

TD 0

Robot à câbles – Sujet

Concours Centrale-Supélec 2023 – TSI.

Présentation

Les robots parallèles à câbles sont une structure de robots apparus au début des années 2000. Dans ce système, la plate-forme est déplacée et orientée par rapport à une référence fixe dans toutes les directions de l'espace par l'enroulement ou le déroulement de plusieurs câbles (figure 1). Cette structure permet à la plate-forme d'atteindre une grande zone de travail avec une très grande précision dans le positionnement comme dans l'orientation.

Étude de l'asservissement de la longueur d'un câble pour gérer le mouvement

Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs permettant d'assurer l'enroulement adéquat des câbles.

Le programme de pilotage tient compte de l'allongement relatif des câbles suite aux efforts de traction lors du déplacement de la plate-forme chargée. Il génère alors, pour chacun des huit moteurs, des consignes de position et de vitesse qui sont envoyées aux variateurs de vitesse qui alimentent les moteurs afin d'assurer un positionnement de la plate-forme conforme aux attentes de l'utilisateur. L'ensemble composé d'un variateur et du moteur associé est appelé moto-variateur pour la suite. L'algorithme implanté dans le variateur est de type commande vectorielle, ce qui rend le moto-variateur équivalent à un système du premier ordre avec une bande passante à -3 dB de 200 Hz. Le modèle défini figure est adopté pour la suite.

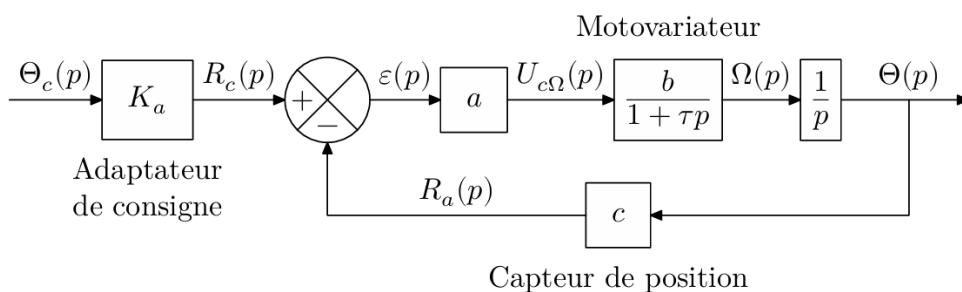


FIGURE 2 – Schéma-bloc de la commande en position du moteur

Notations

- ▶ $\Theta_c(p)$ et $\Theta(p)$ sont respectivement les images de la consigne de position angulaire $\theta_c(t)$ (en rad) issue du programme de pilotage et de la position angulaire effective $\theta(t)$ du moteur (en rad). $\Omega(p)$ est l'image de la vitesse angulaire $\omega(t) = \dot{\theta}(p)$ du moteur (grandeur temporelle en rad s^{-1}).
- ▶ Le capteur de position (codeur optique incrémental associé à une unité de comptage sur 13 bits) est de gain $c = 1304 \text{ point rad}^{-1}$.
- ▶ L'adaptateur est de gain K_a , grandeur en point rad^{-1} .

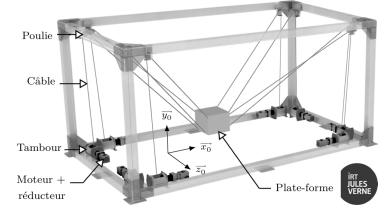


FIGURE 1 – Robot à câbles CAROCA

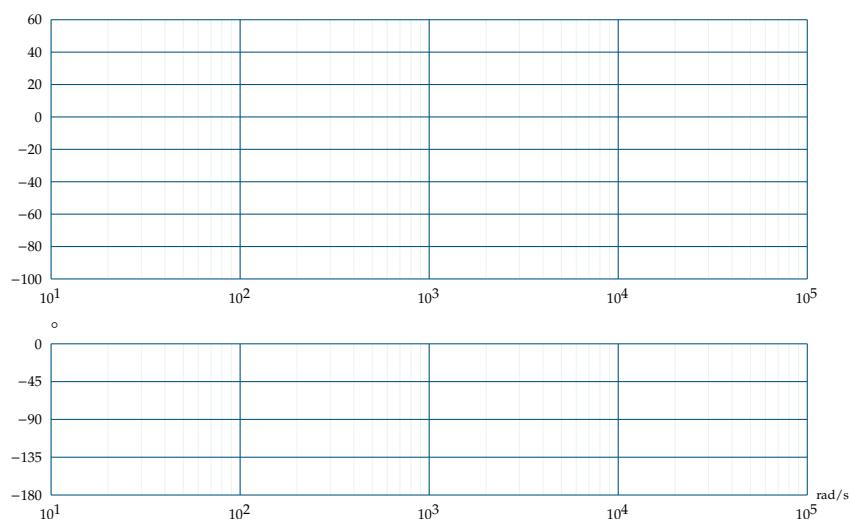
- Le correcteur est de type proportionnel de gain a , ce qui permet de délivrer une tension $u_{c\Omega}(t)$ proportionnelle à l'écart $\varepsilon(t)$. Un pré-réglage a permis de choisir la valeur $a = 43,4 \text{ mV point}^{-1}$.
- Le comportement du motovariateur est assimilé à un premier ordre de gain $b = 31,4 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ et de constante de temps $\tau = 796 \mu\text{s}$.

Question 1 Justifier la valeur numérique proposée pour la constante de temps τ .

Dans la structure de l'asservissement de position de la figure 2, l'erreur est définie par $\mu(t) = \theta_c(t) - \theta(t)$ (grandeur en rad) et l'écart par $\varepsilon(t) = r_c(t) - r_a(t)$ (grandeur en point).

Question 2 On souhaite que l'erreur $\mu(t)$ soit nulle quand l'écart $\varepsilon(t)$ l'est : en déduire la relation entre K_a et c .

Question 3 Après avoir donné l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(j\omega)$, tracer son diagramme asymptotique de Bode (courbes de gain et de phase en précisant la valeur de la cassure et le gain associé) et esquisser l'allure des courbes réelles.



Question 4 Relever sur la courbe tracée à la question précédente la valeur de la marge de phase $M\varphi$. Sachant qu'on souhaite que cette marge soit de $M\varphi = 45^\circ$, conclure quant au réglage de a .

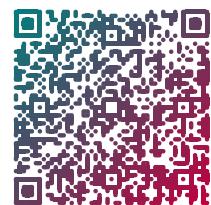
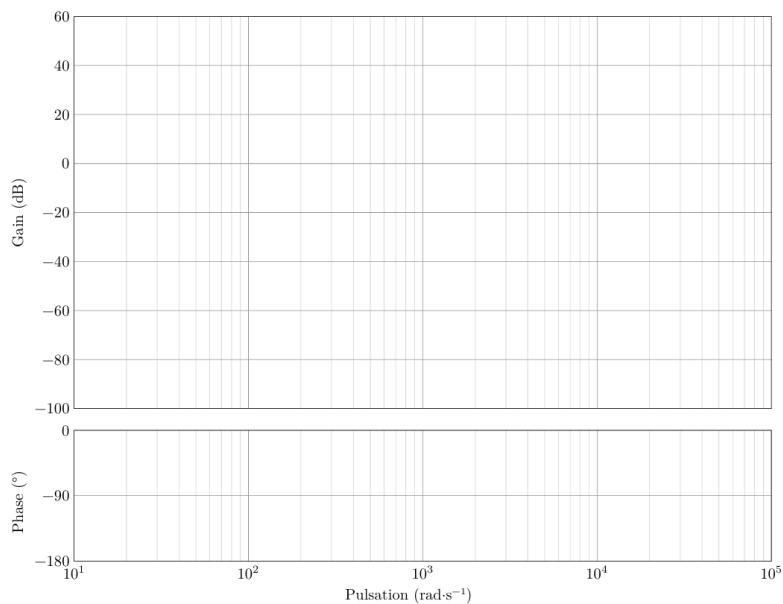
Question 5 Déterminer l'expression de l'image $\mu(p)$ de l'erreur en fonction de l'image $\Theta_c(p)$ de la consigne angulaire et de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p)$ de l'asservissement.

La précision du système s'évalue par l'erreur en régime permanent pour des consignes de position de types :

- échelon d'amplitude θ_0 (en rad) : l'erreur en régime permanent, notée μ_p (en rad), est dite « statique »;
- rampe de pente ω_0 (en rad s^{-1}) : l'erreur en régime permanent, notée μ_v (en rad s^{-1}), est dite « de poursuite ».

Les exigences de l'utilisateur imposent que ces deux erreurs doivent être inférieures à 0,1% de la consigne.

Question 6 Déterminer la valeur de l'erreur statique μ_p . Déterminer l'expression de l'erreur de poursuite μ_v en fonction des gains a , b et c et de la pente ω_0 . Faire l'application numérique et vérifier si les exigences de l'utilisateur sont vérifiées.



TD 1

Exosquelette lombaire – Sujet

Concours Centrale-Supélec 2023 – MP.

Mise en situation

On s'intéresse à un banc d'essai permettant de valider un actionneur linéaire. Dans ce cadre, il est nécessaire de proposer un modèle de connaissance de l'asservissement en force, le valider par comparaison avec une mesure sur le banc d'essai et vérifier les performances de l'actionneur linéaire sur ce banc d'essai. Ce modèle permettra de valider une commande pour le cas spécifique étudié.

Le schéma-blocs est donné dans la figure 4.

