TD 1
Drone quadri-rotor – Sujet

Pole SII Chateaubriand – Joliot Curie

C1-01

C2-03

Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction $\overrightarrow{z}$) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe $(O,\overrightarrow{x})$) et en tangage (rotation autour de l'axe $(O,\overrightarrow{y})$) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ($\dfrac{\omega_2}{\omega_4}$ pour le roulis et $\dfrac{\omega_1}{\omega_3}$ pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

Accélération verticale	Vers le haut : $3g$ Vers le base : $0,5g$ (valeur absolue)
Précision	Erreur statique nulle
Stabilité	Marge de phase minimale : 35°. Dépassement maximal < 5 %
Rapidité	$t_{r5\%}$ < 0,6 s

Objectif

- Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.

Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

u représente la tension de commande du moteur, $\omega(t)$ son taux de rotation, τ et k_v des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme $k_q\omega^2$ provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en ω^2, qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement ω_0, fréquence de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ et $u = u_0 + \delta u$ où $\delta\omega$ et δu représentent des petites variations de ω et u autour du point de fonctionnement.

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0.

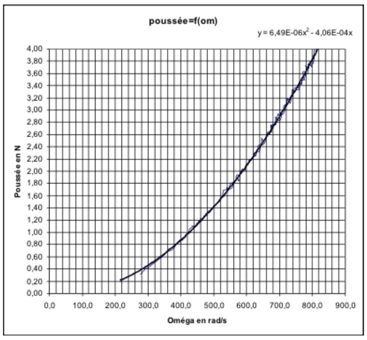
Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta\omega$ et δu est de la forme $\dfrac{\mathrm{d}\delta\omega(t)}{\mathrm{d}t} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ, k_v, k_q et ω_0.
On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu.

Question 3 Calculer la fonction de transfert $\dfrac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ, k_v, k_q et ω_0.

Recherche du point de fonctionnement ω_0

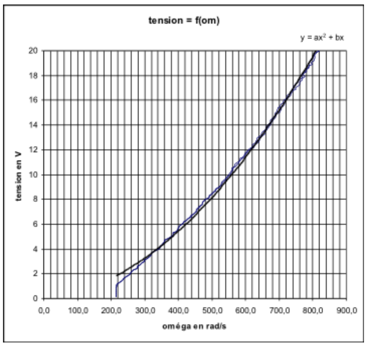
Dans le mouvement de déplacement vertical de direction $\overrightarrow{z}$, les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$. La masse totale du drone est $m = 240\,\mathrm{g}$. On prendra $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 . La poussée F varie avec ω^2 . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant F à la fréquence de rotation ω en rad/s.



Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande u et la fréquence de rotation ω en rad/s en régime permanent lorsque $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}(t)} = 0$. La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme $y = ax^2 + bx$. On donne la constante de temps du moteur : $\tau = 125\,\mathrm{ms}$.

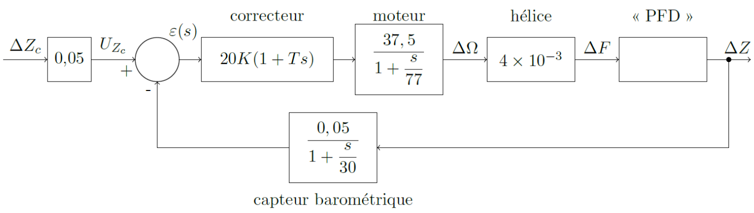


Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a, b et τ. Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle $\dfrac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\dfrac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \dfrac{37,5}{1+\dfrac{p}{77}}$.

Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représente après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement ω_0, par le schéma-bloc suivant :



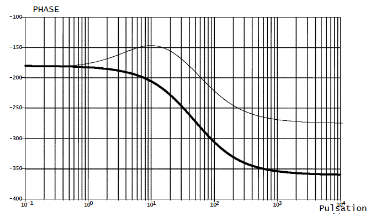


Figure 1.1 – Courbe de phase

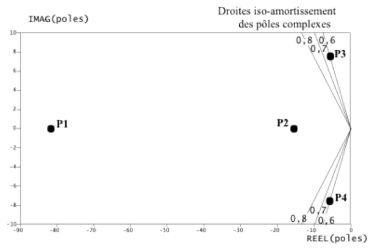


Figure 1.2 – Carte des pôles

Le gain du capteur barométrique est de 0,05 V m^{-1}. On pose $z(t) = z_0 + \delta z(t)$, $\Delta Z(p)$ la transformée de Laplace de $\delta z(t)$, $F = F_0 + \delta F$ représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire : $m\ddot{z} = 4F - mg$.

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\dfrac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté $K_{BO} = 2,5K$. La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée figure 1.1, en gras avec un correcteur proportionnel ($T = 0$) et en trait fin avec le correcteur retenu ($K = 1$ et $T = 0,2s$).

Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0{,}2$ s et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad s^{-1}, le gain sera compris entre −120 dB et 10 dB.

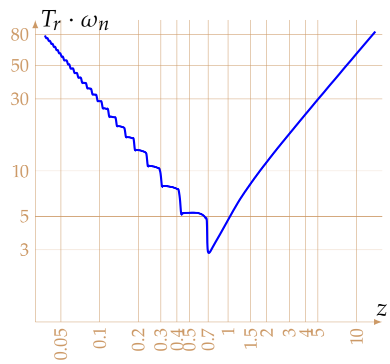
Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega_{c0\,\text{dB}} = 1{,}5$ rad s^{-1}. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié ? Justifier.

La figure 1.2 représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain K précédemment déterminée.

Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).



Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié ?

Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Éléments de correction

1. $-\dfrac{1}{\tau}\omega_0 - k_q\omega_0^2 + \dfrac{k_v}{\tau}u_0 = 0\,;$
2. $A = \dfrac{1}{\tau} + 2k_q\omega_0$ et $B = \dfrac{k_v}{\tau}$.
3. $K_m = \dfrac{k_v}{1+2\tau k_q\omega_0}$ et $T_m = \dfrac{\tau}{1+2\tau k_q\omega_0}$.
4. $F_0 = \dfrac{mg}{4} = 0{,}6\,\mathrm{N}$.
5. $\omega_0 = 340\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
6. $k_v = \dfrac{1}{b}$ (rad/s/V) et $k_b = \dfrac{a}{b\tau}$.
7. $\dfrac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \dfrac{4}{mp^2}$. $H_{BO}(p) = \dfrac{2,5K}{p^2}\dfrac{1+Tp}{\left(1+\dfrac{p}{77}\right)\left(1+\dfrac{p}{30}\right)}$.
8.
9.
10. $K = 17,9$.
11. FTBO de classe 2, ε_s nul.
12. $p_2 = -15$, $p_3 = -5+8j$, $p_4 = -5+8j$.
13. $\xi = 0,6$
14.
15. $p = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$. $\omega_n \simeq 8{,}33\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$
16. $t_{5\%} \simeq 0{,}61\,\mathrm{s}$.

TD 1
Drone quadri-rotor – Corrigé

Pole SII Chateaubriand – Joliot Curie

C1-01

C2-03

Présentation

Objectif

- Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0.

Correction

En vol stationnaire, dans les conditions idéales, la vitesse de rotation des hélices est constante ; donc $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = 0$. De plus, il n'y a pas de variation de la vitesse de rotation des hélices et donc pas de variation de la tension d'alimentation. En conséquence, $\delta u = 0$ et $\delta\omega = 0$.

On a donc $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \dfrac{k_v}{\tau}u$ En notant ω_0 et u_0 les vitesses en tensions à l'état stationnaire, on a $\dfrac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \dfrac{k_v}{\tau}u_0$.

Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta\omega$ et δu est de la forme $\dfrac{\mathrm{d}\delta\omega(t)}{\mathrm{d}t} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ, k_v, k_q et ω_0.

Correction

On utilise le changement de variable proposé autour d'un point de fonctionnement et on a :

$\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \dfrac{k_v}{\tau}u$

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\left(\omega_0 + \delta\omega\right)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\left(\omega_0 + \delta\omega\right) - k_q\left(\omega_0 + \delta\omega\right)^2 + \dfrac{k_v}{\tau}\left(u_0 + \delta u\right)$

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\left(\delta\omega\right)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\omega_0 - \dfrac{1}{\tau}\delta\omega - k_q\omega_0^2 - k_q\left(\delta\omega\right)^2 - k_q 2\omega_0\delta\omega + \dfrac{k_v}{\tau}u_0 + \dfrac{k_v}{\tau}\delta u$

Or $\dfrac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \dfrac{k_v}{\tau}u_0$ (question précédente) ; donc : $\dfrac{\mathrm{d}\left(\delta\omega\right)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\delta\omega - k_q\left(\delta\omega\right)^2 - k_q 2\omega_0\delta\omega + \dfrac{k_v}{\tau}\delta u$

En négligeant les termes d'ordre 2, on a donc : $\dfrac{\mathrm{d}\left(\delta\omega\right)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\delta\omega - k_q 2\omega_0\delta\omega + \dfrac{k_v}{\tau}\delta u$

Au final, $A = \frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0$ et $B = \frac{k_v}{\tau}$.

On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu.

Question 3 Calculer la fonction de transfert $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ, k_v, k_q et ω_0.

Correction

En utilisant la transformée de Laplace, on obtient $p\Delta\Omega(s) = -A\Delta\Omega(s) + B\Delta U(s)$ et donc $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)} = \frac{B}{p+A} = \frac{B/A}{p/A+1}$. En conséquence, $K_m = \frac{B}{A} = \frac{\frac{k_v}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0} = \frac{k_v}{1+\tau k_q 2\omega_0}$.
$\tau_m = \frac{\tau}{1+\tau k_q 2\omega_0}$

Recherche du point de fonctionnement ω_0

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 .

Correction

On a $4F_0 = mg$. Le poids du drone est de $0,240 \times 9,81 = 2{,}3544\,\mathrm{N}$. Chaque moteur doit donc exercer $\frac{2,3544}{4} = 0{,}59\,\mathrm{N}$.

Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

Correction

En lisant le graphe, on obtient $\omega_0 = 340\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a, b et τ. Préciser leur unité.

Correction

Lorsque $\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}(t)} = 0$, on a $u = a\omega0^2 + b\omega_0$. Par ailleurs en régime stationnaire, on a $\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0$. Il en résulte que $u_0 = \frac{1}{k_v}\omega_0 + \frac{k_q\tau}{k_v}\omega_0^2$.
On a donc $a = \frac{k_q\tau}{k_v}$ et $b = \frac{1}{k_v}$. On a donc b tel que $[\mathrm{V}] = [\mathrm{B}][\mathrm{s}^{-1}]$ et $[\mathrm{B}] = [\mathrm{V}][\mathrm{s}]$. On a donc k_v en $[\mathrm{V}^{-1}\mathrm{s}^{-1}]$.
Par ailleurs, $[\mathrm{V}] = [\mathrm{k_q}][\mathrm{s}][\mathrm{Vs}][\mathrm{s}^{-2}]$ et k_q n'a pas d'unité.

On peut ainsi déduire le modèle $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1+\frac{p}{77}}$.

Vérification des performances

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\dfrac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Correction

On a vu que $4_0 F = mg$.
Par ailleurs, $m\ddot{z} = 4F - mg$ et donc, $m\dfrac{\mathrm{d}\left(z_0 + \delta z(t)\right)}{\mathrm{d}t} = 4\left(F_0 + \delta F(t)\right) - mg$ et $m\dfrac{\mathrm{d}\left(\delta z(t)\right)}{\mathrm{d}t} = 4\delta F(t)$. Dans le domaine de Laplace, on a $mp^2\Delta Z(p) = 4\Delta F(p)$. En conséquences, $\dfrac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \dfrac{4}{mp^2}$.
La FTBO s'exprime alors par $H_{\text{BO}}(p) = \dfrac{2,5K}{p^2}\dfrac{1+Tp}{\left(1+\dfrac{p}{77}\right)\left(1+\dfrac{p}{30}\right)}$.

Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0{,}2\,\text{s}$ et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 $\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, le gain sera compris entre $-120\,\text{dB}$ et $10\,\text{dB}$.

Correction

On a $H_{\text{BO}}(p) = \dfrac{2,5K}{p^2}\dfrac{1+Tp}{\left(1+\dfrac{p}{77}\right)\left(1+\dfrac{p}{30}\right)}$. Les pulsations de cassure sont alors : $5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, $30\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ et $77\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. Les pentes sont alors :

- pour $\omega < 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$: $-40\,\text{dB/décade}$;
- pour $5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} < \omega < 30\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$: $-20\,\text{dB/décade}$;
- pour $30\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} < \omega < 77\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$: $-40\,\text{dB/décade}$
- pour $\omega > 77\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$: $-60\,\text{dB/décade}$.

Pour une pulsation de $10 \times 10^{-2}\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, on a FTBO(p) $\simeq \dfrac{2,5}{p^2}$. On a donc un gain $\simeq 20\log\left(\dfrac{2,5}{0,01^2}\right) \simeq 88\,\text{dB}$. Reste à tracer...

Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega_{c0\,\text{dB}} = 1{,}5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

Correction

Si on considère que pour $\omega < 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, on a $H_{\text{BO}}(p) \simeq \dfrac{2,5K}{p^2}$. Dans ces conditions, pour $K = 1$, on a $\left|\dfrac{2,5}{-\omega^2}\right| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{2,5} \simeq 1{,}58\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Correction

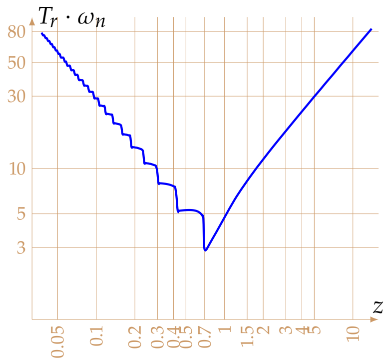
En raisonnant analytiquement, on cherche la pulsation ω_{-145} pour laquelle la phase est de $-180° + 35° = -145°$, soit $\arg \text{FTBO}(j\omega) = -145°$. (Résolution à faire à la calculatrice, sur

Python ou autre. Il y asurement 2 solutions vu le profil de courbe de phase). On cherche ensuite K tel que $\left|\text{FTBO}(j\omega_{-145})\right| = 1$. (Résolution à faire à la calculatrice, sur Python ou autre.)

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié ? Justifier.

Correction

La boucle ouverte comporte 2 intégrateurs. L'écart statique est donc nul. Le cahier des charges est vérifié.



Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

Correction

Les pôles dominants sont $P2 \simeq -15$, $P3 \simeq -5 + 8i$, $P4 \simeq -5 - 8i$.

Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Correction

Dans ce cas, on ne prend que $P3$ et $P4$. $\xi = 0,6$.

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié ?

Correction

Le coefficient d'amortissement est inférieur à 0,69. Il y aura donc des oscillations verticales lors du drone. Le dépassement sera supérieur à 5 % de la valeur finale. En conséquence, le critère de stabilité n'est pas totalement respecté.

Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

Correction

Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Correction

Colle 1
Stabilité – Sujet

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \dfrac{2}{(10p+1)^3}$.

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Déterminer l'erreur de statique et l'erreur de trainage.

Question 3 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 4 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

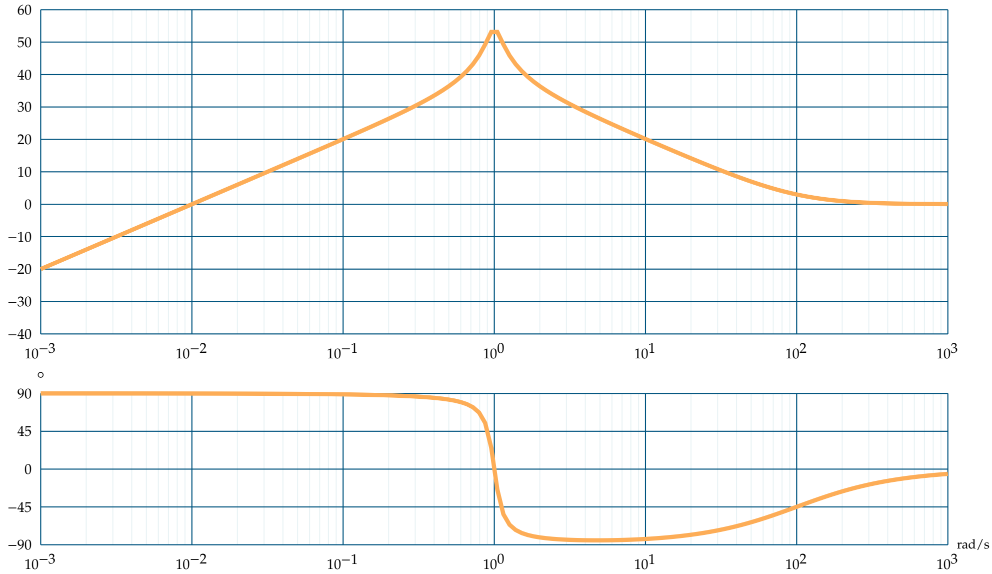
Question 5 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45°.

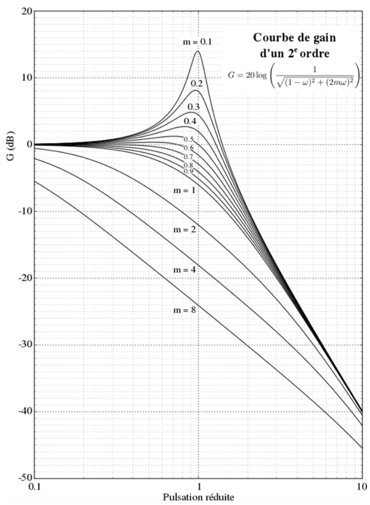
Question 6 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \dfrac{Ki}{p}$.

Question 7 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 8 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.


60
50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
°
90
45
0
−45
−90
rad/s


Courbe de gain
d'un 2e ordre
$G = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\omega)^2+(2m\omega)^2}}\right)$
m = 0.1
0.2
0.3
0.4
m = 1
m = 2
m = 4
m = 8
G (dB)
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
0.1
1
10
Pulsation réduite

Colle 1
Stabilité – Corrigé

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \dfrac{2}{\left(10p+1\right)^3}$.

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Déterminer l'erreur de statique et l'erreur de trainage.

Question 3 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 4 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

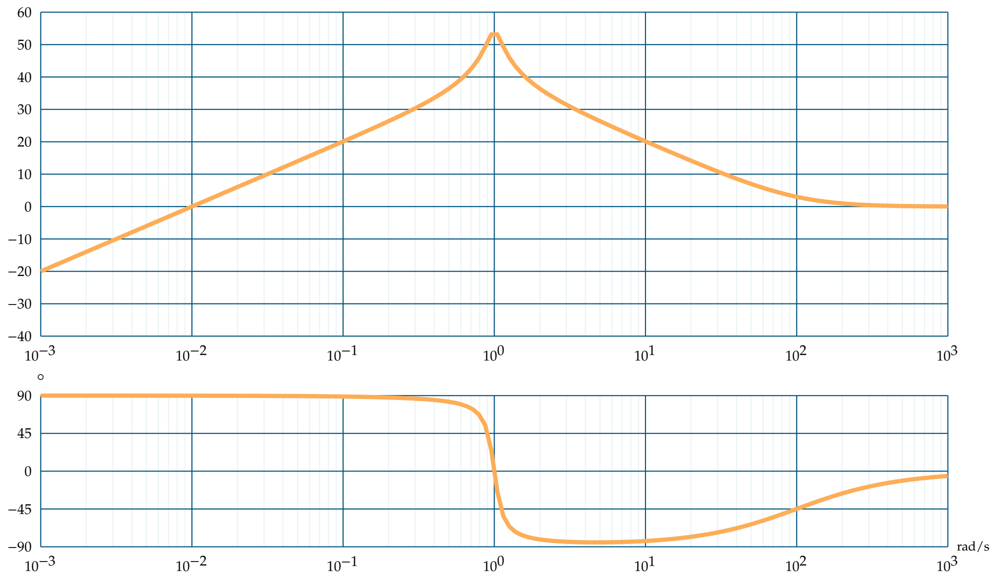
Question 5 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45°.

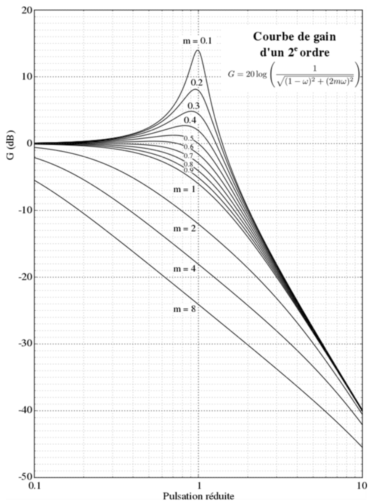
Question 6 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \dfrac{Ki}{p}$.

Question 7 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 8 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.





7.7 Pour obtenir une marge de phase supérieure à 45°, il faut avoir :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi + \arg G(j\omega_{c0}) > \frac{\pi}{4}$$

soit :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg \frac{K}{(10j\omega_{c0}+1)^3} > \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta\varphi = \pi - 3 \arctan 10\omega_{c0} > \frac{\pi}{4}$$

d'où :
$$\omega_{c0} < \frac{1}{10}\tan\frac{3\pi}{12} = 0{,}1 \text{ rad/s}$$

Calculons la valeur de K correspondant à cette pulsation de coupure à 0 dB.

