

21 Rappels de Statique

21.1 Modélisation locale des actions mécaniques

Définition – Action mécanique de contact volumique

Localement, les actions mécaniques volumiques peuvent être modélisées par le

torseur suivant : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iiint_{\mathcal{V}} f(M) \overrightarrow{u(M)} d\mathcal{V} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, 1 \rightarrow 2)} = \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{PM} \wedge d\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M$.

La densité volumique d'effort s'exprime en $[\text{Nm}^{-3}]$.

Définition – Action mécanique de contact surfacique

Localement, les actions mécaniques dans un contact surfacique peuvent être modélisées par le torseur suivant : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iint_{\mathcal{S}} f(M) \overrightarrow{u(M)} d\mathcal{S} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, 1 \rightarrow 2)} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{PM} \wedge d\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M$$

La densité surfacique d'effort peut alors se décomposer sur le vecteur normal au contact et sur un vecteur appartenant au plan tangent au contact. On a alors $f(M) \overrightarrow{u(M)} = p_{12}(M) \overrightarrow{n_{12}} + \overrightarrow{\tau_{12}}(M)$. On note ;

- $p_{12}(M)$ pression de contact au point M (en $[\text{Nm}^{-2}]$);
- $\overrightarrow{\tau_{12}}(M)$: la projection tangentielle de la densité surfacique (norme en $[\text{Nm}^{-2}]$).

STAT

21.2 Modélisation globale des actions mécaniques

Définition – Torseur statique ou torseur sthénique ou torseur d'efforts

L'action mécanique d'un système matériel S_1 (ou d'un phénomène physique) sur un système matériel S_2 est représentable par un torseur au point M :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M, S_2 \rightarrow S_1)} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{M, \mathcal{R}}$$

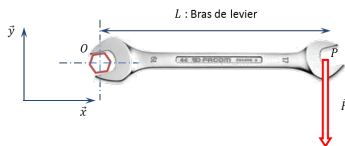
Remarque

La norme de vecteur $\overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$ est en Newton (N). La norme du vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}(M, S_2 \rightarrow S_1)}$ est en Newton – mètre (N · m).

Propriété – Varignon

Le torseur statique étant un torseur, on a donc :

$$\forall B, \overrightarrow{\mathcal{M}(B, S_2 \rightarrow S_1)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, S_2 \rightarrow S_1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)}$$



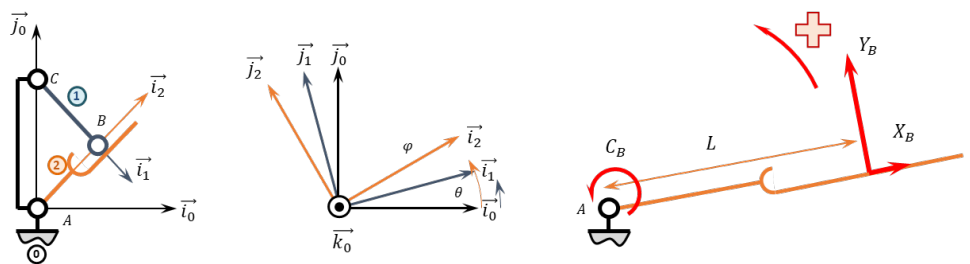
Remarque – Moment d'une force – Interprétation graphique

Prenons le cas du serrage d'un écrou avec un effort $\vec{F} = -F\vec{y}$:

Dans l'hypothèse où l'effort \vec{F} s'appliquerait au point O, il n'y aurait donc pas de serrage de l'écrou. Le moment (ou couple de serrage) serait donc nul : $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Clef} \rightarrow \text{Ecrou})} = \vec{0}$.

Si l'effort s'applique en P : $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Clef} \rightarrow \text{Ecrou})} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = L\vec{x} \wedge -F\vec{y} = -LF\vec{z}$.
Méthode pour déterminer le moment dans un problème plan :

- norme du vecteur : effort fois bras de levier (on peut éventuellement décomposer l'effort dans le repère de travail) ;
- perpendiculaire au plan ;
- sens : on regarde si, par rapport au point où on cherche le moment, l'effort fait tourner la pièce dans le sens direct ou indirect.



Application du TMS en A : $C_B + Y_B L + 0 = 0$.

