



11 Résolution d'un problème de dynamique

11.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer

1. Faire un graphe d'analyse (ou de structure : liaisons et actions mécaniques extérieures).
2. Faire un bilan des actions mécaniques extérieures et écrire le torseur associé.
3. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
4. Simplifier les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons dans le cas d'un problème plan.
5. Faire des produits vectoriels le plus vite possible.
6. Calculer un torseur dynamique.

11.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer . . .	1
11.2 Les types de problèmes .	1
11.3 Stratégie d'isolement . .	1
11.4 Loi de mouvement	5

C1-05

C2-08

11.2 Les types de problèmes

Le principe fondamental de la dynamique a pour objectif de :

1. **déterminer une loi de mouvement;**
2. **déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.**

Le cas 1 est le plus souvent rencontré. L'objectif est de trouver une équation différentielle **indépendamment des actions dans les liaisons** et liant positions, vitesses, accélérations, dimensions et propriétés massiques. Cette loi permet généralement de dimensionner les actionneurs d'un système (couple moteur ou effort à fournir par un actionneur linéaire – vérin par exemple –).

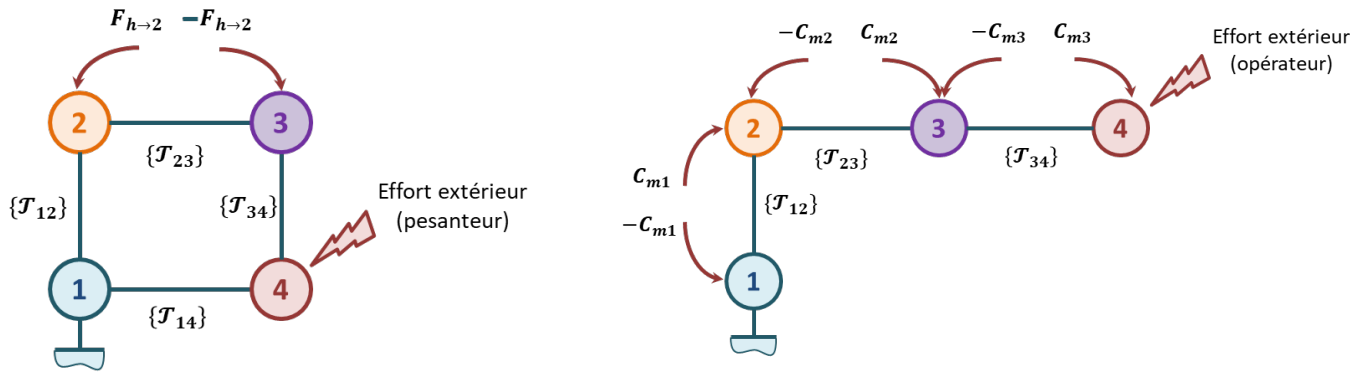
Dans le cas 2, on peut essayer de minimiser le nombre d'équations à écrire. C'est cette stratégie que nous allons présenter.

Dans le cas 2, il faut isoler chacune des pièces et réaliser le PFD.

11.3 Stratégie d'isolement

11.3.1 Graphe d'analyse, ou de structure

On rencontre principalement deux types de structures : des chaînes fermées, ou des chaînes ouvertes.



Remarques :

- Entre les pièces (ou les groupes de pièces), on matérialise les liaisons (dont vous connaissez super bien les torseurs).
- Entre certaines pièces (ou groupes de pièces), il peut exister des actions mécaniques extérieures qui agissent « en positif » sur une des pièces et « en négatif » sur l'autre. **C'est par exemple le cas des moteurs et des vérins.** Il faut bien préciser que l'action mécanique agit sur les deux pièces.
- Les actions strictement extérieures (comme la pesanteur) ne sont pas en interactions entre deux pièces.

11.3.2 Isoler les solides soumis à 2 glisseurs

On commence toujours, toujours, toujours, toujours, toujours par isoler les ensembles soumis à 2 glisseurs... Mais cela vous le saviez :). Cependant, en dynamique ce cas est rare. On peut le rencontrer, dans le cas des problèmes plans, lorsque la masse d'un solide est négligée.