On a :
$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\left(\sqrt{1+100\omega_{c0}^2}\right)^3} = 1$$

d'où :
$$K = \left(\sqrt{1+100\omega_{c0}^2}\right)^3 = 2{,}8$$

La condition sur ω_{c0} nous imposant une limite supérieure, il en est de même pour la condition sur K.

En conclusion :
$$\Delta\varphi > 45° \quad \Rightarrow \quad K < 2{,}8$$

Par ailleurs, comme :
$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$$

on a :
$$t_m > \frac{3}{0{,}1} = 30 \text{ s}$$

Le temps de montée minimal (autrement dit la meilleure rapidité possible) est donc égal à 30 s.
Calculons à présent l'erreur statique. La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

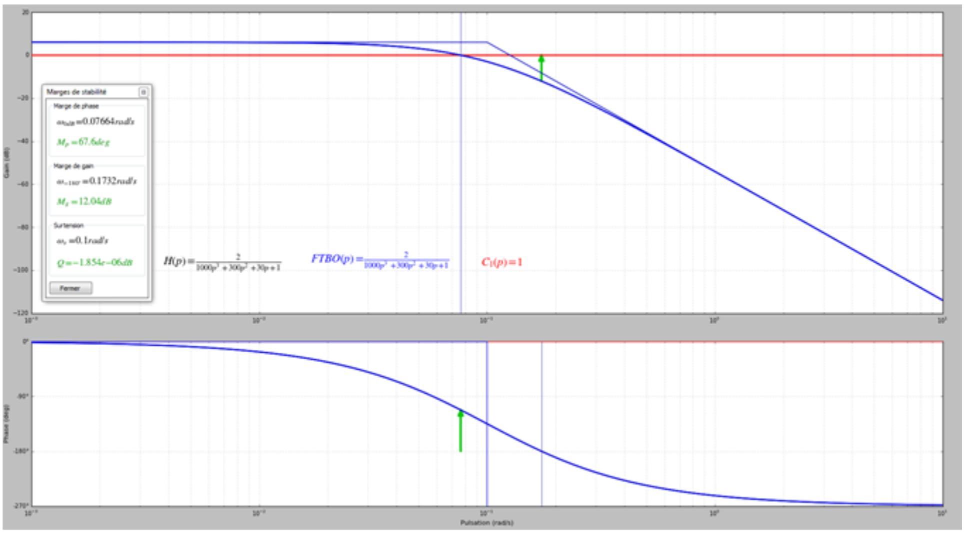
$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{(10p+1)^3+K}$$

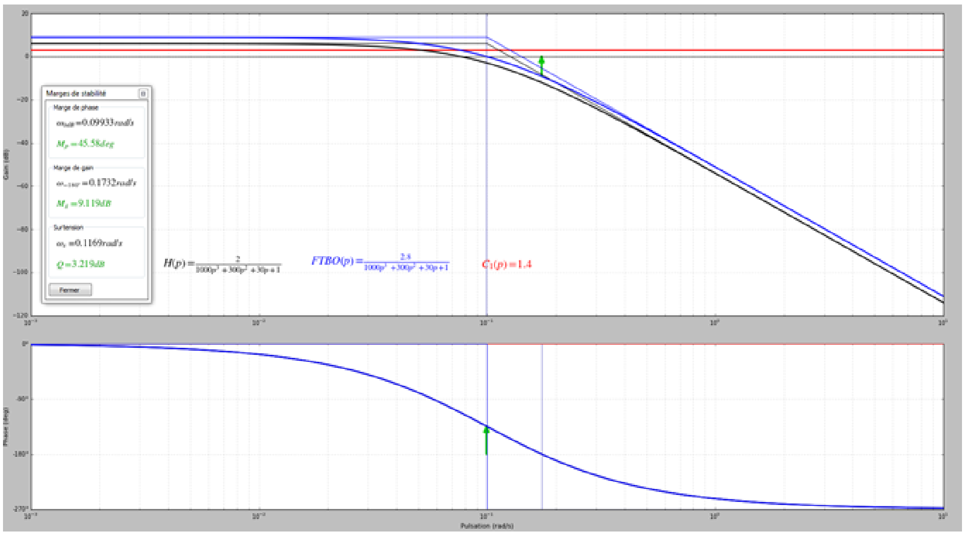
Par définition, l'erreur statique a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}[1-H(p)] = 1 - \frac{K}{1+K} = \frac{1}{1+K}$$

On a donc :
$$K < 2{,}8 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_p > \frac{1}{1+2{,}8} = 0{,}26$$

L'erreur statique est donc obligatoirement supérieure à 26 % si on souhaite avoir une marge de phase supérieure à 45 °.


Marges de stabilité
Marge de phase
$\omega_{0dB} = 0.07664 rad/s$
$M_\varphi = 67.6 deg$
Marge de gain
$\omega_{-180°} = 0.1732 rad/s$
$M_g = 12.04 dB$
Surtension
$\omega_r = 0.1 rad/s$
$Q = -1.854e-06 dB$
Fermer
$H(p) = \frac{2}{1000p^3 + 300p^2 + 30p + 1}$
$FTBO(p) = \frac{2}{1000p^3 + 300p^2 + 30p + 1}$
$C_1(p) = 1$
Gain (dB)
Phase (deg)
Pulsation (rad/s)


Marges de stabilité
Marge de phase
$\omega_{0dB} = 0.09933 rad/s$
$M_\varphi = 45.58 deg$
Marge de gain
$\omega_{-180°} = 0.1732 rad/s$
$M_g = 9.119 dB$
Surtension
$\omega_r = 0.1169 rad/s$
$Q = 3.219 dB$
Fermer
$H(p) = \frac{2}{1000p^3 + 300p^2 + 30p + 1}$
$FTBO(p) = \frac{2.8}{1000p^3 + 300p^2 + 30p + 1}$
$C_1(p) = 1.4$
Gain (dB)
Phase (deg)
Pulsation (rad/s)

Colle 2
Stabilité – Sujet

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire :
$G(p) = \dfrac{10}{\left(p+1\right)\left(p+4\right)}$.

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Déterminer l'erreur de statique et l'erreur de trainage.

Question 3 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 4 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

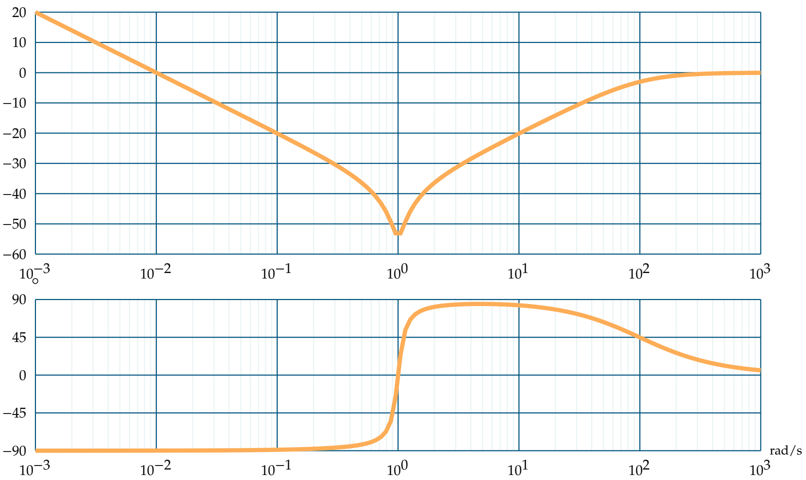
Question 5 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45°.

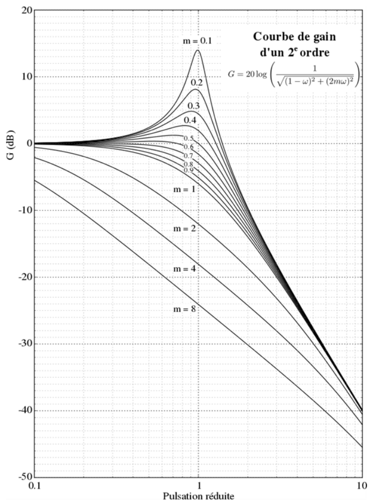
Question 6 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \dfrac{Ki}{p}$.

Question 7 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 8 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.


20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
90
45
0
−45
−90
rad/s
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}


Courbe de gain
d'un 2e ordre
$G = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\omega)^2+(2m\omega)^2}}\right)$
m = 0.1
0.2
0.3
0.4
m = 1
m = 2
m = 4
m = 8
G (dB)
Pulsation réduite

Colle 2
Stabilité – Corrigé

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire :
$G(p) = \dfrac{10}{(p+1)(p+4)}$.

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Déterminer l'erreur de statique et l'erreur de trainage.

Question 3 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 4 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

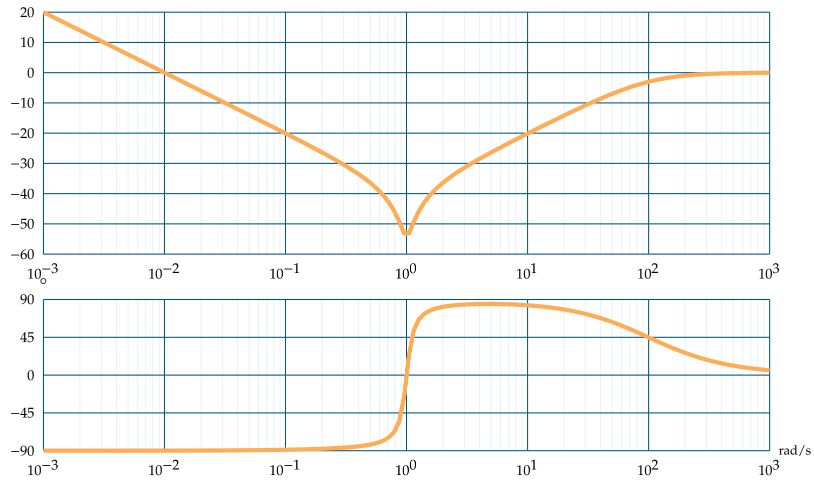
Question 5 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45°.

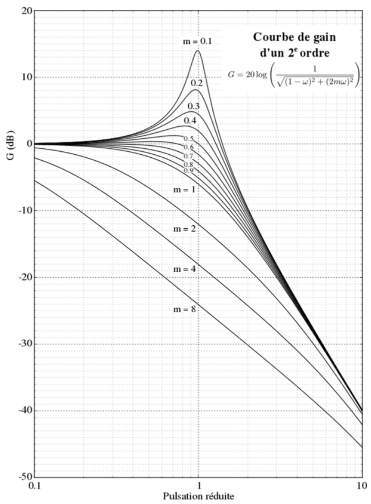
Question 6 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \dfrac{Ki}{p}$.

Question 7 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 8 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.





8.2 La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

soit : $$KG(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45°, on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan\omega_{c0} - \arctan\frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

soit : $$\arctan\omega_{c0} + \arctan\frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expressions :

$$\tan\left[\arctan\omega_{c0} + \arctan\frac{\omega_{c0}}{4}\right] = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$$

d'où : $$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{4}}{1-\frac{\omega_{c0}^2}{4}} = -1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 4 = 0$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16 = 41$$

La seule solution positive est : $\omega_{c0} = \dfrac{5+\sqrt{41}}{2} = 5{,}7$ rad/s

Par définition : $$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega_{c0}^2}\sqrt{16+\omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent : $$K = \sqrt{1+\omega_{c0}^2}\sqrt{16+\omega_{c0}^2} = 40{,}3$$

Le gain K étant réglé sur cette valeur, on a bien une marge de phase de 45° et un temps de montée en boucle fermée que l'on peut estimer en utilisant la relation approchée suivante :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \quad \Rightarrow \quad t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5{,}7} = 0{,}53 \text{ s}$$

Si on souhaite régler le temps de montée sur 0,2 s, on doit avoir :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \quad \Rightarrow \quad \omega_{c0} \approx \frac{3}{0{,}2} = 15 \text{ rad/s}$$

Pour obtenir une telle pulsation de coupure à 0 dB, il faut changer la valeur de K :

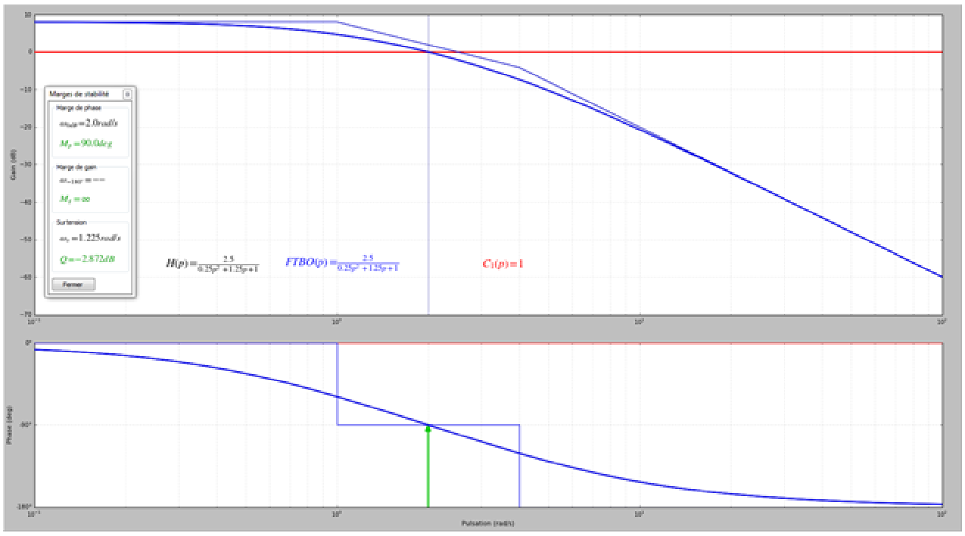
Par définition : $$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega_{c0}^2}\sqrt{16+\omega_{c0}^2}} = 1$$

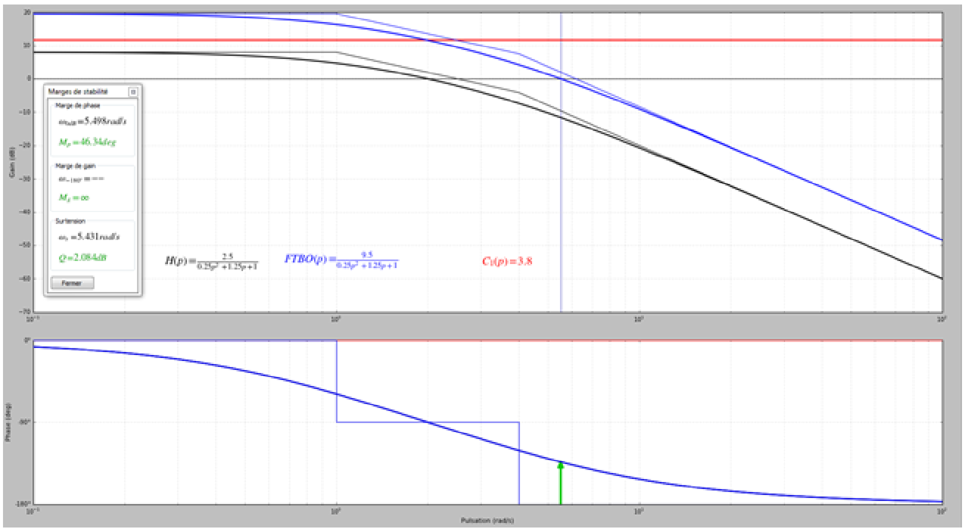
Par conséquent : $$K = \sqrt{1+\omega_{c0}^2}\sqrt{16+\omega_{c0}^2} = 233{,}4$$

La marge de phase a bien évidemment changé :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan\omega_{c0} - \arctan\frac{\omega_{c0}}{4} = 0{,}326 \text{ rad} = 18{,}7\ °$$

Ce résultat montre bien qu'en cherchant à augmenter la rapidité d'un système par une correction proportionnelle, on dégrade sa stabilité.




Marges de stabilité
Marge de phase
$\omega_{0dB} = 5.498 rad/s$
$M_p = 46.34 deg$
Marge de gain
$\omega_{-180°} = ---$
$M_g = \infty$
Surtension
$\omega_r = 5.431 rad/s$
$Q = 2.084 dB$
Fermer
$H(p) = \frac{2.5}{0.25p^2 + 1.25p + 1}$
$FTBO(p) = \frac{9.5}{0.25p^2 + 1.25p + 1}$
$C_1(p) = 3.8$
Gain (dB)
Phase (deg)
Pulsation (rad/s)

Colle 3
Performances – Sujet

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \dfrac{8}{p^2+5p+6}$.

Question 1 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 2 Déterminer l'erreur de statique et l'erreur de trainage.

Question 3 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$. La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert $B(p) = 3$.

Question 4 Tracer le schéma-blocs.

Question 5 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45°.

Question 6 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = Ki/p$.

Question 7 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Colle 3
Performances – Corrigé

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \dfrac{8}{p^2+5p+6}$.

Question 1 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Correction

Question 2 Déterminer l'erreur de statique et l'erreur de trainage.

Correction

Question 3 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

Correction

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$. La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert $B(p) = 3$.

Question 4 Tracer le schéma-blocs.

Correction

Question 5 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45°.

Correction

Question 6 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Correction

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = Ki/p$.

Question 7 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Correction

8.2 La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

soit : $$KG(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45°, on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan\omega_{c0} - \arctan\frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

soit : $$\arctan\omega_{c0} + \arctan\frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expressions :

$$\tan\left[\arctan\omega_{c0} + \arctan\frac{\omega_{c0}}{4}\right] = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\varepsilon = 0,123$$

d'où : $$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{4}}{1-\frac{\omega_{c0}^2}{4}} = -1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 4 = 0$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16 = 41$$

La seule solution positive est : $$\omega_{c0} = \frac{5+\sqrt{41}}{2} = 5{,}7 \text{ rad/s}$$

Par définition : $$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega_{c0}^2}\sqrt{16+\omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent : $$K = \sqrt{1+\omega_{c0}^2}\sqrt{16+\omega_{c0}^2} = 40{,}3$$

Le gain K étant réglé sur cette valeur, on a bien une marge de phase de 45° et un temps de montée en boucle fermée que l'on peut estimer en utilisant la relation approchée suivante :

$$\omega_{c0}t_m \approx 3 \quad \Rightarrow \quad t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5{,}7} = 0{,}53 \text{ s}$$

Si on souhaite régler le temps de montée sur 0,2 s, on doit avoir :

$$\omega_{c0}t_m \approx 3 \quad \Rightarrow \quad \omega_{c0} \approx \frac{3}{0{,}2} = 15 \text{ rad/s}$$

Pour obtenir une telle pulsation de coupure à 0 dB, il faut changer la valeur de K :

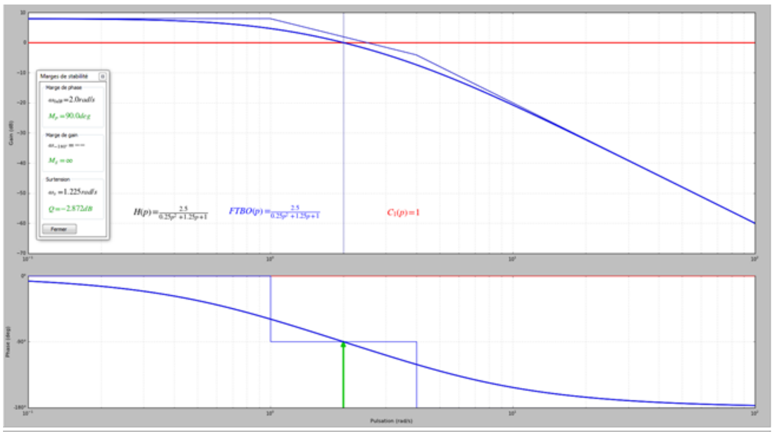
Par définition : $$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega_{c0}^2}\sqrt{16+\omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent : $$K = \sqrt{1+\omega_{c0}^2}\sqrt{16+\omega_{c0}^2} = 233{,}4$$

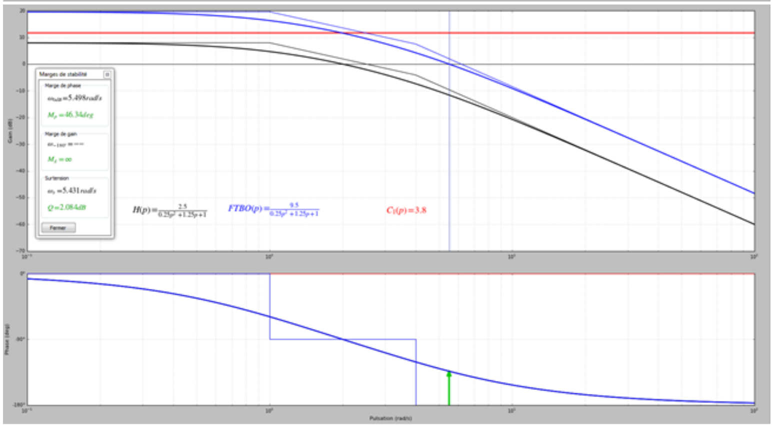
La marge de phase a bien évidemment changé :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan\omega_{c0} - \arctan\frac{\omega_{c0}}{4} = 0{,}326 \text{ rad} = 18{,}7\,°$$

Ce résultat montre bien qu'en cherchant à augmenter la rapidité d'un système par une correction proportionnelle, on dégrade sa stabilité.



