

## 13 Correction des SLCI

**01 COR** **02 COR** **03 COR** **04 COR**

### 13.1 Pourquoi corriger un système ?

Souvent évoqué en lors de l'étude des systèmes asservis, regardons ce qui se cache derrière le bloc correcteur. On peut le considérer comme la partie intelligente du système car de sa part position dans l'architecture d'un système il reçoit l'image de l'écart entre la cosigne et la sortie du système. En fonction de cet écart, en fonction de ses « capacités » va permettre d'améliorer les performances du système.

Sur la figure ci-contre est tracée en gris la réponse indicielle d'un système non corrigé et en noir la réponse indicielle du système corrigé. On observe que le système corrigé est :

- ▶ plus précis;
- ▶ plus amorti;
- ▶ plus rapide.

L'objectif du correcteur est donc d'améliorer les caractéristiques tout en assurant la stabilité du système.

#### Résultat –

- ▶ D'après les résultats sur la stabilité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'avoir des marges de gains suffisantes.
- ▶ D'après les résultats sur la rapidité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain dans le but d'avoir une pulsation de coupure à 0 dB la plus grande possible (pour la FTBO).
- ▶ D'après les résultats sur la précision des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain statique de la boucle ouverte pour assurer une bonne précision du système (et d'éventuellement augmenter la classe).

Au vu de ces conclusions, le choix d'un correcteur se fera dans le domaine fréquentiel en utilisant le diagramme de Bode.

<b>13.1 Pourquoi corriger un système ? . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>13.2 Le correcteur proportionnel . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>13.3 Les correcteurs à action intégrale . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>13.4 Le correcteur à avance de phase . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>13.5 Bilan sur l'influence des correcteurs . . . . .</b>	<b>5</b>

**Frédéric Mazet**, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.

**Florestan Mathurin**, *Correction des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

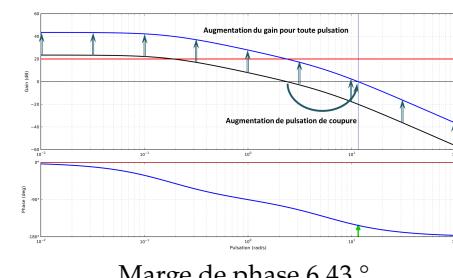
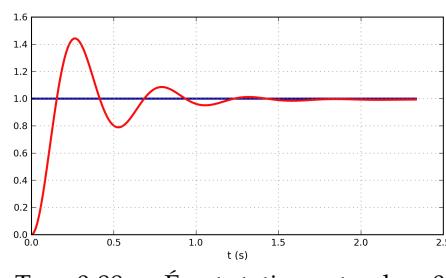
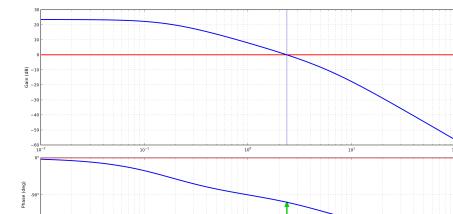
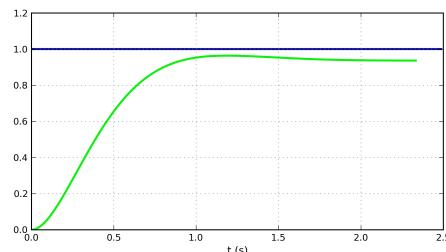
## 13.2 Le correcteur proportionnel

02 COR

### Définition – Correcteur P

Le correcteur proportionnel a pour fonction de transfert  $C(p) = K$ .

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $K = 15$ ,  $\xi = 3$ ,  $\omega = 1$ ).



### Résultat –

On observe qu'une augmentation du gain proportionnel a pour effet :

- ▶ d'améliorer la précision;
- ▶ d'augmenter la vivacité;
- ▶ d'augmenter le temps de réponse (à partir d'un certain seuil);
- ▶ de diminuer l'amortissement;
- ▶ de diminuer la marge de phase.

Pour un système d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain provoque une marge de phase négative et donc une instabilité du système.

### Méthode –

#### Réglage de la marge de phase :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0 \text{ dB}}$  tel que  $\varphi(\omega_{0 \text{ dB}})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{0 \text{ dB}})$ .
- ▶ On cherche  $K_p$  tel que  $G_{\text{dB}}(\omega_{0 \text{ dB}}) = 0$

#### Réglage de la marge de gain :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{-180^\circ}$  tel que  $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$ .
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{-180^\circ})$ .
- ▶ On cherche  $K_p$  tel qu'on ait la marge de gain souhaitée.

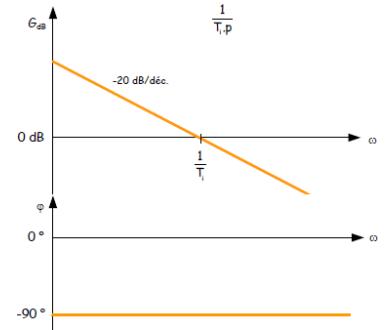
## 13.3 Les correcteurs à action intégrale

### 13.3.1 Le correcteur intégral pur

#### Définition – Correcteur I

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$ .



#### Résultat –

##### Avantages

Ce correcteur améliore la précision lors de la sollicitation par un échelon car il ajoute une intégration dans la boucle ouverte.

##### Inconvénients

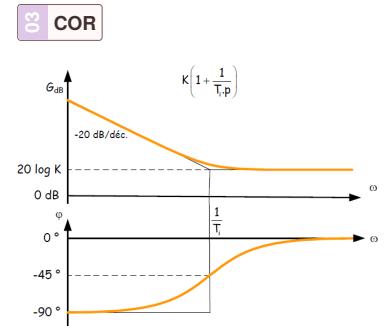
Le déphasage de -90° sur tout le spectre de pulsation entraîne une réduction de la marge de phase ce qui peut déstabiliser le système.

### 13.3.2 Le correcteur proportionnel intégral

#### Définition – Correcteur PI

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = K \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$ .



En développant on obtient  $C(p) = K \frac{T_i p + 1}{T_i p}$ . Ce correcteur augmente donc la classe de la boucle ouverte et donc la précision. Si  $K > 1$  la pulsation de coupure est augmentée, entraînant ainsi une augmentation de la rapidité du système. Enfin, ce correcteur diminue la phase à basse fréquence. Il faut donc faire en sorte que cette chute de phase n'intervienne pas dans la zone de la pulsation de coupure du système.

#### Résultat – Correcteur PI

- ▶ augmente l'amortissement;
- ▶ augmente la rapidité;
- ▶ augmente la précision.

#### Méthode –

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que  $\varphi(\omega_{0dB})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{dB}(\omega_{0dB})$ .
- ▶ On cherche  $K$  tel que  $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$
- ▶ La mise en place de l'effet intégral ne doit pas modifier la position de la

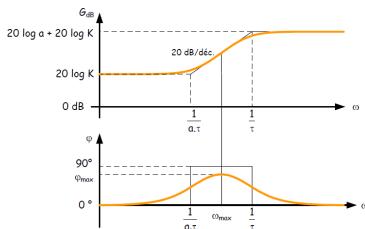
pulsation de coupure réglée précédemment. Pour cela, il faut donc que  $\frac{1}{T_i} << \omega_{0\text{dB}}$ . Usuellement on positionne l'action intégrale une décade avant la pulsation réglée. On a donc  $T_i = \frac{10}{\omega_{0\text{dB}}}$ .

### Remarque

Une autre possibilité pour régler  $T_i$  est de réaliser **une compensation de pôle**. Admettons que la FTBO puisse se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$  avec  $\tau_1 >> \tau_2$ .  $\tau_1$  ayant pour effet de diminuer la rapidité du système, on pourra prendre  $T_i = \tau_1$  afin de supprimer l'effet du pôle associé à  $\tau_1$ .

## 13.4 Le correcteur à avance de phase

 COR



### Définition – Correcteur à avance de phase

Un correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1 + \alpha \tau p}{K + \tau p}$  avec  $\alpha > 1$ .

