TD 1 : Stabilisateur vertical pour appareil photo – Sujet

Concours Centrale Supélec 2021 – PSI.

B2-14

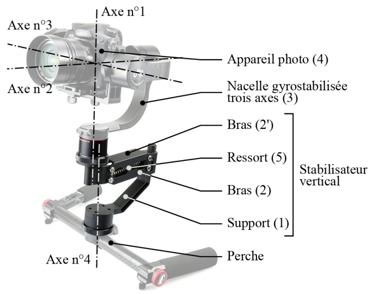
C1-05

C2-07

L'utilisation du mode vidéo, en haute définition sur les appareils photo réflex et légers, pose aux photographes le problème de la stabilisation de l'image.

Les nacelles gyrostabilisées, installées sur une perche portée par les deux mains de l'utilisateur et sur lesquelles se fixe l'appareil photographique permettent de corriger les perturbations dues aux mouvements de l'utilisateur selon trois axes de rotations. Néanmoins, elles ne permettent pas de réduire les perturbations verticales dues à la marche ou à la course de l'utilisateur.

Pour résoudre ce problème, un constructeur commercialise un stabilisateur vertical à installer entre la perche et la nacelle gyrostabilisée.



Vérification du respect de l'exigence relative à la position d'équilibre

Le cahier des charges précise que le stabilisateur peut être utilisé avec des appareils photo de masse comprise entre 0,350 kg et 1,550 kg[1].

1: Exigence 1

Objectif

L'objectif de cette partie est de vérifier que la conception est assez robuste vis-à-vis du facteur de masse de l'appareil photo pour satisfaire l'exigence 1.1 relative à la position d'équilibre du système.

“requirement”
Plage de fonctionnement

Id ="1.1.1"
Text = "Obtenir une position d'équilibre du système dans la plage de fonctionnement $\alpha_0 \in [-35°, 45°]$"

Figure 1.1 – Exigence 1.1

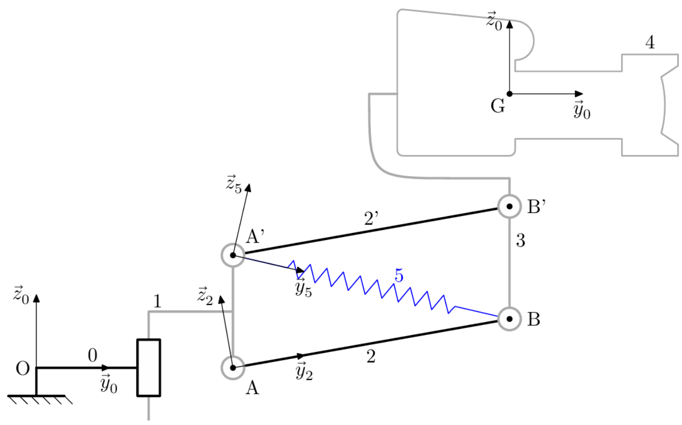


Figure 1.2 – Schéma cinématique plan et paramétrage du mécanisme

Le mécanisme étudié dont la modélisation retenue est donnée (figure 1.2). La nacelle gyrostabilisée est schématisée par la barre (3). Le support (1), faisant l'objet d'une liaison encastrement avec la perche, est supposé être en mouvement de translation par rapport au sol (0) autorisé par une glissière fictive. Ce modèle est paramétré par :

- le repère terrestre $\mathcal{R}_0\left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ supposé galiléen avec $\vec{z}_0$ vertical ascendant ;
- le repère $\mathcal{R}_1\left(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ lié au support (1) avec $\overrightarrow{OA} = y_A\vec{y}_0 + z_{\text{pert}}\,\vec{z}_0$;
- le repère $\mathcal{R}_2\left(A, \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2\right)$ lié au bras (2) avec $\alpha = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_2\right) = \left(\vec{z}_0, \vec{z}_2\right)$;
- le repère $\mathcal{R}'_2\left(A', \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2\right)$ lié au bras (2') avec $\overrightarrow{AA'} = l\vec{z}_0$;

La plage de fonctionnement du mécanisme est limitée par la géométrie des bras (2) et (2') avec $\alpha \in [-35°, 45°]$, $l = 25$ mm, $L = 52$ mm, $y_G = 5$ mm et $z_G = 200$ mm.

- le repère $\mathcal{R}_3$ $\left(B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ lié à la nacelle gyrostabilisée (3) et à l'appareil photo (4) liés rigidement entre eux avec $\overrightarrow{AB} = L\vec{y}_2$. Le centre d'inertie de l'ensemble $\{(3) + (4)\}$ est noté G, avec $\overrightarrow{BG} = y_G\vec{y}_0 + z_G\vec{z}_0$;
- le repère $\mathcal{R}_5$ $\left(A', \vec{x}_0, \vec{y}_5, \vec{z}_5\right)$ est défini tel que $\overrightarrow{A'B} = L_r\vec{y}_5$ avec $\beta = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_5\right) = \left(\vec{z}_0, \vec{z}_5\right)$.

Le ressort de traction (5) de raideur K_r et de longueur à vide L_{r0} possède une tension initiale F_{r0} lorsque $L_r = L_{r0}$. Il est relié d'une part au support (1) et d'autre part au solide (3) aux points d'ancrage respectivement A' et B.

Pour cette étude la nacelle gyrostabilisée (3) et l'appareil photo (4) sont considérés comme formant un seul solide de masse $m_{34} = m_3 + m_4$ avec $m_3 = 1{,}250$ kg. La masse et l'inertie des autres solides sont négligés.

Dans cette partie, l'étude est conduite avec les hypothèses suivantes :

- les liaisons sont parfaites;
- la modélisation est plane;
- il n'y pas de perturbation ($z_{\text{pert}} = 0$).

En utilisant une fermeture géométrique, on peut montrer que $\tan\beta = \dfrac{L\sin\alpha - l}{L\cos\alpha}$ et que la longueur du ressort L_r peut s'exprimer sous la forme $L_r = \sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll\sin\alpha}$.

Vérification de l'exigence relative à la plage de fonctionnement

L'action mécanique du ressort de traction (5) sur la nacelle gyrostabilisée (3) est modélisée par le torseur $\{\mathcal{F}_{5\to3}\}$: $\{\mathcal{F}_{5\to3}\} = \left\{\begin{array}{c} F_r\vec{y}_5 \\ \vec{0} \end{array}\right\}_B$.

Question 1 Exprimer la composante de résultante d'action mécanique F_r en fonction de l'angle α, des paramètres géométriques du système et des paramètres du ressort.

Question 2 Déterminer la direction des actions mécaniques de liaison exercées par le bras (2) sur la nacelle (3) et par le bras (2') sur la nacelle (3). **On pourra raisonner en statique)**.

Question 3 Afin de déterminer la position d'équilibre de l'ensemble $\{(3) + (4)\}$, proposer sans calcul, une démarche claire qui permette d'exprimer l'effort nécessaire du ressort de traction (5) sur la nacelle gyrostabilisée (3). **On pourra raisonner en statique)**.

Question 4 Exprimer l'équation scalaire traduisant l'équilibre du mécanisme en fonction des angles α, β, de la masse m_{34} et de la composante de résultante d'action mécanique F_r.

Dès lors, il est posible de tracer l'angle d'équilibre α_0 en fonction de la masse de l'appareil photo m_4 (figure 1.3).

Question 5 En donnant les valeurs des angles d'équilibre pour les deux valeurs extrêmes de masse, vérifier le respect de l'exigence 1.1.1. relative à la plage de fonctionnement.

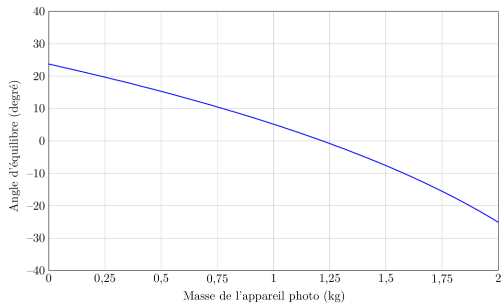


Figure 1.3 – Angle d'équilibre α_0 en fonction de la masse de l'appareil photo m_4

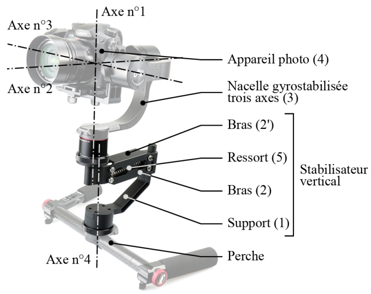
TD 1 : Stabilisateur vertical pour appareil photo – Corrigé

Concours Centrale Supélec 2021 – PSI.

B2-14

C1-05

C2-07



Vérification du respect de l'exigence relative à la position d'équilibre

Objectif

L'objectif de cette partie est de vérifier que la conception est assez robuste vis-à-vis du facteur de masse de l'appareil photo pour satisfaire l'exigence 1.1 relative à la position d'équilibre du système.