11.3.3 Cas des chaînes ouvertes

C'est le cas le plus rencontré en dynamique.

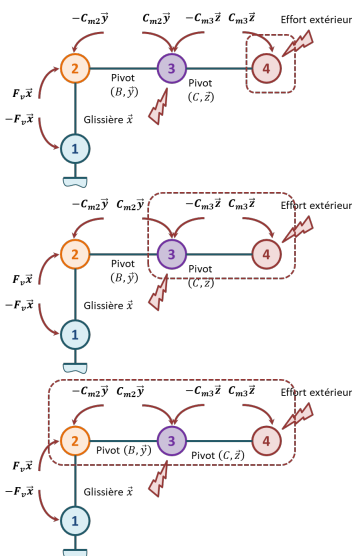
On commence par isoler le bout de chaîne. Puis on réalise le théorème correspondant à la mobilité de cet ensemble et on poursuit le raisonnement.

Ainsi, pour la figure ci-contre :

1. pour obtenir C_{m3} , on isole 4 et on fait un théorème du moment dynamique en C en projection sur \vec{z} ;
2. pour obtenir C_{m2} , on isole {4+3} et on fait un théorème du moment dynamique en B en projection sur \vec{y} ;
3. pour obtenir F_v , on isole {4+3+2} et on fait un théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x} .

11.3.4 Cas des chaînes fermées

Ce cas n'est pas le plus fréquent. Lorsqu'on désire obtenir la loi de mouvement d'une chaîne fermée, il est généralement plus rapide d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique que nous aborderons plus tard.

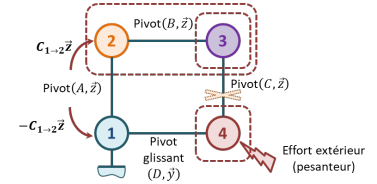


Pour les chaînes fermées, on va réaliser une coupure « fictive » dans le système et reprendre la méthode précédente.

L'objectif est que toutes les équations dynamiques fassent apparaître les inconnues statiques d'une seule et même liaison. Cela permettra finalement de disposer d'assez d'équations pour supprimer ces inconnues de liaisons.

Pour l'exemple ci-contre :

1. on isole 4 et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{y} ;
2. on isole 3 et on réalise un théorème du moment dynamique en B en projection sur \vec{z} ;
3. on isole {2+3} et on réalise un théorème du moment dynamique en A en projection sur \vec{z} .



11.3.5 Cas des véhicules

Dans les cas des véhicules, l'application du PFD permet de déterminer

- les conditions de dérapages en ligne droite ou en virage ;
- les conditions de basculent en ligne droite ou en virage.

Véhicule qui accélère, sans glissement des roues

La figure 11.1 permet de modéliser (partiellement) les actions mécaniques sur un véhicule en ligne droite. En faisant les hypothèses suivantes :

- véhicule qui accélère et roues avant motrices,
- problème plan ;
- masse des roues négligeables ;

il en résulte que la roue arrière (dont l'inertie est nulle si la masse est négligeable) est soumise à deux glisseurs (pivot dans le plan avec le châssis et contact ponctuel avec le sol). En conséquence, il n'y a pas d'effort tangentiel dans cette liaison.

De plus en phase d'accélération et d'adhérence de la roue avant, l'effort tangentiel de la roue sur le sol est vers l'avant.

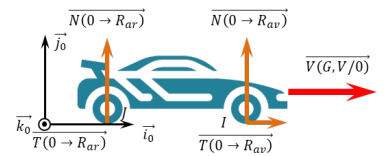


FIGURE 11.1 – Véhicule en mouvement

Freinage, roues bloquées

On se met dans le cas d'un freinage sur toutes les roues et ces roues se bloquent. Le véhicule glisse et l'effort tangentiel s'oppose au mouvement. On est dans le cas d'un glissement, donc on est sur le cône de frottement.

La loi de mouvement peut s'obtenir en isolant tout le véhicule et en réalisant un **théorème de la résultante dynamique** suivant \vec{i}_0 . Le TRD sur \vec{j}_0 , le TMD (par exemple en I) et les lois de Coulomb permettent de supprimer les inconnues de liaison.

