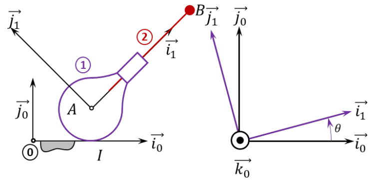
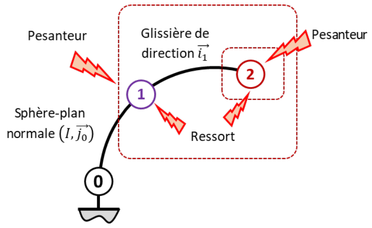
Mouvement RT – RSG ★★

05 DYN

C1-05





Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

Question 2 Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de **1** et de **2** par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Le système posède deux mobilités :

- translation de 1 par rapport à 2 (λ) ;
- rotation de l'ensemble {1+2} autour du point I (le roulement sans glissement permet d'écrire une relation entre la rotation de paramètre θ et le déplacement suivant $\overrightarrow{i_0}$.

On en déduit la stratégie suivante :

- Première loi de mouvement :
  - on isole 2,
  - BAME :
    - $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}$,
    - $\{\mathcal{T}(1_{\text{ressort}} \rightarrow 2)\}$ $(\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{i_1} = 0$ et $\overrightarrow{R(1_{\text{ressort}} \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{i_1} = 0)$
    - $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\}$;
  - on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection suivant $\overrightarrow{i_1}$.
- Seconde loi de mouvement :
  - on isole {1+2} ;
  - BAME :
    - $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$ $(\overrightarrow{\mathcal{M}(I, 0 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{k_0} = 0)$,
    - $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 1)\}$,
    - $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\}$.
  - on réalise un théorème du moment dynamique en I en projection suivant $\overrightarrow{k_0}$.

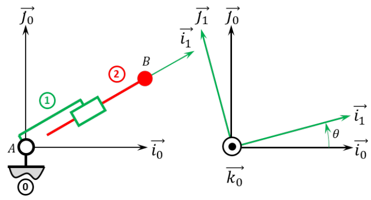
Question 3 Déterminer les lois de mouvement.

Mouvement RT ★

05 DYN

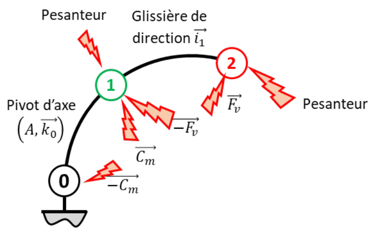
C1-05

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



Question 2 Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de **1** et de **2** par rapport à $\mathcal{R}_0$.

- On isole **{1}**. On réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{i_1}$: $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{i_1} + \overrightarrow{R(F_v \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{i_1} + \overrightarrow{R(\text{Pes} \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{i_1}$.
- On isole **{1+2}**. On réalise un théorème du moment dynamique en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$: $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{k_0} + \overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{Mot} \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{k_0} + \overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{Pes} \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{k_0} + \overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{Pes} \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} + \overrightarrow{\delta(A, 1/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$.



Mouvement RT ★

04 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en A.

On a $\{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, 1/0)} \end{array} \right\}_A$.

Calculons $\overrightarrow{R_d(1/0)}$.

$$\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)} = m_1 \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{AG_1}\right]_{R_0} = m_1 \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[L_1 \overrightarrow{i_1}\right]_{R_0} = m_1 L_1 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}\right]_{R_0}$$
$$= m_1 L_1 \left(\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_1}\right).$$

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

Question 3 Déterminer les lois de mouvements.

Mouvement RT ★

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$ par dérivation vectorielle.
$\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\lambda(t)\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$ par composition.
$\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{V(B, 1/0)}$.

$\forall P, \overrightarrow{V(P, 2/1)} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}$.

Par ailleurs $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \overrightarrow{V(A, 1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = -\lambda(t)\overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0} = \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

Au final, $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.
$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_B$.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.

$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}-\lambda(t)\dot{\theta}(t)^2\overrightarrow{i_1} = \left(\ddot{\lambda}(t)-\lambda(t)\dot{\theta}(t)^2\right)\overrightarrow{i_1}+$
$\left(\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{j_1}$.

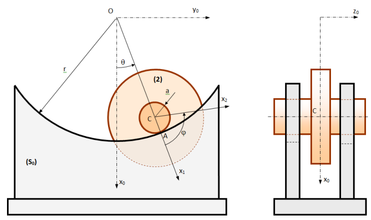
Colle 0
Mesure de moment d'inertie – Corrigé

Équipe PT – PT⋆ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09

La figure ci-dessous représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie I d'un solide de révolution **(2)** par rapport à son axe. Soit R_0 un repère galiléen lié au bâti **(**S_0**)** tel que l'axe $\left(O, \overrightarrow{x_0}\right)$ soit vertical descendant. Les deux portées sur lesquelles roule le solide **(2)** sont des portions de la surface d'un cylindre de révolution d'axe $\left(O, \overrightarrow{z_0}\right)$ et de rayon r. Le solide **(2)**, de masse m, de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a. Soit f le coefficient de frottement entre **(2)** et **(**S_0**)**.



L'étude se ramène à celle d'un problème plan paramétré de la façon suivante :

- le tourillon de **(2)**, de centre C, roule sans glisser en A sur la portée cylindrique de **(**S_0**)** ;
- R_1 est un repère tel que $\overrightarrow{OA} = r\overrightarrow{x_1}$ et on pose $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right)$;
- R_2 est un repère lié à 2 avec $\varphi = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right)$. On suppose que $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Question 1 Donner la relation entre φ et θ.

Question 2 Déterminer l'équation du mouvement de **(2)** par rapport à **(**S_0**)** en fonction de θ.

Question 3 On suppose que l'angle θ reste petit au cours du mouvement. Montrer que le mouvement est périodique et déterminer la période T des oscillations de **(2)**.

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de **(S)** sachant que : $T = 5\,\text{s}$; $a = 12{,}5\,\text{mm}$; $r = 141{,}1\,\text{mm}$; $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$; $m = 7217\,\text{g}$; $f = 0,15$.

Question 5 Déterminer l'angle θ_0 maxi pour qu'il n'y ait pas glissement en A. Faire l'application numérique.

