

Application 0

Télécabine à stabilité accrue : le funitel – Sujet

Mines Ponts PSI – 2003.

Mise en situation

Une télécabine est un système de transport de personnes permettant un changement d'altitude important dans une zone d'accès difficile, généralement en montagne.

Les télécabines sont tractées par un câble mis en mouvement par un ensemble motorisation. Afin de procéder à une évaluation de la puissance nécessaire à l'entraînement du câble, on prendra comme modèle une ligne rectiligne supportée par 9 pylônes (voir figure au verso).



Le guidage des brins de câble est réalisé par des palonniers à galets fixés sur les pylônes, pour lesquels le contact peut être modélisé par un appui avec frottement sec avec un coefficient de frottement $f = 0,03$. 2 brins permettent l'ascension de la cabine, 2 brins permettent la descente. Cette donnée, associée à un calcul numérique des actions de contact des brins de câble sur les palonniers, a permis une estimation à 400 kW des pertes par frottement au niveau de ces palonniers (puissance galiléenne des actions des palonniers sur les brins de câble). L'action du vent sur une face d'une cabine est modélisable par une pression uniforme p : $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2$ avec p en pascal, $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$ masse volumique de l'air, V_a module de la vitesse relative de l'air par rapport à la cabine en m/s .

Objectif

On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de $0,15 \text{ m s}^{-2}$. On se place à l'instant où la vitesse de $7,2 \text{ m s}^{-1}$ va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse $V_e = 30 \text{ m s}^{-1}$ souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

Question 1 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée E_{CT} , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de M_c , M_p , μ , L , V , D_p et I_M .

Question 2 Déterminer la puissance galiléenne, notée P_p , des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de M_p , V , h , g et L .

Question 3 Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée P_v des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de ρ , S_f , V , V_e et $\alpha = \arcsin(h/L)$.

Question 4 En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée P_T pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.

Sur la ligne, les cabines se déplacent à $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$. En gare, pour permettre l'embarquement et le débarquement des passagers, la vitesse maximum de la cabine doit être de $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$. Lors de leur circulation en gare, les cabines sont donc libérées des brins de câble. On envisagera une accélération constante des cabines de $a = 1,3 \text{ m s}^{-2}$.

Question 5 Quelle est alors la durée t de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur x (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de a , v_0 , t et V . Pour que l'accélération de $1,3 \text{ m s}^{-2}$ permette le lancement des cabines de $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ à $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$, l'application numérique donne environ : $x = 20 \text{ m}$.

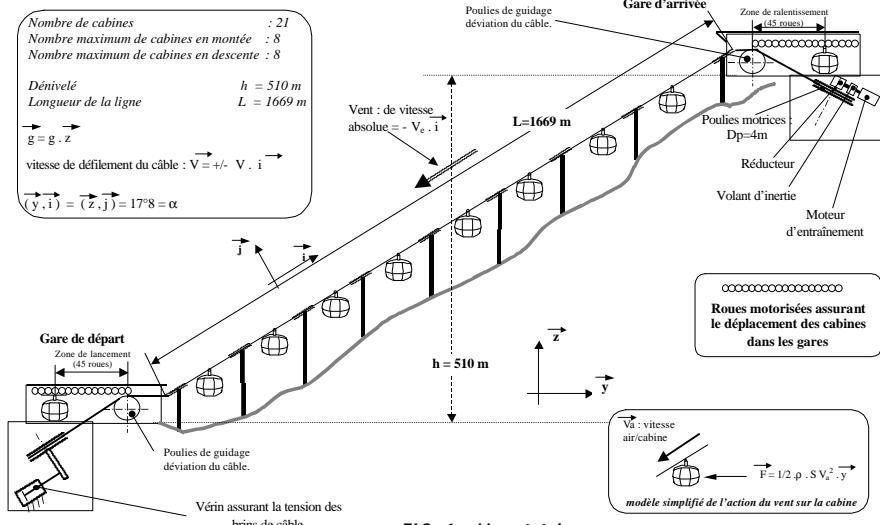


FIG. 1 : Ligne totale

Extrait du cahier des charges		Autres caractéristiques techniques	
Nombre de cabines	21	Masse d'une cabine vide	$M_c = 2500 \text{ kg}$
Nombre maxi de cabines en montée	8	Surface latérale d'une cabine	$S_l = 10 \text{ m}^2$
Nombre maxi de cabines en descente	8	Surface frontale d'une cabine	$S_f = 7,1 \text{ m}^2$
Nombre maxi de passagers par cabine et masse des passagers	26 $M_p = 2080 \text{ kg}$	Masse linéique du câble	$\mu = 8,47 \text{ kg/m}$
Vitesse nominale de défilement du câble (identique en tous points de la ligne)	$V = 7,2 \text{ m/s}$	Nombre de pylônes	9
Fréquence de rotation nominale du moteur d'entraînement	$N = 1700 \text{ tr/min}$	Diamètre d'une poulie motrice :	$D_p = 4 \text{ m}$
Longueur de la ligne	$L = 1669 \text{ m}$	Inertie* de l'ensemble de la motorisation ramenée sur l'axe des poulies motrices	$I_M = 575 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$
Dénivelé	$h = 510 \text{ m}$		

Application 0

Télécabine à stabilité accrue : le funitel – Corrigé

Mines Ponts PSI – 2003.

Mise en situation

Objectif

On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de $0,15 \text{ m s}^{-2}$. On se place à l'instant où la vitesse de $7,2 \text{ m s}^{-1}$ va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse $V_e = 30 \text{ m s}^{-1}$ souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.



Question 1 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée E_{c_T} , des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de M_c , M_p , μ , L , V , D_p et I_M .

Correction

- ▶ Énergie cinétique des 4 brins de câbles : $\mathcal{E}_c (\text{cables}/0) = \frac{1}{2} 4L\mu V^2$.
- ▶ Énergie cinétique des 8 cabines montantes : $\mathcal{E}_c (C_m/0) = \frac{1}{2} 8 (M_c + M_p) V^2$.
- ▶ Énergie cinétique des 8 cabines descendantes : $\mathcal{E}_c (C_d/0) = \frac{1}{2} 8M_c V^2$.
- ▶ Énergie cinétique de la motorisation : $\mathcal{E}_c (M/0) = \frac{1}{2} I_M \omega_M^2$.

