Question 1** Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble  $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$ , puis la calculer.

#### Correction

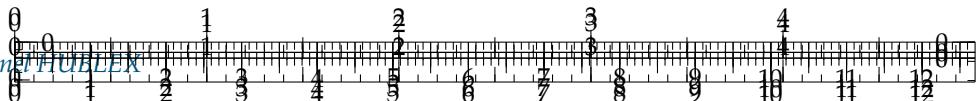
Pour calculer l'énergie cinétique de l'ensemble seule la masse de la tige 1 est prise en compte.

$$2 E_c(\Sigma/R_0) = \{\mathcal{C}(\Sigma/R_0)\} \otimes \{\mathcal{V}(\Sigma/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{array}{l} m_1 \vec{V}(G_1, 1/0) \\ \vec{\sigma}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1}$$

$$= m_1 \left( \vec{V}(G_1, 1/0) \right)^2 + \vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{\Omega}(1/0).$$

- ▶ Vecteur de taux de rotation de 1 par rapport à 0 :  $\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\delta} \vec{z}_0$ .
- ▶ Vitesse du point  $G_1$  appartenant à 1 par rapport à 0 :  $\vec{V}(G_1, 1/0) = \vec{V}(I, 1/0) + \vec{G}_1 \vec{l}_1 \wedge \vec{\Omega}(1/0) = -\left(R \vec{y}_0 + \frac{L_1}{2} \vec{x}_1\right) \wedge \dot{\delta} \vec{z}_0 = -R \dot{\delta} \vec{x}_0 + \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \vec{y}_1$ .
- ▶ Caractéristiques d'inertie de la tige 1 : la tige 1 supposée unidimensionnelle présente naturellement des symétries matérielles suivant des plans contenant  $\vec{x}_1$ . Les produits d'inertie sont donc nuls. Le moment d'inertie en  $G_1$  suivant  $\vec{z}_0$  est  $C_1 = \frac{m_1 L_1^2}{12}$ .
- ▶ Moment cinétique en  $G_1$  de 1 par rapport à 0 :  $\vec{\sigma}(G_1, 1/0) = \bar{\vec{I}}_{G_1}(1) \cdot \vec{\Omega}(1/0) = \frac{m_1 L_1^2}{12} \dot{\delta} \vec{z}_0$ .
- ▶ On en déduit  $E_c(1/0)$  :  $E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left( R^2 + \frac{L_1^2}{4} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{m_1 L_1^2}{12} \dot{\delta}^2$
- ▶  $= \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left( R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right)$ .





**Question 2** Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur  $\Sigma$ .

### Correction

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) = \mathcal{P}(\text{pesanteur} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0)$$

- Actions de la pesanteur :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow \Sigma/0) &= \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/0) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \\ &\quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1} \\ &= -m_1 g \vec{y}_0 \cdot \vec{V}(G_1, 1/0) = -m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta.\end{aligned}$$

- Actions du contact en I entre 0 et 4 (*le contact se fait par roulement sans glissement*) :

$$\mathcal{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0) = \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 4)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{04} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(4/0) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I = 0.$$

- Actions du contact en E entre 0 et 2 (*le contact se fait sans frottement*) :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) &= \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{02} \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_E \otimes \\ &\quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(2/0) \\ \vec{V}(E, 2/0) \end{array} \right\}_E = R_{02} \vec{y}_0 \cdot \vec{V}(E, 2/0) = 0.\end{aligned}$$

**Question 3** Donner la puissance intérieure à  $\Sigma$ .

### Correction

- Les liaisons sont supposées comme parfaites donc :  $\mathcal{P}\left(1 \xrightarrow{\text{Pivot}} 2\right) = \mathcal{P}\left(1 \xrightarrow{\text{Pivot Gl.}} 3\right) = \mathcal{P}\left(3 \xrightarrow{\text{Pivot}} 2\right) = 0$ .

- Action du vérin entre 1 et 3 :

$$\mathcal{P}\left(1 \xrightarrow{\text{Vérin}} 3\right) = \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 3)\} \otimes \{\mathcal{V}(3/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_N \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}(N, 3/1) \end{array} \right\}_N = F \vec{V}(N, 3/1) \cdot \vec{x}_1.$$

En considérant que  $\overrightarrow{MN}$  est porté par  $\vec{x}_1$  (hypothèse faite dans l'énoncé), on obtient :  
 $\vec{V}(N, 3/1) \cdot \vec{x}_1 = \vec{V}(M, 3/1) \cdot \vec{x}_1 = (\vec{V}(M, 3/2) + \vec{V}(M, 2/1)) \cdot \vec{x}_1 = (\vec{0} + \vec{V}(B, 2/1) + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{(2/1)}) \cdot \vec{x}_1 = (-b \vec{x}_2 \wedge (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_1 = b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \cdot \vec{y}_2 \cdot \vec{x}_1 = -b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta)$ .

$$\text{On en déduit : } \mathcal{P}\left(1 \xrightarrow{\text{Vérin}} 3\right) = -F b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta).$$

**Question 4** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $\Sigma$  pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre  $F$ ,  $\delta$ , et  $\beta$ .

### Correction

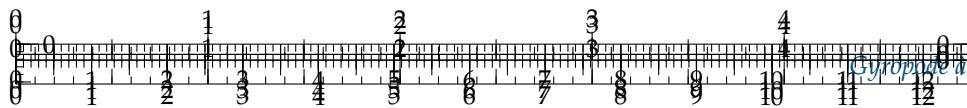
On applique alors le théorème de l'énergie cinétique à  $\Sigma$  par rapport au référentiel galiléen  $R_0$  :

$$\frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/R_0)) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}_{\text{int}}(\Sigma).$$

$$\text{Or, } \frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/R_0)) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left( R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) \right] = m_1 \dot{\delta} \left[ \ddot{\delta} \left( R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 R L_1 \cos \delta \right].$$

Ainsi on obtient, l'équation :





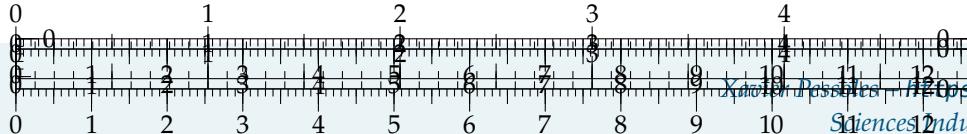
$$m_1 \ddot{\delta} \left[ \ddot{\delta} \left( R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 R L_1 \cos \delta \right] = -F b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta) - m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta.$$

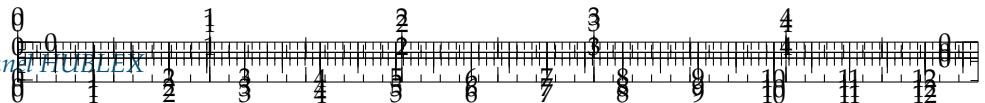
Des simulations pour différentes valeurs de  $F$  donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de  $\delta$  en fonction du temps.

**Question 5** Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses  $\dot{\delta}$  en fin de course. En déduire les valeurs de  $F$  respectant le cahier des charges.

#### Correction

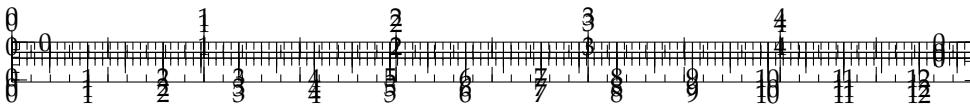
- ▶  $F = 700 \text{ N}$  : le régime est fortement oscillant. Le système ne parvient pas à soulever le robot jusqu'à  $14^\circ$ . Celui-ci se comporte comme un oscillateur non amorti (le modèle est considéré sans frottement).  
Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.
- ▶  $F = 750 \text{ N}$  : le système atteint les  $14^\circ$ . La pente à l'accostage vaut environ  $37.5^\circ/\text{s}$  ce qui est raisonnable vis-à-vis du cahier des charges. Cependant, le modèle utilisé pour trouver ce résultat utilise des liaisons parfaites, sans frottement. L'effort de  $700 \text{ N}$  étant insuffisant avec ce modèle parfait, il est possible qu'un effort de  $750 \text{ N}$  devienne insuffisant en réalité.  
Cette valeur est théoriquement satisfaisante mais l'écart entre modèle et réalité risque de modifier la conclusion.
- ▶  $F = 800 \text{ N}$  : Le système atteint les  $14^\circ$ . La pente à l'accostage vaut environ  $45^\circ/\text{s}$  ce qui est inférieur à la limite de  $50^\circ/\text{s}$  imposée par le cahier des charges. L'effort est 15% supérieur à la valeur minimale nécessaire pour atteindre les  $14^\circ$  ce qui semble une marge suffisante pour vaincre les frottements non pris en compte dans le modèle.  
Cette valeur est satisfaisante.
- ▶  $F = 950 \text{ N}$  : Le système atteint les  $14^\circ$ . La pente à l'accostage vaut environ  $75^\circ/\text{s}$  ce qui est supérieur à la limite de  $50^\circ/\text{s}$  imposée par le cahier des charges.  
Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.





.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_TD\_04\_RobotFibre/image





## TD 5

# RobuROC 6 : plate-forme d'exploration tout terrain – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2009.

### Mise en situation

Le robuROC 6 est un robot mobile développé par la société ROBOSOFT. Cette plateforme robotisée a été conçue pour des applications de recherche et d'exploration en milieu extérieur. Elle est équipée de 6 roues motrices indépendantes, de même diamètre, montées par paires sur 3 podes articulés en tangage et en roulis.

#### Hypothèse

Le mouvement de roulis n'est pas pris en compte. Il est fixé à une valeur nulle.

Les 6 roues de la plate-forme (notée  $PF$ ) sont motorisées permettant ainsi de se déplacer sur des reliefs très accidentés. Cependant, la plate-forme ne comporte pas de systèmes spécifiques de direction. Le changement de direction est imposé par une rotation différentielle des roues du pôle central 1. Les roues avant et arrière doivent alors avoir des vitesses de rotation compatibles avec celles du pôle central 1. Lorsque le rayon de courbure de la trajectoire suivie par la plate-forme devient inférieur à 4 mètres, le groupe hydraulique est actionné pour passer en « Mode 2 roues instable ». La plate-forme ne tenant pas en équilibre sur 2 roues, elle retombe dès le début du mouvement sur les roues arrière ou les roues avant, passant donc en « Mode 4 roues Déplacement ». Cette intervention du groupe hydraulique permet ainsi de soulager le contact entre les roues des podes avant / arrière et le sol.

Pour cette étude, nous considérerons que la plate-forme retombe sur les roues arrière (figure suivante) et nous nous placerons dans le cas d'un rayon de courbure nul. Le mouvement de lacet étudié est donc une rotation autour de l'axe  $(C_1, \vec{z}_0)$ , d'angle  $\varphi$ , appelé angle de lacet.

Ce mouvement est défini par le torseur cinématique suivant :  $\{\mathcal{V}(PF/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(PF/0)} = \dot{\varphi} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C_1}$ .

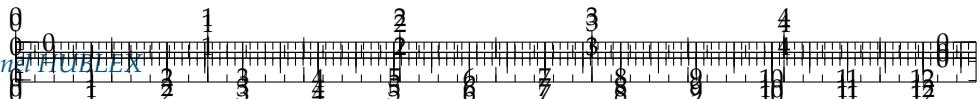
L'objectif de cette partie est de valider l'aptitude du système à respecter la loi de vitesse de la figure suivante.

Les roues centrales et les roues arrière sont en contact avec le sol. Dans ce mode, seules les roues centrales  $R_{1d}$  et  $R_{1g}$  sont motrices. Elles roulent sans glisser sur le sol en  $I_{1d}$  et  $I_{1g}$ . Les roues du pôle avant 3 et du pôle arrière 2 sont bloquées .

#### Paramétrage

- ▶  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au sol 0 supposé galiléen;
- ▶  $\mathcal{R}_L = (C_1; \vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$  lié à la plate-forme PF tel que  $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_L) = (\vec{y}_0, \vec{y}_L)$  appelé angle de lacet;
- ▶  $\mathcal{R}_1 = (C_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au pôle central 1 tel que  $\beta = (\vec{y}_L, \vec{y}_1) = (\vec{z}_L, \vec{z}_1)$ ;  $\beta$  est l'angle de tangage ;  $\beta = 2^\circ$  (supposé constant pendant tout le mouvement du lacet);
- ▶  $\mathcal{R}_3 = (C_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  lié au pôle avant 3 tel que  $2\beta = (\vec{y}_L, \vec{y}_3) = (\vec{z}_L, \vec{z}_3) = 4^\circ$ ;
- ▶  $\vec{C_1C_3} = b\vec{y}_3$  et  $\vec{C_1C_2} = -b\vec{y}_L$  avec  $b = 553$  mm;
- ▶ la figure précédente permet de définir le paramétrage de chacune des roues de la plate-forme en contact avec le sol avec l'exemple de la roue centrale droite  $R_{1d}$ .





### Caractéristiques géométriques et d'inertie des solides

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_TD\_05\_Roburoc/images/fig\_02.png

Le mouvement de roulis étant nul et le mouvement de tangage étant fixé à une valeur constante, il est possible de définir l'ensemble rigide  $\Sigma$  constitué des trois podes 1, 2 et 3, des deux roues avant, des deux roues arrière et des bras d'articulation 4 et 4'. Pour chaque constituant de cet ensemble, la masse est supposée répartie uniformément. Centre de gravité de  $\Sigma$  : G tel que  $\overrightarrow{C_1G} = a_G \vec{x}_1$  et  $a_G = 85 \text{ mm}$ ,  $m_\Sigma = 152 \text{ kg}$ ,

$$I_{C_1}(\Sigma) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{avec } A = 30,2 \text{ kg m}^2, B = 8,2 \text{ kg m}^2 \text{ et } C = 32,3 \text{ kg m}^2.$$

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01\_Energetique/Cy\_05\_01\_TD\_05\_Roburoc/images/fig\_103.png

Roue droite ou gauche + axe de roue :  $R_{\text{id ou g}}$  ( $i$  correspond au numéro du pode). Centre de gravité de  $R_{\text{id ou g}}$  :  $C_{ig} R_{\text{id ou g}}$  tel que l'entraxe  $C_{ig} C_{id} = 2e$ ,  $\overrightarrow{C_i C_{id}} = e \vec{x}_L$  et  $\overrightarrow{C_i C_{ig}} = -e \vec{x}_L$  avec  $e = 340 \text{ mm}$ ,  $m_r = 4 \text{ kg}$ , rayon d'une roue  $R = 225 \text{ mm}$ ,  $I_{C_{\text{id ou g}}} (R_{\text{id ou g}}) = \begin{pmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & B_r & 0 \\ 0 & 0 & B_r \end{pmatrix}$  valable dans toute base orthonormée directe contenant  $\vec{x}_L$  avec  $A_r = 0,1 \text{ kg m}^2$  et  $B_r = 0,04 \text{ kg m}^2$ .

Axe des moteurs du pode central : les deux motoréducteurs centraux sont constitués chacun d'un moteur à courant continu alimenté en 48 V associé à un réducteur épicycloïdal de rapport de réduction  $k = 1/25$ . La matrice d'inertie en  $C_1$  d'un axe moteur droit  $M_{1d}$  ou  $M_{1g}$  (en rotation suivant  $(C_1, \vec{x}_L)$ ) est :

$$I_{M_{1d}}(C_1) = \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & B_m & 0 \\ 0 & 0 & B_m \end{pmatrix} \quad \text{Roburoc/images/fig_104.png} \quad \text{et } A_m = 17,504 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2 \text{ et } B_m = 8 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2.$$

Les masses et inerties des autres pièces seront négligées.

### Modélisation du contact roue / sol

Les roues centrales  $R_{1d}$  et  $R_{1g}$  sont motrices, elles roulent sans glisser aux points de contact  $I_{1d}$  et  $I_{1g}$ . On pose  $\overrightarrow{C_{1d} I_{1d}} = -R \vec{z}_L$  et  $\overrightarrow{C_{1g} I_{1g}} = -R \vec{z}_L$ . Le contact avec le sol 0 est modélisé par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{1d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{1d})} = Y_{1d} \vec{y}_L + Z_{1d} \vec{z}_L \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_{1d}} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{1g})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{1g})} = Y_{1g} \vec{y}_L + Z_{1g} \vec{z}_L \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_{1g}}.$$

Les roues arrière  $R_{2d}$  et  $R_{2g}$  sont bloquées, leur vitesse de rotation par rapport au pode arrière 2 est nulle. Le contact avec le sol 0 est modélisé par le torseur suivant :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{2d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{2d})} = T_{2d} \vec{n}_g + Z_{2d} \vec{z}_L \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_{2d}}$

et  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow R_{2g})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow R_{2g})} = T_{2g} \vec{n}_d + Z_{2g} \vec{z}_L \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_{2g}}$  avec  $\vec{n}_d$  et  $\vec{n}_g$  deux vecteurs unitaires opposés

aux vitesses de glissement des roues  $R_{2d}$  et  $R_{2g}$  par rapport au sol 0 respectivement en  $I_{2d}$  et  $I_{2g}$ . On pose  $\overrightarrow{C_{2d} I_{2d}} = -R \vec{z}_L$  et  $\overrightarrow{C_{2g} I_{2g}} = -R \vec{z}_L$ .  $T_{2d} = f Z_{2d}$  et  $T_{2g} = f Z_{2g}$ ;  $f$  est le facteur de frottement constant au contact roue/sol  $f = 0,6$ .

### Autres liaisons

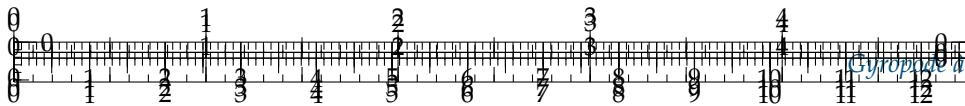
Toutes les autres liaisons de la plate-forme sont supposées parfaites (sans jeu, sans frottement).

### Motoréducteur centraux

L'action mécanique développée par le motoréducteur sur la roue centrale droite  $R_{1d}$  est notée  $\{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow R_{1d})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -C_m \vec{x}_L \end{array} \right\}_{C_1}$ .

L'action mécanique développée par le motoréducteur sur la roue centrale droite  $R_{1g}$  est notée  $\{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow R_{1g})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_L \end{array} \right\}_{C_1}$ .





**Question 1** Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble  $\Sigma$  au point  $C_1$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

Dans un premier temps, l'objectif est de déterminer la somme des efforts normaux  $Z_{2d} + Z_{2g}$  s'exerçant sur les roues arrières. Isolons l'ensemble de la plate-forme PF, soit l'ensemble  $\Sigma$ , les roues centrales et les motoréducteurs. Plaçons-nous dans le plan médian  $(C_1, \vec{y}_L, \vec{z}_L)$  de la plate-forme PF. Nous définissons le projeté  $I_1$  des points de contact  $I_{1d}$  et  $I_{1g}$  dans ce plan.  $I_1$  est défini par le vecteur :  $\vec{C_1 I_1} = -R\vec{z}_L$ . D'autre part, nous avons  $\vec{C_2 I_1} = b\vec{y}_L - R\vec{z}_L$  et  $\vec{C_3 I_1} = -b\vec{y}_3 - R\vec{z}_L$ . Nous ferons l'hypothèse que le moment dynamique  $\delta(I_1, PF/0) \cdot \vec{x}_L$  est négligeable devant les actions mécaniques.

**Question 2** En appliquant le théorème du moment dynamique à la plate-forme PF en mouvement par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$  en  $I_1$  en projection sur  $\vec{x}_L$ , déterminer l'expression littérale de la somme des efforts normaux de contact  $Z_{2d} + Z_{2g}$ , entre les roues arrière et le sol. Réaliser l'application numérique et comparer la valeur obtenue à la somme des efforts normaux s'exerçant sur les roues arrière lorsque la plate-forme est immobile en appui sur ses six roues sur un sol plan, à savoir  $(Z_{2d} + Z_{2g})_{\text{Repos}} = (m_2 + 2m_r)g$  avec  $m_2 = 52 \text{ kg}$  la masse du pod arrière 2.

L'objectif est dans un second temps de valider l'aptitude des moteurs à suivre la loi de vitesse en lacet exigée. Il est proposé de déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  par une approche énergétique.

**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides en mouvement. Le résultat sera mis sous la forme  $\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$  où  $J$  est à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème.

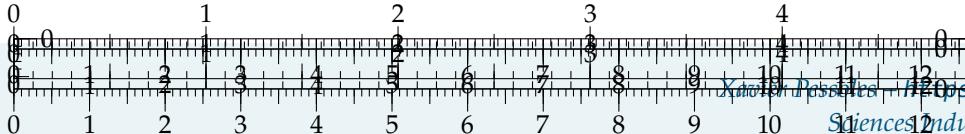
**Question 4** Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique afin de déterminer l'expression du couple moteur. Vous donnerez le résultat sous la forme  $C_m = k_2(J\dot{\varphi} + k_1(T_{2d} + T_{2g}))$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème. Vous veillerez à bien faire apparaître les différentes étapes de votre raisonnement et à fournir des expressions littérales.

Pour la question suivante, vous prendrez  $J = 34 \text{ kg m}^2$ ,  $k_1 = 0,65 \text{ m}$  et  $k_2 = 1,3 \times 10^{-2}$  sans unité.

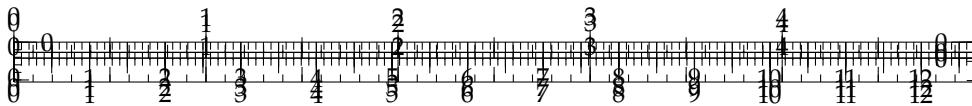
**Question 5** Calculer le couple moteur maximal :  $C_m$  maxi. À partir du graphe de fonctionnement du moteur, conclure quand à l'aptitude de la motorisation à générer le mouvement de lacet désiré.

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01

.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Chapitre\_01







## TD 5

# RobuROC 6 : plate-forme d'exploration tout terrain – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2009.

### Mise en situation

**Question 1** Justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble  $\Sigma$  au point  $C_1$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

#### Correction

**Question 2** En appliquant le théorème du moment dynamique à la plate-forme PF en mouvement par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$  en  $I_1$  en projection sur  $\vec{x}_L$ , déterminer l'expression littérale de la somme des efforts normaux de contact  $Z_{2d} + Z_{2g}$ , entre les roues arrière et le sol. Réaliser l'application numérique et comparer la valeur obtenue à la somme des efforts normaux s'exerçant sur les roues arrière lorsque la plate-forme est immobile en appui sur ses six roues sur un sol plan, à savoir  $(Z_{2d} + Z_{2g})_{\text{Repos}} = (m_2 + 2m_r)g$  avec  $m_2 = 52\text{ kg}$  la masse du pod arrière 2.

#### Correction

L'objectif est dans un second temps de valider l'aptitude des moteurs à suivre la loi de vitesse en lacet exigée. Il est proposé de déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  par une approche énergétique.

**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides en mouvement. Le résultat sera mis sous la forme  $\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$  où  $J$  est à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème.

#### Correction

**Question 4** Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique afin de déterminer l'expression du couple moteur. Vous donnerez le résultat sous la forme  $C_m = k_2(J\ddot{\varphi} + k_1(T_{2d} + T_{2g}))$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème. Vous veillerez à bien faire apparaître les différentes étapes de votre raisonnement et à fournir des expressions littérales.

#### Correction

Pour la question suivante, vous prendrez  $J = 34\text{ kg m}^2$ ,  $k_1 = 0,65\text{ m}$  et  $k_2 = 1,3 \times 10^{-2}$  sans unité.

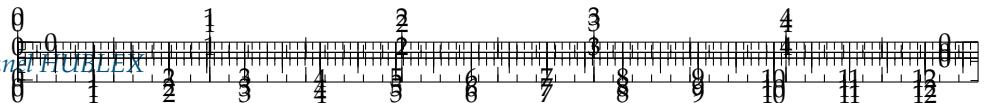
**Question 5** Calculer le couple moteur maximal :  $C_m$  maxi. À partir du graphe de fonctionnement du moteur, conclure quand à l'aptitude de la motorisation à générer le mouvement de lacet désiré.

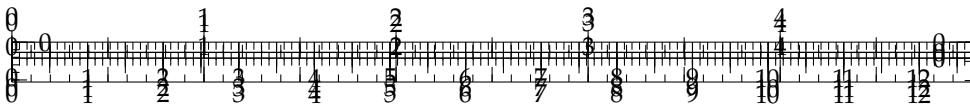


.../.../.../PSI\_Cy\_05\_Energetique/Ch

C1-05

C2-08

**Correction**



.../Style/png/Header\_Peugeot.jpg

## 11 Rappels de Statique

### 11.1 Modélisation locale des actions mécaniques

#### Définition – Action mécanique de contact volumique

Localement, les actions mécaniques volumiques peuvent être modélisées par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iiint_V f(M) \overrightarrow{u(M)} dV \\ \overrightarrow{M(P, 1 \rightarrow 2)} = \iiint_V \overrightarrow{PM} \wedge dR_{(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M.$$

La densité volumique d'effort s'exprime en  $[Nm^{-3}]$ .

#### Définition – Action mécanique de contact surfacique

Localement, les actions mécaniques dans un contact surfacique peuvent être modélisées par le torseur

$$\text{suivant : } \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iint_S f(M) \overrightarrow{u(M)} dS \\ \overrightarrow{M(P, 1 \rightarrow 2)} = \iint_S \overrightarrow{PM} \wedge dR_{(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M.$$

La densité surfacique d'effort peut alors se décomposer sur le vecteur normal au contact et sur un vecteur appartenant au plan tangent au contact. On a alors  $\overrightarrow{f(M)u(M)} = p_{12}(M) \overrightarrow{n_{12}} + \tau_{12}(M)$ . On note ;

- ▶  $p_{12}(M)$  pression de contact au point  $M$  (en  $[Nm^{-2}]$ );
- ▶  $\tau_{12}(M)$  : la projection tangentielle de la densité surfacique (norme en  $[Nm^{-2}]$ ).

B2-14

### 11.2 Modélisation globale des actions mécaniques

#### Définition – Torseur statique ou torseur sthénique ou torseur d'efforts

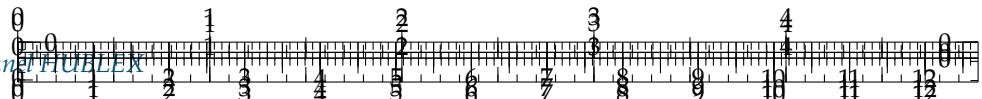
L'action mécanique d'un système matériel  $S_1$  (ou d'un phénomène physique) sur un système matériel  $S_2$  est représentable par un torseur au point  $M$  :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)} \\ \overrightarrow{M(M, S_2 \rightarrow S_1)} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \quad L_{12} \\ Y_{12} \quad M_{12} \\ Z_{12} \quad N_{12} \end{array} \right\}_{M, \mathcal{R}}$$

#### Remarque

La norme de vecteur  $\overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$  est en Newton (N). La norme du vecteur  $\overrightarrow{M(M, S_2 \rightarrow S_1)}$  est en Newton – mètre ( $N \cdot m$ ).





### Propriété – Varignon

Le torseur statique étant un torseur, on a donc :

$$\forall B, \overrightarrow{\mathcal{M}}(B, S_2 \rightarrow S_1) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A, S_2 \rightarrow S_1) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}(S_2 \rightarrow S_1)$$

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions

### Remarque – Moment d'une force – Interprétation graphique

Prenons le cas du serrage d'un écrou avec un effort  $\vec{F} = -F\vec{y}$  :

Dans l'hypothèse où l'effort  $\vec{F}$  s'appliquerait au point  $O$ , il n'y aurait donc pas de serrage de l'écrou. Le moment (ou couple de serrage) serait donc nul :  $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, Clef \rightarrow Ecrou) = \vec{0}$ .

Si l'effort s'applique en  $P$  :  $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, Clef \rightarrow Ecrou) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = L\vec{x} \wedge -F\vec{y} = -LF\vec{z}$ .

Méthode pour déterminer le moment dans un problème plan :

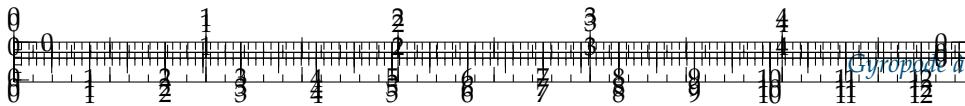
- ▶ norme du vecteur : effort fois bras de levier (on peut éventuellement décomposer l'effort dans le repère de travail);
- ▶ perpendiculaire au plan;
- ▶ sens : on regarde si, par rapport au point où on cherche le moment, l'effort fait tourner la pièce dans le sens direct ou indirect.

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_01\_MAM/Cours/images/pfs.png

Application du TMS en  $A$  :  $C_B + Y_B L + 0 = 0$ .

B2-14





## 11.3 Modélisation du contact ponctuel entre 2 pièces

### 11.3.1 Torseur des actions mécaniques

Considérons le contact ponctuel ponctuel entre deux pièces 1 et 2. En considérant la liaison parfaite, le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 s'écrit sous la forme suivante :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{12}\vec{n}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$  en notant  $\vec{n}_{12}$  le vecteur normal au contact orienté de 1 vers 2. En considérant que la liaison n'est pas parfaite, plusieurs situation peuvent se présenter.

- ▶ Si on considère qu'un effort tend à faire translater 2 suivant  $\vec{t}_{12}$ , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\vec{n}_{12} + T_{12}\vec{t}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$ .
- ▶ Si on considère qu'un effort tend à faire rouler 2 autour de  $\vec{z}_{12}$ , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\vec{n}_{12} \\ M_{r12}\vec{z} \end{array} \right\}_I$  avec  $M_{r12}$  moment de résistance au roulement.
- ▶ Si on considère qu'un effort tend à faire pivoter 2 autour de  $\vec{n}_{12}$ , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\vec{n}_{12} \\ M_{p12}\vec{n}_{12} \end{array} \right\}_I$  avec  $M_{p12}$  moment de résistance au pivotement.

#### Remarque

Il est possible de modéliser l'ensemble des composantes dues au frottement dans un même torseur. On fait l'hypothèse ici d'un problème plan, mais il peut aisément être adapté à un modèle 3D.

### 11.3.2 Facteur de glissement et d'adhérence

Considérons la pièce 2 sur un plan incliné 1. Notons  $\varphi_a$  l'angle à partir duquel la pièce 2 se met à glisser sur le plan. On appelle  $f_a = \tan \varphi_a$  le facteur d'adhérence.

On constate expérimentalement qu'une fois la pièce est en mouvement, si on diminue l'angle  $\varphi$ , la pièce continue à glisser, jusqu'à un angle  $\varphi_g$ . On appelle  $f_g = \tan \varphi_g$  le facteur de glissement.

Ces facteurs sont sans unité. Ils dépendent de la nature des matériaux en contact ainsi que de la nature des surfaces de contact (et d'un lubrifiant éventuel). Ils sont indépendants de l'effort de 2 sur 1. Ces deux facteurs étant relativement proches, on fera l'hypothèse que  $f = f_a = f_g$ .

### 11.3.3 Modélisation de l'adhérence et du glissement – Lois de Coulomb

**Cas 1 – Glissement** –  $\overline{V}(I, 2/1) \neq \vec{0}$

- ▶ Connaissant le sens et la direction de  $\overline{V}(I, 2/1)$ , alors  $\vec{t}_{12}$  s'oppose à  $\overline{V}(I, 2/1)$ .
- ▶  $|T_{12}| = f|N_{12}|$ .
- ▶ La vecteur vitesse appartenant au plan tangent au contact, on dit que l'effort résultant ( $\vec{F}_{12} = N_{12}\vec{n}_{12} + T_{12}\vec{t}_{12}$ ) est sur le cône de frottement.

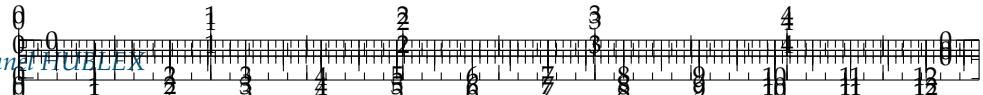
**Cas 2 – Adhérence** –  $\overline{V}(I, 2/1) = \vec{0}$

- ▶ La direction de  $\vec{t}_{12}$  n'est pas connue.
- ▶  $|T_{12}| \leq f|N_{12}|$ .
- ▶ La direction  $\vec{t}_{12}$  n'étant pas connue, on dit que l'effort résultant ( $\vec{F}_{12} = N_{12}\vec{n}_{12} + T_{12}\vec{t}_{12}$ ) appartient au cône d'adhérence.

#### Remarque

En considérant que la direction du vecteur vitesse peut décrire le plan tangent au contact, la résultante des efforts  $\vec{F}_{12}$  décrit alors un cône. On parle donc de cône d'adhérence.





### 11.3.4 Modélisation de la résistance au roulement et au pivotement

#### Modélisation de la résistance au roulement

- ▶ Le moment de résistance au roulement  $\overrightarrow{M_{r12}}$  s'oppose à  $\overrightarrow{\Omega(2/1)} \cdot \vec{z}$ .
- ▶ On note  $r$  le coefficient de résistance au roulement ([m]) et on a  $\|\overrightarrow{M_{r12}}\| = r\|\overrightarrow{N_{12}}\|$ .

#### Modélisation de la résistance au pivotement

- ▶ Le moment de résistance au pivotement  $\overrightarrow{M_{p12}}$  s'oppose à  $\overrightarrow{\Omega(2/1)} \cdot \vec{n}_{12}$ .
- ▶ On note  $p$  le coefficient de résistance au pivotement ([m]) et on a  $\|\overrightarrow{M_{p12}}\| = p\|\overrightarrow{N_{12}}\|$ .

Ainsi pour modéliser la résistance au roulement, on peut faire l'hypothèse que l'action normale de 1 sur 2 est « avancée » de  $r$  par rapport au point  $I$ .

## 11.4 Modélisation locale des actions mécaniques

#### Définition – Action mécanique locale

Localement, les actions mécaniques dans un contact ponctuel avec frottement peuvent être modélisées

$$\text{par le torseur suivant : } \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iint_S f(M) \overrightarrow{u(M)} dS \\ \overrightarrow{M(P, 1 \rightarrow 2)} = \iint_S \overrightarrow{PM} \wedge d\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M.$$

La densité surfacique d'effort peut alors se décomposer sur le vecteur normal au contact et sur un vecteur appartenant au plan tangent au contact. On a alors  $f(M) \overrightarrow{u(M)} = p_{12}(M) \overrightarrow{n_{12}} + \overrightarrow{\tau_{12}}(M)$ . Dans le cas du glissement :  $\|\overrightarrow{\tau_{12}}(M)\| = p_{12} \cdot f$ . En notant :

- ▶  $p_{12}(M)$  pression de contact au point  $M$  (en  $[\text{Nm}^{-2}]$ );
- ▶  $\overrightarrow{\tau_{12}}(M)$  : la projection tangentielle de la densité surfacique (norme en  $[\text{Nm}^{-2}]$ );
- ▶  $f$  facteur de frottement.

## 11.5 Résolution des problèmes d'arc-boutement

L'arc-boutement est un phénomène de blocage d'une liaison (souvent glissière ou pivot glissant). Ce phénomène est causé d'une part par le frottement dans une liaison et d'autre part par le jeu existant entre les deux pièces en mouvement. En effet, le jeu dans la liaison autorise une légère rotation de la pièce mâle, modifiant les zones de contact. Le frottement dans ces zones de contact conduit à l'arc-boutement.

.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_02\_Frottement/Cours/images/fig\_05.png

On commence donc par modéliser le contact par des liaisons ponctuelles avec frottement. L'écriture du PFS et l'utilisation du modèle de Coulomb permet de déterminer des conditions géométriques à la limite du coincement. (Pour cela, on fait l'hypothèse qu'on est à la limite du glissement en un point (égalité) et dans le cône d'adhérence à l'autre point inégalité.)



## 11.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer

1. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
2. Faire un bilan des actions mécaniques extérieures et écrire le torseur associé.
3. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
4. Faire un graphe d'analyse (ou de structure : liaisons et actions mécaniques extérieures).
5. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
6. Faire des produits vectoriels le plus vite possible.
7. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
8. Simplifier les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons dans le cas d'un problème plan.

## 11.2 Les types de problèmes

Le principe fondamental de la statique a pour objectif de calculer des actions mécaniques dans deux cas :

1. connaître toutes les actions mécaniques dans toutes les liaisons;
2. connaître la loi entrée-sortie en effort, c'est à dire :
  - quel couple moteur faut-il pour déplacer un objet ?
  - quel effort doit fournir le vérin pour soulever cette masse ?
  - ...

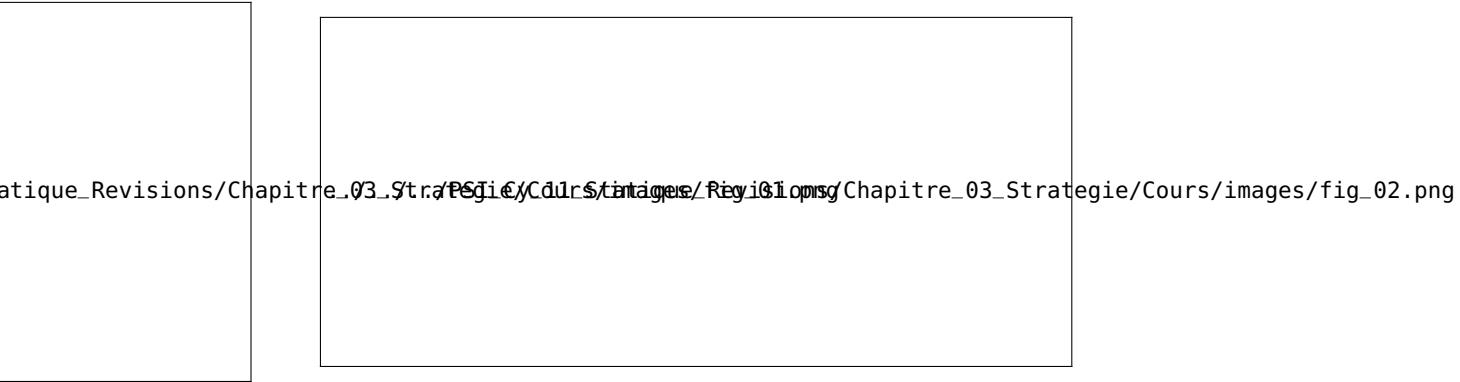
Dans le cas 1, il faut isoler chacune des pièces et réaliser le PFS.

Dans le cas 2, on peut essayer de minimiser le nombre d'équations à écrire. C'est cette stratégie que nous allons présenté.

## 11.3 Stratégie d'isolation

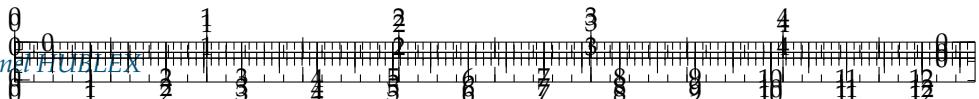
### 11.3.1 Graphe d'analyse, ou de structure

On rencontre principalement deux types de structures : des chaînes fermées, ou des chaînes ouvertes.



Remarques :

- Entre les pièces (ou les groupes de pièces), on matérialise les liaisons (dont vous connaissez super bien les torseurs).
- Entre certaines pièces (ou groupes de pièces), il peut exister des actions mécaniques extérieures qui agissent « en positif » sur une des pièces et « en négatif » sur l'autre. **C'est par exemple le cas des moteurs et des vérins.** Il faut bien préciser que l'action mécanique agit sur les deux pièces.
- Les actions strictement extérieures (comme la pesanteur) ne sont pas en interactions entre deux pièces.



### 11.3.2 Isoler les solides soumis à 2 glisseurs

On commence toujours, toujours, toujours, toujours, toujours par isoler les ensembles soumis à 2 glisseurs. Cela permet de conclure que, d'après le PFS (et le principe des actions réciproques qui en découle) les actions mécaniques agissant sur ce solide ont même direction, même norme et sens opposé. Ce qui supprime des inconnues.

#### Mais qu'est-ce qu'un glisseur ?

Un glisseur est un torseur dont il existe un point tel que le moment est nul. Ainsi, le torseur statique d'une liaison rotule est un glisseur. Le torseur statique d'une liaison pivot n'est pas un glisseur.

#### Remarque

Pour démontrer qu'un torseur est un glisseur, on peut par exemple montrer que son automoment est nul. L'automoment est le produit de la résultante et du moment d'un torseur. Il est identique en tout point. C'est un invariant du torseur (comme la résultante).

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cours/images/fig\_03.png

Dans le cas ci-contre, si on isole 2, 3 et  $h$  (qui pourrait être une action hydraulique). Ainsi, si  $\{T_{12}\}$  et  $\{T_{43}\}$  sont des glisseurs de « centres » respectifs  $A$  et  $B$  et qu'on note

$$\vec{AB} \quad \text{Alors on a } \{T_{12}\} \text{ et } \{T_{43}\} \text{ tous } \left\{ \frac{\vec{F} \vec{u}}{||\vec{AB}||} \right\}_A$$

Il faut bien comprendre que  $\{T_{12}\}$  et  $\{T_{43}\}$  pouvaient avoir chacun 2 ou 3 inconnues et que maintenant nous avons au total UNE inconnue.

### 11.3.3 Isoler les solides soumis à 3 glisseurs ou plus

La stratégie est toujours la suivante :

1. Isoler la pièce.
2. Réaliser le bilan des actions mécaniques, en écrivant les torseurs et en laissant de la place à gauche de la feuille pour les déplacer.
3. Citer L'équation du PFS qu'on va utiliser. Cela peut être le théorème de la résultante statique (TRS) suivant l'axe  $\vec{u}$  ou le théorème du moment statique (TMS) au point  $A$  en projection sur  $\vec{u}$ .
4. Effectuer la résolution. (Déplacer les torseurs, appliquer le PFS.)
5. Réitérer avec un autre isolement.

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cours/images/fig\_04.png

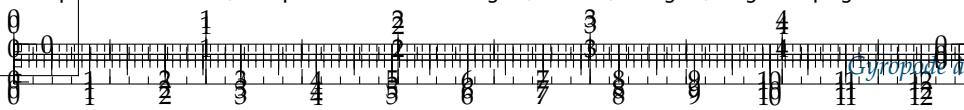
### 11.3.4 Oui, mais quel est le problème ?

Le problème est de choisir L'équation. Je dirai qu'il faut écrire le théorème qui correspond à la mobilité de la pièce isolée, mais cela a-t-il vraiment un sens ? Prenons des exemples...

Si on a isolé 4 et que  $\{T_{14}\}$  est une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z})$ , on réalisera un théorème du moment statique en  $A$  en projection suivant  $\vec{z}$ .

Si on a isolé 4 et que  $\{T_{14}\}$  est une liaison glissière de direction  $\vec{u}$ , on réalisera un théorème de la résultante statique en projection suivant  $\vec{u}$ .





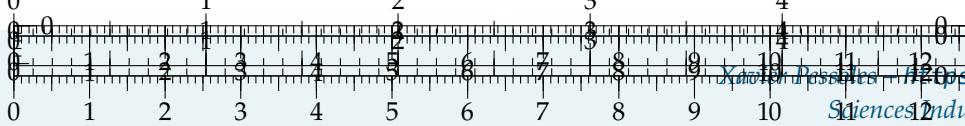
... Est-ce que c'est plus clair? ... J'espère...

Si on cherche une relation entre l'effort extérieur et  $C_{m2}$ , que la liaison entre 2 et 3 est une liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x})$ , on isolera {3 et 4} et on réalisera un théorème du moment statique en  $B$  en projection suivant  $\vec{x}$ .

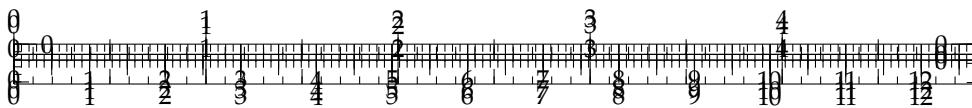
... Toujours pas clair? ... Si?

### 11.3.5 Il y a plus qu'à ...

Petite remarque pour finir : le produit mixte. Lorsqu'on applique un TMS suivant une direction, le produit mixte peut être un bon outil :  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{z} = (\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{z} + (\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}) \cdot \vec{z} \dots$  et  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{z} = (\vec{v} \wedge \vec{z}) \cdot \vec{u} = (\vec{z} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}.$







# Application 1

## Modélisation des actions mécaniques – Sujet

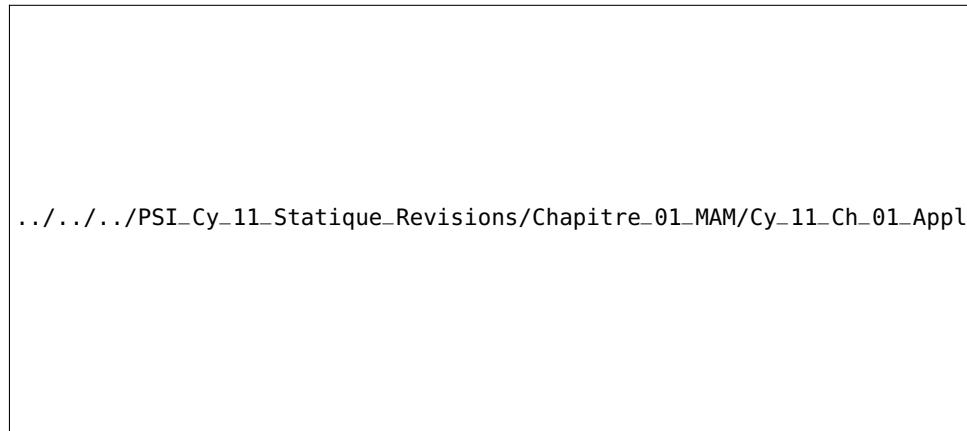
### Torseur des actions mécaniques transmissibles dans un coussinet

Un coussinet (ou bague) est un élément technologique permettant de réaliser des liaisons pivot. Suivant les cas d'utilisation d'un système, un chargement sur l'arbre est transmis au coussinet.

B2-14

C1-05

C2-07



.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi  
.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_01\_MAM/Cy\_11\_Ch\_01\_Application\_01/images/fig\_01.png

On donne le modèle suivant où le champ de pression de l'arbre sur le coussinet est uniforme pour  $\theta \in [\pi, 2\pi]$ . On note  $R = \frac{D}{2}$  le rayon du coussinet.

**Question 1** Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{M(O, 1 \rightarrow 3)z_N}$ .

On considère maintenant que la pression n'est pas uniforme et vaut au point  $M$   $p(M) = p_0 \sin \theta$ .

**Question 3** Justifier que  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$  n'a une composante que sur  $\overrightarrow{y}$ .

**Question 4** Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$ . On rappelle que  $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ .

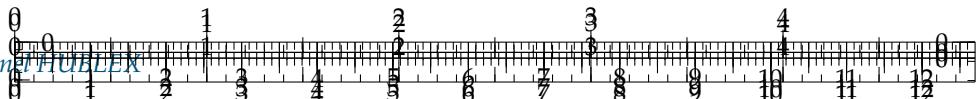


Éléments de correction

$$1. \quad \overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} \rightarrow LD_y \overrightarrow{y}.$$

$$2. \quad \overrightarrow{M(O, 1 \rightarrow 3)z_N} = 0.$$

$$1. \quad \overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} \rightarrow p_0 D L \pi$$



## Détermination des efforts dans une structure étayée

Lors de la démolition d'une partie de la gare de Lyon Part-Dieu (en 2018), des étais ont été posés afin de soutenir la structure supérieure.

Dans le but de dimensionner les étais, il est nécessaire de déterminer les actions mécaniques dans chaque liaison.

Pour cela, on utilise la modélisation ci-contre.

On a  $\vec{AB} = a\vec{x}$ ,  $\vec{BD} = b\vec{x}$  et  $\vec{CB} = L\vec{x}_1$ .

**Question 5** Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).

**Question 6** Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

**Question 7** Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de  $F$ .

FIGURE 11.1 – Modélisation initiale

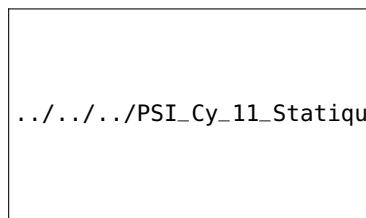
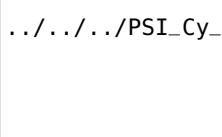
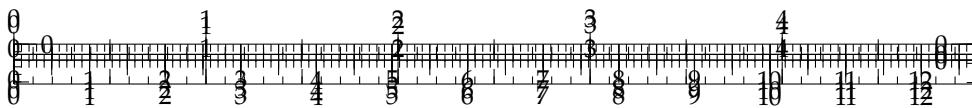


FIGURE 11.2 – Modélisation retenue

### Éléments de correction

$$\begin{aligned} 3. \quad X_{02} &= -F \frac{a+b}{a \tan \alpha}, \quad F_{01} = \\ &F \frac{a+b}{a \sin \alpha}, \quad Y_{02} = -\frac{b}{a} F. \end{aligned}$$





## Application 1

### Modélisation des actions mécaniques – Corrigé

#### Torseur des actions mécaniques transmissibles dans un coussinet

B2-14

C1-05

C2-07

[.../PSI\\_Cy\\_11\\_Static\\_Revisions/Chapitre\\_01\\_MAM/Cy\\_11\\_Ch\\_01\\_Application\\_01/images/fig\\_01.png](http://.../PSI_Cy_11_Static_Revisions/Chapitre_01_MAM/Cy_11_Ch_01_Application_01/images/fig_01.png)

On donne le modèle suivant où le champ de pression de l'arbre sur le coussinet est uniforme pour  $\theta \in [\pi, 2\pi]$ . On note  $R = \frac{D}{2}$  le rayon du coussinet.

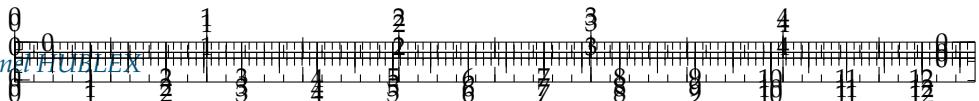
**Question 1** Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note  $\overrightarrow{R}(1 \rightarrow 3)$ .

#### Correction

1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en  $M$  :  $\overrightarrow{dR}(1 \rightarrow 3) = p(M)dS\vec{e}_r$ .
2. La pression étant uniforme, on a  $p(M) = p$ .
3. La géométrie du coussinet étant cylindrique, on se place en coordonnées cylindriques et  $dS = R d\theta dz$ .
4.  $\theta$  varie sur  $[\pi, 2\pi]$  et  $z$  sur  $[0, L]$ .
5.  $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}$ .

$$\begin{aligned} \text{Au final, } \overrightarrow{R}(1 \rightarrow 3) &= \int p \left( \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y} \right) R d\theta dz = pR \int \left( \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y} \right) d\theta dz \\ &= pR \left( \int \cos \theta d\theta \vec{x} + \int \sin \theta d\theta \vec{y} \right) = LpR \left( \int \cos \theta d\theta \vec{x} + \int \sin \theta d\theta \vec{y} \right) \\ &= LpR \left( [\sin \theta]_{\pi}^{2\pi} \vec{x} - [\cos \theta]_{\pi}^{2\pi} \vec{y} \right) \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 &= LpR \left( -(1 - (-1)) \vec{y} \right) \\
 &= LpR \left( -(1 - (-1)) \vec{y} \right) = -2LpR \vec{y} = -LDp \vec{y}.
 \end{aligned}$$

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)} \vec{z}_N$ .

#### Correction

1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en  $M$  :  $\overrightarrow{dR(1 \rightarrow 3)} = p(M)dS\vec{e}_r$ .
2. Au point  $O$ , on a  $\overrightarrow{d\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(1 \rightarrow 3)} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(1 \rightarrow 3)}$
3.  $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + z\vec{z}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{On a alors, } \overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)} \vec{z} &= (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(1 \rightarrow 3)}) \vec{z} \\
 &= ((R\vec{e}_r + z\vec{z}) \wedge p(M)dS\vec{e}_r) \vec{z} \\
 &= (z\vec{z} \wedge p(M)dS\vec{e}_r) \vec{z} = 0
 \end{aligned}$$

**Rappel :** le produit mixte est invariant par permutation circulaire :  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$ .

On considère maintenant que la pression n'est pas uniforme et vaut au point  $M$   $p(M) = p_0 \sin \theta$ .

**Question 3** Justifier que  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$  n'a une composante que sur  $\vec{y}$ .

#### Correction

Pour des raisons de symétrie du champ de pression, la seule composante sera sur  $\vec{y}_N$ .

**Question 4** Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$ . On rappelle que  $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ .

#### Correction

On cherche donc  $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} \cdot \vec{y}_N$ .

1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en  $M$  :  $\overrightarrow{dR(1 \rightarrow 3)} = p(M)dS\vec{e}_r$ .
2. La pression étant uniforme, on a  $p(M) = p_0 \sin \theta$ .
3. La géométrie du coussinet étant cylindrique, on se place en coordonnées cylindriques et  $dS = Rd\theta dz$ .
4.  $\theta$  varie sur  $[\pi, 2\pi]$  et  $z$  sur  $[0, L]$ .

