

10 Application du Principe Fondamental de la Dynamique

04 DYN

10.1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

Définition – Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique

Soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égale au torseur dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \mathcal{T}(\overline{E} \rightarrow E) \right\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)} \end{array} \right\}_A.$$

- ▶ On note $\overrightarrow{R_d(S/R_0)}$ la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie G .
- ▶ Le **moment dynamique** dépend du point A et se note $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$.

Du Principe Fondamental de la dynamique découlent plusieurs **théorèmes généraux**.

10.1.1 Théorème de la résultante dynamique

Théorème – Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement

10.1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général	1
10.2 Torseur cinétique	2
10.3 Torseur dynamique	4

Emilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

Florestan Mathurin, *Géométrie des masses*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

de E par rapport à R_0 :

$$\overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)}.$$

10.1.2 Théorème du moment dynamique

Théorème – Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}.$$

10.2 Torseur cinétique

10.2.1 Définition

Définition – Torseur cinétique

Le **torseur cinétique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c}(S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- ▶ La résultante du torseur cinétique, $\overrightarrow{R_c}(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_c}(S/R_0) = m \overrightarrow{V}(G/R_0)$.
- ▶ Le moment cinétique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\sigma}(B, S/R_0) = \overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$.

10.2.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

Propriété –

Pour un solide S de masse m dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

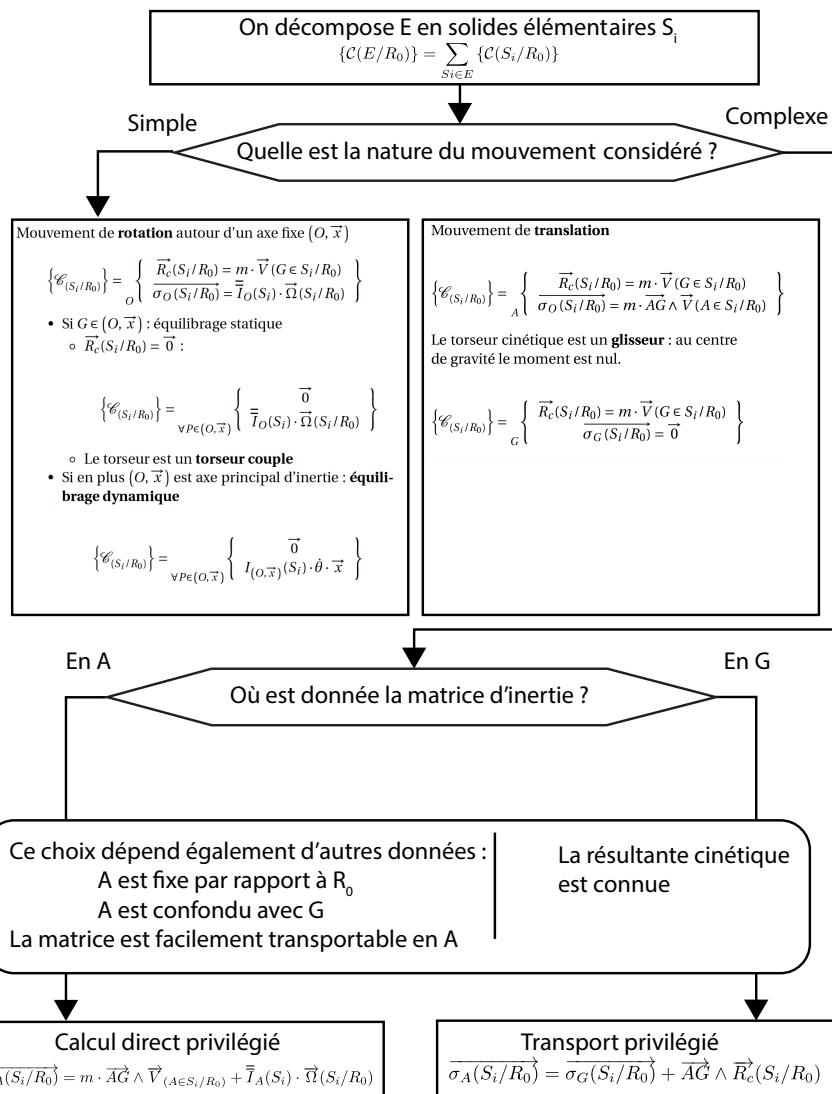
$$\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A, S/R_0)}.$$

10.2.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point A fixe dans le mouvement de S/R_0 , on a : $\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.
- En appliquant cette formule en G , centre d'inertie de S , on a : $\overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)} = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.

10.2.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne la méthodologie de calcul du moment cinétique en un point A sur la figure suivante.



10.3 Torseur dynamique

10.3.1 Définition

Définition – Torseur dynamique

Le **torseur dynamique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- ▶ La résultante du torseur dynamique, $\overrightarrow{R_d}(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0)$.
- ▶ Le moment dynamique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\delta(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R_0)$.

10.3.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Propriété – Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Pour un solide S de masse M dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

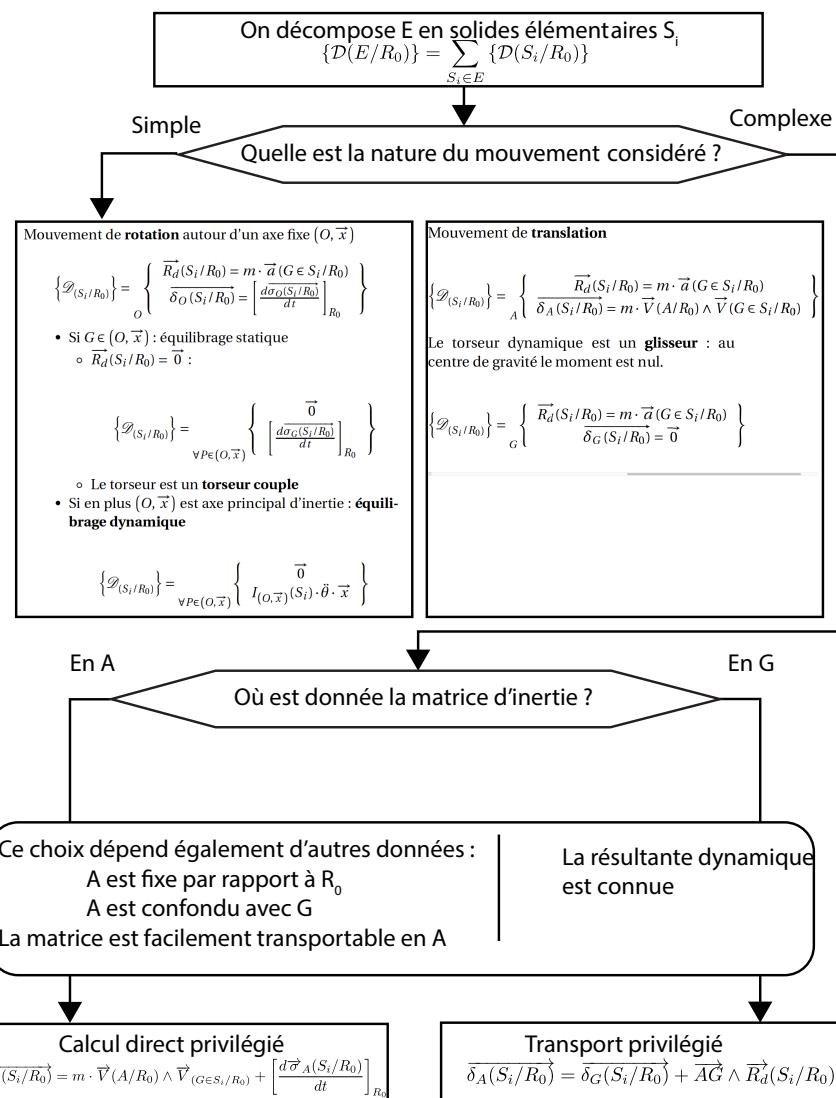
- ▶ Relation entre les **résultantes** : $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{R_c}(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$.
- ▶ Relation entre les **moments** : $\overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\delta(A, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$.

10.3.3 Cas particuliers

- ▶ En appliquant cette formule en un point O fixe dans R_0 , on a : $\overrightarrow{\delta(O, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\delta(O, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0}$.
- ▶ En appliquant cette formule en un point G , **centre d'inertie de S** , on a : $\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0}$.

