

Révisions de géométrie et de cinématique

5

5.1 Modélisation géométrique – Lois entrées-sorties

5.1.1 Modélisation et paramétrage des systèmes mécaniques

Méthode – Modélisation d'un système mécanique réel

Pour modéliser un système mécanique réel (en TP par exemple) il faut :

- ▶ identifier les classes d'équivalence cinématique, c'est-à-dire tous les ensembles de pièces reliés entre elles par des liaisons encastrement;
- ▶ identifier les surfaces de contact entre les classes d'équivalence;
- ▶ associer une liaison cinématique aux surfaces de contact;
- ▶ tracer les liaisons en utilisant une couleur par classe d'équivalence et respectant leur positionnement relatif;
- ▶ relier les liaisons de manière filaire;
- ▶ indiquer le bâti, les centres de liaisons et la numérotation des classes d'équivalence.

Méthode – Paramétrage d'un mécanisme cinématique

Pour paramétrier un mécanisme, il faut associer un repère à chaque classe d'équivalence, une constante à chaque dimension fixe (pour une même classe d'équivalence) et une variable à chaque degré de mobilité de liaison (entre deux classes d'équivalence).

- ▶ si la mobilité est une translation, on définit un paramètre variable entre deux points selon une seule direction (la direction de la translation);
- ▶ si la mobilité est une rotation il faut définir l'axe de rotation et l'angle variable en précisant la figure de changement de base.

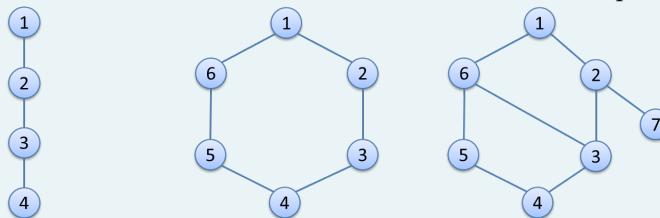
Définition – Graphe de structure – Chaînes

Graphe qui permet d'avoir une vue d'ensemble du mécanisme :

- ▶ les classes d'équivalences sont schématisées par des cercles avec un repère (celui défini précédemment);
- ▶ les liaisons sont schématisées par des traits qui relient les cercles.

On définit 3 types de chaînes :

Les chaînes ouvertes Les chaînes fermées Les chaînes complexes



5.1 Modélisation géométrique	
– Lois entrées-sorties . . .	1
5.2 Modélisation cinématique	2
5.3 Transmetteurs de puissance	4

Par usage, nous associerons une lettre grecque à un paramètre variable et une lettre romane à une dimension fixe. Cela permet de repérer plus facilement quelles sont les variables temporelles lors de calcul de dérivées.

5.1.2 Résolution des lois entrée–sortie

Méthode – Calcul de la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Un système se présentant sous forme d'une chaîne de solide fermée a pour but de transformer un mouvement. On s'intéresse alors pour cela à la relation cinématique liant le mouvement d'entrée du système et le mouvement de sortie. On écrit pour cela une **fermeture de chaîne géométrique**. Pour cela :

1. paramétriser le mécanisme ;
2. identifier la grandeur d'entrée et de sortie ;
3. à l'aide du théorème de Chasles, exprimer le vecteur nul en fonction des vecteurs liant le centre de chacune des liaisons ;
4. projeter la relation vectorielle sur une des bases ;
5. combiner les relations pour exprimer la sortie en fonction de l'entrée ;
6. dériver si besoin pour avoir le lien entre les vitesses.

Méthode – Manipulation du système d'équations

1. Pour supprimer une longueur λ : on met les deux équations sous la forme $\lambda =$ et on fait le rapport des deux équations.
2. Pour supprimer l'angle φ : on met une équation sous la forme $\cos \varphi =$ et la seconde sous la forme $\sin \varphi =$ et on utilise la relation $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.
3. Dans d'autres cas, on peut avoir à utiliser l'expression de la tangente.

Méthode – Autre idée pour calculer la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Dans certains mécanismes, on peut observer que deux vecteurs sont toujours orthogonaux. En utilisant le fait que le produit scalaire entre ces deux vecteurs est nul puis en projetant les vecteurs dans une même base puis en réalisant le calcul, il est possible de déterminer une loi entrée-sortie.