### Résultat –

Ce correcteur permet d'ajouter de la phase pour les pulsations comprises entre  $\frac{1}{\alpha\tau}$  et  $\frac{1}{\tau}$ . On montre que  $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$  et ce pour une pulsation  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$ .

### Remarque

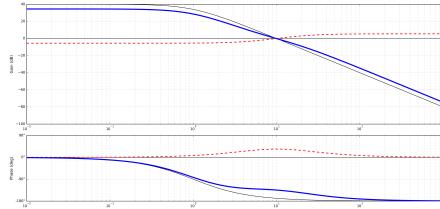
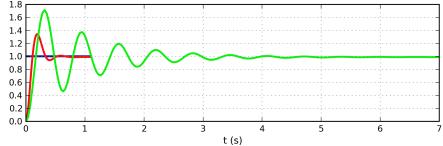
On peut prendre  $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$  pour ne pas modifier la valeur du gain à la pulsation où on désire ajouter de la phase.

### Démonstration

Pour déterminer  $\omega_{\max}$  on pourrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase est maximum en résolvant  $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$ . On peut aussi remarquer « graphiquement » que  $\omega_{\max}$  est situé au milieu des deux pulsations de coupures :  $\frac{1}{2} \left( \log\left(\frac{1}{\tau}\right) + \log\left(\frac{1}{\alpha\tau}\right) \right) = \log\left(\frac{1}{\alpha\tau^2}\right)^{1/2} = \log\left(\frac{1}{\tau\sqrt{a}}\right)$  et  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$ .

D'autre part, il faudrait calculer  $\varphi(\omega_{\max})$ ...

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$ ,  $a = 3,54$ ,  $T = 0,053$  s).



Ici le correcteur permet une augmentation de la rapidité et un meilleur amortissement.

#### Méthode –

- En utilisant la BO non corrigée on cherche  $\omega_{0\text{dB}}$  tel que le gain est nul.
- On calcule  $\varphi(\omega_{0\text{dB}})$ .
- On détermine la phase à ajouter.
- On calcule  $a$ .
- On calcule  $\tau$ .
- On calcule  $K$ .

## 13.5 Bilan sur l'influence des correcteurs

Correcteur	Situation sans correction	
		Si $K_p$ augmente
Proportionnel $K_p$	Marges	↔
Proportionnel intégral $K_p + \frac{K_i}{p}$	Marges	↔
À avance de phase $K_p \frac{1+a\tau p}{1+\tau p} \quad a > 1$	Marges	↔
	Précision	↔
	Rapidité	↔
		Si mal réglé
		(Cf: classe)
		↔
		↔



# Application 1

## Réglage de correcteurs P et PI – Sujet

Ressources de P. Dupas.

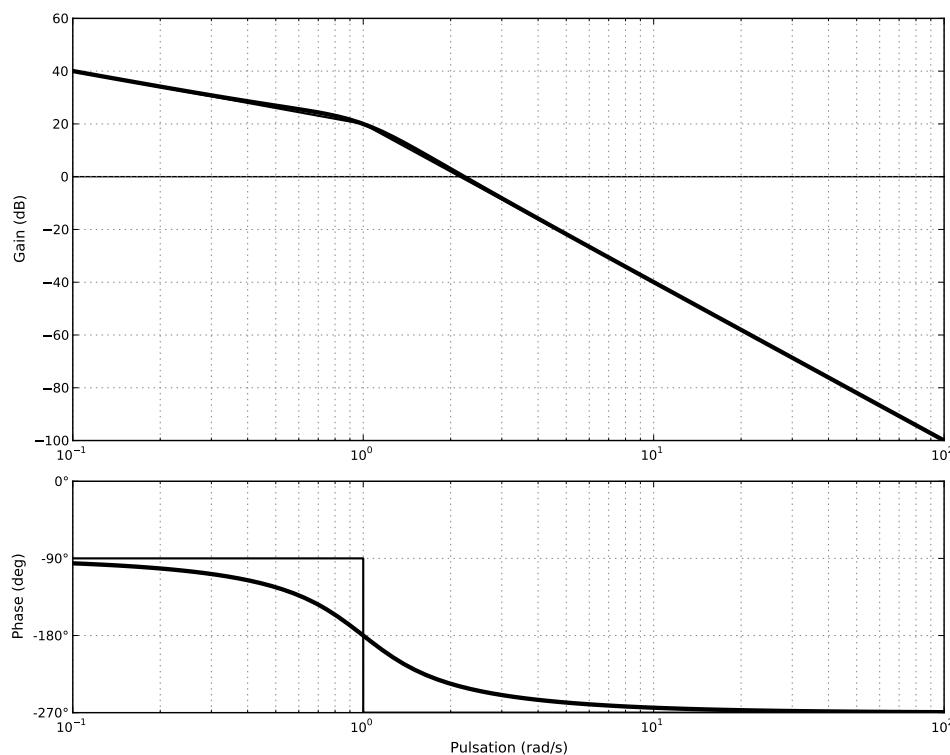
02 COR 03 COR

D'après ressources P. Dupas.

### Correcteur proportionnel

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de  $45^\circ$  et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



### Résolution graphique

**Question 1** Mesurer la marge de phase.

**Question 2** Mesurer la marge de gain.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

### Résolution analytique

**Question 5** Calculer la marge de phase.

**Question 6** Calculer la marge de gain.

**Question 7** Calculer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

**Question 8** Calculer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

#### Éléments de correction

1.  $M_\varphi = -60^\circ$ .
2.  $M_G = -20$  dB.
3.  $K_p = 0,054$  et  $M_G = 5,35$  dB.
4.  $K_p = 0,0316$  et  $M_\varphi = 70^\circ$ .

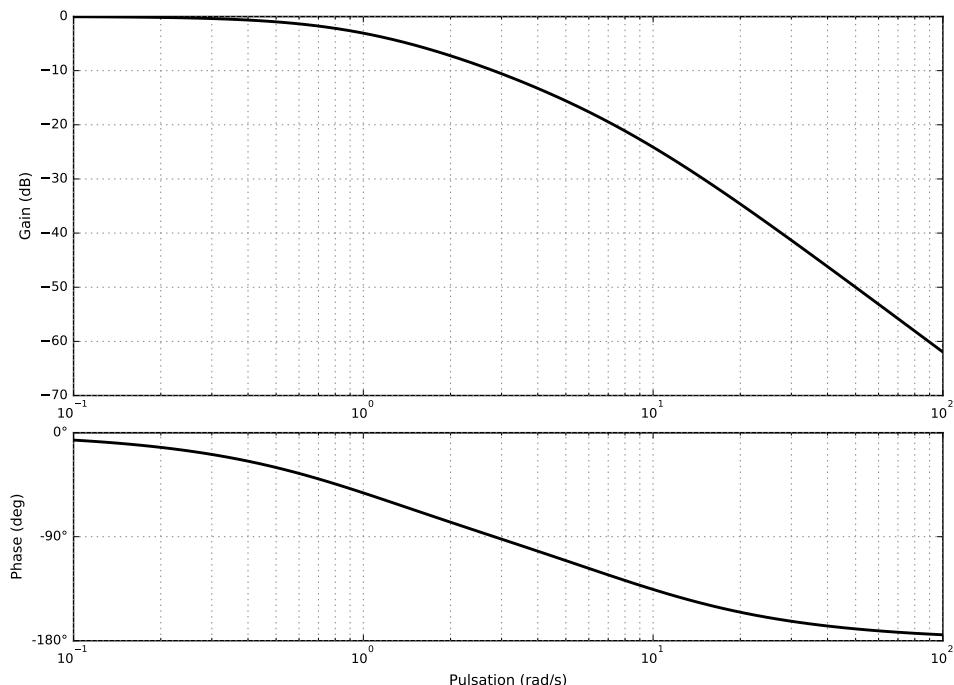
D'après ressources P. Dupas.

### Correcteur proportionnel intégral

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(p+1)(\frac{p}{8}+1)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de  $45^\circ$  en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme  $C(p) = K_p \frac{1 + \tau p}{\tau p}$ .

**Question 9** (Facultatif) Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.



**Question 10** Déterminer graphiquement les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 11** Déterminer analytiquement les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 12** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.



