

# Présentation

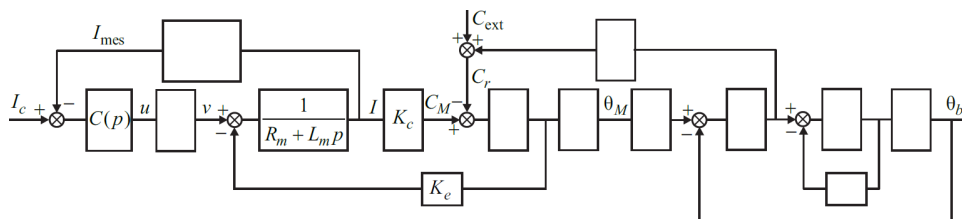
On s'intéresse à la conception de la loi de commande d'un des moteurs d'une orthèse d'épaule permettant d'améliorer le rétablissement de patients en cours de rééducation.

## Objectif

- Temps de réponse à 5% pour un échelon de consigne de couple :  $t \leq 2$  ms.
- Erreur statique pour un couple de référence constant  $C_{\text{ref } 0} : |\varepsilon_0| \leq 0,05 C_{\text{ref } 0}$ .
- Couple maximal fourni sur l'axe de l'articulation  $C_{\text{max}} = 50$  Nm.

En pratique, le couple délivré par le moteur ne peut être mesuré directement, c'est pourquoi la grandeur asservie est le courant moteur. L'objet, dans cette phase de l'étude, est alors de déterminer une loi de commande pour la boucle d'asservissement et de valider les performances vis-à-vis du cahier des charges partiel.

On donne partiellement le schéma-blocs de la commande.



Le correcteur choisi est de type proportionnel-intégral (P.I.) de fonction de transfert :  $C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ . On adopte sans aucune justification que  $T_i = 0,3$  ms. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

$$H(p) = \frac{0,0326p \left(1 + \frac{2 \times 0,08}{463}p + \frac{p^2}{463^2}\right)}{\left(1 + \frac{p}{122}\right) \left(1 + \frac{2 \times 0,09}{464}p + \frac{p^2}{464^2}\right) \left(1 + \frac{p}{10^3}\right) \left(1 + \frac{p}{10^4}\right)}$$

est donné en fin de document.  $i_{\text{mes}}(t)$  est la mesure du courant du moteur et  $u(t)$  la tension d'alimentation. Ce tracé pourra être utilisé sans aucune justification.

## Synthèse du régulateur PI de la boucle de courant

**Question 1** Compléter le diagramme de Bode par le tracé des diagrammes asymptotiques de la fonction  $H(p)$ .

**Question 2** En adoptant  $K = 1$ , tracer le diagramme de Bode (module et phase) de  $C(p)$  : diagrammes asymptotiques et allures des tracés réels avec les valeurs prises aux points caractéristiques.



C1-02

C2-04

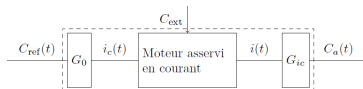
**Question 3** En déduire les tracés asymptotiques et les allures des tracés réels du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (on différenciera les tracés par des couleurs différentes). Déterminer, sans calcul supplémentaire, la pulsation  $\omega_1$  telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est égale à  $-135^\circ$  et la valeur numérique du gain statique.

**Question 4** Déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer une marge de phase de  $45^\circ$ .

On considère maintenant le système corrigé avec le correcteur  $C(p)$  qui vient d'être déterminé.

**Question 5** Déterminer un ordre de grandeur de la marge de gain obtenue et conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

**Question 6** Déterminer l'écart statique  $\Delta i_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (i_c(t) - i_{\text{mes}}(t))$  en boucle fermée en réponse à un échelon de consigne  $i_c(t) = I_0 \Gamma(t)$  d'amplitude  $I_0$  et l'exprimer sous la forme  $\Delta i_0 = k I_0$  en précisant la valeur numérique de  $k$ .



