

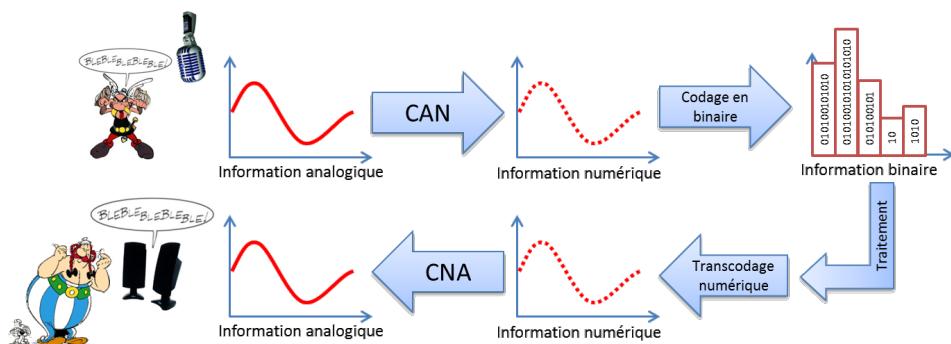
1 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

1.1 Définitions préliminaires et détermination des performances

1.1.1 Définitions

Définition – Informations analogiques et numériques

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).



Définition – Systèmes automatiques ou asservis

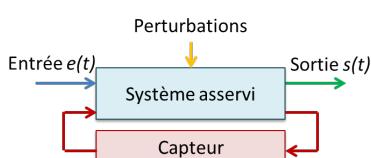
Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

- la loi de consigne $e(t)$ est une grandeur de commande qui est modifiable;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie $s(t)$ est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger

01	SLCI	02	SLCI	03	SLCI	07	SLCI
08	SLCI	09	SLCI	10	SLCI	11	SLCI

1.1	Premières définitions . . .	1
1.2	Transformée de Laplace .	3
1.3	Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs	4
1.4	Systèmes d'ordre 1 & 2 . . .	6
1.5	Réponse fréquentielle des SLCI	8



de la qualité de la tâche accomplie.

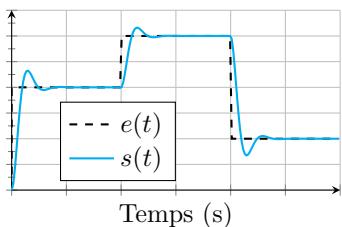


FIGURE 1.1 – Système suiveur.

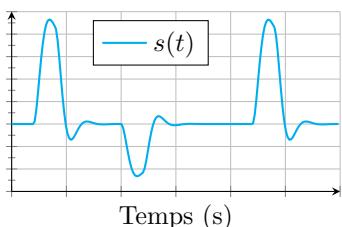


FIGURE 1.2 – Système régulateur.

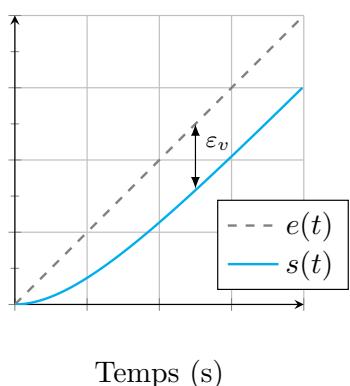


FIGURE 1.3 – Erreur de trainage.

Définition – Systèmes suiveurs et régulateurs

- ▶ Pour un système suiveur la consigne $e(t)$ fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- ▶ Pour un système régulateur la consigne $e(t)$ est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.

1.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques

Définition – Précision en position – Erreur statique ε_s

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'erreur statique ε_s comme la différence entre la consigne (un échelon) et la réponse $s(t)$ en régime permanent.

Définition – Précision en vitesse ε_v

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

Définition – Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.

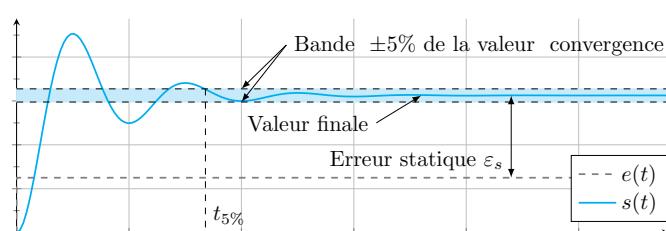


FIGURE 1.4 – Performances sur une réponse à un échelon.

Définition – Stabilité

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

1.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace



1.2.1 Définitions

Définition – Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour $t = 0^+$:

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

Définition – Transformée de Laplace

À toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t \leq 0$ (fonction causale), on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

On note $\mathcal{L}[f(t)]$ la transformée directe et $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ la transformée inverse.

De manière générale on note $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$, $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$, $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$, $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p) \dots$

Résultat – Dérivation

Dans les conditions de Heaviside : $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$, $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$, $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n F(p)$.

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$.

1.2.2 Théorèmes

Théorème – Valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow \infty} pF(p)$$

Théorème – Retard

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

Théorème – Valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0} pF(p)$$

Théorème – Amortissement

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

1.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

03 SLCI

1.3.1 Définitions

Définition – Fonction de transfert – Transmittance

Soit un système linéaire continu invariant dont on note le signal d'entrée e et le signal de sortie s , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction H telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

Définition – Classe – Ordre – Pôles – Zéros

$H(p)$ est une fonction rationnelle en p . En factorisant le numérateur et le dénominateur, $H(p)$ peut s'écrire sous cette forme :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

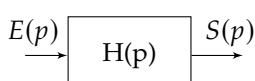
- ▶ Les z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ Les p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- ▶ **Le degré de $D(p)$ est appelé ordre n du système ($n \geq m$ pour les systèmes physiques).**
- ▶ L'équation $D(p) = 0$ est appelée équation caractéristique.
- ▶ Si l'existe une (ou des) racines nulles d'ordre α de $D(p)$, un terme p^α apparaît au dénominateur. **α est la classe (ou type) de la fonction de transfert.** Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

Exemple

$$H(p) = \frac{K}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \text{ est d'ordre 3 et de classe 1.}$$

Exemple

$$\begin{aligned} H_1(p) &= \frac{K}{a+1+bp+cp^2} = \\ &\frac{K}{a+1} \frac{1}{1+\frac{b}{a+1}p+\frac{c}{a+1}p^2}. \\ H_2(p) &= \frac{K}{(a_1+b_1p)(a_2+b_2p)} = \\ &\frac{K}{a_1a_2} \frac{1}{\left(1+\frac{b_1}{a_1}p\right)\left(1+\frac{b_2}{a_2}p\right)}. \end{aligned}$$



Définition – Forme canonique

On appelle forme canonique d'une fonction de transfert une forme pour laquelle le coefficient du monome de plus bas degré est 1 au numérateur et au dénominateur. On appelle gain la coefficient ainsi mis en facteur.

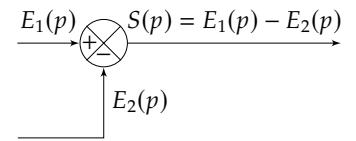
Définition – Modélisation d'un bloc

Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$, caractérisé par une fonction de transfert $H(p)$. Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$

Définition – Modélisation d'un comparateur

Soit l'équation $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$. Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.



1.3.2 Algèbre de blocs

Résultat – Blocs en série

$$E(p) \xrightarrow{H_1(p)} \xrightarrow{H_2(p)} S(p) \Leftrightarrow E(p) \xrightarrow{H_1(p)H_2(p)} S(p)$$

Remarque – Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsqu'on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.

Résultat – Blocs en parallèle

$$E(p) \xrightarrow{H_1(p)} \xrightarrow{+/\times} S(p) \Leftrightarrow E(p) \xrightarrow{H_1(p) + H_2(p)} S(p)$$

Résultat – Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT

$$E(p) \xrightarrow{+/\times} \xrightarrow{H_1(p)} S(p) \Leftrightarrow E(p) \xrightarrow{\frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}} S(p)$$

Résultat – Comparateurs en série

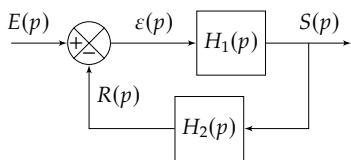
$$E(p) \xrightarrow{+/-} \xrightarrow{+/-} S(p) \Leftrightarrow E(p) \xrightarrow{+/-} \xrightarrow{+/-} S(p)$$

Résultat – Point de prélèvement

$$E(p) \xrightarrow{H_1(p)} S(p) \Leftrightarrow E(p) \xrightarrow{H_1(p)} R(p) \xleftarrow{H_2(p)H_1(p)} S(p)$$

1.3.3 Fonctions usuelles

08 SLCI



Définition – Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF

Formule de Black

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$

Définition – Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO

$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

Définition – Théorème de superposition

Soit un système d'entrées E_1 et E_2 et de sortie S . On note $H_1 = \frac{S}{E_1}$ lorsque E_2 est nulle et $H_2 = \frac{S}{E_2}$ lorsque E_1 est nulle. En superposant, on a alors : $S = H_1E_1 + H_2E_2$.

1.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

07 SLCI

1.4.1 Systèmes d'ordre 1

Définition – Système d'ordre 1

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

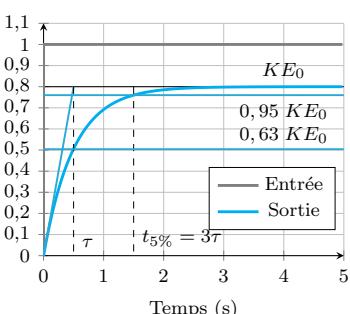
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

- ▶ τ la constante de temps en secondes ($\tau > 0$);
- ▶ K le gain statique du système ($K > 0$).



Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude E_0 . Lorsque $E_0 = 1 (1/p$ dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = KE_0 u(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Si la réponse indicelle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- ▶ le gain à partir de l'asymptote KE_0 ;
- ▶ la constante de temps à partir de $t_{5\%}$ ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- ▶ valeur finale $s_\infty = KE_0$;
- ▶ pente à l'origine **non nulle**;
- ▶ $t_{5\%} = 3\tau$;
- ▶ pour $t = \tau$, $s(\tau) = 0,63 s_\infty$.

Résultat – Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

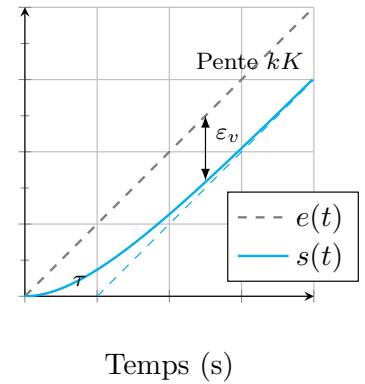
On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente k :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = Kk \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u(t)$.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- ▶ pente de l'asymptote Kk ;
- ▶ intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses : $t = \tau$.



1.4.2 Systèmes d'ordre 2

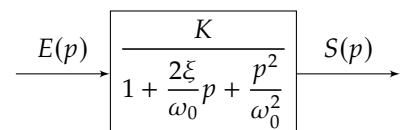
Définition – Systèmes d'ordre 2

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

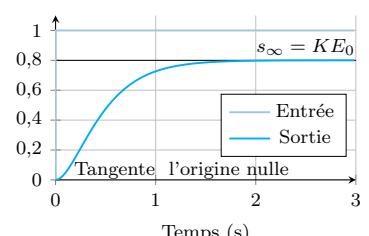


- ▶ K est appelé le gain statique du système (rapport des unités de S et de E);
- ▶ ξ (lire ξ) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- ▶ ω_0 pulsation propre du système (rad/s ou s^{-1}).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

Résultat – $\xi \geq 1$: système non oscillant et amorti (apériodique)

- ▶ La fonction de transfert a deux pôles réels.
- ▶ La tangente à l'origine est nulle.



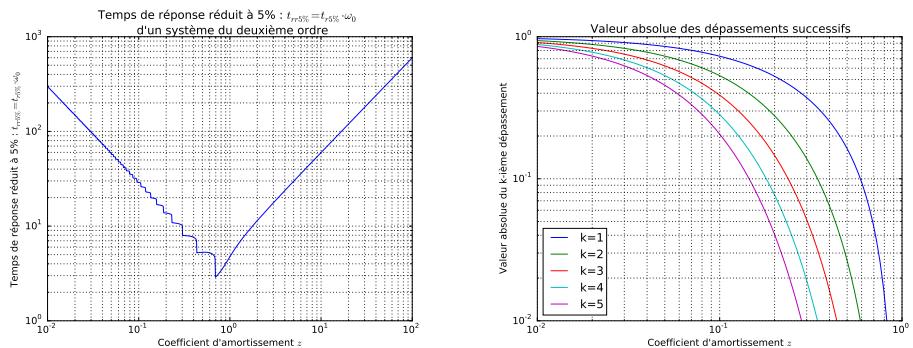
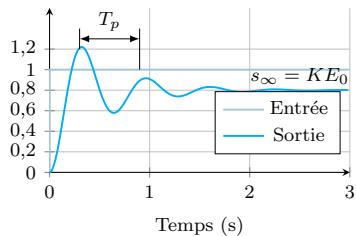


FIGURE 1.5 – Abaques pour des systèmes d'ordre 2

(a) Abaque des temps de réponses réduits à 5 % (b) Abaque des dépassements



Résultat – $\xi < 1$: système oscillant et amorti (pseudo périodique)

- ▶ La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- ▶ La tangente à l'origine est nulle.
- ▶ La pseudo-période est de la forme $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$.
- ▶ La valeur du premier dépassement vaut : $D_1 = KE_0 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$.

Résultat –

- ▶ Pour $\xi = 0$ le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude KE_0 ($2KE_0$ crête à crête).
- ▶ Pour $\xi \approx 0,69$ on obtient le système du second ordre le plus rapide avec dépassement. Le temps de réponse à 5% est donné par $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$.
- ▶ Pour $\xi = 1$ on obtient le système du second ordre le plus rapide sans dépassement.

1.5 Réponse fréquentielle des SLCI

11 SLCI

1.5.1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ et on note :

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

Définition – Gain & Phase

Soit $H(p)$ une fonction de transfert. On pose $p = j\omega$ et on note :

- ▶ $H_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$ le gain décibel de la fonction de transfert;
- ▶ $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$.

- ▶ $T = \frac{2\pi}{\omega}$: la période de la sinusoïde en s;
- ▶ $f = \frac{1}{T}$: fréquence de la sinusoïde en Hz.
- ▶ A : l'amplitude de la sinusoïde;
- ▶ ω : la pulsation en rad/s;
- ▶ φ : la phase à l'origine en rad.

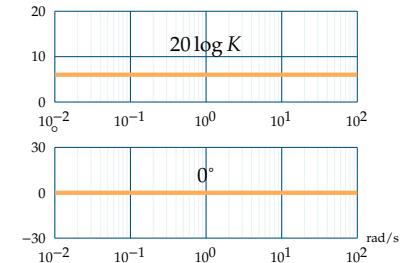
Résultat –

On note $H(p) = G_1(p)G_2(p)$. On a :

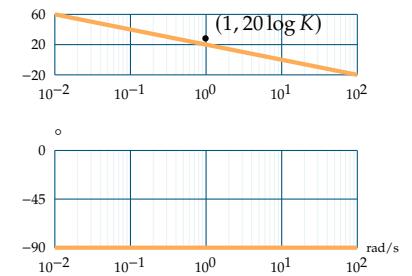
- $H_{\text{dB}}(\omega) = G1_{\text{dB}}(\omega) + G2_{\text{dB}}(\omega)$;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G1_{\text{dB}}(\omega)) + \text{Arg}(G2_{\text{dB}}(\omega))$.

1.5.2 Gain**Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur**

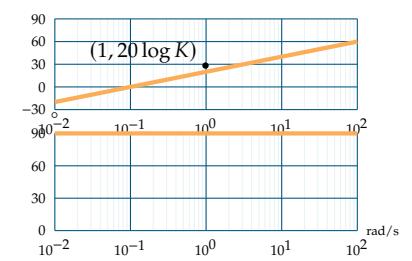
- Fonction de transfert : $H(p) = K$.
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$.
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée 0° .

**1.5.3 Intégrateur****Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur**

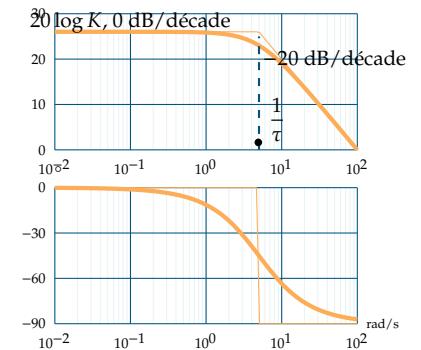
- Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{p}$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente -20 dB/decade passant par le point $(1, 20 \log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée -90° .