#### Éléments de correction

- 1.
2.  $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$ .
- 3.



# Application 2

## Réglage de correcteurs P et AP – Sujet

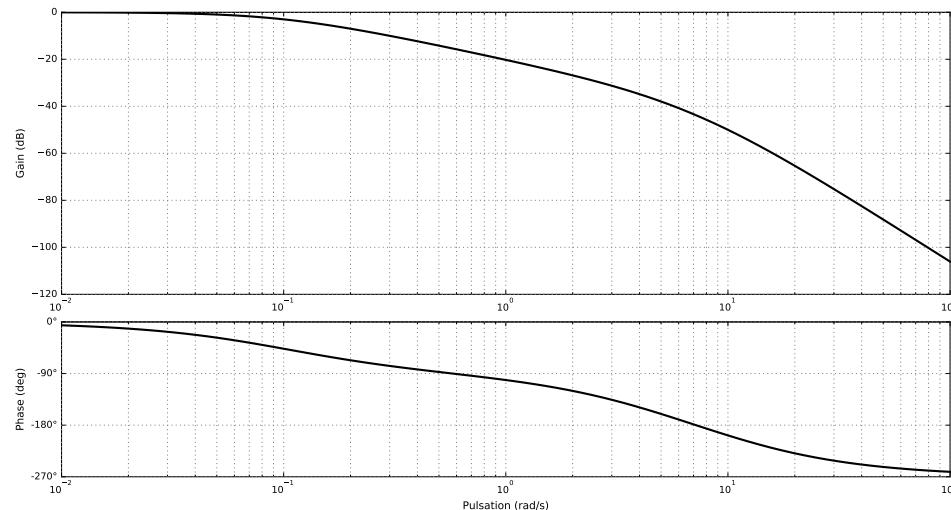
Ressources de P. Dupas.

### Correcteur proportionnel

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

**Question 1** Déterminer la précision du système  $\varepsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

**Question 2** Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.



**Question 3** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

**Question 4** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

### Correcteur à avance de phase

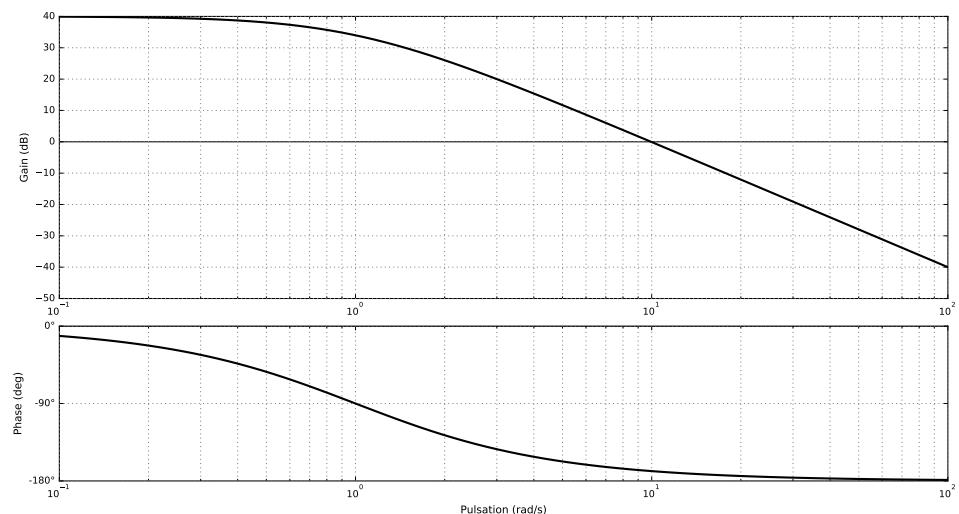
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de

#### Éléments de correction

1.  $\varepsilon_S = \frac{1}{2}$ .
2. .
3.  $\omega_{-135^\circ} = 2,95 \text{ rad/s}$ .
4.  $\omega_0 \text{dB} = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 38 \text{ dB}$  soit  $K_P = 79$ .

phase de la forme  $C(p) = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$ .

**Question 5** Justifier le tracer du diagramme de Bode de  $G(p)$ .



**Question 6** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

#### Éléments de correction

- 1.
2.  $C(p) = 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}$ .
- 3.



# Application 3

## Réglage de correcteurs P – Sujet

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

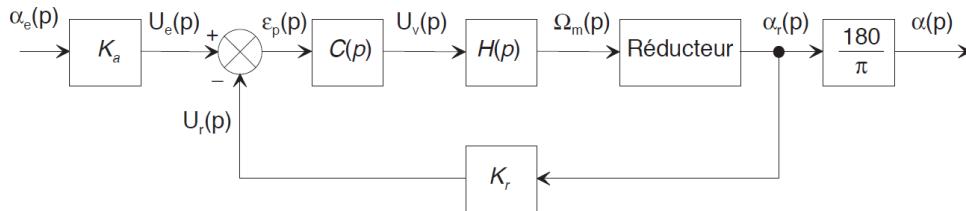
- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} = \frac{30}{1 + 5 \cdot 10^{-3} p}$ ;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$  : gain du capteur de position;
- $K_a$  : gain de l'adaptateur du signal de consigne  $\alpha_e(t)$ ;
- le signal de consigne  $\alpha_e(t)$  est exprimé en degrés;
- le correcteur  $C(p)$  est à action proportionnelle de gain réglable  $K_c$ ;
- $N = 200$  : rapport de transmission.

C1-02

C2-04

### Objectif

- On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .
- On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$  du réducteur.

**Question 2** Déterminer le gain  $K_a$  de l'adaptateur.

**Question 3** Déterminer, en fonction notamment de  $K'_m$  et  $t'_m$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté  $K_{BO}$ .

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 4** Déterminer la valeur de  $K_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

**Question 5** En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

**Question 6** Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .

**Question 7** Déterminer l'expression de  $\alpha_e(t)$  correspondant à une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{s}^{-1}$ . En déduire  $\alpha_e(p)$ .

**Question 8** La valeur de  $K_{\text{BO}}$  définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.



#### Éléments de correction

1.  $R(p) = \frac{1}{Np}$ .
2.  $K_a = \frac{\pi}{180} K_r$ .
3.  $T(p) = \frac{K_{\text{BO}}}{p(1 + \tau'_m p)}$  avec  

$$K_{\text{BO}} = \frac{K_c K'_m K_r}{N}$$
.
4.  $K_{\text{BO}} = \frac{\sqrt{2}}{\tau'_m}$ .
5.  $K_c = \frac{\sqrt{2}N}{\tau'_m K'_M K_r}$ .
6.  $\varepsilon_S = 0$ .
7.  $\alpha_e(p) = \frac{105}{p^2}$ .
8.  $\varepsilon_d = \frac{105 K_a}{K_{\text{BO}}}$ .

## TD 1

# Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Sujet

CCP – PSI – 2006.

02 COR 03 COR

### Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

#### Objectif

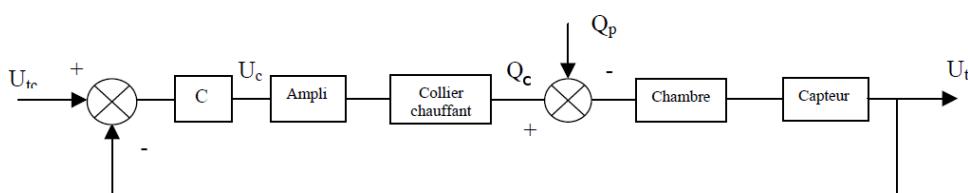
La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi ;
- ▶ précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

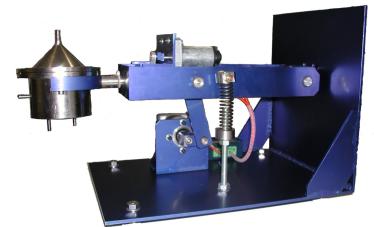
Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- ▶  $U_{tc}$  : tension de consigne;
- ▶  $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- ▶  $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- ▶  $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- ▶  $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.