Vérification de l'exigence relative à la plage de fonctionnement

Question 1 Exprimer la composante de résultante d'action mécanique F_r en fonction de l'angle α, des paramètres géométriques du système et des paramètres du ressort.

Correction

En utilisant la définition de la force de rappel du ressort de traction (en tension ici) et avec L_{r0} la longueur à vide du ressort on a $F_r\overrightarrow{y_5} = -K_r\left(L_r - L_{r0}\right)\overrightarrow{y_5}$. En utilisant l'expression précédente : $\boxed{F_r = -K_r\left(\sqrt{L^2+l^2-2Ll\sin\alpha} - L_{r0}\right)}$.

Avec la définition de l'effort de traction donnée par l'énoncé, on peut aussi être tenté d'écrire $F_r\overrightarrow{y_5} = -\left[F_{r0} + K_r\left(L_r - L_{r0}\right)\right]\overrightarrow{y_5}$. En utilisant l'expression précédente : $\boxed{F_r = -\left[F_{r0} + K_r\left(\sqrt{L^2+l^2-2Ll\sin\alpha} - L_{r0}\right)\right]}$.

Question 2 Déterminer la direction des actions mécaniques de liaison exercées par le bras (2) sur la nacelle (3) et par le bras (2′) sur la nacelle (3). **On pourra raisonner en statique)**.

Correction

Il est fait l'hypothèse que le problème est plan dans le plan $\left(0, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$. Les torseurs d'actions mécaniques associés aux liaisons pivot d'axe $\overrightarrow{z_0}$ sont donc des glisseurs.

Les solides (2) et (2′) sont tous soumis à deux glisseurs :

- d'une part, $\{\mathscr{F}(1 \rightarrow 2)\}$ (pivot d'axe $\left(A, \overrightarrow{x_0}\right)$) et $\{\mathscr{F}(3 \rightarrow 2)\}$ (pivot d'axe $\left(B, \overrightarrow{x_0}\right)$) sont des glisseurs ;
- d'autre part, $\{\mathscr{F}(1 \rightarrow 2')\}$ (pivot d'axe $\left(A', \overrightarrow{x_0}\right)$)et $\{\mathscr{F}(3 \rightarrow 2')\}$ (pivot d'axe $\left(B', \overrightarrow{x_0}\right)$) sont des glisseurs.

D'après le PFS appliqué successivement à (2) et (2′), solides soumis à deux glisseurs, alors on a $\{\mathscr{F}(3 \rightarrow 2)\} + \{\mathscr{F}(1 \rightarrow 2)\} = \{0\}$ et $\{\mathscr{F}(3 \rightarrow 2')\} + \{\mathscr{F}(1 \rightarrow 2')\} = \{0\}$. Les actions mécaniques sont de même norme, de même direction (droites (AB) et $(A'B')$ soit vecteur $\overrightarrow{y_2}$).

De plus, $\boxed{\overrightarrow{F}_{23} = F_{23}\overrightarrow{y_2}}$ et $\boxed{\overrightarrow{F}_{2'3} = F_{2'3}\overrightarrow{y_2}}$.

Question 3 Afin de déterminer la position d'équilibre de l'ensemble $\{(3) + (4)\}$, proposer sans calcul, une démarche claire qui permette d'exprimer l'effort nécessaire du ressort de traction (5) sur la nacelle gyrostabilisée (3). **On pourra raisonner en statique)**.

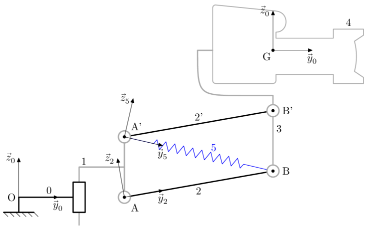
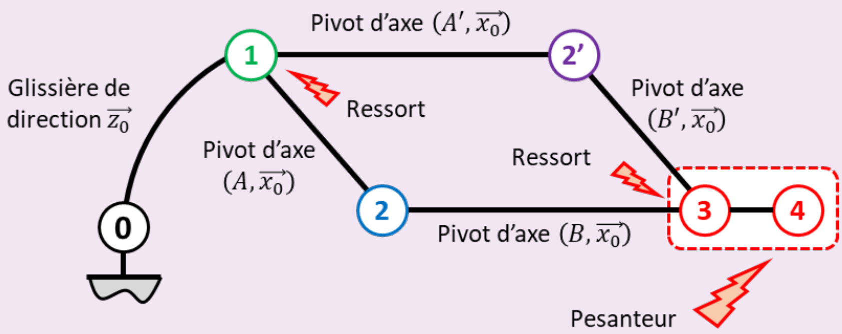


FIGURE 1.4 – Rappel – Schéma cinématique plan et paramétrage du mécanisme

Correction

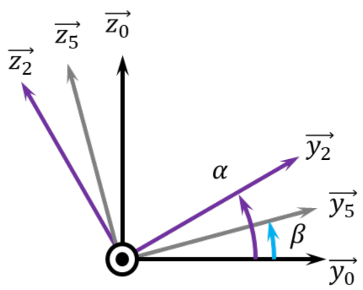


On isole l'ensemble {(3)+(4)}.
On réalise le bilan des actions mécaniques :

- action mécanique de (2') sur (3), de direction $\overrightarrow{y_2}$;
- action mécanique de (2) sur (3), de direction $\overrightarrow{y_2}$;
- action mécanique de la pesanteur sur {(3)+(4)} ;
- action du ressort sur {(3)+(4)}.

Il faut écrire une équation du PFS permettant de ne pas faire apparaître les actions dans les deux liaisons pivot. Il faut donc réaliser un théorème de la résultante statique en projection sur $\overrightarrow{z_2}$ (perpendiculaire à $\overrightarrow{y_2}$).

Question 4 Exprimer l'équation scalaire traduisant l'équilibre du mécanisme en fonction des angles α, β, de la masse m_{34} et de la composante de résultante d'action mécanique F_r.



Correction

Calculons :

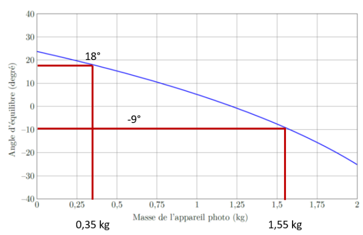
- la projection de l'action du ressort sur $\overrightarrow{z_2}$: $F_r\overrightarrow{y_5} \cdot \overrightarrow{z_2} = F_r \cos\left(-\beta + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -F_r \sin\left(\alpha - \beta\right)$;
- la projection de l'action de pesanteur sur $\overrightarrow{z_2}$: $-m_{34}g\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{z_2} = -m_{34}g \cos\alpha$.

On applique le TRS en projection sur $\overrightarrow{z_2}$ et on a :

$$\underbrace{\overrightarrow{R\left(2' \to 3\right)} \cdot \overrightarrow{z_2}}_{\overrightarrow{0}} + \underbrace{\overrightarrow{R\left(2 \to 3\right)} \cdot \overrightarrow{z_2}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{R\left(\text{Pes} \to 3\right)} \cdot \overrightarrow{z_2} + \overrightarrow{R\left(\text{Res} \to 3\right)} \cdot \overrightarrow{z_2} = 0.$$

On a donc $-m_{34}g\cos\alpha - F_r \sin\left(\alpha - \beta\right) = 0$ et $\boxed{F_r = -m_{34}g\dfrac{\cos\alpha}{\sin\left(\alpha - \beta\right)}}$.

Question 5 En donnant les valeurs des angles d'équilibre pour les deux valeurs extrêmes de masse, vérifier le respect de l'exigence 1.1.1. relative à la plage de fonctionnement.



Correction

On peut lire en figure 1.3 que pour une masse d'appareil comprise entre 0,35 et 1,55 kg, l'angle d'équilibre varie de 18 à $-9°$. Cet intervalle est compris dans l'intervalle $[-35°, 45°]$. L'exigence 1.1.1 est donc satisfaite.

TD 2
Exosquelette Atalante – Sujet

Centrale Supélec PSI 2023.

Contexte

Pensé pour minimiser le temps de formation pour le patient et le thérapeute, l'exosquelette Atalante (figure 1.10), développé par la société Wandercraft a pour volonté d'optimiser les séances de rééducation, et à terme d'aboutir à une solution permettant l'autonomie quasi totale du patient. En effet, ce système permet la verticalisation et des déplacements pouvant s'affranchir de toute dépendance à une tierce personne. De par sa liberté d'utilisation pour le patient, les bénéfices sont importants : possibilité de retours sensoriels, flexibilité de l'entrainement à la marche et à la course ou encore personnalisation des programmes proposés.