On a par ailleurs $V = \omega_M \cdot \frac{D_p}{2}$.

$$\text{On a donc } \mathcal{E}_c (\Sigma/0) = \frac{1}{2} \left(4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} \right) V^2.$$

$$\text{On a donc } M_{\text{eq}} = 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M \frac{4}{D_p^2} = 4 \times 1669 \times 8,47 + 16 \times 2500 + 8 \times 2080 + 575 \times 10^3 \frac{4}{16} = 256\,936 \text{ kg et } \mathcal{E}_c (\Sigma/0) = 6,7 \text{ MJ.}$$

Question 2 Déterminer la puissance galiléenne, notée P_p , des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de M_p , V , h , g et L .

Correction

Les puissances de la pesanteur sur les cabines montantes s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} (\text{pes} \rightarrow C_m/0) &= \{\mathcal{T} (\text{pes} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V} (C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -(M_c + M_p) g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} \\ &= -8 (M_c + M_p) g V \vec{z} \cdot \vec{i} = -8 (M_c + M_p) g V \sin \alpha. \end{aligned}$$

Les puissances de la pesanteur sur les cabines descendantes s'exprime ainsi :

$$\mathcal{P} (\text{pes} \rightarrow C_d/0) = \{\mathcal{T} (\text{pes} \rightarrow C_d)\} \otimes \{\mathcal{V} (C_d/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -M_c g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c}$$

$$= 8M_c g V \vec{z} \cdot \vec{i}$$

$$= 8M_c g V \sin \alpha.$$

Remarque : la puissance de la pesanteur sur le câble sont opposées pour la partie montante et la partie descendante.

$$\text{Ainsi, } \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = 8M_c g V \sin \alpha - 8(M_c + M_p) g V \sin \alpha = -8M_p g V \sin \alpha = -359\,289 \text{ W.}$$

Question 3 Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée P_v des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de ρ , S_f , V , V_e et $\alpha = \arcsin(h/L)$.

Correction

Le vent va dans le sens de la descente. En montée, $\overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/C_m)} = \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c, C_m/0)} = -V_e \vec{i} - V \vec{i}$.

En descente, $\overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/C_d)} = \overrightarrow{V(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c, C_d/0)} = -V_e \vec{i} + V \vec{i}$.

Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi : $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2 = \frac{1}{2} \rho (-V - V_e)^2 \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -p S_f \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} = -8S_f V \frac{1}{2} \rho (V + V_e)^2 \cos \alpha$.

Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi : $p = \frac{1}{2} \rho V_a^2 = \frac{1}{2} \rho (V - V_e)^2 \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -p S_f \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -V \vec{i} \end{array} \right\}_{G_c} = 8S_f V \frac{1}{2} \rho (V - V_e)^2 \cos \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Au final, } \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) &= 8S_f V \frac{1}{2} \rho ((V - V_e)^2 - (V + V_e)^2) \cos \alpha \\ &= 8S_f V \frac{1}{2} \rho (-4VV_e) \cos \alpha \\ &= -16S_f \rho V^2 V_e \cos \alpha. \text{ On a donc } \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -218\,677 \text{ W} \end{aligned}$$

Question 4 En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée P_T pour l'entraînement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.

Correction

On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c(\Sigma/0)}{dt} = \mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathcal{P}(\text{frottement} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow \Sigma/0).$$

On a donc, en régime permanent : $0 = -229\,672 - 359\,289 - 400\,000 + P_T$ $P_T = 218\,677 + 359\,289 + 400\,000 = 977\,966 \text{ W} \approx 1000 \text{ kW}$.

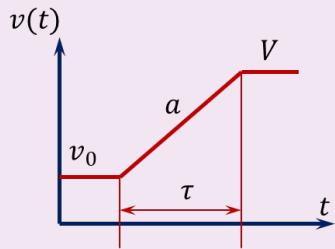
En tenant compte de l'accélération, on a $P_T = 1000 \text{ kW} + M_{\text{eq}} V \dot{V} = 1000 \text{ kW} + M_{\text{eq}} 7,2 \cdot 0,15 \approx 1266 \text{ kW}$.

Le surplus de puissance est nécessaire en cas de situation plus défavorable (plus de vent, dépassement du nombre de passagers...).

Question 5 Quelle est alors la durée t de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur x (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de a , v_0 , t et V . Pour que l'accélération

de $1,3 \text{ m s}^{-2}$ permettre le lancement des cabines de $v_0 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ à $V = 7,2 \text{ m s}^{-1}$, l'application numérique donne environ : $x = 20 \text{ m}$.

Correction



On a $v(t) = at + k$. Par ailleurs, $v(t_2) = V = at_2 + k$ et $v(t_1) = v_0 = at_1 + k$. On a donc $V - v_0 = a\tau$ soit $\tau = \frac{V - v_0}{a} = \frac{6,9}{1,3} = 5,3 \text{ s}$. La distance parcourue pendant la durée τ correspond à l'intégrale de la vitesse soit à l'aire sous la courbe. On a donc $x = \tau \cdot \frac{1}{2} (V + v_0) = 5,3 \times 0,5 \times 7,5 = 19,875 \text{ m}$.

Application 1

Chariot élévateur à bateaux – Sujet

X – ENS – PSI – 2012.

Présentation

Le chariot élévateur , objet de cette étude, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

- ▶ du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage;
- ▶ du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépose du bateau.

C1-05

C2-08

Phase de déplacement

La zone de stockage des bateaux se situe nécessairement à une altitude supérieure à celle du quai de déchargement. Afin d'éviter le glissement du bateau lorsque le chariot descend une pente, un dispositif permet de maintenir les fourches horizontales durant le déplacement. Lors d'une phase de décélération, les fourches sont automatiquement inclinées vers l'arrière pour éviter le glissement du bateau. Ce mouvement, de faible amplitude, est assuré par l'asservissement des vérins d'inclinaison du tablier T1,T2 et T1',T2'. Ce dispositif présente l'avantage de prendre en charge de manière entièrement automatisée l'un des mouvements du tablier. Le conducteur peut alors charger et mettre à l'eau le bateau sans avoir à gérer manuellement le mouvement d'inclinaison.

La figure suivante permet de définir :

- ▶ l'angle de basculement $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}_{T3})$;
- ▶ l'angle de la pente $\delta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$;
- ▶ l'angle à asservir $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{z}_{T3}) = \alpha + \delta$.

