

## 8 Caractérisation inertielle des solides

### 8.1 Masse et centre de masse (centre d'inertie)

#### 8.1.1 Définitions

##### Définition – Masse d'un solide indéformable

On peut définir la masse totale d'un solide  $S$  par :  $M = \int_{P \in S} dm$ . Si de plus l'ensemble est fait d'un matériau homogène de masse volumique  $\mu$ , on a  $M = \mu \int_{P \in S} dV$ .

##### Définition – Centre d'inertie d'un solide

La position du centre d'inertie  $G$  d'un solide  $S$  est définie par  $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}$ .

Pour déterminer la position du centre d'inertie d'un solide  $S$ , on passe généralement par l'origine du repère associé à  $S$ . On a alors  $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \int_{P \in S} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) dm = \vec{0} \Leftrightarrow \int_{P \in S} \overrightarrow{OG} dm = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm \Leftrightarrow M\overrightarrow{OG} = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm$ .

##### Méthode – Coordonnées du centre d'inertie

Pour déterminer les coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$  du centre d'inertie  $G$  du solide  $S$  dans la base  $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , on a donc :

$$\begin{cases} Mx_G = \mu \int_{P \in S} x_P dV \\ My_G = \mu \int_{P \in S} y_P dV \\ Mz_G = \mu \int_{P \in S} z_P dV \end{cases} \quad \text{avec } dV \text{ volume élémentaire du solide } S.$$

Pour simplifier les calculs, on peut noter que le centre d'inertie appartient au(x) éventuel(s) plan(s) de symétrie du solide.

8.1 Masse et centre de masse (centre d'inertie) . . . . .	1
8.2 Matrice d'inertie d'un solide . . . . .	2

#### B2-10

**Emilien Durif**, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

**Florestan Mathurin**, *Géométrie des masses*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

**Robert Papanicola**, *Opérateurs d'inertie*, Lycée Charlemagne, Paris, <http://sciences-indus-cpge.papanicola.info/>.



FIGURE 8.1 – Toupie



FIGURE 8.2 – Volants d'inertie d'un vilebrequin

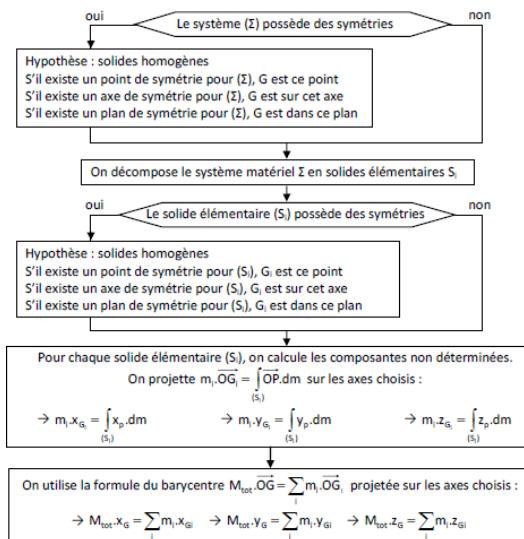
**Remarque**

Centre d'inertie et centre de gravité sont confondus lorsque le champ de pesanteur est considéré comme uniforme en tout point de l'espace.

**8.1.2 Centre d'inertie d'un ensemble de solides encastrés entre eux****Méthode – Barycentre d'un assemblage**

Soit un solide composé de  $n$  solides élémentaires dont la position des centres d'inertie  $G_i$  et les masses  $M_i$  sont connues. On note  $M = \sum_{i=1}^n M_i$ . La position du centre d'inertie  $G$  de l'ensemble  $S$  est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n M_i \overrightarrow{OG_i}.$$

**8.1.3 Méthode pour déterminer le centre d'inertie d'un solide [2]****8.2 Matrice d'inertie d'un solide****8.2.1 Opérateur et matrice d'inertie****Définition – Opérateur d'inertie**

Soient :

- ▶ un solide  $S$  de masse  $m$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ ;
- ▶  $\mathcal{R}_S = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le repère lié au solide  $S$ ;
- ▶  $P$  un point de  $S$  tel que  $\overrightarrow{OP} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{k}$ ;
- ▶  $\vec{u}$  un vecteur unitaire lié au solide  $S$  tel que  $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ .

On appelle opérateur d'inertie l'application linéaire définie par :

$$\vec{u} \rightarrow \overline{J_{(O,S)}}(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}) dm$$

On appelle matrice d'inertie du solide  $S$  en  $O$ ,  $I_O(S)$ , l'image de cette application linéaire :  $\overline{J_{(O,S)}}(\vec{u}) = I_O(S) \vec{u}$ .

### Définition – Matrice d'inertie

La matrice d'inertie s'écrit ainsi :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} \int_S (y_p^2 + z_p^2) dm & -\int_S (x_p y_p) dm & -\int_S (x_p z_p) dm \\ -\int_S (x_p y_p) dm & \int_S (x_p^2 + z_p^2) dm & -\int_S (y_p z_p) dm \\ -\int_S (x_p z_p) dm & -\int_S (y_p z_p) dm & \int_S (x_p^2 + y_p^2) dm \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S}$$

$$= \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S}.$$

On appelle moments d'inertie par rapport aux axes  $(O, \vec{x})$ ,  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$  les termes  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

On appelle produit d'inerties par rapport aux axes  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$ ,  $(O, \vec{x})$  et  $(O, \vec{z})$ ,  $(O, \vec{x})$  et  $(O, \vec{y})$  les termes  $D$ ,  $E$  et  $F$ .

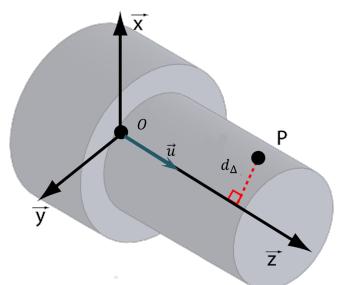
### Propriété –

- La matrice d'inertie est une matrice symétrique. Il existe une base dans laquelle elle est diagonalisable. Cette base est appelée base principale d'inertie.
- Si  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  est un plan de symétrie du solide,  $D$  et  $E$  sont nuls.
- Si  $(O, \vec{z}, \vec{x})$  est un plan de symétrie du solide,  $D$  et  $F$  sont nuls.
- Si  $(O, \vec{y}, \vec{z})$  est un plan de symétrie du solide,  $E$  et  $F$  sont nuls.
- Si un solide admet 2 plans de symétrie, alors  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont nuls.

### Définition – Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

Le moment d'inertie caractérise la répartition de masse d'un solide autour d'un axe  $\Delta$  ( $O, \vec{u}$ ). Plus la valeur de l'inertie est grande plus il sera difficile de mettre en mouvement de rotation ce solide autour de l'axe  $\Delta$ . On note  $I_\Delta(S)$ , le moment d'inertie du solide  $S$  autour de l'axe  $\Delta$ . Son unité est en  $\text{kg.m}^2$ .

Si on connaît  $I_O(S)$ , alors  $I_\Delta(S) = \vec{u}^\top I_O(S) \vec{u}$  avec  $\vec{u}$  vecteur unitaire.



**Remarque**

On a aussi :

$$I_{\Delta}(S) = \int_S d_{\Delta}^2 dm \quad \text{où } d_{\Delta} \text{ est la distance entre le point courant } P \text{ et l'axe } \Delta.$$

### 8.2.2 Déplacement d'une matrice d'inertie – Théorème de Huygens

**Théorème – Théorème de Huygens**

Soit  $S$  un solide de centre d'inertie  $G$ , de masse  $m$ , d'inertie  $I_G(S)$  et d'inertie  $I_O(S)$  avec  $\overrightarrow{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$ . Les matrices  $I_G(S)$  et  $I_O(S)$  exprimées dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  sont liées par :

$$\begin{pmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$+ \begin{pmatrix} m(b^2 + c^2) & -mab & -mac \\ -mab & m(a^2 + c^2) & -mbc \\ -mac & -mbc & m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Si le solide est modélisé par une masse ponctuelle  $m$  en  $G$  et si on souhaite connaître le moment d'inertie pour un point situé à une distance  $d$  de  $G$ , on a  $I = md^2$ .