La figure suivante représente la structure de l'actionneur (la boucle de courant du moteur étant fermée) :  $i_c$  et  $i$  sont respectivement la consigne et le courant moteur,  $C_{\text{ref}}$  est le couple de référence souhaité,  $C_a$  est le couple appliqué par l'actionneur sur l'axe de l'articulation et  $G_{ic}$  est un gain pur correspondant à la relation entre le courant et le couple  $C_a$ . On suppose pour toute cette question que le couple de référence  $C_{\text{ref}}(t)$  est constant d'amplitude  $C_{\text{ref}} = C_{\text{ref}0}$ .

**Question 7** Exprimer  $G_{ic}$  en fonction de  $K_c$  et de  $N$ .

**Question 8** En supposant qu'en régime permanent l'erreur statique de la boucle d'asservissement de courant est nulle  $\Delta i_0 = 0$ , donner la valeur du gain  $G_0$  permettant d'assurer l'égalité des couples de référence  $C_{\text{ref}0}$  et appliqué  $C_a$ .

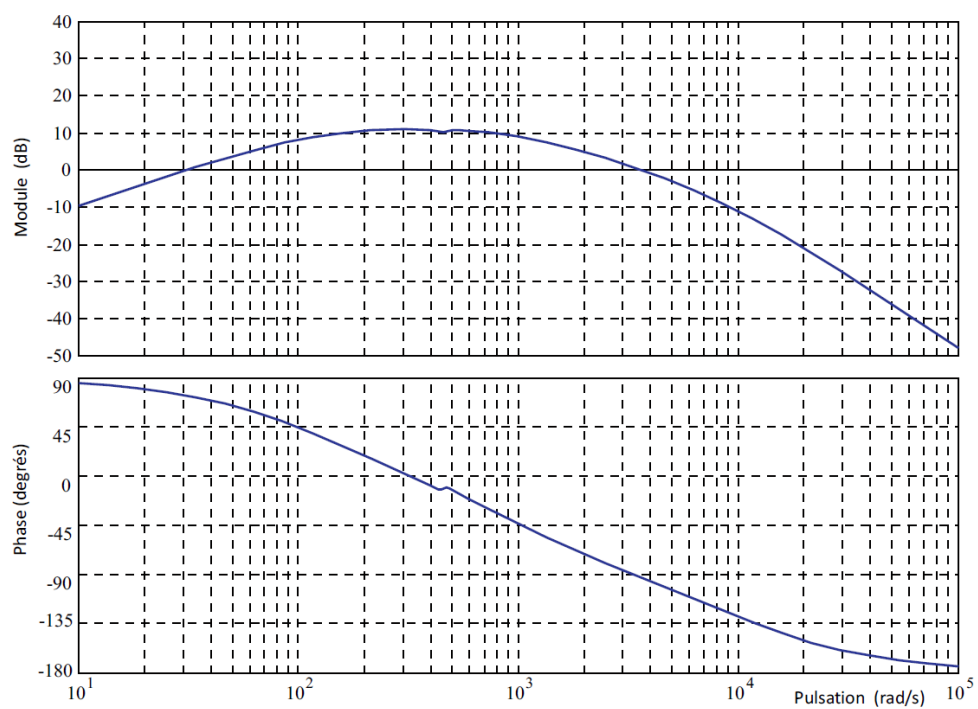
**Question 9** En remarquant que le gain statique du capteur de courant est de 1, montrer, en utilisant les résultats des questions précédentes, qu'en régime permanent l'erreur  $\Delta C = C_{\text{ref}} - C_a$  entre le couple de référence et le couple moteur exprimé sur l'axe de l'articulation est  $\Delta C = k_1 C_{\text{ref}0}$ . Déterminer  $k_1$  en fonction de  $k$ .

**Question 10** Vérifier alors si les différentes exigences du cahier des charges de l'actionneur sont validées.

On admettra sans aucune justification que la pulsation de coupure à 0 dB et le temps de réponse sont liés par la relation approximative  $\omega_c T r \approx 3$ .

#### Éléments de correction

1. .
2. .
3.  $\omega_1 = 3300 \text{ rad s}^{-1}$  et gain statique de 1,4.
4.  $K = 0,7$ .
5. Marge de gain infinie, marge de phase positive.
6.  $\Delta i_0 = \frac{1}{1 + K_{i0}}$
7.  $G_{ic} = \frac{1}{K_c}$
8.  $G_0 = \frac{1}{k}$





# La robotique au service du handicap – Corrigé

Centrale Supélec – PSI 2010.