Dispositif de mesure de moment d'inertie. 1/2

1 - RSG en A $\overrightarrow{V}(A\in S/R_0) = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{V}(C\in S/R_0) + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$

$\Leftrightarrow (r-a)\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_1} - a\,\overrightarrow{x_1} \wedge (\dot{\varphi}+\theta)\overrightarrow{z_0}$

$\Leftrightarrow r\dot{\theta} + a\dot{\varphi} = 0$ en intégrant avec $c_1 = 0$: $\boxed{r\theta + a\varphi = 0}$

2 - Isolons $\{S\}$

$$\mathcal{T}(\text{pesanteur} \to S) = \left\{\begin{matrix} mg\,\overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix}\right\}_C \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(S_0 \to S) = \left\{\begin{matrix} N\overrightarrow{x_1} + T\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix}\right\}_A$$

Appliquons le th de l'énergie cinétique $P(\text{ext} \to S/S_0) = \dfrac{d\,E_c(S/S_0)}{dt}$

- $E_c(S/S_0) = \frac{1}{2}m\left[(r-a)\dot{\theta}\right]^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\theta}+\varphi)^2 = \frac{1}{2}m(r-a)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\dot{\theta}^2$

$$= \frac{(r-a)^2}{2}\left[m + \frac{I}{a^2}\right]\dot{\theta}^2$$

$$\frac{dE_c(S/S_0)}{dt} = (r-a)^2\left(m + \frac{I}{a^2}\right)\dot{\theta}\,\ddot{\theta}$$

- $P(\text{ext} \to S/S_0) = \mathcal{T}(\text{pesanteur} \to S) \otimes \mathcal{V}(S/R_0) + \mathcal{T}(S_0 \to S) \otimes \mathcal{V}(S/R_0)$

$$= \left\{\begin{matrix} mg\,\overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix}\right\}_C \otimes \left\{\begin{matrix} (\theta+\dot{\varphi})\overrightarrow{z_0} \\ (r-a)\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_1} \end{matrix}\right\}_C + \left\{\begin{matrix} N\overrightarrow{x_1} + T\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix} (\theta+\dot{\varphi})\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix}\right\}_A$$

$$= -mg(r-a)\dot{\theta}\sin\theta$$

d'où $(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

$\Leftrightarrow \boxed{(r-a)(ma^2 + I)\,\theta + mga^2\sin\theta = 0}$ (1)

Autre solution : PFD appliqué à $\{S\}$ en A :

$$\left\{\begin{matrix} m\,\overrightarrow{\Gamma}(C\in S/R_0) \\ \overrightarrow{\delta_A}(S/R_0) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} mg\,\overrightarrow{x_0} + N\overrightarrow{x_1} + T\overrightarrow{y_1} \\ mga\sin\theta\,\overrightarrow{z_0} \end{matrix}\right\}_A$$

2/2

avec $\overrightarrow{\delta_A}(S/R_0) = \overrightarrow{\delta_C}(S/R_0) + \overrightarrow{AC} \wedge m\overrightarrow{\Gamma}(C\in S/R_0)$

$$= \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{J_C(S)\,\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)}_{I(\dot\theta+\dot\varphi)\overrightarrow{z_0}}\Big] - ma\,\overrightarrow{x_1} \wedge \Big[(r-a)\dot\theta\,\overrightarrow{y_1} - (r-a)\dot\theta^2\,\overrightarrow{x_1}\Big]$$

$$= \Big[I\left(1-\frac{r}{a}\right)\ddot\theta - ma(r-a)\ddot\theta\Big]\overrightarrow{z_0}$$

TMD en $A/\overrightarrow{z_0}$ $\quad (r-a)\left[I+ma^2\right]\ddot\theta + mga^2\sin\theta = 0 \qquad (1)$

3 _ θ petit $\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$ d'où l'éq diff du 2nd ordre :

$$\ddot\theta + \frac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\,\theta = 0$$

Le coef de θ étant positif, on a un phénomène périodique de période $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(r-a)(I+ma^2)}{mga^2}}}$

4 _ $T^2 = 4\pi^2\,\dfrac{(r-a)(I+ma^2)}{mga^2} \iff I = \dfrac{T^2 . mga^2}{4\pi^2(r-a)} - ma^2$

A.N $\quad I = \dfrac{2{,}5 \cdot 7{,}217 \quad 9{,}81 \quad 12{,}5^2 \; 10^{-6}}{4\pi^2\,(141{,}1 - 12{,}5)\; 10^{-3}} - 7{,}217 \quad 12{,}5^2 \; 10^{-6} = \boxed{53{,}3 . 10^{-3}\ \text{kg m}^2}$

5 _ Th de la résultante dynamique appliqué à $\{S\}$: $m\left[(r-a)\ddot\theta\,\overrightarrow{y_1} - (r-a)\dot\theta^2\,\overrightarrow{x_1}\right] = mg\overrightarrow{x_0} + N\overrightarrow{x_1} + T\overrightarrow{y_1}$

$/\overrightarrow{x_1} \quad -m(r-a)\dot\theta^2 = mg\cos\theta + N \qquad \iff N = -m(r-a)\dot\theta^2 - mg\cos\theta$

$/\overrightarrow{y_1} \quad m(r-a)\ddot\theta = T - mg\sin\theta \qquad \iff T = m(r-a)\ddot\theta + mg\sin\theta$

pas de glissement $\Rightarrow \|\overrightarrow{T}\| < f\,\|\overrightarrow{N}\| \iff \left|m(r-a)\ddot\theta + mg\sin\theta\right| < f\left(m(r-a)\dot\theta^2 + mg\cos\theta\right)$

de (1) $\quad \ddot\theta = \dfrac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)} . \sin\theta \qquad$ et $\dot\theta_0 = 0$ car il y a risque de glissement quand θ est max, (ici θ_0)

d'où : $\quad m(r-a)\,\dfrac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\sin\theta_0 + mg\sin\theta_0 < f\,mg\cos\theta_0$

$$\iff \boxed{\tan\theta_0 < f . \left(1 + \frac{ma^2}{I}\right)}$$

A.N. $\quad \boxed{\theta_0 < 8{,}7^\circ}$

Colle 1
Disque déséquilibré – Corrigé

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09

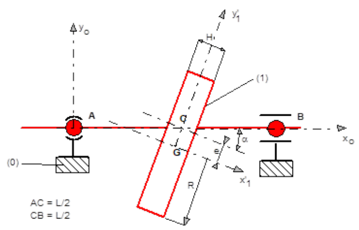
Soit le rotor **(1)** défini ci-contre. Il est constitué d'un arbre de masse négligeable en liaison pivot par rapport à un bâti **(0)**. Sur cet arbre est monté, en liaison complète, un disque de masse M, de rayon R et d'épaisseur H. Le repère $\mathcal{R}_1' = \left(G; \overrightarrow{x_1'}, \overrightarrow{y_1'}, \overrightarrow{z_1'}\right)$ est attaché à ce solide.

