TD 0
Exosquelette lombaire – Corrigé

Concours Centrale-Supélec 2023 – MP.

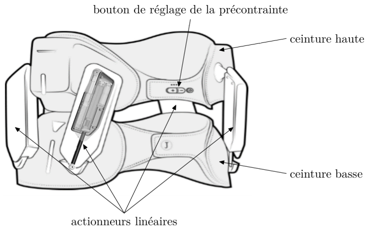


Figure 1 – Exosquelette lombaire Japet

Mise en situation

Réglage de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur

Question 1 Déterminer l'expression littérale de la phase de $H_{\text{BOv}}(\text{i}\omega)$. En déduire la valeur numérique de τ_i respectant les critères concepteur de la boucle de vitesse.

Correction

On a $H_{\text{BOv}}(\text{i}\omega) = C_v(p)K_1\dfrac{1}{R}K_3\dfrac{1}{I_{\text{eq}}p} = \dfrac{K_iK_1K_3}{RI_{\text{eq}}}\frac{1+\tau_i p}{\tau_i p^2}$.
On a $\varphi(\omega) = \arg\left(\dfrac{K_iK_1K_3}{RI_{\text{eq}}}\right) + \arg(1+\tau_i p) - \arg\left(\tau_i p^2\right) = \arctan\tau_i\omega - 180°$.
On souhaite une marge de phase supérieure à 80° ; donc $M_\varphi = \varphi(\omega)+180 = \arctan\tau_i\omega \geq 80°$.
$\arctan\tau_i\omega \geq 80° \Rightarrow \tau_i\omega \geq \tan 80 \Rightarrow \tau_i \geq \dfrac{\tan 80}{\omega_{0\,\text{dB}}} \Rightarrow \tau_i \geq 0{,}57\,\text{s}$.

Question 2 Déterminer la valeur numérique de K_i afin que la boucle d'asservissement de vitesse respecte les critères concepteur du tableau **??**.

Correction

Pour $\omega_{0\,\text{dB}} = 10\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ on mesure un gain de 80 dB. Il faut donc déterminer K_i tel que $20\log K_i = -80$ soit $K_i = 1\times 10^{-4}\,\text{V}\,\text{s}\,\text{rad}^{-1}$.
Les critères de marge et de pulsation de coupure sont respectés (on a tout fait pour). L'erreur statique est nulle car il y a un intégrateur dans le correcteur (elle sera nulle à condition que la perturbation soit constante).

Simplification du modèle de connaissance

Question 3 Déterminer les fonctions de transfert $H_8(p)$ et $H_9(p)$ en fonction de K_5, I_{eq} et $H_6(p)$. Ne pas remplacer K_5 et $H_6(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Correction

En décalant le point de prélèvement du capteur de vitesse d'un bloc vers la droite, on se retrouve avec $\dfrac{1}{H_6(p)}$ dans la boucle de retour.
On sort le bloc $\dfrac{1}{I_{\text{eq}}p}$ de la « petite » boucle et $\dfrac{1}{I_{\text{eq}}p}$ se retrouve aussi dans la pboucle de retour.
En identifiant, on a alors $H_9(p) = \dfrac{1}{H_6(p)}$ et en utilisant la formule de Black, on a $H_8(p) = \dfrac{H_6(p)}{1+\dfrac{H_6(p)K_5}{I_{\text{eq}}p}} = \dfrac{H_6(p)I_{\text{eq}}p}{I_{\text{eq}}p + H_6(p)K_5}$.

Question 4 Déterminer l'expression du gain K_{10} en fonction de K_{capt} et de K_{res}.

Il y a vraissemblablement une erreur dans le sujet de base : sur la figure **??**, $\varepsilon_f(p)$ devrait être en amon du bloc $C(p)$.

Correction

En décalant le point de prélèvement de droite vers la droite, on a alors K_{res} dans la boucle de retour. Pour que le système soit correctement asservi, il faut donc nécessairement que $K_{\text{adapt}} = K_{\text{capt}} K_{\text{res}}$
On se ramène ensuite à un retour unitaire. On alors $K_{10} = K_{\text{capt}} K_{\text{res}}$.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $G(p)$ en fonction de $H_2(p)$, I_{eq}, $H_8(p)$, $H_9(p)$ et K_{res} . Ne pas remplacer $H_2(p)$, $H_8(p)$ et $H_9(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Correction

$$G(p) = \frac{H_2(p)\dfrac{1}{J_{\text{eq}}p}H_8(p)}{1 + H_2(p)H_8(p)H_9(p)\dfrac{1}{J_{\text{eq}}p}} K_{\text{res}} = \frac{H_2(p)H_8(p)}{J_{\text{eq}}p + H_2(p)H_8(p)H_9(p)} K_{\text{res}}$$