### 8.2.3 Changement de base de la matrice d'inertie

**Définition – Matrice de Passage**

On appelle  $P_{12}$  la matrice de passage permettant de passer de la base  $\mathcal{B}_1$  à la base  $\mathcal{B}_2$ . Cette matrice est constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_2$  écrits dans la base d'origine  $\mathcal{B}_1$ . On l'appelle aussi matrice de changement de base. Cette matrice est inversible.

Dans le cas des matrices de rotation,  $P_{12}^{-1} = P_{12}^T$ .

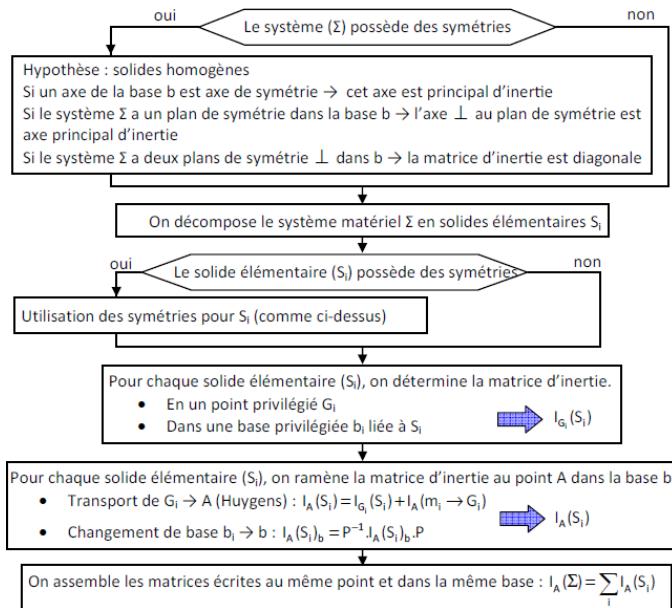
**Exemple –**

Soit  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  et  $\mathcal{R}_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  avec  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On a alors  $\vec{x}_2 = \cos \beta \vec{x}_1 + \sin \beta \vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2 = \cos \beta \vec{y}_1 - \sin \beta \vec{x}_1$ . En conséquences,  $P_{12} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Résultat –**

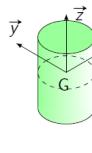
Pour passer  $I_A(S)_{\mathcal{B}_1}$  de  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  de la on a  $I_A(S)_{\mathcal{B}_2} = P_{12}^{-1} I_A(S)_{\mathcal{B}_1} P_{12}$ .

### 8.2.4 Détermination de la matrice d'inertie d'un solide [2]



### 8.2.5 Matrice d'inertie de solides usuels [3]

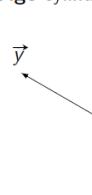
Cylindre d'axe ( $G, \vec{z}$ ) de rayon  $R$  et de hauteur  $H$



$$\begin{pmatrix} m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{\vec{G}, \vec{x}, \vec{y}}$$

en  $G$  dans toute base contenant  $\vec{z}$

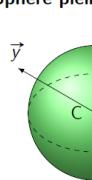
Tige cylindrique ( $G, \vec{z}$ ) de rayon négligeable



$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\vec{G}, \vec{x}, \vec{y}}$$

en  $G$  dans toute base contenant  $\vec{z}$ .

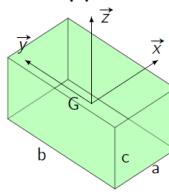
Sphère pleine de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}m \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}m \cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{\vec{C}, \vec{x}, \vec{y}}$$

en C centre de la sphère et dans toute base

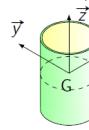
Parallélépipède de cotés  $a, b$  et  $c$



$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{b^2 + c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{a^2 + c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{a^2 + b^2}{12} \end{pmatrix}_{\vec{G}, \vec{x}, \vec{y}}$$

en  $G$  dans la base  $B$  parallèle aux arêtes du parallélépipède

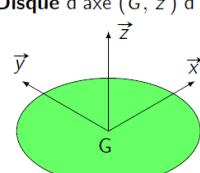
Tube d'axe ( $G, \vec{z}$ ) de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  (épaisseur négligeable)



$$\begin{pmatrix} m \cdot \left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{\vec{G}, \vec{x}, \vec{y}}$$

en  $G$  dans toute base contenant  $\vec{z}$ .