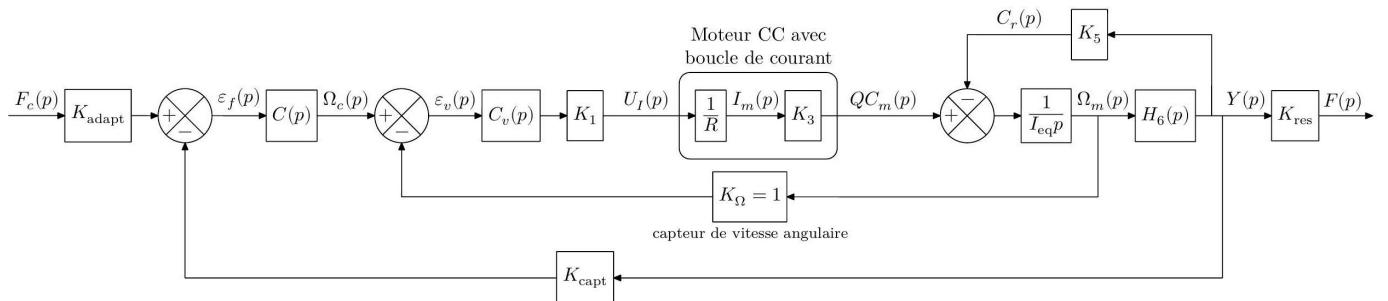


FIGURE 4 – Schéma-blocs de l'asservissement de force développée par un actionneur linéaire placé sur le banc d'essai

Réglage de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur

Le schéma-blocs décrivant la structure de l'asservissement de la vitesse angulaire du moteur est fourni sur la figure 5. Cet asservissement doit respecter le cahier des charges fourni dans le tableau 1.

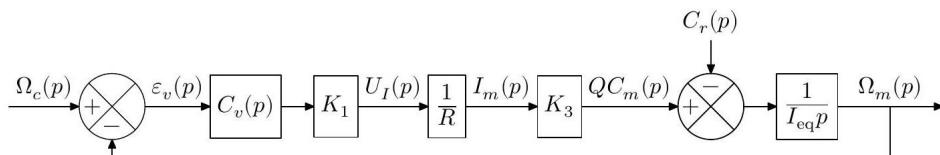


FIGURE 5 – Schéma-blocs de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur électrique

Critère concepteur	Niveau
Marge de phase	$\geq 80^\circ$
Erreur en régime permanent pour une perturbation en échelon constant	Nulle
Pulsation de coupure à 0 dB	$\omega_0 \text{ dB} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Le choix d'un correcteur proportionnel intégral est fait afin de diminuer l'influence de la perturbation en couple modélisée par $C_r(p)$. La fonction de transfert du correcteur de la boucle d'asservissement en vitesse angulaire est noté $C_v(p)$, tel que $C_v(p) = K_i \frac{1+\tau_ip}{\tau_ip}$.

On note $H_{BOv}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\epsilon_v(p)}$ la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement de vitesse angulaire du moteur.

TABLE 1 – Critères concepteur pour la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire

Question 1 Déterminer l'expression littérale de la phase de $H_{BOv}(i\omega)$. En déduire la valeur numérique de τ_i respectant les critères concepteur de la boucle de vitesse.

Le diagramme de Bode de la boucle ouverte $H_{BOv}(p)$, avec $K_i = 1$ et τ_i déterminé à la question 1, est donné sur la figure 6.

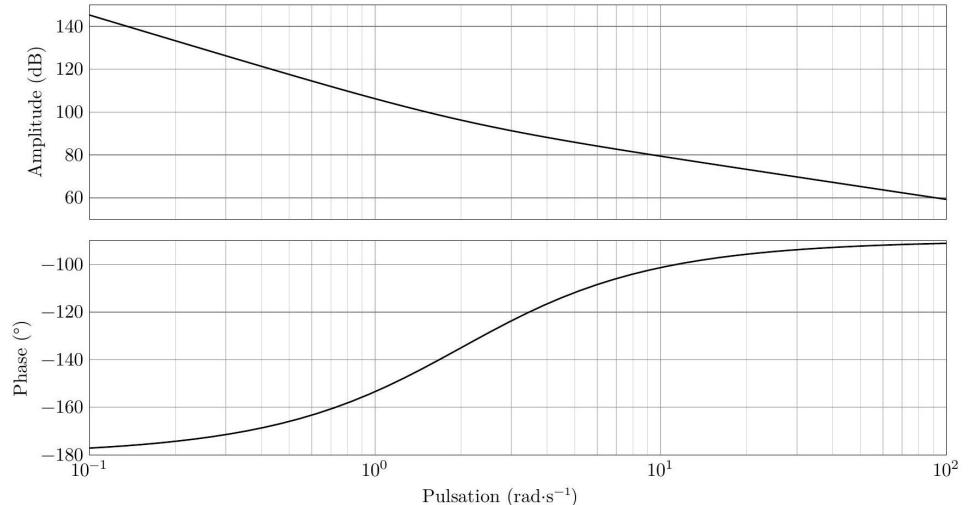


FIGURE 6 – Diagramme de Bode de $H_{BOv}(p)$

Question 2 Déterminer la valeur numérique de K_i afin que la boucle d'asservissement de vitesse respecte les critères concepteur du tableau 1.

Simplification du modèle de connaissance

Il est possible de mettre le schéma-blocs de la figure 4 sous la forme du schéma-blocs de la figure 7, afin de faciliter la prévision des performances simulées.

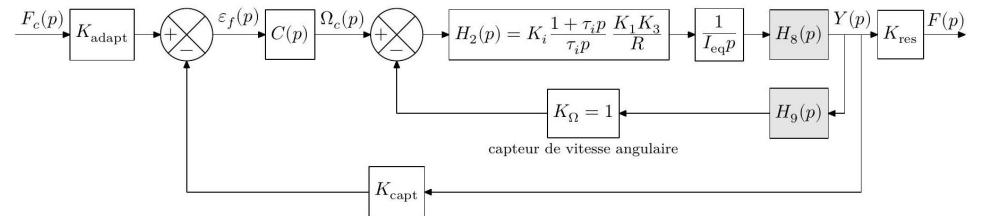
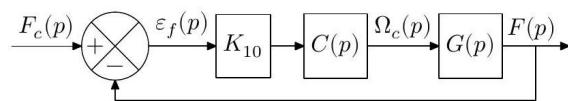


FIGURE 7 – Schéma-blocs de l'asservissement de la force développée par un actionneur linéaire

Question 3 Déterminer les fonctions de transfert $H_8(p)$ et $H_9(p)$ en fonction de K_5 , I_{eq} et $H_6(p)$. Ne pas remplacer K_5 et $H_6(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Pour faciliter l'analyse des performances simulées, le schéma-blocs de la figure 7 est adapté afin de disposer d'un schéma-blocs à retour unitaire, tel que décrit sur la figure 8.



Question 4 Déterminer l'expression du gain K_{10} en fonction de K_{capt} et de K_{res} .

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $G(p)$ en fonction de $H_2(p)$, I_{eq} , $H_8(p)$, $H_9(p)$ et K_{res} . Ne pas remplacer $H_2(p)$, $H_8(p)$ et $H_9(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Pour la suite, on donne la fonction de transfert $G(p)$, obtenue avec les valeurs de réglage correctes déterminées aux questions 1 et 2,

$$G(p) = \frac{F(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1 + \tau_i p}{p} \frac{1,2 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-4} + 9,7 \times 10^{-5} p + 5,3 \times 10^{-6} p^2}.$$

Analyse des performances de l'asservissement en force développée par un actionneur linéaire

Il est proposé dans cette section d'analyser les performances simulées de l'asservissement en force dont un extrait du cahier des charges est présenté dans le tableau 2.

Id	Exigence	Critère	Niveau
Id1.1	Stabilité	Marge de phase	$\geq 60^\circ$
		Marge de gain	$> 20 \text{ dB}$
		Dépassement maximal	$< 2,5\%$
Id1.2	Précision	Erreur en régime permanent pour une entrée en échelon	$< 1\%$
Id1.3	Rapidité	Temps de réponse à 5% pour une consigne en échelon de force de 40 N	$\text{tr}_{5\%} < 1 \text{ s}$
		Vitesse maximale de montée de la force de traction	$100 \text{ N} \cdot \text{s}^{-1}$

On note $H_{BOf}(p) = \frac{F(p)}{\varepsilon_f(p)}$ la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en force développé par un actionneur linéaire. Dans un premier temps, le choix d'un correcteur proportionnel $C(p) = K_{cor}$ est réalisé. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert $H_{BOf}(p) = \frac{F(p)}{\varepsilon_f(p)} = K_{cor} K_{10} G(p)$, avec $K_{cor} = 1$ et la valeur de τ_i déterminée à la question 1, est donné sur la figure 9.

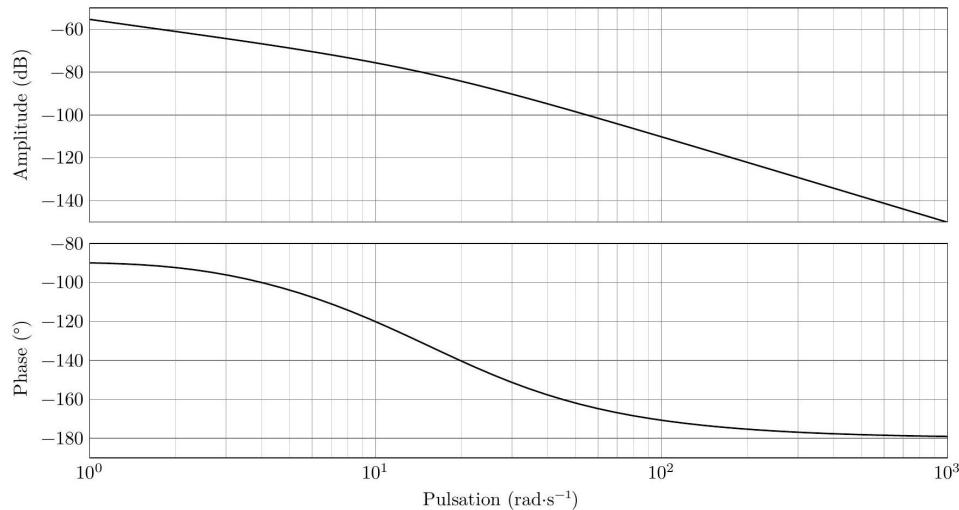


TABLE 2 – Extrait du cahier des charges fonctionnel de l'actionneur linéaire sur le banc d'essai

Question 6 Déterminer la valeur numérique limite de K_{cor} afin que la boucle d'asservissement de force respecte les critères de marge de phase et de gain du tableau 2.

