



TD 1

Drone quadri-rotor – Sujet

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction \vec{z}) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe (O, \vec{x})) et en tangage (rotation autour de l'axe (O, \vec{y})) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ($\frac{\omega_2}{\omega_4}$ pour le roulis et $\frac{\omega_1}{\omega_3}$ pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

Objectif

- ▶ Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- ▶ Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.

Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

u représente la tension de commande du moteur, $\omega(t)$ son taux de rotation, τ et k_v des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme $k_q\omega^2$ provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en ω^2 , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement ω_0 , fréquence

Accélération verticale	Vers le haut : 3g Vers le bas : 0,5g (valeur absolue)
Précision	Erreur statique nulle
Stabilité	Marge de phase minimale : 35°. Dépassement maximal < 5 %
Rapidité	$t_{r5\%} < 0,6$ s



de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ et $u = u_0 + \delta u$ où $\delta\omega$ et δu représentent des petites variations de ω et u autour du point de fonctionnement.

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0 .

Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta\omega$ et δu est de la forme $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 . On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu .

Question 3 Calculer la fonction de transfert $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Recherche du point de fonctionnement ω_0

Dans le mouvement de déplacement vertical de direction \vec{Z} , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$. La masse totale du drone est $m = 240$ g. On prendra $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 . La poussée F varie avec ω^2 . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant F à la fréquence de rotation ω en rad/s.

Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

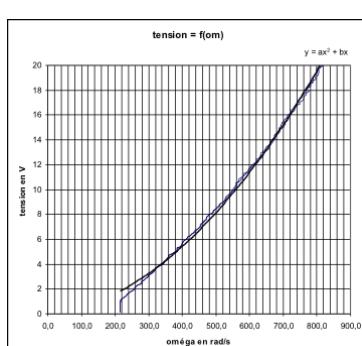
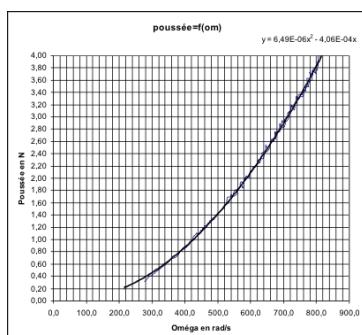
Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande u et la fréquence de rotation ω en rad/s en régime permanent lorsque $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$. La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme $y = ax^2 + bx$. On donne la constante de temps du moteur : $\tau = 125$ ms.

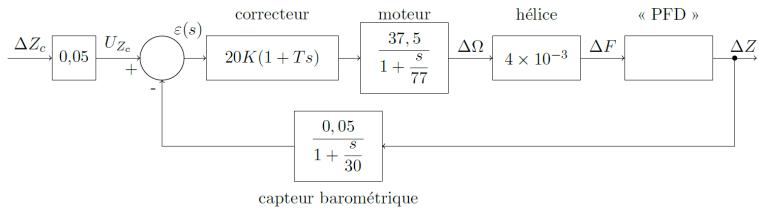
Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a , b et τ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$.

Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement ω_0 , par le schéma-bloc suivant :





Le gain du capteur barométrique est de $0,05 \text{ V m}^{-1}$. On pose $z(t) = z_0 + \delta z(t)$, $\Delta Z(p)$ la transformée de Laplace de $\delta z(t)$, $F = F_0 + \delta F$ représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire : $m\ddot{z} = 4F - mg$.

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté $K_{BO} = 2,5K$. La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée figure 1.1, en gras avec un correcteur proportionnel ($T = 0$) et en trait fin avec le correcteur retenu ($K = 1$ et $T = 0,2s$).

Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0,2s$ et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad s^{-1} , le gain sera compris entre -120 dB et 10 dB .

Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega_{c0 \text{ dB}} = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

La figure 1.2 représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain K précédemment déterminée.

Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

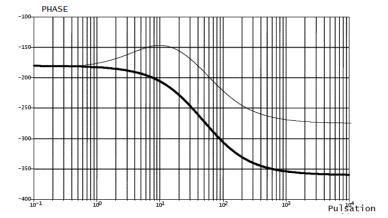


FIGURE 1.1 – Courbe de phase

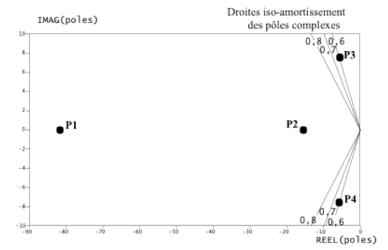
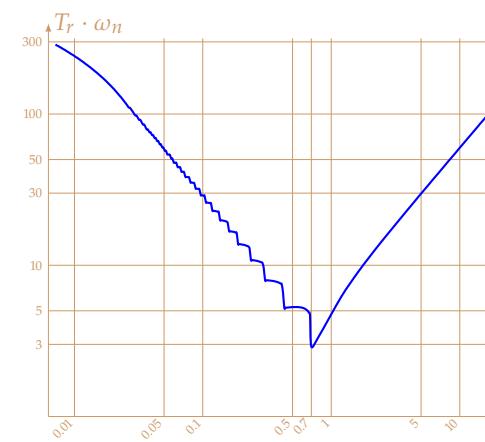


FIGURE 1.2 – Carte des pôles



Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Éléments de correction

1. $-\frac{1}{\tau}\omega_0 - k_q\omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau}u_0 = 0;$
2. $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q\omega_0$ et $B = \frac{k_v}{\tau}.$
3. $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q\omega_0}$ et $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q\omega_0}.$
4. $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6 \text{ N}.$
5. $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}.$
6. $k_v = \frac{1}{b} (\text{rad/s/V})$ et $k_b = \frac{a}{b\tau}.$
7. $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2} \cdot H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}.$
- 8.
- 9.
10. $K = 17,9.$
11. FTBO de classe 2, ε_s nul.
12. $p_2 = -15, p_3 = -5 + 8j, p_4 = -5 - 8j.$
13. $\xi = 0,6$
- 14.
15. $p = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}.$ $\omega_n \simeq 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
16. $t_{5\%} \simeq 0,61 \text{ s}.$





TD 1

Drone quadri-rotor – Corrigé

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

Présentation

C1-01

C2-03

Objectif

- ▶ Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- ▶ Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0 .

Correction

En vol stationnaire, dans les conditions idéales, la vitesse de rotation des hélices est constante ; donc $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$. De plus, il n'y a pas de variation de la vitesse de rotation des hélices et donc pas de variation de la tension d'alimentation. En conséquence, $\delta u = 0$ et $\delta\omega = 0$.

On a donc $\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u$ En notant ω_0 et u_0 les vitesses en tensions à l'état stationnaire, on a $\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0$.

Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta\omega$ et δu est de la forme $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Correction

On utilise le changement de variable proposé autour d'un point de fonctionnement et on a :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u$$

$$\Rightarrow \frac{d(\omega_0 + \delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}(\omega_0 + \delta\omega) - k_q(\omega_0 + \delta\omega)^2 + \frac{k_v}{\tau}(u_0 + \delta u)$$

$$\Rightarrow \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega_0 - \frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q\omega_0^2 - k_q(\delta\omega)^2 - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}u_0 + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

$$\text{Or } \frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0 \text{ (question précédente)}; \text{ donc : } \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q(\delta\omega)^2 - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

$$\text{En négligeant les termes d'ordre 2, on a donc : } \frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

Au final, $A = \frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0$ et $B = \frac{k_v}{\tau}$.

On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu .

Question 3 Calculer la fonction de transfert $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Correction

En utilisant la transformée de Laplace, on obtient $p\Delta\Omega(s) = -A\Delta\Omega(s) + B\Delta U(s)$ et donc

$$\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)} = \frac{B}{p+A} = \frac{B/A}{p/A+1}. \text{ En conséquence, } K_m = \frac{B}{A} = \frac{\frac{k_v}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0} = \frac{k_v}{1 + \tau k_q 2\omega_0}.$$

$$\tau_m = \frac{\tau}{1 + \tau k_q 2\omega_0}$$

Recherche du point de fonctionnement ω_0

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 .

Correction

On a $4F_0 = mg$. Le poids du drone est de $0,240 \times 9,81 = 2,3544$ N. Chaque moteur doit donc exercer $\frac{2,3544}{4} = 0,59$ N.

Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

Correction

En lisant le graphe, on obtient $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a , b et τ . Préciser leur unité.

Correction

Lorsque $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$, on a $u = a\omega^2 + b\omega_0$. Par ailleurs en régime stationnaire, on a

$$\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0. \text{ Il en résulte que } u_0 = \frac{1}{k_v}\omega_0 + \frac{k_q\tau}{k_v}\omega_0^2.$$

On a donc $a = \frac{k_q\tau}{k_v}$ et $b = \frac{1}{k_v}$. On a donc b tel que [V] = [B][s⁻¹] et [B] = [V][s]. On a donc k_v en [V⁻¹s⁻¹].

Par ailleurs, [V] = [k_q][s][Vs][s⁻²] et k_q n'a pas d'unité.

On peut ainsi déduire le modèle $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de

fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$.

Vérification des performances

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Correction

On a vu que $4_0 F = mg$.

Par ailleurs, $m\ddot{z} = 4F - mg$ et donc, $m \frac{d(z_0 + \delta z(t))}{dt} = 4(F_0 + \delta F(t)) - mg$ et $m \frac{d(\delta z(t))}{dt} = 4\delta F(t)$. Dans le domaine de Laplace, on a $mp^2 \Delta Z(p) = 4\Delta F(p)$. En conséquences, $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2}$.

La FTBO s'exprime alors par $H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}$.

Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0,2\text{ s}$ et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad s^{-1} , le gain sera compris entre -120 dB et 10 dB .

Correction

On a $H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}$. Les pulsations de cassure sont alors : 5 rad s^{-1} , 30 rad s^{-1} et 77 rad s^{-1} . Les pentes sont alors :

- ▶ pour $\omega < 5\text{ rad s}^{-1}$: -40 dB/décade ;
- ▶ pour $5\text{ rad s}^{-1} < \omega < 30\text{ rad s}^{-1}$: -20 dB/décade ;
- ▶ pour $30\text{ rad s}^{-1} < \omega < 77\text{ rad s}^{-1}$: -40 dB/décade
- ▶ pour $\omega > 77\text{ rad s}^{-1}$: -60 dB/décade .

Pour une pulsation de $10 \times 10^{-2}\text{ rad s}^{-1}$, on a $FTBO(p) \approx \frac{2,5}{p^2}$. On a donc un gain $\approx 20\log\left(\frac{2,5}{0,01^2}\right) \approx 88\text{ dB}$. Reste à tracer...

Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega_{c0\text{dB}} = 1,5\text{ rad s}^{-1}$. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

Correction

Si on considère que pour $\omega < 5\text{ rad s}^{-1}$, on a $H_{BO}(p) \approx \frac{2,5K}{p^2}$. Dans ces conditions, pour $K = 1$, on a $\left|\frac{2,5}{-\omega^2}\right| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{2,5} \approx 1,58\text{ rad s}^{-1}$.

Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Correction

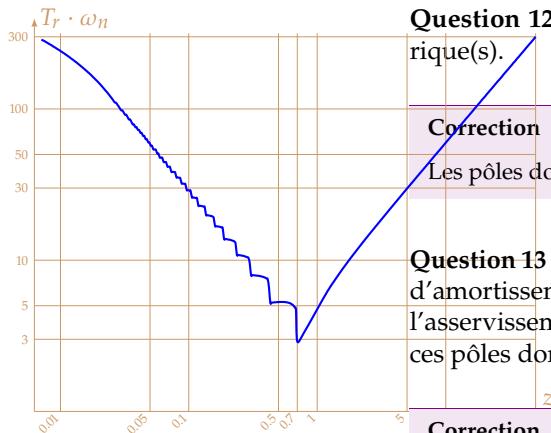
En raisonnant analytiquement, on cherche la pulsation ω_{-145} pour laquelle la phase est de $-180^\circ + 35^\circ = -145^\circ$, soit $\arg FTBO(j\omega) = -145^\circ$. (Résolution à faire à la calculatrice, sur

Python ou autre. Il y a surement 2 solutions vu le profil de courbe de phase). On cherche ensuite K tel que $|FTBO(j\omega_{-145})| = 1$. (Résolution à faire à la calculatrice, sur Python ou autre.)

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

Correction

La boucle ouverte comporte 2 intégrateurs. L'écart statique est donc nul. Le cahier des charges est vérifié.



Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

Correction

Les pôles dominants sont $P_2 \approx -15, P_3 \approx -5 + 8i, P_4 \approx -5 - 8i$.

Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Correction

Dans ce cas, on ne prend que P_3 et P_4 . $\xi = 0,6$.

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

Correction

Le coefficient d'amortissement est inférieur à 0,69. Il y aura donc des oscillations verticales lors du drone. Le dépassement sera supérieur à 5 % de la valeur finale. En conséquence, le critère de stabilité n'est pas totalement respecté.

Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

Correction

Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Correction

Colle 1

Stabilité – Sujet

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \frac{2}{(10p + 1)^3}$.

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Déterminer l'erreur de statique et l'erreur de trainage.