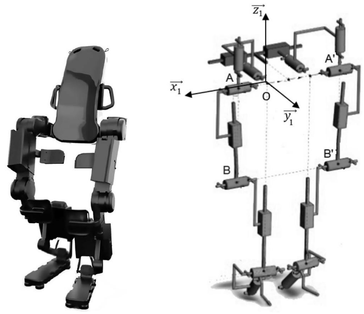


FIGURE 1.5 – Exosquelette Atalante et modélisation 3D associée

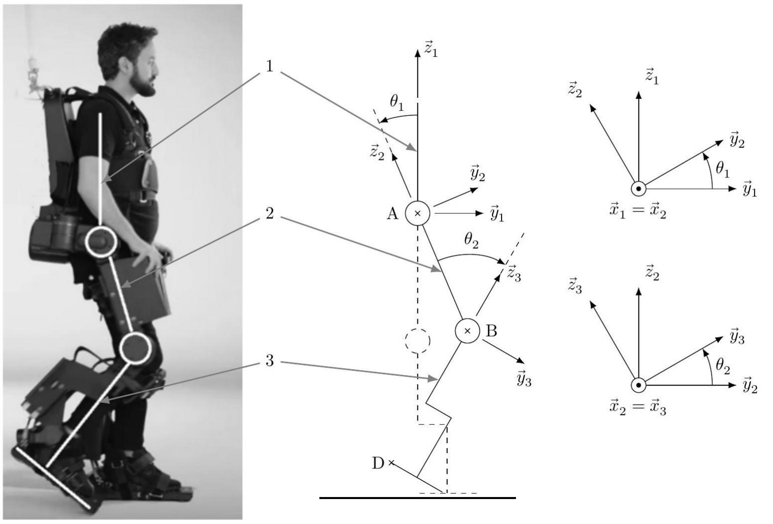
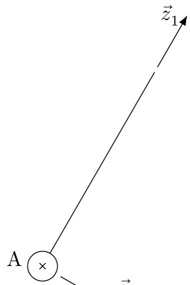


FIGURE 1.6 – Modélisation utilisée pour la marche en ligne droite

Les hypothèses et notations seront les suivantes (figure 1.6) :

- l'étude est menée dans le plan sagittal $(A, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, où $\vec{z}_1$ est vertical ascendant ;
- les différentes caractéristiques de dimension, masse et inertie des différents solides sont précisées figure 1.7,1.8,1.9 ;
- le buste 1 étant animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre, il est considéré comme galiléen ;
- l'étude se limite à la partie de la marche pour laquelle une des deux jambes est totalement décollée du sol (de 70% à 100% de la foulée) ;
- le buste 1 est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{x}_1)$ avec la cuisse 2 ; on note $\theta_1 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$;
- l'ensemble {pied+tibia 3 , considéré comme solidaire, est en liaison pivot d'axe $(B, \vec{x}_1)$ avec la cuisse 2 ; on note $\theta_2 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$;
- les liaisons décrites précédemment sont supposées parfaites.



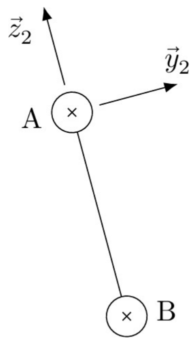
- $\overrightarrow{AG_1} = \ell_1 \overrightarrow{z_1}$;
- $\ell_1 = 0{,}48\,\text{m}$;
- masse $m_1 = 65\,\text{kg}$.

FIGURE 1.7 – Buste 1

Objectif

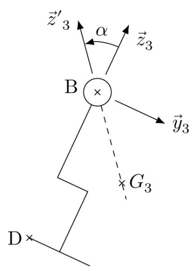
Définir un modèle dynamique de l'exosquelette et montrer la nécessité de mettre en place un asservissement.

Afin d'élaborer une commande pour l'exosquelette, il est nécessaire au préalable de définir un modèle dynamique représentatif de son comportement. Seule la commande



- $\overrightarrow{BG_2} = \ell_2 \vec{z_2}$ avec $\ell_2 = 0{,}25\,\text{m}$;
- $\overrightarrow{BA} = L_2 \vec{z_2}$ avec $L_2 = 0{,}4\,\text{m}$
- masse $m_2 = 15\,\text{kg}$;
- $I_A(2) = \begin{pmatrix} I_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z2} \end{pmatrix}_{(\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})}$;
- $I_{x2} = 0{,}10\,\text{kg}\,\text{m}^2$.

Figure 1.8 – Cuisse 2



- $\overrightarrow{DB} = L_3 \vec{z_3}$ avec $L_3 = 0{,}55\,\text{m}$;
- $\overrightarrow{DG_3} = \ell_0 \vec{y_3} + \ell_3 \vec{z_3}$ avec $\ell_0 = 0{,}2\,\text{m}$, $\ell_3 = 0{,}3\,\text{m}$
- $\overrightarrow{BG_3} = -L_0 \vec{z_3}'$
- masse $m_3 = 18\,\text{kg}$;
- $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} I_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y3} & I_{yz3} \\ 0 & I_{yz3} & I_{z3} \end{pmatrix}_{(\vec{x_3},\vec{y_3},\vec{z_3})}$;
- $I_{x3} = 0{,}08\,\text{kg}\,\text{m}^2$.

Figure 1.9 – Tibia + Pied 3

des articulations sagittales de hanche et de genou d'une jambe lorsqu'elle est décollée du sol sera considérée ici (cas de la marche en ligne droite) avec les hypothèses et notations supplémentaires suivante :

- la liaison pivot entre 1 et 2 est équipée d'un actionneur dont le couple de sortie (appliqué par 1 sur 2) est noté C_1 ;
- la liaison pivot entre 2 et 3 est équipée d'un actionneur dont le couple de sortie (appliqué par 2 sur 3) est noté C_2 ;
- on note respectivement C_{genou} et C_{hanche}, les couples appliqués par le patient au niveau des articulations de genou et de hanche.

Comportement dynamique de l'exosquelette

On pose pour la suite : $\overrightarrow{BG_3} = -L_0 \vec{z}'$. On note α l'angle entre $\vec{z}'_3$ et $\vec{z}_3$: $\alpha = (\vec{y}_3, \vec{y}'_3) = (\vec{z}_3, \vec{z}'_3)$. On montre que $L_0 = \sqrt{l_0^2 + (L_3 - l_3)^2}$ et $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{l_0}{L_0}\right)$ avec $L_0 = 0{,}32\,\text{m}$ et $\alpha \simeq 0{,}67\,\text{rad} \simeq 39°$.

Question 1 Déterminer l'expression de l'accélération du point G_3 appartenant à l'ensemble {pied+tibia} 3 dans son mouvement par rapport au buste 1 , en fonction de $L_0, L_2, \theta_1, \theta_2$ et leurs dérivées temporelles.

Question 2 Déterminer l'expression de la projection suivant $\vec{x}_1$ du moment dynamique en A de l'ensemble { pied+tibia } 3 dans son mouvement par rapport au buste 1, $\vec{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{x}_1$, sous la forme : $\vec{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{x}_1 = A_1 \ddot{\theta}_1 + A_2 \ddot{\theta}_2 + A_3 \dot{\theta}_1^2 + A_4 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2$. Préciser les expressions littérales de A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties de l'exosquelette.

Question 3 Proposer une démarche permettant de déterminer l'expression de C_1, l'action mécanique exercée sur la cuisse 2 par l'actionneur correspondant. Préciser le(les) ensemble(s) isolé(s), le(s) bilan(s) des actions mécaniques extérieurs, le(s) théorème(s) utilisé(s) et la(les) équation(s) utile(s).

Question 4 Déterminer l'expression de C_1 en fonction de θ_1, θ_2, leurs différentes dérivées, de C_{hanche} et des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties de l'exosquelette.

D'une manière similaire aux questions précédentes, l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble {pied+tibia} 3 permet d'obtenir l'expression de C_2, le couple fourni par l'actionneur de genou sagittal : $C_2 = \left[I_{x3} + m_3 L_0^2\right]\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + m_3 L_2 L_0 \left[\ddot{\theta}_1 \cos\left(\theta_2 + \alpha\right) + \dot{\theta}_1^2 \sin\left(\theta_2 + \alpha\right)\right] + m_3 g L_0 \sin\left(\theta_2 + \theta_1 + \alpha\right) - C_{\text{genou}}$.

Question 5 Déduire des deux équations précédentes que le modèle dynamique considéré peut s'écrire sous la forme matricielle suivante : $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + M_2 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + C + M_3 \begin{pmatrix} C_{\text{hanche}} \\ C_{\text{genou}} \end{pmatrix}$ où C est une matrice colonne et M_1, M_2 et M_3 sont des matrices 2×2. Donner l'expression littérale des coefficients de C, M_1, M_2 et M_3 par des relations non linéaires des paramètres de mouvement (θ_1, θ_2), leurs dérivés premières et des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties du problème.

TD 2
Exosquelette Atalante – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2023.

Comportement dynamique de l'exosquelette

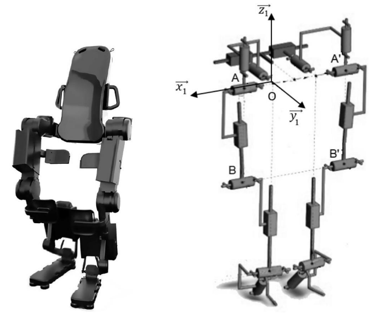


Figure 1.10 – Exosquelette Atalante et modélisation 3D associée

Question 1 Déterminer l'expression de l'accélération du point G_3 appartenant à l'ensemble {pied+tibia} 3 dans son mouvement par rapport au buste 1 , en fonction de $L_0, L_2, \theta_1, \theta_2$ et leurs dérivées temporelles.