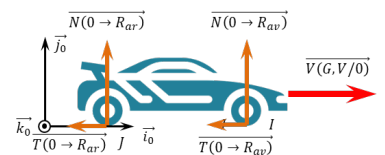


FIGURE 11.2 – Freinage et glissade ...

Dérapage en rond point

Si on dérape (figure 11.3), c'est nécessairement suivant la direction \vec{k}_1 . La loi de mouvement, ou les conditions de dérapage, peuvent s'obtenir en isolant tout le véhicule et en réalisant un **théorème de la résultante dynamique** suivant \vec{i}_0 . La tendance au dérapement étant vers l'extérieur du virage, les efforts tangentiels sont nécessairement orientés vers l'intérieur du virage.

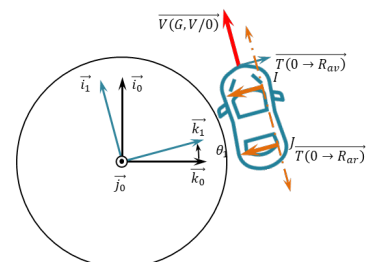


FIGURE 11.3 – Dérapage

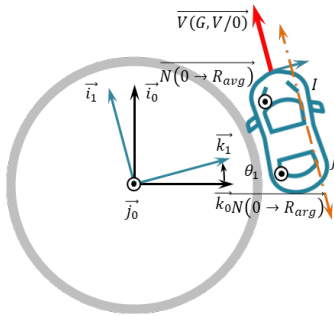


FIGURE 11.4 – Tonneau

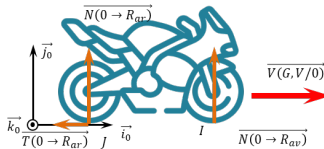


FIGURE 11.5 – Wheeling

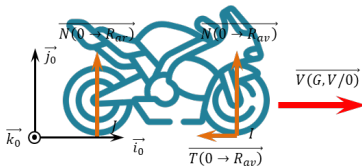


FIGURE 11.6 – Soleil

Tonneau en rond point

Si la voiture part en tonneau (figure ?? c'est nécessairement en pivotant autour de l'axe \overrightarrow{IJ}). Pour déterminer les conditions de tonneau, il faudra donc d'une part réaliser un **théorème du moment dynamique** en I ou en J en projection suivant la direction \overrightarrow{IJ} (c'est-à-dire vecteur \vec{i}_1). On cherchera alors la condition où les efforts normaux sur les roues intérieures seront nulles.

Wheeling en moto

On souhaite savoir dans quelles conditions il est possible de faire un wheeling en moto, c'est à dire pour quelle accélération, la roue avant va se décoller du sol. Ce mouvement correspond à une rotation de la moto autour de la roue arrière.

Pour traduire ce mouvement, on isole l'ensemble de la moto et on réalise un **théorème du moment dynamique** en J en on détermine à quelle condition l'effort normal sur la roue avant est nul.

Soleil en moto

On souhaite savoir dans quelles conditions il est possible de décoller la roue arrière, c'est à dire pour quelle décelération, la roue arrière va se décoller du sol lors d'un freinage sur la roue avant uniquement (roue avant bloquée). Ce mouvement correspond à une rotation de la moto autour de la roue avant.

Pour traduire ce mouvement, on isole l'ensemble de la moto et on réalise un **théorème du moment dynamique** en I en on détermine à quelle condition l'effort normal sur la roue arrière est nul.

11.3.6 Il y a plus qu'à ...

Produit mixte

Petite remarque pour finir : le produit mixte. Lorsqu'on applique un théorème suivant une direction, le produit mixte peut être un bon outil : $\overrightarrow{\mathcal{M}}(B, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z} = (\overrightarrow{\mathcal{M}}(A, 1 \rightarrow 2) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}(1 \rightarrow 2)) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z} + (\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}(1 \rightarrow 2)) \cdot \vec{z} \dots$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{z} = (\vec{v} \wedge \vec{z}) \cdot \vec{u} = (\vec{z} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$.

Projection de la dérivée et dérivée de la projection...