10.3.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne l'algorithme de calcul du moment dynamique en un point A sur la figure ci-dessous.



Bilan

Point considéré	Point quelconque A	Centre de gravité G	Point fixe dans \mathcal{R}_0 A
Torseur cinétique $\{\mathcal{E}(S/R_0)\}$	$\begin{cases} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{V(A, S/R_0)} \end{cases}_A$	$\begin{cases} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)} = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} \end{cases}_G$	$\begin{cases} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} \end{cases}_A$
Torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_0)\}$	$\begin{cases} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, S/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[\frac{d\sigma(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_0)} \end{cases}_A$	$\begin{cases} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, S/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(G, S/R_0)} = \left[\frac{d\sigma(G, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{cases}_G$	$\begin{cases} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, S/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[\frac{d\sigma(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{cases}_A$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_d(1+2/0)} &= \overrightarrow{R_d(1/0)} + \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)} + m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} &= \overrightarrow{\delta(A, 1/0)} + \overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \end{aligned}$$

Application 1

Pendule – Sujet

Mise en situation

On s'intéresse à un pendule guidé par une glissière. On fait l'hypothèse que le problème est plan.

- ▶ On note 1 la pièce de masse M_1 et de centre de gravité G_1 . $\overrightarrow{OA} = \lambda(t)\vec{x}_0 - h\vec{y}_0$.
- ▶ On note 2 la pièce de masse M_2 et de centre de gravité G et de matrice d'inertie $I_1(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$. On a $\overrightarrow{AG} = L\vec{x}_2$

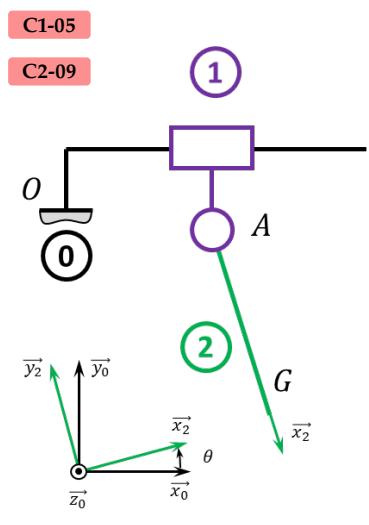
Travail à réaliser

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)}$ en utilisant deux méthodes différentes.

Question 2 En déduire le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$.

Question 3 Isoler 2 et écrire le théorème du moment dynamique en A en projection sur \vec{z}_0 .

Question 4 Isoler $\{1+2\}$ et écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x}_0 .



Application 1

Pendule – Corrigé

Mise en situation

On s'intéresse à un pendule guidé par une glissière. On fait l'hypothèse que le problème est plan.

- On note 1 la pièce de masse M_1 et de centre de gravité G_1 . $\overrightarrow{OA} = \lambda(t)\vec{x}_0 - h\vec{y}_0$.
- On note 2 la pièce de masse M_2 et de centre de gravité G et de matrice d'inertie $I_1(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$. On a $\overrightarrow{AG} = L\vec{x}_2$

Travail à réaliser

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)}$ en utilisant deux méthodes différentes.

Correction

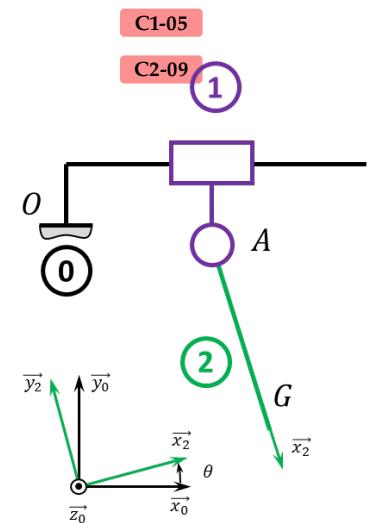
Cinématique

$$\text{On a } \overrightarrow{V(G, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{OG}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\lambda\vec{x}_0 - h\vec{y}_0 + L\vec{x}_2]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t)\vec{x}_0 + L\dot{\theta}\vec{y}_2.$$

$$\text{On a } \overrightarrow{\Gamma(G, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(G, 2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\vec{x}_0 + L\ddot{\theta}\vec{y}_2 - L\dot{\theta}^2\vec{x}_2.$$

Cinétique & dynamique

$$\text{On a } \overrightarrow{\delta(G, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)}]_{\mathcal{R}_0}$$



Question 2 En déduire le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(2/0)\}$.

Correction

Question 3 Isoler 2 et écrire le théorème du moment dynamique en A en projection sur \vec{z}_0 .

Correction

Question 4 Isoler {1+2} et écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x}_0 .

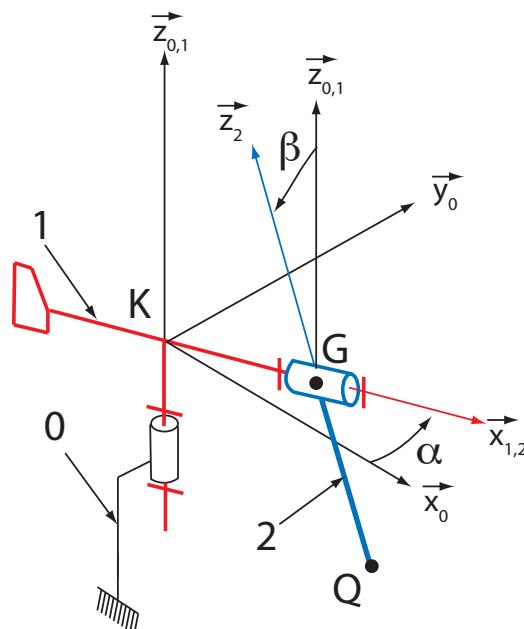
Correction

Application 2

Éolienne bipale – Sujet

04 DYN

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



D'après Émilien Durif.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides. On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 crée un couple C_m selon la direction \vec{z}_0 .

L'éolienne est composée de :

- ▶ un support **0**, auquel on associe un repère $R_0 = (K; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- ▶ une girouette **1** (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ avec le support **0**. On lui associe un repère $R_1 = (K; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}_1) : $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$;
- ▶ une hélice **2**, en liaison pivot d'axe $(K, \vec{x}_{1,2})$ avec **1**. On lui associe un repère $R_2 = (K; \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ choisi tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. On note M

sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\overrightarrow{KG} = a \vec{x}_1$.
On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\bar{\bar{I}}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd 3 assimilé à une masse ponctuelle m au point Q . On pose $\overrightarrow{GQ} = -b \vec{z}_2$.

Question 1 Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Question 3 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment cinétique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$ calculé au point K de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)}$

Question 6 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)}$.

Question 7 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$.

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon $\vec{z}_0 : \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$.

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.



Éléments de correction

- 1.
2. $C_m = (\overrightarrow{\delta(K, 1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 3/R_0)}) \cdot \vec{z}_0$
3. $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J\dot{\alpha}$
4. $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \sin \beta + M \cdot a^2 \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cos \beta + M \cdot a^2 \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$
5. $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = m [ab\dot{\beta}\vec{z}_2 + a^2\dot{\alpha}\vec{z}_1 + b^2\dot{\beta}\vec{x}_2 + ba\dot{\alpha}\cos\beta \cdot \vec{x}_1 + b^2\dot{\alpha}\sin\beta\vec{y}_2]$
6. $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = J\ddot{\alpha}$.
7. $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot{\alpha} [B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + Ma^2] + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \sin \beta [B - C]$.
8. $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = m [ab (\dot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)]$
9. $C_m = -mab\dot{\beta}^2 \sin \beta$

Application 2

Éolienne bipale – Corrigé

04 DYN

D'après Émilien Durif.

Question 1 Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

Correction



Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Correction

On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ($E = \{1 + 2 + 3\}$) en projection sur l'axe (K, \vec{z}_0) : $\overrightarrow{\mathcal{M}(K, \bar{E} \rightarrow E)} \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{\delta(K, E/R_0)} \cdot \vec{z}_0$
 $\Leftrightarrow C_m = (\overrightarrow{\delta(K, 1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 3/R_0)}) \cdot \vec{z}_0.$

Question 3 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment cinétique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0$.

