

# 10 Application du Principe Fondamental de la Dynamique

04 DYN

## 10.1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

### Définition – Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique

Soit un ensemble matériel  $E$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur  $E$  est égale au torseur dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \mathcal{T}(\overline{E} \rightarrow E) \right\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)} \end{array} \right\}_A.$$

- ▶ On note  $\overrightarrow{R_d(S/R_0)}$  la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie  $G$ .
- ▶ Le **moment dynamique** dépend du point A et se note  $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$ .

Du Principe Fondamental de la dynamique découlent plusieurs **théorèmes généraux**.

### 10.1.1 Théorème de la résultante dynamique

#### Théorème – Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur  $E$  est égale à la résultante dynamique du mouvement

10.1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général . . . . .	1
10.2 Torseur cinétique . . . . .	2
10.3 Torseur dynamique . . . . .	4

B2-10

**Emilien Durif**, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

**Florestan Mathurin**, *Géométrie des masses*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

de  $E$  par rapport à  $R_0$  :

$$\overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)}.$$

### 10.1.2 Théorème du moment dynamique

#### Théorème – Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur  $E$  en un point quelconque  $A$  est égale au moment dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  en  $A$  :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}.$$

## 10.2 Torseur cinétique

### 10.2.1 Définition

#### Définition –

Le **torseur cinétique** d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$  se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- ▶ La résultante du torseur cinétique,  $\overrightarrow{R_c(S/R_0)}$  ne dépend pas du point  $A$  mais uniquement du centre de gravité  $G$  de  $S$  (de masse  $m$ ) et vérifie :  $\overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V}(G/R_0)$ .
- ▶ Le moment cinétique dépend du point  $A$  et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point :  $\overrightarrow{\sigma(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_0)}$ .

### 10.2.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

#### Propriété –

Pour un solide  $S$  de masse  $m$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  et soit un point  $A$  quelconque.

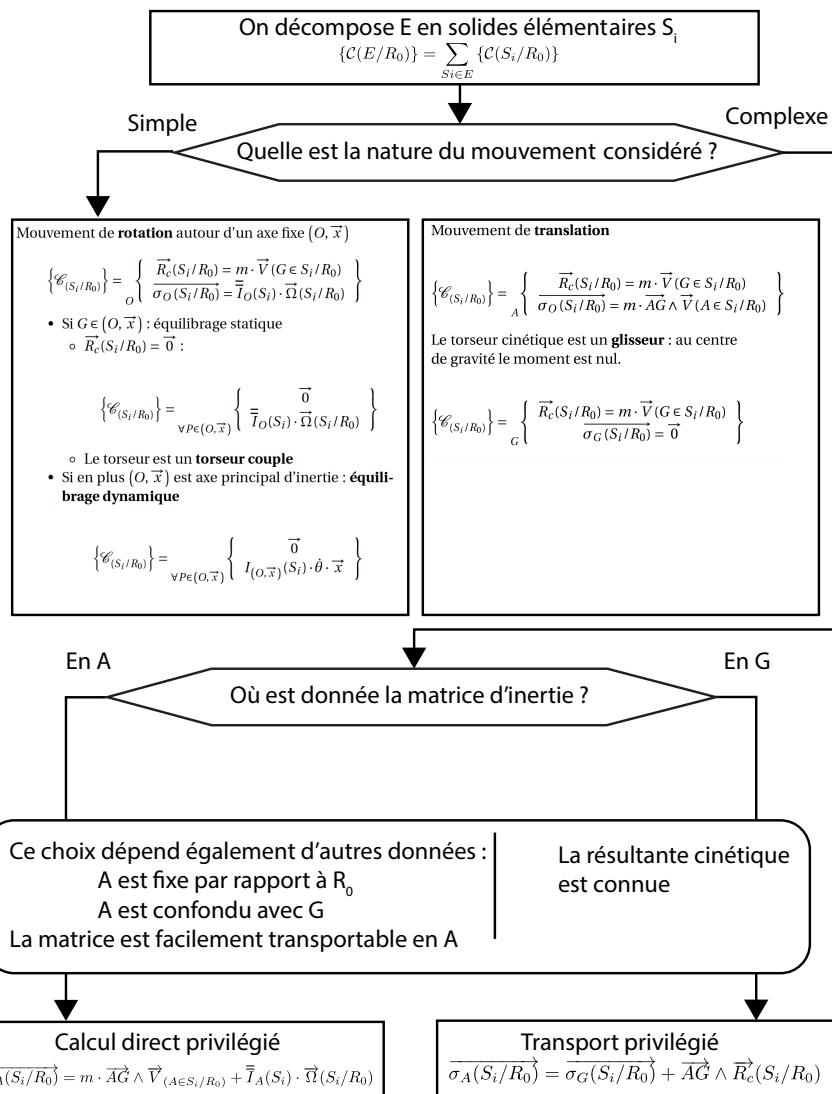
$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A, S/R_0)}.$$

### 10.2.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point  $A$  fixe dans le mouvement de  $S/R_0$ , on a :  $\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$ .
- En appliquant cette formule en  $G$ , centre d'inertie de  $S$ , on a :  $\overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)} = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$ .

### 10.2.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel  $E$  composé de solides  $S_i$ . On étudie son mouvement dans le référentiel  $R_0$ . On donne la méthodologie de calcul du moment cinétique en un point  $A$  sur la figure suivante.



## 10.3 Torseur dynamique

### 10.3.1 Définition

#### Définition – Torseur dynamique

Le **torseur dynamique** d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$  se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- ▶ La résultante du torseur dynamique,  $\overrightarrow{R_d}(S/R_0)$  ne dépend pas du point  $A$  mais uniquement du centre de gravité  $G$  de  $S$  (de masse  $m$ ) et vérifie :  $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0)$ .
- ▶ Le moment dynamique dépend du point  $A$  et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point :  $\overrightarrow{\delta(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R_0)$ .

### 10.3.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

#### Propriété – Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Pour un solide  $S$  de masse  $M$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  et soit un point  $A$  quelconque.

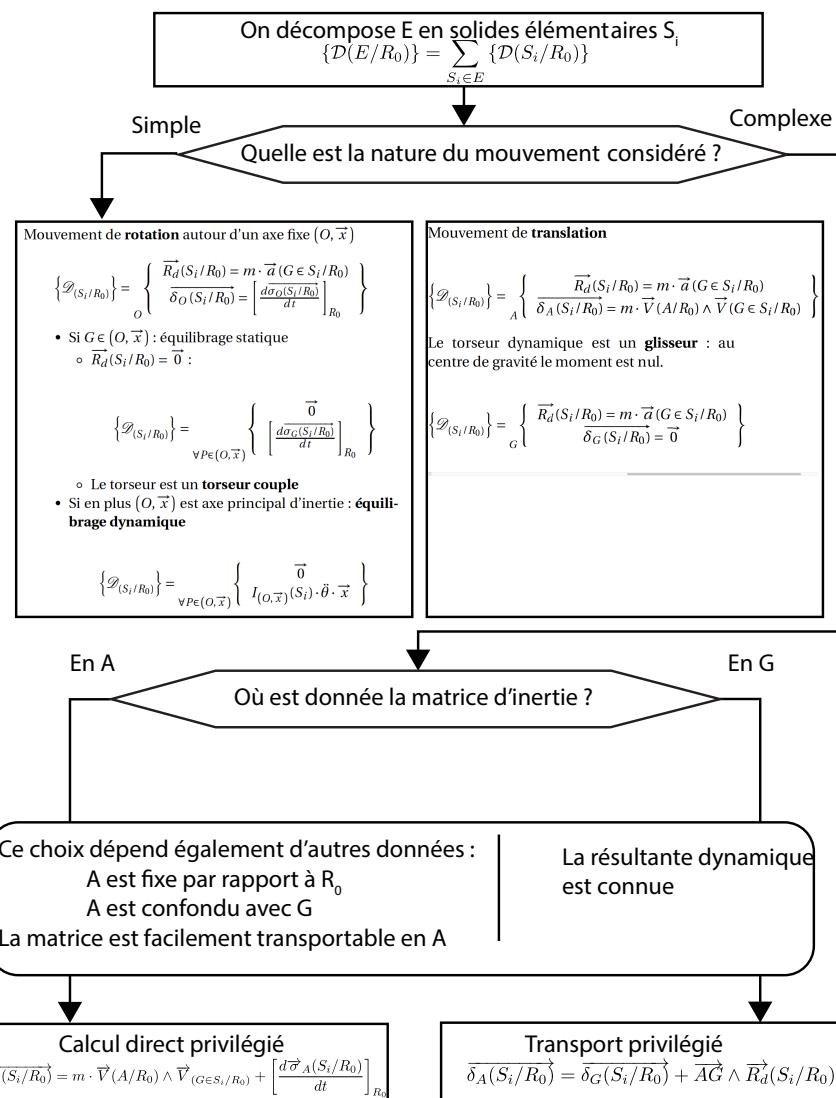
- ▶ Relation entre les **résultantes** :  $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{R_c}(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$ .
- ▶ Relation entre les **moments** :  $\overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\delta(A, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$ .

### 10.3.3 Cas particuliers

- ▶ En appliquant cette formule en un point  $O$  fixe dans  $R_0$ , on a :  $\overrightarrow{\delta(O, S/R_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\delta(O, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0}$ .
- ▶ En appliquant cette formule en un point  $G$ , **centre d'inertie de  $S$** , on a :  $\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0}$ .

### 10.3.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel  $E$  composé de solides  $S_i$ . On étudie son mouvement dans le référentiel  $R_0$ . On donne l'algorithme de calcul du moment dynamique en un point  $A$  sur la figure ci-dessous.



## Bilan

Point considéré	Point quelconque A	Centre de gravité G	Point fixe dans $\mathcal{R}_0$ A
Torseur cinétique $\{\mathcal{E}(S/R_0)\}$	$\begin{cases} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{V(A, S/R_0)} \end{cases}_A$	$\begin{cases} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)} = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} \end{cases}_G$	$\begin{cases} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V(G, S/R_0)} \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} \end{cases}_A$
Torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_0)\}$	$\begin{cases} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, S/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[ \frac{d\sigma(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_0)} \end{cases}_A$	$\begin{cases} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, S/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(G, S/R_0)} = \left[ \frac{d\sigma(G, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{cases}_G$	$\begin{cases} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, S/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[ \frac{d\sigma(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{cases}_A$

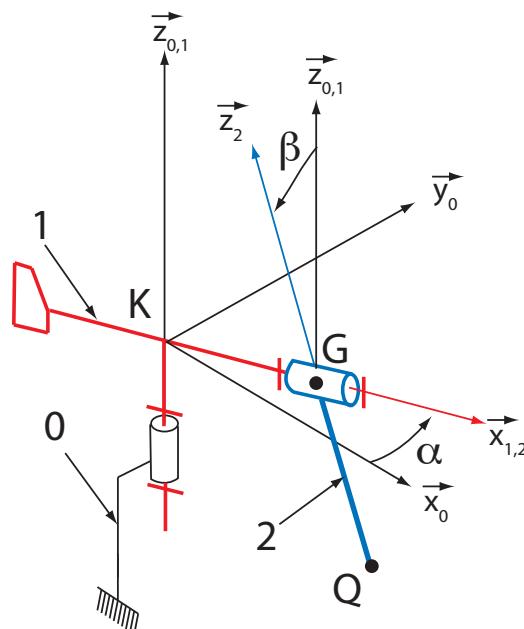
$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_d(1+2/0)} &= \overrightarrow{R_d(1/0)} + \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)} + m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} &= \overrightarrow{\delta(A, 1/0)} + \overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \end{aligned}$$

# Application 1

## Éolienne bipale – Sujet

04 DYN

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



D'après Émilien Durif.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides. On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 crée un couple  $C_m$  selon la direction  $\vec{z}_0$ .