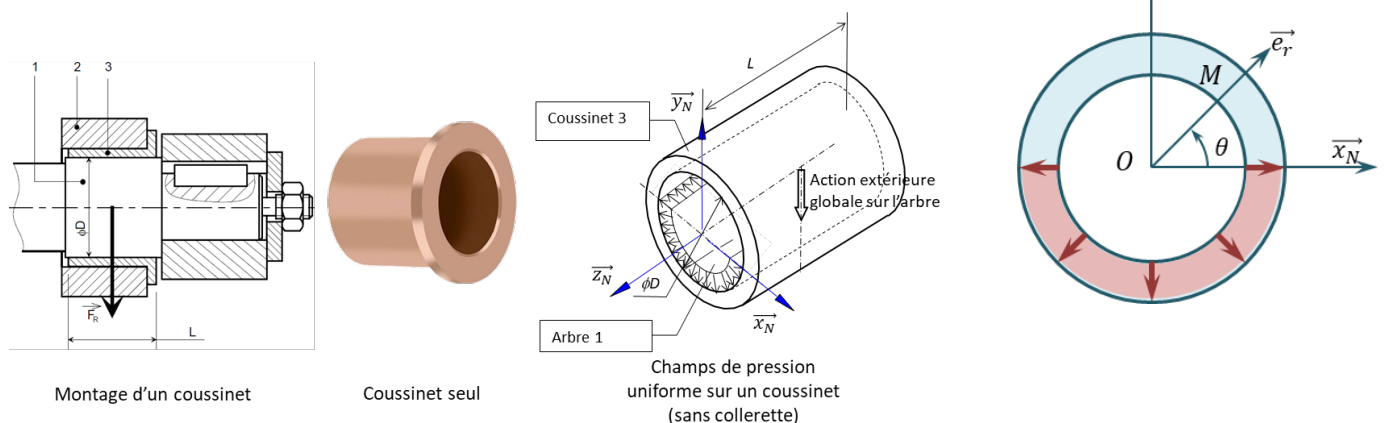
Application 1

Modélisation des actions mécaniques – Sujet

Torseur des actions mécaniques transmissibles dans un coussinet

02 STAT

Un coussinet (ou bague) est un élément technologique permettant de réaliser des liaisons pivot. Suivant les cas d'utilisation d'un système, un chargement sur l'arbre est transmis au coussinet.



On donne le modèle suivant où le champ de pression de l'arbre sur le coussinet est uniforme pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$. On note $R = \frac{D}{2}$ le rayon du coussinet.

Question 1 Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)}_{\vec{z}_N}$.

On considère maintenant que la pression n'est pas uniforme et vaut au point M $p(M) = p_0 \sin \theta$.

Question 3 Justifier que $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$ n'a une composante que sur \vec{y} .

Question 4 Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$. On rappelle que $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$.

Éléments de correction

2. $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)}_{\vec{z}_N} = 0$.
3. $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} = -LDp_0 \vec{y}$.

STAT STAT STAT

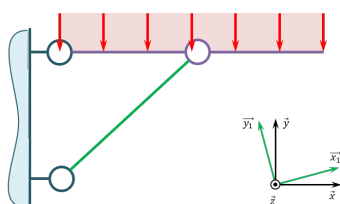


FIGURE 21.1 – Modélisation initiale

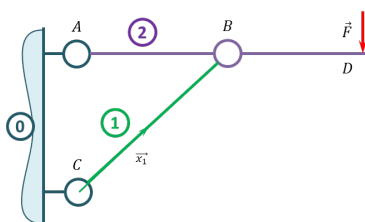


FIGURE 21.2 – Modélisation retenue

Éléments de correction

$$3. \quad X_{02} = -F \frac{a+b}{a \tan \alpha}, \quad F_{01} = F \frac{a+b}{a \sin \alpha}, \quad Y_{02} = -\frac{b}{a} F.$$



Détermination des efforts dans une structure étagée

Lors de la démolition d'une partie de la gare de Lyon Part-Dieu (en 2018), des étais ont dû être posés afin de soutenir la structure supérieure.

Dans le but de dimensionner les étais, il est nécessaire de déterminer les actions mécaniques dans chacune des liaisons.

Pour cela, on utilise la modélisation ci-contre.

On a $\overrightarrow{AB} = a \vec{x}$, $\overrightarrow{BD} = b \vec{x}$ et $\overrightarrow{CB} = L \vec{x}_1$.

Question 5 Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).

Question 6 Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

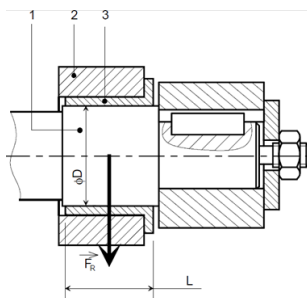
Question 7 Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de F .

Application 1

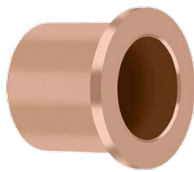
Modélisation des actions mécaniques – Corrigé

Torseur des actions mécaniques transmissibles dans un coussinet

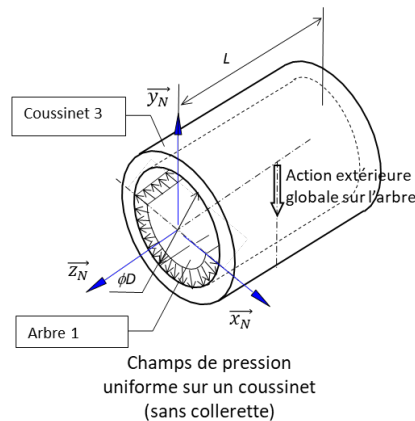
02 STAT



Montage d'un coussinet



Coussinet seul



Champs de pression uniforme sur un coussinet (sans collerette)

On donne le modèle suivant où le champ de pression de l'arbre sur le coussinet est uniforme pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$. On note $R = \frac{D}{2}$ le rayon du coussinet.