5.2 Modélisation cinématique

Définition – Solide Indéformable

On considère deux points A et B d'un solide indéformable noté S . On note t le temps. $\forall A, B \in S, \forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB}(t)^2 = \text{constante}$.

Définition – Trajectoire d'un point appartenant à un solide

Soit un point P se déplaçant dans un repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. La trajectoire du point P est définie par la courbe $\mathcal{C}(t)$ paramétrée par le temps t . On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{OP}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = x(t)\vec{i}_0 + y(t)\vec{j}_0 + z(t)\vec{k}_0$$

Définition – Vitesse d'un point appartenant à un solide

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0 \left(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0 \right)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1, \left(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \right)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0 . Soit un point P appartenant au solide S_1 . La vitesse du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)}(t) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0P(t)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

Résultat –

Lorsque il n'y a pas de degré de liberté de translation dans une liaison, la vitesse au centre de la liaison est nulle. Ainsi :

- ▶ si les solides S_1 et S_2 sont en liaison rotule de centre O alors $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \vec{0}$;
- ▶ si les solides S_1 et S_2 sont en liaison pivot de d'axe (O, \vec{u}) alors $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \vec{0}$;
- ▶ si les solides S_1 et S_2 sont en liaison rotule à doigt de centre O alors $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \vec{0}$.

Résultat – Déivation vectorielle

Soient S_0 et S_1 deux solides en mouvements relatifs et \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_1 les repères orthonormés directs associés. Soit \vec{v} un vecteur de l'espace. On note $\overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$ le vecteur instantané de rotation permettant d'exprimer les rotations entre chacune des deux bases. La dérivée d'un vecteur dans une base mobile se calcule donc ainsi :

$$\left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \vec{v}.$$

Résultat – Champ du vecteur vitesse dans un solide – Formule de Varignon – Formule de BABAR

Soient A et B deux points appartenant à un solide S_1 en mouvement par rapport à S_0 . Le champ des vecteurs vitesses est donc déterminé ainsi :

$$\overrightarrow{V(B \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(A \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}_{\vec{R}}$$

Résultat – Composition du vecteur vitesse

Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 et un solide S_2 par rapport au solide S_1 . Pour chacun des points A appartenant au solide S_2 , on a :

$$\overrightarrow{V(A, S_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V(A, S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(A, S_1/\mathcal{R}_0)}$$

Remarque

- $\overrightarrow{V(A, S_2/\mathcal{R}_0)}$ est appelé vecteur vitesse absolu;
- $\overrightarrow{V(A, S_2/S_1)}$ est appelé vecteur vitesse relatif;
- $\overrightarrow{V(A, S_1/\mathcal{R}_0)}$ est appelé vecteur vitesse d'entraînement.

Résultat – Composition du vecteur vitesse

Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 et un solide S_2 par rapport au solide S_1 . On a :

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)}$$

Définition – Accélération d'un point appartenant à un solide

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0 .

Soit un point P appartenant au solide S_1 . L'accélération du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/S_0)(t)} = \left[\frac{d(\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)(t)})}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

5.3 Transmetteurs de puissance

5.3.1 Transmission par engrenages

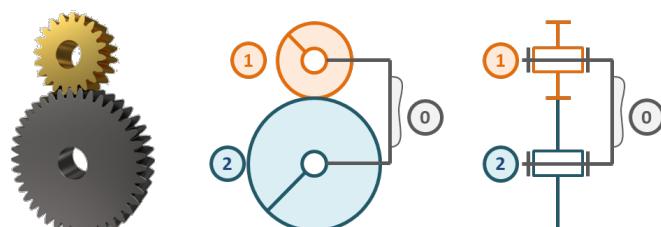
Définition –

Engrenage Un engrenage est constitué de deux roues dentées en contact. Une roue dentée est caractérisée (entre autre) par son nombre de dents Z , son diamètre primitif D en mm et son module en mm. On a $D = mZ$. Pour que deux dents engrènent elles doivent avoir le même module.

Engrenage – Contact extérieur**Résultat –**

$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

n caractérise le nombre de contacts extérieurs, ici $n = 1$.

