

TD 0

Robot à câbles – Corrigé

Concours Centrale-Supélec 2023 – TSI.

Présentation

Étude de l'asservissement de la longueur d'un câble pour gérer le mouvement

Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs permettant d'assurer l'enroulement adéquat des câbles.

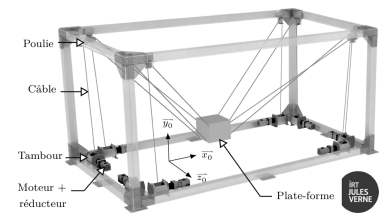


FIGURE 1 – Robot à câbles CAROCA

Question 1 Justifier la valeur numérique proposée pour la constante de temps τ .

Correction

Si la bande passante à -3 dB est de 200 Hz, on a une pulsation de cassure à 200 Hz soit $\omega_\tau = \frac{1}{\tau} = 2 \times \pi \times 200$ et $\tau = 7,9 \times 10^{-4} = 796 \mu\text{s}$.

Question 2 On souhaite que l'erreur $\mu(t)$ soit nulle quand l'écart $\varepsilon(t)$ l'est : en déduire la relation entre K_a et c .

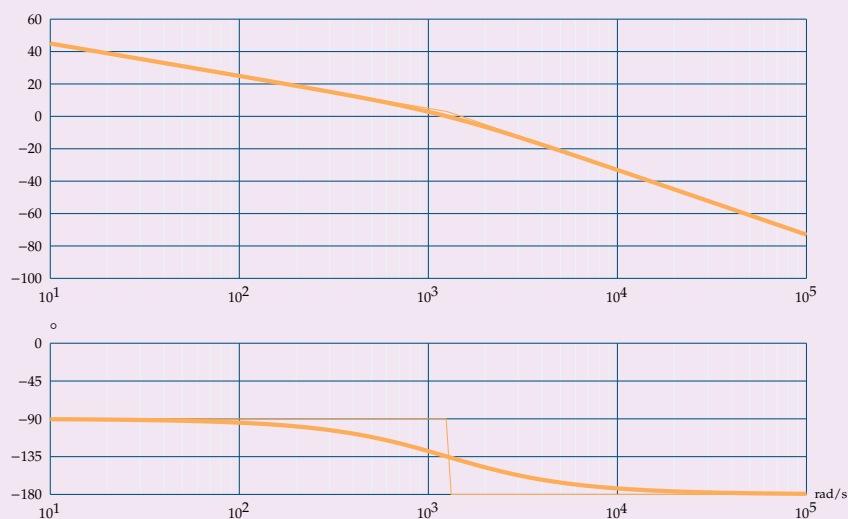
Correction

Dans les conditions citées ci-dessus, il faut donc nécessairement $K_a = c$.

Question 3 Après avoir donné l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(j\omega)$, tracer son diagramme asymptotique de Bode (courbes de gain et de phase en précisant la valeur de la cassure et le gain associé) et esquisser l'allure des courbes réelles.

Correction

Par définition, $H_{bo}(j\omega) = \frac{abc}{p(1 + \tau p)}$ avec $abc = 1304 \times 31,4 \times 43,3 \times 10^{-3} = 1773 \text{ s}^{-1}$.



Question 4 Relever sur la courbe tracée à la question précédente la valeur de la marge de phase $M\varphi$. Sachant qu'on souhaite que cette marge soit de $M\varphi = 45^\circ$, conclure quant au réglage de a .

Correction

La marge de phase est mesurée à environ 45° . Le choix de a est donc convenable.

Question 5 Déterminer l'expression de l'image $\mu(p)$ de l'erreur en fonction de l'image $\Theta_c(p)$ de la consigne angulaire et de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p)$ de l'asservissement.

Correction

Pour déterminer l'erreur vis-à-vis de la consigne, il faudrait déplacer le comparateur vers la gauche. Cela revient à avoir un asservissement à retour unitaire en passant le gain c dans la chaîne directe.