Correction

- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (K, \vec{z}_0) :
- $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = (\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \vec{\Omega}(1/0)) \cdot \vec{z}_0 = (\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0) \cdot \vec{z}_0.$

Or on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}) soit : $\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0 = J$.

Ainsi : $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J\dot{\alpha}$.

Remarque

En considérant que $\bar{\bar{I}}_K(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & J \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$, $\bar{\bar{I}}_K(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \begin{pmatrix} -E_1\dot{\alpha} \\ -D_1\dot{\alpha} \\ J\dot{\alpha} \end{pmatrix}$ et
 $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J\dot{\alpha}$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$ calculé au point K de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

Correction

- ▶ Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- ▶ On connaît l'opérateur d'inertie en G , on calcule donc : $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} = \bar{I}_G(2) \cdot \overrightarrow{\Omega}(2/0)$.
- ▶ On calcule $\overrightarrow{\Omega}(2/0) : \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} (\cos \beta \vec{z}_2 + \sin \beta \vec{y}_2)$.
- ▶ On calcule $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$
 $= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$
- ▶ On calcule $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} :$
 - $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{R_c}(2/0) = \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} + a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0)$
 - On calcule $\overrightarrow{V}(G \in 2/0) : \overrightarrow{V}(G \in 2/0) = \overrightarrow{V}(K \in 2/0) + \overrightarrow{GK} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \vec{0} - a \cdot \vec{x}_1 \wedge (\dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1) = a \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1$
 - On calcule $a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0) : a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0) = a \cdot \vec{x}_1 \wedge M (a \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1) = M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$
 - On en déduit $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)}$

Correction

- ▶ Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi $\overrightarrow{\sigma(Q, 3/0)} = \vec{0}$.
- ▶ $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = \overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \vec{V} (Q \in 3/0) :$
 - On calcule $\overrightarrow{KQ} : \overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2$
 - On calcule $\vec{V}(Q \in 3/0) : \vec{V}(Q \in 3/0) = \vec{V}(Q \in 3/2) + \vec{V}(Q \in 2/1) + \vec{V}(Q \in 1/0) = \vec{0} + \vec{V}(G \in 2/1) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \vec{V}(G \in 1/0) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \vec{0} + b \cdot \vec{z}_2 \wedge \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + b \cdot \vec{z}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}$
 - On calcule $\overrightarrow{KQ} \wedge m \vec{V}(Q \in 3/0) :$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KQ} \wedge m \vec{V}(Q \in 3/0) &= m \cdot [a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2] \wedge [b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}] \\ &= m [a \cdot b \cdot \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2] \end{aligned}$$
 - ▶ $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = m [a \cdot b \cdot \dot{\beta} \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2]$

Question 6 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)}$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} - \frac{d}{dt} [z_0]_{R_0} \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

Question 7 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} - \frac{d}{dt} [z_0]_{R_0} \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$$

Or, $\vec{z}_{0,1} = \cos \beta \cdot \vec{z}_2 + \sin \beta \cdot \vec{y}_2$,

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} &= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \\ &= \dot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] \end{aligned}$$

d'où,

$$\boxed{\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] + 2 \cdot \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta [B - C].}$$

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon $\vec{z}_0 : \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$.

Correction

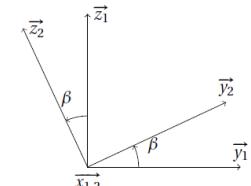
On trouve alors :

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)} &= m \frac{d[a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cos \beta + a^2 \cdot \dot{\alpha} + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin^2 \beta]}{dt} \\ &= m [a \cdot b \cdot (\dot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 \cdot (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)] \end{aligned}$$

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Correction

Le théorème du moment dynamique autour de l'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ donne : $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta$.



$$\begin{aligned} \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_2 &= \cos \beta \\ \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_1 &= 1 \\ \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_0 &= 0 \\ \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_1 &= 0 \\ \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 &= \sin \beta \end{aligned}$$

Application 3

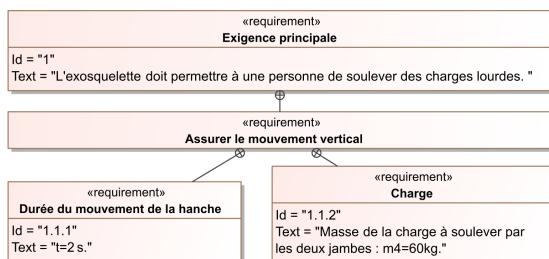
Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

04 DYN

Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



Objectif

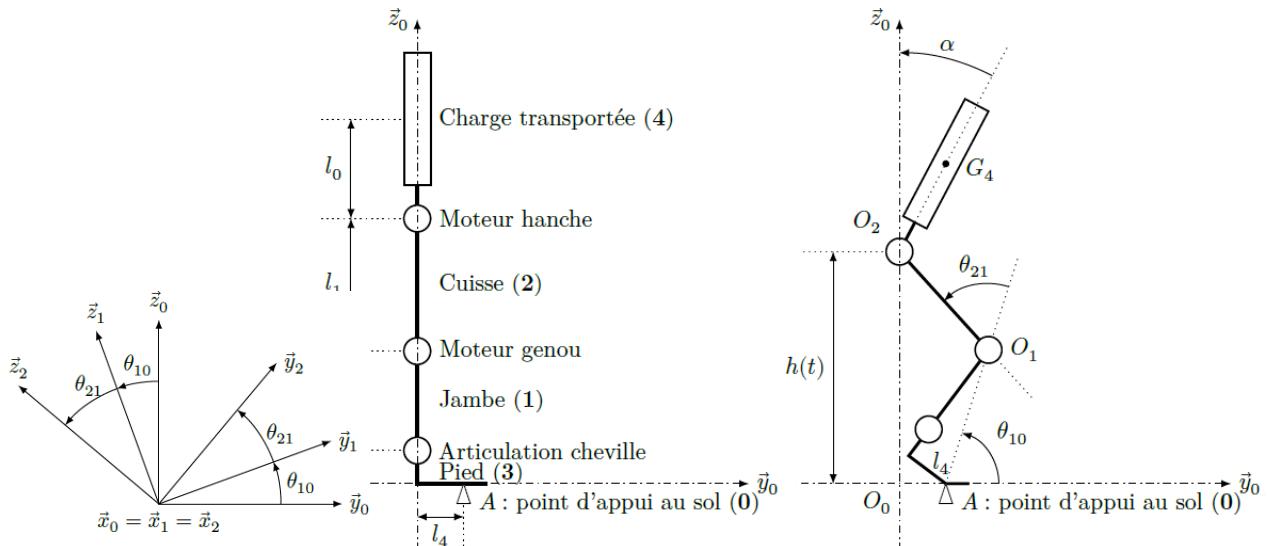
Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Élaboration du modèle dynamique

Objectif

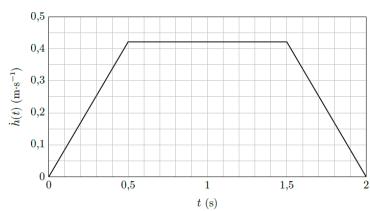
Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

Ces calculs visent à déterminer l'équation dynamique qui permet d'obtenir le couple moteur (minimal) en fonction des caractéristiques géométriques et massique de la charge à soulever ainsi que des conditions d'utilisation. Le modèle d'étude est celui représenté à la figure suivante correspondant au modèle d'étude plan position fléchie.



Données :

- $\overrightarrow{O_1G_4} = \lambda(t)\vec{z}_0 - L \cos \theta_{10}\vec{y}_0$;
- accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$;
- longueur de la cuisse $l_1 = 43,1 \text{ cm}$.
- longueur de la jambe $l_2 = 43,3 \text{ cm}$.
- longueur de l'articulation de la cheville à la plante arrière du pied $l_3 = 6,9 \text{ cm}$.
- longueur de la plante arrière du pied au point d'appui sur le sol $l_4 = 13 \text{ cm}$.
- longueur $\overrightarrow{O_0O_1} = L\vec{y}_1$ avec $L = 51,8 \text{ cm}$.
- rapport de réduction : $r = \frac{\omega_r}{\omega_m} = \frac{1}{120}$.