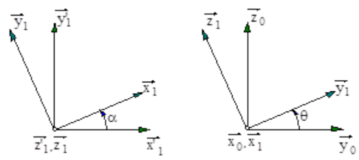
La base $\mathcal{B}_1' = \left(\overrightarrow{x_1'}, \overrightarrow{y_1'}, \overrightarrow{z_1'}\right)$ se déduit de $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ par une rotation d'angle α autour de $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_1'}$.

La base $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ se déduit de $\mathcal{B}_0 = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ par une rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0}$.

Enfin, le rotor **1** est entrainé par un moteur (non représenté) fournissant un couple noté $C_m\overrightarrow{x_0}$. Le montage de ce disque présente deux défauts :

- un défaut de perpendicularité caractérisé par l'angle α ;
- un défaut d'excentricité représenté par la cote e.





Question 1 Déterminer la forme de la matrice d'inertie du cylindre en C dans la base $\mathcal{B}_1'$.

Question 2 Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de **(1)** dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Question 3 Appliquer le PFD pour déterminer les inconnues de liaison.

CORRIGE

Q1- Déterminer l'expression littérale de la matrice d'inertie de (1) au point C dans la base B'_1. Dans ce qui suit garder la matrice sous la forme générique (A, B, C, ...)

Matrice d'inertie de (1) dans la base B'1

On sait que : $\tilde{I}(G,1) = \begin{bmatrix} \dfrac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m(3R^2+4H^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m(3R^2+4H^2)}{12} \end{bmatrix}_{B'_1}$

Transfert au point C : $\overrightarrow{CG} = -e\ \overrightarrow{y'_1}$

$$\tilde{I}(C,1) = \tilde{I}(G,1) + m\begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}_{B'_1}$$

Ainsi : $\tilde{I}(C,1) = \begin{bmatrix} m\left(\dfrac{R^2}{2}+e^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m}{12}(3R^2+H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m}{12}(3R^2+H^2+12e^2) \end{bmatrix}_{B'_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1}$

Q2- Déterminer les éléments de réduction en C du torseur cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{C\ (1/R_0)\} = \left\{ \begin{matrix} m\ \overrightarrow{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}\ (C,1/R_0) \end{matrix} \right\}_C$$

Résultante cinétique : $m\ \overrightarrow{V}(G/R_0) = -\,m\,e\ \dot{\theta}\ \cos\alpha\ \vec{z_1}$

Moment cinétique : $\vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\ c\alpha \\ \dot{\theta}\ s\alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{B'_1} = \dot{\theta}\ (A\ c\alpha\ \overrightarrow{x'_1} + B\ s\alpha\ \overrightarrow{y'_1})$

Or : $\overrightarrow{x'_1} = c\alpha\ \vec{x_1} - s\alpha\ \vec{y_1}$ et $\overrightarrow{y'_1} = c\alpha\ \vec{y_1} + s\alpha\ \vec{x_1}$

$$\vec{\sigma}\,(C,1/R_0)=\dot{\theta}\ \{(A\,c^2\alpha+B s^2\alpha)\,\vec{x_1}+(B-A)\,s\alpha\,c\alpha\,\vec{y_1}\}=\dot{\theta}\,(A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})$$

$$\boxed{\{C\,(1/R_0)\}=\begin{Bmatrix} m\,\vec{V}\,(G/R_0)=-\,m\,e\,\dot{\theta}\,\cos\alpha\,\vec{z_1} \\ \vec{\sigma}\,(C,1/R_0)=\dot{\theta}\ \{(A\,c^2\alpha+B s^2\alpha)\,\vec{x_1}+(B-A)\,s\alpha\,c\alpha\,\vec{y_1}\}=\dot{\theta}\,(A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})\end{Bmatrix}_C}$$

Q3- Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{D\,(1/R_0)\}=\begin{Bmatrix} M\,\vec{\Gamma}\,(G/R_0) \\ \vec{\delta}\,(C,1/R_0)\end{Bmatrix}_C$$

Résultante dynamique : $M\,\vec{\Gamma}\,(G/R_0)=-\,m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,\vec{z_1}-\dot{\theta}^2\,\vec{y_1})$

Moment dynamique : C est un point fixe, donc : $\vec{\delta}\,(C,1/R_0)=\dfrac{d\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0)}{dt/R_0}$

$$\vec{\delta}\,(C,1/R_0)=\frac{d\,\{\dot{\theta}\,(A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})\}}{dt/R_0}=\ddot{\theta}\,(A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})+B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1}$$

Car $\dfrac{d\,\vec{y_1}}{dt/R_0}=\dfrac{d\,\vec{y_1}}{dt/R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{y_1}=\dot{\theta}\,\vec{x_1}\wedge\vec{y_1}=\dot{\theta}\,\vec{z_1}$

$$\boxed{\{D\,(1/R_0)\}=\begin{Bmatrix} M\,\vec{\Gamma}\,(G/R_0)=-\,m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,\vec{z_1}-\dot{\theta}^2\,\vec{y_1}) \\ \vec{\delta}\,(C,1/R_0)=\ddot{\theta}\,(A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})+B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1}\end{Bmatrix}_C}$$

Calculons :

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0)=\vec{\delta}\,(C,1/R_0)+\vec{AC}\wedge m\,\vec{\Gamma}(G,1/R_0)$$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0)=\ddot{\theta}\,(A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})+B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1}+\vec{AC}\wedge(-\,m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,\vec{z_1}-\dot{\theta}^2\,\vec{y_1})$$

