

TD 1

Avance de Phase – Train d'atterrissement d'hélicoptère ★ – Sujet

Banque PT – SIA 2014.

Mise en situation

Lors d'atterrissages d'hélicoptères à grande vitesse, les oscillations induites par l'impact au sol du train d'atterrissement principal génèrent des contraintes mécaniques importantes à la liaison du pylône de queue avec la cabine. Les oscillations du pylône de queue de l'appareil ne sont pas négligeables. Lors de ces atterrissages, les vitesses verticales minimales sont de l'ordre de 2 m s^{-1} mais peuvent atteindre des valeurs plus importantes lors d'appontage sur un bateau à cause des mouvements du bateau dus à la houle. La résistance aux crashs correspond à la possibilité de garder opérationnel un appareil qui aurait atterri avec une vitesse d'impact pouvant atteindre 4 m s^{-1} .

Objectif

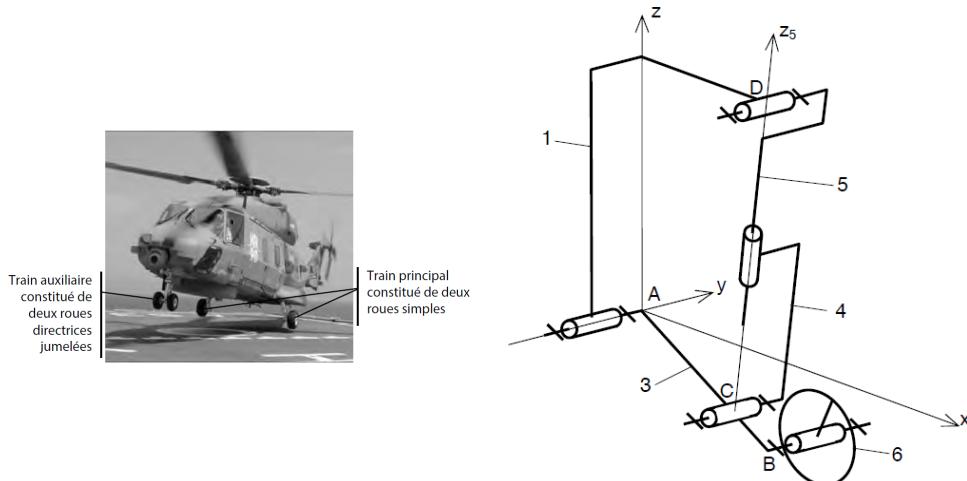
Pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} l'accélération de la queue doit rester inférieure à 3 rad s^{-2} .

C1-02

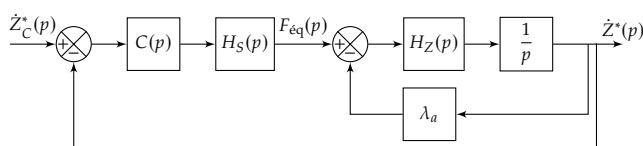
C2-04



On donne une modélisation cinématique du train principal.



La vitesse d'impact lors de l'atterrissement de l'hélicoptère correspond alors à la vitesse de la tige 5 de l'amortisseur par rapport au cylindre 4. Cette vitesse est notée Z^* . On se propose d'étudier la stabilité vis-à-vis de la seule consigne $\dot{Z}_c^*(p)$. On adoptera pour le réglage de la correction le schéma suivant.



On note dans ce schéma :

- $\dot{Z}^*(p)$ la transformée de $\dot{z}^*(t) = \dot{z}(t) + V_0$ avec V_0 la vitesse d'impact et $\dot{z}(t)$ la vitesse absolue de la cabine par rapport au sol;

- ▶ $F_{\text{éq}}(p)$ l'effort équivalent ramené au déplacement de la cabine et fourni par la partie active de l'amortisseur;
- ▶ λ_a le coefficient d'amortissement passif équivalent ramené au déplacement de la cabine;
- ▶ $H_S(p) = \frac{K_S}{1 + T_S p}$ la fonction de transfert de la partie active de l'amortisseur. On prendra : $K_S = 12 \times 10^4 \text{ N A}^{-1}$ et $T_S = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$;
- ▶ $H_Z(p) = \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}$ la fonction de transfert traduisant le comportement dynamique du train.
- ▶ $C(p)$ la fonction de transfert du correcteur dont le réglage fait l'objet de cette partie.

Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

Objectif

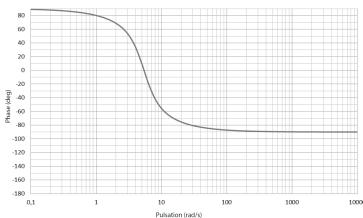
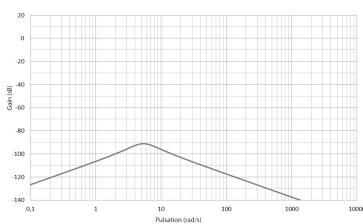
Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

Question 1 Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert $H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{\text{éq}}(p)}$.

Question 2 Déterminer littéralement la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée $H_{\text{BONC}}(p)$.

On donne le diagramme de Bode de $H_F(p)$.

Question 3 Justifier la forme de ce diagramme en traçant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de K_z et ω_z . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction $H_{\text{BONC}}(p)$. On prendra pour cela $20 \log K_S \approx 100 \text{ dB}$.



Choix et réglage de la correction

Objectif

Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin de satisfaire les exigences, une étude complémentaire non abordée dans ce sujet montre que la boucle d'asservissement doit posséder les performances suivantes :

- ▶ erreur statique nulle;
- ▶ pulsation de coupure à 0 dB et $\omega_{0 \text{ dB}} = 6 \text{ rad s}^{-1}$;
- ▶ marge de phase $M\varphi = 45^\circ$;
- ▶ marge de gain $MG > 6 \text{ dB}$.

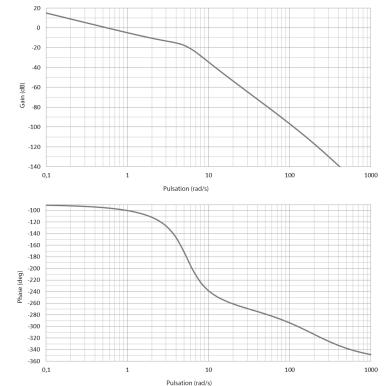
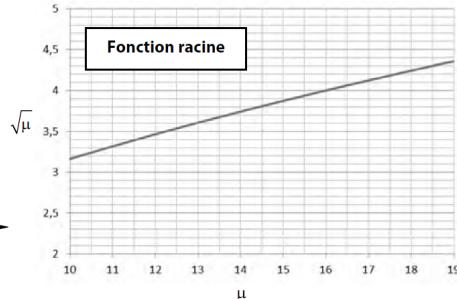
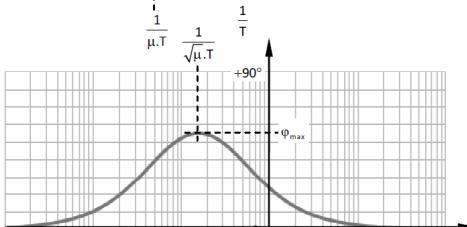
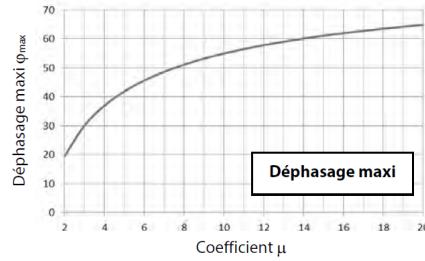
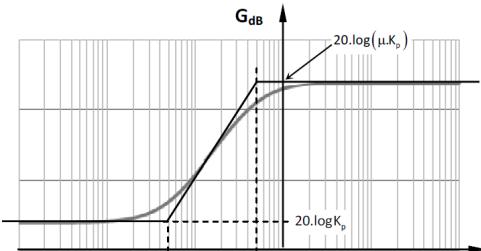
Question 4 Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

On choisit dans un premier temps un correcteur de la forme $C(p) = \frac{K_p}{p^2}$. On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système ainsi corrigé pour $K_p = 1$.

Question 5 Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de K_p garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

On choisit finalement un correcteur de la forme $C(p) = \frac{K_p}{p^2} \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$ avec $\mu > 1$. Les caractéristiques du terme en $K_p \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$ ainsi que des abaques de calcul sont données ci-dessous.

Caractéristiques du terme $K_p \cdot \left(\frac{1 + \mu T p}{1 + T p} \right)$



Question 6 Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

Question 7 Quelle valeur doit-on donner à μ pour garantir le critère de marge de phase ?

Question 8 En déduire les valeurs de T et de K_p permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

Validation des performances

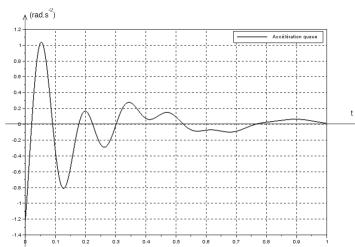
Objectif

Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

On donne le résultat d'une simulation du système complet piloté à l'aide du correcteur précédemment dimensionné pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} .



Question 9 En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.



TD 1

Avance de Phase – Train d'atterrissage d'hélicoptère ★ – Corrigé

Banque PT – SIA 2014.

Mise en situation

Objectif

Pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} l'accélération de la queue doit rester inférieure à 3 rad s^{-2} .

C1-02

C2-04

Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée



Objectif

Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

Question 1 Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert

$$H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{\text{eq}}(p)}.$$

Correction

$$\begin{aligned} H_F(p) &= \frac{H_Z(p) \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a H_Z(p) \frac{1}{p}} = \frac{\frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}} = \frac{K_Z p^2}{p \left(1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2} \right) + \lambda_a K_Z p^2} \\ &= \frac{K_Z p}{1 + \left(\frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}. \end{aligned}$$

Question 2 Déterminer littéralement la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée $H_{\text{BONC}}(p)$.

Correction

$$H_{\text{BONC}}(p) = \frac{K_Z p}{1 + \left(\frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \cdot \frac{K_S}{1 + T_S p}.$$

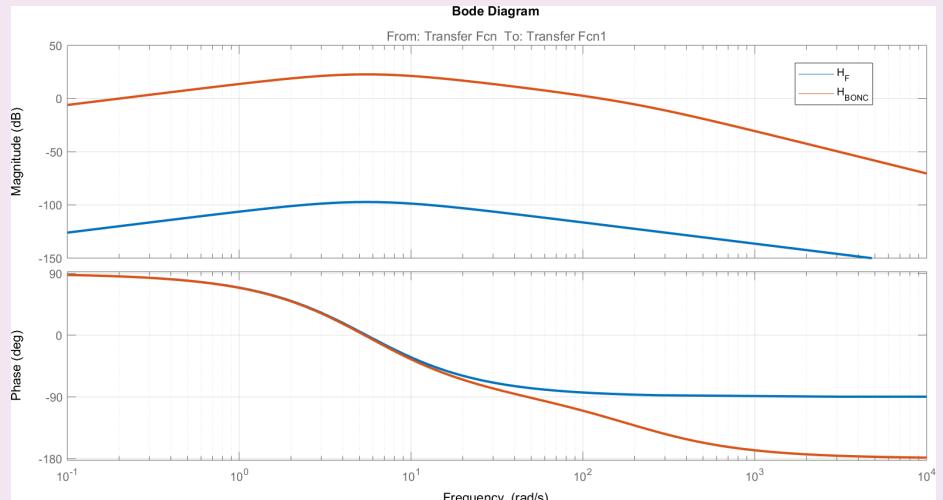
On donne le diagramme de Bode de $H_F(p)$.

Question 3 Justifier la forme de ce diagramme en traçant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de K_z et ω_z . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction $H_{\text{BONC}}(p)$. On prendra pour cela $20 \log K_S \simeq 100 \text{ dB}$.

Correction

H_F est un second ordre dérivé de coefficient d'amortissement ξ_F et de pulsation propre ω_Z . Ne pouvant pas calculer ξ_F , l'allure du diagramme de Bode suggère que $\xi_F < 1$ car il y a une seule rupture de pente à $\omega_Z = 5,5 \text{ rad s}^{-1}$.

Pour $\omega < \omega_Z$ l'asymptote du second ordre à un gain de 0 dB. Seul le déivateur est influent. En conséquence, pour $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$, on a donc $|K_Z p|_{\text{dB}} = 20 \log K_Z = -106$. On a donc $K_Z = 5 \times 10^{-6}$.



Choix et réglage de la correction

Objectif

Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Question 4 Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

Correction

Pour que l'erreur statique soit nulle, il faut que la classe de la FTBO soit de 1. La classe de la FTBO non corrigée étant de «-1», il faut donc que le correcteur soit de classe 2 pour que le critère de précision soit garanti.

Question 5 Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de K_p garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie? Justifier la réponse

Correction

La marge de gain est de 18 dB et la marge de phase est de 85° .

Pour avoir une pulsation de coupure à 0 dB de 6 rad s^{-1} , il faut relever le gain de 20 dB soit $K_p = 10$. Dans ces conditions, la marge de phase est de -15° et la marge de gain est -2 dB . En conséquences, le système est précis (écart nul) et la pulsation de coupure du cahier des charges est respectée. Les marges ne sont plus satisfaites.

Question 6 Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

Correction

L'action de correction obtenue est de l'avance de phase.

Question 7 Quelle valeur doit-on donner à μ pour garantir le critère de marge de phase ?

Correction

Cas 1 : on conserve $K_p = 10$. Le correcteur doit ajouter 60° de phase pour $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$. Il faut donc $\mu = 14$.

Cas 2 : on reprend $K_p = 1$. Dans ce cas, on souhaite que lorsque $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$, φ soit égal à 45°. Il faut donc ajouter 65° de phase à cette pulsation. Dans ces conditions, $\mu = 20$.

Le critère de précision reste validé car il y a toujours les deux intégrateurs dans le correcteur.

Question 8 En déduire les valeurs de T et de K_p permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

Correction

Dans le cas 1 : $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{14}} = 0,045 \text{ s}$. Le gain K_p déjà déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Il faut donc que le gain du correcteur à avance de phase soit nul à la pulsation de coupure à $\omega_{0 \text{ dB}}$.

Il faut donc que $\frac{1}{2} \left(20 \log(\mu K'_p) + 20 \log K'_p \right) = 0 \Rightarrow \log(\mu K'^2_p) = 0 \Rightarrow \mu K'^2_p = 1 \Rightarrow K'_p = \sqrt{1/\mu} = 0,267$.