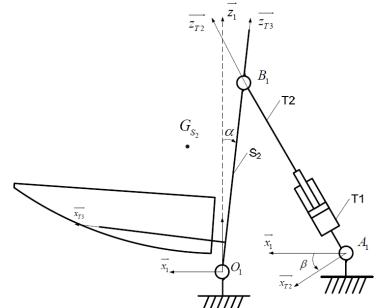
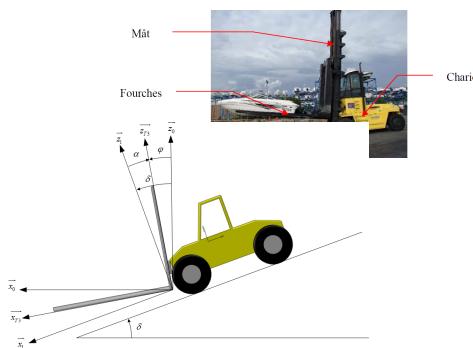
Nous considérons dans cette partie que le seul mouvement actif est le basculement. L'objectif est d'obtenir un modèle dynamique du mécanisme de basculement à partir de la modélisation plane proposée sur la figure suivante.

Les solides pris en compte pour l'étude sont :

- ▶ l'ensemble $S_2 = \{T3, T4, T5, T6, T7, T8, T9, T10, T11, B\}$ en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{y}_0) par rapport au chariot 1 de centre de gravité G_{S_2} . Le moment d'inertie de l'ensemble S_2 par rapport à l'axe sera noté J_{S_2} et sa masse m_{S_2} . La liaison pivot entre l'ensemble S_2 et le chariot (bâti) génère un couple résistant $\vec{C}_\mu = -\mu \dot{\alpha} \vec{y}_0$ et $\overrightarrow{O_1 O_{G_{S_2}}} = x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T3}$;
- ▶ un vérin équivalent $V = \{T1, T2\}$ dont le corps est en liaison pivot d'axe (A_1, \vec{y}_0) par rapport au chariot (bâti) et la tige en liaison pivot d'axe (B_1, \vec{y}_0) par rapport à l'ensemble S_2 . La masse et l'inertie du vérin sont négligées. Le vérin développe un effort au cours du mouvement qui sera noté $\vec{F}_V = p(t) S \vec{z}_{T2}$ où $p(t)$ est la différence de pression entre les deux chambres du vérin.

On pose $\overrightarrow{A_1 B_1} = (\lambda_0 + \lambda) \vec{z}_{T2}$. Le paramétrage est tel que si $\alpha = 0$ alors $\lambda = 0$.

Question 1 En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle α est petit, montrer que $\alpha(t)$ et $p(t)$ sont liés par l'équation différentielle suivante : $J_{\text{eq}} \ddot{\alpha}(t) + \mu \dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2} g x_{G_{S_2}}$. Exprimer J_{eq} .



Application 1

Chariot élévateur à bateaux – Corrigé

X – ENS – PSI – 2012.

Présentation

Phase de déplacement

C1-05

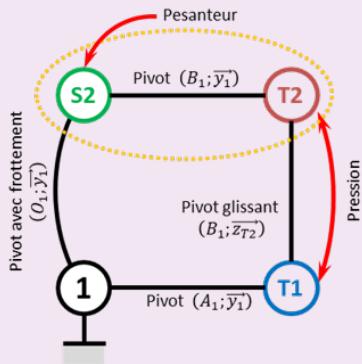
C2-08

Question 1 En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle α est petit, montrer que $\alpha(t)$ et $p(t)$ sont liés par l'équation différentielle suivante : $J_{\text{eq}}\ddot{\alpha}(t) + \mu\dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2}gx_{G_{S_2}}$. Exprimer J_{eq} .



Correction

On isole l'ensemble $E = \{S_2; T_2\}$. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen : $P_{\text{int}}(E) + \mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt} [\mathcal{E}_c(E/\mathcal{R}_g)]$



Calcul des puissances externes :

- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow S_2/1) = \left\{ \begin{array}{l} -m_{S_2}g\vec{z_1} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_{S_2}} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/1)} = \dot{\alpha}\vec{y_1} \\ \overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)} = -x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\vec{z_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\vec{x_{T_3}} \end{array} \right\}_{G_{S_2}}$
 $= (-m_{S_2}g\vec{z_1}) \cdot (-x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\vec{z_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\vec{x_{T_3}}) = -m_{S_2}g(-x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\cos\alpha + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\sin\alpha)$
 $\overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)} = \overrightarrow{V(O_1, S_2/1)} - (x_{G_{S_2}}\vec{x_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\vec{z_{T_3}}) \wedge \dot{\alpha}\vec{y_1} = -x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\vec{z_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\vec{x_{T_3}}.$
- $\mathcal{P}(1 \rightarrow S_2/1) = \left\{ \begin{array}{l} - \\ L_{12}\vec{x_1} - \mu\dot{\alpha}\vec{y_1} + N_{12}\vec{z_1} \end{array} \right\}_{O_1} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}\vec{y_1} \\ 0 \end{array} \right\}_{O_1} = -\mu\dot{\alpha}^2$
- $\mathcal{P}(T_1 \rightarrow T_2/1)_{\text{pivot glissant}} = 0$ (pivot glissant sans frottement)
- $\mathcal{P}(T_1 \rightarrow T_2/1)_{\text{vérin}} = \left\{ \begin{array}{l} p(t)S\vec{z_{T_2}} \\ - \end{array} \right\}_{B_1} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \end{array} \right\}_{B_1} = p(t)S\dot{\lambda} = p(t)S\frac{\dot{\alpha}}{k}$
- $\mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g) = -m_{S_2}g(-x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\cos\alpha + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\sin\alpha) - \mu\dot{\alpha}^2 + p(t)S\dot{\alpha}/k.$

Calcul des puissances internes $\mathcal{P}(E \overset{0}{\leftrightarrow} =)$ pas de frottement dans la liaison pivot.

Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble : seules la masse et l'inertie de S_2 sont à prendre en contact (elles sont négligeables pour T_2).

$$\mathcal{E}_c(S_2/1) = \frac{1}{2}J_{S_2}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_{S_2}\overline{V(G_{S_2}, S_2/1)^2} = \frac{1}{2}(J(S_2) + m_{S_2}(x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2))\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}J_{\text{eq}}\dot{\alpha}^2$$

avec $J_{\text{eq}} = J(S_2) + m_{S_2}(x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2)$.

On trouve donc, au final :

$$J_{\text{eq}}\ddot{\alpha} + \mu\dot{\alpha} = \frac{p(t)S}{k} + m_{S2}g(x_{G_{S2}} \cos \alpha - z_{G_{S2}} \sin \alpha).$$

Si on suppose l'angle α nul (situation de la question précédente), on retrouve bien l'expression demandée.