**1.5.4 Dérivateur****Résultat – Diagramme de Bode d'un déivateur**

- Fonction de transfert : $H(p) = Kp$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente 20 dB/decade passant par le point $(1, 20 \log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée $+90^\circ$.

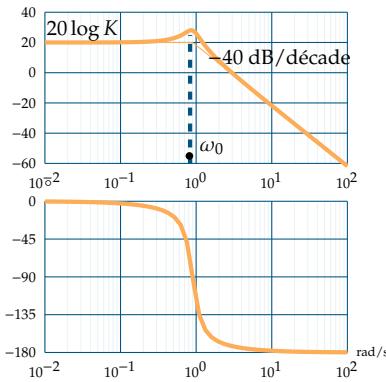
**1.5.5 Systèmes d'ordre 1****Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre**

- Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$.
- Diagramme de gain asymptotique :
 - pour $\omega < \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$;
 - pour $\omega > \frac{1}{\tau}$: droite de pente -20 dB/decade .
- Diagramme de phase asymptotique :
 - pour $\omega < \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée 0° ;
 - pour $\omega > \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée -90° .



1.5.6 Systèmes d'ordre 2

Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre



► Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$.

Cas où $\xi < 1$.

- Diagramme de gain asymptotique :

- pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$;
- pour $\omega > \omega_0$: droite de pente -40 dB/decade .

- Diagramme de phase asymptotique :

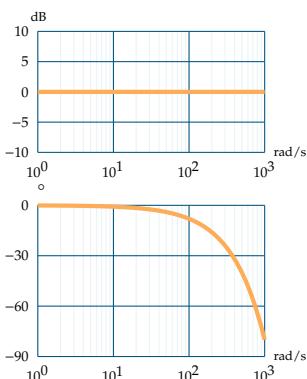
- pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée 0° ;
- pour $\omega > \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée -180° .

Dans le cas où $\xi > 1$, le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$. On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

Résultat – Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$. La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$. À la résonance, l'amplitude maximale est de $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$. (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit $20 \log A_{\max}$ lorsque $\omega = \omega_r$.)

1.5.7 Retard



Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur

- Fonction de transfert : $H(p) = e^{-Tp}$.
- Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- Diagramme de phase asymptotique : $\arg(H(p)) = -\tau\omega$.

1.5.8 Tracé du diagramme de Bode

Méthode 1 : Sommation dans le diagramme de Bode

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Tracer chacune des fonctions de transfert.
3. Sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

Méthode – 2 : Tableau de variations

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes.
3. Sommer les pentes.
4. Tracer le diagramme de Bode.

Application 1

Réponses fréquentielles – Sujet

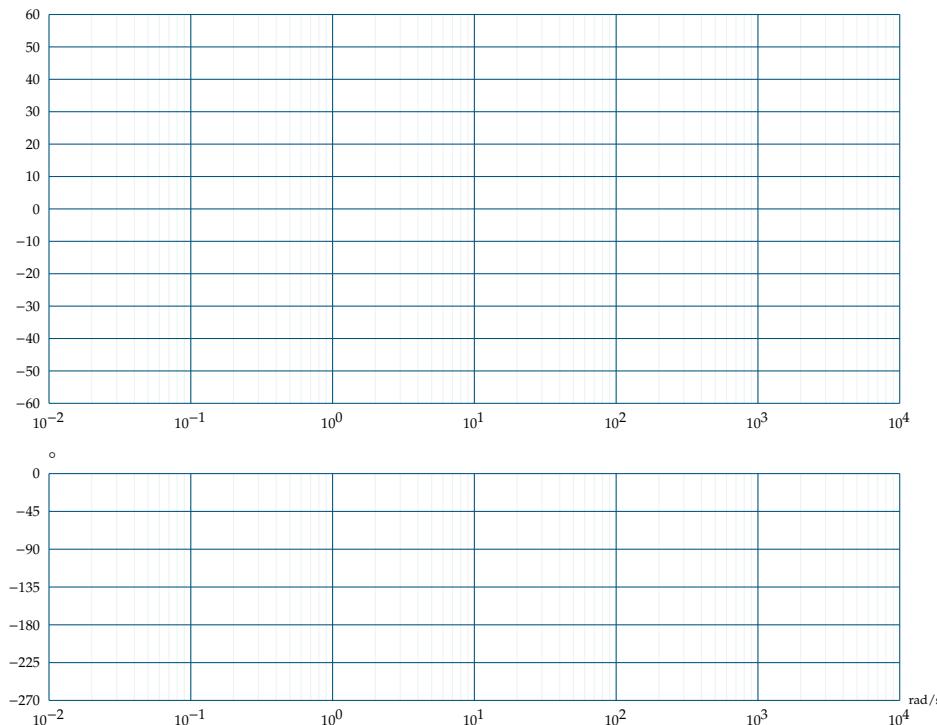
D'après Sébastien Grange.

Diagramme de Bode

11 SLCI

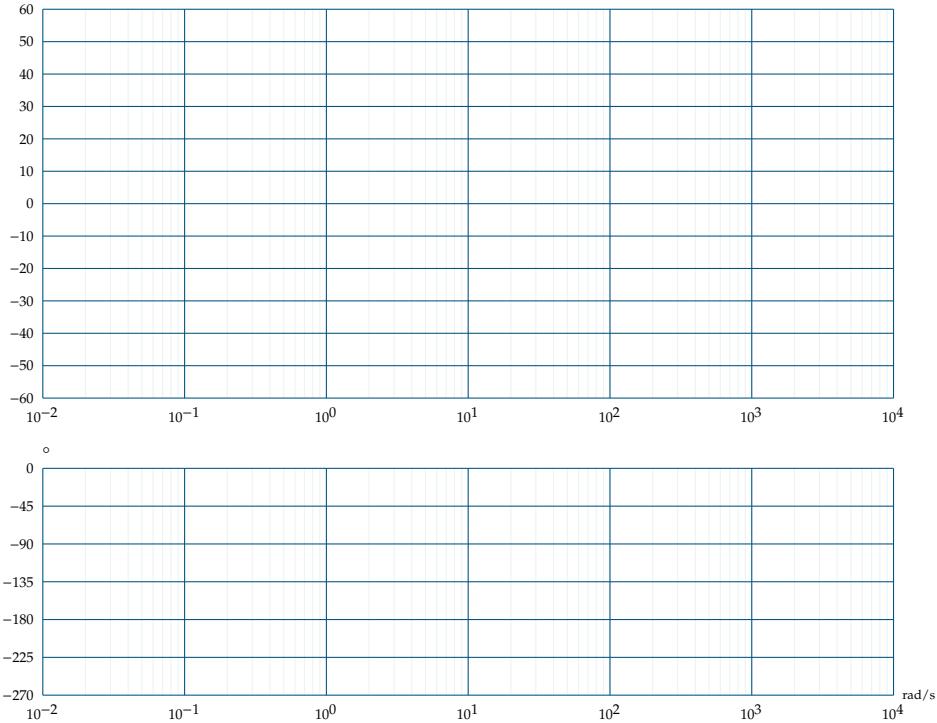
Question 1 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

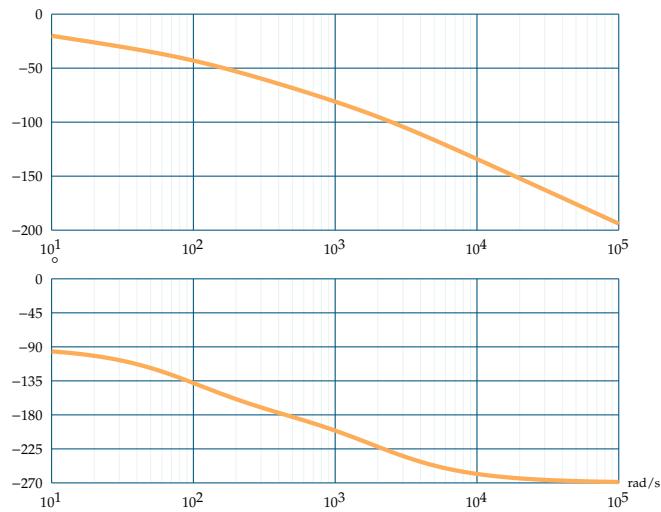


Question 2 Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

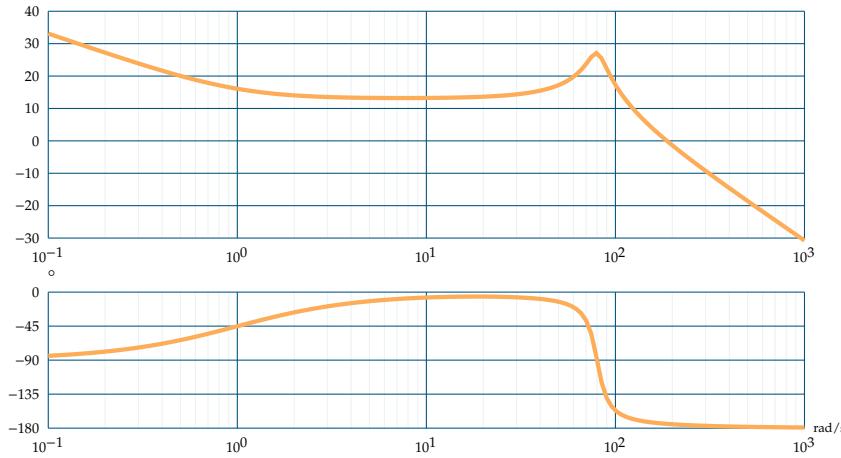


Question 3 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme : $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1p)(1 + T_2p)}$. Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de $H(p)$.



Question 4 On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale : $e(t) = 3 \sin 300t$. Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

Question 5 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a : $\text{Max}(G_{\text{dB}}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.



Question 6 Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité S est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

Première étude : $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude E_0 égale à 0,2 V.

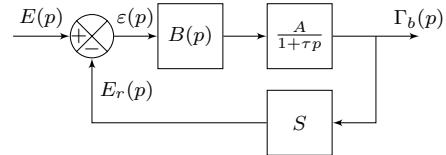
Question 7 Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

Question 8 La tension de consigne prend la forme suivante : $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$ avec $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$. Déterminer $\gamma_b(t)$ en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

Deuxième étude : $B(p) = \frac{1}{p}$.

Question 9 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

Question 10 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.



- ▶ $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$;
- ▶ $\tau = 0,2 \text{ s}$ et $S = 10 \text{ g}^{-1} \cdot 10^{-3} / (\text{V}/(\text{m/s}^2))$ où g est l'accélération de pesanteur;
- ▶ $E(p)$ est la transformée de Laplace de $e(t)$ la tension de consigne de cet asservissement;
- ▶ $\Gamma_b(p)$ la transformée de l'accélération $\gamma_b(t)$.



Application 1

Réponses fréquentielles – Corrigé

D'après Sébastien Grange.

Diagramme de Bode

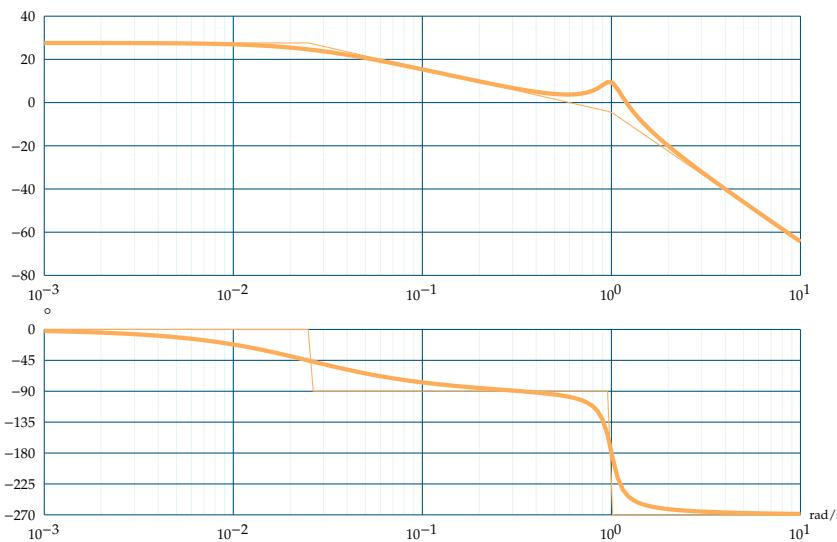
11 SLCI

Question 1 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

Correction

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)} = \frac{24}{(1 + 40p) \left(1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1}p + \frac{p^2}{1^2} \right)}$$



Question 2 Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

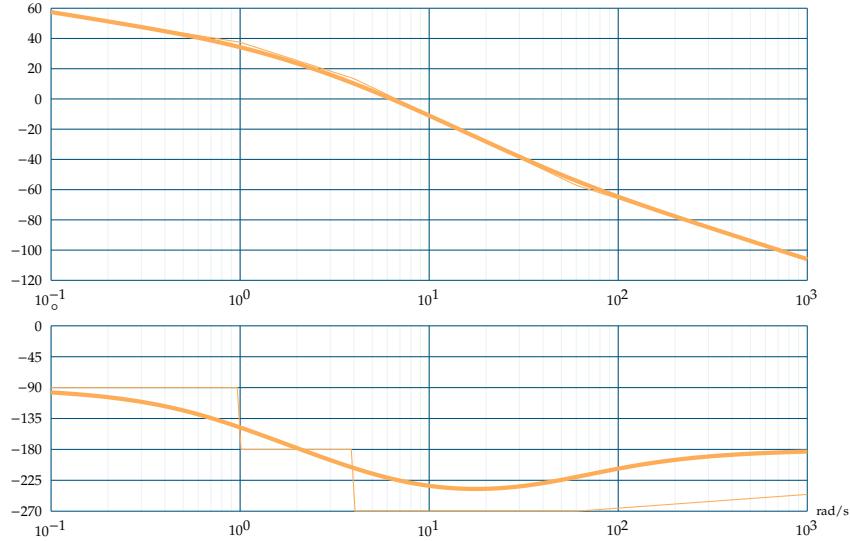
$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

Correction

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)} = \frac{75(1 + 0,0167p)}{p(1 + (2 \cdot 1,25)/2p + p^2/2^2)} = \frac{75(1 + 0,0167p)}{p(1 + p)(1 + 0,25p)}$$

	1 rad/s	$\frac{1}{0,25} = 4$ rad/s	$\frac{1}{0,0167} = 60$ rad/s
$1 + 0,0167p$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0° +20 dB/décade +90°
$\frac{1}{1 + p}$	0 dB/décade	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90° -20 dB/décade -90°
$\frac{1}{1 + 0,25p}$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	-20 dB/décade -90° -20 dB/décade -90°
$1/p$	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90° -20 dB/décade -90°
$H(p)$	-20 dB/décade -90°	-40 dB/décade -180°	-60 dB/décade -270° -40 dB/décade -180°

Poistionnement du diagramme asymptotique de gain : en $\omega = << 1 \text{ rad s}^{-1}$, $H(p) \approx \frac{75}{p}$. Ainsi pour $\omega \approx 0,1 \text{ rad s}^{-1}$, $H_{dB}(0,1) = 20 \log(75/0,1) = 57 \text{ dB}$.



Question 3 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme : $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$. Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de $H(p)$.

Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. De plus la phase diminue dans un premier temps de 90 degrés puis encore de 90 degrés ce qui justifie les 2 1^{er} ordres.

Pour identifier les constantes de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un premier ordre passe par -45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut $\frac{1}{\tau}$. Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc les pulsations de coupure lorsque la phase vaut -135 degrés puis -225 degrés. On a : $1/T_1 \approx 100$ et $1/T_2 \approx 2000$ donc $T_1 = 0,01 \text{ s}$ et $T_2 = 0,0005 \text{ s}$.

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1^{er} ordre valent environ $20 \log K$ et celui de l'intégrateur $20 \log(1/\omega)$. On a donc pour $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$: $20 \log(K/0,1) \approx -20$ et $K \approx 1$.

On a donc : $H(p) = \frac{1}{p(1 + 0.01p)(1 + 0.0005p)}$.

Le pôle dominant est le pôle qui met le plus de temps à converger, c'est-à-dire celui qui a la constante de temps la plus grande, on a donc : $H(p) \simeq \frac{1}{p(1 + 0.01p)}$.

Question 4 On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale : $e(t) = 3 \sin 300t$. Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

Correction

On sait que la sortie sera également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais déphasée et d'amplitude différente : $s(t) = S_0 \sin(300t + \varphi)$.