Question 1 Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$.

Correction

1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en M : $d\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} = p(M)dS\vec{e}_r$.
2. La pression étant uniforme, on a $p(M) = p$.
3. La géométrie du coussinet étant cylindrique, on se place en coordonnées cylindriques et $dS = R d\theta dz$.
4. θ varie sur $[\pi, 2\pi]$ et z sur $[0, L]$.
5. $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}$.

$$\begin{aligned} \text{Au final, } \overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} &= \int p (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) R d\theta dz = pR \int (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) d\theta dz \\ &= pR \left(\int \cos \theta d\theta dz \vec{x} + \int \sin \theta d\theta dz \vec{y} \right) = LpR \left(\int \cos \theta d\theta \vec{x} + \int \sin \theta d\theta \vec{y} \right) \\ &= LpR \left([\sin \theta]_{\pi}^{2\pi} \vec{x} - [\cos \theta]_{\pi}^{2\pi} \vec{y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= LpR \left(-(1 - (-1)) \vec{y} \right) \\
&= LpR \left(-(1 - (-1)) \vec{y} \right) = -2LpR \vec{y} = -LDp \vec{y}.
\end{aligned}$$

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)} \vec{z}_N$.

Correction

1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en M :
 $dR(1 \rightarrow 3) = p(M) dS \vec{e}_r$.
2. Au point O , on a $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)} = \overrightarrow{OM} \wedge dR(1 \rightarrow 3) = \overrightarrow{OM} \wedge dR(1 \rightarrow 3)$
3. $\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_r + z \vec{z}$.

$$\begin{aligned}
\text{On a alors, } \overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)} \vec{z} &= \left(\overrightarrow{OM} \wedge dR(1 \rightarrow 3) \right) \vec{z} \\
&= \left((R \vec{e}_r + z \vec{z}) \wedge p(M) dS \vec{e}_r \right) \vec{z} \\
&= (z \vec{z} \wedge p(M) dS \vec{e}_r) \vec{z} = 0
\end{aligned}$$

Rappel : le produit mixte est invariant par permutation circulaire : $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$.

On considère maintenant que la pression n'est pas uniforme et vaut au point M
 $p(M) = p_0 \sin \theta$.

Question 3 Justifier que $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$ n'a une composante que sur \vec{y} .

Correction

Pour des raisons de symétrie du champ de pression, la seule composante sera sur \vec{y}_N .

Question 4 Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)}$. On rappelle que $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$.

Correction

On cherche donc $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} \cdot \vec{y}_N$.

1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en M :
 $dR(1 \rightarrow 3) = p(M) dS \vec{e}_r$.
2. La pression étant uniforme, on a $p(M) = p_0 \sin \theta$.
3. La géométrie du coussinet étant cylindrique, on se place en coordonnées cylindriques et $dS = R d\theta dz$.
4. θ varie sur $[\pi, 2\pi]$ et z sur $[0, L]$.

$$\text{On a } dR(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_N = p(M) dS \vec{e}_r \cdot \vec{y}_N = p_0 dS \sin^2 \theta.$$

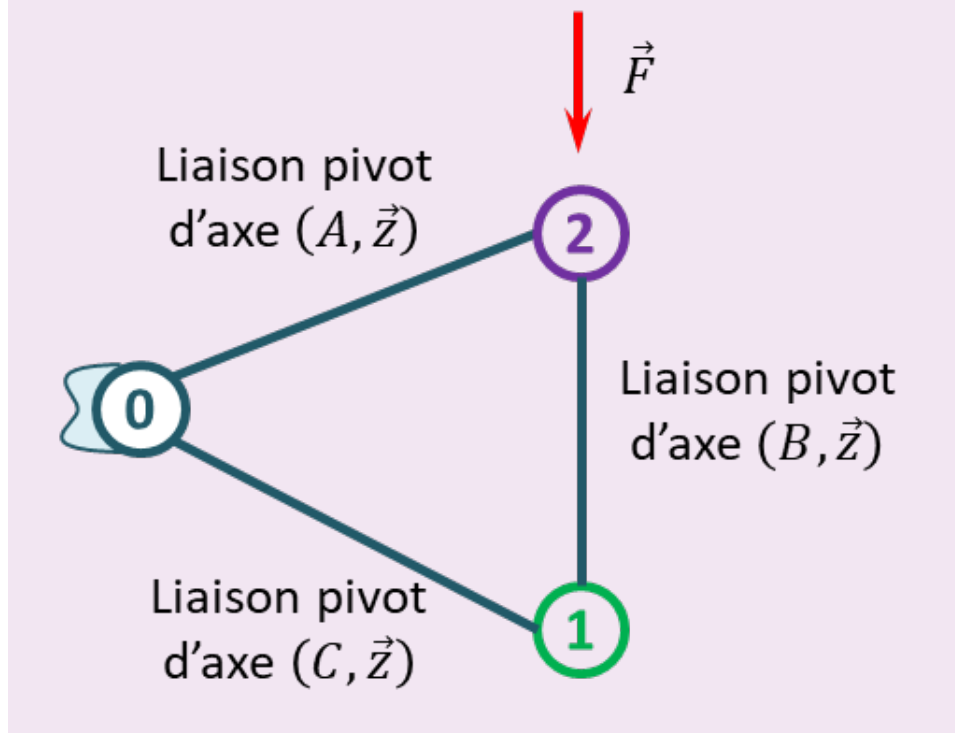
$$\text{On a donc } \overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} \cdot \vec{y}_N = \int p_0 \sin^2 \theta R d\theta dz = p_0 RL \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta =$$