Or : $\vec{AC}=\dfrac{L}{2}\,\vec{x_1}$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0)=\ddot{\theta}\,(A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})+B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1}+m\,e\,\cos\alpha\,\frac{L}{2}\,(\ddot{\theta}\,\vec{y_1}+\dot{\theta}^2\,\vec{z_1})$$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0)=\vec{x_1}(A'\ddot{\theta})+\vec{y_1}\,(B'+m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\,)\ddot{\theta}+\vec{z_1}(B'+m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\dot{\theta}^2$$

$$\left\{\mathcal{D}(1/R_0)\right\} = \left\{ \begin{array}{l} M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\,\left(\ddot{\theta}\,\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\,\vec{y}_1\right) \\ \vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{x}_1(A'\ddot{\theta}) + \vec{y}_1\,\left(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha\right)\ddot{\theta} + \vec{z}_1\left(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha\right)\dot{\theta}^2 \end{array} \right\}_A$$

Q4- Déterminer l'énergie cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

C étant fixe dans R_0 : $2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0).\,[\tilde{I}(C,S)\,\vec{\Omega}(S/R_0)]$

$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}(C,S/R_0)$

$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = \dot{\theta}\vec{x}_1\,.\,\dot{\theta}(A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1)$

$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = A'\,\dot{\theta}^2 = (A\,c^2\alpha + Bs^2\alpha)\dot{\theta}^2$

$\boxed{2\,T(S/R_0) = A'\,\dot{\theta}^2 = (A\,c^2\alpha + Bs^2\alpha)\dot{\theta}^2}$

Q5- Les liaisons en A et B sont supposées parfaites. Le rotor tourne à vitesse constante $\dot{\theta} = \omega$. Déterminer les actions de liaison en A et B et le couple moteur nécessaire C_m pour obtenir ce mouvement

On isole 1 et on lui applique le PFD : $\left\{\mathcal{D}(1/R_0)\right\} = \left\{\bar{1} \rightarrow 1\right\}$

Or : $\left\{\mathcal{D}(1/R_0)\right\} = \left\{A \rightarrow 1\right\} + \left\{B \rightarrow 1\right\} + \left\{\text{Poids} \rightarrow 1\right\} + \left\{Cm\right\}$

$$\left\{\bar{1} \rightarrow 1\right\} = \left\{\begin{array}{cc} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{array}\right\}_{A\,B_0} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{array}\right\}_{B\,B_0} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{G\,B_0} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & Cm \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{B_0}$$

On réduit tout en A dans la base B_0 :

LA en B : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R} = L\,\vec{x}_0 \wedge (X_B\,\vec{x}_0 + Y_B\,\vec{y}_0 + Z_B\,\vec{z}_0) = L(Y_B\,\vec{z}_0 - Z_B\,\vec{y}_0)$

Pesanteur : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R} = (\frac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y'}_1) \wedge\ -mg\,\vec{y}_0 = -mg\frac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\,\vec{y'}_1 \wedge \vec{y}_0$

Or : $\vec{y'}_1 = c\alpha\,\vec{y}_1 + s\alpha\,\vec{x}_0$ et $\vec{y}_1 = c\theta\,\vec{y}_0 + s\theta\,\vec{z}_0$

$\vec{y'}_1 = c\alpha\,(c\theta\,\vec{y}_0 + s\theta\,\vec{z}_0) + s\alpha\,\vec{x}_0 = s\alpha\,\vec{x}_0 + c\alpha\,c\theta\,\vec{y}_0 + c\alpha\,s\theta\,\vec{z}_0$

$\vec{y'}_1 \wedge \vec{y}_0 = (s\alpha\,\vec{x}_0 + c\alpha\,c\theta\,\vec{y}_0 + c\alpha\,s\theta\,\vec{z}_0) \wedge \vec{y}_0 = s\alpha\,\vec{z}_0 - c\alpha\,s\theta\,\vec{x}_0$

$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R} = (\frac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y'}_1) \wedge\ -mg\,\vec{y}_0 = -mg\frac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\,(s\alpha\,\vec{z}_0 - c\alpha\,s\theta\,\vec{x}_0)$

$$\overrightarrow{M_A} = -e\,m\,g\;c\alpha\,s\theta\;\vec{x}_0 + mg\,(e\,s\alpha - \frac{L}{2})\,\vec{z}_0$$

Résultante dynamique

$$M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -m\,e\,\cos\alpha\;(\ddot{\theta}\;\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\;\vec{y}_1)$$

$$\vec{y}_1 = c\theta\;\vec{y}_0 + s\theta\;\vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{z}_1 = c\theta\;\vec{z}_0 - s\theta\;\vec{y}_0$$

$$M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -m\,e\,\cos\alpha\;\{\ddot{\theta}\;(c\theta\;\vec{z}_0 - s\theta\;\vec{y}_0) - \dot{\theta}^2\,(c\theta\;\vec{y}_0 + s\theta\;\vec{z}_0)\}$$

$$\boxed{M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = m\,e\,\cos\alpha\;\{\vec{y}_0(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) - \vec{z}_0(\ddot{\theta}\;c\theta - \dot{\theta}^2\,s\theta)\}}$$

Moment dynamique :

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{x}_0(A'\ddot{\theta}) + \vec{y}_1\;(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\ddot{\theta} + \vec{z}_1(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\;\dot{\theta}^2$$

$$\vec{y}_1 = c\theta\;\vec{y}_0 + s\theta\;\vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{z}_1 = c\theta\;\vec{z}_0 - s\theta\;\vec{y}_0$$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{x}_0(A'\ddot{\theta}) + (c\theta\;\vec{y}_0 + s\theta\;\vec{z}_0)\;(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\ddot{\theta} + (c\theta\;\vec{z}_0 - s\theta\;\vec{y}_0)(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\;\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = {} & \vec{x}_0(A'\ddot{\theta}) \\ & + (B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha)(\ddot{\theta}\;c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\;\vec{y}_0 \\ & + (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\;s\theta)\,\vec{z}_0\end{aligned}}$$