Le diagramme de Bode nous donne le rapport de l'amplitude entre la sortie et l'entrée (courbe de gain) et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (courbe de phase).

$$G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) = 20 \log(S_0/E_0) = 20 \log(S_0/3).$$

On peut lire que : $G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) \simeq -60 \text{ dB}$ et donc $S_0 \simeq 3 \cdot 10^{-3}$. D'après la courbe de phase, on peut lire : $\varphi(\omega = 300 \text{ rad/s}) = -175 \text{ degrés}$. On a donc : $s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(300t - 3,05)$. L'angle est à mettre en radians.

Question 5 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a : $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.

Correction

D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. Ensuite la phase augmente dans un premier temps de 90 degrés, ce qui signifie la présence d'un « 1er ordre » en numérateur. Puis la phase diminue de 180 degrés et le gain résonne ce qui justifie la présence d'un 2ème ordre avec un coefficient d'amortissement plus petit que $1/\sqrt{2}$.

$$H(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p(1 + 2\xi/\omega_0 p + p^2/(\omega_0^2))}$$

Pour identifier la constante de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un « premier ordre » au numérateur passe par 45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut $1/\tau$. Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -45 degrés. On a : $1/T \simeq 1$ et $T = 1 \text{ s}$.

Pour identifier la pulsation de coupure, on va utiliser le fait que la phase d'un 2ème ordre passe par -90 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut ω_0 . Ici, il y a un intégrateur et un « 1er ordre » au numérateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -90 degrés. On a : $\omega_0 \simeq 80 \text{ rad/s}$.

Pour identifier le coefficient d'amortissement, on va utiliser la résonnance. On a : $20 \log(1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})) \simeq 13$ et $\xi \simeq 0,11$.

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1er ordre et du 2ème ordre valent environ $20 \log K$ et celui de l'intégrateur $20 \log(1/\omega)$. On a donc pour $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$: $20 \log(K/0,1) \simeq 33$ et $K \simeq 4,5$

Question 6 Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

Réponse fréquentielle

 $E(p)$

- ▶ $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$;
- ▶ $\tau = 0,2 \text{ s}$ et $S = 10 \text{ g}^{-1} \cdot 10^{-3} / \text{V} / (\text{m/s}^2)$ où g est l'accélération de pesanteur;
- ▶ $E(p)$ est la transformée de Laplace de $e(t)$ la tension de consigne de cet asservissement;
- ▶ $\Gamma_b(p)$ la transformée de l'accélération $\gamma_b(t)$.

Un capteur d'accélération de sensibilité S est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

Première étude : $B(p) = 1$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude E_0 égale à 0,2 V.

Question 7 Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne?

Correction

$$\text{En calculant la FTBF on a } FTBF(p) = \frac{\frac{A}{1 + \tau p}}{1 + \frac{AS}{1 + \tau p}} = \frac{A}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)}.$$

$$\text{Par suite } \Gamma_b(p) = \frac{A}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)} \frac{E_0}{p}.$$

$$\text{On a donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \Gamma_b(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)} \frac{E_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{AE_0}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)} = \frac{AE_0}{1 + AS}.$$

$$\text{Pour } E_0 = 0,2 \text{ V}, \Gamma_f = \frac{100g \times 0,2}{1 + 100g \times 10 \times 10^{-3} g^{-1}} = 10g.$$

$$\text{On veut } \frac{AE_0}{1 + AS} = 20g \text{ soit } E_0 = 20g \frac{1 + AS}{A} E_0 = 20g \frac{1 + 100 \times 10 \times 10^{-3}}{100g} = 0,4. \text{ Il faudrait donc } E_0 = 0,4 \text{ V.}$$

Question 8 La tension de consigne prend la forme suivante : $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$ avec $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$. Déterminer $\omega_b(t)$ en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

Correction

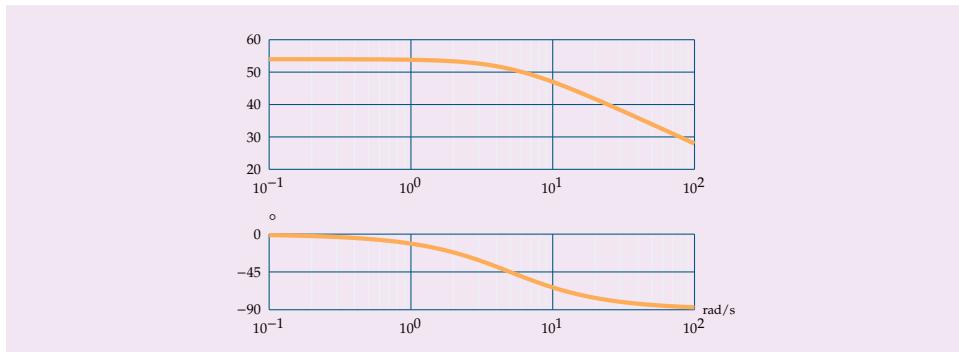
$$FTBF(p) = \frac{A}{1 + \tau p + AS(1 + \tau p)} = \frac{\frac{A}{1 + AS}}{1 + \tau p} \text{ en faisant l'application numérique, } FTBF(p) = \frac{50g}{1 + 0,2p}.$$

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(50g) - 20 \log \sqrt{1 + 0,2^2 \omega^2} \text{ et } G_{\text{dB}}(10) = 20 \log(50g) - 20 \log \sqrt{5} = 20 \log(10g\sqrt{5}) \simeq 47 \simeq 20 \log 223.$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan 0,2\omega \text{ et } \varphi(10) = -\arctan 2 \simeq -63^\circ.$$

$$\text{Au final } \omega_b(t) = 0,2 \times 223 \sin(\omega t - 63^\circ).$$

Pour information, on donne le diagramme de Bode de la FTBF.



Deuxième étude : $B(p) = \frac{1}{p}$.

Question 9 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

Question 10 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.



TD 1

Banc d'essai BTP- Sujet

Concours CCINP – TSI 2015.

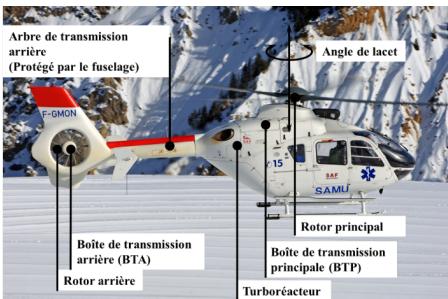
02 SLCI 03 SLCI 03 SLCI

Mise en situation

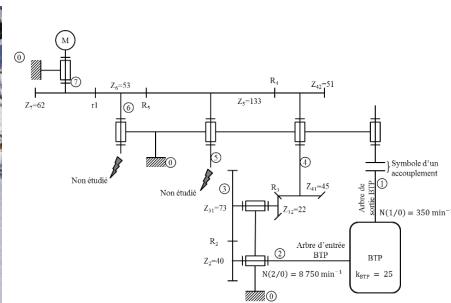
Airbus Helicopters commercialise des hélicoptères civils et militaires. Le déplacement des hélicoptères est assuré par un rotor principal permettant la sustentation et la translation de l'appareil. Un rotor arrière permet de compenser le couple de réaction engendré par le rotor principal et de contrôler les mouvements de lacet de l'appareil (figure 1.6a). La puissance est délivrée par deux turboréacteurs (certains hélicoptères ne sont équipés que d'un turboréacteur). Ces turboréacteurs entraînent en rotation une boîte de transmission principale (BTP) qui elle-même entraîne d'une part le rotor principal et d'autre part le rotor arrière, par l'intermédiaire d'un arbre de transmission et d'une boîte de transmission arrière (BTA). La BTP assure aussi l'entraînement d'une série d'accessoires permettant le fonctionnement de l'appareil (alternateur, pompe hydraulique ...). Pour chaque association hélicoptère - turboréacteur, un banc d'essai permet de vérifier que la BTP répond au cahier des charges. La figure 1.6b présente la structure du banc d'essai.

Objectif

Valider Req 1.1.1.



(a) Hélicoptère.



(b) Structure du banc d'essai.

«requirement»	
Précision de la régulation	
Id = "1.1.1"	
Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul."	

FIGURE 1.6 – Hélicoptère et banc d'essai

Le moteur à courant continu

On note :

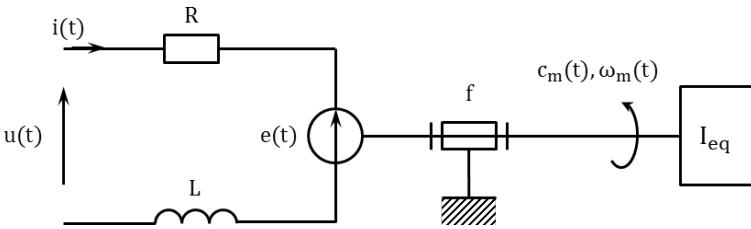
- $u(t)$: la tension appliquée aux bornes de l'induit;

- ▶ $i(t)$: le courant absorbé par l'induit;
- ▶ $e(t)$: la force contre-électromotrice;
- ▶ $\omega_m(t)$: la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- ▶ $c_m(t)$: le couple moteur;
- ▶ $c_r(t)$: le couple résistant sur l'arbre moteur dû à la génération d'un couple résistant en sortie de BTP;
- ▶ K_c : la constante de couple définie telle que $c_m(t) = K_c i(t)$ (équation 1);
- ▶ K_e : la constante de force contre-électromotrice définie telle que $e(t) = K_e \omega_m(t)$ (équation 2).

Le banc d'essai est équipé d'un dispositif permettant de générer un couple résistant sur le rotor de sortie de la BTP. Cela permet de simuler les actions aérodynamiques sur les pales. Il faut donc évaluer l'impact de ce couple sur la vitesse du moteur. La modélisation adoptée pour le moteur à courant continu est celle de la figure 1.7.

- ▶ R : la résistance de l'induit;
- ▶ L : l'inductance de l'induit;
- ▶ f : le coefficient de frottement, qui génère un couple résistant proportionnel à $\omega_m(t)$;
- ▶ I_{eq} : l'inertie équivalente du banc d'essai ramené à l'arbre moteur;

FIGURE 1.7 – Schéma équivalent du moteur à courant continu.



Hypothèses :

- ▶ le comportement de chacun des composants sera considéré comme linéaire, continu et invariant;
- ▶ les conditions de Heaviside sont considérées comme vérifiées;
- ▶ on note p la variable de Laplace. La transformée de Laplace d'une fonction temporelle $f(t)$ sera notée $F(p)$ (la transformée de $\omega(t)$ sera notée $\Omega(p)$).

Modélisation de l'asservissement en vitesse

Hypothèses :

- ▶ on néglige l'inductance du moteur à courant continu ainsi que l'effet du coefficient de frottement;
- ▶ on fait l'hypothèse que $K_c = K_e = K$;
- ▶ pour simplifier l'étude, la boucle de courant n'a pas été modélisée.

Le schéma-blocs de l'asservissement en vitesse du moteur à courant continu est donné sur la figure 1.8.

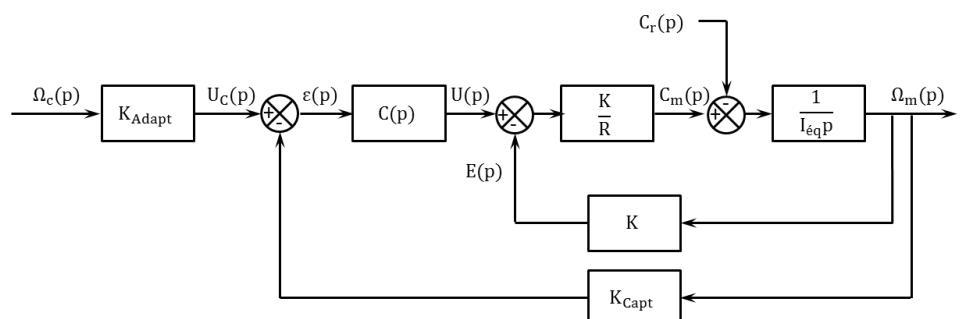


FIGURE 1.8 – Régulation en vitesse du banc d'essai.

Question 1 Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour ? Comment déterminer la valeur du gain K_{Adapt} ?

Hypothèse 1 : on considère que $C_r(p) = 0$ et $\Omega_c(p) \neq 0$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$ puis la fonction de transfert en boucle fermée $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_C(p))$. On considère

que $C(p) = K_P$, K_P étant constant. Mettre $H_1(p)$ sous la forme $K_1/(1 + \tau_1 p)$ où on explicitera les valeurs de K_1 et τ_1 .

Hypothèse 2 : on considère que $\Omega_C(p) = 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

Question 3 Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

Question 4 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$. On considère que $C(p) = K_P$, K_P étant constante. Mettre $H_2(p)$ sous la forme $-K_2/(1 + \tau_2 p)$ où on explicitera les valeurs de K_2 et τ_2 .

Hypothèse 3 : on considère maintenant que $\Omega_C(p) \neq 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

Question 5 En utilisant le théorème de superposition, exprimer $\Omega_m(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $\Omega_c(p)$ et $C_r(p)$.

À une fréquence de rotation de 350 min^{-1} en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de 1928 min^{-1} soit environ 202 rad/s . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à 990 Nm . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude 202 rad/s et à un couple résistant de 990 Nm .

Question 6 Après avoir exprimé la consigne $\Omega_c(p)$ puis le couple résistant $C_r(p)$, calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Question 7 Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain K_I de la forme $C(p) = K_I/p$?

Question 8 En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

Éléments de correction

1. $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$.
2. $K_1 = \frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}}$ et $\tau_1 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K^2 + K K_P K_{\text{Capt}}}.$
3. .
4. $K_2 = \frac{R}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}$ et $\tau_2 = \frac{R I_{\text{eq}}}{\tau_1}.$
5. $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p).$
6. $\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}} K_1) \Omega_{c0} + K_{\text{Capt}} K_2 C_{r0}.$
7. On montre que l'écart statique est annulé.
8. $\varepsilon = 0.$





TD 1

Banc d'essai BTP- Corrigé

Concours CCINP – TSI 2015.

02 SLCI 03 SLCI 03 SLCI

Mise en situation

Objectif

Valider Req 1.1.1.

Le moteur à courant continu

Modélisation de l'asservissement en vitesse

Question 1 Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour? Comment déterminer la valeur du gain K_{Adapt} ?

Correction

Il s'agit de réaliser un asservissement en fréquence de rotation. On pourrait utiliser une génératrice tachymétrique.

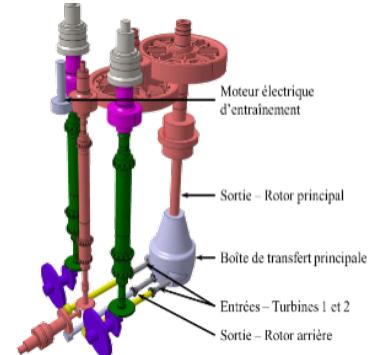
Afin d'avoir un asservissement précis ($\varepsilon(p) = 0$ lorsque $\Omega_c(p) = \Omega(p)$), on prend $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$.

Hypothèse 1 : on considère que $C_r(p) = 0$ et $\Omega_c(p) \neq 0$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$ puis la fonction de transfert en boucle fermée $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_C(p))$. On considère que $C(p) = K_p$, K_p étant constant. Mettre $H_1(p)$ sous la forme $K_1/(1 + \tau_1 p)$ où on explicitera les valeurs de K_1 et τ_1 .

Correction

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K}{RI_{\text{eq}}p}}{1 + \frac{K^2}{RI_{\text{eq}}p}} = \frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} = \frac{1/K}{1 + \frac{RI_{\text{eq}}}{K^2}p}$$



«requirement»
Précision de la régulation

Id = "1.1.1"
Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul."

$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)} = K_{\text{Adapt}} \frac{\frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} C(p)}{1 + \frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} C(p) K_{\text{Capt}}} = \frac{K_{\text{Adapt}} K C(p)}{RI_{\text{eq}}p + K^2 + KC(p) K_{\text{Capt}}}$$

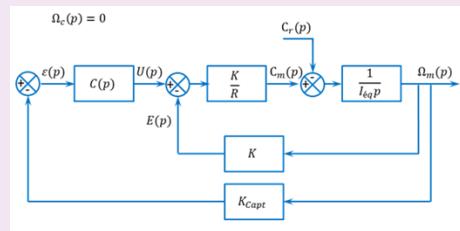
$$H_1(p) = \frac{K_{\text{Adapt}} K K_P}{RI_{\text{eq}}p + K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}} = \frac{\frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}}}{\frac{RI_{\text{eq}}}{K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}} p + 1} = \frac{K_1}{1 + \tau_1 p}$$

Soit par identification : $K_1 = \frac{K_{\text{Adapt}} K_P}{K + K_P K_{\text{Capt}}}$ et $\tau_1 = \frac{RI_{\text{eq}}}{K^2 + KK_P K_{\text{Capt}}}$.