On a  $\overrightarrow{dR(1 \rightarrow 3)} \cdot \vec{y}_N = p(M)dS\vec{e}_r \cdot \vec{y}_N = p_0 dS \sin^2 \theta$ .

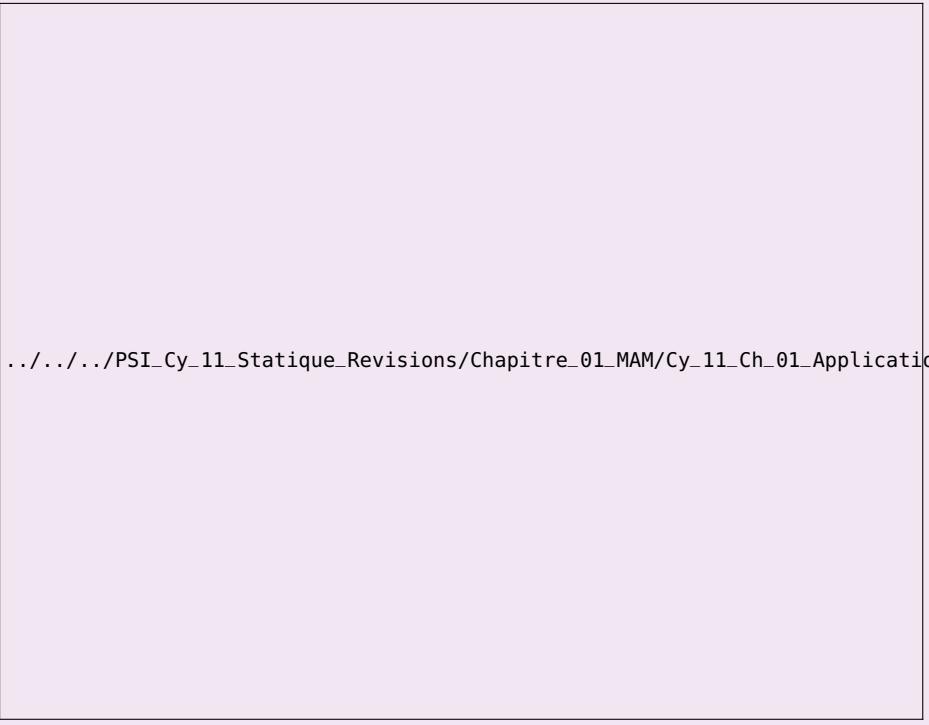
$$\begin{aligned}
 \text{On a donc } \overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} \cdot \vec{y}_N &= \int p_0 \sin^2 \theta R d\theta dz = p_0 RL \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \\
 &\frac{1}{2} p_0 RL \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{2} p_0 RL \pi = \frac{1}{4} p_0 DL \pi.
 \end{aligned}$$



## Détermination des efforts dans une structure étayée

**Question 5** Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).

### Correction



.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_01\_MAM/Cy\_11\_Ch\_01\_Application\_01/images/cor\_01.png

**Question 6** Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

### Correction

Ici, il s'agit de déterminer les actions mécaniques dans toutes les liaisons. Il faudra donc isoler successivement toutes les pièces et réaliser un PFS pour chacune d'entre elles. Cependant, il y a quand même une stratégie d'isolement à avoir : **il faut commencer par isoler les solides soumis à deux glisseurs**. En effet, d'après le PFS, lorsqu'un solide est soumis à deux glisseurs, les deux forces sont de même norme, de même direction (droite passant par le point d'application des deux glisseurs) et de sens opposé.

La stratégie est donc la suivante :

- ▶ on isole 1 et on réalise le PFS.
- ▶ on isole 2 et on réalise le PFS en B.

**Question 7** Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de  $F$ .

### Correction

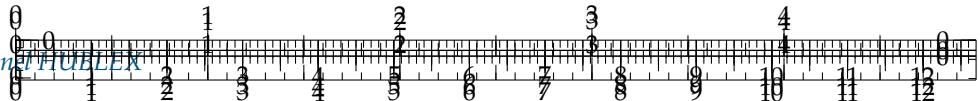
On isole 1. On réalise le BAME :

- ▶  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$  ;
- ▶  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}$ .

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = 0$ .

Résolution :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} F_{01}\vec{x}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}_A$ .





## Correction

On isole 2. On réalise le BAME :

$$\blacktriangleright \{ \mathcal{T}(0 \rightarrow 2) \} = \left\{ \begin{array}{l} X_{02} \vec{x} + Y_{02} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X_{02} \vec{x} + Y_{02} \vec{y} \\ -a Y_{02} \vec{z} \end{array} \right\}_A ;$$

$$\blacktriangleright \{ \mathcal{T}(1 \rightarrow 2) \} = \left\{ \begin{array}{l} F_{01} \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_B ;$$

$$\blacktriangleright \{ \mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow 2) \} = \left\{ \begin{array}{l} -F \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{l} -F \vec{y} \\ -Fb \vec{z} \end{array} \right\}_C .$$

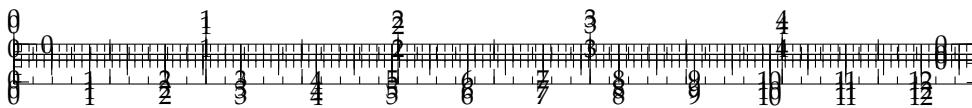
D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a :

$$\{ \mathcal{T}(0 \rightarrow 2) \} + \{ \mathcal{T}(1 \rightarrow 2) \} + \{ \mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow 2) \} = 0.$$

Résolution :

$$\begin{cases} X_{02} + F_{01} \cos \alpha = 0 \\ Y_{02} + F_{01} \sin \alpha - F = 0 \\ -a Y_{02} - Fb = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{02} = -F_{01} \cos \alpha = -F \frac{a+b}{a \tan \alpha} \\ F_{01} = \frac{F - Y_{02}}{\sin \alpha} = F \frac{a+b}{a \sin \alpha} \\ Y_{02} = -\frac{b}{a} F \end{cases}$$





## Application 2

### Modélisation des actions mécaniques – Sujet

Ressources de Stéphane GENOËL.

#### Exercice 1 : Assemblage par frette

Le frette consiste à encastrer deux pièces en utilisant le phénomène d'adhérence.

Avant l'assemblage réalisé à l'aide d'une presse, l'arbre 1 possède un diamètre légèrement supérieur à celui de l'alésage (trou cylindrique) de la pièce 2 dans laquelle il vient se loger.

Après frette, il subsiste donc une pression de contact  $p$  (souvent supposée uniforme sur toute la surface de contact) entre les deux pièces.

Les caractéristiques de cet assemblage par frette sont les suivantes :

- $R$  : rayon de l'arbre 1;
- $L$  : longueur du contact;
- $f$  : facteur d'adhérence entre les deux pièces.

B2-14

C1-05

C2-07

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi

#### Objectif

Déterminer l'effort axial maximal transmissible et le couple maximal transmissible d'une pièce à l'autre.

#### Effort axial maximal transmissible

L'effort axial maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante axiale de la résultante de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante axiale de la résultante de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de  $1/2$  suivant  $-\vec{z}$ .

**Question 1** Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point  $Q$  quelconque de la surface de contact.

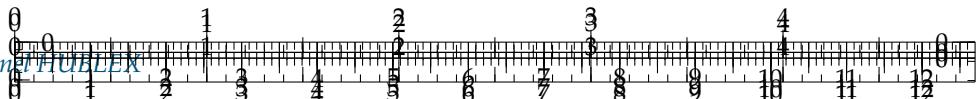
**Question 2** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

**Question 3** Déterminer la résultante axiale maximale transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques du frette.



.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi



## Couple maximal transmissible

Le couple (ou moment) maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante sur l'axe  $\vec{z}$  du moment résultant de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante sur l'axe  $\vec{z}$  du moment résultant de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de 1/2 autour de  $\vec{z}$ .

**Question 4** Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point  $Q$  quelconque de la surface de contact.  
 $\dots/\dots/\dots/\text{PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions}/\text{Chapitre\_01\_MAM}/\text{Cy\_11\_Ch\_01\_Application\_02}/\text{images}/\text{fig\_04.png}$

**Question 5** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

**Question 6** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques du fretteau.

$\dots/\dots/\dots/\text{PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions}/\text{Chapitre\_01\_MAM}/\text{Cy\_11\_Ch\_01\_Application\_02}/\text{images}/\text{fig\_05.png}$

## Exercice 2 : Embrayage à friction mono disque de véhicules automobiles (surfaces de friction plane)

Situé en amont des boîtes à vitesses, l'embrayage mono disque a pour rôle de désolidariser le moteur de la boîte afin de pouvoir changer de rapports, ou lorsque le véhicule est arrêté moteur tournant au ralenti.

**Position embrayée :** le disque est fortement serré entre deux surfaces lisses (plateau et volant) par la pression des ressorts. Le tout tournera donc d'un bloc, sans glissement et sans pertes.  
 $\dots/\dots/\dots/\text{PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions}/\text{Chapitre\_01\_MAM}/\text{Cy\_11\_Ch\_01\_Application\_02}/\text{images}/\text{fig\_06.png}$

**Position débrayée :** la poussée du conducteur sur la pédale contrebalance la force des ressorts. Le disque, sous l'effet des vibrations, coulisse alors légèrement sur ses cannelures pour se positionner entre les surfaces lisses (plateau et volant), sans les toucher. Les vitesses angulaires du volant-plateau (solidaires du vilebrequin) et du disque (solidaire des roues par l'intermédiaire de la transmission) peuvent alors différer sans que le disque ne frotte.

On modélise l'embrayage par 2 disques creux identiques (1 et 2) en contact grâce à une action axiale  $\vec{F}_a$ .

Le rayon intérieur des 2 disques vaut :  $R_{\min}$ . Le rayon extérieur des 2 disques vaut :  $R_{\max}$ . On donne  $f$  le facteur d'adhérence entre les deux pièces.

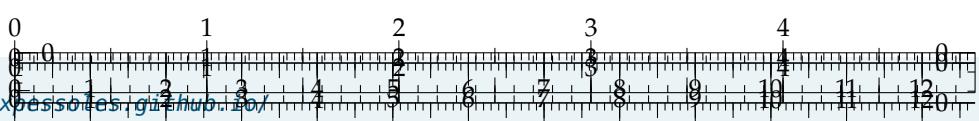
**Question 7** Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en placant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point  $Q$  quelconque de la surface de contact.  
 $\dots/\dots/\dots/\text{PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions}/\text{Chapitre\_01\_MAM}/\text{Cy\_11\_Ch\_01\_Application\_02}/\text{images}/\text{fig\_07.png}$

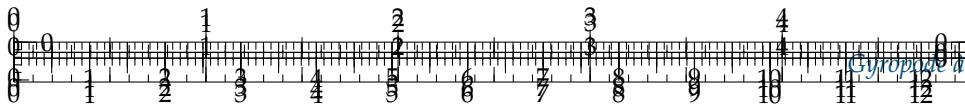
**Question 8** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

**Question 9** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 10** Déterminer l'action axiale  $\vec{F}_a$  qui crée les  $\overrightarrow{dN}$  en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 11** En déduire le couple maximal transmissible en fonction de  $F_a$  (et non en fonction de  $p$ ) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.





### Exercice 3 : Embrayage conique des synchroniseurs de boite de vitesses (surface de friction coniques)

Les boîtes de vitesses automobiles ont pour particularité d'avoir tous leurs engrenages en prise. Les pignons et roues situés sur l'arbre primaire (arbre qui sera lié à l'arbre moteur) sont en liaison pivot sur ce dernier donc ils tournent tous à des vitesses différentes autour de cet arbre. Ces pignons et roues sont appelés pignons « fous » et roues « folles »

Les pignons et roues situés sur l'arbre secondaire sont solidaires de ce dernier donc ils tournent tous à la même vitesse.

Le rôle de la boîte de vitesses est de mettre en liaison encastrement un des pignons (ou roues) fous de l'arbre primaire avec l'arbre primaire. Or pour pouvoir solidariser un des pignons fous et son arbre, il faut synchroniser leurs régimes de vitesses, et c'est là le rôle des synchroniseurs.

On modélise le pignon fou et l'anneau de synchronisation par 2 cônes en contact grâce à une action axiale  $\vec{F}_a$ .

Le rayon maximal des 2 cônes vaut :  $R_{\max}$ . Le rayon minimal des 2 cônes vaut :  $R_{\min}$ . Le demi-angle au sommet des 2 cônes vaut  $\alpha$ . On donne  $f$  le facteur d'adhérence entre les deux pièces.

**Question 12** Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point  $Q$  quelconque de la surface de contact.

**Question 13** Exprimer  $d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(Q)$ .

**Question 14** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 15** Déterminer l'action axiale  $\vec{F}_a$  qui crée les  $d\vec{N}$  en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 16** En déduire le couple maximal transmissible en fonction de  $F_a$  (et non en fonction de  $p$ ) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 17** Déterminer le modèle global de l'action mécanique de l'arbre 2 sur le bâti 1 sous forme d'un torseur exprimé au point  $O$ .

### Couple transmis par une clavette

On cherche à connaître le couple transmissible autour de  $\vec{z}$ , axe du pignon.

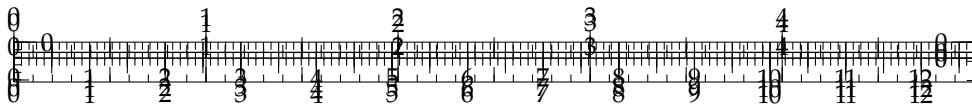
La clavette est de hauteur  $2h$  et de largeur  $l$ . On note  $p$  le champ de pression uniforme du pignon sur une demi-clavette.  $p$  est appelée pression de matage.

$O$  est un point de l'axe.

**Question 18** Déterminer le couple transmissible par la clavette.







## Application 2

### Modélisation des actions mécaniques – Corrigé

Ressources de Stéphane GENOËL.

#### Exercice 1 : Assemblage par frettage

Le frettage consiste à encastrer deux pièces en utilisant le phénomène d'adhérence.

Avant l'assemblage réalisé à l'aide d'une presse, l'arbre 1 possède un diamètre légèrement supérieur à celui de l'alésage (trou cylindrique) de la pièce 2 dans laquelle il vient se loger.

Après frettage, il subsiste donc une pression de contact  $p$  (souvent supposée uniforme sur toute la surface de contact) entre les deux pièces.

Les caractéristiques de cet assemblage par frettage sont les suivantes :

- $R$  : rayon de l'arbre 1;
- $L$  : longueur du contact;
- $f$  : facteur d'adhérence entre les deux pièces.

B2-14

C1-05

C2-07

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi

#### Objectif

Déterminer l'effort axial maximal transmissible et le couple maximal transmissible d'une pièce à l'autre.

#### Effort axial maximal transmissible

L'effort axial maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante axiale de la résultante de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante axiale de la résultante de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de  $1/2$  suivant  $-\vec{z}$ .

**Question 1** Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point  $Q$  quelconque de la surface de contact.

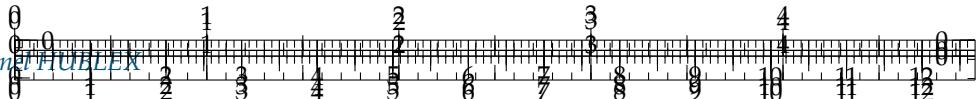
**Question 2** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

**Question 3** Déterminer la résultante axiale maximale transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques du frettage.



.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi



### Correction

Exprimons le torseur des actions mécaniques sous sa forme locale en un point  $M$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\overline{R}(2 \rightarrow 1) \\ d\overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = \overline{0} \end{array} \right\}_M$$

La forme globale au point O est alors donnée par :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R}(2 \rightarrow 1) = \int d\overline{R}(2 \rightarrow 1) \\ \overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = \int d\overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = \int \overline{OM} \wedge d\overline{R}(2 \rightarrow 1) \end{array} \right\}_M$$

**Calculons**  $\overline{R}(2 \rightarrow 1)$ .

$$\overline{R}(2 \rightarrow 1) = \int d\overline{R}(2 \rightarrow 1) = \iint p \overrightarrow{r} dS = -p \iint \overrightarrow{r} dS = -p \iint (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) dS$$

$$\overline{R}(2 \rightarrow 1) = -p \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) R d\theta dz = -p RL \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) d\theta$$

$$\overline{R}(2 \rightarrow 1) = -p RL \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \overrightarrow{x} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \overrightarrow{y} d\theta \right) = -p RL \left( [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \overrightarrow{x} + [-\cos \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \overrightarrow{y} \right)$$

$$\overline{R}(2 \rightarrow 1) = -p RL (2 \overrightarrow{x} + 0 \overrightarrow{y}) = -2p RL \overrightarrow{x}$$

$2RL$  est appelée surface projetée du cylindre. Elle correspond au produit du diamètre par sa longueur.

**Calculons**  $\overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1)$ .

$$\overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = \int d\overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = \int \overline{OM} \wedge d\overline{R}(2 \rightarrow 1)$$

$$\overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = -p \iint \overline{R} \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{r} dS = \overline{0}$$

Au final,

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R}(2 \rightarrow 1) = -2p RL \overrightarrow{x} \\ \overline{\mathcal{M}}(M, 2 \rightarrow 1) = \overline{0} \end{array} \right\}_M$$

### Correction

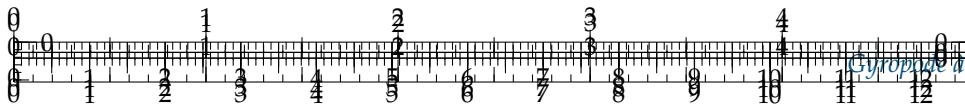
Dans ce cas :

$$\overline{R}(2 \rightarrow 1) = \int d\overline{R}(2 \rightarrow 1) = \iint p(\theta) \overrightarrow{r} dS = -p_0 R \iint \cos \theta (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) d\theta dz$$

$$\overline{R}(2 \rightarrow 1) = -p_0 LR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) d\theta$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$$





Au final :

$$\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = -p_0 L R \frac{\pi}{2} \vec{x}$$

## Couple maximal transmissible

Le couple (ou moment) maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante sur l'axe  $\vec{z}$  du moment résultant de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante sur l'axe  $\vec{z}$  du moment résultant de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de  $1/2$  autour de  $\vec{z}$ .

**Question 4** Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point  $Q$  quelconque de la surface de contact.

**Question 5** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

**Question 6** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques du frette.

## Exercice 2 : Embrayage à friction mono disque de véhicules automobiles (surfaces de friction plane)

Situé en amont des boîtes à vitesses, l'embrayage mono disque a pour rôle de désolidariser le moteur de la boîte afin de pouvoir changer de rapports, ou lorsque le véhicule est arrêté moteur tournant au ralenti.

**Position embrayée** : le disque est fortement serré entre deux surfaces lisses (plateau et volant) par la pression des ressorts. Le tout tournera donc d'un bloc, sans glissement et sans pertes.

**Position débrayée** : la poussée du conducteur sur la pédale contrebalance la force des ressorts. Le disque, sous l'effet des vibrations, coulisse alors légèrement sur ses cannelures pour se positionner entre les surfaces lisses (plateau et volant), sans les toucher. Les vitesses angulaires du volant-plateau (solidaires du vilebrequin) et du disque (solidaire des roues par l'intermédiaire de la transmission) peuvent alors différer sans que le disque ne frotte.

On modélise l'embrayage par 2 disques creux identiques (1 et 2) en contact grâce à une action axiale  $\vec{F}_a$ .

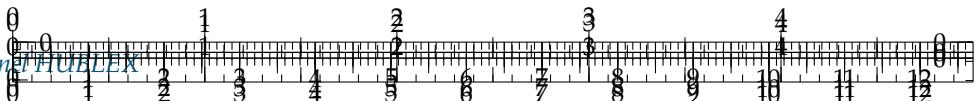
Le rayon intérieur des 2 disques vaut :  $R_{\min}$ . Le rayon extérieur des 2 disques vaut :  $R_{\max}$ . On donne  $f$  le facteur d'adhérence entre les deux pièces.

**Question 7** Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point  $Q$  quelconque de la surface de contact.

**Question 8** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

**Question 9** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.





**Question 10** Déterminer l'action axiale  $\vec{F}_a$  qui crée les  $\vec{dN}$  en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 11** En déduire le couple maximal transmissible en fonction de  $F_a$  (et non en fonction de  $p$ ) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

### Correction

#### Expression du couple infinitésimal

$$\overrightarrow{dM(\text{Plateau, Disque} \rightarrow O)} = \overrightarrow{dM(P, D \rightarrow O)} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(P \rightarrow D)}$$

#### Expression de la résultante infinitésimale

$$\overrightarrow{dR(P \rightarrow D)} = \overrightarrow{dN(P \rightarrow D)} + \overrightarrow{dT(P \rightarrow D)}$$

#### Expression de l'effort normal

$$\overrightarrow{dN(P \rightarrow D)} = p \vec{n} d\mathcal{S} = -p \vec{z} d\mathcal{S}$$

#### Expression de l'unité de surface

$$d\mathcal{S} = \rho d\theta d\rho$$

#### Expression de l'effort tangentiel

D'après le modèle de Coulomb, on commence par identifier le vecteur  $\overrightarrow{V(M, D/P)}$ . Le vecteur tangentiel est donc opposé à ce dernier. A la limite du glissement on a alors :

$$\overrightarrow{dT(P \rightarrow D)} = -f \|\overrightarrow{dN(P \rightarrow D)}\| \vec{v} = f p d\mathcal{S} \vec{v}$$

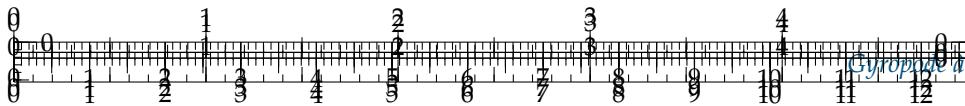
#### Calcul final

On note  $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M(O, P \rightarrow D)} &= \overrightarrow{dM(O, P \rightarrow D)} \\ &= \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(P \rightarrow D)} \\ &= \int \rho \vec{u} \wedge (\overrightarrow{dN(P \rightarrow D)} + \overrightarrow{dT(P \rightarrow D)}) \\ &= \int \rho \vec{u} \wedge (-p \vec{z} d\mathcal{S} + f p d\mathcal{S} \vec{v}) \\ &= \iint p \rho \vec{v} d\mathcal{S} + \iint p f \rho \vec{z} d\mathcal{S} = \iint p \rho \vec{v} \rho d\theta d\rho + \iint p f \rho \vec{z} \rho d\theta d\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint p \rho \vec{v} \rho d\theta d\rho &= \iint p \rho (\cos \theta \vec{y} - \sin \theta \vec{x}) \rho d\theta d\rho \\ &= \iint p \rho \cos \theta \vec{y} \rho d\theta d\rho - \iint p \rho \sin \theta \vec{x} \rho d\theta d\rho \\ &= p \vec{y} \int_r^R \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \rho^2 d\rho - p \vec{x} \int_r^R \int_0^{2\pi} \sin \theta \rho^2 d\theta d\rho \\ &= p [\sin \theta]_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_r^R \vec{y} - p [-\cos \theta]_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_r^R \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} \iint p f \rho^2 \vec{z} d\theta d\rho &= p f [\theta]_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_r^R \vec{z} \\ &= p f 2\pi \frac{R^3 - r^3}{3} \end{aligned}$$

Enfin, en notant  $F_r$  l'effort (uniformément réparti) exercé par le ressort sur toute la couronne, on a donc :

$$p = \frac{F_r}{\pi (R^2 - r^2)}$$

Au final :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, P \rightarrow D)} = f \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} F_r$$

### Exercice 3 : Embrayage conique des synchroniseurs de boite de vitesses (surface de friction coniques)

Les boîtes de vitesses automobiles ont pour particularité d'avoir tous leurs engrenages en prise. Les pignons et roues situés sur l'arbre primaire (arbre qui sera lié à l'arbre moteur) sont en liaison pivot sur ce dernier donc ils tournent tous à des vitesses différentes autour de cet arbre. Ces pignons et roues sont appelés pignons « fous » et roues « folles »

Les pignons et roues situés sur l'arbre secondaire sont solidaires de ce dernier donc ils tournent tous à la même vitesse.

Le rôle de la boîte de vitesses est de mettre en liaison encastrement un des pignons (ou roues) fous de l'arbre primaire avec l'arbre primaire. Or pour pouvoir solidariser un des pignons fous et son arbre, il faut synchroniser leurs régimes de vitesses, et c'est là le rôle des synchroniseurs.

On modélise le pignon fou et l'anneau de synchronisation par 2 cônes en contact grâce à une action axiale  $\vec{F}_a$ .

Le rayon maximal des 2 cônes vaut :  $R_{\max}$ . Le rayon minimal des 2 cônes vaut :  $R_{\min}$ . Le demi-angle au sommet des 2 cônes vaut  $\alpha$ . On donne  $f$  le facteur d'adhérence entre les deux pièces.

**Question 12** Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et l'autre dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point  $Q$  quelconque de la surface de contact.

**Question 13** Exprimer  $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$ .

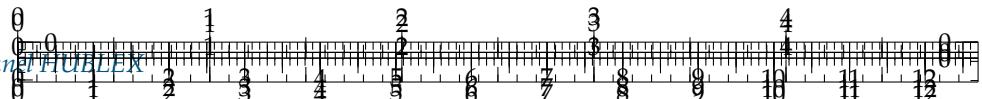
**Question 14** Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 15** Déterminer l'action axiale  $\vec{F}_a$  qui crée les  $\overrightarrow{dN}$  en fonction de  $p$  et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 16** En déduire le couple maximal transmissible en fonction de  $F_a$  (et non en fonction de  $p$ ) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

**Question 17** Déterminer le modèle global de l'action mécanique de l'arbre 2 sur le bâti 1 sous forme d'un torseur exprimé au point  $O$ .





## Couple transmis par une clavette

On cherche à connaître le couple transmissible autour de  $\vec{z}$ , axe du pignon.

La clavette est de hauteur  $2h$  et de largeur  $l$ . On note  $p$  le champ de pression uniforme du pignon sur une demi-clavette.  $p$  est appelée pression de matage.

[http://.../PSI\\_Cy\\_11\\_Static\\_Revisions/Chapitre\\_01\\_MAM/Cy\\_11\\_Ch\\_01\\_Application\\_02/images/clavette.png](http://.../PSI_Cy_11_Static_Revisions/Chapitre_01_MAM/Cy_11_Ch_01_Application_02/images/clavette.png)

**Question 18** Déterminer le couple transmissible par la clavette.

(A revoir, notamment les bornes d'intégrations sur la hauteur de la clavette).

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Pignon} \rightarrow \text{Arbre})} \cdot \vec{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}(O, P \rightarrow A)} \cdot \vec{z} = \int \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{R(P \rightarrow A)} \cdot \vec{z} = \int x \vec{x} \wedge p \vec{y} dx dz$$

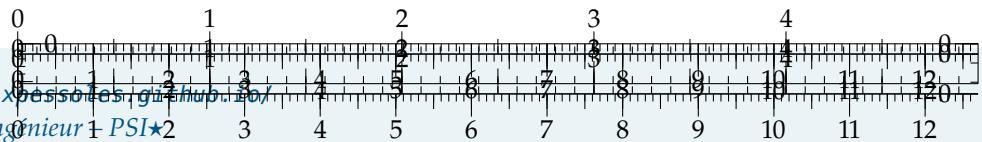
$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Pignon} \rightarrow \text{Arbre})} \cdot \vec{z} = \int_0^l \int_{R-h/2}^{R+h/2} px \underbrace{\left( \vec{x} \wedge \vec{y} \right) \cdot \vec{z}}_1 dx dz = pl \int_{R-h/2}^{R+h/2} x dx = \frac{1}{2} pl \left( (R + h/2)^2 - (R - h/2)^2 \right)$$

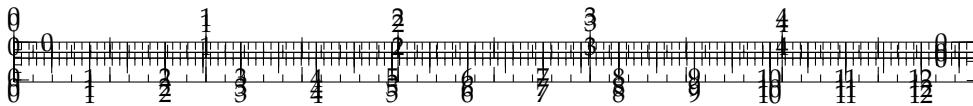
$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Pignon} \rightarrow \text{Arbre})} \cdot \vec{z} = hplR$$

Ce résultat peut paraître logique : la force exercée sur la clavette s'exprime par  $phl$ . Le bras de levier du glisseur correspond au rayon de l'arbre auquel on ajoute un quart de hauteur de clavette.

Attention, si on considère que le couple est transmis par l'ensemble du flanc de la clavette, le moment transmissible est de la forme :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Pignon} \rightarrow \text{Arbre})} \cdot \vec{z} = hLpR$$





## TD 1

# Machine de forage – Sujet

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

Dans le domaine du génie civil, les foreuses permettent de réaliser des perçages profonds afin de couler des pieux en béton armé. On s'intéresse aux conditions de basculement statique de la foreuse.

Le basculement de la machine peut être dû à un déport trop important du centre de gravité de la machine, mais peut aussi être dû à un affaissement du sol. La foreuse doit donc contrôler à tout instant, par estimation, la pression qu'elle exerce sur le sol (et donc que le sol exerce sur elle).

Le tableau ?? récapitule les niveaux de pression que les sols peuvent supporter avant de risquer de s'affaisser.

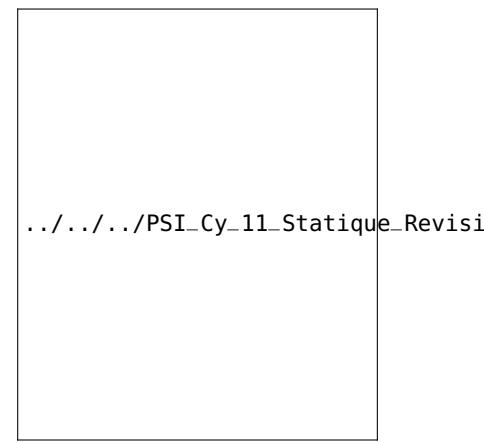
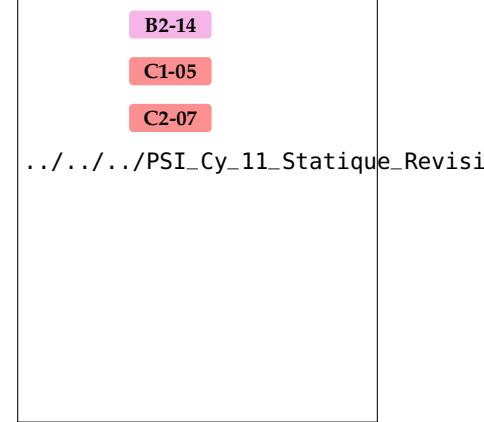
D'après les normes européennes, la répartition de pression du sol sur chaque chenille doit être modélisée comme trapézoïdale sur sa longueur et constante sur sa largeur. Un exemple de représentations 3D, 2D et « aplatie » de telles répartitions est donné sur la figure ?? . Sur la vue « aplatie », la machine est vue de dessus et la visualisation de l'allure des pressions sous les chenilles est ramenée dans le plan.

Un des rôles de l'ordinateur de bord est d'estimer ces répartitions de pression afin de vérifier que la pression maximale supportée par le sol (rentrée par l'utilisateur en fonction du site) n'est pas atteinte à un coefficient de sécurité près. Si c'est le cas, l'ordinateur bloque tous les mouvements de la foreuse qui risqueraient d'empirer et renvoie une alarme.

On se propose dans cette sous-partie d'étudier cette estimation.

On base l'étude sur le paramétrage figure ?? , avec répartition de pression entre le sol et les chenilles. On note :

- $P(x, y, 0)$ , un point courant de contact entre le sol et les chenilles. Attention,  $x$  est négatif sur la figure ci-dessous. Les grandeurs  $dx$  et  $dy$  sont les dimensions du domaine surfacique élémentaire autour du point  $P$  entre le sol et les chenilles ;
- $p_g(y) = A \frac{y}{L} + B$ , la pression du sol 0 sur la chenille gauche  $cg$  au point  $P(x, y, 0)$  où  $A$  et  $B$ , homogènes à des pressions, sont inconnues et à déterminer ;
- $p_d(y) = C \frac{y}{L} + D$ , la pression du sol 0 sur la chenille droite  $cd$  au point  $P(x, y, 0)$  où  $C$  et  $D$ , homogènes à des pressions, sont inconnues et à déterminer ;

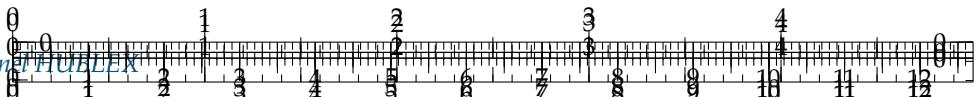


**FIGURE 11.3** – Modèles de répartitions trapézoïdales de pression du sol sur les chenilles.

es par le sol selon le type de sol

Rocher	Schiste argileux	Gravier compact	Asphalte	Sable compacté	Sable en vrac	Argile humide
2 000	800	400	200	200	100	< 100





.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_01\_MAM/Cy\_1f\_Ch\_01\_TD\_01\_Foreuse/images/fig\_07.png

**FIGURE 11.4** – Simplification et modèle équivalent

- $L = 5,4 \text{ m}$ , la longueur et  $l = 1 \text{ m}$  la largeur de chaque chenille;
- $a = 2,1 \text{ m}$ , la distance moyenne sur l'axe  $\vec{x}$  d'une chenille au centre  $O$  de la machine.

Afin de résoudre le problème plus facilement, on somme les deux glisseurs (poids en  $G$  et sol en  $F$ ) pour en former un seul équivalent (en  $E$ ), comme visualisé sur la figure ?? et noté  $\overrightarrow{R}(eq, \vec{f}) = \overrightarrow{F_{eq}}$  où  $\overrightarrow{F_{eq}}$  est négatif.

**Question 1** Déterminer les expressions de  $F_{eq}$  et de  $e$  en fonction de  $M, m, F_w, R, r$  et de  $g$ .

La force élémentaire de réaction du sol 0 sur la chenille gauche  $cg$  est notée  $\overrightarrow{dF_{0 \rightarrow cg}(P)} = p_g(y) \vec{z} dx dy$ . La chenille droite est notée  $cd$ .

**Question 2** En déduire l'expression de la force élémentaire  $\overrightarrow{dF_{0 \rightarrow cg}(P)}$  et du moment élémentaire  $\overrightarrow{dM_{O,0 \rightarrow cg}(P)}$  au point  $O$  qu'exercent le sol sur la chenille gauche en un point  $P$  de contact en fonction de  $A$  et de  $B$ .

**Question 3** Déterminer à l'aide de la question précédente les expressions de l'effort  $\overrightarrow{F_{0 \rightarrow cg}}$  et du moment au point  $O$   $\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow cg}}$  en fonction de  $B, D$  et des données connues du système.

De même, on pourrait, par analogie, déterminer  $\overrightarrow{F_{0 \rightarrow cd}}$   $\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow cd}}$  en fonction de  $C$  et de  $D$ . Au final, on peut en déduire la force  $\overrightarrow{F_{0 \rightarrow \Sigma}}$  qu'exerce le sol sur la foreuse et le moment en  $O$  qu'exerce le sol sur la foreuse  $\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow \Sigma}}$  (via uniquement les chenilles gauche et droite).

Grâce à ces résultats, on trouve qu'à l'équilibre, les répartitions de pressions trapézoïdales doivent respecter le système d'équations ci-contre.

**Question 4** Quels théorèmes généraux ont permis d'établir les trois équations scalaires du système d'équations (1) ?

La figure ?? permet de remarquer que  $B$  (respectivement  $D$ ), toujours positive, est la pression moyenne de la répartition trapézoïdale gauche (respectivement droite) et que  $A$  (respectivement  $C$ ), positive ou négative, en est l'écart entre sa pression avant et arrière. Ainsi, la pression maximale du sol sur la chenille gauche vaut toujours  $B + \left| \frac{A}{2} \right|$  (respectivement  $D + \left| \frac{C}{2} \right|$  à droite).

Ainsi, pour estimer la pression maximale exercée au sol, l'ordinateur de bord estime d'abord la position de  $E$  et la valeur de  $F_{eq}$  en fonction des données renvoyées à tout instant par les capteurs présents sur les différents axes de la foreuse. Ensuite, il détermine les valeurs des pressions  $A, B, C$  et  $D$  grâce aux équations précédentes avec l'hypothèse assez réaliste où  $C = A$  et en déduit la pression maximale. Enfin, il renvoie à l'écran la visualisation « aplatie » des distributions de pression et sonne l'alarme en cas d'approche de la pression maximale autorisée rentrée par l'utilisateur.

**Question 5** Après avoir précisé l'expression des paramètres  $A, B, C$  et  $D$ , donner l'expression de la pression maximale de chacune des répartitions estimées (gauche et droite) en fonction des données manuelles de la machine (L, Foreuse et usage).

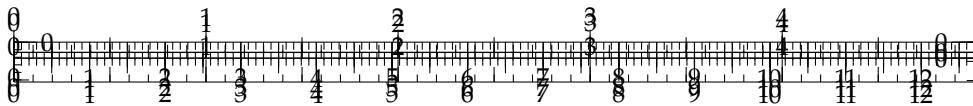
**Question 6** En déduire que l'expression unique de la pression maximale sous la foreuse s'écrit :  $p_{\max} = \frac{-F_{eq}}{2Ll} \left( 1 + \frac{e|\cos \theta|}{a} + \frac{6e|\sin \theta|}{L} \right)$ .



.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_01\_MAM/Cy\_1f\_Ch\_01\_TD\_01\_Foreuse/images/fig\_08.png

**FIGURE 11.5** – Aperçu des expressions des pressions minimale, maximale et moyenne

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_01\_MAM/Cy\_1f\_Ch\_01\_TD\_01\_Foreuse/images/fig\_09.png



## TD 1

# Machine de forage – Corrigé

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

Dans le domaine du génie civil, les foreuses permettent de réaliser des perçages profonds afin de couler des pieux en béton armé. On s'intéresse aux conditions de basculement statique de la foreuse.

Le basculement de la machine peut être dû à un déport trop important du centre de gravité de la machine, mais peut aussi être dû à un affaissement du sol. La foreuse doit donc contrôler à tout instant, par estimation, la pression qu'elle exerce sur le sol (et donc que le sol exerce sur elle).

Le tableau ?? récapitule les niveaux de pression que les sols peuvent supporter avant de risquer de s'affaisser.

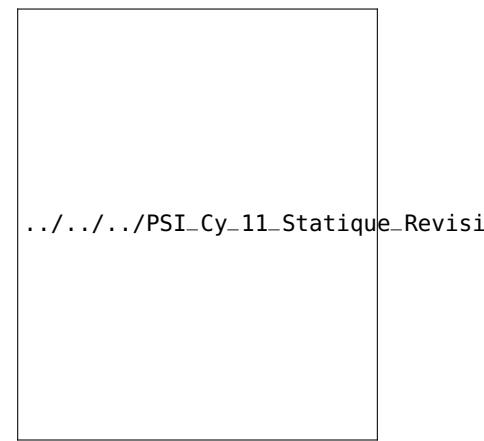
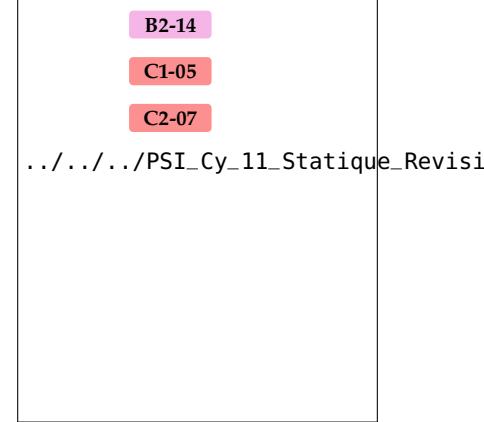
D'après les normes européennes, la répartition de pression du sol sur chaque chenille doit être modélisée comme trapézoïdale sur sa longueur et constante sur sa largeur. Un exemple de représentations 3D, 2D et « aplatie » de telles répartitions est donné sur la figure ?? . Sur la vue « aplatie », la machine est vue de dessus et la visualisation de l'allure des pressions sous les chenilles est ramenée dans le plan.

Un des rôles de l'ordinateur de bord est d'estimer ces répartitions de pression afin de vérifier que la pression maximale supportée par le sol (rentrée par l'utilisateur en fonction du site) n'est pas atteinte à un coefficient de sécurité près. Si c'est le cas, l'ordinateur bloque tous les mouvements de la foreuse qui risqueraient d'empirer et renvoie une alarme.

On se propose dans cette sous-partie d'étudier cette estimation.

On base l'étude sur le paramétrage figure ?? , avec répartition de pression entre le sol et les chenilles. On note :

- $P(x, y, 0)$ , un point courant de contact entre le sol et les chenilles. Attention,  $x$  est négatif sur la figure ci-dessous. Les grandeurs  $dx$  et  $dy$  sont les dimensions du domaine surfacique élémentaire autour du point  $P$  entre le sol et les chenilles ;
- $p_g(y) = A \frac{y}{L} + B$ , la pression du sol 0 sur la chenille gauche  $cg$  au point  $P(x, y, 0)$  où  $A$  et  $B$ , homogènes à des pressions, sont inconnues et à déterminer ;
- $p_d(y) = C \frac{y}{L} + D$ , la pression du sol 0 sur la chenille droite  $cd$  au point  $P(x, y, 0)$  où  $C$  et  $D$ , homogènes à des pressions, sont inconnues et à déterminer ;

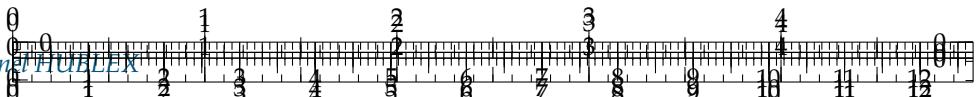


**FIGURE 11.6** – Modèles de répartitions trapézoïdales de pression du sol sur les chenilles.

es par le sol selon le type de sol

Rocher	Schiste argileux	Gravier compact	Asphalte	Sable compacté	Sable en vrac	Argile humide
2 000	800	400	200	200	100	< 100





.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_01\_MAM/Cy\_1f\_Ch\_01\_TD\_01\_Foreuse/images/fig\_07.png

**FIGURE 11.7** – Simplification et modèle équivalent

- $L = 5,4 \text{ m}$ , la longueur et  $l = 1 \text{ m}$  la largeur de chaque chenille;
- $a = 2,1 \text{ m}$ , la distance moyenne sur l'axe  $\vec{x}$  d'une chenille au centre  $O$  de la machine.

Afin de résoudre le problème plus facilement, on somme les deux glisseurs (poids en  $G$  et sol en  $F$ ) pour en former un seul équivalent (en  $E$ ), comme visualisé sur la figure ?? et noté  $\overrightarrow{R}(eq, \vec{f}) = \overrightarrow{F_{eq}}$  où  $\overrightarrow{F_{eq}}$  est négatif.

**Question 1** Déterminer les expressions de  $F_{eq}$  et de  $e$  en fonction de  $M$ ,  $m$ ,  $F_w$ ,  $R$ ,  $r$  et de  $g$ .

La force élémentaire de réaction du sol 0 sur la chenille gauche  $cg$  est notée  $\overrightarrow{dF_{0 \rightarrow cg}(P)} = p_g(y) \vec{z} dx dy$ . La chenille droite est notée  $cd$ .

**Question 2** En déduire l'expression de la force élémentaire  $\overrightarrow{dF_{0 \rightarrow cg}(P)}$  et du moment élémentaire  $\overrightarrow{dM_{O,0 \rightarrow cg}(P)}$  au point  $O$  qu'exercent le sol sur la chenille gauche en un point  $P$  de contact en fonction de  $A$  et de  $B$ .

**Question 3** Déterminer à l'aide de la question précédente les expressions de l'effort  $\overrightarrow{F_{0 \rightarrow cg}}$  et du moment au point  $O$   $\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow cg}}$  en fonction de  $B$ ,  $D$  et des données connues du système.

De même, on pourrait, par analogie, déterminer  $\overrightarrow{F_{0 \rightarrow cd}}$   $\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow cd}}$  en fonction de  $C$  et de  $D$ . Au final, on peut en déduire la force  $\overrightarrow{F_{0 \rightarrow \Sigma}}$  qu'exerce le sol sur la foreuse et le moment en  $O$  qu'exerce le sol sur la foreuse  $\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow \Sigma}}$  (via uniquement les chenilles gauche et droite).

Grâce à ces résultats, on trouve qu'à l'équilibre, les répartitions de pressions trapézoïdales doivent respecter le système d'équations ci-contre.

**Question 4** Quels théorèmes généraux ont permis d'établir les trois équations scalaires du système d'équations (1) ?

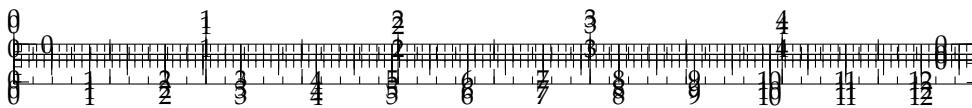
La figure ?? permet de remarquer que  $B$  (respectivement  $D$ ), toujours positive, est la pression moyenne de la répartition trapézoïdale gauche (respectivement droite) et que  $A$  (respectivement  $C$ ), positive ou négative, en est l'écart entre sa pression avant et arrière. Ainsi, la pression maximale du sol sur la chenille gauche vaut toujours  $B + \left| \frac{A}{2} \right|$  (respectivement  $D + \left| \frac{C}{2} \right|$  à droite).

Ainsi, pour estimer la pression maximale exercée au sol, l'ordinateur de bord estime d'abord la position de  $E$  et la valeur de  $F_{eq}$  en fonction des données renvoyées à tout instant par les capteurs présents sur les différents axes de la foreuse. Ensuite, il détermine les valeurs des pressions  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  grâce aux équations précédentes avec l'hypothèse assez réaliste où  $C = A$  et en déduit la pression maximale. Enfin, il renvoie à l'écran la visualisation « aplatie » des distributions de pression et sonne l'alarme en cas d'approche de la pression maximale autorisée rentrée par l'utilisateur.

**Question 5** Après avoir précisé l'expression des paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , donner l'expression de la pression maximale de chacune des répartitions estimées (gauche et droite) en fonction des données connues par la machine ( $L$ ,  $l$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $\theta$  et  $F_{eq}$  uniquement).

**Question 6** En déduire que l'expression unique de la pression maximale sous la foreuse s'écrit :  $p_{\max} = \frac{-F_{eq}}{2Ll} \left( 1 + \frac{e|\cos \theta|}{a} + \frac{6e|\sin \theta|}{L} \right)$ .





## Application 1

### Frottement exponentiel – Poulie-courroie – Sujet

Lycée Mistral – Avignon.

Le problème du frottement d'une corde, d'une sangle ou d'une courroie sur une poulie ou un tambour est un problème classique.

#### Objectif

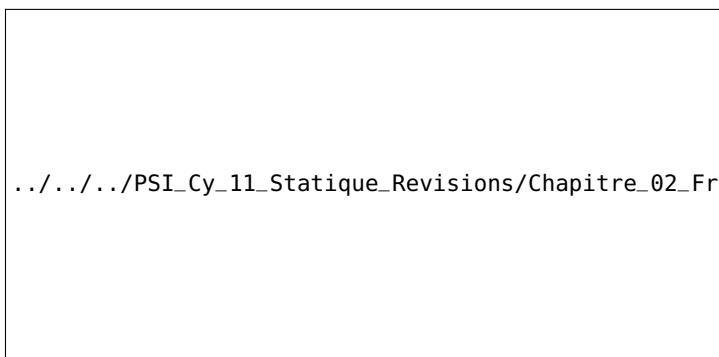
B2-14

Modéliser l'évolution de la tension dans un câble en fonction de l'angle d'enroulement sur une poulie.

C1-05

C2-07

On note  $f$  le coefficient de frottement entre le câble et la poulie.



[.../PSI\\_Cy\\_11\\_Static\\_Revisions/Chapitre\\_02\\_Frottement/Cy\\_11\\_Ch\\_02\\_Application\\_01\\_Poulie/images/...](http://.../PSI_Cy_11_Static_Revisions/Chapitre_02_Frottement/Cy_11_Ch_02_Application_01_Poulie/images/...)

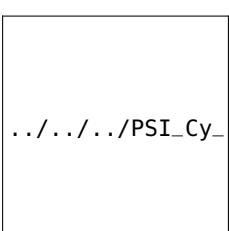
On considère que le câble est enroulé d'un angle  $\alpha$  autour de la poulie. Le câble est à la limite du glissement sous l'action des deux brins  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$ . Soit  $M(\theta)$  un point de l'enroulement.

**Question 1** Après avoir isolé une tranche élémentaire de câble en  $M(\theta)$  de largeur  $d\theta$ , réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures.

**Question 2** Appliquer le théorème en résultante statique en projection dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .

**Question 3** En considérant que l'angle  $\theta$  est petit, établir l'équation différentielle liant  $f$  et  $F(\theta)$  et  $\theta$ .

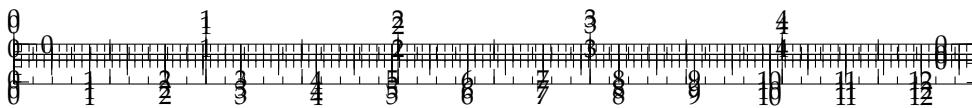
**Question 4** Résoudre l'équation différentielle pour établir la relation entre  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $f$  et  $\alpha$ .



[.../PSI\\_Cy\\_11\\_Static\\_Revisions/Chapitre\\_02\\_Frottement/Cy\\_11\\_Ch\\_02\\_Application\\_01\\_Poulie/images/...](http://.../PSI_Cy_11_Static_Revisions/Chapitre_02_Frottement/Cy_11_Ch_02_Application_01_Poulie/images/...)







# Application 1

## Frottement exponentiel – Poulie-courroie – Corrigé

Lycée Mistral – Avignon.

Le problème du frottement d'une corde, d'une sangle ou d'une courroie sur une poulie ou un tambour est un problème classique.

### Objectif

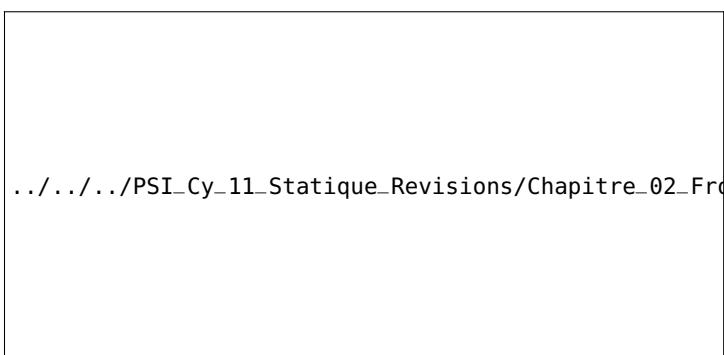
Modéliser l'évolution de la tension dans un câble en fonction de l'angle d'enroulement sur une poulie.

B2-14

C1-05

C2-07

On note  $f$  le coefficient de frottement entre le câble et la poulie.



[.../.../PSI\\_Cy\\_11\\_Static\\_Revisions/Chapitre\\_02\\_Frottement/Cy\\_11\\_Ch\\_02\\_Application\\_01\\_Poulie/images/Exercice\\_1\\_Poulie\\_courroie.pdf](.../.../PSI_Cy_11_Static_Revisions/Chapitre_02_Frottement/Cy_11_Ch_02_Application_01_Poulie/images/Exercice_1_Poulie_courroie.pdf)

On considère que le câble est enroulé d'un angle  $\alpha$  autour de la poulie. Le câble est à la limite du glissement sous l'action des deux brins  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$ . Soit  $M(\theta)$  un point de l'enroulement.

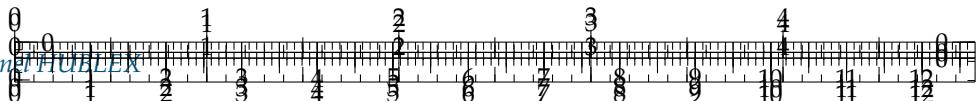
**Question 1** Après avoir isolé une tranche élémentaire de câble en  $M(\theta)$  de largeur  $d\theta$ , réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures.

### Correction

BAME :

- action de tension du câble 1  $\vec{F}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)$ ;
- action de tension du câble 2  $\vec{F}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)$ ;
- action de la poulie sur le câble :  $N\vec{u}_r + T\vec{u}_\theta$  avec  $T = \pm fN$ .





**Question 2** Appliquer le théorème en résultante statique en projection dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .

#### Correction

L'application du TRS à la tranche de câble, on a  $\vec{F}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) + \vec{F}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + N\vec{u}_r + T\vec{u}_\theta = \vec{0}$ .

En projetant dans  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  on a :

$$\begin{cases} -F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + N = 0 \\ F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + T = 0 \end{cases}$$

**Question 3** En considérant que l'angle  $\theta$  est petit, établir l'équation différentielle liant  $f$  et  $F(\theta)$  et  $\theta$ .