Question 3 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 4 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

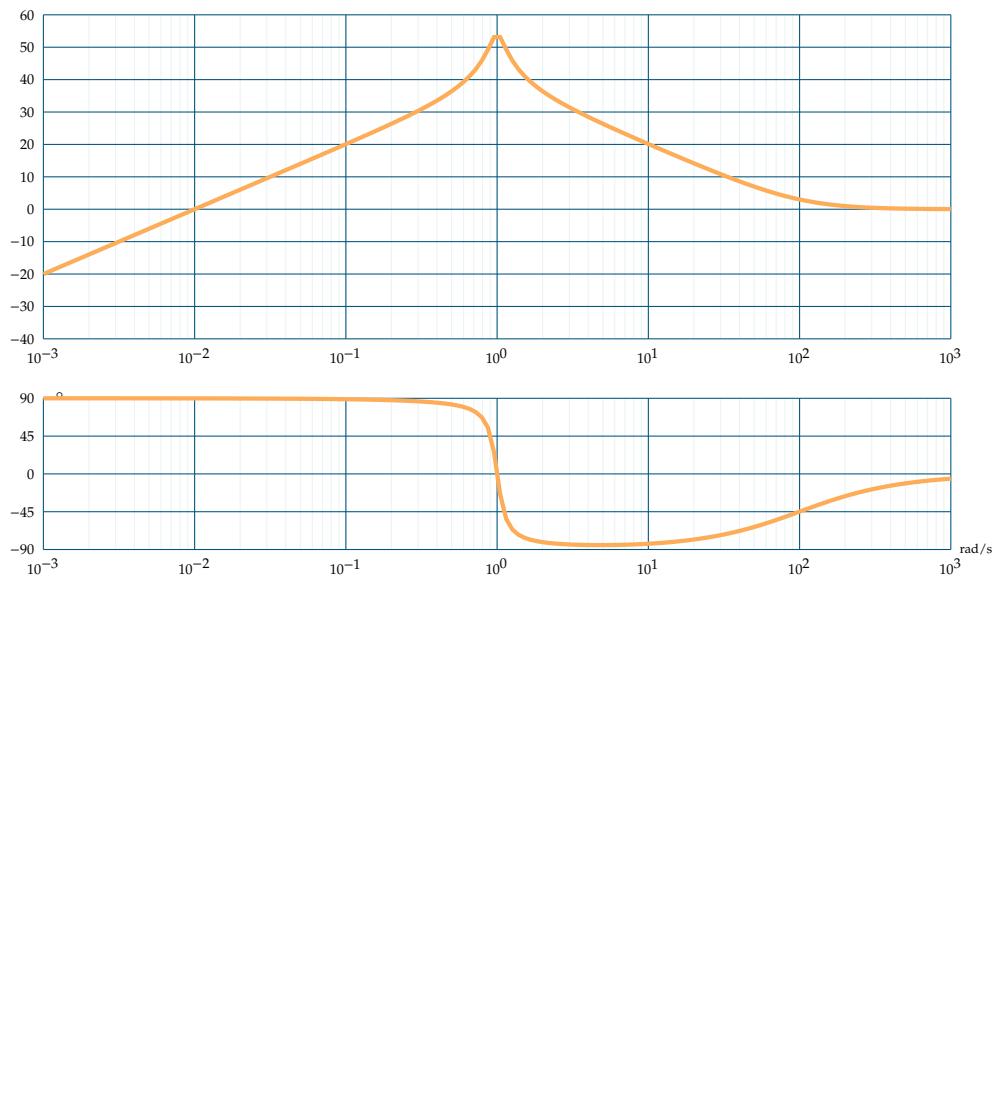
Question 5 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

Question 6 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \frac{Ki}{p}$.

Question 7 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 8 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.



Colle 1

Stabilité – Corrigé

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \frac{2}{(10p + 1)^3}$.

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Déterminer l'erreur de statique et l'erreur de trainage.

Question 3 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 4 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

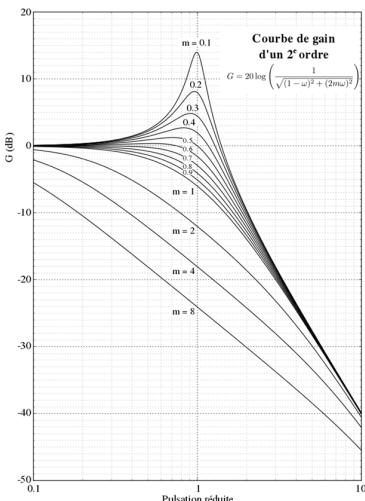
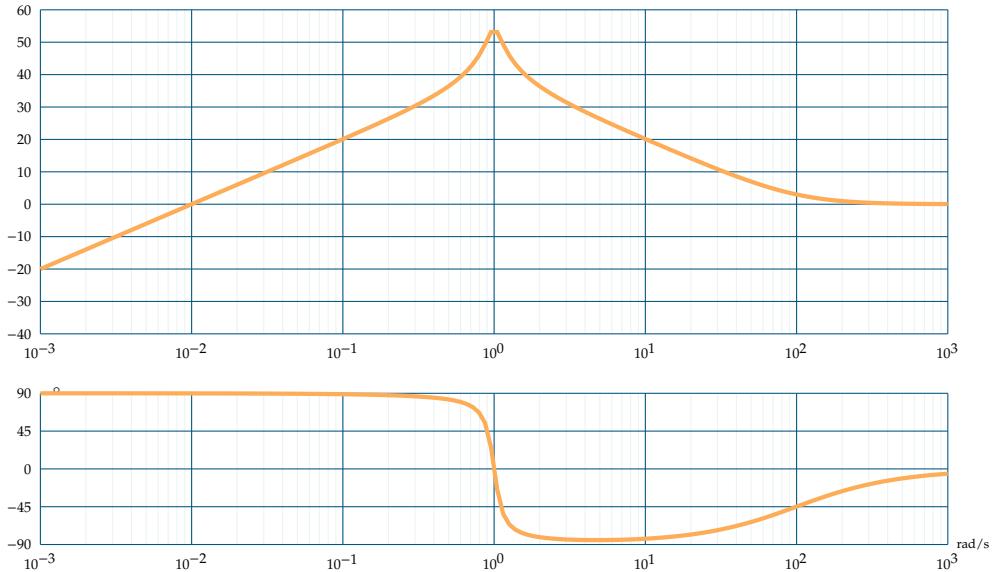
Question 5 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

Question 6 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \frac{Ki}{p}$.

Question 7 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 8 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.



7.7 Pour obtenir une marge de phase supérieure à 45° , il faut avoir :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi + \arg G(j\omega_{c0}) > \frac{\pi}{4}$$

soit :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg \frac{K}{(10j\omega_{c0} + 1)^3} > \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta\varphi = \pi - 3 \arctan 10\omega_{c0} > \frac{\pi}{4}$$

On obtient la pulsation à établir pour une marge de phase supérieure à 45° en résolvant l'équation précédente d'où :

$$\omega_{c0} < \frac{1}{10} \tan \frac{3\pi}{12} = 0,1 \text{ rad/s}$$

Calculons la valeur de K correspondant à cette pulsation de coupure à 0 dB.

On a :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\left(\sqrt{1 + 100\omega_{c0}^2}\right)^3} = 1$$

$$\text{d'où : } K = \left(\sqrt{1 + 100\omega_{c0}^2}\right)^3 = 2,8$$

La condition sur ω_{c0} nous imposant une limite supérieure, il en est de même pour la condition sur K .

En conclusion : $\Delta\varphi > 45^\circ \Rightarrow K < 2,8$

Par ailleurs, comme :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$$

on a :

$$t_m > \frac{3}{0,1} = 30 \text{ s}$$

Le temps de montée minimal (autrement dit la meilleure rapidité possible) est donc égal à 30 s.

Calculons à présent l'erreur statique. La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{(10p + 1)^3 + K}$$

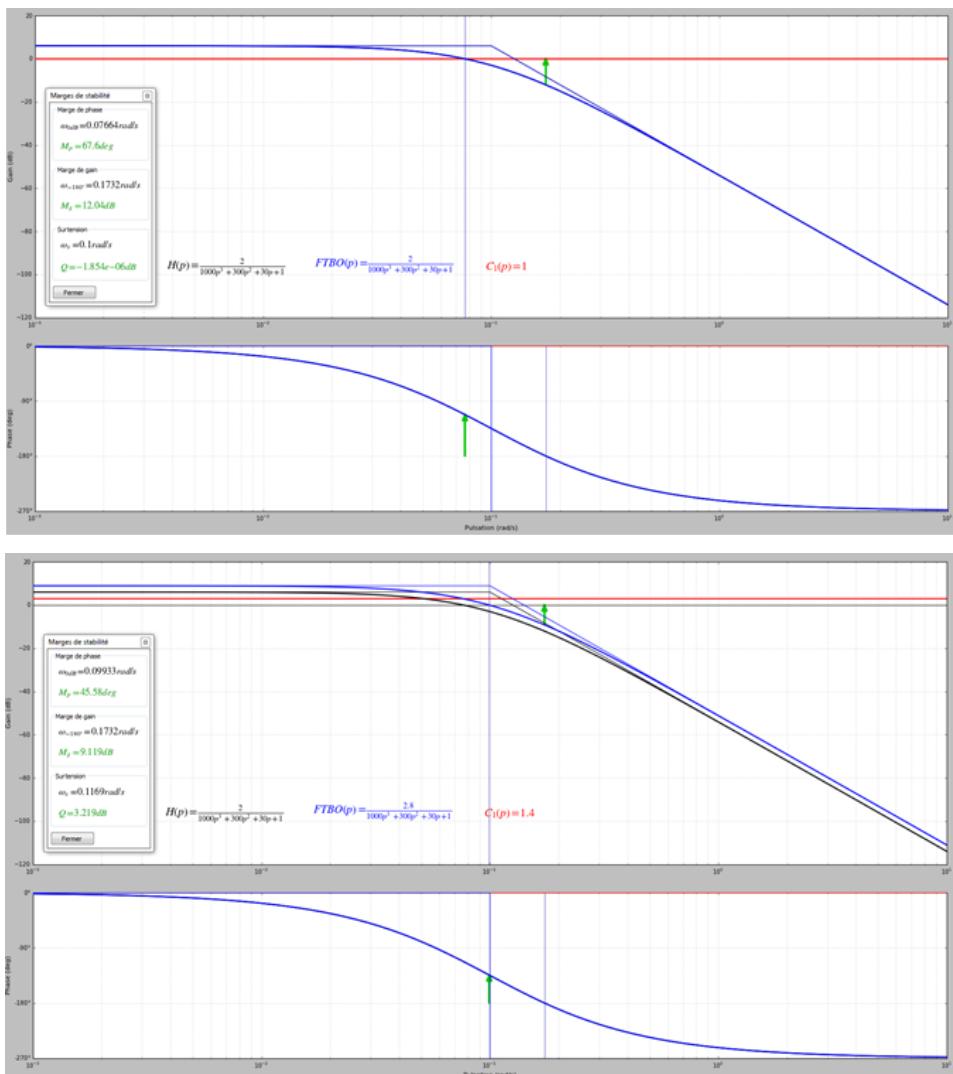
Par définition, l'erreur statique a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = 1 - \frac{K}{1 + K} = \frac{1}{1 + K}$$

On a donc :

$$K < 2,8 \Rightarrow \varepsilon_p > \frac{1}{1 + 2,8} = 0,26$$

L'erreur statique est donc obligatoirement supérieure à 26 % si on souhaite avoir une marge de phase supérieure à 45° .



Colle 2

Stabilité – Sujet

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{10}{(p+1)(p+4)}.$$

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Déterminer l'erreur de statique et l'erreur de trainage.

Question 3 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 4 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

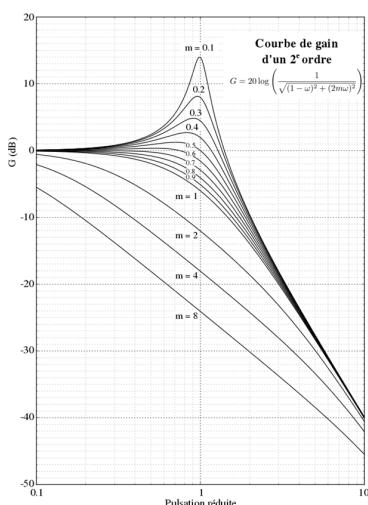
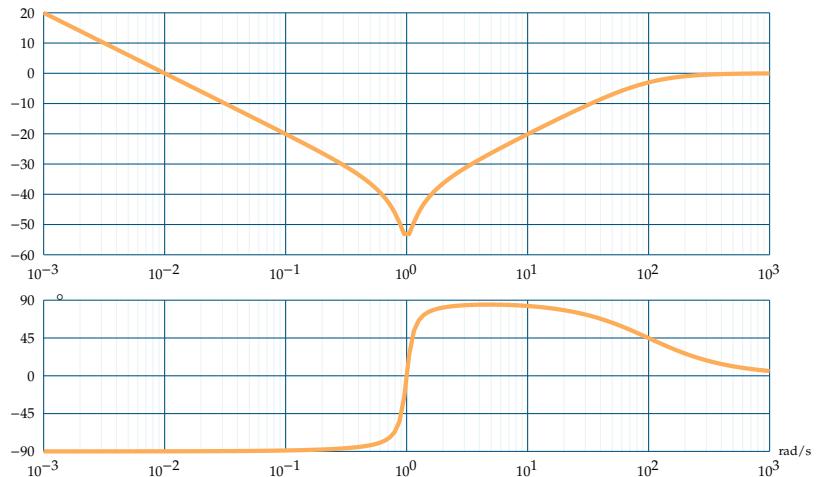
Question 5 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

Question 6 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \frac{Ki}{p}$.