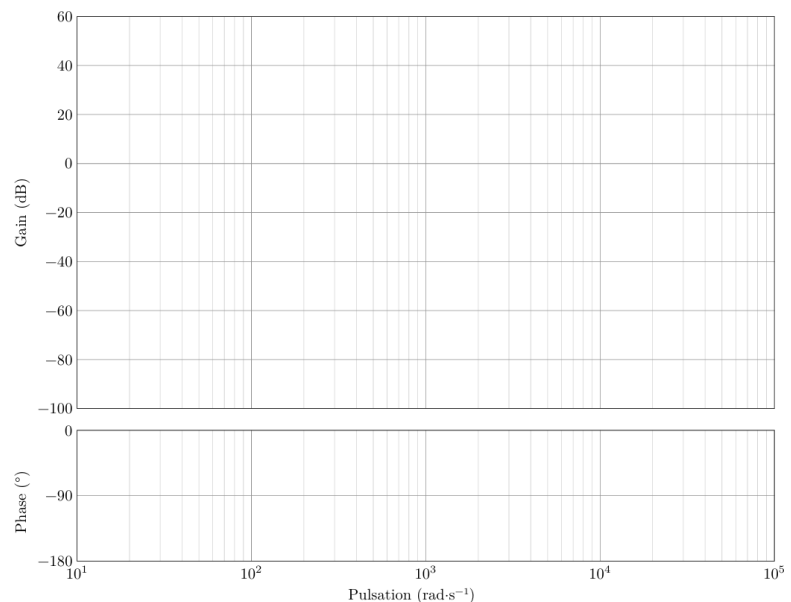
$$\text{On a donc } \mu(p) = \frac{\Theta_c(p)}{1 + FTBO(p)} \text{ avec } FTBO(p) = \frac{abc}{p(1 + \tau p)}.$$

$$\text{Remarque : on peut aussi exprimer } \varepsilon(p) = \frac{R_c(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{\Theta_c(p)a}{1 + FTBO(p)}. \text{ On a donc } \varepsilon(p) = a\mu(p).$$

Question 6 Déterminer la valeur de l'erreur statique μ_p . Déterminer l'expression de l'erreur de poursuite μ_v en fonction des gains a , b et c et de la pente ω_0 . Faire l'application numérique et vérifier si les exigences de l'utilisateur sont vérifiées.

Correction

La FTBO est de classe 1 et il n'y a pas de perturbation. On a donc $\mu_p = 0$ et $\mu_v = \frac{\omega_0}{abc}$. Pour $\omega_0 = 1$, on a $\mu_v = 0,05\%$. Le cahier des charges est respecté.



TD 1

Exosquelette lombaire – Corrigé

Concours Centrale-Supélec 2023 – MP.

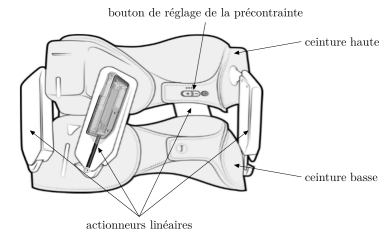


FIGURE 2 – Exosquelette lombaire Japet

Mise en situation

Réglage de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur

Question 1 Déterminer l'expression littérale de la phase de $H_{BOV}(i\omega)$. En déduire la valeur numérique de τ_i respectant les critères concepteur de la boucle de vitesse.

Correction

$$\text{On a } H_{BOV}(i\omega) = C_v(p)K_1 \frac{1}{R} K_3 \frac{1}{I_{eq}p} = \frac{K_i K_1 K_3}{R I_{eq}} \frac{1+\tau_i p}{\tau_i p^2}.$$

$$\text{On a } \varphi(\omega) = \arg\left(\frac{K_i K_1 K_3}{R I_{eq}}\right) + \arg(1 + \tau_i p) - \arg(\tau_i p^2) = \arctan \tau_i \omega - 180^\circ.$$

On souhaite une marge de phase supérieure à 80° ; donc $M_\varphi = \varphi(\omega) + 180 = \arctan \tau_i \omega \geq 80^\circ$.

$$\arctan \tau_i \omega \geq 80^\circ \Rightarrow \tau_i \omega \geq \tan 80^\circ \Rightarrow \tau_i \geq \frac{\tan 80^\circ}{\omega_{0dB}} \Rightarrow \tau_i \geq 0,57 \text{ s}.$$

Question 2 Déterminer la valeur numérique de K_i afin que la boucle d'asservissement de vitesse respecte les critères concepteur du tableau ??.

Correction

Pour $\omega_{0dB} = 10 \text{ rad s}^{-1}$ on mesure un gain de 80 dB. Il faut donc déterminer K_i tel que $20 \log K_i = -80$ soit $K_i = 1 \times 10^{-4} \text{ V s rad}^{-1}$.