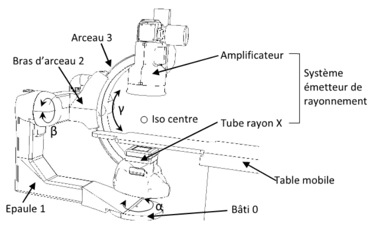
Marges de stabilité
Marge de phase
$\omega_{0dB} = 2.0 rad/s$
$M_\varphi = 90.0 deg$
Marge de gain
$M_g = \infty$
Surtension
$\omega_r = 1.225 rad/s$
$Q = -2.872 dB$
Fermer
$H(p) = \frac{2.5}{0.25p^2+1.25p+1}$
$FTBO(p) = \frac{2.5}{0.25p^2+1.25p+1}$
$C_1(p) = 1$
Pulsation (rad/s)

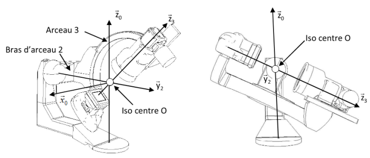


Marges de stabilité
Marge de phase
$\omega_{0dB} = 5.498 rad/s$
$M_\varphi = 46.34 deg$
Marge de gain
$M_g = \infty$
Surtension
$\omega_r = 5.431 rad/s$
$Q = 2.084 dB$
Fermer
$H(p) = \frac{2.5}{0.25p^2+1.25p+1}$
$FTBO(p) = \frac{9.5}{0.25p^2+1.25p+1}$
$C_1(p) = 3.8$
Pulsation (rad/s)

Colle 4
Imagerie médicale – Sujet

F. Mathurin.





L'étude porte sur un système permettant de réaliser des imageries médicales de vaisseaux sanguins sur un patient. Ce système, conçu par General Electric Medical System, envoie des rayons X dans le corps du patient et mesure leur rayonnement. En fonction des informations reçues, une image de synthèse en 3 dimensions est réalisée, permettant de voir les éventuels problèmes médicaux à venir.

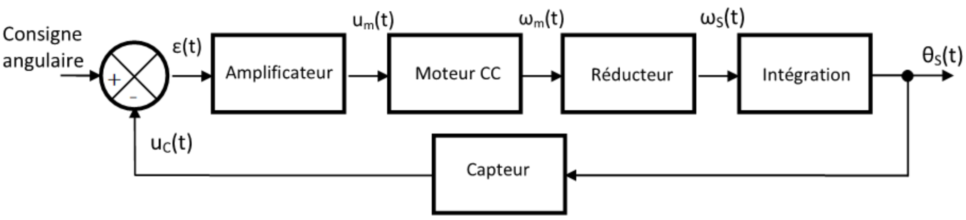
Ce système est constitué des éléments suivants : le bâti 0, une épaule 1 qui peut être mis en mouvement par rapport au bâti 0, un bras d'arceau 2 qui peut s'orienter par rapport à l'épaule 1 et un arceau 3 qui se déplace par rapport à bras d'arceau 2. Le patient est situé sur une table mobile. Le réglage en hauteur du patient sur la table mobile est possible pour son confort mais n'est pas utilisé au cours d'une analyse. Seuls les degrés de liberté α, β et γ sont utilisés pendant l'analyse. L'émetteur de rayons, situé sur l'arceau, focalise la vision interne du patient en un point appelé iso centre.

Sur l'image de gauche, l'arceau 3 s'oriente par rapport au bras d'arceau 2 et sur l'image de droite le bras d'arceau 2 se déplace par rapport à l'épaule 1. On donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel du système de positionnement dans la phase de vie correspondant à une mesure d'imagerie :

Exigences	Critère	Niveau
1.1	… Vitesse angulaire par axe élémentaire Stabilité (Marge de phase Mφ) …	… 10°/s ± 10% Mφ > 45° …

Conformément au cahier des charges, chaque axe élémentaire, piloté séparément, doit avoir une vitesse angulaire de 10°/s en phase de mesure. Technologiquement, la chaine d'action de chaque axe élémentaire est constituée d'un réducteur entre le moteur et l'effecteur. Ce réducteur diminue la vitesse angulaire d'un facteur 558.

On s'intéresse à l'axe permettant de déplacer le bras d'arceau 2 par rapport à l'épaule 1. La structure de la chaine fonctionnelle asservie de cet axe est la suivante :



Les différents éléments de cette chaîne fonctionnelle sont les suivants :

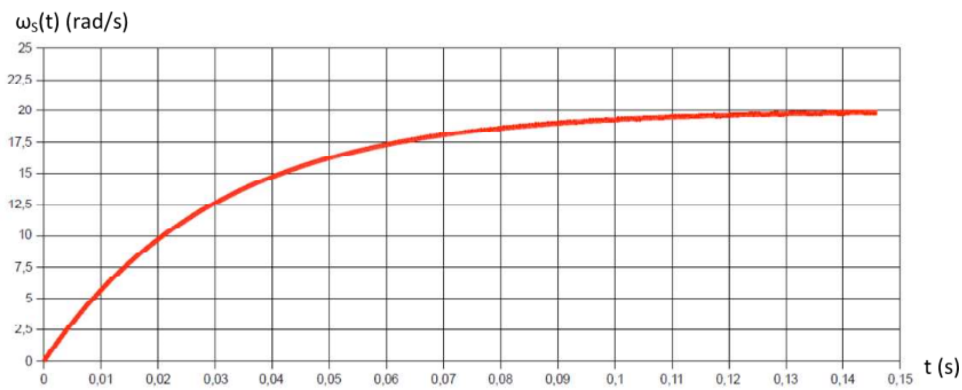
- l'amplificateur est un gain pur : K_a ;
- le réducteur est un gain pur K_r (sans dimension) ;
- le capteur est un gain pur : K_c ;
- le moteur est un système d'ordre 1, de constante de temps T_m et de gain K_m. On note la fonction de transfert du moteur $H_m(p)$.

Question 1 Déterminer la valeur numérique du bloc du réducteur K_r.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en chaîne directe FTCD(p), la fonction de transfert en boucle ouvert FTBO(p) et la fonction de transfert en boucle fermée FTBF(p) de cet asservissement. Exprimer les résultats en fonction de K_a, K_m, K_r, K_c et T_m.

Question 3 Montrer que la fonction de transfert en boucle fermée de ce système peut s'écrire sous la forme d'un deuxième ordre $\dfrac{K}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$. Donner l'expression littérale de K, z et ω_0 en fonction de K_a, K_m, K_r, K_c et T_m .

Question 4 La réponse du système à cette entrée en échelon de tension $u_m(t) = 10u(t)$ a été mesurée en sortie du réducteur. On donne ci-contre la courbe obtenue. Déterminer les valeurs numériques expérimentales de K_m et T_m à partir de la courbe.

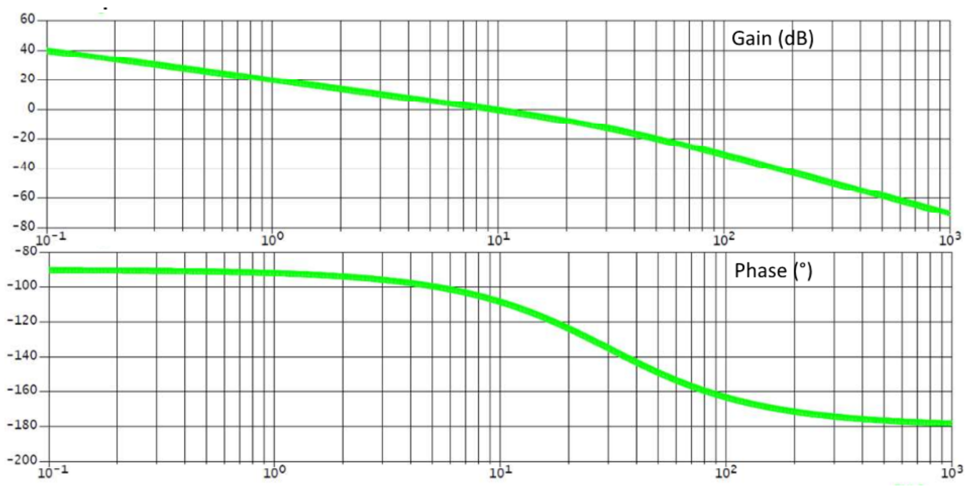


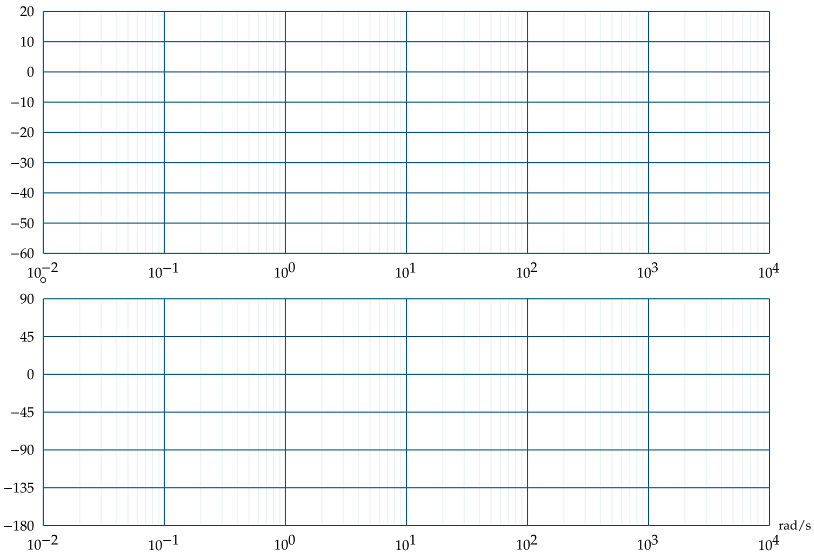
Avec les valeurs numériques des coefficients des différents gains, on peut déterminer la valeur numérique de a fonction de transfert en boucle ouverte : FTBO(p) = $\dfrac{10}{p\left(1+\dfrac{1}{30}p\right)}$.

Question 5 Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction de transfert en boucle ouverte sur le diagramme vierge en bleu.

Question 6 Calculer le gain et la phase exacte pour $\omega = 30\,\text{rad/s}$.

Question 7 On donne les tracés réels des courbes de gain et de phase de la FTBO. Déterminer la pulsation qui annule le gain puis déterminer la marge de phase du système Mφ. Conclure quant à la capacité du système à satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges.

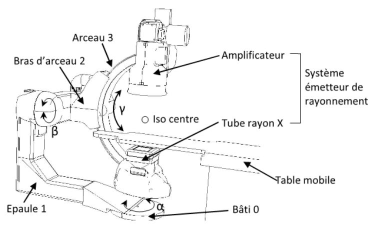

Gain (dB)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Phase (°)
-80
-100
-120
-140
-160
-180
-200
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}


20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
90
45
0
−45
−90
−135
−180
rad/s
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}

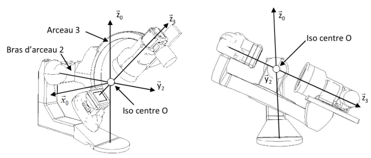
Colle 4
Imagerie médicale – Corrigé

F. Mathurin.

L'étude porte sur un système permettant de réaliser des imageries médicales de vaisseaux sanguins sur un patient. Ce système, conçu par General Electric Medical System, envoie des rayons X dans le corps du patient et mesure leur rayonnement. En fonction des informations reçues, une image de synthèse en 3 dimensions est réalisée, permettant de voir les éventuels problèmes médicaux à venir.



Ce système est constitué des éléments suivants : le bâti 0, une épaule 1 qui peut être mis en mouvement par rapport au bâti 0, un bras d'arceau 2 qui peut s'orienter par rapport à l'épaule 1 et un arceau 3 qui se déplace par rapport à bras d'arceau 2. Le patient est situé sur une table mobile. Le réglage en hauteur du patient sur la table mobile est possible pour son confort mais n'est pas utilisé au cours d'une analyse. Seuls les degrés de liberté α, β et γ sont utilisés pendant l'analyse. L'émetteur de rayons, situé sur l'arceau, focalise la vision interne du patient en un point appelé iso centre.

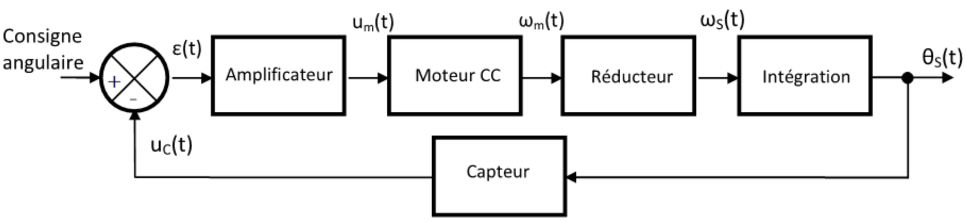


Sur l'image de gauche, l'arceau 3 s'oriente par rapport au bras d'arceau 2 et sur l'image de droite le bras d'arceau 2 se déplace par rapport à l'épaule 1. On donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel du système de positionnement dans la phase de vie correspondant à une mesure d'imagerie :

Exigences	Critère	Niveau
1.1	… Vitesse angulaire par axe élémentaire Stabilité (Marge de phase Mφ) …	… 10°/s ± 10% Mφ > 45° …

Conformément au cahier des charges, chaque axe élémentaire, piloté séparément, doit avoir une vitesse angulaire de 10°/s en phase de mesure. Technologiquement, la chaine d'action de chaque axe élémentaire est constituée d'un réducteur entre le moteur et l'effecteur. Ce réducteur diminue la vitesse angulaire d'un facteur 558.

On s'intéresse à l'axe permettant de déplacer le bras d'arceau 2 par rapport à l'épaule 1. La structure de la chaine fonctionnelle asservie de cet axe est la suivante :



Les différents éléments de cette chaîne fonctionnelle sont les suivants :

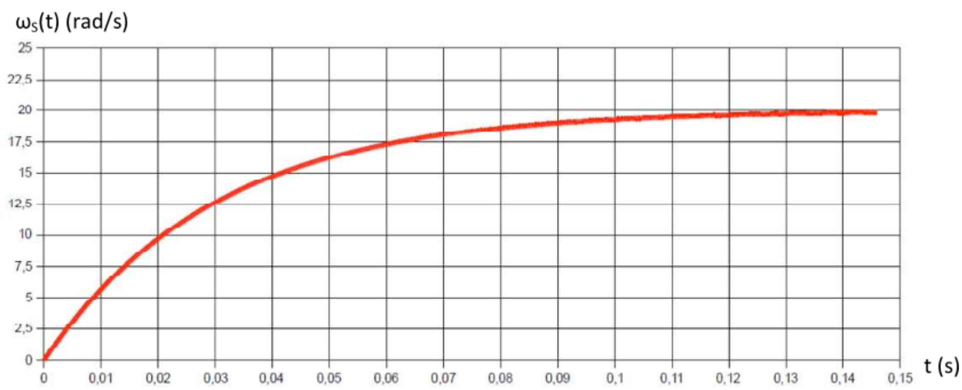
- l'amplificateur est un gain pur : K_a ;
- le réducteur est un gain pur K_r (sans dimension) ;
- le capteur est un gain pur : K_c ;
- le moteur est un système d'ordre 1, de constante de temps T_m et de gain K_m. On note la fonction de transfert du moteur $H_m(p)$.

Question 1 Déterminer la valeur numérique du bloc du réducteur K_r.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en chaîne directe FTCD(p), la fonction de transfert en boucle ouvert FTBO(p) et la fonction de transfert en boucle fermée FTBF(p) de cet asservissement. Exprimer les résultats en fonction de K_a, K_m, K_r, K_c et T_m.

Question 3 Montrer que la fonction de transfert en boucle fermée de ce système peut s'écrire sous la forme d'un deuxième ordre $\dfrac{K}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$. Donner l'expression littérale de K, z et ω_0 en fonction de K_a, K_m, K_r, K_c et T_m .

Question 4 La réponse du système à cette entrée en échelon de tension $u_m(t) = 10u(t)$ a été mesurée en sortie du réducteur. On donne ci-contre la courbe obtenue. Déterminer les valeurs numériques expérimentales de K_m et T_m à partir de la courbe.

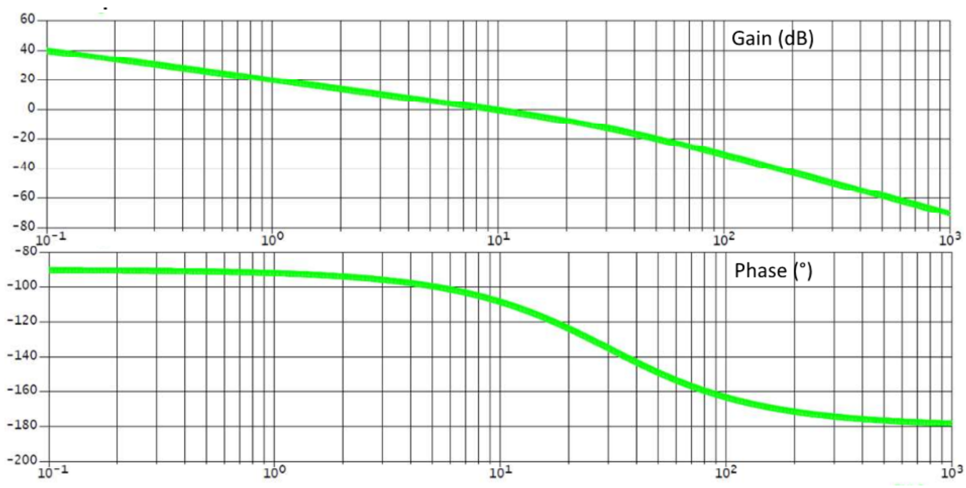


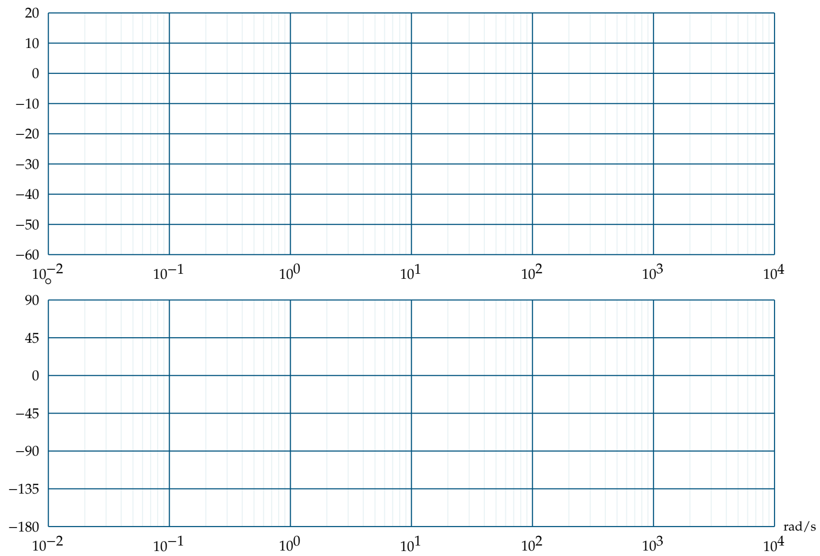
Avec les valeurs numériques des coefficients des différents gains, on peut déterminer la valeur numérique de a fonction de transfert en boucle ouverte : FTBO(p) = $\dfrac{10}{p\left(1+\dfrac{1}{30}p\right)}$.

Question 5 Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction de transfert en boucle ouverte sur le diagramme vierge en bleu.

Question 6 Calculer le gain et la phase exacte pour $\omega = 30\,\text{rad/s}$.

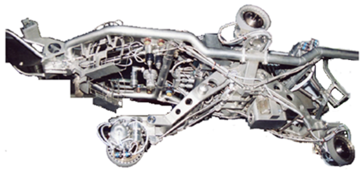
Question 7 On donne les tracés réels des courbes de gain et de phase de la FTBO. Déterminer la pulsation qui annule le gain puis déterminer la marge de phase du système Mφ. Conclure quant à la capacité du système à satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges.


Gain (dB)
Phase (°)


rad/s

Colle 5
Robot MIR : Machine d'inspection des réacteurs rapides – Sujet

E3A MP – 2012.



Mise en situation

Le robot MIR développé pour la vérification des cuves de Superphenix doit être adapté pour le contrôle d'une nouvelle génération de réacteurs à neutrons rapides.

L'objectif du robot MIR est de :

- assurer le contrôle surfacique télévisuel des soudures des deux cuves et des zones adjacentes ;
- assurer le contrôle volumique par ultrasons des soudures de la cuve principale et des zones adjacentes. Une possibilité était offerte d'effectuer ce contrôle sur la cuve de sécurité ;
- mesurer en permanence la distance entre les deux cuves.