On pourra utiliser judicieusement le résultat suivant :

$$\frac{d}{dt} [\vec{V}(t)]_{\mathcal{B}_0} \cdot \vec{u}(t) = \frac{d}{dt} [\vec{V}(t) \cdot \vec{u}(t)] - \vec{V}(t) \cdot \frac{d}{dt} [\vec{u}(t)]_{\mathcal{B}_0}$$

On reconnaîtra que $(uv)' = u'v + uv'$ et donc $u'v = (uv)' - uv'$.

11.4 Loi de mouvement

En règle générale, les lois de mouvement permettent d'exprimer le couple moteur ou l'effort à fournir pour un vérin pour réaliser un déplacement. Ces lois sont des équations différentielles d'ordre 2. En général, il n'est pas nécessaire de résoudre ces équations différentielles car le mouvement est forcé par la commande.

Une des lois usuellement suivie par un actionneur pour aller d'un point à un autre est une loi de mouvement de vitesse en trapèze. Ce mouvement peut être décomposé en 3 phases :

- ▶ phase 1 mouvement uniformément décéléré. L'accélération est donc constante, la vitesse croît de façon linéaire et la position de façon parabolique ;
- ▶ phase 2 : mouvement uniforme. L'accélération est nulle, la vitesse est constante et la position évolue linéairement ;
- ▶ phase 3 : mouvement uniformément décéléré. L'accélération est constante est négative, la vitesse décroît linéairement et la position évolue de façon parabolique.

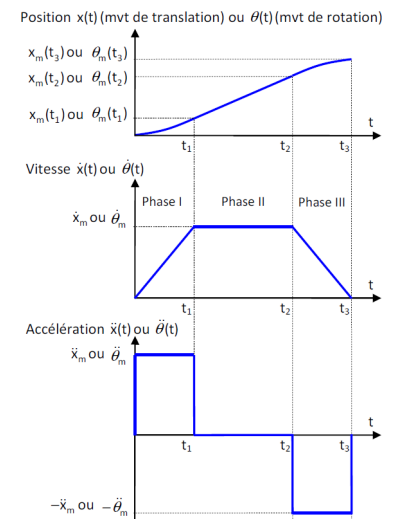
Dans le cas général, il sera souvent inutile d'écrire les équations horaires de chacune des phases. En effet, les questions liées à ces lois de mouvements sont généralement :

- ▶ d'identifier le « pire des cas » en terme de vitesse/accélération ;
- ▶ de déterminer les temps de une ou plusieurs des phases en fonction de la distance à parcourir, la vitesse maximale, l'accélération accélérations maximale ;
- ▶ de déterminer la hauteur du palier de vitesse ;
- ▶ de déterminer la distance parcourue.

Résultat –

Dans les 3 derniers points, il est souvent suffisant de remarquer en utilisant les courbes que :

- ▶ $t_1 = \frac{\dot{x}_m}{\ddot{x}_m}$;
- ▶ en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors de l'accélération est donnée par $\frac{1}{2}t_1\dot{x}_m$;
- ▶ en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors des 3 phases est donnée par $2 \cdot \frac{1}{2}t_1\dot{x}_m + (t_2 - t_1)\dot{x}_m$.



	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Équation de position	$x(t) = \frac{1}{2}\ddot{x}_m t^2$	$x(t) = \dot{x}_m(t)(t - t_1) + x_m(t_1)$	$x(t) = -\frac{1}{2}\ddot{x}_m(t - t_2)^2 + \dot{x}_m(t)(t - t_2) + x_m(t_2)$
Équation de vitesse	$\dot{x}(t) = \ddot{x}_m t$	$\dot{x}(t) = \dot{x}_m$	$\dot{x}(t) = -\ddot{x}_m(t - t_2) + \dot{x}_m$
Équation d'accélération	$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_m$	$\ddot{x}(t) = 0$	$\ddot{x}(t) = -\ddot{x}_m$