$$\frac{1}{2} p_0 RL \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{2} p_0 RL \pi = \frac{1}{4} p_0 DL \pi.$$

Détermination des efforts dans une structure étagée

Question 5 Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).

Correction



Question 6 Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

Correction

Ici, il s'agit de déterminer les actions mécaniques dans toutes les liaisons. Il faudra donc isoler successivement toutes les pièces et réaliser un PFS pour chacune d'entre elles. Cependant, il y a quand même une stratégie d'isolement à avoir : **il faut commencer par isoler les solides soumis à deux glisseurs**. En effet, d'après le PFS, lorsqu'un solide est soumis à deux glisseurs, les deux forces sont de même norme, de même direction (droite passant par le point d'application des deux glisseurs) et de sens opposé.

La stratégie est donc la suivante :

- ▶ on isole 1 et on réalise le PFS.
- ▶ on isole 2 et on réalise le PFS en B.

Question 7 Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de F .

Correction

On isole 1. On réalise le BAME :

- ▶ $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$;
- ▶ $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}$.

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = 0$.

Résolution : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{01}\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$.

Correction**On isole 2. On réalise le BAME :**

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} &= \left\{ \begin{array}{c} X_{02}\vec{x} + Y_{02}\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_{02}\vec{x} + Y_{02}\vec{y} \\ -aY_{02}\vec{z} \end{array} \right\}_A ; \\
\blacktriangleright \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} &= \left\{ \begin{array}{c} F_{01}\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B ; \\
\blacktriangleright \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow 2)\} &= \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -Fb\vec{z} \end{array} \right\}_C .
\end{aligned}$$

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow 2)\} = 0.$$

Résolution :

$$\begin{cases} X_{02} + F_{01} \cos \alpha = 0 \\ Y_{02} + F_{01} \sin \alpha - F = 0 \\ -aY_{02} - Fb = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_{02} = -F_{01} \cos \alpha = -F \frac{a+b}{a \tan \alpha} \\ F_{01} = \frac{F - Y_{02}}{\sin \alpha} = F \frac{a+b}{a \sin \alpha} \\ Y_{02} = -\frac{Fb}{a} \end{cases}$$

Application 2

Modélisation des actions mécaniques – Sujet

Ressources de Stéphane GENOUËL.

Exercice 1 : Assemblage par frettage

Le frettage consiste à encastrer deux pièces en utilisant le phénomène d'adhérence.

Avant l'assemblage réalisé à l'aide d'une presse, l'arbre 1 possède un diamètre légèrement supérieur à celui de l'alésage (trou cylindrique) de la pièce 2 dans laquelle il vient se loger.

Après frettage, il subsiste donc une pression de contact p (souvent supposée uniforme sur toute la surface de contact) entre les deux pièces.

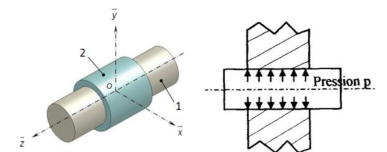
Les caractéristiques de cet assemblage par frettage sont les suivantes :

- ▶ R : rayon de l'arbre 1;
- ▶ L : longueur du contact;
- ▶ f : facteur d'adhérence entre les deux pièces.

B2-14

C1-05

C2-07



Objectif

Déterminer l'effort axial maximal transmissible et le couple maximal transmissible d'une pièce à l'autre.

Effort axial maximal transmissible

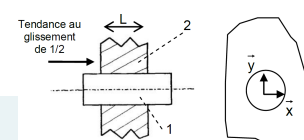
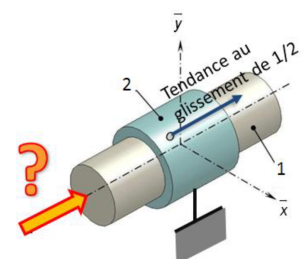
L'effort axial maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante axiale de la résultante de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante axiale de la résultante de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de $1/2$ suivant $-\vec{z}$.

Question 1 Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) et l'autre dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

Question 2 Exprimer $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$.