#### Correction

En utilisant  $\cos d\theta/2 \approx 1$  et  $\sin d\theta/2 \approx d\theta/2$  :

$$\begin{cases} -F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \frac{d\theta}{2} - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \frac{d\theta}{2} + N = 0 \\ F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + T = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\left(F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) + F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)\right) \frac{d\theta}{2} + N = 0 \\ F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + T = 0 \end{cases}$$

De plus, en faisant un DL à l'ordre 2,  $F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \approx F(\theta) + \frac{d\theta}{2} \frac{dF(\theta)}{d\theta}$ . On a donc :

$$\begin{cases} -2F(\theta) \frac{d\theta}{2} + N = 0 \\ dF(\theta) + T = 0 \end{cases}$$

En utilisant le modèle de Coulomb,  $T = \pm fN$

$$dF(\theta) \pm f\left(2F(\theta) \frac{d\theta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow dF(\theta) \pm fF(\theta)d\theta = 0$$

**Question 4** Résoudre l'équation différentielle pour établir la relation entre  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $f$  et  $\alpha$ .

#### Correction

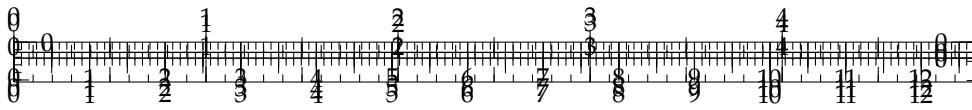
$$\text{On a : } dF(\theta) = \pm f(\theta) d\theta \Leftrightarrow \frac{dF(\theta)}{F(\theta)} = \pm d\theta$$

En intégrant l'équation précédente, on a :  $[\ln F]_{T_1}^{T_2} = \pm f [\theta]_0^\alpha$  Soit  $\ln T_2 - \ln T_1 = -f\alpha$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = \pm f\alpha \text{ et } T_2 = T_1 e^{\pm f\alpha}.$$

(Le signe dépend du sens de glissement.)



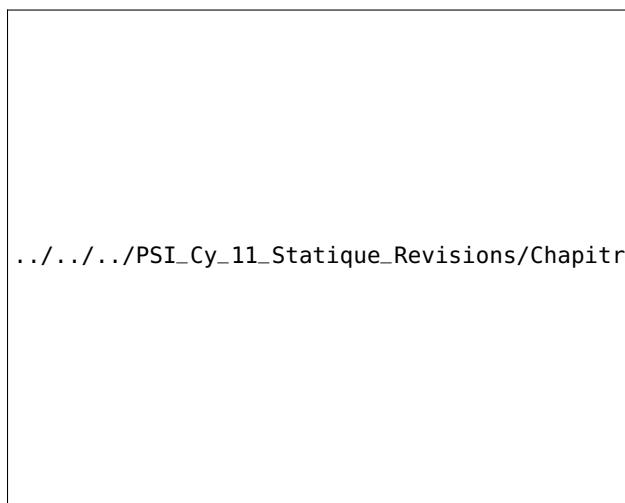


## Application 1

### Mécanisme de levage – Sujet

Le mécanisme représenté schématiquement ci-dessus est destiné à assurer le levage d'une charge liée au coulisseau (3) au moyen d'un levier à excentrique (1) et d'un balancier (2).

Ressources de l'équipe pédagogique La Martinière Monplaisir.



B2-14

C1-05

C2-07

#### Objectif

Objectif : Dans cette étude, on va mettre en évidence l'influence du frottement sur l'équilibre d'un système.

On note  $\vec{P}_3$  le poids de la charge appliquée sur le coulisseau et  $\vec{F}_m$  l'effort appliqué en E par l'opérateur sur le levier à excentrique (1).

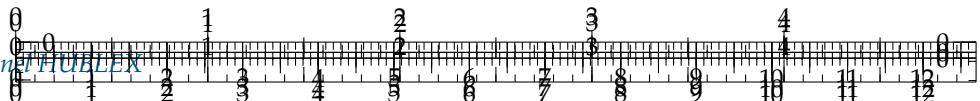
#### Paramétrage géométrique

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= L_0 \vec{x}_0; \vec{AE} = -L_1 \vec{x}_1; \vec{BI} = d_0 \vec{x}_0; \vec{AC} = e_1 \vec{x}_1; \vec{HC} = R_1 \vec{y}_2; \vec{BJ} = \lambda_{32} \vec{x}_2; \vec{ID} = \\ &\lambda_{30} \vec{y}_0; \vec{JD} = R_3 \vec{y}_2; (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta_{(1/0)}; (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \theta_{(2/0)}.\end{aligned}$$

**On suppose dans un premier temps que toutes les liaisons sont sans frottement.**

**Question 1** Justifier que le système est statiquement plan.





**Question 2** En écrivant les équations associées à l'équilibre de chacune des pièces, établir la relation liant  $F_m$  et  $P_3$  à l'équilibre. *On cherchera à écrire le minimum d'équations.*

**Question 3** Pour quelle(s) valeur(s) particulière(s) de  $\theta_{1/0}$  l'équilibre est-il possible avec un effort  $F_m$  nul ?

**Question 4** Établir les équations permettant de relier la translation  $\lambda_{3/0}$  du coulisseau, la position angulaire  $\theta_{(1/0)}$  et les constantes géométriques du mécanisme.

**Question 5** En établissant un bilan de puissance, vérifier les relations obtenues.

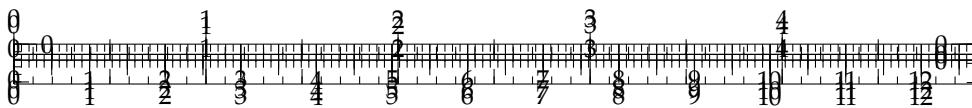
**On suppose que les contacts en  $H$  et  $J$  s'effectuent avec frottement de même coefficient  $f$**

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_Application\_01\_Levage/images

**Question 6** On suppose que les contacts en  $H$  et  $J$  s'effectuent avec frottement de même coefficient  $f$ . Reprendre la question 2 dans le cadre de cette hypothèse. On se place dans la situation de descente de la charge. Distinguer deux situations, selon que  $J$  est situé au-dessus ou en dessous de l'axe  $(B, \vec{x}_0)$ .

**Question 7** Définir le domaine de valeurs de  $\theta_{(1/0)}$  pour lequel l'équilibre du système est possible sans exercer d'effort sur le levier (1) ( $F_m = 0$ ).



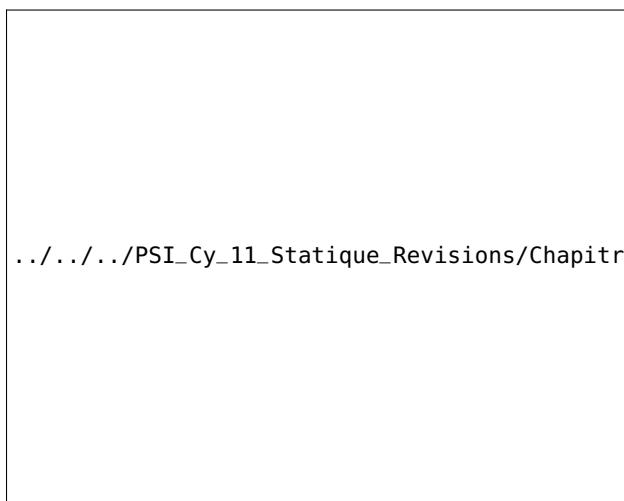


## Application 1

### Mécanisme de levage – Corrigé

Ressources de l'équipe pédagogique La Martinière Monplaisir.

Le mécanisme représenté schématiquement ci-dessus est destiné à assurer le levage d'une charge liée au coulisseau (3) au moyen d'un levier à excentrique (1) et d'un balancier (2).



B2-14

C1-05

C2-07

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_Application\_01\_Levage

#### Objectif

Objectif : Dans cette étude, on va mettre en évidence l'influence du frottement sur l'équilibre d'un système.

On note  $\vec{P}_3$  le poids de la charge appliquée sur le coulisseau et  $\vec{F}_m$  l'effort appliqué en E par l'opérateur sur le levier à excentrique (1).

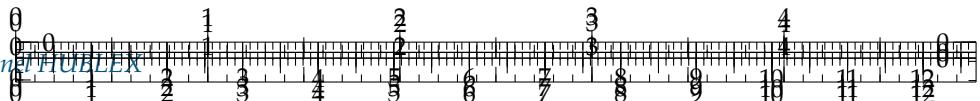
#### Paramétrage géométrique

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= L_0 \vec{x}_0; \vec{AE} = -L_1 \vec{x}_1; \vec{BI} = d_0 \vec{x}_0; \vec{AC} = e_1 \vec{x}_1; \vec{HC} = R_1 \vec{y}_2; \vec{BJ} = \lambda_{32} \vec{x}_2; \vec{ID} = \\ &\lambda_{30} \vec{y}_0; \vec{JD} = R_3 \vec{y}_2; (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta_{(1/0)}; (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \theta_{(2/0)}. \end{aligned}$$

**On suppose dans un premier temps que toutes les liaisons sont sans frottement.**

**Question 1** Justifier que le système est statiquement plan.





**Question 2** En écrivant les équations associées à l'équilibre de chacune des pièces, établir la relation liant  $F_m$  et  $P_3$  à l'équilibre. *On cherchera à écrire le minimum d'équations.*

**Question 3** Pour quelle(s) valeur(s) particulière(s) de  $\theta_{(1/0)}$  l'équilibre est-il possible avec un effort  $F_m$  nul ?

**Question 4** Établir les équations permettant de relier la translation  $\lambda_{3/0}$  du coulisseau, la position angulaire  $\theta_{(1/0)}$  et les constantes géométriques du mécanisme.

**Question 5** En établissant un bilan de puissance, vérifier les relations obtenues.

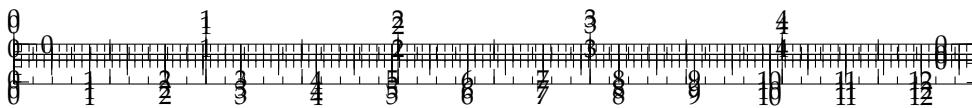
**On suppose que les contacts en  $H$  et  $J$  s'effectuent avec frottement de même coefficient  $f$**

**Question 6** On suppose que les contacts en  $H$  et  $J$  s'effectuent avec frottement de même coefficient  $f$ . Reprendre la question 2 dans le cadre de cette hypothèse. On se place dans la situation de descente de la charge.

Distinguer deux situations, selon que  $J$  est situé au-dessus ou en dessous de l'axe  $(B, \vec{x}_0)$ .

**Question 7** Définir le domaine de valeurs de  $\theta_{(1/0)}$  pour lequel l'équilibre du système est possible sans exercer d'effort sur le levier (1) ( $F_m = 0$ ).





## Application 2

### Suspension automobile – Sujet

Ressources de Florestan MATHURIN.

On s'intéresse à une suspension automobile dont on donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel ainsi qu'une modélisation. L'objectif est de vérifier si la suspension satisfait le niveau du critère d'affaissement statique maximal du cahier des charges, c'est à dire vérifier si la voiture, soumise à son propre poids, s'affaisse de moins ou de plus de 12 cm, suite à l'écrasement des amortisseurs.

**Question 1** En minimisant le nombre d'équations, déterminer une relation entre  $Y_{19}$  (action dans le ressort 9) et  $F_{06}$ .

Données :  $a = 16\text{cm}$ ,  $b = 33\text{cm}$ ,  $c = 8\text{cm}$ ,  $d = 25\text{cm}$ ,  $h = 3\text{cm}$ ,  $L = 15\text{cm}$ ,  $e = 9\text{cm}$ ,  $\mu = 18\text{cm}$ .

La raideur du ressort est  $k = 100\,000\text{N/m}$ . La masse de la voiture est de 2200 kg.

**Question 2** Conclure quant à la capacité de la suspension de voiture à satisfaire l'exigence Affaissement statique du cahier des charges.

B2-14

C1-05

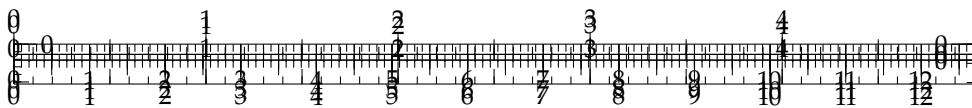
C2-07

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_R

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_Application\_02\_FM/images/susp







## Application 2

### Suspension automobile – Corrigé

Ressources de Florestan MATHURIN.

On s'intéresse à une suspension automobile dont on donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel ainsi qu'une modélisation. L'objectif est de vérifier si la suspension satisfait le niveau du critère d'affaissement statique maximal du cahier des charges, c'est à dire vérifier si la voiture, soumise à son propre poids, s'affaisse de moins ou de plus de 12 cm, suite à l'écrasement des amortisseurs.

B2-14

C1-05

C2-07

**Question 1** En minimisant le nombre d'équations, déterminer une relation entre  $Y_{19}$  (action dans le ressort 9) et  $F_{06}$ .

Données :  $a = 16\text{cm}$ ,  $b = 33\text{cm}$ ,  $c = 8\text{cm}$ ,  $d = 25\text{cm}$ ,  $h = 3\text{cm}$ ,  $L = 15\text{cm}$ ,  $e = 9\text{cm}$ ,  $\mu = 18\text{cm}$ .

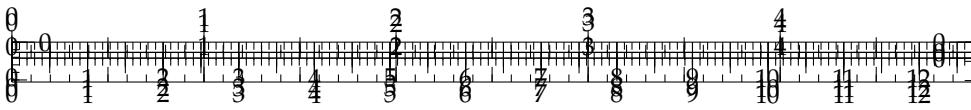
La raideur du ressort est  $k = 100\,000\text{N/m}$ . La masse de la voiture est de 2200 kg.

**Question 2** Conclure quant à la capacité de la suspension de voiture à satisfaire l'exigence Affaissement statique du cahier des charges.

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_Application\_02\_FM/images/susp







## Application 3

### Étude d'un robot Kuka – Sujet

D'après CCP MP 2010.

#### Mise en situation

Le robot Kuka, objet de cette étude, a pour objectif la palettisation de bidons utilisés en agriculture biologique (compléments permettant d'améliorer les qualités nutritives des produits agricoles).

B2-14

C1-05

C2-07

#### Objectif

Suite à l'appui sur le bouton d'arrêt d'urgence, le robot doit immédiatement s'immobiliser dans la position courante. On souhaite alors vérifier que les freins équipant le robot sont suffisants pour assurer sa configuration d'équilibre dans le cas d'une charge maximale de 50 daN (préhenseur + bidon de 40 litres) et qu'il ne faudra pas mettre des actionneurs en parallèle.

On se place dans la situation particulière définie figure suivante avec  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = +90^\circ$ .

On donne :

- $O_2O_3 = O_6O_7 = 1250 \text{ mm}$ ;
- $O_3O_{10} = O_8O_9 = 1350 \text{ mm}$ ;
- $O_2O_6 = O_3O_7 = O_3O_8 = O_9O_{10} = 500 \text{ mm}$ ;
- $\vec{P} = -500\vec{z}_4$ .

On admettra pour simplifier que le point  $O_4$  est situé sur l'axe  $\vec{x}_3$  et que l'axe  $\vec{z}_4$  passe par le point  $O_9$ . De même, les poids propres des pièces seront négligés par rapport aux autres actions.

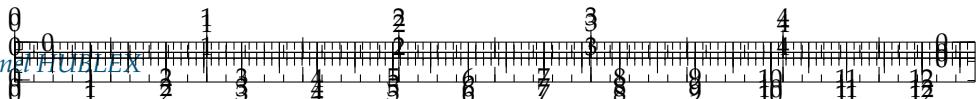
Les liaisons pivot sont supposées parfaites (pas de frottement).

Les couples de freinage maxi  $M_f_2$  et  $M_f_3$  des freins associés aux moteurs  $M_2$  et  $M_3$  sont de 5 mN sur l'arbre moteur. On leur adjoint en série un réducteur de rapport 1/200.

**Question 1** Réaliser le graphe de structure du mécanisme.

**Question 2** Déterminer les actions de la barre 8 sur le poignet 4 et du bras 3 sur le poignet 4.





**Question 3** En isolant l'ensemble 3 et 4 et en considérant les informations fournies dans le tableau suivant, déterminer l'expression du moment  $Mf_3$  correspondant à l'action du frein sur la pièce 3 en  $O_3$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D...

Le dispositif de freinage ne permet qu'un couple maxi de 5 mN sur l'axe moteur.

**Question 4** Quel est alors le couple de freinage disponible en sortie du réducteur ?

**Question 5** Le maintien du freinage est-il assuré ?

On veut alors vérifier que le dispositif de freinage du moteur  $M_2$  convient.

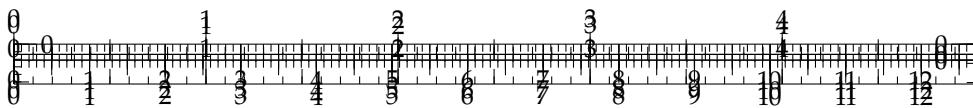
**Question 6** En isolant la pièce 7, déterminer l'action de la barre 6 sur la pièce 7.

**Question 7** En considérant l'ensemble 2, 3, 4, 7, 8, déterminer l'expression du moment  $Mf_2$  correspondant à l'action du frein sur la pièce 2 en  $O_2$ . Calculer  $Mf_2$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_Application\_03\_Kuka/images/

**Question 8** Le dispositif de freinage étant identique à celui de l'axe 3, le maintien du freinage est-il assuré ?





## Application 3

### Étude d'un robot Kuka – Corrigé

D'après CCP MP 2010.

#### Mise en situation

Le robot Kuka, objet de cette étude, a pour objectif la palettisation de bidons utilisés en agriculture biologique (compléments permettant d'améliorer les qualités nutritives des produits agricoles).

B2-14

C1-05

C2-07

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi

#### Objectif

Suite à l'appui sur le bouton d'arrêt d'urgence, le robot doit immédiatement s'immobiliser dans la position courante. On souhaite alors vérifier que les freins équipant le robot sont suffisants pour assurer sa configuration d'équilibre dans le cas d'une charge maximale de 50 daN (préhenseur + bidon de 40 litres) et qu'il ne faudra pas mettre des actionneurs en parallèle.

On se place dans la situation particulière définie figure suivante avec  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = +90^\circ$ .

On donne :

- $O_2O_3 = O_6O_7 = 1250 \text{ mm}$ ;
- $O_3O_{10} = O_8O_9 = 1350 \text{ mm}$ ;
- $O_2O_6 = O_3O_7 = O_3O_8 = O_9O_{10} = 500 \text{ mm}$ ;
- $\vec{P} = -500\vec{z}_4$ .

On admettra pour simplifier que le point  $O_4$  est situé sur l'axe  $\vec{x}_3$  et que l'axe  $\vec{z}_4$  passe par le point  $O_9$ . De même, les poids propres des pièces seront négligés par rapport aux autres actions.

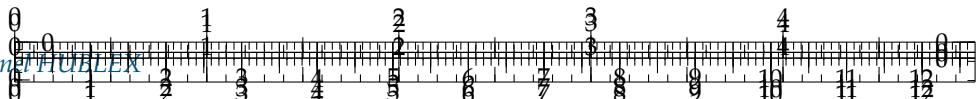
Les liaisons pivot sont supposées parfaites (pas de frottement).

Les couples de freinage maxi  $M_{f2}$  et  $M_{f3}$  des freins associés aux moteurs  $M_2$  et  $M_3$  sont de 5 mN sur l'arbre moteur. On leur adjoint en série un réducteur de rapport 1/200.

**Question 1** Réaliser le graphe de structure du mécanisme.

#### Correction





**Question 2** Déterminer les actions de la barre 8 sur le poignet 4 et du bras 3 sur le poignet 4.

**Correction**

**Question 3** En isolant l'ensemble 3 et 4 et en considérant les informations fournies dans le tableau suivant, déterminer l'expression du moment  $M_{f_3}$  correspondant à l'action du frein sur la pièce 3 en  $O_3$ .

**Correction**

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D...

Le dispositif de freinage ne permet qu'un couple maxi de 5 mN sur l'axe moteur.

**Question 4** Quel est alors le couple de freinage disponible en sortie du réducteur ?

**Correction**

**Question 5** Le maintien du freinage est-il assuré ?

**Correction**

On veut alors vérifier que le dispositif de freinage du moteur  $M_2$  convient.

**Question 6** En isolant la pièce 7, déterminer l'action de la barre 6 sur la pièce 7.

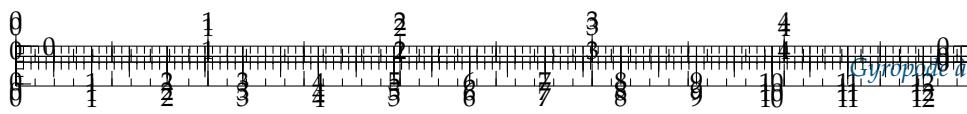
**Correction**

**Question 7** En considérant l'ensemble 2, 3, 4, 7, 8, déterminer l'expression du moment  $M_{f_2}$  correspondant à l'action du frein sur la pièce 2 en  $O_2$ . Calculer  $M_{f_2}$ .

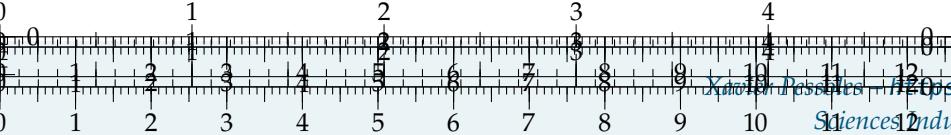
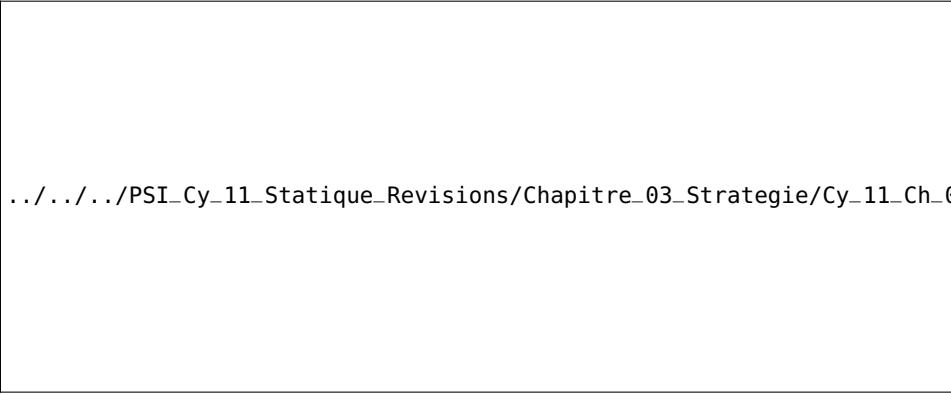
**Correction**

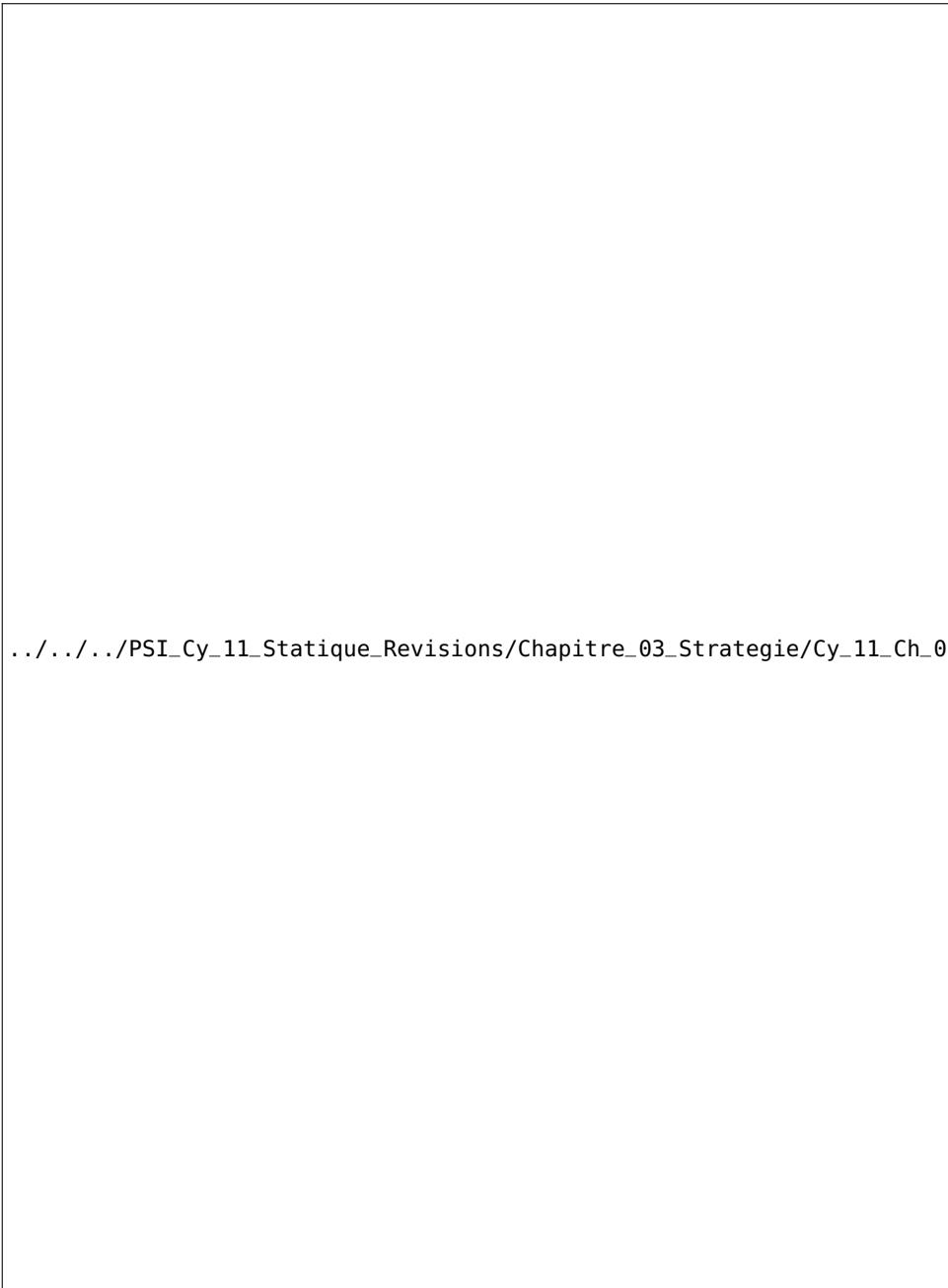
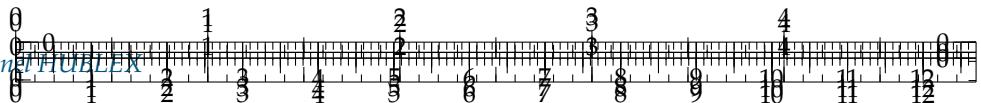
**Question 8** Le dispositif de freinage étant identique à celui de l'axe 3, le maintien du freinage est-il assuré ?





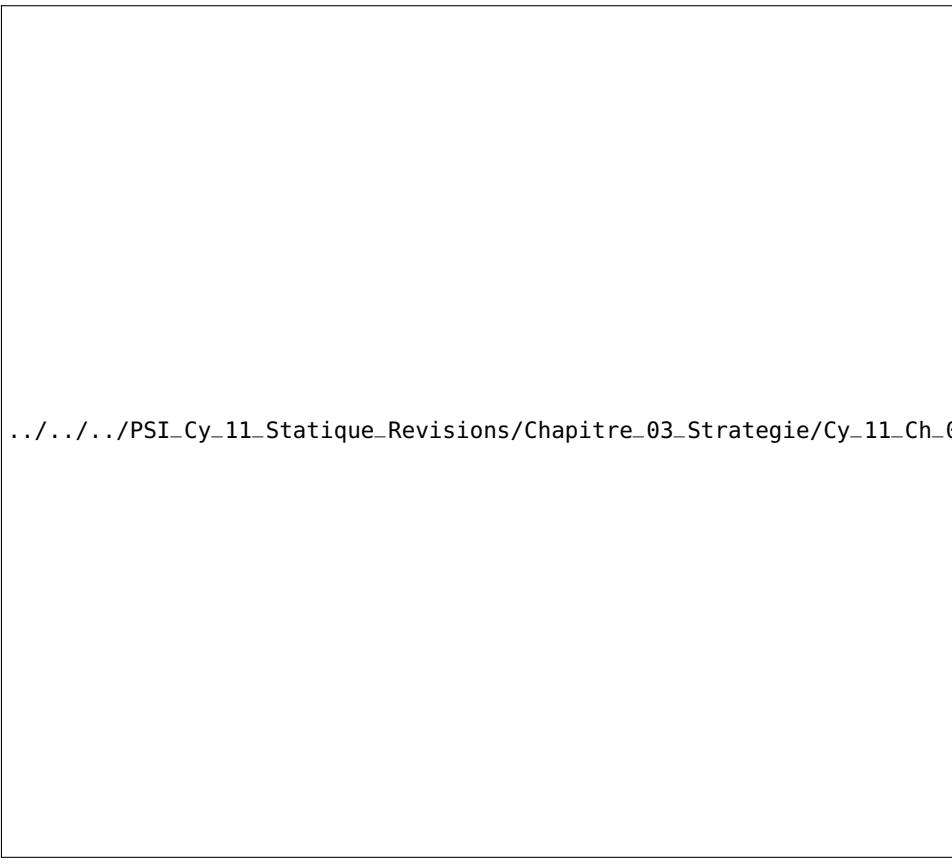
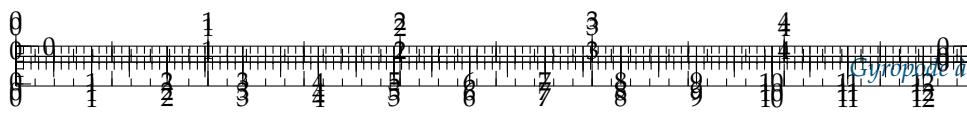
## Correction



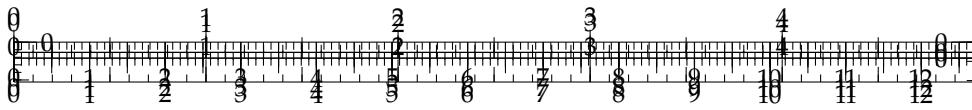


../../../../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D









## Application 4

### Pilote automatique de voilier – Sujet

D'après Florestan MATHURIN.

Le safran d'un voilier lui permet de se diriger. Dans le cas du pilote hydraulique du laboratoire, l'angle du safran est asservi afin de pouvoir maintenir un cap, en tenant compte des aléas extérieurs (courants marins, vents violents...). Le safran est actionné par un vérin hydraulique, la pièce 2 étant relié à la tige du vérin et la pièce 3 constituant le corps du vérin. La pièce 1 représente le safran sur lequel agit la pression de l'eau  $p$ , perpendiculairement au plan du safran.

L'objectif de l'étude est de calculer les efforts dans les liaisons dans le but ultérieur de dimensionner le vérin hydraulique et les éléments mécaniques assurant les liaisons (éléments roulants ou coussinets).

On donne :

- $\overrightarrow{A_1B} = h \vec{y}$
- $\overrightarrow{CB} = \lambda \vec{x}$

**Question 1** Tracer le graphe de structure associé au système.

NB : il serait possible d'écrire la loi Entrée – Sortie liant la vitesse de déploiement du vérin à la vitesse de rotation du safran.

**Question 2** Sur le graphe d'architecture du système indiquer par des flèches les actions mécaniques agissant sur chacune des pièces.

Par la suite, on négligera l'action de la pesanteur sur les pièces 2 et 3.

**Question 3** Déterminer le torseur d'action mécanique de l'eau sur le gouvernail au point  $A_2$ . On considérera que  $\overrightarrow{OA_2} = \vec{0}$ . On négligera l'épaisseur du safran.

**Question 4** Déterminer l'effort à délivrer par le vérin pour supporter la pression de l'eau sur le safran.

**Question 5** Déterminer alors la pression à délivrer par le vérin en fonction d'une section  $S$ .

B2-14

C1-05

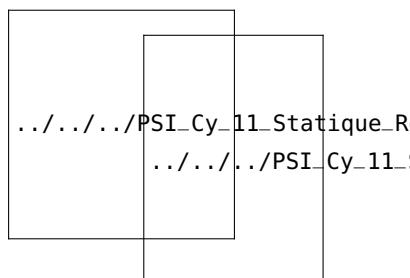
C2-07

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static

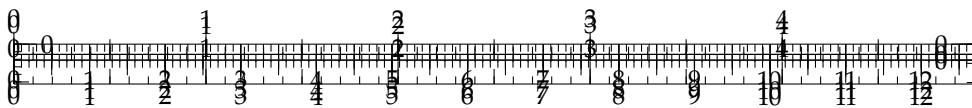
FIGURE 11.9 – Safrans... du SAFRAN  
(Skipper Marc Guillemot)

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static

FIGURE 11.10 – Schéma d'architecture







## Application 4

### Pilote automatique de voilier – Corrigé

D'après Florestan MATHURIN.

Le safran d'un voilier lui permet de se diriger. Dans le cas du pilote hydraulique du laboratoire, l'angle du safran est asservi afin de pouvoir maintenir un cap, en tenant compte des aléas extérieurs (courants marins, vents violents...). Le safran est actionné par un vérin hydraulique, la pièce 2 étant relié à la tige du vérin et la pièce 3 constituant le corps du vérin. La pièce 1 représente le safran sur lequel agit la pression de l'eau  $p$ , perpendiculairement au plan du safran.

L'objectif de l'étude est de calculer les efforts dans les liaisons dans le but ultérieur de dimensionner le vérin hydraulique et les éléments mécaniques assurant les liaisons (éléments roulants ou coussinets).

On donne :

- $\overrightarrow{A_1B} = h \vec{y}$
- $\overrightarrow{CB} = \lambda \vec{x}$

**Question 1** Tracer le graphe de structure associé au système.

NB : il serait possible d'écrire la loi Entrée – Sortie liant la vitesse de déploiement du vérin à la vitesse de rotation du safran.

**Question 2** Sur le graphe d'architecture du système indiquer par des flèches les actions mécaniques agissant sur chacune des pièces.

Par la suite, on négligera l'action de la pesanteur sur les pièces 2 et 3.

**Question 3** Déterminer le torseur d'action mécanique de l'eau sur le gouvernail au point  $A_2$ . On considérera que  $\overrightarrow{OA_2} = \vec{0}$ . On négligera l'épaisseur du safran.

**Question 4** Déterminer l'effort à délivrer par le vérin pour supporter la pression de l'eau sur le safran.

**Question 5** Déterminer alors la pression à délivrer par le vérin en fonction d'une section  $S$ .

B2-14

C1-05

C2-07

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statiq

**FIGURE 11.11** – Safrans... du SAFRAN  
(Skipper Marc Guillemot)

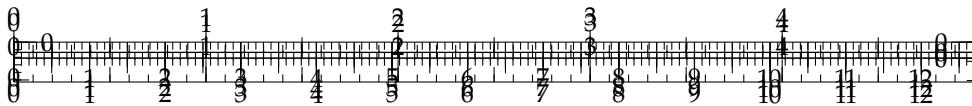
.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statiq

**FIGURE 11.12** – Schéma d'architecture

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_







# TD 1 :

## Modélisation d'un hayon de coffre électrique – Su-jet

Concours Centrale Supélec TSI 2013.

### Mise en situation

Le PCS (Power Closure System), conçu par Valéo, est un système d'ouverture et de fermeture automatique de hayon de coffre automobile. Le système étant symétrique, les deux vérins sont ramenées dans le plan d'évolution de la porte de coffre et leur action mécanique s'exerçant sur la porte de coffre est supposée identique.

On donne un diagramme d'exigence partiel du système étudié.

#### Objectif

- ▶ Déterminer les caractéristiques du vérin répondant au cahier des charges : longueur du vérin en position coffre ouvert et coffre fermé, course du vérin, raideur du ressort équipant le vérin.
- ▶ Déterminer le couple moteur maximal nécessaire pour le maintien en position du hayon.
- ▶ Déterminer le courant de pincement afin que l'effort de pincement soit inférieure à 40 N pendant 10 ms.

Le repère  $(B; \vec{x}_t, \vec{y}_t, \vec{z}_0)$  est lié à la Terre. L'accélération de la pesanteur s'écrit  $\vec{g} = -g\vec{y}_t$  avec  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . La structure du véhicule et la porte de coffre sont en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_0)$ .

Le repère  $(B; \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_0)$  est lié à la porte de coffre  $S_1$  de masse  $M = 30 \text{ kg}$ . Le repère  $(B; \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_0)$  est lié au corps du vérin. La sortie de tige par rapport au corps du vérin  $S_3$  se fait dans la direction du vecteur  $\vec{x}_v$ . Les liaisons entre le corps du vérin  $S_3$  et le bâti  $S_0$  ainsi qu'entre la tige du vérin  $S_2$  et la porte de coffre  $S_1$  sont des liaisons rotules de centres respectifs  $A$  et  $C$ . Le point  $D$  représente l'extrémité de la porte du coffre. La hauteur du point  $D$  par rapport au sol suivant la verticale est de 0,7 m en position coffre fermé et de 1,8 m en position coffre ouvert.

### Caractéristiques géométriques du vérin

Le centre d'inertie du coffre est situé en  $G$  tel que  $\vec{BG} = \lambda \vec{x}_p$  avec  $\lambda = 0,6 \text{ m}$ .



Concours Centrale Supélec TSI 2013.

B2-14

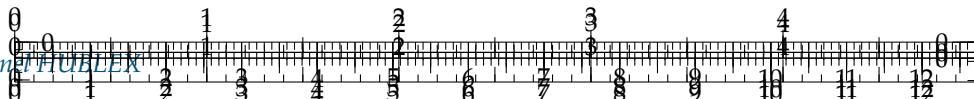
C1-05

C2-07

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi



$\vec{AB} = -a\vec{x}_0 + b\vec{y}_0$ ,  $\vec{AC} = L\vec{x}_v$ ,  $\vec{BC} = c\vec{x}_p$ ,  $\vec{BD} = d\vec{x}_p$  avec  $a = 0,55 \text{ m}$ ,  $b = 0,14 \text{ m}$ ,  $c = 0,14 \text{ m}$  et  $d = 1 \text{ m}$ . L'angle formé entre  $\vec{x}_0$  et l'horizontale  $\vec{x}_t$  est  $\theta_0 = 42^\circ$ .

**Question 1** Déterminer l'angle d'ouverture maximal.

**Question 2** Déterminer la longueur du vérin  $L$  en fonction de l'angle d'ouverture du coffre  $\theta$ .

On donne la courbe donnant l'évolution de la course du vérin en fonction de l'ouverture du hayon.

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_01\_Hayon/images/cor\_02.png

**Question 3** Déterminer les valeurs extrêmes de  $L$ , ainsi que la course du vérin.

### Dimensionnement des caractéristiques du ressort

Les vérins utilisés sont constitués d'un moteur à courant continu, d'un réducteur à engrenage, d'une vis à billes et d'un ressort. Ce dernier permet d'assurer l'équilibre de la porte de coffre en cas de panne des vérins électriques.

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_01\_Hayon/images/fig\_03.png

On suppose dans un premier temps que le coffre est à l'équilibre.

**Question 4** Déterminer l'effort  $F$  exercé par chacun des vérins sur la porte de coffre en fonction de  $\theta$ ,  $\alpha$  et des constantes du problème.

En exploitant les équations obtenues à partir de l'écriture de la fermeture géométrique obtenue précédemment, on montre que la relation entre  $\theta$  et  $\alpha$  s'écrit :  $\tan \alpha = \frac{b + c \sin \theta}{-a + c \cos \theta}$ .

On déduit de la question précédente le tracé de l'évolution de l'effort  $F$  nécessaire au maintien en équilibre du coffre en fonction de la longueur  $L$  du vérin.

On choisit d'utiliser un ressort précontraint au sein du vérin de manière à assister l'ouverture du coffre et à assurer l'équilibre du coffre sur une plage de fonctionnement maximal. On estime que les forces de frottement maximales au sein du vérin (essentiellement dues à la friction dans la vis) sont de l'ordre de  $F_{\text{frot}} = 100 \text{ N}$ .

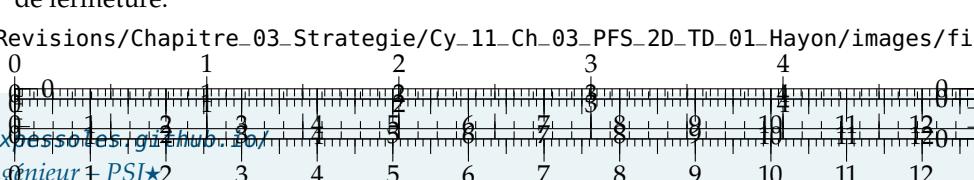
La figure précédente représente la force que doit exercer le vérin sur la porte de coffre pour assurer l'équilibre de cette dernière en fonction de la longueur du vérin. Les courbes en pointillés représentent la force du vérin  $\pm 100 \text{ N}$ .

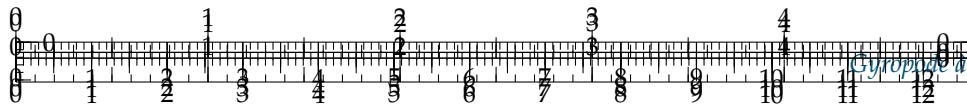
**Question 5** Déterminer la raideur  $k$  du ressort et sa longueur à vide  $L_0$  de manière à obtenir une situation d'équilibre sur la plus grande plage de fonctionnement. Préciser votre démarche.

La figure suivante représente l'évolution du couple moteur dans un vérin lors des phases d'ouverture et de fermeture du coffre.

**Question 6** Déterminer le couple moteur maximal en phase d'ouverture puis en phase de fermeture.

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_01\_Hayon/images/fig\_04.png





## Réglage de la fonction sécurité des personnes

Pour limiter le risque d'accident lié au pincement d'un utilisateur, il est nécessaire de limiter le couple du moteur à courant continu durant la phase de fermeture du hayon.

On envisage la présence d'un obstacle empêchant la fermeture du coffre. On modélise l'action de l'obstacle sur la porte de coffre par un glisseur s'appliquant en  $D$  et s'exprimant  $\overrightarrow{F}_{\text{pinc}} = F_{\text{pinc}} \vec{y}_p$ .

On cherche à déterminer l'accroissement de couple moteur en cas de présence d'obstacle. On suppose ainsi que la porte de coffre est en équilibre sous l'effet du poids et de l'action des vérins. On ajoute ainsi l'effort de pincement  $F_{\text{pinc}}$  en  $D$  et on cherche l'accroissement d'effort  $\Delta F \vec{x}_v$  qu'exercent chacun des vérins en  $C$  sur la porte en la supposant en équilibre.

On donne la relation entre le couple moteur et la force fournie par le vérin en régime quasi-statique :  $C_m = \rho F$  avec  $\rho = 7,89 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

**Question 7** Déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de  $\Delta F$  l'accroissement de la force qu'exerce chacun des vérins sur la porte de hayon.

La constante de couple du moteur est donnée par  $K_t = 9,5 \times 10^{-3} \text{ Nm A}^{-1}$ .

**Question 8** En déduire la valeur numérique de l'accroissement  $\Delta C_m$  de couple moteur en fonction de la présence d'un obstacle. Déterminer l'intensité maximale du courant dans le moteur lors d'un pincement.

## Synthèse

**Question 9** Réaliser un poster permettant de synthétiser comment les caractéristiques des composants ont été déterminés.

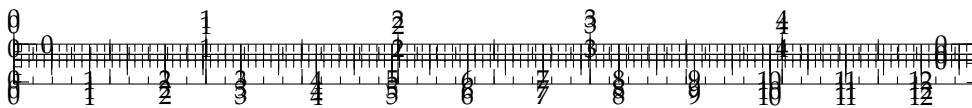
### Éléments de correction

1. Angle d'ouverture :  $67,5^\circ$ .
2.  $L^2 = (-a + c \cos \theta)^2 + (b + c \sin \theta)^2$ .
3. Course de 13,2 cm.
4.  $F_v = \frac{\lambda M g \cos \theta}{c \sin(\alpha - \theta)} (F_v/2)$ .
5.  $k = 1667 \text{ N m}^{-1}$ , écrasement de 300 mm.
6. .
7.  $\Delta F = \pm 443 \text{ N}$ .
8.  $I_{\max} = 3,95 \text{ A}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi







## TD 1 :

# Modélisation d'un hayon de coffre électrique – Corrigé

Concours Centrale Supélec TSI 2013.

B2-14

C1-05

C2-07

### Mise en situation

#### Caractéristiques géométriques du vérin

Question 1 Déterminer l'angle d'ouverture maximal.

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi

#### Correction

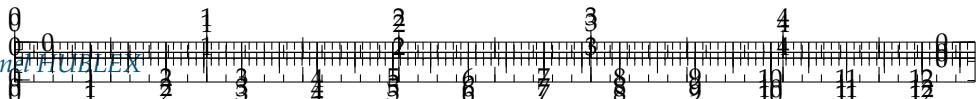


.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Stratégie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_01\_Hayon/images/cor\_01.png

D'une part,  $x = d \sin 42 \approx 0,67 \text{ m}$ . D'autre part,  $\sin \alpha = \frac{1,8 - 0,7 - x}{d} = 0,43$ . Au final  $\alpha = 25,5^\circ$ .

L'angle d'ouverture est donc de  $67,5^\circ$ .





**Question 2** Déterminer la longueur du vérin  $L$  en fonction de l'angle d'ouverture du coffre  $\theta$ .

#### Correction

La longueur du vérin est donnée par la valeur de  $L$ . En réalisant la fermeture géométrique, on a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow -a\vec{x}_0 + b\vec{y}_0 + c\vec{x}_p - L\vec{x}_v = \overrightarrow{0}$ .

En projetant l'équation vectorielle dans  $\mathcal{R}_0$ , on a :

$$\begin{cases} -a + c \cos \theta - L \cos \alpha = 0 \\ b + c \sin \theta - L \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

On a donc  $L^2 = (-a + c \cos \theta)^2 + (b + c \sin \theta)^2$ .

**Question 3** Déterminer les valeurs extrêmes de  $L$ , ainsi que la course du vérin.

#### Correction

La longueur du vérin varie de 43,3 cm à 56,5 cm soit une course de 13,2 cm.

## Dimensionnement des caractéristiques du ressort

**Question 4** Déterminer l'effort  $F$  exercé par chacun des vérins sur la porte de coffre en fonction de  $\theta$ ,  $\alpha$  et des constantes du problème.

#### Correction

On isole le corps et le piston du vérin. L'ensemble est soumis à deux actions mécaniques (liaisons sphériques en  $A$  et  $C$ ). D'après le PFS, cette action mécanique est donc suivant Ces deux actions mécaniques sont donc de même direction (le vecteur  $\vec{x}_v$ ), de même norme et de sens opposé.

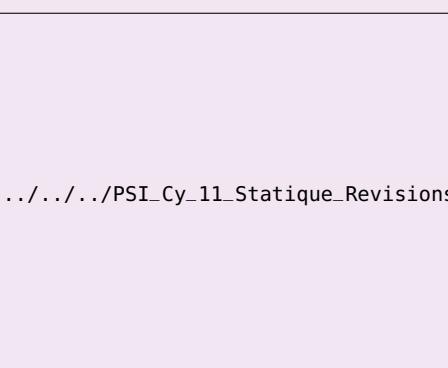
On isole le hayon  $h$ .

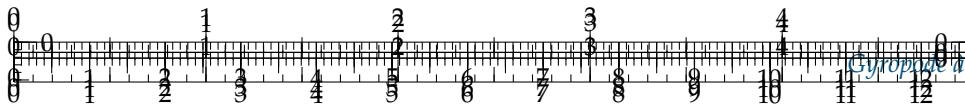
On réalise le BAME :

- ▶ action mécanique du vérin  $v$  :  $\{\mathcal{T}(v \rightarrow h)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_v \vec{x}_v \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_C$  ;
- ▶ action de la pesanteur :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow h)\} = \left\{ \begin{array}{l} -Mg \vec{y}_t \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$  ;
- ▶ action de la pivot en  $B$  :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow h)\}$ .

On cherche à connaître l'action du vérin en fonction des actions de pesanteur. On réalise donc le théorème du moment statique en  $B$  en projection sur  $\vec{z}_0$  :

$$(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{BC} \wedge F_v \vec{x}_v + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{BG} \wedge -Mg \vec{y}_t) \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{0} \Rightarrow (c \vec{x}_p \wedge F_v \vec{x}_v + \lambda \vec{x}_p \wedge -Mg \vec{y}_t) \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{0}$$





$$\Leftrightarrow cF_v \sin(\alpha - \theta) - \lambda M g \cos \theta = 0$$

$$F_v = \frac{\lambda M g \cos \theta}{c \sin(\alpha - \theta)}.$$

Dans le cas où on considère les deux vérins, on aura  $F_1 = F_2 = F_v/2$ .

**Question 5** Déterminer la raideur  $k$  du ressort et sa longueur à vide  $L_0$  de manière à obtenir une situation d'équilibre sur la plus grande plage de fonctionnement. Préciser votre démarche.

#### Correction

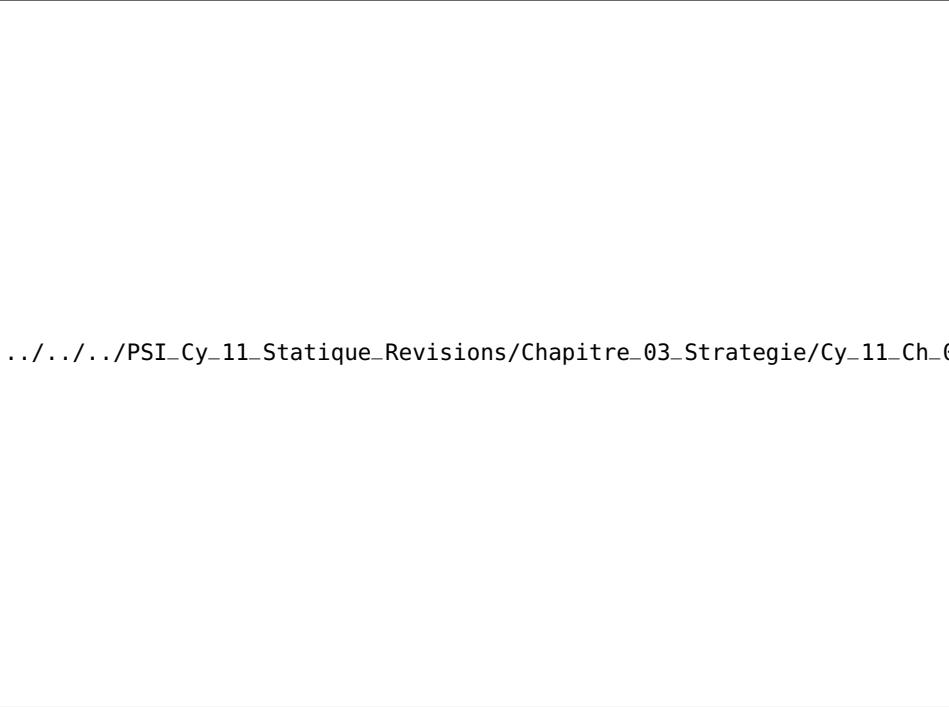
.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_01\_Hayon/images/cor\_04.png

Si on isole la tige du vérin :

- en phase d'ouverture, le TRS s'exprime par :  $F_m + F_r - F_f - F_h = 0 \Leftrightarrow F_r = F_f + F_h - F_m$  ;
- en phase de fermeture, le TRS s'exprime par :  $-F_m + F_r + F_f - F_h = 0 \Leftrightarrow F_r = -F_f + F_h + F_m$  ;

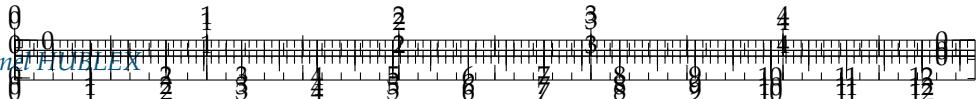
La plage de fonctionnement la plus large est située entre 0,5 m et 0,56 m. La pente est la même pour les 3 courbes. Elle est d'environ  $k = \frac{100}{0,06} \simeq 1667 \text{ N m}^{-1}$ .

En phase de fermeture, lorsque le vérin est déployé, la précharge permettant d'assurer l'équilibre est d'environ 500 N. L'écrasement est donc de 300 mm environ.



**Question 6** Déterminer le couple moteur maximal en phase d'ouverture puis en phase de fermeture.



**Correction**

En phase d'ouverture, le couple maximal est de  $4 \times 10^{-3}$  Nm. En phase de fermeture il est de  $3,5 \times 10^{-3}$  Nm.

**Réglage de la fonction sécurité des personnes**

**Question 7** Déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de  $\Delta F$  l'accroissement de la force qu'exerce chacun des vérins sur la porte de hayon.