Correction

On cherche $\overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/1)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(G_3, 3/1)}\right]_{\mathcal{R}_1}$.

$\overrightarrow{V(G_3, 3/1)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG_3}\right]_{\mathcal{R}_1} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-L_2\overrightarrow{z_2} - L_0\overrightarrow{z_3}'\right]_{\mathcal{R}_1}$

$= L_2\dot{\theta}_1\overrightarrow{y_2} + L_0\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\overrightarrow{y_3}'$.

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{z_3}'\right]_{\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{\Omega(3/1)} \wedge \overrightarrow{z_3}'$
$= \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_3}'$
$= -\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\overrightarrow{y_3}'$

Par suite, $\overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/1)} = L_2\ddot{\theta}_1\overrightarrow{y_2} + L_2\dot{\theta}_1^2\overrightarrow{z_2} + L_0\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right)\overrightarrow{y_3}' + L_0\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2\overrightarrow{z_3}'$.

Question 2 Déterminer l'expression de la projection suivant $\vec{x}_1$ du moment dynamique en A de l'ensemble { pied+tibia } 3 dans son mouvement par rapport au buste 1, $\vec{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{x}_1$, sous la forme : $\vec{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{x}_1 = A_1\ddot{\theta}_1 + A_2\ddot{\theta}_2 + A_3\dot{\theta}_1^2 + A_4\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2$. Préciser les expressions littérales de A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties de l'exosquelette.

Correction

On cherche $\overrightarrow{\delta(A, 3/1)} \cdot \overrightarrow{x_1}$.

On a $\overrightarrow{\delta(A, 3/1)} \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{\delta(G_3, 3/1)} + \overrightarrow{AG_3} \wedge m_3\overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/1)}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(G_3, 3/1)}\right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{AG_3} \wedge m_3\overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/1)}\right) \cdot \overrightarrow{x_1}$.

Or, en G_3, centre d'inertie de 3, $\overrightarrow{\sigma(G_3, 3/1)} = I_{G_3}(3)\overrightarrow{\Omega(3/1)} = \begin{pmatrix} I_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y3} & I_{yz3} \\ 0 & I_{yz3} & I_{z3} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3} \cdot \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\overrightarrow{x_3} = I_{x3}\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\overrightarrow{x_3}$.

Par suite, $\overrightarrow{\delta(A, 3/1)} \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(G_3, 3/1)}\right]_{\mathcal{R}_1} \cdot \overrightarrow{x_1} + \left(\overrightarrow{AG_3} \wedge m_3\overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/1)}\right) \cdot \overrightarrow{x_1}\right)$

$$= \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(G_3, 3/1)} \cdot \overrightarrow{x_1}\right]_{\mathcal{R}_1} - \overrightarrow{\sigma(G_3, 3/1)} \cdot \underbrace{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{x_1}\right]_{\mathcal{R}_1}}_{0} + \left(\overrightarrow{AG_3} \wedge m_3\overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/1)}\right) \cdot \overrightarrow{x_1}\right)$$

$= I_{x3}\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + \left(\left(-L_2\overrightarrow{z_2} - L_0\overrightarrow{z_3}'\right) \wedge m_3\left(L_2\ddot{\theta}_1\overrightarrow{y_2} + L_2\dot{\theta}_1^2\overrightarrow{z_2} + L_0\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right)\overrightarrow{y_3}' + L_0\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2\overrightarrow{z_3}'\right)\right) \cdot \overrightarrow{x_1}$

$= \ddot{\theta}_1\left(I_{x3} + m_3L_2^2 + L_2m_3L_0\cos(\theta_2 + \alpha) + m_3L_0L_2\cos(\theta_2 + \alpha) + m_3L_0^2\right) + \ddot{\theta}_2\left(I_{x3} + L_2m_3L_0\cos(\theta_2 + \alpha) + m_3L_0^2\right) + \dot{\theta}_1^2\left(m_3L_0L_2\sin(\theta_2 + \alpha)\right) + \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2\left(-L_2m_3L_0\sin(\theta_2 + \alpha)\right)$

Soit : $\begin{cases} A_1 = I_{x3} + m_3L_2^2 + 2m_3L_0L_2\cos(\theta_2 + \alpha) + m_3L_0^2 \\ B_1 = I_{x3} + m_3L_0L_2\cos(\theta_2 + \alpha) + m_3L_0^2 \\ C_1 = m_3L_0L_2\sin(\theta_2 + \alpha) \\ D_1 = -m_3L_0L_2\sin(\theta_2 + \alpha) \end{cases}$.

Question 3 Proposer une démarche permettant de déterminer l'expression de C_1, l'action mécanique exercée sur la cuisse 2 par l'actionneur correspondant. Préciser le(les) ensemble(s) isolé(s), le(s) bilan(s) des actions mécaniques extérieurs, le(s) théorème(s) utilisé(s) et la(les) équation(s) utile(s).

Correction

- On isole l'ensemble $\{2+3\}$.
- Bilan des actions mécaniques :
  - liaison pivot en A telle que $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, 1 \rightarrow 2\right)} \cdot \overrightarrow{x_1} = 0$;
  - actionneur de 1 sur 2 tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, 1 \rightarrow 2_m\right)} \cdot \overrightarrow{x_1} = C_1$;
  - action du patient sur la hanche telle que $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, 1 \rightarrow 2_p\right)} \cdot \overrightarrow{x_1} = C_{\text{hanche}}$;
  - action de la pesanteur sur 2 en G_2 ;
  - action de la pesanteur sur 3 en G_3.
- On écrit alors le théorème du moment dynamique en A en projection sur $\overrightarrow{x_0}$.

Question 4 Déterminer l'expression de C_1 en fonction de θ_1, θ_2, leurs différentes dérivées, de C_{hanche} et des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties de l'exosquelette.

Correction

Détermination des actions mécaniques.

- $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, \text{pes} \rightarrow 2\right)} \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{AG_2} \wedge -m_2 g \overrightarrow{z_1}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\left(l_2 - L_2\right) \overrightarrow{z_2} \wedge -m_2 g \overrightarrow{z_1}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = m_2 g \left(l_2 - L_2\right) \sin\theta_1$;
- $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, \text{pes} \rightarrow 3\right)} \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{AG_3} \wedge -m_3 g \overrightarrow{z_1}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\left(-L_2 \overrightarrow{z_2} - L_0 \overrightarrow{z_3}'\right) \wedge -m_3 g \overrightarrow{z_1}\right) \cdot \overrightarrow{x_1}$ $= \left(\left(L_2 \overrightarrow{z_2} + L_0 \overrightarrow{z_3}'\right) \wedge m_3 g \overrightarrow{z_1}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = -m_3 g \left(L_2 \sin\theta_1 + L_0 \sin\left(\alpha + \theta_2 + \theta_1\right)\right)$.

Le TMD en A appliqué 2+3 en projections sur $\overrightarrow{x_1}$ se traduit donc par :
$C_1 + C_{\text{hanche}} - m_3 g \left(L_2 \sin\theta_1 + L_0 \sin\left(\alpha + \theta_2 + \theta_1\right)\right) + m_2 g \left(l_2 - L_2\right) \sin\theta_1 = A_1 \ddot{\theta}_1 + A_2 \ddot{\theta}_2 + A_3 \dot{\theta}_1^2 + A_4 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2$.

Question 5 Déduire des deux équations précédentes que le modèle dynamique considéré peut s'écrire sous la forme matricielle suivante : $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + M_2 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + C + M_3 \begin{pmatrix} C_{\text{hanche}} \\ C_{\text{genou}} \end{pmatrix}$ où C est une matrice colonne et M_1, M_2 et M_3 sont des matrices 2×2. Donner l'expression littérale des coefficients de C, M_1, M_2 et M_3 par des relations non linéaires des paramètres de mouvement (θ_1, θ_2), leurs dérivés premières et des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties du problème.