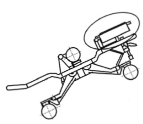
Étude de la fonction Ft12 : Déplacer le transducteur à vitesse constante

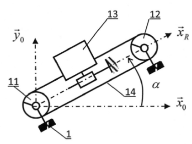
Le robot MIR étant à l'arrêt entre les deux cuves, le mini bac est plaqué contre la paroi de la cuve à contrôler. Pour l'inspection des soudures, le transducteur 13 (capteur de l'état des soudures) doit se déplacer à l'intérieur du mini bac d'inspection à vitesse constante. Le mini bac est rempli d'un fluide visqueux. L'inspection peut avoir lieu pour n'importe quelle position du robot MIR, donc l'angle α qui caractérise la direction du déplacement du transducteur par rapport à l'horizontale, est susceptible de prendre toute valeur comprise entre $-\pi/2$ (robot tête en bas) et $\pi/2$ (robot tête en haut). Afin de garantir la qualité des résultats de mesure, le transducteur doit donc se déplacer à une vitesse V_0 constante par rapport à la paroi, et ceci pour toute valeur de l'angle α.

Objectif

Qualifier la précision statique du système et définir les améliorations à apporter.

L'objectif de cette partie est de dimensionner le correcteur nécessaire au respect d'un écart statique nul, et ceci malgré le caractère variable de l'angle α.





Le transducteur est en liaison glissière de direction $\overrightarrow{x_r}$, avec le corps **1** du robot MIR. La chaîne d'énergie est composée entre autre, d'un actionneur rotatif qui exerce un couple $c(t)$ sur le pignon **11**, qui est en liaison pivot, supposée parfaite, avec le robot MIR. Un système poulies (**11** et **12**) et courroie crantée **14** impose le mouvement de translation au transducteur **13**.

Le comportement dynamique du système est régit par l'équation suivante :

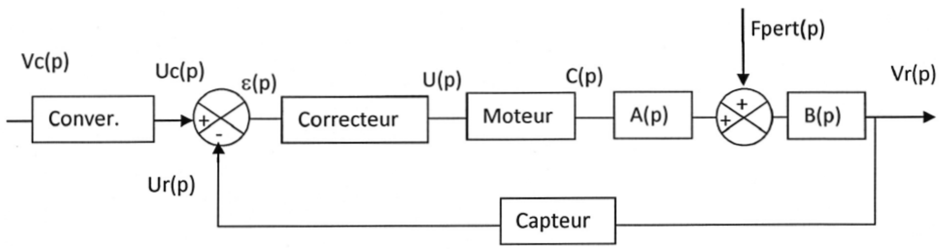
$$M_{eq}\frac{\mathrm{d}v_r(t)}{\mathrm{d}t} = \delta c(t) + \beta v_r(t) + \gamma g u(t)$$

avec $u(t)$ échelon unitaire[1].

1: En passant dans le domaine de Laplace, $u(t)$ est donc transformé en $\frac{1}{p}$

On cherche à garantir une vitesse de translation du transducteur **13** égale à la valeur de consigne indépendamment de l'angle α.

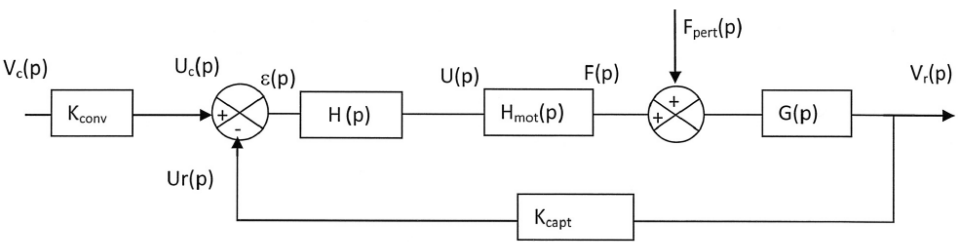
Pour cela, on réalise le système bouclé suivant :



Question 1 En supposant des conditions initiales nulles, et que $F_{\text{pert}}(p) = 0$ exprimer les fonctions de transfert $A(p)$ et $B(p)$ en fonction entre autres de δ, β et M_{eq}.

Le capteur est modélisé par un gain pur de valeur K_{capt}.

Question 2 En supposant une perturbation nulle, quelle doit être la valeur du gain K_{conv} du convertisseur modélisé par un gain pur, afin que l'écart $\varepsilon(t)$ soit nul quand la valeur de la vitesse réelle $v_r(t)$ est égale à la valeur de la consigne $v_c(t)$. On adopte pour la suite la modélisation suivante :



Avec $H_{\text{mot}}(p) = \dfrac{K_m}{1+\tau_m p}$, $G(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$ et $H(p) = K_{\text{cor}}$ fonction de transfert du correcteur.

Question 3 Exprimer les deux fonctions de transfert : $H_1(p) = \left(\dfrac{V_r(p)}{V_c(p)}\right)_{F_{\text{pert}}(p)=0}$ et $H_2(p) = \left(\dfrac{V_r(p)}{F_{\text{pert}}(p)}\right)_{V_c(p)=0}$ en fonction des gains K_{conv}, K_{cor}, et K_{capt} ainsi que des fonctions de transfert $H_{\text{mot}}(p)$ et $G(p)$.

Question 4 En supposant que $K_{\text{cor}} = 1$ et en indiquant les valeurs remarquables, tracer les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $\dfrac{U_r(p)}{\varepsilon(p)}$ en utilisant les valeurs numériques suivantes : $K_m = 0{,}1\,\mathrm{N\,V^{-1}}$, $\tau_m = 0{,}01\,\mathrm{s}$, $K_{\text{capt}} = 50\,\mathrm{V\,s\,m^{-1}}$, $K = 200\,\mathrm{m\,s^{-1}\,N^{-1}}$, $\tau = 1\,\mathrm{s}$.

Question 5 Déterminer le gain en décibel de la fonction de transfert en boucle ouverte (courbe réelle) pour la pulsation de $100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

On formule l'hypothèse simplificatrice suivante : la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte pour une pulsation de 100 rad/s est de $-135°$.

Question 6 On souhaite une marge de gain 12 dB et un marge de phase de 45°, en utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la valeur numérique correspondante de K_{cor}. Commenter la valeur de la marge de gain obtenue ?

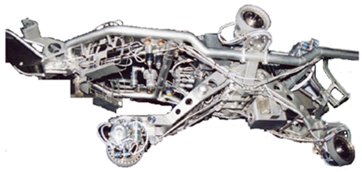
Question 7 On impose une vitesse constante en entrée de valeur v_0 ($v_c(t) = v_0.u(t)$) avec $u(t)$ fonction échelon unitaire de Heaviside. Exprimer l'écart statique en régime permanent en tenant compte de la perturbation (en fonction de l'angle α, de la valeur de K_{cor} et des données).

On souhaite obtenir une vitesse de translation indépendante de l'inclinaison. Pour toute la suite du sujet, on installe un correcteur intégral du type $\dfrac{K_c}{p}$, placé au début de la chaîne d'action.

Question 8 On impose de nouveau une vitesse constante en entrée de valeur v_0 ($v_c(t) = v_0.u(t)$) ; exprimer l'expression du nouvel écart statique en régime permanent (en fonction de l'angle α et des données). Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Colle 5
Robot MIR : Machine d'inspection des réacteurs rapides – Corrigé

E3A MP – 2012.



Mise en situation

Le robot MIR développé pour la vérification des cuves de Superphenix doit être adapté pour le contrôle d'une nouvelle génération de réacteurs à neutrons rapides.

L'objectif du robot MIR est de :

- assurer le contrôle surfacique télévisuel des soudures des deux cuves et des zones adjacentes ;
- assurer le contrôle volumique par ultrasons des soudures de la cuve principale et des zones adjacentes. Une possibilité était offerte d'effectuer ce contrôle sur la cuve de sécurité ;
- mesurer en permanence la distance entre les deux cuves.

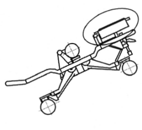
Étude de la fonction Ft12 : Déplacer le transducteur à vitesse constante

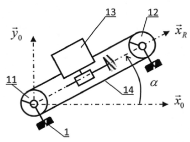
Le robot MIR étant à l'arrêt entre les deux cuves, le mini bac est plaqué contre la paroi de la cuve à contrôler. Pour l'inspection des soudures, le transducteur 13 (capteur de l'état des soudures) doit se déplacer à l'intérieur du mini bac d'inspection à vitesse constante. Le mini bac est rempli d'un fluide visqueux. L'inspection peut avoir lieu pour n'importe quelle position du robot MIR, donc l'angle α qui caractérise la direction du déplacement du transducteur par rapport à l'horizontale, est susceptible de prendre toute valeur comprise entre $-\pi/2$ (robot tête en bas) et $\pi/2$ (robot tête en haut). Afin de garantir la qualité des résultats de mesure, le transducteur doit donc se déplacer à une vitesse V_0 constante par rapport à la paroi, et ceci pour toute valeur de l'angle α.

Objectif

Qualifier la précision statique du système et définir les améliorations à apporter.

L'objectif de cette partie est de dimensionner le correcteur nécessaire au respect d'un écart statique nul, et ceci malgré le caractère variable de l'angle α.





Le transducteur est en liaison glissière de direction $\overrightarrow{x_r}$, avec le corps **1** du robot MIR. La chaîne d'énergie est composée entre autre, d'un actionneur rotatif qui exerce un couple $c(t)$ sur le pignon **11**, qui est en liaison pivot, supposée parfaite, avec le robot MIR. Un système poulies (**11** et **12**) et courroie crantée **14** impose le mouvement de translation au transducteur **13**.

Le comportement dynamique du système est régit par l'équation suivante :

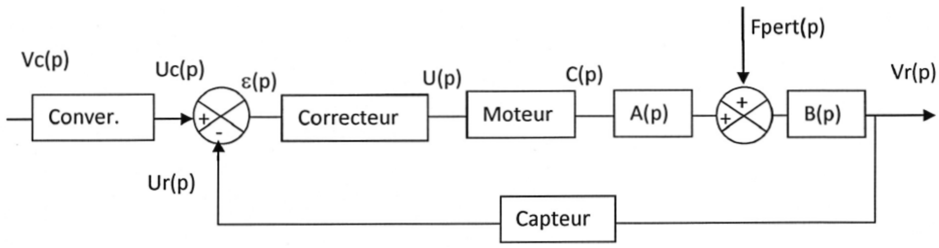
$$M_{eq}\frac{\mathrm{d}v_r(t)}{\mathrm{d}t} = \delta c(t) + \beta v_r(t) + \gamma g u(t)$$

avec $u(t)$ échelon unitaire[2].

2: En passant dans le domaine de Laplace, $u(t)$ est donc transformé en $\frac{1}{p}$

On cherche à garantir une vitesse de translation du transducteur **13** égale à la valeur de consigne indépendamment de l'angle α.

Pour cela, on réalise le système bouclé suivant :



Question 1 En supposant des conditions initiales nulles, et que $F_{\text{pert}}(p) = 0$ exprimer les fonctions de transfert $A(p)$ et $B(p)$ en fonction entre autres de δ, β et M_{eq}.

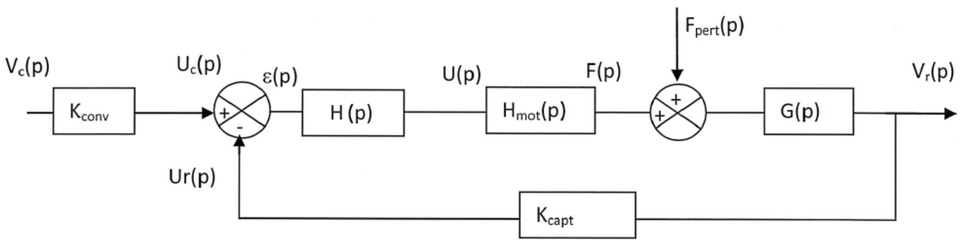
Correction

Le capteur est modélisé par un gain pur de valeur K_{capt}.

Question 2 En supposant une perturbation nulle, quelle doit être la valeur du gain K_{conv} du convertisseur modélisé par un gain pur, afin que l'écart $\varepsilon(t)$ soit nul quand la valeur de la vitesse réelle $v_r(t)$ est égale à la valeur de la consigne $v_c(t)$.

Correction

On adopte pour la suite la modélisation suivante :



Avec $H_{\text{mot}}(p) = \dfrac{K_m}{1+\tau_m p}$, $G(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$ et $H(p) = K_{\text{cor}}$ fonction de transfert du correcteur.

Question 3 Exprimer les deux fonctions de transfert : $H_1(p) = \left(\dfrac{V_r(p)}{V_c(p)}\right)_{F_{\text{pert}}(p)=0}$ et $H_2(p) = \left(\dfrac{V_r(p)}{F_{\text{pert}}(p)}\right)_{V_c(p)=0}$ en fonction des gains K_{conv}, K_{cor}, et K_{capt} ainsi que des fonctions de transfert $H_{\text{mot}}(p)$ et $G(p)$.

Correction

Question 4 En supposant que $K_{\text{cor}} = 1$ et en indiquant les valeurs remarquables, tracer les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $\dfrac{U_r(p)}{\varepsilon(p)}$ en utilisant les valeurs numériques suivantes : $K_m = 0{,}1\,\text{N}\,\text{V}^{-1}$, $\tau_m = 0{,}01\,\text{s}$, $K_{\text{capt}} = 50\,\text{V}\,\text{s}\,\text{m}^{-1}$, $K = 200\,\text{m}\,\text{s}^{-1}\,\text{N}^{-1}$, $\tau = 1\,\text{s}$.

Correction

Question 5 Déterminer le gain en décibel de la fonction de transfert en boucle ouverte (courbe réelle) pour la pulsation de $100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Correction

On formule l'hypothèse simplificatrice suivante : la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte pour une pulsation de 100 rad/s est de −135°.

Question 6 On souhaite une marge de gain 12 dB et un marge de phase de 45°, en utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la valeur numérique correspondante de K_{cor}. Commenter la valeur de la marge de gain obtenue ?

Correction

Question 7 On impose une vitesse constante en entrée de valeur v_0 ($v_c(t) = v_0.u(t)$) avec $u(t)$ fonction échelon unitaire de Heaviside. Exprimer l'écart statique en régime permanent en tenant compte de la perturbation (en fonction de l'angle α, de la valeur de K_{cor} et des données).

Correction

On souhaite obtenir une vitesse de translation indépendante de l'inclinaison. Pour toute la suite du sujet, on installe un correcteur intégral du type $\dfrac{K_c}{p}$, placé au début de la chaîne d'action.

Question 8 On impose de nouveau une vitesse constante en entrée de valeur v_0 ($v_c(t) = v_0.u(t)$) ; exprimer l'expression du nouvel écart statique en régime permanent (en fonction de l'angle α et des données). Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Correction

Q22

Dans le domaine de Laplace :

$$M_{equ}pV_r(p) = \delta C(p) + \beta V_r(p) + \frac{\gamma g}{p}$$

$$V_r(p) = \frac{\delta C(p)}{-\beta + M_{equ}p} + \frac{1}{(-\beta + M_{equ}p)}\frac{\gamma g}{p} = \frac{-\frac{1}{r_p}C(p)}{\mu + M_{equ}p} + \frac{1}{\mu + M_{equ}p}\frac{-m_t sin\alpha g}{p}$$

$$A(p) = \delta = -\frac{1}{r_p}$$

$$B(p) = \frac{1}{-\beta + M_{equ}p} = \frac{1}{\mu + M_{equ}p}$$

Q23

$K_{conv}=K_{capt}$

Q24

$$H_1(p) = \frac{K_{conv}H(p)H_{mot}(p)G(p)}{1 + K_{capt}H(p)H_{mot}(p)G(p)}$$

$$H_1(p) = \frac{K_{conv}K_{cor}K_mK}{(1+\tau_m p)(1+\tau p) + K_{capt}K_{cor}K_mK}$$

$$H_2(p) = \frac{G(p)}{1 + K_{capt}H(p)H_{mot}(p)G(p)}$$

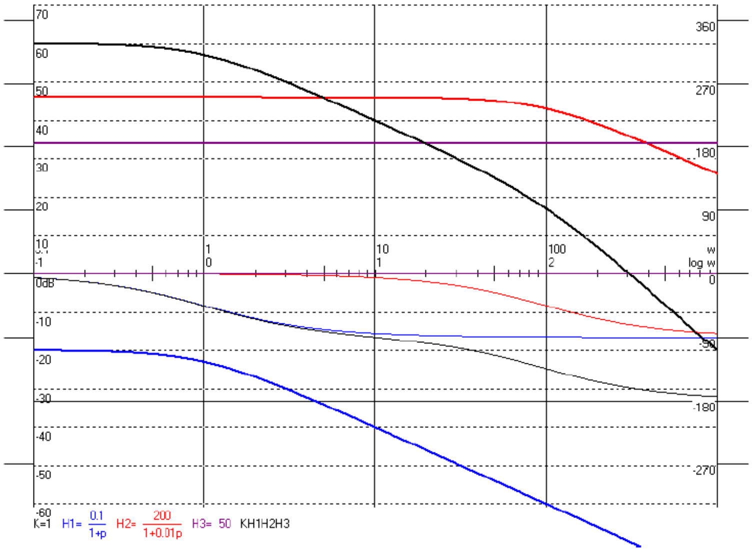
$$H_2(p) = \frac{K(1+\tau p)}{(1+\tau_m p)(1+\tau p) + K_{capt}K_{cor}K_mK}$$

Q25

$H(p)= K_{cor}$

$\frac{U_r(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_{cor}K_mKK_{capt}}{(1+\tau_m.p)(1+\tau.p)}$ produit de 2 FT du premier ordre : pentes 0dB/decade, -20dB/decade à partir de 1 rd/s, -40dB/decade à partir de 100 rd/s

$$\frac{U_r(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1000}{(1+p)(1+0.01p)}$$



Q26

100rd/s est la 2ème cassure.

Chute de 40db par rapport au gain statique : $gain_{10}$=60-40=20db

La valeur de la courbe réelle pour cette pulsation est 3dB en dessous de l'asymptote d'où un gain =+17dB

φ_{100}=-135°

Q27

La marge de phase de 45° correspond à ω= 100rd/s ($1/\tau_m$)

Le gain vaut +17db. Il faut donc le baisser de 17 db pour avoir un gain nul pour cette pulsation.

Ce qui fait Kcor=$10^{-17/20}$=0.1414

La marge de gain est infinie car la phase n'atteint jamais les -180°.

Q28

$$H_1(0) = \frac{K_{conv}K_{cor}K_mK}{1 + K_{capt}K_{cor}K_mK}$$

$$H_2(0) = \frac{K}{1 + K_{capt}K_{cor}K_mK}$$

$$v_r = \frac{K_{conv}K_{cor}K_mK}{1 + K_{capt}K_{cor}K_mK}v_0 - \frac{Km_t sin\alpha g}{1 + K_{capt}K_{cor}K_mK}$$

écart statique : $K_{conv}.v_0 - K_{capt}.v_r$

Q29

$$H_1(p) = \frac{K_{conv}H(p)H_{mot}(p)G(p)}{1 + K_{capt}H(p)H_{mot}(p)G(p)}$$

$$H_1(p) = \frac{K_{conv}H(p)K_mK}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau p) + K_{capt}H(p)K_mK}$$

$$H_1(p) = \frac{K_{conv}K_cK_mK}{p(1 + \tau_m p)(1 + \tau p) + K_{capt}K_cK_mK}$$

$H_1(p)=1$

$$H_2(p) = \frac{G(p)}{1 + K_{capt}H(p)H_{mot}(p)G(p)}$$

$$H_2(p) = \frac{pK(1 + \tau p)}{p(1 + \tau_m p)(1 + \tau p) + K_{capt}K_cK_mK}$$

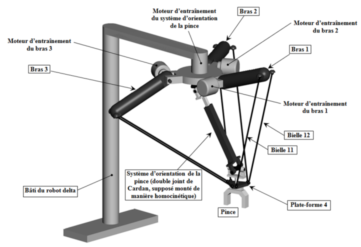
$H_2(0)=0$

Le gain statique vaut 1, l'erreur statique est nulle.
C'était prévisible grâce à l'intégrateur dans la chaîne directe, placé en amont du point d'entrée de la perturbation.

Colle 6
Préhenseur – Sujet

Présentation

Une usine de fabrication de flacons en verre possède un poste de mise en cartons qui est l'objet de la présente étude. Ce poste est équipé de deux robots permettant de déplacer les flacons, déplacer des cartons, détecter des flacons dans des cartons, ranger des flacons dans les cartons. Ces robots sont de type « Delta » à architecture parallèle.



Architecture de la commande

On se propose ici de valider le niveau des performances de la commande de l'axe d'orientation de la pince.

Les fonctions dans le domaine temporel seront notées en minuscule, alors que celles dans le domaine de Laplace seront notées en majuscule : par exemple : $\omega(t)$ et $\mathcal{L}(\omega(t)) = \Omega(t)$.