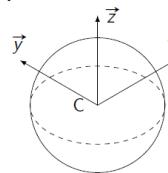
Disque d'axe ( $G, \vec{z}$ ) d'épaisseur négligeable



$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{\vec{G}, \vec{x}, \vec{y}}$$

en  $G$  dans toute base contenant  $\vec{z}$ .

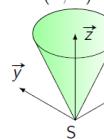
Sphère creuse de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}m \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}m \cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{\vec{C}, \vec{x}, \vec{y}}$$

en C centre de la sphère et dans toute base

Cône ( $S, \vec{z}$ ) de rayon  $R$  et de hauteur  $H$



$$\begin{pmatrix} \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + H^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + H^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot m \cdot R^2}{5 \cdot 2} \end{pmatrix}_{\vec{S}, \vec{x}, \vec{y}}$$

au sommet  $S$  dans toute base contenant  $\vec{z}$ .



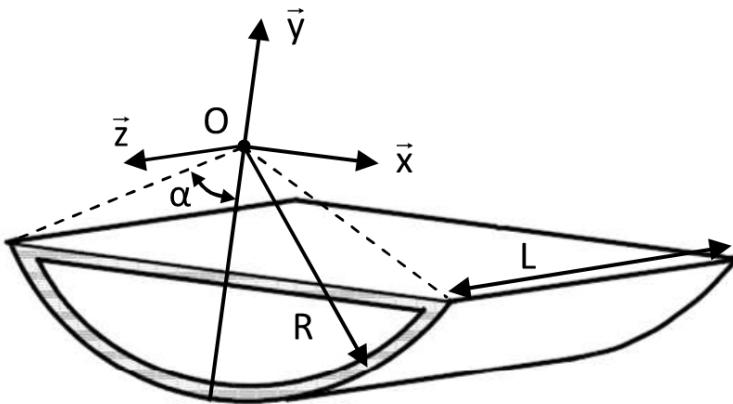
# Application 1

## Barrière sur la Tamise – Sujet

Florestan Mathurin.

B2-10

Le barrage sur la Tamise permet de protéger Londres des grandes marées évitant ainsi des crues qui pourraient survenir. Ce barrage est constituée de dix portes dont une modélisation est donnée ci-dessous.



On donne :

- $L = 58 \text{ m}$  la longueur de la porte;
- $R = 12,4 \text{ m}$  le rayon de la porte;
- $e = 0,05 \text{ m}$  l'épaisseur de la porte, considérée négligeable devant  $R$ ;
- $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ ;
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

**Question 1** Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la porte :

1. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G_P$  de la plaque;
2. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G_C$  de la portion cylindrique;
3. déterminer les coordonnées du centre d'inertie  $G$  de la porte.