L'éolienne est composée de :

- ▶ un support **0**, auquel on associe un repère  $R_0 = (K; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ;
- ▶ une girouette **1** (de centre d'inertie  $K$ ) en liaison pivot d'axe  $(K, \vec{z}_{0,1})$  avec le support **0**. On lui associe un repère  $R_1 = (K; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$  et on pose  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ . On note  $J$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(K, \vec{z}_1)$  :  $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$ ;
- ▶ une hélice **2**, en liaison pivot d'axe  $(K, \vec{x}_{1,2})$  avec **1**. On lui associe un repère  $R_2 = (K; \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  choisi tel que  $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$  et on pose  $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ . On note  $M$

sa masse,  $G$  son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose  $\overrightarrow{KG} = a \vec{x}_1$ .  
On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point  $G$  :

$$\bar{\bar{I}}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd 3 assimilé à une masse ponctuelle  $m$  au point  $Q$ . On pose  $\overrightarrow{GQ} = -b \vec{z}_2$ .

**Question 1** Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

**Question 2** Déterminer le théorème à utiliser pour relier  $C_m$  aux paramètres dynamiques du problème.

**Question 3** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment cinétique au point  $K$  de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée  $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0$ .

**Question 4** Déterminer le moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$  calculé au point  $K$  de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

**Question 5** Déterminer le moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)}$

**Question 6** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)}$ .

**Question 7** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment dynamique  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$ .

**Question 8** Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon  $\vec{z}_0 : \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$ .

**Question 9** Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ( $\dot{\beta}$ ) constante et dans le cas où l'angle  $\alpha$  est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple  $C_m$  que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.



#### Éléments de correction

- 1.
2.  $C_m = (\overrightarrow{\delta(K, 1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 3/R_0)}) \cdot \vec{z}_0$
3.  $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J\dot{\alpha}$
4.  $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \sin \beta + M \cdot a^2 \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cos \beta + M \cdot a^2 \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$
5.  $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = m [ab\dot{\beta}\vec{z}_2 + a^2\dot{\alpha}\vec{z}_1 + b^2\dot{\beta}\vec{x}_2 + ba\dot{\alpha}\cos\beta \cdot \vec{x}_1 + b^2\dot{\alpha}\sin\beta\vec{y}_2]$
6.  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = J\ddot{\alpha}$ .
7.  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot{\alpha} [B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + Ma^2] + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \sin \beta [B - C]$ .
8.  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = m [ab (\dot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)]$
9.  $C_m = -mab\dot{\beta}^2 \sin \beta$

# Application 1

## Éolienne bipale – Corrigé

04 DYN

D'après Émilien Durif.

**Question 1** Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

### Correction



**Question 2** Déterminer le théorème à utiliser pour relier  $C_m$  aux paramètres dynamiques du problème.

### Correction

On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ( $E = \{1 + 2 + 3\}$ ) en projection sur l'axe  $(K, \vec{z}_0)$  :  $\overrightarrow{\mathcal{M}(K, \bar{E} \rightarrow E)} \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{\delta(K, E/R_0)} \cdot \vec{z}_0$   
 $\Leftrightarrow C_m = (\overrightarrow{\delta(K, 1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 3/R_0)}) \cdot \vec{z}_0.$

**Question 3** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment cinétique au point  $K$  de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée  $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0$ .

### Correction

- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe  $(K, \vec{z}_0)$  :
- $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = (\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \vec{\Omega}(1/0)) \cdot \vec{z}_0 = (\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0) \cdot \vec{z}_0.$

Or on note  $J$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(K, \vec{z})$  soit :  $\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0 = J$ .

Ainsi :  $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J\dot{\alpha}$ .

### Remarque

En considérant que  $\bar{\bar{I}}_K(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & J \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ ,  $\bar{\bar{I}}_K(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \begin{pmatrix} -E_1\dot{\alpha} \\ -D_1\dot{\alpha} \\ J\dot{\alpha} \end{pmatrix}$  et  
 $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J\dot{\alpha}$ .

**Question 4** Déterminer le moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$  calculé au point  $K$  de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

**Correction**

- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- On connaît l'opérateur d'inertie en  $G$ , on calcule donc :  $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} = \bar{I}_G(2) \cdot \overrightarrow{\Omega}(2/0)$ .
- On calcule  $\overrightarrow{\Omega}(2/0) : \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} (\cos \beta \vec{z}_2 + \sin \beta \vec{y}_2)$ .
- On calcule  $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$   
 $= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$ .
- On calcule  $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} :$ 
  - $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{R_c}(2/0) = \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} + a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0)$
  - On calcule  $\overrightarrow{V}(G \in 2/0) : \overrightarrow{V}(G \in 2/0) = \overrightarrow{V}(K \in 2/0) + \overrightarrow{GK} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \vec{0} - a \cdot \vec{x}_1 \wedge (\dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1) = a \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1$
  - On calcule  $a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0) : a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V} (G \in 2/0) = a \cdot \vec{x}_1 \wedge M (a \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1) = M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$
  - On en déduit  $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$

**Question 5** Déterminer le moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)}$

**Correction**

- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi  $\overrightarrow{\sigma(Q, 3/0)} = \vec{0}$ .
- $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = \overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \vec{V} (Q \in 3/0) :$ 
  - On calcule  $\overrightarrow{KQ} : \overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2$
  - On calcule  $\vec{V}(Q \in 3/0) : \vec{V}(Q \in 3/0) = \vec{V}(Q \in 3/2) + \vec{V}(Q \in 2/1) + \vec{V}(Q \in 1/0) = \vec{0} + \vec{V}(G \in 2/1) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \vec{V}(G \in 1/0) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \vec{0} + b \cdot \vec{z}_2 \wedge \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + b \cdot \vec{z}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}$
  - On calcule  $\overrightarrow{KQ} \wedge m \vec{V}(Q \in 3/0) :$ 

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KQ} \wedge m \vec{V}(Q \in 3/0) &= m \cdot [a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2] \wedge [b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}] \\ &= m [a \cdot b \cdot \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2] \end{aligned}$$
  - $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = m [a \cdot b \cdot \dot{\beta} \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2]$

**Question 6** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)}$ .

**Correction**

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} - \frac{d}{dt} [z_0]_{R_0} \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

**Question 7** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment dynamique  $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$ .

**Correction**

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} - \frac{d}{dt} [z_0]_{R_0} \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$$

Or,  $\vec{z}_{0,1} = \cos \beta \cdot \vec{z}_2 + \sin \beta \cdot \vec{y}_2$ ,

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} &= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \\ &= \dot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] \end{aligned}$$

d'où,

$$\boxed{\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] + 2 \cdot \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta [B - C].}$$

**Question 8** Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon  $\vec{z}_0 : \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$ .

**Correction**

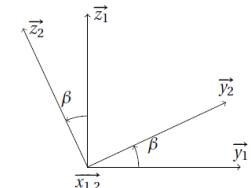
On trouve alors :

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)} &= m \frac{d[a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cos \beta + a^2 \cdot \dot{\alpha} + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin^2 \beta]}{dt} \\ &= m [a \cdot b \cdot (\dot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 \cdot (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)] \end{aligned}$$

**Question 9** Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ( $\dot{\beta}$ ) constante et dans le cas où l'angle  $\alpha$  est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple  $C_m$  que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

**Correction**

Le théorème du moment dynamique autour de l'axe  $(K, \vec{z}_{0,1})$  donne :  $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta$ .



$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_2 = \cos \beta$$

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_1 = 1$$

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_0 = 0$$

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_1 = 0$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 = \sin \beta$$



## Application 2

### Régulateur centrifuge – Sujet

C. Gamelon & P. Dubois.

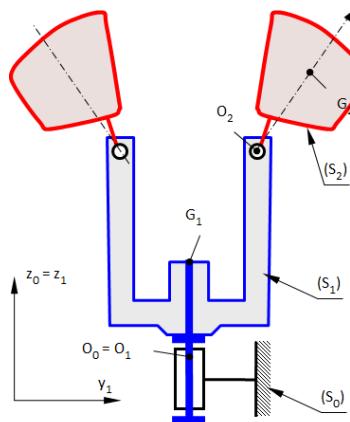
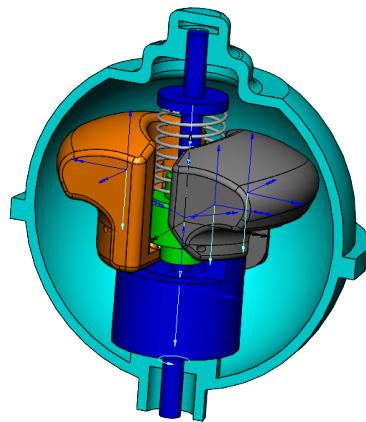
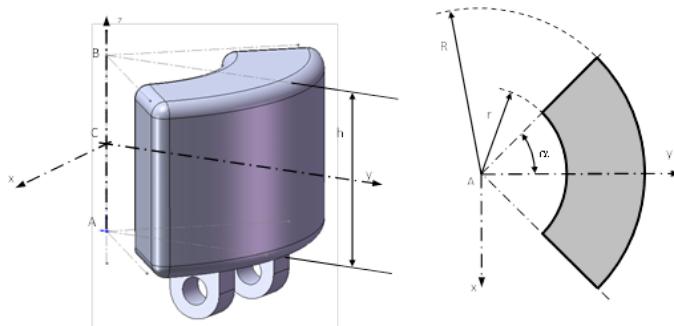
04 DYN

On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor ( $S_1$ ) et la masselotte ( $S_2$ ) représentés schématiquement ci-contre.

- ( $S_1$ ) est en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$  avec ( $S_0$ ).
- ( $S_2$ ) est en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{x}_1)$  avec ( $S_1$ ).
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$ .
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$ .
- $\overrightarrow{O_0 G_1} = h_1 \vec{z}_0$ .
- $\overrightarrow{O_0 O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$ .
- $\overrightarrow{O_2 G_2} = L_2 \vec{y}_2$ .

Pour chacun des solides  $S_i$  on note  $m_i$  la masse,  $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$ .

On note  $E = \{S_1, S_2\}$ . Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



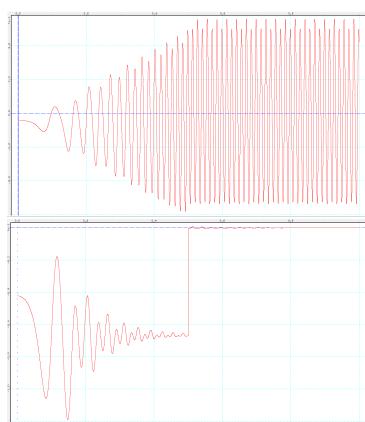
**Question 1** Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Afin de moins alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$ .