Le servo-entraînement met en rotation un arbre télescopique muni à chacune de ses extrémités d'un joint de Cardan. Le mouvement d'orientation de la pince est indépendant des mouvements de la plate-forme 4. Afin d'assurer un bon positionnement angulaire de la pince P, la commande de sa rotation est asservie de la façon suivante :

- la consigne de position θ_{PC}, entrée par l'utilisateur grâce à une interface graphique (lors des réglages) ou imposée par la Partie Commande (lors des cycles de travail), est transformée en une tension v_{PC} grâce à un convertisseur qui sera assimilé à un système de gain pur K_C (en V rad^{-1}).
- la vitesse de rotation ω_M (en rad s^{-1}) et l'angle de rotation θ_M (en rad) de l'arbre moteur sont mesurés par un codeur incrémental, monté directement sur l'arbre moteur, qui délivre une information numérique ; celle-ci est alors transformée par une carte de conversion numérique-analogique (C.A.N.) supposée linéaire en deux tensions v_ω et v_θ telles que :
  - pour la vitesse : $v_\omega = K_\omega \omega_M$,
  - pour la position : $v_\theta = K_\theta \theta_M$;
- la tension v_θ (image de la rotation θ_M du moteur) est soustraite à la tension v_{PC} pour donner la tension ε_P ;
- cette tension ε_P est modifiée par un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ pour donner la tension ε_{VP} ;
- la tension v_ω (image de la vitesse de rotation ω_M du moteur) est soustraite à la tension ε_{VP} en sortie du correcteur pour donner la tension ε_v ;
- cette tension ε_v est amplifiée par un amplificateur de gain pur G pour donner la tension d'alimentation du moteur u_M ; le moteur tourne alors à la vitesse angulaire ω_M telle que $\Omega_M(p) = M(p)U_M(p)$;

- la rotation θ_{EC} de la pièce d'entrée du double joint de Cardan est telle que $\theta_{EC} = \lambda\theta_M$, grâce au réducteur de vitesse fixé sur l'arbre moteur ;
- le double joint de Cardan est homocinétique et a pour fonction de transfert $R(p) = 1$ (l'entrée est l'angle θ_{EC}, et la sortie est $\theta_{SC} = \theta_P$ où θ_P est la rotation de la pince fixée sur la pièce de sortie du double joint de Cardan).

Question 1 Tracer le schéma bloc d'asservissement en position, d'entrée $\theta_{PC}(p)$ et de sortie $\theta_P(p)$, faisant apparaître toutes les variables et les fonctions de transfert définies ci-dessus.

Performances de la commande

Le servo-entraînement utilisé est le AXL305RS330E5 qui est composé du moteur RS330E, du variateur 10/20-60 et du réducteur GB à train épicycloïdal de réduction $\lambda = 0,2$. Le moteur RS330E a comme caractéristiques :

- constante de force électromotrice : $K_E = 14{,}3\,\text{V}/1000\text{tours}\,\text{min}^{-1}$;
- constante de couple : $K_T = 0{,}137\,\text{N}\,\text{m}\,\text{A}^{-1}$;
- résistance de l'induit : $R_I = 1\,\Omega$;
- inductance de l'induit : $L_I = 1{,}65\,\text{mH}$;
- frottement visqueux rapporté à l'axe de rotation du moteur négligeable ;
- inertie du rotor + de la charge entraînée rapportée à l'axe de rotation du moteur : $J = 12 \times 10^{-5}\text{kg}\,\text{m}^2$.

On donne : $\lambda = 0,2$ et $K_\theta = 0{,}01\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}$.

Question 2 On veut que lorsque la pince atteint la position demandée (soit $\theta_P = \theta_{PC}$) l'écart $\varepsilon_P = v_{PC} - v_\theta$ soit nul. En déduire la relation entre K_C, K_θ et λ puis la valeur numérique de K_C qui permette d'assurer cet écart nul.

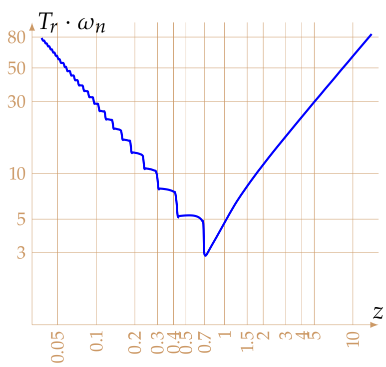
À partir des équations du moteur à courant continu, on obtient la fonction de transfert suivante : $M(p) = \dfrac{\Omega_M(p)}{U_M(p)} = \dfrac{K_T}{K_E K_T + JRp + JLp^2}$. On donne $K_\omega = 6\,\text{V}/1000\text{ tours}\,\text{min}^{-1}$.

Question 3 Déterminer l'expression littérale et la valeur numérique du gain G de l'amplificateur pour que la boucle tachymétrique (d'entrée ε_{VP} et de sortie ω_M) présente un temps de réponse à 5% minimum pour une entrée en échelon. Quel est alors le temps de réponse à 5 % ?

Avec la valeur de G trouvée précédemment, on a alors calculé la fonction de transfert de boucle (ou en boucle ouverte) suivante pour l'asservissement en position : $H_B(p) = \dfrac{V_\theta(p)}{\varepsilon_P} = C(p)\dfrac{86}{p\left(10^3 + 3,2p + 5,310^{-3}p^2\right)}$.

Les exigences de l'orientation du flacon sont données dans le tableau suivant.

Fonction	Critères	Niveaux
Orienter le flacon	Stabilité	Marge de phase $M\varphi > 45°$
		Marge de gain $MG > 10\,\text{dB}$
	Précision	Écart statique nul à une entrée en échelon $\varepsilon_\infty = 0$
	Rapidité	Bande passante à 0 dB de la fonction $H_B(p)$: $BP_0 > 50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. On définit la bande passante par sa largeur de bande (ici : $50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$).



On considère pour l'instant que le système n'est pas corrigé : $C(p) = 1$.

Question 4 Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode en amplitude et phase de la fonction de transfert $H_{BO}(p)$ du système non corrigé en plaçant avec précision les points caractéristiques.

Pour la fin, la courbe de gain sera assimilée à son tracé asymptotique.

Question 5 Déterminer les valeurs de $M\varphi$, marge de phase, MG, marge de gain et BP_0, bande passante à 0 dB de la fonction de transfert $H_B(p)$. Les critères de la fonction précédente sont-ils vérifiés ?

Question 6 Vérifier les valeurs des marges par le calcul.

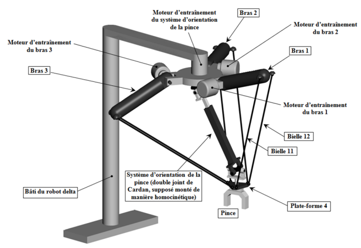
On prend une correction proportionnelle : $C(p) = C_0$.

Question 7 Déterminer la bande de valeurs de C_0 qui permettent de vérifier les critères du cahier des charges partiel donné précédemment.

Colle 6
Préhenseur – Corrigé

Présentation

Une usine de fabrication de flacons en verre possède un poste de mise en cartons qui est l'objet de la présente étude. Ce poste est équipé de deux robots permettant de déplacer les flacons, déplacer des cartons, détecter des flacons dans des cartons, ranger des flacons dans les cartons. Ces robots sont de type « Delta » à architecture parallèle.



Architecture de la commande

On se propose ici de valider le niveau des performances de la commande de l'axe d'orientation de la pince.

Les fonctions dans le domaine temporel seront notées en minuscule, alors que celles dans le domaine de Laplace seront notées en majuscule : par exemple : $\omega(t)$ et $\mathcal{L}(\omega(t)) = \Omega(t)$.

Le servo-entraînement met en rotation un arbre télescopique muni à chacune de ses extrémités d'un joint de Cardan. Le mouvement d'orientation de la pince est indépendant des mouvements de la plate-forme 4. Afin d'assurer un bon positionnement angulaire de la pince P, la commande de sa rotation est asservie de la façon suivante :

- la consigne de position θ_{PC}, entrée par l'utilisateur grâce à une interface graphique (lors des réglages) ou imposée par la Partie Commande (lors des cycles de travail), est transformée en une tension v_{PC} grâce à un convertisseur qui sera assimilé à un système de gain pur K_C (en V rad^{-1}).
- la vitesse de rotation ω_M (en rad s^{-1}) et l'angle de rotation θ_M (en rad) de l'arbre moteur sont mesurés par un codeur incrémental, monté directement sur l'arbre moteur, qui délivre une information numérique ; celle-ci est alors transformée par une carte de conversion numérique-analogique (C.A.N.) supposée linéaire en deux tensions v_ω et v_θ telles que :
  - pour la vitesse : $v_\omega = K_\omega \omega_M$,
  - pour la position : $v_\theta = K_\theta \theta_M$;
- la tension v_θ (image de la rotation θ_M du moteur) est soustraite à la tension v_{PC} pour donner la tension ε_P ;
- cette tension ε_P est modifiée par un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ pour donner la tension ε_{VP} ;
- la tension v_ω (image de la vitesse de rotation ω_M du moteur) est soustraite à la tension ε_{VP} en sortie du correcteur pour donner la tension ε_v ;
- cette tension ε_v est amplifiée par un amplificateur de gain pur G pour donner la tension d'alimentation du moteur u_M ; le moteur tourne alors à la vitesse angulaire ω_M telle que $\Omega_M(p) = M(p)U_M(p)$;

- la rotation θ_{EC} de la pièce d'entrée du double joint de Cardan est telle que $\theta_{EC} = \lambda\theta_M$, grâce au réducteur de vitesse fixé sur l'arbre moteur ;
- le double joint de Cardan est homocinétique et a pour fonction de transfert $R(p) = 1$ (l'entrée est l'angle θ_{EC}, et la sortie est $\theta_{SC} = \theta_P$ où θ_P est la rotation de la pince fixée sur la pièce de sortie du double joint de Cardan).

Question 1 Tracer le schéma bloc d'asservissement en position, d'entrée $\theta_{PC}(p)$ et de sortie $\theta_P(p)$, faisant apparaître toutes les variables et les fonctions de transfert définies ci-dessus.

Performances de la commande

Le servo-entraînement utilisé est le AXL305RS330E5 qui est composé du moteur RS330E, du variateur 10/20-60 et du réducteur GB à train épicycloïdal de réduction $\lambda = 0,2$. Le moteur RS330E a comme caractéristiques :

- constante de force électromotrice : $K_E = 14{,}3\,\text{V}/1000\text{tours}\,\text{min}^{-1}$;
- constante de couple : $K_T = 0{,}137\,\text{N}\,\text{m}\,\text{A}^{-1}$;
- résistance de l'induit : $R_I = 1\,\Omega$;
- inductance de l'induit : $L_I = 1{,}65\,\text{mH}$;
- frottement visqueux rapporté à l'axe de rotation du moteur négligeable ;
- inertie du rotor + de la charge entraînée rapportée à l'axe de rotation du moteur : $J = 12 \times 10^{-5}\text{kg}\,\text{m}^2$.

On donne : $\lambda = 0,2$ et $K_\theta = 0{,}01\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}$.

Question 2 On veut que lorsque la pince atteint la position demandée (soit $\theta_P = \theta_{PC}$) l'écart $\varepsilon_P = v_{PC} - v_\theta$ soit nul. En déduire la relation entre K_C, K_θ et λ puis la valeur numérique de K_C qui permette d'assurer cet écart nul.

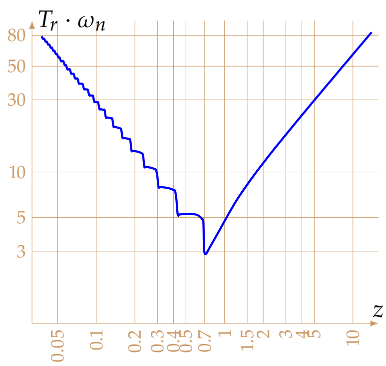
À partir des équations du moteur à courant continu, on obtient la fonction de transfert suivante : $M(p) = \dfrac{\Omega_M(p)}{U_M(p)} = \dfrac{K_T}{K_E K_T + JRp + JLp^2}$. On donne $K_\omega = 6\,\text{V}/1000$ tours min^{-1}.

Question 3 Déterminer l'expression littérale et la valeur numérique du gain G de l'amplificateur pour que la boucle tachymétrique (d'entrée ε_{VP} et de sortie ω_M) présente un temps de réponse à 5% minimum pour une entrée en échelon. Quel est alors le temps de réponse à 5 % ?

Avec la valeur de G trouvée précédemment, on a alors calculé la fonction de transfert de boucle (ou en boucle ouverte) suivante pour l'asservissement en position : $H_B(p) = \dfrac{V_\theta(p)}{\varepsilon_P} = C(p)\dfrac{86}{p\left(10^3 + 3,2p + 5,310^{-3}p^2\right)}$.

Les exigences de l'orientation du flacon sont données dans le tableau suivant.

Fonction	Critères	Niveaux
Orienter le flacon	Stabilité	Marge de phase $M\varphi > 45°$
		Marge de gain $MG > 10\,\text{dB}$
	Précision	Écart statique nul à une entrée en échelon $\varepsilon_\infty = 0$
	Rapidité	Bande passante à 0 dB de la fonction $H_B(p)$: $BP_0 > 50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. On définit la bande passante par sa largeur de bande (ici : $50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$).



On considère pour l'instant que le système n'est pas corrigé : $C(p) = 1$.

Question 4 Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode en amplitude et phase de la fonction de transfert $H_{BO}(p)$ du système non corrigé en plaçant avec précision les points caractéristiques.

Pour la fin, la courbe de gain sera assimilée à son tracé asymptotique.

Question 5 Déterminer les valeurs de $M\varphi$, marge de phase, MG, marge de gain et BP_0, bande passante à 0 dB de la fonction de transfert $H_B(p)$. Les critères de la fonction précédente sont-ils vérifiés ?

Question 6 Vérifier les valeurs des marges par le calcul.

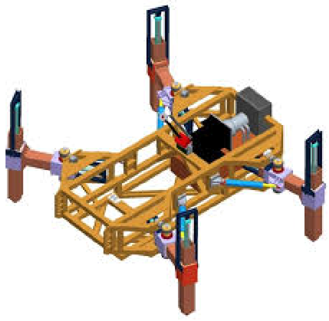
On prend une correction proportionnelle : $C(p) = C_0$.

Question 7 Déterminer la bande de valeurs de C_0 qui permettent de vérifier les critères du cahier des charges partiel donné précédemment.

TD 2
Robot de consolidation de parois rocheuses
Roboclimber – Sujet

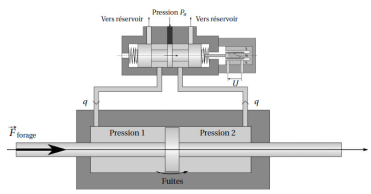
Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert.

Mise en situation



Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servovalve, elle-même commandée en tension u par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servovalve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.



Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

- précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5% ;
- rapidité de l'asservissement : $t_{5\%} = 0{,}15\,\text{s}$;
- stabilité : marge de phase de 45°, marge de gain de 10 dB ;
- sécurité du mouvement : aucun dépassement.

Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- $S = 12 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$, surface utile des pistons ;
- $b = 10^9\,\text{Pa}$: module de compressibilité du fluide utilisé ;
- $P_a = 150 \times 10^5\,\text{Pa}$: pression d'alimentation de la servovalve ;
- $K = 10^{-7}\,\text{m}^3\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}\text{Pa}^{-.5}$: constante de débit de la servovalve ;
- $\varphi = 10^{-11}\,\text{m}^3\text{Pa}^{-1}$: facteur de fuite dans le vérin ;
- $q(t)$: débit entrant et sortant du vérin ;
- V_1 et V_2 : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse : $V_1 = V_2 = V = 6 \times 10^{-4}\text{m}^3$;
- $p(t) = p_1 - p_2$: différence des pressions dans les chambres du vérin ;
- $z(t)$: déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre ;
- $M = 700\,\text{kg}$: masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot ;
- $k = 10^5\,\text{Nm}^{-1}$: raideur équivalente de la structure du robot ;

- $\mu = 100\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$: coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- $F_0 = 3000\,\mathrm{N}$: effort nominal sur le vérin ;
- $Z_0 = 50\,\mathrm{cm}$: position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur k .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe $\overrightarrow{z}$ du vérin, conduit à l'équation :

$$M\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\mu\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} - k\left(z(t) - Z_0\right) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b}\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Question 1 Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- l'inertie du robot ;
- à la raideur du robot ;
- au frottement visqueux ;
- à la pression dans la chambre ;
- à la compressibilité de l'huile ;
- au déplacement de la tige de vérin ;
- aux fuites entre les chambres.

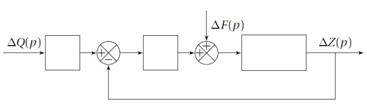
Question 2 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0, F_0 et Z_0, traduire l'équation d'équilibre du vérin.

Question 3 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $F_{\text{forage}(t)} = F_0 + \Delta F(t)$ et $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Question 4 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0, Q_0 et Z_0, traduire l'équation de bilan des débits.

Question 5 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Question 6 À partir des équations obtenues, compléter le le schéma-blocs traduisant son comportement.



Modélisation du comportement de la servovalve

La servovalve permet de fournir le débit $q(t)$ au vérin à partir d'une tension de commande $u(t)$ appliquée en entrée : la tension $u(t)$ est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante p_a et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension $u(t)$, mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire : $q(t) = Ku(t)\sqrt{p_a - p(t)}$.

Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

Question 7 Déterminer la relation liant Q_0, U_0 et P_0 au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ et $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$.

Question 8 Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servovalve et vérin, admettant en entrée la tension $\Delta U(p)$ et la force $\Delta F(p)$, et en sortie la position $\Delta Z(p)$.

Asservissement de position

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

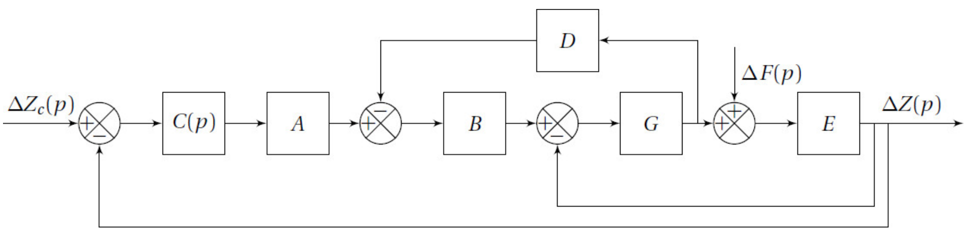
- la servovalve, qui fournit le débit $q(t)$ au vérin à partir d'un signal de commande $u(t)$;
- un capteur de position de fonction de transfert k_c , qui fournit une tension $\text{Im}(z(t))$ image de la position réelle $z(t)$;
- un correcteur $C(p)$ qui élabore la commande $u(t)$ de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre $\text{Im}(zc(t))$, image de la consigne de position, et $\text{Im}(z(t))$. $\text{Im}(zc(t))$ est obtenue grâce à un adaptateur K_a situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

Question 9 Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

Question 10 Préciser l'expression de l'adaptateur K_a pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où A, B, C, D, E, et G sont utilisés pour simplifier les calculs.

Question 11 À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.



Validation des performances pour une correction unitaire $C(p) = 1$

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle fermée, $\text{FTBF}(p) = \dfrac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2} p + 1,78 \times 10^{-4} p^2 + 4,8 \times 10^{-6} p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$ et $p_3 = -30,4$ (en rad/s).

Question 12 Le système est-il stable ? Est-il précis ?

Question 13 À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

Question 14 À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassements.

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte, $\text{FTBO}(p) = \dfrac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2} p + 7,03 \times 10^{-3} p^2 + 1,9 \times 10^{-4} p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -18 \pm 81,6j$ et $p_3 = -0,75$ (rad/s)

Question 15 Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.

Optimisation du comportement : réduction des oscillations

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur », de fonction de transfert : $C(p) = \dfrac{1 + \dfrac{2\xi_1}{\omega_0} p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \dfrac{2\xi_2}{\omega_0} p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $\xi_1 < \xi_2 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Question 16 Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

On choisit de prendre ω_0 égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et $\xi_2 = 0,7$.

Question 17 Proposer une valeur pour le paramètre ξ_1. Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).

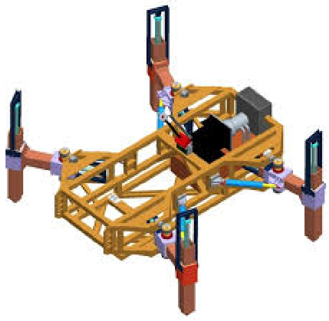
Éléments de correction

1. ...
2. $\left(Mp^2 + \mu p + k\right) \Delta Z(p) = S\Delta p(p) - \Delta F(p)$ et $\Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \left(\varphi + \dfrac{V}{2b} p\right) \Delta P(p)$.
3. ...
4. $\Delta q = K\Delta U \sqrt{p_a - P_0} - \dfrac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}} \Delta p$ + termes néglig..
5. ...
6. ...
7. $K_a = k_c$.
8. $\text{FTBO}(p) = \dfrac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE}$ et $\text{FTBF}(p) = \dfrac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$.
9. ...
10. ...
11. ...
12. $\omega_0 = 83{,}6\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ et $\xi = 0,21$, $\omega_3 = 0{,}75\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.
13. ...
14. ...

TD 2
Robot de consolidation de parois rocheuses
Roboclimber – Corrigé

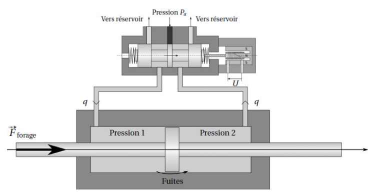
Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert.

Mise en situation



Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servovalve, elle-même commandée en tension u par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servovalve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.



Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

- précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5% ;
- rapidité de l'asservissement : $t_{5\%} = 0{,}15\,\text{s}$;
- stabilité : marge de phase de 45°, marge de gain de 10 dB ;
- sécurité du mouvement : aucun dépassement.

Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- $S = 12 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$, surface utile des pistons ;
- $b = 10^9\,\text{Pa}$: module de compressibilité du fluide utilisé ;
- $P_a = 150 \times 10^5\,\text{Pa}$: pression d'alimentation de la servovalve ;
- $K = 10^{-7}\,\text{m}^3\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}\text{Pa}^{-.5}$: constante de débit de la servovalve ;
- $\varphi = 10^{-11}\,\text{m}^3\text{Pa}^{-1}$: facteur de fuite dans le vérin ;
- $q(t)$: débit entrant et sortant du vérin ;
- V_1 et V_2 : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse : $V_1 = V_2 = V = 6 \times 10^{-4}\text{m}^3$;
- $p(t) = p_1 - p_2$: différence des pressions dans les chambres du vérin ;
- $z(t)$: déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre ;
- $M = 700\,\text{kg}$: masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot ;
- $k = 10^5\,\text{Nm}^{-1}$: raideur équivalente de la structure du robot ;

- $\mu = 100\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$: coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- $F_0 = 3000\,\mathrm{N}$: effort nominal sur le vérin ;
- $Z_0 = 50\,\mathrm{cm}$: position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur k .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe $\overrightarrow{z}$ du vérin, conduit à l'équation :

$$M\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\mu\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} - k\left(z(t) - Z_0\right) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b}\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Question 1 Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- l'inertie du robot ;
- à la raideur du robot ;
- au frottement visqueux ;
- à la pression dans la chambre ;
- à la compressibilité de l'huile ;
- au déplacement de la tige de vérin ;
- aux fuites entre les chambres.

Correction

Termes correspondant :

- l'inertie du robot : $M\dfrac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2}$;
- à la raideur du robot : $-k\left(z(t) - Z_0\right)$;
- au frottement visqueux : $-\mu\dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}$;
- à la pression dans la chambre : $Sp(t)$;
- à la compressibilité de l'huile : $\dfrac{V}{2b}\dfrac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}$;
- au déplacement de la tige de vérin : $S\dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}$;
- aux fuites entre les chambres : $\varphi p(t)$.

Question 2 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0, F_0 et Z_0, traduire l'équation d'équilibre du vérin.

Correction

On a : $M\dfrac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\mu\dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} - k\left(z(t) - Z_0\right) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t)$. Au point de fonctionnement, on a donc $0 = SP_0 - F_0$ et donc $SP_0 = F_0$.

Question 3 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $F_{\text{forage}(t)} = F_0 + \Delta F(t)$ et $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Correction

Au voisinage du point de fonctionnement, on a donc : $M\dfrac{\mathrm{d}^2\Delta z(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\mu\dfrac{\mathrm{d}\Delta z(t)}{\mathrm{d}t} - k\Delta z(t) + S\left(P_0 + \Delta p(t)\right) - F_0 - \Delta F(t)$. De plus, à l'équilibre, $SP_0 = F_0$. Dans le domaine de Laplace, on a alors $\Delta Z(p)\left(Mp^2 + \mu p + k\right) = S\Delta P(p) - \Delta F(p)$.

Question 4 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0, Q_0 et Z_0, traduire l'équation de bilan des débits.

Correction

On a $q(t) = S\dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + \varphi p(t) + \dfrac{V}{2b}\dfrac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}$. Au point de fonctionnement, on a donc $Q_0 = \varphi P_0$.

Question 5 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Correction

Au voisinage du point de fonctionnement, on a donc

$Q_0 + \Delta q(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\left(Z_0 + \Delta z(t)\right)}{\mathrm{d}t} + \varphi\left(P_0 + \Delta p(t)\right) + \dfrac{V}{2b}\dfrac{\mathrm{d}\left(P_0 + \Delta p(t)\right)}{\mathrm{d}t}$

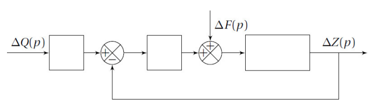
$\Leftrightarrow Q_0 + \Delta q(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\Delta z(t)}{\mathrm{d}t} + \varphi\left(P_0 + \Delta p(t)\right) + \dfrac{V}{2b}\dfrac{\mathrm{d}\Delta p(t)}{\mathrm{d}t}$

$\Leftrightarrow \Delta q(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\Delta z(t)}{\mathrm{d}t} + \varphi\Delta p(t) + \dfrac{V}{2b}\dfrac{\mathrm{d}\Delta p(t)}{\mathrm{d}t}$ (en utilisant la question précédente).

Dans le domaine de Laplace, on a donc $\Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \varphi\Delta P(p) + \dfrac{V}{2b}p\Delta P(p)$ soit $\Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \Delta P(p)\left(\varphi + \dfrac{V}{2b}p\right)$

Question 6 À partir des équations obtenues, compléter le le schéma-blocs traduisant son comportement.

Correction



Modélisation du comportement de la servovalve

La servovalve permet de fournir le débit $q(t)$ au vérin à partir d'une tension de commande $u(t)$ appliquée en entrée : la tension $u(t)$ est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante p_a et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension $u(t)$, mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire : $q(t) = Ku(t)\sqrt{p_a - p(t)}$.

Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

Question 7 Déterminer la relation liant Q_0, U_0 et P_0 au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ et $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$.

Correction

Au point de fonctionnement, $Q_0 = KU_0\sqrt{p_a - P_0}$.
Par ailleurs, on a
$Q_0 + \Delta q(t) = K\left(U_0 + \Delta u(t)\right)\sqrt{p_a - P_0 - \Delta p(t)}$
$\Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K\left(U_0 + \Delta u(t)\right)\sqrt{p_a - P_0 - \Delta p(t)}$
$\Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K\left(U_0 + \Delta u(t)\right)\sqrt{\left(p_a - P_0\right)\left(1 - \dfrac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}\right)}$
et $\sqrt{1 - \dfrac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}} \simeq 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}$.
Soit $KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K\left(U_0 + \Delta u(t)\right)\sqrt{p_a - P_0}\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}\right)$
$\Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K\left(U_0 + \Delta u(t)\right)\sqrt{p_a - P_0} - \dfrac{K\left(U_0 + \Delta u(t)\right)\sqrt{p_a - P_0}}{2}\dfrac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}$
$\Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K\left(U_0 + \Delta u(t)\right)\sqrt{p_a - P_0} - \dfrac{KU_0\sqrt{p_a - P_0}}{2}\dfrac{\Delta p(t)}{p_a - P_0} - \underbrace{\dfrac{K\Delta u(t)\sqrt{p_a - P_0}}{2}\dfrac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}}_{\text{on néglige}}$
$\Leftrightarrow \Delta q(t) = K\Delta u(t)\sqrt{p_a - P_0} - \dfrac{KU_0}{2}\dfrac{\Delta p(t)}{\sqrt{p_a - P_0}}$

Question 8 Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servo-valve et vérin, admettant en entrée la tension $\Delta U(p)$ et la force $\Delta F(p)$, et en sortie la position $\Delta Z(p)$.

Correction

Asservissement de position

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

- la servovalve, qui fournit le débit $q(t)$ au vérin à partir d'un signal de commande $u(t)$;
- un capteur de position de fonction de transfert k_c , qui fournit une tension $\text{Im}(z(t))$ image de la position réelle $z(t)$;
- un correcteur $C(p)$ qui élabore la commande $u(t)$ de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre $\text{Im}(zc(t))$, image de la consigne de position, et $\text{Im}(z(t))$. $\text{Im}(zc(t))$ est obtenue grâce à un adaptateur K_a situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

Question 9 Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

Correction

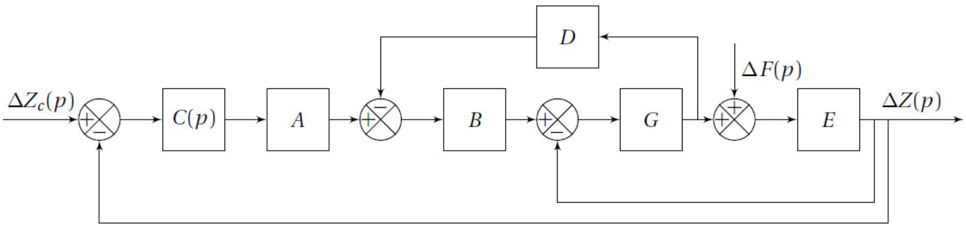
Question 10 Préciser l'expression de l'adaptateur K_a pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

Correction

Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où A, B, C, D, E, et G sont utilisés pour simplifier les calculs.

Question 11 À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.

Correction



Validation des performances pour une correction unitaire $C(p) = 1$

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle fermée, $\text{FTBF}(p) = \dfrac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2}p + 1,78 \times 10^{-4}p^2 + 4,8 \times 10^{-6}p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$ et $p_3 = -30,4$ (en rad/s).

Question 12 Le système est-il stable ? Est-il précis ?

Correction

Question 13 À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

Correction

Question 14 À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassements.

Correction

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte, $\text{FTBO}(p) = \dfrac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2}p + 7,03 \times 10^{-3}p^2 + 1,9 \times 10^{-4}p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -18 \pm 81,6j$ et $p_3 = -0,75$ (rad/s)

Question 15 Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.

Correction

Optimisation du comportement : réduction des oscillations

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur », de fonction de transfert : $C(p) = \dfrac{1 + \dfrac{2\xi_1}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \dfrac{2\xi_2}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $\xi_1 < \xi_2 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Question 16 Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

Correction

On choisit de prendre ω_0 égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et $\xi_2 = 0,7$.

Question 17 Proposer une valeur pour le paramètre ξ_1. Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).

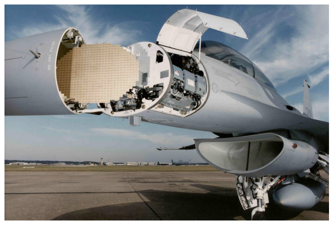
Correction

Éléments de correction

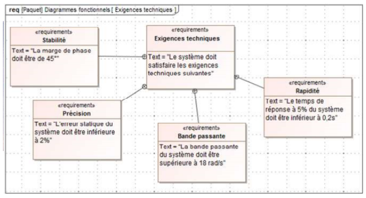
1. ...
2. $\left(Mp^2 + \mu p + k\right)\Delta Z(p) = S\Delta p(p) - \Delta F(p)$ et $\Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \left(\varphi + \dfrac{V}{2b}p\right)\Delta P(p)$.
3. ...
4. $\Delta q = K\Delta U\sqrt{p_a - P_0} - \dfrac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}}\Delta p$ + termes néglig..
5. ...
6. ...
7. $K_a = k_c$.
8. $\text{FTBO}(p) = \dfrac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE}$ et $\text{FTBF}(p) = \dfrac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$.
9. ...
10. ...
11. ...
12. $\omega_0 = 83{,}6\,\text{rad s}^{-1}$ et $\xi = 0,21$, $\omega_3 = 0{,}75\,\text{rad s}^{-1}$.
13. ...
14. ...

TD 3
Radar d'avion – Sujet

F. Mathurin.



Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.



On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est $\theta_c(t)$, l'angle réel du radar est $\theta_r(t)$. La différence des deux angles est transformée en une tension $u_m(t)$, selon la loi $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur de fonction de transfert $H_m(t)$, une vitesse angulaire $\omega_m(t)$. Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$ $(B < 1)$, $\omega_r(t)$ étant la vitesse angulaire du radar.

Question 1 Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e\omega_m(t)$, $J\dfrac{\mathrm{d}\omega_m(t)}{\mathrm{d}t} = c_m(t)$ et $c_m(t) = k_m i(t)$.

Avec :

- $u(t)$: tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur) ;
- $e(t)$: force contre-électromotrice (en V) ;
- $i(t)$: intensité (en A) ;
- $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s) ;
- $C_m(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner) ;
- J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m^2) :
- R : résistance électrique du moteur ;
- k_e : constante de force contre-électromotrice ;
- k_m : constante de couple.

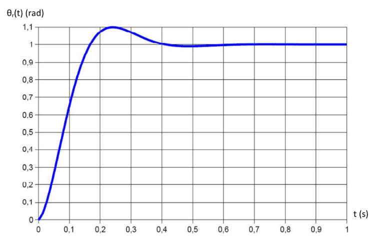
Question 2 Déterminer la fonction de transfert $H_m(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique $H_m(p) = \dfrac{K_m}{1 + T_m p}$ et déterminer les valeurs littérales de K_m et T_m.

Question 4 En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de $H(p)$ à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :



Question 6 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K, z et ω_0.

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite : $K = 1$, $z = 0,5$ et $\omega_0 = 15\,\text{rad/s}$.

Question 7 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est : $H(p) = \dfrac{1}{\left(1+0,05p\right)\left(1+0,0005p\right)\left(1+0,002p\right)}$.

Question 8 Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

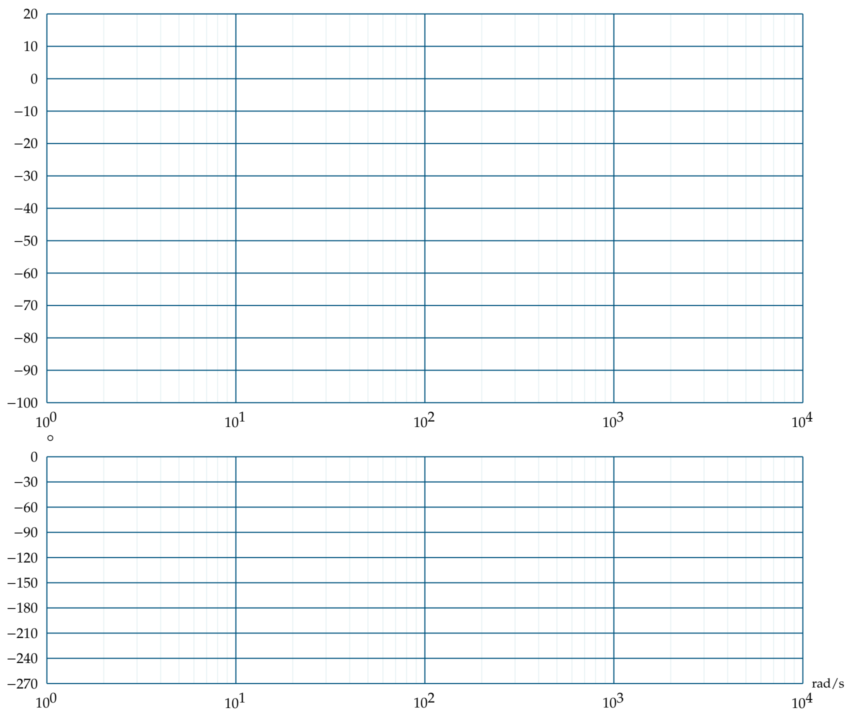
Question 9 Déterminer G et φ pour $\omega = 10\,\text{rad/s}$.

Question 10 Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0,2\sin(10t)$.

Pour $\omega < 20\,\text{rad/s}$, on a $H(p) \simeq \dfrac{1}{1+0,05p}$.

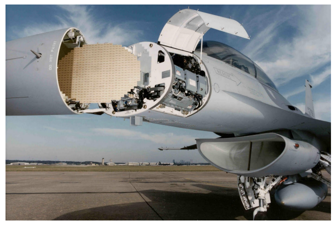
Question 11 Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

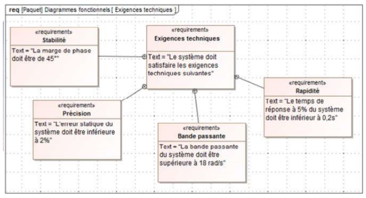
Question 12 Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



TD 3
Radar d'avion – Corrigé

F. Mathurin.





Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est $\theta_c(t)$, l'angle réel du radar est $\theta_r(t)$. La différence des deux angles est transformée en une tension $u_m(t)$, selon la loi $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur de fonction de transfert $H_m(t)$, une vitesse angulaire $\omega_m(t)$. Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$ $(B < 1)$, $\omega_r(t)$ étant la vitesse angulaire du radar.

Question 1 Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e\omega_m(t)$, $J\dfrac{\mathrm{d}\omega_m(t)}{\mathrm{d}t} = c_m(t)$ et $c_m(t) = k_m i(t)$.

Avec :

- $u(t)$: tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur) ;
- $e(t)$: force contre-électromotrice (en V) ;
- $i(t)$: intensité (en A) ;
- $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s) ;
- $C_m(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner) ;
- J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m^2) :
- R : résistance électrique du moteur ;
- k_e : constante de force contre-électromotrice ;
- k_m : constante de couple.

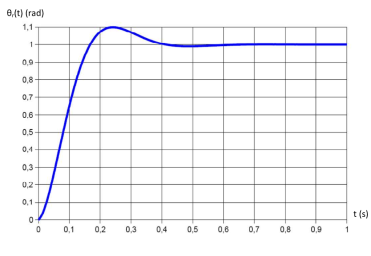
Question 2 Déterminer la fonction de transfert $H_m(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique $H_m(p) = \dfrac{K_m}{1 + T_m p}$ et déterminer les valeurs littérales de K_m et T_m.

Question 4 En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de $H(p)$ à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :



Question 6 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K, z et ω_0.

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite : $K = 1$, $z = 0,5$ et $\omega_0 = 15\,\mathrm{rad/s}$.

Question 7 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est : $H(p) = \dfrac{1}{(1+0,05p)(1+0,0005p)(1+0,002p)}$.

Question 8 Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

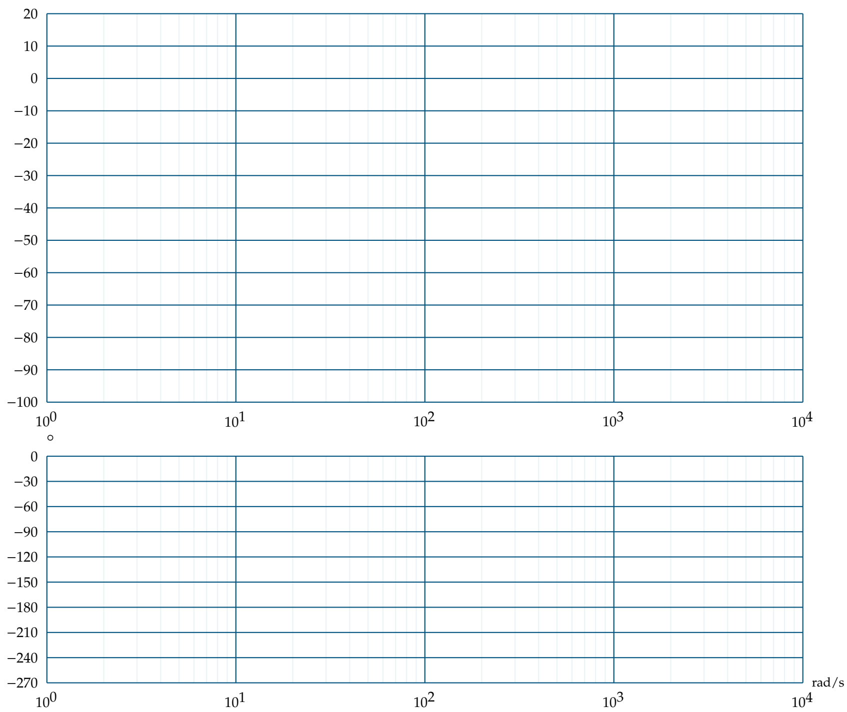
Question 9 Déterminer G et φ pour $\omega = 10\,\text{rad/s}$.

Question 10 Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0,2\sin(10t)$.

Pour $\omega < 20\,\text{rad/s}$, on a $H(p) \simeq \dfrac{1}{1+0,05p}$.

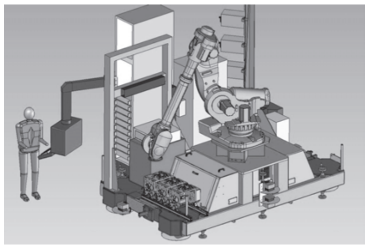
Question 11 Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

Question 12 Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



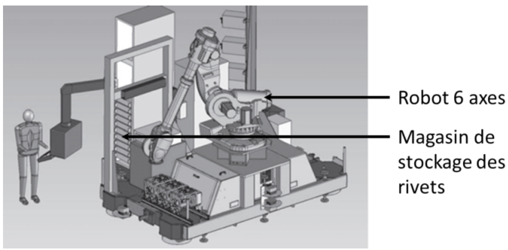
Application 1
Cellule d’assemblage pour avion Falcon Sujet

E3A – PSI 2015.



Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d’aspiration qui permettra d’acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l’effecteur (robot). Le chariot fait l’objet de cette étude.



Objectif

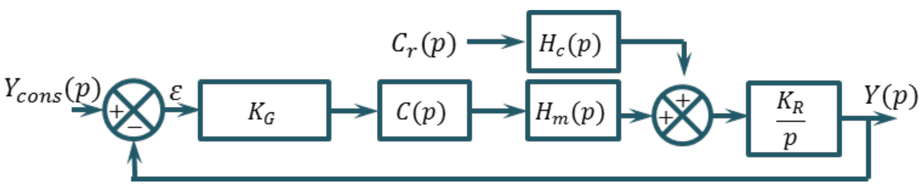
Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d’obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant C_r dû à l’action de pesanteur est supposé constant.

$$H_M(p) = \frac{K_M}{(1+T_E p)(1+T_M p)} \quad \text{et}$$

$$H_C(p) = \frac{\dfrac{(R+Lp)\,K_M}{K_C}}{(1+T_E p)(1+T_M p)}.$$



Etude du modèle sans perturbation

Question 1 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 2 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Etude du modèle avec perturbation

Question 3 Donner l'expression de $\varepsilon(p)$.