05 DYN

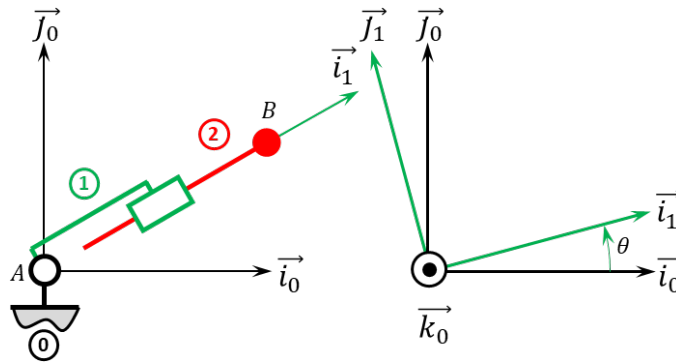
Mouvement RT ★

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\vec{i}_1$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de 1 et $\overrightarrow{AG_1} = L_1\vec{i}_1$, on note m_1 la masse de 1 ;
- $G_2 = B$ désigne le centre d'inertie de 2, on note m_2 la masse de 2.

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un vérin électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2

L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g\vec{j}_0$.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à \mathcal{R}_0 .

Corrigé voir 11.4.

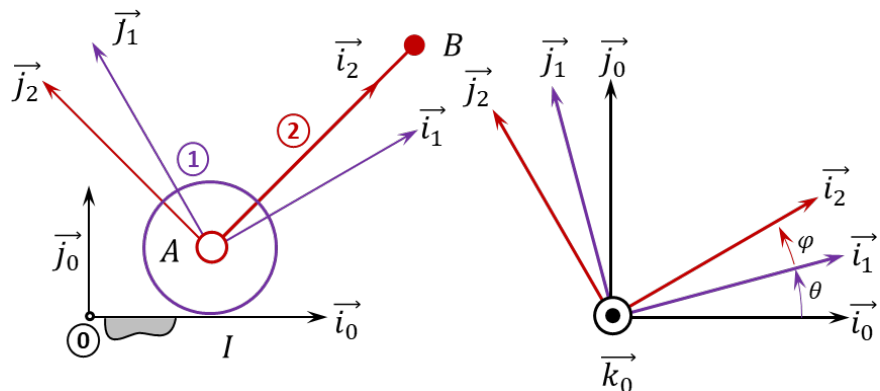
05 DYN

Mouvement RR – RSG ★★

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{IA} = R\vec{j}_0$ et $\overrightarrow{AB} = L\vec{i}_2$. De plus $R = 15 \text{ mm}$. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de 1 tel que $\overrightarrow{AG_1} = -\ell\vec{i}_1$, on note m_1 la masse de 1 ;
- $G_2 = B$ désigne le centre d'inertie de 2, on note m_2 la masse de 2.

Un moteur exerce un couple entre les pièces 1 et 2.



Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à \mathcal{R}_0 .

Corrigé voir 2.

Application 1

Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant ★★ – Sujet

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

05 DYN

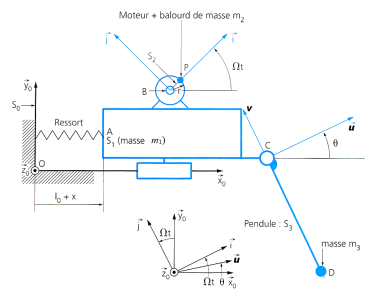
Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide S_1 , de masse m_1 en liaison glissière parfaite avec un support S_0 , fixe par rapport à un repère \mathcal{R}_0 supposé galiléen.

Le solide S_1 est rappelé par un ressort de longueur libre l_0 et de raideur k . Une masse ponctuelle m_2 excentrée, placée en P , tourne sur un rayon r et est entraînée à vitesse constante Ω . Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur S_2 .

Un pendule simple de longueur L , porte à son extrémité D une masse concentrée m_3 , l'ensemble constitue le solide S_3 , en liaison pivot parfaite d'axe (C, \vec{z}_0) avec S_1 .

Les masses autres que m_1 , m_2 et m_3 sont négligées.



Objectif

Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse du système.

Question 2 Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x , θ et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles.

Question 3 Déterminer ces deux équations. On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$ en supposant que x , θ , \dot{x} , $\dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

Question 4 Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme $x(t) = A \cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$.

Question 5 Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B .