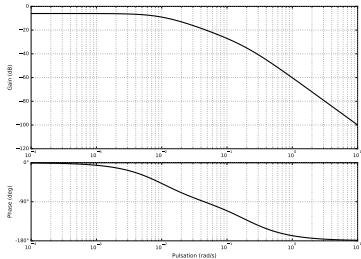


$$\text{Expérimentalement, on peut déterminer que FTBO}(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}.$$



## Analyse des performances

On considère ici que  $C(p) = 1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.



**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

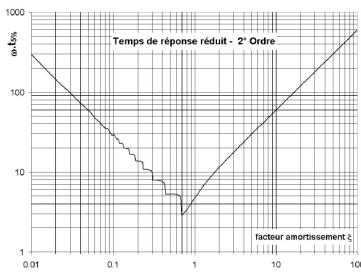
**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

## Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p) = K$ .



**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensations de pôles.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.



### Éléments de correction

1. 218 s.
2.  $\varepsilon_P = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
3. .
4. Système stable (FTBO ordre 2 et critère du Revers respecté) ( $M_G \rightarrow \infty$ ,  $M_\varphi$  non définie).
5.  $K = 9$ .
6. 50 s,
7.  $\varepsilon_P = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
8.  $U_a = 450$  V.
9.  $K = 10$  et  $T_i = 100$  s.
10.  $\varepsilon_P = 0$ .

## TD 2

# Machine de rééducation SysReeduc – Sujet

CCP PSI 2013.

### Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

C1-02

C2-04

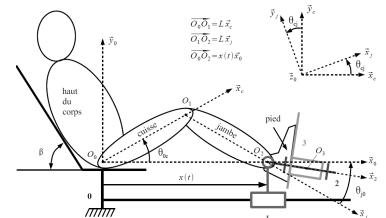
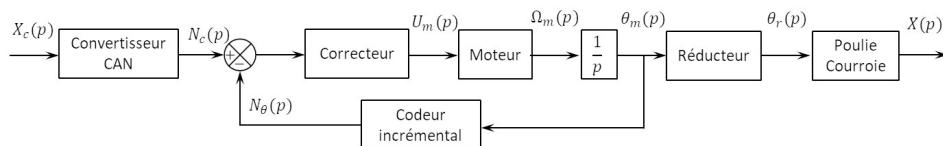
### Objectif

L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2 \text{ s}$
Pulsation au gain unité	$50 \text{ rad s}^{-1}$

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



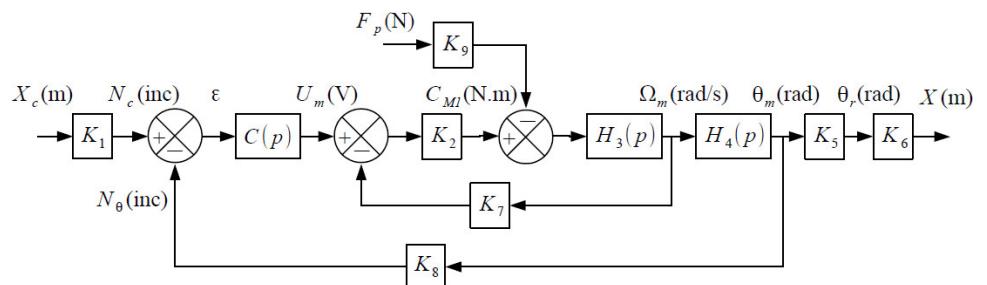
1: On peut passer directement à la question 3 pour aborder plus rapidement les correcteurs.

Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ;
- $e(t) = k_e \omega_m(t)$ ;
- $C_{M1}(t) = k_t i(t)$ .

## Éléments de modélisation<sup>1</sup>

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.

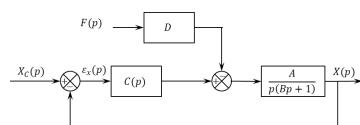


Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M + m) r \rho_1 \dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t).$$

On note :

- $M$  la masse du chariot et  $m$  la masse du support de pied;
- $\rho_1 = \frac{1}{10}$  le rapport de réduction du réducteur;
- $r = 46,1 \times 10^{-3}$  m le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie;
- $C_{M1}(t)$  le couple délivré par le moteur et  $F_p(t)$  l'effort délivré par le patient sur le support 3.



Pour la suite du sujet on gardera les constantes  $A, B$  et  $D$ , avec  $A = 6700 \text{ m/V}$ ,  $B = 0,01 \text{ s}$  et  $D = 6 \text{ V/N}$ .

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $H_3(p)$ ,  $H_4(p)$ ,  $K_5$ ,  $K_6$ ,  $K_7$ ,  $K_8$  et  $K_9$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera  $A$ ,  $B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r$ ,  $\rho_1$ ,  $k_t$ ,  $k_e$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $m$  et  $K_8$ .

## Correction proportionnelle

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_c$ .

**Question 4** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Question 5** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

## Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que  $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right)$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_i$ .

**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système

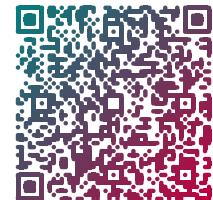
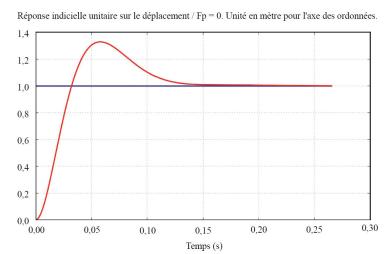
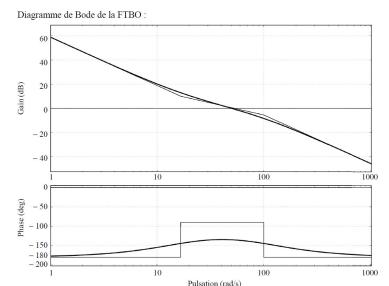
$$\text{FTBO}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$$
 en supposant que  $F_p = 0$ .

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.





## TD 3

# Asservissement par traitement d'image d'une plate-forme Hexapode – Sujet

Concours Centrale Supelec PSI 2016.

5 COR 8 COR

## Mise en situation

### Objectif

En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure ci-contre.

On suppose :

- ▶ qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques ;
- ▶ pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont  $F_u(p)$  est la transformée de Laplace ;
- ▶ que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont  $D(p)$  est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe ;
- ▶ pour l'axe considéré que  $L^m(p)$ ,  $L^d(p)$  et  $L^{de}(p)$  sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur  $L^m$  est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur) ;
- ▶ que  $U(p)$  représente la transformée de Laplace de la grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert  $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$ , la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur  $\tau = 0,04$  s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel est le suivant :

- ▶ pulsation de coupure  $\omega_c$  à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$  ;
- ▶ marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$  ;

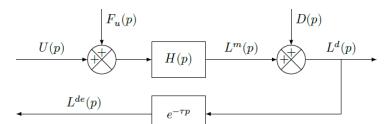


FIGURE 13.1 – Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement

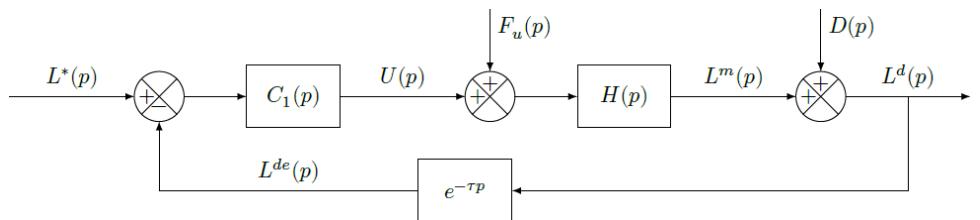
- ▶ temps de réponse vis-à-vis de la consigne doit être inférieur à 50 ms;
- ▶ temps de réponse vis-à-vis de la perturbation doit être inférieur à 100 ms.

Pour la conception de la loi de commande, il s'agira :

- ▶ de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel;
- ▶ d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images);
- ▶ de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

### Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation  $L^{de}(t)$  de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté  $C_1(p)$  et la consigne  $L^*(p)$ , est représentée par le schéma de la figure suivante.