Pour la suite, on donne la fonction de transfert $G(p)$, obtenue avec les valeurs de réglage correctes déterminées aux questions 1 et 2,

$$G(p) = \frac{F(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1+\tau_i p}{p} \frac{1,2 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-4} + 9,7 \times 10^{-5} p + 5,3 \times 10^{-6} p^2}.$$

Analyse des performances de l'asservissement en force développée par un actionneur linéaire

Question 6 Déterminer la valeur numérique limite de K_{cor} afin que la boucle d'asservissement de force respecte les critères de marge de phase et de gain du tableau **??**.

Correction

La marge de gain sera toujours infinie car la phase tend asymptotiquement vers −180°. Pour régler la marge de phase à 60°, il faut relever le gain de 75 dB. On a donc $K_{\text{cor}} = 10^{75/20} \simeq 5623$.

Question 7 Quel critère du tableau des exigences (tableau **??**) n'est pas pris en compte dans le modèle de connaissance ? D'après la courbe expérimentale, ce critère est-il respecté par le système réel ?

Correction

La réponse temporelle du modèle ne permet pas de savoir si l'exigence 1.1 sur le dépassement est resepectée.
Ce critère semble respecté sur le système réel vu qu'aucun dépassement n'est observé en régime permanent.

Colle 0
Quille pendulaire ★ – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

Mise en situation

Objectif

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

C1-02

C2-04

Modélisation du vérin

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

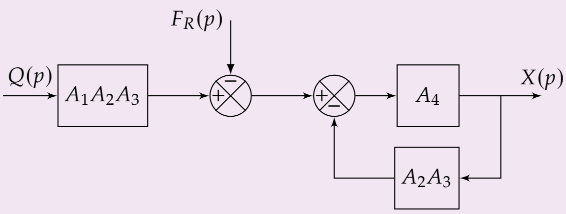
Correction

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace : $Q(p) = SpX(p) + \dfrac{V}{2B}p\Sigma(p)$ et $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$.
En utilisant le schéma-blocs, on a $\Sigma(p) = A_2\left(A_1Q(p) - X(p)\right) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$.
Par ailleurs $\Sigma(p) = \dfrac{Q(p) - SpX(p)}{\dfrac{V}{2B}p} = Q(p)\dfrac{2B}{Vp} - X(p)\dfrac{S2B}{V}$. On a donc $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_1A_2 = \dfrac{2B}{Vp}$ soit $A_1 = \dfrac{2B}{Vp}\dfrac{V}{S2B} = \dfrac{1}{Sp}$.
On a aussi $X(p) = A_4\left(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)\right) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$. Par ailleurs, $X(p)\left(Mp^2 + \lambda p + k\right) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \dfrac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \dfrac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$. On a donc : $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ et $A_3 = S$.
Au final, $A_1 = \dfrac{1}{Sp}$, $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1, A_2, A_3 et A_4, puis de la variable p et des constantes.

Correction

Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes On a $X(p) = \left(H_1Q(p) - F_R(p)\right)H_2(p)$.
Par ailleurs, on a vu que $X(p) = A_4\left(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)\right)$ et $\Sigma(p) = A_2\left(A_1Q(p) - X(p)\right)$.
On a donc $X(p) = A_4\left(-F_R(p) + A_3A_2\left(A_1Q(p) - X(p)\right)\right) \Leftrightarrow X(p)\left(1 + A_2A_3A_4\right) = A_4\left(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p)\right)$. On a donc $H_1(p) = A_1A_2A_3$ et $H_2 = \dfrac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$.
Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs Revient à utiliser la méthode précédente.
Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.
$A_1 = \dfrac{1}{Sp}$, $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}$.

En faisant le calcul on obtient : $H_1(p) = \dfrac{2BS}{pV}$ et $H_2 = \dfrac{\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}}{1+\dfrac{2BS^2}{V}\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}}$
$= \dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k+\dfrac{2BS^2}{V}}$.

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Correction

Dans ce cas, $\dfrac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p)\dfrac{2BS}{p\left(MVp^2+\lambda pV+kV+2BS^2\right)}$.