**Question 2** Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

**Question 3** Déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$  en  $O_1$  et le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$  en  $O_2$ .

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$ .



**Question 5** Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$  en  $O_2$  ?

**Question 6** Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulations permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre  $S_1$  et  $S_2$  (couple maximal 0,46 Nm), une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

**Question 7** Commenter ces résultats.

# Application 2

## Régulateur centrifuge – Corrigé

C. Gamelon & P. Dubois.

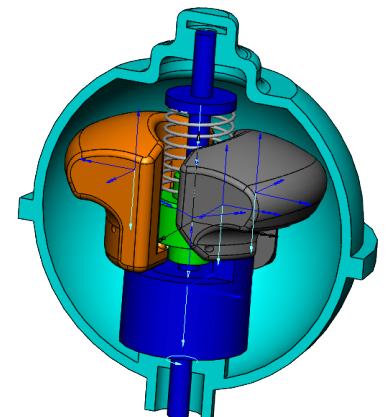
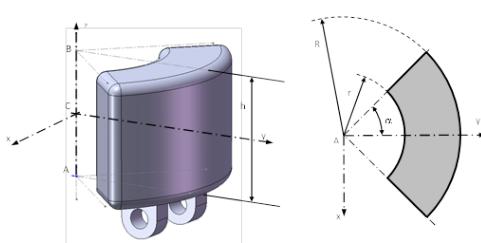
04 DYN

On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor ( $S_1$ ) et la masselotte ( $S_2$ ) représentés schématiquement ci-contre.

- ( $S_1$ ) est en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$  avec ( $S_0$ ).
- ( $S_2$ ) est en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{x}_1)$  avec ( $S_1$ ).
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$ .
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$ .
- $\overrightarrow{O_0G_1} = h_1 \vec{z}_0$ .
- $\overrightarrow{O_0O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$ .
- $\overrightarrow{O_2G_2} = L_2 \vec{y}_2$ .

Pour chacun des solides  $S_i$  on note  $m_i$  la masse,  $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$ .

On note  $E = \{S_1, S_2\}$ . Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.

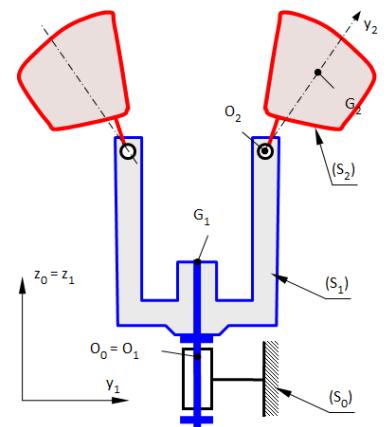


**Question 1** Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

### Correction

Le solide 1 est axisymétrique. En tout point de l'axe du solide, la matrice d'inertie sera diagonale. On a donc  $I_{O_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}$ .

Le solide 2 admet le plan  $(\vec{y}_2, \vec{z}_2)$  comme plan de symétrie. Les produits d'inertie dépendant



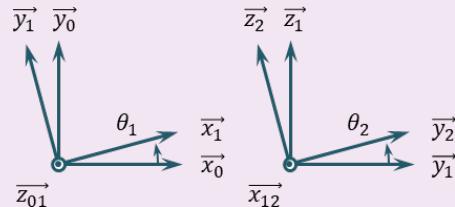
de  $x$  sont nuls. On a donc  $I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}$ .

Afin de moins alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$ .

**Question 2** Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

**Question 3** Déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$  en  $O_1$  et le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$  en  $O_2$ .

### Correction



#### Mouvement du solide 1/0

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1}.$$

$O_1$  est un point fixe dans  $R_0$ .

$$\{\mathcal{C}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ I_{O_1}(S_1) \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1} \text{ et } \{\mathcal{D}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1}$$

#### Mouvement du solide 2/0

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 \\ \overrightarrow{V(G_2, S_2/R_0)} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 \\ L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 L_1 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_2}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(G_2, S_2/R_0)} &= \overrightarrow{V(G_2, S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(G_2, S_1/R_0)} \\ &= \left( \underbrace{\overrightarrow{V(O_2, S_2/S_1)} + \overrightarrow{G_2 O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}}_{\vec{0}} \right) + \left( \underbrace{\overrightarrow{V(O_0, S_1/R_0)} + \overrightarrow{G_2 O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)}}_{\vec{0}} \right) \\ &= (-L_2 \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) + (-(\vec{d}_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1 + L_2 \vec{y}_2) \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_1) = L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 \end{aligned}$$

$G_2$  est le centre de gravité de  $S_2$ .

$$\{\mathcal{C}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1) \\ I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 = \dot{\theta}_1 (\cos \theta_2 \vec{z}_2 + \sin \theta_2 \vec{y}_2) + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2$$

$$I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} =$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \dot{\theta}_2 \\ B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\} &= \left\{ \left[ \frac{d}{dt} \left( I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right) \right]_{R_0} \right\}_{G_2} \\
\overrightarrow{\Gamma(G_2, S_2/R_0)} &= \left[ \frac{d \left( L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 \right)}{dt} \right]_{R_0} \\
&= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 + L_2 \dot{\theta}_2 \left( \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \right) - \ddot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1 (-L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \vec{x}_1 - \\
&\quad \dot{\theta}_1^2 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1 \\
&= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{y}_2 + (2L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \ddot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2)) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1^2 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1 \\
\left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} &= \dots \\
&= \begin{pmatrix} A_2 \ddot{\theta}_2 \\ B_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + B_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -D_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} \\
&+ A_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 \quad + \quad (B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) \left( -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \right) \quad + \\
&(-D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) \left( \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \right) \\
\left[ \frac{dz_2}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{dz_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \\
\left[ \frac{dy_2}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{dy_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \\
\left[ \frac{dx_2}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{dx_1}{dt} \right]_{R_1} = \left[ \frac{dx_1}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{y}_1
\end{aligned}$$

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$ .

#### Correction

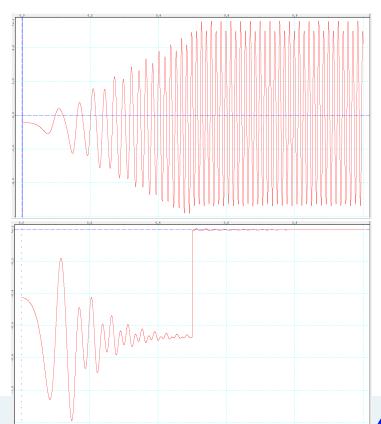
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2 \\
&= \left( \overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2 \\
&= \left( \left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2 \\
\left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} \cdot \vec{x}_2 \quad + \\
\left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0} &
\end{aligned}$$

**Question 5** Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$  en  $O_2$  ?

**Question 6** Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre  $S_1$  et  $S_2$  (couple maximal 0,46 Nm), une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

**Question 7** Commenter ces résultats.





# Application 3

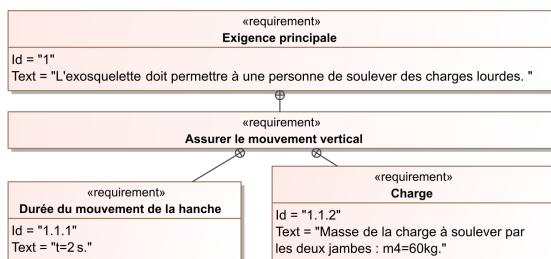
## Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

04 DYN

### Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



#### Objectif

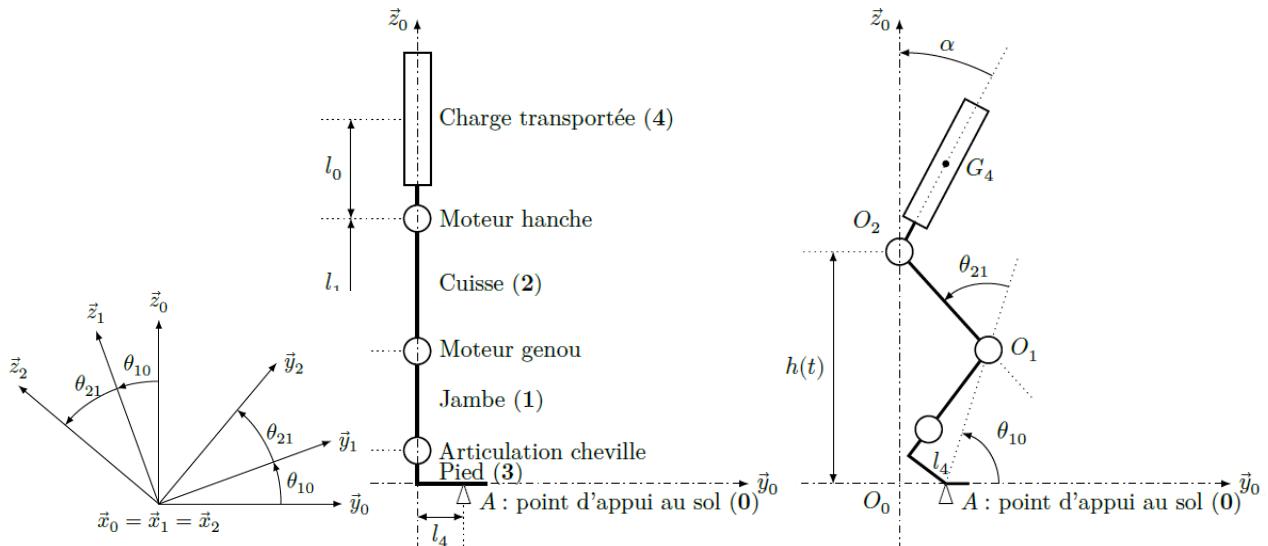
Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

### Élaboration du modèle dynamique

#### Objectif

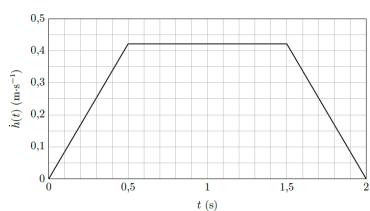
Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

Ces calculs visent à déterminer l'équation dynamique qui permet d'obtenir le couple moteur (minimal) en fonction des caractéristiques géométriques et massique de la charge à soulever ainsi que des conditions d'utilisation. Le modèle d'étude est celui représenté à la figure suivante correspondant au modèle d'étude plan position fléchie.



**Données :**

- $\overrightarrow{O_1G_4} = \lambda(t)\vec{z}_0 - L \cos \theta_{10}\vec{y}_0$ ;
- accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;
- longueur de la cuisse  $l_1 = 43,1 \text{ cm}$ .
- longueur de la jambe  $l_2 = 43,3 \text{ cm}$ .
- longueur de l'articulation de la cheville à la plante arrière du pied  $l_3 = 6,9 \text{ cm}$ .
- longueur de la plante arrière du pied au point d'appui sur le sol  $l_4 = 13 \text{ cm}$ .
- longueur  $\overrightarrow{O_0O_1} = L\vec{y}_1$  avec  $L = 51,8 \text{ cm}$ .
- rapport de réduction :  $r = \frac{\omega_r}{\omega_m} = \frac{1}{120}$ .