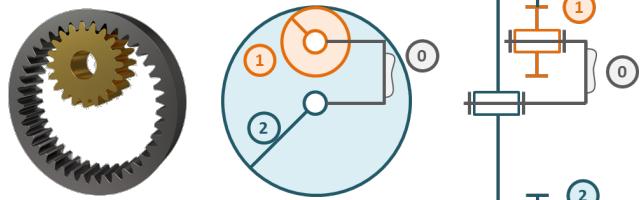


Engrenage – Contact intérieur

Résultat –

$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{Z_1}{Z_2} = +\frac{Z_1}{Z_2}$$

n caractérise le nombre de contacts extérieurs, ici $n = 0$.

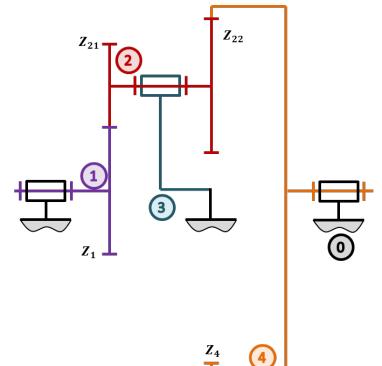


Train d'engrenages à axes fixes

Résultat –

$$\frac{\omega(4/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{\prod Z_{\text{menantes}}}{\prod Z_{\text{menées}}} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$$

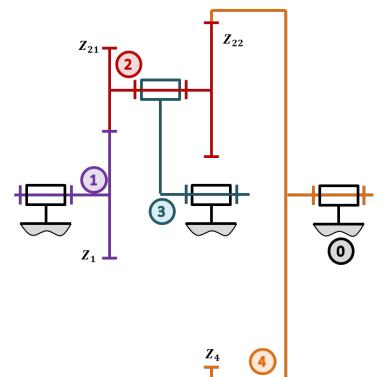
n caractérise le nombre de contacts extérieurs, ici $n = 1$.



Train d'engrenages épicycloïdal

Méthode –

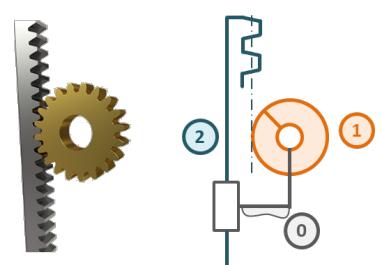
1. On identifie le porte-satellite, ici 3.
2. On bloque le porte-satellite. On peut alors se ramener au cas du train simple (voir ci-dessus).
3. On écrit le rapport de vitesse **par rapport au porte-satelllite 3** : $\frac{\omega(4/3)}{\omega(1/3)} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} = K$ (raison du train épicycloïdal).
4. En fonction de la roue bloquée, on réalise une décomposition des vitesses.
Par exemple, Si 4 est bloqué, on peut chercher à établir $\frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)}$.
5. On repart du point 3 et on a : $\frac{\omega(4/3)}{\omega(1/3)} = K \Leftrightarrow \frac{\omega(4/0) + \omega(0/3)}{\omega(1/0) + \omega(0/3)} = K \Leftrightarrow \frac{-\omega(3/0)}{\omega(1/0) - \omega(3/0)} = K \Leftrightarrow \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \frac{K}{K-1}$.



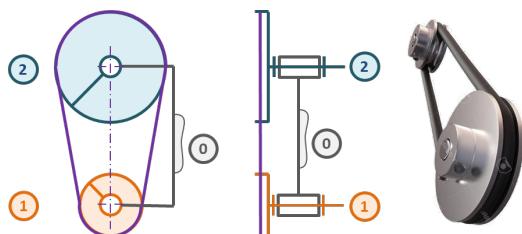
Système pignon – crémaillère

Résultat –

Soit R le rayon primitif du pignon. On a $V(2/0) = \pm R\omega(1/0)$.