Dans le cas 2 : $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{20}} = 0,037 \text{ s}$.

Actuellement, le gain est de -20 dB pour $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$. Il faut donc augmenter le gain de 20 dB pour la pulsation $\frac{1}{T\sqrt{\mu}}$. Ceci revient donc à résoudre $20 \log K_p + \frac{1}{2} (20 \log \mu K_p - 20 \log K_p) = 20 \Rightarrow \log K_p + \log \sqrt{\mu} = 1 \Rightarrow K_p \sqrt{\mu} = 10 \Rightarrow K_p = 10/\sqrt{20} = 2,6$.

Remarque : dans le cas 1 le gain du correcteur est $K_p \times K'_p = 2,6$. Dans le cas 2 $K_p = 2,6$.

Validation des performances

Objectif

Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

Question 9 En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.

Correction

Pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} l'accélération reste bien inférieure à 3 rad s^{-2} .

TD 2

Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Sujet

CCP – PSI – 2006.

02 COR **03 COR**

Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

Objectif

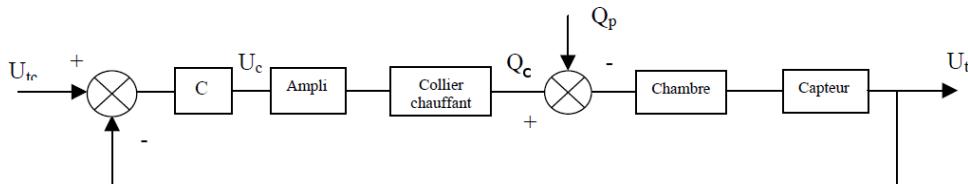
La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi;
- ▶ précision de la température : $\pm 0,5^\circ$ pour un échelon de 20° .

Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- ▶ U_{tc} : tension de consigne;
- ▶ U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- ▶ U_a : tension d'alimentation du collier chauffant;
- ▶ q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- ▶ q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



$$\text{Expérimentalement, on peut déterminer que } \text{FTBO}(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}.$$

Analyse des performances

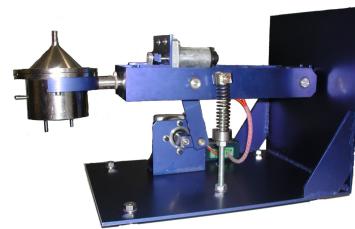
On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

Question 1 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

Question 2 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

Question 3 Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée (figure 1)

Question 4 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.



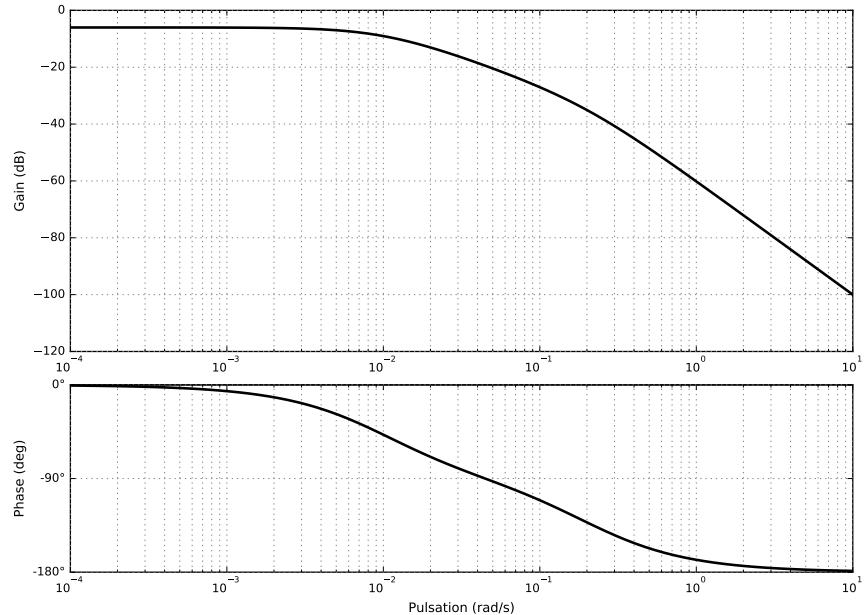


FIGURE 1 – Diagramme de Bode de la BO non corrigée

Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.

Question 5 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

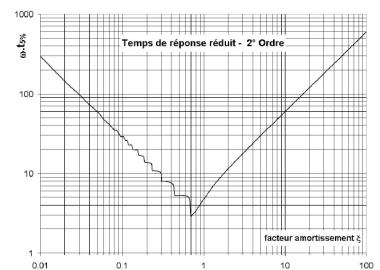
Question 6 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 7 Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur , si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$. On utilise pour cela la méthode des compensation de pôles.

Question 8 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

Question 9 En déduire le nouvel écart de position.



TD 2

Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Corrigé

CCP – PSI – 2006.

02 COR **03 COR**

Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

Objectif

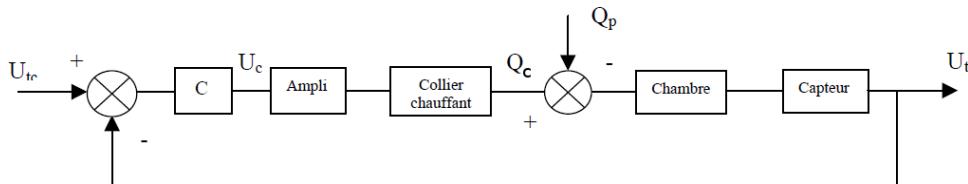
La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi;
- ▶ précision de la température : $\pm 0,5^\circ$ pour un échelon de 20° .

Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- ▶ U_{tc} : tension de consigne;
- ▶ U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- ▶ U_a : tension d'alimentation du collier chauffant;
- ▶ q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- ▶ q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



$$\text{Expérimentalement, on peut déterminer que } \text{FTBO}(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}.$$

Analyse des performances

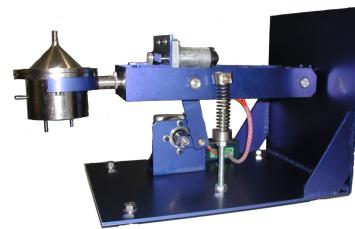
On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

Question 1 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

Question 2 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

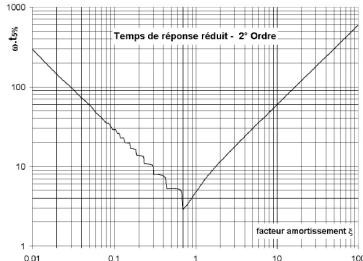
Question 3 Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée (figure 1)

Question 4 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.



Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.



Question 5 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

Question 6 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 7 Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur , si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$. On utilise pour cela la méthode des compensation de pôles.

Question 8 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

Question 9 En déduire le nouvel écart de position.

Q20 – Temps de réponse du système régulé

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{ic}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)}$$

car le retour est unitaire.

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{105}{1,5} \cdot p + \frac{500}{1,5} \cdot p^2}$$

D'où l'on déduit :

- la pulsation propre ω_n telle que : $\omega_n^2 = \frac{1,5}{500} = 30 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \omega_n = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ rd/s}$

- le facteur d'amortissement ξ tel que : $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = 70 \Rightarrow \xi = 1,92 \neq 2$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 12 \Rightarrow t_{5\%} = 218 \text{ s}$ **Incompatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

Q21 – Ecart de position – Ecart de traînage

Fonction de transfert de classe 0 (zéro) \Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{array} \right.$$

$\varepsilon_p = 0,66$ 66 % **Incompatible** avec le cahier des charges.

Q22 – Diagrammes de Bode de la F.T.B.O.

On procède par superposition : $H_{bo}(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) = \frac{0,5}{1 + j \cdot 5\omega} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot 100\omega}$

Pulsations de brisure $\omega_1 = 0,2 \text{ rd/s}$; $\omega_2 = 0,01 \text{ rd/s}$

$$\text{Qd } \omega \rightarrow 0 \quad H_{bo} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -6dB \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$$

$$G = -6dB - 10 \cdot \text{Log}(1+25 \cdot \omega^2) - 10 \cdot \text{Log}(1+10^4 \cdot \omega^2)$$

$$\varphi = -\text{Arc tan}(5 \cdot \omega) - \text{Arc tan}(100 \cdot \omega)$$

ω (rd/s)	0,01	0,1	1
G (dB)	- 9	- 27	- 60
φ ($^\circ$)	- 48	- 115	- 169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Tracé des lieux asymptotiques et réels : Voir le Document Réponse page suivante

Q23 – Marges de gain, de phase

Marge de gain : $M_G = \infty$

Marge de phase : $M_\varphi = 180^\circ$

Q 24 – Réglage du correcteur Proportionnel assurant la stabilité et optimisant les performances du système

Il faut écarter la solution consistant à régler K afin que le lieu de transfert en B.O. soit tangent au contour fermé à $2,3 \text{ dB}$, car alors le facteur d'amortissement devient inférieur à 1, (0,4 pour un second ordre et le dépassement est environ de 25%) ce qui entraînera un dépassement lors la montée en température (Non respect du C.d.C.)

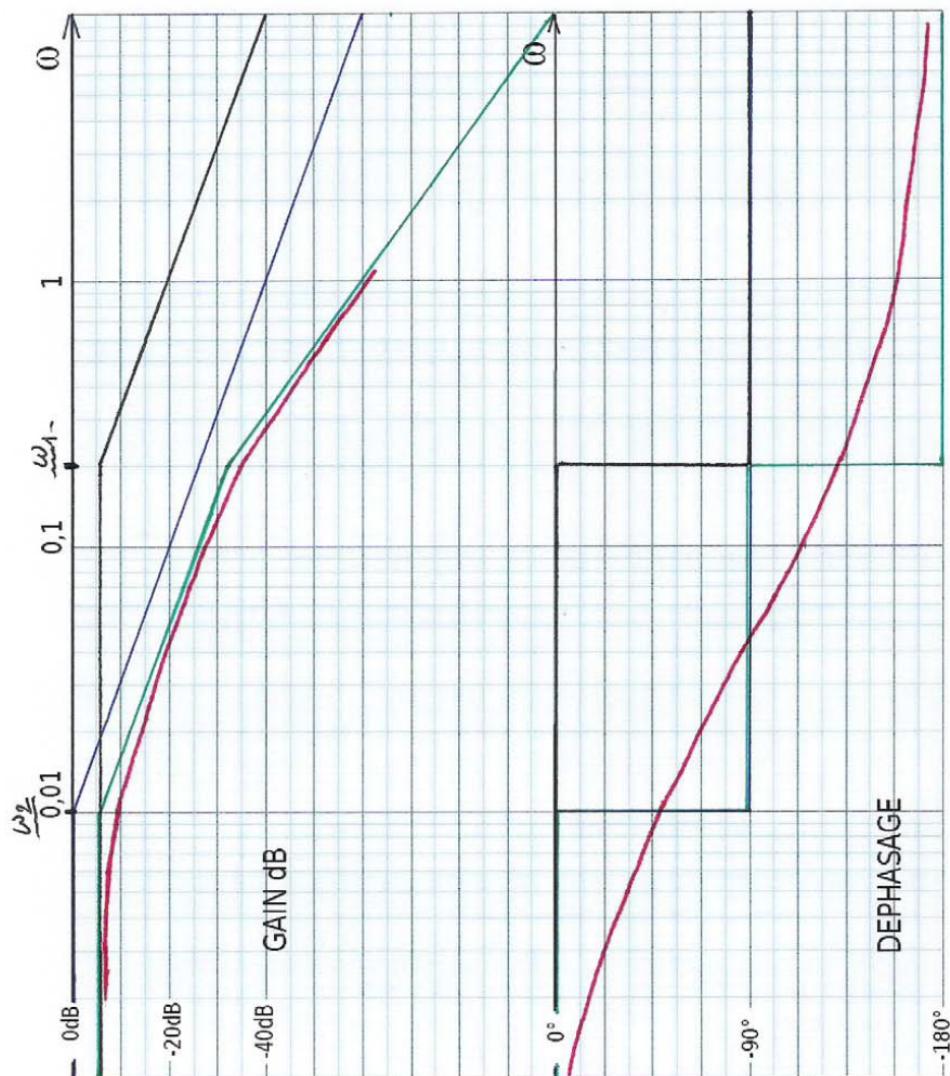
On règle K de telle sorte que $\xi \geq 1$; la réponse indicielle est alors **apériodique critique** ou **apériodique amorti**.

$$H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{1 + 105 \cdot p + 500 \cdot p^2}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{0,5 \cdot K}{1 + 0,5 \cdot K}}{1 + \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K} p + \frac{500}{1 + 0,5 \cdot K} p^2}$$

Question 22 : Tracé de Bode



$$\text{Pulsation propre : } \omega_n = \sqrt{\frac{1 + 0,5 \cdot K}{500}}$$

$$\text{Facteur d'amortissement, il est tel que : } \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K} ,$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{105}{2 \cdot \sqrt{500} \cdot \sqrt{1 + 0,5 \cdot K}}$$

Condition de **non dépassement** : $\xi \geq 1 \Leftrightarrow K \leq 9,02$

On choisit **K = 9** alors **$\xi \approx 1$** la réponse indicielle est **apériodique critique**.

Par conséquent, sur le diagramme de Black, **on translate** le lieu de transfert en B.O. **dans la direction verticale** de **20 Log 9**, c'est-à-dire d'environ **19 dB**.

O 25 – Eléments de performances, temps de réponse à 5 %, écarts de position et de traînage

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H_{bo})

La marge de gain est inchangée : **M_G = ∞**

On relève : **M_φ = 90°** **La stabilité est assurée.**

$$\text{Pulsation propre : } \omega_n = \sqrt{\frac{1 + 0,5 \cdot 9}{500}} = \sqrt{\frac{5,5}{500}} \approx 0,1 \text{ rd/s}$$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5 \Rightarrow t_{5\%} = 50 \text{ s}$ **Compatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

$$\text{Fonction de transfert de classe 0 (zéro) } \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$$

$\varepsilon_p = 0,55$ **55 %** **Incompatible** avec le cahier des charges.

O26 – Tension en entrée de l'amplificateur, tension d'alimentation du collier chauffant lorsque l'échelon de tension de consigne U_{tc} est de 5 V

A 17° C correspond $U_c = 0 \text{ V}$, donc $U_t = 0 \text{ V}$.