Application 2

Mesure d'inertie – Sujet

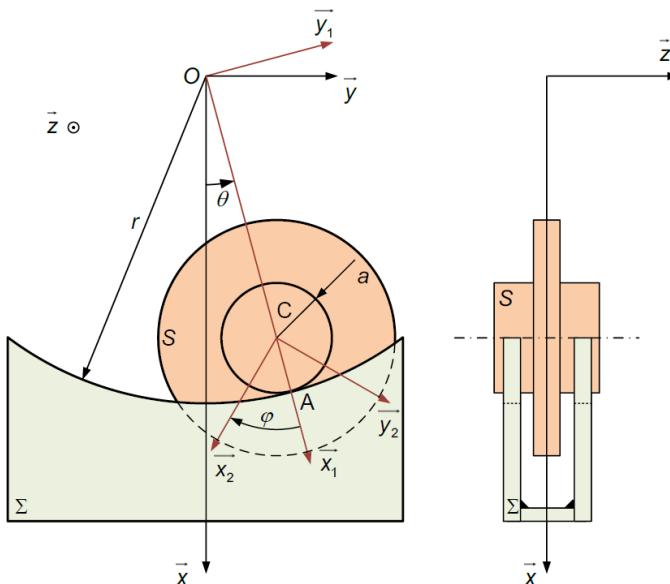
Un classique ...

Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ .

C1-05

C2-08



Soit $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti Σ . On désigne par $\vec{g} = g\vec{x}$ l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe (O, \vec{z}) , de rayon r . Le solide S de masse m , de centre d'inertie C , possède deux tourillons de même rayon a ($a < r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- ▶ le tourillon S , de centre C , roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ ;
- ▶ soit $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe (O, \vec{x}_1) . $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$;
- ▶ soit $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à S . On pose $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On suppose $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie (C, \vec{z}) et f le coefficient de frottement entre S et Σ .

On donne $a = 12,3 \text{ mm}$; $r = 141,1 \text{ mm}$; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; $m = 7217 \text{ g}$; $f = 0,15$.

Question 1 Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.

Question 2 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport à R . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur θ .

Question 3 En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S .

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de S , sachant que $T = 5$ s.

En supposant toujours que l'angle θ reste petit, on pose $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)}}$.

On suppose à la date $t = 0$, tel que $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$.

Question 5 Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que S roule sans glisser sur Σ .

Application 2

Mesure d'inertie – Corrigé

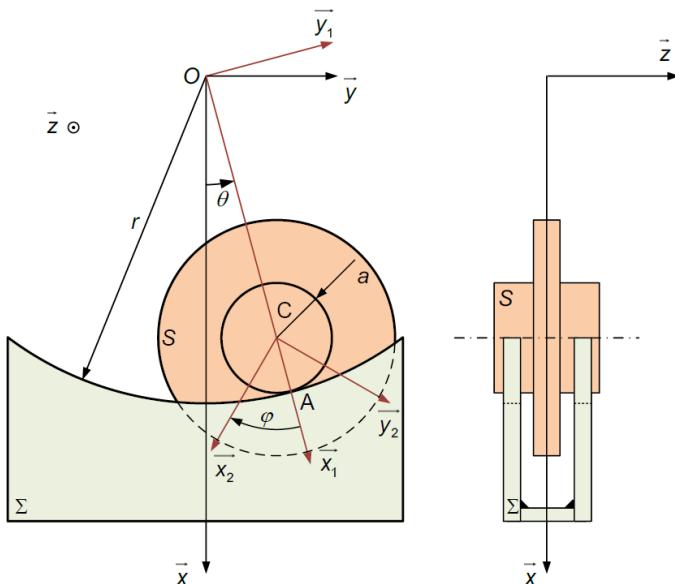
Un classique ...

Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ .

C1-05

C2-08



Soit $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti Σ . On désigne par $\vec{g} = g\vec{x}$ l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe (O, \vec{z}) , de rayon r . Le solide S de masse m , de centre d'inertie C , possède deux tourillons de même rayon a ($a < r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- ▶ le tourillon S , de centre C , roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ ;
- ▶ soit $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe (O, \vec{x}_1) . $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$;
- ▶ soit $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à S . On pose $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On suppose $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie (C, \vec{z}) et f le coefficient de frottement entre S et Σ .

On donne $a = 12,3 \text{ mm}$; $r = 141,1 \text{ mm}$; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; $m = 7217 \text{ g}$; $f = 0,15$.

Question 1 Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.

Question 2 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport à R . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur θ .

Question 3 En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S .

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de S , sachant que $T = 5$ s.

En supposant toujours que l'angle θ reste petit, on pose $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)}}$.

On suppose à la date $t = 0$, tel que $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$.

Question 5 Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que S roule sans glisser sur Σ .

TD 0

Quille pendulaire ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

C1-05

C2-08

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Objectif

L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Hypothèses

- ▶ Les liaisons sont toutes parfaites.
- ▶ Le bateau est à l'arrêt et son repère R_N est galiléen.
- ▶ Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que : $F_{h2} > 0$ et $F_{h3} = 0$. Le vérin 2–4 est alors moteur et le vérin 3–5 est libre (F_{h2} désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2 ; on a donc $-F_{h2}$ qui agit sur 4).
- ▶ Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures ci-contre.

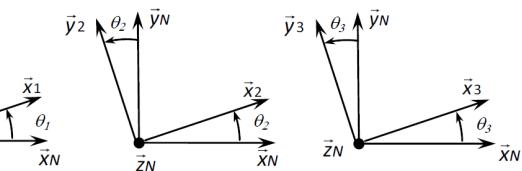


FIGURE 3 – Paramétrage

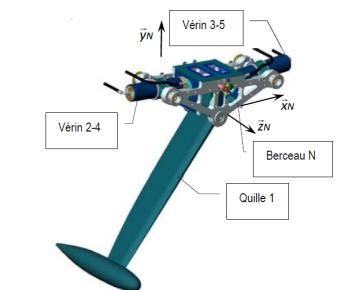
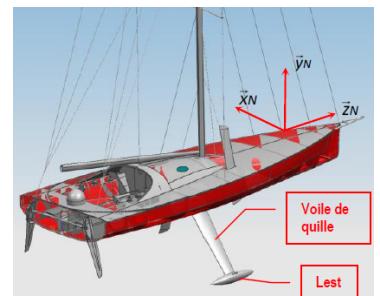


FIGURE 1 – Modèle volumique 3D

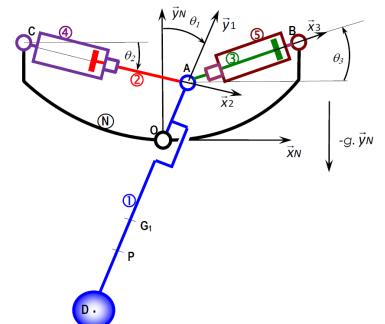


FIGURE 2 – Modèle 2D

Données géométriques, massiques et inertielles $\overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1$;
 $\overrightarrow{CA} = x_{24}(t)\vec{x}_2$; $\overrightarrow{AB} = x_{35}(t)\vec{x}_3$,

- Solide 1, masse M_1 , centre d'inertie G_1 , $\overrightarrow{OG_1} = -L_1\vec{y}_1$, $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_N)}$.