Les courbes sur la figure 10 représentent les réponses temporales du modèle de connaissance de la figure 4, avec les correcteurs $C_v(p)$ et $C(p)$ correctement réglés, et de l'expérimentation sur le banc d'essai pour une consigne en échelon de force de 40 N.

FIGURE 9 – Diagramme de Bode de $H_{BOf}(p)$

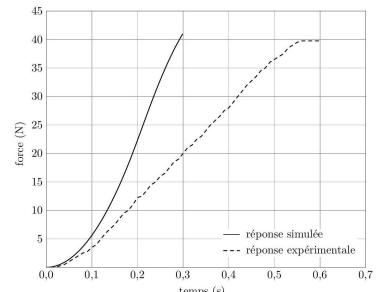


FIGURE 10 – Réponses temporales du modèle et expérimentale, pour une consigne en échelon de force de 40 N

Question 7 Quel critère du tableau des exigences (tableau 2) n'est pas pris en compte dans le modèle de connaissance? D'après la courbe expérimentale, ce critère est-il respecté par le système réel?

Colle 0

Quille pendulaire ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

Objectif

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit $q(t)$ proportionnel à sa tension de commande $v(t)$. Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servovalves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.

C1-02

C2-04

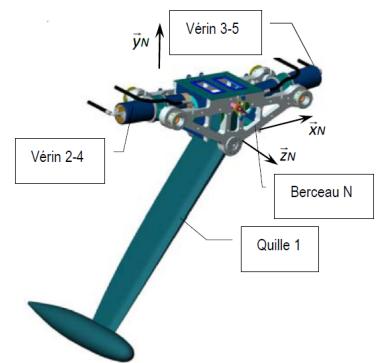
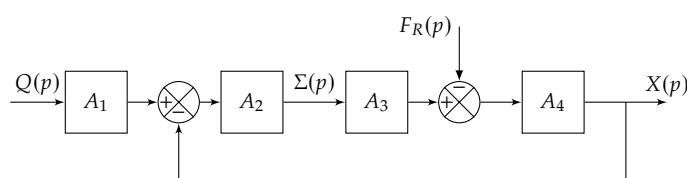


FIGURE 11 – Modèle volumique 3D



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$ (a);
- $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$ (b).

On a :

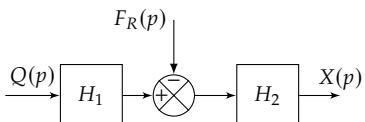
- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$: débit d'alimentation du vérin [$m^3 s^{-1}$];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$: différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$: position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$: composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

Les constantes sont les suivantes :

- S : section du vérin [m^2];
- k : raideur mécanique du vérin [$N m^{-1}$];
- V : volume d'huile de référence [m^3];
- B : coefficient de compressibilité de l'huile [$N m^{-2}$];
- M : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];
- λ : coefficient de frottement visqueux [$N m^{-1}s$].

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

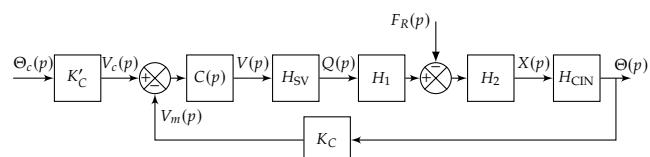
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par $F_R(p)$ ne sera pas prise en compte.



On a :

- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$: consigne de position angulaire [$^\circ$];
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$: position angulaire de la quille [$^\circ$];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$: tension de commande de la servo valve [V];
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$: tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$: tension image de la position [V].

On a de plus :

- K_c : gain du capteur angulaire potentiométrique [V/ $^\circ$];
- K'_c : gain du bloc d'adaptation réglé tel que $K'_c = K_c = 1,1$ V/ $^\circ$;
- $C(p)$: correcteur de position;
- H_{CIN} : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation. $H_{CIN} = K_\theta$ [$^\circ \cdot m^{-1}$];
- H_{SV} : fonction de transfert de la servo valve.

Comportement pour une commande de faible amplitude

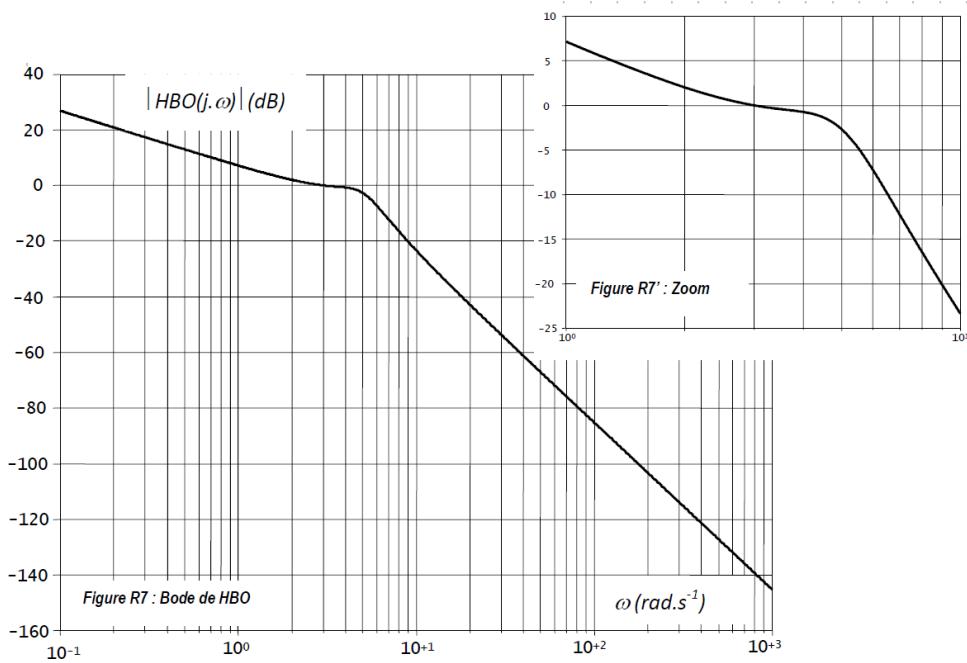
On étudie la réponse du système non corrigé ($C(p) = 1$) à une entrée échelon de 5° d'amplitude avec $F_R = 0$. Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est : $H_{BO}(p) = K_{SV}H_1H_2K_\theta K_C$ et $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$.

Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de 5° d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- $C(p) = 1$: la courbe présente des dépassemens, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée;
- $C(p) = 0,44$: toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).

À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation générait dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

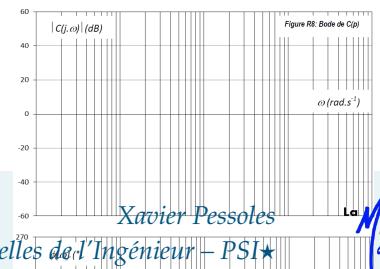
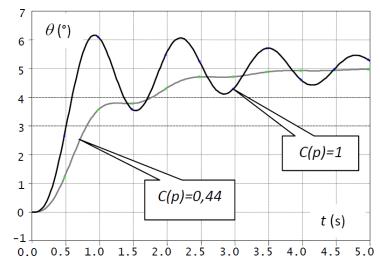
Question 4 Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de $H_{BO}(p)$ en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.



Question 5 Déterminer par calcul la pulsation de résonance ω_r de cette fonction de transfert.

Question 6 Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation ω_r la différence, notée ΔK et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de $C(p)$ permettant d'abaisser l'amplitude de ΔK à la pulsation ω_r . Le concepteur a choisi un



correcteur à retard de phase de fonction de transfert $C(p) = K_{\text{COR}} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$ avec $b > 1$. Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation ω^* tel que : $\sin [\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$ et $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$.

L'étude consiste à déterminer les valeurs de T et b .

Question 7 Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour $K_{\text{COR}} = 1$. Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

Question 8 Déterminer alors en fonction de b , l'amplitude $|C(j\omega^*)|_{\text{dB}}$ à la pulsation notée ω^* .

Question 9 Pour $K_{\text{COR}} = 1$, en faisant correspondre la pulsation de résonance ω_r de H_{BO} à ω^* :

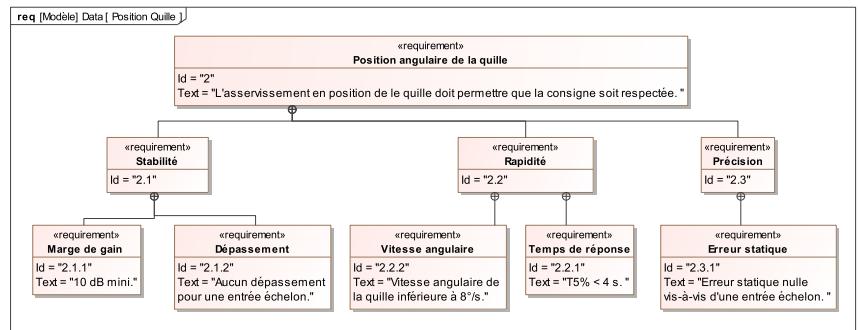
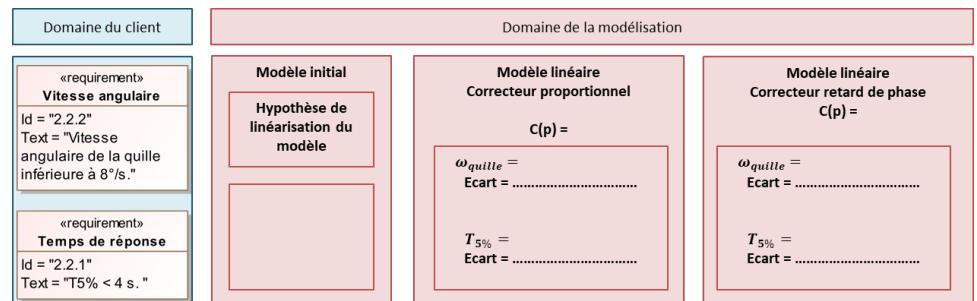
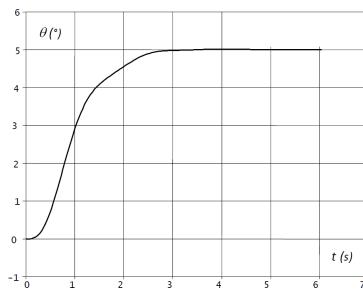
- ▶ calculer b pour que « l'excès » de gain ΔK soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de T ;
- ▶ calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation ω^* .