Question 4 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

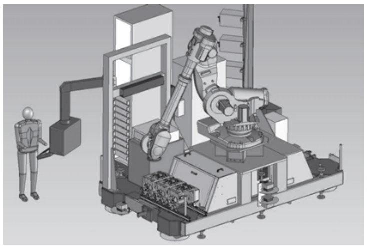
Question 5 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 6 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 7 On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

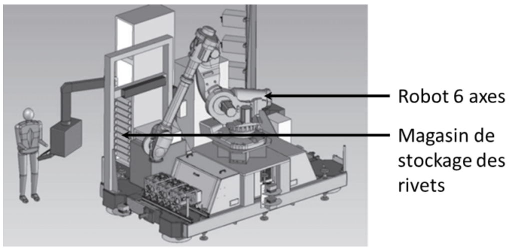
Application 1
Cellule d'assemblage pour avion Falcon Corrigé

E3A – PSI 2015.



Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.



Objectif

Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

Étude du modèle simplifié

Etude du modèle sans perturbation

Question 1 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 2 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Etude du modèle avec perturbation

Question 3 Donner l'expression de $\varepsilon(p)$.

Correction

On raisonne par superposition :
Si $C_r(p) = 0$:

$$
\begin{aligned}
Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p)\dfrac{\dfrac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1+\dfrac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\
&= Y_{\text{cons}}(p)\dfrac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\
&= Y_{\text{cons}}(p)\dfrac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1+T_E p)(1+T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r)}
\end{aligned}
$$

.

Correction

Si $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$:

$$
\begin{aligned}
Y_2(p) &= C_r(p)\dfrac{\dfrac{H_c(p) K_r}{p}}{1+\dfrac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\
&= C_r(p)\dfrac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \\
&= C_r(p)\dfrac{\dfrac{(R+Lp)K_M K_r}{K_C}}{(1+T_E p)(1+T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M}
\end{aligned}
$$

On a donc : $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$.

Question 4 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 5 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 6 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 7 On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Correction

TD 4
Fauteuil dynamique de cinéma – Sujet

Concours Centrale-Supélec TSI 2015

C1-01

C2-03

Présentation du système

Ce concept a été inventé au Canada en 2008, et s'est étendu à toute l'Amérique du Nord avant de traverser l'Atlantique pour proposer un cinéma dynamique avec une quantité d'effets spéciaux et spatiaux. Le fauteuil dynamique de cinéma est principalement destiné à l'industrie du divertissement et de la simulation.

Mise en situation

Le siège dynamique est constitué :

- du dosseret qui permet d'agir directement sur la tête du spectateur afin d'amplifier la sensation d'accélération (via l'oreille interne) ;
- de l'assise du siège qui permet d'obtenir un mouvement de tangage et un mouvement de roulis du spectateur.

Les trois motorisations (une pour le dosseret et deux pour l'assise) sont composées chacune d'un moteur à courant continu à aimants permanents et d'un réducteur de vitesse. Chaque moteur est alimenté par un variateur de vitesse dont la structure de puissance est un hacheur. Un capteur de courant interne au variateur est utilisé par ce dernier pour réaliser un asservissement de courant, donc implicitement de couple. Une génératrice tachymétrique accouplée à l'axe de chaque moteur est utilisée par le variateur correspondant pour réaliser un asservissement de vitesse. Un codeur incrémental accouplé aussi sur l'axe de chaque moteur est utilisé par une carte à base de microcontrôleur pour réaliser un asservissement de position, une sortie analogique de cette carte étant reliée à l'entrée de consigne du variateur de vitesse.

Exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération »

Objectif

Proposer un modèle de comportement des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Exigence : amplifier la sensation d'accélération

- Précision statique de la boucle d'asservissement de position :

- erreur statique de position < 1% ;
- erreur statique de traînage < 1% ;
- erreur statique d'accélération < 1% .

- Rapidité pour un échelon de consigne d'accélération :
  - temps de montée de 0 à 100% de la consigne < 5 ms ;
  - dépassement < 20%.

Comportement de l'ensemble variateur et moteur du dosseret

Objectif

- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de courant.
- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de vitesse.
- Analyser la précision de l'asservissement de position.

Modélisation de l'asservissement de vitesse

NE PAS TRAITER LES QUESTIONS 1 à 3.

Remarque

Les 3 premières questions n'ont pas vraiment d'intérêt. Je les ai laissées car elles apparaissaient dans le sujet initial.

L'étude suivante consiste à obtenir un modèle simplifié de la boucle d'asservissement de vitesse (figure suivante) au regard des réglages effectués et de l'influence d'une perturbation de type échelon sur le dosseret. En effet, vu la courte durée des sollicitations, la perturbation sur le dosseret, dont l'origine peut être une action du spectateur sur ses muscles cervicaux, peut être modélisée par un échelon.

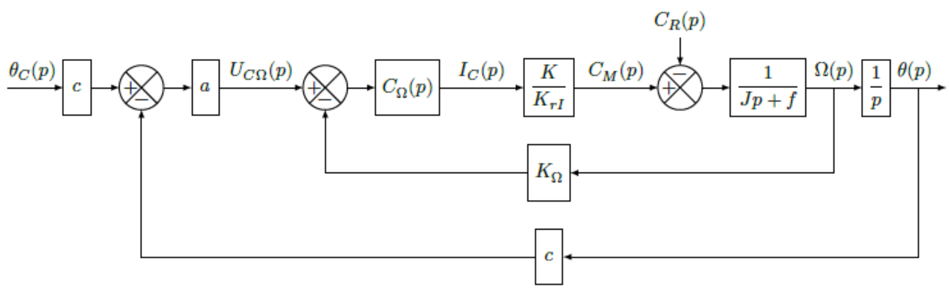


Figure 1.3 – Modèle de la boucle d'asservissement de vitesse

On a $C_\Omega(p) = k_1\left(1+\dfrac{1}{T_1 p}\right)$. De plus : $K = 0{,}115\,\mathrm{N\,m\,A^{-1}}$; $R = 1\,\Omega$; $L = 1{,}1\,\mathrm{mH}$; $K_{rI} = 0{,}5\,\mathrm{V\,A^{-1}}$; $r = 1/50$; $f = 4{,}1\times10^{-4}\,\mathrm{N\,m\,s\,rad^{-1}}$; $J = 0{,}16\times10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert de la boucle de vitesse $H_\Omega(p) = \Omega(p)/U_{C\Omega}(p)$, lorsque $C_R(p) = 0$. Le résultat sera mis sous une forme canonique.

Question 2 T_1 étant égal à J/f, montrer alors que la fonction de transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme $\dfrac{b}{\tau p+1}$. Calculer les valeurs numériques des termes b et τ.

Question 3 En déduire, à l'aide de la figure précédente, $\theta(p)/C_R(p)$ lorsque $\theta_C(p) = 0$. Calculer ensuite la valeur finale de $\theta(t)$ lorsque $c_R(t)$ est un échelon unitaire. Conclure quant à l'action, en régime permanent, du correcteur proportionnel et intégral sur les effets d'une perturbation $c_R(t)$ de type échelon.

Modélisation de la boucle d'asservissement de position

Après toutes les simplifications précédentes, est obtenu le modèle de la figure suivante où seul le comportement en réponse à la consigne θ_C est abordé.

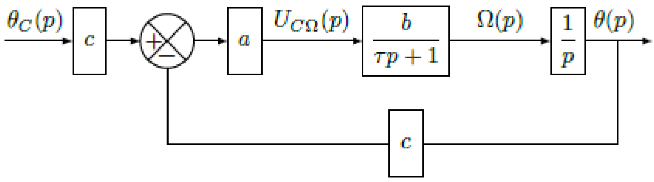


Figure 1.4 – Modèle simplifié de la boucle d'asservissement de position

Question 4 Exprimer la fonction de transfert $\theta(p)/\theta_C(p)$. Déterminer ensuite la valeur numérique de a pour avoir un facteur d'amortissement égal à 0,7. Justifier le choix de ce facteur d'amortissement. (Pour ce calcul et les calculs suivants prendre $b = 63\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{V}^{-1}$, $\tau = 2{,}2\,\text{ms}$, $c = 40\,\text{rad}^{-1}$.)

Analyse de la précision du système

Un aspect important pour la simulation sensorielle du siège dynamique est la capacité du système à reproduire fidèlement la consigne de position issue du programme de simulation sensorielle du siège dynamique. Dans un premier temps, l'étude se limite à la précision statique en utilisant le modèle défini à la figure précédente. L'erreur représente la différence entre l'entrée $\theta_C(t)$ et la sortie $\theta(t)$ et est définie par la variable $\mu(t) = \theta_C(t) - \theta(t)$.

Question 5 Exprimer dans un premier temps $\mu(p)$ en fonction de $\theta_C(p)$, puis déterminer de façon littérale et numérique l'erreur de position μ_p, l'erreur de trainage μ_v et l'erreur en accélération μ_a. Conclure quant à la précision statique du système suite aux différentes consignes $\theta_C(p)$ de type échelon, rampe et accélération.

Validation et optimisation de la performance simulée en accélération du dosseret

Objectif

Valider la performance simulée en accélération au regard du cahier des charges fonctionnel.

La figure suivante représente la structure d'une correction par anticipation qui permet d'améliorer la précision statique du système

Question 6 Déterminer l'erreur de position μ_p puis l'erreur de traînage μ_v. Conclure sur l'erreur de position au regard du cahier des charges.

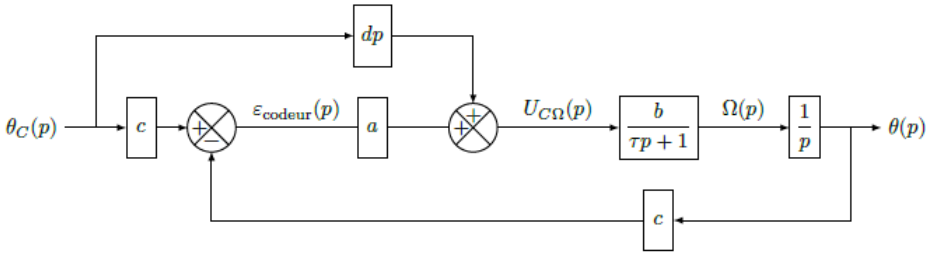


Figure 1.5 – Structure avec anticipation

Question 7 D'après l'erreur de traînage μ_v déterminée à la question précédente, calculer la valeur numérique de d qui permet d'annuler cette erreur de traînage. En prenant en compte la valeur numérique de d et de b, déterminer l'expression de l'erreur en accélération μ_a. Calculer ensuite sa valeur numérique et conclure au regard du cahier des charges.

Un aspect important pour la simulation sensorielle du siège dynamique est la capacité du système à reproduire rapidement les consignes d'accélération. À l'aide d'une simulation, la variable accélération $\ddot{\theta}_d$ possède les deux comportements donnés figure suivante pour la période transitoire, et ce lorsque la consigne vaut $\theta_{\text{Cd}}(t) = \frac{t^2}{2}u(t)$.

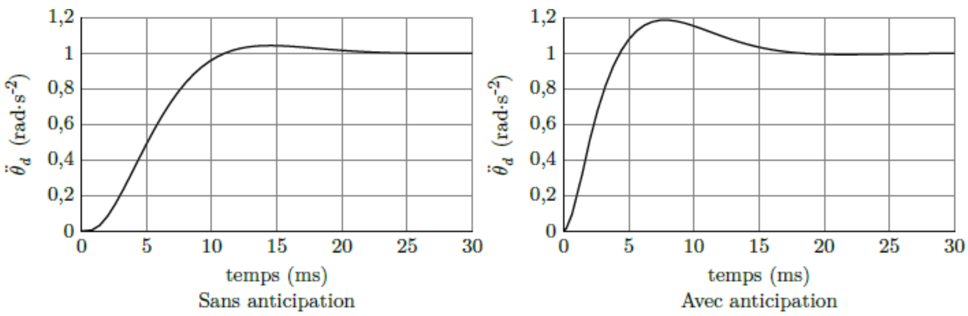


Figure 1.6 – Accélération du dosseret avec et sans anticipation

Question 8 Conclure quant au respect du cahier des charges vis-à-vis des accélérations produites par le dosseret du siège dynamique de cinéma.

Exigence fonctionnelle « incliner le spectateur suivant l'axe de tangage et de roulis »

Objectif

Valider le choix de conception pour la réalisation de la commande simultanée des deux moteurs de l'assise du siège.

En mode simultané (figure suivante), les consignes de vitesse de chaque variateur sont issues d'un calculateur numérique : a, d et c sont identiques. En revanche, le réglage du retour vitesse des cartes variateur est effectué à l'aide d'un potentiomètre et celui-ci peut ne pas avoir été réglé avec précision. En imposant le réglage du retour vitesse de la motorisation 1 à 5 V pour 3000 tr min^{-1} et celui de la motorisation 2 à 5,5 V pour 3000 tr min^{-1},

les calculs donnent b_1 = 62,8 rad.s^{-1}.V^{-1} et b_2 = 57,1 rad.s^{-1}.V^{-1}. Les inerties au niveau de chaque moteur, supérieures à celle au niveau du moteur de dosseret, peuvent fluctuer en fonction de la position du spectateur.

En tenant compte d'une variation d'inertie de 10%, les calculs donnent $\tau_1 = 1/366$ s et $\tau_2 = 1/447$ s. On prendra a = 0,09 V, c = 40 rad^{-1} et d = 0,016 V rad^{-1} s.

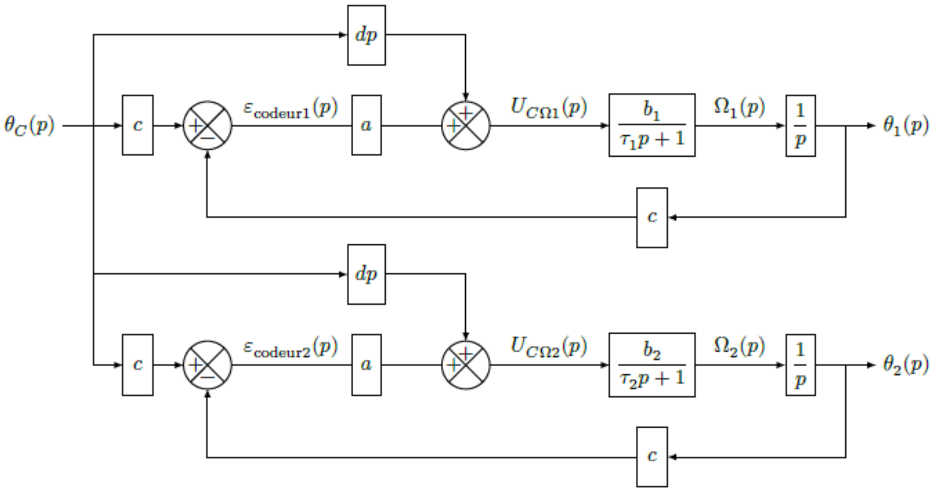


Figure 1.7 – Commande simultanée des deux moteurs

Question 9 En réutilisant éventuellement les calculs effectués aux questions 6 et 7 et en tenant compte des différences de réglage de retour vitesse et des différences d'inertie entre les deux motorisations, exprimer la valeur finale de $\theta_1(t)-\theta_2(t)$ lorsque la consigne $\theta_C(t)$ est respectivement égale à $u(t)$, $t\cdot u(t)$ puis $\frac{t^2}{2}u(t)$, $u(t)$ étant la fonction échelon unité.

La figure 1.8 représente le résultat d'une simulation de $\theta_1(t)-\theta_2(t)$ pour une consigne $\theta_C\ (t) = \frac{t^2}{2}U(t)$

Question 10 Conclure quant à l'erreur en accélération lors de la commande simultanée.

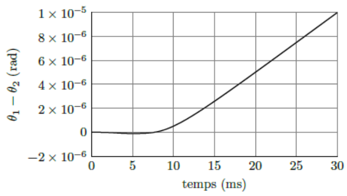


Figure 1.8 – $\theta_1-\theta_2$ en fonction du temps

Éléments de correction

1. $H_\Omega(p)=\dfrac{\dfrac{1}{K_\Omega}\left(1+T_1p\right)}{\dfrac{T_1K_{rI}J}{K_\Omega k_1 K}p^2+\left(\dfrac{fK_{rI}}{K_\Omega k_1 K}+1\right)T_1p+1}$.
2. $b=\dfrac{1}{K_\Omega}=20\pi=62{,}8\,\text{rad}\,\text{s}{-1}\text{V}^{-1}$ et $\tau=\dfrac{K_{ri}J}{k_1KK_\Omega}=2{,}17\times10^{-3}\,\text{s}$.
3. $-\dfrac{T_1K_{ri}p}{k_1\left(T_1p+1\right)K}\cdot\dfrac{b}{p\left(1+\tau p\right)+abc}$ et $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)=1$.
4. $a=\dfrac{1}{4bc\tau\xi^2}=0,092$.
5. $\mu(p)=\dfrac{p\left(1+\tau p\right)}{p\left(1+\tau p\right)+abc}\theta_c(p)$, $\mu_p=0$, $\mu_v=\dfrac{1}{abc}$ et $\mu_a=\infty$.
6. $\mu_p=0$ et $\mu_v=\dfrac{1-bd}{ab}$.
7. ...
8. ...
9. ...
10. ...

TD 4
Fauteuil dynamique de cinéma – Corrigé

Concours Centrale-Supélec TSI 2015

C1-01

C2-03

Présentation du système

Mise en situation

Exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération »

Comportement de l'ensemble variateur et moteur du dosseret

Objectif

- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de courant.
- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de vitesse.
- Analyser la précision de l'asservissement de position.

Modélisation de l'asservissement de vitesse

NE PAS TRAITER LES QUESTIONS 1 à 3.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert de la boucle de vitesse $H_\Omega\left(p\right) = \Omega(p)/U_{C\Omega}(p)$, lorsque $C_R\left(p\right) = 0$. Le résultat sera mis sous une forme canonique.

Correction

$$H_\Omega(p) = \dfrac{k_1\left(1+\dfrac{1}{T_1p}\right)\dfrac{K}{K_{rI}}\dfrac{1}{Jp+f}}{1+K_\Omega k_1\left(1+\dfrac{1}{T_1p}\right)\dfrac{K}{K_{rI}}\dfrac{1}{Jp+f}} = \dfrac{k_1\left(1+T_1p\right)K}{T_1pK_{rI}\left(Jp+f\right)+K_\Omega k_1\left(1+T_1p\right)K}$$

$$= \dfrac{\dfrac{Kk_1}{K_\Omega k_1 K}\left(1+T_1p\right)}{\dfrac{T_1K_{rI}J}{K_\Omega k_1 K}p^2+\left(\dfrac{fT_1K_{rI}}{K_\Omega k_1K}+\dfrac{K_\Omega k_1T_1K}{K_\Omega k_1 K}\right)p+1} \quad H_\Omega(p) = \dfrac{\dfrac{1}{K_\Omega}\left(1+T_1p\right)}{\dfrac{T_1K_{rI}J}{K_\Omega k_1K}p^2+\left(\dfrac{fK_{rI}}{K_\Omega k_1K}+1\right)T_1p+1}$$

Question 2 T_1 étant égal à J/f, montrer alors que la fonction de transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme $\dfrac{b}{\tau p+1}$. Calculer les valeurs numériques des termes b et τ.

Correction

On a $H_\Omega(p) = \dfrac{\dfrac{1}{K_\Omega}\left(1+\dfrac{J}{f}p\right)}{\dfrac{\frac{J}{f}K_{rI}J}{K_\Omega k_1 K}p^2+\left(\dfrac{fK_{rI}}{K_\Omega k_1 K}+1\right)\dfrac{J}{f}p+1} = \dfrac{(f+Jp)}{\dfrac{K_{rI}J^2}{k_1K}p^2+\left(\dfrac{fK_{rI}}{k_1K}+K_\Omega\right)Jp+fK_\Omega}$

$= \dfrac{(f+Jp)\,k_1K}{K_{rI}J^2p^2+\left(fK_{rI}+K_\Omega k_1K\right)Jp+fK_\Omega k_1K}$

On a : $\Delta = \left(fK_{rI}+K_\Omega k_1K\right)^2J^2 - 4fK_\Omega k_1KK_{rI}J^2 = \left(f^2K_{rI}^2+K_\Omega^2k_1^2K^2+2fK_{rI}K_\Omega k_1K\right)J^2 - 4fK_\Omega k_1KK_{rI}J^2$

$= \left(f^2K_{rI}^2+K_\Omega^2k_1^2K^2-2fK_{rI}K_\Omega k_1K\right)J^2 = \left(fK_{rI}-K_\Omega k_1K\right)^2J^2$

On a donc

$p_{12} = \dfrac{-\left(fK_{rI}+K_\Omega k_1K\right)J \pm \left(fK_{rI}-K_\Omega k_1K\right)J}{2K_{rI}J^2}$,

$p_1 = \dfrac{-fJK_{rI}-K_\Omega k_1KJ+fJK_{rI}-K_\Omega k_1KJ}{2K_{rI}J^2} = -\dfrac{K_\Omega k_1K}{K_{rI}J}$, $p_2 = \dfrac{-fJK_{rI}-K_\Omega k_1KJ-fJK_{rI}+K_\Omega k_1KJ}{2K_{rI}J^2} = -\dfrac{f}{J}$.