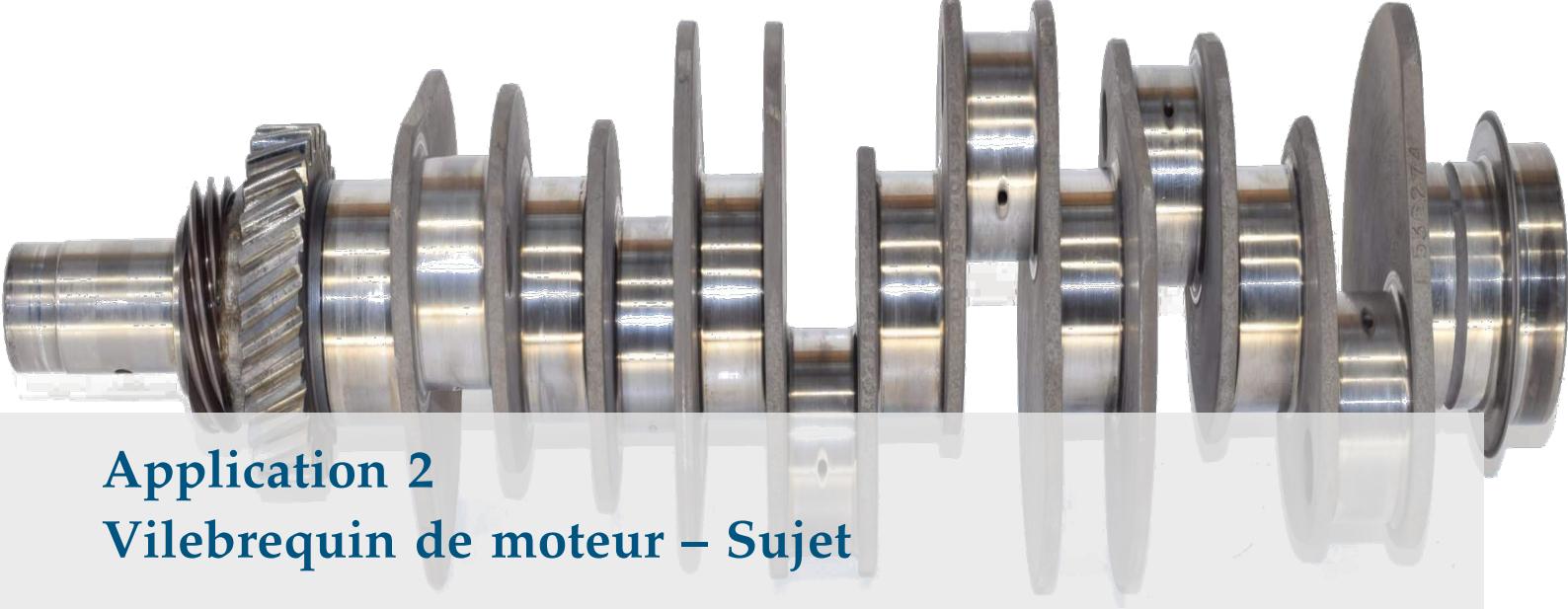
**Question 2** Déterminer la forme de la matrice d'inertie de la porte :

1. donner la forme de la matrice d'inertie de la plaque  $P$  en  $G_P$ ;
2. donner la forme de la matrice d'inertie du cylindre  $C$  en  $G_C$ ;
3. donner la forme de la matrice d'inertie de la porte  $P$  en  $G$ .

**Question 3** Déterminer le moment d'inertie de la porte par rapport à  $(O, \vec{z})$ .







## Application 2 Vilebrequin de moteur – Sujet

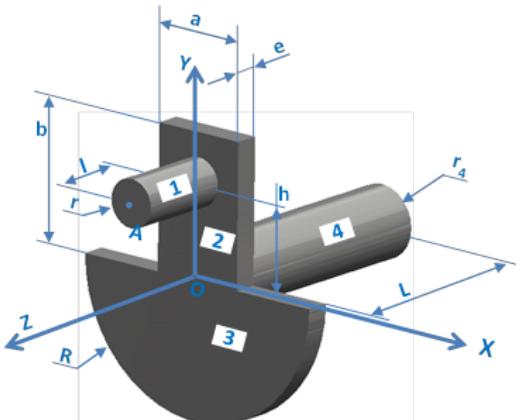
C. Gamelon & P. Dubois.

**B2-10**



On note :

- $\rho = 7200 \text{ kg m}^{-3}$  la masse volumique du matériau;
- $a = 20 \text{ mm}$ ;
- $b = 30 \text{ mm}$ ;
- $e = 5 \text{ mm}$ ;
- $l = 20 \text{ mm}$ ;
- $r = 5 \text{ mm}$ ;
- $L = 50 \text{ mm}$ ;
- $r_4 = 7,5 \text{ mm}$ ;
- $h = 20 \text{ mm}$ .



L'origine  $O$  repère  $\mathcal{R}$  est située dans le plan de contact du cylindre 1 et du parallélépipède 2.

**Question 1** Calculer les masses des différentes pièces :  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  et  $m_4$ .