Hypothèse 2 : on considère que $\Omega_C(p) = 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

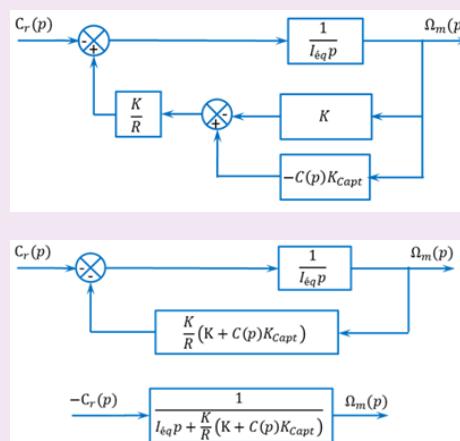
Question 3 Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

Correction



Question 4 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$. On considère que $C(p) = K_P$, K_P étant constante. Mettre $H_2(p)$ sous la forme $-K_2/(1 + \tau_2 p)$ où on explicitera les valeurs de K_2 et τ_2 .

Correction



$$\text{On a donc : } H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = -\frac{1}{\frac{K}{R}(K + K_P K_{\text{Capt}}) + I_{\text{eq}}p} = -\frac{\frac{R}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}}{1 + \frac{RI_{\text{eq}}}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})} p}$$

$$= -\frac{K_2}{1 + \tau_2 p} \text{ Soit par identification : } K_2 = \frac{R}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})} \text{ et } \tau_2 = \tau_1 = \frac{RI_{\text{eq}}}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}$$

Hypothèse 3 : on considère maintenant que $\Omega_c(p) \neq 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

Question 5 En utilisant le théorème de superposition, exprimer $\Omega_m(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $\Omega_c(p)$ et $C_r(p)$.

Correction

Par superposition on a : $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p)$.

À une fréquence de rotation de 350 min^{-1} en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de 1928 min^{-1} soit environ 202 rad/s . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à 990 Nm . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude 202 rad/s et à un couple résistant de 990 Nm .

Question 6 Après avoir exprimé la consigne $\Omega_c(p)$ puis le couple résistant $C_r(p)$, calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Correction

On a, pour des échelons de consignes : $\Omega_c(p) = \frac{\Omega_{c0}}{p}$ avec $\Omega_{c0} = 202 \text{ rad/s}$ et $C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$ avec $C_{r0} = 990 \text{ Nm}$.

L'écart statique ε_S s'écrit en sortie du comparateur :

$$\begin{aligned}\varepsilon_S &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}\Omega_m(p)) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} \left(p(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_1(p)\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_2(p)C_r(p)) \right) \\ &\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(K_{\text{Adapt}}\frac{\Omega_{c0}}{p} - K_{\text{Capt}}K_1\frac{\Omega_{c0}}{p} + K_{\text{Capt}}K_2\frac{C_{r0}}{p} \right) \\ &\varepsilon_S = \left(K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}}K_1 \right) \Omega_{c0} + K_{\text{Capt}}K_2C_{r0}\end{aligned}$$

L'écart statique ne pourra pas être nul (exigence 1.1.1 du cahier des charges non vérifiée).

Question 7 Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain K_I de la forme $C(p) = K_I/p$?

Correction

En choisissant $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$, l'écart statique pourra être réduit à condition d'avoir un gain K_P important $K_1 \rightarrow 1$ et $K_2 \rightarrow 0$, mais pas trop pour ne pas rendre le système instable. Avec un correcteur intégral, le système devient de classe 1 et l'écart statique est annulé.

Question 8 En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

Correction

En reprenant le raisonnement de la question **, et en remplaçant $C(p)$ par K_I/p dans

$$\text{les expressions de } H_1(p) \text{ et } H_2(p) : \lim_{p \rightarrow 0} H_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \frac{\frac{RI_{\text{eq}}p + K^2}{K} p}{1 + \frac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2} \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}}} =$$

$$\frac{K_{\text{Adapt}}}{K_{\text{Capt}}}.$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} H_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{1}{\frac{K}{R} \left(K + \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}} \right) + I_{\text{eq}} p} = 0$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(K_{\text{Adapt}} \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_1(p) \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_2(p) C_r(p) \right)$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} K_{\text{Adapt}} / K_{\text{Capt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} 0 C_r 0 = 0$$

Dans ce cas, l'application d'un couple perturbateur n'a donc pas d'influence sur l'écart statique. La fréquence de rotation du rotor peut être temporairement impactée, mais au bout d'un laps de temps, l'écart statique tend vers 0. L'exigence 1.1.1 est donc vérifiée.



TD 2

Tête de découpe de tissus – Sujet

Concours CCINP MP 2018.

SLCI SLCI SLCI

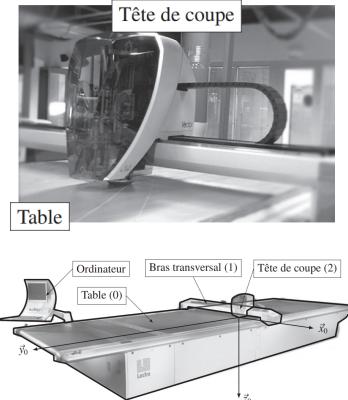


FIGURE 1.9 – Structure d'une table de découpe de tissus

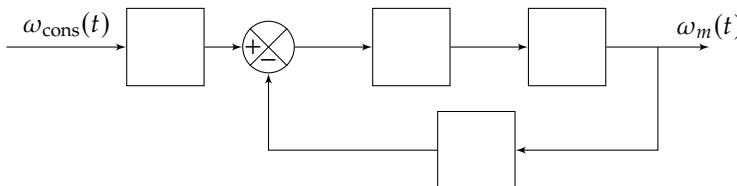
Modélisation du comportement du moteur de coupe

Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 1.12).

Le mouvement de coupe est asservi en vitesse. La vitesse de rotation du moteur, notée $\omega_m(t)$, est le paramètre asservi. Elle est mesurée à l'aide d'un codeur incrémental et de son conditionneur qui fournissent une tension $u_{mes}(t)$, image de la vitesse de rotation du moteur. Cette tension est comparée à la tension consigne $u_{cons}(t)$, image de la vitesse de rotation de consigne $\omega_{cons}(t)$; un adaptateur fournit $u_{cons}(t)$ à partir de $\omega_{cons}(t)$. La tension écart $\varepsilon(t) = u_{cons}(t) - u_{mes}(t)$ est alors transformée en tension d'alimentation du moteur $u_m(t)$ par l'ensemble correcteur-variateur.

Question 1 Compléter le schéma-blocs fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.



Question 2 On note K_a le gain de l'adaptateur et K_c le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre K_a et K_c pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

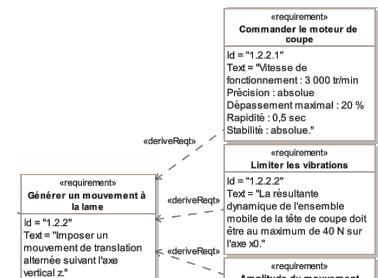


FIGURE 1.10 – Exigence 1.2.2.1

Le moteur utilisé est un moteur à courant continu dont les caractéristiques et les grandeurs physique sont :

- ▶ R , résistance de l'induit;
- ▶ L , inductance de l'induit;
- ▶ k_e , constante de vitesse;
- ▶ k_c , constante de couple;
- ▶ $u_m(t)$ est la tension d'alimentation du moteur;
- ▶ $i(t)$ est l'intensité traversant l'induit;
- ▶ $e(t)$ est la force contre-électromotrice;
- ▶ $\omega_m(t)$ est la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- ▶ $c_m(t)$ est le couple moteur;
- ▶ $c_r(t)$ est le couple résistant;
- ▶ J est le moment d'inertie de l'ensemble en mouvement ramené à l'arbre moteur, supposé constant dans cette partie.

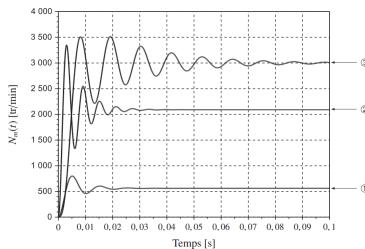


FIGURE 1.11 – Évolutions simulées de $\omega_m(t)$.

On donne les quatre équations du modèle d'un moteur à courant continu : $u_m(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$, $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) + c_r(t)$, $c_m(t) = k_c i(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$. La fonction de transfert du moteur est notée $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

Question 4 En supposant le couple résistant nul, $c_r(t) = 0$, donner la forme canonique de la fonction de transfert sous la forme $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. On exprimera les constantes en fonction de R , L , k_e , k_c et J .

Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

Le correcteur de l'asservissement en vitesse du moteur est un proportionnel-intégrateur de fonction de transfert $H_{cor}(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$.

Les résultats de simulation de la réponse du moteur $N_m(t)$, en boucle fermée, pour une entrée échelon d'amplitude $N_0 = 3000 \text{ tr min}^{-1}$ pour différentes valeurs de K_p et de K_i sont donnés sur la figure 1.13.

Question 5 Pour les courbes 1 et 2 de la figure 1.13, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de K_p . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

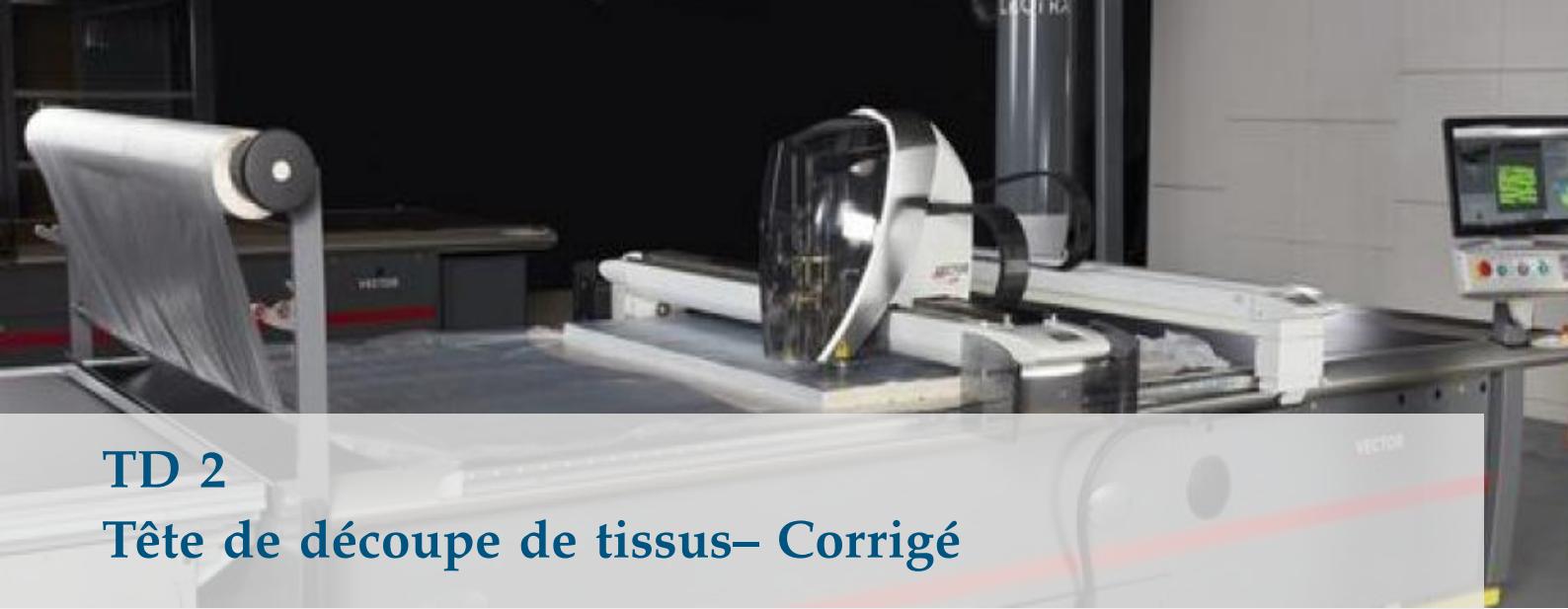
Question 6 Pour chaque courbe de la figure 1.13, préciser, en le justifiant, si la valeur de K_i est nulle ou non.

Question 7 Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.

Éléments de correction

1. .
2. $K_a = K_c$.
3. .
4. $K = \frac{1}{k_e}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}}$ et $\xi = \frac{R \sqrt{J}}{2 \sqrt{L k_c k_e}}$.
5. La courbe 2 a la plus grande valeur de K_p .
6. $K_i \neq 0$ pour la courbe 3 uniquement.
7. .





TD 2

Tête de découpe de tissus- Corrigé

Concours CCINP MP 2018.

02 SLCI 03 SLCI 08 SLCI

Modélisation du comportement du moteur de coupe

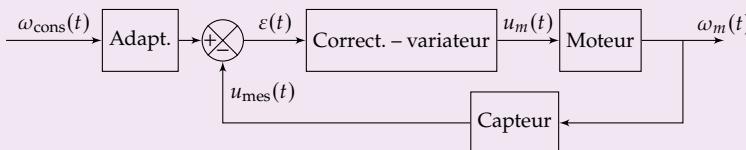


Objectif

Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur afin de déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence 1.2.2.1 (figure 1.12).

Question 1 Compléter le schéma-blocs fonctionnel en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.

Correction



Question 2 On note K_a le gain de l'adaptateur et K_c le gain du capteur. Quelle doit être la relation entre K_a et K_c pour que l'écart soit nul lorsque la vitesse du moteur est égale à la vitesse de consigne ?

Correction

On a $\varepsilon(t) = K_a \omega_{\text{cons}}(t) - K_c \omega_m(t)$.

Pour que $\varepsilon(t)$ soit nul lorsque $\omega_{\text{cons}}(t) = \omega_m(t)$, il faut que $K_a = K_c$.

Question 3 Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

Correction

On a $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p)$, $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) + Cr(p)$, $C_m(p) = k_c I(p)$, $E(p) = k_e \Omega_m(p)$.

Question 4 En supposant le couple résistant nul, $c_r(t) = 0$, donner la forme canonique

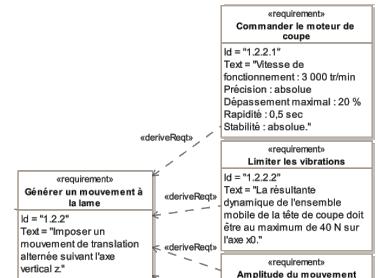


FIGURE 1.12 – Exigence 1.2.2.1

de la fonction de transfert sous la forme $H_m(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. On exprimera les constantes en fonction de R, L, k_e, k_c et J .

Correction

On a $U_m(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) = \frac{C_m(p)}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_m(p) = Jp \frac{\Omega_m(p)}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_m(p)$.

On a donc $U_m(p) = \Omega_m(p) \left(\frac{Jp}{k_c} (R + Lp) + k_e \right)$ et $H_m(p) = \frac{1}{\frac{JL}{k_c} p^2 + \frac{JR}{k_c} p + k_e}$
 $\frac{1}{\frac{JL}{k_c k_e} p^2 + \frac{JR}{k_c k_e} p + 1}$.

Par identification, on a donc $K = \frac{1}{k_e}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}}$ et $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{JR}{k_c k_e}$ soit $\xi = \frac{JR}{2k_c k_e} \sqrt{\frac{k_c k_e}{JL}} = \frac{R\sqrt{J}}{2\sqrt{Lk_c k_e}}$.

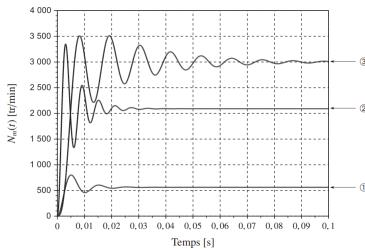


FIGURE 1.13 – Évolutions simulées de $\omega_m(t)$.

Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

Objectif

Analyser les performances de l'asservissement en vitesse du moteur afin de concevoir un correcteur permettant de vérifier l'exigence 1.2.2.1.