Question 7 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 8 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.



Colle 2

Stabilité – Corrigé

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{10}{(p+1)(p+4)}.$$

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Déterminer l'erreur de statique et l'erreur de trainage.

Question 3 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 4 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

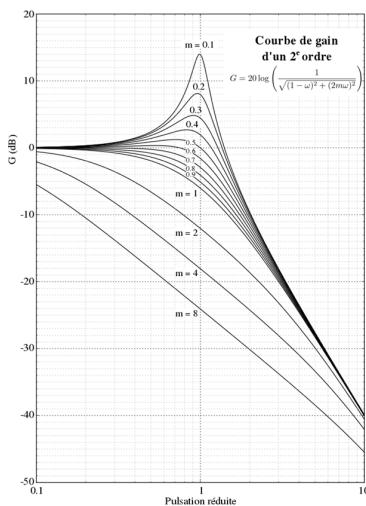
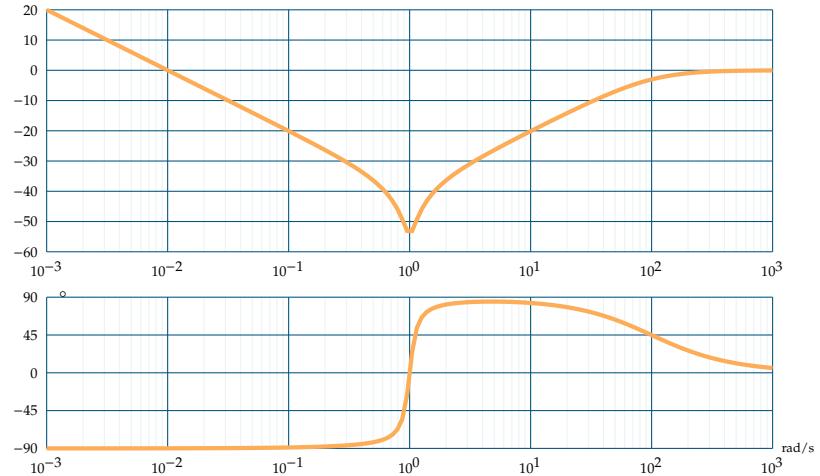
Question 5 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

Question 6 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \frac{Ki}{p}$.

Question 7 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 8 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.



8.2 La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

soit : $KG(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45° , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

soit : $\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Calculons la tangente des deux membres de l'expressions :

$$\tan \left[\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} \right] = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

d'où :

$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{4}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{4}} = -1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 4 = 0$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16 = 41$$

La seule solution positive est :

$$\omega_{c0} = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} = 5,7 \text{ rad/s}$$

Par définition :

$$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 40,3$$

Le gain K étant réglé sur cette valeur, on a bien une marge de phase de 45° et un temps de montée en boucle fermée que l'on peut estimer en utilisant la relation approchée suivante :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5,7} = 0,53 \text{ s}$$

Si on souhaite régler le temps de montée sur 0,2 s, on doit avoir :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow \omega_{c0} \approx \frac{3}{0,2} = 15 \text{ rad/s}$$

Pour obtenir une telle pulsation de coupure à 0 dB, il faut changer la valeur de K :

Par définition :

$$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

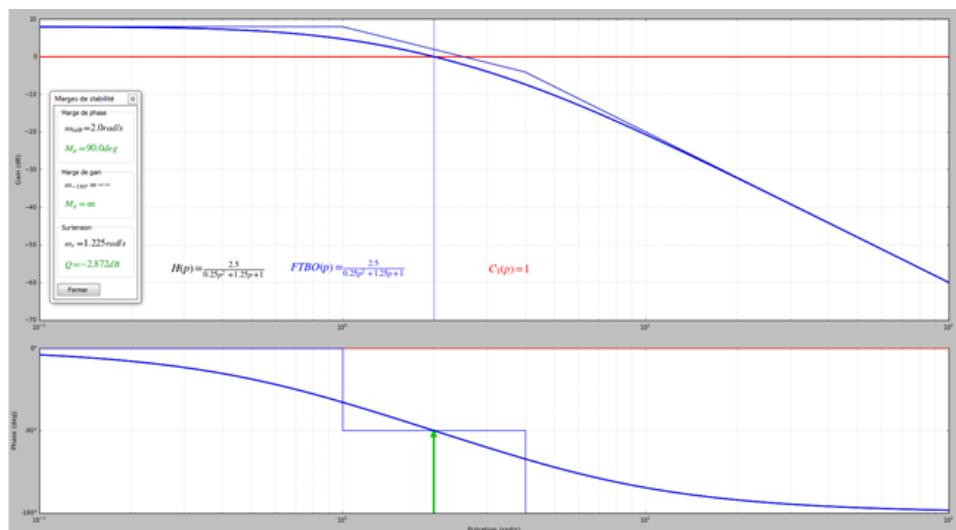
Par conséquent :

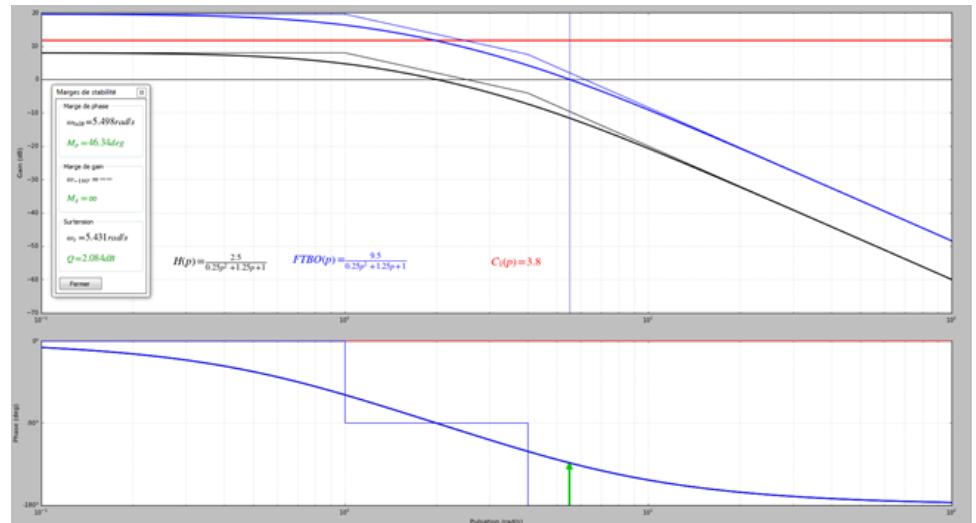
$$K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 233,4$$

La marge de phase a bien évidemment changé :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = 0,326 \text{ rad} = 18,7^\circ$$

Ce résultat montre bien qu'en cherchant à augmenter la rapidité d'un système par une correction proportionnelle, on dégrade sa stabilité.





Colle 3

Performances – Sujet

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$.

Question 1 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 2 Déterminer l'erreur de statique et l'erreur de trainage.

Question 3 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$. La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert $B(p) = 3$.

Question 4 Tracer le schéma-blocs.

Question 5 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

Question 6 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = Ki/p$.

Question 7 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.



Colle 3

Performances – Corrigé

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$.

Question 1 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Correction

Question 2 Déterminer l'erreur de statique et l'erreur de trainage.

Correction

Question 3 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

Correction

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$. La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert $B(p) = 3$.

Question 4 Tracer le schéma-blocs.

Correction

Question 5 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

Correction

Question 6 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Correction

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = Ki/p$.

Question 7 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Correction

8.2 La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

soit : $KG(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45° , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

soit : $\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Calculons la tangente des deux membres de l'expressions :

$$\tan \left[\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} \right] = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\varepsilon = 0,123$$

d'où : $\frac{\frac{5\omega_{c0}}{4}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{4}} = -1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 4 = 0$

Résolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16 = 41$$

La seule solution positive est : $\omega_{c0} = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} = 5,7 \text{ rad/s}$

Par définition : $KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$

Par conséquent : $K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 40,3$

Le gain K étant réglé sur cette valeur, on a bien une marge de phase de 45° et un temps de montée en boucle fermée que l'on peut estimer en utilisant la relation approchée suivante :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5,7} = 0,53 \text{ s}$$

Si on souhaite régler le temps de montée sur 0,2 s, on doit avoir :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow \omega_{c0} \approx \frac{3}{0,2} = 15 \text{ rad/s}$$

Pour obtenir une telle pulsation de coupure à 0 dB, il faut changer la valeur de K :

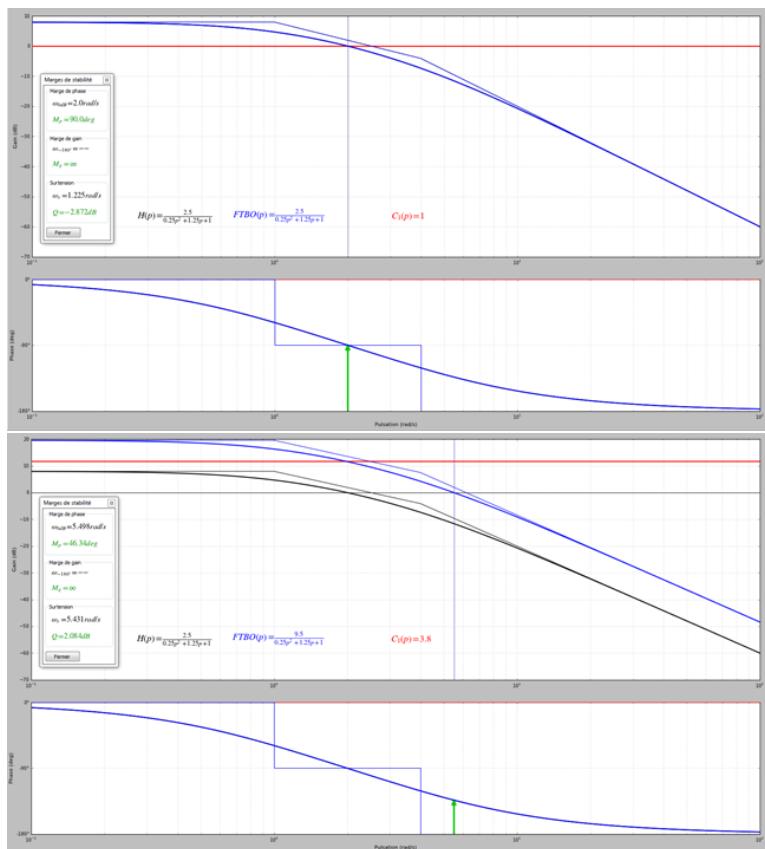
Par définition : $KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$

Par conséquent : $K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 233,4$

La marge de phase a bien évidemment changé :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = 0,326 \text{ rad} = 18,7^\circ$$

Ce résultat montre bien qu'en cherchant à augmenter la rapidité d'un système par une correction proportionnelle, on dégrade sa stabilité.



Colle 4

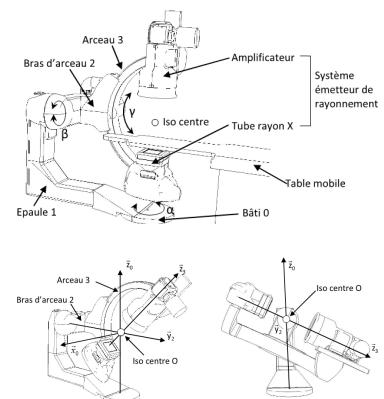
Imagerie médicale – Sujet

F. Mathurin.

L'étude porte sur un système permettant de réaliser des imageries médicales de vaisseaux sanguins sur un patient. Ce système, conçu par General Electric Medical System, envoie des rayons X dans le corps du patient et mesure leur rayonnement. En fonction des informations reçues, une image de synthèse en 3 dimensions est réalisée, permettant de voir les éventuels problèmes médicaux à venir.

Ce système est constitué des éléments suivants : le bâti 0, une épaule 1 qui peut être mis en mouvement par rapport au bâti 0, un bras d'arceau 2 qui peut s'orienter par rapport à l'épaule 1 et un arceau 3 qui se déplace par rapport à bras d'arceau 2. Le patient est situé sur une table mobile. Le réglage en hauteur du patient sur la table mobile est possible pour son confort mais n'est pas utilisé au cours d'une analyse. Seuls les degrés de liberté α , β et γ sont utilisés pendant l'analyse. L'émetteur de rayons, situé sur l'arceau, focalise la vision interne du patient en un point appelé iso centre.