- Solide 2, masse M_2 , centre d'inertie G_2 , $\overrightarrow{AG_2} = -L_2\vec{x}_2$, $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}$.

- Solide 3, masse $M_3 = M_2$, centre d'inertie G_3 , $\overrightarrow{AG_3} = L_2\vec{x}_3$, $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}$.

- Solide 4, masse M_4 , centre d'inertie C , $I_C(4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}$.

- Solide 5, masse M_5 , centre d'inertie B , $I_B(5) =$

$$\begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}.$$

Actions mécaniques

- Action de pression de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_{h2}\vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_C$.
- Action de pression de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_{h3}\vec{x}_3 \\ 0 \end{array} \right\}_B$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \vec{x}_3 \\ 0 \end{array} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action hydraulique de l'eau sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_p\vec{z}_1 + F_t\vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_P$ avec $\overrightarrow{OP} = -h\vec{y}_1$.

Vecteurs vitesse

Question 1 Tracer le graphe de liaisons.

Question 2 Exprimer les vitesses suivantes :

1. $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles;
2. $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}, \frac{dx_{24}(t)}{dt}, x_{24}$ et des paramètres géométriques utiles;
3. $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_3(t)}{dt}, \frac{dx_{35}(t)}{dt}, x_{35}$ et des paramètres géométriques utiles;
4. $\overrightarrow{V(A, 2/4)}$ en fonction de $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$.

Énergie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note $\mathcal{E}_c(i/N)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N .

Question 3 Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

1. $\mathcal{E}_c(1/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres inertIELS et géométriques utiles;
2. $\mathcal{E}_c(2/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}, \frac{dx_{24}(t)}{dt}, x_{24}(t)$ et des paramètres inertIELS et géométriques utiles.
3. $\mathcal{E}_c(4/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ et des paramètres inertIELS et géométriques utiles.

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 Recenser, puis exprimer les puissances galiliennes non nulles (notées $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E . Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position $\theta_1 = 0$ à la position $\theta_1 = 45^\circ$ en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position $\theta_1 = 0$ en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure ??.

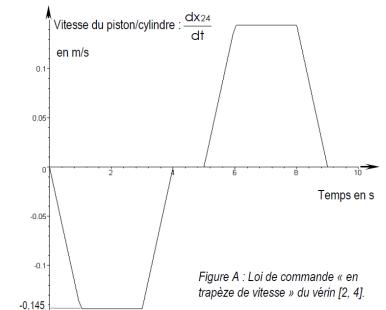


Figure A : Loi de commande « en trapèze de vitesse » du vérin [2, 4].

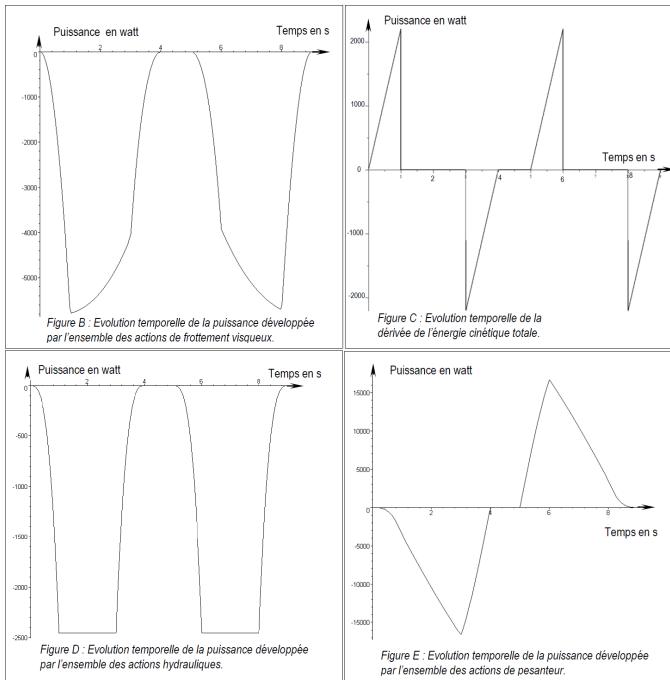


FIGURE 4 – Evolution temporelle des puissances



Question 7 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0\text{ s}$, $t = 1\text{ s}$, $t = 3\text{ s}$ et $t = 4\text{ s}$. Sur cet intervalle $[0, 4\text{ s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Question 8 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

TD 0

Quille pendulaire ★ – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

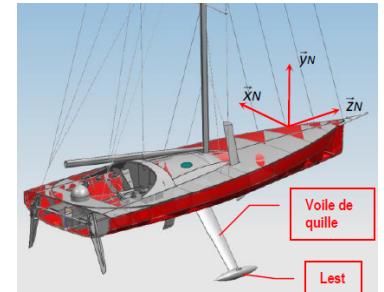
C1-05

C2-08

Mise en situation

Objectif

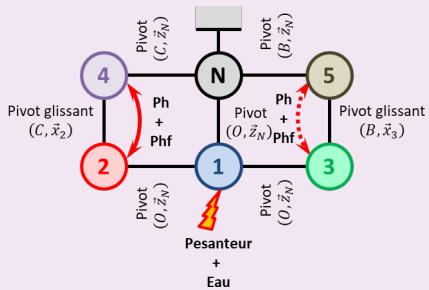
L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.



Vecteurs vitesse

Question 1 Tracer le graphe de liaisons.

Correction



Question 2 Exprimer les vitesses suivantes :

1. $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles;
2. $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, x_{24} et des paramètres géométriques utiles;
3. $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$, $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$, x_{35} et des paramètres géométriques utiles;
4. $\overrightarrow{V(A, 2/4)}$ en fonction de $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$.