**Hypothèses :**

- L'étude est modélisable dans le plan.
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- Les inerties des pièces sont négligées.
- Toutes les masses sont négligées **sauf la masse  $m_4$  de la charge à soulever**.
- L'angle  $\alpha$  entre la charge transportée et la verticale  $\vec{z}_0$  reste constant.
- $G_4$ , centre de gravité de la charge transportée (4), reste en permanence à la verticale du point A d'appui au sol.

On note  $E = \{\text{cuisse}(2) + \text{charge transportée}(4)\}$ .

**Question 1** Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$  en fonction de  $m_4$ ,  $\dot{h}(t)$ ,  $L$  et  $\cos \theta_{10}$ .

**Question 3** Déduire  $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$  en fonction de  $m_4$ ,  $\ddot{h}(t)$ ,  $L$  et  $\cos \theta_{10}$ .

La loi d'évolution de la vitesse de la hanche est donnée à la figure ci-contre.

**Question 4** Déterminer l'expression littérale du couple  $C_r$  exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche. Calculer numériquement ce couple pour une valeur de  $\theta_{10}$  égale à  $54,5^\circ$  correspondant à la valeur maximale du couple.

**Question 5** Calculer le couple  $C_m$  au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte  $\eta = 0,75$  (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

**Question 6** Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

## Validation du dimensionnement du moteur

### Objectif

Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

Le cycle suivant obtenu à l'aide du modèle multiphysique de représente l'évolution du couple moteur, et ce en tenant compte du moment d'inertie du rotor, sur un cycle de période  $T = 15$  s.

Quatre phases sont définies sur cette période :

- phase 1 pour  $0 \leq t < 2$  s, valeur efficace du couple moteur  $C_1 = 0,838$  Nm;
- phase 2 pour  $2 \leq t < 4$  s, couple moteur constant  $C_2 = -0,912$  Nm;
- phase 3 pour  $4 \leq t < 6$  s, valeur efficace du couple moteur  $C_3 = 0,838$  Nm;
- phase 4 pour  $6 \leq t < 15$  s, couple moteur nul.

**Question 7** Préciser à quels mouvements correspondent les 4 phases de ce cycle.

Le couple efficace est également appelé couple thermiquement équivalent, il est défini

par :  $C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T c(t)^2 dt}$ . On a aussi  $C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i}$

**Question 8** Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

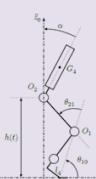
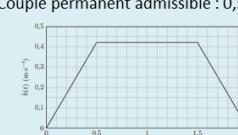
## Retour sur l'objectif

Le couple moteur varie entre  $-1,156$  Nm et  $0,596$  Nm. Les caractéristiques du moteur choisi sont :

- vitesse à vide de  $3120 \text{ tr min}^{-1}$  pour une alimentation nominale en amont de l'onduleur de  $36 \text{ V}$ ;
- couple permanent admissible de  $0,560$  Nm;
- pente de la courbe de la vitesse en fonction du couple de  $423 \text{ tr min}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

De plus une étude cinématique précédente a montré que le moteur permettant d'actionner le moteur doit pouvoir atteindre une vitesse de  $2200 \text{ tr min}^{-1}$ .

**Question 9** Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.

Problématique	
Le moteur pré-choisi permet d'assurer le fonctionnement de l'exosquelette ?	
Domaine de la modélisation	Résolution Cinématique
<b>Modèle cinématique</b>  $h(t)$	<b>Résolution Cinématique</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>N_{\text{mot}} = 2200 \text{ tr min}^{-1}</math></li> </ul>
Domaine du client	<b>Moteur choisi</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Vitesse à vide : <math>3120 \text{ tr min}^{-1}</math></li> <li>• Couple permanent admissible : <math>0,56 \text{ Nm}</math></li> </ul> 

### Éléments de correction

1.  $\cdot \overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 =$
2.  $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = -Lm_4 \cos \theta_{10} \dot{h}(t).$
3.  $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = -Lm_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t).$
4.  $C_r = -m_4 L \cos \theta_{10} (g + \ddot{h}(t)) \approx -190,5 \text{ Nm}.$
5.  $C_m \approx 2,12 \text{ Nm}.$
6. ...
7. ...
8.  $C_{\text{eff}} \approx 0,546 \text{ Nm}.$





# Application 3

## Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

04 DYN

### Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

#### Objectif

Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.



### Élaboration du modèle dynamique

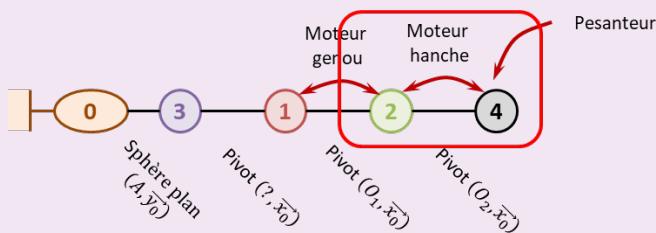
#### Objectif

Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

**Question 1** Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

#### Correction

Étant donné que l'on souhaite que l'angle  $\alpha$  reste constant pendant la levée d'une charge, le mouvement de 4 sera donc un mouvement de translation rectiligne.



**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$  en fonction de  $m_4$ ,  $\dot{h}(t)$ ,  $L$  et  $\cos \theta_{10}$ .

#### Correction

$E$  étant en translation, on a  $\overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)} = \vec{0}$ . On a alors  $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} = \overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)} + \overrightarrow{O_1 G_4} \wedge \overrightarrow{R_c(E/0)}$ .

Par ailleurs,  $\overrightarrow{R_c(E/0)} = m_4 \overrightarrow{V(G_4, E/0)} = m_4 \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}$ .

On a donc :  $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = (\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0}) \wedge m_4 \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{x_0} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$ .

**Question 3** Déduire  $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0}$  en fonction de  $m_4$ ,  $\ddot{h}(t)$ ,  $L$  et  $\cos \theta_{10}$ .

#### Correction

##### Méthode 1 – Calcul de $\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)}$ et déplacement

On a  $\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)} = \frac{d\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)}}{dt} = \overrightarrow{0}$ . En conséquences,  $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = (\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0}) \wedge m_4 \ddot{h}(t) \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{x_0} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$ .

##### Méthode 2 – Calcul de $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)}$

On a aussi  $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} = \left( \frac{d\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)}}{dt} \right) + m_4 \overrightarrow{V(O_1/0)} \wedge \overrightarrow{V(G_4, E/0)}$ .

Par suite on a  $(\overrightarrow{V(O_1, E/0)} \wedge \overrightarrow{V(G_4, E/0)}) \overrightarrow{x_0} = ((L \overrightarrow{y_1} \wedge \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{x_0}) \wedge \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}) \overrightarrow{x_0} = (-L \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{z_1} \wedge \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}) \overrightarrow{x_0} = -L \dot{\theta}_{10} \dot{h}(t) \sin \theta_{10}$ .

Enfin,  $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t) + L m_4 \dot{\theta}_{10} \sin \theta_{10} \dot{h}(t) - m_4 L \dot{\theta}_{10} \dot{h}(t) \sin \theta_{10} = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$ .

**Question 4** Déterminer l'expression littérale du couple  $C_r$  exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche. Calculer numériquement ce couple pour une valeur de  $\theta_{10}$  égale à  $54,5^\circ$  correspondant à la valeur maximale du couple.

#### Correction

- On isole l'ensemble  $E$ .
- On réalise le bilan des actions mécaniques :

• action de la liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(1 \rightarrow E)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \end{array} \right\}_{O_1}$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = 0$ ;

• action du réducteur :  $\{\mathcal{T}(1_r \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r \overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}_{O_1}$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = 0$ ;

• action de la pesanteur :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_4 g \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_4}$ . On a alors

$\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, \text{pes} \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{\mathcal{M}(G_4, \text{pes} \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} + (\overrightarrow{O_1 G_4} \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = (\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0}) \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{x_0} = (-L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0} \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = m_4 g L \cos \theta_{10}$ .

- $E$  étant en pivot d'axe  $(O_1, \overrightarrow{x_1})$ , on applique le théorème du moment dynamique en  $O_1$  en projection sur  $\overrightarrow{x_1}$  :  $-L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t) = C_r + m_4 g L \cos \theta_{10} \Leftrightarrow C_r = -m_4 L \cos \theta_{10} (g + \ddot{h}(t))$ .

En réalisant l'application numérique, on a :  $C_r = -60 \times 51,8 \times 10^{-2} \times \cos 54,5 \left( 9,81 + \frac{0,425}{0,5} \right) \simeq -190,5 \text{ Nm}$ .

**Question 5** Calculer le couple  $C_m$  au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte  $\eta = 0,75$  (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

#### Correction

En régime permanent, on a  $\eta = \frac{C_r \omega_r}{C_m \omega_m} = r \frac{C_r}{C_m}$  et  $C_m = \frac{r}{\eta} C_r = \frac{1}{0,75 \times 120} \times 190,5 \simeq 2,12 \text{ Nm.}$

**Question 6** Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

#### Correction

Si on en avait la possibilité, il faudrait mettre un capteur de puissance au niveau de la commande (mesure de la vitesse et du couple de commande) puis un capteur de puissance au niveau de la charge (mesure de vitesse et du couple en sortie au niveau du genou). Le rendement peut s'observer en régime permanent en faisant le rapport des puissances. Pour observer une perte de rendement, il est nécessaire que soient modélisées les actions de frottement.

## Validation du dimensionnement du moteur

#### Objectif

Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

**Question 7** Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

#### Correction

$$C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i} = \sqrt{\frac{1}{15} (0,838^2 \times 2 + 0,912^2 \times 2 + 0,838^2 \times 2)} \simeq 0,546 \text{ Nm.}$$

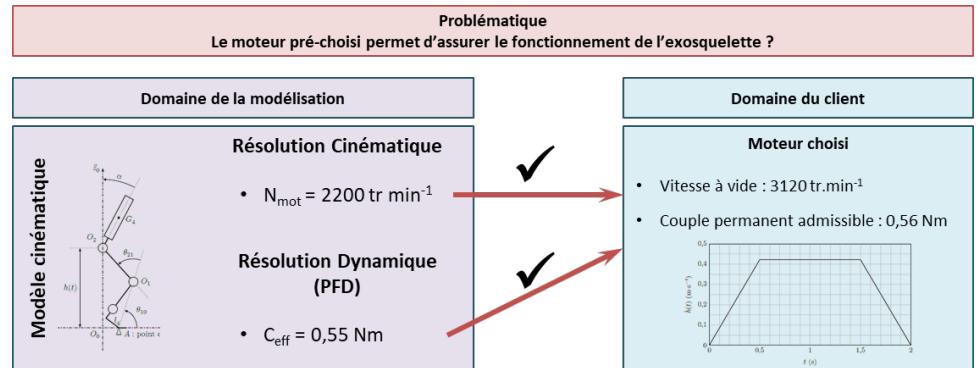
## Retour sur l'objectif

**Question 8** Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.

#### Correction

1. Le couple thermiquement équivalent calculé est de 0,546 Nm ce qui est inférieur aux couple admissible par le moteur.
2. La fréquence de rotation à atteindre par le moteur est de  $2200 \text{ tr min}^{-1}$ . Le moteur proposé tourne à  $3120 \text{ tr min}^{-1}$  à vide. On peut donc supposer qu'en charge, il atteindra les  $2200 \text{ tr min}^{-1}$ .