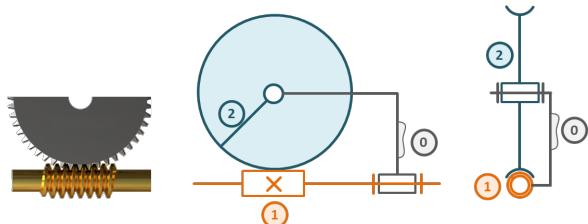
Transmission par poulie chaîne et par poulie courroie

**Résultat –**

$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Roue et vis sans fin**Résultat –**

Soit Z le nombre de dents de la roue et n le nombre de filets de la vis, on a $\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = \pm \frac{n}{Z}$.

**Système vis-écrou****Résultat –**

En notant v la vis et e l'écrou, soit p le pas de la vis (ici à droite) on a

$$v(v/e) = \omega(v/e) \frac{\text{pas}}{2\pi}$$

Système de transmission Rotation – Rotation

	Joint de Oldham	Joint de cardan	Joint tripode
Homocinétique	Oui	Non, Oui si doublé	Quasi
Défaut d'alignement axial	Oui	Non	Non
Défaut d'orientation entre les axes	Non	Oui	Oui
Utilisation	Maxpid :)	Colonne de direction (DAE), manivelle de volet roulant	Automobile



Application 1

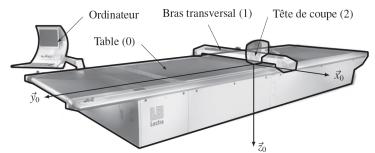
Tête de découpe de tissus – Sujet

CCP MP 2018

Présentation du système

Le système étudié dans ce sujet est une tête de coupe de tissus conçue et réalisée par la société française Lectra, leader mondial dans la découpe automatisée des tissus. Un système de découpe automatisé de tissus est composé :

- ▶ d'une table de découpe sur laquelle le tissus à découper (appelé matelas) est maintenu en position par aspiration ;
- ▶ d'un bras transversal qui se déplace en translation de direction \vec{y}_0 par rapport à la table ;
- ▶ d'une tête de coupe qui se déplace en translation de direction \vec{x}_0 par rapport au bras transversal ;
- ▶ d'un ordinateur qui pilote l'ensemble du système.



Objectif

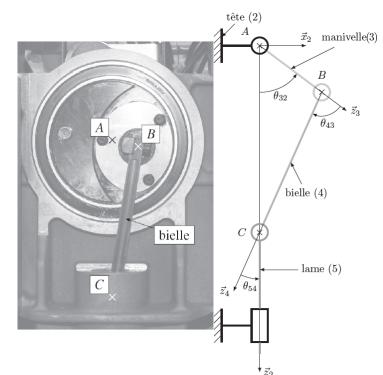
Déterminer la loi entrée/sortie de la chaîne cinématique de la tête de coupe et valider son comportement vis-à-vis des exigences :

- ▶ 1.2.2.3 : la lame doit se déplacer d'une amplitude minimale de 20 mm ;
- ▶ 1.2.2.4 : la vitesse de coupe maximale doit être de 4 m s^{-1} à $\pm 5\%$.

Modélisation du comportement de la tête de coupe

La découpe du tissu est réalisée par un mouvement de translation alternative d'une lame par rapport au matelas de tissus. Ce mouvement est obtenu par un système bielle-manivelle dont le schéma cinématique est donné à la figure suivante. Les mouvements de translation de la tête de coupe par rapport à la table impliquent que les bases $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, liées respectivement à la tête de coupe et à la table, sont identiques.

- ▶ On associe le repère $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ à la tête 2, le repère $\mathcal{R}_3 = (A; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ à la manivelle 3, le repère $\mathcal{R}_4 = (B; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ à la bielle 4 et le repère $\mathcal{R}_5 = (C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ à la lame 5.
- ▶ La manivelle 3 est en liaison pivot avec la tête 2, d'axe (A, \vec{y}_2) et d'angle $\theta_{32}(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$.



- La manivelle 3 est en liaison pivot avec la bielle 4, d'axe (B, \vec{y}_2) et d'angle $\theta_{43}(t) = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$.
- La bielle 4 est en liaison pivot avec la lame 5, d'axe (C, \vec{y}_0) et d'angle $\theta_{54}(t) = (\vec{x}_4, \vec{x}_2) = (\vec{z}_4, \vec{z}_2)$.
- La lame 5 est en liaison glissière avec la tête 2, de direction z_2 et de paramètre linéaire $\lambda(t)$.