**FIGURE 13.2 – Structure de commande à une boucle**

En raison de la présence de bruits de mesure (signaux non représentés sur les schémas fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

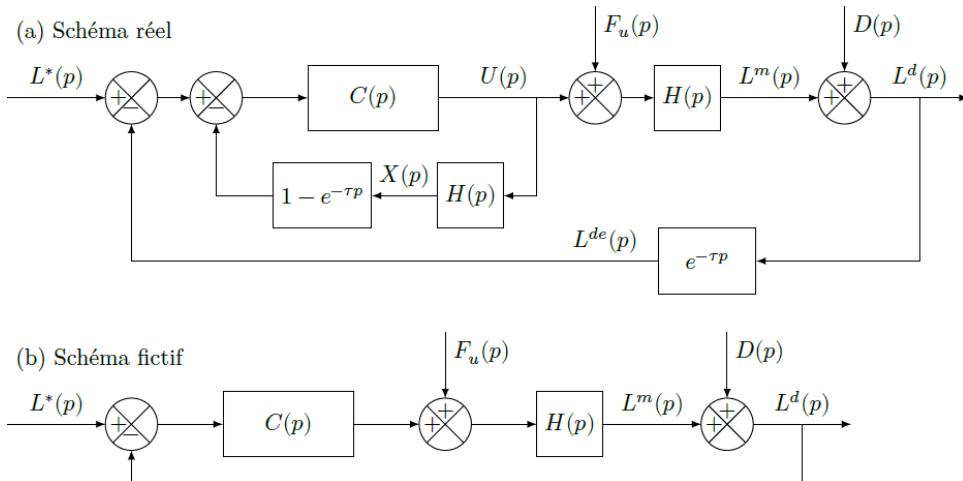
**Question 1** La figure en toute fin de document montre le diagramme de Bode de la fonction  $H(p)$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant  $C_1(p) = 1$ ).

**Question 2** Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- ▶ compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur  $C_1(j\omega)$  doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur  $\tau$ ;
- ▶ en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral  $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_{i1}p}\right)$ , justifier qu'un correcteur de ce type :
  - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure;
  - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

## Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards. La figure suivante montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel (a) représentant la réalisation de la commande ( $X(p)$ ) est la transformée de Laplace d'une grandeur  $x(t)$  interne au régulateur), d'autre part un schéma fictif (b).



**FIGURE 13.3 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard**

**Question 3** En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral  $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$  permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- ▶ déterminer la condition en phase, soit  $\arg(C(j\omega))$ , que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale  $T_i$ ;
- ▶ pour la valeur de  $T_i$  obtenue, déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

**Question 4** Pour une consigne nulle  $L^*(t)$ , une perturbation en sortie nulle  $d(t) = 0$  et un échelon de perturbation en entrée  $f_u(t) = F_0 h(t)$  où  $h(t)$  est l'échelon d'Heaviside :

- ▶ déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a));
- ▶ compte tenu de la forme de  $H(p)$ , en déduire alors le comportement de la grandeur  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini;
- ▶ au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

## Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

- ▶ une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe  $L^m(t)$  permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence  $L^{m*}(t)$ . Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et

on note  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$  la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne;

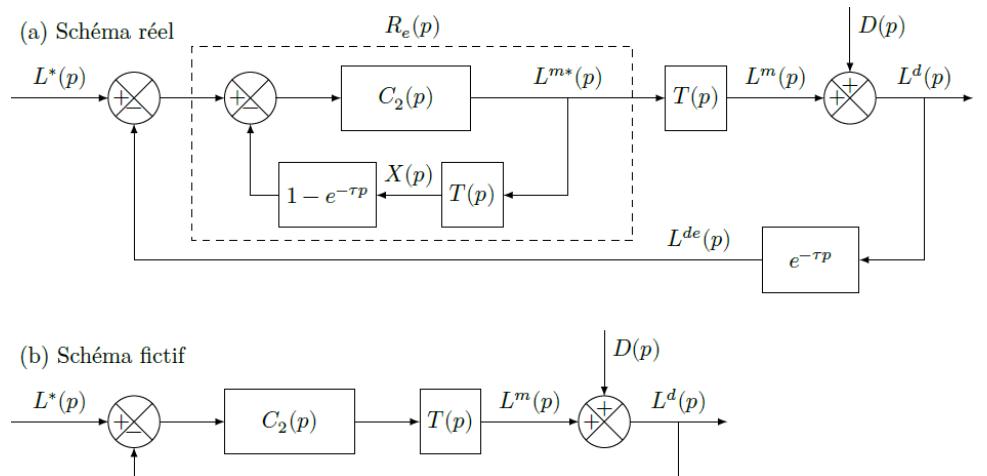
- ▶ la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée  $L^{de}(t)$ .

La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée  $T(p)$  où :

- ▶  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$  est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure);
- ▶  $L^{m*}(p)$  est la consigne de l'asservissement de la boucle interne;
- ▶ l'effet de la perturbation  $F_u(p)$  est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée;
- ▶ les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace  $D(p)$ .

Pour la conception de la loi de commande :

- ▶ une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée;
- ▶ on synthétise dans ce cas un correcteur  $C_2(p) = K_2 \left( 1 + \frac{1}{T_{i2}p} \right)$  de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur  $R_e(p)$  est réalisé en utilisant  $C_2(p)$  selon une structure identique à celle de la figure précédente (a);
- ▶ le calcul du régulateur  $C_2(p)$  ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.



**FIGURE 13.4 – Modèle de commande avec une boucle interne intégrée**

**Question 5** En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur  $L^m(t)$  en régime permanent, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$ , en réponse à une perturbation  $d(t)$  en échelon  $d(t) = D_0 h(t)$ . Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur  $R_e(p)$  selon le schéma de la figure 3(a) reste stable du point de vue interne.

### Retour sur le cahier des charges

La figure suivante montre les évolutions temporelles de la position  $L^d(t)$  en réponse à une consigne en échelon  $L^*(t) = L_0 h(t - 0,02)$  avec  $L_0 = 10 \text{ mm}$  et à une perturbation en échelon  $D^*(t) = D_0 h(t - 0,02)$  avec  $D_0 = 10 \mu\text{m}$ .