Hypothèses :

- L'étude est modélisable dans le plan.
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- Les inerties des pièces sont négligées.
- Toutes les masses sont négligées **sauf la masse m_4 de la charge à soulever**.
- L'angle α entre la charge transportée et la verticale \vec{z}_0 reste constant.
- G_4 , centre de gravité de la charge transportée (4), reste en permanence à la verticale du point A d'appui au sol.

On note $E = \{\text{cuisse}(2) + \text{charge transportée}(4)\}$.

Question 1 Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\dot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Question 3 Déduire $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\ddot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

La loi d'évolution de la vitesse de la hanche est donnée à la figure ci-contre.

Question 4 Déterminer l'expression littérale du couple C_r exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche. Calculer numériquement ce couple pour une valeur de θ_{10} égale à $54,5^\circ$ correspondant à la valeur maximale du couple.

Question 5 Calculer le couple C_m au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte $\eta = 0,75$ (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

Question 6 Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

Validation du dimensionnement du moteur

Objectif

Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

Le cycle suivant obtenu à l'aide du modèle multiphysique de représente l'évolution du couple moteur, et ce en tenant compte du moment d'inertie du rotor, sur un cycle de période $T = 15$ s.

Quatre phases sont définies sur cette période :

- phase 1 pour $0 \leq t < 2$ s, valeur efficace du couple moteur $C_1 = 0,838$ Nm;
- phase 2 pour $2 \leq t < 4$ s, couple moteur constant $C_2 = -0,912$ Nm;
- phase 3 pour $4 \leq t < 6$ s, valeur efficace du couple moteur $C_3 = 0,838$ Nm;
- phase 4 pour $6 \leq t < 15$ s, couple moteur nul.

Question 7 Préciser à quels mouvements correspondent les 4 phases de ce cycle.

Le couple efficace est également appelé couple thermiquement équivalent, il est défini

par : $C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T c(t)^2 dt}$. On a aussi $C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i}$

Question 8 Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

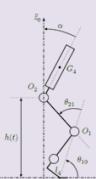
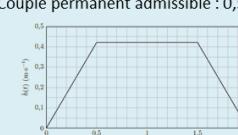
Retour sur l'objectif

Le couple moteur varie entre $-1,156$ Nm et $0,596$ Nm. Les caractéristiques du moteur choisi sont :

- vitesse à vide de 3120 tr min^{-1} pour une alimentation nominale en amont de l'onduleur de 36 V ;
- couple permanent admissible de $0,560$ Nm;
- pente de la courbe de la vitesse en fonction du couple de $423 \text{ tr min}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

De plus une étude cinématique précédente a montré que le moteur permettant d'actionner le moteur doit pouvoir atteindre une vitesse de 2200 tr min^{-1} .

Question 9 Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.

Problématique	
Le moteur pré-choisi permet d'assurer le fonctionnement de l'exosquelette ?	
Domaine de la modélisation	Résolution Cinématique
Modèle cinématique 	Résolution Cinématique <ul style="list-style-type: none"> • $N_{\text{mot}} = 2200 \text{ tr min}^{-1}$
Domaine du client	Moteur choisi <ul style="list-style-type: none"> • Vitesse à vide : 3120 tr min^{-1} • Couple permanent admissible : $0,56 \text{ Nm}$ 

Éléments de correction

1. $\cdot \overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 =$
2. $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = -Lm_4 \cos \theta_{10} \dot{h}(t).$
3. $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = -Lm_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t).$
4. $C_r = -m_4 L \cos \theta_{10} (g + \ddot{h}(t)) \approx -190,5 \text{ Nm}.$
5. $C_m \approx 2,12 \text{ Nm}.$
6. ...
7. ...
8. $C_{\text{eff}} \approx 0,546 \text{ Nm}.$



Application 3

Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

04 DYN

Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

Objectif

Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.



Élaboration du modèle dynamique

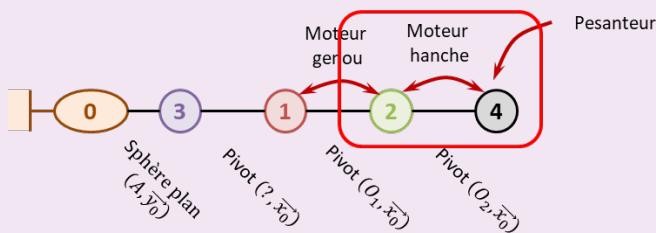
Objectif

Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

Question 1 Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

Correction

Étant donné que l'on souhaite que l'angle α reste constant pendant la levée d'une charge, le mouvement de 4 sera donc un mouvement de translation rectiligne.



Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\dot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Correction

E étant en translation, on a $\overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)} = \vec{0}$. On a alors $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} = \overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)} + \overrightarrow{O_1 G_4} \wedge \overrightarrow{R_c(E/0)}$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{R_c(E/0)} = m_4 \overrightarrow{V(G_4, E/0)} = m_4 \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}$.

On a donc : $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = (\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0}) \wedge m_4 \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{x_0} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$.

Question 3 Déduire $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0}$ en fonction de m_4 , $\ddot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Correction

Méthode 1 – Calcul de $\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)}$ et déplacement

On a $\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)} = \frac{d\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)}}{dt} = \overrightarrow{0}$. En conséquences, $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = (\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0}) \wedge m_4 \ddot{h}(t) \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{x_0} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$.

Méthode 2 – Calcul de $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)}$

On a aussi $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)}}{dt} \right) + m_4 \overrightarrow{V(O_1/0)} \wedge \overrightarrow{V(G_4, E/0)}$.

Par suite on a $(\overrightarrow{V(O_1, E/0)} \wedge \overrightarrow{V(G_4, E/0)}) \overrightarrow{x_0} = ((L \overrightarrow{y_1} \wedge \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{x_0}) \wedge \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}) \overrightarrow{x_0} = (-L \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{z_1} \wedge \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}) \overrightarrow{x_0} = -L \dot{\theta}_{10} \dot{h}(t) \sin \theta_{10}$.

Enfin, $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t) + L m_4 \dot{\theta}_{10} \sin \theta_{10} \dot{h}(t) - m_4 L \dot{\theta}_{10} \dot{h}(t) \sin \theta_{10} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$.

Question 4 Déterminer l'expression littérale du couple C_r exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche. Calculer numériquement ce couple pour une valeur de θ_{10} égale à $54,5^\circ$ correspondant à la valeur maximale du couple.

Correction

- On isole l'ensemble E .
- On réalise le bilan des actions mécaniques :

• action de la liaison pivot : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(1 \rightarrow E)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \end{array} \right\}_{O_1}$ avec

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = 0;$$

• action du réducteur : $\{\mathcal{T}(1_r \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r \overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}_{O_1}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = 0$;

• action de la pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_4 g \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_4}$. On a alors

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, \text{pes} \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{\mathcal{M}(G_4, \text{pes} \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} + (\overrightarrow{O_1 G_4} \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = (\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0}) \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{x_0} = (-L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0} \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = m_4 g L \cos \theta_{10}.$$

- E étant en pivot d'axe $(O_1, \overrightarrow{x_1})$, on applique le théorème du moment dynamique en O_1 en projection sur $\overrightarrow{x_1}$: $-L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t) = C_r + m_4 g L \cos \theta_{10} \Leftrightarrow C_r = -m_4 L \cos \theta_{10} (g + \ddot{h}(t))$.

En réalisant l'application numérique, on a : $C_r = -60 \times 51,8 \times 10^{-2} \times \cos 54,5 \left(9,81 + \frac{0,425}{0,5} \right) \simeq -190,5 \text{ Nm}$.

Question 5 Calculer le couple C_m au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte $\eta = 0,75$ (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

Correction

En régime permanent, on a $\eta = \frac{C_r \omega_r}{C_m \omega_m} = r \frac{C_r}{C_m}$ et $C_m = \frac{r}{\eta} C_r = \frac{1}{0,75 \times 120} \times 190,5 \simeq 2,12 \text{ Nm.}$

Question 6 Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

Correction

Si on en avait la possibilité, il faudrait mettre un capteur de puissance au niveau de la commande (mesure de la vitesse et du couple de commande) puis un capteur de puissance au niveau de la charge (mesure de vitesse et du couple en sortie au niveau du genou). Le rendement peut s'observer en régime permanent en faisant le rapport des puissances. Pour observer une perte de rendement, il est nécessaire que soient modélisées les actions de frottement.