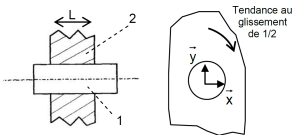
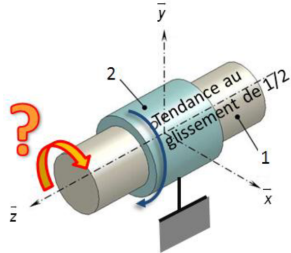
Question 3 Déterminer la résultante axiale maximale transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques du frettage.



Couple maximal transmissible

Le couple (ou moment) maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante sur l'axe \vec{z} du moment résultant de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante sur l'axe \vec{z} du moment résultant de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de 1/2 autour de \vec{z} .



Question 4 Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) et l'autre dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

Question 5 Exprimer $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}}(Q)$.

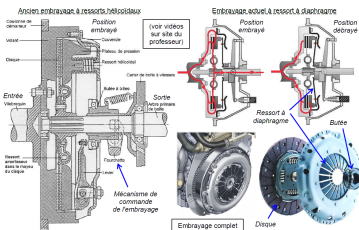
Question 6 Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques du frottement.

Exercice 2 : Embrayage à friction mono disque de véhicules automobiles (surfaces de friction plane)

Situé en amont des boîtes à vitesses, l'embrayage mono disque a pour rôle de désolidariser le moteur de la boîte afin de pouvoir changer de rapports, ou lorsque le véhicule est arrêté moteur tournant au ralenti.

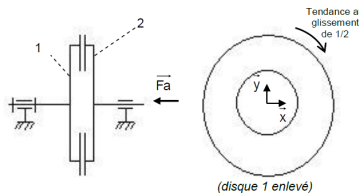
Position embrayée : le disque est fortement serré entre deux surfaces lisses (plateau et volant) par la pression des ressorts. Le tout tournera donc d'un bloc, sans glissement et sans pertes.

Position débrayée : la poussée du conducteur sur la pédale contrebalance la force des ressorts. Le disque, sous l'effet des vibrations, coulisse alors légèrement sur ses cannelures pour se positionner entre les surfaces lisses (plateau et volant), sans les toucher. Les vitesses angulaires du volant-plateau (solidaires du vilebrequin) et du disque (solidaire des roues par l'intermédiaire de la transmission) peuvent alors différer sans que le disque ne frotte.



On modélise l'embrayage par 2 disques creux identiques (1 et 2) en contact grâce à une action axiale \vec{F}_a .

Le rayon intérieur des 2 disques vaut : R_{\min} . Le rayon extérieur des 2 disques vaut : R_{\max} . On donne f le facteur d'adhérence entre les deux pièces.



Question 7 Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) et l'autre dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

Question 8 Exprimer $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}}(Q)$.

Question 9 Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 10 Déterminer l'action axiale \vec{F}_a qui crée les \vec{dN} en fonction de p et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 11 En déduire le couple maximal transmissible en fonction de F_a (et non en fonction de p) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Exercice 3 : Embrayage conique des synchroniseurs de boîte de vitesses (surface de friction coniques)

Les boîtes de vitesses automobiles ont pour particularité d'avoir tous leurs engrenages en prise. Les pignons et roues situés sur l'arbre primaire (arbre qui sera lié à l'arbre moteur) sont en liaison pivot sur ce dernier donc ils tournent tous à des vitesses différentes autour de cet arbre. Ces pignons et roues sont appelés pignons « fous » et roues « folles »

Les pignons et roues situés sur l'arbre secondaire sont solidaires de ce dernier donc ils tournent tous à la même vitesse.

Le rôle de la boîte de vitesses est de mettre en liaison encastrement un des pignons (ou roues) fous de l'arbre primaire avec l'arbre primaire. Or pour pouvoir solidariser un des pignons fous et son arbre, il faut synchroniser leurs régimes de vitesses, et c'est là le rôle des synchroniseurs.

On modélise le pignon fou et l'anneau de synchronisation par 2 cônes en contact grâce à une action axiale \vec{F}_a .

Le rayon maximal des 2 cônes vaut : R_{\max} . Le rayon minimal des 2 cônes vaut : R_{\min} . Le demi-angle au sommet des 2 cônes vaut α . On donne f le facteur d'adhérence entre les deux pièces.

Question 12 Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) et l'autre dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

Question 13 Exprimer $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}}(Q)$.

Question 14 Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 15 Déterminer l'action axiale \vec{F}_a qui crée les \vec{dN} en fonction de p et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 16 En déduire le couple maximal transmissible en fonction de F_a (et non en fonction de p) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 17 Déterminer le modèle global de l'action mécanique de l'arbre 2 sur le bâti 1 sous forme d'un torseur exprimé au point O .

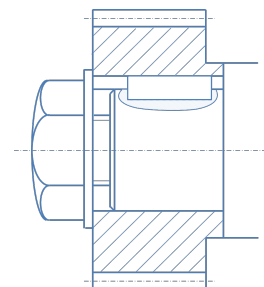
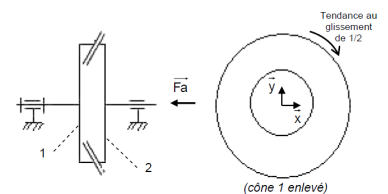
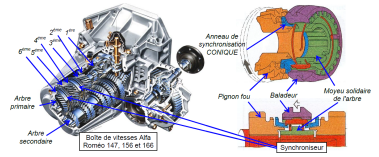
Couple transmis par une clavette

On cherche à connaître le couple transmissible autour de \vec{z} , axe du pignon.