**Question 6** Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.

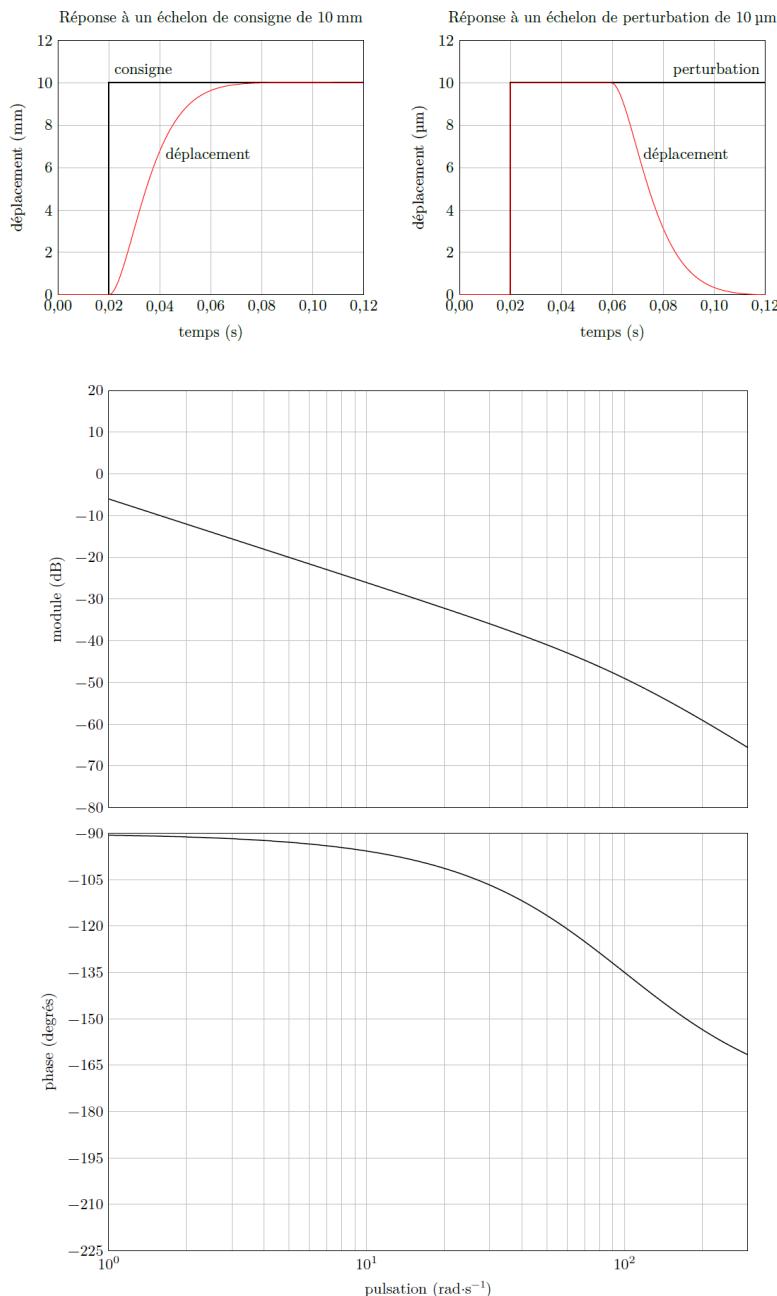


Figure B Diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{0.5}{p(1 + 0.01p)}$





# TD 4

## Quille pendulaire ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

10 COR



### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

### Objectif

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

### Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit  $q(t)$  proportionnel à sa tension de commande  $v(t)$ . Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servo valves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne

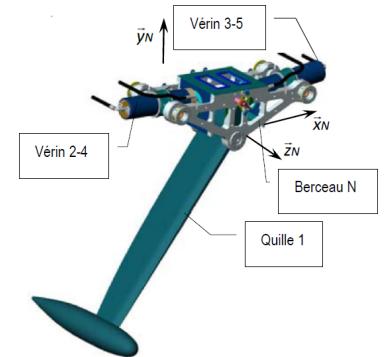
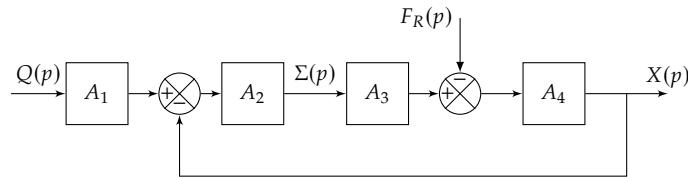


FIGURE 13.5 – Modèle volumique 3D

et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



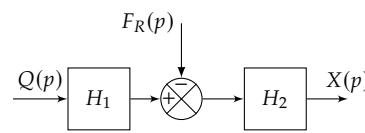
On a :

- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$  : débit d'alimentation du vérin [ $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ ];
  - $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$  : différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
  - $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$  : position de la tige du vérin [m];
  - $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$  : composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].
- $$\begin{aligned} & \bullet q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt} \quad (\text{a}); \\ & \bullet M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t) \quad (\text{b}). \end{aligned}$$

On a :

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

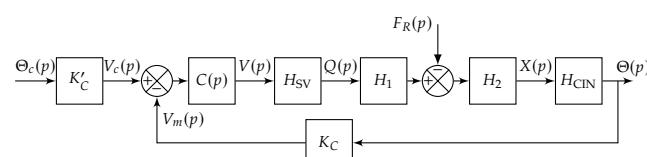
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par  $F_R(p)$  ne sera pas prise en compte.



On a :

- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$  : consigne de position angulaire [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$  : position angulaire de la quille [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$  : tension de commande de la servo valve [V];
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$  : tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$  : tension image de la position [V].

On a de plus :

- $K_c$  : gain du capteur angulaire potentiométrique [V/ $^\circ$ ];
- $K'_c$  : gain du bloc d'adaptation réglé tel que  $K'_c = K_c = 1,1 \text{ V}/^\circ$ ;
- $C(p)$  : correcteur de position;
- $H_{CIN}$  : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation.  $H_{CIN} = K_\theta [\text{.m}^{-1}]$ ;
- $H_{SV}$  : fonction de transfert de la servo valve.

## Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

La servovalve présente un fonctionnement non-linéaire provenant d'un phénomène de saturation qui est défini par la courbe suivante donnant les évolutions du débit  $q(t)$  fourni par la servovalve en fonction de sa tension de commande  $v(t)$ .

Ainsi :

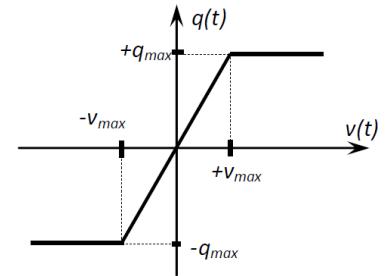
- ▶ pour  $v(t) > -v_{\max}$  et  $v(t) < v_{\max}$  :  $H_{sv} = K_{sv} \left[ \text{m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \right]$
- ▶ pour  $v(t) < -v_{\max}$  :  $q(t) = -q_{\max}$  ;
- ▶ pour  $v(t) > v_{\max}$  :  $q(t) = +q_{\max}$  ,  $v_{\max} = 10 \text{ V}$ .

Le système n'est pas encore corrigé,  $C(p) = 1$  et on souhaite simuler le fonctionnement où le navigateur veut déplacer la quille avec une consigne angulaire de position de  $45^\circ$ . Cette demande est modélisée par une consigne  $\theta_c(t)$  en échelon, soit :  $\theta_c(t) = \theta_0 u(t)$  avec  $\theta_0 = 45^\circ$  et  $u(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $u(t) = 1$  pour  $t > 0$ . La figure suivante présente dans ces conditions les évolutions temporelles de deux grandeurs de la boucle d'asservissement, le débit sortant de la servo valve  $q(t)$  et la position angulaire de la quille  $\theta(t)$ .

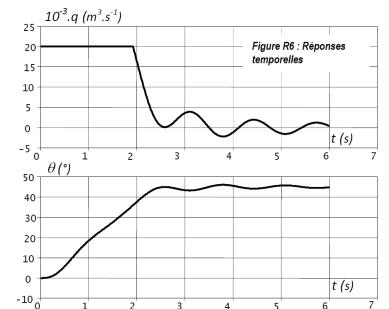
Sur la figure précédente, la courbe représentative de  $q(t)$  présente un palier où  $q(t)$  garde une valeur constante.

**Question 4** À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de  $K_{sv}$  ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».



**Question 5** Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».



## Comportement pour une commande de faible amplitude

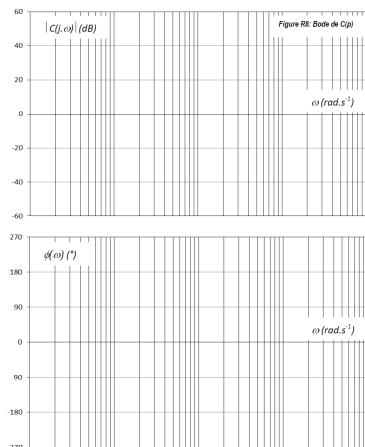
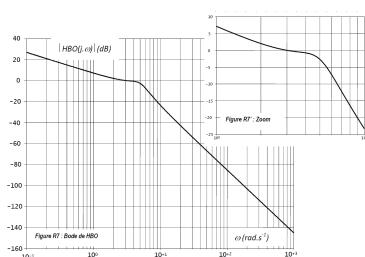
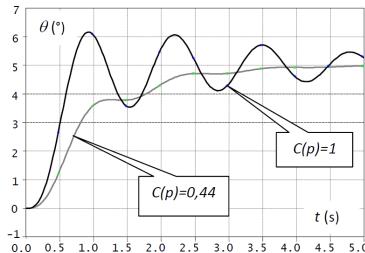
On étudie la réponse du système non corrigé ( $C(p) = 1$ ) à une entrée échelon de  $5^\circ$  d'amplitude avec  $F_R = 0$ . Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est :  $H_{BO}(p) = K_{SV}H_1H_2K_\theta K_C$  et  $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$ .