Su ces deux critères le moteur proposé est donc validé.



# TD 1

## Orthèse d'épaule – Sujet

Centrale Supélec PSI 2010.

0 DYN

### Mise en situation

Le support de cette étude est une orthèse portable, de type exosquelette, qui contribue au développement de la tonicité musculaire de l'épaule et du bras. Installée dans le dos de l'individu et liée à la fois au bras et à la main, elle offre une résistance aux mouvements de la main. Ainsi, le thérapeute peut réaliser des protocoles très fins de rééducation en programmant des spectres d'efforts résistants pour chaque mouvement du patient. Le travail du patient peut également être optimisé en le plaçant dans un environnement de réalité virtuelle permettant de visualiser les situations de travail conçues par le thérapeute.

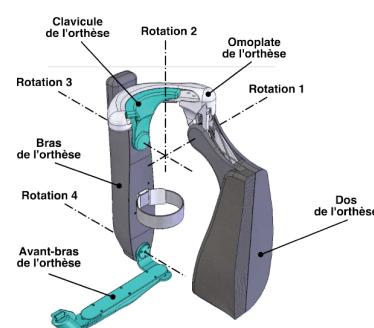
### Objectif

L'objectif est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force prédéterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion.

La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

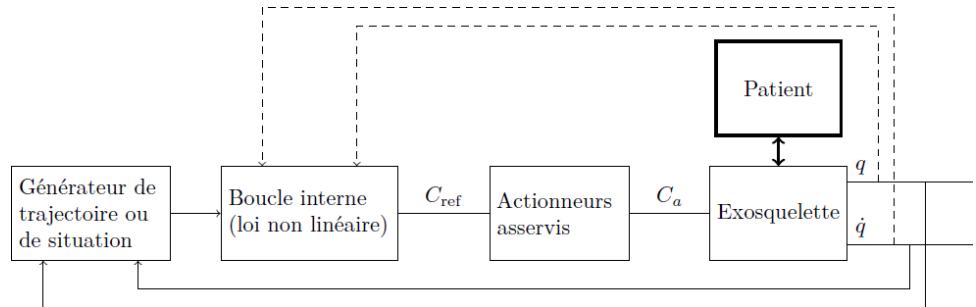
Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs ( $K_1, K_2$ ) de maintien (pour ce critère, seule la force $Z_F$ est considérée).	$ \Delta Z_F / \Delta \gamma  = K_1 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$ $ \Delta Z_F / \Delta \delta  = K_2 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$

L'actionneur ne peut fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation qu'un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose, de plus, qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent. On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras ( $\gamma$  et  $\delta$ ) et la variation de la force  $Z_F$  (ces grandeurs seront définies par la suite) exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs ( $K_1, K_2$ ).



La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- ▶  $q$  et  $\dot{q}$  sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations;
- ▶ une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail;
- ▶ une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire;
- ▶ un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence  $C_a = C_{\text{ref}}$ .

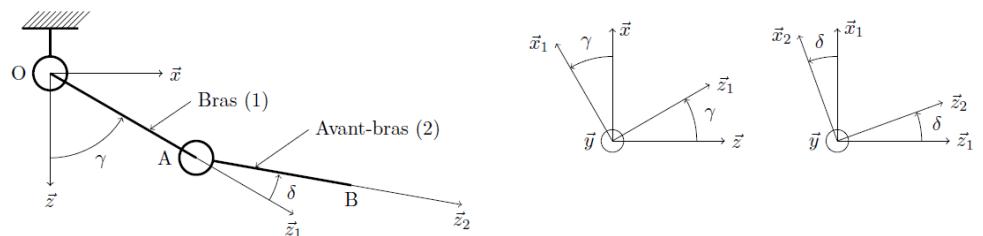


### Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

#### Objectif

Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

Le système étudié se réduit donc à l'ensemble {Bras + Avant-bras} relativement au reste du dispositif supposé fixe : on suppose que les angles d'abduction/adduction et de rotation interne/rotation externe de l'épaule sont maintenus identiquement nuls par l'action des moteurs situés dans la partie dorsale du dispositif (non étudiée ici). Le paramétrage se réduit donc à la situation de la figure suivante qui représente l'ensemble étudié dans un plan  $(\vec{x}; \vec{z})$  donné, où l'on choisit  $\vec{z}$  vertical dans le sens descendant. Le tableau précise les différents paramètres utiles pour le calcul de dynamique envisagé.



Bâti		
Repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe, galiléen		
Bras (moteurs compris)		
Repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ Angle $\gamma = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ $\vec{y} = \vec{y}_1$	Longueur $l_1 = 350$ mm Masse $m_1 = 2,3$ kg Centre d'inertie $G_1$ tel que : $\overrightarrow{OG_1} = \lambda_1 \vec{z}_1$ , $\lambda_1 = 50$ mm	Matrice d'inertie $I(G_1, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$ $A_1 = 2,4 \times 10^{-2}$ kg · m <sup>2</sup> $B_1 = 2,3 \times 10^{-2}$ kg · m <sup>2</sup> $D_1 = 2,1 \times 10^{-3}$ kg · m <sup>2</sup>
Avant-bras		
Repère $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ Angle $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$	Longueur $l_2 = 270$ mm Masse $m_2 = 0,3$ kg Centre d'inertie $G_2$ tel que : $\overrightarrow{AG_2} = \lambda_2 \vec{z}_2$ , $\lambda_2 = 135$ mm	Matrice d'inertie $I(G_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$ $A_2 = 1,8 \times 10^{-3}$ kg · m <sup>2</sup> $B_2 = 1,8 \times 10^{-3}$ kg · m <sup>2</sup> $D_2 = 4,3 \times 10^{-5}$ kg · m <sup>2</sup>

**Question 1** Exprimer littéralement, au point  $G_2$  et dans le repère  $R_1$ , le torseur dynamique du mouvement du solide {Avant-bras} par rapport au référentiel fixe  $R_0$  supposé galiléen :  $\{\mathcal{T}(\text{Avant-bras}/R_0)\}_{G_2, (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$ .

Les différentes actions mécaniques agissant sur le dispositif sont les suivantes :

- ▶ l'action de la pesanteur sur les solides {Bras} et {Avant-bras} ;
- ▶ l'action du bâti sur le solide {Bras} au travers de la liaison pivot d'axe  $(O, \vec{y})$  et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante :  $\{\mathcal{T}(\text{Bâti} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_1 \vec{x}_1 + Y_1 \vec{y}_1 + Z_1 \vec{z}_1 \\ L_1 \vec{x}_1 + M_1 \vec{y}_1 + N_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_O$  où les paramètres  $(X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1)$  sont inconnus ;
- ▶ l'action du premier actionneur sur le solide {Bras} :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{array} \right\}_O$  où le couple  $C_1(t)$  exercé est connu au cours du temps ;
- ▶ l'action du solide {Bras} sur le solide {Avant-bras} au travers de la liaison pivot d'axe  $(A, \vec{y})$  et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante :  $\{\mathcal{T}(\text{Bras} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_2 \vec{x}_1 + Y_2 \vec{y} + Z_2 \vec{z}_1 \\ L_2 \vec{x}_1 + M_2 \vec{y} + N_2 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_A$  où les paramètres  $(X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2)$  sont inconnus ;
- ▶ les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  et  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  où le couple  $C_2(t)$  exercé est connu au cours du temps ;
- ▶ l'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité  $B$  de l'avant-bras et définie par :  $\{\mathcal{T}(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$ .

On veut déterminer les deux équations permettant de décrire le mouvement des deux axes de l'orthèse. On suppose pour cela que les deux liaisons pivots sont parfaites.

Le PFD permet d'obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} C_1(t) = & \left( B_1 + B_2 + m_1 \lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 \lambda_2^2 \right) \ddot{\gamma} + \left( B_2 + m_2 \lambda_2^2 \right) \ddot{\delta} \\ & + m_2 l_1 \left( \lambda_2 (2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2) \sin \delta \right) \\ & + m_1 g \lambda_1 \sin \gamma + m_2 g (l_1 \sin \gamma + \lambda_2 \sin(\gamma + \delta)) \\ & - X_F (l_1 \cos \gamma + l_2 \cos(\gamma + \delta)) + Z_F (l_1 \sin \gamma + l_2 (\gamma + \delta)) \end{aligned}$$

**Question 2** Détailler la démarche qui a permis d'obtenir cette équation, on précisera en particulier l'isolement, le bilan des Actions Mécaniques Extérieures et le choix des équations utilisées.

**Question 3** Appliquer la démarche pour retrouver l'équation donnée.

**Question 4** Écrire une deuxième relation issue du Principe Fondamental de la Dynamique, indépendante de la précédente, faisant intervenir le couple  $C_2(t)$ , et qui permette de ne pas faire apparaître les composantes  $L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2$  des torseurs des actions de liaison. On détaillera la démarche de la même façon que lors de la première question.

**Question 5** En déduire que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$  où  $C$  est un vecteur et  $A, B$  et  $Q$  sont des matrices  $2 \times 2$  que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement  $(\gamma, \delta)$  et de leurs dérivées premières  $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$ .

**Question 6** Calculer les couples  $(C_1, C_2)$  exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ( $X_F = 0, Z_F = 0$ ) et dans une position statique. Discuter de la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 7** Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?



# TD 1

## Orthèse d'épaule – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2010.



### Mise en situation

Le support de cette étude est une orthèse portable, de type exosquelette, qui contribue au développement de la tonicité musculaire de l'épaule et du bras. Installée dans le dos de l'individu et liée à la fois au bras et à la main, elle offre une résistance aux mouvements de la main. Ainsi, le thérapeute peut réaliser des protocoles très fins de rééducation en programmant des spectres d'efforts résistants pour chaque mouvement du patient. Le travail du patient peut également être optimisé en le plaçant dans un environnement de réalité virtuelle permettant de visualiser les situations de travail conçues par le thérapeute.

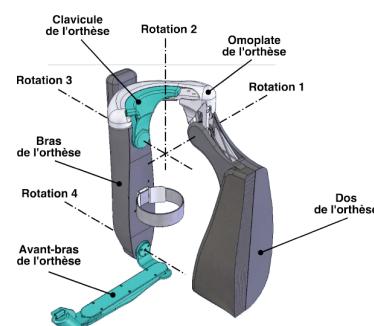
### Objectif

L'objectif est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force prédéterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion.