**Correction**

On isole le hayon et on réalise le BAME. Le théorème du moment statique en  $B$  en projection sur  $\vec{z}_0$  :

$$\left( \vec{0} + \vec{BC} \wedge -2\Delta F \vec{x}_v + \vec{0} + \vec{BD} \wedge F_{\text{pinc}} \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = \vec{0} \Rightarrow \left( c \vec{x}_0 \wedge -2\Delta F \vec{x}_v + d \vec{x}_0 \wedge F_{\text{pinc}} \vec{y}_0 \right) \cdot$$

$$\vec{z}_0 = \vec{0} \Rightarrow -c2\Delta F \sin \alpha + dF_{\text{pinc}} = 0 \Rightarrow \Delta F = \frac{dF_{\text{pinc}}}{c2 \sin \alpha}.$$

$$AN : \text{Pour } \theta = 0, \tan \alpha = \frac{b}{-a + c} = \frac{0,14}{-0,55 + 0,14} = -0,34 \Rightarrow \alpha \approx -18,8^\circ. \Rightarrow \Delta F = \frac{40}{2 \cdot 0,14 \sin \alpha} = -443 \text{ N.}$$

La constante de couple du moteur est donnée par  $K_t = 9,5 \times 10^{-3}$  NmA $^{-1}$ .

**Question 8** En déduire la valeur numérique de l'accroissement  $\Delta C_m$  de couple moteur en fonction de la présence d'un obstacle. Déterminer l'intensité maximale du courant dans le moteur lors d'un pincement.

**Correction**

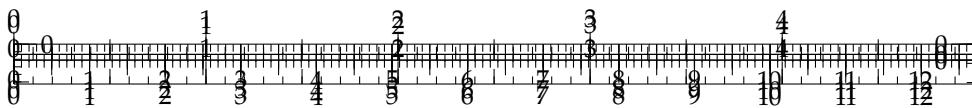
On a  $|\Delta C_m| = \rho |\Delta F|$  avec  $\rho = 7,89 \times 10^{-5}$  m. En conséquence :  $|\Delta C_m| = 443 \cdot 7,89 \cdot 10^{-5} = 35 \text{ mNm}$ .

$$\text{En fin de fermeture, } C_m = 2,5 \times 10^{-3} \text{ Nm. En conséquence } I_{\max} = \frac{C_{\max}}{K_t} = \frac{C_m + \Delta C_m}{K_t} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} + 35 \cdot 10^{-3}}{9,5 \cdot 10^{-3}} = 3,95 \text{ A.}$$

**Synthèse**

**Question 9** Réaliser un poster permettant de synthétiser comment les caractéristiques des composants ont été déterminées.





## TD 2 :

# Dépose de bagage automatique dans les aéroports (DBA) – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2013.

### Mise en situation

Le processus d'enregistrement des passagers dans les aéroports est en train de vivre une mutation en évoluant de la « banque d'enregistrement » classique vers une idée de « dépose bagages » automatisée. Cette évolution a été justifiée pour fluidifier le trafic passager notamment sur les destinations avec des fréquences très importantes, par exemple certains vols Paris-Province.

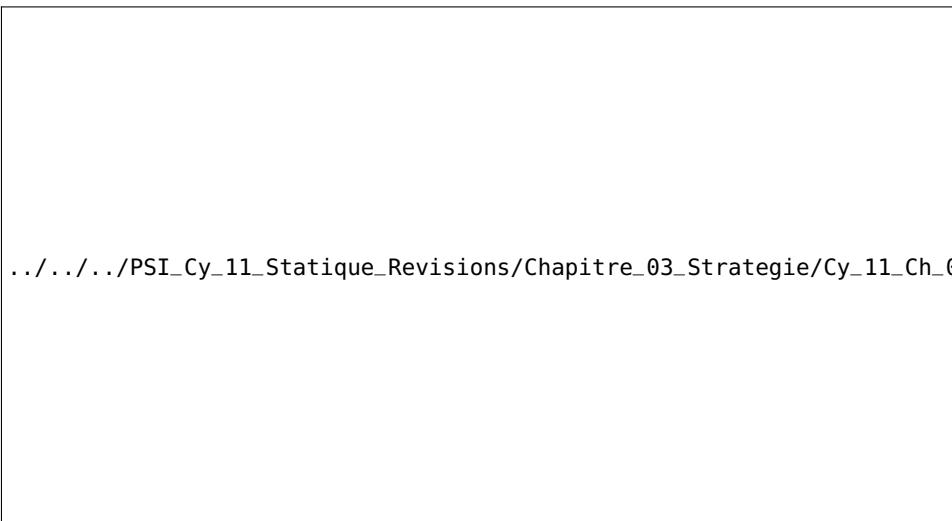
Le système DBA est constitué par un basculeur actionné par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone.

B2-14

C1-05

C2-07

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi

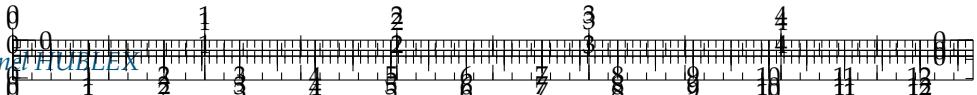


### Recherche de la vitesse de rotation maximale

#### Objectif

Le bagage et le chariot sont animés par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone triphasée avec un réducteur entraînant la manivelle. L'objectif est de déterminer la vitesse de rotation maximale de la machine asynchrone triphasée actionnant le basculeur en accord avec l'exigence 1.4 (le basculement du bagage doit se faire en 8 s).





Pour dimensionner correctement la machine asynchrone, la première étape est le calcul de la vitesse maximale de l'arbre moteur. On choisit comme loi de mouvement de rotation du moteur une loi en trapèze. On donne ainsi le profil de vitesse de rotation  $\omega_r$  de l'arbre de sortie du réducteur par rapport au bâti.

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statice

Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_02\_DBA/images/fig\_02.png

Le rapport de réduction entre l'arbre moteur de vitesse de rotation et l'arbre de sortie de réducteur est noté  $k = \frac{\omega_{mot}}{107,7}$ . Compte tenu du temps de basculement du bagage de 8 s, les valeurs des temps sont les suivantes :  $t_1 = 0,5$  s,  $t_2 = 2,5$  s,  $t_3 = 3$  s,  $t_4 = 5$  s,  $t_5 = 5,5$  s,  $t_6 = 7,5$  s,  $t_7 = 8$  s. L'arbre de sortie du motoréducteur doit faire un demi-tour entre 0 et  $t_3$ , puis un demi-tour entre  $t_4$  et  $t_7$ .

**Question 1** Déterminer  $\omega_{max}$  en fonction des différents  $t_i$ . Faire l'application numérique.

**Question 2** En déduire la vitesse de rotation de l'arbre moteur maximale  $\omega_{mot\ max}$ . Faire l'application numérique et donner le résultat en  $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ .

## Recherche du couple moteur maximal en vue du dimensionnement de la machine asynchrone

### Objectif

La seconde étape du dimensionnement consiste à rechercher le couple moteur maximal en accord avec l'exigence 1.2 (la masse du bagage pouvant être manœuvré par le système est de 50 kg).

Pour calculer le couple moteur maximal, on se place dans un cas quasi-statique et on néglige tous les effets dynamiques. Compte tenu de la construction du mécanisme (non linéaire), le couple moteur est variable et on le calcule dans une position particulière correspondant au couple maximal.

On note :

- $S_0$  le bâti;
- $S_1$  l'ensemble constitué par le chariot, le bagage et les galets, dont le centre de gravité est noté  $G$  et la masse est notée  $m = 80$  kg;
- $S_2$  la bielle  $DB$  de direction  $\vec{x}_2$ ;
- $S_3$  l'arbre de sortie de réducteur et la manivelle  $\overrightarrow{ED} = R\vec{x}_3$  avec  $R = 86$  mm.

Le mouvement est considéré comme plan. On néglige toutes les masses sauf celle de l'ensemble  $S_1$ . Toutes les liaisons sont parfaites. Le référentiel lié au solide  $S_0$  est considéré galiléen. On note l'accélération de la pesanteur  $\vec{g} = -g\vec{y}_0$  avec  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .

Les liaisons entre  $S_0$  et  $S_1$  sont des liaisons sphère-plan de normales  $(A_1, \vec{x}_{11})$  et  $(A_2, \vec{x}_{12})$ . On note  $I$  le point d'intersection des normales  $(A_1, \vec{x}_{11})$  et  $(A_2, \vec{x}_{12})$ . On note  $\overrightarrow{IB} = L_2\vec{x}_{12}$  et  $\overrightarrow{IG} = x_G\vec{x}_0 + y_G\vec{y}_0$ .

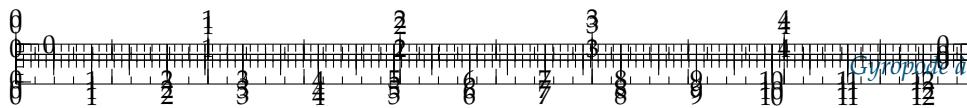
On note les angles  $\alpha_i$  formés entre les vecteurs  $\vec{x}_0$  et  $\vec{x}_i$  :  $\alpha_i = (\vec{x}_0, \vec{x}_i)$  avec  $i \in \{2; 3; 11; 12\}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statice

Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_02\_DBA/images/fig\_03.png

La liaison entre  $S_2$  et  $S_3$  est une liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z}_0)$ .





La liaison entre  $S_0$  et  $S_3$  est une liaison pivot d'axe  $(E_s, \vec{z}_0)$ .

On note  $F_B$  la norme de la résultante du torseur  $\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\}$ .

**Question 3** On note  $C_{\text{red}}$  le couple exercé par l'arbre de sortie de réducteur sur la manivelle  $S_3$ . Montrer que  $C_{\text{red}} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$ .

Dans la configuration choisie, on a  $x_G = 506 \text{ mm}$ ,  $L_2 = 140 \text{ mm}$ ,  $\alpha_3 = 91^\circ$ ,  $\alpha_{12} = 108^\circ$  et  $\alpha_2 = 3^\circ$  (on montre par une simulation numérique que cette position conduit au couple maximal).

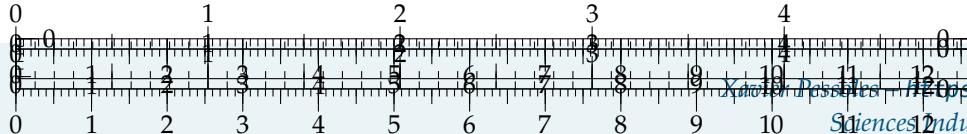
**Question 4** En déduire la valeur numérique  $C_m$  du couple qu'exerce l'arbre de la machine asynchrone sur l'arbre d'entrée du réducteur (on supposera le rendement du réducteur égal à 1).

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi

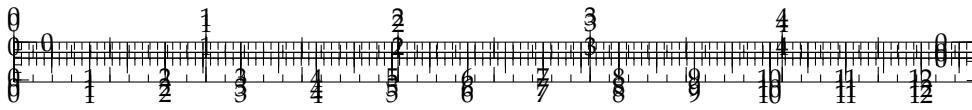
.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_R

#### Éléments de correction

1.  $1,26 \text{ rad s}^{-1}$ .
2.  $1292 \text{ tr min}^{-1}$ .
3. Oui.
4.  $I$ .
5.  $\left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$ .
6.  $F_B = \frac{mgx_G}{L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_2)}$ .
7.  $C_{\text{red}} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$ .
8. 252 Nm.
9. 2,34 Nm.







## TD 2 :

# Dépose de bagage automatique dans les aéroports (DBA) – Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2013.

B2-14

C1-05

C2-07

## Mise en situation

### Recherche de la vitesse de rotation maximale

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi

#### Objectif

Le bagage et le chariot sont animés par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone triphasée avec un réducteur entraînant la manivelle. L'objectif est de déterminer la vitesse de rotation maximale de la machine asynchrone triphasée actionnant le basculeur en accord avec l'exigence 1.4 (le basculement du bagage doit se faire en 8 s).

**Question 1** Déterminer  $\omega_{\max}$  en fonction des différents  $t_i$ . Faire l'application numérique.

#### Correction

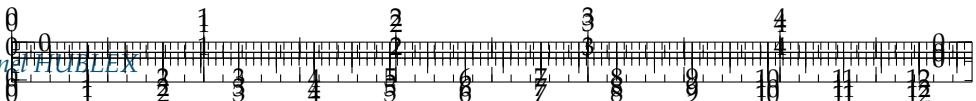
En calculant l'aire sous la courbe (l'intégrale de la vitesse est la position) et sachant que le réducteur doit faire un demi-tour ( $\pi$  rad), on a :  $\pi = \frac{1}{2}t_1\omega_{\max} + \frac{1}{2}(t_3 - t_2)\omega_{\max} + (t_2 - t_1)\omega_{\max} = \left(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}(t_3 - t_2) + (t_2 - t_1)\right)\omega_{\max}$ . On a donc  $\omega_{\max} = \frac{\pi}{-\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3} = \frac{\pi}{-\frac{1}{2}0,5 + \frac{1}{2}2,5 + \frac{1}{2}3} = \frac{\pi}{2,5} = 1,26 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 2** En déduire la vitesse de rotation de l'arbre moteur maximale  $\omega_{\text{mot max}}$ . Faire l'application numérique et donner le résultat en  $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ .

#### Correction

$$\omega_{\text{mot max}} = 107,7 \times 1,26 = 135 \text{ rad s}^{-1} = 1292 \text{ tr min}^{-1}$$





## Recherche du couple moteur maximal en vue du dimensionnement de la machine asynchrone

### Objectif

La seconde étape du dimensionnement consiste à rechercher le couple moteur maximal en accord avec l'exigence 1.2 (la masse du bagage pouvant être manœuvré par le système est de 50 kg).

### Correction

$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1 = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{x}_{11} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{A_1}$  et  $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2 = \left\{ \begin{array}{c} F_2 \vec{x}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{A_2}$ . Ces torseurs sont des glisseurs (il existe un point où le moment est nul, ici les droites  $(A_i, I)$ ).

### Correction

On a  $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1 + \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2 = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{x}_{11} + F_2 \vec{x}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$ . Ce torseur est un glisseur dont le point  $I$  appartient au support.

### Correction

On prendra  $F_B$  comme valeur algébrique et pas comme norme de la résultante. On isole la bielle  $S_2$ , elle est soumise à deux glisseurs. D'après le PFS, ces glisseurs sont de même norme, de même direction (la droite  $(DB)$ ) et de sens opposés. On a  $\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$ .

### Correction

On isole  $S_1$ .

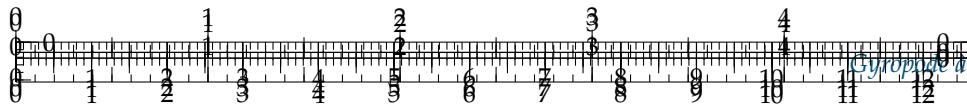
On réalise le BAME :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B \\ &= \left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{x}_2 \\ L_2 F_B \sin(\alpha_{12} - \alpha_2) \vec{z} \end{array} \right\}_I (\vec{IB} \wedge F_B \vec{x}_2 = L_2 \vec{x}_{12} \wedge F_B \vec{x}_2 = L_2 F_B \sin(\alpha_{12} - \alpha_2) \vec{z}); \\ \blacktriangleright \quad & \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{x}_{11} + F_2 \vec{x}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I; \\ \blacktriangleright \quad & \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -mg \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G \\ &= \left\{ \begin{array}{c} -mg \vec{y}_0 \\ -mg x_G \vec{z}_0 \end{array} \right\}_I (\vec{IG} \wedge -mg \vec{y}_0 = (x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0) \wedge -mg \vec{y}_0 = -mg x_G \vec{z}_0). \end{aligned}$$

En appliquant le TMS en  $I$  en projection sur  $\vec{z}_0$ , on a :  $L_2 F_B \sin(\alpha_{12} - \alpha_2) - mg x_G = 0$  soit  $F_B = \frac{mg x_G}{L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_2)}$ .

**Question 3** On note  $C_{\text{red}}$  le couple exercé par l'arbre de sortie de réducteur sur la manivelle  $S_3$ . Montrer que  $C_{\text{red}} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$ .





### Correction

En isolant 2, on montre que  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}$ .

On isole 3.

On fait le BAME :

- $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_B \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$  et on a  $\overline{\mathcal{M}(E, 2 \rightarrow 3)} = \overline{\mathcal{M}(D, 2 \rightarrow 3)} + \vec{ED} \wedge -F_B \vec{x}_2 = R \vec{x}_3 \wedge -F_B \vec{x}_2 = -RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2);$
- $\{\mathcal{T}(\text{rédu} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_{\text{red}} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_E;$
- $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3)\}$  avec  $\overline{\mathcal{M}(E, 0 \rightarrow 3)} \cdot \vec{z}_0 = 0$ .

On applique le TMS en  $E$  en projection sur  $\vec{z}_0 : C_{\text{red}} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$ .

Dans la configuration choisie, on a  $x_G = 506 \text{ mm}$ ,  $L_2 = 140 \text{ mm}$ ,  $\alpha_3 = 91^\circ$ ,  $\alpha_{12} = 108^\circ$  et  $\alpha_2 = 3^\circ$  (on montre par une simulation numérique que cette position conduit au couple maximal).

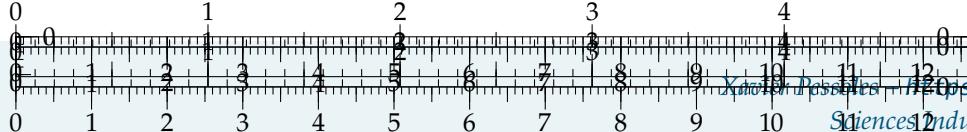
### Correction

$$\text{On a } C_{\text{red}} = RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = \frac{Rmgx_G \sin(\alpha_3 - \alpha_2)}{L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_2)} \simeq 252 \text{ Nm.}$$

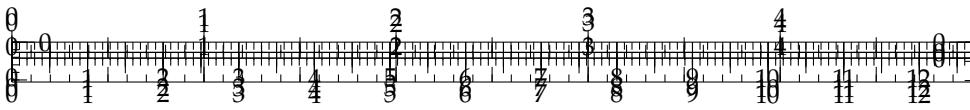
**Question 4** En déduire la valeur numérique  $C_m$  du couple qu'exerce l'arbre de la machine asynchrone sur l'arbre d'entrée du réducteur (on supposera le rendement du réducteur égal à 1).

### Correction

Le couple moteur est alors de 2,34 Nm.







## TD 3 : Interface maître et esclave d'un robot – Sujet

CCP PSI 2015.

**B2-14**

**C1-05**

**C2-07**

### Mise en situation

La téléopération consiste à mettre en relation deux manipulateurs appelés communément maître et esclave. Le manipulateur maître permet au chirurgien de donner sa consigne de déplacement à l'aide d'un levier de commande tandis que l'esclave l'exécute au contact de l'environnement (l'organe à opérer). Les deux sous-systèmes échangent des informations de déplacement et d'effort au travers d'un ou plusieurs canaux de communication. Un retour visuel est également mis en place en parallèle à ce dispositif.

### Modélisation de l'interface maître

Ce mécanisme est constitué de 4 barres reliées par des liaisons pivots.

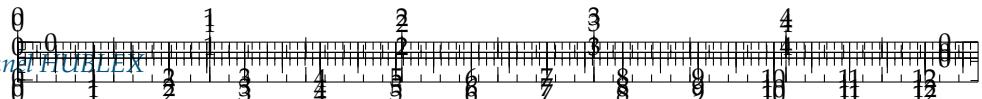
#### Objectif

Vérifier que l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) peut être satisfaite par le mécanisme de HOEKEN.

- Solide  $S_0$ , repère  $\mathcal{R}_0(A; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ,  $\overrightarrow{AB} = L_0 \vec{x}_0$  avec  $L_0 = 50$  mm.
- Solide  $S_1$ , repère  $\mathcal{R}_1(B; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ ,  $\overrightarrow{BC} = L_1 \vec{x}_1$  avec  $L_1 = 25$  mm,  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .
- Solide  $S_2$ , repère  $\mathcal{R}_2(A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ ,  $\overrightarrow{AD} = L_2 \vec{x}_2$  avec  $L_2 = 62,5$  mm,  $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ .
- Solide  $S_3$ , repère  $\mathcal{R}_3(C; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ ,  $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DC} = L_3 \vec{x}_3$  avec  $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$ .

- On notera  $\{\mathcal{T}(S_i \rightarrow S_j)\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{P, \mathcal{B}_0}$  l'expression l'expression au point  $P$ , en projection dans la base  $\mathcal{B}_0$ , du torseur de l'action mécanique exercée





par le solide  $S_i$  sur le solide  $S_j$ ; toutes les inconnues seront exprimées dans la base  $\mathcal{B}_0$ .

- ▶ L'action mécanique exercée par le moteur sur  $S_1$  sera modélisée par un couple  $C_m(t)\vec{z}_0$ .
- ▶ L'action mécanique exercée par l'opérateur sur  $S_3$  sera modélisée par une force  $F(t)\vec{x}_0$  appliquée au point  $E$ .
- ▶ L'accélération de la pesanteur sera négligée.
- ▶ Les inerties des solides en mouvement et les frottements dans les guidages seront négligés.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse du mécanisme (liaisons et efforts).

Cette relation n'étant pas linéaire, on propose d'analyser les résultats d'une simulation numérique en traçant le couple moteur/effort opérateur en fonction de l'abscisse du point  $E$

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_03\_Hoeken/images/fig\_03.png

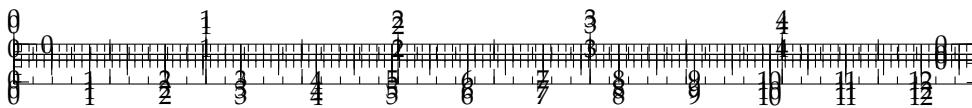
**Question 2** Retrouver ces graphes en utilisant Python. J'ai pas essayé, mais si eux ont réussi, pourquoi pas vous ? Il faut peut-être utiliser le premier devoir de vacances.

**Question 3** Déterminer, à partir de la figure précédente, sur quel intervalle de l'abscisse  $X_E$  l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) est satisfaite. (On ajoute que la course sur  $X_E$  doit être supérieure à 50 mm.)

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_03\_Hoeken/images/fig\_04.png

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_03\_Hoeken/images/Cy\_11





## TD 3 : Interface maître et esclave d'un robot – Corrigé

CCP PSI 2015.

B2-14

C1-05

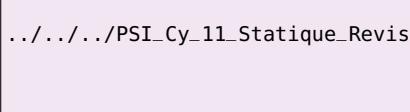
C2-07

### Mise en situation

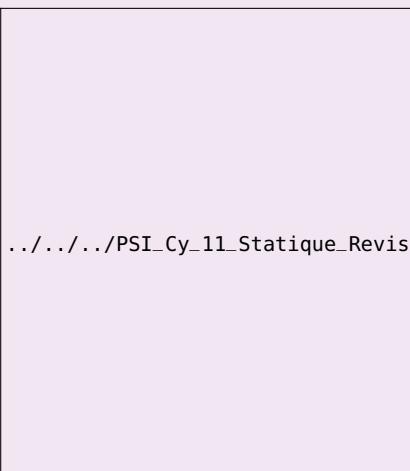
### Modélisation de l'interface maître

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse du mécanisme (liaisons et efforts).

Correction



.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_03\_Hoeken/images

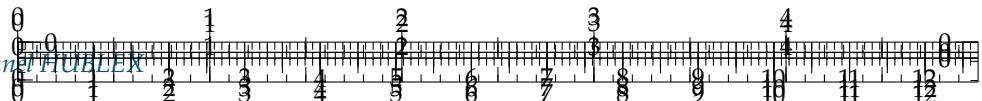


.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_03\_Hoeken/images

Cette relation n'étant pas linéaire, on propose d'analyser les résultats d'une simulation numérique en traçant le couple moteur/effort opérateur en fonction de l'abscisse du point E

**Question 2** Retrouver ces graphes en utilisant Python. J'ai pas essayé, mais si eux ont réussi, pourquoi pas vous ? Il faut peut-être utiliser le premier devoir de vacances.





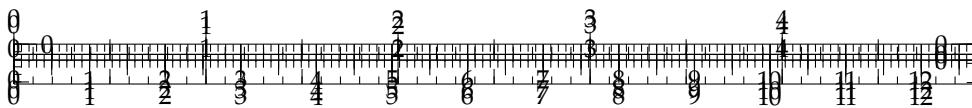
### Correction

**Question 3** Déterminer, à partir de la figure précédente, sur quel intervalle de l'abscisse  $X_E$  l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) est satisfaite. (On ajoute que la course sur  $X_E$  doit être supérieure à 50 mm.)

### Correction

Pour un rapport  $C_m/F$  de 33,25 mm, la fourchette de 1 % est comprise entre 32,9175 mm et 33,5825 mm. La course de  $X_E$  est donc de  $20 - (-36) = 56$  mm. L'exigence est vérifiée.





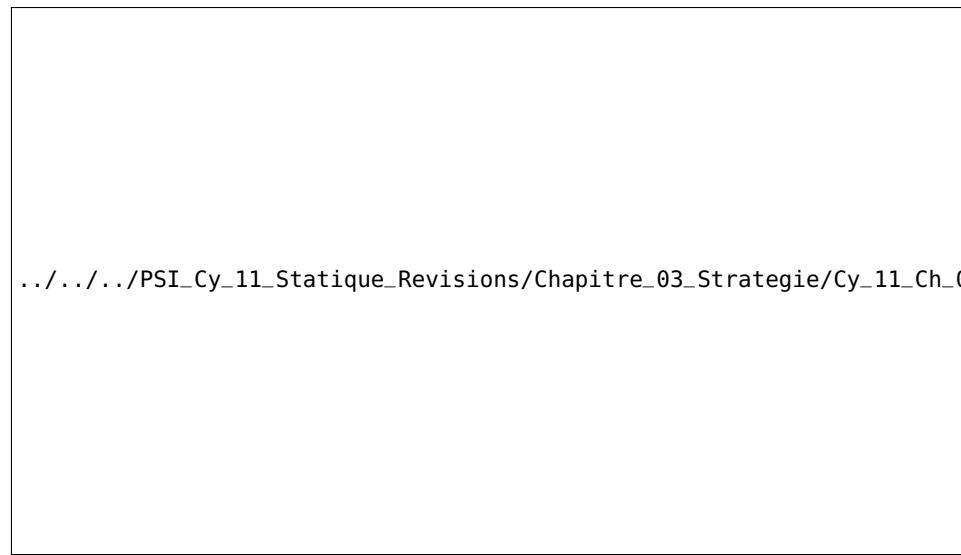
.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_04\_ChasseNeige/images/fig\_02.png

## TD 4 : Chasse neige – Sujet

D'après documents Mines-Telecom.

### Mise en situation

L'étrave de déneigement, objet de cette étude, est utilisée pour dégager les routes. Elle est composée de deux volets disposés en « V » qui permettent d'évacuer sur les côtés une épaisseur importante de neige. Les deux volets sont articulés de façon indépendante sur la pointe de l'étrave et ont une ouverture variable contrôlée par le conducteur à travers un vérin d'ouverture. En fin d'utilisation ou pour éviter des obstacles, elle est pourvue d'un système de relevage hydraulique.

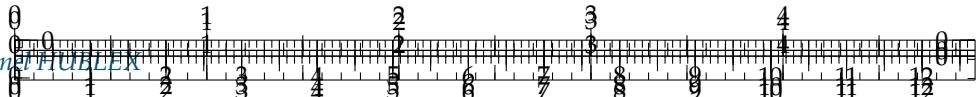


La pièce 7 est la lame de déneigement articulée par rapport au châssis 3. Elle est mise en mouvement par le vérin {10 ; 11}.

### Données et hypothèses

- $\gamma = (\vec{x}_3, \vec{x}_7) = (\vec{z}_3, \vec{z}_7)$  et  $\beta = (\vec{x}_3, \vec{x}_{11}) = (\vec{z}_3, \vec{z}_{11})$ ;
- $\vec{z}_{11} = \vec{z}_{10}$  et  $\vec{x}_{11} = \vec{x}_{10}$ ;
- $\vec{HJ} = h\vec{z}_7$  et  $\vec{HQ} = a\vec{x}_3 + b\vec{y}_3 + c\vec{z}_3$  et  $\vec{HG} = i\vec{z}_7$  et  $\vec{HM} = f\vec{x}_3 + g\vec{z}_3$ .
- Dans le cadre de cette étude,  $\beta = 37^\circ$  et  $\gamma = 16^\circ$ ,  $\vec{g} = -g\vec{y}_3$ ;
- liaisons parfaites (pas de jeu, pas de frottement);





- le poids de toutes les pièces est négligé, sauf celui de la pièce 7,  $m_7 = 850 \text{ kg}$  appliqué en  $G$ ;
- dimensions en mètres :  $h = 0,68$ ;  $a = -0,33$ ;  $b = 0,1$ ;  $c = 1,1$  et  $i = 0,5$ ;
- l'action de la neige sur le volet 7 est modélisée par un glisseur de moment nul en  $Q$  tel que :  $\{\mathcal{T}(\text{neige} \rightarrow 7)\} = \begin{Bmatrix} Q\vec{x}_7 \\ 0 \end{Bmatrix}_Q$  avec  $Q = 15\,000 \text{ N}$ ;
- le vérin d'ouverture choisi supporte une pression d'alimentation de 150 bars.

### Problème ouvert

**Question 1** Proposer et mettre en œuvre une démarche permettant de déterminer la section du vérin permettant de « chasser la neige ».

### Problème décomposé

**Question 2** Réaliser les figures planes associées au paramétrage du problème.

**Question 3** Tracer le graphe de liaisons.

**Question 4** Déterminer la direction  $\vec{u}$  de l'action mécanique  $\overrightarrow{R}(11 \rightarrow 7) = F\vec{u}$ .

**Question 5** En isolant 7, exprimer la relation liant  $F$ ,  $Q$  et les grandeurs géométriques.

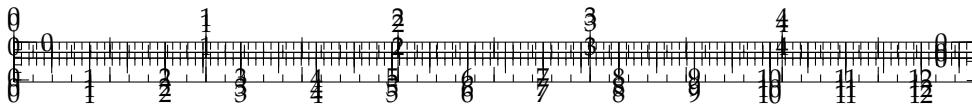
**Question 6** En déduire la section minimale  $S$ , du vérin permettant de chasser la neige.

.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_04\_ChasseNeige/images/

### Éléments de correction

$$S = -\frac{Q(a \sin \gamma + c \cos \gamma)}{ph \sin(\beta - \gamma)}.$$





.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_04\_ChasseNeige/images/fig\_02.png

## TD 4 : Chasse neige – Corrigé

D'après documents Mines-Telecom.

### Mise en situation

B2-14

### Problème ouvert

C1-05

C2-07

**Question 1** Proposer et mettre en œuvre une démarche permettant de déterminer la section du vérin permettant de « chasser la neige ».

### Problème décomposé

**Question 2** Réaliser les figures planes associées au paramétrage du problème.

**Question 3** Tracer le graphe de liaisons.

**Question 4** Déterminer la direction  $\vec{u}$  de l'action mécanique  $\overrightarrow{R(11 \rightarrow 7)} = F\vec{u}$ .

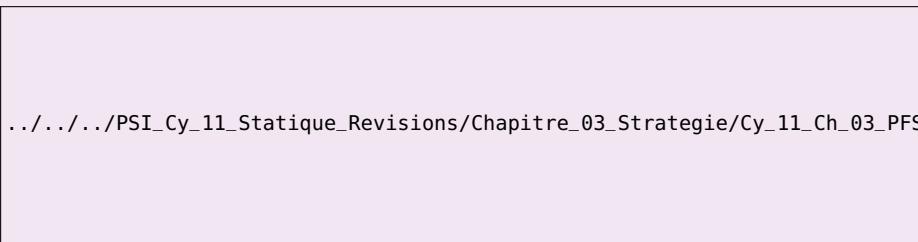
**Question 5** En isolant 7, exprimer la relation liant  $F$ ,  $Q$  et les grandeurs géométriques.

**Question 6** En déduire la section minimale  $S$ , du vérin permettant de chasser la neige.

### Correction

**Graphe de liaisons** On commence par faire les figures planes puis le graphe de liaisons.

- On cherche les solides ou les ensembles de solides soumis à 2 glisseurs . Le problème étant plan, les pivots dont l'axe est perpendiculaire au plan sont des glisseurs. {10+11} est un ensemble soumis à 2 glisseurs.
- On isole ensuite 7 et on réalise un théorème du moment statique en  $H$  suivant  $\vec{y}_3$ .

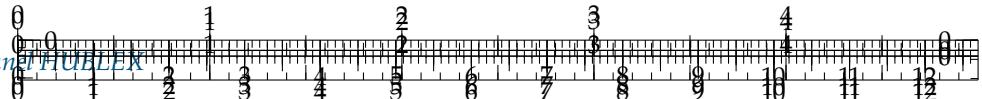


.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Statique\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_04\_ChasseNeige/images/cor\_01.png

**On isole le vérin {10+11}** D'après le PFS, l'ensemble étant soumis à 2 glisseurs, on a donc

$$\{\mathcal{T}(11 \rightarrow 7)\} = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{z}_{11} \\ 0 \end{array} \right\}_J$$





On isole {7} BAME :

- ▶ action de la neige;
- ▶ action de la pesanteur;
- ▶ action de la pièce 11;
- ▶ action de la pièce 3;

On réalise le TMS en  $H$  en projection sur  $\vec{y}_3$ .

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(H, \text{neige} \rightarrow 7) \cdot \vec{y}_3} + \overrightarrow{\mathcal{M}(H, \text{Pesanteur} \rightarrow 7) \cdot \vec{y}_3} + \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}(H, 11 \rightarrow 7) \cdot \vec{y}_3}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\mathcal{M}(H, 3 \rightarrow 7) \cdot \vec{y}_3} = 0$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{HQ} \wedge Q\vec{x}_7) \cdot \vec{y}_3 + (\overrightarrow{HG} \wedge -gP\vec{y}_3) \cdot \vec{y}_3 + (\overrightarrow{HJ} \wedge F\vec{z}_{11}) \cdot \vec{y}_3 = 0$$

$$\Rightarrow ((a\vec{x}_3 + b\vec{y}_3 + c\vec{z}_3) \wedge Q\vec{x}_7) \cdot \vec{y}_3 + \underbrace{(i\vec{z}_7 \wedge -gP\vec{y}_3) \cdot \vec{y}_3}_{\vec{0}} + (h\vec{z}_7 \wedge F\vec{z}_{11}) \cdot \vec{y}_3 = 0$$

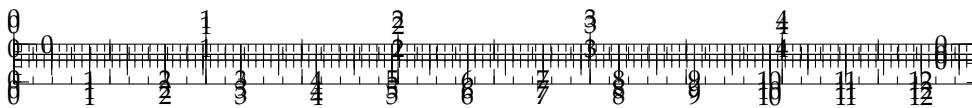
$$\Rightarrow (\vec{y}_3 \wedge (a\vec{x}_3 + c\vec{z}_3)) \cdot Q\vec{x}_7 + (h\vec{z}_7 \wedge F\vec{z}_{11}) \cdot \vec{y}_3 = 0 \Rightarrow (-a\vec{z}_3 + c\vec{x}_3) \cdot Q\vec{x}_7 + hF \sin(\beta - \gamma) \vec{y}_3 \cdot \vec{y}_3 = 0$$

$$\Rightarrow Q(a \sin \gamma + c \cos \gamma) + hF \sin(\beta - \gamma) = 0$$

Au final,  $F = -\frac{Q(a \sin \gamma + c \cos \gamma)}{h \sin(\beta - \gamma)}$ .

$F$  étant l'effort déployé par le vérin, et  $S$  sa section, on a alors,  $F = pS$  et  $S = -\frac{Q(a \sin \gamma + c \cos \gamma)}{ph \sin(\beta - \gamma)}$ .





## TD 5 : Stabilisateur vertical pour appareil photo – Sujet

Concours Centrale Supélec 2021 – PSI.

L'utilisation du mode vidéo, en haute définition sur les appareils photo réflex et légers, pose aux photographes le problème de la stabilisation de l'image.

Les nacelles gyrostabilisées, installées sur une perche portée par les deux mains de l'utilisateur et sur lesquelles se fixe l'appareil photographique permettent de corriger les perturbations dues aux mouvements de l'utilisateur selon trois axes de rotations. Néanmoins, elles ne permettent pas de réduire les perturbations verticales dues à la marche ou à la course de l'utilisateur.

Pour résoudre ce problème, un constructeur commercialise un stabilisateur vertical à installer entre la perche et la nacelle gyrostabilisée.

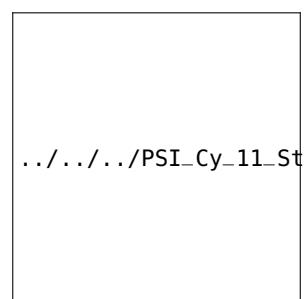
### Vérification du respect de l'exigence relative à la position d'équilibre

Le cahier des charges précise que le stabilisateur peut être utilisé avec des appareils photo de masse comprise entre 0,350 kg et 1,550 kg<sup>1</sup>.

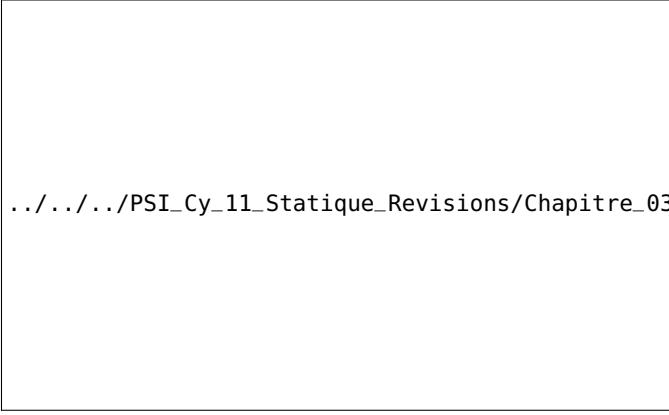
#### Objectif

L'objectif de cette partie est de vérifier que la conception est assez robuste vis-à-vis du facteur de masse de l'appareil photo pour satisfaire l'exigence 1.1 relative à la position d'équilibre du système.

1: Exigence 1

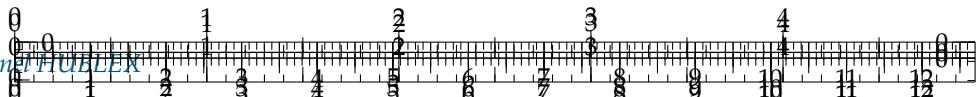


**FIGURE 11.13 – Exigence 1.1**



[.../.../.../PSI\\_Cy\\_11\\_Static\\_Revisions/Chapitre\\_03\\_Strategie/Cy\\_11\\_Ch\\_03\\_PFS\\_2D\\_TD\\_05\\_Stabilisateur](.../.../.../PSI_Cy_11_Static_Revisions/Chapitre_03_Strategie/Cy_11_Ch_03_PFS_2D_TD_05_Stabilisateur)





La plage de fonctionnement du mécanisme est limitée par la géométrie des bras (2) et (2') avec  $\alpha \in [-35^\circ, 45^\circ]$ ,  $l = 25 \text{ mm}$ ,  $L = 52 \text{ mm}$ ,  $y_G = 5 \text{ mm}$  et  $z_G = 200 \text{ mm}$ .

Dans cette partie, l'étude est conduite avec les hypothèses suivantes :

- les liaisons sont parfaites;
- la modélisation est plane;
- il n'y pas de perturbation ( $z_{\text{pert}} = 0$ ).

Le mécanisme étudié dont la modélisation retenue est donnée (figure ??). La nacelle gyrostabilisée est schématisée par la barre (3). Le support (1), faisant l'objet d'une liaison encastrement avec la perche, est supposé être en mouvement de translation par rapport au sol (0) autorisé par une glissière fictive. Ce modèle est paramétré par :

- le repère terrestre  $\mathcal{R}_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  supposé galiléen avec  $\vec{z}_0$  vertical ascendant;
- le repère  $\mathcal{R}_1 (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au support (1) avec  $\overrightarrow{OA} = y_A \vec{y}_0 + z_{\text{pert}} \vec{z}_0$ ;
- le repère  $\mathcal{R}_2 (A, \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  lié au bras (2) avec  $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$ ;
- le repère  $\mathcal{R}'_2 (A', \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  lié au bras (2') avec  $\overrightarrow{AA'} = l \vec{z}_0$ ;
- le repère  $\mathcal{R}_3 (B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à la nacelle gyrostabilisée (3) et à l'appareil photo (4) liés rigidement entre eux avec  $\overrightarrow{AB} = L \vec{y}_2$ . Le centre d'inertie de l'ensemble  $\{(3) + (4)\}$  est noté G, avec  $\overrightarrow{BG} = y_G \vec{y}_0 + z_G \vec{z}_0$ ;
- le repère  $\mathcal{R}_5 (A', \vec{x}_0, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  est défini tel que  $\overrightarrow{A'B} = L_r \vec{y}_5$  avec  $\beta = (\vec{y}_0, \vec{y}_5) = (\vec{z}_0, \vec{z}_5)$ .

Le ressort de traction (5) de raideur  $K_r$  et de longueur à vide  $L_{r0}$  possède une tension initiale  $F_{r0}$  lorsque  $L_r = L_{r0}$ . Il est relié d'une part au support (1) et d'autre part au solide (3) aux points d'ancrage respectivement A' et B.

Pour cette étude la nacelle gyrostabilisée (3) et l'appareil photo (4) sont considérés comme formant un seul solide de masse  $m_{34} = m_3 + m_4$  avec  $m_3 = 1,250 \text{ kg}$ . La masse et l'inertie des autres solides sont négligées.

En utilisant une fermeture géométrique, on peut montrer que  $\tan \beta = \frac{L \sin \alpha - l}{L \cos \alpha}$  et que la longueur du ressort  $L_r$  peut s'exprimer sous la forme  $L_r = \sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll \sin \alpha}$ .

## Vérification de l'exigence relative à la plage de fonctionnement

L'action mécanique du ressort de traction (5) sur la nacelle gyrostabilisée (3) est modélisée par le torseur  $\{\mathcal{F}_{5 \rightarrow 3}\} : \{\mathcal{F}_{5 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_r \vec{y}_5 \\ \overline{0} \end{array} \right\}_B$ .

**Question 1** Exprimer la composante de résultante d'action mécanique  $F_r$  en fonction de l'angle  $\alpha$ , des paramètres géométriques du système et des paramètres du ressort.

**Question 2** Déterminer la direction des actions mécaniques de liaison exercées par le bras (2) sur la nacelle (3) et par le bras (2') sur la nacelle (3) **On pourra raisonner en statique**.

**Question 3** Afin de déterminer la position d'équilibre de l'ensemble  $\{(3) + (4)\}$ , proposer sans calcul, une démarche claire qui permette d'exprimer l'effort nécessaire du ressort de traction (5) sur la nacelle gyrostabilisée (3) **On pourra raisonner en statique**.

**Question 4** Exprimer l'équation scalaire traduisant l'équilibre du mécanisme en fonction des angles  $\alpha, \beta$ , de la masse  $m_{34}$  et de la composante de résultante d'action mécanique  $F_r$ .

Dès lors, il est possible de tracer l'angle d'équilibre  $\alpha_0$  en fonction de la masse de l'appareil photo  $m_4$  (figure ??).

**Question 5** En donnant les valeurs des angles d'équilibre pour les deux valeurs extrêmes de masse, vérifier le respect de l'exigence 1.1.1. relative à la plage de fonctionnement.

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static



Xavier Pessoles - <https://xpresosles.gforge.inria.fr/>

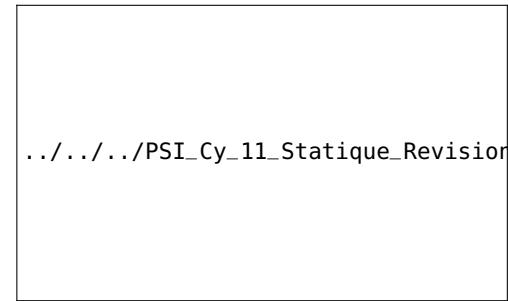
Éléments de correction

Sciences Industrielles de l'Ingénieur 1 PSI★2

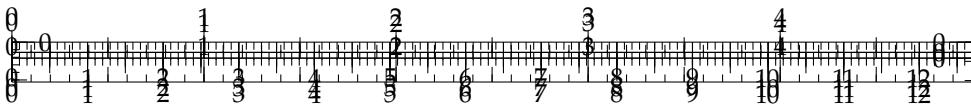
$$1. F_r = -F_{r0} - K_r$$

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_05\_Stabil

e  $\alpha_0$  en  
l photo







## TD 5 : Stabilisateur vertical pour appareil photo – Corrigé

Concours Centrale Supélec 2021 – PSI.

### Vérification du respect de l'exigence relative à la position d'équilibre

#### Objectif

L'objectif de cette partie est de vérifier que la conception est assez robuste vis-à-vis du facteur de masse de l'appareil photo pour satisfaire l'exigence 1.1 relative à la position d'équilibre du système.

### Vérification de l'exigence relative à la plage de fonctionnement

**Question 1** Exprimer la composante de résultante d'action mécanique  $F_r$  en fonction de l'angle  $\alpha$ , des paramètres géométriques du système et des paramètres du ressort.

#### Correction

En utilisant la définition de la force de rappel du ressort de traction (en tension ici) et avec  $L_{r0}$  la longueur à vide du ressort on a  $F_r \vec{y_5} = -K_r (L_r - L_{r0}) \vec{y_5}$ . En utilisant l'expression précédente : 
$$F_r = -K_r (\sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll \sin \alpha} - L_{r0})$$
.

Avec la définition de l'effort de traction donnée par l'énoncé, on peut aussi être tenté d'écrire  $F_r \vec{y_5} = -[F_{r0} + K_r (L_r - L_{r0})] \vec{y_5}$ . En utilisant l'expression précédente :

$$F_r = -[F_{r0} + K_r (\sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll \sin \alpha} - L_{r0})]$$

**Question 2** Déterminer la direction des actions mécaniques de liaison exercées par le bras (2) sur la nacelle (3) et par le bras (2') sur la nacelle (3) **On pourra raisonner en statique**.

#### Correction

Il est fait l'hypothèse que le problème est plan dans le plan  $(0, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ . Les torseurs d'actions mécaniques associés aux liaisons pivot d'axe  $\vec{z_0}$  sont donc des glisseurs.

Les solides (2) et (2') sont tous soumis à deux glisseurs :

- d'une part,  $\{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)\}$  (pivot d'axe  $(A, \vec{x_0})$ ) et  $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 2)\}$  (pivot d'axe  $(B, \vec{x_0})$ ) sont des glisseurs;



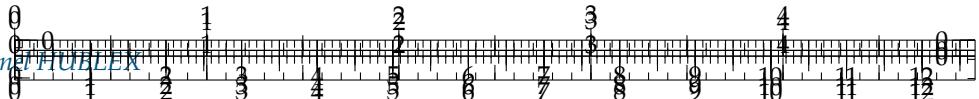
Concours Centrale Supélec 2021 – PSI.

B2-14

C1-05

C2-07

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi



- d'autre part,  $\{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2')\}$  (pivot d'axe  $(A', \vec{x}_0)$ ) et  $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 2')\}$  (pivot d'axe  $(B', \vec{x}_0)$ ) sont des glisseurs.

D'après le PFS appliqué successivement à (2) et (2'), solides soumis à deux glisseurs, alors on a  $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)\} = \{0\}$  et  $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 2')\} + \{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2')\} = \{0\}$ . Les actions mécaniques sont de même norme, de même direction (droites (AB) et (A'B') soit vecteur  $\vec{y}_2$ ).

De plus,  $\vec{F}_{23} = F_{23}\vec{y}_2$  et  $\vec{F}_{2'3} = F_{2'3}\vec{y}_2$ .

**Question 3** Afin de déterminer la position d'équilibre de l'ensemble  $\{(3) + (4)\}$ , proposer sans calcul, une démarche claire qui permette d'exprimer l'effort nécessaire du ressort de traction (5) sur la nacelle gyrostabilisée (3) **On pourra raisonner en statique**.

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Re

FIGURE 11.16 – Rappel – Schéma cinématique plan et paramétrage du mécanisme

#### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisions/Chapitre\_03\_Strategie/Cy\_11\_Ch\_03\_PFS\_2D\_TD\_

On isole l'ensemble  $\{(3)+(4)\}$ .

On réalise le bilan des actions mécaniques :

- action mécanique de (2') sur (3), de direction  $\vec{y}_2$ ;
- action mécanique de (2) sur (3), de direction  $\vec{y}_2$ ;
- action mécanique de la pesanteur sur  $\{(3)+(4)\}$ ;
- action du ressort sur  $\{(3)+(4)\}$ .

Il faut écrire une équation du PFS permettant de ne pas faire apparaître les actions dans les deux liaisons pivot. Il faut donc réaliser un théorème de la résultante statique en projection sur  $\vec{z}_2$  (perpendiculaire à  $\vec{y}_2$ ).

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Re

**Question 4** Exprimer l'équation scalaire traduisant l'équilibre du mécanisme en fonction des angles  $\alpha, \beta$ , de la masse  $m_{34}$  et de la composante de résultante d'action mécanique  $F_r$ .

#### Correction

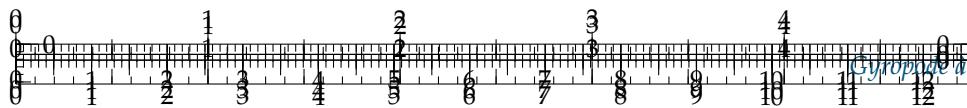
Calculons :

- la projection de l'action du ressort sur  $\vec{z}_2$  :  $F_r \vec{y}_5 \cdot \vec{z}_2 = F_r \cos(-\beta + \frac{\pi}{2} + \alpha) = F_r \sin(\alpha - \beta)$ ;
- la projection de l'action de pesanteur sur  $\vec{z}_2$  :  $-m_{34}g \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2 = -m_{34}g \cos \alpha$ .

On applique le TRS en projection sur  $\vec{z}_2$  et on a :

$$\underbrace{\vec{R}(2' \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_2}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{R}(2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_2}_{\vec{0}} + \vec{R}(\text{Pes} \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_2 + \vec{R}(\text{Res} \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_2 = 0.$$





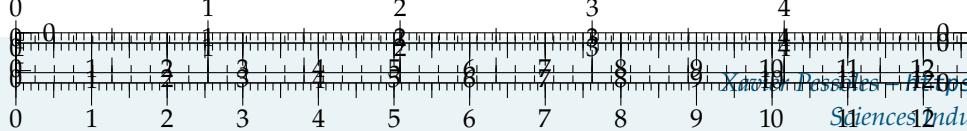
On a donc  $-m_{34}g \cos \alpha - F_r \sin(\alpha - \beta) = 0$  et  $F_r = -m_{34}g \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$ .

**Question 5** En donnant les valeurs des angles d'équilibre pour les deux valeurs extrêmes de masse, vérifier le respect de l'exigence 1.1.1. relative à la plage de fonctionnement.

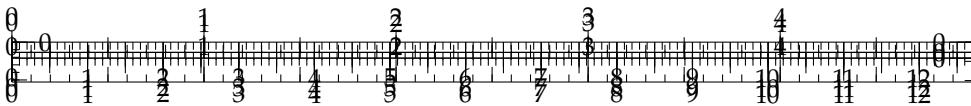
#### Correction

On peut lire en figure ?? que pour une masse d'appareil comprise entre 0,35 et 1,55 kg, l'angle d'équilibre varie de  $18^\circ$  à  $-9^\circ$ . Cet intervalle est compris dans l'intervalle  $[-35^\circ, 45^\circ]$ . L'exigence 1.1.1 est donc satisfaite.

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi







## TD 5

### Machine de forage – Sujet

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

Dans le domaine du génie civil, les foreuses permettent de réaliser des perçages profonds afin de couler des pieux en béton armé. On s'intéresse aux conditions de basculement statique de la foreuse.

Pour prévenir le basculement de la foreuse, l'opérateur peut observer dans un coin de son écran : le pourcentage  $b\%$  d'atteinte de la posture critique de basculement pour une orientation de tourelle donnée (figure ??).

Afin d'assurer la stabilité de l'engin, on cherche à satisfaire l'exigence 1.2 (figure ??).

Le paramétrage mécanique est donné sur la figure ?? :

- ▶ 0 le sol, S1 le châssis de la foreuse, S2 sa tourelle et son mât et S3 l'ensemble {table de forage + outil} ;
- ▶  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère attaché aux solides S0 et S1 ;
- ▶  $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  la base attachée aux solides S2 et S3 telle que  $(\vec{x}, \vec{x}_2) = \theta$  où  $\theta$  est connu ;
- ▶  $\Sigma = \{S1, S2, S3\}$  l'ensemble de la foreuse, de centre de gravité G tel que  $\overrightarrow{OG} = r\vec{x}_2 + z_G\vec{z}$  ;
- ▶  $M = 186,5$  tonnes la masse de l'ensemble  $\Sigma$  et  $m = 18$  tonnes la masse de S3 seul ;
- ▶  $2F_w\vec{z}$  connu, l'effort du câble d'avance sur S3. La masse du câble est négligée dans la suite ;
- ▶  $F_{sol}\vec{z}$ , inconnu, l'effort de forage du sol 0 sur l'outil de forage S3 au point F, connu, défini par  $\overrightarrow{OF} = R\vec{x}_2$  ;
- ▶  $-g\vec{z}$  où  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ , l'accélération de la pesanteur terrestre.