Correction

On a :
$$\begin{cases} C_1 = -C_{\text{hanche}} + m_3 g \left(L_2 \sin\theta_1 + L_0 \sin\left(\alpha + \theta_2 + \theta_1\right)\right) - m_2 g \left(l_2 - L_2\right) \sin\theta_1 - A_1 \ddot{\theta}_1 - A_2 \ddot{\theta}_2 - A_3 \dot{\theta}_1^2 \\ C_2 = \left[I_{x3} + m_3 L_0^2\right] \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + m_3 L_2 L_0 \left[\ddot{\theta}_1 \cos\left(\theta_2 + \alpha\right) + \dot{\theta}_1^2 \sin\left(\theta_2 + \alpha\right)\right] + m_3 g L_0 \sin\left(\theta_2 + \theta_1 + \alpha\right) \end{cases}$$

Par identification : $M_1 = \begin{pmatrix} -A_1 & -A_2 \\ \left[I_{x3} + m_3 L_0^2\right] + m_3 L_2 L_0 \cos\left(\theta_2 + \alpha\right) & \left[I_{x3} + m_3 L_0^2\right] \end{pmatrix}$,

$M_2 = \begin{pmatrix} -A_3 \dot{\theta}_1 & 0 \\ 0 & m_3 L_2 L_0 \dot{\theta}_1 \sin\left(\theta_2 + \alpha\right) \end{pmatrix}$,

$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

et $C = \begin{pmatrix} m_3 g \left(L_2 \sin\theta_1 + L_0 \sin\left(\alpha + \theta_2 + \theta_1\right)\right) - m_2 g \left(l_2 - L_2\right)\sin\theta_1 - A_4\left(\dot\theta_1 + \dot\theta_2\right)^2 \\ m_3 g L_0 \sin\left(\theta_2 + \theta_1 + \alpha\right) \end{pmatrix}$.

Si on part du principe que le vecteur C ne doit pas dépendre de $\dot\theta_1$ et $\dot\theta_2$ on obtient cette autre solution :

$M_1 = \begin{pmatrix} -A_1 & -A_2 \\ \left[I_{x3} + m_3 L_0^2\right] + m_3 L_2 L_0 \cos\left(\theta_2 + \alpha\right) & \left[I_{x3} + m_3 L_0^2\right] \end{pmatrix}$,

$M_2 = \begin{pmatrix} -\left(A_3 + A_4\right)\dot\theta_1 - 2A_4\dot\theta_2 & -A_4\left(\dot\theta_2 + 2\dot\theta_1\right) \\ 0 & m_3 L_2 L_0 \dot\theta_1 \sin\left(\theta_2 + \alpha\right) \end{pmatrix}$,

$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

et $C = \begin{pmatrix} m_3 g \left(L_2 \sin\theta_1 + L_0 \sin\left(\alpha + \theta_2 + \theta_1\right)\right) - m_2 g \left(l_2 - L_2\right)\sin\theta_1 \\ m_3 g L_0 \sin\left(\theta_2 + \theta_1 + \alpha\right) \end{pmatrix}$.

TD 3
Gyrolock – Sujet

Centrale Supélec PSI 2022.

Effet gyroscopique et modélisation du stabilisateur

Objectif

Étudier les actions mécaniques créées par le système GyroLock, définir et régler la chaine d'asservissement de l'étrier puis modéliser le comportement du stabilisateur grâce à une étude dynamique.

C1-05

C2-09

Étude de l'effet gyroscopique généré par le système GyroLock

Pour déterminer les actions mécaniques créées par le système GyroLock sur le stabilisateur (1), un modèle simplifié du mécanisme, donné figure 1.11, est utilisé. Ce modèle simplifié, dans lequel la liaison entre le stabilisateur (1) et la table d'opération (0) est modélisée par un encastrement, permet :

- d'étudier l'effet gyroscopique $c_x(t)$ créé par le système GyroLock permettant de compenser l'effet de l'effort cardiaque, sans prendre en compte le mouvement du stabilisateur (1);
- de déterminer les conditions d'utilisation du système GyroLock afin de minimiser les autres actions mécaniques créées et considérées comme indésirables.

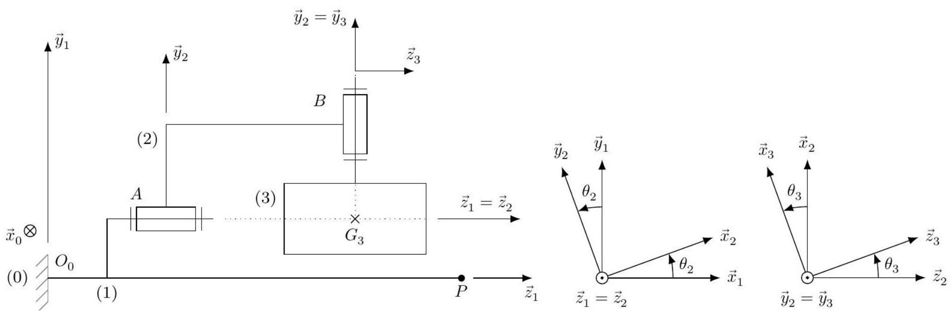


Figure 1.11 – Schéma cinématique simplifié du mécanisme (représenté pour $\theta_2 = \theta_3 = 0$) et figures de changement de base

Le système GyroLock, dont la modélisation est donnée figure 1.11, est composé de trois solides :

- le support, relié au stabilisateur (1) de repère associé $\mathcal{R}_1\left(O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\right)$, en liaison encastrement au point O_0 avec la table d'opération (0);
- l'étrier (2) de repère associé $\mathcal{R}_2\left(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1 = \vec{z}_2\right)$ tel que $\theta_2 = \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = \left(\vec{y}_1, \vec{y}_2\right)$;
- la toupie (3) de repère associé $\mathcal{R}_3\left(B, \vec{x}_3, \vec{y}_2 = \vec{y}_3, \vec{z}_3\right)$ tel que $\theta_3 = \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) = \left(\vec{z}_2, \vec{z}_3\right)$.

Toutes les liaisons sont supposées parfaites et les caractéristiques inertielles des solides sont les suivantes :

- étrier (2) : masse et inertie négligeables;
- toupie (3) : masse m_3, centre d'inertie G_3 tel que $\overrightarrow{O_0G_3} = L_{G_3}\vec{z}_1 + H_{G_3}\vec{y}_1$. L'axe $\left(G_3, \vec{y}_3 = \vec{y}_2\right)$ étant un axe de symétrie de révolution de la toupie (3), sa matrice d'inertie au point G_3 s'exprime dans la base $\mathcal{B}_2$ sous la forme $\mathcal{J}(G_3, 3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.

Pour la modélisation des actions mécaniques extérieures, les hypothèses suivantes sont adoptées :

- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques;

- l'action mécanique transmise par la liaison encastrement entre les solides (0) et (1) est modélisée au point G_3 par $\{\mathcal{T}_{0\to 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01}\vec{x}_1 + Y_{01}\vec{y}_1 + Z_{01}\vec{z}_1 \\ L_{01}\vec{x}_1 + M_{01}\vec{y}_1 + N_{01}\vec{z}_1 \end{array} \right\}_{G_3}$.

Le référentiel $\mathcal{R}_0\left(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ lié à la table d'opération (0) est galiléen.

Question 1 Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_2$, le moment cinétique au point G_3 du solide (3) en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, noté $\vec{\sigma}\,(G_3, 3/0)$.

Question 2 En déduire, dans la base $\mathcal{B}_2$, le moment dynamique au point G_3 du solide (3) en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, noté $\vec{\delta}\,(G_3, 3/0)$.

Question 3 Après avoir clairement précisé le système isolé et le théorème utilisé, exprimer L_{01}, M_{01} et N_{01} en fonction de θ_2, θ_3 (et leurs dérivées temporelles), A_3 et B_3.

Lorsque la toupie (3) tourne avec une vitesse constante ω_3 par rapport à l'étrier (2), l'expression des moments L_{01}, M_{01} et N_{01} est la suivante : $\left\{ \begin{array}{l} L_{01}(t) = -c_x(t)\cos\theta_2(t) \\ M_{01}(t) = -c_x(t)\sin\theta_2(t) \\ N_{01}(t) = A_3\ddot{\theta}_2(t) \end{array} \right.$.

où $c_x(t) = B_3\omega_3\dot{\theta}_2(t) = K_3\dot{\theta}_2(t)$ correspond à l'effet gyroscopique.

L'action du cœur sur le stabilisateur est modélisée par un glisseur de résultante $\vec{R}_{c\to 1} = f_c\vec{y}_1$ au point P tel que $\overrightarrow{O_0P} = L\vec{z}_1$.

Les moments L_{01}, M_{01} et N_{01} doivent rester faibles afin de limiter les déformations de l'attache reconfigurable liant le stabilisateur (1) à la table d'opération (0).

Question 4 En supposant que la toupie (3) tourne à vitesse constante par rapport à l'étrier (2), exprimer $\dot{\theta}_2$ en fonction de K_3, θ_2, f_c et $L - L_{G_3}$ permettant de garantir $L_{01} = 0$ et de compenser l'effet de l'effort cardiaque f_c.

Question 5 Donner une condition sur l'angle θ_2 et sur l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_2$ afin que les moments M_{01} et N_{01} soient faibles.

L'étrier (2) doit être piloté en vitesse de rotation pour que l'effet gyroscopique $c_x(t) = K_3\dot{\theta}_2(t)$ compense l'effet de l'effort cardiaque. La campagne expérimentale présentée en partie I a permis de déterminer que la fréquence fondamentale de l'effort cardiaque $f_c(t)$ est de $1,5$ Hz.

La réponse de l'étrier (2) sera considérée comme suffisamment réactive si le temps de réponse à 5% de la vitesse $\dot{\theta}_2(t) = \omega_2(t)$ pour une consigne $\dot{\theta}_{c2}(t) = \omega_{c2}(t)$ en échelon est d'un ordre inférieur à la demi-période du signal perturbateur $f_c(t)$.

La réponse expérimentale à un échelon de vitesse $\omega_{c2}(t)$ d'amplitude 2000deg $\cdot$ s^{-1} est représentée figure 1.12.

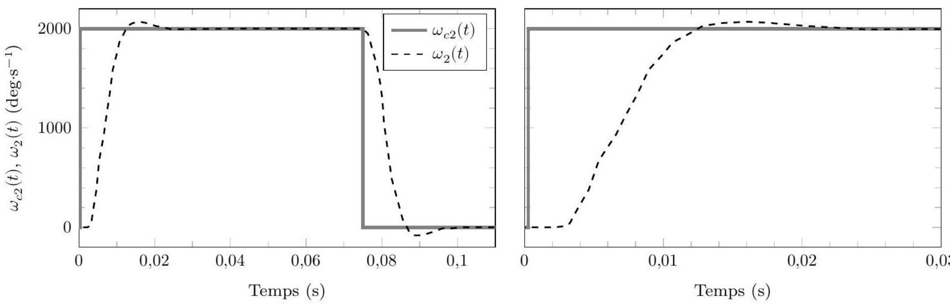


Figure 1.12 – Réponse expérimentale de l'étrier et consigne associée (à droite, zoom sur le régime transitoire)

Les transformées de Laplace de $\omega_2(t)$, $\omega_{c2}(t)$, $\theta_2(t)$ et $c_x(t)$ sont notées $\Omega_2(p)$, $\Omega_{c2}(p)$, $\theta_2(p)$ et $C_x(p)$.

Question 6 Vérifier que la condition de réactivité énoncée ci-dessus est respectée. Justifier que la fonction de transfert de l'étrier (2) $H_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{\Omega_{c2}(p)}$ peut alors être approchée par un gain statique K_2 de valeur à préciser. Il faut s'assurer que la position θ_2 de l'étrier (2) ne s'éloigne pas trop de sa position de référence $\theta_2^* = 0$. Le non-respect de cette condition, appelé dérive de l'étrier, génère un moment parasite M_{01} responsable d'un déplacement du point P selon $\vec{x}_1$.

TD 3
Gyrolock – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2022.
Corrigé proposé par l'UPSTI.

Effet gyroscopique et modélisation du stabilisateur

C1-05

C2-09

Objectif

Étudier les actions mécaniques créées par le système GyroLock, définir et régler la chaine d'asservissement de l'étrier puis modéliser le comportement du stabilisateur grâce à une étude dynamique.

Étude de l'effet gyroscopique généré par le système GyroLock

Question 1 Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_2$, le moment cinétique au point G_3 du solide (3) en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, noté $\vec{\sigma}(G_3, 3/0)$.

Correction

Au centre d'inertie on a : $\overrightarrow{\sigma}(G_3,3/0) = \mathcal{I}(G_3,3)\overrightarrow{\Omega}(3/0)$ avec par **composition des vitesses** $\overrightarrow{\Omega}(3/0) = \underbrace{\overrightarrow{\Omega}(3/2)}_{\dot{\theta}_3\overrightarrow{y}_2} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega}(2/1)}_{\dot{\theta}_2\overrightarrow{z}_2} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega}(1/0)}_{\overrightarrow{0}}$ la vitesse de rotation du solide (3) par rapport à (0) exprimée dans la base $\mathcal{B}_2$. Alors : $\boxed{\overrightarrow{\sigma}(G_3,3/0) = B_3\dot{\theta}_3\overrightarrow{y}_2 + A_3\dot{\theta}_2\overrightarrow{z}_2}$.

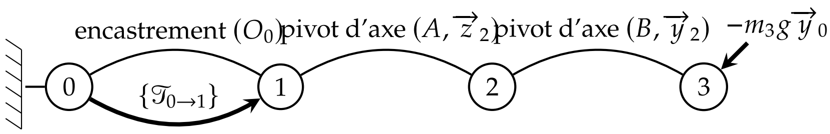
Question 2 En déduire, dans la base $\mathcal{B}_2$, le moment dynamique au point G_3 du solide (3) en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, noté $\vec{\delta}(G_3, 3/0)$.

Correction

Toujours **au centre d'inertie** on a

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}(G_3,3/0) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}(G_3,3/0)}{\mathrm{d}t}\right|_0 = -B_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\overrightarrow{x}_2 + B_3\ddot{\theta}_3\overrightarrow{y}_2 + A_3\ddot{\theta}_2\overrightarrow{z}_2}.$$

Question 3 Après avoir clairement précisé le système isolé et le théorème utilisé, exprimer L_{01}, M_{01} et N_{01} en fonction de θ_2, θ_3 (et leurs dérivées temporelles), A_3 et B_3.



Correction

Pour la clarté on propose le graphe des liaisons ci-desus avec les différentes actions mécaniques qui s'exercent sur le système.
On isole le système $\Sigma = \{1+2+3\}$ soumis à :

- l'action de (0) sur (1) en G_3 : $\{\mathcal{T}_{0\to1}\}$;
- l'action du poids en G_3 : $-m_3 g\overrightarrow{y}_0$.

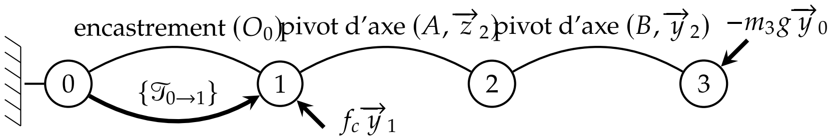
On applique le **théorème du moment dynamique au système Σ au point** G_3 :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}(G_3,\Sigma/0) = L_{01}\overrightarrow{x}_1 + M_{01}\overrightarrow{y}_1 + N_{01}\overrightarrow{z}_1}$$

Or $\overrightarrow{\delta}(G_3,\Sigma/0) = \overrightarrow{\delta}(G_3,3/0)$ car **on néglige les effets dynamiques de (1) et (2)**. Par conséquent : $-B_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\overrightarrow{x}_2 + B_3\ddot{\theta}_3\overrightarrow{y}_2 + A_3\ddot{\theta}_2\overrightarrow{z}_2 = L_{01}\overrightarrow{x}_1 + M_{01}\overrightarrow{y}_1 + N_{01}\overrightarrow{z}_1$.
Dans la base $\mathscr{B}_1$ on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} L_{01}(t) = -B_3\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2\cos(\theta_2(t)) - B_3\ddot{\theta}_3\sin(\theta_2) \\ M_{01}(t) = -B_3\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2\sin(\theta_2(t)) + B_3\ddot{\theta}_3\cos(\theta_2) \\ N_{01}(t) = A_3\ddot{\theta}_2(t) \end{cases}$$

Question 4 En supposant que la toupie (3) tourne à vitesse constante par rapport à l'étrier (2), exprimer $\dot{\theta}_2$ en fonction de K_3, θ_2, f_c et $L - L_{G_3}$ permettant de garantir $L_{01} = 0$ et de compenser l'effet de l'effort cardiaque f_c.



Correction

Le nouveau graphe de liaison est donné ci-dessus.
On reprend la stratégie précédente mais on ajoute le moment en G_3 provoqué par la résultante $\overrightarrow{R}_{c\to1}$ en P : $\overrightarrow{M}\left(G_3,\overrightarrow{R}_{c\to1}\right) = \overrightarrow{G_3P}\wedge f_c\overrightarrow{y}_1 = (L-L_{G_3})f_c\overrightarrow{x}_1$. L'équation du mouvement précédente écrite dans la base $\mathscr{B}_1$ donne alors le système d'équations :

$$\begin{cases} L_{01}(t) + (L-L_{G_3})f_c = -K_3\dot{\theta}_2\cos(\theta_2(t)) \\ M_{01}(t) = -K_3\dot{\theta}_2\sin(\theta_2(t)) \\ N_{01}(t) = A_3\ddot{\theta}_2(t) \end{cases}$$

En particulier si on veut $L_{01} = 0$ alors $\boxed{\dot{\theta}_2 = -\dfrac{(L-L_{G_3})f_c}{K_3\cos(\theta_2(t))}}$ en faisant attention à avoir $|\theta_2| < \dfrac{\pi}{2}$.

Question 5 Donner une condition sur l'angle θ_2 et sur l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_2$ afin que les moments M_{01} et N_{01} soient faibles.

Correction

D'après le système d'équations de la question précédente :

- si on veut $N_{01} \longrightarrow 0$ alors il faut $\ddot{\theta}_2 \longrightarrow 0$ (accélération angulaire très faible) ;
- si on veut $M_{01} \longrightarrow 0$ alors en prenant $\theta_2 \ll 1$rad on a une chance d'y arriver.

Remarque : d'après la question 8, si on prend ω_3 très grand alors $\dot{\theta}_2$ est potentiellement très petit ce qui aide à « écraser » M_{01}.