La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

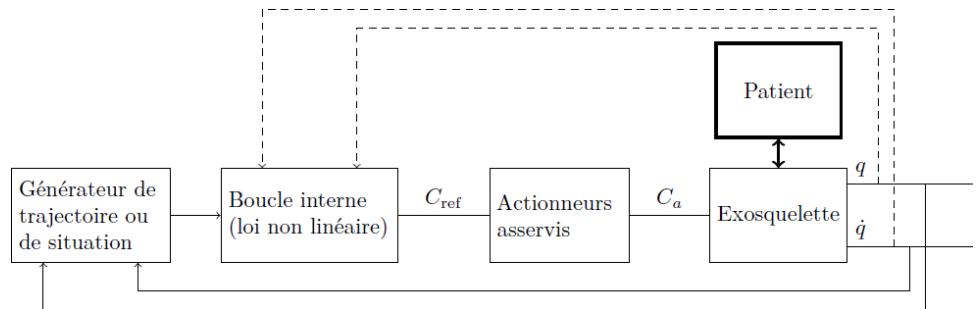
Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs ( $K_1, K_2$ ) de maintien (pour ce critère, seule la force $Z_F$ est considérée).	$ \Delta Z_F / \Delta \gamma  = K_1 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$ $ \Delta Z_F / \Delta \delta  = K_2 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$

L'actionneur ne peut fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation qu'un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose, de plus, qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent. On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras ( $\gamma$  et  $\delta$ ) et la variation de la force  $Z_F$  (ces grandeurs seront définies par la suite) exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs ( $K_1, K_2$ ).



La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- ▶  $q$  et  $\dot{q}$  sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations;
- ▶ une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail;
- ▶ une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire;
- ▶ un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence  $C_a = C_{\text{ref}}$ .

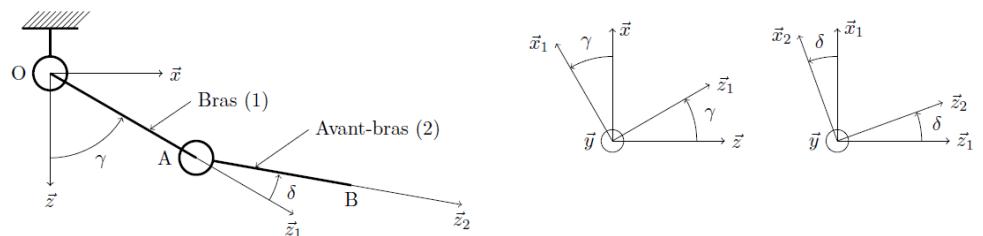


### Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

#### Objectif

Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

Le système étudié se réduit donc à l'ensemble {Bras + Avant-bras} relativement au reste du dispositif supposé fixe : on suppose que les angles d'abduction/adduction et de rotation interne/rotation externe de l'épaule sont maintenus identiquement nuls par l'action des moteurs situés dans la partie dorsale du dispositif (non étudiée ici). Le paramétrage se réduit donc à la situation de la figure suivante qui représente l'ensemble étudié dans un plan  $(\vec{x}; \vec{z})$  donné, où l'on choisit  $\vec{z}$  vertical dans le sens descendant. Le tableau précise les différents paramètres utiles pour le calcul de dynamique envisagé.



Bâti		
Repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe, galiléen		
Bras (moteurs compris)		
Repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ Angle $\gamma = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ $\vec{y} = \vec{y}_1$	Longueur $l_1 = 350$ mm Masse $m_1 = 2,3$ kg Centre d'inertie $G_1$ tel que : $\overrightarrow{OG_1} = \lambda_1 \vec{z}_1$ , $\lambda_1 = 50$ mm	Matrice d'inertie $I(G_1, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$ $A_1 = 2,4 \times 10^{-2}$ kg · m <sup>2</sup> $B_1 = 2,3 \times 10^{-2}$ kg · m <sup>2</sup> $D_1 = 2,1 \times 10^{-3}$ kg · m <sup>2</sup>
Avant-bras		
Repère $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ Angle $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$	Longueur $l_2 = 270$ mm Masse $m_2 = 0,3$ kg Centre d'inertie $G_2$ tel que : $\overrightarrow{AG_2} = \lambda_2 \vec{z}_2$ , $\lambda_2 = 135$ mm	Matrice d'inertie $I(G_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$ $A_2 = 1,8 \times 10^{-3}$ kg · m <sup>2</sup> $B_2 = 1,8 \times 10^{-3}$ kg · m <sup>2</sup> $D_2 = 4,3 \times 10^{-5}$ kg · m <sup>2</sup>

**Question 1** Exprimer littéralement, au point  $G_2$  et dans le repère  $R_1$ , le torseur dynamique du mouvement du solide {Avant-bras} par rapport au référentiel fixe  $R_0$  supposé galiléen :  $\{\mathcal{T}(\text{Avant-bras}/R_0)\}_{G_2, (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$ .

Les différentes actions mécaniques agissant sur le dispositif sont les suivantes :

- ▶ l'action de la pesanteur sur les solides {Bras} et {Avant-bras} ;
- ▶ l'action du bâti sur le solide {Bras} au travers de la liaison pivot d'axe  $(O, \vec{y})$  et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante :  $\{\mathcal{T}(\text{Bâti} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_1 \vec{x}_1 + Y_1 \vec{y}_1 + Z_1 \vec{z}_1 \\ L_1 \vec{x}_1 + M_1 \vec{y}_1 + N_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_O$  où les paramètres  $(X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1)$  sont inconnus ;
- ▶ l'action du premier actionneur sur le solide {Bras} :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{array} \right\}_O$  où le couple  $C_1(t)$  exercé est connu au cours du temps ;
- ▶ l'action du solide {Bras} sur le solide {Avant-bras} au travers de la liaison pivot d'axe  $(A, \vec{y})$  et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante :  $\{\mathcal{T}(\text{Bras} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_2 \vec{x}_1 + Y_2 \vec{y} + Z_2 \vec{z}_1 \\ L_2 \vec{x}_1 + M_2 \vec{y} + N_2 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_A$  où les paramètres  $(X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2)$  sont inconnus ;
- ▶ les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées :  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  et  $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{array} \right\}_A$  où le couple  $C_2(t)$  exercé est connu au cours du temps ;
- ▶ l'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité  $B$  de l'avant-bras et définie par :  $\{\mathcal{T}(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \left\{ \begin{array}{l} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$ .

On veut déterminer les deux équations permettant de décrire le mouvement des deux axes de l'orthèse. On suppose pour cela que les deux liaisons pivots sont parfaites.

Le PFD permet d'obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} C_1(t) = & \left( B_1 + B_2 + m_1 \lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 \lambda_2^2 \right) \ddot{\gamma} + \left( B_2 + m_2 \lambda_2^2 \right) \ddot{\delta} \\ & + m_2 l_1 \left( \lambda_2 (2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2) \sin \delta \right) \\ & + m_1 g \lambda_1 \sin \gamma + m_2 g (l_1 \sin \gamma + \lambda_2 \sin(\gamma + \delta)) \\ & - X_F (l_1 \cos \gamma + l_2 \cos(\gamma + \delta)) + Z_F (l_1 \sin \gamma + l_2 (\gamma + \delta)) \end{aligned}$$

**Question 2** Détailler la démarche qui a permis d'obtenir cette équation, on précisera en particulier l'isolement, le bilan des Actions Mécaniques Extérieures et le choix des équations utilisées.

**Correction**

**Question 3** Appliquer la démarche pour retrouver l'équation donnée.

**Correction**

**Question 4** Écrire une deuxième relation issue du Principe Fondamental de la Dynamique, indépendante de la précédente, faisant intervenir le couple  $C_2(t)$ , et qui permette de ne pas faire apparaître les composantes  $L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2$  des torseurs des actions de liaison. On détaillera la démarche de la même façon que lors de la première question.

**Correction**

**Question 5** En déduire que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$  où  $C$  est un vecteur et  $A, B$  et  $Q$  sont des matrices  $2 \times 2$  que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement  $(\gamma, \delta)$  et de leurs dérivées premières  $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$ .

**Correction**

**Question 6** Calculer les couples  $(C_1, C_2)$  exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ( $X_F = 0, Z_F = 0$ ) et dans une position statique. Discuter de la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

**Correction**

**Question 7** Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

**Correction**

**Question 8**

$$\boxed{\begin{aligned} \{D_{AB/R0}\} &= \{D_{2/0}\}_{G2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \bar{a}(G_2, 2/0) \\ \bar{\delta}_{G2}(2/0) \end{array} \right\} \\ \bar{V}(G_2, 2/0) &= l_1 \dot{\gamma} \bar{x}_1 + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \bar{x}_2 \\ \bar{a}(G_2, 2/0) &= l_1 \dot{\gamma} \bar{x}_1 - l_1 \dot{\gamma}^2 \bar{z}_1 + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \bar{x}_2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \bar{z}_2 \\ m_2 \bar{a}(G_2, 2/0) &= m_2 \left| \begin{array}{c} l_1 \dot{\gamma} + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \cos \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \sin \delta \\ 0 \\ -l_1 \dot{\gamma}^2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \cos \delta \end{array} \right|_{R1} \\ \bar{\sigma}_{G2}(2/0) &= [I_{G2}(2)] \bar{\Omega}(2/0) = \left[ \begin{array}{ccc} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{array} \right]_{R2 R2} . \left| \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\gamma} + \dot{\delta} = \\ 0 \end{array} \right|_{R2 ou R1} \left| \begin{array}{c} 0 \\ B_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \\ 0 \end{array} \right| \\ \bar{\delta}_{G2}(2/0) &= \left( \frac{d \bar{\sigma}_{G2}(2/0)}{dt} \right)_0 = B_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \bar{y}_1 \end{aligned}}$$

### Question 9

- On isole l'ensemble {bras (1) + Avant-Bras (2)}.
- BAME :

$$\begin{aligned} \{T(bâti \rightarrow 1)\} &= \left\{ \begin{array}{c} X_1 \bar{x}_1 + Y_1 \bar{y}_1 + Z_1 \bar{z}_1 \\ L_1 \bar{x}_1 + M_1 \bar{y}_1 + N_1 \bar{z}_1 \end{array} \right\}_O \text{ avec } M_1 = 0 \text{ si liaison pivot parfaite ;} \\ \{T(actionneur1 \rightarrow 1)\} &= \left\{ \begin{array}{c} \bar{0} \\ C_1(t) \bar{y} \end{array} \right\}_O ; \\ \{T(force \rightarrow 2)\} &= \left\{ \begin{array}{c} X_F \bar{x} + Z_F \bar{z} \\ \bar{0} \end{array} \right\}_B ; \\ \{T(pesanteur \rightarrow 1)\} &= \left\{ \begin{array}{c} m_1 g \bar{z} \\ \bar{0} \end{array} \right\}_{G1} ; \\ \{T(pesanteur \rightarrow 2)\} &= \left\{ \begin{array}{c} m_2 g \bar{z} \\ \bar{0} \end{array} \right\}_{G2} ; \end{aligned}$$

- On écrit le Théorème du moment dynamique en 0 selon la direction  $\bar{y}$  :

$$C_1(t) + 0 + (\overrightarrow{OB} \wedge (X_F \bar{x} + Z_F \bar{z}) + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 g \bar{z} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 g \bar{z}) \bar{y} = \bar{\delta}_O(1/0) \bar{y} + \bar{\delta}_O(2/0) \bar{y}$$