Si $U_{tc} = 5 \text{ V} \Rightarrow U_c = 45 \text{ V}$. ($U_c = K \cdot \varepsilon$)

Alors **U_a = 450 V** Il y aura **saturation de l'ampli** et donc augmentation du temps de réponse.

O 27 – Choix d'un correcteur à action P.I. – Réglage de ce correcteur

$$C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$$

Le réglage du correcteur se fait par **compensation du pôle le plus lent**. Méthode qui consiste à choisir la constante de temps T_i du correcteur égale à la **constante de temps la plus grande** du système à corriger. On réglera le gain K du correcteur afin que la **réponse indicielle ne présente pas de dépassement** (on choisit $\xi = 1$). Le choix de T_i devant satisfaire le C.d.C. (Montée en température rapide : 3 mm maximum).

La F.T.B.O. s'écrit alors : $H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{T_i \cdot p + 500 \cdot p^2}$

La F.T.B.F. s'écrit alors : $H_{bf}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{0,5 \cdot K} \cdot p + \frac{500}{0,5 \cdot K} \cdot p^2}$

La pulsation propre (non amortie) vaut alors : $\omega_n = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{K}{10}}$

Le facteur d'amortissement vaut alors : $\xi = \frac{T_i}{10 \cdot \sqrt{10 \cdot K}}$

On choisit $\xi = 1$ la réponse indicielle est apériodique critique.

Alors : $K = 10^{-3} \cdot T_i$

On a toujours : $\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5$ puisque $\xi = 1$

Tableau des valeurs de K , ω_n , $t_{5\%}$ en fonction du choix de T_i

T_i	K	ω_n	$t_{5\%}$	Commentaires
5 s	$25 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$ rd/s	1 000 s	A rejeter
100 s	10	0,1 rd/s	50 s	A RETENIR

Tracé du lieu de transfert de la F.T.B.O. dans le plan de Black :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{5}{j \cdot 100 \omega \cdot (1 + j \cdot 5\omega)}$$

Gain : $G = -26 \text{ dB} - 20 \cdot \log \omega - 10 \cdot \log(1 + 25 \cdot \omega^2)$

Argument : $\varphi = -90^\circ - \arctan(5\omega)$

ω (rd/s)	0,01	0,1	0,2	1
G (dB)	14	- 7	- 15	- 40
φ ($^\circ$)	- 93	- 117 $^\circ$	- 135	- 169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Compte tenu de la forme de la F.T.B.O. , le lieu de transfert présente deux asymptotes verticales d'équations $\varphi = -90^\circ$ et $\varphi = -180^\circ$.

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H_{b03})

La marge de gain est inchangée : $M_G = \infty$

On relève : $M_\varphi \approx 77^\circ$

La stabilité est assurée.

O 28 – Nouvel écart de position

Le système est de classe 1 $\Rightarrow \varepsilon_p = 0$

TD 3

Machine de rééducation SysReeduc – Sujet

CCP PSI 2013.

Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

C1-02

C2-04



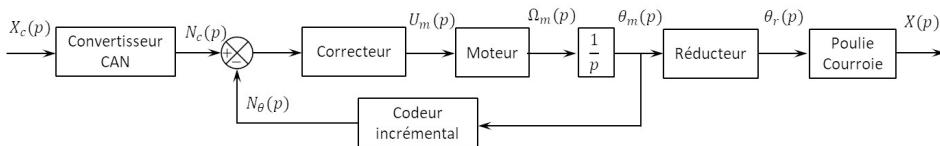
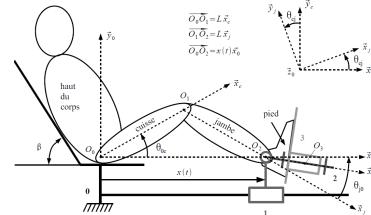
Objectif

L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de réeduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2 \text{ s}$
Pulsation au gain unité	50 rad s^{-1}

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



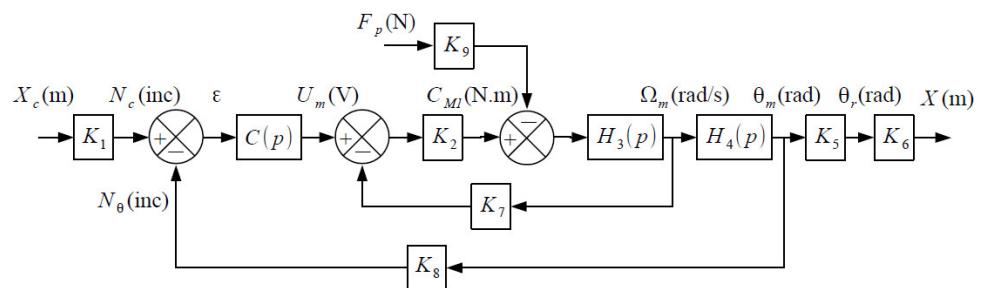
1: On peut passer directement à la question 3 pour aborder plus rapidement les correcteurs.

Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$;
- $e(t) = k_e \omega_m(t)$;
- $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

Éléments de modélisation¹

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.

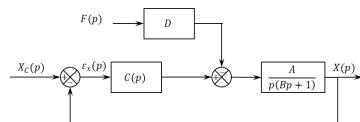


Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t).$$

On note :

- M la masse du chariot et m la masse du support de pied;
- $\rho_1 = \frac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur;
- $r = 46,1 \times 10^{-3}$ m le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie;
- $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A, B et D , avec $A = 6700 \text{ m/V}$, $B = 0,01 \text{ s}$ et $D = 6 \text{ V/N}$.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$ et K_9 .

Correction proportionnelle

On utilise maintenant le schéma-bloc ci-contre. On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 2 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c .

Question 3 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 4 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

Question 5 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_i .

Question 6 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

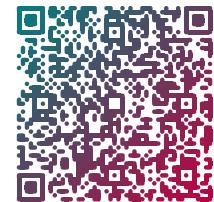
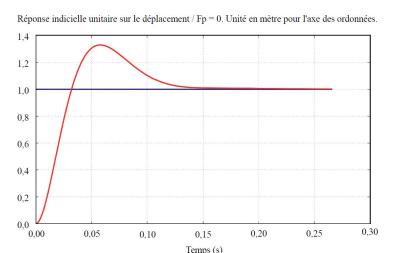
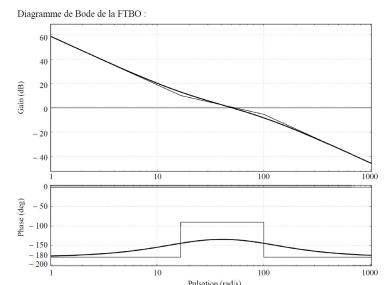
Question 7 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Question 8 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Question 9 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 10 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.



TD 3

Machine de rééducation SysReeduc – Corrigé

CCP PSI 2013.

Mise en situation

C1-02

C2-04



2: On peut passer directement à la question 3 pour aborder plus rapidement les correcteurs.

Éléments de modélisation²

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$ et K_9 .

Correction

On a :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \frac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M + m) r \rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M + m) r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \frac{1}{(M + m) r^2 \rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \frac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incrément. X_c est la consigne que doit respectée X . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8 \theta_m = K_1 X_C - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$. Au final, $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$.

Correction proportionnelle

On utilise maintenant le schéma-bloc ci-contre. On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 2 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c .

Correction

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \varepsilon_x(p) &= X_C(p) - X(p) = X_C(p) - \left((C(p)\varepsilon_x(p) - F(p)D) \frac{A}{p(Bp+1)} \right) \\
 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left(1 + \frac{AC(p)}{p(Bp+1)} \right) &= X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \\
 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left(\frac{p(Bp+1) + AC(p)}{p(Bp+1)} \right) &= X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AC(p)} X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1) + AC(p)} \\
 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) &= \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_c} X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_c} F(p)
 \end{aligned}$$

Question 3 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

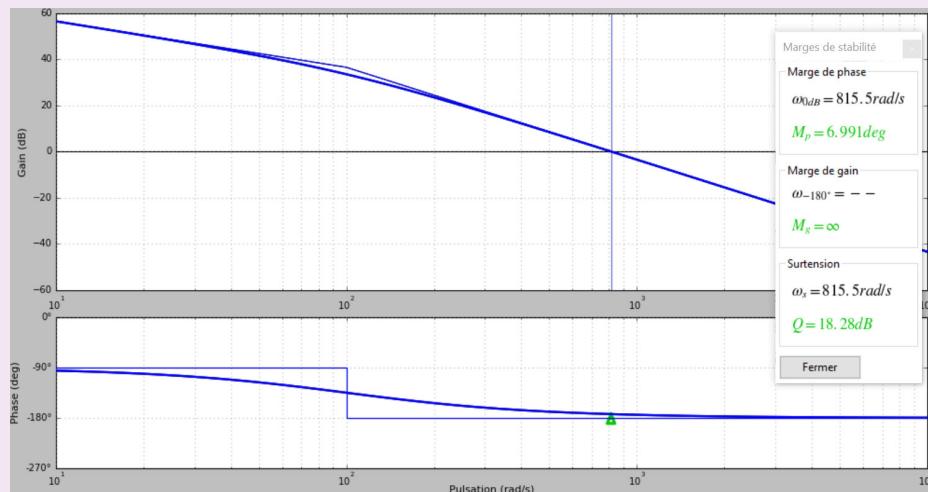
$$\begin{aligned} \text{On a } \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_x(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_C} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_C} \frac{F_p}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_C} X_0 + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_C} F_p \\ &= \frac{D}{K_C} F_p \end{aligned}$$

L'écart en position n'est donc pas nul.

Question 4 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?

Correction

$$\text{On a } \text{FTBO}(p) = \frac{A}{p(Bp+1)}.$$



La marge de phase n'est pas respectée.

Correction proportionnelle intégrale

$$\text{On suppose maintenant que } C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

Question 5 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_i .

Correction

$$\varepsilon_x(p) = -\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)} X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)} F(p)$$

Question 6 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_i \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right)} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_i \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right)} \frac{F_0}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pT_ip(Bp+1)}{pT_ip(Bp+1) + AK_i(T_ip+1)} X_0 + \frac{ADT_ip}{T_ipp(Bp+1) + AK_i(T_ip+1)} F_0 = 0.\end{aligned}$$

Question 7 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $\text{FTBO}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Correction

$$\text{FTBO}(p) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}.$$

Question 8 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Correction

On souhaite que pour $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$, $\varphi(\omega) = -135^\circ$.

$$\begin{aligned}\arg(\text{FTBO}(j\omega)) &= \arg\left(\frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}\right) = -180 - \arg((Bp+1)) + \arg(1+T_ip) \\ &= -180 - \arctan B\omega + \arctan T_i\omega. \text{ En } \omega = 50 \text{ rad s}^{-1} \text{ on a alors } -180 - \arctan 0,5 + \arctan 50T_i = -135 \Leftrightarrow \arctan 50T_i = -135 + 180 + \arctan 0,5 = 74. \text{ D'où } T_i = 0,05 \text{ s.}\end{aligned}$$

Question 9 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

Correction

On souhaite que $|\text{FTBO}(j\omega)| = 1$ pour $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$.

$$|\text{FTBO}(j\omega)| = \left| \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip} \right| = AK_i \frac{1}{\omega \sqrt{B^2\omega^2 + 1}} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{T_i\omega} = \frac{AK_i}{T_i\omega^2} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{\sqrt{B^2\omega^2 + 1}}.$$

$$\text{On a donc } K_i = \frac{T_i\omega^2 \sqrt{B^2\omega^2 + 1}}{A \sqrt{1+T_i^2\omega^2}} = 0,0077 \text{ Vm}^{-1}.$$

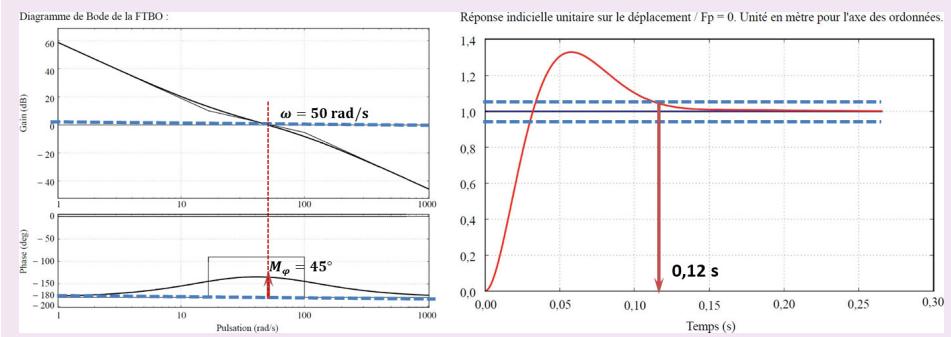
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 10 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

Correction

- ▶ Ecart de position : nul \Rightarrow Exigence OK.
- ▶ Marge de gain : infine \Rightarrow Exigence OK.

- Marge de phase : $\approx 45^\circ \Rightarrow$ Exigence OK.



TD 4

Banc d'épreuve hydraulique – Sujet

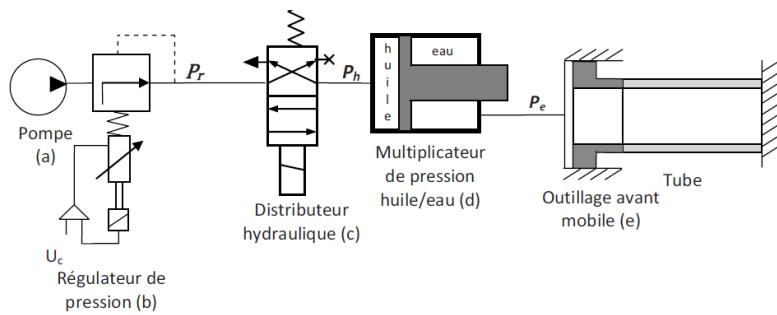
CCP – PSI – 2010.

Présentation

Vallourec & Mannesmann Tubes (V&M Tubes), entreprise du groupe Vallourec, est le leader mondial dans la production de tubes en acier sans soudure laminés à chaud.