Comportement pour une commande de faible amplitude

Question 4 Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de $H_{BO}(p)$ en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

Correction

On a : $H_{BO}(p) = \dfrac{2,2}{p\left(1+0,12p+0,04p^2\right)}$. En conséquences, $\dfrac{1}{\omega_0^2} = 0,04$ et $\omega_0 = 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ et $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = 0,12 \Leftrightarrow \xi = 0,3$.
On a donc une asymptote de $-20\,\text{dB/decade}$ pour $\omega < 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ et $-60\,\text{dB/decade}$ pour $\omega > 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.
De plus, pour $\omega = 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, on a $20\log\dfrac{2,2}{5} = -7{,}1\,\text{dB}$.

Question 5 Déterminer par calcul la pulsation de résonance ω_r de cette fonction de transfert.

Correction

On a $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} = 5\times\sqrt{1-2\times0,3^2} \simeq 4{,}5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 6 Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation ω_r la différence, notée ΔK et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Correction

L'amplitude de résonance ne dépend que du système du second ordre. On a alors (résultat de cours sur le second ordre) : $\Delta K = 20\log\left(\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\right) = 20\log\left(\dfrac{1}{2\times0,3\sqrt{1-0,3^2}}\right) = 4{,}8\,\text{dB}$.

Question 7 Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour $K_{COR} = 1$. Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

Correction

On a $b > 1$ donc $T < bT$ et $\frac{1}{T} > \frac{1}{bT}$.
Pour $\omega < \frac{1}{bT}$ on a donc un gain de pente nulle et un déphasage nul.
Pour $\frac{1}{bT} < \omega < \frac{1}{T}$ on a donc un gain de pente -20 dB/decade et un déphasage de $-180°$.
Pour $\omega > \frac{1}{T}$ on a donc un gain de pente 0 dB/decade et un déphasage de 0°.

Question 8 Déterminer alors en fonction de b, l'amplitude $|C(j\omega^*)|_{\mathrm{dB}}$ à la pulsation notée ω^*.

Correction

$$|C(j\omega^*)|_{\mathrm{dB}} = 10\log\frac{1+T^2\frac{1}{T^2b}}{1+b^2T^2\frac{1}{T^2b}} = 10\log\frac{1+\frac{1}{b}}{1+b} = 10\log\frac{1}{b}\frac{1+b}{1+b} = -10\log b.$$

Question 9 Pour $K_{COR} = 1$, en faisant correspondre la pulsation de résonance ω_r de H_{BO} à ω^* :

- *calculer b pour que « l'excès » de gain ΔK soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de T ;*
- *calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation ω^*.*

Correction

D'une part, on veut que $|C(j\omega^*)|_{\mathrm{dB}} = -4,8$ soit $10\log b = 4,8$ et $b = 3,02$. D'autre part, $\omega^* = \omega_r$ et $T = \frac{1}{\omega_r\sqrt{b}} = 0{,}127\,\mathrm{s}$.
Par ailleurs, on a donc $\phi(\omega^*) = \arcsin\left(\frac{1-b}{1+b}\right) = \arcsin\left(\frac{1-3,02}{1+3,02}\right) \simeq -28,79°$.

Validation du cahier des charges

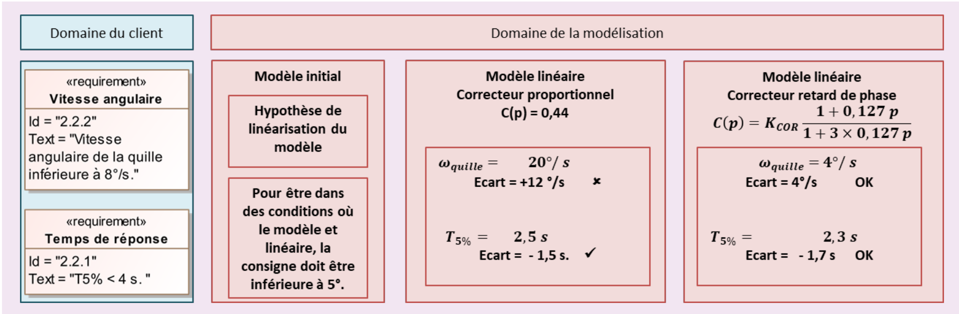
Question 10 Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

Correction

En regardant où la courbe a la pente la plus importante, on a apporximativement $2/0,5 \simeq 4°/s$.
$t_5\% \simeq 2{,}3\,\mathrm{s} < 4\,\mathrm{s}$ $4°/s < 8°/s$.
CDCF validé.