On modélise ici les contacts entre le sol et la foreuse **par des contacts ponctuels** :  $F_g\vec{z}$ , (respectivement  $F_d\vec{z}$ ) inconnu, l'effort du sol 0 sur S1, supposé ponctuel au centre I (respectivement J) de la surface de contact entre la chenille gauche  $c_g$  (respectivement  $c_d$ ) et le sol tel que  $\|\overrightarrow{OI}\| = a = 2,1 \text{ m}$  (respectivement  $\|\overrightarrow{OJ}\| = a = 2,1 \text{ m}$ ).

**Question 1** En appliquant le principe fondamental de la statique en O à l'isolement de votre choix, donner l'expression de  $F_g$  et de  $F_d$  en fonction des données connues du système, de  $\theta$  et de  $F_{sol}$ .

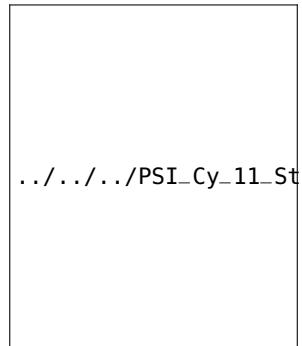
Le problème étant symétrique pour  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  (tourelle orientée à droite) et  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  (tourelle orientée à gauche), on n'étudie par la suite que le basculement statique à droite.

B2-14

C1-05

C2-07

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revisi



.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Static\_Revi

FIGURE 11.17 – Aperçu du contrôle de  $b\%$ .

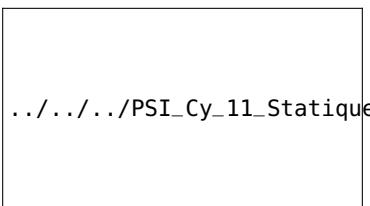


FIGURE 11.18 – Exigence 1.2.



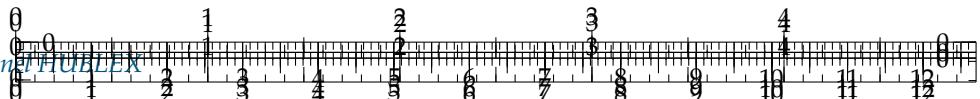
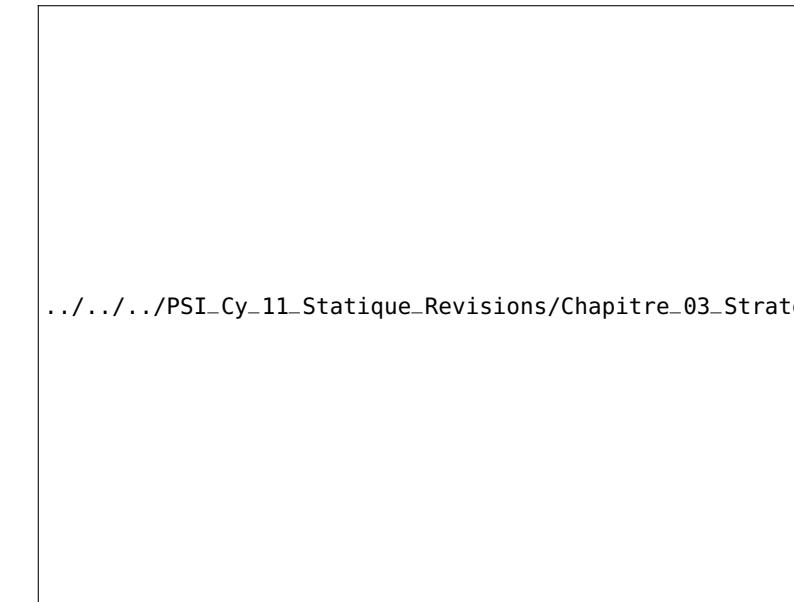


FIGURE 11.19 – Paramétrage mécanique



**Question 2** Donner la condition en effort pour laquelle il y a basculement statique à droite. En absence d'effort de forage, en déduire la condition sur la position  $(r, \theta)$  du centre de gravité G pour laquelle le basculement à droite est alors évité.

**Question 3** Interpréter physiquement ce résultat et montrer que  $b\%$  peut être, dans ce cas, approximé par :  $b\% = 100 \frac{|r \cos \theta|}{a}$ .

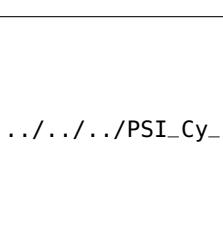
On désire dimensionner le nombre de contrepoids de 8 tonnes à placer à l'arrière de la tourelle pour que, en l'absence de forage et en extension maximale, l'exigence 1.2 d'équilibrage statique initial soit respectée même dans le pire des cas où la tourelle est pleinement orientée à droite ( $\theta = 0^\circ$ ). Dans cette posture, le schéma de la figure ?? illustre où se situent, dans le même plan, les centres de gravité des différents éléments de la machine :

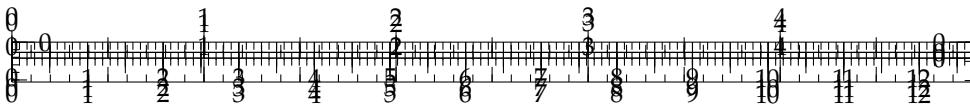
- ▶  $G_t$  est le centre de gravité de la tourelle et du châssis. La masse de cet ensemble  $S_t$  est notée  $m_t = 44,7$  tonnes ;
- ▶  $G_e$  est le centre de gravité de tous les équipements mobiles (tige Kelly, potences, vérins, mat, table de forage, outillage, terre à évacuer), positionnés dans la configuration la plus défavorable. La masse de cet ensemble  $S_e$  est notée  $m_e = 48,8$  tonnes ;
- ▶  $G_c$  est le centre de gravité des contrepoids. Il y a  $n_{cp}$  contrepoids de masse totale  $m_c = n_{cp} \cdot m_1$ , où  $m_1 = 8$  tonnes est la masse d'un seul contrepoids ;
- ▶ l'accélération de la pesanteur est notée :  $\vec{g} = -g \vec{z} = -9,8 \vec{z}$  (en  $\text{m/s}^2$ ).

On note (en mètres) :  $\overrightarrow{OG_t} = 2,2 \vec{z}$ ,  $\overrightarrow{OG_e} = 4,4 \vec{x} + 13 \vec{z}$ ;  $\overrightarrow{OG_c} = -4,3 \vec{x} + 2,3 \vec{z}$ . On fait l'hypothèse que  $\overrightarrow{OG_c}$  reste identique, indépendamment du nombre de contrepoids.

**Question 4** Exprimer la coordonnée sur  $\vec{x}$ , notée  $r$ , du centre de gravité G total de la machine en fonction des paramètres connus et de  $n_{cp}$ . En déduire le nombre  $n_{cp}$  minimum de contrepoids pour respecter l'exigence 1.2.

FIGURE 11.20 – Position des centres de gravité des différents solides.





## TD 5

# Machine de forage – Corrigé

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

**Question 1** En appliquant le principe fondamental de la statique en  $O$  à l'isolement de votre choix, donner l'expression de  $F_g$  et de  $F_d$  en fonction des données connues du système, de  $\theta$  et de  $F_{\text{sol}}$ .

B2-14

C1-05

C2-07

### Correction

On isole  $\Sigma$ .

BAME

- action du sol en  $I$  :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow \Sigma)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_g \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_I$ ; de plus,  $\overline{\mathcal{M}(O, 0 \rightarrow \Sigma)} = \overline{\mathcal{M}(I, 0 \rightarrow \Sigma)} + \overrightarrow{OI} \wedge F_g \vec{z} = -a \vec{x} \wedge F_g \vec{z} = a F_g \vec{y}$ .
- action du sol en  $J$  :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow \Sigma)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_d \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_J$ ; de plus,  $\overline{\mathcal{M}(O, 0 \rightarrow \Sigma)} = \overline{\mathcal{M}(J, 0 \rightarrow \Sigma)} + \overrightarrow{OJ} \wedge F_d \vec{z} = a \vec{x} \wedge F_d \vec{z} = -a F_d \vec{y}$ .
- pesanteur en  $G$  :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow \Sigma)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_G$ ; de plus,  $\overline{\mathcal{M}(O, \text{pes} \rightarrow \Sigma)} = \overline{\mathcal{M}(G, 0 \rightarrow \Sigma)} + \overrightarrow{OG} \wedge -Mg \vec{z} = (r \vec{x}_2 + z_G \vec{z}) \wedge -Mg \vec{z} = r \vec{x}_2 \wedge -Mg \vec{z} = Mg r \vec{y}_2$ .
- l'effort du sol sur l'outil :  $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \Sigma)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{\text{sol}} \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}_F$ ; de plus,  $\overline{\mathcal{M}(O, \text{sol} \rightarrow \Sigma)} = \overrightarrow{OF} \wedge F_{\text{sol}} \vec{z} = R \vec{x}_2 \wedge F_{\text{sol}} \vec{z} = -R F_{\text{sol}} \vec{y}_2$ .

On a donc :

- TRS en projection sur  $\vec{z}$  :  $F_g + F_d - Mg + F_{\text{sol}} = 0$ .
- TMS en  $O$  en projection sur  $\vec{x}$  :  $-Mg r \sin \theta + R F_{\text{sol}} \sin \theta = 0$ .
- TMS en  $O$  en projection sur  $\vec{y}$  :  $a F_g - a F_d + Mgr \cos \theta - R F_{\text{sol}} \cos \theta = 0$ .

La dernière équation est donc :  $F_g - F_d + \frac{Mgr}{a} \cos \theta - \frac{R}{a} F_{\text{sol}} \cos \theta = 0$ .

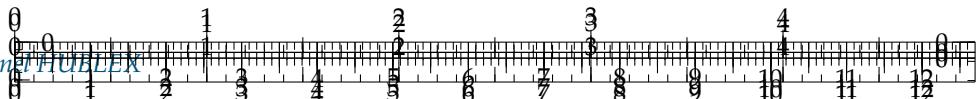
En conséquence,  $2F_g - Mg + F_{\text{sol}} + (Mgr - RF_{\text{sol}}) \frac{\cos \theta}{a} = 0$  et

$$2F_d - Mg + F_{\text{sol}} - (Mgr - RF_{\text{sol}}) \frac{\cos \theta}{a} = 0.$$

Au final,  $\begin{cases} 2F_g = Mg - F_{\text{sol}} - (Mgr - RF_{\text{sol}}) \frac{\cos \theta}{a} \\ 2F_d = Mg - F_{\text{sol}} + (Mgr - RF_{\text{sol}}) \frac{\cos \theta}{a} \end{cases}$ .

**Question 2** Donner la condition en effort pour laquelle il y a basculement statique à droite. En absence d'effort de forage, en déduire la condition sur la position  $(r, \theta)$  du centre de gravité  $G$  pour laquelle le basculement à droite est alors évité.



**Correction**

Il y a basculement lorsque  $F_g \leq 0$  et en l'absence de forage,  $F_{\text{sol}} = 0$ . donc  $Mg - (Mgr) \frac{\cos \theta}{a} \leq 0 \Rightarrow Mg \left(1 - r \frac{\cos \theta}{a}\right) \leq 0 \Rightarrow a - r \cos \theta \leq 0 \Rightarrow a \leq r \cos \theta$ .

**Question 3** Interpréter physiquement ce résultat et montrer que  $b\%$  peut être, dans ce cas, approximé par :  $b\% = 100 \frac{|r \cos \theta|}{a}$ .

**Correction**

Pour ne pas basculer, le centre de gravité doit être à l'intérieur des chenilles.

**Question 4** Exprimer la coordonnée sur  $\vec{x}$ , notée  $r$ , du centre de gravité total de la machine en fonction des paramètres connus et de  $n_{cp}$ . En déduire le nombre  $n_{cp}$  minimum de contrepoids pour respecter l'exigence 1.2.

**Correction**

On a, par définition du barycentre,  $(m_t + m_e + m_c) \overrightarrow{OG} = m_t \overrightarrow{OG_t} + m_e \overrightarrow{OG_e} + m_c \overrightarrow{OG_c}$ .  
En projectant sur  $\vec{x}$ , on a :  $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{x} = \frac{4,4m_e - 4,3m_c}{m_t + m_e + m_c} \Rightarrow r = \frac{4,4m_e - 4,3n_{cp}m_1}{m_t + m_e + n_{cp}m_1} \Rightarrow rm_t + rm_e + rn_{cp}m_1 = 4,4m_e - 4,3n_{cp}m_1 \Rightarrow n_{cp}(rm_1 + 4,3m_1) = 4,4m_e - rm_t - rm_e \Rightarrow n_{cp} = \frac{4,4m_e - rm_t - rm_e}{rm_1 + 4,3m_1}$ .

Pour ne pas basculer, on doit avoir  $r < a$ . En prenant en compte l'exigence 1.2, il faut que  $r < 0,5a$ .

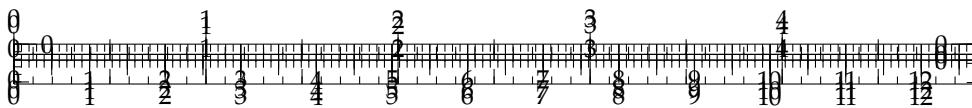
On peut en déduire  $n_{cp}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_11\_Staticque\_Re

fig\_05.p

**FIGURE 11.21** – Position des centres de gravité des différents solides.





## 12 Modélisation géométrique – Lois entrées-sorties

### 12.1 Modélisation et paramétrage des systèmes mécaniques

#### Méthode – Modélisation d'un système mécanique réel

Pour modéliser un système mécanique réel (en TP par exemple) il faut :

- ▶ identifier les classes d'équivalence cinématique, c'est-à-dire tous les ensembles de pièces reliés entre elles par des liaisons encastrement;
- ▶ identifier les surfaces de contact entre les classes d'équivalence;
- ▶ associer une liaison cinématique aux surfaces de contact;
- ▶ tracer les liaisons en utilisant une couleur par classe d'équivalence et respectant leur positionnement relatif;
- ▶ relier les liaisons de manière filaire;
- ▶ indiquer le bâti, les centres de liaisons et la numérotation des classes d'équivalence.

#### Méthode – Paramétrage d'un mécanisme cinématique

Pour paramétrier un mécanisme, il faut associer un repère à chaque classe d'équivalence, une constante à chaque dimension fixe (pour une même classe d'équivalence) et une variable à chaque degré de mobilité de liaison (entre deux classes d'équivalence).

- ▶ si la mobilité est une translation, on définit un paramètre variable entre deux points selon une seule direction (la direction de la translation);
- ▶ si la mobilité est une rotation il faut définir l'axe de rotation et l'angle variable en précisant la figure de changement de base.

Par usage, nous associerons une lettre grecque à un paramètre variable et une lettre romane à une dimension fixe. Cela permet de repérer plus facilement quelles sont les variables temporelles lors de calcul de dérivées.

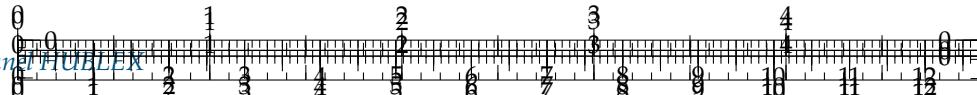
#### Définition – Graphe de structure – Chaînes

Graphe qui permet d'avoir une vue d'ensemble du mécanisme :

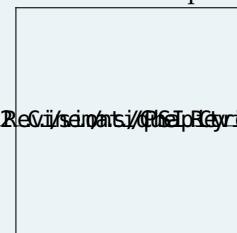
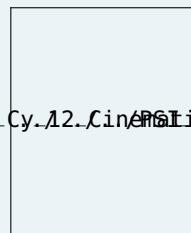
- ▶ les classes d'équivalences sont schématisées par des cercles avec un repère (celui défini précédemment);
- ▶ les liaisons sont schématisées par des traits qui relient les cercles.

On définit 3 types de chaînes :





Les chaînes ouvertes    Les chaînes fermées    Les chaînes complexes



## 12.2 Résolution des lois entrée–sortie

### Méthode – Calcul de la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Un système se présentant sous forme d'une chaîne de solide fermée a pour but de transformer un mouvement. On s'intéresse alors pour cela à la relation cinématique liant le mouvement d'entrée du système et le mouvement de sortie. On écrit pour cela une **fermeture de chaîne géométrique**. Pour cela :

1. paramétriser le mécanisme ;
2. identifier la grandeur d'entrée et de sortie ;
3. à l'aide du théorème de Chasles, exprimer le vecteur nul en fonction des vecteurs liant le centre de chacune des liaisons ;
4. projeter la relation vectorielle sur une des bases ;
5. combiner les relations pour exprimer la sortie en fonction de l'entrée ;
6. dériver si besoin pour avoir le lien entre les vitesses.

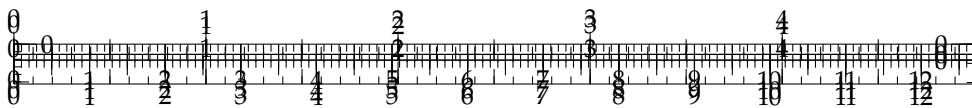
### Méthode – Manipulation du système d'équations

1. Pour supprimer une longueur  $\lambda$  : on met les deux équations sous la forme  $\lambda =$  et on fait le rapport des deux équations.
2. Pour supprimer l'angle  $\varphi$  : on met une équation sous la forme  $\cos \varphi =$  et la seconde sous la forme  $\sin \varphi =$  et on utilise la relation  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ .
3. Dans d'autres cas, on peut avoir à utiliser l'expression de la tangente.

### Méthode – Autre idée pour calculer la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Dans certains mécanismes, on peut observer que deux vecteurs sont toujours orthogonaux. En utilisant le fait que le produit scalaire entre ces deux vecteurs est nul puis en projetant les vecteurs dans une même base puis en réalisant le calcul, il est possible de déterminer une loi entrée-sortie.





## Application 1

### Micromoteur d'un avion de modélisme – Sujet

#### Mise en situation

La mise en mouvement d'une certaine catégorie d'avions de modélisme est assurée par un moteur thermique. La figure ci-dessous propose un éclaté d'un modèle 3D ainsi que le schéma cinématique associé.

On appelle :

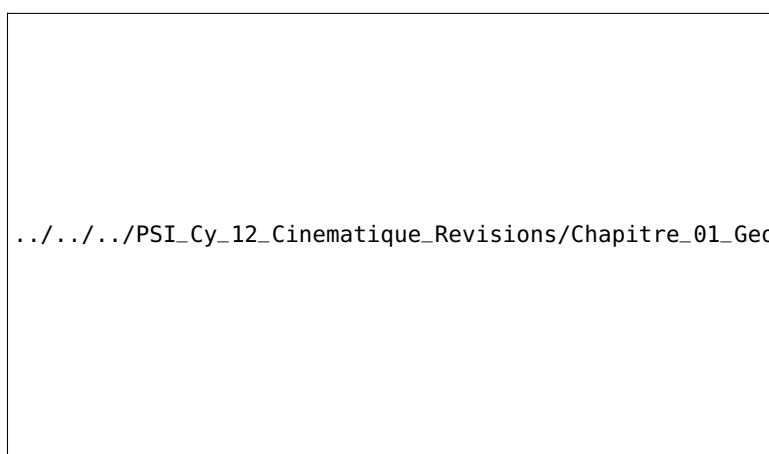
- ▶ (0) la bâti lié à la voilure de l'avion;
- ▶ (1) le vilebrequin, solidaire de l'hélice de l'avion;
- ▶ (2) la bielle;
- ▶ (3) le piston.

#### Objectif

- ▶ Déterminer la loi de position et de vitesse du piston pour avoir un taux de rotation du moteur de  $9000 \text{ tr min}^{-1}$ .
- ▶ Vérifier que l'accélération est inférieure à  $10\,000 \text{ m s}^{-2}$ .

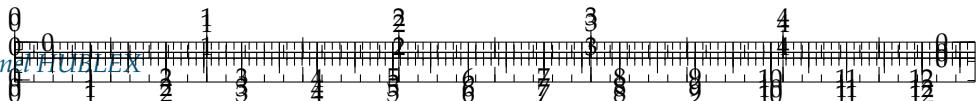
#### Modélisation

La modélisation par schéma cinématique est donnée dans le schéma ci-dessous.



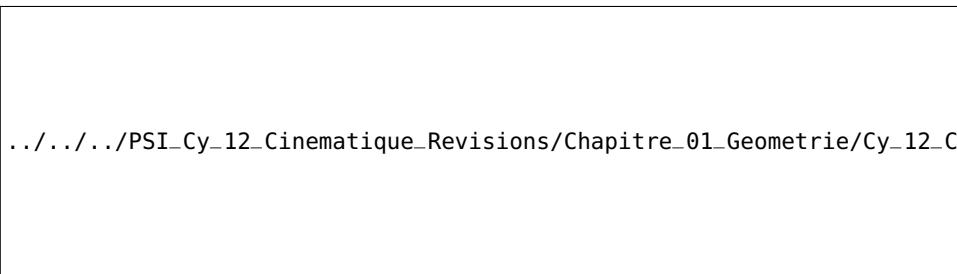
On appelle :





- $\mathcal{R}_0 = \left( A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$  le repère lié au bâti (0) ;
- $\mathcal{R}_1 = \left( A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0 \right)$  le repère lié au vilebrequin (1) avec  $\alpha(t) = \left( \vec{x}_0, \vec{x}_1 \right)$  ;
- $\mathcal{R}_2 = \left( B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0 \right)$  le repère lié à la bielle (2) avec  $\beta(t) = \left( \vec{x}_1, \vec{x}_2 \right)$  avec  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{x}_1 = e$  et  $e = 5,25 \text{ mm}$  ;
- $\mathcal{R}_3 = \left( C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0 \right)$  le repère lié au piston (3) avec  $\gamma(t) = \left( \vec{x}_2, \vec{x}_3 \right)$  avec  $\overrightarrow{BC} = L\vec{x}_2$  et  $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{y}_0 = \lambda(t)$  et  $L = 23,9 \text{ mm}$ .

Les figures planes de changement de repère sont données ci-dessous :



**Question 1** Tracer le graphe de structure. Définir le nombre de cycles, la mobilité du mécanisme et le nombre de degrés de liberté de chacune des liaisons en 2D et en 3D.

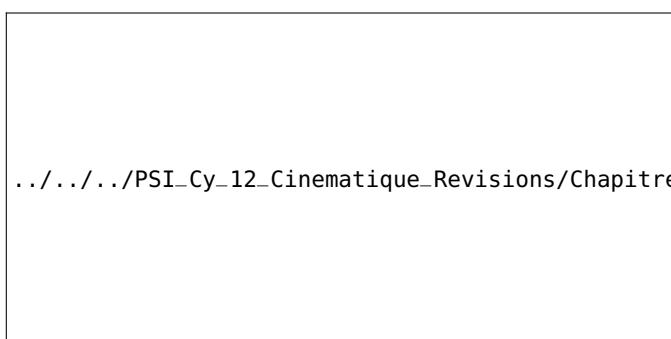
**Question 2** Préciser la variable d'entrée ainsi que la variable de sortie du système.

**Question 3** Déterminer la loi entrée-sortie géométrique du système.

**Question 4** Déterminer la loi entrée-sortie cinématique du système.

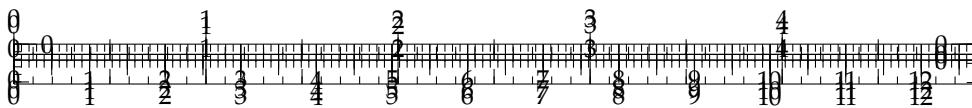
**Question 5** Tracer l'allure de la loi de vitesse du piston.

Une simulation réalisée sous Méca3D permet d'obtenir l'évolution de l'accélération du piston :



**Question 6** Conclure vis-à-vis du cahier des charges.





## Application 1

### Micromoteur d'un avion de modélisme – Corrigé

#### Mise en situation

La mise en mouvement d'une certaine catégorie d'avions de modélisme est assurée par un moteur thermique. La figure ci-dessous propose un éclaté d'un modèle 3D ainsi que le schéma cinématique associé.

On appelle :

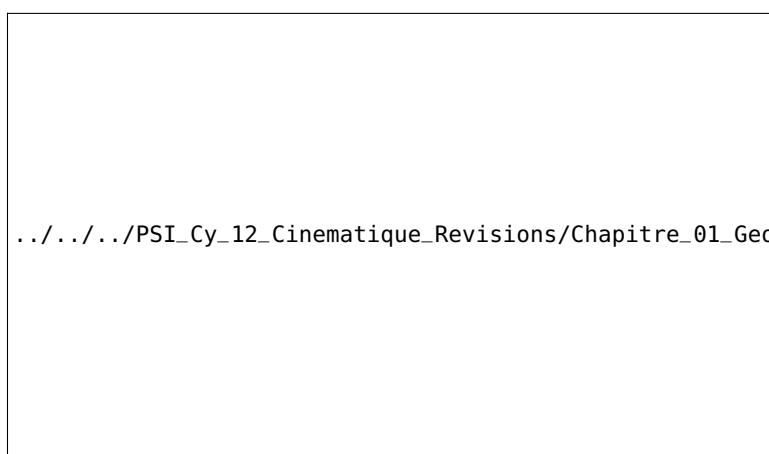
- ▶ (0) la bâti lié à la voilure de l'avion;
- ▶ (1) le vilebrequin, solidaire de l'hélice de l'avion;
- ▶ (2) la bielle;
- ▶ (3) le piston.

#### Objectif

- ▶ Déterminer la loi de position et de vitesse du piston pour avoir un taux de rotation du moteur de  $9000 \text{ tr min}^{-1}$ .
- ▶ Vérifier que l'accélération est inférieure à  $10\,000 \text{ m s}^{-2}$ .

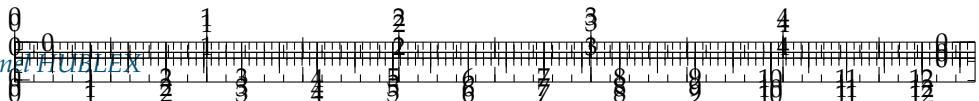
#### Modélisation

La modélisation par schéma cinématique est donnée dans le schéma ci-dessous.



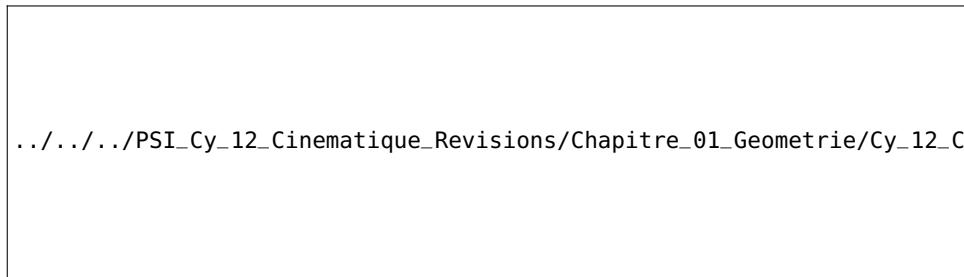
On appelle :





- $\mathcal{R}_0 = \left( A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$  le repère lié au bâti (0) ;
- $\mathcal{R}_1 = \left( A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0 \right)$  le repère lié au vilebrequin (1) avec  $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  ;
- $\mathcal{R}_2 = \left( B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0 \right)$  le repère lié à la bielle (2) avec  $\beta(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  avec  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{x}_1 = e$  et  $e = 5,25 \text{ mm}$  ;
- $\mathcal{R}_3 = \left( C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0 \right)$  le repère lié au piston (3) avec  $\gamma(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$  avec  $\overrightarrow{BC} = L\vec{x}_2$  et  $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{y}_0 = \lambda(t)$  et  $L = 23,9 \text{ mm}$ .

Les figures planes de changement de repère sont données ci-dessous :



**Question 1** Tracer le graphe de structure. Définir le nombre de cycles, la mobilité du mécanisme et le nombre de degrés de liberté de chacune des liaisons en 2D et en 3D.

**Question 2** Préciser la variable d'entrée ainsi que la variable de sortie du système.

**Question 3** Déterminer la loi entrée-sortie géométrique du système.

#### Correction

Dans le cas d'un système bielle-manivelle comme le moteur de modélisme, on veut connaître la vitesse de rotation de l'hélice  $\dot{\alpha}(t)$  en fonction de la vitesse de translation du piston  $\dot{\lambda}(t)$ . La fermeture géométrique est donc la suivante :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}.$$

Le mécanisme étant plan dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , on ne tient pas compte des distances suivant  $\vec{z}_0$  et on a :

$$\overrightarrow{ex_1} + L\vec{x}_2 - \lambda(t)\vec{y}_0 = \overrightarrow{0}.$$

Exprimons  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$  dans la base  $\mathcal{R}_0$  :

$$\begin{cases} \vec{x}_1 &= \cos \alpha(t) \vec{x}_0 + \sin \alpha(t) \vec{y}_0 \\ \vec{x}_2 &= \cos \beta(t) \vec{x}_1 + \sin \beta(t) \vec{y}_1 \\ &= \cos \beta(t) \left( \cos \alpha(t) \vec{x}_0 + \sin \alpha(t) \vec{y}_0 \right) + \sin \beta(t) \left( \cos \alpha(t) \vec{y}_0 - \sin \alpha(t) \vec{x}_0 \right) \end{cases}$$

On peut aussi observer que directement  $\vec{x}_2 = \cos(\alpha(t) + \beta(t)) \vec{x}_0 + \sin(\alpha(t) + \beta(t)) \vec{y}_0$ . En projetant l'équation vectorielle sur  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  on a :

$$\begin{cases} e \cos \alpha + L \cos(\alpha + \beta) = 0 \\ e \sin \alpha + L \sin(\alpha + \beta) - \lambda = 0 \end{cases}$$

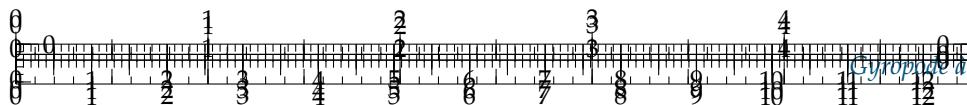
On cherche à éliminer à  $\alpha + \beta$  :

$$\begin{cases} L \cos(\alpha + \beta) = -e \cos \alpha \\ L \sin(\alpha + \beta) = \lambda - e \sin \alpha \end{cases}$$

En passant au carré et en sommant les deux expressions, on a donc :

$$L^2 = e^2 \cos^2 \alpha + \lambda^2 + e^2 \sin^2 \alpha - 2\lambda e \sin \alpha = e^2 + \lambda^2 - 2\lambda e \sin \alpha.$$





Et donc :

$$\lambda^2 - 2\lambda e \sin \alpha + e^2 - L^2 = 0$$

On a  $\Delta = 4e^2 \sin^2 \alpha - 4(e^2 - L^2)$  et  $\lambda = \frac{2e \sin \alpha \pm \sqrt{4e^2 \sin^2 \alpha - 4(e^2 - L^2)}}{2} = e \sin \alpha \pm \sqrt{e^2 \sin^2 \alpha - (e^2 - L^2)}$ .

Au final,

$$\lambda(t) = e \sin \alpha(t) + \sqrt{e^2 \sin^2 \alpha(t) - (e^2 - L^2)}$$

**Question 4** Déterminer la loi entrée-sortie cinématique du système.

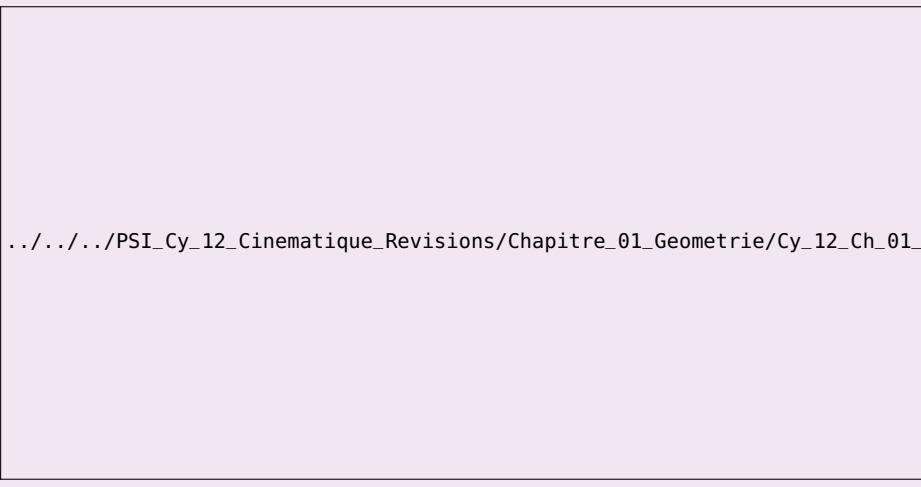
#### Correction

Il suffit de dériver l'expression précédente :

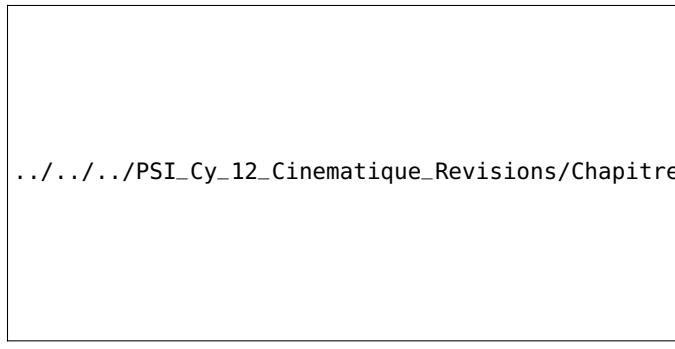
$$\lambda(t) = e \dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) + \frac{1}{2} \left( 2e^2 \dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \cos \alpha(t) \right) \left( e^2 \sin^2 \alpha(t) - (e^2 - L^2) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

**Question 5** Tracer l'allure de la loi de vitesse du piston.

#### Correction



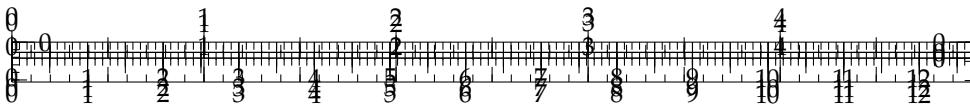
Une simulation réalisée sous Méca3D permet d'obtenir l'évolution de l'accélération du piston :



**Question 6** Conclure vis-à-vis du cahier des charges.







## Application 2

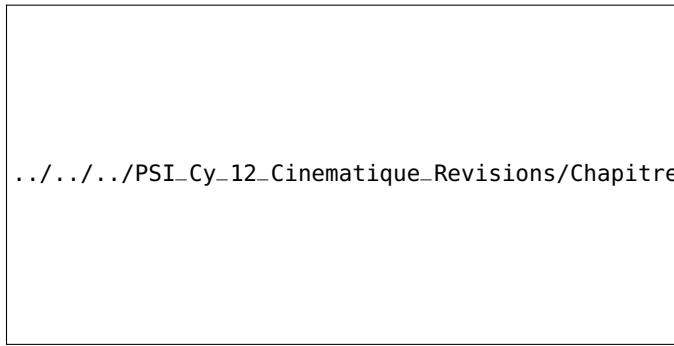
### Joint de cardan – Sujet

#### Joint de Cardan

Un joint de Cardan est un accouplement qui permet de transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres concourants mais non alignés. L'angle maximum pratiquement utilisé entre les arbres est de 45. Une application courante est la transmission entre boîte de vitesses et roues-avant d'une voiture.

Les vues ci-contre donnent des images d'un joint de cardan.

La modélisation suivante est proposée.



On appelle :

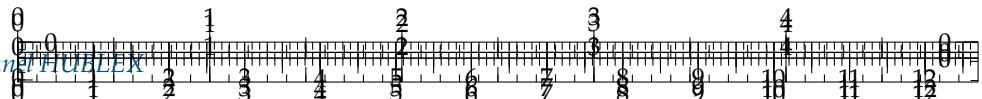
- ▶  $\mathcal{R}$  le repère lié au solide  $R$  considéré comme fixe.  $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ;
- ▶  $\mathcal{R}'$  le repère lié au solide  $R$  considéré comme fixe.  $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ . On pose  $\alpha = (\vec{y}, \vec{v})$  (constant);
- ▶  $\alpha$  l'"angle de brisure";
- ▶  $\mathcal{R}_1$  le repère lié au solide 1.  $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}_1)$ . On pose  $\theta_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ ;
- ▶  $\mathcal{R}_3$  le repère lié au solide 3.  $\mathcal{R}_3 = (O, \vec{x}_3, \vec{v}, \vec{z}_3)$ . On pose  $\theta_3 = (\vec{u}, \vec{x}_3)$ .

**Question 1** Tracer en vue orthogonale, les trois dessins (figures de changement de base) permettant le passage de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}_1$ , de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  et de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}_3$ .

**Question 2** Exprimer la condition géométrique sur 2 permettant de lier  $\mathcal{R}_1$  à  $\mathcal{R}_3$ .

**Question 3** Développer cette relation et trouver la loi entrée sortie :  $\theta_3 = f(\theta_1, \alpha)$ .  
Tracer, pour  $\alpha = 45$ , la courbe représentant l'évolution de la sortie  $\theta_3$  en fonction de l'entrée  $\theta_1$  avec  $\theta_1$  variant de  $-\pi$  à  $+\pi$ .





.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_revisee/Chapitre\_01\_Geometrie/Cy\_12\_Ch\_01\_Application\_02\_Cardan/images/

**Question 4** Dériver cette relation par rapport au temps pour trouver la vitesse de sortie  $\dot{\theta}_3$  en fonction de la vitesse d'entrée  $\dot{\theta}_1$ , de  $\theta_1$  et de  $\alpha$ .

**Question 5** Tracer l'évolution de la vitesse de sortie  $\dot{\theta}_3$  en fonction notamment de l'évolution de l'angle d'entrée  $\theta_1$ . On prendra un angle de brisure de 45 et une vitesse d'entrée constante de 1 rad/s.

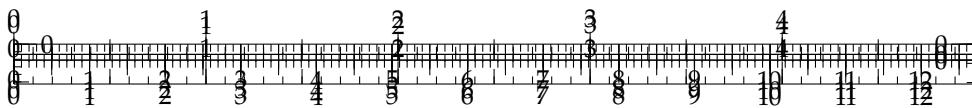
**Question 6** Conclure sur une des propriétés de ce mécanisme.

.../.../Style/png/logo\_lycee.png

Xavier Pessoles - <https://xpresstiles.gitehup.com/>

Sciences Industrielles de l'Ingénieur 1 PSI★2





## Application 2

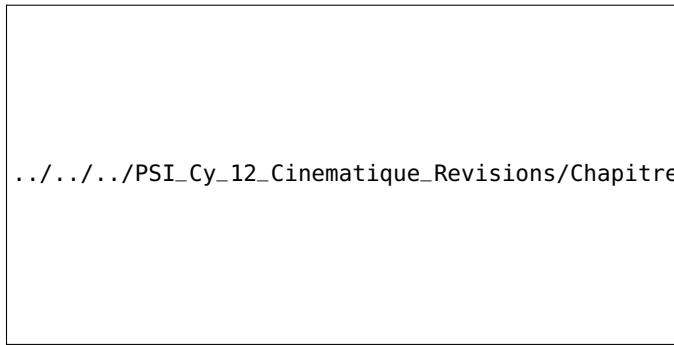
### Joint de cardan – Corrigé

#### Joint de Cardan

Un joint de Cardan est un accouplement qui permet de transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres concourants mais non alignés. L'angle maximum pratiquement utilisé entre les arbres est de 45. Une application courante est la transmission entre boîte de vitesses et roues-avant d'une voiture.

Les vues ci-contre donnent des images d'un joint de cardan.

La modélisation suivante est proposée.



[.../.../.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_Revisions/Chapitre\\_01\\_Geometrie/Cy\\_12\\_Ch\\_01\\_Application\\_02\\_Cardan/joint\\_01.dwg](#)

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_Revisions/Chapitre\\_01\\_Geometrie/Cy\\_12\\_Ch\\_01\\_Application\\_02\\_Cardan/joint\\_02.dwg](#)

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_Revisions/Chapitre\\_01\\_Geometrie/Cy\\_12\\_Ch\\_01\\_Application\\_02\\_Cardan/joint\\_03.dwg](#)

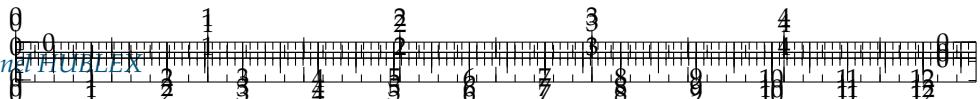
On appelle :

- ▶  $\mathcal{R}$  le repère lié au solide  $R$  considéré comme fixe.  $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ;
- ▶  $\mathcal{R}'$  le repère lié au solide  $R$  considéré comme fixe.  $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ . On pose  $\alpha = (\vec{y}, \vec{v})$  (constant);
- ▶  $\alpha$  l'"angle de brisure";
- ▶  $\mathcal{R}_1$  le repère lié au solide 1.  $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}_1)$ . On pose  $\theta_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ ;
- ▶  $\mathcal{R}_3$  le repère lié au solide 3.  $\mathcal{R}_3 = (O, \vec{x}_3, \vec{v}, \vec{z}_3)$ . On pose  $\theta_3 = (\vec{u}, \vec{x}_3)$ .

**Question 1** Tracer en vue orthogonale, les trois dessins (figures de changement de base) permettant le passage de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}_1$ , de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  et de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}_3$ .

#### Correction





**Question 2** Exprimer la condition géométrique sur 2 permettant de lier  $\theta_1$  à  $\theta_3$ .

**Correction**

**Question 3** Développer cette relation et trouver la loi entrée sortie :  $\theta_3 = f(\theta_1, \alpha)$ . Tracer, pour  $\alpha = 45$ , la courbe représentant l'évolution de la sortie  $\theta_3$  en fonction de l'entrée  $\theta_1$  avec  $\theta_1$  variant de  $-\pi$  à  $+\pi$ .

**Correction**

**Question 4** Dériver cette relation par rapport au temps pour trouver la vitesse de sortie  $\dot{\theta}_3$  en fonction de la vitesse d'entrée  $\dot{\theta}_1$ , de  $\theta_1$  et de  $\alpha$ .

**Correction**

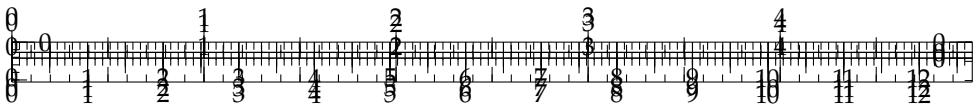
**Question 5** Tracer l'évolution de la vitesse de sortie  $\dot{\theta}_3$  en fonction notamment de l'évolution de l'angle d'entrée  $\theta_1$ . On prendra un angle de brisure de 45 et une vitesse d'entrée constante  $\dot{\theta}_1$  de 1 rad/s.

**Correction**

**Question 6** Conclure sur une des propriétés de ce mécanisme.

**Correction**





## Application 3

### TODO – Tête de découpe de tissus – Sujet

CCP MP 2018

#### Présentation du système

Le système étudié dans ce sujet est une tête de coupe de tissus conçue et réalisée par la société française Lectra, leader mondial dans la découpe automatisée des tissus. Un système de découpe automatisé de tissus est composé :

- ▶ d'une table de découpe sur laquelle le tissus à découper (appelé matelas) est maintenu en position par aspiration ;
- ▶ d'un bras transversal qui se déplace en translation de direction  $\vec{y}_0$  par rapport à la table ;
- ▶ d'une tête de coupe qui se déplace en translation de direction  $\vec{x}_0$  par rapport au bras transversal ;
- ▶ d'un ordinateur qui pilote l'ensemble du système.

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Rev

#### Objectif

Déterminer la loi entrée/sortie de la chaîne cinématique de la tête de coupe et valider son comportement vis-à-vis des exigences :

- ▶ 1.2.2.3 : la lame doit se déplacer d'une amplitude minimale de 20 mm ;
- ▶ 1.2.2.4 : la vitesse de coupe maximale doit être de  $4 \text{ m s}^{-1}$  à  $\pm 5\%$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Rev

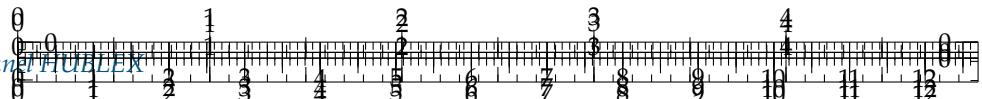
#### Modélisation du comportement de la tête de coupe

La découpe du tissu est réalisée par un mouvement de translation alternative d'une lame par rapport au matelas de tissus. Ce mouvement est obtenu par un système bielle-manivelle dont le schéma cinématique est donné à la figure suivante. Les mouvements de translation de la tête de coupe par rapport à la table impliquent que les bases  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  et  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , liées respectivement à la tête de coupe et à la table, sont identiques.

- ▶ On associe le repère  $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  à la tête 2, le repère  $\mathcal{R}_3 = (A; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  à la manivelle 3, le repère  $\mathcal{R}_4 = (B; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  à la bielle 4 et le repère  $\mathcal{R}_5 = (C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  à la lame 5.
- ▶ La manivelle 3 est en liaison pivot avec la tête 2, d'axe  $(A, \vec{y}_2)$  et d'angle  $\theta_{32}(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Rev





- La manivelle 3 est en liaison pivot avec la bielle 4, d'axe  $(B, \vec{y}_2)$  et d'angle  $\theta_{43}(t) = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$ .
- La bielle 4 est en liaison pivot avec la lame 5, d'axe  $(C, \vec{y}_0)$  et d'angle  $\theta_{54}(t) = (\vec{x}_4, \vec{x}_2) = (\vec{z}_4, \vec{z}_2)$ .
- La lame 5 est en liaison glissière avec la tête 2, de direction  $z_2$  et de paramètre linéaire  $\lambda(t)$ .

On pose  $\omega_{ij}(t) = \frac{d\theta_{ij}(t)}{dt} = \dot{\theta}_{ij}(t)$ ,  $\overrightarrow{AB} = L_3 \vec{z}_3$  avec  $L_3 = 12,5 \text{ mm}$ ,  $\overrightarrow{BC} = L_4 \vec{z}_4$  avec  $L_4 = 80 \text{ mm}$  et  $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \vec{z}_2$ .

**Question 7** Déterminer la relation entre les paramètres angulaires  $\theta_{32}(t)$ ,  $\theta_{43}(t)$  et  $\theta_{54}(t)$ .

**Question 8** À l'aide d'une fermeture géométrique, déterminer la relation entre le paramètre  $\lambda(t)$ , l'angle  $\theta_{32}(t)$  et les données géométriques du système.

**Question 9** En déduire l'expression littérale de l'amplitude des oscillations de la lame, notée  $\Delta z$ . Faire l'application numérique et conclure sur le respect de l'exigence 1.2.2.3.

**Question 10** Calculer le rapport  $\left(\frac{L_4}{L_3}\right)^2$  et la comparer à la valeur 1. Montrer alors que la loi obtenue à la question ?? peut se mettre sous la forme  $\lambda(t) \simeq L_3 \cos \theta_{32} + L_4$ .

Afin de valider cette approximation, les deux fonctions mathématiques ont été tracées sur un tour de l'arbre moteur.

**Question 11** Conclure sur l'adoption de la loi approximée dans la suite de l'étude.

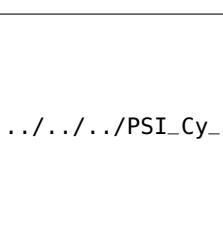
Afin de valider le critère associé à l'exigence de vitesse de coupe, il est nécessaire de déterminer la loi en vitesse de la lame notée  $\dot{\lambda}(t)$ .

**Question 12** Déterminer l'expression littérale de  $\dot{\lambda}(t)$  à partir du modèle simplifié de  $\lambda(t)$ .

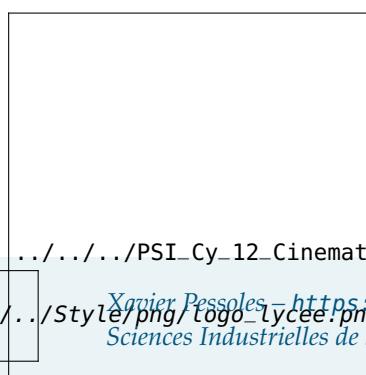
Cette loi en vitesse simplifiée a été tracée sur la figure suivante pour être comparée à la loi obtenue à partir du modèle établi en question ??.

**Question 13** La simplification de la loi en vitesse permet-elle de valider l'exigence 1.2.2.4. ?

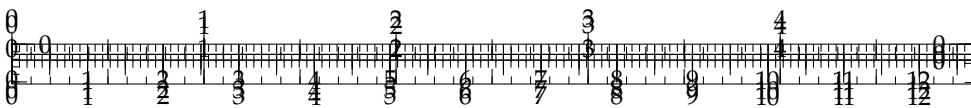
FIGURE 12.1 – Évolution théorique (—) et approximée (- -) du paramètre  $\lambda$ .



.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_01\_Geometrie/Cy\_12\_Ch\_01\_TD\_01\_Decoupe/images/Cy\_12\_C...



.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_01\_Geometrie/Cy\_12\_Ch\_01\_TD\_01\_Decoupe/images/fig\_05.png  
Xavier Pessoles - <https://xpresstool.gieselsoft.com/>  
Sciences Industrielles de l'Ingénieur 1 PSI★2



## Application 3

### TODO – Tête de découpe de tissus – Corrigé

CCP MP 2018

#### Présentation du système

##### Objectif

Déterminer la loi entrée/sortie de la chaîne cinématique de la tête de coupe et valider son comportement vis-à-vis des exigences :

- ▶ 1.2.2.3 : la lame doit se déplacer d'une amplitude minimale de 20 mm;
- ▶ 1.2.2.4 : la vitesse de coupe maximale doit être de  $4 \text{ m s}^{-1}$  à  $\pm 5\%$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Rev

#### Modélisation du comportement de la tête de coupe

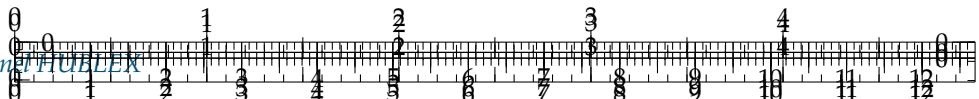
La découpe du tissu est réalisée par un mouvement de translation alternative d'une lame par rapport au matelas de tissus. Ce mouvement est obtenu par un système bielle-manivelle dont le schéma cinématique est donné à la figure suivante. Les mouvements de translation de la tête de coupe par rapport à la table impliquent que les bases  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  et  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , liées respectivement à la tête de coupe et à la table, sont identiques.

- ▶ On associe le repère  $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  à la tête 2, le repère  $\mathcal{R}_3 = (A; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  à la manivelle 3, le repère  $\mathcal{R}_4 = (B; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  à la bielle 4 et le repère  $\mathcal{R}_5 = (C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  à la lame 5.
- ▶ La manivelle 3 est en liaison pivot avec la tête 2, d'axe  $(A, \vec{y}_2)$  et d'angle  $\theta_{32}(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ .
- ▶ La manivelle 3 est en liaison pivot avec la bielle 4, d'axe  $(B, \vec{y}_2)$  et d'angle  $\theta_{43}(t) = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$ .
- ▶ La bielle 4 est en liaison pivot avec la lame 5, d'axe  $(C, \vec{y}_0)$  et d'angle  $\theta_{54}(t) = (\vec{x}_4, \vec{x}_2) = (\vec{z}_4, \vec{z}_2)$ .
- ▶ La lame 5 est en liaison glissière avec la tête 2, de direction  $z_2$  et de paramètre linéaire  $\lambda(t)$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Rev

On pose  $\omega_{ij}(t) = \frac{d\theta_{ij}(t)}{dt} = \dot{\theta}_{ij}(t)$ ,  $\overrightarrow{AB} = L_3 \vec{z}_3$  avec  $L_3 = 12,5 \text{ mm}$ ,  $\overrightarrow{BC} = L_4 \vec{z}_4$  avec  $L_4 = 80 \text{ mm}$  et  $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \vec{z}_2$ .





**Question 14** Déterminer la relation entre les paramètres angulaires  $\theta_{32}(t)$ ,  $\theta_{43}(t)$  et  $\theta_{54}(t)$ .

**Correction**

**Question 15** À l'aide d'une fermeture géométrique, déterminer la relation entre le paramètre  $\lambda(t)$ , l'angle  $\theta_{32}(t)$  et les données géométriques du système.