Validation du dimensionnement du moteur

Objectif

Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

Question 7 Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

Correction

$$C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i} = \sqrt{\frac{1}{15} (0,838^2 \times 2 + 0,912^2 \times 2 + 0,838^2 \times 2)} \simeq 0,546 \text{ Nm.}$$

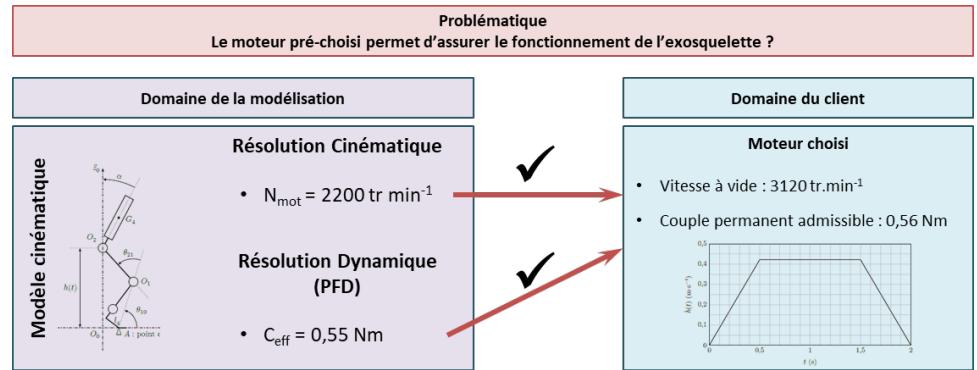
Retour sur l'objectif

Question 8 Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.

Correction

1. Le couple thermiquement équivalent calculé est de 0,546 Nm ce qui est inférieur aux couple admissible par le moteur.
2. La fréquence de rotation à atteindre par le moteur est de 2200 tr min^{-1} . Le moteur proposé tourne à 3120 tr min^{-1} à vide. On peut donc supposer qu'en charge, il atteindra les 2200 tr min^{-1} .

Su ces deux critères le moteur proposé est donc validé.



Application 4

Conducteur virtuel pour véhicule automobile – Subject

Centrale Supélec PSI 2014.



L'accroissement de la circulation automobile dans les grandes agglomérations menace de saturation leur réseau d'autoroutes. Une des solutions consiste à augmenter les flux en automatisant les voitures sur ces dernières. Après une évaluation du gain en terme de flux d'automobiles que peut apporter ce concept, l'étude portera sur le système de guidage automatique latéral d'une automobile sur une autoroute dite « intelligente ».

Objectif

L'objet de cette partie est de déterminer un modèle mécanique du véhicule en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au véhicule. L'idée est d'utiliser un modèle mécanique relativement simple, associé à une commande très robuste.

Une approche simplifiée permettant d'aborder le problème consiste à adopter un modèle dit « bicyclette », représenté sur la figure suivante, qui assimile le comportement du véhicule à celui d'une bicyclette :

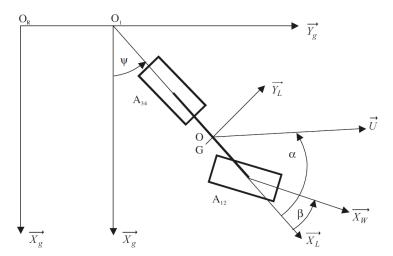
- ▶ le train avant directeur se réduit à une seule roue (12) sur laquelle s'appliquent les actions exercées sur les deux roues avant (1) et (2) du véhicule, de même la roue arrière (34) supporte les actions exercées par l'essieu arrière portant les roues (3) et (4), les pneumatiques avant et arrière ont les mêmes caractéristiques, en particulier le même coefficient de dérive (celui-ci sera défini plus loin);
- ▶ le modèle choisi est un modèle à 2 degrés de liberté : l'angle de lacet $\psi(t) = (\vec{X}_g, \vec{X}_L)$ et l'angle d'attitude $\alpha(t) = (\vec{X}_L, \vec{U})$. La rotation de chaque roue autour de son axe n'est pas prise en compte;
- ▶ on notera que l'angle de braquage des roues $\beta(t) = (\vec{X}_L, \vec{X}_W)$ avant est imposé au moyen d'un asservissement qui ne sera pas étudié dans le cadre de ce problème;
- ▶ les roues ont une masse supposée négligeable.



Cette modélisation ne prend pas en compte les mouvements suivants : tangage (rotation autour de \vec{Y}_L) et roulis (rotation autour de \vec{X}_L).

Les différents repères sont les suivants :

- ▶ repère galiléen : $\mathcal{R}_g(O_R; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$, O_R est lié à la route, $\Pi_R = (\vec{X}_g, \vec{Y}_g)$ plan fixe par rapport à la route;
- ▶ repère intermédiaire : $\mathcal{R}_1(O_1; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$, $\overrightarrow{O_R O_1} = a \vec{Y}_g$;
- ▶ repère intermédiaire : $\mathcal{R}_0(O; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$, O lié au châssis et $\overrightarrow{O_1 O} = b \vec{X}_L$, $\overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_0/\mathcal{R}_g)} = \vec{0}$, $\vec{V}(O, \mathcal{R}_0/\mathcal{R}_g) = \vec{V} \vec{U}$ avec $\overrightarrow{O_R O} \cdot \vec{Z}_g = 0$ et V constante



positive;

- repère lacet $\mathcal{R}_0(G; \vec{X}_L, \vec{Y}_L, \vec{Z}_L)$, $\vec{OG} = h\vec{Z}_g$ avec G centre d'inertie lié du châssis lié au véhicule, $\vec{Z}_L = \vec{Z}_g$ et $(\vec{Y}_g, \vec{Y}_L) = (\vec{X}_g, \vec{X}_L) = \psi(t)$ angle de lacet, h constate positive;
- repère lié à la roue $\mathcal{R}_W(A_i; \vec{X}_W, \vec{Y}_W, \vec{Z}_W)$, A_i centre de la roue R_i (assimilée à un disque), $\vec{Z}_W = \vec{Z}_L$ avec $\vec{OA}_{12} = l_1\vec{X}_L$ et $\vec{OA}_{34} = -l_2\vec{X}_L$, $(\vec{Y}_L, \vec{Y}_W) = (\vec{X}_L, \vec{X}_W) = \beta(t)$ angle de braquage.

On appelle :

- $\alpha(t) = (\vec{X}_L, \vec{U})$: angle d'attitude,
- $\psi(t) = (\vec{X}_G, \vec{X}_L)$: angle de lacet,
- $\beta(t) = (\vec{X}_L, \vec{X}_W)$: angle de braquage de la roue avant.

Le torseur cinématique du mouvement du véhicule (VH) par rapport à \mathcal{R}_g , au point O , est noté : $\{\mathcal{V}(VH/\mathcal{R}_g)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(VH/\mathcal{R}_g)} \\ \overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} = V\vec{U} \end{array} \right\}_O$.

La roue munie d'un pneumatique se comporte différemment d'une roue rigide au niveau du contact avec le sol. On adoptera le modèle représenté sur la figure ci-contre.

Le contact roue/sol pour chaque roue est modélisé par le torseur d'efforts suivant :

$$\{\mathcal{T}(\text{Sol} \rightarrow \mathcal{R}_i)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{Sol} \rightarrow \mathcal{R}_i)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M_i, \text{Sol} \rightarrow \mathcal{R}_i)} \end{array} \right\}_{M_i} \text{ avec } i \in \{12, 34\} \text{ avec } \overrightarrow{OM_{12}} = \ell_1\vec{X}_L - R\vec{Z}_L \text{ et } \overrightarrow{OM_{34}} = -\ell_2\vec{X}_L - R\vec{Z}_L.$$

L'angle de dérive d'un pneumatique est défini par : $\delta_i = (\vec{X}_W, \overrightarrow{V(M_i/\mathcal{R}_g)})$. Si D désigne le coefficient de dérive du pneumatique, on admettra qu'on peut écrire $Y_i = -D\delta_i$, soit ici $Y_{12} = -2D\delta_{12}$ et $Y_{34} = -2D\delta_{34}$. Comme la vitesse du véhicule est supposée constante et la roue arrière n'est pas motrice, on peut considérer : $X_{12} = 0$ et $X_{34} = 0$. La matrice d'inertie du véhicule de masse M , dans le repère \mathcal{R}_L , est de la

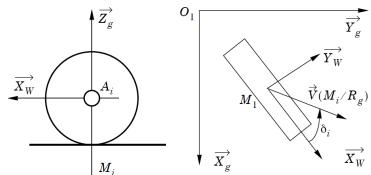
forme : $I_G(VH) = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$ Remarque : le véhicule comprend la caisse, les roues, et sera modélisé dans la mise en équation comme un solide indéformable.