Question 11 Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

Correction

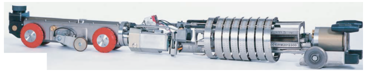

Domaine du client
Domaine de la modélisation
«requirement»
Vitesse angulaire
Id = "2.2.2"
Text = "Vitesse angulaire de la quille inférieure à 8°/s."
«requirement»
Temps de réponse
Id = "2.2.1"
Text = "T5% < 4 s. "
Modèle initial
Hypothèse de linéarisation du modèle
Pour être dans des conditions où le modèle et linéaire, la consigne doit être inférieure à 5°.
Modèle linéaire
Correcteur proportionnel
C(p) = 0,44
$\omega_{quille} =$ $20°/s$
Ecart = +12 °/s ✗
$T_{5\%} =$ $2,5\ s$
Ecart = - 1,5 s. ✓
Modèle linéaire
Correcteur retard de phase
$C(p) = K_{COR}\dfrac{1+0,127\,p}{1+3\times 0,127\,p}$
$\omega_{quille} = 4°/s$
Ecart = 4°/s OK
$T_{5\%} =$ $2,3\ s$
Ecart = - 1,7 s OK

TD 1
Robot de dépose de fibres optiques ★ – Corrigé

Concours Mines Ponts – PSI 2004.

C1-05

C2-08



Présentation

Objectif

En fin des mouvements des bras, on doit avoir $\delta = 14°$ et $\dot{\delta} \leq 50°.s^{-1}$.

Hypothèses

Repères et paramétrage

Cahier des charges

Modélisation dynamique

Question 1 Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble $\Sigma = \{1+2+3+4\}$, puis la calculer.

Correction

Pour calculer l'énergie cinétique de l'ensemble seule la masse de la tige 1 est prise en compte.

$2\ E_c(\Sigma/R_0) = \{\mathcal{C}(\Sigma/R_0)\} \otimes \{\mathcal{V}(\Sigma/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(1/0) \\ \overrightarrow{V}(G_1,1/0) \end{array}\right\}_{G_1} \otimes \left\{\begin{array}{c} m_1\ \overrightarrow{V}(G_1,1/0) \\ \overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0) \end{array}\right\}_{G_1}$

$= m_1\left(\overrightarrow{V}(G_1,1/0)\right)^2 + \overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0)\cdot\overrightarrow{\Omega}(1/0)$.

- Vecteur de taux de rotation de 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\delta}\ \overrightarrow{z_0}$.
- Vitesse du point G_1 appartenant à 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{V}(G_1,1/0) = \overrightarrow{V}(I,1/0) + \overrightarrow{G_1I_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = -\left(R\ \overrightarrow{y_0} + \frac{L_1}{2}\overrightarrow{x_1}\right) \wedge \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} = -R\ \dot{\delta}\ \overrightarrow{x_0} + \frac{L_1}{2}\ \dot{\delta}\overrightarrow{y_1}$.
- Caractéristiques d'inertie de la tige 1 : la tige 1 supposée unidimensionnelle présente naturellement des symétries matérielles suivant des plans contenant $\overrightarrow{x_1}$. Les produits d'inertie sont donc nuls. Le moment d'inertie en G_1 suivant $\overrightarrow{z_0}$ est $C_1 = \frac{m_1\ L_1^2}{12}$.
- Moment cinétique en G_1 de 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0) = \overline{\overline{I}}_{G_1}(1)\cdot\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \frac{m_1\ L_1^2}{12}\dot{\delta}\ \overrightarrow{z_0}$.
- On en déduit $E_c(1/0)$: $E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) = \frac{1}{2}\ m_1\ \dot{\delta}^2\left(R^2 + \frac{L_1^2}{4} + R\ L_1\ \sin\delta\right) + \frac{m_1\ L_1^2}{12}\ \dot{\delta}^2$
  $= \frac{1}{2}\ m_1\ \dot{\delta}^2\left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\ L_1 \sin\delta\right)$.

Question 2 Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ.

Correction

$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) = \mathcal{P}(\text{pesanteur} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0)$

- Actions de la pesanteur :

$\mathcal{P}(\text{pes} \to \Sigma/0) = \mathcal{P}(\text{pes} \to 1/0) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \to 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1\, g\, \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_1} \otimes$
$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(1/0 \\ \overrightarrow{V}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1}$
$= -m_1\, g\, \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{V}(G_1, 1/0) = -m_1\, g \frac{L_1}{2} \dot{\delta}\, \cos\delta.$

- Actions du contact en I entre 0 et 4 (*le contact se fait par roulement sans glissement*) :
  $\mathcal{P}(\text{contact en I} \to \Sigma/0) = \{\mathcal{T}(0 \to 4)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{04} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(4/0) \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I} = 0.$
- Actions du contact en E entre 0 et 2 (*le contact se fait sans frottement*) :
  $\mathcal{P}(\text{contact en E} \to \Sigma/0) = \{\mathcal{T}(0 \to 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{02}\, \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{E} \otimes$
  $\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(2/0) \\ \overrightarrow{V}(E, 2/0) \end{array} \right\}_{E} = R_{02}\, \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{V}(E, 2/0) = 0.$

Question 3 Donner la puissance intérieure à Σ.