**Question 6** Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension  $v(t)$  à l'instant initial  $t = 0^+$ ,  $v(0^+)$ . Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

**Question 7** De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de  $5^\circ$  d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- ▶  $C(p) = 1$  : la courbe présente des dépassements, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée ;
- ▶  $C(p) = 0,44$  : toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).



À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation générait dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

**Question 8** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{BO}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

**Question 9** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Question 10** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de  $C(p)$  permettant d'abaisser l'amplitude de  $\Delta K$  à la pulsation  $\omega_r$ . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert  $C(p) = K_{COR} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$  avec  $b > 1$ . Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation  $\omega^*$  tel que :  $\sin [\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$  et  $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$ .

L'étude consiste à déterminer les valeurs de  $T$  et  $b$ .

**Question 11** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{COR} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

**Question 12** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{dB}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

**Question 13** Pour  $K_{COR} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{BO}$  à  $\omega^*$  :

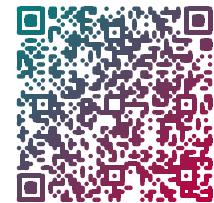
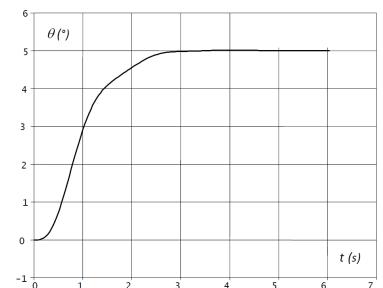
- ▶ calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$ ;
- ▶ calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

## Validation du cahier des charges

La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de  $5^\circ$ d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain  $K_{\text{COR}}$  a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

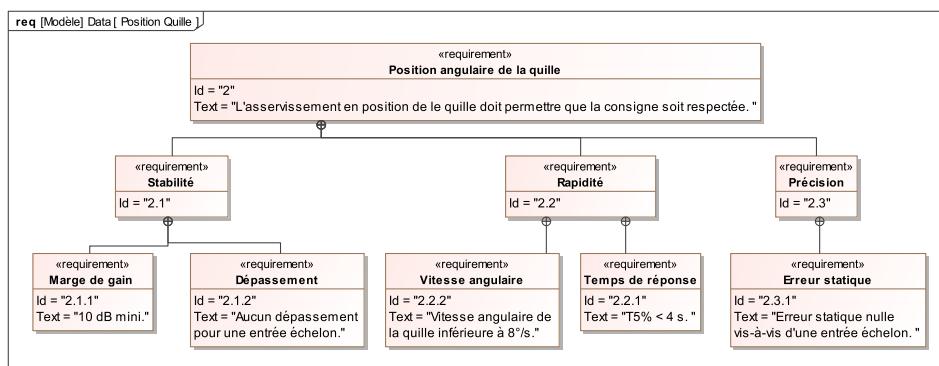
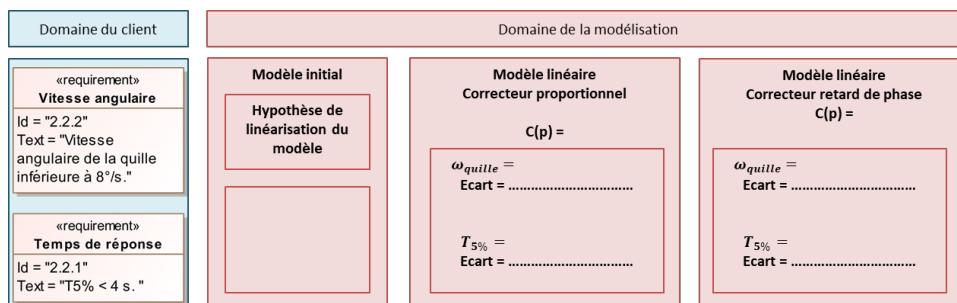
**Question 14** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

**Question 15** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



### Éléments de correction

1.  $A_1 = \frac{1}{Sp}$ ,  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .
2.  $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$ .
3.  $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$ .
4.  $K_{\text{SV}} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$ . Pour  $t < 1,9 \text{ s}$  : BO et  $t > 1,9 \text{ s}$  : BF.
- 5.
6.  $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$ .
- 7.
- 8.
9.  $\omega_r \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}$ .
10.  $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$ .
- 11.
12.  $-10 \log b$ .
13.  $b = 3,02$ ,  $T = 0,127 \text{ s}$ ,  $\phi(\omega^*) \approx -28,79^\circ$ .
14.  $t_{5\%} \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$   $4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$ .





# TD 5

## Vanoise Express – Sujet

E3A – PSI – 2014.

02 COR 03 COR 04 COR

### Présentation

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	<b>Ecart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon</b>	$\varepsilon_s = 0$
	<b>Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations</b>	$\varepsilon_v = 0$
	<b>Marge de phase</b>	$M\varphi \geq 45^\circ$
	<b>Pulsation de coupure en boucle ouverte</b> (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1 \text{ rad/s}$



### Modélisation du moteur à courant continu<sup>2</sup>

Hypothèses et données :

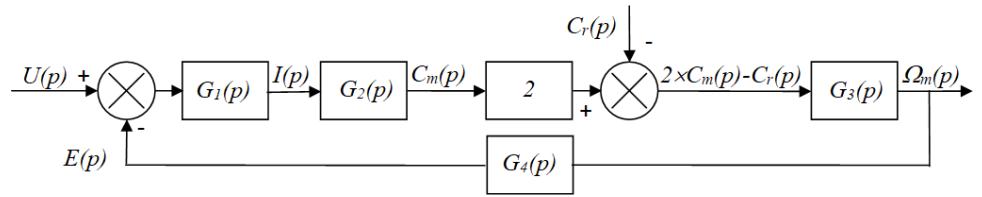
- ▶ on suppose les conditions initiales nulles ;
- ▶ les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- ▶  $L = 0,59 \text{ mH}$  inductance d'un moteur ;
- ▶  $R = 0,0386 \Omega$  résistance interne d'un moteur ;
- ▶  $f = 6 \text{ N m s/rad}$  coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- ▶  $J = 800 \text{ kg m}^2$  moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- ▶  $c_m(t) = k_T i(t)$  avec  $k_T = 5,67 \text{ Nm/A}$  (constante de couple d'un moteur) ;
- ▶  $e(t) = k_E \omega_m(t)$  avec  $k_E = 5,77 \text{ Vs/rad}$  (constante électrique d'un moteur)
- ▶ équations de la dynamique :  $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$  ;
- ▶ loi des mailles :  $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ .

**Question 1** Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminer les fonctions de transfert  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$  écrites dans le domaine de Laplace.

2: On peut passer directement à la question 6 pour aborder plus rapidement les asservissements.

Notations :

- ▶ on notera  $F(p)$  la transformée de Laplace d'une fonction du temps  $f(t)$  ;
- ▶  $u(t)$  tension d'alimentation des moteurs ;
- ▶  $i(t)$  intensité traversant un moteur ;
- ▶  $e(t)$  force contre électromotrice d'un moteur ;
- ▶  $\omega_m(t)$  vitesse de rotation d'un moteur ;
- ▶  $c_m(t)$  couple d'un seul moteur ;
- ▶  $c_r(t)$  couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.



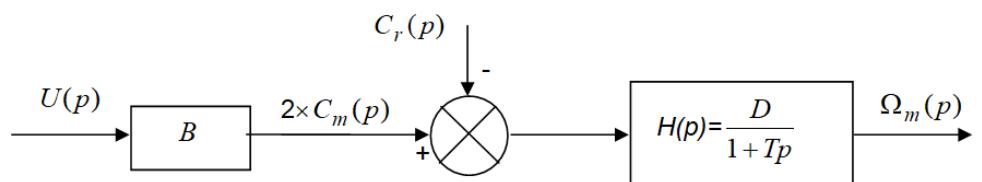
**Question 2**  $\Omega_m(p)$  peut se mettre sous la forme :  $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$ . Exprimer les fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  en fonction de  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$ .