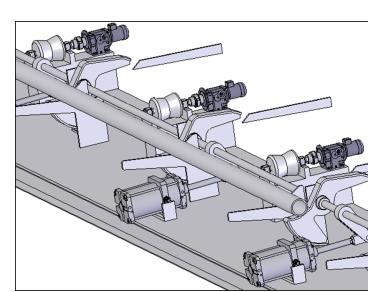
Afin de valider la caractéristique de tenue en pression des tubes, ceux-ci sont soumis à une pression hydraulique donnée durant un temps spécifié. Ces paramètres dépendent de la taille des tubes et de leur future utilisation.

Un schéma hydraulique simplifié est donné figure suivante :



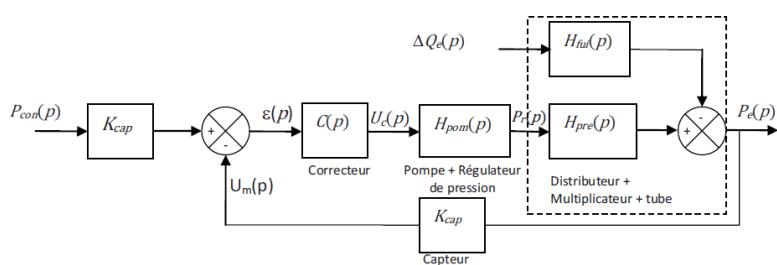
C1-02

C2-04



Mise en place d'un asservissement de pression.

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. L'objectif est ici de proposer un réglage du correcteur pour répondre aux critères du cahier des charges. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression. Le schéma-blocs de l'asservissement est défini ci-dessous.



Hypothèses :

- ▶ quels que soient les résultats précédents, l'ensemble de mise sous pression {tube + distributeur + multiplicateur de pression} est défini par les transmittances suivantes : $H_{\text{fui}}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$ et $H_{\text{pre}}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$ avec $K_m = 3,24$; $K_f = 2,55 \cdot 10^{10} \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})$; $T_1 = 10 \text{ s}$;
- ▶ l'ensemble {pompe+régulateur de pression} est modélisé par la fonction de transfert : $H_{\text{pom}}(p) = \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p}$ avec $K_{\text{pom}} = 1,234 \cdot 10^7 \text{ Pa/V}$; $T_2 = 5 \text{ s}$;
- ▶ le capteur est modélisé par un gain pur : $K_{\text{cap}} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ V/Pa}$.

▶ $P_{\text{con}}(p)$: pression de consigne d'eau dans le tube (Pa);

▶ $P_e(p)$: pression d'eau dans le tube (Pa);

▶ $U_c(p)$: tension de commande du régulateur de pression (V);

▶ $P_r(p)$: pression d'huile régulée (Pa);

▶ $\Delta Q_e(p)$: débit de fuite (m^3/s);

▶ $U_m(p)$: tension de mesure du capteur (V).

La pression de consigne est de $P_{\text{con}} = 800$ bars et les débits de fuite sont estimés à $\Delta Q_e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$.

On rappelle que le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant :

Stabilité :	marge de phase de 60° marge de gain de 12 dB
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40$ s
Précision :	erreur statique < 5% soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\varepsilon_{\text{con}} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\varepsilon_{\text{pert}} < 40$ bars
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation : $t_e \omega_{0 \text{ dB}} = 3$ où $\omega_{0 \text{ dB}}$ désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et t_e le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$, temps du 1^{er} maximum si le dépassement est supérieur à 5%;
- $t_e = t_R$, temps de réponse à 5% si le dépassement est nul ou inférieur à 5%.

Correction proportionnelle

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel : $C(p) = K_p$.

Question 1 Transformer le schéma-blocs pour se ramener à un système à retour unitaire.

Question 2 Déterminer, en fonction de K_p , ε_{con} définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne P_{con} de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

Question 3 Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{con} à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

Question 4 Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de K_p $\varepsilon_{\text{pert}}$ définie comme l'erreur statique pour une perturbation ΔQ_e de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

Question 5 Proposer un réglage de K_p pour limiter $\varepsilon_{\text{pert}}$ à la valeur spécifiée au cahier des charges.

Question 6 Proposer un réglage de K_p pour vérifier le critère d'amortissement.

Question 7 À partir des résultats des questions précédentes, conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

Correction proportionnelle intégrale

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma-blocs ci-dessous :

Question 8 Déterminer la fonction de transfert $C(p)$ de ce correcteur.

Question 9 Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients K_i et K_p .

Question 10 Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité ? Justifier.

Question 11 Quelle valeur faut-il donner à $\omega_0 \text{dB}$ pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges ?

Question 12 Déterminer alors le rapport $T = K_p/K_i$ pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

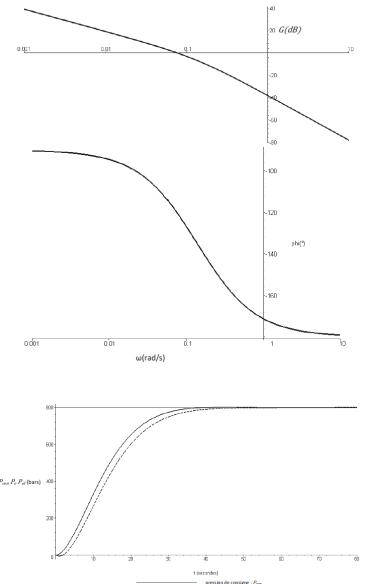
Question 13 En déduire les valeurs de K_p et de K_i qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

Bilan

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment.

On donne ensuite sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.

Question 14 La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges ? Justifier.



TD 4

Banc d'épreuve hydraulique – Corrigé

CCP – PSI – 2010.

Présentation

Mise en place d'un asservissement de pression.

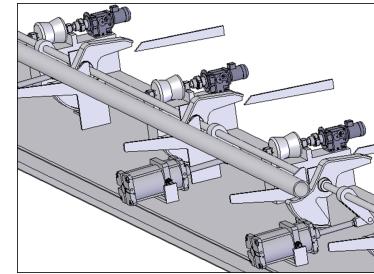
C1-02

C2-04

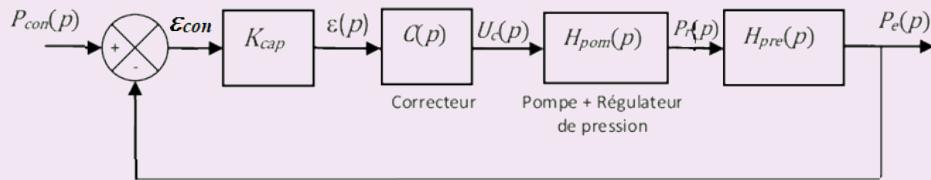
Correction proportionnelle

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel : $C(p) = K_p$.

Question 1 Transformer le schéma-blocs pour se ramener à un système à retour unitaire.



Correction



Question 2 Déterminer, en fonction de K_p , ε_{con} définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne P_{con} de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

Correction

Dans ce cas, le système est de classe 0. L'erreur statique est donc de $\varepsilon_{\text{con}} = \frac{P_{\text{con}}}{1 + K_{\text{cap}}K_pK_mK_{\text{pom}}}$.

Question 3 Proposer un réglage de K_p pour limiter ε_{con} à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

Correction

Pour que l'erreur soit inférieure à 5% :

$$\begin{aligned} \frac{P_{\text{con}}}{1 + K_{\text{cap}}K_pK_mK_{\text{pom}}} &< 0,05P_{\text{con}} \\ \Leftrightarrow 1 &< 0,05(1 + K_{\text{cap}}K_pK_mK_{\text{pom}}) \\ \Leftrightarrow \frac{0,95}{0,05K_{\text{cap}}K_mK_{\text{pom}}} &< K_p. \text{ On a donc } K_p > 19. \end{aligned}$$

Question 4 Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de K_p $\varepsilon_{\text{pert}}$ définie comme l'erreur statique pour une perturbation ΔQ_e de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

Correction

Dans ce cas, on a toujours un système dont la BO est de classe 1 et : $\varepsilon_{\text{pert}} = \frac{\Delta Q_e K_f}{1 + K_{\text{cap}} K_p K_m K_{\text{pom}}}.$

Question 5 Proposer un réglage de K_p pour limiter $\varepsilon_{\text{pert}}$ à la valeur spécifiée au cahier des charges.

Correction

Pour $\frac{\Delta Q_e}{\Delta Q_e K_f} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ on souhaite $\varepsilon_{\text{pert}} < 40 \text{ bars}$. En conséquence, $\frac{\Delta Q_e K_f - 40}{1 + K_{\text{cap}} K_p K_m K_{\text{pom}}} < 40 \Leftrightarrow \frac{\Delta Q_e K_f - 40}{40 K_{\text{cap}} K_m K_{\text{pom}}} < K_p$. On a donc $K_p > 2,19$.

Question 6 Proposer un réglage de K_p pour vérifier le critère d'amortissement.

Correction

Pour avoir aucun dépassement, il est nécessaire que, si la FTBF du système est d'ordre 2, on ait $\xi \geq 1$. (Si la FTBF est d'ordre 1, il n'y aura pas de dépassement, si la FTBF est d'ordre supérieur à 2 il n'y a pas de résultat connu.)

$$\begin{aligned} \text{On a donc, avec un débit de fuite nul, } \frac{P_e(p)}{P_{\text{con}}(p)} &= \frac{K_{\text{cap}} K_p \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p}}{1 + K_{\text{cap}} K_p \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p}} \\ &= \frac{K_{\text{cap}} K_p K_{\text{pom}} K_m}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) + K_{\text{cap}} K_p K_{\text{pom}} K_m} \\ &= \frac{K_{\text{cap}} K_p K_{\text{pom}} K_m}{(T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2 + 1 + K_{\text{cap}} K_p K_{\text{pom}} K_m}. \end{aligned}$$

$$\text{On a alors : } \omega_0 = \sqrt{\frac{1 + K_{\text{cap}} K_p K_{\text{pom}} K_m}{T_1 T_2}} \text{ et}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2 (1 + K_{\text{cap}} K_p K_{\text{pom}} K_m)}}.$$

$$\text{En conséquence, } \xi > 1 \Leftrightarrow \frac{(T_1 + T_2)^2 - 4T_1 T_2}{4T_1 T_2 K_{\text{cap}} K_{\text{pom}} K_m} > K_p \text{ et donc } K_p < 0,125.$$

Question 7 À partir des résultats des questions précédentes, conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

Correction

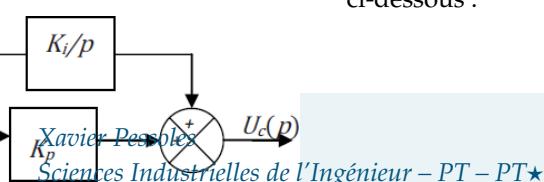
On a donc :

- $K_p > 19$;
- $K_p > 2,19$;
- $K_p < 0,125$.

Les 3 conditions sont incompatibles. Un autre correcteur doit être envisagé.

Correction proportionnelle intégrale

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma-blocs ci-dessous :



Question 8 Déterminer la fonction de transfert $C(p)$ de ce correcteur.

Correction

$$\text{On a } C(p) = \frac{K_i}{p} + K_p = \frac{K_i + K_p p}{p} = \frac{K_i}{p} \left(1 + \frac{K_p}{K_i} p\right).$$

Question 9 Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients K_i et K_p .

Correction

Question 10 Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité ? Justifier.

Correction

L'intégrateur va permettre d'annuler l'erreur (du à la consigne et à la perturbation). De plus, suivant le positionnement du correcteur, le déphasage de -90° présent en basse fréquence peut déstabiliser le système.

Question 11 Quelle valeur faut-il donner à $\omega_{0 \text{ dB}}$ pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges ?

Correction

$$\text{On souhaite que } t_e < 40 \text{ s} \Leftrightarrow \frac{3}{\omega_{0 \text{ dB}}} < 40 \Leftrightarrow \frac{3}{40} < \omega_{0 \text{ dB}} \text{ et donc } \omega_{0 \text{ dB}} > 0,075 \text{ rad s}^{-1}.$$

Question 12 Déterminer alors le rapport $T = K_p/K_i$ pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

Correction

On désire une marge de phase de 60° . Il faut donc que $\varphi(\omega_{0 \text{ dB}}) = -120^\circ$. On a $FTBO(p) = \frac{K_i}{p} \left(1 + \frac{K_p}{K_i} p\right) K_{\text{cap}} \frac{K_m}{1 + T_1 p} \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p}$. Et donc : $\varphi(\omega) = -90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}\omega\right) - \arctan(T_1\omega) - \arctan(T_2\omega)$ en $\omega_{0 \text{ dB}}$ on a : $\varphi(0,075) = -90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) - 57 = -147 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right)$. On cherche donc $\frac{K_p}{K_i}$ tel que $-147 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) = -120 \Rightarrow \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) = 27 \Rightarrow \frac{K_p}{K_i}0,075 = 0,51 \Rightarrow \frac{K_p}{K_i} = 6,79$. Ainsi pour avoir une marge de phase supérieure à 60° , on doit avoir $T = \frac{K_p}{K_i} > 6,79$.

Question 13 En déduire les valeurs de K_p et de K_i qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

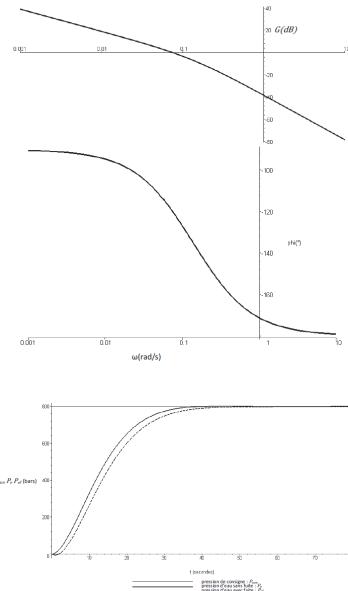
Correction

On souhaite que le gain soit nul lorsque $\omega_{0 \text{ dB}} = 0,075 \text{ rad s}^{-1}$.

On a $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\sqrt{1 + \frac{K_p^2}{K_i^2} \omega^2} \right) + 20 \log K_i + 20 \log (K_{cap} K_{pom} K_m) - 20 \log \omega + 20 \log \left(\sqrt{1 + \frac{K_p^2}{K_i^2} \omega^2} \right) - 20 \log \left(\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \right) - 20 \log \left(\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2} \right).$

$$G_{dB}(\omega_0 \text{ dB}) = 0 \Rightarrow K_i = 0,089 \text{ et } K_p = 0,615.$$

Bilan

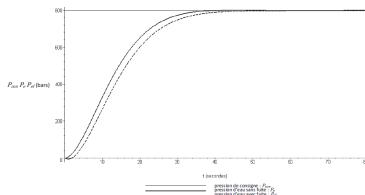


On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment.