## Présentation

On s'intéresse à la conception de la loi de commande d'un des moteurs d'une orthèse d'épaule permettant d'améliorer le rétablissement de patients en cours de rééducation.

C1-02

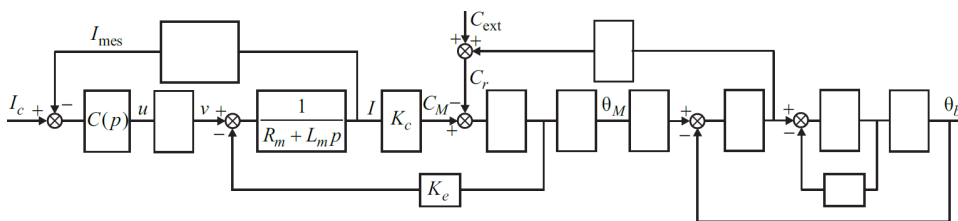
C2-04

### Objectif

- ▶ Temps de réponse à 5% pour un échelon de consigne de couple :  $t \leq 2$  ms.
- ▶ Erreur statique pour un couple de référence constant  $C_{ref 0} : |\varepsilon_0| \leq 0,05 C_{ref 0}$ .
- ▶ Couple maximal fourni sur l'axe de l'articulation  $C_{max} = 50$  Nm.

En pratique, le couple délivré par le moteur ne peut être mesuré directement, c'est pourquoi la grandeur asservie est le courant moteur. L'objet, dans cette phase de l'étude, est alors de déterminer une loi de commande pour la boucle d'asservissement et de valider les performances vis-à-vis du cahier des charges partiel.

On donne partiellement le schéma-blocs de la commande.



Le correcteur choisi est de type proportionnel-intégral (P.I.) de fonction de transfert :  $C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ . On adopte sans aucune justification que  $T_i = 0,3$  ms. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

$$H(p) = \frac{0,0326p \left( 1 + \frac{2 \times 0,08}{463} p + \frac{p^2}{463^2} \right)}{\left( 1 + \frac{p}{122} \right) \left( 1 + \frac{2 \times 0,09}{464} p + \frac{p^2}{464^2} \right) \left( 1 + \frac{p}{10^3} \right) \left( 1 + \frac{p}{10^4} \right)}$$

est donné en fin de document.  $i_{mes}(t)$  est la mesure du courant du moteur et  $u(t)$  la tension d'alimentation. Ce tracé pourra être utilisé sans aucune justification.

## Synthèse du régulateur PI de la boucle de courant

**Question 1** Compléter le diagramme de Bode par le tracé des diagrammes asymptotiques de la fonction  $H(p)$ .

### Correction

**Question 2** En adoptant  $K = 1$ , tracer le diagramme de Bode (module et phase) de  $C(p)$  : diagrammes asymptotiques et allures des tracés réels avec les valeurs prises aux points caractéristiques.

## Correction

**Question 3** En déduire les tracés asymptotiques et les allures des tracés réels du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (on différenciera les tracés par des couleurs différentes). Déterminer, sans calcul supplémentaire, la pulsation  $\omega_1$  telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est égale à  $-135^\circ$  et la valeur numérique du gain statique.

## Correction

**Question 4** Déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer une marge de phase de  $45^\circ$ .

## Correction

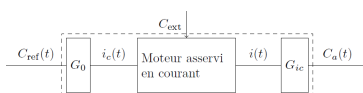
On considère maintenant le système corrigé avec le correcteur  $C(p)$  qui vient d'être déterminé.

**Question 5** Déterminer un ordre de grandeur de la marge de gain obtenue et conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

## Correction

**Question 6** Déterminer l'écart statique  $\Delta i_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (i_c(t) - i_{\text{mes}}(t))$  en boucle fermée en réponse à un échelon de consigne  $i_c(t) = I_0 \Gamma(t)$  d'amplitude  $I_0$  et l'exprimer sous la forme  $\Delta i_0 = k I_0$  en précisant la valeur numérique de  $k$ .