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V (le couple de perturbation  $c_r(t)$  est nul);
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m (la tension  $u(t)$  est nulle).

**Question 3** Choisir et justifier un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminer numériquement les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  ont sensiblement le même dénominateur, le schéma-blocs ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



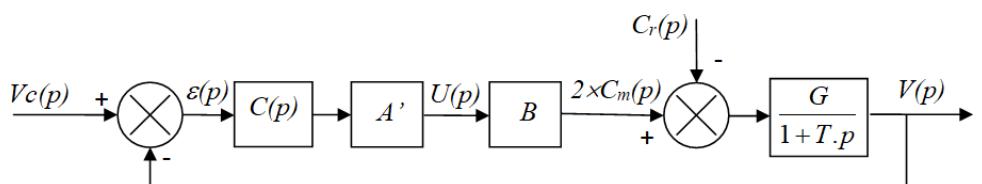
**Question 4** Donner la valeur numérique des trois constantes  $B$ ,  $D$  et  $T$ .

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

- ▶ La consigne de vitesse  $v_c(t)$  est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension  $\rho_c(t)$  avec le gain  $F$ .
- ▶ Une génératrice tachymétrique de gain  $\mu = 0,716 \text{ V s/rad}$  transforme la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  du moteur en une tension  $\rho_m(t)$ .
- ▶ Un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  corrige la différence  $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$  et l'envoie à un amplificateur de gain  $A$ , qui alimente les deux moteurs électriques.
- ▶ La vitesse de rotation des moteurs  $\omega_m(t)$  est transformée en vitesse du téléphérique  $v(t)$  avec le gain  $E = 0,1 \text{ m}$  (réducteur et rayon de la poulie).

**Question 5** Déterminer l'expression du gain  $F$  pour que  $\varepsilon(t) = 0$  entraîne  $v_c(t) = v(t)$ . Faire une application numérique.

Par transformation du schéma-blocs, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients  $E$  et  $F$  calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients  $A'$  et  $G$ . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes :  $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4$  sN ;  $G = 6 \cdot 10^{-5}$  m/(sNm) et  $T = 0,47$  s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

## Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

**Question 6** Justifier en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

**Question 7** On suppose  $C_r(p) = 0$ . Calculer en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $V_0$  l'expression de l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12$  m/s. Faire l'application numérique.

On suppose  $V_c(p) = 0$ .

**Question 8** Calculer en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $C_{r0}$  l'expression de l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation en échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270$  Nm qui modéliseraient la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

**Question 9** Faire également une application numérique si  $C_{r0} = 7460$  Nm qui modéliserait la montée vers La Plagne.

**Question 10** Donner numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$  dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

**Question 11** Existe-t-il une valeur réaliste de  $C_0$  pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifier.

## Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur  $C(p) = \frac{C_i}{p}$ .

**Question 12** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée  $FTBO(p)$ . Faire l'application numérique pour  $C_i = 1$ .

**Question 13** Tracer le diagramme asymptotique de Bode de  $FTBO(p)$ . Tracer également l'allure des courbes.

**Question 14** Donner la valeur maximale de  $C_i$  permettant de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

**Question 15** Trouver la valeur minmale de  $C_i$  permettant de respecter le critère de « Pulsion de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifier.

**Question 16** On suppose  $C_r(p)=0$ . Calculer numériquement l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12$  m/s.

**Question 17** On suppose  $V_c(p) = 0$ . Calculer numériquement l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270$  Nm qui modéliseraient la descente des « Arcs ».

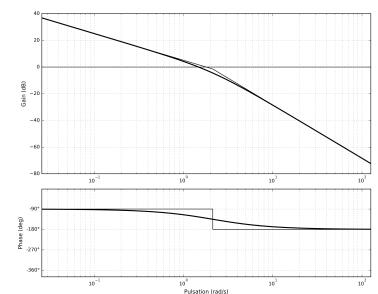


FIGURE 13.8 – Diagramme de Bode correspondant à la question 13.

**Question 18** Donner numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ . Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » est-il vérifié ? Justifier.

On suppose  $C_r(p) = 0$ .

**Question 19** Calculer l'expression de l'écart de traînage  $\varepsilon_v$  engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifier.

### Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur  $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$ , produit de la fonction  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a > 1$  (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1+Tp)}$ , qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans  $C_a(p)$  (c'est-à-dire pour  $C_a(p) = 1$ ).

**Question 20** Montrer que le système n'est pas stable sans la fonction  $C_a(p)$  ?

La fonction  $C_a(p)$  va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

**Question 21** Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de  $-135^\circ$  ?

**Question 22** Tracer en fonction de  $a$ ,  $\tau$  et  $K$  les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a>1$ . Préciser clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Préciser de même les pulsations des points particuliers.

**Question 23** La phase maximum  $\varphi_{\max}$  ajoutée par  $C_a(p)$  peut être calculée par la formule :  $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$ . Calculer numériquement  $a$  pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

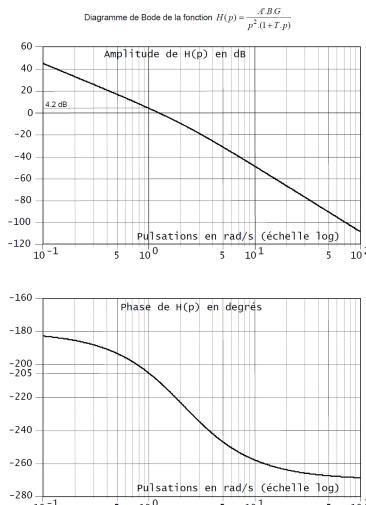
Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

**Question 24** Donner l'expression en fonction de  $a$  et  $\tau$  de la pulsation  $\omega$  pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

**Question 25** En déduire la valeur numérique de  $\tau$  pour que  $\varphi_{\max}$  soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s.

**Question 26** Calculer numériquement la valeur à donner à  $K$  pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Préciser la démarche utilisée.

**Question 27** Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifier.



**Question 28** Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ?

Justifier.

### Éléments de correction

1.  $G_1(p) = \frac{1}{R + Lp}$ ,  $G_2(p) = k_T$ ,  $G_3(p) = \frac{1}{f + Jp}$ ,  $G_1(p) = k_E$ .
2.  $F_1(p) = \frac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$  et  $F_2(p) = \frac{G_3(p)}{1 + 2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ .
3.  $F_1(p) = \frac{0,1725}{1 + 0,47p}$  et  $F_2(p) = \frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{1 + 0,47p}$ .
4.  $B = 297,4 \text{ N m V}^{-1}$ ,  $D = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}\text{Nm}$  et  $T = 0,47 \text{ s}$ .
5.  $F = \frac{\mu}{E} = 7,16 \text{ V s m}^{-1}$
6. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
7. FTBO de classe 0  $\varepsilon'_S = \frac{V_0}{1 + C_0 A' B G} = 4,286 \text{ m s}^{-1}$ .
8.  $\varepsilon''_S = -0,156 \text{ m s}^{-1}$  – à vérifier.
9.  $\varepsilon''_S = 0,160 \text{ m s}^{-1}$ .
10.  $\varepsilon'_S = 4,13 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\varepsilon'_S = 4,46 \text{ m s}^{-1}$ .
11.  $C_0$  infini
12.  $\text{FTBO}(p) = \frac{1,8}{p(1 + 0,47p)}$
- 13.
14.  $\omega_{0\text{dB}} \leq 2,13 \text{ rad s}^{-1}$  et  $C_i \leq 1,67$ .
15.  $C_i \geq 0,61$ .
16. FTBO de classe 1  $\varepsilon'_S = 0$ .
17. Intégrateur en amont de la perturbation  $\varepsilon''_S = 0$ .
18. CDCF OK.
19.  $\varepsilon_v = \frac{1}{C_i A' B G}$
20. Marge négative, système instable.
21.  $70^\circ$  de phase à ajouter.
- 22.
23.  $a = 32,16$
24.  $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
25.  $\tau = 0,176 \text{ s}$
26.  $K = 0,109$
- 27.
- 28.