On donne ensuite sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.

Question 14 La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges ? Justifier.

Correction



TD 5

La robotique au service du handicap – Sujet

Centrale Supélec – PSI 2010.

Présentation

On s'intéresse à la conception de la loi de commande d'un des moteurs d'une orthèse d'épaule permettant d'améliorer le rétablissement de patients en cours de rééducation.

C1-02

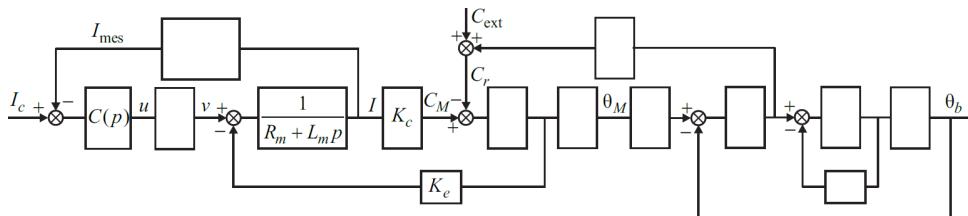
C2-04

Objectif

- ▶ Temps de réponse à 5% pour un échelon de consigne de couple : $t \leq 2 \text{ ms}$.
- ▶ Erreur statique pour un couple de référence constant $C_{\text{ref}0}$: $|\varepsilon_0| \leq 0,05C_{\text{ref}0}$.
- ▶ Couple maximal fourni sur l'axe de l'articulation $C_{\text{max}} = 50 \text{ Nm}$.

En pratique, le couple délivré par le moteur ne peut être mesuré directement, c'est pourquoi la grandeur asservie est le courant moteur. L'objet, dans cette phase de l'étude, est alors de déterminer une loi de commande pour la boucle d'asservissement et de valider les performances vis-à-vis du cahier des charges partiel.

On donne partiellement le schéma-blocs de la commande.



Le correcteur choisi est de type proportionnel-intégral (P.I.) de fonction de transfert : $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$. On adopte sans aucune justification que $T_i = 0,3 \text{ ms}$. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

$$H(p) = \frac{0,0326p \left(1 + \frac{2 \times 0,08}{463}p + \frac{p^2}{463^2}\right)}{\left(1 + \frac{p}{122}\right) \left(1 + \frac{2 \times 0,09}{464}p + \frac{p^2}{464^2}\right) \left(1 + \frac{p}{10^3}\right) \left(1 + \frac{p}{10^4}\right)}$$

est donné en fin de document. $i_{\text{mes}}(t)$ est la mesure du courant du moteur et $u(t)$ la tension d'alimentation. Ce tracé pourra être utilisé sans aucune justification.

Synthèse du régulateur PI de la boucle de courant

Question 1 Compléter le diagramme de Bode par le tracé des diagrammes asymptotiques de la fonction $H(p)$.

Question 2 En adoptant $K = 1$, tracer le diagramme de Bode (module et phase) de $C(p)$: diagrammes asymptotiques et allures des tracés réels avec les valeurs prises aux points caractéristiques.

Question 3 En déduire les tracés asymptotiques et les allures des tracés réels du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (on différenciera les tracés par des couleurs différentes). Déterminer, sans calcul supplémentaire, la pulsation ω_1 telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est égale à -135° et la valeur numérique du gain statique.

Question 4 Déterminer alors la valeur du gain K permettant d'assurer une marge de phase de 45° .

On considère maintenant le système corrigé avec le correcteur $C(p)$ qui vient d'être déterminé.

Question 5 Déterminer un ordre de grandeur de la marge de gain obtenue et conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

Question 6 Déterminer l'écart statique $\Delta i_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (i_c(t) - i_{\text{mes}}(t))$ en boucle fermée en réponse à un échelon de consigne $i_c(t) = I_0 \Gamma(t)$ d'amplitude I_0 et l'exprimer sous la forme $\Delta i_0 = k I_0$ en précisant la valeur numérique de k .



La figure suivante représente la structure de l'actionneur (la boucle de courant du moteur étant fermée) : i_c et i sont respectivement la consigne et le courant moteur, C_{ref} est le couple de référence souhaité, C_a est le couple appliqué par l'actionneur sur l'axe de l'articulation et G_{ic} est un gain pur correspondant à la relation entre le courant et le couple C_a . On suppose pour toute cette question que le couple de référence $C_{\text{ref}}(t)$ est constant d'amplitude $C_{\text{ref}} = C_{\text{ref}0}$.

Question 7 Exprimer G_{ic} en fonction de K_c et de N .

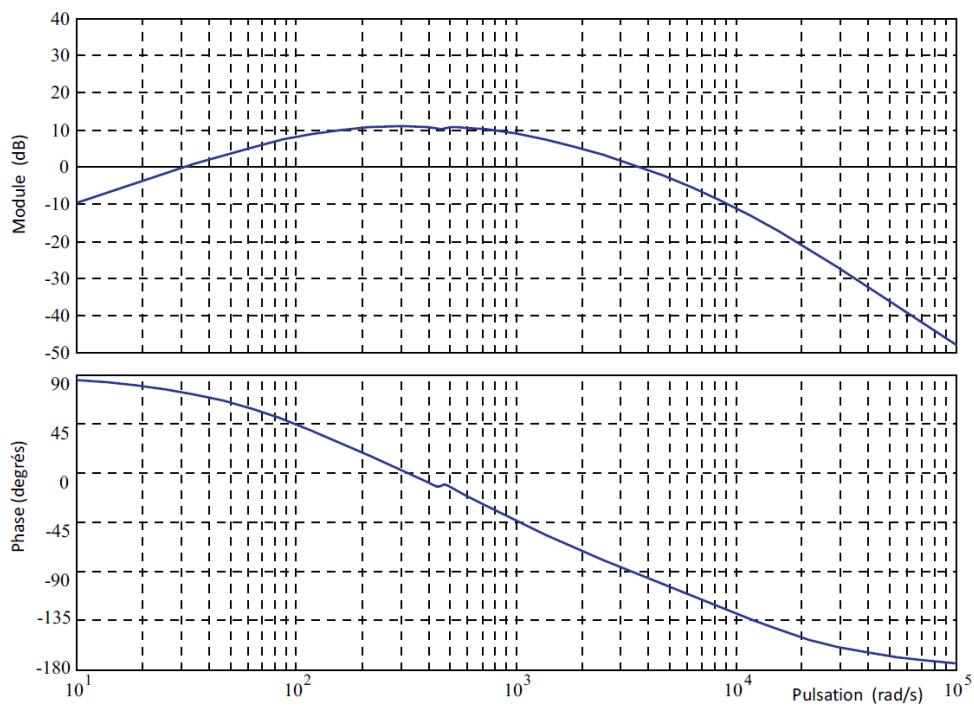
Question 8 En supposant qu'en régime permanent l'erreur statique de la boucle d'asservissement de courant est nulle $\Delta i_0 = 0$, donner la valeur du gain G_0 permettant d'assurer l'égalité des couples de référence $C_{\text{ref}0}$ et appliqués C_a .

Question 9 En remarquant que le gain statique du capteur de courant est de 1, montrer, en utilisant les résultats des questions précédentes, qu'en régime permanent l'erreur $\Delta C = C_{\text{ref}} - C_a$ entre le couple de référence et le couple moteur exprimé sur l'axe de l'articulation est $\Delta C = k_1 C_{\text{ref}0}$. Déterminer k_1 en fonction de k .

Question 10 Vérifier alors si les différentes exigences du cahier des charges de l'actionneur sont validées.

On admettra sans aucune justification que la pulsation de coupure à 0 dB et le temps de réponse sont liés par la relation approximative $\omega_c Tr \approx 3$.





TD 5

La robotique au service du handicap – Corrigé

Centrale Supélec – PSI 2010.

Présentation

On s'intéresse à la conception de la loi de commande d'un des moteurs d'une orthèse d'épaule permettant d'améliorer le rétablissement de patients en cours de rééducation.

C1-02

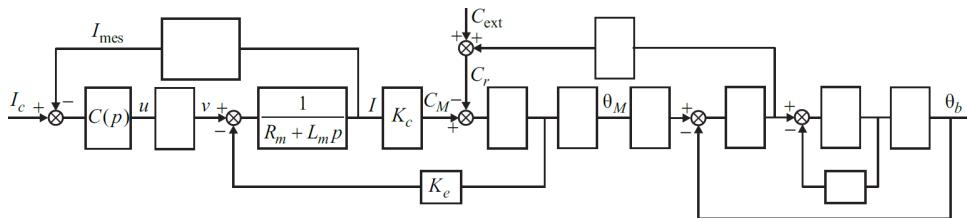
C2-04

Objectif

- ▶ Temps de réponse à 5% pour un échelon de consigne de couple : $t \leq 2$ ms.
- ▶ Erreur statique pour un couple de référence constant $C_{\text{ref} 0}$: $|\varepsilon_0| \leq 0,05 C_{\text{ref} 0}$.
- ▶ Couple maximal fourni sur l'axe de l'articulation $C_{\text{max}} = 50$ Nm.

En pratique, le couple délivré par le moteur ne peut être mesuré directement, c'est pourquoi la grandeur asservie est le courant moteur. L'objet, dans cette phase de l'étude, est alors de déterminer une loi de commande pour la boucle d'asservissement et de valider les performances vis-à-vis du cahier des charges partiel.

On donne partiellement le schéma-blocs de la commande.



Le correcteur choisi est de type proportionnel-intégral (P.I.) de fonction de transfert : $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$. On adopte sans aucune justification que $T_i = 0,3$ ms. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

$$H(p) = \frac{0,0326p \left(1 + \frac{2 \times 0,08}{463}p + \frac{p^2}{463^2}\right)}{\left(1 + \frac{p}{122}\right) \left(1 + \frac{2 \times 0,09}{464}p + \frac{p^2}{464^2}\right) \left(1 + \frac{p}{10^3}\right) \left(1 + \frac{p}{10^4}\right)}$$

est donné en fin de document. $i_{\text{mes}}(t)$ est la mesure du courant du moteur et $u(t)$ la tension d'alimentation. Ce tracé pourra être utilisé sans aucune justification.

Synthèse du régulateur PI de la boucle de courant

Question 1 Compléter le diagramme de Bode par le tracé des diagrammes asymptotiques de la fonction $H(p)$.

Correction

Question 2 En adoptant $K = 1$, tracer le diagramme de Bode (module et phase) de $C(p)$: diagrammes asymptotiques et allures des tracés réels avec les valeurs prises aux points caractéristiques.

Correction

Question 3 En déduire les tracés asymptotiques et les allures des tracés réels du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (on différenciera les tracés par des couleurs différentes). Déterminer, sans calcul supplémentaire, la pulsation ω_1 telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est égale à -135° et la valeur numérique du gain statique.

Correction

Question 4 Déterminer alors la valeur du gain K permettant d'assurer une marge de phase de 45° .

Correction

On considère maintenant le système corrigé avec le correcteur $C(p)$ qui vient d'être déterminé.

Question 5 Déterminer un ordre de grandeur de la marge de gain obtenue et conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

Correction

Question 6 Déterminer l'écart statique $\Delta i_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (i_c(t) - i_{\text{mes}}(t))$ en boucle fermée en réponse à un échelon de consigne $i_c(t) = I_0 \Gamma(t)$ d'amplitude I_0 et l'exprimer sous la forme $\Delta i_0 = k I_0$ en précisant la valeur numérique de k .

Correction

La figure suivante représente la structure de l'actionneur (la boucle de courant du moteur étant fermée) : i_c et i sont respectivement la consigne et le courant moteur, C_{ref} est le couple de référence souhaité, C_a est le couple appliqué par l'actionneur sur l'axe de l'articulation et G_{ic} est un gain pur correspondant à la relation entre le courant et le couple C_a . On suppose pour toute cette question que le couple de référence $C_{\text{ref}}(t)$ est constant d'amplitude $C_{\text{ref}} = C_{\text{ref}0}$.

Question 7 Exprimer G_{ic} en fonction de K_c et de N .

Correction

Question 8 En supposant qu'en régime permanent l'erreur statique de la boucle d'asservissement de courant est nulle $\Delta i_0 = 0$, donner la valeur du gain G_0 permettant d'assurer l'égalité des couples de référence $C_{\text{ref}0}$ et appliqué C_a .

Correction

Question 9 En remarquant que le gain statique du capteur de courant est de 1, montrer,

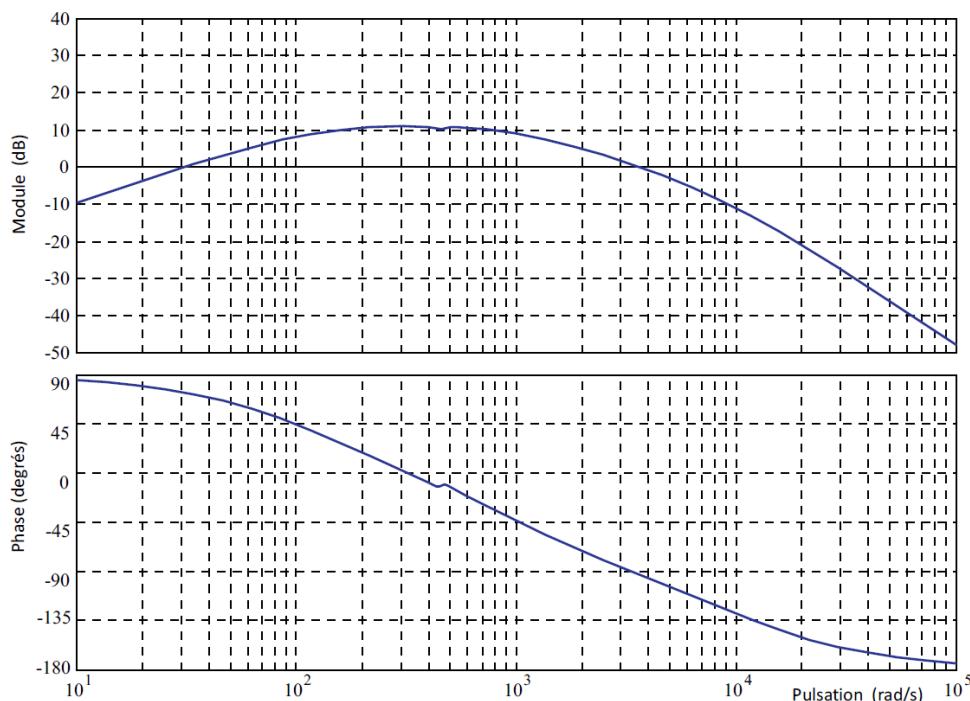
en utilisant les résultats des questions précédentes, qu'en régime permanent l'erreur $\Delta C = C_{\text{ref}} - C_a$ entre le couple de référence et le couple moteur exprimé sur l'axe de l'articulation est $\Delta C = k_1 C_{\text{ref}0}$. Déterminer k_1 en fonction de k .