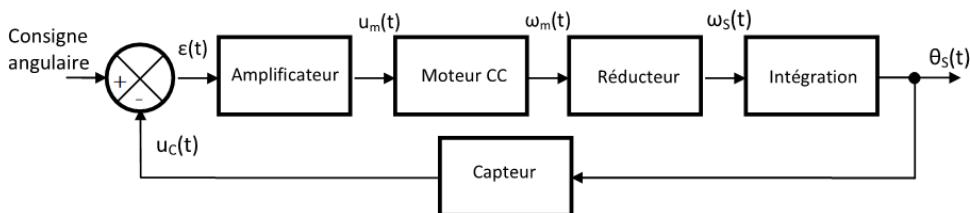
Sur l'image de gauche, l'arceau 3 s'oriente par rapport au bras d'arceau 2 et sur l'image de droite le bras d'arceau 2 se déplace par rapport à l'épaule 1. On donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel du système de positionnement dans la phase de vie correspondant à une mesure d'imagerie :



Exigences	Critère	Niveau
1.1	... Vitesse angulaire par axe élémentaire Stabilité (Marge de phase Mφ) $10^\circ/\text{s} \pm 10\%$ $M\phi > 45^\circ$...

Conformément au cahier des charges, chaque axe élémentaire, piloté séparément, doit avoir une vitesse angulaire de $10^\circ/\text{s}$ en phase de mesure. Technologiquement, la chaîne d'action de chaque axe élémentaire est constituée d'un réducteur entre le moteur et l'effecteur. Ce réducteur diminue la vitesse angulaire d'un facteur 558.

On s'intéresse à l'axe permettant de déplacer le bras d'arceau 2 par rapport à l'épaule 1. La structure de la chaîne fonctionnelle asservie de cet axe est la suivante :



Les différents éléments de cette chaîne fonctionnelle sont les suivants :

- ▶ l'amplificateur est un gain pur : K_a ;
- ▶ le réducteur est un gain pur K_r (sans dimension) ;
- ▶ le capteur est un gain pur : K_c ;
- ▶ le moteur est un système d'ordre 1, de constante de temps T_m et de gain K_m . On note la fonction de transfert du moteur $H_m(p)$.

Question 1 Déterminer la valeur numérique du bloc du réducteur K_r .

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en chaîne directe $FTCD(p)$, la fonction de transfert en boucle ouvert $FTBO(p)$ et la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(p)$ de cet asservissement. Exprimer les résultats en fonction de K_a , K_m , K_r , K_c et T_m .

Question 3 Montrer que la fonction de transfert en boucle fermée de ce système peut s'écrire sous la forme d'un deuxième ordre $\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. Donner l'expression littérale de K , z et ω_0 en fonction de K_a , K_m , K_r , K_c et T_m .

Question 4 La réponse du système à cette entrée en échelon de tension $u_m(t) = 10u(t)$ a été mesurée en sortie du réducteur. On donne ci-contre la courbe obtenue. Déterminer les valeurs numériques expérimentales de K_m et T_m à partir de la courbe.

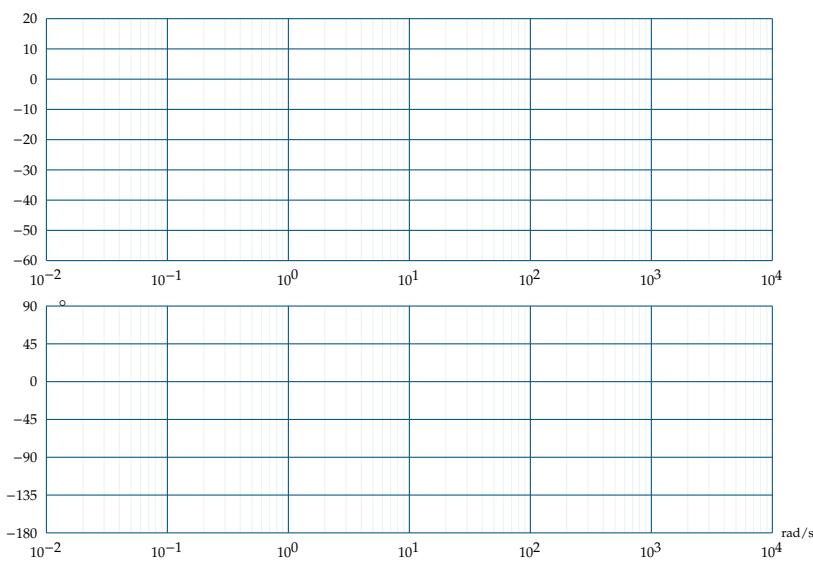
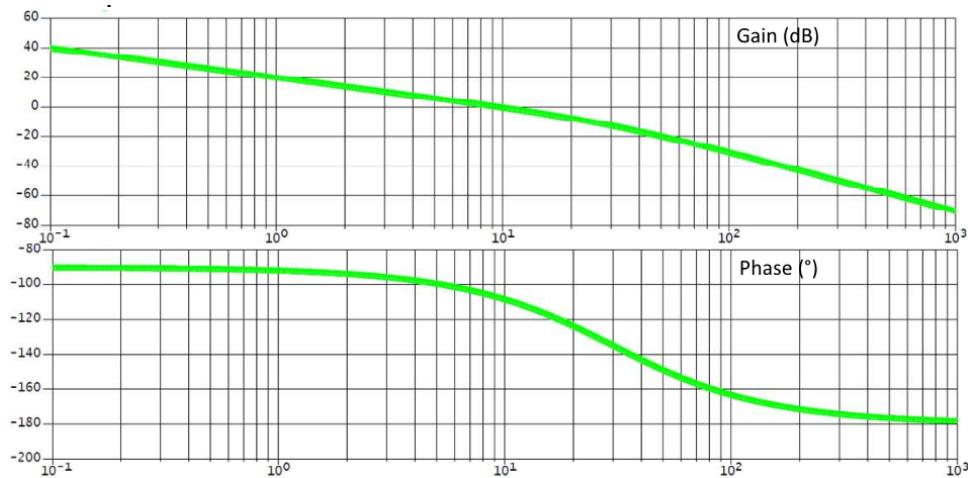


Avec les valeurs numériques des coefficients des différents gains, on peut déterminer la valeur numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte : $FTBO(p) = \frac{10}{p \left(1 + \frac{1}{30}p \right)}$.

Question 5 Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction de transfert en boucle ouverte sur le diagramme vierge en bleu.

Question 6 Calculer le gain et la phase exacte pour $\omega = 30$ rad/s.

Question 7 On donne les tracés réels des courbes de gain et de phase de la FTBO. Déterminer la pulsation qui annule le gain puis déterminer la marge de phase du système $M\varphi$. Conclure quant à la capacité du système à satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges.



Colle 4

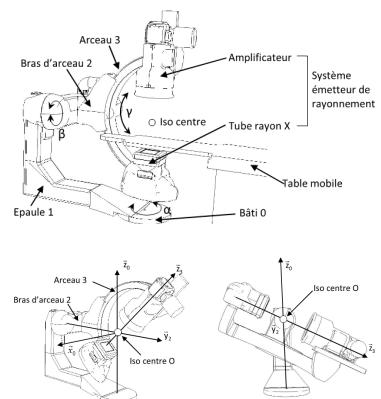
Imagerie médicale – Corrigé

F. Mathurin.

L'étude porte sur un système permettant de réaliser des imageries médicales de vaisseaux sanguins sur un patient. Ce système, conçu par General Electric Medical System, envoie des rayons X dans le corps du patient et mesure leur rayonnement. En fonction des informations reçues, une image de synthèse en 3 dimensions est réalisée, permettant de voir les éventuels problèmes médicaux à venir.

Ce système est constitué des éléments suivants : le bâti 0, une épaule 1 qui peut être mis en mouvement par rapport au bâti 0, un bras d'arceau 2 qui peut s'orienter par rapport à l'épaule 1 et un arceau 3 qui se déplace par rapport à bras d'arceau 2. Le patient est situé sur une table mobile. Le réglage en hauteur du patient sur la table mobile est possible pour son confort mais n'est pas utilisé au cours d'une analyse. Seuls les degrés de liberté α , β et γ sont utilisés pendant l'analyse. L'émetteur de rayons, situé sur l'arceau, focalise la vision interne du patient en un point appelé iso centre.

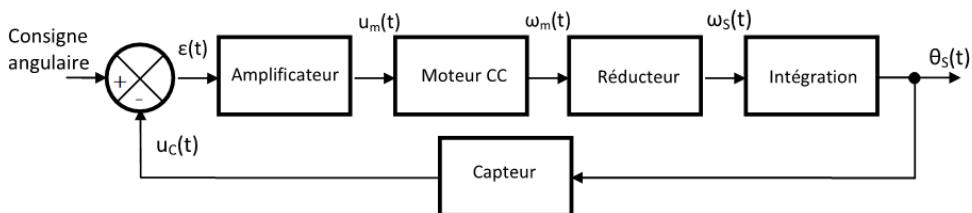
Sur l'image de gauche, l'arceau 3 s'oriente par rapport au bras d'arceau 2 et sur l'image de droite le bras d'arceau 2 se déplace par rapport à l'épaule 1. On donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel du système de positionnement dans la phase de vie correspondant à une mesure d'imagerie :



Exigences	Critère	Niveau
1.1	... Vitesse angulaire par axe élémentaire Stabilité (Marge de phase Mφ) $10^\circ/\text{s} \pm 10\%$ $M\phi > 45^\circ$...

Conformément au cahier des charges, chaque axe élémentaire, piloté séparément, doit avoir une vitesse angulaire de $10^\circ/\text{s}$ en phase de mesure. Technologiquement, la chaîne d'action de chaque axe élémentaire est constituée d'un réducteur entre le moteur et l'effecteur. Ce réducteur diminue la vitesse angulaire d'un facteur 558.

On s'intéresse à l'axe permettant de déplacer le bras d'arceau 2 par rapport à l'épaule 1. La structure de la chaîne fonctionnelle asservie de cet axe est la suivante :



Les différents éléments de cette chaîne fonctionnelle sont les suivants :

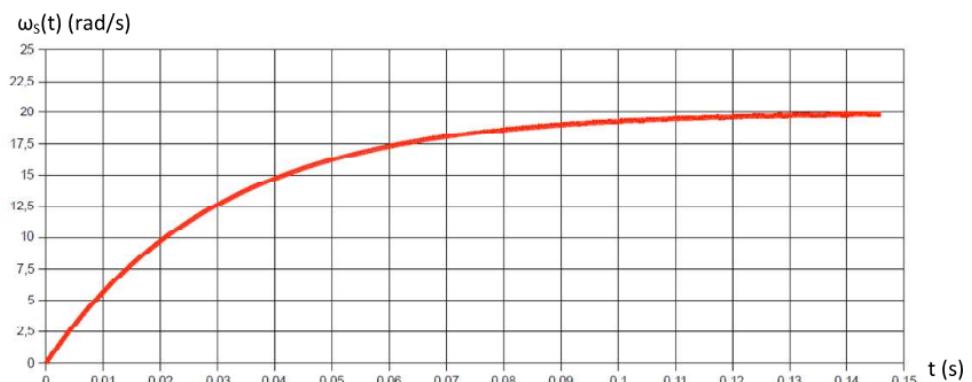
- ▶ l'amplificateur est un gain pur : K_a ;
- ▶ le réducteur est un gain pur K_r (sans dimension) ;
- ▶ le capteur est un gain pur : K_c ;
- ▶ le moteur est un système d'ordre 1, de constante de temps T_m et de gain K_m . On note la fonction de transfert du moteur $H_m(p)$.

Question 1 Déterminer la valeur numérique du bloc du réducteur K_r .

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en chaîne directe $FTCD(p)$, la fonction de transfert en boucle ouvert $FTBO(p)$ et la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(p)$ de cet asservissement. Exprimer les résultats en fonction de K_a , K_m , K_r , K_c et T_m .

Question 3 Montrer que la fonction de transfert en boucle fermée de ce système peut s'écrire sous la forme d'un deuxième ordre $\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. Donner l'expression littérale de K , z et ω_0 en fonction de K_a , K_m , K_r , K_c et T_m .

Question 4 La réponse du système à cette entrée en échelon de tension $u_m(t) = 10u(t)$ a été mesurée en sortie du réducteur. On donne ci-contre la courbe obtenue. Déterminer les valeurs numériques expérimentales de K_m et T_m à partir de la courbe.