Question 5 Pour les courbes 1 et 2 de la figure 1.13, préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de K_p . On pourra exprimer le coefficient d'amortissement de la FTBF ou exprimer l'écart statique.

Correction

Méthode 1 – Coefficient d'amortissement

On note $H_{BF}(p) = \frac{\omega_m(t)}{\omega_{cons}(t)}$.

$$\text{On a alors, } H_{BF}(p) = K_c \frac{\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + K_p \frac{\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} K_c} = \frac{K_c K_p K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2} + K_p K_c}.$$

On a donc $\frac{2\xi_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{2\xi}{\omega_0 (1 + K_p K_c)}$ et $\omega_{BF}^2 = \omega_0^2 (1 + K_p K_c)$.

$$\text{Soit } \xi_{BF} = \frac{\xi \omega_{BF}}{\omega_0 (1 + K_p K_c)} = \frac{\xi \omega_0 \sqrt{1 + K_p K_c}}{\omega_0 (1 + K_p K_c)} = \frac{\xi}{\omega_0 \sqrt{1 + K_p K_c}}.$$

En conclusion, plus K_p augmente, plus le coefficient d'amortissement diminue et donc plus les pseudo oscillations deviennent grandes. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de K_p .

Méthode 2 – Calcul de l'écart statique

On montre que $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1 + K_p K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}.$

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$.

$$\varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_a}{1 + K_p K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K_a}{1 + K_p K_c K}.$$

Lorsque K_p augmente, ε_S diminue. La courbe 2 a donc la plus grande valeur de K_p .

Question 6 Pour chaque courbe de la figure 1.13, préciser, en le justifiant, si la valeur de K_i est nulle ou non.

Correction

On montre que $\varepsilon(p) = \omega_{\text{cons}}(p)K_a \frac{1}{1 + FTBO(p)} = \frac{\omega_{\text{cons}}(p)K_a}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{p}\right) K_c \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}.$

Pour une entrée échelon et en utilisant le théorème de la valeur finale, on a $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$.

$\varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0$. Ainsi, si K_i non nul, $\varepsilon_S = 0$ (courbe 3 uniquement).

Question 7 Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Conclure sur le correcteur à adopter.

Correction

	Stabilité	1 ^{er} Dépassemment	Erreur statique	$T_{5\%}$
Exigences	Absolue	< 20 %	Nulle	0,5 s
Courbe 1	Stable OK	$D_1 = 45\% \text{ Pas OK}$	2450 tr/min Pas OK	$T_{5\%} = 0,015 \text{ s OK}$
Courbe 2	Stable OK	$D_1 = 59\% \text{ Pas OK}$	900 tr/min Pas OK	$T_{5\%} = 0,018 \text{ s OK}$
Courbe 3	Stable OK	$D_1 = 15\% \text{ OK}$	0 tr/min OK	$T_{5\%} = 0,048 \text{ s OK}$



TD 3

Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie– Sujet

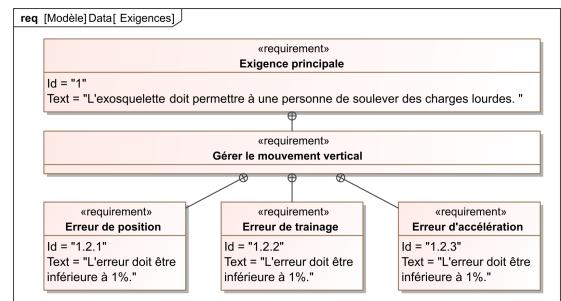
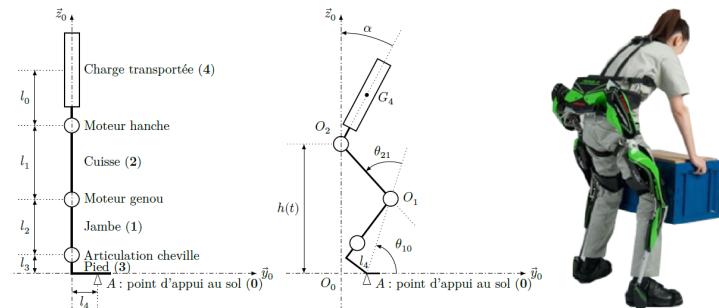
Concours Centrale Supelec TSI 2017.

08 SLCI 08 PERF

Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.

On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.

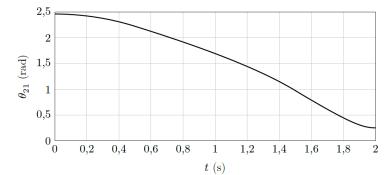


Gestion du mouvement vertical

Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

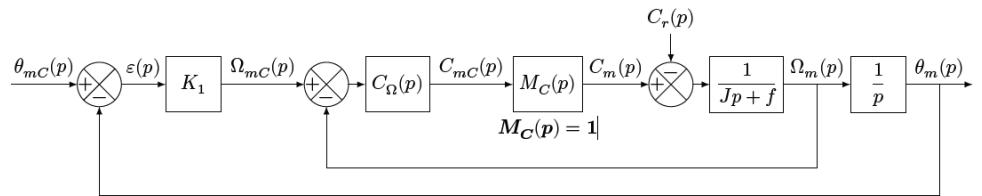
La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.

Notations :

- ▶ $\theta_{mC}(p)$ consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_{mC}(t)$ en rad);
- ▶ $\theta_m(p)$ position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_m(t)$ en rad);
- ▶ $C_{mC}(p)$ consigne de couple moteur (variable temporelle : $c_{mC}(t)$ en Nm);
- ▶ $C_m(p)$ couple moteur (variable temporelle : $c_m(t)$ en Nm);
- ▶ $C_r(p)$ couple résistant perturbateur (variable temporelle : $c_r(t)$ en Nm);
- ▶ K_1 gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en s^{-1});
- ▶ $\Omega_{mC}(p)$ consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_{mC}(t)$ en rad s^{-1});
- ▶ $\Omega_m(p)$ vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_m(t)$ en rad s^{-1});
- ▶ $C_\Omega(p)$ correcteur de l'asservissement de vitesse;
- ▶ $M_C(p)$ modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles : $M_C(p) = 1$;
- ▶ J moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur;
- ▶ f coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement.



Le correcteur est de la forme : $C_\Omega(p) = K_2 \left(\frac{Jp + f}{Jp} \right)$.

En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que :

- ▶ l'écart est défini par la variable $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$;
- ▶ l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$.

Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart $\varepsilon(t)$ est égal à l'erreur $\mu(t)$.

Hypothèse

Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Question 2 Exprimer $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

Question 3 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p .

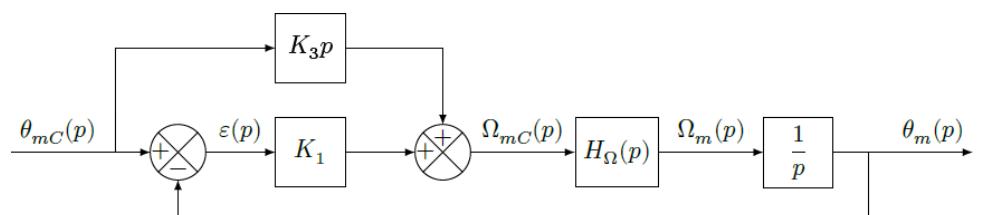
Méthode –

On peut définir l'erreur de position ε_p par $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$ avec $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$ (entrée échelon).

Question 4 Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Question 5 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$ et $T = 33$ ms.



Question 6 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

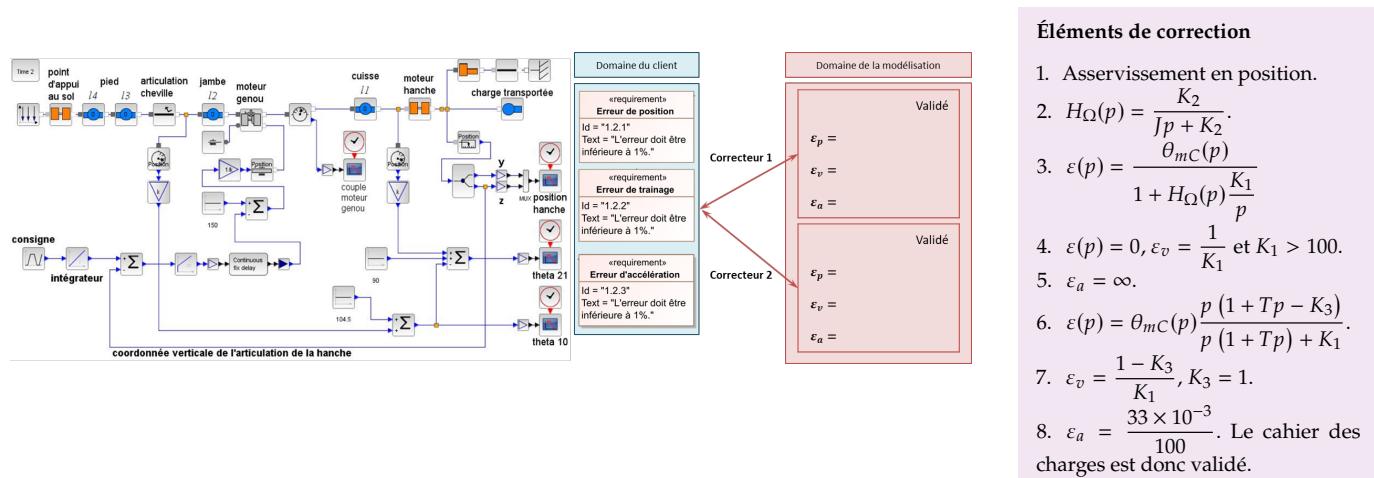
Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

Question 7 Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

Question 8 Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Synthèse

Question 9 En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.



Éléments de correction

1. Asservissement en position.
2. $H_\Omega(p) = \frac{K_2}{Jp + K_2}$.
3. $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p)} \frac{K_1}{p}$
4. $\varepsilon(p) = 0$, $\varepsilon_v = \frac{1}{K_1}$ et $K_1 > 100$.
5. $\varepsilon_a = \infty$.
6. $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1}$.
7. $\varepsilon_v = \frac{1 - K_3}{K_1}$, $K_3 = 1$.
8. $\varepsilon_a = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$. Le cahier des charges est donc validé.





TD 3

Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie– Corrigé

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

09 SLCI 05 PERF

Mise en situation

Gestion du mouvement vertical

Objectif

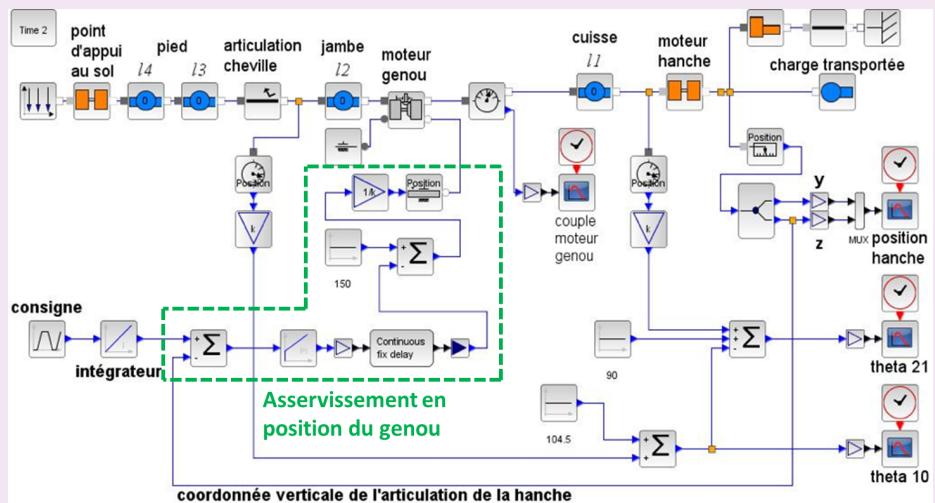
Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.



Question 1 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



Question 2 Exprimer $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

Correction

En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a : $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \frac{C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}{1+C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}$. En conséquences : $H_\Omega(p) = \frac{K_2}{Jp+K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1}$.

Question 3 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p .

Correction

D'une part, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$. D'autre part, $\theta_m(p) = H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\varepsilon(p)$. Par suite, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)\left(1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}\right) = \theta_{mC}(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}}$.

Question 4 Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Correction

On a :

$$\blacktriangleright \varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} = 0$$

(ce qui était prévisible pour un système de classe 1);

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \frac{1}{K_1} \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et} \\ &\text{de gain } K_1 \text{ en BO).} \end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut $\frac{1}{K_1} < 0,01$ et $K_1 > 100$.

Question 5 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

En raisonnant de même, on a : $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p)\frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3}$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{1}{p}} \frac{1}{p^2} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{p}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \infty \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1).}$$

Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

Question 6 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

Correction

En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p);$
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p);$
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1+Tp}.$

$$\text{On a donc : } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1+Tp} = \theta_{mC}(p) - (K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)) \frac{1}{p(1+Tp)} = \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1+Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1+Tp)} \varepsilon(p).$$

$$\text{On a alors } \varepsilon(p) \left(1 + \frac{K_1}{p(1+Tp)}\right) = \theta_{mC}(p) \left(1 - \frac{K_3}{1+Tp}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1+Tp) + K_1}{p(1+Tp)} = \theta_{mC}(p) \frac{1+Tp - K_3}{1+Tp}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1+Tp - K_3)}{p(1+Tp) + K_1}.$$

Question 7 Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

Correction

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1+Tp - K_3)}{p(1+Tp) + K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp - K_3)}{p(1+Tp) + K_1} = \frac{1 - K_3}{K_1}.$$

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir $K_3 = 1$.

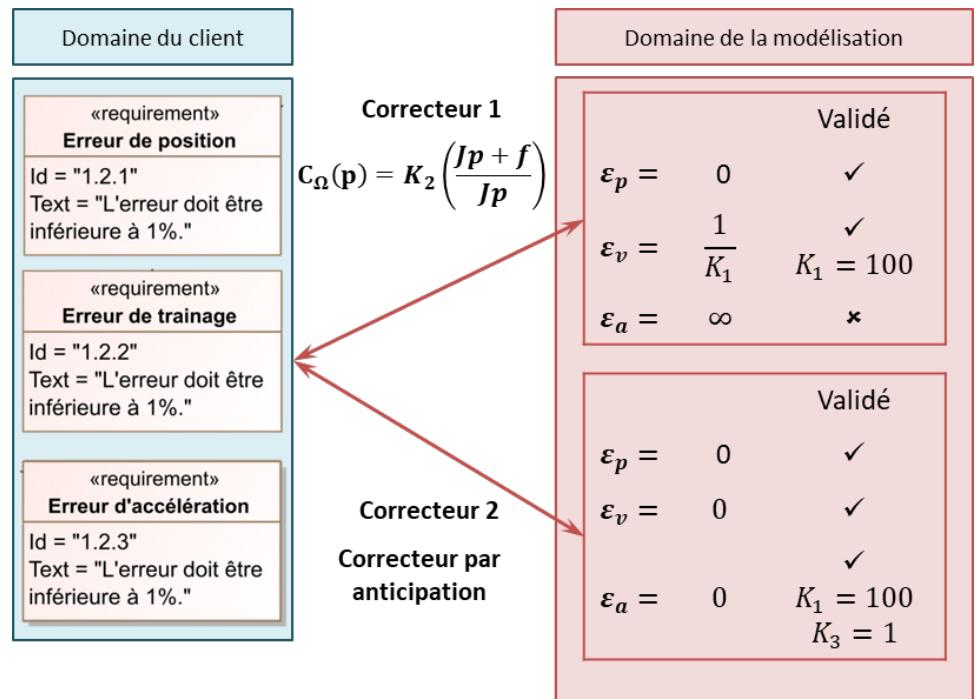
Question 8 Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

On a : $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1+Tp - K_3)}{p(1+Tp) + K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp - K_3)}{p(1+Tp) + K_1} \frac{1}{p}$. En prenant $K_3 = 1$ et $K_1 = 100$, on obtient : $\varepsilon_a = \frac{T}{p(1+Tp) + 100} = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$. L'erreur est donc de 33×10^{-5} . Le cahier des charges est donc validé.

Synthèse

Question 9 En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.