### Question 10

Compléments au corrigé : Détails du calcul (**non demandé**) :

$$\overrightarrow{OB} = l_1 \bar{z}_1 + l_2 \bar{z}_2 ; \quad \overrightarrow{OG_1} = \lambda_1 \bar{z}_1 ; \quad \overrightarrow{OG_2} = l_1 \bar{z}_1 + \lambda_2 \bar{z}_2$$

$$\bar{\delta}_O(2/0) = \bar{\delta}_{G2}(2/0) + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 \bar{a}(G_2, 2/0)$$

$$\bar{\delta}_O(2/0) \cdot \bar{y} = B_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) + \left( \begin{array}{c|c} \lambda_2 \sin \delta & l_1 \dot{\gamma} + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \cos \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \sin \delta \\ 0 & 0 \\ \hline R1 | & l_1 + \lambda_2 \cos \delta \end{array} \right) \cdot \bar{y}$$

$$\dot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \dot{\delta} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) - m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 + m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2$$

$$\bar{\delta}_O(1/0) = \bar{\delta}_{G1}(1/0) + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 \bar{a}(G_1, 2/0)$$

$$\bar{\delta}_O(1/0) \cdot \bar{y} = B_1 \dot{\gamma} + \left( \begin{array}{c|c} 0 & l_1 \dot{\gamma} \\ 0 \wedge m_1 & 0 \\ \hline R1 | & l_1 \end{array} \right) \cdot \bar{y} = \dot{\gamma} (B_1 + m_1 l_1^2)$$

Soit :

$$\begin{aligned} C_1(t) + l_1 X_F \cos \gamma - l_1 Z_F \sin \gamma + l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) - l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) - \lambda_1 m_1 g \sin \gamma - l_1 m_2 g \sin \gamma - \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) = \\ \dot{\gamma} (B_1 + m_1 l_1^2) + \dot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \dot{\delta} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) - m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 + m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2 \end{aligned}$$

### Question 11

- On isole l'Avant-Bras (2).

• BAME :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_2 \ddot{x}_1 + Y_2 \ddot{y}_1 + Z_2 \ddot{z}_1 \\ L_2 \ddot{x}_1 + M_2 \ddot{y}_1 + N_2 \ddot{z}_1 \end{Bmatrix} \text{ avec } M_2=0 \text{ si liaison pivot parfaite ;}$$

$$\{T(\text{actionneur}2 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} \bar{0} \\ C_2(t) \ddot{y} \end{Bmatrix};$$

$$\{T(\text{force} \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_F \ddot{x} + Z_F \ddot{z} \\ \bar{0} \end{Bmatrix};$$

$$\{T(\text{pesanteur} \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} m_2 g \ddot{z} \\ \bar{0} \end{Bmatrix};$$

- On écrit le Théorème du moment dynamique en A selon la direction  $\vec{y}$  :

$$C_2(t) + 0 + (\overrightarrow{AB} \wedge (X_F \ddot{x} + Z_F \ddot{z}) + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 g \ddot{z}) \cdot \vec{y} = \vec{\delta}_2(2/0) \cdot \vec{y}$$

- Détails du calcul :

$$\overrightarrow{AB} = l_2 \ddot{z}_2; \overrightarrow{AG_2} = \lambda_2 \ddot{z}_2$$

$$\vec{\delta}_A(2/0) = \vec{\delta}_{G_2}(2/0) + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 \vec{a}(G_2, 2/0)$$

$$\text{avec } \vec{a}(G_2, 2/0) = l_1 \ddot{y} \ddot{x}_1 - l_1 \dot{y}^2 \ddot{z}_1 + \lambda_2 (\ddot{y} + \ddot{\delta}) \ddot{x}_2 - \lambda_2 (\dot{y} + \delta) \ddot{z}_2$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_A(2/0) \cdot \vec{y} &= B_2 (\ddot{y} + \ddot{\delta}) + \begin{pmatrix} 0 & l_1 \ddot{y} \cos \delta + l_1 \dot{y}^2 \sin \delta + \lambda_2 (\dot{y} + \delta) \\ 0 \wedge m_2 & 0 \\ R_2 \lambda_2 & l_1 \ddot{y} \sin \delta - l_1 \dot{y}^2 \cos \delta - \lambda_2 (\dot{y} + \delta) \end{pmatrix} \cdot \vec{y} \\ &= B_2 (\ddot{y} + \ddot{\delta}) + m_2 \lambda_2 (l_1 \ddot{y} \cos \delta + l_1 \dot{y}^2 \sin \delta + \lambda_2 (\dot{y} + \delta)) \end{aligned}$$

Soit : 
$$\boxed{C_2(t) + l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) - l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) - \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) =}$$

$$\boxed{\ddot{y} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta} (B_2 + m_2 \lambda_2^2) + m_2 \lambda_2 l_1 \dot{y}^2 \sin \delta}$$

### Question 12

Les expressions des couples moteur déterminées aux questions 27 et 28 peuvent s'écrire sous la forme matricielle  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$  avec :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 g \sin \gamma + l_1 m_2 g \sin \gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \\ \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{y} \sin \delta & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 \lambda_2 (2\dot{y} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{y} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{y} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{y} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos \gamma - l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \delta) \\ -l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_2 \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas statique (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données ( $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$ ,  $X_F$ ,  $Z_F$ ) sont indépendantes du temps.

### Question 13

Les expressions des couples moteur déterminées aux questions 27 et 28 peuvent s'écrire sous la forme matricielle  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$  avec :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 g \sin \gamma + l_1 m_2 g \sin \gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \\ \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 \lambda_2 (2\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos \gamma - l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \delta) \\ -l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_2 \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas statique (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données ( $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$ ,  $X_F$ ,  $Z_F$ ) sont indépendantes du temps.

#### Question 14

Hypothèses :

- $\ddot{\gamma} = \ddot{\delta} = 0$  et  $\dot{\gamma} = \dot{\delta} = 0$  (statique)
- $\gamma = \pi/2$  et  $\delta = 0$  (configuration la plus défavorable)

$$C_{1,\text{statmax}} = (l_1 + l_2)Z_F + C_{1,\text{permax}} \text{ et } C_{2,\text{statmax}} = l_2 Z_F + C_{2,\text{permax}}$$

Le couple statique maximal est limité à  $C_{1,\text{statmax}} = 50$  N.m soit :

$$Z_{F,\text{max}} = \frac{C_{1,\text{statmax}} - C_{1,\text{permax}}}{l_1 + l_2} = \frac{50 - 2,55}{0,35 + 0,27} \text{ soit } \boxed{Z_{F,\text{max}} = 76,5N}$$

Le cahier des charges est respecté (effort de manipulation maximal du patient 50 N.m)



## TD 2

# Stabilisateur passif d'image – Sujet

04 DYN

Mines Ponts 2018 – PSI.

### Mise en situation

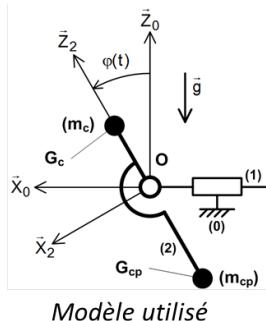
Les appareils photos modernes fonctionnent en rafales : 8 à 10 images par seconde et en mode vidéo. Le besoin de stabilisation de l'image dans de telles conditions est impératif. Le but de ce sujet est de s'intéresser au support de la caméra assurant la liaison entre le bras de l'utilisateur et la caméra elle-même.

Le stabilisateur se compose principalement de trois objets :

- ▶ une poignée orientable (1) manipulée directement par le photographe, liée au support (2) en  $O$  ;
- ▶ un support rigide (2) (**supposé sans masse**) sur lequel vient se fixer une caméra assimilée en première approximation à une masse ponctuelle  $m_c$  placée en  $G_c$  ;
- ▶ un contrepoids lié à (2) et assimilé à une masse ponctuelle  $m_{cp}$  placée en  $G_{cp}$ .



Système réel



Modèle utilisé



L'utilisateur tient fermement la poignée (1) dans une position angulaire quelconque, ce qui permet d'affirmer que le (**porteur + (1)**) ne forme qu'une seule classe d'équivalence. Afin de produire des images toujours fluides, sans à-coups, ce stabilisateur à main doit maintenir constamment la caméra dans une position verticale (parallèle au champ de gravité), que le porteur soit immobile (plan fixe) ou en mouvement (travelling).

Dans le cas général, le mouvement du bras par rapport au référentiel terrestre est quelconque (6 degrés de libertés). Ici, on se limite à un mouvement de translation. Dans le cas général, afin que la caméra soit en position verticale, le support doit permettre 3 rotations dans la liaison avec (**porteur + (1)**). Ici on se limite à la stabilisation d'une seule rotation.

### Objectif

Suite à une sollicitation brève de  $0,5 \text{ m s}^{-2}$ , l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les  $0,5^\circ$ .

### Travail demandé

On se place à présent dans une phase dite « dynamique ». Le porteur (**1**) est en mouvement par rapport au sol. On suppose qu'à l'instant initial, l'ensemble (**E**)=**Support(2) + Caméra(C) + Contrepoids(Cp)** est en équilibre stable en position verticale. On note  $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \overrightarrow{V(P, 1/0)} = v(t) \vec{X}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$ . On note  $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ . De plus,  $\overrightarrow{OG_C} = L_C \vec{Z}_2$  et  $\overrightarrow{OG_{CP}} = -L_{CP} \vec{Z}_2$ .

**Question 1** Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (**E**) dans (**0**) galiléen s'exprime comme  $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$ .

Afin de quantifier la modification d'attitude de (**E**), l'équation de mouvement est linéarisée autour de la position d'équilibre (verticale) en supposant que les valeurs de l'angle restent faibles. On transpose cette équation différentielle dans le domaine de Laplace et on note  $\mathcal{L}(\varphi(t)) = \Phi(p)$  et  $\mathcal{L}(a(t)) = A(p)$ . Afin de conserver la fluidité des images lors de travelling, les fluctuations indésirables des mouvements du porteur ne doivent pas être intégralement transmises à (**E**).

On suppose que  $a(t) = a_0 \sin(\omega_a t)$  avec  $a_0 = 0,5 \text{ m s}^{-2}$  et  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

**Question 2** Établir sous forme canonique la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$ . Donner l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  en fonction de  $m_c, m_{cp}, L_c, L_{cp}$  et  $g$ .

**Question 3** Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain  $G_{dB} = f(\omega)$  de la fonction de transfert  $H(j\omega)$ . Placer les caractéristiques remarquables.

**Question 4** Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que  $\omega_0 = 0,1\omega_a$ . Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple  $(m_{cp}, L_{cp})$ . En utilisant le comportement asymptotique en gain de  $G_{dB}$ , estimer numériquement l'amplitude  $\Delta\varphi$  (en degrés) des oscillations de (**E**) selon l'axe  $(O, \vec{y}_0)$ .