Question 6 Vérifier que la condition de réactivité énoncée ci-dessus est respectée. Justifier que la fonction de transfert de l'étrier (2) $H_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{\Omega_{c2}(p)}$ peut alors être approchée par un gain statique K_2 de valeur à préciser. Il faut s'assurer que la position θ_2 de l'étrier (2) ne s'éloigne pas trop de sa position de référence $\theta_2^* = 0$. Le non-respect de cette condition, appelé dérive de l'étrier, génère un moment parasite M_{01} responsable d'un déplacement du point P selon $\vec{x}_1$.

Correction

La période du signal perturbateur est $T_c = \dfrac{1}{f_c}$, donc la demi période est $\dfrac{T_c}{2} = \dfrac{1}{2f_c} = 0,33$s.

Si on veut respecter la condition de réactivité il faut donc que le temps de réponse à 5% soit inférieur à $0,033$s.

On lit sur le graphe de droite en figure 7 que la valeur finale est atteinte avant 0,03s donc le temps de réponse à 5% est d'autant plus petit et **la condition de réactivité est respectée**.

Si on considère le système très réactif, comme celui-ci est précis on peut supposer que $\boxed{H_2(p) = \dfrac{\Omega_2(p)}{\Omega_{c2}(p)} = K_2 = 1}$.

TD 4
Gyrolock – Sujet

Centrale Supélec PSI 2022.

Comportement dynamique du stabilisateur

C1-05

C2-09

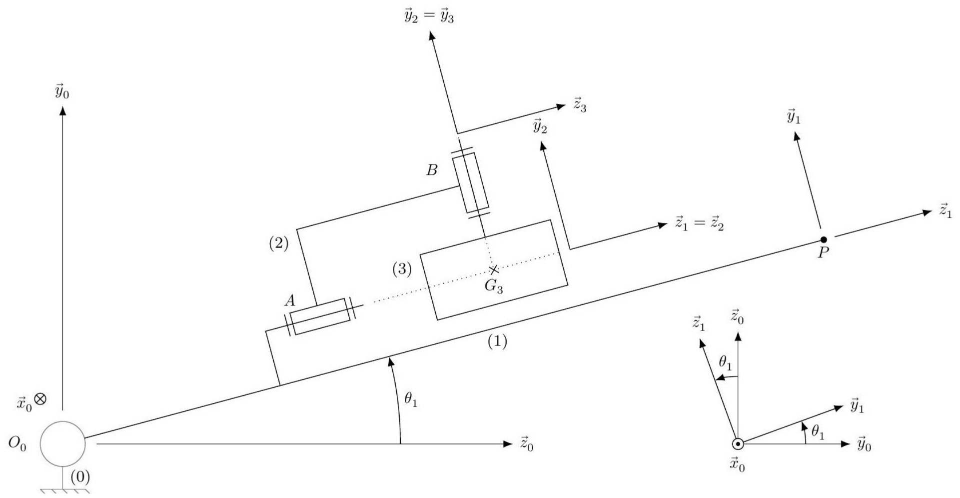


Figure 1.13 – Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour $\theta_2 = \theta_3 = 0$)

Dans la modélisation retenue (figure 1.15), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel $\mathcal{R}_0\left(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère $\mathcal{R}_1\left(O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\right)$ avec $\theta_1 = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1\right) = \left(\vec{z}_0, \vec{z}_1\right)$. Le point P tel que $O_0P = L$ représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

Paramétrage, notations et hypothèses

- La liaison pivot d'axe $\left(O_0, \vec{x}_0\right)$ entre les solides (0) et (1) possède une raideur k et un coefficient de frottement visqueux f, d'où $\vec{M}\left(O_0, 0 \rightarrow 1\right) \cdot \vec{x}_0 = -\left(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1\right)$;
- les autres liaisons sont supposées parfaites ;
- l'action du cœur sur le stabilisateur (1) est modélisée par $\left\{\mathcal{T}_{c\rightarrow 1}\right\} = \left\{\begin{array}{c} f_c\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array}\right\}_P$;
- seul le déplacement vertical du point P est pris en compte. On note $y(t) = -\overrightarrow{O_0P} \cdot \vec{y}_0$;
- le stabilisateur (1) est de masse m_1 et possède un centre d'inertie G_1 tel que $\overrightarrow{O_0G_1} = L_{G_1}\vec{z}_1$ et l'opérateur d'inertie est $\mathcal{J}\left(G_1, 1\right) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables ;
- la toupie (3) est de masse m_3 et possède un centre d'inertie G_3 tel que $\overrightarrow{O_0G_3} = L_{G_3}\vec{z}_1 + H_{G_3}\vec{y}_1$;
- les figures de changement de base sont données figures 6 et 9 ;
- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques.

Question 1 Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en $\theta_1(t)$). L'ensemble isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

Question 2 Exprimer $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0$, la projection sur $\vec{x}_0$ du moment dynamique au point O_0 du solide (1) en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.

Question 3 Exprimer littéralement la vitesse $\vec{V}(G_3, 3/0)$ dans la base $\mathcal{B}_1$, puis l'accélération $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

Question 4 En conservant les conditions de fonctionnement ci-contre [2], il est possible de montrer que $\vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$ avec $c_x(t) = B_3 \omega_3 \dot{\theta}_2$ (résultat admis sans démonstration). En déduire $\vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0$, en fonction de $A_3, c_x(t), m_3, L_{G_3}, H_{G_3}$ et $\ddot{\theta}_1(t)$.

2: $\ddot{\theta}_2 \approx 0$, $\theta_2 \approx 0$ et $\dot{\theta}_3 = \omega_3$ constante.

Question 5 Exprimer J_x en fonction de $A_1, A_3, m_1, m_3, L_{G_1}, L_{G_3}$ et H_{G_3} permettant d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x \ddot{\theta}_1(t) + f \dot{\theta}_1(t) + k\theta_1(t) = c_x(t) - L f_c(t)$$

En supposant que θ_1 reste proche de 0, la relation $y(t) = L\theta_1(t)$ sera utilisée.

Les transformées de Laplace de $y(t)$, $c_x(t)$ et $f_c(t)$ sont notées $Y(p)$, $C_x(p)$ et $F_c(p)$.

Question 6 En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert $H_{\text{pert}}(p)$ et $H_1(p)$ du schéma-blocs figure 1.16 en fonction de L, J_x, f et k.

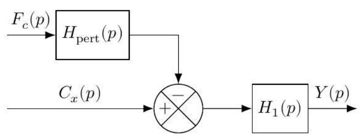


Figure 1.14 – Schéma bloc du stabilisateur (1)

On rappelle que $L = 0,3$ m et les valeurs retenues pour J_x, f et k sont :

- $J_x = 1,14 \times 10^{-2}$ kg · m^2 ;
- $-f = 64 \times 10^{-3}$ N · m · s · rad^{-1} ;
- $-k = 95$ N · m · rad^{-1}.

Question 7 Écrire $H_1(p)$ sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique K_1, amortissement ξ_1 et pulsation propre ω_1. Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).

TD 4
Gyrolock – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2022.
Corrigé proposé par l'UPSTI.

Comportement dynamique du stabilisateur

C1-05

C2-09

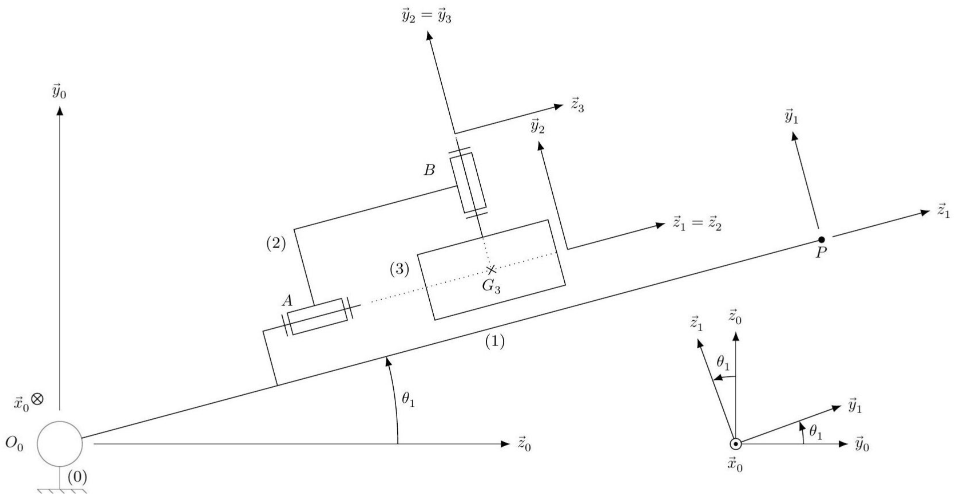


Figure 1.15 – Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour $\theta_2 = \theta_3 = 0$)

Dans la modélisation retenue (figure 1.15), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel $\mathcal{R}_0\left(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère $\mathcal{R}_1\left(O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\right)$ avec $\theta_1 = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1\right) = \left(\vec{z}_0, \vec{z}_1\right)$. Le point P tel que $O_0P = L$ représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

Paramétrage, notations et hypothèses

- La liaison pivot d'axe $\left(O_0, \vec{x}_0\right)$ entre les solides (0) et (1) possède une raideur k et un coefficient de frottement visqueux f, d'où $\vec{M}\left(O_0, 0 \rightarrow 1\right) \cdot \vec{x}_0 = -\left(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1\right)$;
- les autres liaisons sont supposées parfaites ;
- l'action du cœur sur le stabilisateur (1) est modélisée par $\left\{\mathcal{T}_{c\rightarrow 1}\right\} = \left\{\begin{array}{c} f_c\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array}\right\}_P$;
- seul le déplacement vertical du point P est pris en compte. On note $y(t) = -\overrightarrow{O_0P} \cdot \vec{y}_0$;
- le stabilisateur (1) est de masse m_1 et possède un centre d'inertie G_1 tel que $\overrightarrow{O_0G_1} = L_{G_1}\vec{z}_1$ et l'opérateur d'inertie est $\mathcal{J}\left(G_1, 1\right) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables ;
- la toupie (3) est de masse m_3 et possède un centre d'inertie G_3 tel que $\overrightarrow{O_0G_3} = L_{G_3}\vec{z}_1 + H_{G_3}\vec{y}_1$;
- les figures de changement de base sont données figures 6 et 9 ;
- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques.