En définitive : $\{\bar{1} \rightarrow 1\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{cc} X_A & Cm - e\,m\,g\,c\alpha\;s\theta \\ Y_A + Y_B - mg & -L\,Z_B \\ Z_A + Z_B & LY_B + mg\,(e\,s\alpha - \frac{L}{2}) \end{array}\right\}_{B_0}$

$$\{D\,(1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & A'\ddot{\theta} \\ \mathrm{m\,e}\;\cos\alpha\;(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) & (B' + \mathrm{m\,e}\dfrac{L}{2}\cos\alpha\;)(\ddot{\theta}\;c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta) \\ \mathrm{m\,e}\;\cos\alpha\;(-\ddot{\theta}\;c\theta + \dot{\theta}^2\,s\theta) & (B' + \mathrm{m\,e}\;\dfrac{L}{2}\cos\alpha)\;(c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\;s\theta) \end{array} \right\}_{A\;\;B_0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - mg = \mathrm{m\,e}\;\cos\alpha\;(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) \\ Z_A + Z_B = \mathrm{m\,e}\;\cos\alpha\;(-\ddot{\theta}\;c\theta + \dot{\theta}^2\,s\theta) \\ Cm - \mathrm{e\,m\,g}\;c\alpha\;s\theta = A'\ddot{\theta} \\ Z_B = -\dfrac{1}{L}\{(B' + \mathrm{m\,e}\dfrac{L}{2}\cos\alpha\;)(\ddot{\theta}\;c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\} \\ Y_B \;=\; \dfrac{1}{L}\{\mathrm{m\,g}\,(\dfrac{L}{2} - e\;s\alpha) + (B' + \mathrm{m\,e}\;\dfrac{L}{2}\cos\alpha)\;(c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\;s\theta)\} \end{array}}$$

Si $\dot{\theta} = \omega = cste$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - mg = \mathrm{m\,e}\;\cos\alpha\;\omega^2\,c\theta \\ Z_A + Z_B = \mathrm{m\,e}\;\cos\alpha\;\omega^2\,s\theta \\ Cm - \mathrm{e\,m\,g}\;c\alpha\;s\theta = 0 \\ Z_B = -\dfrac{1}{L}(B' + \mathrm{m\,e}\dfrac{L}{2}\cos\alpha\;)\;\omega^2\,s\theta \\ Y_B = \dfrac{1}{L}\{\;\mathrm{m\,g}\,(\dfrac{L}{2} - e\;s\alpha) + (B' + \mathrm{m\,e}\;\dfrac{L}{2}\cos\alpha)\;\omega^2\,c\theta\} \end{array}}$$

ZA et ZB sont non nulles. Si tout était équilibré elles seraient nulles
Le mouvement est imposé. La recherche des composantes de liaisons donne lieu à des équations algébriques

TD 0
Stabilisateur passif d'image – Corrigé

04 DYN

Mines Ponts 2018 – PSI.

Mise en situation

Objectif

Suite à une sollicitation brève de 0,5 m s^{-2}, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les 0,5°.

Travail demandé

Question 1 Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans **(0)** galiléen s'exprime comme $Q_1 \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$.

Correction

(1) et **(E)** sont en liaison pivot d'axe $\left(O, \overrightarrow{Y_0}\right)$. On va donc réaliser un théorème du moment dynamique appliqué à **(E)** en O en projection sur $\overrightarrow{Y_0}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta\left(O, E/0\right)}$

Méthode 1 – En passant par le calcul de $\overrightarrow{\delta\left(O, \mathbf{2}/0\right)}$, $\overrightarrow{\delta\left(O, \mathbf{C}/0\right)}$ **et** $\overrightarrow{\delta\left(O, \mathbf{Cp}/0\right)}$

Le support 2 étant sans masse, on a $\overrightarrow{\delta\left(O, 2/0\right)} = \overrightarrow{0}$. La caméra et le contrepoids étant considérés comme des masses ponctuelles, on a $\overrightarrow{\delta\left(G_C, \mathrm{C}/0\right)} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\delta\left(G_{Cp}, \mathrm{Cp}/0\right)} = \overrightarrow{0}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta\left(O, \mathbf{C}/0\right)}$

On a $\overrightarrow{\delta\left(O, \mathrm{C}/0\right)} = \overrightarrow{\delta\left(G_C, \mathrm{C}/0\right)} + \overrightarrow{OG_C} \wedge M_C \overrightarrow{\Gamma\left(G_C, \mathrm{C}/0\right)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma\left(G_C, \mathbf{C}/0\right)}$

$\overrightarrow{V\left(G_C, \mathrm{C}/0\right)} = \overrightarrow{V\left(G_C, \mathrm{C}/1\right)} + \overrightarrow{V\left(G_C, 1/0\right)} = \overrightarrow{G_C O} \wedge \overrightarrow{\Omega\left(\mathrm{C}/0\right)} + v(t)\overrightarrow{X_0} = -L_C\overrightarrow{Z_2} \wedge \dot{\varphi}\overrightarrow{Y_2} + v(t)\overrightarrow{X_0} = L_C\dot{\varphi}\overrightarrow{X_2} + v(t)\overrightarrow{X_0}$.

De plus $\overrightarrow{\Gamma\left(G_C, \mathrm{C}/0\right)} = L_C\ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2} - L_C\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Z_2} + a(t)\overrightarrow{X_0}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta\left(O, \mathrm{C}/0\right)} = \overrightarrow{OG_C} \wedge M_C\overrightarrow{\Gamma\left(G_C, \mathrm{C}/0\right)} = L_C\overrightarrow{Z_2} \wedge M_C\left(L_C\ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2} - L_C\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Z_2} + a(t)\overrightarrow{X_0}\right)$

$\overrightarrow{\delta\left(O, \mathrm{C}/0\right)} = L_C M_C\left(L_C\ddot{\varphi}\overrightarrow{Y_2} + a(t)\cos\varphi\overrightarrow{Y_0}\right)$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta\left(O, \mathbf{Cp}/0\right)}$

On a $\overrightarrow{\delta\left(O, \mathrm{Cp}/0\right)} = \overrightarrow{\delta\left(G_{Cp}, \mathrm{Cp}/0\right)} + \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp}\overrightarrow{\Gamma\left(G_{Cp}, \mathrm{C}/0\right)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma\left(G_{Cp}, \mathbf{Cp}/0\right)}$

De même, $\overrightarrow{V\left(G_{Cp}, \mathrm{Cp}/0\right)} = \overrightarrow{V\left(G_{Cp}, \mathrm{Cp}/1\right)} + \overrightarrow{V\left(G_{Cp}, 1/0\right)} = \overrightarrow{G_{Cp}O} \wedge \overrightarrow{\Omega\left(\mathrm{Cp}/0\right)} + v(t)\overrightarrow{X_0} = L_{Cp}\overrightarrow{Z_2} \wedge \dot{\varphi}\overrightarrow{Y_2} + v(t)\overrightarrow{X_0} = -L_{Cp}\dot{\varphi}\overrightarrow{X_2} + v(t)\overrightarrow{X_0}$.