Correction

Question 10 Vérifier alors si les différentes exigences du cahier des charges de l'actionneur sont validées.

Correction

On admettra sans aucune justification que la pulsation de coupure à 0 dB et le temps de réponse sont liés par la relation approximative $\omega_c T_r \approx 3$.



TD 6

Asservissement par traitement d'image d'une plateforme Hexapode – Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2016.

Mise en situation

Objectif

En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

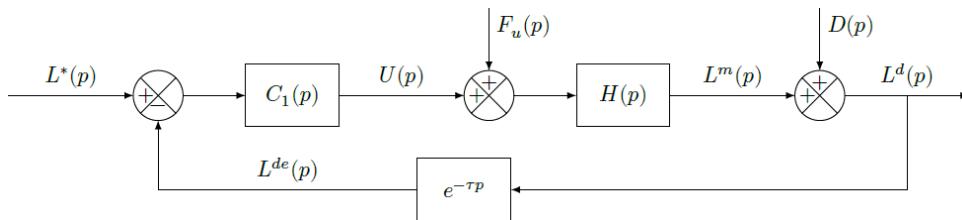
Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure ci-contre.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$, la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur $\tau = 0,04$ s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel est le suivant :

- ▶ pulsation de coupure ω_c à 0 dB en boucle ouverte $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$;
- ▶ marge de phase $\Delta\varphi \geq 45^\circ$;
- ▶ temps de réponse vis-à-vis de la consigne doit être inférieur à 50 ms;
- ▶ temps de réponse vis-à-vis de la perturbation doit être inférieur à 100 ms.

Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation $L^{de}(t)$ de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté $C_1(p)$ et la consigne $L^*(p)$, est représentée par le schéma de la figure suivante.



En raison de la présence de bruits de mesure (signaux non représentés sur les schémas fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

Question 1 La figure en toute fin de document montre le diagramme de Bode de la fonction $H(p)$. Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant $C_1(p) = 1$).

Question 2 Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

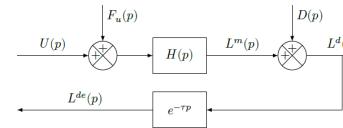


FIGURE 2 – Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement

FIGURE 3 – Structure de commande à une boucle

- ▶ compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur $C_1(j\omega)$ doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur τ ;
- ▶ en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_{i1}p}\right)$, justifier qu'un correcteur de ce type :
 - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure;
 - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards. La figure suivante montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel (a) représentant la réalisation de la commande ($X(p)$ est la transformée de Laplace d'une grandeur $x(t)$ interne au régulateur), d'autre part un schéma fictif (b).

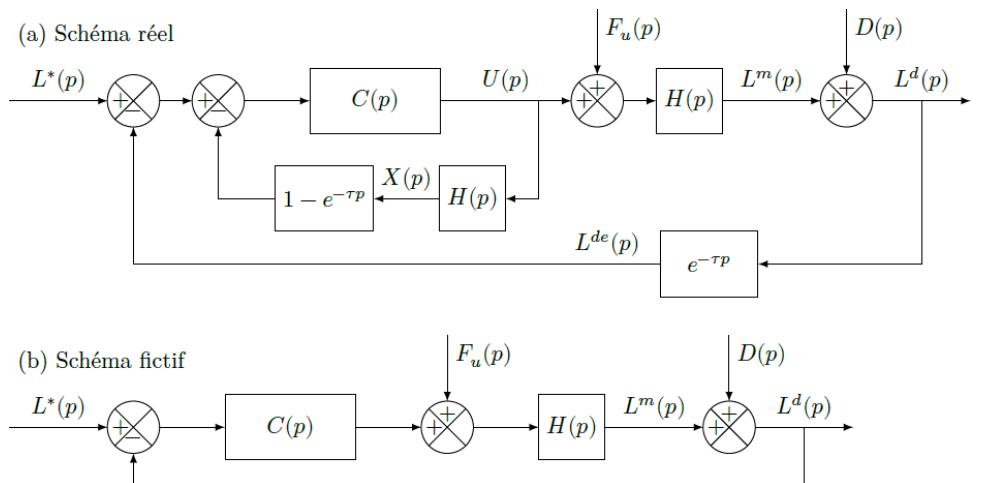


FIGURE 4 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard

Question 3 En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$ permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit $\arg(C(j\omega))$, que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale T_i ;
- ▶ pour la valeur de T_i obtenue, déterminer alors la valeur du gain K permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

Question 4 Pour une consigne nulle $L^*(t)$, une perturbation en sortie nulle $d(t) = 0$ et un échelon de perturbation en entrée $f_u(t) = F_0 h(t)$ où $h(t)$ est l'échelon d'Heaviside :

- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));

- ▶ compte tenu de la forme de $H(p)$, en déduire alors le comportement de la grandeur $x(t)$ lorsque t tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

- ▶ une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe $L^m(t)$ permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence $L^{m*}(t)$. Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et on note $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$ la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne;
- ▶ la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée $L^{de}(t)$.

La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée $T(p)$ où :

- ▶ $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$ est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure);
- ▶ $L^{m*}(p)$ est la consigne de l'asservissement de la boucle interne;
- ▶ l'effet de la perturbation $F_u(p)$ est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée;
- ▶ les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace $D(p)$.

Pour la conception de la loi de commande :

- ▶ une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée;
- ▶ on synthétise dans ce cas un correcteur $C_2(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p}\right)$ de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur $R_e(p)$ est réalisé en utilisant $C_2(p)$ selon une structure identique à celle de la figure précédente (a);
- ▶ le calcul du régulateur $C_2(p)$ ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.

Question 5 En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur $L^m(t)$ en régime permanent, soit $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$, en réponse à une perturbation $d(t)$ en échelon $d(t) = D_0 h(t)$. Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur $R_e(p)$ selon le schéma de la figure 3(a) reste stable du point vue interne.

Retour sur le cahier des charges

La figure suivante montre les évolutions temporelles de la position $L^d(t)$ en réponse à une consigne en échelon $L^*(t) = L_0 h(t - 0,02)$ avec $L_0 = 10 \text{ mm}$ et à une perturbation en échelon $D^*(t) = D_0 h(t - 0,02)$ avec $D_0 = 10 \mu\text{m}$.

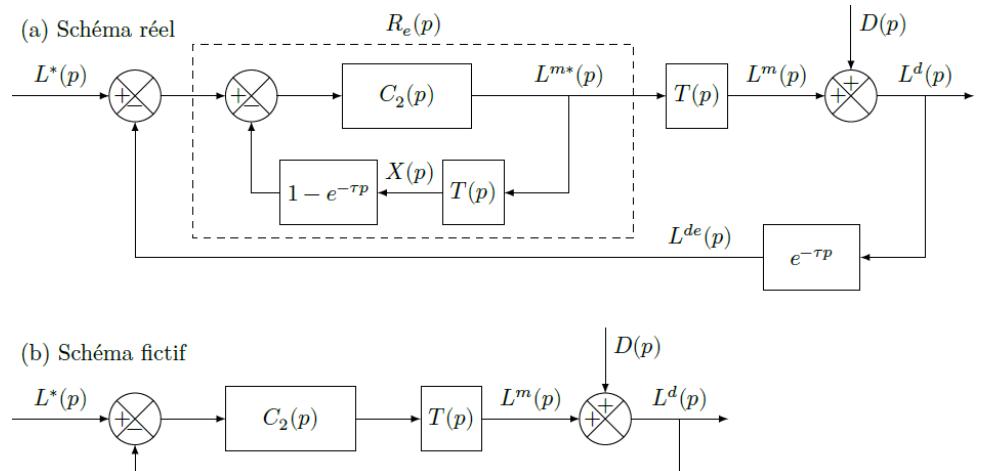
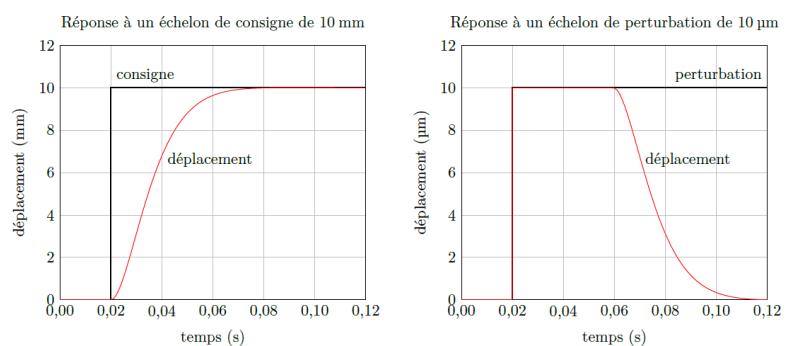


FIGURE 5 – Modèle de commande avec une boucle interne intégrée

Question 6 Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.



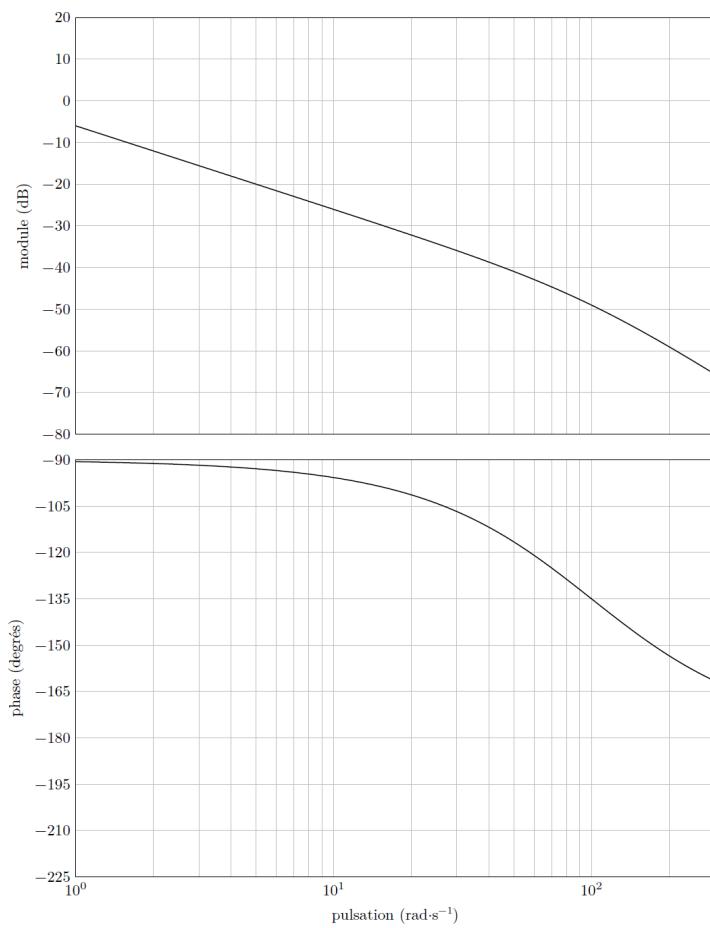


Figure B Diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$



TD 6

Asservissement par traitement d'image d'une plateforme Hexapode – Corrigé

Concours Centrale Supelec PSI 2016.

 COR  COR

Mise en situation

Analyse d'une structure mono-boucle

Question 1 La figure en toute fin de document montre le diagramme de Bode de la fonction $H(p)$. Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant $C_1(p) = 1$).

Correction

La fonction de transfert de la FTBO non corrigée est donc $F_{BO}(p) = H(p)e^{-\tau p}$.

On note $G_{dB}(\omega)$ le gain de la fonction de transfert et $\varphi(\omega)$ la phase.

$e^{-\tau j\omega}$ est un nombre complexe de gain 1 et de phase $-\tau\omega = -0,04\omega$ (en rad). En degrés, le retard ajoute un déphasage de $-0,04\omega \frac{180}{\pi}$. Ainsi :

- ▶ pour $\omega = 1$ rad/s, la phase est baissée de 2° ,
- ▶ pour $\omega = 10$ rad/s, la phase est baissée de 20° ,
- ▶ pour $\omega = 50$ rad/s, la phase est baissée de 100° ,
- ▶ pour $\omega = 100$ rad/s, la phase est baissée de 220° ...

Ce qui permet de modifier le diagramme de bode de la phase.

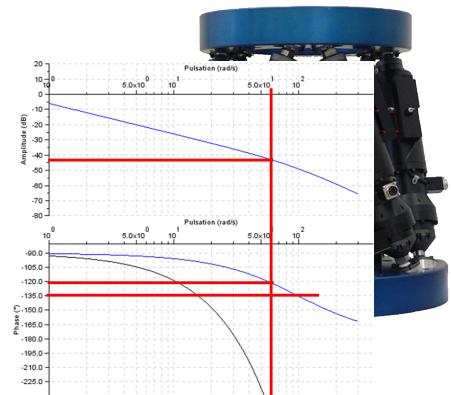


FIGURE 6 – FTBO retardée.

Question 2 Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- ▶ compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur $C_1(j\omega)$ doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur τ ;
- ▶ en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_{i1}p}\right)$, justifier qu'un correcteur de ce type :
 - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure ;
 - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

Correction

D'après le cahier des charges :

- ▶ pulsation de coupure ω_c à 0 dB en boucle ouverte $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$;
- ▶ marge de phase $\Delta\varphi \geq 45^\circ$.