## Correction



La figure suivante représente la structure de l'actionneur (la boucle de courant du moteur étant fermée) :  $i_c$  et  $i$  sont respectivement la consigne et le courant moteur,  $C_{\text{ref}}$  est le couple de référence souhaité,  $C_a$  est le couple appliqué par l'actionneur sur l'axe de l'articulation et  $G_{ic}$  est un gain pur correspondant à la relation entre le courant et le couple  $C_a$ . On suppose pour toute cette question que le couple de référence  $C_{\text{ref}}(t)$  est constant d'amplitude  $C_{\text{ref}} = C_{\text{ref}0}$ .

**Question 7** Exprimer  $G_{ic}$  en fonction de  $K_c$  et de  $N$ .

## Correction

**Question 8** En supposant qu'en régime permanent l'erreur statique de la boucle d'asservissement de courant est nulle  $\Delta i_0 = 0$ , donner la valeur du gain  $G_0$  permettant d'assurer l'égalité des couples de référence  $C_{\text{ref}0}$  et appliqué  $C_a$ .

## Correction

**Question 9** En remarquant que le gain statique du capteur de courant est de 1, montrer,

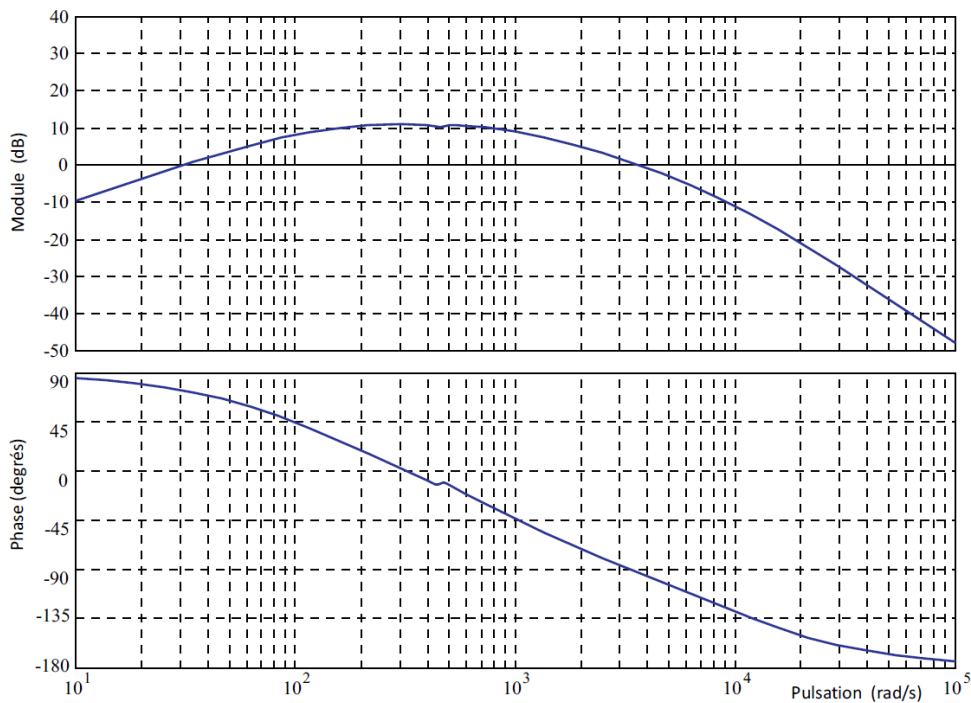
en utilisant les résultats des questions précédentes, qu'en régime permanent l'erreur  $\Delta C = C_{\text{ref}} - C_a$  entre le couple de référence et le couple moteur exprimé sur l'axe de l'articulation est  $\Delta C = k_1 C_{\text{ref}0}$ . Déterminer  $k_1$  en fonction de  $k$ .

### Correction

**Question 10** Vérifier alors si les différentes exigences du cahier des charges de l'actionneur sont validées.

### Correction

On admettra sans aucune justification que la pulsation de coupure à 0 dB et le temps de réponse sont liés par la relation approximative  $\omega_c Tr \approx 3$ .



### Éléments de correction

1. .
2. .
3.  $\omega_1 = 3300 \text{ rad s}^{-1}$  et gain statique de 1,4.
4.  $K = 0,7$ .
5. Marge de gain infinie, marge de phase positive.
6.  $\Delta i_0 = \frac{1}{1 + K_{bo}} I_0$ .
7.  $G_{ic} = K_c N$ .
8.  $G_0 = \frac{1}{G_{ic}}$ .
9.  $k_1 = k$ .
10. OK.