**Correction**

**Question 16** En déduire l'expression littérale de l'amplitude des oscillations de la lame, notée  $\Delta z$ . Faire l'application numérique et conclure sur le respect de l'exigence 1.2.2.3.

**Correction**

**Question 17** Calculer le rapport  $\left(\frac{L_4}{L_3}\right)^2$  et la comparer à la valeur 1. Montrer alors que la loi obtenue à la question ?? peut se mettre sous la forme  $\lambda(t) \simeq L_3 \cos \theta_{32} + L_4$ .

**Correction**

Afin de valider cette approximation, les deux fonctions mathématiques ont été tracées sur un tour de l'arbre moteur.

**Question 18** Conclure sur l'adoption de la loi approximée dans la suite de l'étude.

**Correction**

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_01\_Geometrie/Cy\_12\_Ch\_01\_TD\_01\_Decoupe/images/fig\_04.png  
Afin de valider le critère associé à l'exigence de vitesse de coupe, il est nécessaire de déterminer la loi en vitesse de la lame notée  $\dot{\lambda}(t)$ .

**Question 19** Déterminer l'expression littérale de  $\dot{\lambda}(t)$  à partir du modèle simplifié de  $\lambda(t)$ .

**Correction**

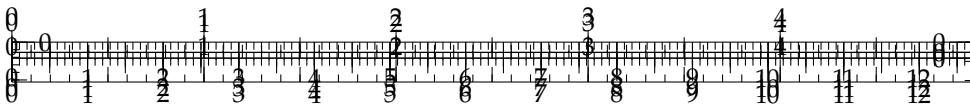
Cette loi en vitesse simplifiée a été tracée sur la figure suivante pour être comparée à la loi obtenue à partir du modèle établi en question ??.

**Question 20** La simplification de la loi en vitesse permet-elle de valider l'exigence 1.2.2.4. ?

**Correction**

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_01\_Geometrie/Cy\_12\_Ch\_01\_TD\_01\_Decoupe/images/fig\_05.png





## 13 Modélisation cinématique

### Définition – Solide Indéformable

On considère deux points  $A$  et  $B$  d'un solide indéformable noté  $S$ . On note  $t$  le temps.  $\forall A, B \in S, \forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB}(t)^2 = \text{constante}$ .

### Définition – Trajectoire d'un point appartenant à un solide

Soit un point  $P$  se déplaçant dans un repère  $\mathcal{R}_0 \left( O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0 \right)$ . La trajectoire du point  $P$  est définie par la courbe  $\mathcal{C}(t)$  paramétrée par le temps  $t$ . On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{OP(t)} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = x(t)\vec{i}_0 + y(t)\vec{j}_0 + z(t)\vec{k}_0$$

### Définition – Vitesse d'un point appartenant à un solide

Soit un solide  $S_0$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_0 \left( O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0 \right)$ . Soit un solide  $S_1$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_1, \left( O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \right)$ . Le solide  $S_1$  est en mouvement par rapport au solide  $S_0$ . Soit un point  $P$  appartenant au solide  $S_1$ . La vitesse du point  $P$  appartenant au solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_0$  se calcule donc ainsi :

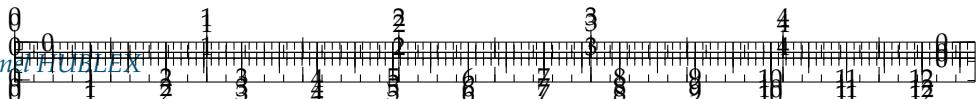
$$\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)}(t) = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_0P(t)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

### Résultat –

Lorsque il n'y a pas de degré de liberté de translation dans une liaison, la vitesse au centre de la liaison est nulle. Ainsi :

- ▶ si les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison rotule de centre  $O$  alors  $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \vec{0}$  ;
- ▶ si les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison pivot de d'axe  $(O, \vec{u})$  alors  $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \vec{0}$  ;
- ▶ si les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison rotule à doigt de centre  $O$  alors  $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \vec{0}$ .





### Résultat – Déivation vectorielle

Soient  $S_0$  et  $S_1$  deux solides en mouvements relatifs et  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  les repères orthonormés directs associés. Soit  $\vec{v}$  un vecteur de l'espace. On note  $\overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$  le vecteur instantané de rotation permettant d'exprimer les rotations entre chacune des deux bases. La dérivée d'un vecteur dans une base mobile se calcule donc ainsi :

$$\left[ \frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \vec{v}.$$

### Résultat – Champ du vecteur vitesse dans un solide – Formule de Varignon – Formule de BABAR

Soient  $A$  et  $B$  deux points appartenant à un solide  $S_1$  en mouvement par rapport à  $S_0$ . Le champ des vecteurs vitesses est donc déterminé ainsi :

$$\overrightarrow{V(B \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(A \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}_{\vec{R}}$$

### Résultat – Composition du vecteur vitesse

Soit un solide  $S_1$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  et un solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$ . Pour chacun des points  $A$  appartenant au solide  $S_2$ , on a :

$$\overrightarrow{V(A, S_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V(A, S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(A, S_1/\mathcal{R}_0)}$$

#### Remarque

- ▶  $\overrightarrow{V(A, S_2/\mathcal{R}_0)}$  est appelé vecteur vitesse absolu;
- ▶  $\overrightarrow{V(A, S_2/S_1)}$  est appelé vecteur vitesse relatif;
- ▶  $\overrightarrow{V(A, S_1/\mathcal{R}_0)}$  est appelé vecteur vitesse d'entraînement.

### Résultat – Composition du vecteur vitesse

Soit un solide  $S_1$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  et un solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$ . On a :

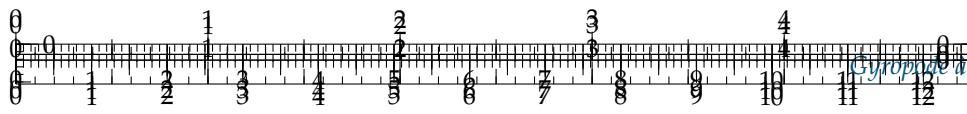
$$\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)}$$

### Définition – Accélération d'un point appartenant à un solide

Soit un solide  $S_0$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ . Soit un solide  $S_1$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_1 (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ . Le solide  $S_1$  est en mouvement par rapport au solide  $S_0$ .

Soit un point  $P$  appartenant au solide  $S_1$ . L'accélération du point  $P$  appartenant au



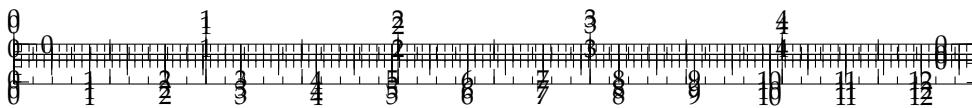


solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_0$  se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/S_0)}(t) = \left[ \frac{d(\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)}(t))}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$







## Application 1 Centrifugeuse humaine – Sujet

Afin d'analyser les effets de l'accélération sur le corps humaine, le CNRS / MEDES a développé une centrifugeuse humaine. On donne ci-dessous la modélisation cinématique de la centrifugeuse.

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_03\_VitesseAcceleration/Cy\_12\_Ch\_03\_Application

Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci dessous :

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_03\_VitesseAcceleration/Cy\_12\_Ch\_03\_Application

Les paramètres constants du système sont les suivants :

- $\overrightarrow{O_0O_1} = a \vec{i}_1$  ;
- $\overrightarrow{O_1G} = b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$ .

### Trajectographie

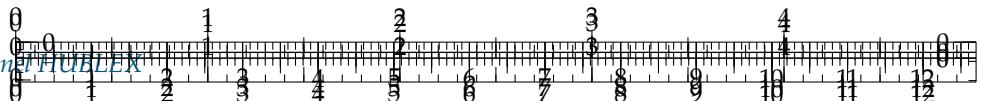
**Question 1** Donner la trajectoire du point G dans le repère  $\mathcal{R}_0$ .

### Cinématique

**Question 2** Calculer  $\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)}$ .



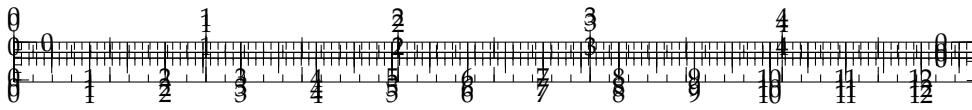
.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique



### Accélération

**Question 3** Calculer  $\overrightarrow{\Gamma(G, S_2/S_0)}$ .

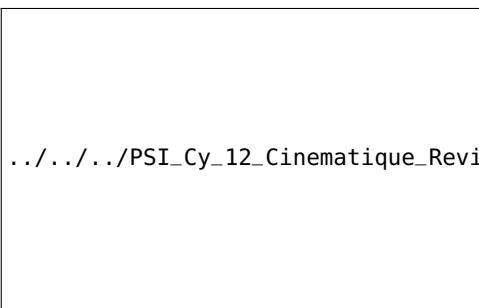




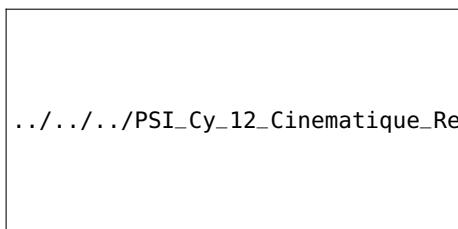
## Application 1

### Centrifugeuse humaine – Corrigé

Afin d'analyser les effets de l'accélération sur le corps humaine, le CNRS / MEDES a développé une centrifugeuse humaine. On donne ci-dessous la modélisation cinématique de la centrifugeuse.



Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci dessous :



Les paramètres constants du système sont les suivants :

- $\overrightarrow{O_0O_1} = a \vec{i}_1$ ;
- $\overrightarrow{O_1G} = b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$ .

#### Trajectographie

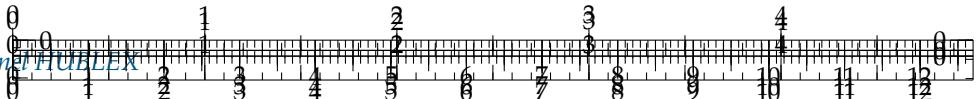
**Question 1** Donner la trajectoire du point G dans le repère  $\mathcal{R}_0$ .

#### Correction

La trajectoire du point G dans le repère  $\mathcal{R}_0$  est donnée par le vecteur :

$$\overrightarrow{O_0G}(t) = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1G} = a \vec{i}_1 + b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$$





Il faut alors projeter les vecteurs dans  $\mathcal{R}_0$  :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_0G}(t) &= a \left( \cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0 \right) + b \left( \cos \beta(t) \vec{i}_1 - \sin \beta(t) \vec{k}_1 \right) + c \left( \cos \beta(t) \vec{k}_1 + \sin \beta(t) \vec{i}_1 \right) \\ &= a \left( \cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0 \right) + b \left( \cos \beta(t) \left( \cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0 \right) - \sin \beta(t) \vec{k}_0 \right) \\ &\quad + c \left( \cos \beta(t) \vec{k}_0 + \sin \beta(t) \left( \cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0 \right) \right) \\ &= \begin{bmatrix} a \cos \alpha(t) + b \cos \beta(t) \cos \alpha(t) + c \sin \beta(t) \cos \alpha(t) \\ a \sin \alpha(t) + b \cos \beta(t) \sin \alpha(t) + c \sin \beta(t) \sin \alpha(t) \\ -b \sin \beta(t) + c \cos \beta(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}\end{aligned}$$

On a ainsi l'équation paramétrique de la position du point G.

## Cinématique

**Question 2** Calculer  $\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)}$ .

## Accélération

**Question 3** Calculer  $\overrightarrow{\Gamma(G, S_2/S_0)}$ .

### Correction

**Méthode 1 – PAS RECOMMANDÉ** Par définition,

$$\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = \left[ \frac{d \overrightarrow{O_0 O_1}(t)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d(a \vec{i}_1)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = a \left[ \frac{d \vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

On a :

$$\begin{aligned}\left[ \frac{d \vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} &= \left[ \frac{d \left( \cos \alpha(t) \vec{i}_0 + \sin \alpha(t) \vec{j}_0 \right)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d \cos \alpha(t) \vec{i}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + \left[ \frac{d \sin \alpha(t) \vec{j}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \underbrace{\frac{d \cos \alpha(t)}{dt} \vec{i}_0 + \cos \alpha(t) \left[ \frac{d \vec{i}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}}_{\vec{0}} + \underbrace{\frac{d \sin \alpha(t)}{dt} \vec{i}_0 + \sin(t) \left[ \frac{d \vec{j}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}}_{\vec{0}} \\ &= -\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \vec{i}_0 + \dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) \vec{j}_0 = \dot{\alpha}(t) \vec{j}_1\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = \begin{bmatrix} -a \dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \\ a \dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \dot{\alpha}(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

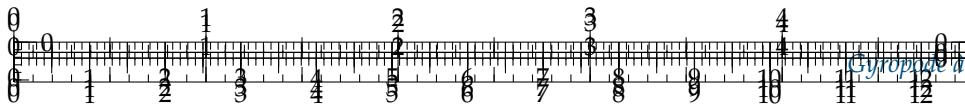
Dans les deux cas,  $\overrightarrow{O_0 O_1}(t)$  est dérivé par rapport  $\mathcal{R}_0$  mais il s'exprime différemment dans  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  :

- ▶  $\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = -a \dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \vec{i}_0 + a \dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) \vec{j}_0$  : ici la base de **projection** et de **dérivation** est la base  $\mathcal{B}_0$ ;
- ▶  $\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = a \dot{\alpha}(t) \vec{j}_1$  : ici la base de dérivation est la base  $\mathcal{B}_0$  et la base de projection est  $\mathcal{B}_1$ .

**Méthode 2 – Utilisation de la dérivation vectorielle.**

Calcul de  $\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)}$ .





On rappelle que :

$$\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = a \left[ \frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Le calcul de  $\left[ \frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$  peut donc être réalisé ainsi :

$$\left[ \frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left[ \frac{d\vec{i}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \vec{i}_1 = \dot{\alpha} \vec{k}_0 \wedge \vec{i}_1 = \dot{\alpha} \vec{j}_1$$

Ainsi

$$\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = a \dot{\alpha} \vec{j}_1$$

**Méthode 3 – Calcul de  $\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)}$ .**

$S_1$  et  $S_0$  sont en liaison pivot de centre  $O_0$ , on a donc :  $\overrightarrow{V(O_0, S_1/S_0)} = \vec{0}$ .

En conséquence,

$$\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(O_0, S_1/S_0)} + \overrightarrow{O_1 O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \vec{0} - a \vec{i}_1 \wedge (\dot{\alpha} \vec{k}_0) = a \dot{\alpha} \vec{j}_1$$

### Correction

Calcul de  $\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)}$ .

On a :

$$\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)} = \overrightarrow{V(G, S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(G, S_1/S_0)}$$

Calculons  $\overrightarrow{V(G, S_1/S_0)}$  :

$$\overrightarrow{V(G, S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} + \overrightarrow{GO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = a \dot{\alpha} \vec{j}_1 - (b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2) \wedge (\dot{\alpha} \vec{k}_0)$$

$$\overrightarrow{V(G, S_1/S_0)} = a \dot{\alpha} \vec{j}_1 + b \dot{\alpha} \sin(\beta + \pi/2) \vec{j}_1 + c \dot{\alpha} \sin \beta \vec{j}_1 = \dot{\alpha} (a + b \cos \beta + c \sin \beta) \vec{j}_1$$

Par ailleurs calculons  $\overrightarrow{V(G, S_2/S_1)}$  :

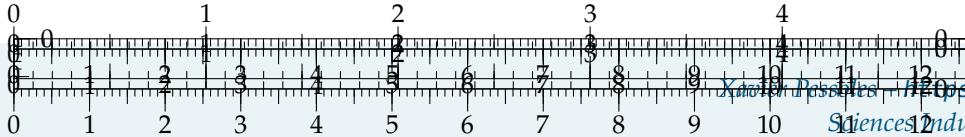
$$\overrightarrow{V(G, S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(O_1, S_2/S_1)} + \overrightarrow{GO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = - (b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2) \wedge (\dot{\beta} \vec{j}_1) = -\dot{\beta} (b \vec{k}_2 - c \vec{i}_2)$$

Au final,

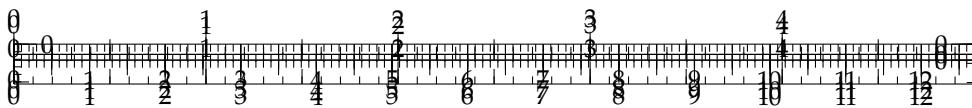
$$\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)} = \dot{\alpha} (a + b \cos \beta + c \sin \beta) \vec{j}_1 - \dot{\beta} (b \vec{k}_2 - c \vec{i}_2)$$

Il est aussi possible de calculer  $\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)}$  ainsi :

$$\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_0 G}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$







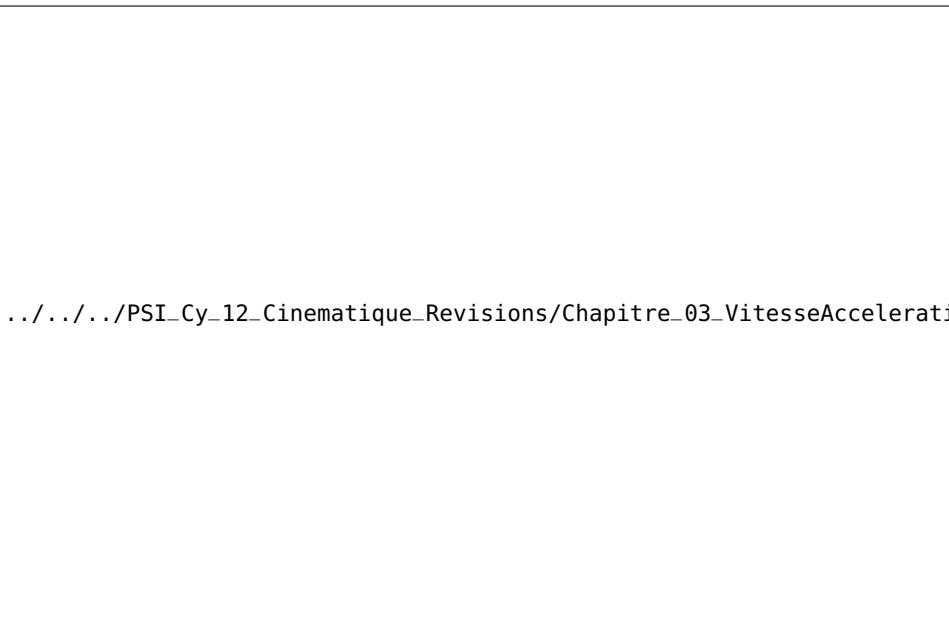
## Application 2

### Magic Arms – Sujet

Florestan Mathurin.

La manège Magic Arms dont la modélisation ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel est composé d'une structure métallique d'environ 12 m de haut avec deux bras mobiles. Les passagers s'assoient sur 39 pièces disposées sur une plate-forme tournante. Dès que tous les passagers sont assis et attachés, la nacelle tourne autour de son axe, le bras principal (bras 1) et le bras secondaires (bras 2), liés l'un à l'autre au début du cycle, commencent à tourner. Après 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les deux bras se désindexent et se mettent à tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par ordinateur.

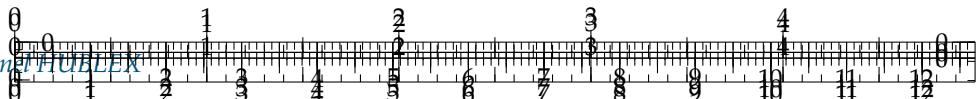
[.../.../.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_Rev](.../.../.../PSI_Cy_12_Cinematique_Rev)



Le manège, schématisé ci-dessus, comporte :

- ▶ un bras principal **1** assimilé à une barre  $AO_1O_2$ . Il est en liaison pivot parfait d'axe  $(O_1, \vec{z}_1)$  caractérisée par le paramètre  $\alpha$  avec le bâti **0**. On pose  $\overrightarrow{O_1O_2} = -l_1\vec{y}_1$ ;
- ▶ un bras secondaire **2** assimilé à une barre  $BO_2O_3$ . Il est en liaison pivot parfait d'axe  $(O_2, \vec{z}_2)$  caractérisée par le paramètre  $\beta$  avec le bras principal **1**. On pose  $\overrightarrow{O_2O_3} = -l_2\vec{y}_2$ ;
- ▶ une nacelle **2** assimilée à un disque de centre  $O_3$  et de rayon  $R$ . Elle est en liaison parfaite d'axe  $(O_3, \vec{y}_2)$  caractérisée par le paramètre  $\varphi$  avec le bras **2**.





On s'intéresse plus particulièrement à un passager considéré comme un point matériel  $P$  tel que  $\overrightarrow{O_3P} = -R\vec{z}_3$ .

**Question 1** Construire les figures planes associées au schéma cinématique.

**Question 2** Calculer  $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$ ,  $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$ .

**Question 3** Calculer  $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$ .

**Question 4** Calculer les produits vectoriels suivants :  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2$ ,  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1$ ,  $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0$ .

**Question 5** Calculer  $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)}$ ,  $\overrightarrow{V(O_3, 3/0)}$  et  $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ .

On donne, sur la figure en bas de page (à gauche) l'évolution des vitesses angulaires des moteurs du manège en fonction du temps.

**Question 6** Déterminer les valeurs des paramètres  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  et  $\dot{\varphi}$  puis l'expression analytique des positions angulaires  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  et  $\varphi(t)$  dans l'intervalle de temps [17; 27] secondes en sachant qu'à l'instant  $t = 17$  s, on a  $\alpha = 10,5$  rad,  $\beta = 3,76$  rad et  $\varphi = -10,676$  rad.

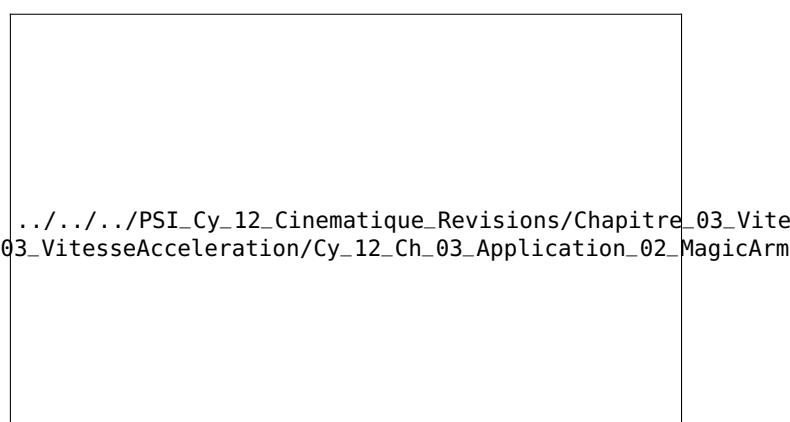
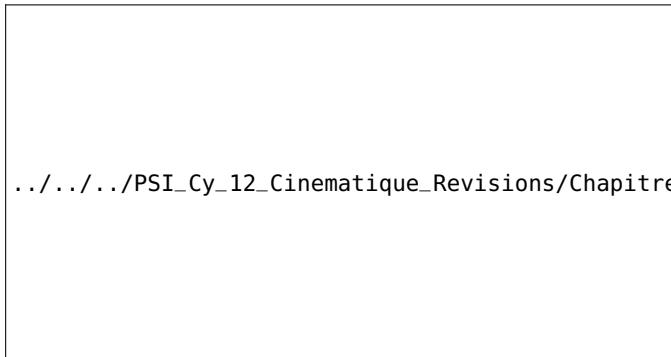
**Question 7** Déterminer les valeurs numériques à l'instant  $t_1 = 19,8$  s de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\varphi$ .

**Question 8** On pose  $\overrightarrow{V(P, 3/0)} = V_{x2}\vec{x}_2 + V_{y2}\vec{y}_2 + V_{z2}\vec{z}_2$ . Déterminer les expressions littérales de  $V_{x2}$ ,  $V_{y2}$ ,  $V_{z2}$  puis les valeurs numériques de à  $t_1 = 19,8$  s. (On donne :  $l_1 = 3,9$  m,  $l_2 = 2,87$  m,  $R = 2,61$  m.)

**Question 9** Calculer  $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$ .

**Question 10** Calculer  $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$  dans l'intervalle de temps [17; 27] secondes pour lequel les vitesses angulaires sont constantes.

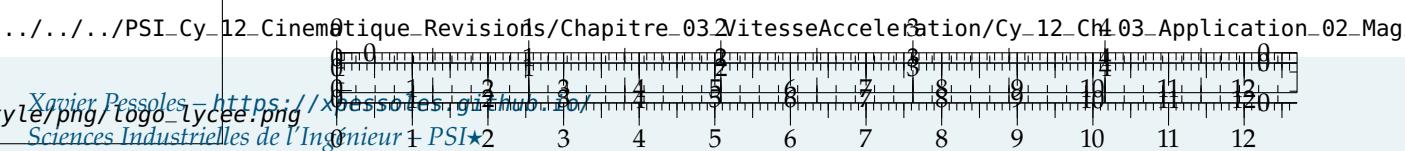
Le graphe ci-dessous (à droite), obtenu par simulation numérique, présente le module de la vitesse du passager  $P$  par rapport au bâti 0 ainsi que le module de l'accélération du passager  $P$  par rapport au bâti 0 en fonction du temps.

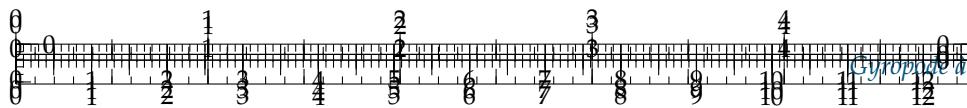


**Question 11** Comparer les résultats obtenus à la question ?? à ceux du graphe pour le temps  $t_1 = 19,8$  s.

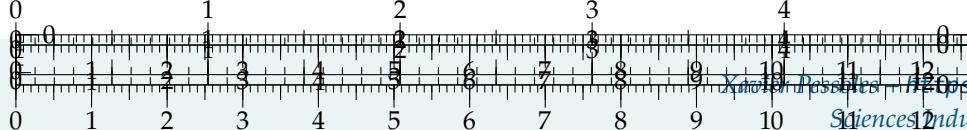
**Question 12** Relever l'accélération maximale subie par le passager et conclure vis-à-vis du CdCF.

1.

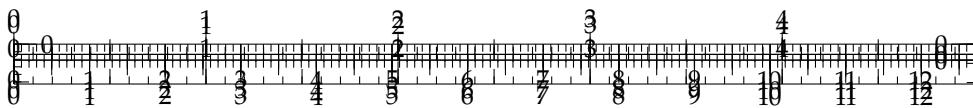




2.  $\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0, \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta} \vec{z}_0, \overrightarrow{\Omega(3/2)} = \dot{\varphi} \vec{y}_2.$
3.  $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0, \overrightarrow{\Omega(3/0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\varphi} \vec{y}_2;$
4.  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3 = \sin \varphi \vec{y}_2, \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\sin \varphi \vec{y}_2, \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 = -\cos \varphi \vec{y}_2, \vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1 = \vec{0},$   
 $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0 = -\sin(\beta + \alpha) \vec{z}_0, \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0 = -\cos \varphi \vec{y}_2.$
5.  $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1, \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2, \overrightarrow{V(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3$
6.  $\dot{\alpha} = 0,84 \text{ rad/s}, \dot{\beta} = 0,94 \text{ rad/s}, \dot{\varphi} = -0,628 \text{ rad/s}$  et  $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^t \dot{\alpha} d\tau.$
7.  $\alpha = [12, 85 \text{ rad}], \beta = [6, 39 \text{ rad}], \varphi = [12, 43 \text{ rad}].$
8.  $V_{x2} = l_1 \dot{\alpha} \cos \beta + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - R \dot{\varphi} \cos \varphi = [9, 99 \text{ m/s}], V_{y2} = -l_1 \dot{\alpha} \sin \beta - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = [-0, 28 \text{ m/s}], V_{z2} = R \dot{\varphi} \sin \varphi = [-0, 22 \text{ m/s}].$
9.  $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \ddot{\alpha} \vec{x}_1 + l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{x}_2 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 - R \ddot{\varphi} \vec{x}_3 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3.$
10.  $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3.$
11.  $\left\| \overrightarrow{V(P, 3/0)} \right\| = [10 \text{ m/s}]$
12. .







## Application 2 Magic Arms – Corrigé

Florestan Mathurin.

**Question 1** Construire les figures planes associées au schéma cinématique.

### Correction

**Question 2** Calculer  $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$ ,  $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Rev

### Correction

$$\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0, \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta} \vec{z}_0, \overrightarrow{\Omega(3/2)} = \dot{\varphi} \vec{y}_2.$$

**Question 3** Calculer  $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$ .

### Correction

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega(2/0)} &= \overrightarrow{\Omega(2/1)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \\ &= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{\Omega(3/0)} &= \overrightarrow{\Omega(3/2)} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \\ &= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\varphi} \vec{y}_2\end{aligned}$$

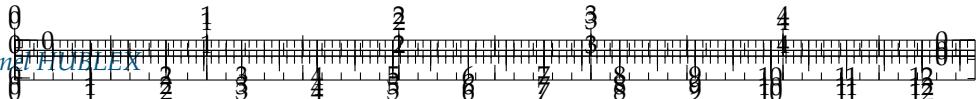
**Question 4** Calculer les produits vectoriels suivants :  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2$ ,  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1$ ,  $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0$ .

### Correction

$$\begin{aligned}\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3 &= \sin \varphi \vec{y}_2 \\ \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 &= -\sin \varphi \vec{y}_2 \\ \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \vec{y}_2 = -\cos \varphi \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1 &= \vec{0} \\ \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0 &= \left(\cos \beta \vec{x}_1 + \sin \beta \vec{y}_1\right) \wedge \vec{x}_0 = -\cos \beta \sin \alpha \vec{z}_0 - \sin \beta \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \vec{z}_0 = (-\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha) \vec{z}_0 = -\sin(\beta + \alpha) \vec{z}_0 \\ \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0 &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \vec{y}_2 = -\cos \varphi \vec{y}_2.\end{aligned}$$

**Question 5** Calculer  $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)}$ ,  $\overrightarrow{V(O_3, 3/0)}$  et  $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ .



**Correction**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(O_2, 2/0)} &= \overrightarrow{V(O_2, 2/1)} + \overrightarrow{V(O_2, 1/0)} = \overrightarrow{V(O_1, 1/0)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{O_1 O_2} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge (-l_1 \vec{y}_1) \\ \overrightarrow{V(O_2, 2/0)} &= l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} &= \overrightarrow{V(O_3, 3/2)} + \overrightarrow{V(O_3, 2/0)} = \overrightarrow{V(O_2, 2/0)} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{O_2 O_3} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \wedge (-l_2 \vec{y}_2) \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} &= l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 \\ \overrightarrow{V(P, 3/0)} &= \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \overrightarrow{O_3 P} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 + ((\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\phi} \vec{y}_2) \wedge (-R \vec{z}_3) \\ \overrightarrow{V(P, 3/0)} &= l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\phi} \vec{x}_3\end{aligned}$$

On donne, sur la figure en bas de page (à gauche) l'évolution des vitesses angulaires des moteurs du manège en fonction du temps.

**Question 6** Déterminer les valeurs des paramètres  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  et  $\dot{\phi}$  puis l'expression analytique des positions angulaires  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  et  $\varphi(t)$  dans l'intervalle de temps [17; 27] secondes en sachant qu'à l'instant  $t = 17$  s, on a  $\alpha = 10,5$  rad,  $\beta = 3,76$  rad et  $\varphi = -10,676$  rad.

**Correction**

Dans l'intervalle de temps compris entre 17 et 27 secondes, les vitesses angulaires sont constantes.

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0,84 \text{ rad/s} \\ \dot{\beta} = 0,94 \text{ rad/s} \\ \dot{\phi} = -0,628 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Ainsi, par intégration :  $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^t \dot{\alpha} d\tau$

**Question 7** Déterminer les valeurs numériques à l'instant  $t_1 = 19,8$  s de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\varphi$ .

**Correction**

Pour  $t = 19,8$  s,

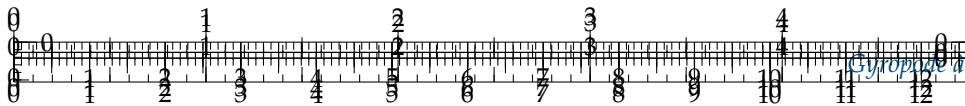
$$\begin{cases} \alpha = 0,84 \times (19,8 - 17) + 10,5 = 12,85 \text{ rad} \\ \beta = 0,94 \times (19,8 - 17) + 3,76 = 6,39 \text{ rad} \\ \varphi = -0,628 \times (19,8 - 17) - 10,676 = 12,43 \text{ rad} \end{cases}$$

**Question 8** On pose  $\overrightarrow{V(P, 3/0)} = V_{x2} \vec{x}_2 + V_{y2} \vec{y}_2 + V_{z2} \vec{z}_2$ . Déterminer les expressions littérales de  $V_{x2}$ ,  $V_{y2}$ ,  $V_{z2}$  puis les valeurs numériques de à  $t_1 = 19,8$  s. (On donne :  $l_1 = 3,9$  m,  $l_2 = 2,87$  m,  $R = 2,61$  m.)

**Correction**

Il s'agit de projeter le vecteur  $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$  dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ . En effet, le vecteur  $\vec{z}_2$  est





identique au vecteur  $\vec{z}_0$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(P, 3/0)} &= V_{x2} \vec{x}_2 + V_{y2} \vec{y}_2 + V_{z2} \vec{z}_0 \\ V_{x2} &= \overrightarrow{V(P, 3/0)} \cdot \vec{x}_2 \\ &= (l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3) \cdot \vec{x}_2\end{aligned}$$

$$V_{x2} = l_1 \dot{\alpha} \cos \beta + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - R \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\begin{aligned}V_{y2} &= \overrightarrow{V(P, 3/0)} \cdot \vec{y}_2 \\ &= (l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3) \cdot \vec{y}_2\end{aligned}$$

$$V_{y2} = -l_1 \dot{\alpha} \sin \beta - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})$$

$$\begin{aligned}V_{z2} &= \overrightarrow{V(P, 3/0)} \cdot \vec{z}_2 \\ &= (l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3) \cdot \vec{z}_0\end{aligned}$$

$$V_{z2} = R \dot{\varphi} \sin \varphi$$



Valeurs numériques à  $t = 19,8$  s :

$$V_{x2} = 3,9 \times 0,84 \times \cos(6,39) + 2,87 \times (0,84 + 0,94) + 2,61 \times 0,628 \times \cos(12,43)$$

$$= 9,99 \text{ m/s}$$

$$V_{y2} = -3,9 \times 0,84 \times \sin(6,39) - 2,61 \times \sin(12,43) \times (0,84 + 0,94)$$

$$= -0,28 \text{ m/s}$$

$$V_{z2} = -2,61 \times 0,628 \times \sin(12,43)$$

$$= -0,22 \text{ m/s}$$

**Question 9** Calculer  $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$ .

### Correction

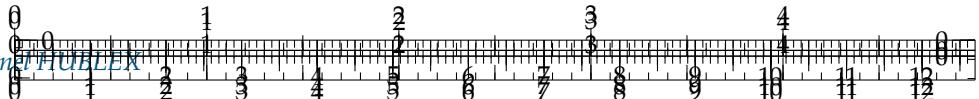
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} &= \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{V(P, 3/0)}]_0 \\ &= \frac{d}{dt} (l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3)_0 \\ &= l_1 \ddot{\alpha} \vec{x}_1 + l_1 \dot{\alpha} \underbrace{\frac{d}{dt} [\vec{x}_1]_0}_{\dot{\alpha} \vec{y}_1} + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{x}_2 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \underbrace{\frac{d}{dt} [\vec{x}_2]_0}_{(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2} - R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 \\ &\quad - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \underbrace{\frac{d}{dt} [\vec{y}_2]_0}_{-(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2} - R \ddot{\varphi} \vec{x}_3 - R \dot{\varphi} \frac{d}{dt} [\vec{x}_3]_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [\vec{x}_3]_0 &= \frac{d}{dt} [\vec{x}_3]_3 + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \vec{x}_3 \\ &= ((\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\varphi} \vec{y}_2) \wedge \vec{x}_3 \\ &= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \varphi \vec{y}_2 - \dot{\varphi} \vec{z}_3\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} &= l_1 \ddot{\alpha} \vec{x}_1 + l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{x}_2 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 \\ &\quad - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 - R \ddot{\varphi} \vec{x}_3 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3\end{aligned}$$





**Question 10** Calculer  $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$  dans l'intervalle de temps [17; 27] secondes pour lequel les vitesses angulaires sont constantes.

#### Correction

Dans le cas où les vitesses angulaires sont constantes, les accélérations angulaires  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{\beta}$ , et  $\ddot{\varphi}$  sont nulles. L'expression de  $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)}$  se simplifie donc :

$$\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R\dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 + R\dot{\varphi}^2 \vec{z}_3$$

**Question 11** Comparer les résultats obtenus à la question ?? à ceux du graphe pour le temps  $t_1 = 19,8$  s.

#### Correction

Le graphe montre qu'à  $t = 19,8$  s, l'intensité du vecteur  $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$  vaut 10 m/s. Or d'après la question 8,

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{V(P, 3/0)}\| &= \sqrt{V_{x2}^2 + V_{y2}^2 + V_{z2}^2} \\ &= \sqrt{9,99^2 + 0,28^2 + 0,22^2} \\ &= \boxed{10 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

On constate que le calcul littéral nous donne le même résultat que l'exploitation de la courbe.

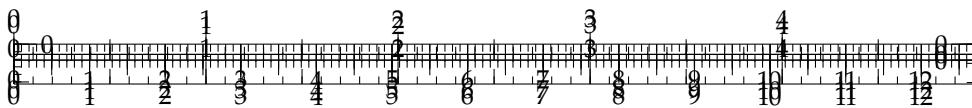
**Question 12** Relever l'accélération maximale subie par le passager et conclure vis-à-vis du CdCF.

#### Correction

D'après la courbe de l'accélération (en pointillés), la valeur maximale de l'accélération subie par le passager vaut  $17,5 \text{ m/s}^2$ . Le cahier des charges exige que l'accélération maximale ne dépasse pas  $2,5 g$ , soit  $24,5 \text{ m/s}^2$ . Le cahier des charges est donc respecté.

- 1.
2.  $\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta} \vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{\Omega(3/2)} = \dot{\varphi} \vec{y}_2$ .
3.  $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\varphi} \vec{y}_2$ ;
4.  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3 = \sin \varphi \vec{y}_2$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\sin \varphi \vec{y}_2$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 = -\cos \varphi \vec{y}_2$ ,  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}$ ,  
 $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0 = -\sin(\beta + \alpha) \vec{z}_0$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0 = -\cos \varphi \vec{y}_2$ .
5.  $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1$ ,  $\overrightarrow{V(O_3, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2$ ,  $\overrightarrow{V(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R\dot{\varphi} \vec{z}_3$ .
6.  $\dot{\alpha} = 0,84 \text{ rad/s}$ ,  $\dot{\beta} = 0,94 \text{ rad/s}$ ,  $\dot{\varphi} = -0,628 \text{ rad/s}$  et  $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^t \dot{\alpha} d\tau$ .
7.  $\alpha = \boxed{12,85 \text{ rad}}$ ,  $\beta = \boxed{6,39 \text{ rad}}$ ,  $\varphi = \boxed{12,43 \text{ rad}}$ .
8.  $V_{x2} = l_1 \dot{\alpha} \cos \beta + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - R\dot{\varphi} \cos \varphi = \boxed{9,99 \text{ m/s}}$ ,  $V_{y2} = -l_1 \dot{\alpha} \sin \beta - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = \boxed{-0,28 \text{ m/s}}$ ,  $V_{z2} = R\dot{\varphi} \sin \varphi = \boxed{-0,22 \text{ m/s}}$ .
9.  $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \ddot{\alpha} \vec{x}_1 + l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{x}_2 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R\dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 - R\ddot{\varphi} \vec{x}_3 + R\dot{\varphi}^2 \vec{z}_3$ .
10.  $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R\dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 + R\dot{\varphi}^2 \vec{z}_3$ .
11.  $\|\overrightarrow{V(P, 3/0)}\| = \boxed{10 \text{ m/s}}$
12. .





## Application 3

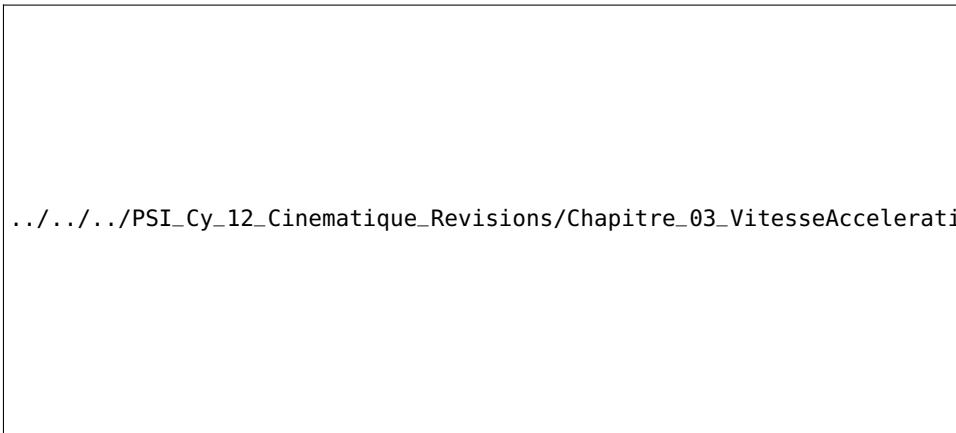
### Danse avec les robots – Sujet

ICNA 2017.

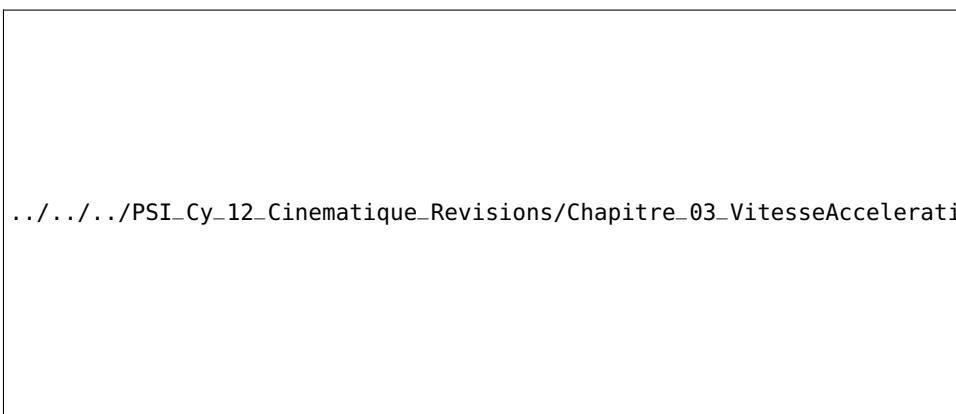
« Danse avec les robots » est une attraction du Futuroscope de Poitiers. Le principe consiste à attacher deux personnes au bout d'un bras de robot 5 axes. Les personnes sont ainsi remués au rythme de la musique.

On appelle nacelle l'ensemble de solides composé des sièges, des harnais de sécurité et des 2 volontaires.

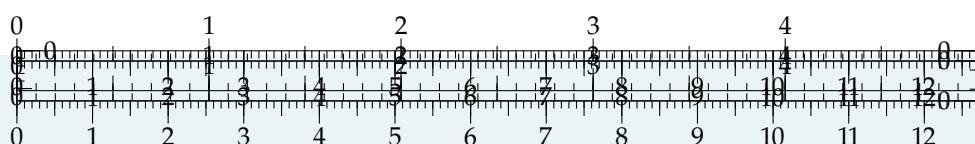
[.../.../.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_Revisions/Chapitre\\_03\\_VitesseAcceleration/Cy\\_12\\_Ch\\_03\\_Application\\_03\\_DanseRob](#)

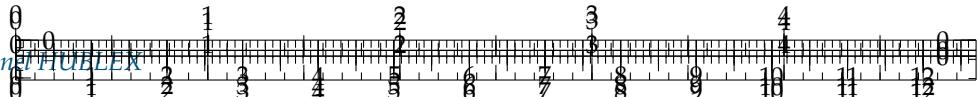


On donne sur la figure suivant le schéma cinématique spatial d'un des robots avec le paramétrage associé aux différents solides et aux liaisons.



L'ensemble des repères sont considérés orthonormés directs.





- ▶ On note  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère supposé galiléen associé au sol de la salle de spectacle, appelé bâti 0.
- ▶ On note  $\mathcal{R}_1 = (O_0; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  le repère associé à la chaise 1 et  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  l'angle de rotation de la chaise 1 par rapport au bâti 0.
- ▶ On note  $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  le repère associé à l'épaule 2,  $\overrightarrow{O_0 A} = a \vec{z}_0 + b \vec{x}_1$  et  $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$  l'angle de rotation de l'épaule 2 par rapport à la chaise 1.
- ▶ On note  $\mathcal{R}_3 = (B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  le repère associé à l'avant-bras 3,  $\overrightarrow{A B} = c \vec{x}_2$  et  $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$  l'angle de rotation de l'avant-bras 3 par rapport à l'épaule 2.
- ▶ On note  $\mathcal{R}_4 = (C; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  le repère associé au bras 4,  $\overrightarrow{B C} = d \vec{x}_3$  et  $\theta_4 = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{y}_3, \vec{y}_4)$  l'angle de rotation du bras 4 par rapport à l'avant-bras 3.
- ▶ On note  $\mathcal{R}_5 = (D; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  le repère associé à la nacelle 5,  $\overrightarrow{C D} = e \vec{x}_4$  et  $\theta_5 = (\vec{y}_4, \vec{y}_5) = (\vec{z}_4, \vec{z}_5)$  l'angle de rotation de la nacelle 5 par rapport au bras 4.

Le centre de gravité de la nacelle 5 (siège + volontaire + harnais) est tel que  $\overrightarrow{D G} = f \vec{x}_4 + h \vec{z}_5$ .

On définit la position du point G dans la base  $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  telle que  $\overrightarrow{O_0 G} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0$ .

**Question 1** Tracer les figures planes de changement de repère.

**Question 2** Exprimer la position du point G suivant  $\vec{x}_0$ .

### Objectif

Valider que l'exigence d'accélération est satisfaite : l'accélération ressentie doit être au maximum de 3,5 g.

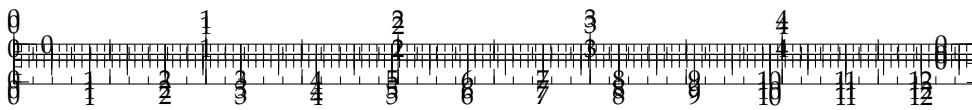
**Question 3** Exprimer la vitesse du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée  $\overrightarrow{V(G, 5/0)}$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_03\_Vitesse\_Acceleration/Cy\_12\_Ch\_03\_Application\_03\_Dans

**Question 4** Exprimer l'accélération du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée  $\overrightarrow{\Gamma(G, 5/0)}$ .

**Question 5** Conclure quant au respect de l'exigence d'accélération ressentie.





## Application 3

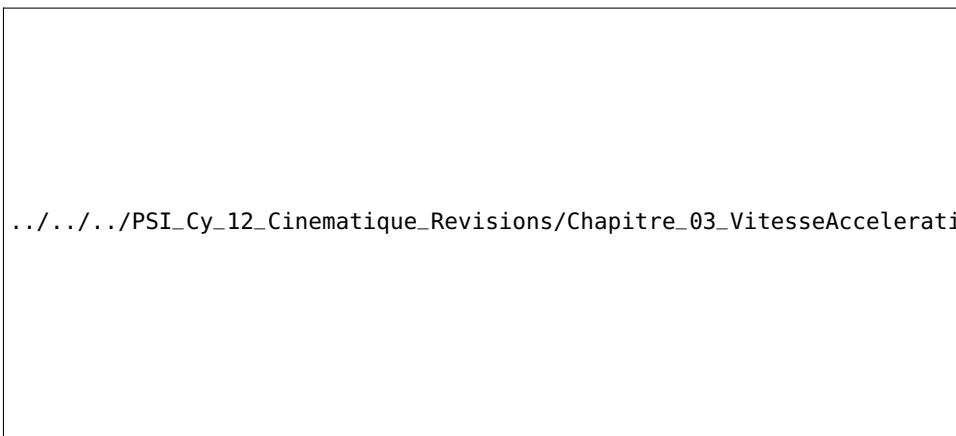
### Danse avec les robots – Corrigé

ICNA 2017.

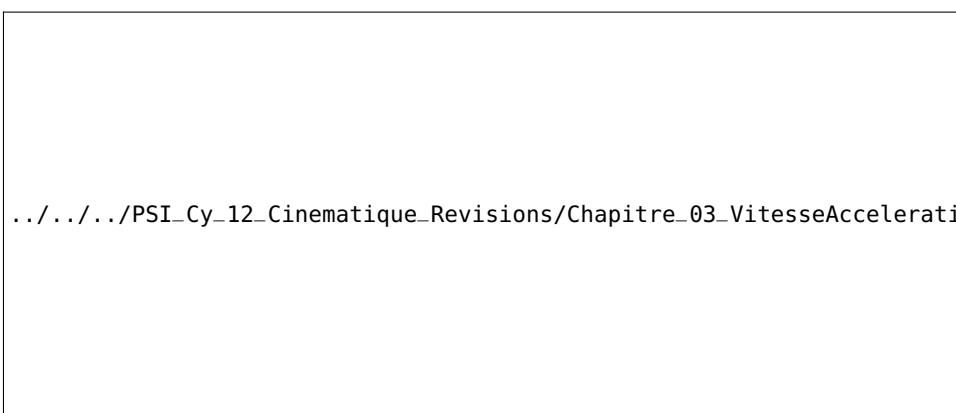
« Danse avec les robots » est une attraction du Futuroscope de Poitiers. Le principe consiste à attacher deux personnes au bout d'un bras de robot 5 axes. Les personnes sont ainsi remués au rythme de la musique.

On appelle nacelle l'ensemble de solides composé des sièges, des harnais de sécurité et des 2 volontaires.

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_Revisions/Chapitre\\_03\\_VitesseAcceleration/Cy\\_12\\_Ch\\_03\\_Application\\_03\\_DanseRob](#)

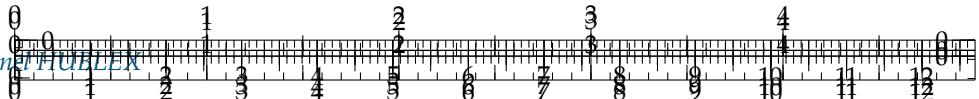


On donne sur la figure suivant le schéma cinématique spatial d'un des robots avec le paramétrage associé aux différents solides et aux liaisons.



L'ensemble des repères sont considérés orthonormés directs.





- ▶ On note  $\mathcal{R}_0 = \left(O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$  le repère supposé galiléen associé au sol de la salle de spectacle, appelé bâti 0.
- ▶ On note  $\mathcal{R}_1 = \left(O_0; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\right)$  le repère associé à la chaise 1 et  $\theta_1 = \left(\vec{x}_0, \vec{x}_1\right) = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1\right)$  l'angle de rotation de la chaise 1 par rapport au bâti 0.
- ▶ On note  $\mathcal{R}_2 = \left(A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2\right)$  le repère associé à l'épaule 2,  $\overrightarrow{O_0 A} = a \vec{z}_0 + b \vec{x}_1$  et  $\theta_2 = \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = \left(\vec{z}_1, \vec{z}_2\right)$  l'angle de rotation de l'épaule 2 par rapport à la chaise 1.
- ▶ On note  $\mathcal{R}_3 = \left(B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3\right)$  le repère associé à l'avant-bras 3,  $\overrightarrow{A B} = c \vec{x}_2$  et  $\theta_3 = \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) = \left(\vec{z}_2, \vec{z}_3\right)$  l'angle de rotation de l'avant-bras 3 par rapport à l'épaule 2.
- ▶ On note  $\mathcal{R}_4 = \left(C; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4\right)$  le repère associé au bras 4,  $\overrightarrow{B C} = d \vec{x}_3$  et  $\theta_4 = \left(\vec{x}_3, \vec{x}_4\right) = \left(\vec{y}_3, \vec{y}_4\right)$  l'angle de rotation du bras 4 par rapport à l'avant-bras 3.
- ▶ On note  $\mathcal{R}_5 = \left(D; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5\right)$  le repère associé à la nacelle 5,  $\overrightarrow{C D} = e \vec{x}_4$  et  $\theta_5 = \left(\vec{y}_4, \vec{y}_5\right) = \left(\vec{z}_4, \vec{z}_5\right)$  l'angle de rotation de la nacelle 5 par rapport au bras 4.

Le centre de gravité de la nacelle 5 (siège + volontaire + harnais) est tel que  $\overrightarrow{D G} = f \vec{x}_4 + h \vec{z}_5$ .