Correction

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \overrightarrow{V(G_1, 1/N)} = \overrightarrow{V(O, 1/N)} + \overrightarrow{G_1 O} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/N)} = L_1 \vec{y}_1 \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_N = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1. \\
 2. \quad & \overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(R\vec{y}_1 - L_2 \vec{x}_2)}{dt} \right]_{R_N} = -R \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2. \\
 \text{On a aussi } & \overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \left[\frac{d(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(x_{24}(t)\vec{x}_2 - L_2 \vec{x}_2)}{dt} \right]_{R_N} = \\
 & \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2.
 \end{aligned}$$

$$3. \overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(\overrightarrow{Ry_1} + L_2 \overrightarrow{x_3})}{dt} \right]_{R_N} = -R\dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} + L_2 \dot{\theta}_3 \overrightarrow{y_3}.$$

$$\text{On a aussi } \overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = \left[\frac{d(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(-x_{35}(t) \overrightarrow{x_3} + L_2 \overrightarrow{x_3})}{dt} \right]_{R_N} = -\dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \overrightarrow{y_3}.$$

$$4. \overrightarrow{V(A, 2/4)} = \left[\frac{d\overrightarrow{CA}}{dt} \right]_{R_4} = \left[\frac{d(x_{24}(t) \overrightarrow{x_2})}{dt} \right]_{R_4} = \dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2}.$$

Énergie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note $\mathcal{E}_c(i/N)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N .

Question 3 Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

1. $\mathcal{E}_c(1/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres inertIELS et géométrIQUes utILES;
2. $\mathcal{E}_c(2/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, $x_{24}(t)$ et des paramètres inertIELS et géométrIQUes utILES.
3. $\mathcal{E}_c(4/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ et des paramètres inertIELS et géométrIQUes utILES.

Correction

$$1. \mathcal{E}_c(1/N) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(1/N) \} \otimes \{ \mathcal{C}(1/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(1/N)}}{\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}} \right\}_{G_1} \otimes$$

$$\left\{ \frac{M_1 \overrightarrow{V(G_1, 1/N)}}{\sigma(G_1, 1/N)} \right\}_{G_1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N}}{L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \frac{M_1 L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}}{\dot{\theta}_1 (-D_1 \overrightarrow{y_N} + C_1 \overrightarrow{z_N})} \right\}_{G_1} = \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_1^2 (-D_1 \overrightarrow{y_N} + C_1 \overrightarrow{z_N}) \overrightarrow{z_N} + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_1^2 C_1 + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2).$$

$$2. \mathcal{E}_c(2/N) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(2/N) \} \otimes \{ \mathcal{C}(2/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(2/N)}}{\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}} \right\}_{G_2} \otimes$$

$$\left\{ \frac{M_2 \overrightarrow{V(G_2, 2/N)}}{\sigma(G_2, 2/N)} \right\}_{G_2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_N}}{\dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2}} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \frac{M_2 (\dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2})}{\dot{\theta}_2 B_2 \overrightarrow{z_N}} \right\}_{G_1} = \frac{1}{2} \left(B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2})^2 \right) = \frac{1}{2} \left(B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2) \right).$$

$$3. \mathcal{E}_c(4/N) = \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2.$$

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
- $\mathcal{P}(4 \xrightarrow{\text{Ph}} 2) = \{\mathcal{T}(4 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/4)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)} \\ \mathcal{M}(A, 4 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{Q(2/4)} \\ V(A, 2/4) \end{array} \right\}_A$
 $= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V(A, 2/4) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} F_{h2} \vec{x}_2 \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 \end{array} \right\}_A = F_{h2} \dot{x}_{24};$
- $\mathcal{P}(4 \xrightarrow{\text{Phf}} 2) = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V(A, 2/4) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -k \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 \end{array} \right\}_A = -k \dot{x}_{24}^2(t);$
- $\mathcal{P}(3 \xrightarrow{\text{Ph}} 5) = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V(A, 3/5) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} F_h \vec{x}_3 \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{x}_{35}(t) \vec{x}_3 \end{array} \right\}_A = F_h \dot{x}_{35}(t);$
- $\mathcal{P}(3 \xrightarrow{\text{Phf}} 5) = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V(A, 3/5) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -k \dot{x}_{35}(t) \vec{x}_3 \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{x}_{35}(t) \vec{x}_3 \end{array} \right\}_A = -k \dot{x}_{35}^2(t).$

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 Recenser, puis exprimer les puissances galiliennes non nulles (notées $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E . Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_1 g \vec{y}_N \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_N \\ \frac{\dot{\theta}_1 \vec{z}_N}{V(G_1, 1/R_N)} = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_1}$
 $= -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 \vec{y}_N = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1;$
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_2 g \vec{y}_N \\ 0 \end{array} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_N \\ \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2 \end{array} \right\}_{G_1}$
 $= -M_2 g \vec{y}_N (\dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2) = -M_2 g \dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 -$

$$\begin{aligned}
 & M_2 g \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2; \\
 \blacktriangleright \quad & \mathcal{P} (\text{pes} \rightarrow 3/R_N) = -M_3 g \vec{y}_N \left(-\dot{x}_{35}(t) \vec{x}_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \vec{y}_3 \right) \\
 & = -M_3 g (-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3); \\
 \blacktriangleright \quad & \mathcal{P} (\text{eau} \rightarrow 1/R_N) = \{ \mathcal{T} (\text{eau} \rightarrow 1) \} \otimes \{ \mathcal{V} (1/R_N) \} = \left\{ \begin{array}{c} F_p \vec{z}_1 + F_t \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_P \otimes \\
 & \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_N \\ h \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_P \\
 & = F_t h \dot{\theta}_1;
 \end{aligned}$$

Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

Correction

$$\text{On a : } \mathcal{P} (\bar{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P} (i \leftrightarrow j) = \frac{d \mathcal{E}_c (E/R_N)}{dt}$$

Question 7 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0 \text{ s}$, $t = 1 \text{ s}$, $t = 3 \text{ s}$ et $t = 4 \text{ s}$. Sur cet intervalle $[0, 4 \text{ s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Correction

D'après UPSTI. À 1 s, $2200 + 5800 + 2500 + 4000 = 14\,500 \text{ W}$ à 3 s $0 + 4000 + 2500 + 16000 = 22\,500 \text{ W}$ Maximum à environ 22,5 kW. Le maximum est bien sur cet intervalle car le poids y est résistant (le poids est moteur sur [5 s ; 8 s]).