De plus $\overrightarrow{\Gamma\left(G_{Cp}, \mathrm{Cp}/0\right)} = -L_{Cp}\ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2} + L_{Cp}\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Z_2} + a(t)\overrightarrow{X_0}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta\left(O, \mathrm{Cp}/0\right)} = \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp}\overrightarrow{\Gamma\left(G_{Cp}, \mathrm{Cp}/0\right)} = -L_{Cp}\overrightarrow{Z_2} \wedge M_{Cp}\left(-L_{Cp}\ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2} + L_{Cp}\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Z_2} + a(t)\overrightarrow{X_0}\right)$

$\overrightarrow{\delta\left(O, \mathrm{C}/0\right)} = -L_{Cp}M_{Cp}\left(-L_{Cp}\ddot{\varphi}\overrightarrow{Y_2} + a(t)\cos\varphi\overrightarrow{Y_0}\right)$

On a donc $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} = M_{Cp}L_{Cp}^2\ddot{\varphi} - M_{Cp}L_{Cp}a(t)\cos\varphi + M_C L_C^2\ddot{\varphi} + M_C L_C a(t)\cos\varphi$

Méthode 2 – En passant par le calcul de $I_O(E)$

On a $I_O(C) = M_C \begin{pmatrix} L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2}$ et $I_O(Cp) = M_{Cp} \begin{pmatrix} L_{Cp}^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_{Cp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2}$ et donc

$$I_O(E) = \begin{pmatrix} M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2}.$$

O est un point quelconque ; donc $\overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} =$ $\overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} + \overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(E/R_0)$ et $\overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)} = I_O(E) \cdot \overrightarrow{\Omega(E/R_0)} + M\,\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V(O, E/R_0)}$.

De plus, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}}\overrightarrow{Z_2}$, $\overrightarrow{V(O, E/R_0)} = v(t)\overrightarrow{X_0}$ et $\overrightarrow{V(G, E/R_0)} = v(t)\overrightarrow{X_0} + \dfrac{M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}}\dot{\varphi}\overrightarrow{X_2}$.

On a donc, $\overrightarrow{\sigma(O, S/R_0)} = \dot{\varphi}\left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2\right)\overrightarrow{Y_2} + \left(M_C + M_{Cp}\right)\dfrac{M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}}\overrightarrow{Z_2} \wedge v(t)\overrightarrow{X_0} = \dot{\varphi}\left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2\right)\overrightarrow{Y_2} + \left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}\right)v(t)\cos\varphi\overrightarrow{Y_0}$.

$\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = \ddot{\varphi}\left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2\right)\overrightarrow{Y_2} + \left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}\right)\left(a(t)\cos\varphi - v(t)\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\overrightarrow{Y_0}$.

$\overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(E/R_0) = v(t)\overrightarrow{X_0} \wedge \left(M_C + M_{Cp}\right)\left(v(t)\overrightarrow{X_0} + \dfrac{M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}}\dot{\varphi}\overrightarrow{X_2}\right) = \left(M_C + M_{Cp}\right)\left(\dfrac{M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}}\dot{\varphi}v(t)\sin\varphi\right)\overrightarrow{Y_2} = \left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}\right)\dot{\varphi}v(t)\sin\varphi\overrightarrow{Y_2}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \ddot{\varphi}\left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2\right)\overrightarrow{Y_2} + \left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}\right)a(t)\cos\varphi\overrightarrow{Y_0}$

Bilan des actions mécaniques en O agissant sur E

- Liaison pivot $\{\mathscr{T}(1 \to E)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \to E)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = 0$.
- $\{\mathscr{T}(\text{pes} \to C)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \to C)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = \left(\overrightarrow{OG_C} \wedge -M_C g\overrightarrow{Z_0}\right)\overrightarrow{Y_2} = \left(L_C\overrightarrow{Z_2} \wedge -M_C g\overrightarrow{Z_0}\right)\overrightarrow{Y_2} = L_C M_C g\sin\varphi\overrightarrow{Y_2}$.
- $\{\mathscr{T}(\text{pes} \to Cp)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \to Cp)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = \left(-L_{Cp}\overrightarrow{Z_2} \wedge -M_{Cp} g\overrightarrow{Z_0}\right)\overrightarrow{Y_2} = -L_{Cp}M_{Cp}g\sin\varphi\overrightarrow{Y_2}$.

Théorème du moment dynamique en O en projection sur $\overrightarrow{Y_2}$

$\ddot{\varphi}\left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2\right) + \left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}\right)a(t)\cos\varphi = L_C M_C g\sin\varphi - L_{Cp}M_{Cp}g\sin\varphi$.

$\Leftrightarrow \ddot{\varphi}\left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2\right) + \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right)g\sin\varphi = -\left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}\right)a(t)\cos\varphi$.

On a donc : $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right)g\sin\varphi$, $Q_3(t) = \left(M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C\right)\cos\varphi$.

Question 2 Établir sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\Phi(p)}{A(p)}$. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de m_c, m_{cp}, L_c, L_{cp} et g.

Correction

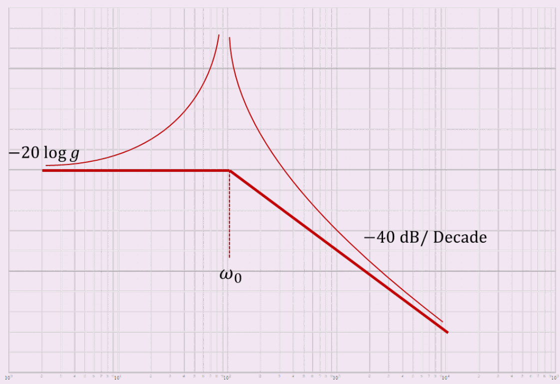
Dans les conditions précédentes, on a $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g\varphi$ et $Q_3(t) = \left(M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C\right)$.

L'équation de comportement devient donc $Q_1 \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g\varphi = Q_3 a(t)$ $\Rightarrow Q_1 p^2 \Phi(p) + \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g\Phi(p) = Q_3 A(p)$ et $H(p) = \dfrac{Q_3}{Q_1 p^2 + \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g}$.