TD 4

Bateau support de ROV– Sujet

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

02 SLCI 03 SLCI 04 SLCI

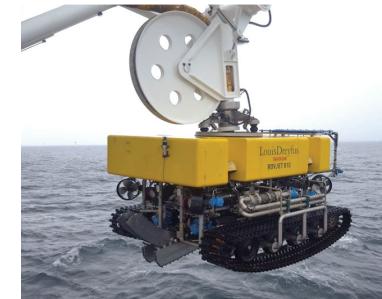


FIGURE 1.14 – ROV suspendu à la grue portique

Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

La société TravOcéan souhaite pouvoir travailler dans des conditions de mer difficiles pour limiter au maximum les périodes d'arrêt des chantiers. Pour cela, elle souhaite disposer d'un système de treuillage de ses ROV certifié pour une houle d'amplitude verticale de 5 m. Le tableau suivant présente un extrait du cahier des charges correspondant.

TABLE 1.1 – Extrait du cahier des charges

Exigence	Critère	Niveau
Id 1.1 : Compensation des mouvements du ROV pour une houle d'amplitude de 5 m et de pulsations comprises entre 0,5 rad s ⁻¹ à 1,7 rad s ⁻¹	Amplitude verticale du ROVmaximale	< 1 m pour 5 m d'amplitude de houle
Id 1.2 : Mise en tension du câble	Temps de réponse, $t_{r5\%}$	< 3 s

Une étude expérimentale en bassin de carène a permis d'obtenir un modèle de comportement de l'ensemble $S = \{\text{bateau} + \text{portique} + \text{ROV}\}$ suivant l'axe vertical, sous l'effet de la houle, au point d'ancrage du ROV sur la grue portique.

La fonction de transfert de l'ensemble S est $B(p) = \frac{Y_S(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$, avec $Y_S(p)$ la transformée

de Laplace de la variation du déplacement vertical du point d'ancrage du ROV et $Y_{\text{vague}}(p)$ la transformée de Laplace de la variation du déplacement de la surface de l'eau à la verticale du point d'ancrage du ROV.

Question 1 Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Le tracé du gain de $B(p)$ dans la figure 1.15.

Question 2 En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

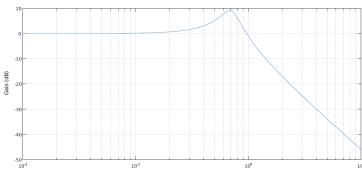


FIGURE 1.15 – ROV suspendu à la grue portique

Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Pour compenser les effets de la houle, une solution hydropneumatique est alors envisagée. Ce système est un compensateur de houle passif noté PHC (figure 1.16).

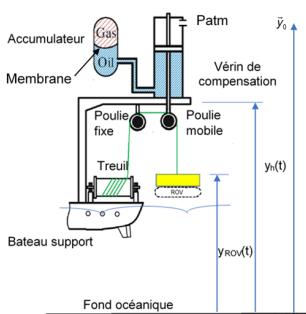


FIGURE 1.16 – Schéma d'implantation du PHV (non à l'échelle)

Les petites variations de pression $\Delta p_E(t)$ et $\Delta p_G(t)$ autour du point d'équilibre peuvent être définies par $\Delta p_E(t) = p_E(t) - P_{E0}$ et $\Delta p_G(t) = p_G(t) - P_{G0}$. Une étude de mécanique des fluides a permis d'obtenir les relations (1) et (2).

$$\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = \frac{K}{V_E} S \left(\frac{dy_h(t)}{dt} - \frac{dy_{ROV}(t)}{dt} \right) + \frac{K}{V_E} C_{qR} (\Delta p_G(t) - \Delta p_E(t)) \quad (1)$$

$$\frac{d\Delta p_G(t)}{dt} = \frac{r P_{G0} C_{qR}}{V_{G0}} (\Delta p_E(t) - \Delta p_G(t)) \quad (2)$$

À l'équilibre, le principe fondamental de la statique se traduit par $-Mg + S(P_{E0} - P_{\text{atm}}) = 0$.

Le théorème de la résultante dynamique appliquée à Σ se traduit par $S\Delta p_E(t) = M\ddot{y}_{ROV}(t) + c(\dot{y}_{ROV}(t) - \dot{y}_h(t))$ (3).

L'hypothèse du fluide incompressible se traduit par $\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = 0$.

Question 3 Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme : $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{ROV}(p))$ (4). Exprimer K_1 et τ_1 en fonction de A , V_{G0} , r , C_{qR} et P_{G0} .

Question 4 Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

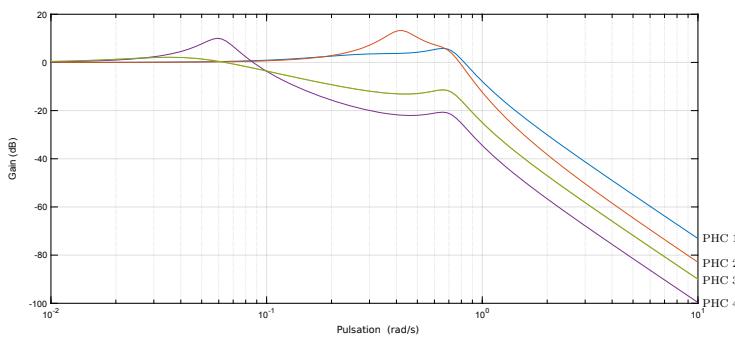
$H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}}$. Exprimer ω_0 , ζ et τ en fonction des constantes définies précédemment.

On utilisera dans toute la suite la relation $\tau\omega_0 = 2\zeta$.

Question 5 Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC, $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$, en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

Question 6 Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC}, $G(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$ en fonction de $H(p)$ et $B(p)$. Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de $G(p)$.

Des réglages pour différentes valeurs de pulsation de la houle ω_c et de gain maximal acceptable du compensateur ont été effectués.



La figure 1.17 donne les diagrammes du gain de la fonction $G(p)$ de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC} pour quatre réglages. Les volumes du gaz V_{G0} correspondant à chaque réglage sont donnés dans le tableau ci-après.

FIGURE 1.17 – Courbes de gain $G(p)$ pour différents réglages du PHC

Réglage	PHC 1	PHC 2	PHC 3	PHC 4
V_{G0} (m^3)	96	1	52	2

Pour respecter l'exigence Id 1.1, le gain de la fonction de transfert de l'ensemble doit toujours être inférieur à -14 dB .

Question 7 Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

Éléments de correction

1. $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{\text{vague}}(j\omega)} \right|$ et $G_{\text{dB}}(\omega) < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB} \quad \forall \omega \in [0, 5; 1, 7] \text{ rad/s.}$
2. ...
3. $K_1 = \frac{S r P_{G0}}{V_{G0}}$ et $\tau = \frac{V_{G0}}{r P_{G0} C_{qR}}$.
4. $\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1}, \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}}, \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}$.
5. .
6. .
7. PHC4.

TABLE 1.2 – Volumes V_{G0} pour différents réglages du PHC



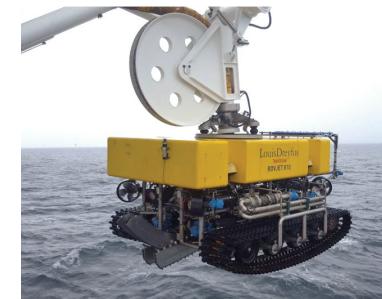


TD 4

Bateau support de ROV- Corrigé

Concours Centrale Supelec – MP 2019.

02 SLCI 03 SLCI 04 SLCI



Introduction

Objectif

Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

Question 1 Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Correction

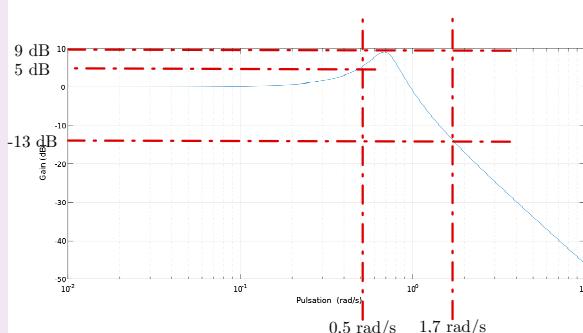
La définition du gain en décibel de la fonction de transfert $B(j\omega)$ est $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{vague}(j\omega)} \right|$. L'exigence Id 1.1 impose une amplitude maximale du ROV de 1 m pour 5 m de houle soit :

$$G_{dB}(\omega) < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB } \forall \omega \in [0, 5; 1,7] \text{ rad/s.}$$

Question 2 En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

Correction

On observe un phénomène de résonance, le système amplifie la houle entre 0,5 et 1 rad/s et l'atténue à une valeur maximale de 13-14 dB pour 1,7 rad/s. Le système ne répond donc pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.



Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

Objectif

Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Question 3 Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme : $\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{ROV}(p))$ (4). Exprimer K_1 et τ_1 en fonction de A , V_{G0} , r , C_{qR} et P_{G0} .

Correction

On écrit les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace en tenant compte de l'hypothèse de fluide incompressible :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) + C_{qR}(\Delta P_G(p) - \Delta P_E(p)) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}(\Delta P_E(p) - \Delta P_G(p)) = p\Delta P_G(t). \quad (1.2)$$

L'équation (2) donne :

$$\begin{aligned} \Delta P_G(t) \left(p + \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \right) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \Delta P_E(p), \\ \Delta P_G(t) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) + C_{qR} \left(\frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p) - \Delta P_E(p) \right) = 0,$$

$$Sp(Y_h(p) - Y_{ROV}(p)) = C_{qR} \left(1 - \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \right) \Delta P_E(p),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{Sp}{C_{qR}} \frac{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0}} (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{S}{C_{qR}} \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \left(\frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)).$$

Enfin, on obtient :

$$\Delta P_E(p) = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \left(\frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{ROV}(p)).$$

Par identification :

$$K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \text{ et } \tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}.$$

Question 4 Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions

initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \text{ Exprimer } \omega_0, \zeta \text{ et } \tau \text{ en fonction des constantes}$$

définies précédemment.

Correction

La transformée de Laplace de (3) est :

$$\alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) = \gamma \Delta P_E(p).$$

En utilisant (4), on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) &= \gamma K_1 (\tau_1 p + 1) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)), \\ (\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)) Y_{\text{ROV}}(p) &= (\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p) Y_h(p). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)}, \\ H(p) &= \frac{\gamma K_1 + (\gamma K_1 \tau_1 + \beta)p}{\alpha p^2 + (\beta + \gamma K_1 \tau_1)p + K_1 \gamma}. \end{aligned}$$

Donc :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{\gamma K_1 \tau_1 + \beta}{K_1 \gamma} p}{1 + \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{K_1 \gamma} p + \frac{\alpha}{K_1 \gamma} p^2}.$$

Par identification, on obtient :

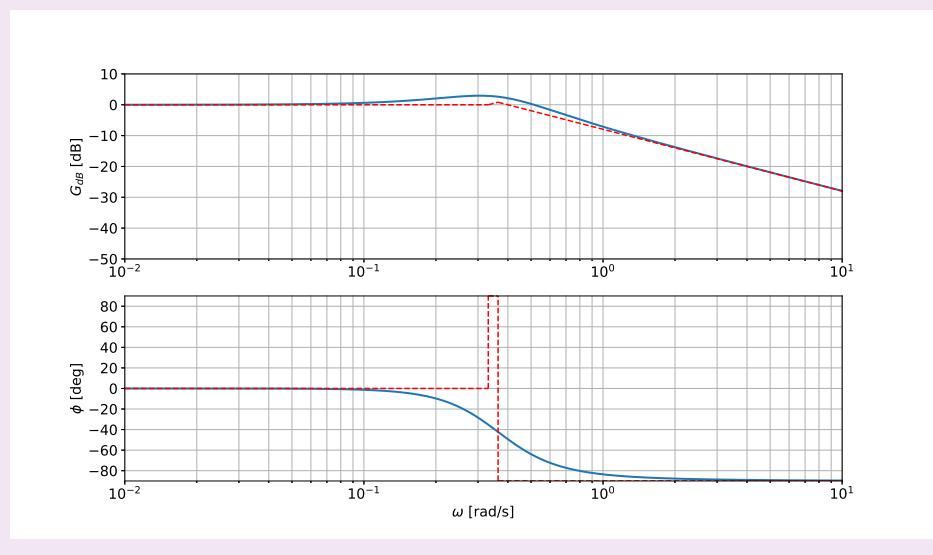
$$\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1} ; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}} ; \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}.$$

Question 5 Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC, $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)}$, en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

Correction

Diagrammes de Bode de $H(p)$. On identifie 2 pulsations caractéristiques : $\omega_1 = 1/\tau \approx 0,33$ rad/s et $\omega_n = 0,364$ rad/s. On verra apparaître un phénomène de résonance à la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ car $\zeta = 0,55 < \sqrt{2}/2$. La résonance sera toutefois faible.

ω	$\text{BF } \omega \ll \omega_1$	$\text{MF } \omega_1 \ll \omega \ll \omega_n$	$\text{HF } \omega_n \ll \omega$
$H(j\omega)$	1	$\tau j\omega$	$\frac{\tau\omega_n^2}{j\omega}$
G_{dB}	0	$20 \log \tau + 20 \log \omega$	$20 \log(\tau\omega_n^2) - 20 \log \omega$
ϕ	0	90°	-90°

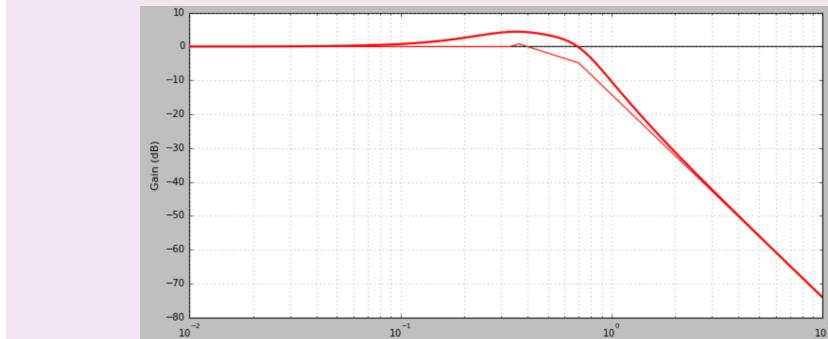


La valeur du gain maxi est de +3 dB (due au premier ordre au numérateur, l'influence du dénominateur est négligeable car la résonance est faible).

Question 6 Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC}, $G(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$ en fonction de $H(p)$ et $B(p)$. Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de $G(p)$.

Correction

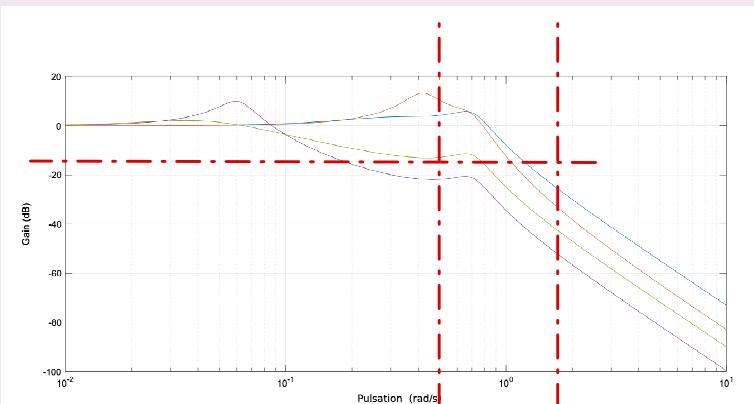
On a la relation $G(p) = B(p)H(p)$.



Question 7 Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

Correction

Le réglage de PHC 4 est celui qui respecte le mieux l'exigence Id1.1.





TD 5

Asservissement par traitement d'image d'une plate-forme Hexapode – Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2016.

11 SLCI 05 PERF

Mise en situation

Objectif

En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure 1.23.

On suppose :

- ▶ qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques ;
- ▶ pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont $F_u(p)$ est la transformée de Laplace ;
- ▶ que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont $D(p)$ est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe ;
- ▶ pour l'axe considéré que $L^m(p)$, $L^d(p)$ et $L^{de}(p)$ sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur L^m est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur) ;
- ▶ que $U(p)$ représente la transformée de Laplace de la grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$, la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur $\tau = 0,04$ s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel suivant, caractérisé par une pulsation de coupure en boucle ouverte et une marge de phase fixées à priori, est rappelé :

- ▶ pulsation de coupure ω_c à 0 dB en boucle ouverte $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$;

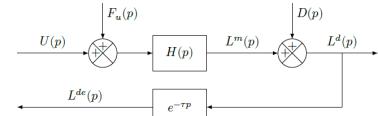


FIGURE 1.18 – Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement

- marge de phase $\Delta\varphi \geq 45^\circ$.