Question 8 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

Correction

D'après UPSTI. La différence est de 7,5 kW. Elle ne peut pas provenir des hypothèses faites (liaisons parfaites et RN galiléen). Elle provient certainement du fait que le système est surdimensionné pour pallier les erreurs de modélisation des actions de l'eau, le vieillissement de la quille avec les algues collées qui rajoutent du poids...

TD 1

Robot de dépose de fibres optiques ★ – Sujet

Concours Mines Ponts – PSI 2004.

C1-05

C2-08

Présentation

L'objet de cette étude est un robot permettant la pose d'arceaux métalliques pour l'installation de réseaux souterrains de télécommunication par fibres optiques.

Objectif

En fin des mouvements des bras, on doit avoir $\delta = 14^\circ$ et $\dot{\delta} \leq 50^\circ.s^{-1}$.

De façon à pouvoir dérouler les arceaux métalliques, le chariot est centré dans la canalisation à l'aide de quatre bras actionnés par un vérin hydraulique.

Afin de valider le choix du vérin, et donc sa puissance, il faut déterminer l'action F du vérin qui permettra au robot de se positionner correctement dans la canalisation. Sous l'effet d'un vérin, les bras inférieurs vont soulever le robot qui va pivoter sur son train arrière. La fin du positionnement sera assurée lorsque les roulettes des bras supérieurs viendront en contact avec la paroi de la canalisation. À un instant t , le système est modélisé selon le schéma ci-dessous :

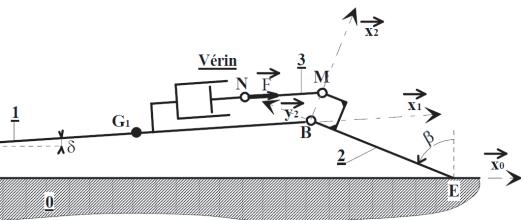
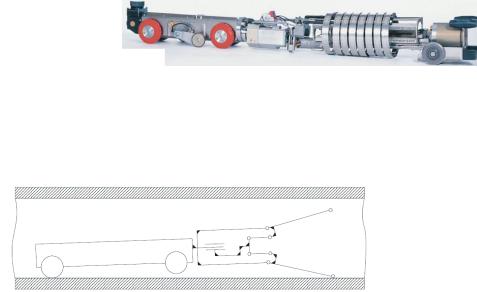


FIGURE 5 – Modélisation du robot



Hypothèses

L'étude dynamique est à faire dans le plan de symétrie longitudinale du robot.

Le robot est modélisé par le schéma ci-dessus. Il comprend :

- ▶ une tige 1 de longueur $OB = L_1$, de section négligeable, de masse m_1 , et de centre d'inertie G_1 , tel que $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L_1}{2}\vec{x}_1$;
- ▶ une roue 4, de centre O , de rayon $R = 0,07\text{ m}$, de masse négligeable, qui correspond au train arrière. Cette roue est en liaison encastrement avec 1;
- ▶ un bras 2 constitué de deux éléments BE et BM tels que $\overrightarrow{BE} = -a\vec{y}_2$ et $\overrightarrow{BM} = b\vec{x}_2$, de section et de masse négligeables;
- ▶ une biellette 3 (NM) de masse négligeable et dont la direction au cours du mouvement est sensiblement celle de la tige 1;
- ▶ un vérin hydraulique de masse négligeable.

En I , le contact entre la roue 4 et la paroi 0 se fait par roulement sans glissement.

En E , le contact entre le bras 2 et la paroi 0 se fait sans frottement.

Toutes les autres liaisons sont considérées sans frottement.

L'action \vec{F} du vérin sur la biellette 3, à chaque instant, pour direction \vec{x}_1 : $\vec{F} = F\vec{x}_1$.

Repères et paramétrage

- ▶ $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, repère associé à la canalisation O et supposé galiléen.
- ▶ $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, repère associé à la tige 1.
- ▶ $R_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, repère associé au bras 2.
- ▶ $\delta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- ▶ $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$.

Cahier des charges

On désire avoir en fin de mouvement des bras, correspondant à $\delta = 14^\circ$, une vitesse $\dot{\delta}$ inférieur à $50^\circ/s$

Modélisation dynamique

Question 1 Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$, puis la calculer.

Question 2 Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ .

Question 3 Donner la puissance intérieure à Σ .

Question 4 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre F , δ , et β .

Des simulations pour différentes valeurs de F donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de δ en fonction du temps.

Question 5 Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot{\delta}$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.

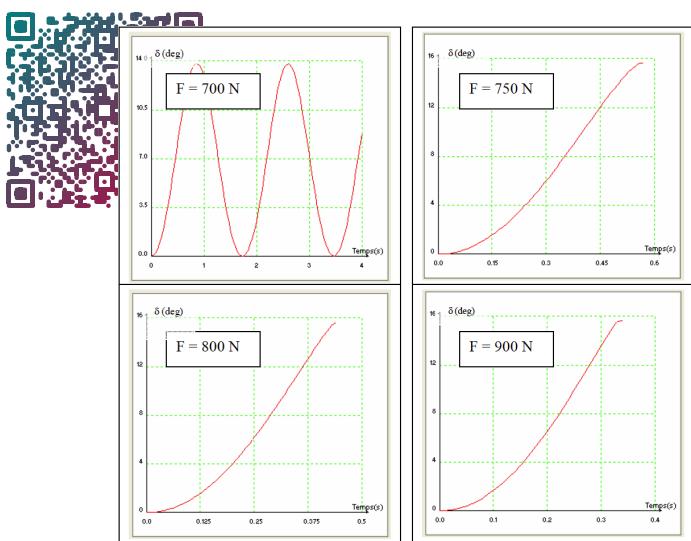


FIGURE 6 – Résultats de la simulation dynamique du système

TD 1

Robot de dépose de fibres optiques ★ – Corrigé

Concours Mines Ponts – PSI 2004.

C1-05

C2-08

Présentation

Objectif

En fin des mouvements des bras, on doit avoir $\delta = 14^\circ$ et $\dot{\delta} \leq 50^\circ.s^{-1}$.



Hypothèses

Repères et paramétrage

Cahier des charges

Modélisation dynamique

Question 1 Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$, puis la calculer.