On a donc $\omega_0^2 = \dfrac{\left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g}{Q_1} = \dfrac{\left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g}{M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}$. Le gain K vaut $\dfrac{M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C}{\left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g} = \dfrac{1}{g}$.

Question 3 Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain $G_{\text{dB}} = f(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$. Placer les caractéristiques remarquables.

Correction



Question 4 Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que $\omega_0 = 0,1\omega_a$. Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple $\left(m_{cp}, L_{cp}\right)$. En utilisant le comportement asymptotique en gain de G_{dB}, estimer numériquement l'amplitude $\Delta\varphi$ (en degrés) des oscillations de **(E)** selon l'axe $\left(O, \overrightarrow{y_0}\right)$.

Correction

On a $\omega_a = 10\omega_0$. Une décade après ω_0, $G_{\text{dB}} = -20\log 10 - 40 = -60$ dB. Une atténuation de -60 dB correspond à un gain de $10^{-\frac{60}{20}} = 0,001$. L'amplitude des oscillations sera donc de $0,001 a_0 = 5 \times 10^{-4}$ rad soit $0,03°$.

Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

Correction

On a $0,03° < 0,5°$. Le cahier des charges est vérifié au voisinage de $10\omega_0$.

TD 1
Gyrolock ⋆ ⋆⋆ – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2022.
Corrigé proposé par l'UPSTI.

Comportement dynamique du stabilisateur

C1-05

C2-09

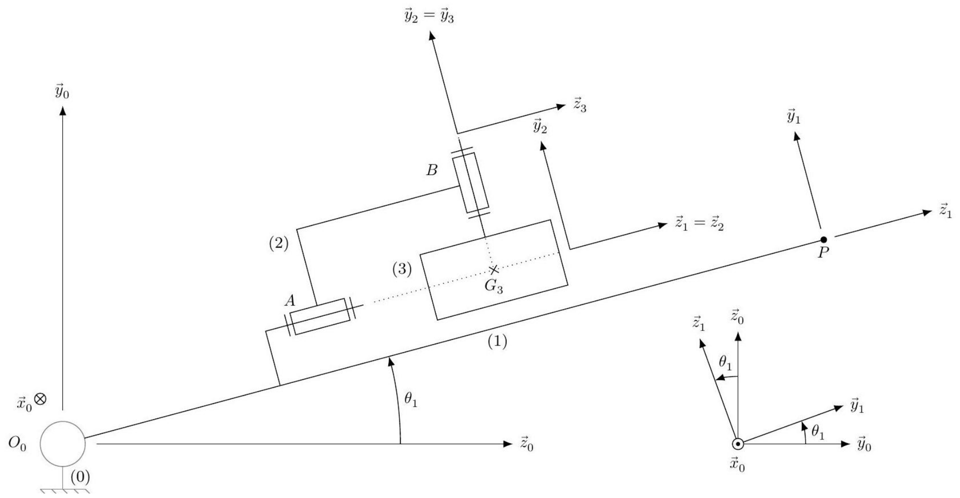


FIGURE 1 – Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour $\theta_2 = \theta_3 = 0$)

Dans la modélisation retenue (figure 1), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel $\mathcal{R}_0\left(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère $\mathcal{R}_1\left(O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\right)$ avec $\theta_1 = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1\right) = \left(\vec{z}_0, \vec{z}_1\right)$. Le point P tel que $O_0P = L$ représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

Paramétrage, notations et hypothèses

- La liaison pivot d'axe $\left(O_0, \vec{x}_0\right)$ entre les solides (0) et (1) possède une raideur k et un coefficient de frottement visqueux f, d'où $\vec{M}\left(O_0, 0 \rightarrow 1\right) \cdot \vec{x}_0 = -\left(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1\right)$;
- les autres liaisons sont supposées parfaites ;
- l'action du cœur sur le stabilisateur (1) est modélisée par $\{\mathcal{T}_{c\rightarrow 1}\} = \left\{\begin{array}{c} f_c\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array}\right\}_P$;
- seul le déplacement vertical du point P est pris en compte. On note $y(t) = -\overrightarrow{O_0P} \cdot \vec{y}_0$;
- le stabilisateur (1) est de masse m_1 et possède un centre d'inertie G_1 tel que $\overrightarrow{O_0G_1} = L_{G_1}\vec{z}_1$ et l'opérateur d'inertie est $\mathcal{J}\left(G_1, 1\right) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables ;
- la toupie (3) est de masse m_3 et possède un centre d'inertie G_3 tel que $\overrightarrow{O_0G_3} = L_{G_3}\vec{z}_1 + H_{G_3}\vec{y}_1$;
- les figures de changement de base sont données figures 6 et 9 ;
- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques.

Question 1 Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en $\theta_1(t)$). L'ensemble isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

Question 2 Exprimer $\vec{\delta}(O_0,1/0)\cdot\vec{x}_0$, la projection sur $\vec{x}_0$ du moment dynamique au point O_0 du solide (1) en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.

Correction

Par formule de Varignon :

$$\overrightarrow{\delta}(O_0,1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0=\overrightarrow{\delta}(G_1,1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0+\left(\overrightarrow{O_0G_1}\wedge m_1\overrightarrow{\Gamma}(G_1,1/0)\right)\cdot\overrightarrow{x}_0$$

avec $\overrightarrow{\Gamma}(G_1,1/0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O_0G_1}}{\mathrm{d}t^2}\right|_0=-L_{G_1}\ddot{\theta}_1\overrightarrow{y}_1-L_{G_1}\dot{\theta}_1^2\overrightarrow{z}_1$ donc $\left(\overrightarrow{O_0G_1}\wedge m_1\overrightarrow{\Gamma}(G_1,1/0)\right)\cdot\overrightarrow{x}_0=m_1L_{G_1}^2\ddot{\theta}_1$.

De plus **au centre d'inertie** G_1 : $\overrightarrow{\delta}(G_1,1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0}{\mathrm{d}t}\right|_0$ avec $\overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0=\mathcal{I}(G_1,1)\overrightarrow{\Omega}(1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0$.

Donc $\overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0=A_1\dot{\theta}_1$ et $\overrightarrow{\delta}(G_1,1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0=A_1\ddot{\theta}_1$.

Finalement $\boxed{\overrightarrow{\delta}(O_0,1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0=(A_1+m_1L_{G_1}^2)\ddot{\theta}_1}$.