Pour le système non retardé, le correcteur PI permettra de remonter le gain de 45 dB afin d'obtenir la pulsation de coupure souhaitée. En réglant T_i tel que $1/T_i = 60/10$, on pourra conserver une marge de phase de 55 à 60° ce qui est compatible avec le cahier des charges (ou la descendre à 45° en affinant la valeur de T_i).

Pour le système retardé, le correcteur PI permettra de régler la pulsation de coupure, mais la phase est trop basse pour espérer la corriger ainsi.

Structure de commande adaptée à un système avec retard

Question 3 En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$ permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit $\arg(C(j\omega))$, que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale T_i ;
- ▶ pour la valeur de T_i obtenue, déterminer alors la valeur du gain K permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

Correction

Le système non corrigé a une marge de phase de 60° . On veut que la pulsation de coupure soit de 60 rad/s .

On cherche donc T_i , tel que $\arg\left(K \frac{T_i p + 1}{T_i p}\right) = -15^\circ$ pour 60 rad/s . Soit $\arctan(60T_i) - 90 = -15$ soit $T_i = \frac{\tan 75}{60} \simeq 0,062 \text{ s}$.

De plus pour que la pulsation de coupure soit à 60 rad/s , il faut que $\left|K \frac{T_i p + 1}{T_i p}\right| = 10 \frac{45}{20}$ pour 60 rad/s .

On a donc $K \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} = 60T_i \times 10 \frac{45}{20}$ et $K = \frac{0,062 \times 60 \times 10 \frac{45}{20}}{\sqrt{0,062^2 \times 60^2 + 1}} = 171$.

Question 4 Pour une consigne nulle $L^*(t)$, une perturbation en sortie nulle $d(t) = 0$ et un échelon de perturbation en entrée $f_u(t) = F_0 h(t)$ où $h(t)$ est l'échelon d'Heaviside :

- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- ▶ compte tenu de la forme de $H(p)$, en déduire alors le comportement de la grandeur $x(t)$ lorsque t tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

Correction

Pour le schéma a, on a $U(p) = -L^d(p)e^{-\tau p} \times \frac{C(p)}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{\tau p})}$ et $L^d(p) = H(p)(U(p) + F_u(p))$. On a donc $U(p) = -H(p)(U(p) + F_u(p))e^{-\tau p} \times \frac{C(p)}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{\tau p})}$.

$$\Rightarrow U(p) \left(1 + \frac{C(p)H(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{\tau p})}\right) = -\frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{\tau p})}$$

$$\Rightarrow U(p) \frac{1 + C(p)H(p)(1 - e^{\tau p}) + C(p)H(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{\tau p})} = -\frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{\tau p})}$$

$$\Rightarrow U(p) = -\frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)(1 - e^{\tau p}) + C(p)H(p)e^{-\tau p}}$$

$$\Rightarrow U(p) = -\frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)}$$

On a alors, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{p \rightarrow 0} -p \frac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1 + C(p)H(p)}$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{K \frac{1 + T_i p}{T_i p} \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)} F_0 e^{-\tau p}}{1 + K \frac{1 + T_i p}{T_i p} \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}} = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{0,5K(1 + T_i p)F_0 e^{-\tau p}}{T_i p^2(1 + 0,01p) + 0,5K(1 + T_i p)} = -F_0$$

Le signal de commande sera ensuite intégré par la fonction de transfert $H(p)$. $X(p)$ divergera donc. La commande n'est donc pas stable.

Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Question 5 En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur $L^m(t)$ en régime permanent, soit $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$, en réponse à une perturbation $d(t)$ en échelon $d(t) = D_0 h(t)$. Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur $R_e(p)$ selon le schéma de la figure 3(a) reste stable du point vue interne.

Correction

On a $L^m(p) = -L^d(p)e^{-\tau p} \frac{C_2(p)}{1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p)} T(p)$ et $L^d(p) = L^m(p) + D(p)$. Ainsi,

$$L^m(p) = -(L^m(p) + D(p))e^{-\tau p} \frac{C_2(p)}{1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p)} T(p)$$

$$\Rightarrow L^m(p) \left(1 + \frac{C_2(p)T(p)e^{-\tau p}}{1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p)} \right) = -\frac{C_2(p)D(p)T(p)e^{-\tau p}}{1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p)}$$

$$\Rightarrow L^m(p)(1 + C_2(p)(1 - e^{-\tau p})T(p) + C_2(p)T(p)e^{-\tau p}) = -C_2(p)D(p)T(p)e^{-\tau p}$$

$$\Rightarrow L^m(p) = -\frac{C_2(p)D(p)T(p)e^{-\tau p}}{1 + C_2(p)T(p)}$$

$$K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p} \right) \frac{1}{(1 + 0,05p)^2} e^{-\tau p}$$

$$\text{On a donc } L^m(p) = -\frac{K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p} \right) \frac{1}{(1 + 0,05p)^2} D(p)}{1 + K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p} \right) \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}}$$

$$= -\frac{K_2 \frac{T_{i2}p + 1}{T_{i2}p} \frac{1}{(1 + 0,05p)^2} e^{-\tau p}}{1 + K_2 \frac{T_{i2}p + 1}{T_{i2}p} \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}} D(p) = -\frac{K_2(T_{i2}p + 1)e^{-\tau p}}{T_{i2}p(1 + 0,05p)^2 + K_2(T_{i2}p + 1)} D(p)$$

$$\text{On a alors, } \lim_{t \rightarrow \infty} L^m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pL^m(p) = -D_0 \frac{K_2}{K_2} = -D_0.$$

$$\text{On a alors } L^d(t) = D_0 - D_0 = 0.$$

Retour sur le cahier des charges

Question 6 Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.

Correction

D'après le cahier des charges :

- temps de réponse vis-à-vis de la consigne doit être inférieur à 50 ms, le temps de réponse à 5% mesuré est de $0,06 - 0,02 = 0,04$ s $< 0,05$ s. Critère validé;
- temps de réponse vis-à-vis de la perturbation doit être inférieur à 100 ms. Le temps

de réponse à 5% mesuré vis-à-vis de la perturbation est de 80 ms. CDC respecté.

TD 7

Vanoise Express – Sujet

E3A – PSI – 2014.

02 COR 03 COR 04 COR

Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.
Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	Ecart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M\varphi \geq 45^\circ$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1 \text{ rad/s}$

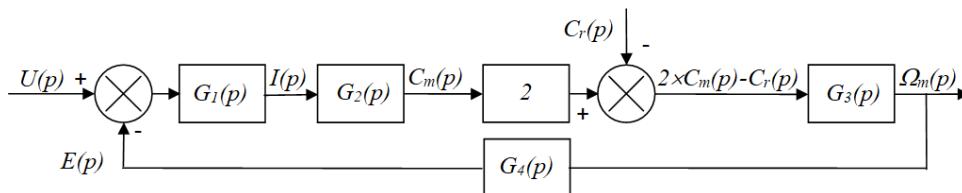


Modélisation du moteur à courant continu³

Hypothèses et données :

- ▶ on suppose les conditions initiales nulles;
- ▶ les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique;
- ▶ $L = 0,59 \text{ mH}$ inductance d'un moteur;
- ▶ $R = 0,0386 \Omega$ résistance interne d'un moteur;
- ▶ $f = 6 \text{ N m s/rad}$ coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs;
- ▶ $J = 800 \text{ kg m}^2$ moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs;
- ▶ $c_m(t) = k_T i(t)$ avec $k_T = 5,67 \text{ Nm/A}$ (constante de couple d'un moteur);
- ▶ $e(t) = k_E \omega_m(t)$ avec $k_E = 5,77 \text{ Vs/rad}$ (constante électrique d'un moteur)
- ▶ équations de la dynamique : $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$;
- ▶ loi des mailles : $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$.

Question 1 Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminer les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.



Question 2 $\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$. Exprimer les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

3: On peut passer directement à la question 6 pour aborder plus rapidement les asservissements.

Notations :

- ▶ on notera $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- ▶ $u(t)$ tension d'alimentation des moteurs;
- ▶ $i(t)$ intensité traversant un moteur;
- ▶ $e(t)$ force contre électromotrice d'un moteur;
- ▶ $\omega_m(t)$ vitesse de rotation d'un moteur;
- ▶ $c_m(t)$ couple d'un seul moteur;
- ▶ $c_r(t)$ couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

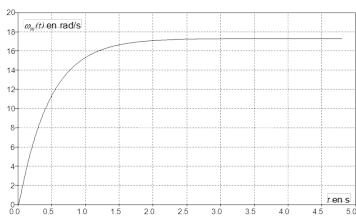


FIGURE 7 – Réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V.

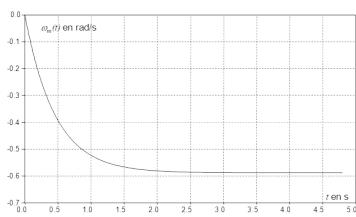
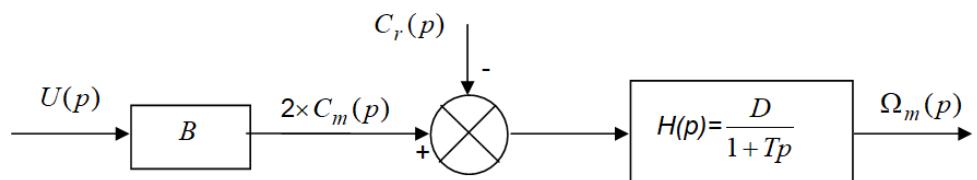


FIGURE 8 – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m.

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V (le couple de perturbation $c_r(t)$ est nul);
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m (la tension $u(t)$ est nulle).

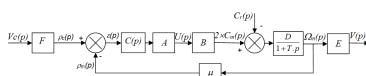
Question 3 Choisir et justifier un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminer numériquement les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



Question 4 Donner la valeur numérique des trois constantes B , D et T .

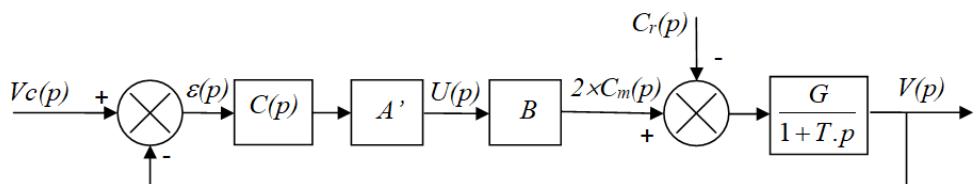
La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.



- ▶ La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F .
- ▶ Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0,716 \text{ V s/rad}$ transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$.
- ▶ Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A , qui alimente les deux moteurs électriques.
- ▶ La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain $E = 0,1 \text{ m}$ (réducteur et rayon de la poulie).

Question 5 Déterminer l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t) = 0$ entraîne $v_c(t) = v(t)$. Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients E et F calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients A' et G . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes : $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4 \text{ sNm}$; $G = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m/(sNm)}$ et $T = 0,47 \text{ s}$.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

Question 6 Justifier en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

Question 7 On suppose $C_r(p) = 0$. Calculer en fonction de C_0 , A' , B , G et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12 \text{ m/s}$. Faire l'application numérique.

On suppose $V_c(p) = 0$.

Question 8 Calculer en fonction de C_0 , A' , B , G et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation en échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$ qui modéliseraient la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

Question 9 Faire également une application numérique si $C_{r0} = 7460 \text{ Nm}$ qui modéliserait la montée vers La Plagne.

Question 10 Donner numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

Question 11 Existe-t-il une valeur réaliste de C_0 pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifier.

Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur $C(p) = \frac{C_i}{p}$.

Question 12 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée $\text{FTBO}(p)$. Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.

Question 13 Tracer le diagramme asymptotique de Bode de $\text{FTBO}(p)$. Tracer également l'allure des courbes. Voir figure 8

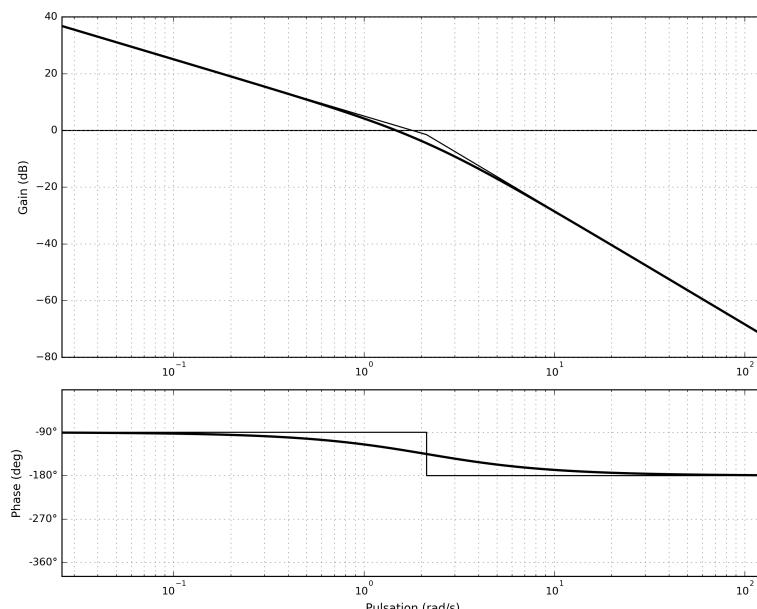


FIGURE 9 – Diagramme de Bode correspondant à la question 13 ($C_i = 1$).

Question 14 Donner la valeur maximale de C_i permettant de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

Question 15 Trouver la valeur minimale de C_i permettant de respecter le critère de « Pulsion de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifier.

Question 16 On suppose $\text{Cr}(p)=0$. Calculer numériquement l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12 \text{ m/s}$.

Question 17 On suppose $V_c(p) = 0$. Calculer numériquement l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270 \text{ N m}$ qui modéliseraient la descente des « Arcs ».

Question 18 Donner numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$. Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié ? Justifier.

On suppose $C_r(p) = 0$.

Question 19 Calculer l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifier.

Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$, produit de la fonction $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a > 1$ (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne figure 9 le diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1+Tp)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans $C_a(p)$ (c'est-à-dire pour $C_a(p) = 1$).

Question 20 Montrer que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?

La fonction $C_a(p)$ va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsion de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

Question 21 Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de -135° ?

Question 22 Tracer en fonction de a , τ et K les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a>1$. Préciser clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Préciser de même les pulsations des points particuliers.