Correction

Pour calculer l'énergie cinétique de l'ensemble seule la masse de la tige 1 est prise en compte.

$$2 E_c(\Sigma/R_0) = \{\mathcal{C}(\Sigma/R_0)\} \otimes \{\mathcal{V}(\Sigma/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{array}{l} m_1 \vec{V}(G_1, 1/0) \\ \vec{\sigma}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1}$$
$$= m_1 \left(\vec{V}(G_1, 1/0) \right)^2 + \vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{\Omega}(1/0).$$

- ▶ Vecteur de taux de rotation de 1 par rapport à 0 : $\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\delta} \vec{z}_0$.
- ▶ Vitesse du point G_1 appartenant à 1 par rapport à 0 : $\vec{V}(G_1, 1/0) = \vec{V}(I, 1/0) + \vec{G_1 I_1} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = -\left(R \vec{y}_0 + \frac{L_1}{2} \vec{x}_1\right) \wedge \dot{\delta} \vec{z}_0 = -R \dot{\delta} \vec{x}_0 + \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \vec{y}_1$.
- ▶ Caractéristiques d'inertie de la tige 1 : la tige 1 supposée unidimensionnelle présente naturellement des symétries matérielles suivant des plans contenant \vec{x}_1 . Les produits d'inertie sont donc nuls. Le moment d'inertie en G_1 suivant \vec{z}_0 est $C_1 = \frac{m_1 L_1^2}{12}$.
- ▶ Moment cinétique en G_1 de 1 par rapport à 0 : $\vec{\sigma}(G_1, 1/0) = \bar{\vec{I}}_{G_1}(1) \cdot \vec{\Omega}(1/0) = \frac{m_1 L_1^2}{12} \dot{\delta} \vec{z}_0$.
- ▶ On en déduit $E_c(1/0)$: $E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{4} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{m_1 L_1^2}{12} \dot{\delta}^2$
 $= \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right)$.

Question 2 Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ .

Correction

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) = \mathcal{P}(\text{pesanteur} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0)$$

- ▶ Actions de la pesanteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow \Sigma/0) &= \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/0) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \\ &\quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1} \\ &= -m_1 g \vec{y}_0 \cdot \vec{V}(G_1, 1/0) = -m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta. \end{aligned}$$

► Actions du contact en I entre 0 et 4 (*le contact se fait par roulement sans glissement*) :

$$\mathcal{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0) = \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 4)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{04} \\ 0 \end{array} \right\}_I \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(4/0) \\ 0 \end{array} \right\}_I = 0.$$

► Actions du contact en E entre 0 et 2 (*le contact se fait sans frottement*) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) &= \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{02} \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_E \otimes \\ &\quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(2/0) \\ \vec{V}(E, 2/0) \end{array} \right\}_E = R_{02} \vec{y}_0 \cdot \vec{V}(E, 2/0) = 0. \end{aligned}$$

Question 3 Donner la puissance intérieure à Σ .

Correction

► Les liaisons sont supposées comme parfaites donc : $\mathcal{P}\left(1 \xrightarrow{\text{Pivot}} 2\right) = \mathcal{P}\left(1 \xrightarrow{\text{Pivot Gl.}} 3\right) = \mathcal{P}\left(3 \xrightarrow{\text{Pivot}} 2\right) = 0.$

► Action du vérin entre 1 et 3 :

$$\mathcal{P}\left(1 \xrightarrow{\text{Vérin}} 3\right) = \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 3)\} \otimes \{\mathcal{V}(3/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ 0 \end{array} \right\}_N \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}(N, 3/1) \end{array} \right\}_N = F \vec{V}(N, 3/1) \cdot \vec{x}_1.$$

En considérant que \overrightarrow{MN} est porté par \vec{x}_1 (hypothèse faite dans l'énoncé), on obtient :

$$\vec{V}(N, 3/1) \cdot \vec{x}_1 = \vec{V}(M, 3/1) \cdot \vec{x}_1 = (\vec{V}(M, 3/2) + \vec{V}(M, 2/1)) \cdot \vec{x}_1 = (\vec{0} + \vec{V}(B, 2/1) + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)}) \cdot \vec{x}_1 = (-b \vec{x}_2 \wedge (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_1 = b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \cdot \vec{y}_2 \cdot \vec{x}_1 = -b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta).$$

On en déduit : $\mathcal{P}\left(1 \xrightarrow{\text{Vérin}} 3\right) = -F b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta).$

Question 4 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre F , δ , et β .

Correction

On applique alors le théorème de l'énergie cinétique à Σ par rapport au référentiel galiléen R_0 :

$$\frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/R_0)) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}_{\text{int}}(\Sigma).$$

$$\text{Or, } \frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/R_0)) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) \right] =$$

$$m_1 \dot{\delta} \left[\ddot{\delta} \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 R L_1 \cos \delta \right].$$

Ainsi on obtient, l'équation :

$$m_1 \dot{\delta} \left[\ddot{\delta} \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 R L_1 \cos \delta \right] = -F b (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta) - m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta.$$

Des simulations pour différentes valeurs de F donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de δ en fonction du temps.

Question 5 Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot{\delta}$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.

Correction

- $F = 700 \text{ N}$: le régime est fortement oscillant. Le système ne parvient pas à soulever le robot jusqu'à 14° . Celui-ci se comporte comme un oscillateur non amorti (le modèle est considéré sans frottement).
Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.
- $F = 750 \text{ N}$: le système atteint les 14° . La pente à l'accostage vaut environ $37.5^\circ/\text{s}$ ce qui est raisonnable vis-à-vis du cahier des charges. Cependant, le modèle utilisé pour trouver ce résultat utilise des liaisons parfaites, sans frottement. L'effort de 700 N étant insuffisant avec ce modèle parfait, il est possible qu'un effort de 750 N devienne insuffisant en réalité.
Cette valeur est théoriquement satisfaisante mais l'écart entre modèle et réalité risque de modifier la conclusion.
- $F = 800 \text{ N}$: Le système atteint les 14° . La pente à l'accostage vaut environ $45^\circ/\text{s}$ ce qui est inférieur à la limite de $50^\circ/\text{s}$ imposée par le cahier des charges. L'effort est 15% supérieur à la valeur minimale nécessaire pour atteindre les 14° ce qui semble une marge suffisante pour vaincre les frottements non pris en compte dans le modèle.
Cette valeur est satisfaisante.
- $F = 950 \text{ N}$: Le système atteint les 14° . La pente à l'accostage vaut environ $75^\circ/\text{s}$ ce qui est supérieur à la limite de $50^\circ/\text{s}$ imposée par le cahier des charges.
Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.