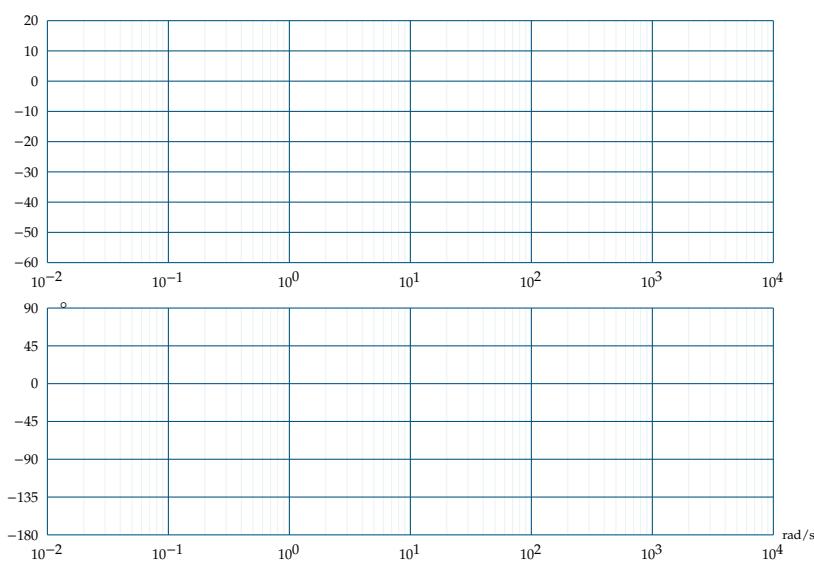
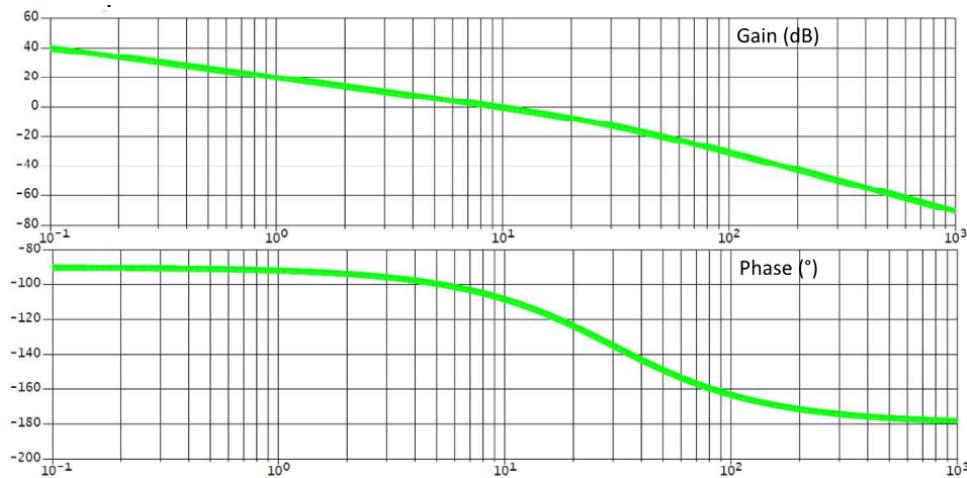


Avec les valeurs numériques des coefficients des différents gains, on peut déterminer la valeur numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte : $FTBO(p) = \frac{10}{p \left(1 + \frac{1}{30}p \right)}$.

Question 5 Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction de transfert en boucle ouverte sur le diagramme vierge en bleu.

Question 6 Calculer le gain et la phase exacte pour $\omega = 30$ rad/s.

Question 7 On donne les tracés réels des courbes de gain et de phase de la FTBO. Déterminer la pulsation qui annule le gain puis déterminer la marge de phase du système $M\varphi$. Conclure quant à la capacité du système à satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges.



TD 2

Radar d'avion – Sujet

F. Mathurin.

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est $\theta_c(t)$, l'angle réel du radar est $\theta_r(t)$. La différence des deux angles est transformée en une tension $u_m(t)$, selon la loi $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur de fonction de transfert $H_m(t)$, une vitesse angulaire $\omega_m(t)$. Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$ ($B < 1$), $\omega_r(t)$ étant la vitesse angulaire du radar.

Question 1 Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$, $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t)$ et $c_m(t) = k_m i(t)$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$ et déterminer les valeurs littérales de K_m et T_m .

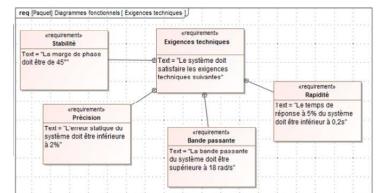
Question 4 En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de $H(p)$ à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :

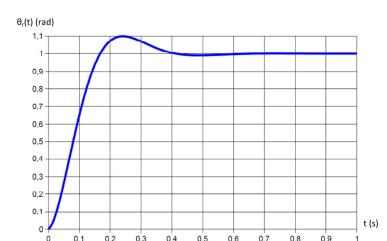
Question 6 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K , z et ω_0 .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite : $K = 1$, $z = 0,5$ et $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$.



Avec :

- ▶ $u(t)$: tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur);
- ▶ $e(t)$: force contre-électromotrice (en V);
- ▶ $i(t)$: intensité (en A);
- ▶ $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s);
- ▶ $C_m(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner);
- ▶ J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m²) ;
- ▶ R : résistance électrique du moteur;
- ▶ k_e : constante de force contre-électromotrice;
- ▶ k_m : constante de couple.



Question 7 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}.$$

Question 8 Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

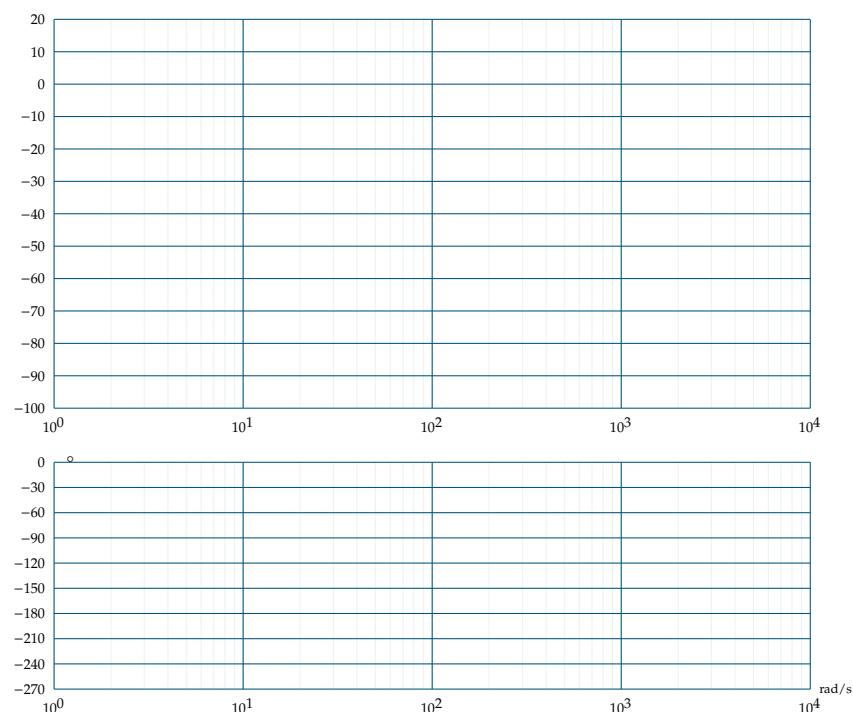
Question 9 Déterminer G et φ pour $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Question 10 Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$.

Pour $\omega < 20 \text{ rad/s}$, on a $H(p) \approx \frac{1}{1 + 0,05p}$.

Question 11 Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à -3 dB . Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

Question 12 Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



TD 2

Radar d'avion – Corrigé

F. Mathurin.

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est $\theta_c(t)$, l'angle réel du radar est $\theta_r(t)$. La différence des deux angles est transformée en une tension $u_m(t)$, selon la loi $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur de fonction de transfert $H_m(t)$, une vitesse angulaire $\omega_m(t)$. Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$ ($B < 1$), $\omega_r(t)$ étant la vitesse angulaire du radar.

Question 1 Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$, $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t)$ et $c_m(t) = k_m i(t)$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$ et déterminer les valeurs littérales de K_m et T_m .

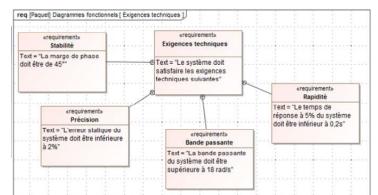
Question 4 En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de $H(p)$ à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :

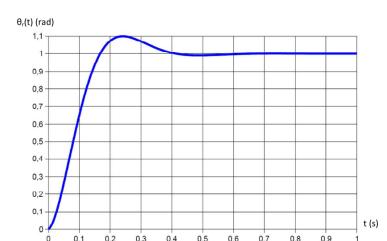
Question 6 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K , z et ω_0 .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite : $K = 1$, $z = 0,5$ et $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$.



Avec :

- ▶ $u(t)$: tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur);
- ▶ $e(t)$: force contre-électromotrice (en V);
- ▶ $i(t)$: intensité (en A);
- ▶ $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s);
- ▶ $C_m(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner);
- ▶ J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m²) ;
- ▶ R : résistance électrique du moteur;
- ▶ k_e : constante de force contre-électromotrice;
- ▶ k_m : constante de couple.



Question 7 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}.$$

Question 8 Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

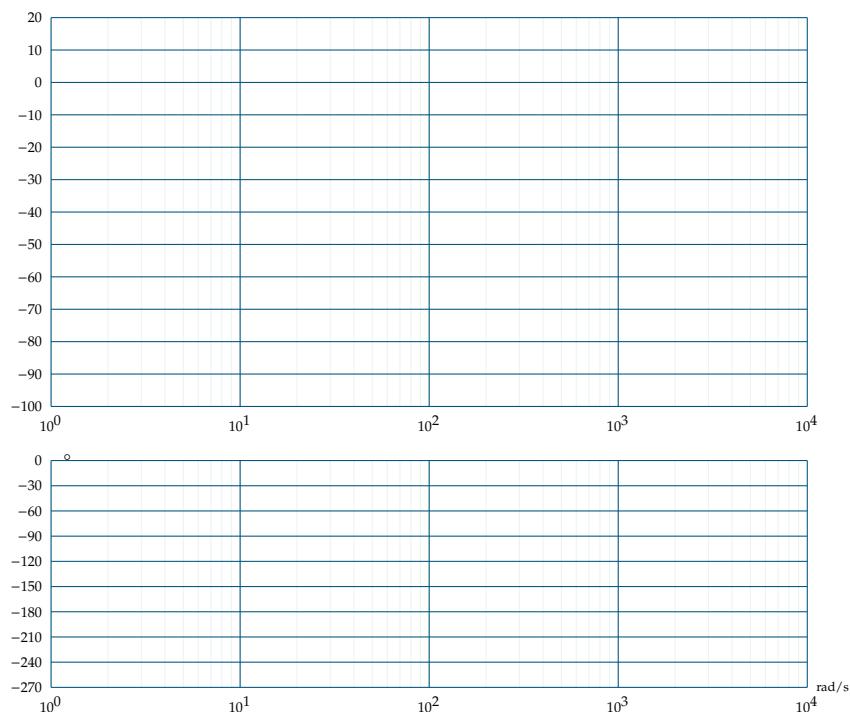
Question 9 Déterminer G et φ pour $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Question 10 Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$.

Pour $\omega < 20 \text{ rad/s}$, on a $H(p) \approx \frac{1}{1 + 0,05p}$.

Question 11 Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à -3 dB . Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

Question 12 Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



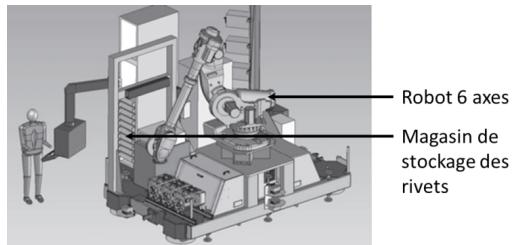
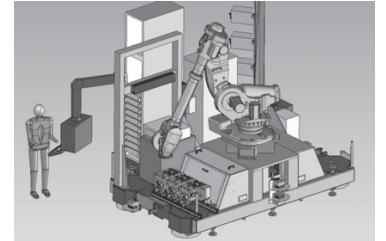
Application 1

Cellule d'assemblage pour avion Falcon Sujet

E3A – PSI 2015.

Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.

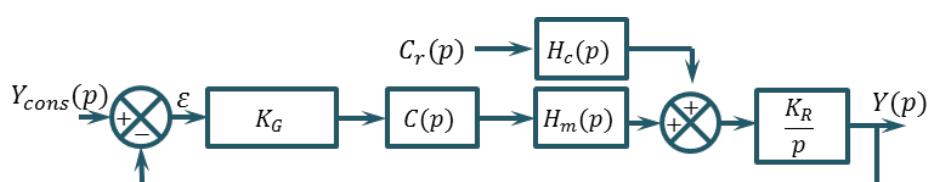


Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant C_r dû à l'action de pesanteur est supposé constant.



$$H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} \quad \text{et}$$

$$\frac{(R + Lp) K_M}{K_C} \\ H_C(p) = \frac{K_C}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}.$$

Etude du modèle sans perturbation

Question 1 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 2 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Etude du modèle avec perturbation

Question 3 Donner l'expression de $\varepsilon(p)$.

Question 4 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 5 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 6 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 7 On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?



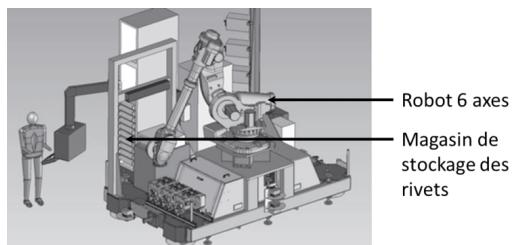
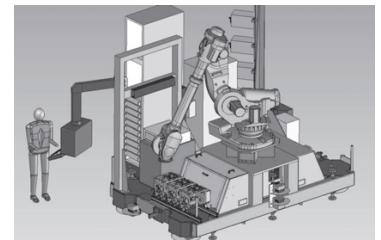
Application 1

Cellule d'assemblage pour avion Falcon Corrigé

E3A – PSI 2015.

Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.



Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

Étude du modèle simplifié

Etude du modèle sans perturbation

Question 1 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 2 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Etude du modèle avec perturbation

Question 3 Donner l'expression de $\varepsilon(p)$.

Correction

On raisonne par superposition :

Si $C_r(p) = 0$:

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{\frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\ &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r} \end{aligned}$$

Correction

Si $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$:

$$\begin{aligned} Y_2(p) &= C_r(p) \frac{\frac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\ &= C_r(p) \frac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \\ &= C_r(p) \frac{(R + Lp) K_M K_r}{K_C (1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M} \end{aligned}$$

On a donc : $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$.

Question 4 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 5 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 6 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 7 On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat?

Correction

TD 3

Fauteuil dynamique de cinéma – Sujet

Concours Centrale-Supélec TSI 2015

C1-01

C2-03

Présentation du système

Ce concept a été inventé au Canada en 2008, et s'est étendu à toute l'Amérique du Nord avant de traverser l'Atlantique pour proposer un cinéma dynamique avec une quantité d'effets spéciaux et spatiaux. Le fauteuil dynamique de cinéma est principalement destiné à l'industrie du divertissement et de la simulation.



Mise en situation

Le siège dynamique est constitué :

- ▶ du dossier qui permet d'agir directement sur la tête du spectateur afin d'amplifier la sensation d'accélération (via l'oreille interne);
- ▶ de l'assise du siège qui permet d'obtenir un mouvement de tangage et un mouvement de roulis du spectateur.

Les trois motorisations (une pour le dossier et deux pour l'assise) sont composées chacune d'un moteur à courant continu à aimants permanents et d'un réducteur de vitesse. Chaque moteur est alimenté par un variateur de vitesse dont la structure de puissance est un hacheur. Un capteur de courant interne au variateur est utilisé par ce dernier pour réaliser un asservissement de courant, donc implicitement de couple. Une génératrice tachymétrique accouplée à l'axe de chaque moteur est utilisée par le variateur correspondant pour réaliser un asservissement de vitesse. Un codeur incrémental accouplé aussi sur l'axe de chaque moteur est utilisé par une carte à base de microcontrôleur pour réaliser un asservissement de position, une sortie analogique de cette carte étant reliée à l'entrée de consigne du variateur de vitesse.

Exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération »

Objectif

Proposer un modèle de comportement des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Exigence : amplifier la sensation d'accélération

- ▶ Précision statique de la boucle d'asservissement de position :

- erreur statique de position < 1%;
 - erreur statique de traînage < 1%;
 - erreur statique d'accélération < 1% .
- Rapidité pour un échelon de consigne d'accélération :
- temps de montée de 0 à 100% de la consigne < 5 ms;
 - dépassement < 20%.

Comportement de l'ensemble variateur et moteur du dossieret

Objectif

- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de courant.
- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de vitesse.
- Analyser la précision de l'asservissement de position.

Modélisation de l'asservissement de vitesse

NE PAS TRAITER LES QUESTIONS 1 à 3.

Remarque

Les 3 premières questions n'ont pas vraiment d'intérêt. Je les ai laissées car elles apparaissaient dans le sujet initial.

L'étude suivante consiste à obtenir un modèle simplifié de la boucle d'asservissement de vitesse (figure suivante) au regard des réglages effectués et de l'influence d'une perturbation de type échelon sur le dossieret. En effet, vu la courte durée des sollicitations, la perturbation sur le dossieret, dont l'origine peut être une action du spectateur sur ses muscles cervicaux, peut être modélisée par un échelon.

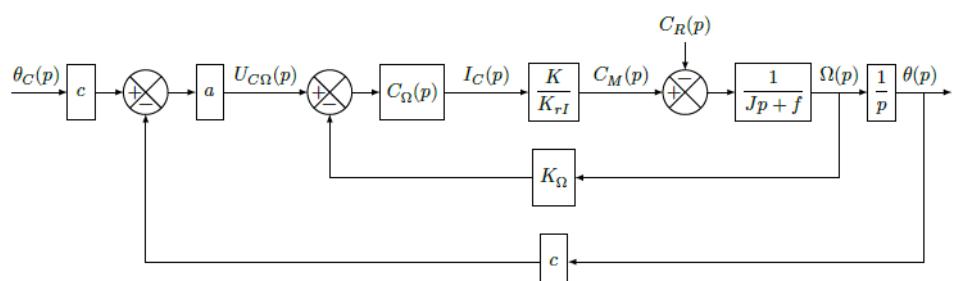


FIGURE 1.3 – Modèle de la boucle d'asservissement de vitesse

On a $C_\Omega(p) = k_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right)$. De plus : $K = 0,115 \text{ N m A}^{-1}$; $R = 1 \Omega$; $L = 1,1 \text{ mH}$; $K_{rI} = 0,5 \text{ V A}^{-1}$; $r = 1/50$; $f = 4,1 \times 10^{-4} \text{ N m s rad}^{-1}$; $J = 0,16 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert de la boucle de vitesse $H_\Omega(p) = \Omega(p)/U_{C\Omega}(p)$, lorsque $C_R(p) = 0$. Le résultat sera mis sous une forme canonique.

Question 2 T_1 étant égal à J/f , montrer alors que la fonction de transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme $\frac{b}{\tau p + 1}$. Calculer les valeurs numériques des termes b et τ .

Question 3 En déduire, à l'aide de la figure précédente, $\theta(p)/C_R(p)$ lorsque $\theta_C(p) = 0$. Calculer ensuite la valeur finale de $\theta(t)$ lorsque $c_R(t)$ est un échelon unitaire. Conclure quant à l'action, en régime permanent, du correcteur proportionnel et intégral sur les effets d'une perturbation $c_R(t)$ de type échelon.

Modélisation de la boucle d'asservissement de position

Après toutes les simplifications précédentes, est obtenu le modèle de la figure suivante où seul le comportement en réponse à la consigne θ_C est abordé.

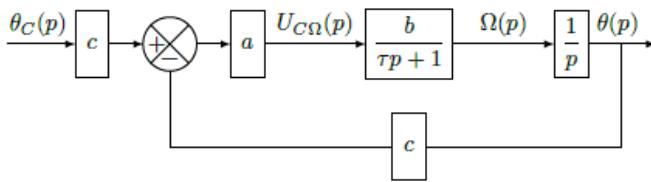


FIGURE 1.4 – Modèle simplifié de la boucle d'asservissement de position

Question 4 Exprimer la fonction de transfert $\theta(p)/\theta_C(p)$. Déterminer ensuite la valeur numérique de a pour avoir un facteur d'amortissement égal à 0,7. Justifier le choix de ce facteur d'amortissement. (Pour ce calcul et les calculs suivants prendre $b = 63 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$, $\tau = 2,2 \text{ ms}$, $c = 40 \text{ rad}^{-1}$.)

Analyse de la précision du système

Un aspect important pour la simulation sensorielle du siège dynamique est la capacité du système à reproduire fidèlement la consigne de position issue du programme de simulation sensorielle du siège dynamique. Dans un premier temps, l'étude se limite à la précision statique en utilisant le modèle défini à la figure précédente. L'erreur représente la différence entre l'entrée $\theta_C(t)$ et la sortie $\theta(t)$ et est définie par la variable $\mu(t) = \theta_C(t) - \theta(t)$.

Question 5 Exprimer dans un premier temps $\mu(p)$ en fonction de $\theta_C(p)$, puis déterminer de façon littérale et numérique l'erreur de position μ_p , l'erreur de trainage μ_v et l'erreur en accélération μ_a . Conclure quant à la précision statique du système suite aux différentes consignes $\theta_C(p)$ de type échelon, rampe et accélération.

Validation et optimisation de la performance simulée en accélération du dossieret

Objectif

Valider la performance simulée en accélération au regard du cahier des charges fonctionnel.

La figure suivante représente la structure d'une correction par anticipation qui permet d'améliorer la précision statique du système

Question 6 Déterminer l'erreur de position μ_p puis l'erreur de traînage μ_v . Conclure sur l'erreur de position au regard du cahier des charges.

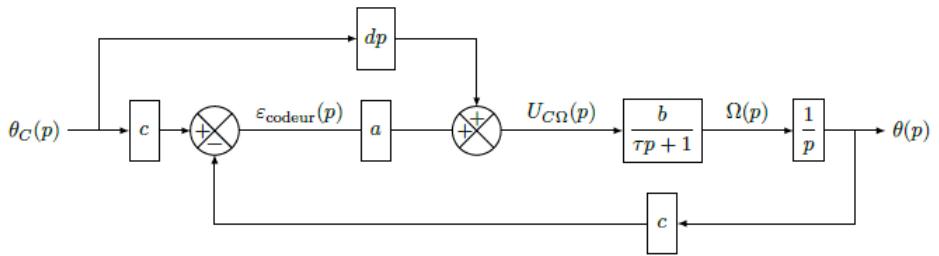


FIGURE 1.5 – Structure avec anticipation

Question 7 D'après l'erreur de traînage μ_v déterminée à la question précédente, calculer la valeur numérique de d qui permet d'annuler cette erreur de traînage. En prenant en compte la valeur numérique de d et de b , déterminer l'expression de l'erreur en accélération μ_a . Calculer ensuite sa valeur numérique et conclure au regard du cahier des charges.

Un aspect important pour la simulation sensorielle du siège dynamique est la capacité du système à reproduire rapidement les consignes d'accélération. À l'aide d'une simulation, la variable accélération $\dot{\theta}_d$ possède les deux comportements donnés figure suivante pour la période transitoire, et ce lorsque la consigne vaut $\theta_{Cd}(t) = \frac{t^2}{2} u(t)$.

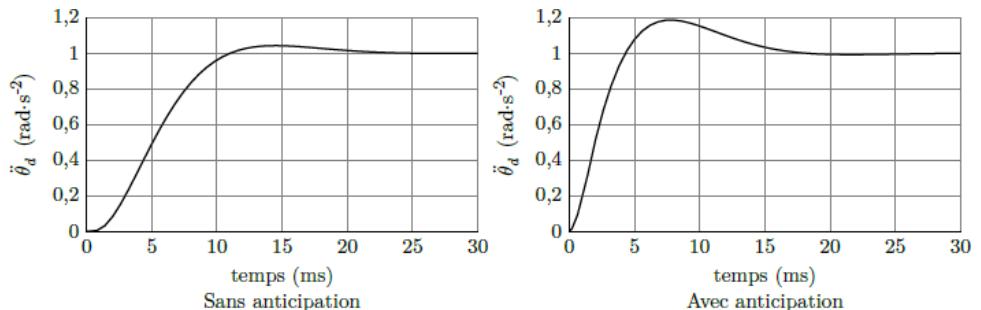


FIGURE 1.6 – Accélération du dossieret avec et sans anticipation

Question 8 Conclure quant au respect du cahier des charges vis-à-vis des accélérations produites par le dossieret du siège dynamique de cinéma.

Exigence fonctionnelle « incliner le spectateur suivant l'axe de tangage et de roulis »

Objectif

Valider le choix de conception pour la réalisation de la commande simultanée des deux moteurs de l'assise du siège.

En mode simultané (figure suivante), les consignes de vitesse de chaque variateur sont issues d'un calculateur numérique : a , d et c sont identiques. En revanche, le réglage du retour vitesse des cartes variateur est effectué à l'aide d'un potentiomètre et celui-ci peut ne pas avoir été réglé avec précision. En imposant le réglage du retour vitesse de la motorisation 1 à 5 V pour 3000 tr min^{-1} et celui de la motorisation 2 à 5,5 V pour 3000 tr min^{-1} ,

les calculs donnent $b_1 = 62,8 \text{ rad.s}^{-1}.\text{V}^{-1}$ et $b_2 = 57,1 \text{ rad.s}^{-1}.\text{V}^{-1}$. Les inerties au niveau de chaque moteur, supérieures à celle au niveau du moteur de dossieret, peuvent fluctuer en fonction de la position du spectateur.

En tenant compte d'une variation d'inertie de 10%, les calculs donnent $\tau_1 = 1/366 \text{ s}$ et $\tau_2 = 1/447 \text{ s}$. On prendra $a = 0,09 \text{ V}$, $c = 40 \text{ rad}^{-1}$ et $d = 0,016 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$.