Question 6 Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t) = 0$ en régime forcé.

Éléments de correction

1. $(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} \cos \theta - m_3 L \dot{\theta}^2 \sin \theta = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$ et $\ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$.
2. $(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$ et $\ddot{x} + L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$.
3. $A = \frac{m_2 r \Omega^2 (-L \Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3) \Omega^2 + k] (-L \Omega^2 + g) - m_3 L \Omega^4}$ et $B = \frac{m_2 r \Omega^2}{m_2 r \Omega^2}$.
4. $L = \frac{g}{\Omega^2}$.



Application 2

Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique ★★ – Sujet

Présentation

La géotechnique correspond aux activités liées aux applications de la mécanique des sols, de la mécanique des roches et de la géologie. À partir d'essais en laboratoire et in situ, la géotechnique fournit aux constructeurs de bâtiments et d'ouvrages les données indispensables pour le génie civil en ce qui concerne leur stabilité en fonction des sols. Aujourd'hui la modélisation physique d'ouvrage géotechnique en centrifugeuse est une approche expérimentale répandue. La centrifugation des modèles réduits permet de reproduire des états de contraintes dans les matériaux semblables à ceux régnant dans l'ouvrage grandeur nature. Le laboratoire central des Ponts et Chaussées (LCPC) de Nantes possède une centrifugeuse géotechnique dont les principales caractéristiques sont données ci-après :

- ▶ distance de l'axe à la plate-forme nacelle : 5,5 m ;
- ▶ longueur du bras : 6,8 m ;
- ▶ accélération maximale : 200 g ;
- ▶ temps de montée à 200 g : 360 s.

On propose le modèle cinématique ci-contre.

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti 0 de la centrifugeuse. L'axe (O, \vec{z}) est dirigé suivant la verticale descendante. On désigne par $\vec{g} = g \vec{z}$ le vecteur accélération de la pesanteur.

Le bras 1 est en liaison pivot sans frottement d'axe (O, \vec{z}) avec le bâti 0. Soit $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié au bras 1. On pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$, avec $\alpha = \omega t$, où ω est une constante positive.

La nacelle 2 est en liaison pivot sans frottement d'axe (A, \vec{y}_1) avec le bras 1, telle que $\vec{OA} = a \vec{x}_1$ (a est une constante positive). Soit $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ un repère lié à la nacelle 2. On pose $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$.

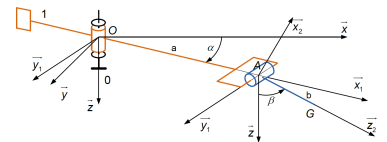
On note :

- ▶ bras 1 : moment d'inertie I par rapport à l'axe (O, \vec{z}) ;
- ▶ nacelle 2 : centre d'inertie G , tel que $\vec{AG} = b \vec{z}_2$ (b est une constante positive),

$$\text{masse } m, \text{ matrice d'inertie } I_A(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}.$$

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie.

05 DYN



Un moteur, fixé sur la bâti 0, exerce sur le bras 1 une action mécanique représentée par le couple $C_m \vec{z}$. Le bras 1 tourne à la vitesse constante ω par rapport au bâti 0.

Objectif

Déterminer les équations du mouvement de la centrifugeuse, ainsi que le couple moteur à fournir au cours du mouvement.

Question 1 Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

Question 2 Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

On suppose que la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, et que $m_{ba} \gg A \simeq C$.

Question 3 Déterminer les expressions de l'angle β et du couple moteur C_m ?



Application 3

Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ – Sujet

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

05 DYN

Présentation

Le support de l'étude est le véhicule auto balancé Segway®. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, mais plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La première génération de Segway avait un guidon fixe et une poignée de direction). Cette technologie provoquait un effet de roulis qui pouvait conduire à un renversement. Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier le dérapage et le renversement d'un Segway de première génération.