La clavette est de hauteur $2h$ et de largeur l . On note p le champ de pression uniforme du pignon sur une demi-clavette. p est appelée pression de matage.

O est un point de l'axe.

Question 18 Déterminer le couple transmissible par la clavette.



Xavier Pessoles

Sciences Industrielles de l'Ingénieur – PSI★

Application 2

Modélisation des actions mécaniques – Corrigé

Ressources de Stéphane GENOUËL.

Exercice 1 : Assemblage par frettage

Le frettage consiste à encastrer deux pièces en utilisant le phénomène d'adhérence.

Avant l'assemblage réalisé à l'aide d'une presse, l'arbre 1 possède un diamètre légèrement supérieur à celui de l'alésage (trou cylindrique) de la pièce 2 dans laquelle il vient se loger.

Après frettage, il subsiste donc une pression de contact p (souvent supposée uniforme sur toute la surface de contact) entre les deux pièces.

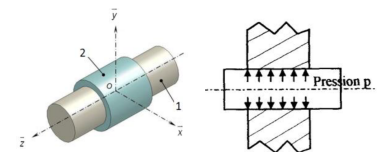
Les caractéristiques de cet assemblage par frettage sont les suivantes :

- ▶ R : rayon de l'arbre 1 ;
- ▶ L : longueur du contact ;
- ▶ f : facteur d'adhérence entre les deux pièces.

B2-14

C1-05

C2-07



Objectif

Déterminer l'effort axial maximal transmissible et le couple maximal transmissible d'une pièce à l'autre.

Effort axial maximal transmissible

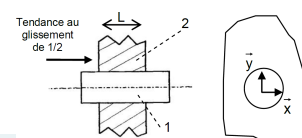
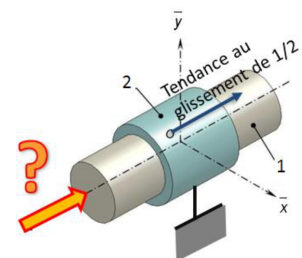
L'effort axial maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante axiale de la résultante de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante axiale de la résultante de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de $1/2$ suivant $-\vec{z}$.

Question 1 Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) et l'autre dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

Question 2 Exprimer $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}}(Q)$.

Question 3 Déterminer la résultante axiale maximale transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques du frettage.



Correction

Exprimons le torseur des actions mécaniques sous sa forme locale en un point M :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dR(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{d\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} = \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

La forme globale au point O est alors donnée par :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = \int \overrightarrow{dR(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} = \int \overrightarrow{d\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_M$$

Calculons $\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)}$.

$$\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = \int \overrightarrow{dR(2 \rightarrow 1)} = \iint p \overrightarrow{r} dS = -p \iint \overrightarrow{r} dS = -p \iint (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) dS$$

$$\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = -p \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) R d\theta dz = -pRL \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) d\theta$$

$$\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = -pRL \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \overrightarrow{x} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta d\theta \overrightarrow{y} \right) = -pRL \left([\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \overrightarrow{x} + [-\cos \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \overrightarrow{y} \right)$$

$$\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = -pRL (2\overrightarrow{x} + 0\overrightarrow{y}) = -2pRL\overrightarrow{x}$$

$2RL$ est appelée surface projetée du cylindre. Elle correspond au produit du diamètre par sa longueur.

Calculons $\overrightarrow{\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)}$.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} = \int \overrightarrow{d\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(2 \rightarrow 1)}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} = -p \iint R \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{r} dS = \vec{0}$$

Au final,

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = -2pRL\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M, 2 \rightarrow 1)} = \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

Correction

Dans ce cas :

$$\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = \int \overrightarrow{dR(2 \rightarrow 1)} = \iint p(\theta) \overrightarrow{r} dS = -p_0 R \iint \cos \theta (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) d\theta dz$$

$$\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = -p_0 LR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta (\cos \theta \overrightarrow{x} + \sin \theta \overrightarrow{y}) d\theta$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$$

Au final :

$$\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = -p_0 L R \frac{\pi}{2} \vec{x}$$

Couple maximal transmissible

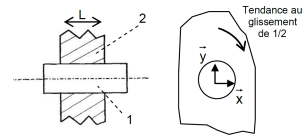
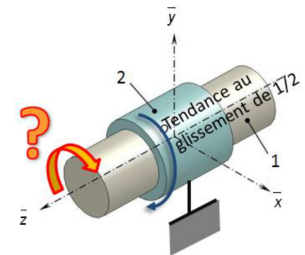
Le couple (ou moment) maximal transmissible correspond à la valeur maximale de la composante sur l'axe \vec{z} du moment résultant de l'action mécanique qui peut être transmise d'une pièce à l'autre sans qu'elles se désolidarisent.