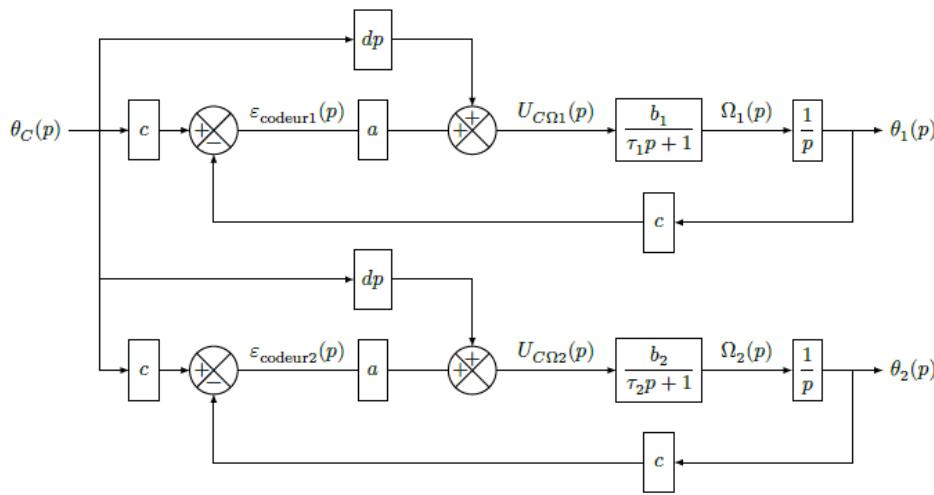


FIGURE 1.7 – Commande simultanée des deux moteurs

Question 9 En réutilisant éventuellement les calculs effectués aux questions 6 et 7 et en tenant compte des différences de réglage de retour vitesse et des différences d'inertie entre les deux motorisations, exprimer la valeur finale de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ lorsque la consigne $\theta_C(t)$ est respectivement égale à $u(t)$, $t \cdot u(t)$ puis $\frac{t^2}{2}u(t)$, $u(t)$ étant la fonction échelon unité.

La figure 1.8 représente le résultat d'une simulation de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ pour une consigne $\theta_C(t) = \frac{t^2}{2}U(t)$

Question 10 Conclure quant à l'erreur en accélération lors de la commande simultanée.

Éléments de correction

1. $H_\Omega(p) = \frac{\frac{1}{K_\Omega}(1+T_1p)}{\frac{T_1K_{rI}J}{K_\Omega k_1 K}p^2 + \left(\frac{fK_{rI}}{K_\Omega k_1 K} + 1\right)T_1p + 1}$.
2. $b = \frac{1}{K_\Omega} = 20\pi = 62,8 \text{ rad s}^{-1}\text{V}^{-1}$ et $\tau = \frac{K_{rI}J}{k_1 K K_\Omega} = 2,17 \times 10^{-3} \text{ s}$.
3. $-\frac{T_1 K_{rI} p}{k_1 (T_1 p + 1) K} \cdot \frac{b}{p(1 + \tau p) + abc}$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 1$.
4. $a = \frac{1}{4bc\tau\xi^2} = 0,092$.
5. $\mu(p) = \frac{p(1 + \tau p)}{p(1 + \tau p) + abc} \theta_c(p)$, $\mu_p = 0$, $\mu_v = \frac{1}{abc}$ et $\mu_a = \infty$.
6. $\mu_p = 0$ et $\mu_v = \frac{1 - bd}{ab}$.
7. ...
8. ...
9. ...
10. ...

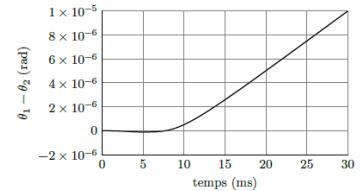
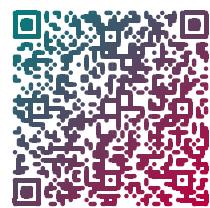


FIGURE 1.8 – $\theta_1 - \theta_2$ en fonction du temps



TD 3

Fauteuil dynamique de cinéma – Corrigé

Concours Centrale-Supélec TSI 2015

C1-01

C2-03

Présentation du système

Mise en situation

Exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération »

Comportement de l'ensemble variateur et moteur du dossieret



Objectif

- ▶ Établir un modèle simplifié de l'asservissement de courant.
- ▶ Établir un modèle simplifié de l'asservissement de vitesse.
- ▶ Analyser la précision de l'asservissement de position.

Modélisation de l'asservissement de vitesse

NE PAS TRAITER LES QUESTIONS 1 à 3.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert de la boucle de vitesse $H_\Omega(p) = \Omega(p)/U_{C\Omega}(p)$, lorsque $C_R(p) = 0$. Le résultat sera mis sous une forme canonique.

Correction

$$\begin{aligned} H_\Omega(p) &= \frac{k_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right) \frac{K}{K_{rI}} \frac{1}{Jp + f}}{1 + K_\Omega k_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right) \frac{K}{K_{rI}} \frac{1}{Jp + f}} = \frac{k_1 (1 + T_1 p) K}{T_1 p K_{rI} (Jp + f) + K_\Omega k_1 (1 + T_1 p) K} \\ &= \frac{\frac{Kk_1}{K_\Omega k_1 K} (1 + T_1 p)}{\frac{T_1 K_{rI} J}{K_\Omega k_1 K} p^2 + \left(\frac{f T_1 K_{rI}}{K_\Omega k_1 K} + \frac{K_\Omega k_1 T_1 K}{K_\Omega k_1 K}\right) p + 1} H_\Omega(p) = \frac{\frac{1}{K_\Omega} (1 + T_1 p)}{\frac{T_1 K_{rI} J}{K_\Omega k_1 K} p^2 + \left(\frac{f K_{rI}}{K_\Omega k_1 K} + 1\right) T_1 p + 1} \end{aligned}$$

Question 2 T_1 étant égal à J/f , montrer alors que la fonction de transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme $\frac{b}{\tau p + 1}$. Calculer les valeurs numériques des termes b et τ .

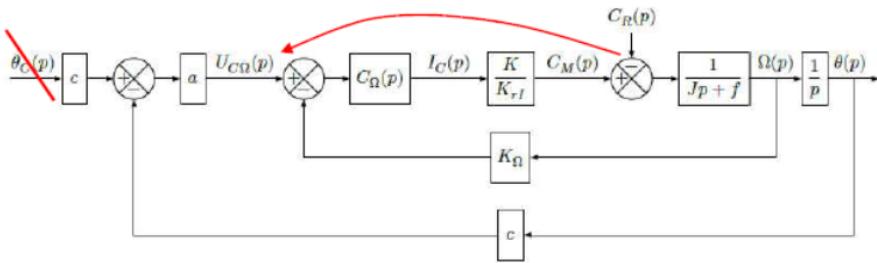
Correction

$$\begin{aligned}
 \text{On a } H_\Omega(p) &= \frac{\frac{1}{K_\Omega} \left(1 + \frac{J}{f} p\right)}{\frac{J}{f} K_{rl} J + \frac{K_\Omega k_1 K}{K_\Omega k_1 K} p^2 + \left(\frac{f K_{rl}}{K_\Omega k_1 K} + 1\right) \frac{J}{f} p + 1} = \frac{(f + Jp)}{\frac{K_{rl} J^2}{k_1 K} p^2 + \left(\frac{f K_{rl}}{k_1 K} + K_\Omega\right) Jp + f K_\Omega} \\
 &= \frac{(f + Jp)}{K_{rl} J^2 p^2 + (f K_{rl} + K_\Omega k_1 K) Jp + f K_\Omega k_1 K} \\
 \text{On a : } \Delta &= (f K_{rl} + K_\Omega k_1 K)^2 J^2 - 4f K_\Omega k_1 K K_{rl} J^2 = (f^2 K_{rl}^2 + K_\Omega^2 k_1^2 K^2 + 2f K_{rl} K_\Omega k_1 K) J^2 - \\
 &\quad 4f K_\Omega k_1 K K_{rl} J^2 \\
 &= (f^2 K_{rl}^2 + K_\Omega^2 k_1^2 K^2 - 2f K_{rl} K_\Omega k_1 K) J^2 = (f K_{rl} - K_\Omega k_1 K)^2 J^2 \\
 \text{On a donc } p_{12} &= \frac{-(f K_{rl} + K_\Omega k_1 K) J \pm (f K_{rl} - K_\Omega k_1 K) J}{2K_{rl} J^2}, \\
 p_1 &= \frac{-f J K_{rl} - K_\Omega k_1 K J + f J K_{rl} - K_\Omega k_1 K J}{2K_{rl} J^2} = -\frac{K_\Omega k_1 K}{K_{rl} J}, \quad p_2 = \\
 &\quad \frac{-f J K_{rl} - K_\Omega k_1 K J - f J K_{rl} + K_\Omega k_1 K J}{2K_{rl} J^2} = -\frac{f}{J}. \\
 \text{On a donc } H_\Omega(p) &= \frac{J \left(\frac{f}{J} + p\right) k_1 K}{\left(p + \frac{f}{J}\right) \left(p + \frac{K_\Omega k_1 K}{K_{rl} J}\right)} = \frac{J k_1 K}{p + \frac{K_\Omega k_1 K}{K_{rl} J}} = \frac{\frac{K_{rl} J^2}{K_\Omega}}{\frac{K_{rl} J}{K_\Omega k_1 K} p + 1} \\
 \text{On a donc } b &= \frac{K_{rl} J^2}{K_\Omega} \text{ et } \tau = \frac{K_{rl} J}{K_\Omega k_1 K}. \\
 \text{Autre solution : } b &= \frac{1}{K_\Omega} = 20\pi = 62,8 \text{ rad s}^{-1} \text{V}^{-1} \text{ et } \tau = \frac{K_{rl} J}{k_1 K K_\Omega} = 2,17 \times 10^{-3} \text{ s}.
 \end{aligned}$$

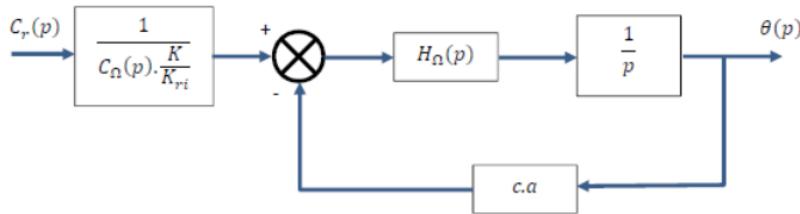
Question 3 En déduire, à l'aide de la figure précédente, $\theta(p)/C_R(p)$ lorsque $\theta_C(p) = 0$. Calculer ensuite la valeur finale de $\theta(t)$ lorsque $c_R(t)$ est un échelon unitaire. Conclure quant à l'action, en régime permanent, du correcteur proportionnel et intégral sur les effets d'une perturbation $c_R(t)$ de type échelon.

Correction

On effectue une transformation de schéma en déplaçant le comparateur de $C_r(p)$



D'où la nouvelle structure de schéma bloc :



$$\frac{\theta(p)}{C_r(p)} = \frac{1}{C_Ω(p) \cdot \frac{K}{K_{rl}}} \cdot \frac{H_Ω(p) \cdot \frac{1}{p}}{1 + c \cdot a \cdot H_Ω(p) \cdot \frac{1}{p}} = \frac{K_{rl} \cdot T_1 \cdot p}{K \cdot k_1 \cdot (1 + T_1 \cdot p)} \cdot \frac{\frac{b}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p}}{1 + \frac{b}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p}}$$

L'application du théorème de la valeur finale pour une entrée de type échelon donne :

$$\theta(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \theta(p) = 0$$

Ce résultat était prévisible car le correcteur PI est placé avant la perturbation.

$$\begin{aligned} \frac{\theta(p)}{C_r(p)} &= \frac{1}{C_Ω(p) \frac{K}{K_{rl}}} \frac{\frac{b}{1 + \tau p} \frac{1}{p}}{1 + \frac{abc}{1 + \tau p} \frac{1}{p}} = \frac{1}{k_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right) \frac{K}{K_{rl}}} \frac{\frac{b}{1 + \tau p} \frac{1}{p}}{1 + \frac{abc}{1 + \tau p} \frac{1}{p}} \\ &= \frac{T_1 K_{rl} p}{k_1 (T_1 p + 1) K} \cdot \frac{b}{p (1 + \tau p) + abc} \\ \text{et } \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) &= 1. \end{aligned}$$

Modélisation de la boucle d'asservissement de position

Question 4 Exprimer la fonction de transfert $\theta(p)/\theta_C(p)$. Déterminer ensuite la valeur numérique de a pour avoir un facteur d'amortissement égal à 0,7. Justifier le choix de ce facteur d'amortissement. (Pour ce calcul et les calculs suivants prendre $b = 63 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$, $\tau = 2,2 \text{ ms}$, $c = 40 \text{ rad}^{-1}$.)

Correction

$$\text{On a } \frac{\theta(p)}{\theta_C(p)} = c \frac{\frac{ab}{p(\tau p + 1)}}{1 + \frac{abc}{p(\tau p + 1)}} = \frac{abc}{p(\tau p + 1) + abc} = \frac{1}{\frac{\tau}{abc} p^2 + \frac{p}{abc} + 1}.$$

$$\text{On a } \omega_0 = \sqrt{\frac{abc}{\tau}} \text{ et } \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{abc} \text{ et } \xi = \frac{1}{2\sqrt{abc\tau}}.$$

En conséquence, $a = \frac{1}{4bc\tau\xi^2} = 0,092$.
(On prend $\xi = 0,7$ car cela correspond au temps de réponse le plus rapide pour un second ordre.)

Analyse de la précision du système

Question 5 Exprimer dans un premier temps $\mu(p)$ en fonction de $\theta_C(p)$, puis déterminer de façon littérale et numérique l'erreur de position μ_p , l'erreur de traînage μ_v et l'erreur en accélération μ_a . Conclure quant à la précision statique du système suite aux différentes consignes $\theta_C(p)$ de type échelon, rampe et accélération.