Modélisation du comportement dynamique du véhicule

Question 1 Déterminer les composantes dans le repère \mathcal{R}_L du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}$ au point O , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_g , en fonction de $\dot{\psi}, \alpha, h, V$ et des caractéristiques inertielles.

Question 2 Déterminer les composantes dans le repère \mathcal{R}_L du moment dynamique $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)}$ au point O , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_g , en fonction de $\dot{\psi}, \ddot{\psi}, \dot{\alpha}, \alpha, h, V$ et des caractéristiques inertielles.

Question 3 On note $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)}$ le vecteur accélération de appartenant à (VH) dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_G . Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{Y}_L$ en fonction de $\dot{\psi}, \ddot{\alpha}, \alpha, V$. Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0, \psi = 0$ et $\beta = 0$.



Question 4 En admettant que l'angle de dérive de la roue avant s'écrit : $\delta_{12} \simeq \alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}$

et celui de la roue arrière $\delta_{34} \simeq \alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}$, en déduire l'expression de $\overrightarrow{R(\overline{VH} \rightarrow VH)} \cdot \vec{Y_L}$.

Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0$, $\psi = 0$ et $\beta = 0$.

Question 5 Montrer que l'on obtient le système d'équations différentielles suivant en indiquant clairement (point, vecteur unitaire, résultante ou moment, ...) à quelle équation scalaire issue du PFD correspond chaque relation :

$$\begin{cases} \left(MV + \frac{2D(\ell_1 - \ell_2)}{V} \right) \dot{\psi} + MV\dot{\alpha} + 4D\alpha = 2D\beta \\ C\ddot{\psi} + \frac{2D(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{V} \dot{\psi} + 2D(\ell_1 - \ell_2)\alpha = 2D\ell_1\beta \end{cases}.$$

Avec les valeurs numériques : $\ell_1 = 1 \text{ m}$, $\ell_2 = 1,5 \text{ m}$, $D = 21\,000 \text{ N rad}^{-1}$, $C = 3100 \text{ kg m}^2$, $M = 1500 \text{ kg}$, $V = 15 \text{ m s}^{-1}$, on obtient le système d'équations différentielles suivant, permettant de décrire l'évolution du véhicule (données en unités S.I.) :

$$\begin{cases} 211\dot{\psi}(t) + 225\dot{\alpha}(t) + 840\alpha(t) = 420\beta(t) \\ 31\ddot{\psi}(t) + 91\dot{\psi}(t) - 210\alpha(t) = 420\beta(t) \end{cases}.$$

Question 6 En supposant que les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression numérique de la fonction de transfert $H_2(p)$ entre l'angle de lacet $\psi(p)$ et l'angle de braquage $\beta(p)$ de la roue avant : $H_2(p) = \frac{\psi(p)}{\beta(p)}$. Discuter de la stabilité de ce modèle.



Application 4

Conducteur virtuel pour véhicule automobile – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2014.

Objectif

L'objet de cette partie est de déterminer un modèle mécanique du véhicule en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au véhicule. L'idée est d'utiliser un modèle mécanique relativement simple, associé à une commande très robuste.



Modélisation du comportement dynamique du véhicule

Question 1 Déterminer les composantes dans le repère \mathcal{R}_L du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}$ au point O , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_g , en fonction de $\dot{\psi}$, α , h , V et des caractéristiques inertielles.



Correction

La matrice d'inertie étant donnée en G , commençons par calculer $\overrightarrow{\sigma(G, VH/\mathcal{R}_g)} = I_G(VH)\overrightarrow{\Omega(VH/\mathcal{R}_g)} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \dot{\psi} \overrightarrow{Z_g} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$.

Il faut alors déplacer le moment cinétique. On aura pour cela besoin de $\overrightarrow{V(G, VH/\mathcal{R}_g)} = \overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega(VH/\mathcal{R}_g)} = V\overrightarrow{U} - h\overrightarrow{Z_g} \wedge \dot{\psi} \overrightarrow{Z_g} = V\overrightarrow{U}$.

Au final, $\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)} = \overrightarrow{\sigma(G, VH/\mathcal{R}_g)} + \overrightarrow{OG} \wedge MV\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + h\overrightarrow{Z_g} \wedge MV\overrightarrow{U}$
 $= \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV \left(\cos \alpha \overrightarrow{Y_L} - \sin \alpha \overrightarrow{X_L} \right) = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} - hMV \sin \alpha \\ hMV \cos \alpha \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$.

– Je note \overrightarrow{V} le vecteur tel que $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{Z_L})$ est une base. –

Question 2 Déterminer les composantes dans le repère \mathcal{R}_L du moment dynamique $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)}$ au point O , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_g , en fonction de $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$, $\dot{\alpha}$, α , h , V et des caractéristiques inertielles.

Correction

On a en un point quelconque $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)} = \left[\frac{d\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} \wedge \overrightarrow{MV(G, VH/\mathcal{R}_g)}.$

D'une part, $\left[\frac{d\vec{X}_L}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = \dot{\psi} \vec{Y}_L$ et $\left[\frac{d\vec{Y}_L}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = -\dot{\psi} \vec{X}_L$. On a donc $\left[\frac{d\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = \begin{pmatrix} -E\ddot{\psi} - \dot{\alpha}hMV \cos \alpha - \dot{\psi}(hMV \cos \alpha) \\ -\dot{\alpha}hMV \sin \alpha + \dot{\psi}(-E\ddot{\psi} - hMV \sin \alpha) \\ C\ddot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}.$

D'autre part, $\overrightarrow{V(O, VH/\mathcal{R}_g)} \wedge \overrightarrow{MV(G, VH/\mathcal{R}_g)} = V\vec{U} \wedge MV\vec{U} = \vec{0}.$

Au final, $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)} = \begin{pmatrix} -E\ddot{\psi} - (\dot{\alpha} + \dot{\psi})(hMV \cos \alpha) \\ -E\dot{\psi}^2 - (\dot{\alpha} + \dot{\psi})hMV \sin \alpha \\ C\ddot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}.$

Question 3 On note $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)}$ le vecteur accélération de appartenant à (VH) dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_G . Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{Y}_L$ en fonction de $\dot{\psi}, \dot{\alpha}, \alpha, V$. Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0, \psi = 0$ et $\beta = 0$.

Correction

On a vu que $\overrightarrow{V(G, VH/\mathcal{R}_g)} = V\vec{U}$, donc $\overrightarrow{\Gamma(G, VH/\mathcal{R}_g)} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})\vec{V} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})(\cos \alpha \vec{Y}_L - \sin \alpha \vec{X}_L)$. On a donc $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{Y}_L = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha}) \cos \alpha$. En linéarisant cette relation, on a $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{Y}_L = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})$.

Question 4 En admettant que l'angle de dérive de la roue avant s'écrit : $\delta_{12} \simeq \alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}$ et celui de la roue arrière $\delta_{34} \simeq \alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}$, en déduire l'expression de $R(\overrightarrow{VH} \rightarrow VH) \cdot \vec{Y}_L$. Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0, \psi = 0$ et $\beta = 0$.

Correction

On a $Y_{12} = -2D\delta_{12}$ et $Y_{34} = -2D\delta_{34}$. En conséquence, $Y_{12} = -2D\left(\alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right)$ et $Y_{34} = -2D\left(\alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$. Au final, $\overrightarrow{R(\overrightarrow{VH} \rightarrow VH)} \cdot \vec{Y}_L = -2D\left(\alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right) - 2D\left(\alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right) = -2D\left(2\alpha - \beta + \frac{\ell_1 - \ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$.