Validation du cahier des charges

La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain K_{COR} a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

Question 10 Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

Question 11 Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



Application 0

Dynamique du véhicule – Segway de première génération ★★ – Sujet

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

05 DYN

Présentation

Le support de l'étude est le véhicule auto balancé Segway®. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, mais plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

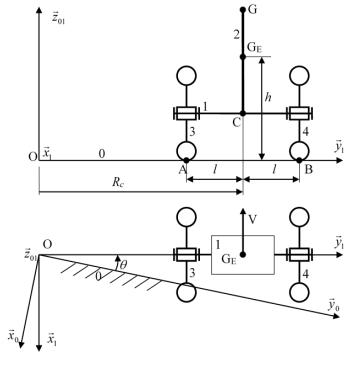
La première génération de Segway avait un guidon fixe et une poignée de direction). Cette technologie provoquait un effet de roulis qui pouvait conduire à un renversement. Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier le dérapage et le renversement d'un Segway de première génération.

La seconde génération de Segway a vu apparaître une technologie appelée LeanSteer avec guidon inclinable qui permet de faire tourner le Segway lorsque l'utilisateur penche son corps sur le côté (non étudié dans cet exercice).

On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- ▶ la route **(0)** est munie du repère $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Ce référentiel associé est supposé galiléen.
- ▶ la plate-forme **(1)** a pour centre de gravité C . Le conducteur **(2)** a pour centre de gravité G . Les roues 3 et 4, de masse et inertie négligeable, sont liées à 1 par des liaisons pivots d'axe (C, \vec{y}_1) . L'ensemble $E = 1 + 2$ forme le système matériel indéformable E de centre de gravité G_E et de masse m_E . Il est animée d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O . Le rayon de courbure de la trajectoire du point G_E dans \mathcal{R}_0 est R_C . Le repère lié à 1 est \mathcal{R}_1 tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0 = \vec{z}_{01}$ et on note $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

On donne $\overrightarrow{OG_E} = R_C \vec{y}_1 + h \vec{z}_{01}$. L'opérateur d'inertie de E en G_E dans \mathcal{R}_1 est : $I_{G_E}(E) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$.



Hypothèse

- ▶ Les contacts entre les roues 3 et 4 et la route 0 ont lieu en A et B définis par $\overrightarrow{G_E A} = -l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$ et $\overrightarrow{G_E B} = l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$, l désignant la demi voie du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres A et B et de normale \vec{z}_{01} . Le contact dans ces liaisons se fait avec un coefficient de frottement noté f (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route 0 sur les roues 3 et 4 sont modélisées par des glisseurs en A et B de résultantes $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} = -T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1$ et $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 4)} = -T_B \vec{y}_1 + N_B \vec{z}_1$.
- ▶ On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C , ainsi que la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 sont constants.
- ▶ L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{z}_0$. Accélération de la pesanteur, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$.

- On néglige la masse et les l'inertie des roues.

On donne :

- coefficient d'adhérence pneu-route : $f = 1$;
- masse de $E = 1 + 2 : m_E = 134 \text{ kg}$;
- demi largeur des voies : $l = 35 \text{ cm}$, $h = 86 \text{ cm}$.

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.1» Glissement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m	Interdit

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire $V_L = \|V(G_E/\mathcal{R}_0)\|$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer la vitesse limite pour laquelle il n'y a pas de dérapage. Vérifier alors que l'exigence 1.1 est vérifiée.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.2» Renversement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m.	Interdit

Hypothèse

On suppose qu'il y a adhérence des roues en A et B .

Question 3 Exprimer la vitesse limite pour laquelle il n'y a pas de basculement du Segway.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 4 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.



TD 2

Gyrolock ★ – Sujet

Centrale Supélec PSI 2022.

Comportement dynamique du stabilisateur

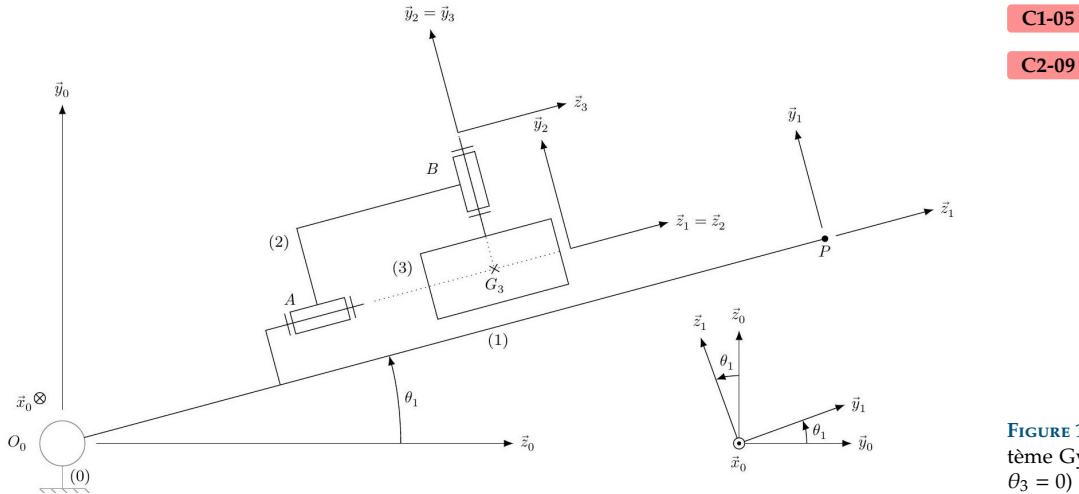


FIGURE 12 – Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour $\theta_2 = \theta_3 = 0$)

Dans la modélisation retenue (figure 12), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère $\mathcal{R}_1 (O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ avec $\theta_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$. Le point P tel que $O_0P = L$ représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

Paramétrage, notations et hypothèses

- ▶ La liaison pivot d'axe (O_0, \vec{x}_0) entre les solides (0) et (1) possède une raideur k et un coefficient de frottement visqueux f , d'où $\vec{M}(O_0, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1)$;
- ▶ les autres liaisons sont supposées parfaites;
- ▶ l'action du cœur sur le stabilisateur (1) est modélisée par $\{\mathcal{T}_{c \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} f_c \vec{y}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}_P$;
- ▶ seul le déplacement vertical du point P est pris en compte. On note $y(t) = -\overrightarrow{O_0P} \cdot \vec{y}_0$;
- ▶ le stabilisateur (1) est de masse m_1 et possède un centre d'inertie G_1 tel que $\overrightarrow{O_0G_1} = L_{G_1} \vec{z}_1$ et l'opérateur d'inertie est $\mathcal{J}(G_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- ▶ la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables;
- ▶ la toupie (3) est de masse m_3 et possède un centre d'inertie G_3 tel que $\overrightarrow{O_0G_3} = L_{G_3} \vec{z}_1 + H_{G_3} \vec{y}_1$;
- ▶ les figures de changement de base sont données figures 6 et 9;
- ▶ les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques.

Question 1 Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en $\theta_1(t)$). L'ensemble isolé,

l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

Question 2 Exprimer $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0$, la projection sur \vec{x}_0 du moment dynamique au point O_0 du solide (1) en mouvement dans le référentiel \mathcal{R}_0 .

Question 3 Exprimer littéralement la vitesse $\vec{V}(G_3, 3/0)$ dans la base \mathcal{B}_1 , puis l'accélération $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0)$ dans la base \mathcal{B}_1 .

1: $\ddot{\theta}_2 \approx 0$, $\theta_2 \approx 0$ et $\dot{\theta}_3 = \omega_3$ constante.

Question 4 En conservant les conditions de fonctionnement ci-contre¹, il est possible de montrer que $\vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$ avec $c_x(t) = B_3 \omega_3 \dot{\theta}_2$ (résultat admis sans démonstration). En déduire $\vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0$, en fonction de A_3 , $c_x(t)$, m_3 , L_{G_3} , H_{G_3} et $\ddot{\theta}_1(t)$.

Question 5 Exprimer J_x en fonction de A_1 , A_3 , m_1 , m_3 , L_{G_1} , L_{G_3} et H_{G_3} permettant d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x \ddot{\theta}_1(t) + f \dot{\theta}_1(t) + k \theta_1(t) = c_x(t) - L f_c(t)$$

En supposant que θ_1 reste proche de 0, la relation $y(t) = L \theta_1(t)$ sera utilisée.

Les transformées de Laplace de $y(t)$, $c_x(t)$ et $f_c(t)$ sont notées $Y(p)$, $C_x(p)$ et $F_c(p)$.

Question 6 En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert $H_{\text{pert}}(p)$ et $H_1(p)$ du schéma-blocs figure 13 en fonction de L , J_x , f et k .

On rappelle que $L = 0,3 \text{ m}$ et les valeurs retenues pour J_x , f et k sont :

- $J_x = 1,14 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
- $-f = 64 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$;
- $-k = 95 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$.

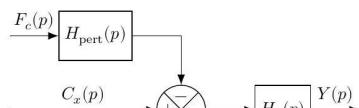


FIGURE 13 – Schéma bloc du stabilisateur (1)

Question 7 Écrire $H_1(p)$ sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique K_1 , amortissement ξ_1 et pulsation propre ω_1 . Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).

TD 3

Robot de dépose de fibres optiques ★ – Sujet

Concours Mines Ponts – PSI 2004.