Question 23 La phase maximum φ_{\max} ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$. Calculer numériquement a pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

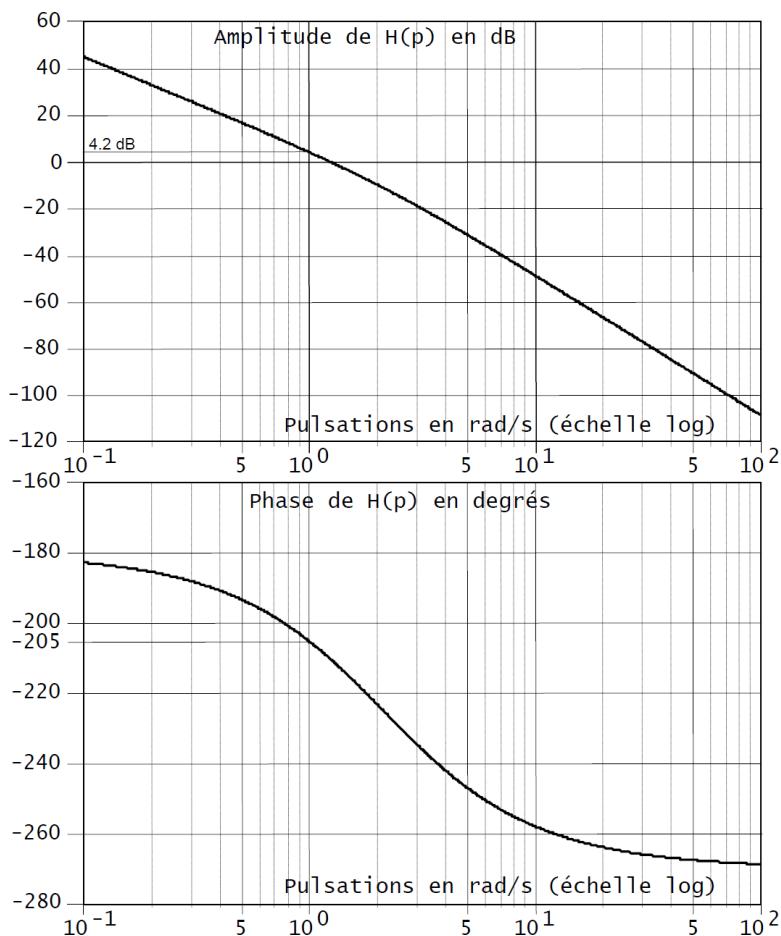


FIGURE 10 – Diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1 + Tp)}$

Question 24 Donner l’expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

Question 25 En déduire la valeur numérique de τ pour que φ_{\max} soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

Question 26 Calculer numériquement la valeur à donner à K pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Préciser la démarche utilisée.

Question 27 Les critères « Écart statique en vitesse en présence d’une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l’absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifier.

Question 28 Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifier.



TD 7

Vanoise Express – Corrigé

E3A – PSI – 2014.

02 COR 03 COR 04 COR

Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.
Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	Ecart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M\varphi \geq 45^\circ$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1 \text{ rad/s}$

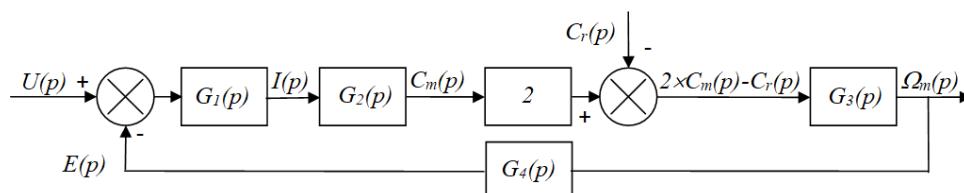


Modélisation du moteur à courant continu⁴

Hypothèses et données :

- ▶ on suppose les conditions initiales nulles;
- ▶ les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique;
- ▶ $L = 0,59 \text{ mH}$ inductance d'un moteur;
- ▶ $R = 0,0386 \Omega$ résistance interne d'un moteur;
- ▶ $f = 6 \text{ N m s/rad}$ coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs;
- ▶ $J = 800 \text{ kg m}^2$ moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs;
- ▶ $c_m(t) = k_T i(t)$ avec $k_T = 5,67 \text{ Nm/A}$ (constante de couple d'un moteur);
- ▶ $e(t) = k_E \omega_m(t)$ avec $k_E = 5,77 \text{ Vs/rad}$ (constante électrique d'un moteur)
- ▶ équations de la dynamique : $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$;
- ▶ loi des mailles : $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$.

Question 1 Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminer les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.



Question 2 $\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$. Exprimer les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

4: On peut passer directement à la question 6 pour aborder plus rapidement les asservissements.

Notations :

- ▶ on notera $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- ▶ $u(t)$ tension d'alimentation des moteurs;
- ▶ $i(t)$ intensité traversant un moteur;
- ▶ $e(t)$ force contre électromotrice d'un moteur;
- ▶ $\omega_m(t)$ vitesse de rotation d'un moteur;
- ▶ $c_m(t)$ couple d'un seul moteur;
- ▶ $c_r(t)$ couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

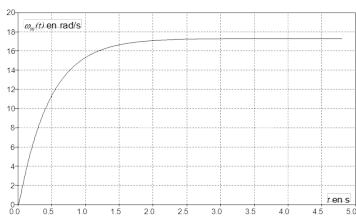


FIGURE 11 – Réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V.

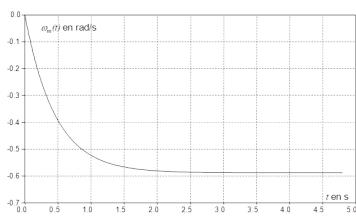
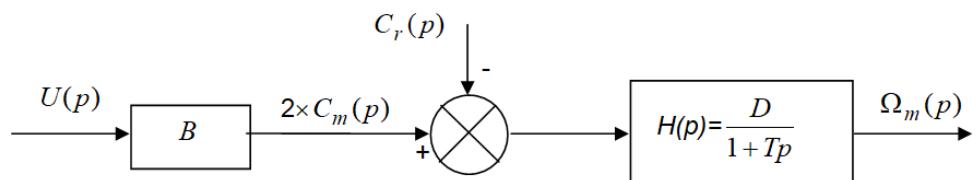


FIGURE 12 – Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m.

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V (le couple de perturbation $c_r(t)$ est nul);
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m (la tension $u(t)$ est nulle).

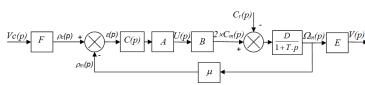
Question 3 Choisir et justifier un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminer numériquement les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



Question 4 Donner la valeur numérique des trois constantes B , D et T .

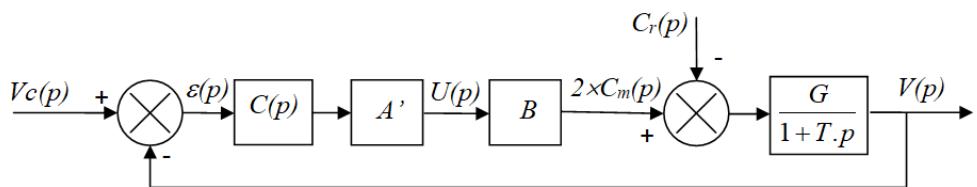
La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.



- ▶ La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F .
- ▶ Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0,716 \text{ V s/rad}$ transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$.
- ▶ Un correcteur de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A , qui alimente les deux moteurs électriques.
- ▶ La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain $E = 0,1 \text{ m}$ (réducteur et rayon de la poulie).

Question 5 Déterminer l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t) = 0$ entraîne $v_c(t) = v(t)$. Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients E et F calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients A' et G . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes : $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4 \text{ s/N}$; $G = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m/(sNm)}$ et $T = 0,47 \text{ s}$.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

Question 6 Justifier en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

Question 7 On suppose $C_r(p) = 0$. Calculer en fonction de C_0 , A' , B , G et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12 \text{ m/s}$. Faire l'application numérique.

On suppose $V_c(p) = 0$.

Question 8 Calculer en fonction de C_0 , A' , B , G et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation en échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$ qui modéliseraient la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

Question 9 Faire également une application numérique si $C_{r0} = 7460 \text{ Nm}$ qui modéliserait la montée vers La Plagne.

Question 10 Donner numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

Question 11 Existe-t-il une valeur réaliste de C_0 pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifier.

Utilisation d'un correcteur intégral

$$\text{On choisit maintenant le correcteur } C(p) = \frac{C_i}{p}.$$

Question 12 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée $\text{FTBO}(p)$. Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.

Question 13 Tracer le diagramme asymptotique de Bode de $\text{FTBO}(p)$. Tracer également l'allure des courbes. Voir figure 8

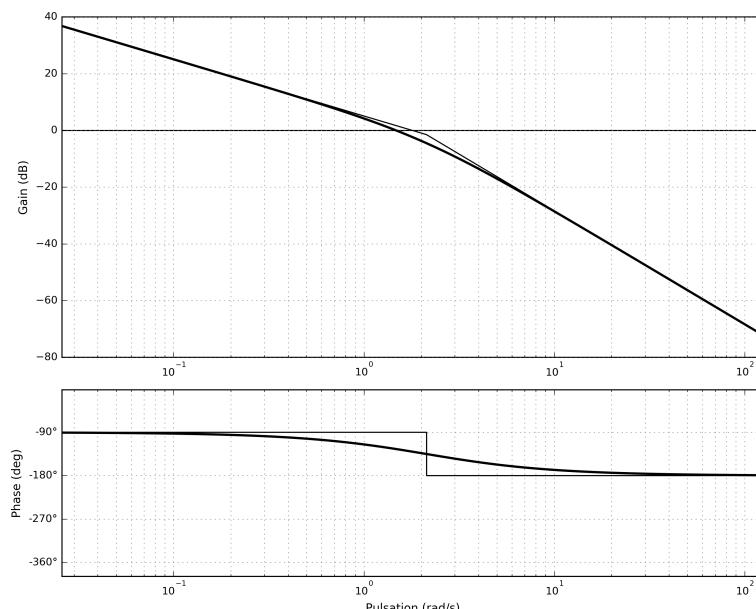


FIGURE 13 – Diagramme de Bode correspondant à la question 13 ($C_i = 1$).

Question 14 Donner la valeur maximale de C_i permettant de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

Question 15 Trouver la valeur minimale de C_i permettant de respecter le critère de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifier. Il faut que la pulsation de coupure à 0 dB soit supérieure à 1 rad/s. Sur la BO non corrigée, on mesure que le gain vaut 4,23 dB pour cette pulsation. On a donc $C_{i\min} = 0,61$.

Question 16 On suppose $Cr(p)=0$. Calculer numériquement l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12 \text{ m/s}$.

Question 17 On suppose $V_c(p) = 0$. Calculer numériquement l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270 \text{ N m}$ qui modélisera la descente des « Arcs ».

Question 18 Donner numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$. Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié ? Justifier.

On suppose $C_r(p) = 0$.

Question 19 Calculer l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifier.

Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$, produit de la fonction $C_a(p) = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$ avec $a > 1$ (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne figure 9 le diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \frac{A'BG}{p^2 (1 + Tp)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans $C_a(p)$ (c'est-à-dire pour $C_a(p) = 1$).

Question 20 Montrer que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?

La fonction $C_a(p)$ va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

Question 21 Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de -135° ?

Question 22 Tracer en fonction de a , τ et K les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$ avec $a > 1$. Préciser clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Préciser de même les pulsations des points particuliers.

Question 23 La phase maximum φ_{\max} ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin \varphi_{\max} = \frac{a - 1}{a + 1}$. Calculer numériquement a pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

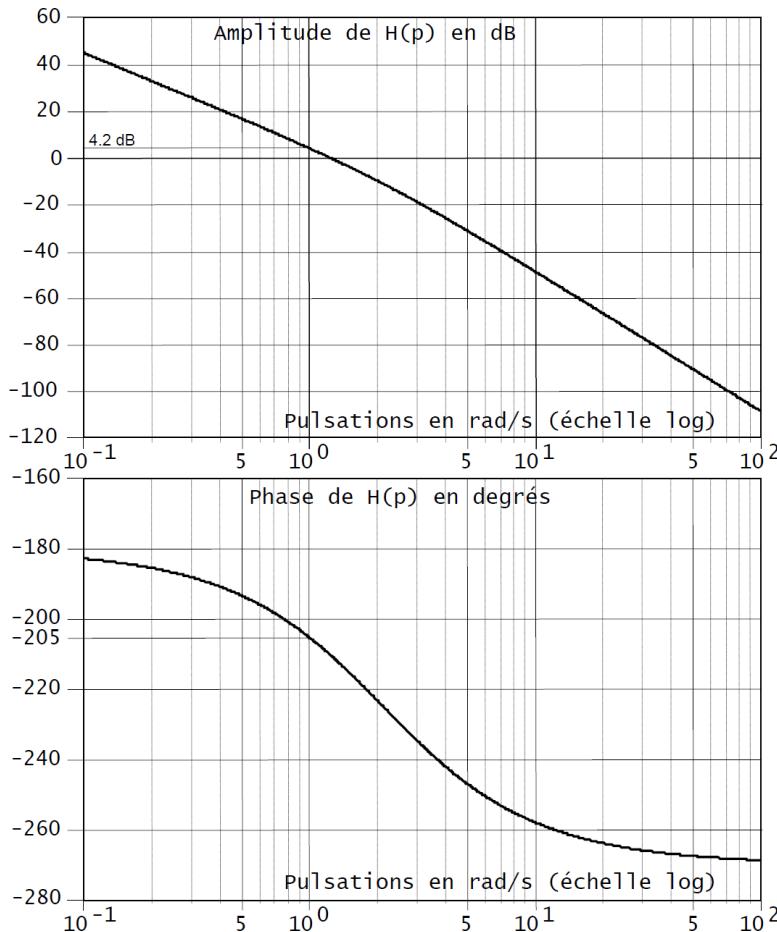


FIGURE 14 – Diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1 + Tp)}$

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

Question 24 Donner l’expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

Question 25 En déduire la valeur numérique de τ pour que φ_{\max} soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

Question 26 Calculer numériquement la valeur à donner à K pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Préciser la démarche utilisée.

Question 27 Les critères « Écart statique en vitesse en présence d’une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l’absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifier.

Question 28 Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifier.