

## 11 Correction des SLCI

**01 COR** **02 COR** **03 COR** **04 COR**

### 11.1 Pourquoi corriger un système ?

Souvent évoqué en lors de l'étude des systèmes asservis, regardons ce qui se cache derrière le bloc correcteur. On peut le considérer comme la partie intelligente du système car de sa part position dans l'architecture d'un système il reçoit l'image de l'écart entre la cosigne et la sortie du système. En fonction de cet écart, en fonction de ses « capacités » va permettre d'améliorer les performances du système.

Sur la figure ci-contre est tracée en gris la réponse indicielle d'un système non corrigé et en noir la réponse indicielle du système corrigé. On observe que le système corrigé est :

- ▶ plus précis;
- ▶ plus amorti;
- ▶ plus rapide.

L'objectif du correcteur est donc d'améliorer les caractéristiques tout en assurant la stabilité du système.

#### Résultat –

- ▶ D'après les résultats sur la stabilité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'avoir des marges de gains suffisantes.
- ▶ D'après les résultats sur la rapidité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain dans le but d'avoir une pulsation de coupure à 0 dB la plus grande possible (pour la FTBO).
- ▶ D'après les résultats sur la précision des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain statique de la boucle ouverte pour assurer une bonne précision du système (et d'éventuellement augmenter la classe).

Au vu de ces conclusions, le choix d'un correcteur se fera dans le domaine fréquentiel en utilisant le diagramme de Bode.

<b>11.1 Pourquoi corriger un système ? . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>11.2 Le correcteur proportionnel . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>11.3 Les correcteurs à action intégrale . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>11.4 Le correcteur à avance de phase . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>11.5 Bilan sur l'influence des correcteurs . . . . .</b>	<b>5</b>

**Frédéric Mazet**, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.

**Florestan Mathurin**, *Correction des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

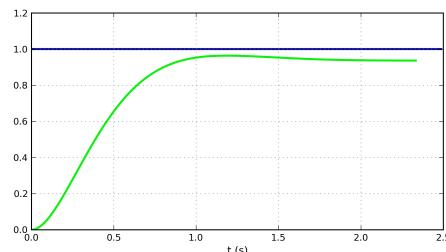
## 11.2 Le correcteur proportionnel

02 COR

### Définition – Correcteur P

Le correcteur proportionnel a pour fonction de transfert  $C(p) = K$ .

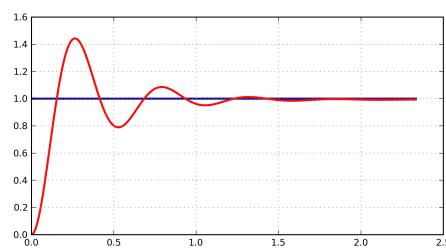
Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $K = 15$ ,  $\xi = 3$ ,  $\omega = 1$ ).



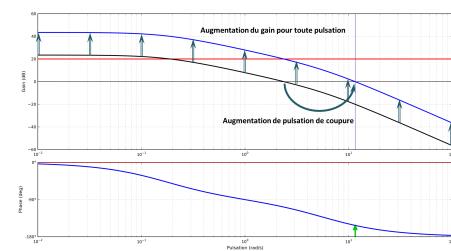
$T_{5\%} : 0,781 \text{ s} - \text{Écart statique : } 0,07$



Marge de phase  $71,94^\circ$



$T_{5\%} : 0,88 \text{ s} - \text{Écart statique : tend } \rightarrow 0$



Marge de phase  $6,43^\circ$

### Résultat –

On observe qu'une augmentation du gain proportionnel a pour effet :

- ▶ d'améliorer la précision;
- ▶ d'augmenter la vivacité;
- ▶ d'augmenter le temps de réponse (à partir d'un certain seuil);
- ▶ de diminuer l'amortissement;
- ▶ de diminuer la marge de phase.

Pour un système d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain provoque une marge de phase négative et donc une instabilité du système.

### Méthode –

#### Réglage de la marge de phase :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0 \text{ dB}}$  tel que  $\varphi(\omega_{0 \text{ dB}})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{0 \text{ dB}})$ .
- ▶ On cherche  $K_p$  tel que  $G_{\text{dB}}(\omega_{0 \text{ dB}}) = 0$

#### Réglage de la marge de gain :

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{-180^\circ}$  tel que  $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$ .
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{\text{dB}}(\omega_{-180^\circ})$ .
- ▶ On cherche  $K_p$  tel qu'on ait la marge de gain souhaitée.

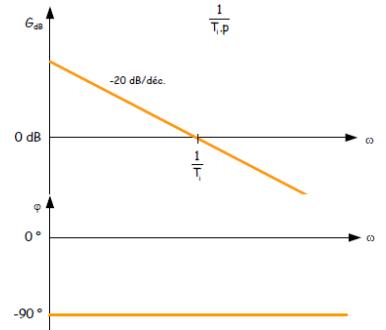
## 11.3 Les correcteurs à action intégrale

### 11.3.1 Le correcteur intégral pur

#### Définition – Correcteur I

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$ .



#### Résultat –

##### Avantages

Ce correcteur améliore la précision lors de la sollicitation par un échelon car il ajoute une intégration dans la boucle ouverte.

##### Inconvénients

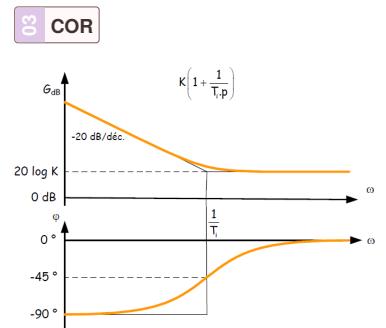
Le déphasage de -90° sur tout le spectre de pulsation entraîne une réduction de la marge de phase ce qui peut déstabiliser le système.

### 11.3.2 Le correcteur proportionnel intégral

#### Définition – Correcteur PI

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = K \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$ .



En développant on obtient  $C(p) = K \frac{T_i p + 1}{T_i p}$ . Ce correcteur augmente donc la classe de la boucle ouverte et donc la précision. Si  $K > 1$  la pulsation de coupure est augmentée, entraînant ainsi une augmentation de la rapidité du système. Enfin, ce correcteur diminue la phase à basse fréquence. Il faut donc faire en sorte que cette chute de phase n'intervienne pas dans la zone de la pulsation de coupure du système.

#### Résultat – Correcteur PI

- ▶ augmente l'amortissement;
- ▶ augmente la rapidité;
- ▶ augmente la précision.

#### Méthode –

- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que  $\varphi(\omega_{0dB})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- ▶ En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{dB}(\omega_{0dB})$ .
- ▶ On cherche  $K$  tel que  $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$
- ▶ La mise en place de l'effet intégral ne doit pas modifier la position de la

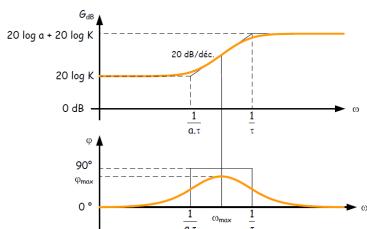
pulsation de coupure réglée précédemment. Pour cela, il faut donc que  $\frac{1}{T_i} << \omega_{0\text{dB}}$ . Usuellement on positionne l'action intégrale une décade avant la pulsation réglée. On a donc  $T_i = \frac{10}{\omega_{0\text{dB}}}$ .

### Remarque

Une autre possibilité pour régler  $T_i$  est de réaliser **une compensation de pôle**. Admettons que la FTBO puisse se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$  avec  $\tau_1 >> \tau_2$ .  $\tau_1$  ayant pour effet de diminuer la rapidité du système, on pourra prendre  $T_i = \tau_1$  afin de supprimer l'effet du pôle associé à  $\tau_1$ .

## 11.4 Le correcteur à avance de phase

04 COR



### Définition – Correcteur à avance de phase

Un correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1 + \alpha \tau p}{K \frac{1 + \tau p}{1 + \tau p}}$  avec  $\alpha > 1$ .

### Résultat –

Ce correcteur permet d'ajouter de la phase pour les pulsations comprises entre  $\frac{1}{\alpha \tau}$  et  $\frac{1}{\tau}$ . On montre que  $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a - 1}{a + 1}\right)$  et ce pour une pulsation  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$ .

### Remarque

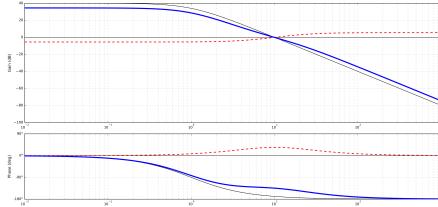
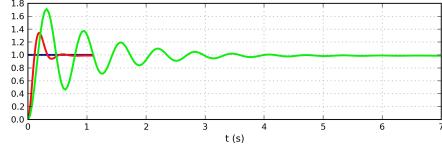
On peut prendre  $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$  pour ne pas modifier la valeur du gain à la pulsation où on désire ajouter de la phase.

### Démonstration

Pour déterminer  $\omega_{\max}$  on pourrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase est maximum en résolvant  $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$ . On peut aussi remarquer « graphiquement » que  $\omega_{\max}$  est situé au milieu des deux pulsations de coupures :  $\frac{1}{2} \left( \log\left(\frac{1}{\tau}\right) + \log\left(\frac{1}{\alpha \tau}\right) \right) = \log\left(\frac{1}{\alpha \tau^2}\right)^{1/2} = \log\left(\frac{1}{\tau \sqrt{a}}\right)$  et  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$ .

D'autre part, il faudrait calculer  $\varphi(\omega_{\max})$ ...

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$ ,  $a = 3,54$ ,  $T = 0,053$  s).



Ici le correcteur permet une augmentation de la rapidité et un meilleur amortissement.

#### Méthode –

- En utilisant la BO non corrigée on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que le gain est nul.
- On calcule  $\varphi(\omega_{0dB})$ .
- On détermine la phase à ajouter.
- On calcule  $a$ .
- On calcule  $\tau$ .
- On calcule  $K$ .

## 11.5 Bilan sur l'influence des correcteurs

Correcteur	Situation sans correction		
	Si $K_p$ augmente		
Proportionnel $K_p$	Marges	↔	
Proportionnel intégral $K_p + \frac{K_i}{p}$	Marges	↔	Si mal réglé
À avance de phase $K_p \frac{1+a\tau p}{1+\tau p} \quad a > 1$	Marges	↔	(Cf : classe)
	Précision	↔	
	Rapidité	↔	



# Application 1

## Réglage de correcteurs P et PI – Sujet

Ressources de P. Dupas.

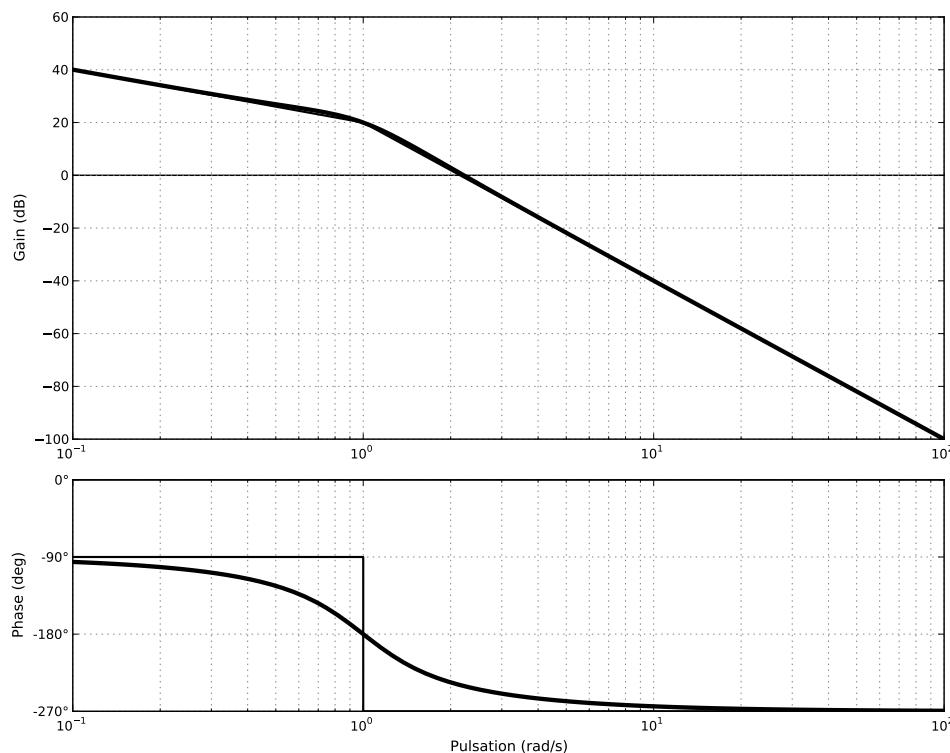


D'après ressources P. Dupas.

### Correcteur proportionnel

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de  $45^\circ$  et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



### Résolution graphique

**Question 1** Mesurer la marge de phase.

**Question 2** Mesurer la marge de gain.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

### Résolution analytique

**Question 5** Calculer la marge de phase.

**Question 6** Calculer la marge de gain.

**Question 7** Calculer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

**Question 8** Calculer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

#### Éléments de correction

1.  $M_\varphi = -60^\circ$ .
2.  $M_G = -20$  dB.
3.  $K_p = 0,054$  et  $M_G = 5,35$  dB.
4.  $K_p = 0,0316$  et  $M_\varphi = 70^\circ$ .

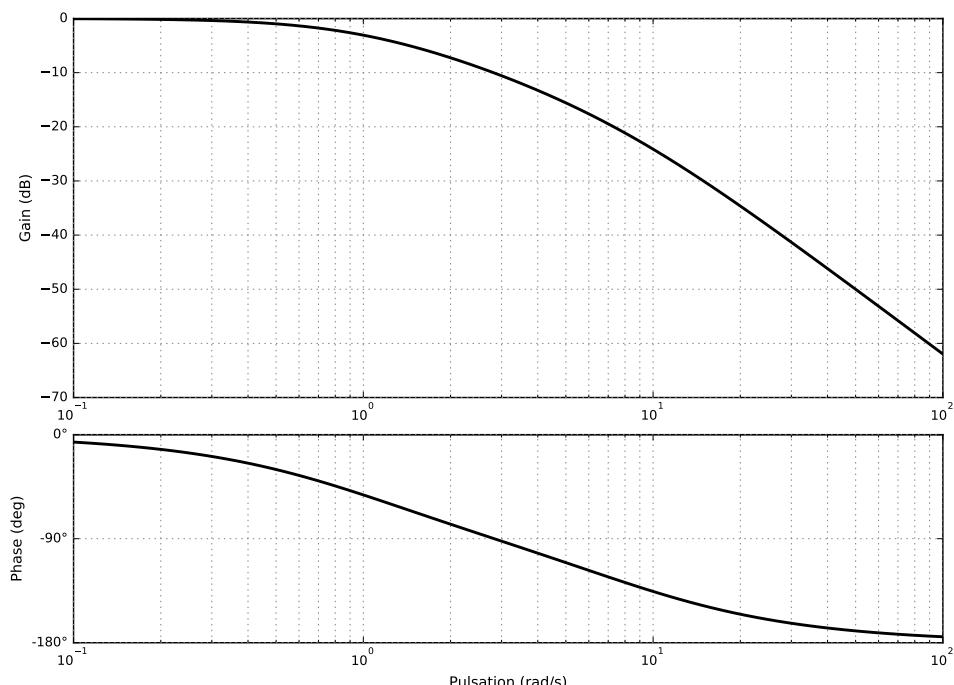
D'après ressources P. Dupas.

### Correcteur proportionnel intégral

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(p+1)(\frac{p}{8}+1)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de  $45^\circ$  en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme  $C(p) = K_p \frac{1 + \tau p}{\tau p}$ .

**Question 9** (Facultatif) Justifier le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.



**Question 10** Déterminer graphiquement les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 11** Déterminer analytiquement les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 12** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.



**Éléments de correction**

- 1.
2.  $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$ .
- 3.



# Application 2

## Réglage de correcteurs P et AP – Sujet

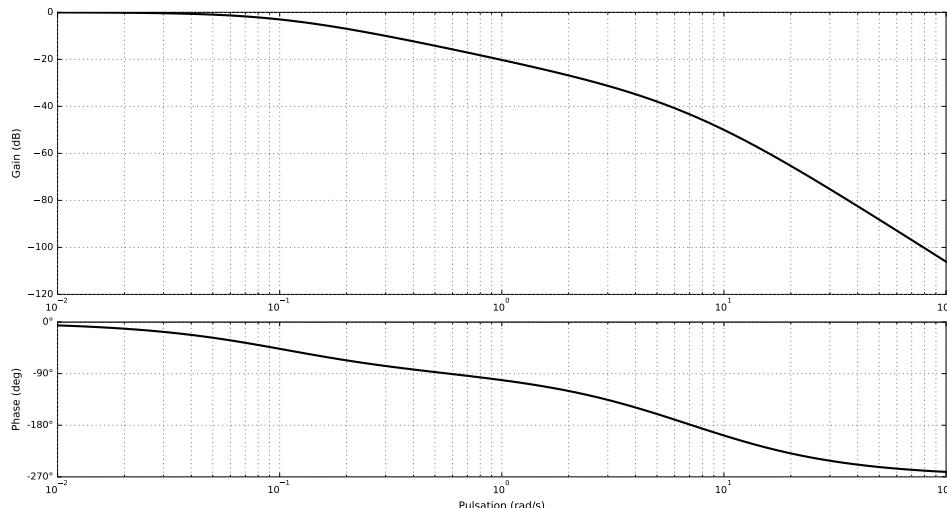
Ressources de P. Dupas.

### Correcteur proportionnel

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

**Question 1** Déterminer la précision du système  $\varepsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

**Question 2** Justifier le tracer du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.



**Question 3** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

**Question 4** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

### Correcteur à avance de phase

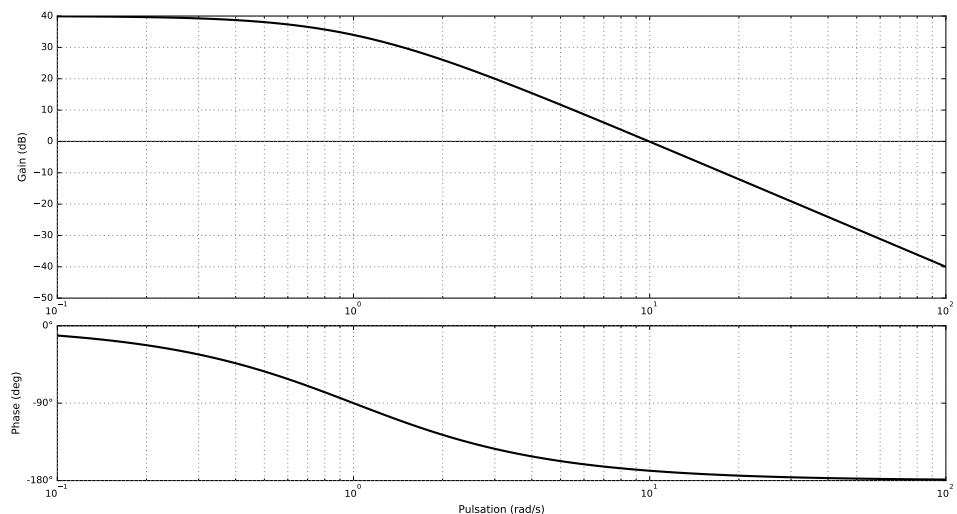
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de

#### Éléments de correction

1.  $\varepsilon_S = \frac{1}{2}$ .
2. .
3.  $\omega_{-135^\circ} = 2,95 \text{ rad/s}$ .
4.  $\omega_0 \text{dB} = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 38 \text{ dB}$  soit  $K_P = 79$ .

phase de la forme  $C(p) = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$ .

**Question 5** Justifier le tracer du diagramme de Bode de  $G(p)$ .



**Question 6** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

**Question 7** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

#### Éléments de correction

- 1.
2.  $C(p) = 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}$ .
- 3.



# Application 3

## Réglage de correcteurs P – Sujet

Etude d'un poste de palettisation de bidons. CCMP MP 2010.

La boucle de position est représentée figure ci-dessous. On admet que :

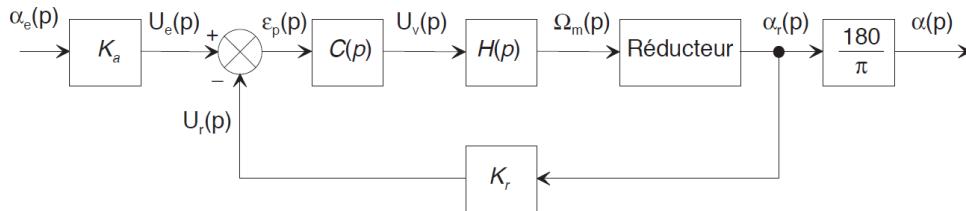
- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{K'_m}{1 + \tau'_m p} = \frac{30}{1 + 5 \cdot 10^{-3} p}$ ;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$  : gain du capteur de position;
- $K_a$  : gain de l'adaptateur du signal de consigne  $\alpha_e(t)$ ;
- le signal de consigne  $\alpha_e(t)$  est exprimé en degrés;
- le correcteur  $C(p)$  est à action proportionnelle de gain réglable  $K_c$ ;
- $N = 200$  : rapport de transmission.

C1-02

C2-04

### Objectif

- On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .
- On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)}$  du réducteur.

**Question 2** Déterminer le gain  $K_a$  de l'adaptateur.

**Question 3** Déterminer, en fonction notamment de  $K'_m$  et  $t'_m$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  que l'on exprimera sous forme canonique. En déduire l'expression du gain de boucle, noté  $K_{BO}$ .

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 4** Déterminer la valeur de  $K_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

**Question 5** En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

**Question 6** Déterminer l'écart de position. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

On souhaite un écart de traînage inférieur à  $1^\circ$  pour une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{ s}^{-1}$ .

**Question 7** Déterminer l'expression de  $\alpha_e(t)$  correspondant à une consigne de vitesse de  $105^\circ \text{s}^{-1}$ . En déduire  $\alpha_e(p)$ .

**Question 8** La valeur de  $K_{\text{BO}}$  définie précédemment permet-elle de satisfaire l'exigence de précision imposée par le cahier des charges ? Conclure.



#### Éléments de correction

1.  $R(p) = \frac{1}{Np}$ .
2.  $K_a = \frac{\pi}{180} K_r$ .
3.  $T(p) = \frac{K_{\text{BO}}}{p(1 + \tau'_m p)}$  avec  

$$K_{\text{BO}} = \frac{K_c K'_m K_r}{N}$$
.
4.  $K_{\text{BO}} = \frac{\sqrt{2}}{\tau'_m}$ .
5.  $K_c = \frac{\sqrt{2}N}{\tau'_m K'_M K_r}$ .
6.  $\varepsilon_S = 0$ .
7.  $\alpha_e(p) = \frac{105}{p^2}$ .
8.  $\varepsilon_d = \frac{105 K_a}{K_{\text{BO}}}$ .

## TD 1

# Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Sujet

CCP – PSI – 2006.

02 COR 03 COR

### Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

### Objectif

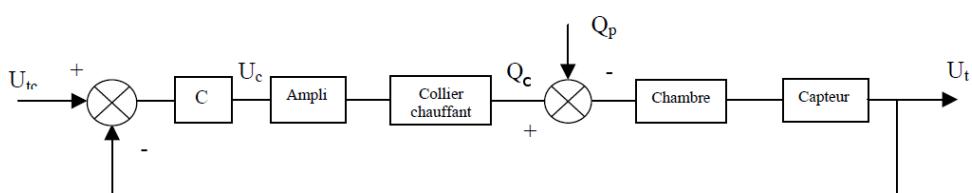
La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi;
- ▶ précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

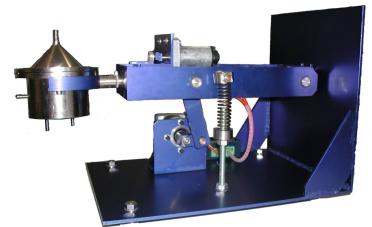
Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- ▶  $U_{tc}$  : tension de consigne;
- ▶  $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- ▶  $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- ▶  $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- ▶  $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.