On a donc

$H_\Omega(p) = \dfrac{J\left(\dfrac{f}{J}+p\right)k_1K}{\left(p+\dfrac{f}{J}\right)\left(p+\dfrac{K_\Omega k_1K}{K_{rI}J}\right)} = \dfrac{Jk_1K}{p+\dfrac{K_\Omega k_1K}{K_{rI}J}} = \dfrac{\dfrac{K_{rI}J^2}{K_\Omega}}{\dfrac{K_{rI}J}{K_\Omega k_1K}p+1}$

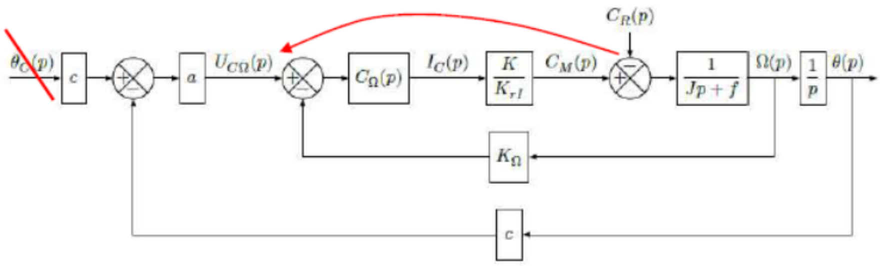
On a donc $b = \dfrac{K_{rI}J^2}{K_\Omega}$ et $\tau = \dfrac{K_{rI}J}{K_\Omega k_1K}$.

Autre solution : $b = \dfrac{1}{K_\Omega} = 20\pi = 62{,}8$ rad s−1V^{-1} et $\tau = \dfrac{K_{ri}J}{k_1KK_\Omega} = 2{,}17\times10^{-3}$ s.

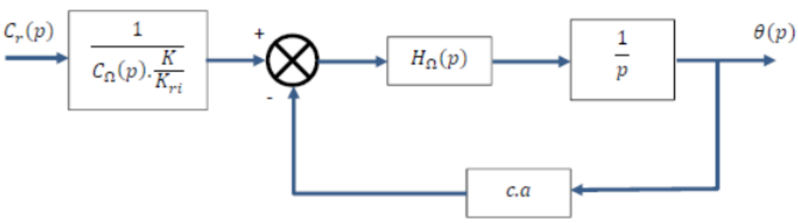
Question 3 En déduire, à l'aide de la figure précédente, $\theta(p)/C_R(p)$ lorsque $\theta_C(p)=0$. Calculer ensuite la valeur finale de $\theta(t)$ lorsque $c_R(t)$ est un échelon unitaire. Conclure quant à l'action, en régime permanent, du correcteur proportionnel et intégral sur les effets d'une perturbation $c_R(t)$ de type échelon.

Correction

On effectue une transformation de schéma en déplaçant le comparateur de $C_r(p)$



D'où la nouvelle structure de schéma bloc :



$$\frac{\theta(p)}{C_r(p)} = \frac{1}{C_\Omega(p).\frac{K}{K_{ri}}}.\frac{H_\Omega(p).\frac{1}{p}}{1+c.a.H_\Omega(p).\frac{1}{p}} = \frac{K_{ri}.T_1.p}{K.k_1.(1+T_1.p)}.\frac{\frac{b}{1+\tau p}.\frac{1}{p}}{1+\frac{b}{1+\tau p}.\frac{1}{p}}$$

L'application du théorème de la valeur finale pour une entrée de type échelon donne :

$$\theta(\infty) = \lim_{p\to 0} p\,.\,\theta(p) = 0$$

Ce résultat était prévisible car le correcteur PI est placé avant la perturbation.

$$\frac{\theta(p)}{C_r(p)} = \frac{1}{C_\Omega(p)\frac{K}{K_{ri}}}\frac{\frac{b}{1+\tau p}\frac{1}{p}}{1+\frac{abc}{1+\tau p}\frac{1}{p}} = \frac{1}{k_1\left(1+\frac{1}{T_1 p}\right)\frac{K}{K_{ri}}}\frac{\frac{b}{1+\tau p}\frac{1}{p}}{1+\frac{abc}{1+\tau p}\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{T_1 K_{ri} p}{k_1\left(T_1 p+1\right)K}\cdot\frac{b}{p\left(1+\tau p\right)+abc}$$

et $\lim_{t\to\infty}\theta(t) = 1$.

Modélisation de la boucle d'asservissement de position

Question 4 Exprimer la fonction de transfert $\theta(p)/\theta_C(p)$. Déterminer ensuite la valeur numérique de a pour avoir un facteur d'amortissement égal à $0,7$. Justifier le choix de ce facteur d'amortissement. (Pour ce calcul et les calculs suivants prendre $b = 63\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{V}^{-1}$, $\tau = 2{,}2\,\text{ms}$, $c = 40\,\text{rad}^{-1}$.)

Correction

On a $\dfrac{\theta(p)}{\theta_C(p)} = c\dfrac{\dfrac{ab}{p\left(\tau p+1\right)}}{1+\dfrac{abc}{p\left(\tau p+1\right)}} = \dfrac{abc}{p\left(\tau p+1\right)+abc} = \dfrac{1}{\dfrac{\tau}{abc}p^2+\dfrac{p}{abc}+1}$.

On a $\omega_0 = \sqrt{abc/\tau}$ et $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = \dfrac{1}{abc}$ et $\xi = \dfrac{1}{2\sqrt{abc\tau}}$. En conséquence, $a = \dfrac{1}{4bc\tau\xi^2} = 0,092$.
(On prend $\xi = 0,7$ car cela correspond au temps de réponse le plus rapide pour un second ordre.)

Analyse de la précision du système

Question 5 Exprimer dans un premier temps $\mu(p)$ en fonction de $\theta_C(p)$, puis déterminer de façon littérale et numérique l'erreur de position μ_p, l'erreur de trainage μ_v et l'erreur en accélération μ_a. Conclure quant à la précision statique du système suite aux différentes consignes $\theta_C(p)$ de type échelon, rampe et accélération.

Correction

On a $\mu(p) = \dfrac{\theta_c(p)}{1+\dfrac{abc}{p\left(1+\tau p\right)}} = \dfrac{p\left(1+\tau p\right)}{p\left(1+\tau p\right)+abc}\theta_c(p) = \dfrac{p\left(1+\tau p\right)}{p\left(1+\tau p\right)+abc}\theta_c(p)$.

La FTBO est de classe 1 et de gain $K_{\text{BO}} = abc$ on a donc :

- pour une entrée échelon, $\mu_p = 0$;
- pour une entrée rampe, $\mu_v = \dfrac{1}{abc}$;
- pour une entrée accélération, $\mu_a = \infty$.

Validation et optimisation de la performance simulée en accélération du dosseret

Objectif

Valider la performance simulée en accélération au regard du cahier des charges fonctionnel.

Question 6 Déterminer l'erreur de position μ_p puis l'erreur de traînage μ_v. Conclure sur l'erreur de position au regard du cahier des charges.

Correction

On a $\varepsilon_{\text{codeur}}(p) = c\theta_c(p) - c\theta(p)$

$= c\theta_c(p) - \dfrac{bc}{p\left(\tau p+1\right)}U_{C\Omega}(p) = c\theta_c(p) - \dfrac{bc}{p\left(\tau p+1\right)}\left(\theta_C(p)dp + a\varepsilon_{\text{codeur}}(p)\right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p)\left(1+\dfrac{abc}{p\left(\tau p+1\right)}\right) = \theta_C(p)\left(c - \dfrac{bcd}{\tau p+1}\right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p)\left(1+\dfrac{abc}{p\left(\tau p+1\right)}\right) = \theta_C(p)c\dfrac{\tau p+1-bd}{\tau p+1}$

$\Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p) = \theta_C(p)cp\dfrac{\tau p+1-bd}{p\left(\tau p+1\right)+abc}$

On a alors :

- $\mu_p = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{p}cp\dfrac{\tau p+1-bd}{p\left(\tau p+1\right)+abc} = \lim\limits_{p\to 0} cp\dfrac{\tau p+1-bd}{p\left(\tau p+1\right)+abc} = 0$;
- $\mu_v = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{p^2}cp\dfrac{\tau p+1-bd}{p\left(\tau p+1\right)+abc} = \dfrac{1-bd}{ab}$.

Question 7 D'après l'erreur de traînage μ_v déterminée à la question précédente, calculer la valeur numérique de d qui permet d'annuler cette erreur de traînage. En prenant en compte la valeur numérique de d et de b, déterminer l'expression de l'erreur en accélération μ_a. Calculer ensuite sa valeur numérique et conclure au regard du cahier des charges.

Correction

On a $\mu_v = \dfrac{1-bd}{abc}$. En conséquences, $\mu_v = 0 \Leftrightarrow 0 = \dfrac{1-bd}{ab} \Leftrightarrow d = \dfrac{1}{b}$.

$\mu_a = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{1}{p^3} cp \dfrac{\tau p + 1 - bd}{p\left(\tau p+1\right) + abc} = \dfrac{\tau}{ab}$.

Question 8 Conclure quant au respect du cahier des charges vis-à-vis des accélérations produites par le dosseret du siège dynamique de cinéma.

Correction

Exigence fonctionnelle « incliner le spectateur suivant l'axe de tangage et de roulis »

Objectif

Valider le choix de conception pour la réalisation de la commande simultanée des deux moteurs de l'assise du siège.

Question 9 En réutilisant éventuellement les calculs effectués aux questions 6 et 7 et en tenant compte des différences de réglage de retour vitesse et des différences d'inertie entre les deux motorisations, exprimer la valeur finale de $\theta_1(t)-\theta_2(t)$ lorsque la consigne $\theta_C(t)$ est respectivement égale à $u(t)$, $t \cdot u(t)$ puis $\frac{t^2}{2}u(t)$, $u(t)$ étant la fonction échelon unité.

Correction

En raisonnant graphiquement, on a $\theta_1(p) - \theta_2(p) = \varepsilon_{\text{codeur }1}(p) - \varepsilon_{\text{codeur }2}(p)$; donc :

- $\mu_p = \mu_{p1} - \mu_{p2} = 0$;
- $\mu_v = \mu_{v1} - \mu_{v2} = \dfrac{1-b_1d}{ab_1} - \dfrac{1-b_2d}{ab_2}$;
- $\mu_a = \mu_{a1} - \mu_{a2} = \infty$.

La figure 1.8 représente le résultat d'une simulation de $\theta_1(t)-\theta_2(t)$ pour une consigne $\theta_C\ (t) = \frac{t^2}{2}U(t)$

Question 10 Conclure quant à l'erreur en accélération lors de la commande simultanée.

Correction

TD 5
Contrôle d'une machine de forage – Sujet

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

On travaille avec le schéma-bloc simplifié de la figure 1.9 où K_0 est un gain d'adaptation fixe.

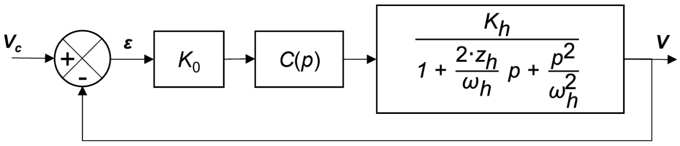


Figure 1.9 – Schéma-bloc de l'asservissement en vitesse simplifié

On prend dans un premier temps un correcteur $C(p)$ proportionnel : $C(p) = K_p$.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{\text{BO}}(p) = \dfrac{V(p)}{\varepsilon(p)}$.

Question 2 Avec un correcteur proportionnel, peut-on satisfaire l'exigence de précision de vitesse indiquée à l'exigence 2.1.1. ? Justifier.

On utilise dans un second temps un correcteur proportionnel intégral : $C(p) = K_P\left(1 + \dfrac{1}{T_i p}\right)$.

Question 3 L'exigence de précision sur la vitesse est-elle satisfaite ? Justifier.

Ce correcteur est initialement réglé avec les valeurs suivantes : $K_p = 1$ et $T_i = 10\,\text{s}$.

Question 4 Tracer les diagrammes de Bode asymptotique et réel de ce correcteur. Détailler les constructions.

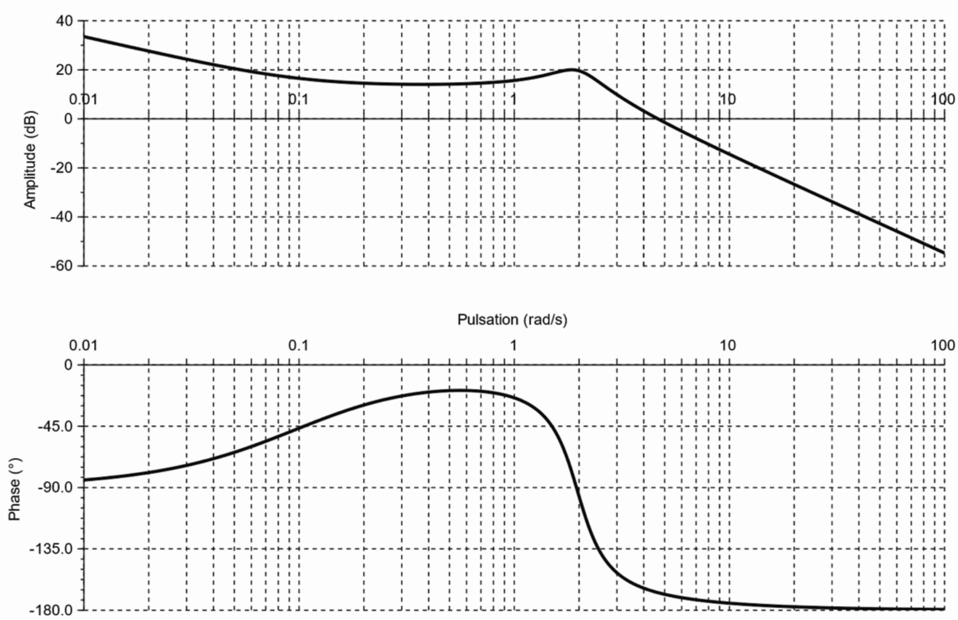
Pour le réglage de la question précédente, on donne le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ainsi corrigée sur le DR3.

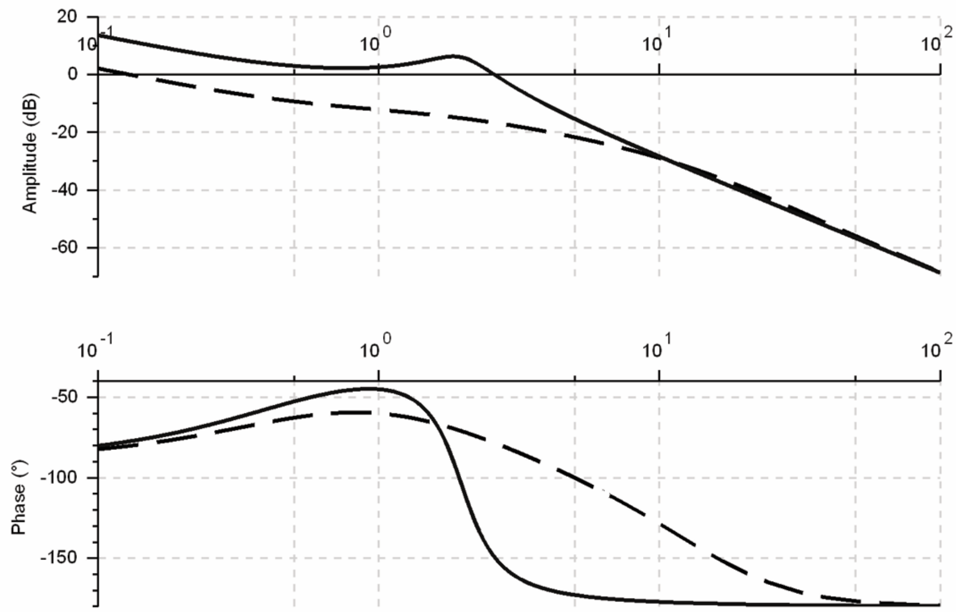
Question 5 Affiner le réglage du correcteur (sans modifier la valeur de T_i) en proposant une valeur de K_p permettant de garantir la marge de phase spécifiée dans l'exigence 2.1.1.

Enfin, on souhaite valider ou invalider l'hypothèse faite en début de cette sous-partie concernant la non-influence de l'amortisseur sur les performances d'asservissement en vitesse d'avance de la table de forage. Les diagrammes de Bode de la figure suivante, illustrent la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée sans (en train plein) et avec amortisseur (en pointillés).

« requirement »
Performances de l'axe

Id = '2.1.1'
Text = 'La vitesse de l'axe d'avance doit respecter les performances suivantes :
- précision : erreur staique nulle
- stabilité : marges de phase de 30° et de gain de 40dB'





Question 6 Sur quelle(s) performance(s) la présence de l'amortisseur peut-elle influer ? Justifier que le correcteur choisi permet de répondre aux exigences 2.1.1 en présence de l'amortisseur.

TD 5
Contrôle d'une machine de forage – Corrigé

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{\text{BO}}(p) = \dfrac{V(p)}{\varepsilon(p)}$.

Correction

$$G_{\text{BO}}(p) = K_0 C(p) \frac{K_h}{1 + \dfrac{2z_h}{\omega_h} p + \dfrac{p^2}{\omega_h^2}}$$

Question 2 Avec un correcteur proportionnel, peut-on satisfaire l'exigence de précision de vitesse indiquée à l'exigence 2.1.1. ? Justifier.

« requirement »
Performances de l'axe
Id = '2.1.1'
Text = 'La vitesse de l'axe d'avance doit respecter les performances suivantes :
- précision : erreur staique nulle
- stabilité : marges de phase de 30° et de gain de 40dB'

Correction

Pour un erreur statique nulle, il faut oblogatoirement un intégrateur dans la boucle ouverte, ce qui n'est pas le cas.

On utilise dans un second temps un correcteur proportionnel intégral : $C(p) = K_P \left(1 + \dfrac{1}{T_i p}\right)$.

Question 3 L'exigence de précision sur la vitesse est-elle satisfaite ? Justifier.

Correction

$C(p) = K_P \left(1 + \dfrac{1}{T_i p}\right) = K_P \dfrac{T_i p + 1}{T_i p}$. La FTBO est maintenant de classe 1. L'erreur statique est donc nulle.

Ce correcteur est initialement réglé avec les valeurs suivantes : $K_p = 1$ et $T_i = 10\,\text{s}$.

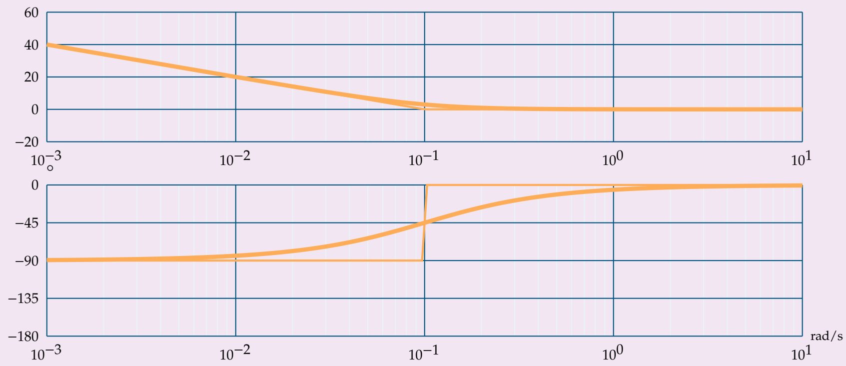
Question 4 Tracer les diagrammes de Bode asymptotique et réel de ce correcteur. Détailler les constructions.

Correction

On a $\dfrac{K_p}{T_i} = 0{,}1$

- Quand ω tend vers 0, le gain a une pente de $-20\,\text{dB/decade}$ et la phase tend vers $-90\,°$.

- Quand ω tend vers $+\infty$, le gain a une pente de 0 dB/decade et tend vers $20 \log K_p = 0$ et la phase tend vers 0 °.
- Le changement de pente se passe à 1/10 rad/s.



Question 5 Affiner le réglage du correcteur (sans modifier la valeur de T_i) en proposant une valeur de K_p permettant de garantir la marge de phase spécifiée dans l'exigence 2.1.1.

Correction

Pour avoir une marge de phase de 30°, il faut que le gain soit nul quand la phase est de −150°. Dans l'état actuel le gain est de 10 dB. Il faut donc $20 \log K_P = -10$ soit $K_P = 0,31$.

Question 6 Sur quelle(s) performance(s) la présence de l'amortisseur peut-elle influer ? Justifier que le correcteur choisi permet de répondre aux exigences 2.1.1 en présence de l'amortisseur.

Correction

L'amortisseur améliore la stabilité car la marge de phase est plus grande. En revanche, la bande passante à 0 dB étant plus petite, le système est donc moins rapide.