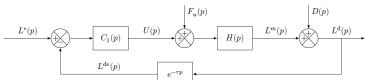
Pour la conception de la loi de commande, il s'agira :

- de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel;
- d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images);
- de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation $L^{de}(t)$ de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté $C_1(p)$ et la consigne $L^*(p)$, est représentée par le schéma de la figure 1.24.

FIGURE 1.19 – Structure de commande à une boucle



En raison de la présence de bruits de mesure (signaux non représentés sur les schémas fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

Question 1 La figure B du document réponse montre le diagramme de Bode de la fonction $H(p)$. Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant $C_1(p) = 1$).

Question 2 Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur $C_1(j\omega)$ doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur τ ;
- en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{Ti_1 p}\right)$, justifier qu'un correcteur de ce type :
 - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure;
 - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards. La figure suivante montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel 1.25(a) représentant la réalisation de la commande ($X(p)$ est la transformée de Laplace d'une grandeur $x(t)$ interne au régulateur), d'autre part un schéma fictif 1.25(b).

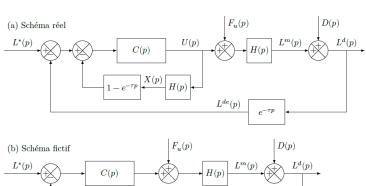


FIGURE 1.20 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard.

Question 3 En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{Ti p}\right)$ permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier

des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit $\arg(C(j\omega))$, que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale T_i ;
- ▶ pour la valeur de T_i obtenue, déterminer alors la valeur du gain K permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

Question 4 Pour une consigne nulle $L^*(t)$, une perturbation en sortie nulle $d(t) = 0$ et un échelon de perturbation en entrée $f_u(t) = F_0 h(t)$ où $h(t)$ est l'échelon d'Heaviside :

- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- ▶ compte tenu de la forme de $H(p)$, en déduire alors le comportement de la grandeur $x(t)$ lorsque t tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

- ▶ une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe $L^m(t)$ permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence $L^{m*}(t)$. Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et on note $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$ la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne;
- ▶ la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée $L^{de}(t)$.

La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée $T(p)$ où :

- ▶ $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$ est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure);
- ▶ $L^{m*}(p)$ est la consigne de l'asservissement de la boucle interne;
- ▶ l'effet de la perturbation $F_u(p)$ est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée;
- ▶ les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace $D(p)$.

Pour la conception de la loi de commande :

- ▶ une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée;
- ▶ on synthétise dans ce cas un correcteur $C_2(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p}\right)$ de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur $R_e(p)$ est réalisé en utilisant $C_2(p)$ selon une structure identique à celle de la figure précédente (a);
- ▶ le calcul du régulateur $C_2(p)$ ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.

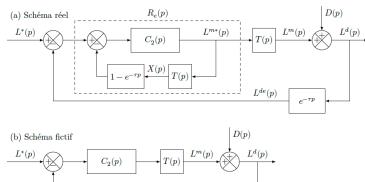


FIGURE 1.21 – Modèle de commande avec une boucle interne intégrée

Question 5 En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur $L^m(t)$ en régime permanent, soit $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$, en réponse à une perturbation $d(t)$ en échelon $d(t) = D_0 h(t)$. Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur $R_e(p)$ selon le schéma de la figure (a) reste stable du point de vue interne.

Retour sur le cahier des charges

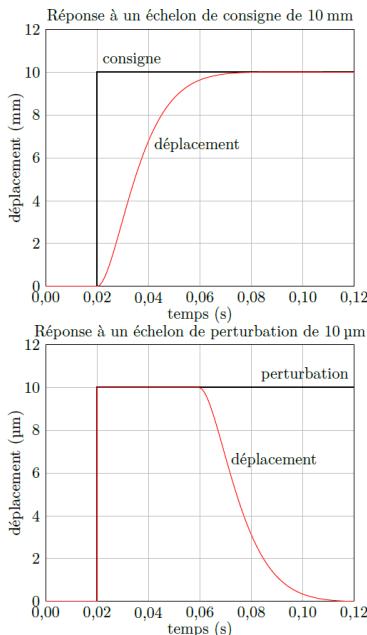


FIGURE 1.22 – Evolutions temporelles de la position $L^d(t)$

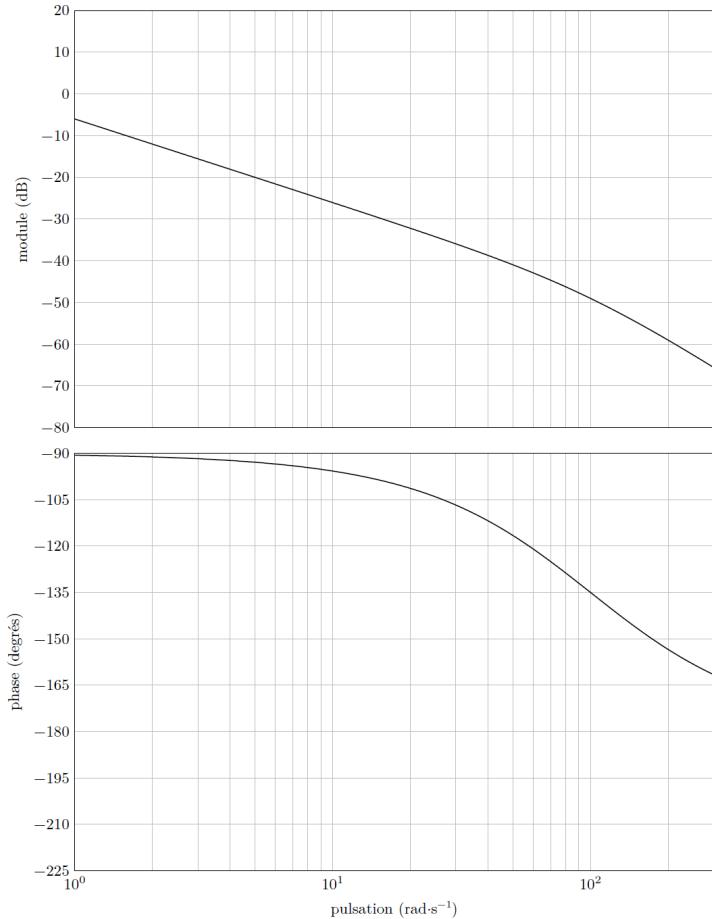


Figure B – Diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$





TD 5

Asservissement par traitement d'image d'une plate-forme Hexapode – Corrigé

Concours Centrale Supelec PSI 2016.

11 SLCI 05 PERF

Mise en situation

Objectif

En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure 1.23.

On suppose :

- ▶ qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques ;
- ▶ pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont $F_u(p)$ est la transformée de Laplace ;
- ▶ que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont $D(p)$ est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe ;
- ▶ pour l'axe considéré que $L^m(p)$, $L^d(p)$ et $L^{de}(p)$ sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur L^m est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur) ;
- ▶ que $U(p)$ représente la transformée de Laplace de la grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$, la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur $\tau = 0,04$ s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel suivant, caractérisé par une pulsation de coupure en boucle ouverte et une marge de phase fixées à priori, est rappelé :

- ▶ pulsation de coupure ω_c à 0 dB en boucle ouverte $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$;

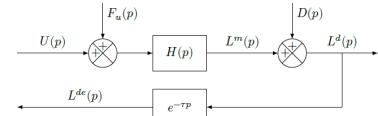


FIGURE 1.23 – Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement

- marge de phase $\Delta\varphi \geq 45^\circ$.

Pour la conception de la loi de commande, il s'agira :

- de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel;
- d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images);
- de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation $L^{de}(t)$ de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté $C_1(p)$ et la consigne $L^*(p)$, est représentée par le schéma de la figure 1.24.

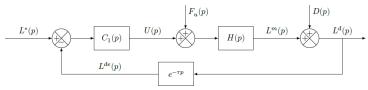


FIGURE 1.24 – Structure de commande à une boucle

Question 1 La figure B du document réponse montre le diagramme de Bode de la fonction $H(p)$. Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant $C_1(p) = 1$).

Correction

Question 2 Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur $C_1(j\omega)$ doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur τ ;
- en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{Ti_1 p}\right)$, justifier qu'un correcteur de ce type :
 - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure;
 - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

Correction

Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards. La figure suivante montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel 1.25(a) représentant la réalisation de la commande ($X(p)$) est la transformée

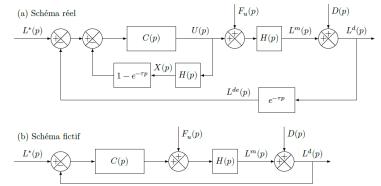


FIGURE 1.25 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard.

de Laplace d'une grandeur $x(t)$ interne au régulateur), d'autre part un schéma fictif 1.25(b).

Question 3 En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$ permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit $\arg(C(j\omega))$, que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale T_i ;
- ▶ pour la valeur de T_i obtenue, déterminer alors la valeur du gain K permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

Correction

Question 4 Pour une consigne nulle $L^*(t)$, une perturbation en sortie nulle $d(t) = 0$ et un échelon de perturbation en entrée $f_u(t) = F_0 h(t)$ où $h(t)$ est l'échelon d'Heaviside :

- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- ▶ compte tenu de la forme de $H(p)$, en déduire alors le comportement de la grandeur $x(t)$ lorsque t tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

Correction

Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

- ▶ une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe $L^m(t)$ permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence $L^{m*}(t)$. Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et on note $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$ la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne;
- ▶ la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée $L^{de}(t)$.

La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée $T(p)$ où :

- ▶ $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$ est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure);
- ▶ $L^{m*}(p)$ est la consigne de l'asservissement de la boucle interne;
- ▶ l'effet de la perturbation $F_u(p)$ est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée;

- les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace $D(p)$.

Pour la conception de la loi de commande :

- une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée;
- on synthétise dans ce cas un correcteur $C_2(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p}\right)$ de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur $R_e(p)$ est réalisé en utilisant $C_2(p)$ selon une structure identique à celle de la figure précédente (a);
- le calcul du régulateur $C_2(p)$ ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.

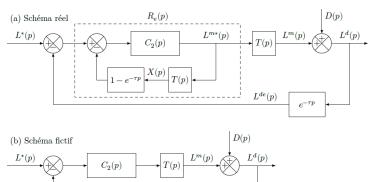
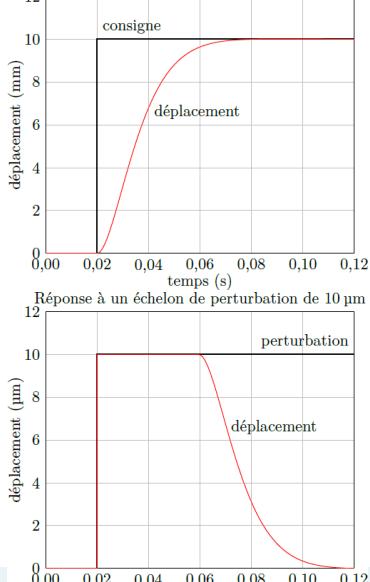


FIGURE 1.26 – Modèle de commande avec une boucle interne intégrée

Question 5 En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur $L^m(t)$ en régime permanent, soit $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$, en réponse à une perturbation $d(t)$ en échelon $d(t) = D_0 h(t)$. Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur $R_e(p)$ selon le schéma de la figure (a) reste stable du point vue interne.

Correction



Retour sur le cahier des charges

La figure 1.27 montre les évolutions temporelles de la position $L^d(t)$ en réponse à une consigne en échelon $L^*(t) = L_0 h(t - 0,02)$ avec $L_0 = 10 \text{ mm}$ et à une perturbation en échelon $D^*(t) = D_0 h(t - 0,02)$ avec $D_0 = 10 \mu\text{m}$.

Question 6 Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.

Correction

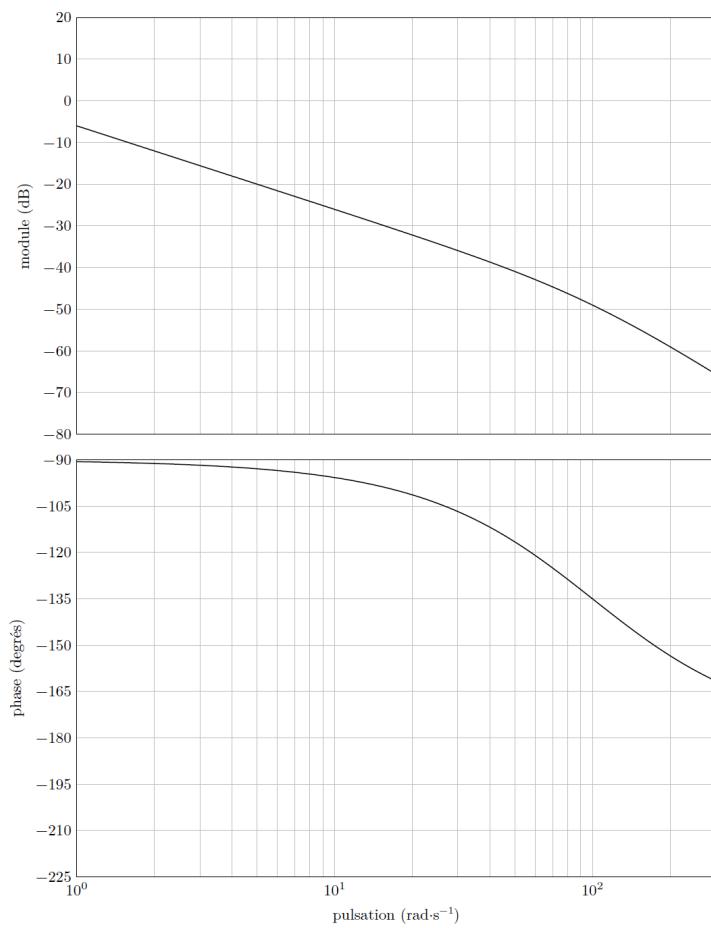
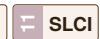


Figure B Diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$

TD 6

Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil– Sujet

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

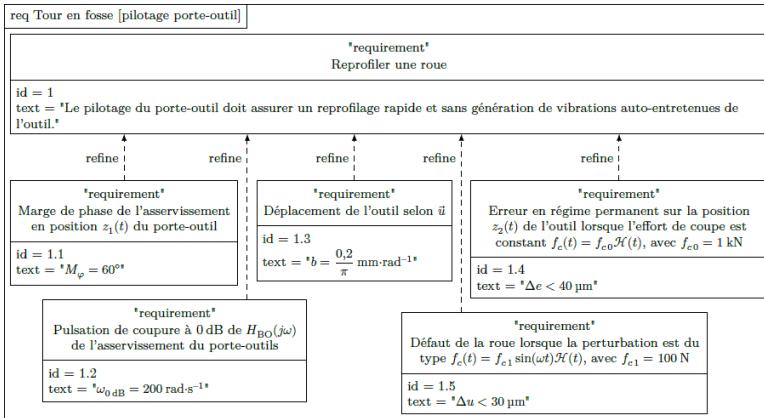
Modélisation du mouvement pour la commande

Objectif

Modéliser le comportement dynamique de l'outil et du porte-outil, puis étudier une commande en position $z_1(t)$ comprenant un correcteur proportionnel.

Le système composé de l'outil et du porte-outil est modélisé sur la figure 1.29. Le porte-outil, de masse $m_1 = 5522 \text{ kg}$, est considéré indéformable et en liaison glissière de direction \vec{z}_0 avec le bâti. Une chaîne de motorisation électrique permet de déplacer le porte-outil et une structure de commande associée permet d'asservir la position $z_1(t)$ par rapport à une position de référence. La chaîne de motorisation exerce une force motrice $\vec{f}_m(t) = f_m(t)\vec{z}_0$ sur le porte-outil.

La cahier des charges est donné sur la figure suivante.



Les positions du porte-outil et du point C par rapport à leur position de référence sont respectivement paramétrées par $z_1(t)\vec{z}_0$ et $z_2(t)\vec{z}_0$, avec $z_1(t)\vec{z}_0$ et $z_2(t)\vec{z}_0$ des grandeurs algébriques (figure 1.29). Les conditions initiales sont toujours supposées nulles.

