

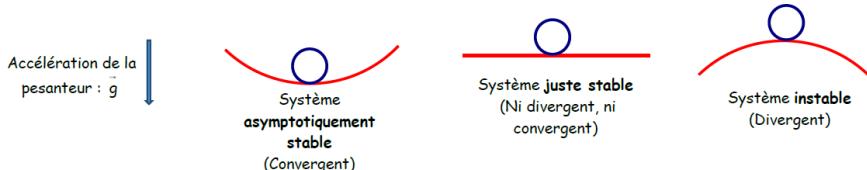
2 Rappels sur la détermination des performances des systèmes asservis

2.1 Stabilité des systèmes asservis

2.1.1 Notion de stabilité

Représentation graphique [1]

Un état d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre par une cause extérieure, finit par retrouver ce même état d'équilibre après disparition de la cause. Illustrons cette définition de façon très intuitive à travers l'exemple suivant : une boule soumise à l'accélération de la pesanteur se déplaçant (avec un peu de dissipation énergétique) sur une surface donnée.



Premières définitions

Définition – Définition intuitive

Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :

- ▶ abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre;
- ▶ son régime transitoire finit par disparaître;
- ▶ sa sortie finit par ressembler à l'entrée;
- ▶ sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

Remarque

La stabilité d'un système est indépendante de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionnelle (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...

2.1 Stabilité des systèmes asservis	1
2.2 Rapidité des systèmes asservis	6
2.3 Précision des systèmes asservis	8

C1-01

C2-03

Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.

Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Pour simplifier les calculs, une première approche pourra être d'utiliser la réponse impulsionale.

Définition –

En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionale tend vers zéro au cours du temps.

Étude des pôles de la fonction de transfert

Dans le cas général la fonction de transfert d'un système peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } n \geq m.$$

Lors du calcul de la réponse temporelle en utilisant la transformée de Laplace inverse (quelle que soit l'entrée), la nature du régime transitoire ne dépend que des pôles p_i de la fonction de transfert (zéros du dénominateur).

En factorisant le numérateur et le dénominateur de $H(p)$ on peut alors retrouver une fonction de la forme :

$$H(p) = \frac{(p + z_m) \cdot (p + z_{m-1}) \dots}{(p + p_n) \cdot (p + p_{n-1}) \dots} \quad \text{avec } p_i, z_i \in \mathbb{C}.$$

En passant dans le domaine temporel :

Mode : fonction temporelle associée à un pôle.

- les pôles réels (de type $p = -a$) induisent des modes du type e^{-at} ;
- les pôles complexes conjugués (de type $p = -a \pm j\omega$) induisent des modes du type $e^{-at} \sin \omega t$.

On peut ainsi constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.

Ainsi, on peut observer la réponse temporelle des systèmes en fonction du positionnement des pôles dans le plan complexe.

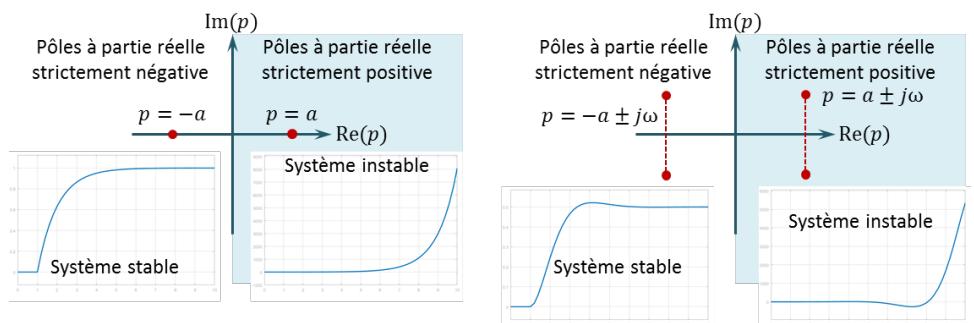


FIGURE 2.1 – Représentation d'un système à pôle simple et à pôles conjugués dans le plan complexe – Réponse indicielle

Position des pôles dans le plan complexe

Par extension on peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicielle associée.