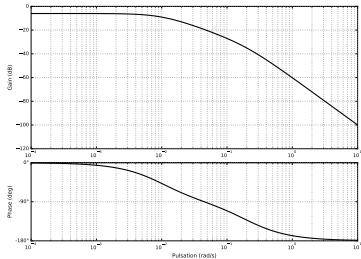


$$\text{Expérimentalement, on peut déterminer que } \text{FTBO}(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}.$$



## Analyse des performances

On considère ici que  $C(p) = 1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.



**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

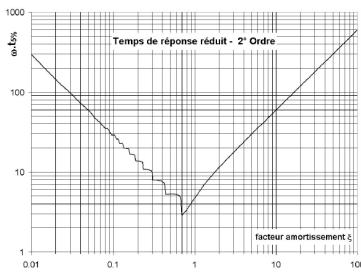
**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

## Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p) = K$ .



**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensations de pôles.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.



### Éléments de correction

1. 218 s.
2.  $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
3. .
4. Système stable (FTBO ordre 2 et critère du Revers respecté) ( $M_G \rightarrow \infty$ ,  $M_\varphi$  non définie).
5.  $K = 9$ .
6. 50 s,
7.  $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}}$  et  $\varepsilon_v = \infty$ .
8.  $U_a = 450$  V.
9.  $K = 10$  et  $T_i = 100$  s.
10.  $\varepsilon_p = 0$ .

## TD 2

# Machine de rééducation SysReeduc – Sujet

CCP PSI 2013.

### Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

C1-02

C2-04

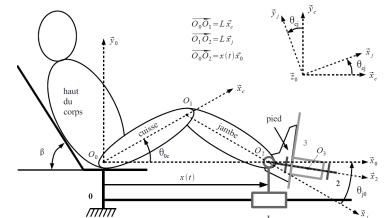
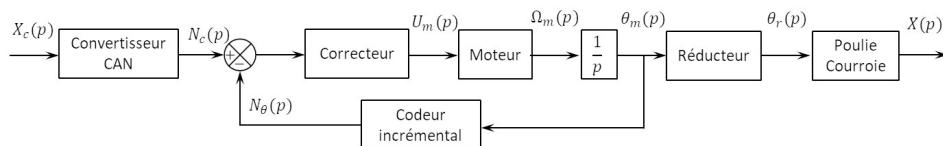
### Objectif

L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2 \text{ s}$
Pulsation au gain unité	$50 \text{ rad s}^{-1}$

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



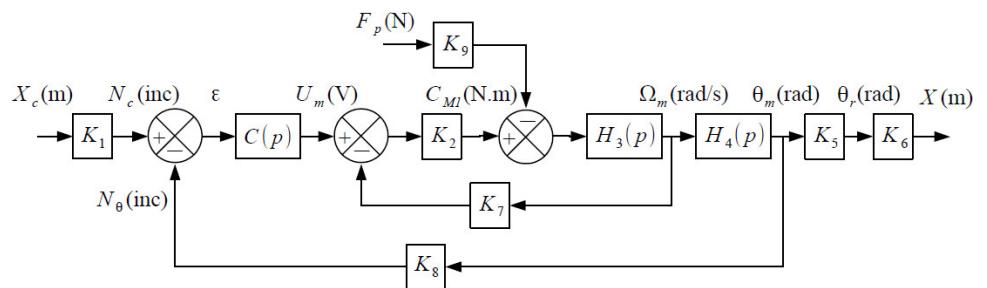
1: On peut passer directement à la question 3 pour aborder plus rapidement les correcteurs.

Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ;
- $e(t) = k_e \omega_m(t)$ ;
- $C_{M1}(t) = k_t i(t)$ .

## Éléments de modélisation<sup>1</sup>

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.

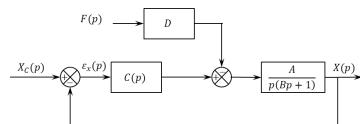


Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t).$$

On note :

- $M$  la masse du chariot et  $m$  la masse du support de pied;
- $\rho_1 = \frac{1}{10}$  le rapport de réduction du réducteur;
- $r = 46,1 \times 10^{-3}$  m le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie;
- $C_{M1}(t)$  le couple délivré par le moteur et  $F_p(t)$  l'effort délivré par le patient sur le support 3.



Pour la suite du sujet on gardera les constantes  $A, B$  et  $D$ , avec  $A = 6700 \text{ m/V}$ ,  $B = 0,01 \text{ s}$  et  $D = 6 \text{ V/N}$ .

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $H_3(p)$ ,  $H_4(p)$ ,  $K_5$ ,  $K_6$ ,  $K_7$ ,  $K_8$  et  $K_9$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme ci-cont. On exprimera  $A$ ,  $B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r$ ,  $\rho_1$ ,  $k_t$ ,  $k_e$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $m$  et  $K_8$ .

## Correction proportionnelle

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_c$ .

**Question 4** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Question 5** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

## Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que  $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $K_i$ .