**Question 2** Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.

**Question 3** Déterminer la valeur de  $R$  afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.

**Question 4** Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 5** Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en  $O$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

**Question 6** Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe  $\overrightarrow{OA}$ .

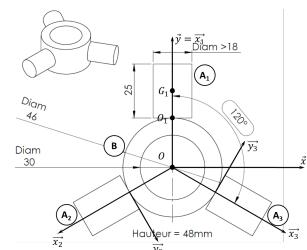
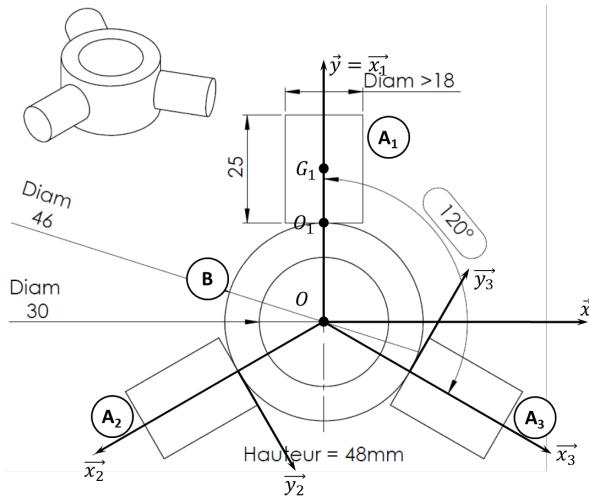




## Application 3 Triaxe – Sujet

On donne le plan d'un triaxe constitué des 3 axes  $A_1, A_2, A_3$  et du moyeu central noté  $M$ . On note  $T$  l'ensemble.

B2-10



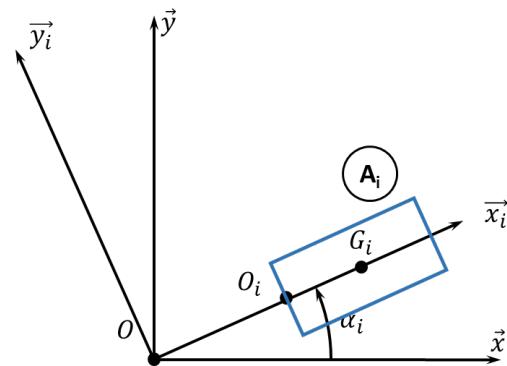
On note :

- $\vec{z}$  l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On se place ci-dessus dans le plan de symétrie  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ ;
- $\mathcal{R}_i$  le repère  $(O_i; \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  et  $\mathcal{B}_i$  la base associée.

**TOUS LES CALCULS SE FERONT DE MANIÈRE LITTERALE!**

- $D_1 = 18 \text{ mm}$  et  $H_1 = 25 \text{ mm}$ .
- $D = 46 \text{ mm}$ ,  $d = 30 \text{ mm}$  et  $H = 48 \text{ mm}$ .
- $\alpha_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1) = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = (\vec{x}, \vec{x}_2) = -150^\circ$  et  $\alpha_3 = (\vec{x}, \vec{x}_3) = -30^\circ$ .

On donne ci-dessous le paramétrage d'un axe  $A_i$ .



**Question 1** Déterminer (sans calcul) la position du centre de gravité du triaxe.

**Question 2** Déterminer analytiquement la position du centre de gravité  $G_i$  du solide  $A_i$  dans le repère  $\mathcal{R}_i$ .

**Question 3** Déterminer (sans calcul) la **forme** de la matrice d'inertie du triaxe.

**Question 4** Déterminer analytiquement la matrice d'inertie du solide  $A_i$  en  $G_i$  dans  $\mathcal{R}_i$ . On note  $I_{G_i}(A_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_i}$  où les constantes seront à déterminer littéralement.

**Question 5** Déterminer  $I_{G_i}(A_i)$  dans la base  $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  puis  $I_O(A_i)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Question 6** Déterminer  $I_O(B)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Question 7** Proposer une méthode pour déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en  $O$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Question 8** Déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en  $O$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Question 9** Déterminer  $I_O(M)$  la matrice d'inertie du moyeu  $M$ .

**Question 10** Déterminer  $I_O(T)$  la matrice d'inertie du triaxe  $T$ .