Question 5 Montrer que l'on obtient le système d'équations différentielles suivant en indiquant clairement (point, vecteur unitaire, résultante ou moment, ...) à quelle équation scalaire issue du PFD correspond chaque relation :

$$\begin{cases} \left(MV + \frac{2D(\ell_1 - \ell_2)}{V}\right)\dot{\psi} + MV\dot{\alpha} + 4D\alpha = 2D\beta \\ C\ddot{\psi} + \frac{2D(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{V}\dot{\psi} + 2D(\ell_1 - \ell_2)\alpha = 2D\ell_1\beta \end{cases}.$$

Avec les valeurs numériques : $\ell_1 = 1 \text{ m}$, $\ell_2 = 1,5 \text{ m}$, $D = 21\,000 \text{ N rad}^{-1}$, $C = 3100 \text{ kg m}^2$, $M = 1500 \text{ kg}$, $V = 15 \text{ m s}^{-1}$, on obtient le système d'équations différentielles suivant, permettant de décrire l'évolution du véhicule (données en unités S.I.) :

$$\begin{cases} 211\dot{\psi}(t) + 225\dot{\alpha}(t) + 840\alpha(t) = 420\beta(t) \\ 31\ddot{\psi}(t) + 91\dot{\psi}(t) - 210\alpha(t) = 420\beta(t) \end{cases}.$$

Correction

La première équation correspond au théorème de la résultante dynamique appliqué à VH en projection sur \vec{Y}_L .

La seconde équation correspond au théorème du moment dynamique appliqué à VH en O projection sur \vec{Z}_L .

Question 6 En supposant que les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression numérique de la fonction de transfert $H_2(p)$ entre l'angle de lacet $\psi(p)$ et l'angle de braquage $\beta(p)$ de la roue avant : $H_2(p) = \frac{\psi(p)}{\beta(p)}$. Discuter de la stabilité de ce modèle.

Correction

Dans le domaine de Laplace, on a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 211p\psi(p) + 225p\alpha(p) + 840\alpha(p) = 420\beta(p) \\ 31p^2\psi(p) + 91p\psi(p) - 210\alpha(p) = 420\beta(p) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} (225p + 840)\alpha(p) = 420\beta(p) - 211p\psi(p) \\ (31p^2 + 91p)\psi(p) - 210\alpha(p) = 420\beta(p) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \alpha(p) = \frac{420\beta(p) - 211p\psi(p)}{225p + 840} \\ (31p^2 + 91p)\psi(p) - 210\frac{420\beta(p) - 211p\psi(p)}{225p + 840} = 420\beta(p) \end{cases} \\ & \left(31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}\right)\psi(p) - 210\frac{420\beta(p)}{225p + 840} = 420\beta(p) \\ & \Rightarrow \left(31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}\right)\psi(p) + \left(\frac{-210 \times 420}{225p + 840} - 420\right)\beta(p) = 0 \\ & \Rightarrow H_2(p) = \frac{\frac{210 \times 420}{225p + 840} + 420}{31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}} = \frac{210 \times 420 + 420(225p + 840)}{(225p + 840)(31p^2 + 91p) + 210 \times 211p} \\ & = \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p((225p + 840)(31p + 91) + 210 \times 211)} \\ & = \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p(225 \times 31p^2 + 840 \times 31p + 91 \times 225p + 91 \times 840 + 210 \times 211)} \\ & = \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p(225 \times 31p^2 + 840 \times 31p + 91 \times 225p + 91 \times 840 + 210 \times 211)} \\ & = \frac{441000 + 94500p}{p(6975p^2 + 46515p + 120750)} \end{aligned}$$

TD 1

Stabilisateur passif d'image – Sujet

04 DYN

Mines Ponts 2018 – PSI.

Mise en situation

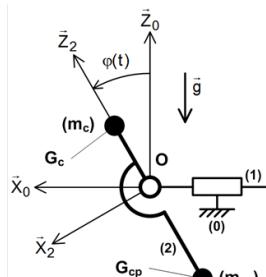
Les appareils photos modernes fonctionnent en rafales : 8 à 10 images par seconde et en mode vidéo. Le besoin de stabilisation de l'image dans de telles conditions est impératif. Le but de ce sujet est de s'intéresser au support de la caméra assurant la liaison entre le bras de l'utilisateur et la caméra elle-même.

Le stabilisateur se compose principalement de trois objets :

- ▶ une poignée orientable (1) manipulée directement par le photographe, liée au support (2) en O ;
- ▶ un support rigide (2) (**supposé sans masse**) sur lequel vient se fixer une caméra assimilée en première approximation à une masse ponctuelle m_c placée en G_c ;
- ▶ un contrepoids lié à (2) et assimilé à une masse ponctuelle m_{cp} placée en G_{cp} .



Système réel



Modèle utilisé



L'utilisateur tient fermement la poignée (1) dans une position angulaire quelconque, ce qui permet d'affirmer que le (**porteur + (1)**) ne forme qu'une seule classe d'équivalence. Afin de produire des images toujours fluides, sans à-coups, ce stabilisateur à main doit maintenir constamment la caméra dans une position verticale (parallèle au champ de gravité), que le porteur soit immobile (plan fixe) ou en mouvement (travelling).

Dans le cas général, le mouvement du bras par rapport au référentiel terrestre est quelconque (6 degrés de libertés). Ici, on se limite à un mouvement de translation. Dans le cas général, afin que la caméra soit en position verticale, le support doit permettre 3 rotations dans la liaison avec (**porteur + (1)**). Ici on se limite à la stabilisation d'une seule rotation.

Objectif

Suite à une sollicitation brève de $0,5 \text{ m s}^{-2}$, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les $0,5^\circ$.

Travail demandé

On se place à présent dans une phase dite « dynamique ». Le porteur (**1**) est en mouvement par rapport au sol. On suppose qu'à l'instant initial, l'ensemble (**E**)=**Support(2) + Caméra(C) + Contrepoids(Cp)** est en équilibre stable en position verticale. On note $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \overrightarrow{V(P, 1/0)} = v(t) \vec{X}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$. On note $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. De plus, $\overrightarrow{OG_C} = L_C \vec{Z}_2$ et $\overrightarrow{OG_{CP}} = -L_{CP} \vec{Z}_2$.

Question 1 Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (**E**) dans (**0**) galiléen s'exprime comme $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$.

Afin de quantifier la modification d'attitude de (**E**), l'équation de mouvement est linéarisée autour de la position d'équilibre (verticale) en supposant que les valeurs de l'angle restent faibles. On transpose cette équation différentielle dans le domaine de Laplace et on note $\mathcal{L}(\varphi(t)) = \Phi(p)$ et $\mathcal{L}(a(t)) = A(p)$. Afin de conserver la fluidité des images lors de travelling, les fluctuations indésirables des mouvements du porteur ne doivent pas être intégralement transmises à (**E**).

On suppose que $a(t) = a_0 \sin(\omega_a t)$ avec $a_0 = 0,5 \text{ m s}^{-2}$ et $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Question 2 Établir sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de m_c, m_{cp}, L_c, L_{cp} et g .

Question 3 Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain $G_{dB} = f(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$. Placer les caractéristiques remarquables.

Question 4 Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que $\omega_0 = 0,1\omega_a$. Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple (m_{cp}, L_{cp}) . En utilisant le comportement asymptotique en gain de G_{dB} , estimer numériquement l'amplitude $\Delta\varphi$ (en degrés) des oscillations de (**E**) selon l'axe (O, \vec{y}_0) .

Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.



Éléments de correction

1. $Q_1 = M_{CP}L_{CP}^2 + M_CL_C^2, Q_2(t) = (L_{CP}M_{CP} - L_CM_C)g \sin \varphi, Q_3(t) = (M_{CP}L_{CP} - M_CL_C) \cos \varphi.$
2. $\omega_0^2 = \frac{(L_{CP}M_{CP} - L_CM_C)g}{M_{CP}L_{CP}^2 + M_CL_C^2}.$
3. .
4. $0,03^\circ.$
5. .

TD 1

Stabilisateur passif d'image – Corrigé

04 DYN

Mines Ponts 2018 – PSI.

Mise en situation

Objectif

Suite à une sollicitation brève de $0,5 \text{ m s}^{-2}$, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les $0,5^\circ$.

Travail demandé

Question 1 Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans (0) galiléen s'exprime comme $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$.



Correction

(1) et (E) sont en liaison pivot d'axe (O, \vec{Y}_0) . On va donc réaliser un théorème du moment dynamique appliqué à (E) en O en projection sur \vec{Y}_0 .