**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système

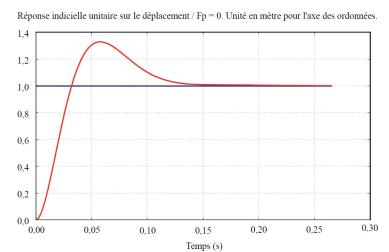
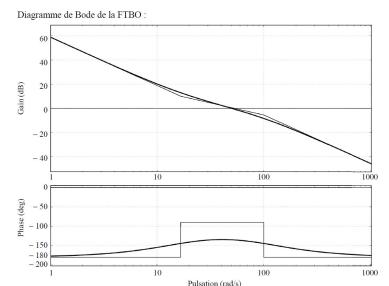
$$\text{FTBO}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$$
 en supposant que  $F_p = 0$ .

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.





# TD 3

## Quille pendulaire ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

10 COR



### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

### Objectif

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

### Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit  $q(t)$  proportionnel à sa tension de commande  $v(t)$ . Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servo valves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne

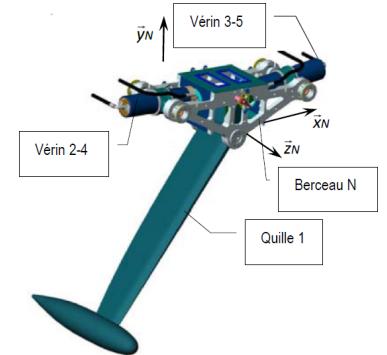
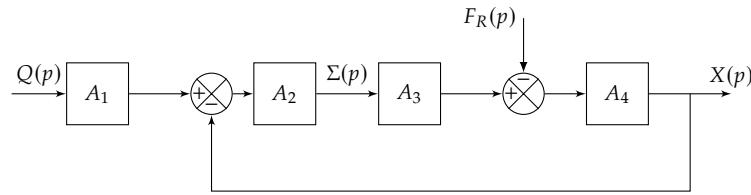


FIGURE 11.1 – Modèle volumique 3D

et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



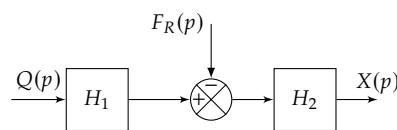
On a :

- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$  : débit d'alimentation du vérin [ $m^3 s^{-1}$ ];
  - $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$  : différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
  - $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$  : position de la tige du vérin [m];
  - $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$  : composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].
- $$\bullet q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt} \text{ (a);}$$
- $$\bullet M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t) \text{ (b).}$$

On a :

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

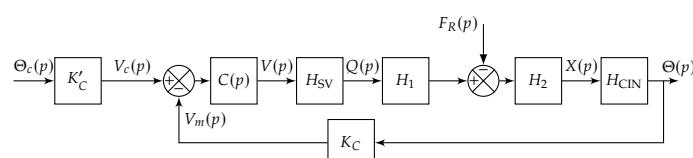
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par  $F_R(p)$  ne sera pas prise en compte.



On a :

- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$  : consigne de position angulaire [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$  : position angulaire de la quille [ $^\circ$ ];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$  : tension de commande de la servo valve [V];
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$  : tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$  : tension image de la position [V].

On a de plus :

- $K_c$  : gain du capteur angulaire potentiométrique [V/ $^\circ$ ];
- $K'_c$  : gain du bloc d'adaptation réglé tel que  $K'_c = K_c = 1,1$  V/ $^\circ$ ;
- $C(p)$  : correcteur de position;
- $H_{CIN}$  : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation.  $H_{CIN} = K_\theta$  [ $^\circ.m^{-1}$ ];
- $H_{SV}$  : fonction de transfert de la servo valve.

## Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

La servovalve présente un fonctionnement non-linéaire provenant d'un phénomène de saturation qui est défini par la courbe suivante donnant les évolutions du débit  $q(t)$  fourni par la servovalve en fonction de sa tension de commande  $v(t)$ .

Ainsi :

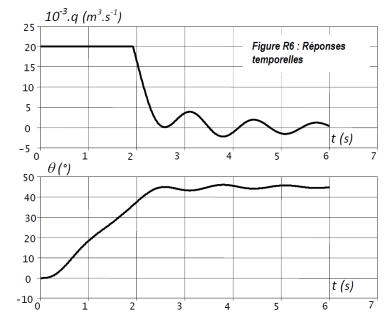
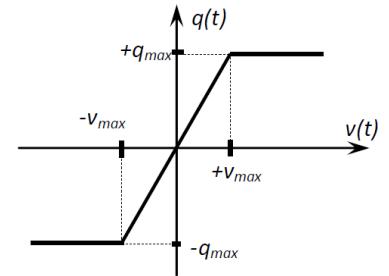
- ▶ pour  $v(t) > -v_{\max}$  et  $v(t) < v_{\max}$  :  $H_{sv} = K_{sv} \left[ \text{m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \right]$
- ▶ pour  $v(t) < -v_{\max}$  :  $q(t) = -q_{\max}$ ;
- ▶ pour  $v(t) > v_{\max}$  :  $q(t) = +q_{\max}$ ,  $v_{\max} = 10 \text{ V}$ .