On pose $\omega_{ij}(t) = \frac{d\theta_{ij}(t)}{dt} = \dot{\theta}_{ij}(t)$, $\overrightarrow{AB} = L_3 \vec{z}_3$ avec $L_3 = 12,5 \text{ mm}$, $\overrightarrow{BC} = L_4 \vec{z}_4$ avec $L_4 = 80 \text{ mm}$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \vec{z}_2$.

Question 1 Déterminer la relation entre les paramètres angulaires $\theta_{32}(t)$, $\theta_{43}(t)$ et $\theta_{54}(t)$.

Question 2 À l'aide d'une fermeture géométrique, déterminer la relation entre le paramètre $\lambda(t)$, l'angle $\theta_{32}(t)$ et les données géométriques du système.

Question 3 En déduire l'expression littérale de l'amplitude des oscillations de la lame, notée Δz . Faire l'application numérique et conclure sur le respect de l'exigence 1.2.2.3.

Question 4 Calculer le rapport $\left(\frac{L_4}{L_3}\right)^2$ et la comparer à la valeur 1. Montrer alors que la loi obtenue à la question 1 peut se mettre sous la forme $\lambda(t) \simeq L_3 \cos \theta_{32} + L_4$.

Afin de valider cette approximation, les deux fonctions mathématiques ont été tracées sur un tour de l'arbre moteur.

Question 5 Conclure sur l'adoption de la loi approximée dans la suite de l'étude.

Afin de valider le critère associé à l'exigence de vitesse de coupe, il est nécessaire de déterminer la loi en vitesse de la lame notée $\dot{\lambda}(t)$.

Question 6 Déterminer l'expression littérale de $\dot{\lambda}(t)$ à partir du modèle simplifié de $\lambda(t)$.

Cette loi en vitesse simplifiée a été tracée sur la figure suivante pour être comparée à la loi obtenue à partir du modèle établi en question 1.

Question 7 La simplification de la loi en vitesse permet-elle de valider l'exigence 1.2.2.4. ?

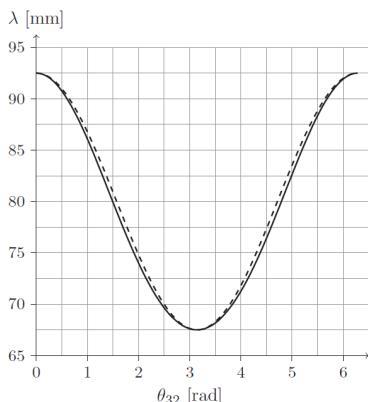


FIGURE 5.1 – Évolution théorique (—) et approximée (- -) du paramètre λ .

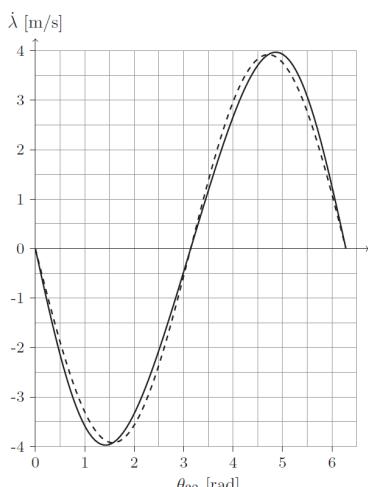


FIGURE 5.2 – Évolution théorique (—) et approximée (- -) de la vitesse $\dot{\lambda}$ pour $\dot{\theta}_{32} = 3000 \text{ tr min}^{-1}$.



Application 2

Centrifugeuse humaine – Sujet

Afin d'analyser les effets de l'accélération sur le corps humaine, le CNRS / MEDES a développé une centrifugeuse humaine. On donne ci-dessous la modélisation cinématique de la centrifugeuse.

Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci-contre.

Les paramètres constants du système sont les suivants :

- $\overrightarrow{O_0 O_1} = a \vec{i}_1$;
- $\overrightarrow{O_1 G} = b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$.

Trajectographie

Question 1 Donner la trajectoire du point G dans le repère \mathcal{R}_0 .