C1-05

C2-08

Présentation

L'objet de cette étude est un robot permettant la pose d'arceaux métalliques pour l'installation de réseaux souterrains de télécommunication par fibres optiques.

Objectif

En fin des mouvements des bras, on doit avoir $\delta = 14^\circ$ et $\dot{\delta} \leq 50^\circ.s^{-1}$.

De façon à pouvoir dérouler les arceaux métalliques, le chariot est centré dans la canalisation à l'aide de quatre bras actionnés par un vérin hydraulique.

Afin de valider le choix du vérin, et donc sa puissance, il faut déterminer l'action F du vérin qui permettra au robot de se positionner correctement dans la canalisation. Sous l'effet d'un vérin, les bras inférieurs vont soulever le robot qui va pivoter sur son train arrière. La fin du positionnement sera assurée lorsque les roulettes des bras supérieurs viendront en contact avec la paroi de la canalisation. À un instant t , le système est modélisé selon le schéma ci-dessous :

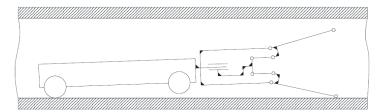
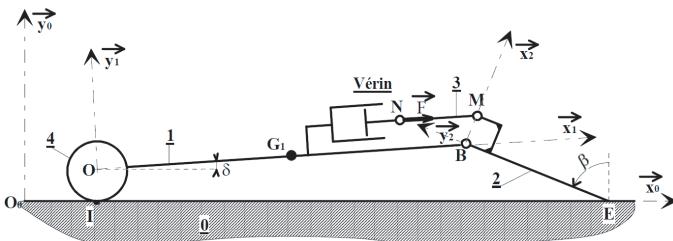


FIGURE 14 – Modélisation du robot

Hypothèses

L'étude dynamique est à faire dans le plan de symétrie longitudinale du robot.

Le robot est modélisé par le schéma ci-dessus. Il comprend :

- ▶ une tige 1 de longueur $OB = L_1$, de section négligeable, de masse m_1 , et de centre d'inertie G_1 , tel que $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L_1}{2}\vec{x}_1$;
- ▶ une roue 4, de centre O , de rayon $R = 0,07\text{ m}$, de masse négligeable, qui correspond au train arrière. Cette roue est en liaison encastrement avec 1;
- ▶ un bras 2 constitué de deux éléments BE et BM tels que $\overrightarrow{BE} = -a\vec{y}_2$ et $\overrightarrow{BM} = b\vec{x}_2$, de section et de masse négligeables;
- ▶ une biellette 3 (NM) de masse négligeable et dont la direction au cours du mouvement est sensiblement celle de la tige 1;
- ▶ un vérin hydraulique de masse négligeable.

En I , le contact entre la roue 4 et la paroi 0 se fait par roulement sans glissement.

En E , le contact entre le bras 2 et la paroi 0 se fait sans frottement.

Toutes les autres liaisons sont considérées sans frottement.

L'action \vec{F} du vérin sur la biellette 3a, à chaque instant, pour direction \vec{x}_1 : $\vec{F} = F\vec{x}_1$.

Repères et paramétrage

- $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, repère associé à la canalisation O et supposé galiléen.
- $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, repère associé à la tige 1.
- $R_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, repère associé au bras 2.
- $\delta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$.

Cahier des charges

On désire avoir en fin de mouvement des bras, correspondant à $\delta = 14^\circ$, une vitesse $\dot{\delta}$ inférieur à $50^\circ/s$

Modélisation dynamique

Question 1 Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$, puis la calculer.

Question 2 Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ .

Question 3 Donner la puissance intérieure à Σ .

Question 4 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre F , δ , et β .

Des simulations pour différentes valeurs de F donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de δ en fonction du temps.

Question 5 Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot{\delta}$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.

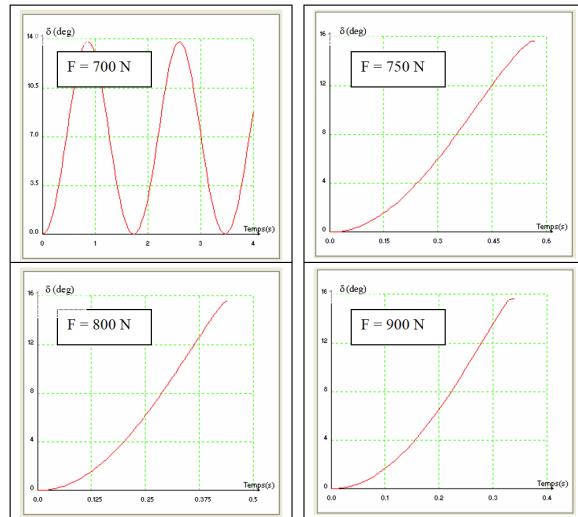


FIGURE 15 – Résultats de la simulation dynamique du système

TD 4

Quille pendulaire ★★★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

C1-05

C2-08

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Objectif

L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Hypothèses

- ▶ Les liaisons sont toutes parfaites.
- ▶ Le bateau est à l'arrêt et son repère R_N est galiléen.
- ▶ Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que : $F_{h2} > 0$ et $F_{h3} = 0$. Le vérin 2–4 est alors moteur et le vérin 3–5 est libre (F_{h2} désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2 ; on a donc $-F_{h2}$ qui agit sur 4).
- ▶ Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures ci-contre.

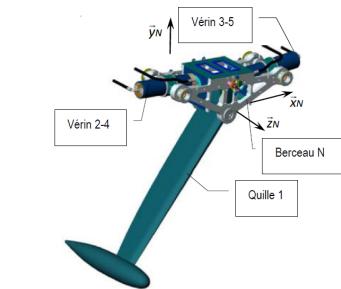
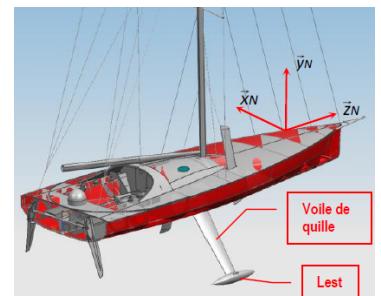
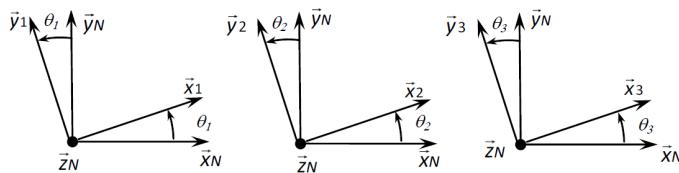


FIGURE 16 – Modèle volumique 3D

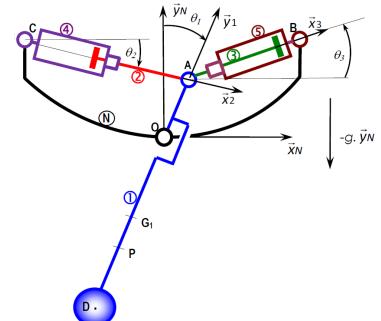


FIGURE 17 – Modèle 2D

FIGURE 18 – Paramétrage

Données géométriques, massiques et inertielles $\overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1$;
 $\overrightarrow{CA} = x_{24}(t)\vec{x}_2$; $\overrightarrow{AB} = x_{35}(t)\vec{x}_3$,

- Solide 1, masse M_1 , centre d'inertie G_1 , $\overrightarrow{OG_1} = -L_1\vec{y}_1$, $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_N)}$.
- Solide 2, masse M_2 , centre d'inertie G_2 , $\overrightarrow{AG_2} = -L_2\vec{x}_2$, $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}$.
- Solide 3, masse $M_3 = M_2$, centre d'inertie G_3 , $\overrightarrow{AG_3} = L_2\vec{x}_3$, $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}$.
- Solide 4, masse M_4 , centre d'inertie C , $I_C(4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}$.
- Solide 5, masse M_5 , centre d'inertie B , $I_B(5) =$

$$\begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}.$$

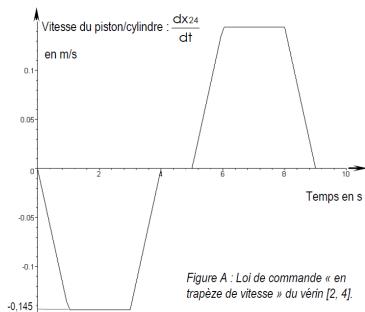
Actions mécaniques

- Action de pression de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_{h2}\vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_C$.
- Action de pression de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_{h3}\vec{x}_3 \\ 0 \end{array} \right\}_B$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \vec{x}_3 \\ 0 \end{array} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action hydraulique de l'eau sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_p\vec{z}_1 + F_t\vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_P$ avec $\overrightarrow{OP} = -h\vec{y}_1$.

Question 1 Exprimer la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction des données du problème. La méthode sera précisément décrite. Chacun des termes seront calculés. Il n'est pas demandé d'écrire la relation finale.

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position $\theta_1 = 0$ à la position $\theta_1 = 45^\circ$ en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position $\theta_1 = 0$ en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure 19.



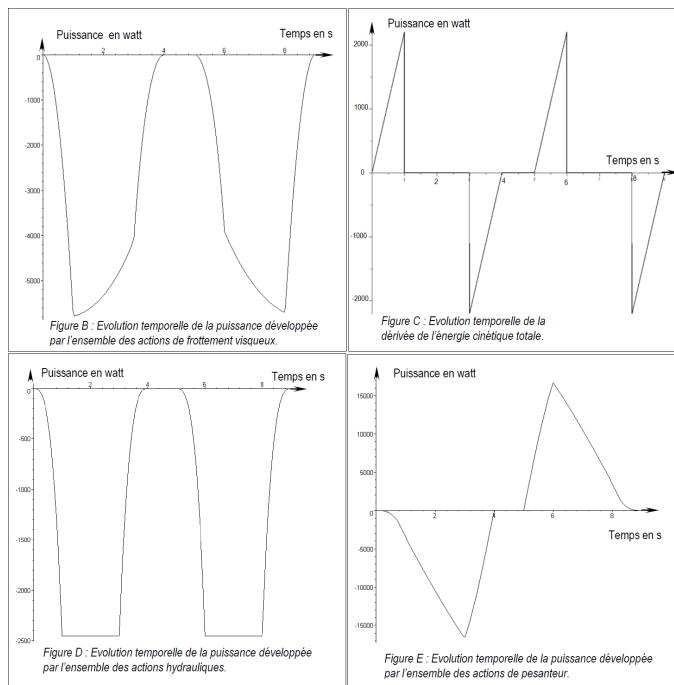


FIGURE 19 – Evolution temporelle des puissances

Question 2 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0 \text{ s}$, $t = 1 \text{ s}$, $t = 3 \text{ s}$ et $t = 4 \text{ s}$. Sur cet intervalle $[0, 4 \text{ s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Question 3 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.