Correction

- Les liaisons sont supposées comme parfaites donc : $\mathcal{P}\left(1 \overset{\text{Pivot}}{\leftrightarrow} 2\right) = \mathcal{P}\left(1 \overset{\text{Pivot Gl.}}{\leftrightarrow} 3\right) =$
  $\mathcal{P}\left(3 \overset{\text{Pivot}}{\leftrightarrow} 2\right) = 0.$
- Action du vérin entre 1 et 3 :
  $\mathcal{P}\left(1 \overset{\text{Vérin}}{\leftrightarrow} 3\right) = \{\mathcal{T}(1 \to 3)\} \otimes \{\mathcal{V}(3/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{N} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V}(N, 3/1) \end{array} \right\}_{N} =$
  $F\, \overrightarrow{V}(N, 3/1) \cdot \overrightarrow{x_1}.$
  En considérant que $\overrightarrow{MN}$ est porté par $\overrightarrow{x_1}$ (hypothèse faite dans l'énoncé), on obtient :
  $\overrightarrow{V}(N, 3/1) \cdot \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{V}(M, 3/1) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{V}(M, 3/2) + \overrightarrow{V}(M, 2/1)\right) \cdot \overrightarrow{x_1} =$
  $\left(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{V}(B, 2/1) + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(-b\overrightarrow{x_2} \wedge (\dot{\beta} - \dot{\delta})\, \overrightarrow{z_0}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = b\, (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \cdot \overrightarrow{y_2} \cdot \overrightarrow{x_1} =$
  $-b\, (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta).$
  On en déduit : $\mathcal{P}\left(1 \overset{\text{Vérin}}{\leftrightarrow} 3\right) = -F\, b\, (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta).$

Question 4 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre F, δ, et β.

Correction

On applique alors le théorème de l'énergie cinétique à Σ par rapport au référentiel galiléen R_0 :
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c(\Sigma/R_0)) = \mathcal{P}(\text{ext} \to \Sigma/0) + \mathcal{P}_{\text{int}}(\Sigma).$
Or, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c(\Sigma/R_0)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\, m_1\, \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\, L_1 \sin\delta\right)\right] =$
$m_1\, \dot{\delta} \left[\ddot{\delta} \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\, L_1 \sin\delta\right) + \frac{1}{2}\dot{\delta}^2\, R\, L_1 \cos\delta\right].$
Ainsi on obtient, l'équation :

$$\boxed{m_1\, \dot{\delta} \left[\ddot{\delta} \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\, L_1 \sin\delta\right) + \frac{1}{2}\dot{\delta}^2\, R\, L_1 \cos\delta\right] = -F\, b\, (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta) - m_1\, g \frac{L_1}{2} \dot{\delta}\, \cos\delta.}$$

Des simulations pour différentes valeurs de F donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de δ en fonction du temps.

Question 5 Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot{\delta}$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.

Correction

- $F = 700\,\text{N}$: le régime est fortement oscillant. Le système ne parvient pas à soulever le robot jusqu'à 14°. Celui-ci se comporte comme un oscillateur non amorti (le modèle est considéré sans frottement).
  Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.
- $F = 750\,\text{N}$: le système atteint les 14°. La pente à l'accostage vaut environ $37.5°/s$ ce qui est raisonnable vis-à-vis du cahier des charges. Cependant, le modèle utilisé pour trouver ce résultat utilise des liaisons parfaites, sans frottement. L'effort de 700 N étant insuffisant avec ce modèle parfait, il est possible qu'un effort de 750 N devienne insuffisant en réalité.
  Cette valeur est théoriquement satisfaisante mais l'écart entre modèle et réalité risque de modifier la conclusion.
- $F = 800\,\text{N}$: Le système atteint les 14° La pente à l'accostage vaut environ $45°/s$ ce qui est inférieur à la limite de $50°/s$ imposée par le cahier des charges. L'effort est 15% supérieur à la valeur minimale nécessaire pour atteindre les 14° ce qui semble une marge suffisante pour vaincre les frottements non pris en compte dans le modèle.
  Cette valeur est satisfaisante.
- $F = 950\,\text{N}$: Le système atteint les 14°. La pente à l'accostage vaut environ $75°/s$ ce qui est supérieur à la limite de $50°/s$ imposée par le cahier des charges.
  Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.