Correction

$$\text{On a } \mu(p) = \frac{\theta_c(p)}{1 + \frac{abc}{p(1+\tau p)}} = \frac{p(1+\tau p)}{p(1+\tau p) + abc} \theta_c(p) = \frac{p(1+\tau p)}{p(1+\tau p) + abc} \theta_c(p).$$

La FTBO est de classe 1 et de gain $K_{BO} = abc$ on a donc :

- ▶ pour une entrée échelon, $\mu_p = 0$;
- ▶ pour une entrée rampe, $\mu_v = \frac{1}{abc}$;
- ▶ pour une entrée accélération, $\mu_a = \infty$.

Validation et optimisation de la performance simulée en accélération du dossier

Objectif

Valider la performance simulée en accélération au regard du cahier des charges fonctionnel.

Question 6 Déterminer l'erreur de position μ_p puis l'erreur de traînage μ_v . Conclure sur l'erreur de position au regard du cahier des charges.

Correction

$$\begin{aligned} \text{On a } \varepsilon_{\text{codeur}}(p) &= c\theta_c(p) - c\theta(p) \\ &= c\theta_c(p) - \frac{bc}{p(\tau p + 1)} U_{CQ}(p) = c\theta_c(p) - \frac{bc}{p(\tau p + 1)} (\theta_C(p)dp + a\varepsilon_{\text{codeur}}(p)) \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p) \left(1 + \frac{abc}{p(\tau p + 1)}\right) &= \theta_C(p) \left(c - \frac{bcd}{\tau p + 1}\right) \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p) \left(1 + \frac{abc}{p(\tau p + 1)}\right) &= \theta_C(p)c \frac{\tau p + 1 - bd}{\tau p + 1} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p) &= \theta_C(p)cp \frac{\tau p + 1 - bd}{p(\tau p + 1) + abc} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \mu_p &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} cp \frac{\tau p + 1 - bd}{p(\tau p + 1) + abc} = \lim_{p \rightarrow 0} cp \frac{\tau p + 1 - bd}{p(\tau p + 1) + abc} = 0; \\ \blacktriangleright \mu_v &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2} cp \frac{\tau p + 1 - bd}{p(\tau p + 1) + abc} = \frac{1 - bd}{ab}. \end{aligned}$$

Question 7 D'après l'erreur de traînage μ_v déterminée à la question précédente, calculer la valeur numérique de d qui permet d'annuler cette erreur de traînage. En prenant en compte la valeur numérique de d et de b , déterminer l'expression de l'erreur en accélération μ_a . Calculer ensuite sa valeur numérique et conclure au regard du cahier des charges.

Correction

On a $\mu_v = \frac{1 - bd}{abc}$. En conséquences, $\mu_v = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{1 - bd}{ab} \Leftrightarrow d = \frac{1}{b}$.
 $\mu_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^3} cp \frac{\tau p + 1 - bd}{p(\tau p + 1) + abc} = \frac{\tau}{ab}$.

Question 8 Conclure quant au respect du cahier des charges vis-à-vis des accélérations produites par le dossier et du siège dynamique de cinéma.

Correction

Exigence fonctionnelle « incliner le spectateur suivant l'axe de tangage et de roulis »

Objectif

Valider le choix de conception pour la réalisation de la commande simultanée des deux moteurs de l'assise du siège.

Question 9 En réutilisant éventuellement les calculs effectués aux questions 6 et 7 et en tenant compte des différences de réglage de retour vitesse et des différences d'inertie entre les deux motorisations, exprimer la valeur finale de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ lorsque la consigne $\theta_C(t)$ est respectivement égale à $u(t)$, $t \cdot u(t)$ puis $\frac{t^2}{2}u(t)$, $u(t)$ étant la fonction échelon unité.

Correction

En raisonnant graphiquement, on a $\theta_1(p) - \theta_2(p) = \varepsilon_{\text{codeur } 1}(p) - \varepsilon_{\text{codeur } 2}(p)$; donc :

- $\mu_p = \mu_{p1} - \mu_{p2} = 0$;
- $\mu_v = \mu_{v1} - \mu_{v2} = \frac{1 - b_1d}{ab_1} - \frac{1 - b_2d}{ab_2}$;
- $\mu_a = \mu_{a1} - \mu_{a2} = \infty$.

La figure 1.8 représente le résultat d'une simulation de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ pour une consigne $\theta_C(t) = \frac{t^2}{2}U(t)$

Question 10 Conclure quant à l'erreur en accélération lors de la commande simultanée.

Correction

TD 4

Contrôle d'une machine de forage – Sujet

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

On travaille avec le schéma-bloc simplifié de la figure 1.9 où K_0 est un gain d'adaptation fixe.

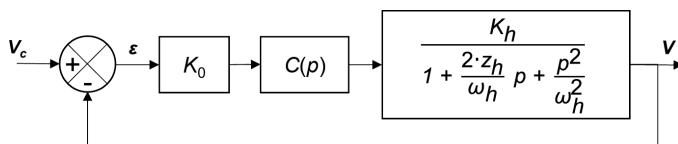


FIGURE 1.9 – Schéma-bloc de l'asservissement en vitesse simplifié

On prend dans un premier temps un correcteur $C(p)$ proportionnel : $C(p) = K_p$.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{BO}(p) = \frac{V(p)}{\varepsilon(p)}$.

Question 2 Avec un correcteur proportionnel, peut-on satisfaire l'exigence de précision de vitesse indiquée à l'exigence 2.1.1.? Justifier.

On utilise dans un second temps un correcteur proportionnel intégral : $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$.

Question 3 L'exigence de précision sur la vitesse est-elle satisfaite? Justifier.

Ce correcteur est initialement réglé avec les valeurs suivantes : $K_p = 1$ et $T_i = 10$ s.

Question 4 Tracer les diagrammes de Bode asymptotique et réel de ce correcteur. Détailler les constructions.

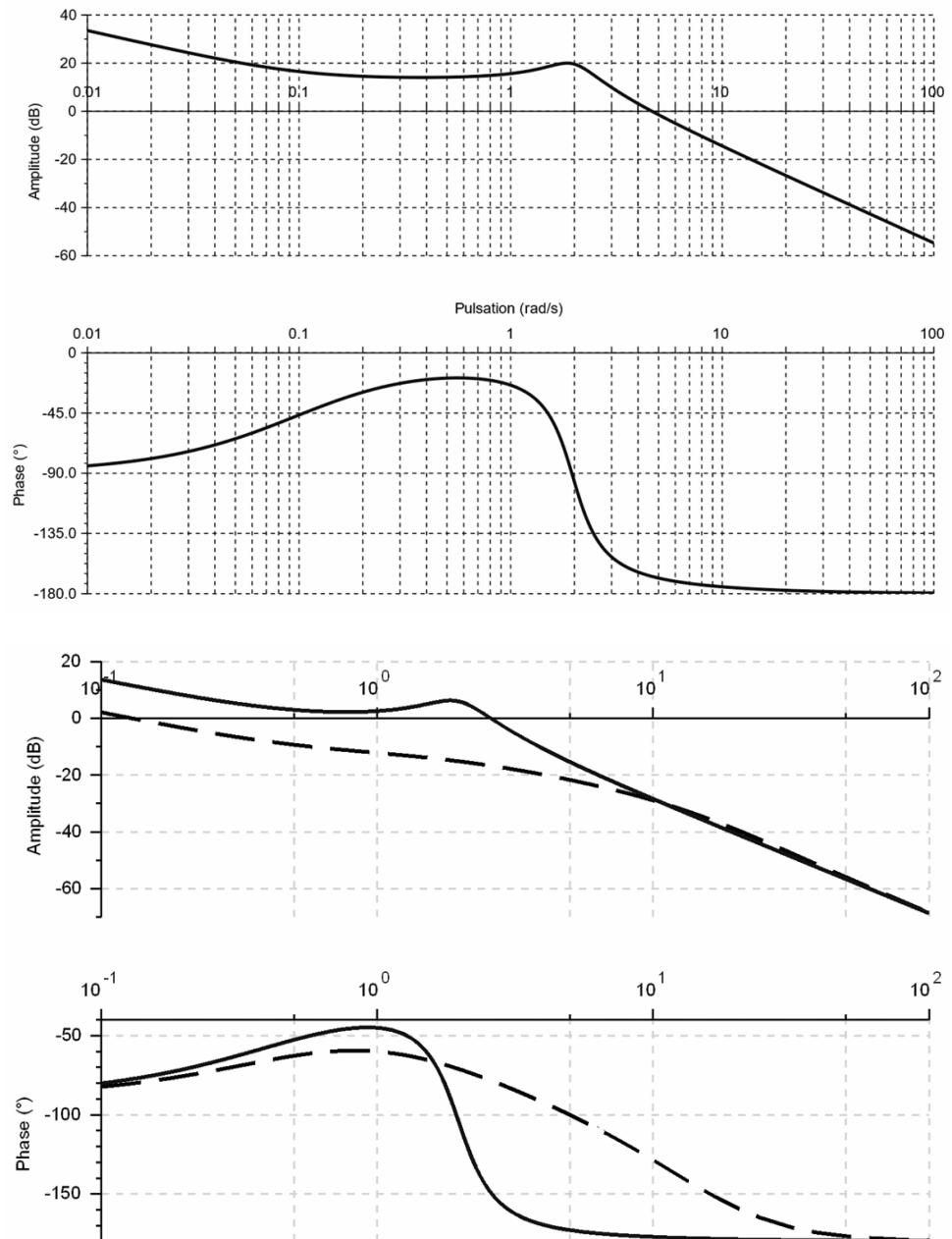
Pour le réglage de la question précédente, on donne le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ainsi corrigée sur le DR3.

Question 5 Affiner le réglage du correcteur (sans modifier la valeur de T_i) en proposant une valeur de K_p permettant de garantir la marge de phase spécifiée dans l'exigence 2.1.1.

Enfin, on souhaite valider ou invalider l'hypothèse faite en début de cette sous-partie concernant la non-influence de l'amortisseur sur les performances d'asservissement en vitesse d'avance de la table de forage. Les diagrammes de Bode de la figure suivante, illustrent la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée sans (en train plein) et avec amortisseur (en pointillés).

« requirement » Performances de l'axe

Id = '2.1.1'
 Text = 'La vitesse de l'axe d'avance doit respecter les performances suivantes :
 - précision : erreur statique nulle
 - stabilité : marges de phase de 30° et de gain de 40dB'



Question 6 Sur quelle(s) performance(s) la présence de l'amortisseur peut-elle influer ? Justifier que le correcteur choisi permet de répondre aux exigences 2.1.1 en présence de l'amortisseur.

TD 4

Contrôle d'une machine de forage – Corrigé

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{BO}(p) = \frac{V(p)}{\varepsilon(p)}$.

Correction

$$G_{BO}(p) = K_0 C(p) \frac{K_h}{1 + \frac{2z_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2}}$$

Question 2 Avec un correcteur proportionnel, peut-on satisfaire l'exigence de précision de vitesse indiquée à l'exigence 2.1.1.? Justifier.

Correction

Pour un erreur statique nulle, il faut obligatoirement un intégrateur dans la boucle ouverte, ce qui n'est pas le cas.

On utilise dans un second temps un correcteur proportionnel intégral : $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$.

Question 3 L'exigence de précision sur la vitesse est-elle satisfaite? Justifier.

Correction

$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_p \frac{T_i p + 1}{T_i p}$. La FTBO est maintenant de classe 1. L'erreur statique est donc nulle.

Ce correcteur est initialement réglé avec les valeurs suivantes : $K_p = 1$ et $T_i = 10$ s.

Question 4 Tracer les diagrammes de Bode asymptotique et réel de ce correcteur. Détailier les constructions.

Correction

On a $\frac{K_p}{T_i} = 0,1$

- Quand ω tend vers 0, le gain a une pente de -20 dB/decade et la phase tend vers -90° .

« requirement » Performances de l'axe

Id = '2.1.1'
Text = 'La vitesse de l'axe d'avance doit respecter les performances suivantes :
- précision : erreur statique nulle
- stabilité : marges de phase de 30° et de gain de 40 dB'

- Quand ω tend vers $+\infty$, le gain a une pente de 0 dB/decade et tend vers $20 \log K_p = 0$ et la phase tend vers 0° .
- Le changement de pente se passe à $1/10$ rad/s.



Question 5 Affiner le réglage du correcteur (sans modifier la valeur de T_i) en proposant une valeur de K_p permettant de garantir la marge de phase spécifiée dans l'exigence 2.1.1.

Correction

Pour avoir une marge de phase de 30° , il faut que le gain soit nul quand la phase est de -150° . Dans l'état actuel le gain est de 10 dB. Il faut donc $20 \log K_p = -10$ soit $K_p = 0,31$.

Question 6 Sur quelle(s) performance(s) la présence de l'amortisseur peut-elle influer ? Justifier que le correcteur choisi permet de répondre aux exigences 2.1.1 en présence de l'amortisseur.

Correction

L'amortisseur améliore la stabilité car la marge de phase est plus grande. En revanche, la bande passante à 0 dB étant plus petite, le système est donc moins rapide.