Pour simplifier notre étude, on considère la pièce 2 fixe et on cherche à déterminer la composante sur l'axe \vec{z} du moment résultant de l'action mécanique à appliquer à la pièce 1 pour atteindre le glissement de 1/2 autour de \vec{z} .

Question 4 Refaire en grand les 2 schémas : un dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) et l'autre dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

Question 5 Exprimer $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$.

Question 6 Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques du frottement.



Exercice 2 : Embrayage à friction mono disque de véhicules automobiles (surfaces de friction plane)

Situé en amont des boîtes à vitesses, l'embrayage mono disque a pour rôle de désolidariser le moteur de la boîte afin de pouvoir changer de rapports, ou lorsque le véhicule est arrêté moteur tournant au ralenti.

Position embrayée : le disque est fortement serré entre deux surfaces lisses (plateau et volant) par la pression des ressorts. Le tout tournera donc d'un bloc, sans glissement et sans pertes.

Position débrayée : la poussée du conducteur sur la pédale contrebalance la force des ressorts. Le disque, sous l'effet des vibrations, coulisse alors légèrement sur ses cannelures pour se positionner entre les surfaces lisses (plateau et volant), sans les toucher. Les vitesses angulaires du volant-plateau (solidaire du vilebrequin) et du disque (solidaire des roues par l'intermédiaire de la transmission) peuvent alors différer sans que le disque ne frotte.

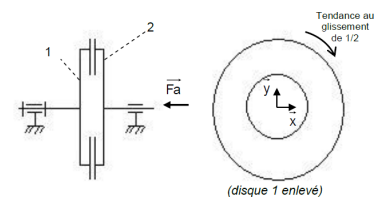
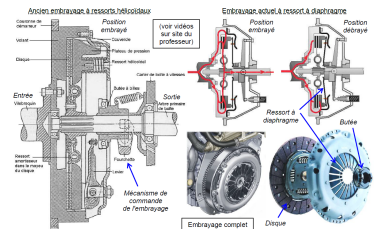
On modélise l'embrayage par 2 disques creux identiques (1 et 2) en contact grâce à une action axiale \vec{F}_a .

Le rayon intérieur des 2 disques vaut : R_{\min} . Le rayon extérieur des 2 disques vaut : R_{\max} . On donne f le facteur d'adhérence entre les deux pièces.

Question 7 Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) et l'autre dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

Question 8 Exprimer $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$.

Question 9 Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.



Question 10 Déterminer l'action axiale \vec{F}_a qui crée les \overrightarrow{dN} en fonction de p et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 11 En déduire le couple maximal transmissible en fonction de F_a (et non en fonction de p) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Correction

Expression du couple infinitésimal

$$\overrightarrow{d\mathcal{M}}(\text{Plateau, Disque} \rightarrow O) = \overrightarrow{d\mathcal{M}}(P, D \rightarrow O) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR}(P \rightarrow D)$$

Expression de la résultante infinitésimale

$$\overrightarrow{dR}(P \rightarrow D) = \overrightarrow{dN}(P \rightarrow D) + \overrightarrow{dT}(P \rightarrow D)$$

Expression de l'effort normal

$$\overrightarrow{dN}(P \rightarrow D) = p \vec{n} dS = -p \vec{z} dS$$

Expression de l'unité de surface

$$dS = \rho d\theta d\rho$$

Expression de l'effort tangentiel

D'après le modèle de Coulomb, on commence par identifier le vecteur $\overrightarrow{V}(M, D/P)$. Le vecteur tangentiel est donc opposé à ce dernier. A la limite du glissement on a alors :

$$\overrightarrow{dT}(P \rightarrow D) = -f \|\overrightarrow{dN}(P \rightarrow D)\| \vec{v} = f p dS \vec{v}$$

Calcul final

On note $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}}(O, P \rightarrow D) &= \overrightarrow{d\mathcal{M}}(O, P \rightarrow D) \\ &= \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR}(P \rightarrow D) \\ &= \int \rho \vec{u} \wedge (\overrightarrow{dN}(P \rightarrow D) + \overrightarrow{dT}(P \rightarrow D)) \\ &= \int \rho \vec{u} \wedge (-p \vec{z} dS + f p dS \vec{v}) \\ &= \iint p \rho \vec{v} dS + \iint p f \rho \vec{z} dS = \iint p \rho \vec{v} \rho d\theta d\rho + \iint p f \rho \vec{z} \rho d\theta d\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint p \rho \vec{v} \rho d\theta d\rho &= \iint p \rho (\cos \theta \vec{y} - \sin \theta \vec{x}) \rho d\theta d\rho \\ &= \iint p \rho \cos \theta \vec{y} \rho d\theta d\rho - \iint p \rho \sin \theta \vec{x} \rho d\theta d\rho \\ &= p \vec{y} \int_r^R \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \rho^2 d\rho - p \vec{x} \int_r^R \int_0^{2\pi} \sin \theta \rho^2 d\theta d\rho \\ &= p [\sin \theta]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_r^R \vec{y} - p [-\cos \theta]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_r^R \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint p f \rho^2 \vec{z} d\theta d\rho &= p f [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_r^R \vec{z} \\ &= p f 2\pi \frac{R^3 - r^3}{3}\end{aligned}$$