Calcul de $\overline{\delta(O, E/0)}$

Méthode 1 – En passant par le calcul de $\overline{\delta(O, 2/0)}$, $\overline{\delta(O, C/0)}$ et $\overline{\delta(O, Cp/0)}$

Le support 2 étant sans masse, on a $\overline{\delta(O, 2/0)} = \vec{0}$. La caméra et le contrepoids étant considérés comme des masses ponctuelles, on a $\overline{\delta(G_C, C/0)} = \vec{0}$ et $\overline{\delta(G_{Cp}, Cp/0)} = \vec{0}$.

Calcul de $\overline{\delta(O, C/0)}$

On a $\overline{\delta(O, C/0)} = \overline{\delta(G_C, C/0)} + \overline{OG_C} \wedge M_C \overline{\Gamma(G_C, C/0)}$.

Calcul de $\overline{\Gamma(G_C, C/0)}$

$$\overline{V(G_C, C/0)} = \overline{V(G_C, C/1)} + \overline{V(G_C, 1/0)} = \overline{G_C \vec{O}} \wedge \overline{\Omega(C/0)} + v(t) \vec{X}_0 = -L_C \vec{Z}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + v(t) \vec{X}_0 = L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 + v(t) \vec{X}_0.$$

$$\text{De plus } \overline{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \ddot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t) \vec{X}_0.$$

$$\text{Au final, } \overline{\delta(O, C/0)} = \overline{OG_C} \wedge M_C \overline{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \vec{Z}_2 \wedge M_C (L_C \ddot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t) \vec{X}_0)$$

$$\overline{\delta(O, C/0)} = L_C M_C (L_C \ddot{\varphi} \vec{Y}_2 + a(t) \cos \varphi \vec{Y}_0).$$

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)}$

On a $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)} = \overrightarrow{\delta(G_{Cp}, Cp/0)} + \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, C/0)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)}$

De même, $\overrightarrow{V(G_{Cp}, Cp/0)} = \overrightarrow{V(G_{Cp}, Cp/1)} + \overrightarrow{V(G_{Cp}, 1/0)} = \overrightarrow{G_{Cp}O} \wedge \overrightarrow{\Omega(Cp/0)} + v(t) \overrightarrow{X_0} = L_{Cp} \overrightarrow{Z_2} \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{Y_2} + v(t) \overrightarrow{X_0} = -L_{Cp} \dot{\varphi} \overrightarrow{X_2} + v(t) \overrightarrow{X_0}$.

De plus $\overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)} = -L_{Cp} \ddot{\varphi} \overrightarrow{X_2} + L_{Cp} \dot{\varphi}^2 \overrightarrow{Z_2} + a(t) \overrightarrow{X_0}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)} = \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)} = -L_{Cp} \overrightarrow{Z_2} \wedge M_{Cp} (-L_{Cp} \ddot{\varphi} \overrightarrow{X_2} + L_{Cp} \dot{\varphi}^2 \overrightarrow{Z_2} + a(t) \overrightarrow{X_0})$

$\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = -L_{Cp} M_{Cp} (-L_{Cp} \ddot{\varphi} \overrightarrow{Y_2} + a(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0})$

On a donc $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} = M_{Cp} L_{Cp}^2 \ddot{\varphi} - M_{Cp} L_{Cp} a(t) \cos \varphi + M_C L_C^2 \ddot{\varphi} + M_C L_C a(t) \cos \varphi$

Méthode 2 – En passant par le calcul de $I_O(E)$

On a $I_O(C) = M_C \begin{pmatrix} L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ et $I_O(Cp) = M_{Cp} \begin{pmatrix} L_{Cp}^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_{Cp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ et donc

$$I_O(E) = \begin{pmatrix} M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

O est un point quelconque; donc $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} =$

$$\overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(E/R_0)} \text{ et } \overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)} = I_O(E) \cdot \overrightarrow{\Omega(E/R_0)} + M \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V(O, E/R_0)}.$$

$$\text{De plus, } \overrightarrow{OG} = \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{Z_2}, \overrightarrow{V(O, E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} \text{ et } \overrightarrow{V(G, E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} + \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} \overrightarrow{X_2}.$$

$$\text{On a donc, } \overrightarrow{\sigma(O, S/R_0)} = \dot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C + M_{Cp}) \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{Z_2} \wedge v(t) \overrightarrow{X_0} = \dot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) v(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0}.$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) (a(t) \cos \varphi - v(t) \dot{\varphi} \sin \varphi) \overrightarrow{Y_0}.$$

$$\overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} \wedge (M_C + M_{Cp}) \left(v(t) \overrightarrow{X_0} + \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} \overrightarrow{X_2} \right)$$

$$= (M_C + M_{Cp}) \left(\frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} v(t) \sin \varphi \right) \overrightarrow{Y_2} = (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) \dot{\varphi} v(t) \sin \varphi \overrightarrow{Y_2}.$$

$$\text{Au final, } \overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \dot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0}$$

Bilan des actions mécaniques en O agissant sur E

- Liaison pivot $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = 0$.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C)\} \text{ avec } \overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \rightarrow C)} \cdot \overrightarrow{Y_2} &= (\overrightarrow{OG} \wedge -M_C g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} \\ &= (L_C \overrightarrow{Z_2} \wedge -M_C g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} = L_C M_C g \sin \varphi \overrightarrow{Y_2}. \end{aligned}$$

► $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow Cp)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \rightarrow Cp)} \cdot \vec{Y_2} = (-L_{Cp}\vec{Z_2} \wedge -M_{Cp}g\vec{Z_0})\vec{Y_2} = -L_{Cp}M_{Cp}g \sin \varphi \vec{Y_2}$.

Théorème du moment dynamique en O en projection sur $\vec{Y_2}$

$$\ddot{\varphi} \left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 \right) + \left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp} \right) a(t) \cos \varphi = L_C M_C g \sin \varphi - L_{Cp}M_{Cp}g \sin \varphi.$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} \left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 \right) + \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C \right) g \sin \varphi = - \left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp} \right) a(t) \cos \varphi.$$

On a donc : $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C \right) g \sin \varphi$, $Q_3(t) = \left(M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C \right) \cos \varphi$.

Question 2 Établir sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de m_c , m_{cp} , L_c , L_{cp} et g .

Correction

Dans les conditions précédentes, on a $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C \right) g \varphi$ et $Q_3(t) = \left(M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C \right)$.

L'équation de comportement devient donc $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C \right) g \varphi = Q_3 a(t)$

$$\Rightarrow Q_1 p^2 \Phi(p) + \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C \right) g \Phi(p) = Q_3 A(p) \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{Q_3}{Q_1 p^2 + \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C \right) g}.$$

On a donc $\omega_0^2 = \frac{\left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C \right) g}{Q_1} = \frac{\left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C \right) g}{M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}$. Le gain K vaut $\frac{M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C}{\left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C \right) g} = \frac{1}{g}$.

Question 3 Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain $G_{dB} = f(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$. Placer les caractéristiques remarquables.

Correction



Question 4 Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que $\omega_0 = 0,1\omega_a$.

Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple (m_{cp}, L_{cp}) . En utilisant le comportement asymptotique en gain de G_{dB} , estimer numériquement l'amplitude $\Delta\varphi$ (en degrés) des oscillations de **(E)** selon l'axe $(O, \vec{y_0})$.

Correction

On a $\omega_a = 10\omega_0$. Une décade après ω_0 , $G_{dB} = -20 \log 10 - 40 = -60$ dB. Une atténuation de -60 dB correspond à un gain de $10^{-\frac{60}{20}} = 0,001$. L'amplitude des oscillations sera donc de $0,001a_0 = 5 \times 10^{-4}$ rad soit $0,03^\circ$.

Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

Correction

On a $0,03^\circ < 0,5^\circ$. Le cahier des charges est vérifié au voisinage de $10\omega_0$.

Éléments de correction

1. $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_CL_C^2, Q_2(t) = (L_{Cp}M_{Cp} - L_CM_C)g \sin \varphi, Q_3(t) = (M_{Cp}L_{Cp} - M_CL_C)\cos \varphi.$
2. $\omega_0^2 = \frac{(L_{Cp}M_{Cp} - L_CM_C)g}{M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_CL_C^2}.$
3. .
4. $0,03^\circ.$
5. .