# TD 2

## Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Sujet

Centrale Supélec – PSI – 2006.

### Présentation

Par sécurité, il est nécessaire que la distance d'arrêt d'une rame de t TGV soit inférieure à 2500 m.

Lors du freinage il est indispensable que les roues du train ne se bloquent pas. Le phénomène de blocage appelé enrayage a pour effet de déformer les roues et les rails et peut entraîner le déraillement du train.

### Dispositif d'anti-enrayage

L'objectif de cette partie est l'étude de la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation en vue de satisfaire un cahier des charges qui sera exprimé par la suite.

Le glissement relatif entre la roue et le rail est noté  $\nu$  et peut s'exprimer sous la forme  $\nu = 1 - \frac{V_R}{V_T}$  où  $V_T$  est la vitesse de translation du train par rapport aux rails et  $V_R$  l'opposée de la vitesse du point de contact appartenant à la roue par rapport à son support (bogie).

Dans le cadre de cette étude, on supposera que :

- ▶ les vitesses  $V_R$  et  $V_T$  sont directement accessibles à la mesure, éventuellement entachées d'une erreur ;
- ▶ la régulation peut se ramener directement à celle du glissement ;
- ▶ le comportement de l'actionneur et de sa « commande rapprochée » est modélisé par une fonction de transfert linéaire correspondant à un comportement « moyen ».

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure 12.1 où est la consigne de glissement.

- ▶  $H_1(p)$  : fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électro-valve) ;
- ▶  $H_2(p)$  : fonction de transfert de la roue au freinage ;
- ▶  $C(p)$  : correcteur de la boucle de régulation ;
- ▶  $M(p)$  : fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement obtenu à partir des vitesses  $V_T$  et  $V_R$ , cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure ;
- ▶  $\nu_m$  : glissement estimé à partir de  $V_T$  et de  $V_R$ .

On adoptera pour la suite :  $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$ ,  $H_2(p) = \frac{K_h}{p} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}$  et  $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

Pour une vitesse  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ , le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse  $V_T$  ne font pas l'objet de cette étude.

C1-02

C2-04

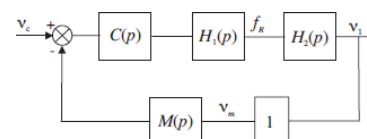
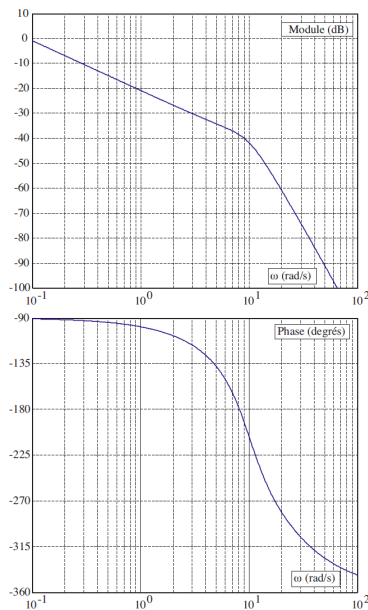


FIGURE 12.1 – Structure de la chaîne de régulation de glissement

Marges de stabilité, performances en boucle ouverte	
Pulsation de coupure à 0dB	$\omega_c = 1 \text{ rad/s}$
Marge de phase	$\Delta\Phi \approx 60^\circ$ au point de fonctionnement nominal B
Stabilité quel que soit le point de fonctionnement sur la caractéristique $\mu = f(\nu)$	
Réponse à un échelon de consigne de glissement	
Écart de régime permanent	Nul
Temps du 1 <sup>er</sup> maximum	$t_m \leq 3,5 \text{ s}$
Dépassement	$D \leq 18\%$
Réponse à une variation en échelon de l'adhérence	
Écart en régime permanent	Nul
Temps de réponse	$t_r \leq 2 \text{ s}$

## Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni en figure suivante en justifiant le tracé.



## Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

**Question 1** Donner l'allure du diagramme de Bode de ce correcteur.

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Question 3** Calculer la valeur minimale  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_R$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées.