Question 3 Exprimer littéralement la vitesse $\vec{V}(G_3,3/0)$ dans la base $\mathcal{B}_1$, puis l'accélération $\vec{\Gamma}(G_3,3/0)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

Correction

Le point G_3 étant **physiquement rattaché à (3)** on peut écrire

$\boxed{\overrightarrow{V}(G_3,3/0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0G_3}}{\mathrm{d}t}\right|_0=-L_{G_3}\dot{\theta}_1\overrightarrow{y}_1+H_{G_3}\dot{\theta}_1\overrightarrow{z}_1}$.

Ensuite $\boxed{\overrightarrow{\Gamma}(G_3,3/0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}(G_3,3/0)}{\mathrm{d}t}\right|_0=-\left(L_{G_3}\ddot{\theta}_1+H_{G_3}\dot{\theta}_1^2\right)\overrightarrow{y}_1+\left(H_{G_3}\ddot{\theta}_1-L_{G_3}\dot{\theta}_1^2\right)\overrightarrow{z}_1}$.

1: $\ddot{\theta}_2\approx 0$, $\theta_2\approx 0$ et $\dot{\theta}_3=\omega_3$ constante.

Question 4 En conservant les conditions de fonctionnement ci-contre [1], il est possible de montrer que $\vec{\delta}(G_3,3/0)\cdot\vec{x}_0=A_3\ddot{\theta}_1-c_x(t)$ avec $c_x(t)=B_3\omega_3\dot{\theta}_2$ (résultat admis sans démonstration). En déduire $\vec{\delta}(O_0,3/0)\cdot\vec{x}_0$, en fonction de A_3, $c_x(t)$, m_3, L_{G_3}, H_{G_3} et $\ddot{\theta}_1(t)$.

Correction

Par formule de Varignon :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\delta}(O_0,3/0)\cdot\overrightarrow{x}_0&=\overrightarrow{\delta}(G_3,3/0)\cdot\overrightarrow{x}_0+\left(\overrightarrow{O_0G_3}\wedge m_3\overrightarrow{\Gamma}(G_3,3/0)\right)\cdot\overrightarrow{x}_0\\&=A_3\ddot{\theta}_1-c_x(t)+m_3L_{G_3}\left(L_{G_3}\ddot{\theta}_1+H_{G_3}\dot{\theta}_1^2\right)+m_3H_{G_3}\left(H_{G_3}\ddot{\theta}_1-L_{G_3}\dot{\theta}_1^2\right)\\&=\left(A_3+m_3L_{G_3}^2+m_3H_{G_3}^2\right)\ddot{\theta}_1-c_x(t)\end{aligned}$$

Question 5 Exprimer J_x en fonction de $A_1, A_3, m_1, m_3, L_{G_1}, L_{G_3}$ et H_{G_3} permettant d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x \ddot{\theta}_1(t) + f\dot{\theta}_1(t) + k\theta_1(t) = c_x(t) - Lf_c(t)$$

Correction

En appliquant la stratégie vue en question 14 on a l'équation (effets dynamiques de (2) négligés et actions de la pesanteur négligées) :

$$\overrightarrow{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 + \overrightarrow{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1) + \left(\overrightarrow{O_0P} \wedge f_c \overrightarrow{y}_1\right) \cdot \overrightarrow{x}_0$$

Tout calcul fait avec $\overrightarrow{O_0P} = L\overrightarrow{z}_1$:

$$\boxed{\left(A_1 + A_3 + m_1 L_{G_1}^2 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2\right) \ddot{\theta}_1 + f\dot{\theta}_1 + k\theta_1 = c_x(t) - Lf_c(t)}$$

On identifie $\boxed{J_x = A_1 + A_3 + m_1 L_{G_1}^2 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2}$.

En supposant que θ_1 reste proche de 0, la relation $y(t) = L\theta_1(t)$ sera utilisée.

Les transformées de Laplace de $y(t)$, $c_x(t)$ et $f_c(t)$ sont notées $Y(p)$, $C_x(p)$ et $F_c(p)$.

Question 6 En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert $H_{\text{pert}}(p)$ et $H_1(p)$ du schéma-blocs figure 2 en fonction de L, J_x, f et k.

Correction

Le schéma-bloc donne $\dfrac{Y(p)}{H_1(p)} = C_x(p) - H_{\text{pert}}(p) F_c(p)$. L'équation différentielle précédente rapportée dans le domaine de Laplace (**conditions initiales nulles**) s'écrit (avec $Y(p) = L\theta_1(p)$) :

$$\left(J_x p^2 + fp + k\right) \frac{Y(p)}{L} = C_x(p) - LF_c(p)$$

On identifie $\boxed{H_1(p) = \dfrac{L}{J_x p^2 + fp + k}}$ et $\boxed{H_{\text{pert}}(p) = L}$.

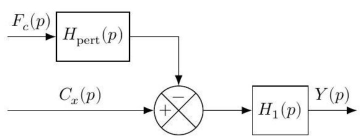


FIGURE 2 – Schéma bloc du stabilisateur (1)

On rappelle que $L = 0,3$ m et les valeurs retenues pour J_x, f et k sont :

- $J_x = 1,14 \times 10^{-2}$ kg · m^2 ;
- $-f = 64 \times 10^{-3}$ N · m · s · rad^{-1} ;
- $-k = 95$ N · m · rad^{-1}.

Question 7 Écrire $H_1(p)$ sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique K_1, amortissement ξ_1 et pulsation propre ω_1. Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).

Correction

On a $H_1(p) = \dfrac{\frac{L}{k}}{1 + \frac{f}{k}p + \frac{J_x}{k}p^2}$, on identifie alors :

- le gain statique $K_1 = \dfrac{L}{k} = \dfrac{0,3}{95} = 3,2 \cdot 10^{-3}$rad/N ;
- la pulsation propre $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{J_x}} = \sqrt{\dfrac{95}{1,14 \cdot 10^{-2}}} = 91,3$rad/s ;

- l'amortissement $\xi_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{f}{\sqrt{kJ_x}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{64 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{95 \times 1,14 \cdot 10^{-2}}} = 0,03$.

On choisit de décrire le comportement dans le domaine fréquentiel. On a un système d'ordre 2 avec résonance (car $\xi_1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$) à la pulsation $\omega_r = \omega_1 \sqrt{1 - 2\xi_1^2}$. Le diagramme de Bode associé est le suivant :