On définit la position du point G dans la base  $\mathcal{B}_0 = \left(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$  telle que  $\overrightarrow{O_0 G} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0$ .

**Question 1** Tracer les figures planes de changement de repère.

#### Correction

**Question 2** Exprimer la position du point G suivant  $\vec{x}_0$ .

#### Correction

#### Objectif

Valider que l'exigence d'accélération est satisfaite : l'accélération ressentie doit être au maximum de 3,5 g.

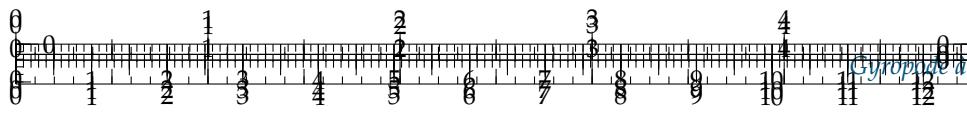
**Question 3** Exprimer la vitesse du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée  $\overrightarrow{V}(G, 5/0)$ .

#### Correction

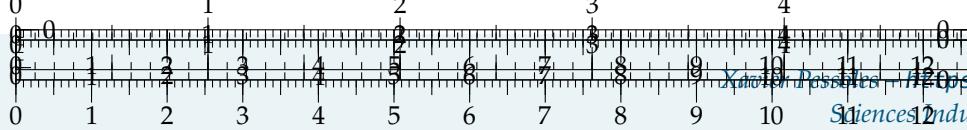
On limite désormais l'étude dans au cas où  $\dot{\theta}_2 = 1,45 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0$ .

**Question 4** Exprimer l'accélération du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée  $\overrightarrow{\Gamma}(G, 5/0)$ .

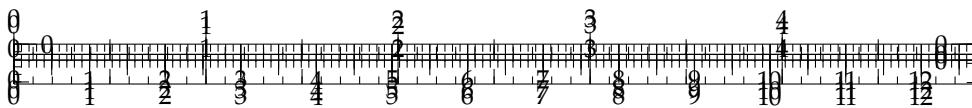


**Correction**

**Question 5** Conclure quant au respect de l'exigence d'accélération ressentie.

**Correction**





## Application 4

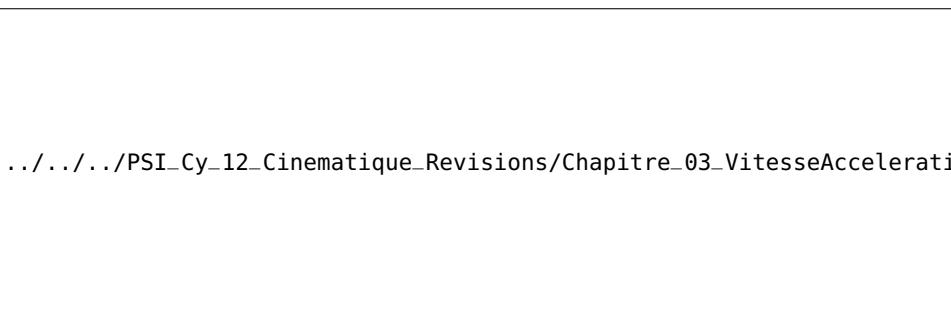
### Robot de peinture – Sujet

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

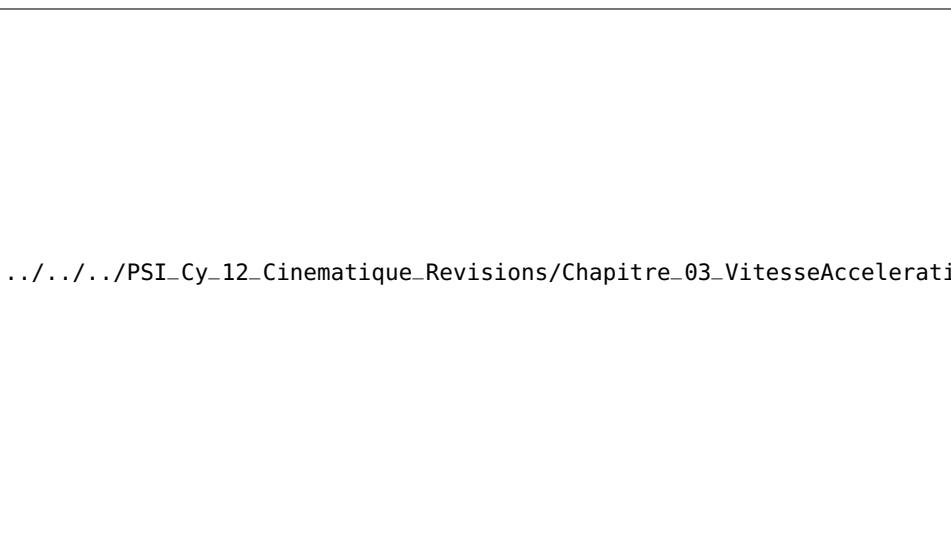
#### Robot de peinture

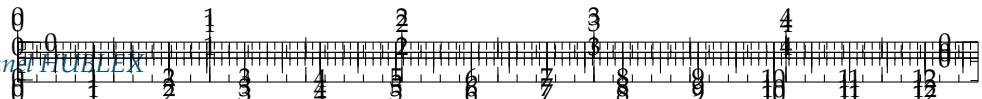
On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot, pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Rev



La modélisation cinématique du robot est donnée sur la figure suivante :





Le chariot  $S_1$ , auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est en mouvement de translation de direction  $\vec{y}_0$  par rapport au bâti  $S_0$  de repère  $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Le corps  $S_2$ , auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est en mouvement de rotation autour de l'axe  $(B, \vec{z}_0)$  avec le chariot  $S_1$ .

Le bras  $S_3$ , auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est en mouvement de rotation autour de l'axe  $(B, \vec{y}_2)$  avec le corps  $S_2$ .

**Question 1** Construire les figures planes de repérage/paramétrage.

**Question 2** Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation  $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$ ,  $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ ,  $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$ .

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ .

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)}$ .

**Question 5** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} \cdot \vec{x}_0$ .

**Question 6** Calculer les produits vectoriels et scalaires suivants :  $\vec{z}_3 \wedge \vec{x}_2$  et  $\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_2$ ,  $\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_1$  et  $\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1$ .

On a  $\overrightarrow{OD} = b\vec{y}_0$  avec  $b = \sqrt{L^2 - H^2}$ . On désire que  $P$  décrive la droite  $(D, \vec{x}_0)$  à vitesse constante  $V$ , conformément au cahier des charges.

**Question 7** Représenter sur une figure dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , puis sur une figure dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , les positions des points  $O, D, A, B$  et  $P$  du robot lorsque celui-ci est en position extrême ( $A$  est en  $D$ ).

**Question 8** Traduire, à l'aide de l'expression de  $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$  le fait que  $P$  se déplace à la vitesse  $V$  selon  $\vec{x}_0$ . En déduire  $\dot{\beta}$ .

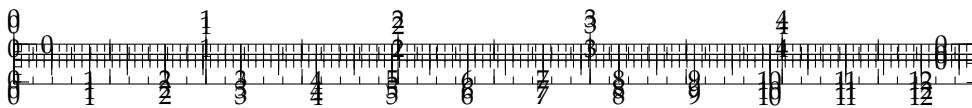
**Question 9** Exprimer alors  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\alpha}$  en fonction de  $L, V, \alpha$  et  $\beta_0$ .

**Question 10** A l'aide de la figure précédente, exprimer  $\beta_0$  en fonction de  $b$  et  $L$ .

**Question 11** Exprimer  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\alpha}$  en fonction de  $V, b$  et  $\alpha$ .

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_03\_VitesseAcceleration/Cy\_12\_Ch\_03\_Application\_04\_Robo





## Application 4

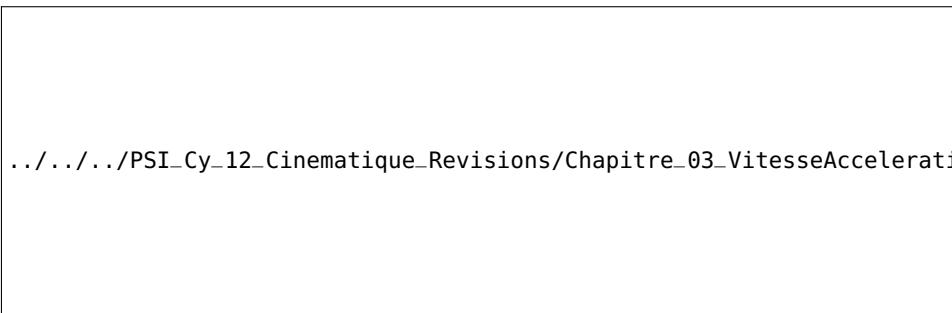
### Robot de peinture – Corrigé

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

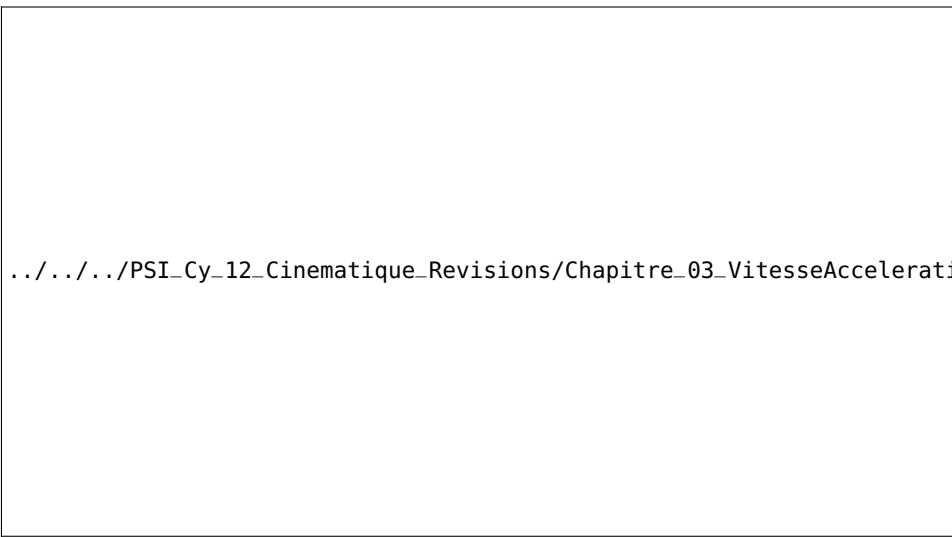
#### Robot de peinture

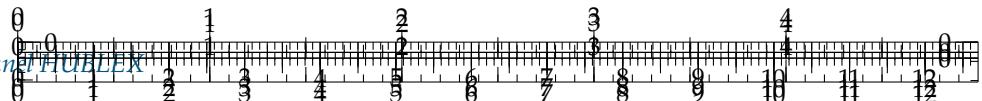
On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot, pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revi



La modélisation cinématique du robot est donnée sur la figure suivante :





Le chariot  $S_1$ , auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est en mouvement de translation de direction  $\vec{y}_0$  par rapport au bâti  $S_0$  de repère  $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Le corps  $S_2$ , auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est en mouvement de rotation autour de l'axe  $(B, \vec{z}_0)$  avec le chariot  $S_1$ .

Le bras  $S_3$ , auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est en mouvement de rotation autour de l'axe  $(B, \vec{y}_2)$  avec le corps  $S_2$ .

**Question 1** Construire les figures planes de repérage/paramétrage.

**Question 2** Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation  $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$ ,  $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ ,  $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$ .

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ .

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)}$ .

**Question 5** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} \cdot \vec{x}_0$ .

**Question 6** Calculer les produits vectoriels et scalaires suivants :  $\vec{z}_3 \wedge \vec{x}_2$  et  $\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_2$ ,  $\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_1$  et  $\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1$ .

On a  $\overrightarrow{OD} = b\vec{y}_0$  avec  $b = \sqrt{L^2 - H^2}$ . On désire que  $P$  décrive la droite  $(D, \vec{x}_0)$  à vitesse constante  $V$ , conformément au cahier des charges.

**Question 7** Représenter sur une figure dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , puis sur une figure dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , les positions des points  $O, D, A, B$  et  $P$  du robot lorsque celui-ci est en position extrême ( $A$  est en  $D$ ).

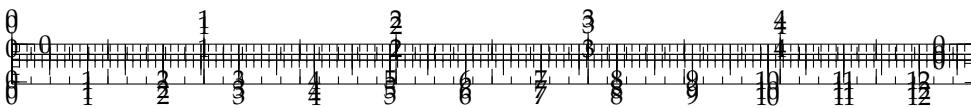
**Question 8** Traduire, à l'aide de l'expression de  $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$  le fait que  $P$  se déplace à la vitesse  $V$  selon  $\vec{x}_0$ . En déduire  $\dot{\beta}$ .

**Question 9** Exprimer alors  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\alpha}$  en fonction de  $L, V, \alpha$  et  $\beta_0$ .

**Question 10** A l'aide de la figure précédente, exprimer  $\beta_0$  en fonction de  $b$  et  $L$ .

**Question 11** Exprimer  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\alpha}$  en fonction de  $V, b$  et  $\alpha$ .





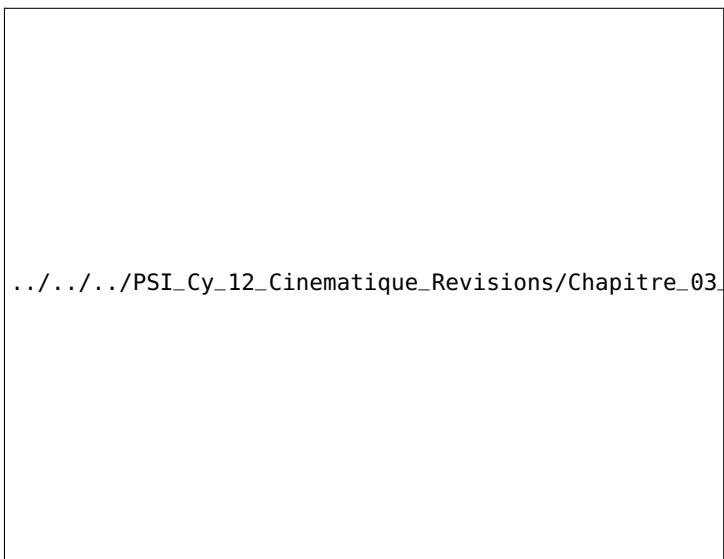
## Application 5

### Robot soudeur – Sujet

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

#### Mise en situation

On s'intéresse à un robot soudeur dont le schéma cinématique lié à cette étude est proposé ci-dessous. Sur ce schéma, les « flèches » au dessus des vecteurs unitaires ne sont pas représentées.



[.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_Revisions/Chapitre\\_03/VitesseAcceleration/Cy\\_12\\_Ch\\_03\\_Application\\_05](http://.../PSI_Cy_12_Cinematique_Revisions/Chapitre_03/VitesseAcceleration/Cy_12_Ch_03_Application_05)

Ce robot est constitué de cinq solides :

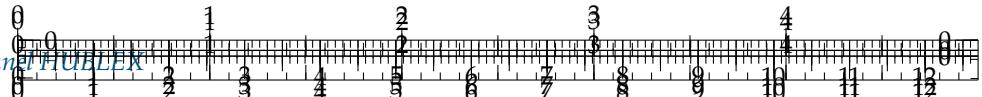
- ▶ le bâti 0, fixé au sol de l'atelier, de repère associé  $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  tel que  $\vec{z}_0$  vertical ascendant;
- ▶ le fût 1, de repère associé  $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  tel que  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$ ;
- ▶ le bras 2, de repère associé  $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  tel que  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ ;
- ▶ l'avant-bras 3, de repère associé  $\mathcal{R}_3 = (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  tel que  $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$ ;
- ▶ la buse 4, de repère associé  $\mathcal{R}_4 = (O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  tel que  $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3$ .

Chaque articulation possède son propre actionneur, le mouvement qui lui est associé peut donc être réalisé indépendamment des autres.

[.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_F](http://.../PSI_Cy_12_Cinematique_F)

[.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_F](http://.../PSI_Cy_12_Cinematique_F)





Paramètres du mouvement :

- $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ;
- $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ ;
- $\theta_3 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$ ;
- $\overrightarrow{O_3 O_4} = \lambda \vec{z}_3$ .

Caractéristiques géométriques :

- $\overrightarrow{O_0 O_1} = L_1 \vec{z}_0$ ;
- $\overrightarrow{O_1 O_2} = L_2 \vec{y}_2$ ;
- $\overrightarrow{O_2 O_3} = L_3 \vec{y}_3$ .

Les figures de changement de base sont donnés ci-contre.

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges :

- exigence 1 : afin d'assurer la sécurité de l'environnement, la buse doit rester en permanence à l'intérieur d'une sphère de centre  $O_0$  et de rayon  $R$ .
- exigence 2 : en phase d'utilisation normale, la buse doit se déplacer par rapport au bâti suivant la droite  $(O_0, \vec{y}_0)$  : réalisation d'un cordon de soudure linéaire.
- exigence 3 : pour que le cordon de soudure linéaire suivant  $\vec{y}_0$  soit correctement réalisé, l'orientation de la buse 4 par rapport à la direction verticale doit être constante, et la vitesse de la buse doit être constante :  $V$ .

### Objectif

Déterminer les relations à imposer entre les valeurs instantanées des paramètres de mouvement et de leurs dérivées lors de la réalisation d'un cordon de soudure.

**Question 1** Préciser une condition sur le vecteur position du point  $O_4$  dans le repère lié à 0 qui traduit l'exigence Ex1 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

**Question 2** Préciser deux conditions sur le vecteur position du point  $O_4$  dans le repère lié à 0 qui traduisent l'exigence Ex2 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

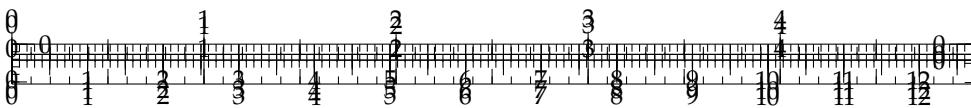
**Question 3** Déterminer le torseur  $\{\mathcal{V}(4/0)\}$  au point  $O_4$  puis calculer  $\overrightarrow{\Gamma(O_4, 4/0)}$ .

**Question 4** Déterminer le torseur  $\{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$  qui traduit l'exigence Ex3.

**Question 5** On se place dans le cas où le moteur de l'articulation entre 0 et 1 est arrêté dans la position  $\theta_1 = 0$ , traduire alors la condition  $\{\mathcal{V}(4/0)\} = \{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$  en deux relations vectorielles.

**Question 6** En déduire 3 relations scalaires imposées entre les paramètres de mouvement et/ou leurs dérivées.





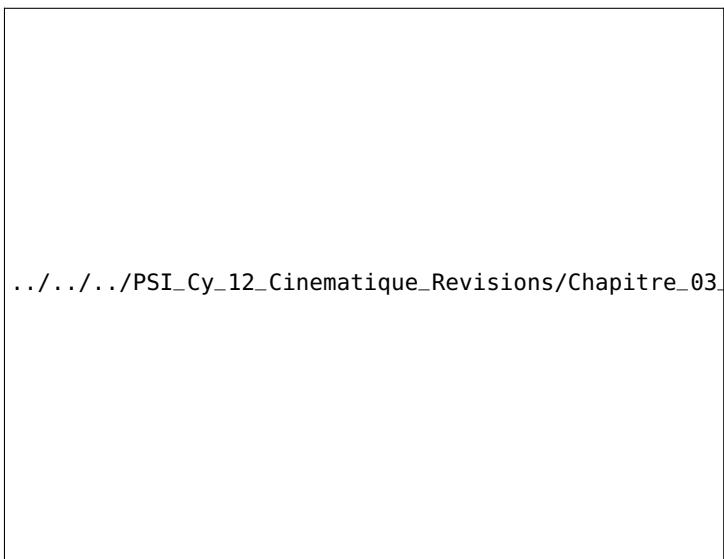
## Application 5

### Robot soudeur – Corrigé

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

#### Mise en situation

On s'intéresse à un robot soudeur dont le schéma cinématique lié à cette étude est proposé ci-dessous. Sur ce schéma, les « flèches » au dessus des vecteurs unitaires ne sont pas représentées.



[.../.../.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_Revisions/Chapitre\\_03/VitesseAcceleration/Cy\\_12\\_Ch\\_03\\_Application\\_05](.../.../.../PSI_Cy_12_Cinematique_Revisions/Chapitre_03/VitesseAcceleration/Cy_12_Ch_03_Application_05)

Ce robot est constitué de cinq solides :

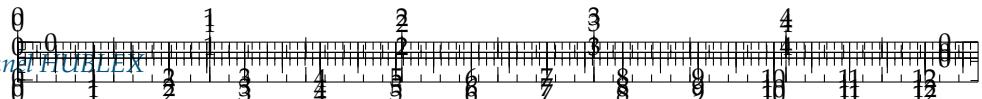
- ▶ le bâti 0, fixé au sol de l'atelier, de repère associé  $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  tel que  $\vec{z}_0$  vertical ascendant;
- ▶ le fût 1, de repère associé  $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  tel que  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$ ;
- ▶ le bras 2, de repère associé  $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  tel que  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ ;
- ▶ l'avant-bras 3, de repère associé  $\mathcal{R}_3 = (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  tel que  $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$ ;
- ▶ la buse 4, de repère associé  $\mathcal{R}_4 = (O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  tel que  $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3$ .

Chaque articulation possède son propre actionneur, le mouvement qui lui est associé peut donc être réalisé indépendamment des autres.

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_F](.../.../.../PSI_Cy_12_Cinematique_F)

[.../.../.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_F](.../.../.../PSI_Cy_12_Cinematique_F)





Paramètres du mouvement :

- $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ;
- $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ ;
- $\theta_3 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$ ;
- $\overrightarrow{O_3 O_4} = \lambda \vec{z}_3$ .

Caractéristiques géométriques :

- $\overrightarrow{O_0 O_1} = L_1 \vec{z}_0$ ;
- $\overrightarrow{O_1 O_2} = L_2 \vec{y}_2$ ;
- $\overrightarrow{O_2 O_3} = L_3 \vec{y}_3$ .

Les figures de changement de base sont donnés ci-contre.

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges :

- exigence 1 : afin d'assurer la sécurité de l'environnement, la buse doit rester en permanence à l'intérieur d'une sphère de centre  $O_0$  et de rayon  $R$ .
- exigence 2 : en phase d'utilisation normale, la buse doit se déplacer par rapport au bâti suivant la droite  $(O_0, \vec{y}_0)$  : réalisation d'un cordon de soudure linéaire.
- exigence 3 : pour que le cordon de soudure linéaire suivant  $\vec{y}_0$  soit correctement réalisé, l'orientation de la buse 4 par rapport à la direction verticale doit être constante, et la vitesse de la buse doit être constante :  $V$ .

### Objectif

Déterminer les relations à imposer entre les valeurs instantanées des paramètres de mouvement et de leurs dérivées lors de la réalisation d'un cordon de soudure.

**Question 1** Préciser une condition sur le vecteur position du point  $O_4$  dans le repère lié à 0 qui traduit l'exigence Ex1 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

**Question 2** Préciser deux conditions sur le vecteur position du point  $O_4$  dans le repère lié à 0 qui traduisent l'exigence Ex2 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

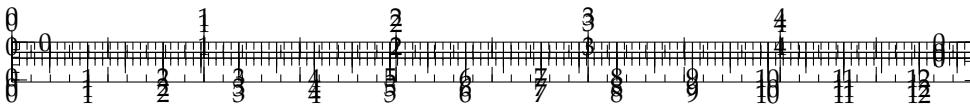
**Question 3** Déterminer le torseur  $\{\mathcal{V}(4/0)\}$  au point  $O_4$  puis calculer  $\overrightarrow{\Gamma(O_4, 4/0)}$ .

**Question 4** Déterminer le torseur  $\{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$  qui traduit l'exigence Ex3.

**Question 5** On se place dans le cas où le moteur de l'articulation entre 0 et 1 est arrêté dans la position  $\theta_1 = 0$ , traduire alors la condition  $\{\mathcal{V}(4/0)\} = \{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$  en deux relations vectorielles.

**Question 6** En déduire 3 relations scalaires imposées entre les paramètres de mouvement et/ou leurs dérivées.





## Application 6

### Capsuleuse de bocaux – Galet – Sujet

Le conditionnement de nombreux produits alimentaires est réalisé dans des bocaux en verre fermés par des capsules vissées. La société RAVOUX, spécialisée dans le conditionnement, a créé ce prototype afin d'optimiser ses machines de production. Elle est donc équipée de nombreux capteurs permettant, via un ordinateur, d'optimiser les paramètres de production tels que qualité totale, production maximale, ...

Le système de laboratoire proposé s'insère dans une chaîne de conditionnement de produits alimentaires, entre l'unité de remplissage des bocaux et le poste d'étiquetage. Sa fonction principale est la «fermeture étanche de bocaux préalablement remplis de produits alimentaires»

On s'intéresse ici au système de croix de Malte. Il permet d'obtenir une rotation discontinue à partir d'un mouvement de rotation continue. Ainsi, pendant que la croix de Malte ne tourne pas, le système peut agir sur la matière d'œuvre (flacon).

Lors de la rotation de la croix de Malte, la capsuleuse déplace deux flacons. Afin d'accroître la productivité, il faut diminuer la durée de cette phase. Cependant, si la croix de Malte tourne trop vite, les flacons basculent ce qui entraîne un mauvais fonctionnement du système. Ainsi, on désire que la **vitesse de la croix soit inférieure à 50 tours/minute.**

#### Modélisation sans galet

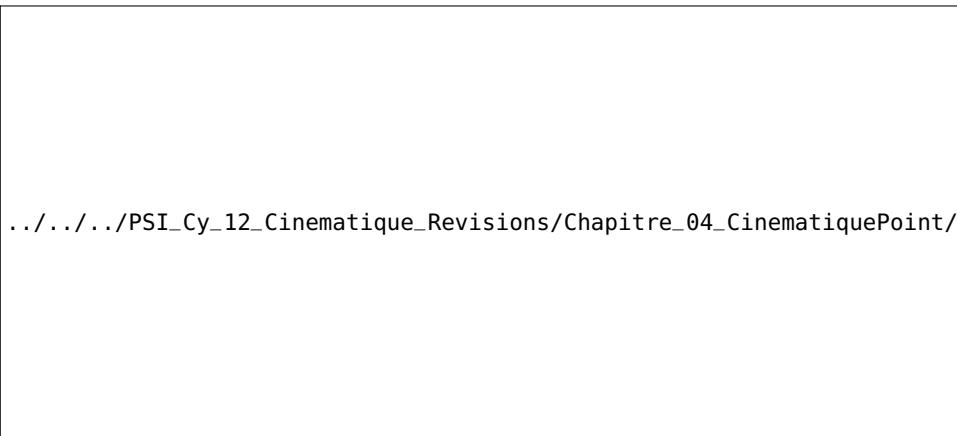
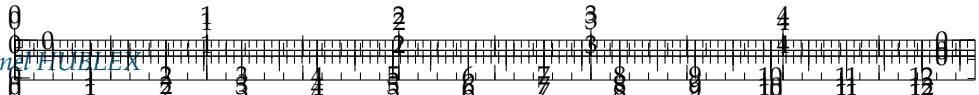
Afin de modéliser le système à croix de malte, on propose le schéma cinématique ci-dessous.

On note :

- $\mathcal{R} = \left( O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$  le repère lié au bâti  $S_0$ . On note  $\overrightarrow{OB} = -L\vec{x}_0$  avec  $L = 145 \text{ mm}$ ;
- $\mathcal{R}_1 = \left( O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \right)$  le repère lié à l'arbre  $S_1$ . On pose  $\overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1$  avec  $R = 141 \text{ mm}$  et  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ . L'arbre  $S_1$  est lié au motoréducteur de la capsuleuse. On a :  $\dot{\alpha} = 10 \text{ tr/min}$ ;
- $\mathcal{R}_2 = \left( B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 \right)$  le repère lié à l'arbre  $S_2$ . On pose  $\overrightarrow{BA} = \lambda(t)\vec{x}_2$ ,  $\overrightarrow{AI} = r\vec{y}_2$  et  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ ;



.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Rev



**Question 1** Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

**Question 2** Établir la loi entrée/sortie du système.

**Question 3** Donner une méthode permettant de valider la cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

**Question 4** Donner l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$ .

**Question 5** Donner l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$ .

**Question 6** En déduire l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$  dans la base  $\mathcal{R}_2$ . On donne  $\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta)\vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta)\vec{y}_2$ .

**Question 7** D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide  $S_1$  par rapport à  $S_2$ ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.

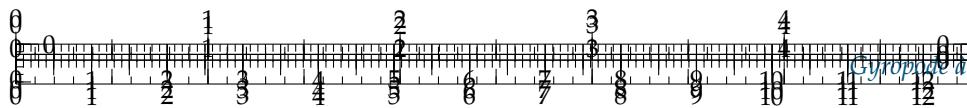
**Question 8**  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} \cdot \vec{x}_2$  est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse? Si oui, comment? Si non, proposez une modification du système permettant la prise en compte de ce problème.

## Modélisation avec galet

On considère maintenant l'existence d'un galet  $S_3$  en bout de l'arbre  $S_1$ . On fait l'hypothèse que le galet roule sans glisser dans le  $S_2$ .  $S_3$  et  $S_1$  sont en liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  et de centre  $A$ .

Le galet a un diamètre extérieur de 16 mm. D'après la documentation constructeur, la vitesse de rotation du galet ne doit pas dépasser les 5000 tr/min.





.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_04\_CinematiquePoint/Cy\_12\_Ch\_04\_Application\_01\_Capsuleu

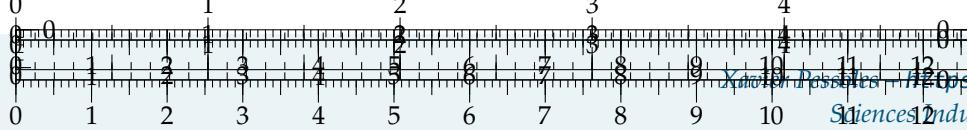
**Question 9** Quelle est la modification sur le paramétrage du système ?

**Question 10** Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement sans glissement** ?

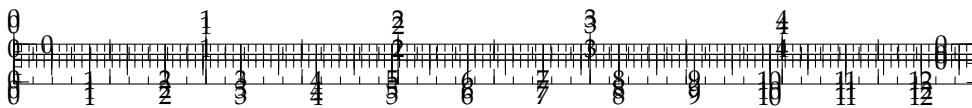
**Question 11** Calculer la vitesse de rotation du galet  $\dot{\gamma}$  en commençant par exprimer  $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$ ? Indice : décomposer  $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$  en fonction des mouvements connus.

**Question 12** Valider le choix du galet.

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematiqu







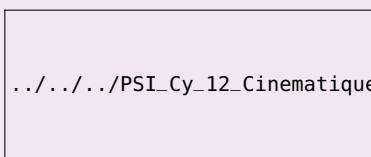
## Application 6

### Capsuleuse de bocaux – Galet – Corrigé

#### Modélisation sans galet

**Question 1** Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

##### Correction



.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_04\_CinematiquePoint/Cy\_12\_Ch\_04\_Application\_01

**Question 2** Établir la loi entrée/sortie du système.

##### Correction

On a :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0} \iff R\vec{y}_1 - \lambda(t)\vec{x}_2 + L\vec{x}_0 = \vec{0}$$

En projetant sur  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  on a :

$$\begin{cases} -R \sin \alpha(t) - \lambda(t) \cos \beta(t) + L = 0 \\ R \cos \alpha(t) - \lambda(t) \sin \beta(t) = 0 \end{cases}$$

Suivant le cas, on peut donc avoir  $\alpha$  en fonction de  $\beta$  ou  $\lambda$  en fonction de  $\alpha$  ou  $\beta$  :

$$\tan \beta = \frac{R \cos \alpha}{L - R \sin \alpha}$$

$$\lambda(t)^2 = R^2 + L^2 - 2RL \sin \alpha$$

**Question 3** Donner une méthode permettant de valider la cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

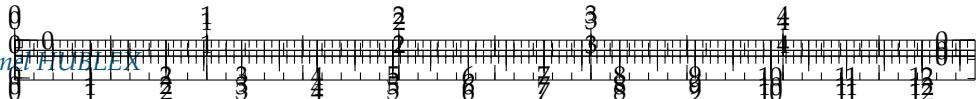
##### Correction

On peut calculer :

$$\dot{\beta} = \frac{R^2 \dot{\alpha} - LR \dot{\alpha} \sin \alpha}{L^2 - 2RL \sin \alpha + R^2}$$

Le tracé Excel permet de valider que la vitesse de rotation de la croix de Malte reste inférieure à 50 tours par minute.





**Question 4** Donner l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$ .

#### Correction

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(O, S_1/S_0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = \vec{IO} \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_I \\ \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} &= (-R\vec{y}_1 - r\vec{y}_2) \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 = -R\dot{\alpha} \vec{x}_1 - r\dot{\alpha} \vec{x}_2 \\ \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = -R\dot{\alpha} \vec{x}_1 - r\dot{\alpha} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I \end{aligned}$$

**Question 5** Donner l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$ .

#### Correction

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(B, S_2/S_0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} = \vec{IB} \wedge \dot{\beta} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_I \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} &= (-\lambda(t) \vec{x}_2 - r\vec{y}_2) \wedge \dot{\beta} \vec{z}_0 = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r\dot{\beta} \vec{x}_2 \\ \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r\dot{\beta} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I \end{aligned}$$

**Question 6** En déduire l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$  dans la base  $\mathcal{R}_2$ . On donne  $\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2$ .

#### Correction

D'après la composition du torseur cinématique on a :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} + \{\mathcal{V}(S_0/S_1)\} \iff \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} - \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

On a donc :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} - \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} - \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r\dot{\beta} \vec{x}_2 + R\dot{\alpha} \vec{x}_1 + r\dot{\alpha} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I$$

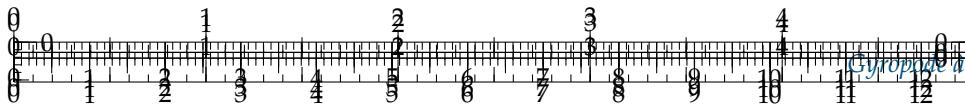
$$\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2$$

D'où :

$$\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r\dot{\beta} \vec{x}_2 + R\dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + R\dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2 + r\dot{\alpha} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -r\dot{\beta} + R\dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r\dot{\alpha} \\ \lambda(t) \dot{\beta} + R\dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}$$

**Question 7** D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide  $S_1$  par rapport à  $S_2$ ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.





### Correction

Nécessairement, la vitesse de glissement appartient au plan tangent au contact. On a donc :

$$\begin{cases} -r\dot{\beta} + R\dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \\ \lambda(t)\dot{\beta} + R\dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) = 0 \end{cases}$$

**Question 8**  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} \cdot \vec{x}_2$  est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse ? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse ? Si oui, comment ? Si non, proposez une modification du système permettant la prise en compte de ce problème.

### Correction

Cette vitesse de glissement provoque le frottement du doigt sur la croix de Malte. Ce frottement entraînant de l'usure, la capsuleuse de bocaux est équipée d'un galet.

## Modélisation avec galet

**Question 9** Quelle est la modification sur le paramétrage du système ?

### Correction

Un angle  $\gamma$  correspondant à la rotation du galet sur lui-même apparaît.

**Question 10** Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement sans glissement** ?

### Correction

La vitesse est nulle entre le galet et la croix de Malte est nulle au point  $I$  :

$$\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} = \vec{0}$$

**Question 11** Calculer la vitesse de rotation du galet  $\dot{\gamma}$  en commençant par exprimer  $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$ ? Indice : décomposer  $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$  en fonction des mouvements connus.

### Correction

Malgré l'introduction d'un nouveau composant, la position du point  $I$  reste inchangée. Il faut identifier le torseur  $\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\}$ . Pour cela, la composition des vitesses donne :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \{\mathcal{V}(S_3/S_1)\} + \{\mathcal{V}(S_1/S_2)\}$$

Au point  $I$  on connaît déjà  $\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\}$ .

Calculons  $\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\}$  :

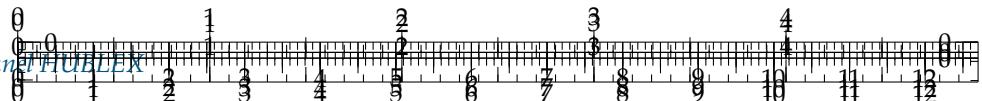
$$\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_1)} = \dot{\gamma}\vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(A, S_3/S_1)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_1)} = \dot{\gamma}\vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_3/S_1)} = \vec{I}\vec{A} \wedge \dot{\gamma}\vec{z}_0 = -r\vec{y}_2 \wedge \dot{\gamma}\vec{z}_0 = -r\dot{\gamma}\vec{x}_2 \end{array} \right\}_I$$

On a donc :

$$\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} = \overrightarrow{V(I, S_3/S_1)} + \overrightarrow{V(I, S_1/S_2)}$$

$$\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} = -r\dot{\gamma}\vec{x}_2 + (-r\dot{\beta} + R\dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r\dot{\alpha}) \vec{x}_2 - (\lambda(t)\dot{\beta} + R\dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)) \vec{y}_2$$





$$\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} = \begin{bmatrix} -r\dot{\gamma} + (-r\dot{\beta} + R\dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r\dot{\alpha}) \\ -(\lambda(t)\dot{\beta} + R\dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

D'après l'hypothèse de roulement sans glissement, on a :

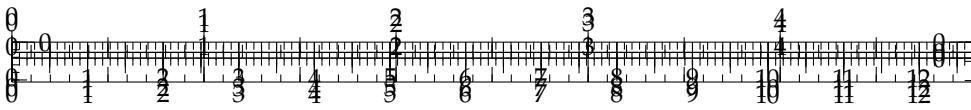
$$\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} = \vec{0} \implies \dot{\gamma} = -\frac{-r\dot{\beta} + R\dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r\dot{\alpha}}{r}$$

**Question 12** Valider le choix du galet.

#### Correction

$$\dot{\gamma} = -\frac{-r\dot{\beta} + R\dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r\dot{\alpha}}{r}$$





## Application 7

# TODO OMNIROB – Le robot collaboratif de l'usine du futur d'Airbus – Sujet

### Objectif

Déterminer le modèle cinématique direct ou inverse de la commande Omniprob.  
Valider le critère de mobilité omnidirectionnelle et analyser les limites du modèle.

Les roues utilisées pour le robot omnirob sont des roues holonomes également appelées Mecanum (voir figure suivante) qui sont mises en mouvement par quatre moteurs commandés indépendamment. La surface de roulement de ces roues spéciales est pourvue de rouleaux ellipsoïdes répartis sur la circonférence à un angle de  $45^\circ$ .

Le paramétrage cinématique est donné dans les pages suivantes.

**Question 1** En analysant la géométrie du contact entre les rouleaux et le sol, proposer la liaison équivalente entre le châssis 3 et le sol.

Hypothèses :

- ▶ Les roues sont parfaitement symétriques par rapport aux plans  $(O_3, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$  et  $(O_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .
- ▶ Les roues roulent sans glisser sur le sol.

Données :

- ▶ Le nombre de rouleaux 1 par roue est  $n = 8$ .
- ▶ Les rouleaux sont inclinés d'un angle  $\alpha_a = -45^\circ$  par rapport à l'axe de rotation de la roue.

Notations : torseurs cinématiques.

- ▶ Le torseur cinématique de 3/0 pourra s'exprimer dans la base locale du robot  $\mathcal{B}_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  avec les notations  $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{O_3}$
- $$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} \vec{z}_3 = \omega \vec{z}_3 \\ V_{RX} \vec{x}_3 + V_{RY} \vec{y}_3 \end{array} \right\}_{O_3}.$$

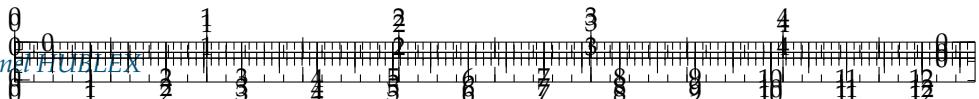
Dans le mouvement de rotation de la roue a, le rouleau 1 reste en contact avec le sol suivant la corde  $I_{1a\_ext} I_{1a\_int}$  (annexe 4).

On peut alors démontrer que la fluctuation du rayon  $r$  de l'ellipsoïde est telle que :

$$\Delta r \% = \left( \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \right) \sin \alpha_a \text{ avec } n \text{ le nombre de rouleaux.}$$



.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinemati que\_Rev



Pour les roues de cette étude,  $\alpha_a = -45^\circ$  et  $n = 8$  rouleaux, on obtient une fluctuation de rayon de 14 % lorsque le point de contact  $I_{1a}$  se déplace le long de la corde de rouleau 1. On supposera donc le rayon  $r$  comme étant constant.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(I_{1a}, 1/2)}$  en fonction du paramétrage du robot dans la base  $\mathcal{B}_3$ .

On constate que la variation d'angle  $\theta_{2a}$  lors du contact d'un rouleau avec le sol reste faible,  $\theta_{2a} \ll 1$ . Ainsi, en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de  $\cos \theta_{2a}$ , on

gardera pour la suite du sujet une expression de la vitesse  $\overrightarrow{V(I_{1a}, 1/2)} = r \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\theta}_{1a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$

**Question 3** En vous aidant de l'annexe 3, déterminer  $\overrightarrow{V(I_{1a}, 2/3)}$  en fonction du paramétrage du robot.

**Question 4** En vous aidant de l'annexe 1, déterminer  $\overrightarrow{V(I_{1a}, 3/0)}$  en fonction du paramétrage du robot et des notations du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(3/0)\}$  proposées.

**Question 5** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(I_{1a}, 3/0)}$ .

Afin d'établir le modèle cinématique du robot, on introduit une notation classique en robotique avec les vecteurs suivants :

►  $\dot{q}_k$  étant le vecteur des vitesses articulaires des roues  $k = a, b, c$  et  $d$  tel que

$$\dot{q}_k = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{2k} \\ \dot{\theta}_{1k} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{2k} \\ \omega_{1k} \\ \omega \end{pmatrix}. \text{ On aura par exemple pour la roue } a \text{ le vecteur } \dot{q}_a = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}.$$

►  $\dot{q}$  étant le vecteur des vitesses articulaires pilotées donc les vitesses des 4 moteurs

$$\text{des roues } a, b, c \text{ et } d \text{ tel que } \dot{q} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix};$$

►  $\dot{X}_R$  étant le vecteur des vitesses opérationnelles du robot tel que  $\dot{X}_R = \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} \text{ exprimé dans la base locale } \mathcal{B}_3 \text{ du robot.}$$

Dans un premier temps nous allons chercher les relations entre  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  pour  $k = a, b, c$  et  $d$ .

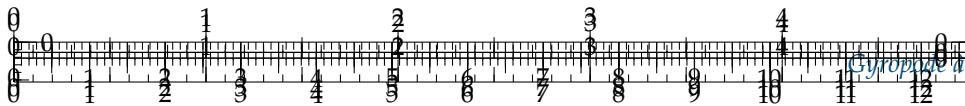
**Question 6** À partir des équations des questions 2 à 4, déduire de la condition de roulement sans glissement du rouleau 1 par rapport au sol 0 la relation  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  pour la roue  $a$ . On utilisera les notations proposées et on rappelle que l'on note  $\omega = \dot{\varphi}$ .

La relation précédente pourra se noter  $\dot{X}_R = \mathcal{J}_a \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$  avec  $\mathcal{J}_a$  la matrice jacobienne relative à la roue  $a$ .

De façon analogue en prenant  $\lambda, -\lambda, \ell$  ou  $-\ell$  on trouve rapidement les matrices jacobiniennes relatives aux roues  $b, c$  et  $d$ .

$\dot{X}_R$  étant unique on peut obtenir 4 équations faisant intervenir uniquement les 4 inconnues articulaires  $\omega_{2a}, \omega_{2b}, \omega_{2c}$  et  $\omega_{2d}$  que l'on souhaite déterminer.





En effet, pour chaque relation  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  on peut écrire pour :

- la roue  $a$  :  $V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2a} + (\lambda + \ell) \omega$  (eq1);
- la roue  $b$  :  $V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2b} + (\lambda + \ell) \omega$  (eq2);
- la roue  $c$  :  $V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2c} - (\lambda + \ell) \omega$  (eq3);
- la roue  $d$  :  $V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2d} - (\lambda + \ell) \omega$  (eq4).

Trouver le modèle cinématique direct (MCD) revient à obtenir  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ . Ainsi on remarquera que les coordonnées de  $\dot{X}_R$  se déduisent facilement en utilisant les simplifications issues des 3 combinaisons :

- (eq1)+(eq2)+(eq3)+(eq4);
- (eq2)-(eq1)+(eq4)-(eq3);
- (eq1)+(eq2)-(eq3)-(eq4).

**Question 7** Déduire de ces 3 simplifications, le modèle cinématique direct (MCD) du robot,  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ .

**Question 8** Déduire également à l'aide des équations (eq1), (eq2), (eq3), (eq4), le modèle cinématique inverse (MCI) du robot  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ .

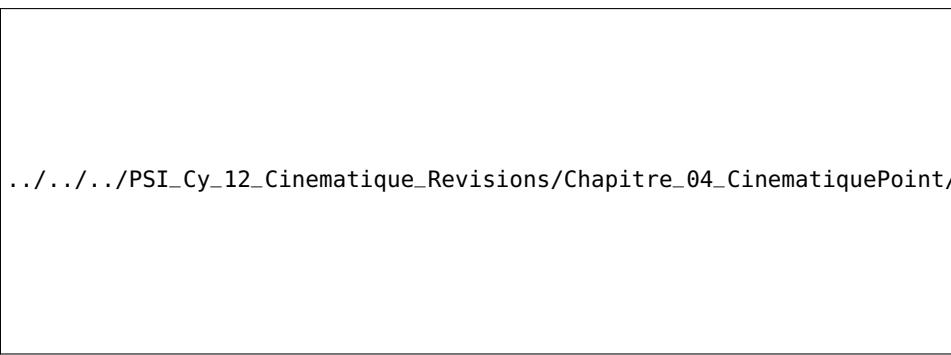
Le contrôle du robot peut également être envisagé dans l'espace de travail lié au bâti à savoir le système de coordonnées du repère global.

En notant  $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(3/0)} \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{O_3} \left\{ \begin{array}{l} \varphi \overrightarrow{z_0} = \omega \overrightarrow{z_0} \\ V_X \overrightarrow{x_0} + V_Y \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{O_3}$  le torseur cinématique

de 3/0 dans la base  $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ , le changement de base étant une rotation d'un angle  $\varphi$  selon  $\overrightarrow{z_0}$ , il vient immédiatement

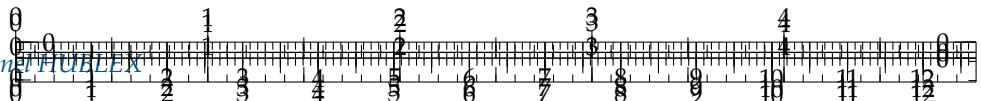
$$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \\ \omega \end{pmatrix}.$$

**Question 9** À partir des résultats précédents, indiquer comment commander la vitesse de rotation des moteurs des 4 roues  $a, b, c$  et  $d$  pour que le robot se déplace suivant une direction diagonale puis tourne sur lui-même,  $\omega_m$  est une vitesse de rotation algébrique.



**Question 10** Conclure sur le comportement omnidirectionnel du robot des limites possibles.





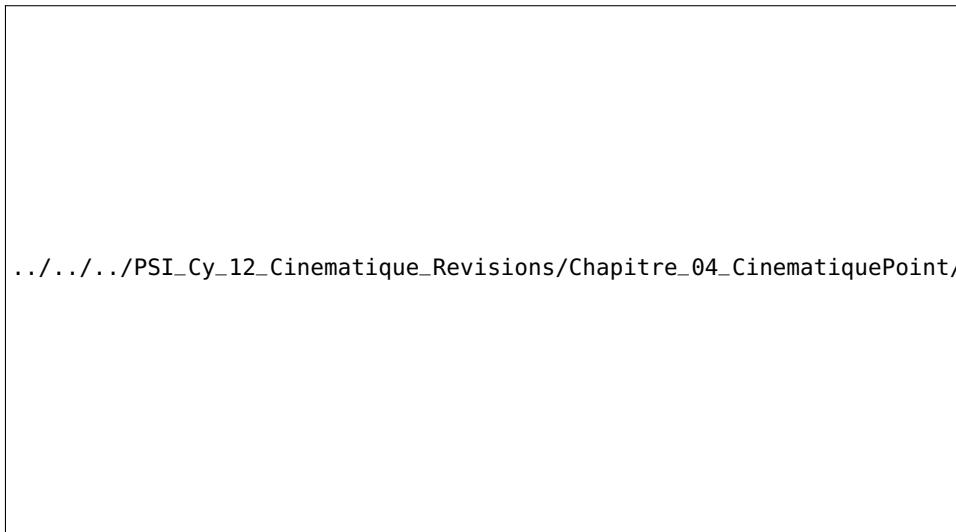
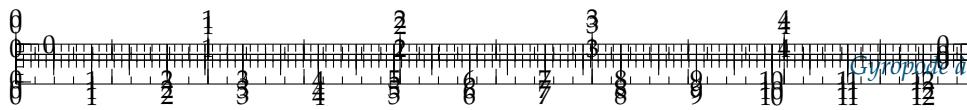
.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_04\_CinematiquePoint/Cy\_12\_Ch...

*Annexe 1 : Schéma cinématique plan du robot – Paramétrages repères robot et repère global*

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_04\_CinematiquePoint/Cy\_12\_Ch...

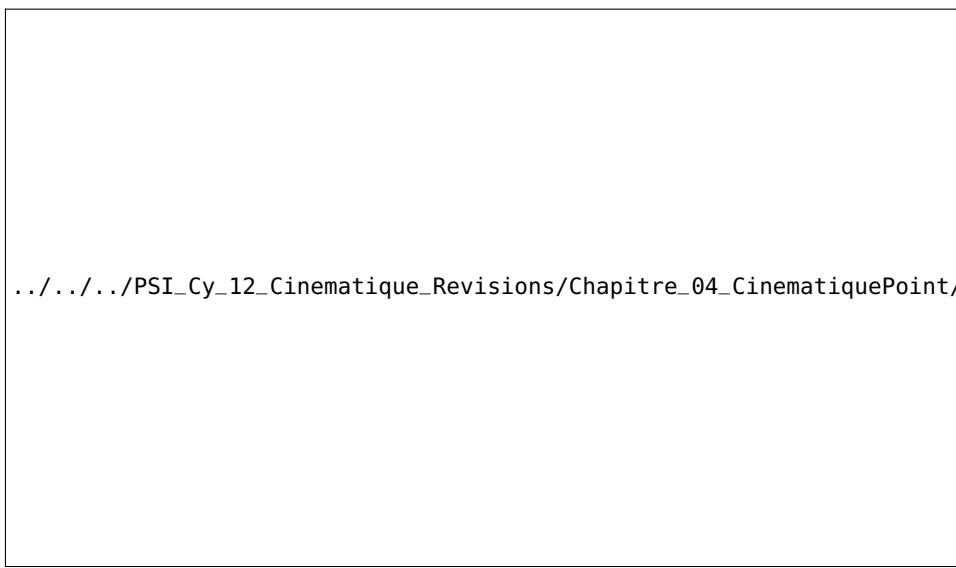
*Annexe 2 : Schéma cinématique 3D de principe du robot – Représentation partielle du châssis 3 avec la roue a*





Annexe 3 : Schéma cinématique de la roue a dans le plan vertical contenant l'axe de la jante 2

soit  $(O_{3a}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

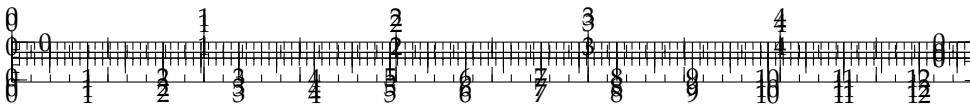


Annexe 4 : Schéma cinématique partiel du rouleau 1 seul de la roue a dans la position

particulière où  $I_{1a}$  se trouve au milieu de l'arc  $I_{1a\_ext}I_{1a\_int}$ .







## Application 7

# TODO OMNIROB – Le robot collaboratif de l’usine du futur d’Airbus – Corrigé

### Objectif

Déterminer le modèle cinématique direct ou inverse de la commande Omniprob.  
Valider le critère de mobilité omnidirectionnelle et analyser les limites du modèle.

Les roues utilisées pour le robot omnirob sont des roues holonomes également appelées Mecanum (voir figure suivante) qui sont mises en mouvement par quatre moteurs commandés indépendamment. La surface de roulement de ces roues spéciales est pourvue de rouleaux ellipsoïdes répartis sur la circonference à un angle de  $45^\circ$ .

Le paramétrage cinématique est donné dans les pages suivantes.

**Question 1** En analysant la géométrie du contact entre les rouleaux et le sol, proposer la liaison équivalente entre le châssis 3 et le sol.