**Question 5** Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain (avec très peu de calcul). Conclure sur les marges de stabilité obtenues.

## Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

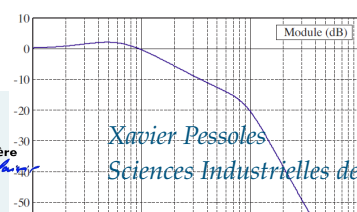
Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérification concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de glissement : temps du 1<sup>er</sup> maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)}$ , on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}.$$

On suppose sans aucune justification que  $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$ .

**Question 6** En examinant les diagrammes de Bode fournis sur la figure suivante de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)}$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.



**Question 7** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Question 8** En justifiant, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert par la forme suivante :  $F(p) = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

### Objectif

Calcul de la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement.

**Question 9** En utilisant la relation ci-dessous, montrer que l'évolution temporelle de la réponse impulsionnelle  $f(t)$  du système décrit par la fonction de transfert  $F(p)$ , peut être exprimée par la relation suivante où  $y(t)$  est une fonction que vous préciserez,  $a$  et  $b$  deux constantes que vous exprimerez en fonction de  $K_f$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  :  $f(t) = ay(t) + b\dot{y}(t)$ .  
On donne  $\mathcal{L} [t^n e^{-at} h(t)] = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$  ( $h(t)$  fonction de heaviside – échelon unité).

**Question 10** À partir de cette réponse, calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $v_c(t) = v_{c0}h(t)$ .

**Question 11** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

## Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive  $f_{\text{ext}}$ . On admet que cette modélisation conduit au schéma-blocs représenté sur la figure ci-dessous.

On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

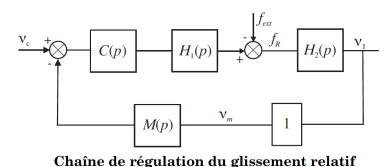
**Question 12** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous explicitez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (On rappelle qu'en régulation on considère l'entrée principale égale à 0). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left( \|H_2(j\omega)\|; \left\| \frac{1}{C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)} \right\| \right).$$

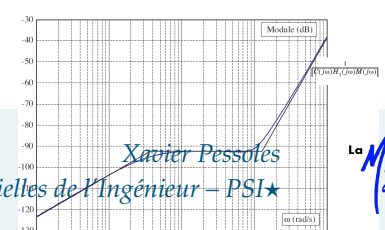
### Objectif

Calcul de la fonction de transfert  $F_2(p)$ .

On donne le tracé de la fonction  $\left\| \frac{1}{C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)} \right\|$ .



Chaîne de régulation du glissement relatif



**Question 13** Tracer le diagramme asymptotique de  $\|H_2(j\omega)\|$ .

**Question 14** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $\|F_2(j\omega)\|$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

### Objectif

Calcul de l'évolution du glissement en réponse à une variation de l'adhérence.

**Question 15** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

**Question 16** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(p)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 h(t)$  avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

**Question 17** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(p)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale (valeurs à considérer en valeur absolue).

**Question 18** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.



### Éléments de correction

1. .
2. .
3.  $-20^\circ$ .
4.  $T_i \geq 2,75$ .
5.  $K = 11$ .
6.  $MG = 18 \text{ dB}$  et  $M\varphi = 60^\circ$ .
7. .
8.  $K_f = 1$ ,  $\tau_1 = 1/0,3$ ,  $\tau_2 = 1/0,6$ ,  
 $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\xi < 0,7$ .
9.  $\frac{1 + 3,3p}{(1 + 1,66p)^2}$ .
10.  $f(t) = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-t/\tau_2} h(t)$ .
11.  $t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} = 3,3 \text{ s}$  et dépassement de 13%.
12. .
13. .
14. .
15.  $F_2(p) = -\frac{p}{12100} \frac{1}{(1 + 2,8p)(1 + 0,5p)}$ .
16.  $p_1 = -0,35$  et  $p_2 = -2$ .  $F_2(p) = -\frac{p}{12100} \frac{1}{(1 + 2,8p)}$ .
17.  $v_1(t) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t/T} h(t)$ .

# TD 2

## Système de freinage d'un TGV DUPLEX – Corrigé

Centrale Supélec – PSI – 2006.