Le système n'est pas encore corrigé,  $C(p) = 1$  et on souhaite simuler le fonctionnement où le navigateur veut déplacer la quille avec une consigne angulaire de position de  $45^\circ$ . Cette demande est modélisée par une consigne  $\theta_c(t)$  en échelon, soit :  $\theta_c(t) = \theta_0 u(t)$  avec  $\theta_0 = 45^\circ$  et  $u(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $u(t) = 1$  pour  $t > 0$ . La figure suivante présente dans ces conditions les évolutions temporelles de deux grandeurs de la boucle d'asservissement, le débit sortant de la servo valve  $q(t)$  et la position angulaire de la quille  $\theta(t)$ .

Sur la figure précédente, la courbe représentative de  $q(t)$  présente un palier où  $q(t)$  garde une valeur constante.

**Question 4** À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de  $K_{sv}$  ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».



**Question 5** Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

## Comportement pour une commande de faible amplitude

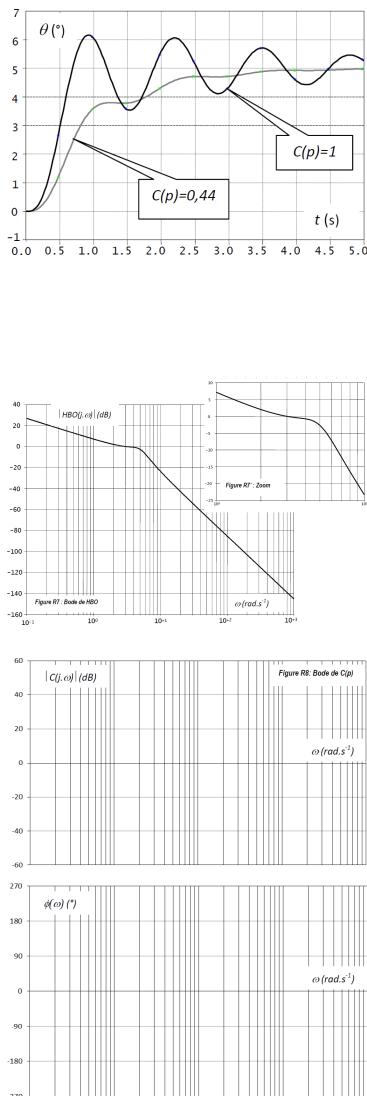
On étudie la réponse du système non corrigé ( $C(p) = 1$ ) à une entrée échelon de  $5^\circ$  d'amplitude avec  $F_R = 0$ . Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est :  $H_{BO}(p) = K_{SV} H_1 H_2 K_\theta K_C$  et  $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$ .

**Question 6** Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension  $v(t)$  à l'instant initial  $t = 0^+$ ,  $v(0^+)$ . Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

**Question 7** De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de  $5^\circ$  d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- ▶  $C(p) = 1$  : la courbe présente des dépassements, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée ;
- ▶  $C(p) = 0,44$  : toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).



À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation générait dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

**Question 8** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{BO}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

**Question 9** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

**Question 10** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de  $C(p)$  permettant d'abaisser l'amplitude de  $\Delta K$  à la pulsation  $\omega_r$ . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert  $C(p) = K_{COR} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$  avec  $b > 1$ . Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation  $\omega^*$  tel que :  $\sin [\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$  et  $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$ .

L'étude consiste à déterminer les valeurs de  $T$  et  $b$ .

**Question 11** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{COR} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

**Question 12** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{dB}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

**Question 13** Pour  $K_{COR} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{BO}$  à  $\omega^*$  :

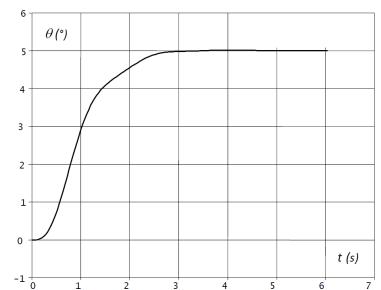
- ▶ calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$ ;
- ▶ calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

## Validation du cahier des charges

La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de  $5^\circ$ d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain  $K_{\text{COR}}$  a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

**Question 14** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

**Question 15** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



### Éléments de correction

1.  $A_1 = \frac{1}{Sp}$ ,  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .
2.  $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$ .
3.  $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$ .
4.  $K_{\text{SV}} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$ . Pour  $t < 1,9 \text{ s}$  : BO et  $t > 1,9 \text{ s}$  : BF.
- 5.
6.  $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$ .
- 7.
- 8.
9.  $\omega_r \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}$ .
10.  $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$ .
- 11.
12.  $-10 \log b$ .
13.  $b = 3,02$ ,  $T = 0,127 \text{ s}$ ,  $\phi(\omega^*) \approx -28,79^\circ$ .
14.  $t_{5\%} \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$   $4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$ .