Colle 1

Pompe à chaleur à compresseur Scroll – Sujet

XENS – PSI – 2018.

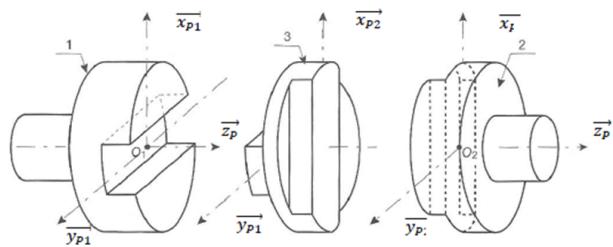
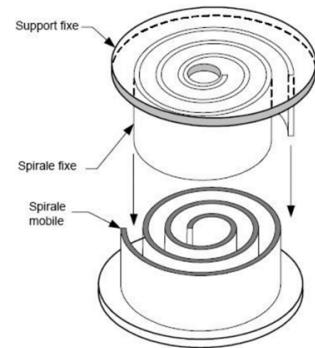
Présentation

Le compresseur Scroll utilise deux spirales de géométrie identique emboîtées l'une dans l'autre. L'une des spirales est fixe tandis que la seconde est mobile et mise en mouvement grâce à un arbre muni d'un excentrique.

Etude préliminaire d'un joint de Oldham

Le joint de Oldham est un accouplement utilisé en général entre 2 axes parallèles mais non-coaxiaux. La figure ci-après en donne les constituants de principe :

- ▶ un arbre d'entrée (noté 1) pouvant tourner autour de l'axe (O_1, \vec{z}_{p1}) par rapport à un bâti;
- ▶ un arbre de sortie (noté 2) pouvant tourner autour de l'axe (O_2, \vec{z}_{p2}) par rapport à un bâti;
- ▶ une pièce intermédiaire appelée en général « noix » ou « croix » (notée 3).



La transmission de la rotation de l'arbre 1 à l'arbre 2 est rendue possible par les caractéristiques des liaisons avec la noix 3 : il est nécessaire d'avoir deux glissières orthogonales au niveau de la noix. Ainsi, on retrouve :

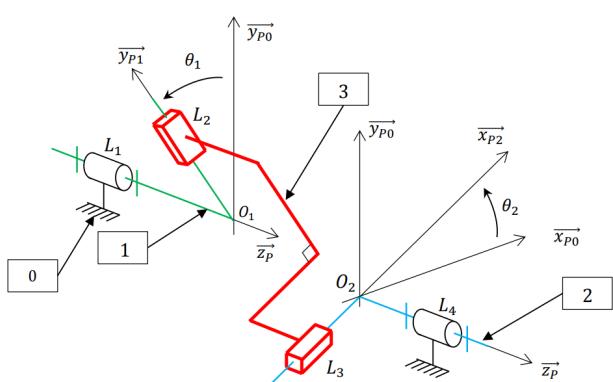
- ▶ une glissière de direction \vec{y}_{p1} entre 1 et 3;
- ▶ une glissière de direction \vec{x}_{p2} entre 3 et 2.

Ces 2 glissières sont par construction constamment orthogonales.

La figure ci-après représente le paramétrage de ce même joint de Oldham avec $B_0 (\vec{x}_{p0}, \vec{y}_{p0}, \vec{z}_{p0})$ la base fixe liée au bâti 0.

Paramétrage :

- ▶ $\vec{O_1O_2} = -e\vec{x}_{p0} + h\vec{z}_0$;
- ▶ $\vec{L_1O_1} = l_1\vec{z}_p$;
- ▶ $\vec{O_1L_2} = \lambda_2\vec{y}_{p1}$;
- ▶ $\vec{O_2L_4} = l_2\vec{z}_p$
- ▶ $\vec{L_3O_2} = \lambda_2\vec{x}_{p2}$.



Les liaisons entre le bâti 0 et les pièces 1 et 2 sont toutes deux des liaisons pivots d'axes respectifs (L_1, \vec{z}_P) et (L_4, \vec{z}_P) .

Question 1 Représenter la figure plane de calcul reliant la base $\mathcal{B}_1 (\vec{x}_{P1}, \vec{y}_{P1}, \vec{z}_{P0})$ à la base \mathcal{B}_0 ainsi que celle reliant la base $\mathcal{B}_2 (\vec{x}_{P2}, \vec{y}_{P2}, \vec{z}_{P0})$ à la base \mathcal{B}_0 . Exprimer \vec{y}_{P1} et \vec{x}_{P2} dans la base \mathcal{B}_0 en fonction respectivement de θ_1 et θ_2 .

Question 2 Étant donnée l'orthogonalité entre \vec{y}_{P1} et \vec{x}_{P2} , montrer que $\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$.

On note $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ et $\dot{\theta}_2 = \omega_2$.

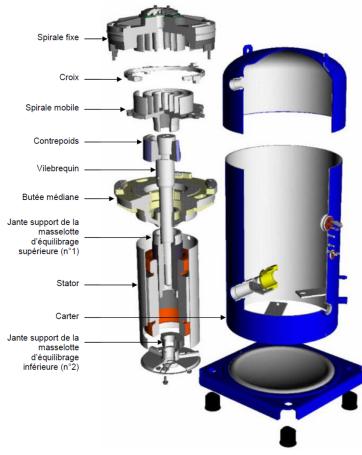
Question 3 Justifier, à partir du résultat précédent, que l'accouplement en rotation par joint de Oldham soit qualifié de « homocinétique en rotation », c'est-à-dire que le rapport de transmission entre la vitesse de rotation de 1 par rapport à 0, ω_1 , et celle de 2 par rapport à 0, ω_2 , est constant dans le temps.

Question 4 Calculer le degré d'hyperstatisme de ce modèle d'accouplement à partir des grandeurs cinématiques.

Afin de baisser l'hyperstatisme de l'accouplement, une version alternative est proposée en remplaçant les liaisons L_2 et L_3 par des liaisons pivot-glissant toujours d'axes respectifs (O_1, \vec{y}_{P1}) et (O_2, \vec{x}_{P2}) .

Question 5 Vérifier, à partir d'une analyse basée sur les grandeurs statiques, que le degré d'hyperstatisme a bien diminué suite à cette modification.

Question 6 Proposer une modification permettant de rendre le système isostatique en conservant sa fonctionnalité.

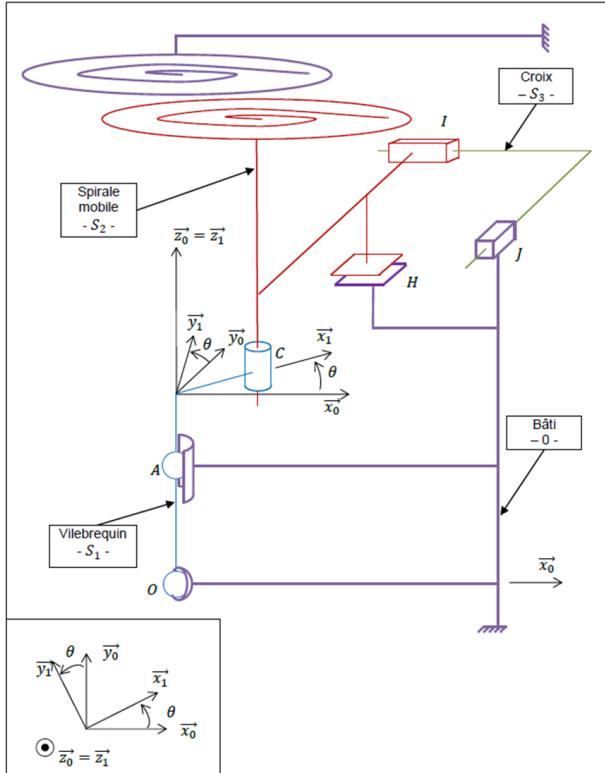


Etude cinématique du compresseur Scroll complet

La vue éclatée présentée sur la figure suivante permet d'identifier les différents composants du compresseur :

- ▶ le bâti fixe composé du carter extérieur, du stator du moteur électrique, de la butée médiane et de la spirale fixe placée en partie haute ;
- ▶ l'axe principal composé d'un vilebrequin, du rotor moteur, du contrepoids et de masselottes d'équilibrage ;
- ▶ la spirale mobile ;
- ▶ la croix.

Le schéma cinématique proposé reprend les éléments précédents en conservant les ensembles cinématiques. Les contacts entre les spirales fixe et mobile sont négligés dans cette modélisation.



Liaisons supposées parfaites :

- entre le vilebrequin S_1 et le bâti 0 :
 - liaison rotule de centre O ;
 - liaison linéaire annulaire de centre A et d'axe $\overrightarrow{A}z_0$;
- entre le vilebrequin S_1 et la spirale mobile S_2 : liaison pivot glissant d'axe $(C, \overrightarrow{z}_0)$;
- entre la spirale mobile S_2 et la croix S_3 : liaison glissière de direction \overrightarrow{x}_0 ;
- entre la croix S_3 et le bâti 0 : liaison glissière de direction \overrightarrow{y}_0 .

Liaison non parfaite :

- entre la spirale mobile S_2 et le bâti 0 :
 - liaison appui-plan avec frottement de normale \overrightarrow{z}_0 .