### Retour sur le cahier des charges

**Question 5** Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.



### Éléments de correction

1.  $Q_1 = M_{CP}L_{CP}^2 + M_CL_C^2, Q_2(t) = (L_{CP}M_{CP} - L_CM_C)g \sin \varphi, Q_3(t) = (M_{CP}L_{CP} - M_CL_C) \cos \varphi.$
2.  $\omega_0^2 = \frac{(L_{CP}M_{CP} - L_CM_C)g}{M_{CP}L_{CP}^2 + M_CL_C^2}.$
3. .
4.  $0,03^\circ.$
5. .

## TD 2

# Stabilisateur passif d'image – Corrigé

04 DYN

Mines Ponts 2018 – PSI.

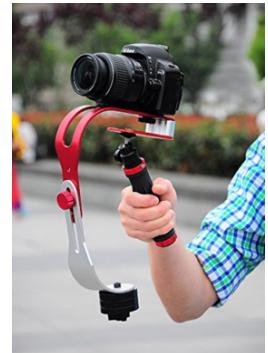
### Mise en situation

#### Objectif

Suite à une sollicitation brève de  $0,5 \text{ m s}^{-2}$ , l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les  $0,5^\circ$ .

### Travail demandé

**Question 1** Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans (0) galiléen s'exprime comme  $Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$ .



#### Correction

(1) et (E) sont en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{Y}_0)$ . On va donc réaliser un théorème du moment dynamique appliqué à (E) en O en projection sur  $\vec{Y}_0$ .

#### Calcul de $\overline{\delta(O, E/0)}$

**Méthode 1 – En passant par le calcul de  $\overline{\delta(O, 2/0)}$ ,  $\overline{\delta(O, C/0)}$  et  $\overline{\delta(O, Cp/0)}$**

Le support 2 étant sans masse, on a  $\overline{\delta(O, 2/0)} = \vec{0}$ . La caméra et le contrepoids étant considérés comme des masses ponctuelles, on a  $\overline{\delta(G_C, C/0)} = \vec{0}$  et  $\overline{\delta(G_{Cp}, Cp/0)} = \vec{0}$ .

#### Calcul de $\overline{\delta(O, C/0)}$

On a  $\overline{\delta(O, C/0)} = \overline{\delta(G_C, C/0)} + \overline{OG_C} \wedge M_C \overline{\Gamma(G_C, C/0)}$ .

#### Calcul de $\overline{\Gamma(G_C, C/0)}$

$$\overline{V(G_C, C/0)} = \overline{V(G_C, C/1)} + \overline{V(G_C, 1/0)} = \overline{G_C \vec{O}} \wedge \overline{\Omega(C/0)} + v(t) \vec{X}_0 = -L_C \vec{Z}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + v(t) \vec{X}_0 = L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 + v(t) \vec{X}_0.$$

$$\text{De plus } \overline{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \ddot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t) \vec{X}_0.$$

$$\text{Au final, } \overline{\delta(O, C/0)} = \overline{OG_C} \wedge M_C \overline{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \vec{Z}_2 \wedge M_C (L_C \ddot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t) \vec{X}_0)$$

$$\overline{\delta(O, C/0)} = L_C M_C (L_C \ddot{\varphi} \vec{Y}_2 + a(t) \cos \varphi \vec{Y}_0).$$

**Calcul de  $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)}$** 

On a  $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)} = \overrightarrow{\delta(G_{Cp}, Cp/0)} + \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, C/0)}$ .

**Calcul de  $\overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)}$** 

De même,  $\overrightarrow{V(G_{Cp}, Cp/0)} = \overrightarrow{V(G_{Cp}, Cp/1)} + \overrightarrow{V(G_{Cp}, 1/0)} = \overrightarrow{G_{Cp}O} \wedge \overrightarrow{\Omega(Cp/0)} + v(t) \overrightarrow{X_0} = L_{Cp} \overrightarrow{Z_2} \wedge \overrightarrow{\phi Y_2} + v(t) \overrightarrow{X_0} = -L_{Cp} \overrightarrow{\phi X_2} + v(t) \overrightarrow{X_0}$ .

De plus  $\overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)} = -L_{Cp} \overrightarrow{\phi X_2} + L_{Cp} \overrightarrow{\phi^2 Z_2} + a(t) \overrightarrow{X_0}$ .

Au final,  $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)} = \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \overrightarrow{\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)} = -L_{Cp} \overrightarrow{Z_2} \wedge M_{Cp} (-L_{Cp} \overrightarrow{\phi X_2} + L_{Cp} \overrightarrow{\phi^2 Z_2} + a(t) \overrightarrow{X_0})$

$\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = -L_{Cp} M_{Cp} (-L_{Cp} \overrightarrow{\phi Y_2} + a(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0})$

On a donc  $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} = M_{Cp} L_{Cp}^2 \ddot{\phi} - M_{Cp} L_{Cp} a(t) \cos \varphi + M_C L_C^2 \ddot{\phi} + M_C L_C a(t) \cos \varphi$

**Méthode 2 – En passant par le calcul de  $I_O(E)$** 

On a  $I_O(C) = M_C \begin{pmatrix} L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$  et  $I_O(Cp) = M_{Cp} \begin{pmatrix} L_{Cp}^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_{Cp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$  et donc

$$I_O(E) = \begin{pmatrix} M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

$O$  est un point quelconque; donc  $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} =$

$$\overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(E/R_0)} \text{ et } \overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)} = I_O(E) \cdot \overrightarrow{\Omega(E/R_0)} + M \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V(O, E/R_0)}.$$

$$\text{De plus, } \overrightarrow{OG} = \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{Z_2}, \overrightarrow{V(O, E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} \text{ et } \overrightarrow{V(G, E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} + \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{\phi X_2}.$$

$$\text{On a donc, } \overrightarrow{\sigma(O, S/R_0)} = \dot{\phi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C + M_{Cp}) \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{Z_2} \wedge v(t) \overrightarrow{X_0} = \dot{\phi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) v(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0}.$$

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\phi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) (a(t) \cos \varphi - v(t) \dot{\phi} \sin \varphi) \overrightarrow{Y_0}.$$

$$\overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(E/R_0)} = v(t) \overrightarrow{X_0} \wedge (M_C + M_{Cp}) \left( v(t) \overrightarrow{X_0} + \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{\phi X_2} \right)$$

$$= (M_C + M_{Cp}) \left( \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\phi} v(t) \sin \varphi \right) \overrightarrow{Y_2} = (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) \dot{\phi} v(t) \sin \varphi \overrightarrow{Y_2}.$$

$$\text{Au final, } \overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \dot{\phi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos \varphi \overrightarrow{Y_0}$$

**Bilan des actions mécaniques en  $O$  agissant sur  $E$** 

► Liaison pivot  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\}$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = 0$ .

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C)\} \text{ avec } \overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \rightarrow C)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = (\overrightarrow{OG} \wedge -M_C g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} \\ & = (L_C \overrightarrow{Z_2} \wedge -M_C g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} = L_C M_C g \sin \varphi \overrightarrow{Y_2}. \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \{ \mathcal{T} (\text{pes} \rightarrow Cp) \} \text{ avec } \overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \rightarrow Cp)} \cdot \vec{Y_2} = \left( -L_{Cp} \vec{Z}_2 \wedge -M_{Cp} g \vec{Z}_0 \right) \vec{Y_2} = -L_{Cp} M_{Cp} g \sin \varphi \vec{Y_2}.$$

**Théorème du moment dynamique en O en projection sur  $\vec{Y_2}$**

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi} \left( M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 \right) + \left( M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp} \right) a(t) \cos \varphi = L_C M_C g \sin \varphi - L_{Cp} M_{Cp} g \sin \varphi. \\ \Leftrightarrow & \ddot{\varphi} \left( M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 \right) + \left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g \sin \varphi = - \left( M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp} \right) a(t) \cos \varphi. \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } Q_1 = M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2, \quad Q_2(t) = \left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g \sin \varphi, \quad Q_3(t) = \left( M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C \right) \cos \varphi.$$

**Question 2** Établir sous forme canonique la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$ . Donner l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  en fonction de  $m_c$ ,  $m_{cp}$ ,  $L_c$ ,  $L_{cp}$  et  $g$ .

#### Correction

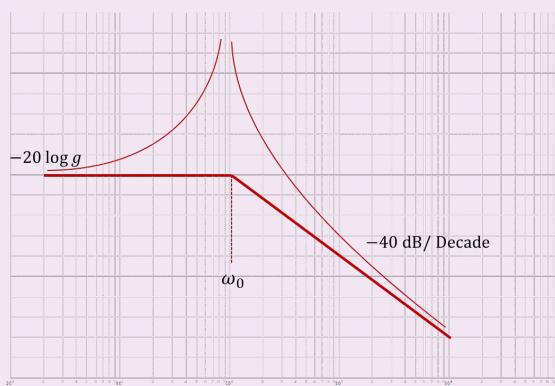
Dans les conditions précédentes, on a  $Q_1 = M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$ ,  $Q_2(t) = \left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g \varphi$  et  $Q_3(t) = \left( M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C \right)$ .

$$\begin{aligned} & \text{L'équation de comportement devient donc } Q_1 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g \varphi = Q_3 a(t) \\ \Rightarrow & Q_1 p^2 \Phi(p) + \left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g \Phi(p) = Q_3 A(p) \text{ et } H(p) = \frac{Q_3}{Q_1 p^2 + \left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{On a donc } \omega_0^2 = \frac{\left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g}{Q_1} = \frac{\left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g}{M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}. \text{ Le gain } K \text{ vaut} \\ & \frac{M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C}{\left( L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C \right) g} = \frac{1}{g}. \end{aligned}$$

**Question 3** Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain  $G_{dB} = f(\omega)$  de la fonction de transfert  $H(j\omega)$ . Placer les caractéristiques remarquables.

#### Correction



**Question 4** Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que  $\omega_0 = 0,1\omega_a$ .

Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple  $(m_{cp}, L_{cp})$ . En utilisant le comportement asymptotique en gain de  $G_{dB}$ , estimer numériquement l'amplitude  $\Delta\varphi$  (en degrés) des oscillations de **(E)** selon l'axe  $(O, \vec{y_0})$ .

#### Correction

On a  $\omega_a = 10\omega_0$ . Une décade après  $\omega_0$ ,  $G_{dB} = -20 \log 10 - 40 = -60$  dB. Une atténuation de  $-60$  dB correspond à un gain de  $10^{-\frac{60}{20}} = 0,001$ . L'amplitude des oscillations sera donc de  $0,001a_0 = 5 \times 10^{-4}$  rad soit  $0,03^\circ$ .

### Retour sur le cahier des charges

**Question 5** Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

#### Correction

On a  $0,03^\circ < 0,5^\circ$ . Le cahier des charges est vérifié au voisinage de  $10\omega_0$ .

#### Éléments de correction

1.  $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_CL_C^2, Q_2(t) = (L_{Cp}M_{Cp} - L_CM_C)g \sin \varphi, Q_3(t) = (M_{Cp}L_{Cp} - M_CL_C)\cos \varphi.$
2.  $\omega_0^2 = \frac{(L_{Cp}M_{Cp} - L_CM_C)g}{M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_CL_C^2}.$
3. .
4.  $0,03^\circ.$
5. .