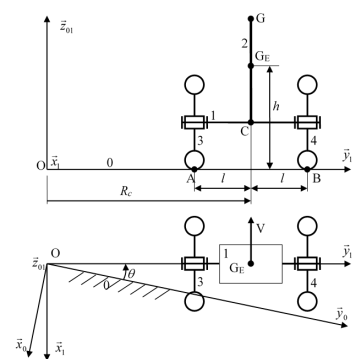
La seconde génération de Segway a vu apparaître une technologie appelée LeanSteer avec guidon inclinable qui permet de faire tourner le Segway lorsque l'utilisateur penche son corps sur le côté (non étudié dans cet exercice).

On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- la route (0) est munie du repère $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Ce référentiel associé est supposé galiléen.
- la plate-forme (1) a pour centre de gravité C. Le conducteur (2) a pour centre de gravité G. Les roues 3 et 4, de masse et inertie négligeable, sont liées à 1 par des liaisons pivots d'axe (C, \vec{y}_1) . L'ensemble $E = 1 + 2$ forme le système matériel indéformable E de centre de gravité G_E et de masse m_E . Il est animée d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O. Le rayon de courbure de la trajectoire du point G_E dans \mathcal{R}_0 est R_C . Le repère lié à 1 est \mathcal{R}_1 tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0 = \vec{z}_{01}$ et on note $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

On donne $\overrightarrow{OG_E} = R_C \vec{y}_1 + h \vec{z}_{01}$. L'opérateur d'inertie de E en G_E dans $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\text{est : } I_{G_E}(E) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}.$$



Hypothèse

- Les contacts entre les roues 3 et 4 et la route 0 ont lieu en A et B définis par $\overrightarrow{G_E A} = -l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$ et $\overrightarrow{G_E B} = l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$, l désignant la demi voie du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres A et

B et de normale \vec{z}_{01} . Le contact dans ces liaisons se fait avec un coefficient de frottement noté f (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route 0 sur les roues 3 et 4 sont modélisées par des glisseurs en A et B de résultantes $\vec{R}(0 \rightarrow 3) = -T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1$ et $\vec{R}(0 \rightarrow 4) = -T_B \vec{y}_1 + N_B \vec{z}_1$.

- On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C , ainsi que la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 sont constants.
- L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{z}_0$. Accélération de la pesanteur, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$.
- On néglige la masse et les l'inertie des roues.

On donne :

- coefficient d'adhérence pneu-route : $f = 1$;
- masse de $E = 1 + 2$: $m_E = 134 \text{ kg}$;
- demi largeur des voies : $l = 35 \text{ cm}$, $h = 86 \text{ cm}$.

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.1» Glissement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m	Interdit

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\vec{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire $V_L = \|\vec{V}(G_E/\mathcal{R}_0)\|$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer l'accélération, notée $\vec{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C .

Question 3 Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A , T_B , N_A , N_B et f traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant $T_A + T_B$ à f et $N_A + N_B$.

Question 4 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{z}_0 .

Question 5 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{y}_1 . En déduire une inéquation donnant la vitesse limite V_L de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

Question 6 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.2» Renversement du véhicule pour une vitesse de 20 km h ⁻¹ dans un virage de rayon de courbure 10 m.	Interdit

Hypothèse

On suppose qu'il y a adhérence des roues en A et B.

Question 7 Calculer le torseur dynamique du système matériel E en G_E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Exprimer ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Question 8 Calculer $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ le moment dynamique au point B de l'ensemble (E) dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en projection sur \vec{x}_1 .

Question 9 En appliquant le théorème du moment dynamique au point B à l'ensemble E et les roues dans leur mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 , en projection sur \vec{x}_1 , écrire l'équation scalaire qui donne N_A en fonction de $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ et des données du problème.

Question 10 Écrire la condition de non renversement du véhicule.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 11 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.



Éléments de correction

- $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)} = -R_C \dot{\theta} \vec{x}_1$ et $V_L = R_C \dot{\theta}$.
- $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)} = -R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$.
- $T_A + T_B \leq f(N_A + N_B)$
- $N_A + N_B - m_E g = 0$.
- $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$.
- 36 km h⁻¹.
- $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \\ -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_E}$.
- $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1 = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.
- $N_A = \frac{I m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}$.
- $N_A \geq 0$.
- $V_L \leq 6,38 \text{ m s}^{-1} = 22,9 \text{ km h}^{-1}$.