Enfin, en notant F_r l'effort (uniformément réparti) exercé par le ressort sur toute la couronne, on a donc :

$$p = \frac{F_r}{\pi (R^2 - r^2)}$$

Au final :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, P \rightarrow D)} = f \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} F_r$$

Exercice 3 : Embrayage conique des synchroniseurs de boîte de vitesses (surface de friction coniques)

Les boîtes de vitesses automobiles ont pour particularité d'avoir tous leurs engrenages en prise. Les pignons et roues situés sur l'arbre primaire (arbre qui sera lié à l'arbre moteur) sont en liaison pivot sur ce dernier donc ils tournent tous à des vitesses différentes autour de cet arbre. Ces pignons et roues sont appelés pignons « fous » et roues « folles »

Les pignons et roues situés sur l'arbre secondaire sont solidaires de ce dernier donc ils tournent tous à la même vitesse.

Le rôle de la boîte de vitesses est de mettre en liaison encastrement un des pignons (ou roues) fous de l'arbre primaire avec l'arbre primaire. Or pour pouvoir solidariser un des pignons fous et son arbre, il faut synchroniser leurs régimes de vitesses, et c'est là le rôle des synchroniseurs.

On modélise le pignon fou et l'anneau de synchronisation par 2 cônes en contact grâce à une action axiale \vec{F}_a .

Le rayon maximal des 2 cônes vaut : R_{\max} . Le rayon minimal des 2 cônes vaut : R_{\min} . Le demi-angle au sommet des 2 cônes vaut α . On donne f le facteur d'adhérence entre les deux pièces.

Question 12 Refaire en grand les 2 schémas ci-dessus : un dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) et l'autre dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , en plaçant les actions élémentaires normale et tangentielle de 2 sur 1 en un point Q quelconque de la surface de contact.

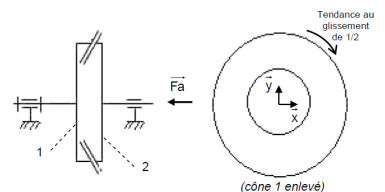
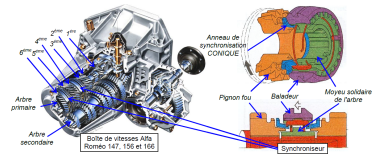
Question 13 Exprimer $\overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}(Q)}$.

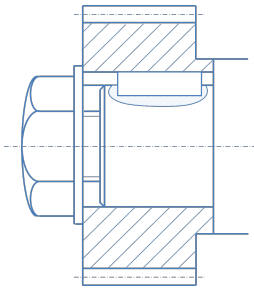
Question 14 Déterminer le couple maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 15 Déterminer l'action axiale \vec{F}_a qui crée les \vec{dN} en fonction de p et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 16 En déduire le couple maximal transmissible en fonction de F_a (et non en fonction de p) et des caractéristiques géométriques de l'embrayage.

Question 17 Déterminer le modèle global de l'action mécanique de l'arbre 2 sur le bâti 1 sous forme d'un torseur exprimé au point O .





Couple transmis par une clavette

On cherche à connaître le couple transmissible autour de \vec{z} , axe du pignon.

La clavette est de hauteur $2h$ et de largeur l . On note p le champ de pression uniforme du pignon sur une demi-clavette. p est appelée pression de matage.

O est un point de l'axe.

Question 18 Déterminer le couple transmissible par la clavette.

(A revoir, notamment les bornes d'intégrations sur la hauteur de la clavette).

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, \text{Pignon} \rightarrow \text{Arbre}) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(O, P \rightarrow A) \cdot \vec{z} = \int \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{R}(P \rightarrow A) \cdot \vec{z} = \int x \vec{x} \wedge p \vec{y} dx dz$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, \text{Pignon} \rightarrow \text{Arbre}) \cdot \vec{z} = \int_0^l \int_{R-h/2}^{R+h/2} p x \underbrace{(\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{z}}_1 dx dz = pl \int_{R-h/2}^{R+h/2} x dx = \frac{1}{2} pl \left((R+h/2)^2 - (R-h/2)^2 \right)$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, \text{Pignon} \rightarrow \text{Arbre}) \cdot \vec{z} = hplR$$

Ce résultat peut paraître logique : la force exercée sur la clavette s'exprime par phl . Le bras de levier du glisseur correspond au rayon de l'arbre auquel on ajoute un quart de hauteur de clavette.

Attention, si on considère que le couple est transmis par l'ensemble du flanc de la clavette, le moment transmissible est de la forme :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, \text{Pignon} \rightarrow \text{Arbre}) \cdot \vec{z} = hLpR$$