Cinématique

Question 2 Calculer $\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)}$.

Accélération

Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(G, S_2/S_0)}$.

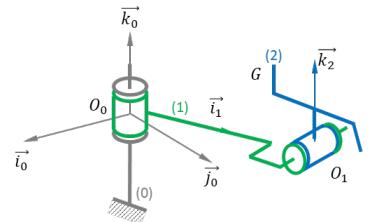


FIGURE 5.3 – Modélisation cinématique

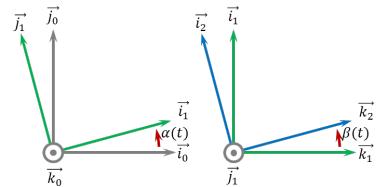


FIGURE 5.4 – Paramétrage



Application 3

Robot de peinture – Sujet

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

Robot de peinture

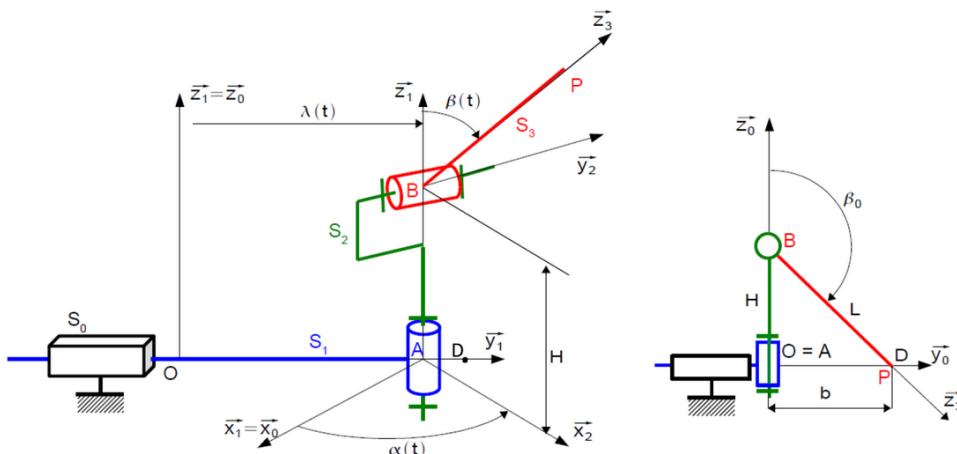
On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot, pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.



Exigences techniques	Critère	Niveau
1.7	Vitesse de déplacement relatif	Vitesse constante



La modélisation cinématique du robot est donnée sur la figure suivante :



Le chariot S_1 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est en mouvement de translation de direction \vec{y}_0 par rapport au bâti S_0 de repère $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Le corps S_2 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{z}_0) avec le chariot S_1 .

Le bras S_3 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{y}_2) avec le corps S_2 .

Question 1 Construire les figures planes de repérage/paramétrage.

Question 2 Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$, $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)}$.

Question 5 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} \cdot \vec{x}_0$.

Question 6 Calculer les produits vectoriels et scalaires suivants : $\vec{z}_3 \wedge \vec{x}_2$ et $\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_2$, $\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_1$ et $\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1$.

On a $\overrightarrow{OD} = b\vec{y}_0$ avec $b = \sqrt{L^2 - H^2}$. On désire que P décrive la droite (D, \vec{x}_0) à vitesse constante V , conformément au cahier des charges.

Question 7 Représenter sur une figure dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, puis sur une figure dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, les positions des points O, D, A, B et P du robot lorsque celui-ci est en position extrême (A est en D).



Question 8 Traduire, à l'aide de l'expression de $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ le fait que P se déplace à la vitesse V selon \vec{x}_0 . En déduire $\dot{\beta}$.

Question 9 Exprimer alors $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de L, V, α et β_0 .

Question 10 A l'aide de la figure précédente, exprimer β_0 en fonction de b et L .

Question 11 Exprimer $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de V, b et α .