Question 7 Tracer le graphe des liaisons du système tel que modélisé sur la Figure précédente en faisant apparaître chaque liaison avec ses caractéristiques.

Question 8 Démontrer par le calcul que l'association des liaisons en O et en A entre le vilebrequin et le carter forme une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z}_1)$.

Question 9 Indiquer la valeur de l'indice de mobilité du système dans cette modélisation à partir à partir de l'analyse du schéma cinématique. Proposer une démarche qui, sans utiliser le degré d'hyperstatisme du système, permettrait de retrouver analytiquement cette valeur.

Il est intéressant de remarquer que la croix S_3 réalise un accouplement de type joint de Oldham entre la spirale mobile S_2 et le bâti 0.

Question 10 Justifier alors que la vitesse de rotation de S_2 par rapport à 0 est nulle.

Question 11 Exprimer, dans la base \mathcal{B}_1 , la vitesse instantanée du point C appartenant à S_2 dans son mouvement par rapport à 0. Faire l'application numérique.

Paramétrage :

- $\mathcal{R}_0(O; \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0)$ est le repère associé au bâti 0 ;
- $\mathcal{R}_1(O; \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{z}_1)$ est le repère associé au au vilebrequin 1 :
 - la rotation de S_1 par rapport à 0 est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{x}_1) = (\overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{y}_1)$;
 - la vitesse de rotation est notée $\omega = \dot{\theta} = 3600 \text{ tr/min}$.
- $\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{z}_1$ avec $a = 340 \text{ mm}$;
- $\overrightarrow{AC} = R_{\text{orb}}\overrightarrow{x}_1 + d\overrightarrow{z}_1$ avec $R_{\text{orb}} = 8 \text{ mm}$ et $d = 80 \text{ mm}$.

Question 12 Déduire des questions précédentes le type de mouvement de la spirale mobile S_2 dans son déplacement par rapport à 0 ainsi que ses qualificatifs et caractéristiques.



TD 5 : Stabilisateur vertical pour appareil photo ★ – Sujet

Concours Centrale Supélec 2021 – PSI.

L'utilisation du mode vidéo, en haute définition sur les appareils photo réflex et légers, pose aux photographes le problème de la stabilisation de l'image.

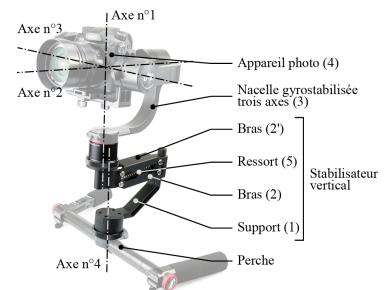
Les nacelles gyrostabilisées, installées sur une perche portée par les deux mains de l'utilisateur et sur lesquelles se fixe l'appareil photographique permettent de corriger les perturbations dues aux mouvements de l'utilisateur selon trois axes de rotations. Néanmoins, elles ne permettent pas de réduire les perturbations verticales dues à la marche ou à la course de l'utilisateur.

Pour résoudre ce problème, un constructeur commercialise un stabilisateur vertical à installer entre la perche et la nacelle gyrostabilisée.

B2-14

C1-05

C2-07



Vérification du respect de l'exigence relative à la position d'équilibre

Le cahier des charges précise que le stabilisateur peut être utilisé avec des appareils photo de masse comprise entre 0,350 kg et 1,550 kg².

Objectif

L'objectif de cette partie est de vérifier que la conception est assez robuste vis-à-vis du facteur de masse de l'appareil photo pour satisfaire l'exigence 1.1 relative à la position d'équilibre du système.

2: Exigence 1

“requirement” Plage de fonctionnement
Id = "1.1.1" Text = "Obtenir une position d'équilibre du système dans la plage de fonctionnement $\alpha_0 \in [-35^\circ, 45^\circ]$ "

FIGURE 20 – Exigence 1.1

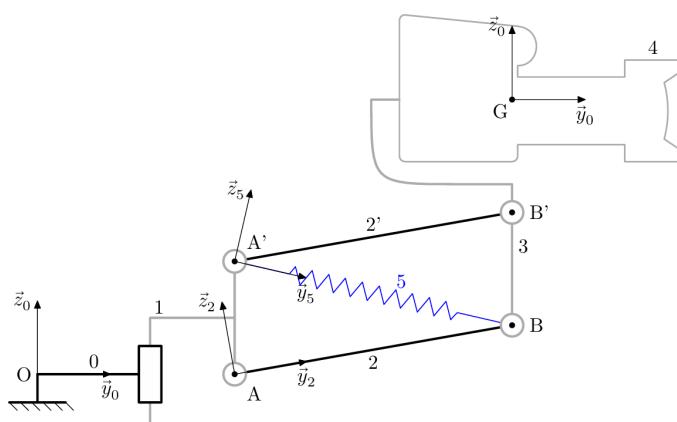


FIGURE 21 – Schéma cinématique plan et paramétrage du mécanisme

Le mécanisme étudié dont la modélisation retenue est donnée (figure 21). La nacelle gyrostabilisée est schématisée par la barre (3). Le support (1), faisant l'objet d'une liaison encastrement avec la perche, est supposé être en mouvement de translation par rapport au sol (0) autorisé par une glissière fictive. Ce modèle est paramétré par :

- ▶ le repère terrestre $\mathcal{R}_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ supposé galiléen avec \vec{z}_0 vertical ascendant;
- ▶ le repère $\mathcal{R}_1 (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au support (1) avec $\overrightarrow{OA} = y_A \vec{y}_0 + z_{\text{pert}} \vec{z}_0$;
- ▶ le repère $\mathcal{R}_2 (A, \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié au bras (2) avec $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$;
- ▶ le repère $\mathcal{R}'_2 (A', \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié au bras (2') avec $\overrightarrow{AA'} = l \vec{z}_0$;

La plage de fonctionnement du mécanisme est limitée par la géométrie des bras (2) et (2') avec $\alpha \in [-35^\circ, 45^\circ]$, $l = 25 \text{ mm}$, $L = 52 \text{ mm}$, $y_G = 5 \text{ mm}$ et $z_G = 200 \text{ mm}$.

- ▶ le repère \mathcal{R}_3 ($B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$) lié à la nacelle gyrostabilisée (3) et à l'appareil photo (4) liés rigidement entre eux avec $\overrightarrow{AB} = L\vec{y}_2$. Le centre d'inertie de l'ensemble $\{(3) + (4)\}$ est noté G , avec $\overrightarrow{BG} = y_G\vec{y}_0 + z_G\vec{z}_0$;
- ▶ le repère \mathcal{R}_5 ($A', \vec{x}_0, \vec{y}_5, \vec{z}_5$) est défini tel que $\overrightarrow{A'B} = L_r\vec{y}_5$ avec $\beta = (\vec{y}_0, \vec{y}_5) = (\vec{z}_0, \vec{z}_5)$.

Le ressort de traction (5) de raideur K_r et de longueur à vide L_{r0} possède une tension initiale F_{r0} lorsque $L_r = L_{r0}$. Il est relié d'une part au support (1) et d'autre part au solide (3) aux points d'ancrage A' et B.

Pour cette étude la nacelle gyrostabilisée (3) et l'appareil photo (4) sont considérés comme formant un seul solide de masse $m_{34} = m_3 + m_4$ avec $m_3 = 1,250 \text{ kg}$. La masse et l'inertie des autres solides sont négligées.

Dans cette partie, l'étude est conduite avec les hypothèses suivantes :

- ▶ les liaisons sont parfaites;
- ▶ la modélisation est plane;
- ▶ il n'y a pas de perturbation ($z_{\text{pert}} = 0$).

En utilisant une fermeture géométrique, on peut montrer que $\tan \beta = \frac{L \sin \alpha - l}{L \cos \alpha}$ et que la longueur du ressort L_r peut s'exprimer sous la forme $L_r = \sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll \sin \alpha}$.

Vérification de l'exigence relative à la plage de fonctionnement

L'action mécanique du ressort de traction (5) sur la nacelle gyrostabilisée (3) est modélisée par le torseur $\{\mathcal{F}_{5 \rightarrow 3}\} : \{\mathcal{F}_{5 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_r \vec{y}_5 \\ 0 \end{array} \right\}_B$.

Question 1 Exprimer la composante de résultante d'action mécanique F_r en fonction de l'angle α , des paramètres géométriques du système et des paramètres du ressort.

Question 2 Déterminer la direction des actions mécaniques de liaison exercées par le bras (2) sur la nacelle (3) et par le bras (2') sur la nacelle (3). **On pourra raisonner en statique.**

Question 3 Afin de déterminer la position d'équilibre de l'ensemble $\{(3) + (4)\}$, proposer sans calcul, une démarche claire qui permette d'exprimer l'effort nécessaire du ressort de traction (5) sur la nacelle gyrostabilisée (3). **On pourra raisonner en statique.**

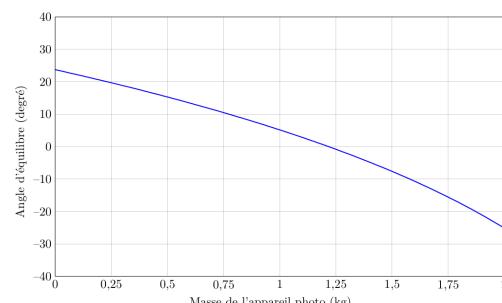
Question 4 Exprimer l'équation scalaire traduisant l'équilibre du mécanisme en fonction des angles α, β , de la masse m_{34} et de la composante de résultante d'action mécanique F_r .

Dès lors, il est possible de tracer l'angle d'équilibre α_0 en fonction de la masse de l'appareil photo m_4 (figure 22).

Question 5 En donnant les valeurs des angles d'équilibre pour les deux valeurs extrêmes de masse, vérifier le respect de l'exigence 1.1.1. relative à la plage de fonctionnement.