Question 1 Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en $\theta_1(t)$). L'ensemble isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

Question 2 Exprimer $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0$, la projection sur $\vec{x}_0$ du moment dynamique au point O_0 du solide (1) en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.

Correction

Par formule de Varignon :

$$\overrightarrow{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = \overrightarrow{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 + \left(\overrightarrow{O_0G_1} \wedge m_1 \overrightarrow{\Gamma}(G_1, 1/0)\right) \cdot \overrightarrow{x}_0$$

avec $\overrightarrow{\Gamma}(G_1, 1/0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O_0G_1}}{\mathrm{d}t^2}\right|_0 = -L_{G_1}\ddot{\theta}_1\overrightarrow{y}_1 - L_{G_1}\dot{\theta}_1^2\overrightarrow{z}_1$ donc $\left(\overrightarrow{O_0G_1} \wedge m_1 \overrightarrow{\Gamma}(G_1, 1/0)\right) \cdot \overrightarrow{x}_0 = m_1 L_{G_1}^2 \ddot{\theta}_1$.

De plus **au centre d'inertie** G_1 : $\overrightarrow{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0}{\mathrm{d}t}\right|_0$ avec $\overrightarrow{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = \mathcal{I}(G_1, 1)\overrightarrow{\Omega}(1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0$.

Donc $\overrightarrow{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = A_1\dot{\theta}_1$ et $\overrightarrow{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = A_1\ddot{\theta}_1$.

Finalement $\boxed{\overrightarrow{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = (A_1 + m_1 L_{G_1}^2)\ddot{\theta}_1}$.

Question 3 Exprimer littéralement la vitesse $\vec{V}(G_3, 3/0)$ dans la base $\mathcal{B}_1$, puis l'accélération $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

Correction

Le point G_3 étant **physiquement rattaché à (3)** on peut écrire

$$\boxed{\overrightarrow{V}(G_3, 3/0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0G_3}}{\mathrm{d}t}\right|_0 = -L_{G_3}\dot{\theta}_1\overrightarrow{y}_1 + H_{G_3}\dot{\theta}_1\overrightarrow{z}_1}.$$

Ensuite $\boxed{\overrightarrow{\Gamma}(G_3, 3/0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}(G_3, 3/0)}{\mathrm{d}t}\right|_0 = -\left(L_{G_3}\ddot{\theta}_1 + H_{G_3}\dot{\theta}_1^2\right)\overrightarrow{y}_1 + \left(H_{G_3}\ddot{\theta}_1 - L_{G_3}\dot{\theta}_1^2\right)\overrightarrow{z}_1}$.

Question 4 En conservant les conditions de fonctionnement ci-contre [3], il est possible de montrer que $\vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = A_3\ddot{\theta}_1 - c_x(t)$ avec $c_x(t) = B_3\omega_3\dot{\theta}_2$ (résultat admis sans démonstration). En déduire $\vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0$, en fonction de $A_3, c_x(t), m_3, L_{G_3}, H_{G_3}$ et $\ddot{\theta}_1(t)$.

3: $\ddot{\theta}_2 \approx 0$, $\theta_2 \approx 0$ et $\dot{\theta}_3 = \omega_3$ constante.

Correction

Par formule de Varignon :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 &= \overrightarrow{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 + \left(\overrightarrow{O_0G_3} \wedge m_3\overrightarrow{\Gamma}(G_3, 3/0)\right) \cdot \overrightarrow{x}_0 \\ &= A_3\ddot{\theta}_1 - c_x(t) + m_3 L_{G_3}\left(L_{G_3}\ddot{\theta}_1 + H_{G_3}\dot{\theta}_1^2\right) + m_3 H_{G_3}\left(H_{G_3}\ddot{\theta}_1 - L_{G_3}\dot{\theta}_1^2\right) \\ &= \left(A_3 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2\right)\ddot{\theta}_1 - c_x(t)\end{aligned}$$

Question 5 Exprimer J_x en fonction de $A_1, A_3, m_1, m_3, L_{G_1}, L_{G_3}$ et H_{G_3} permettant d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x\ddot{\theta}_1(t) + f\dot{\theta}_1(t) + k\theta_1(t) = c_x(t) - Lf_c(t)$$

Correction

En appliquant la stratégie vue en question 14 on a l'équation (effets dynamiques de (2) négligés et actions de la pesanteur négligées) :

$$\overrightarrow{\delta}(O_0,1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0 + \overrightarrow{\delta}(O_0,3/0)\cdot\overrightarrow{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1) + \left(\overrightarrow{O_0P}\wedge f_c\overrightarrow{y}_1\right)\cdot\overrightarrow{x}_0$$

Tout calcul fait avec $\overrightarrow{O_0P} = L\overrightarrow{z}_1$:

$$\boxed{\left(A_1 + A_3 + m_1L_{G_1}^2 + m_3L_{G_3}^2 + m_3H_{G_3}^2\right)\ddot{\theta}_1 + f\dot{\theta}_1 + k\theta_1 = c_x(t) - Lf_c(t)}$$

On identifie $\boxed{J_x = A_1 + A_3 + m_1L_{G_1}^2 + m_3L_{G_3}^2 + m_3H_{G_3}^2}$.

En supposant que θ_1 reste proche de 0, la relation $y(t) = L\theta_1(t)$ sera utilisée.

Les transformées de Laplace de $y(t)$, $c_x(t)$ et $f_c(t)$ sont notées $Y(p)$, $C_x(p)$ et $F_c(p)$.

Question 6 En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert $H_{\text{pert}}(p)$ et $H_1(p)$ du schéma-blocs figure 1.16 en fonction de L, J_x, f et k.

Correction

Le schéma-bloc donne $\dfrac{Y(p)}{H_1(p)} = C_x(p) - H_{\text{pert}}(p)F_c(p)$. L'équation différentielle précédente rapportée dans le domaine de Laplace (**conditions initiales nulles**) s'écrit (avec $Y(p) = L\theta_1(p)$) :

$$\left(J_xp^2 + fp + k\right)\frac{Y(p)}{L} = C_x(p) - LF_c(p)$$

On identifie $\boxed{H_1(p) = \dfrac{L}{J_xp^2 + fp + k}}$ et $\boxed{H_{\text{pert}}(p) = L}$.

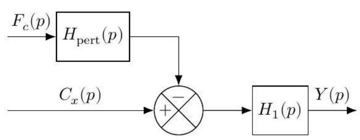


Figure 1.16 – Schéma bloc du stabilisateur (1)

On rappelle que $L = 0,3$ m et les valeurs retenues pour J_x, f et k sont :

- $J_x = 1,14\times10^{-2}$ kg · m^2 ;
- $-f = 64\times10^{-3}$ N · m · s · rad^{-1} ;
- $-k = 95$ N · m · rad^{-1}.

Question 7 Écrire $H_1(p)$ sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique K_1, amortissement ξ_1 et pulsation propre ω_1. Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).

Correction

On a $H_1(p) = \dfrac{\frac{L}{k}}{1 + \frac{f}{k}p + \frac{J_x}{k}p^2}$, on identifie alors :

- le gain statique $K_1 = \dfrac{L}{k} = \dfrac{0,3}{95} = 3,2\cdot10^{-3}$rad/N;
- la pulsation propre $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{J_x}} = \sqrt{\dfrac{95}{1,14\cdot10^{-2}}} = 91,3$rad/s;

- l'amortissement $\xi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{\sqrt{kJ_x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{64 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{95 \times 1,14 \cdot 10^{-2}}} = 0,03$.

On choisit de décrire le comportement dans le domaine fréquentiel. On a un système d'ordre 2 avec résonance (car $\xi_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$) à la pulsation $\omega_r = \omega_1 \sqrt{1 - 2\xi_1^2}$. Le diagramme de Bode associé est le suivant :