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Rev

### Correction

Hypothèses :

- ▶ Les roues sont parfaitement symétriques par rapport aux plans  $(O_3, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$  et  $(O_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .
- ▶ Les roues roulent sans glisser sur le sol.

Données :

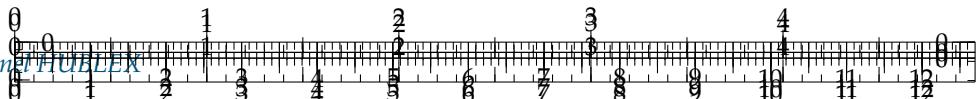
- ▶ Le nombre de rouleaux 1 par roue est  $n = 8$ .
- ▶ Les rouleaux sont inclinés d'un angle  $\alpha_a = -45^\circ$  par rapport à l'axe de rotation de la roue.

Notations : torseurs cinématiques.

- ▶ Le torseur cinématique de 3/0 pourra s'exprimer dans la base locale du robot  $\mathcal{B}_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  avec les notations  $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{O_3}$
- $\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}\vec{z}_3 = \omega\vec{z}_3 \\ V_{RX}\vec{x}_3 + V_{RY}\vec{y}_3 \end{array} \right\}_{O_3}$ .

Dans le mouvement de rotation de la roue a, le rouleau 1 reste en contact avec le sol suivant la corde  $I_{1a\_ext}I_{1a\_int}$  (annexe 4).





On peut alors démontrer que la fluctuation du rayon  $r$  de l'ellipsoïde est telle que :

$$\Delta r \% = \left( \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \right) \sin \alpha_a \text{ avec } n \text{ le nombre de rouleaux.}$$

Pour les roues de cette étude,  $\alpha_a = -45^\circ$  et  $n = 8$  rouleaux, on obtient une fluctuation de rayon de 14 % lorsque le point de contact  $I_{1a}$  se déplace le long de la corde de rouleau 1. On supposera donc le rayon  $r$  comme étant constant.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(I_{1a}, 1/2)}$  en fonction du paramétrage du robot dans la base  $\mathcal{B}_3$ .

#### Correction

On constate que la variation d'angle  $\theta_{2a}$  lors du contact d'un rouleau avec le sol reste faible,  $\theta_{2a} << 1$ . Ainsi, en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de  $\cos \theta_{2a}$ , on

gardera pour la suite du sujet une expression de la vitesse  $\overrightarrow{V(I_{1a}, 1/2)} = r \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\theta}_{1a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$

**Question 3** En vous aidant de l'annexe 3, déterminer  $\overrightarrow{V(I_{1a}, 2/3)}$  en fonction du paramétrage du robot.

#### Correction

**Question 4** En vous aidant de l'annexe 1, déterminer  $\overrightarrow{V(I_{1a}, 3/0)}$  en fonction du paramétrage du robot et des notations du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(3/0)\}$  proposées.

#### Correction

**Question 5** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(I_{1a}, 3/0)}$ .

#### Correction

Afin d'établir le modèle cinématique du robot, on introduit une notation classique en robotique avec les vecteurs suivants :

- $\dot{q}_k$  étant le vecteur des vitesses articulaires des roues  $k = a, b, c$  et  $d$  tel que

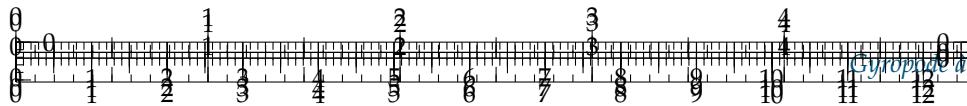
$$\dot{q}_k = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{2k} \\ \dot{\theta}_{1k} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{2k} \\ \omega_{1k} \\ \omega \end{pmatrix}. \text{ On aura par exemple pour la roue } a \text{ le vecteur } \dot{q}_a = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}.$$

- $\dot{q}$  étant le vecteur des vitesses articulaires pilotées donc les vitesses des 4 moteurs

$$\text{des roues } a, b, c \text{ et } d \text{ tel que } \dot{q} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix};$$

- $\dot{X}_R$  étant le vecteur des vitesses opérationnelles du robot tel que  $\dot{X}_R = \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$





$$= \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix}$$

exprimé dans la base locale  $\mathcal{B}_3$  du robot.

Dans un premier temps nous allons chercher les relations entre  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  pour  $k = a, b, c$  et  $d$ .

**Question 6** À partir des équations des questions 2 à 4, déduire de la condition de roulement sans glissement du rouleau 1 par rapport au sol 0 la relation  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  pour la roue  $a$ . On utilisera les notations proposées et rappelle que l'on note  $\omega = \dot{\phi}$ .

#### Correction

La relation précédente pourra se noter  $\dot{X}_R = \mathcal{J}_a \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$  avec  $\mathcal{J}_a$  la matrice jacobienne relative à la roue  $a$ .

De façon analogue en prenant  $\lambda, -\lambda, \ell$  ou  $-\ell$  on trouve rapidement les matrices jacobiniennes relatives aux roues  $b, c$  et  $d$ .

$\dot{X}_R$  étant unique on peut obtenir 4 équations faisant intervenir uniquement les 4 inconnues articulaires  $\omega_{2a}, \omega_{2b}, \omega_{2c}$  et  $\omega_{2d}$  que l'on souhaite déterminer.

En effet, pour chaque relation  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  on peut écrire pour :

- ▶ la roue  $a : V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2a} + (\lambda + \ell)\omega$  (eq1);
- ▶ la roue  $b : V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2b} + (\lambda + \ell)\omega$  (eq2);
- ▶ la roue  $c : V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2c} - (\lambda + \ell)\omega$  (eq3);
- ▶ la roue  $d : V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2d} - (\lambda + \ell)\omega$  (eq4).

Trouver le modèle cinématique direct (MCD) revient à obtenir  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ . Ainsi on remarquera que les coordonnées de  $\dot{X}_R$  se déduisent facilement en utilisant les simplifications issues des 3 combinaisons :

- ▶ (eq1)+(eq2)+(eq3)+(eq4);
- ▶ (eq2)-(eq1)+(eq4)-(eq3);
- ▶ (eq1)+(eq2)-(eq3)-(eq4).

**Question 7** Déduire de ces 3 simplifications, le modèle cinématique direct (MCD) du robot,  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ .

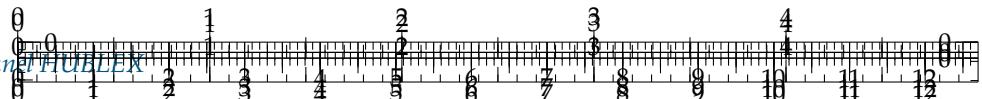
#### Correction

**Question 8** Déduire également à l'aide des équations (eq1), (eq2), (eq3), (eq4), le modèle cinématique inverse (MCI) du robot  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ .

#### Correction

Le contrôle du robot peut également être envisagé dans l'espace de travail lié au bâti à savoir le système de coordonnées du repère global.





En notant  $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(3/0)}}{V(O_3, 3/0)} \right\}_{O_3} \left\{ \begin{array}{l} \varphi \vec{z}_0 = \omega \vec{z}_0 \\ V_X \vec{x}_0 + V_Y \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_3}$  le torseur cinématique de 3/0 dans la base  $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , le changement de base étant une rotation d'un angle  $\varphi$  selon  $\vec{z}_0$ , il vient immédiatement

$$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \\ \omega \end{pmatrix}.$$

**Question 9** À partir des résultats précédents, indiquer comment commander la vitesse de rotation des moteurs des 4 roues  $a, b, c$  et  $d$  pour que le robot se déplace suivant une direction diagonale puis tourne sur lui-même,  $\omega_m$  est une vitesse de rotation algébrique.

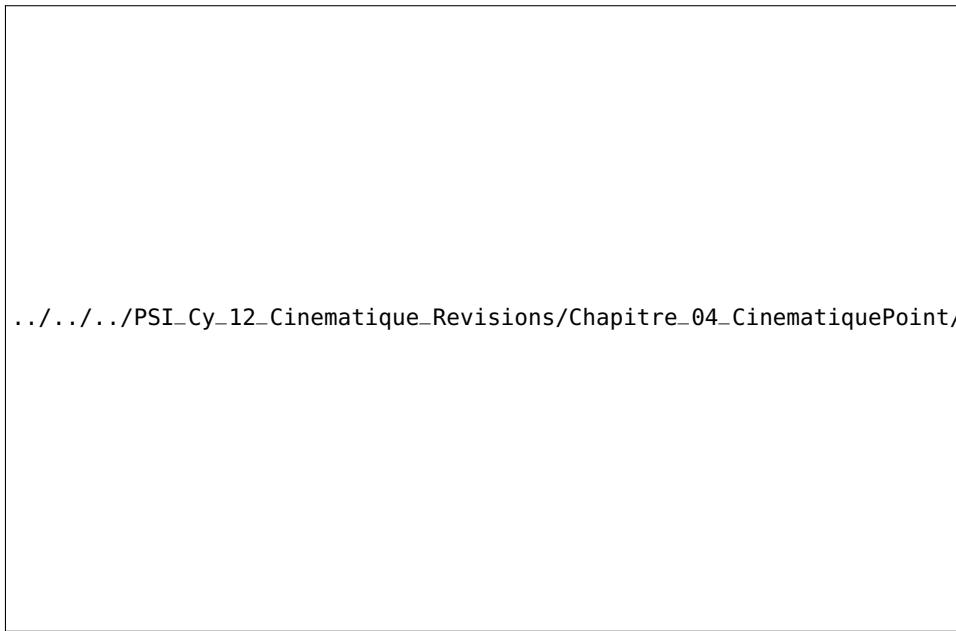
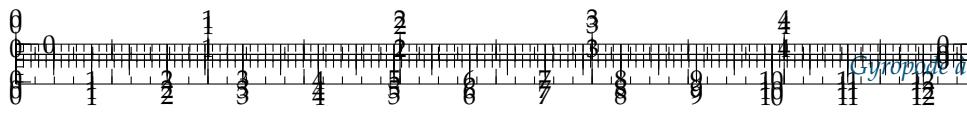
#### Correction

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_04\_CinematiquePoint/Cy\_12\_Ch...

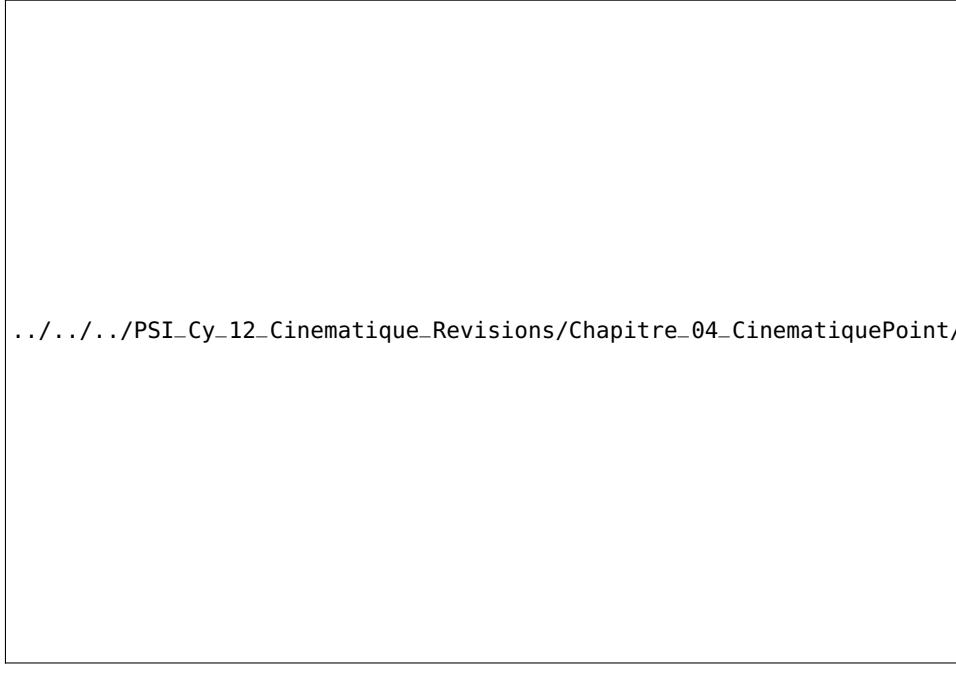
**Question 10** Conclure sur le comportement omnidirectionnel du robot des limites possibles.

#### Correction

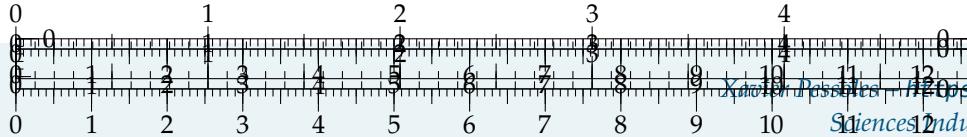


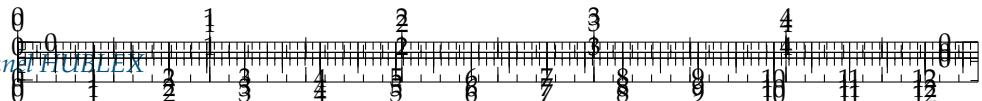


Annexe 1 : Schéma cinématique plan du robot – Paramétrages repères robot et repère global



Annexe 2 : Schéma cinématique 3D de principe du robot – Représentation partielle du châssis 3 avec la roue a





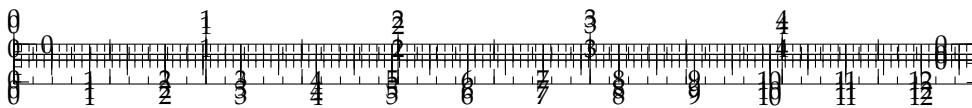
.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_04\_CinematiquePoint/Cy\_12\_Ch

*Annexe 3 : Schéma cinématique de la roue a dans le plan vertical contenant l'axe de la jante 2  
soit  $(O_{3a}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$*

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_04\_CinematiquePoint/Cy\_12\_Ch

*Annexe 4 : Schéma cinématique partiel du rouleau 1 seul de la roue a dans la position  
particulière où  $I_{1a}$  se trouve au milieu de l'arc  $I_{1a\_ext}I_{1a\_int}$ .*





## Application 8

### Roulement à billes – Sujet

Un roulement mécanique est un élément technologique permettant le positionnement, la transmission des efforts et la rotation entre deux pièces par roulement. Ce composant mécanique interposé entre les deux pièces optimise le frottement et la précision de la liaison. Un roulement à billes se présente sous la forme de deux bagues coaxiales entre lesquelles sont placées des billes maintenues espacées par une cage. La fonction de la cage est donc de maintenir deux billes consécutives à distance égale l'une de l'autre lors du fonctionnement du roulement mais elle entraîne aussi des effets nuisibles car il existe un phénomène de glissement entre la cage et les billes. **L'objectif est d'étudier ce phénomène de glissement.**

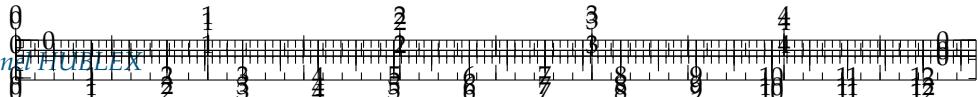
Ressources de Renan Bonnard.

.../.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_04\_CinematiquePoint/Cy\_12\_Ch\_04\_Application\_03\_RoulementBi

On désigne par :

- ▶  $\mathcal{R}_0 = \left( O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$  le repère associé au bâti 0;
- ▶  $\mathcal{R}_1 = \left( O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0 \right)$  le repère associé à la bague intérieure 1 en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti 0 tel que  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ ;
- ▶  $\mathcal{R}_2 = \left( O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0 \right)$  le repère associé à la bague extérieure 2 en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti 0 tel que  $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ ;
- ▶  $\mathcal{R}_3 = \left( G, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0 \right)$  le repère associé à la bille 3 qui roule sans glisser sur 1 en I et sur 2 en J et dont on peut considérer qu'elle est en liaison pivot d'axe  $(G, \vec{z}_0)$  avec la cage 4 tel que  $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$ ;





- $\mathcal{R}_4 = \left( O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0 \right)$  le repère associé à la cage 4 en mouvement de rotation autour de  $(O, \vec{z}_0)$  tel que  $\theta_4 = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$ .

Pour faciliter les calculs on définit le repère  $\mathcal{R} = \left( O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z}_0 \right)$  tel que, à tout instant, le vecteur  $\vec{i}$  possède la même direction et le même sens que le vecteur  $\overrightarrow{OG}$ . Ce repère n'est lié à aucun solide en particulier et ne sert qu'à exprimer simplement les différents termes cinématiques évoqué dans l'énoncé. On pose :

$$\omega_k = \dot{\theta}_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad \overrightarrow{OI} = r_1 \vec{i} \quad \overrightarrow{OJ} = r_2 \vec{i}$$

$$\overrightarrow{GC} = \frac{1}{2}(r_2 - r_1) \vec{j}$$

**Question 1** Réaliser les figures planes correspondant au paramétrage du système.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$ ,  $\overrightarrow{V(O, 1/0)}$  et  $\overrightarrow{V(I, 1/0)}$ .

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ ,  $\overrightarrow{V(O, 2/0)}$  et  $\overrightarrow{V(J, 2/0)}$ .

**Question 4** Exprimer les conditions de roulement sans glissement en  $I$  et  $J$ . Établir les expression des vecteurs  $\overrightarrow{V(I, 3/0)}$  et  $\overrightarrow{V(J, 3/0)}$ .

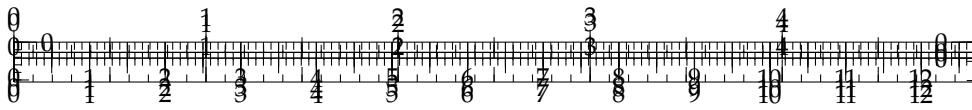
**Question 5** En déduire l'expression de  $\omega_3$  en fonction de  $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$ .

.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Roullement\_Glissonnement\_Vitee\_04\_en\_fonction\_du\_point\_C\_120ch\_04\_Application\_03\_Roulement\_Glissonnement

**Question 6** Déterminer  $\overrightarrow{V(C, 3/4)}$  en fonction de  $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$ .

**Question 7** Déterminer l'expression de la vitesse de glissement de la bille 3 par rapport à la cage 4 au point  $C$  en fonction de  $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$ .





## Application 8

### Roulement à billes – Corrigé

**Question 1** Réaliser les figures planes correspondant au paramétrage du système.

Ressources de Renan Bonnard.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$ ,  $\overrightarrow{V(O, 1/0)}$  et  $\overrightarrow{V(I, 1/0)}$ .

**Correction**

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(O, 1/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, 1/0)} = r_1 \omega_1 \vec{j} \end{array} \right\}_I$$

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ ,  $\overrightarrow{V(O, 2/0)}$  et  $\overrightarrow{V(J, 2/0)}$ .

**Correction**

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(O, 2/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(J, 2/0)} = r_1 \omega_2 \vec{j} \end{array} \right\}_J$$

**Question 4** Exprimer les conditions de roulement sans glissement en  $I$  et  $J$ . Établir les expression des vecteurs  $\overrightarrow{V(I, 3/0)}$  et  $\overrightarrow{V(J, 3/0)}$ .

**Correction**

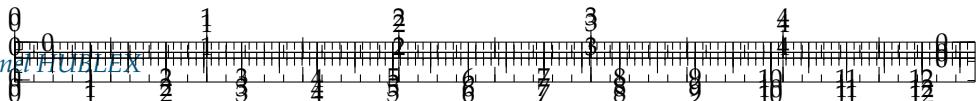
$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(I, 3/1)} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{V(I, 3/0)} &= \overrightarrow{V(I, 3/1)} + \overrightarrow{V(I, 1/0)} \implies \overrightarrow{V(I, 3/0)} = \overrightarrow{V(I, 1/0)} = r_1 \omega_1 \vec{j} \\ \overrightarrow{V(J, 3/2)} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{V(J, 3/0)} &= \overrightarrow{V(J, 3/2)} + \overrightarrow{V(J, 2/0)} \implies \overrightarrow{V(J, 3/0)} = \overrightarrow{V(J, 2/0)} = r_2 \omega_2 \vec{j} \end{aligned}$$

**Question 5** En déduire l'expression de  $\omega_3$  en fonction de  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ .

**Correction**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(I, 3/0)} &= \overrightarrow{V(J, 3/0)} + \vec{I} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/0)} \\ \omega_3 &= \frac{r_2 \omega_2 - r_1 \omega_1}{r_2 - r_1} \end{aligned}$$





**Question 6** Déterminer  $\overrightarrow{V(G, 3/0)}$  en fonction de  $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$ .

#### Correction

$$\overrightarrow{V(G, 3/0)} = \overrightarrow{V(I, 3/0)} + \overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \frac{r_2\omega_2 + r_1\omega_1}{2} \vec{j}$$

**Question 7** Déterminer l'expression de la vitesse de glissement de la bille 3 par rapport à la cage 4 au point C en fonction de  $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$ .

#### Correction

On cherche à calculer  $\overrightarrow{V(C, 3/4)}$  :

$$\overrightarrow{V(C, 3/4)} = \overrightarrow{V(G, 3/4)} + \overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/4)}$$

Calcul de  $\overrightarrow{CG}$  :

$$\overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}(r_2 - r_1) \vec{j}$$

Calcul de  $\overrightarrow{\Omega(3/4)}$  :

$$\overrightarrow{\Omega(3/4)} = \overrightarrow{\Omega(3/0)} - \overrightarrow{\Omega(4/0)}$$

Calcul de  $\omega_4$  :

$$\overrightarrow{V(G, 3/4)} = \overrightarrow{V(G, 3/0)} - \overrightarrow{V(G, 4/0)} = \vec{0}$$

Calcul de  $\overrightarrow{V(G, 4/0)}$  :

$$\overrightarrow{V(G, 4/0)} = \overrightarrow{V(O, 4/0)} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega(4/0)} = \frac{r_2 + r_1}{2} \omega_4 \vec{j}$$

Au final calcul de  $\omega_4$  :

$$\omega_4 = \frac{r_2\omega_2 + r_1\omega_1}{r_1 + r_2}$$

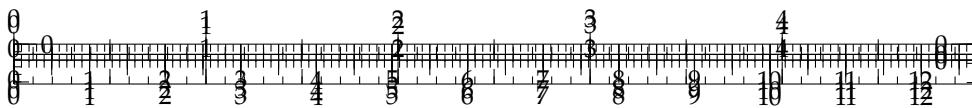
Calcul de  $\overrightarrow{\Omega(3/4)}$  :

$$\overrightarrow{\Omega(3/4)} = \overrightarrow{\Omega(3/0)} - \overrightarrow{\Omega(4/0)} = \left( \frac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{r_2 - r_1} - \frac{r_2\omega_2 + r_1\omega_1}{r_2 + r_1} \right) \vec{z}_0$$

Au final en faisant le calcul on obtient :

$$\overrightarrow{V(C, 3/4)} = \frac{r_2 r_1 (\omega_1 - \omega_2)}{r_1 + r_2} \vec{i}$$





## Application 9

### Guidage linéaire de systèmes médicaux – Sujet

L'étude suivante porte sur le guidage en translation d'un chariot de scanner médical S1 par rapport au bâti de la machine S0. Ce guidage est réalisé par deux séries de billes, S2 et S3, qui roulent dans des rainures en V.

La figure ci-dessous présente, en coupe, la réalisation technologique de ce guidage.

Ressources de Renan Bonnard.  
[.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_Revisions/Chapitre\\_04\\_CinematiquePoint/Cy\\_12\\_Ch\\_04\\_Application\\_04\\_GlissiereBil](http://.../PSI_Cy_12_Cinematique_Revisions/Chapitre_04_CinematiquePoint/Cy_12_Ch_04_Application_04_GlissiereBil)

Les billes S2 de rayon  $R$  roulent sans glisser sur les plans d'une rainure en V d'angle égal à  $90^\circ$  usinée dans S1 et sur les plans d'une autre rainure en V d'angle égal à  $120^\circ$  usinée dans S0. Les billes S3 de rayon  $r$  roulent sans glisser sur les plans d'une rainure en V d'angle égal à  $2\alpha$  usinée dans S1 et sur le plan (P) de S0.

On note  $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ v \vec{x} \end{array} \right\}_{\forall P}$  le torseur cinématique du mouvement du chariot S1 par rapport au bâti S0.

On pose  $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega_{20} \vec{y}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \omega_{30} \vec{y}$ .

**Question 1** Traduire les conditions de non glissement. En déduire quelques axes instantanés de rotation.

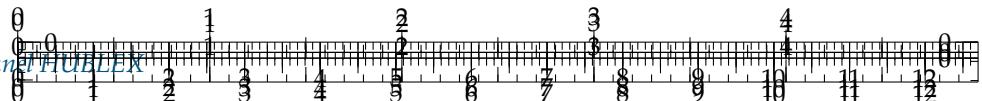
**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$  en fonction de  $v$ , puis  $\overrightarrow{V(E, 3/0)}$  en fonction de  $v$ . Déterminer  $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$  en fonction de  $\omega_{20}$ , puis  $\overrightarrow{V(E, 3/0)}$  en fonction de  $\omega_{30}$ . En déduire une relation entre  $\omega_{20}$  et  $v$ , puis une relation entre  $\omega_{30}$  et  $v$ .

**Question 3** En déduire les torseurs cinématiques des mouvements de S2/S0 et S3/S0 en fonction de  $v$  et des caractéristiques géométriques.

**Question 4** Préciser les composantes de roulement et de pivotement en G et B.



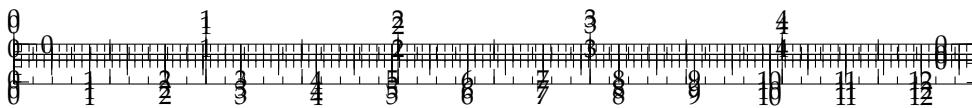
[.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_Revisions/Chapitre\\_04\\_CinematiquePoint/Cy\\_12\\_Ch\\_04\\_Application\\_04\\_GlissiereBil](http://.../PSI_Cy_12_Cinematique_Revisions/Chapitre_04_CinematiquePoint/Cy_12_Ch_04_Application_04_GlissiereBil)



**Question 5** Déterminer les vecteurs vitesses des centres des billes dans leur mouvement par rapport au bâti S<sub>0</sub> :  $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)}$  et  $\overrightarrow{V(O_3, 3/0)}$ .

**Question 6** Déterminer  $\alpha$  pour que ces vecteurs vitesses soient identiques.





## Application 9

### Guidage linéaire de systèmes médicaux – Corrigé

L'étude suivante porte sur le guidage en translation d'un chariot de scanner médical S1 par rapport au bâti de la machine S0. Ce guidage est réalisé par deux séries de billes, S2 et S3, qui roulent dans des rainures en V.

La figure ci-dessous présente, en coupe, la réalisation technologique de ce guidage.

Ressources de Renan Bonnard.

[.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_Revisions/Chapitre\\_04\\_CinematiquePoint/Cy\\_12\\_Ch\\_04\\_Application\\_04\\_GlissiereBillette.pdf](http://.../PSI_Cy_12_Cinematique_Revisions/Chapitre_04_CinematiquePoint/Cy_12_Ch_04_Application_04_GlissiereBillette.pdf)

[.../PSI\\_Cy\\_12\\_Cinematique\\_Revisions/Chapitre\\_04\\_CinematiquePoint/Cy\\_12\\_Ch\\_04\\_Application\\_04\\_GlissiereBillette.pdf](http://.../PSI_Cy_12_Cinematique_Revisions/Chapitre_04_CinematiquePoint/Cy_12_Ch_04_Application_04_GlissiereBillette.pdf)

Les billes S2 de rayon  $R$  roulent sans glisser sur les plans d'une rainure en V d'angle égal à  $90^\circ$  usinée dans S1 et sur les plans d'une autre rainure en V d'angle égal à  $120^\circ$  usinée dans S0. Les billes S3 de rayon  $r$  roulent sans glisser sur les plans d'une rainure en V d'angle égal à  $2\alpha$  usinée dans S1 et sur le plan (P) de S0.

On note  $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ v \vec{x} \end{array} \right\}_{VP}$  le torseur cinématique du mouvement du chariot S1 par rapport au bâti S0.

On pose  $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega_{20} \vec{y}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \omega_{30} \vec{y}$ .

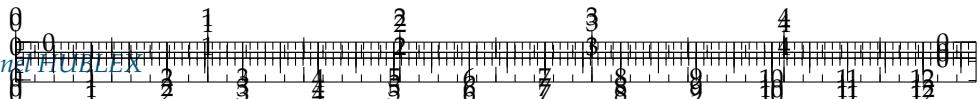
**Question 1** Traduire les conditions de non glissement. En déduire quelques axes instantanés de rotation.

#### Correction

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$  en fonction de  $v$ , puis  $\overrightarrow{V(E, 3/0)}$  en fonction de  $v$ . Déterminer  $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$  en fonction de  $\omega_{20}$ , puis  $\overrightarrow{V(E, 3/0)}$  en fonction de  $\omega_{30}$ . En déduire une relation entre  $\omega_{20}$  et  $v$ , puis une relation entre  $\omega_{30}$  et  $v$ .

#### Correction





**Question 3** En déduire les torseurs cinématiques des mouvements de S2/S0 et S3/S0 en fonction de v et des caractéristiques géométriques.

**Correction**

**Question 4** Préciser les composantes de roulement et de pivotement en G et B.

**Correction**

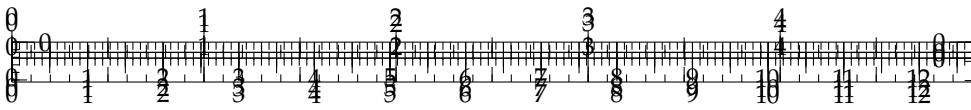
**Question 5** Déterminer les vecteurs vitesses des centres des billes dans leur mouvement par rapport au bâti S0 :  $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)}$  et  $\overrightarrow{V(O_3, 3/0)}$ .

**Correction**

**Question 6** Déterminer  $\alpha$  pour que ces vecteurs vitesses soient identiques.

**Correction**

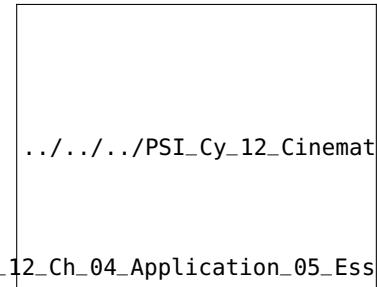
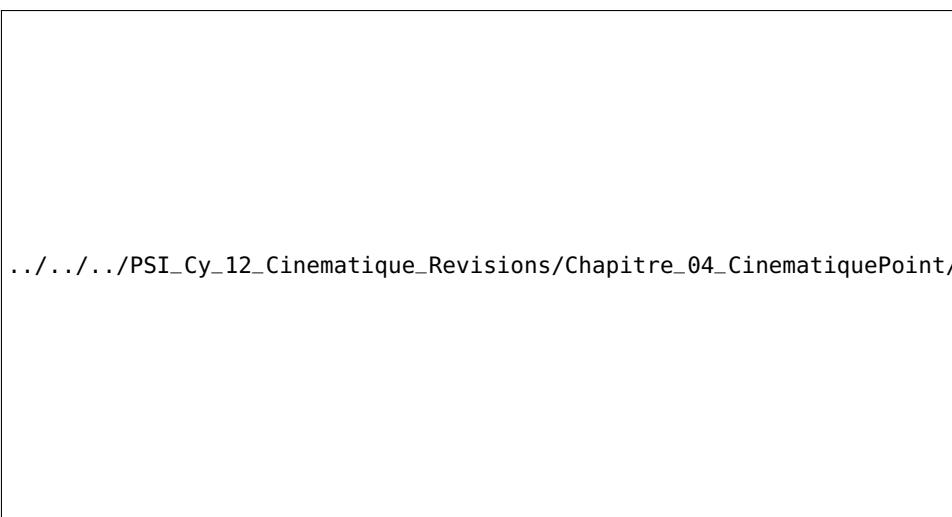




## Application 10

### Étude des performances cinématiques en virage d'une Formule 1 – Sujet

Ressources de Florestan Mathurin.



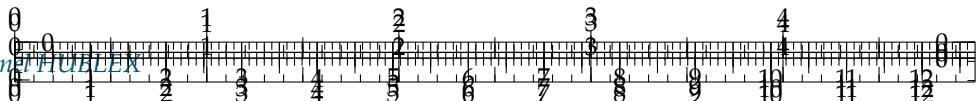
#### Mise en situation

Une Formule 1 doit assurer un certain nombre d'exigences techniques afin d'assurer les meilleures performances en course tout en garantissant la sécurité du pilote. Une de ces exigences est que « le système doit tenir la trajectoire en phase de virage ». Pour y parvenir, le véhicule dispose d'une cinématique particulière permettant aux roues de tourner sur le sol en limitant le risque de glissement. On s'intéresse aux conséquences pratiques nécessaire pour assurer la condition de roulement sans glissement des roues sur le sol. On supposera donc que les 4 roues roulent sans glisser dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .

Pour cette étude on considère que le véhicule est constitué d'un châssis ( $S$ ) et de 4 roues ( $S_i$ ) avec  $i = 1, 2, 3, 4$ . Le châssis est modélisé par un rectangle  $A_1A_2A_3A_4$  tel que  $\overrightarrow{A_4A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} = 2d\vec{x}$  et  $\overrightarrow{A_4A_1} = \overrightarrow{A_3A_2} = L\vec{y}$  où  $L$  correspond à l'empattement du véhicule et  $2d$  à la voie.

On définit le repère  $\mathcal{R}(C; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  attaché au châssis où le point  $C$ , origine du repère, est tel que  $\overrightarrow{A_4C} = d\vec{x}$ . Le véhicule est en phase de virage et on considère alors qu'il est en rotation par rapport au repère  $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour du point  $I_{S/R0} = I$ ,





centre instantanée de rotation du mouvement. On pose  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x})$  angle de rotation du châssis par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

On définit le repère  $\mathcal{R}_i (A_i; \vec{u}_i, \vec{p}_i, \vec{q}_i)$  attaché à chaque roue ( $S_i$ ). Ces 4 roues de rayon  $R$  sont en liaison pivot avec le châssis ( $S$ ) suivant les axes  $(A_i, \vec{u}_i)$  avec  $i = 1, 2, 3, 4$ .

On pose  $\theta_i = (\vec{z}, \vec{q}_i)$  angle de rotation de la roue  $i$  par rapport au châssis. Afin d'assurer la direction du véhicule, les 2 roues pivotent d'un angle  $\psi_1$  suivant l'axe  $(A_1, \vec{z})$  pour la roue 1 et d'un angle  $\psi_2$  suivant l'axe  $(A_2, \vec{z})$  pour la roue 2 avec  $\psi_1 = (\vec{x}, \vec{u}_1) = (\vec{y}, \vec{v}_1)$  et  $\psi_2 = (\vec{x}, \vec{u}_2) = (\vec{y}, \vec{v}_2)$ . On considère que le contact sol/roue et assimilable à un contact ponctuel en  $I$  de normale  $(I, \vec{z})$  tel que  $\overrightarrow{I_i A_i} = R \vec{z}$ .

**Question 1** Établir les figures géométriques utiles.

**Question 2** Écrire la condition de roulement sans glissement de la roue ( $S_1$ ) par rapport au sol  $\mathcal{R}_0$ . En déduire une relation vectorielle simple entre  $\overrightarrow{V(I_1, S_1/S)}$  et  $\overrightarrow{V(I_1, S/\mathcal{R}_0)}$ .

**Question 3** Donner la forme simple du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_0)\}$  écrit en  $I$ . En déduire alors  $\overrightarrow{V(I_1, S/\mathcal{R}_0)}$  en fonction de  $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_0)}$  et  $\overrightarrow{II_1}$  (on n'effectuera pas les produits vectoriels).

**Question 4** Donner la forme simple du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(S_1/S)\}$  écrit en  $A_1$ . En déduire alors  $\overrightarrow{V(I_1, S_1/S)}$  en fonction de  $\overrightarrow{\Omega(S_1/S)}$  et  $\overrightarrow{A_1 I_1}$  (on n'effectuera pas les produits vectoriels).

**Question 5** Déduire des relations précédentes que  $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{A_1 I_1} = \vec{0}$ .

**Question 6** On pose  $\overrightarrow{IA_1} = a\vec{u}_1 + b\vec{v}_1 + c\vec{z}$ , montrer que l'on a nécessairement  $a = -\frac{R\dot{\theta}_1}{\dot{\beta}}$  et  $b = 0$  pour que la relation obtenue question précédente soit respectée.

**Question 7** Montrer que l'axe ( $D_1$ ) de la roue ( $S_1$ ) passe par  $I$ , puis en déduire que l'axe ( $D_i$ ) de la roue ( $S_i$ ) passe par  $I$ .

On pose par la suite  $\overrightarrow{IC} = \rho \vec{x}$  et on note  $\overrightarrow{V(C, S/R)} = V \vec{y}$  ( $\rho$  est le rayon du virage et  $V$  la vitesse du véhicule).

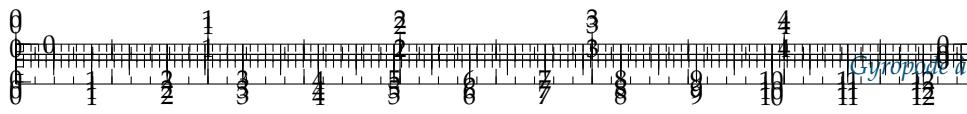
**Question 8** À partir de  $\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_0)\}$  exprimé en  $I$ , quelle relation simple existe-t-il entre  $V$  et  $\rho$ ?

**Question 9** En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer les vitesses de rotation  $\dot{\theta}_3$  et  $\dot{\theta}_4$  des deux roues arrières ( $S_3$ ) et ( $S_4$ ) en fonction de  $\rho$ ,  $R$ ,  $d$  et  $V$ . Que constate-t-on?

**Question 10** En déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu arrière pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en  $I_3$  et  $I_4$ .

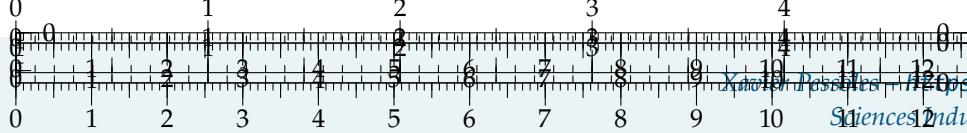
On considère que le véhicule roule à 90 km/h, les roues ont pour diamètre 80 cm et le virage décrit une courbe telle que la vitesse angulaire du véhicule  $\dot{\beta} = 0,1$  rad/s. On donne  $d = 1$  m.



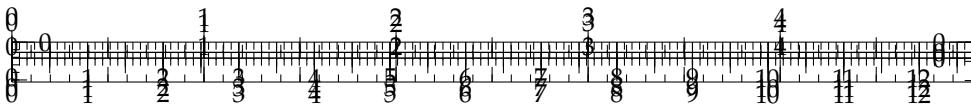


**Question 11** Déterminer graphiquement les vitesses des roues  $S_1, S_2, S_3, S_4$  en  $I_1, I_2, I_3, I_4$ . Utiliser une échelle judicieuse pour les vitesses et justifier les constructions.

**Question 12** Que constate-t-on sur les roues avant et en déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu avant pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en  $I_1$  et  $I_2$ .



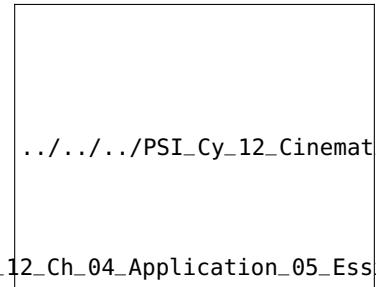
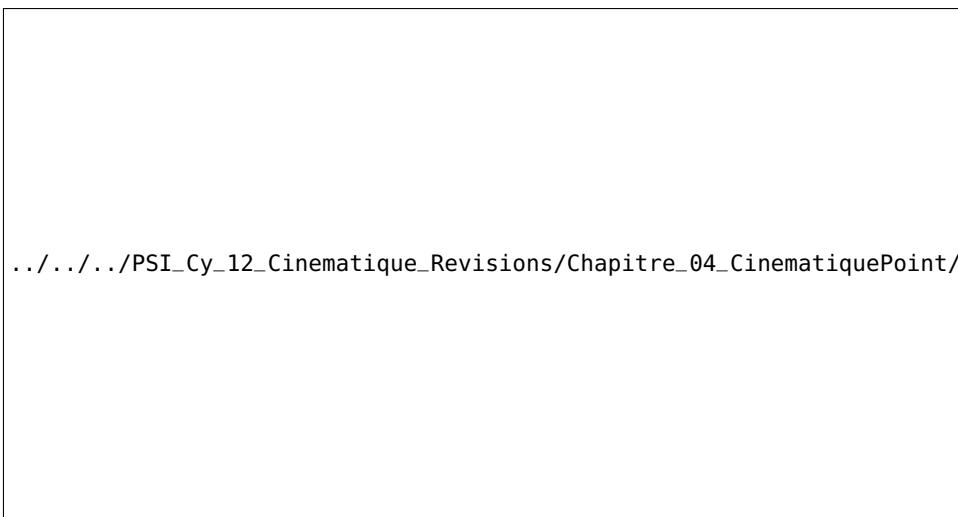




## Application 10

### Étude des performances cinématiques en virage d'une Formule 1 – Corrigé

Ressources de Florestan Mathurin.



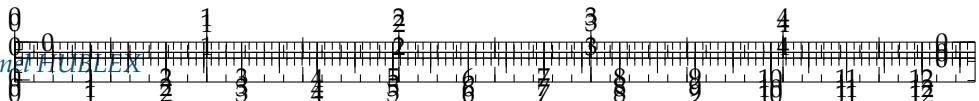
#### Mise en situation

Une Formule 1 doit assurer un certain nombre d'exigences techniques afin d'assurer les meilleures performances en course tout en garantissant la sécurité du pilote. Une de ces exigences est que « le système doit tenir la trajectoire en phase de virage ». Pour y parvenir, le véhicule dispose d'une cinématique particulière permettant aux roues de tourner sur le sol en limitant le risque de glissement. On s'intéresse aux conséquences pratiques nécessaire pour assurer la condition de roulement sans glissement des roues sur le sol. On supposera donc que les 4 roues roulent sans glisser dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .

Pour cette étude on considère que le véhicule est constitué d'un châssis ( $S$ ) et de 4 roues ( $S_i$ ) avec  $i = 1, 2, 3, 4$ . Le châssis est modélisé par un rectangle  $A_1A_2A_3A_4$  tel que  $\overrightarrow{A_4A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} = 2d\vec{x}$  et  $\overrightarrow{A_4A_1} = \overrightarrow{A_3A_2} = L\vec{y}$  où  $L$  correspond à l'empattement du véhicule et  $2d$  à la voie.

On définit le repère  $\mathcal{R}(C; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  attaché au châssis où le point  $C$ , origine du repère, est tel que  $\overrightarrow{A_4C} = d\vec{x}$ . Le véhicule est en phase de virage et on considère alors qu'il est en rotation par rapport au repère  $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour du point  $I_{S/R0} = I$ ,





centre instantanée de rotation du mouvement. On pose  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x})$  angle de rotation du châssis par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

On définit le repère  $\mathcal{R}_i (A_i; \vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{q}_i)$  attaché à chaque roue ( $S_i$ ). Ces 4 roues de rayon  $R$  sont en liaison pivot avec le châssis ( $S$ ) suivant les axes  $(A_i, \vec{u}_i)$  avec  $i = 1, 2, 3, 4$ . On pose  $\theta_i = (\vec{z}, \vec{q}_i)$  angle de rotation de la roue  $i$  par rapport au châssis. Afin d'assurer la direction du véhicule, les 2 roues pivotent d'un angle  $\psi_1$  suivant l'axe  $(A_i, \vec{z})$  pour la roue 1 et d'un angle  $\psi_2$  suivant l'axe  $(A_2, \vec{z})$  pour la roue 2 avec  $\psi_1 = (\vec{x}, \vec{u}_1) = (\vec{y}, \vec{v}_1)$  et  $\psi_2 = (\vec{x}, \vec{u}_2) = (\vec{y}, \vec{v}_2)$ . On considère que le contact sol/roue et assimilable à un contact ponctuel en  $I$  de normale  $(I, \vec{z})$  tel que  $\overrightarrow{I_i A_i} = R \vec{z}$ .

**Question 1** Établir les figures géométriques utiles.

**Correction**

**Question 2** Écrire la condition de roulement sans glissement de la roue ( $S_1$ ) par rapport au sol  $\mathcal{R}_0$ . En déduire une relation vectorielle simple entre  $\overrightarrow{V(I_1, S_1/S)}$  et  $\overrightarrow{V(I_1, S/\mathcal{R}_0)}$ .

**Correction**

**Question 3** Donner la forme simple du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_0)\}$  écrit en  $I$ . En déduire alors  $\overrightarrow{V(I_1, S/\mathcal{R}_0)}$  en fonction de  $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_0)}$  et  $\overrightarrow{II_1}$  (on n'effectuera pas les produits vectoriels).

**Correction**

**Question 4** Donner la forme simple du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(S_1/S)\}$  écrit en  $A_1$ . En déduire alors  $\overrightarrow{V(I_1, S_1/S)}$  en fonction de  $\overrightarrow{\Omega(S_1/S)}$  et  $\overrightarrow{A_1 I_1}$  (on n'effectuera pas les produits vectoriels).

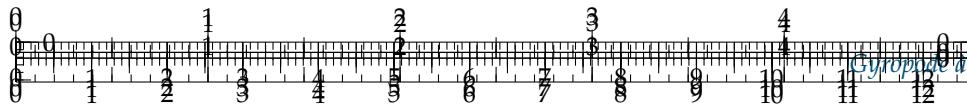
**Correction**

**Question 5** Déduire des relations précédentes que  $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{A_1 I_1} = \overrightarrow{0}$ .

**Correction**

**Question 6** On pose  $\overrightarrow{IA_1} = a\vec{u}_1 + b\vec{v}_1 + c\vec{z}$ , montrer que l'on a nécessairement  $a = -\frac{R\dot{\theta}_1}{\dot{\beta}}$  et  $b = 0$  pour que la relation obtenue question précédente soit respectée.





### Correction

**Question 7** Montrer que l'axe ( $D_1$ ) de la roue ( $S_1$ ) passe par  $I$ , puis en déduire que l'axe ( $D_i$ ) de la roue ( $S_i$ ) passe par  $I$ .

### Correction

On pose par la suite  $\overrightarrow{IC} = \rho \vec{x}$  et on note  $\overrightarrow{V(C, S/R)} = V \vec{y}$  ( $\rho$  est le rayon du virage et  $V$  la vitesse du véhicule).

**Question 8** À partir de  $\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_0)\}$  exprimé en  $I$ , quelle relation simple existe-t-il entre  $V$  et  $\rho$ ?

### Correction

**Question 9** En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer les vitesses de rotation  $\dot{\theta}_3$  et  $\dot{\theta}_4$  des deux roues arrières ( $S_3$ ) et ( $S_4$ ) en fonction de  $\rho$ ,  $R$ ,  $d$  et  $V$ . Que constate-t-on ?

### Correction

**Question 10** En déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu arrière pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en  $I_3$  et  $I_4$ .

### Correction

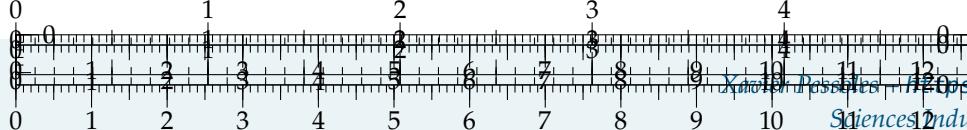
On considère que le véhicule roule à 90 km/h, les roues ont pour diamètre 80 cm et le virage décrit une courbe telle que la vitesse angulaire du véhicule  $\dot{\beta} = 0,1$  rad/s. On donne  $d = 1$  m.

**Question 11** Déterminer graphiquement les vitesses des roues  $S_1, S_2, S_3, S_4$  en  $I_1, I_2, I_3, I_4$ . Utiliser une échelle judicieuse pour les vitesses et justifier les constructions.

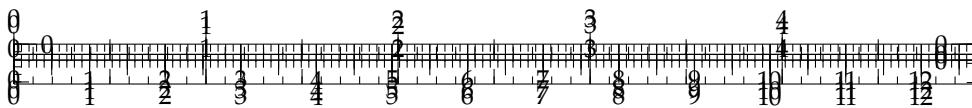
### Correction

**Question 12** Que constate-t-on sur les roues avant et en déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu avant pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en  $I_1$  et  $I_2$ .

### Correction







.../Style/png/Header\_Peugeot.jpg

## 14 Transmetteurs de puissance

### 14.1 Transmission par engrenages

#### Définition –

**Engrenage** Un engrenage est constitué de deux roues dentées en contact. Une roue dentée est caractérisée (entre autre) par son nombre de dents  $Z$ , son diamètre primitif  $D$  en mm et son module en mm. On a  $D = mZ$ . Pour que deux dents engrènent elles doivent avoir le même module.

#### 14.1.1 Engrenage – Contact extérieur

$$\frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

le contacts extérieurs,

.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_05\_Transmetteurs/Cours/images/fig\_01.png

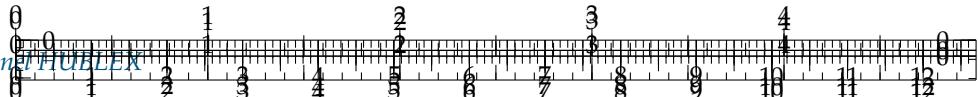
#### 14.1.2 Engrenage – Contact intérieur

$$\frac{Z_1}{Z_2} = +\frac{Z_1}{Z_2}$$

le contacts extérieurs,

.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_05\_Transmetteurs/Cours/images/fig\_02.png





### 14.1.3 Train d'engrenages à axes fixes

Résultat –

$$\frac{\omega(4/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{\prod Z_{menées}}{\prod Z_{21}Z_4} = -\frac{Z_1Z_2}{Z_{21}Z_4}$$

$n$  caractérise le nombre de contacts extérieurs, ici  $n = 1$ .

### 14.1.4 Train d'engrenages épicycloïdal

Méthode –

1. On identifie le porte-satellite, ici 3.
2. On bloque le porte-satellite. On peut alors se ramener au cas du train simple (voir ci-dessus).
3. On écrit le rapport de vitesse **par rapport au porte-satellite 3** :  $\frac{\omega(4/3)}{\omega(1/3)} = -\frac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4} = K$  (raison du train épicycloïdal).
4. En fonction de la roue bloquée, on réalise une décomposition des vitesses.  
Par exemple, Si 4 est bloquée, on peut chercher à établir  $\frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)}$ .
5. On repart du point 3 et on a :  $\frac{\omega(4/3)}{\omega(1/3)} = K \Leftrightarrow \frac{\omega(4/0) + \omega(0/3)}{\omega(1/0) + \omega(0/3)} = K \Leftrightarrow \frac{-\omega(3/0)}{\omega(1/0) - \omega(3/0)} = K \Leftrightarrow \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \frac{K}{K-1}$ .

### 14.1.5 Système pignon – crémaillère

Résultat –

Soit  $R$  le rayon primitif du pignon. On a  $V(2/0) = \pm R\omega(1/0)$ .

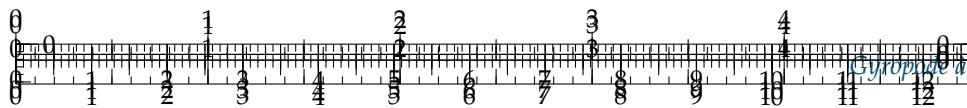
### 14.1.6 Transmission par poulie chaîne et par poulie courroie

Résultat –

$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = \frac{D_1}{D_2}.$$

### 14.1.7 Roue et vis sans fin





nts de la roue et  $n$  le  
s, on a  $\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = \pm \frac{n}{Z}$ .

.../.../PSI\_Cy\_12\_Cinematique\_Revisions/Chapitre\_05\_Transmetteurs/Cours/images/fig\_04.png

### 14.1.8 Système vis-écrou

#### Résultat –

En notant  $v$  la vis et  $e$  l'écrou, soit  $p$  le pas de la vis (ici à droite) on a

$$v(v/e) = \omega(v/e) \frac{p\text{as}}{2\pi}$$

### 14.1.9 Système de transmission Rotation – Rotation

	Joint de Oldham	Joint de cardan	Joint tripode
ment axial	.../.../PSI_Cy_12_Cinematique_Revisions/Chapitre_05_Transmetteurs/Cours/images/fig_05.png	.../.../PSI_Cy_12_Cinematique_Revisions/Chapitre_05_Transmetteurs/Cours/images/fig_06.png	.../.../PSI_Cy_12_Cinematique_Revisions/Chapitre_05_Transmetteurs/Cours/images/fig_07.png
tion	Oui Oui Non	Non, Oui si double Non Oui	Quasi Non Oui
Maxpid :)	Colonne de direction (DAE), manivelle de volet roulant	Automobile	