Les critères de marge et de pulsation de coupure sont respectés (on a tout fait pour). L'erreur statique est nulle car il y a un intégrateur dans le correcteur (elle sera nulle à condition que la perturbation soit constante).

Simplification du modèle de connaissance

Question 3 Déterminer les fonctions de transfert $H_8(p)$ et $H_9(p)$ en fonction de K_5 , I_{eq} et $H_6(p)$. Ne pas remplacer K_5 et $H_6(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Correction

En décalant le point de prélèvement du capteur de vitesse d'un bloc vers la droite, on se retrouve avec $\frac{1}{H_6(p)}$ dans la boucle de retour.

On sort le bloc $\frac{1}{I_{eq}p}$ de la « petite » boucle et $\frac{1}{I_{eq}p}$ se retrouve aussi dans la pboucle de retour.

En identifiant, on a alors $H_9(p) = \frac{1}{H_6(p)}$ et en utilisant la formule de Black, on a $H_8(p) =$

$$\frac{H_6(p)}{1 + \frac{H_6(p)K_5}{I_{eq}p}} = \frac{H_6(p)I_{eq}p}{I_{eq}p + H_6(p)K_5}.$$

Question 4 Déterminer l'expression du gain K_{10} en fonction de K_{capt} et de K_{res} .

Il y a vraisemblablement une erreur dans le sujet de base : sur la figure ??, $\varepsilon_f(p)$ devrait être en amont du bloc $C(p)$.

Correction

En décalant le point de prélèvement de droite vers la droite, on a alors K_{res} dans la boucle de retour. Pour que le système soit correctement asservi, il faut donc nécessairement que $K_{\text{adapt}} = K_{\text{capt}} K_{\text{res}}$.
On se ramène ensuite à un retour unitaire. On alors $K_{10} = K_{\text{capt}} K_{\text{res}}$.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $G(p)$ en fonction de $H_2(p)$, I_{eq} , $H_8(p)$, $H_9(p)$ et K_{res} . Ne pas remplacer $H_2(p)$, $H_8(p)$ et $H_9(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Correction

$$G(p) = \frac{H_2(p) \frac{1}{I_{\text{eq}} p} H_8(p)}{1 + H_2(p) H_8(p) H_9(p) \frac{1}{I_{\text{eq}} p}} K_{\text{res}} = \frac{H_2(p) H_8(p)}{I_{\text{eq}} p + H_2(p) H_8(p) H_9(p)} K_{\text{res}}$$

Pour la suite, on donne la fonction de transfert $G(p)$, obtenue avec les valeurs de réglage correctes déterminées aux questions 1 et 2,

$$G(p) = \frac{F(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1 + \tau_i p}{p} \frac{1,2 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-4} + 9,7 \times 10^{-5} p + 5,3 \times 10^{-6} p^2}.$$

Analyse des performances de l'asservissement en force développée par un actionneur linéaire

Question 6 Déterminer la valeur numérique limite de K_{cor} afin que la boucle d'asservissement de force respecte les critères de marge de phase et de gain du tableau ??.

Correction

La marge de gain sera toujours infinie car la phase tend asymptotiquement vers -180° .
Pour régler la marge de phase à 60° , il faut relever le gain de 75 dB. On a donc $K_{\text{cor}} = 10^{75/20} \approx 5623$.

Question 7 Quel critère du tableau des exigences (tableau ??) n'est pas pris en compte dans le modèle de connaissance? D'après la courbe expérimentale, ce critère est-il respecté par le système réel?

Correction

La réponse temporelle du modèle ne permet pas de savoir si l'exigence 1.1 sur le dépassement est respectée.
Ce critère semble respecté sur le système réel vu qu'aucun dépassement n'est observé en régime permanent.

Colle 0

Quille pendulaire ★ – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

Mise en situation

Objectif

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

C1-02

C2-04

Modélisation du vérin

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

Correction

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace : $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$ et $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$.

En utilisant le schéma-blocs, on a $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$.

Par ailleurs $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$. On a donc $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_1A_2 =$

$\frac{2B}{Vp}$ soit $A_1 = \frac{2B}{Vp} \frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}$.

On a aussi $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$. Par ailleurs, $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$. On

a donc : $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ et $A_3 = S$.

Au final, $A_1 = \frac{1}{Sp}$, $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.



Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

Correction

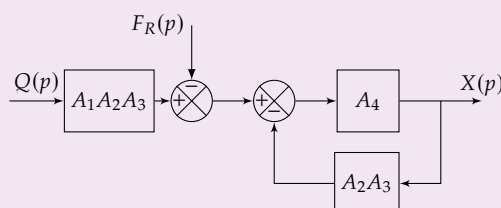
Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes On a $X(p) = (H_1Q(p) - F_R(p))H_2(p)$.

Par ailleurs, on a vu que $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p))$ et $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p))$.

On a donc $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2(A_1Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p))$. On a donc $H_1(p) = A_1A_2A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$.

Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs Revient à utiliser la méthode précédente.

Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$$A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S \text{ et } A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}.$$

$$\begin{aligned} \text{En faisant le calcul on obtient : } H_1(p) &= \frac{2BS}{pV} \text{ et } H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} \\ &= \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}. \end{aligned}$$

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Correction

$$\text{Dans ce cas, } \frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}.$$

Comportement pour une commande de faible amplitude

Question 4 Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de $H_{BO}(p)$ en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

Correction

On a : $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$. En conséquences, $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,04$ et $\omega_0 = 5 \text{ rad s}^{-1}$ et $\frac{2\xi}{\omega_0} = 0,12 \Leftrightarrow \xi = 0,3$.
On a donc une asymptote de -20 dB/decade pour $\omega < 5 \text{ rad s}^{-1}$ et -60 dB/decade pour $\omega > 5 \text{ rad s}^{-1}$.
De plus, pour $\omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$, on a $20 \log \frac{2,2}{5} = -7,1 \text{ dB}$.

Question 5 Déterminer par calcul la pulsation de résonance ω_r de cette fonction de transfert.

Correction

$$\text{On a } \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = 5 \times \sqrt{1 - 2 \times 0,3^2} \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}.$$

Question 6 Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation ω_r la différence, notée ΔK et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Correction

L'amplitude de résonance ne dépend que du système du second ordre. On a alors (résultat de cours sur le second ordre) : $\Delta K = 20 \log \left(\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \right) = 20 \log \left(\frac{1}{2 \times 0,3\sqrt{1-0,3^2}} \right) = 4,8 \text{ dB}$.

Question 7 Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et

de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour $K_{COR} = 1$. Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

Correction

On a $b > 1$ donc $T < bT$ et $\frac{1}{T} > \frac{1}{bT}$.

Pour $\omega < \frac{1}{bT}$ on a donc un gain de pente nulle et un déphasage nul.

Pour $\frac{1}{bT} < \omega < \frac{1}{T}$ on a donc un gain de pente -20 dB/decade et un déphasage de -180° .

Pour $\omega > \frac{1}{T}$ on a donc un gain de pente 0 dB/decade et un déphasage de 0° .

Question 8 Déterminer alors en fonction de b , l'amplitude $|C(j\omega^*)|_{dB}$ à la pulsation notée ω^* .

Correction

$$|C(j\omega^*)|_{dB} = 10 \log \frac{1 + T^2 \frac{1}{T^2 b}}{1 + b^2 T^2 \frac{1}{T^2 b}} = 10 \log \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + b} = 10 \log \frac{1}{b} \frac{1+b}{1+b} = -10 \log b.$$

Question 9 Pour $K_{COR} = 1$, en faisant correspondre la pulsation de résonance ω_r de H_{BO} à ω^* :

- calculer b pour que « l'excès » de gain ΔK soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de T ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation ω^* .

Correction

D'une part, on veut que $|C(j\omega^*)|_{dB} = -4,8$ soit $10 \log b = 4,8$ et $b = 3,02$. D'autre part, $\omega^* = \omega_r$ et $T = \frac{1}{\omega_r \sqrt{b}} = 0,127$ s.

Par ailleurs, on a donc $\phi(\omega^*) = \arcsin\left(\frac{1-b}{1+b}\right) = \arcsin\left(\frac{1-3,02}{1+3,02}\right) \approx -28,79^\circ$.

Validation du cahier des charges

Question 10 Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

Correction

En regardant où la courbe a la pente la plus importante, on a approximativement $2/0,5 \approx 4^\circ/s$.
 $t_5\% \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s } 4^\circ/s < 8^\circ/s$.
 CDCF validé.

Question 11 Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

Correction