FIGURE 22 – Angle d'équilibre α_0 en fonction de la masse de l'appareil photo m_4



Application 1

Arc-bouttement – Système EOS★ – Sujet

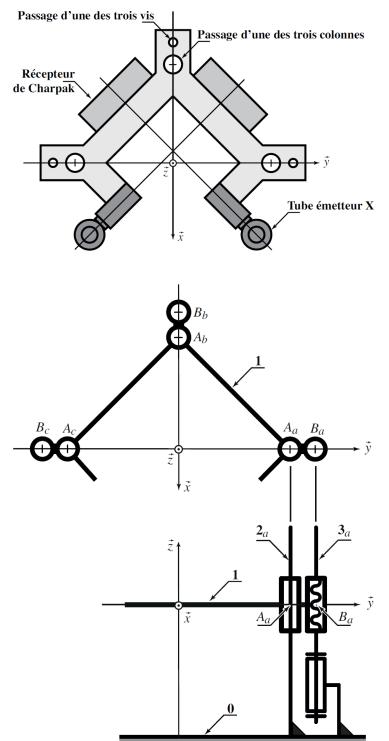
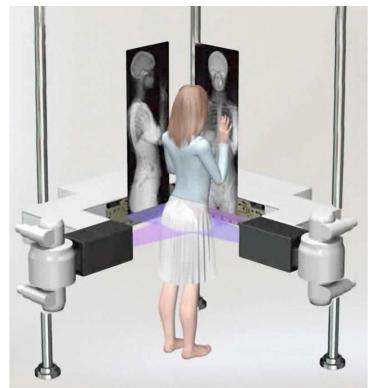
Mise en situation

Le système EOS permet l'acquisition simultanée de radiographies de face et de profil du corps entier (ou d'une zone anatomique localisée) avec une réduction de la dose de rayons X de l'ordre de 90 % par rapport à un système radiographique conventionnel ou un scanner.

Le mécanisme interne, constitué d'un bras mobile, guidé par rapport au bâti par trois colonnes verticales. Le bras supporte deux chaînes d'acquisition, chacune d'entre elles étant composée d'un tube à rayons X et d'un détecteur.

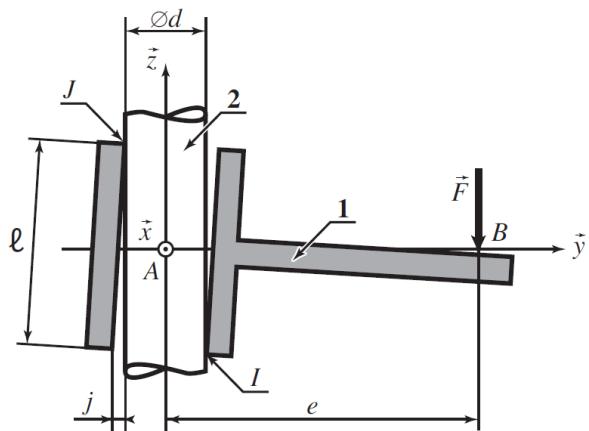
La figure suivante représente le bras mobile en vue de dessus, ce qui permet de voir les passages des colonnes et des vis. Le modèle cinématique permettant d'appréhender le fonctionnement interne.

On s'intéresse plus précisément à une des trois chaînes réalisant la liaison entre le bras mobile 1 et le bâti 0. Cette liaison est principalement réalisée par le biais d'une colonne 2, qui est en liaison complète avec 0. Un schéma de principe est représenté sur la figure suivante. La colonne est de diamètre d , l'alésage du bras de diamètre $d + j$ et de longueur ℓ . On suppose que le jeu j , bien que négligeable devant d ($j \ll d$), permet un léger basculement du bras par rapport à la colonne, ce qui conduit à considérer cet assemblage comme l'association en parallèle de deux liaisons sphère-plan, en I et J . Le contact est modélisé en utilisant la modèle de Coulomb et on note f le coefficient de frottement. Le bras 1 est soumis à une action mécanique motrice (issue de la liaison hélicoïdale) modélisée par un glisseur en B noté $F = -F_z$ ($F > 0$) dont l'axe central est distant de e de l'axe de la liaison. On se propose d'étudier le risque d'arboutement de cette liaison, supposée plane, en négligeant les actions de la pesanteur.



Objectif

Déterminer les conditions de non arboutement du guidage du système EOS.



Travail à réaliser

Question 1 En introduisant $F_I = Y_I \vec{y} + Z_I \vec{z}$ et $F_J = Y_J \vec{y} + Z_J \vec{z}$, les glisseurs en I et J qui résultent des actions mécaniques exercées par la colonne 2 sur le bras 1, écrire les

trois équations scalaires traduisant l'équilibre du bras.

Question 2 En supposant que $F > 0$, comme précisé ci-dessus, donner les signes des composantes Y_I , Z_I , Y_J et Z_J puis écrire, en utilisant le modèle de Coulomb, les inéquations qui lient ces composantes.

Question 3 En supposant qu'on est à la limite du glissement au niveau d'un des contacts, donner la condition nécessaire entre ℓ , f et e pour qu'il n'y ait pas d'arcaboutement dans la liaison.

Conclusion vis-à-vis de l'objectif

Question 4 Vérifier que la condition de non arcaboutement est satisfaite sur le système EOS pour lequel les grandeurs caractéristiques fournies ci-dessous ?

Grandeur	Notation	Unités	Valeur numérique
Diamètre des colonnes de guidage	d	cm	10
Diamètre des vis de guidage	d'	cm	5
Hauteur totale des colonnes	H	cm	200
Limite de course du bras	h0	cm	10
Longueur de guidage des colonnes	ℓ	cm	20
Coefficient de frottement colonne/bras	f	-	0,2
Excentration guidage en translation	e	cm	20

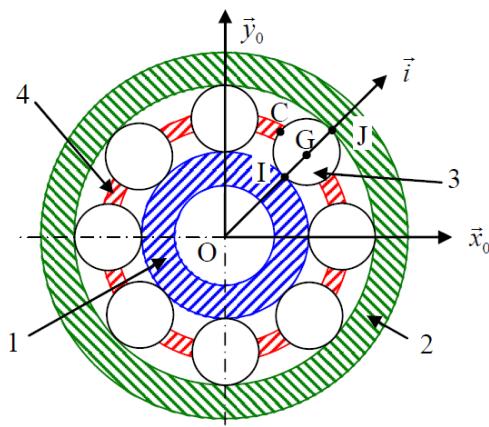
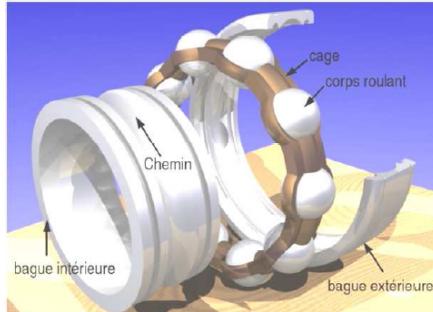
$$\begin{aligned}
 1. \quad & \left\{ \begin{array}{l} Y_I + Y_J = 0 \\ Z_I + Z_J - F = 0 \\ -Y_J \frac{\ell}{2} - Z_J \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - Z_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \end{array} \right. \\
 2. \quad & . \\
 3. \quad & \frac{\ell}{2e} \leq f \\
 4. \quad & .
 \end{aligned}$$

Application 2

Roulement à billes – Sujet

Un roulement mécanique est un élément technologique permettant le positionnement, la transmission des efforts et la rotation entre deux pièces par roulement. Ce composant mécanique interposé entre les deux pièces optimise le frottement et la précision de la liaison. Un roulement à billes se présente sous la forme de deux bagues coaxiales entre lesquelles sont placées des billes maintenues espacées par une cage. La fonction de la cage est donc de maintenir deux billes consécutives à distance égale l'une de l'autre lors du fonctionnement du roulement mais elle entraîne aussi des effets nuisibles car il existe un phénomène de glissement entre la cage et les billes. **L'objectif est d'étudier ce phénomène de glissement.**

Ressources de Renan Bonnard.



On désigne par :

- $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère associé au bâti 0;
- $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ le repère associé à la bague intérieure 1 en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti 0 tel que $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
- $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ le repère associé à la bague extérieure 2 en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti 0 tel que $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$;
- $\mathcal{R}_3 = (G, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ le repère associé à la bille 3 qui roule sans glisser sur 1 en I et sur 2 en J et dont on peut considérer qu'elle est en liaison pivot d'axe (G, \vec{z}_0) avec la cage 4 tel que $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$;
- $\mathcal{R}_4 = (O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$ le repère associé à la cage 4 en mouvement de rotation autour de (O, \vec{z}_0) tel que $\theta_4 = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$.

Pour faciliter les calculs on définit le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z}_0)$ tel que, à tout instant, le vecteur \vec{i} possède la même direction et le même sens que le vecteur \overrightarrow{OG} . Ce repère n'est lié à aucun solide en particulier et ne sert qu'à exprimer simplement les différents termes cinématiques évoqué dans l'énoncé. On pose :

$$\omega_k = \dot{\theta}_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad \overrightarrow{OI} = r_1 \vec{i} \quad \overrightarrow{OJ} = r_2 \vec{i}$$

$$\overrightarrow{GC} = \frac{1}{2}(r_2 - r_1) \vec{j}$$

Question 1 Réaliser les figures planes correspondant au paramétrage du système.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{V(O, 1/0)}$ et $\overrightarrow{V(I, 1/0)}$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$, $\overrightarrow{V(O, 2/0)}$ et $\overrightarrow{V(J, 2/0)}$.

Question 4 Exprimer les conditions de roulement sans glissement en I et J . Établir les expression des vecteurs $\overrightarrow{V(I, 3/0)}$ et $\overrightarrow{V(J, 3/0)}$.

Question 5 En déduire l'expression de ω_3 en fonction de $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$.

Question 6 Déterminer $\overrightarrow{V(G, 3/0)}$ en fonction de $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$.

Question 7 Déterminer l'expression de la vitesse de glissement de la bille 3 par rapport à la cage 4 au point C en fonction de $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$.