### Présentation

Par sécurité, il est nécessaire que la distance d'arrêt d'une rame de t TGV soit inférieure à 2500 m.

Lors du freinage il est indispensable que les roues du train ne se bloquent pas. Le phénomène de blocage appelé enrayage a pour effet de déformer les roues et les rails et peut entraîner le déraillement du train.

### Dispositif d'anti-enrayage

L'objectif de cette partie est l'étude de la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation en vue de satisfaire un cahier des charges qui sera exprimé par la suite.

Le glissement relatif entre la roue et le rail est noté  $\nu$  et peut s'exprimer sous la forme  $\nu = 1 - \frac{V_R}{V_T}$  où  $V_T$  est la vitesse de translation du train par rapport aux rails et  $V_R$  l'opposée de la vitesse du point de contact appartenant à la roue par rapport à son support (bogie).

Dans le cadre de cette étude, on supposera que :

- ▶ les vitesses  $V_R$  et  $V_T$  sont directement accessibles à la mesure, éventuellement entachées d'une erreur ;
- ▶ la régulation peut se ramener directement à celle du glissement ;
- ▶ le comportement de l'actionneur et de sa « commande rapprochée » est modélisé par une fonction de transfert linéaire correspondant à un comportement « moyen ».

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure 12.1 où est la consigne de glissement.

- ▶  $H_1(p)$  : fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électro-valve) ;
- ▶  $H_2(p)$  : fonction de transfert de la roue au freinage ;
- ▶  $C(p)$  : correcteur de la boucle de régulation ;
- ▶  $M(p)$  : fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement obtenu à partir des vitesses  $V_T$  et  $V_R$ , cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure ;
- ▶  $\nu_m$  : glissement estimé à partir de  $V_T$  et de  $V_R$ .

On adoptera pour la suite :  $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$ ,  $H_2(p) = \frac{K_h}{p} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}$  et  $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

Pour une vitesse  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ , le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse  $V_T$  ne font pas l'objet de cette étude.

C1-02

C2-04

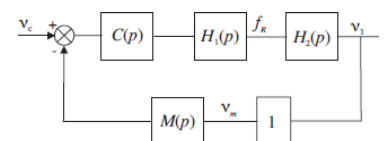
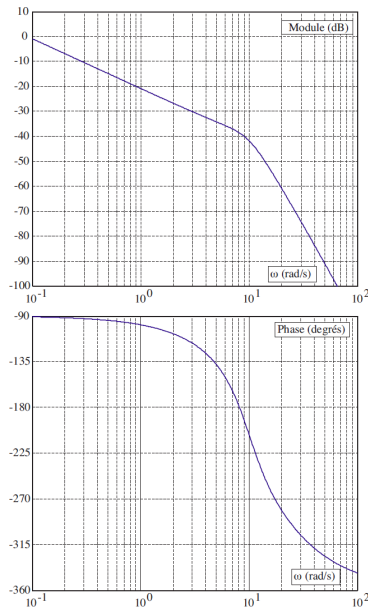


FIGURE 12.2 – Structure de la chaîne de régulation de glissement

Marges de stabilité, performances en boucle ouverte	
Pulsation de coupure à 0dB	$\omega_c = 1 \text{ rad/s}$
Marge de phase	$\Delta\Phi = 60^\circ$ au point de fonctionnement nominal B
Stabilité quel que soit le point de fonctionnement sur la caractéristique $\mu = f(\nu)$	
Réponse à un échelon de consigne de glissement	
Écart de régime permanent	Nul
Temps du 1 <sup>er</sup> maximum	$t_m \leq 3,5 \text{ s}$
Dépassement	$D \leq 18\%$
Réponse à une variation en échelon de l'adhérence	
Écart en régime permanent	Nul
Temps de réponse	$t_r \leq 2 \text{ s}$

## Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni en figure suivante en justifiant le tracé.



## Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right).$$

**Question 1** Donner l'allure du diagramme de Bode de ce correcteur.

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Question 3** Calculer la valeur minimale  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées.

**Question 5** Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain (avec très peu de calcul). Conclure sur les marges de stabilité obtenues.

## Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

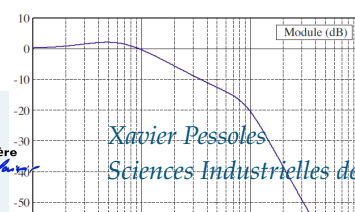
Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérification concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de glissement : temps du 1<sup>er</sup> maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)}$ , on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}.$$

On suppose sans aucune justification que  $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$ .

**Question 6** En examinant les diagrammes de Bode fournis sur la figure suivante de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)}$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.



**Question 7** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Question 8** En justifiant, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert par la forme suivante :  $F(p) = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

### Objectif

Calcul de la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement.

**Question 9** En utilisant la relation ci-dessous, montrer que l'évolution temporelle de la réponse impulsionnelle  $f(t)$  du système décrit par la fonction de transfert  $F(p)$ , peut être exprimée par la relation suivante où  $y(t)$  est une fonction que vous préciserez,  $a$  et  $b$  deux constantes que vous exprimerez en fonction de  $K_f$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  :  $f(t) = a y(t) + b \dot{y}(t)$ .  
On donne  $\mathcal{L} [t^n e^{-at} h(t)] = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$  ( $h(t)$  fonction de heaviside – échelon unité).

**Question 10** À partir de cette réponse, calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $v_c(t) = v_{c0} h(t)$ .

**Question 11** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

## Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive  $f_{\text{ext}}$ . On admet que cette modélisation conduit au schéma-blocs représenté sur la figure ci-dessous.

On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

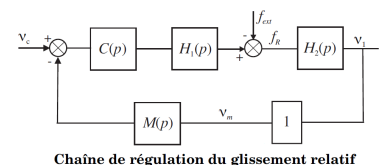
**Question 12** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous explicitez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (On rappelle qu'en régulation on considère l'entrée principale égale à 0). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left( \|H_2(j\omega)\|; \left\| \frac{1}{C(j\omega) H_1(j\omega) M(j\omega)} \right\| \right).$$

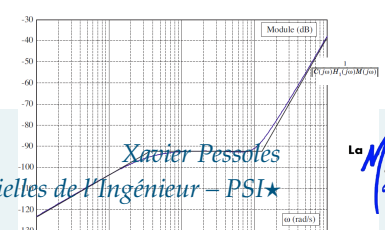
### Objectif

Calcul de la fonction de transfert  $F_2(p)$ .

On donne le tracé de la fonction  $\left\| \frac{1}{C(j\omega) H_1(j\omega) M(j\omega)} \right\|$ .



Chaîne de régulation du glissement relatif





**Question 13** Tracer le diagramme asymptotique de  $\|H_2(j\omega)\|$ .

**Question 14** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $\|F_2(j\omega)\|$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

### Objectif

Calcul de l'évolution du glissement en réponse à une variation de l'adhérence.

**Question 15** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

**Question 16** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(p)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 h(t)$  avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

**Question 17** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(p)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale (valeurs à considérer en valeur absolue).

**Question 18** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

### Éléments de correction

- |   |   |
|---|---|
| 1. .  | 11. $t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} = 3,3 \text{ s}$ et dépasse- |
| 2. .  | ment de 13%.  |
| 3. $-20^\circ$ .  | 12. .   |
| 4. $T_i \geq 2,75$ .  | 13. .   |
| 5. $K = 11$ .   | 14. .   |
| 6. $MG = 18 \text{ dB}$ et $M\varphi = 60^\circ$ .  | 15. $F_2(p) = -\frac{p}{12100} \frac{1}{(1 + 2,8p)(1 + 0,5p)}$ .              |
| 7. .  | 16. $p_1 = -0,35$ et $p_2 = -2$ . $F_2(p) =$                                  |
| 8. $K_f = 1$ , $\tau_1 = 1/0,3$ , $\tau_2 = 1/0,6$ ,<br>$\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$ , $\xi < 0,7$ .    | $-\frac{p}{12100} \frac{1}{(1 + 2,8p)}$ .                                     |
| 9. $\frac{1 + 3,3p}{(1 + 1,66p)^2}$ .   | 17. $v_1(t) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t/T} h(t)$ .                             |
| 10. $f(t) = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-t/\tau_2} h(t)$ . |   |