Application 4

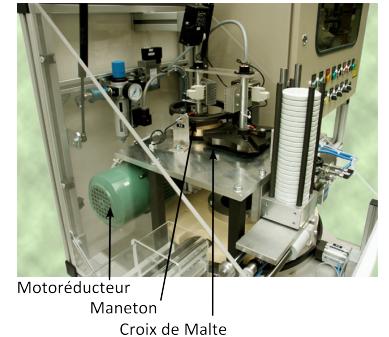
Capsuleuse de bocaux – Galet – Sujet

Le conditionnement de nombreux produits alimentaires est réalisé dans des bocaux en verre fermés par des capsules vissées. La société RAVOUX, spécialisée dans le conditionnement, a créé ce prototype afin d'optimiser ses machines de production. Elle est donc équipée de nombreux capteurs permettant, via un ordinateur, d'optimiser les paramètres de production tels que qualité totale, production maximale, ...

Le système de laboratoire proposé s'insère dans une chaîne de conditionnement de produits alimentaires, entre l'unité de remplissage des bocaux et le poste d'étiquetage. Sa fonction principale est la «fermeture étanche de bocaux préalablement remplis de produits alimentaires»

On s'intéresse ici au système de croix de Malte. Il permet d'obtenir une rotation discontinue à partir d'un mouvement de rotation continue. Ainsi, pendant que la croix de Malte ne tourne pas, le système peut agir sur la matière d'œuvre (flacon).

Lors de la rotation de la croix de Malte, la capsuleuse déplace deux flacons. Afin d'accroître la productivité, il faut diminuer la durée de cette phase. Cependant, si la croix de Malte tourne trop vite, les flacons basculent ce qui entraîne un mauvais fonctionnement du système. Ainsi, on désire que la **vitesse de la croix soit inférieure à 50 tours/minute.**

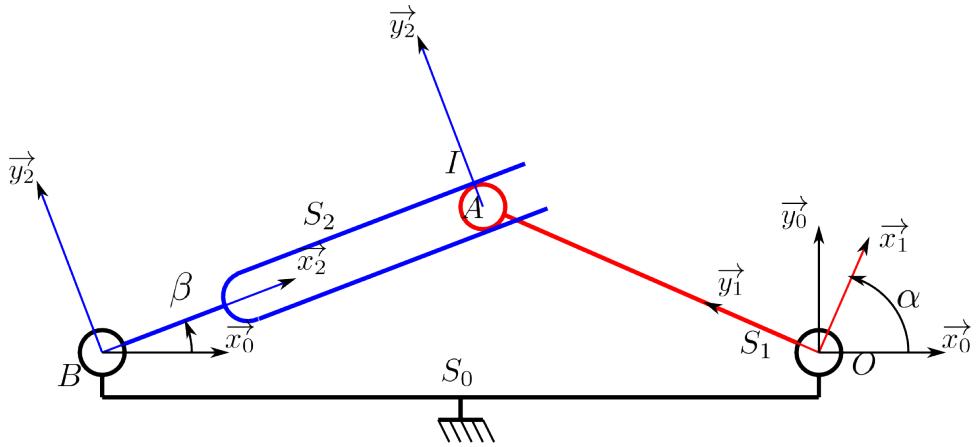


Modélisation sans galet

Afin de modéliser le système à croix de malte, on propose le schéma cinématique ci-dessous.

On note :

- ▶ $\mathcal{R} = \left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$ le repère lié au bâti S_0 . On note $\overrightarrow{OB} = -L\vec{x}_0$ avec $L = 145$ mm;
- ▶ $\mathcal{R}_1 = \left(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \right)$ le repère lié à l'arbre S_1 . On pose $\overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1$ avec $R = 141$ mm et $\alpha = \left(\vec{x}_0, \vec{x}_1 \right)$. L'arbre S_1 est lié au motoréducteur de la capsuleuse. On a : $\dot{\alpha} = 10$ tr/min;
- ▶ $\mathcal{R}_2 = \left(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 \right)$ le repère lié à l'arbre S_2 . On pose $\overrightarrow{BA} = \lambda(t)\vec{x}_2$, $\overrightarrow{AI} = r\vec{y}_2$ et $\beta = \left(\vec{x}_0, \vec{x}_2 \right)$;



Question 1 Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

Question 2 Établir la loi entrée/sortie du système.