Le théorème de la résultante dynamique appliquée au porte-outil puis à l'outil permet d'obtenir les deux relations suivantes :

$$m_1\ddot{z}_1(t) + \lambda\dot{z}_1(t) + Kz_1(t) = \lambda\dot{z}_2(t) + Kz_2(t) + f_m(t)$$

$$m_2\ddot{z}_2(t) + \lambda\dot{z}_2(t) + Kz_2(t) = \lambda\dot{z}_1(t) + Kz_1(t) + f_c(t)$$

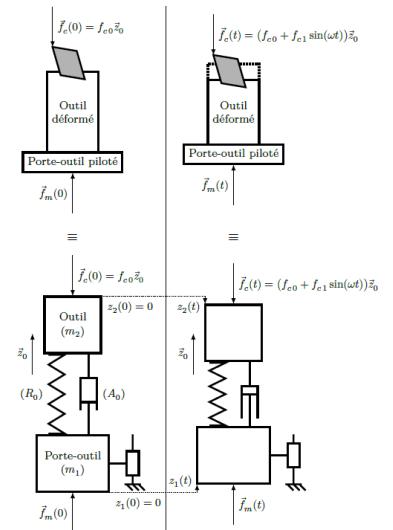


FIGURE 1.29 – Modèle de déformation de l'outil avec le porte-outil piloté

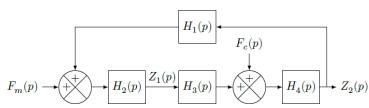


FIGURE 1.30 – Modèle de l'outil et du porte-outil

Le modèle correspondant est représenté par le schéma bloc de la figure 1.30.

Question 1 Exprimer les fonctions $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$ en fonction de K , λ , m_1 et m_2 .

Le modèle de la figure 1.30 est réduit au modèle équivalent de la figure 1.31.

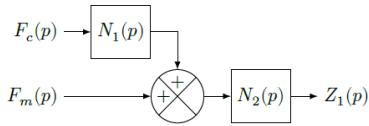


FIGURE 1.31 – Modèle équivalent

Question 2 Exprimer $N_1(p)$ et $N_2(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$.

Question 3 Montrer que $N_2(p)$ peut s'écrire sous la forme $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2 (p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$. Exprimer ξ_1 , ξ_2 , ω_1 , ω_2 et A en fonction de m_1 , m_2 , λ et K .

Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_2(p)$ est représenté ci-contre.

Question 4 Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

Question 5 Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert $N_2(p)$ peut être approchée par la fonction $N_{2app}(p) = \frac{A}{p^2}$. En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_{2app}(p)$ sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

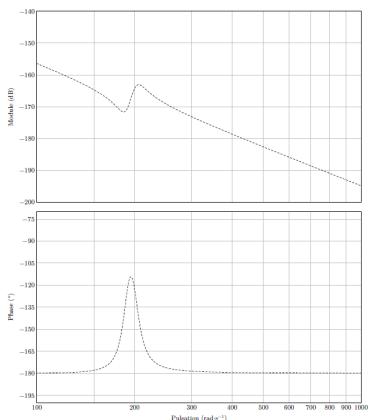
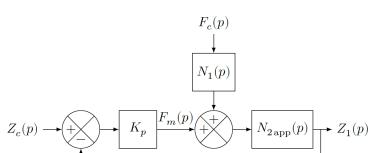


FIGURE 1.32 – Modèle de synthèse de la régulation en position $z_1(t)$ du porte-outil

Le modèle approché ($N_{2app}(p)$) est retenu pour la suite de l'étude. Le schéma bloc modélisant la régulation de la position $z_1(t)$ est donné en figure 1.32, en considérant un correcteur proportionnel de gain K_p .



Question 6 Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la figure 1.28.

Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$.

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$ où τ est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

Question 7 Déterminer $H_r(p)$ en fonction de τ .

Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

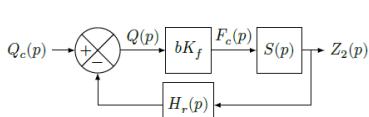


FIGURE 1.33 – Modèle équivalent de la chaîne d'asservissement complète

La figure 1.34 représente le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système modélisé figure 1.33, avec $b = \frac{5 \times 10^{-2}}{\pi} \text{ mm rad}^{-1}$

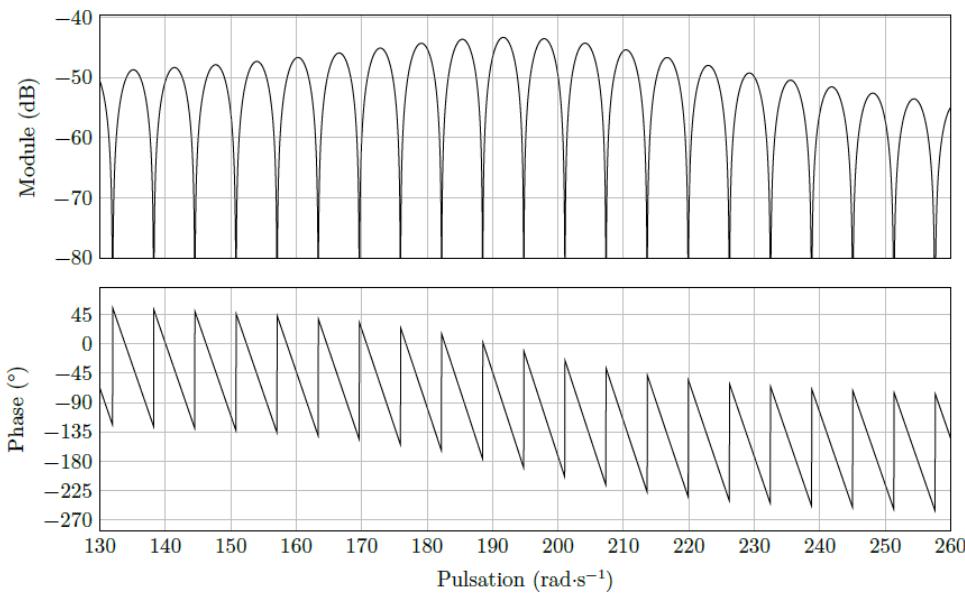


FIGURE 1.34 – Diagramme de Bode de la boucle ouverte du schéma-blocs

Les « zéros de transmission » d'une fonction de transfert $H(p)$ correspondent aux pulsations ω pour lesquelles $H(j\omega)$ est nul.

Question 8 Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la [figure 1.34](#) en analysant les « zéros de transmission ».

Question 9 Déterminer un ordre de grandeur du paramètre b permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

Éléments de correction

1. $H_1(p) = \lambda p + K, H_2(p) = \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}, H_3(p) = \lambda p + K, H_4(p) = \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}.$
2. $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$ et $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}.$
3. $\omega_1^2 = \frac{K}{m_2}, \omega_2^2 = K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, \xi_1 = \frac{\lambda}{2\sqrt{m_2 K}}$ et $\xi_2 = \lambda \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2\sqrt{K m_1 m_2}}.$
4. .
5. $A = 1,87 \cdot 10^{-4}.$
6. .
7. $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}.$
8. .
9. $b_{\lim} = 2,83 \text{ mm rad}^{-1}.$



TD 6

Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil– Corrigé

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

09 SLCI 11 SLCI



Modélisation du mouvement pour la commande

Question 1 Exprimer les fonctions $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$ en fonction de K , λ , m_1 et m_2 .

Correction

D'après le schéma-blocs $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p))$. D'après la première équation différentielle, on a : $m_1p^2Z_1(p) + \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) = \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p)(m_1p^2 + \lambda p + K) = Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) = \frac{Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p)}{m_1p^2 + \lambda p + K}$. On a donc par identification $H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K}$ et $H_1(p) = \lambda p + K$.

D'après le schéma-blocs $Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))$. D'après la seconde équation différentielle, $m_2p^2Z_2(p) + \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) = \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p)(m_2p^2 + \lambda p + K) = Z_1(p)(\lambda p + K) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p) = \frac{Z_1(p)(\lambda p + K) + F_c(p)}{m_2p^2 + \lambda p + K}$.

On a donc par identification $H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$ et $H_3(p) = \lambda p + K$.

Au final,

$$H_1(p) = \lambda p + K \quad H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K} \quad H_3(p) = \lambda p + K \quad H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$$

Question 2 Exprimer $N_1(p)$ et $N_2(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$.

Correction

En utilisant le premier modèle, on avait :
$$\begin{cases} Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p)) \\ Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)) \end{cases}$$
.

Ainsi, $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)(H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))))$
 $= H_2(p)F_m(p) + H_1(p)H_2(p)H_4(p)F_c(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)Z_1(p)$
 $\Leftrightarrow Z_1(p)(1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)H_4(p)F_c(p))$.

En utilisant le schéma-blocs, $Z_1(p) = (F_c(p)N_1(p) + F_m(p))N_2(p)$. Par identification, on obtient $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$ et $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$.

Question 3 Montrer que $N_2(p)$ peut s'écrire sous la forme $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2(p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2)}$.

Exprimer ξ_1 , ξ_2 , ω_1 , ω_2 et A en fonction de m_1 , m_2 , λ et K .

Correction

$$\begin{aligned}
N_2(p) &= \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)} = \frac{\frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}}{1 - (\lambda p + K) \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} (\lambda p + K) \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} \\
&= \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K) - \frac{(\lambda p + K)^2}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{(m_1 p^2 + \lambda p + K)(m_2 p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2} \\
&= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + \lambda^2 p^2 + \lambda p K + K m_2 p^2 + K \lambda p + K^2 - \lambda^2 p^2 - K^2 - 2 \lambda p K} \\
&= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + K m_2 p^2} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{p^2 (m_1 m_2 p^2 + (m_1 + m_2) \lambda p + K (m_1 + m_2))} \\
&= \frac{m_2 \left(p^2 + \frac{\lambda}{m_2} p + \frac{K}{m_2} \right)}{p^2 m_1 m_2 \left(p^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \lambda p + K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}. \\
\text{Par identification, on a : } A &= \frac{1}{m_1}, \omega_1^2 = \frac{K}{m_2}, 2\xi_1\omega_1 = \frac{\lambda}{m_2} \text{ et } \xi_1 = \frac{\lambda}{2\omega_1 m_2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{Km_2}} =, \\
\omega_2^2 &= K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, 2\xi_2\omega_2 = \lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \text{ et } \xi_2 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}. \\
\text{On a donc } \xi_1 &= \frac{\lambda}{2\sqrt{m_2 K}} \text{ et } \xi_2 = \lambda \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2\sqrt{Km_1 m_2}}.
\end{aligned}$$

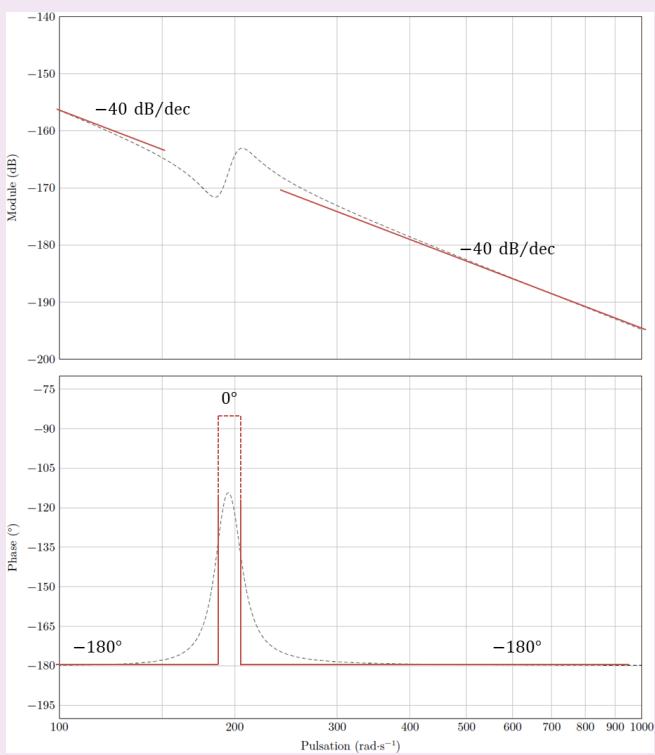
Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_2(p)$ est représenté ci-contre.

Question 4 Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

Correction

D'après le diagramme asymptotique donné, on a nécessairement $\omega_1 < \omega_2$. On peut dresser un tableau des variations à partir de la fonction de transfert $N_2(p)$.

	ω_1		
	ω_1	ω_1	ω_1
$\frac{A}{p^2}$	-40 dB/dec	-40 dB/dec	-40 dB/dec
$p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2$	0 dB/dec	40 dB/dec	40 dB/dec
$\frac{1}{p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2}$	0 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$20 \log N_2(p) $	-40 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$\text{Arg}(N_2(p))$	-180°	0°	-180°



Question 5 Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert $N_2(p)$ peut être approchée par la fonction $N_{2\text{app}}(p) = \frac{A}{p^2}$. En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_{2\text{app}}(p)$ sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

Correction

Si le système n'est pas sollicité par des pulsations comprises entre 150 et 250 rad s^{-1} , on peut modéliser $N_2(p)$ par un double intégrateur. Le gain dB est donc $20 \log A - 20 \log \omega^2$.

Pour $\omega = 500 \text{ rad s}^{-1}$ on a $20 \log A - 20 \log 500^2 = -182,5 \Rightarrow \log A = \frac{20 \log 500^2 - 182,5}{20}$ et $A = 1,87 \cdot 10^{-4}$.

Question 6 Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la figure 1.28.

Correction

Dans le cas, la FTBO est de classe 2.

- **req 1.1** : $M\varphi = 60^\circ$: impossible à respecter la phase sera toujours de -180° .
- **req 1.2** : $\omega_{0\text{dB}} = 200 \text{ rad s}^{-1}$: critère non respecté (cf diagramme de Bode).
- **req 1.4** : erreur en régime permanent : $\Delta c < 40 \mu\text{m}$ pour un échelon d'amplitude $f_{c0} = 1 \text{ kN}$: critère non respecté (pas d'intégrateur avant la perturbation).
- **req 1.5** : défaut de la roue $\Delta u < 30 \mu\text{m}$ lorsque la perturbation est sinusoïdale.

La correction proportionnelle ne permet donc pas de respecter tous les critères du cahier des charges.

Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$.

D'un point de vue numérique, $K_f = 1,5 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$ et $\tau = 1 \text{ s}$.

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$ où τ est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

Question 7 Déterminer $H_r(p)$ en fonction de τ .

Correction

D'après le schéma-blocs, $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$. D'après les équations données et en utilisant le théorème du retard, on a $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p) + Z_2(p)e^{-\tau p} = Q_c(p) - Z_2(p)(1 - e^{-\tau p})$. En conséquence, $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}$.

Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

Question 8 Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la figure 1.34 en analysant les « zéros de transmission ».

Correction

$$\text{FTBO}(p) = bK_f S(p)H_r(p) = \frac{bK_f}{K + \lambda p + m_2 p^2} (1 - e^{-\tau p}) = H_2(p) \cdot H_r(p).$$

On a $G_{dB}(\omega) = G_{dB2}(\omega) + G_{dBr}(\omega)$.

$$G_{dBr}(\omega) = 20 \log |1 - e^{-j\tau\omega}| = 20 \log \sqrt{(1 - \cos(-\tau\omega))^2 + (\sin(-\tau\omega))^2} = 20 \log \sqrt{2 - 2 \cos(\tau\omega)}.$$

On a donc :

- ▶ pour $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$ et $G_{dBr}(\omega) \rightarrow -\infty$;
- ▶ pour $\omega = \frac{\pi + k2\pi}{\tau}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$ et $G_{dBr}(\omega) = 20 \log 2$.

Le diagramme en gain montre alors l'addition d'un gain du second ordre et d'un gain périodique. Les « zéros de transmission » correspondent aux pulsations $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$.

Pour la phase, $\varphi_{BO}(\omega) = \varphi_2(\omega) + \arg(1 - \cos(-\tau\omega) - j \sin(-\tau\omega))$. Or $1 - \cos(-\tau\omega) = 1 - \cos(\tau\omega) \geq 0$. On a donc $\varphi_{BO} = \varphi_2(\omega) + \arctan\left(\frac{\sin(\tau\omega)}{1 - \cos(\tau\omega)}\right)$.

Le diagramme de phase est la somme d'une phase d'un système du second ordre et d'un signal $\frac{2\pi}{\tau}$ périodique.

Question 9 Déterminer un ordre de grandeur du paramètre b permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

Correction

Pour garantir la stabilité en BF, il faut assurer un gain négatif en BO. D'après le diagramme de gain, le gain maximal relevé est de 45 dB. Il faudrait donc ajouter un gain supplémentaire b' tel que $20 \log b' = 45$ soit $b' = 10^{45/20} = 177$. Au bilan, on aurait donc $b_{lim} = b'b = 177 \times \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\pi} = 2,83 \text{ mm rad}^{-1}$.

Il faudrait déterminer si une augmentation de b réduit l'amortissement de l'asservissement.