Question 3 Donner une méthode permettant de valider la cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

Question 4 Donner l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$.

Question 5 Donner l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$.

Question 6 En déduire l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$ dans la base \mathcal{R}_2 . On donne $\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta)\vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta)\vec{y}_2$.

Question 7 D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide S_1 par rapport à S_2 ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.

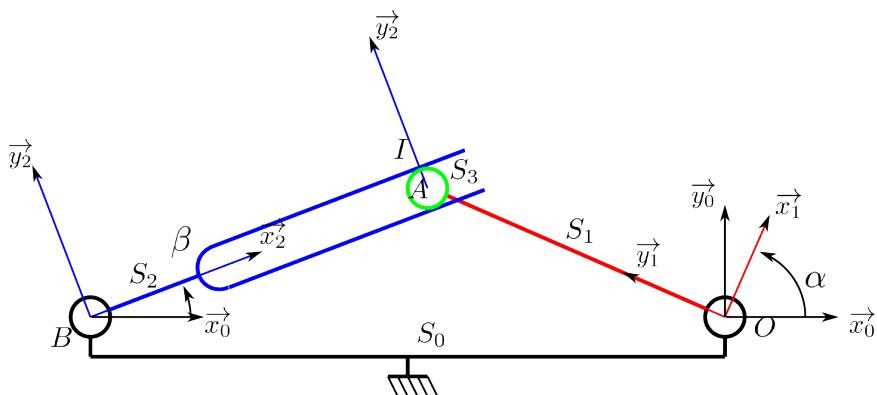
Question 8 $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} \cdot \vec{x}_2$ est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse? Si oui, comment? Si non, proposez une modification du système permettant la prise en compte de ce problème.

Modélisation avec galet

On considère maintenant l'existence d'un galet S_3 en bout de l'arbre S_1 . On fait l'hypothèse que le galet roule sans glisser dans le S_2 . S_3 et S_1 sont en liaison pivot d'axe \vec{z}_0 et de centre A .



Le galet a un diamètre extérieur de 16 mm. D'après la documentation constructeur, la vitesse de rotation du galet ne doit pas dépasser les 5000 tr/min.



Question 9 Quelle est la modification sur le paramétrage du système ?

Question 10 Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement sans glissement** ?

Question 11 Calculer la vitesse de rotation du galet $\dot{\gamma}$ en commençant par exprimer $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$? Indice : décomposer $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$ en fonction des mouvements connus.

Question 12 Valider le choix du galet.

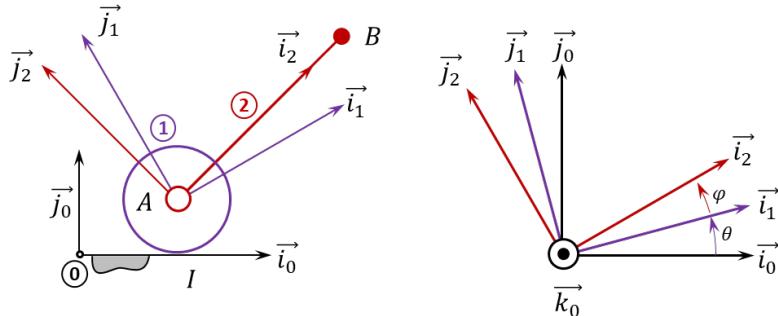


Applications au Roulement sans glissement

Mouvement RR – RSG ★★

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\vec{IA} = R\vec{j}_0$ et $\vec{AB} = L\vec{i}_2$. De plus $R = 15 \text{ mm}$. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I .



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B .

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$.

Éléments de correction A Vérifier...

1. $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = L\dot{\phi}(t)\vec{j}_2 + \dot{\theta}(t) \left(L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0 \right)$.
2. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{k}_0 \\ L\dot{\phi}(t)\vec{j}_2 + \dot{\theta}(t) \left(L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0 \right) \end{array} \right\}_B$.
3. $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} = L\ddot{\phi}(t)\vec{j}_2 - L\dot{\phi}(t)(\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{i}_2 + \ddot{\theta}(t) \left(L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0 \right) - L\dot{\theta}(t)(\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{i}_2$.

Corrigé voir 12.