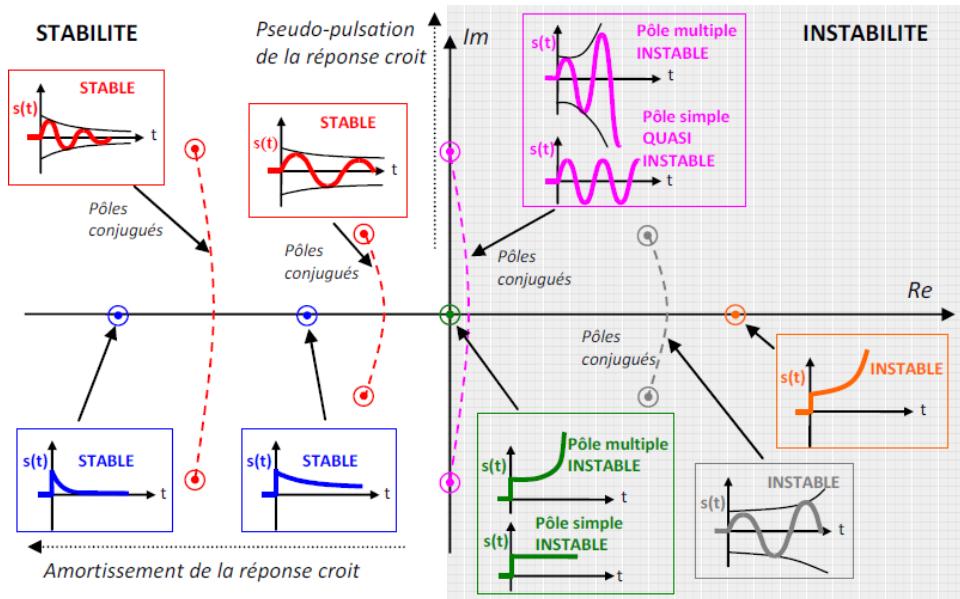


FIGURE 2.2 – Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système [F. Mathurin].

Définition –

À retenir Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (**en boucle fermée**) sont à partie réelle strictement négative.

Remarque

On peut montrer que :

- ▶ **pour les systèmes d'ordre 1 et 2 :** le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe ;
- ▶ **pour les systèmes d'ordre 3 :** de la forme $a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3$ les coefficients doivent être strictement de même signe et $a_2a_1 > a_3a_0$.

Pôles dominants [1]

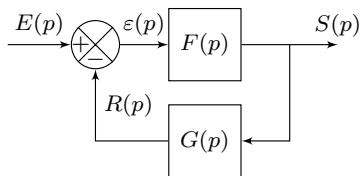
Lors de l'étude d'un système, on se contente en général de ne prendre en compte que les pôles les plus influents. Ces pôles sont appelés les pôles dominants. Pour un système asymptotiquement stable, ce sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires, puisque ce sont eux qui induisent des modes qui disparaissent dans le temps le plus lentement.

Caractéristiques dans le lieu de pôles

Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [1].

2.1.2 Marges de stabilité

Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...



La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par $H_{BO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)G(p)$.

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)G(p)} = \frac{F(p)}{1 + H_{BO}(p)}$.

Définition – Équation caractéristique

Soit $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ une fonction de transfert. On appelle $D(p) = 0$ l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de $D(p)$ correspondent aux pôles de $H(p)$.

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera $1 + H_{BO}(p) = 0$.

Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh

Pour un système d'ordre supérieur à 3 il devient délicat d'obtenir analytiquement (ou numériquement) les racines du polynôme et ainsi conclure sur la stabilité à partir du signe des parties réelles.

Il existe un critère algébrique permettant de vérifier la stabilité d'un système : il s'agit de critère de Routh. Pour un système bouclé, ce critère utilise le dénominateur de la BF. Ce critère n'étant pas au programme, on pourra rechercher dans la littérature des articles s'y référant si nécessaire.

Critère « graphique » de stabilité : le critère du Revers

On parle ici de critère graphique car l'interprétation graphique dans le diagramme de Bode est directe.

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme $1 + H_{BO}(p) = 0$. Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation $H_{BO}(p) = -1$. Ainsi dans le plan complexe, le point $(-1; 0)$ permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain dB nul) et une phase de -180° .

Résultat –

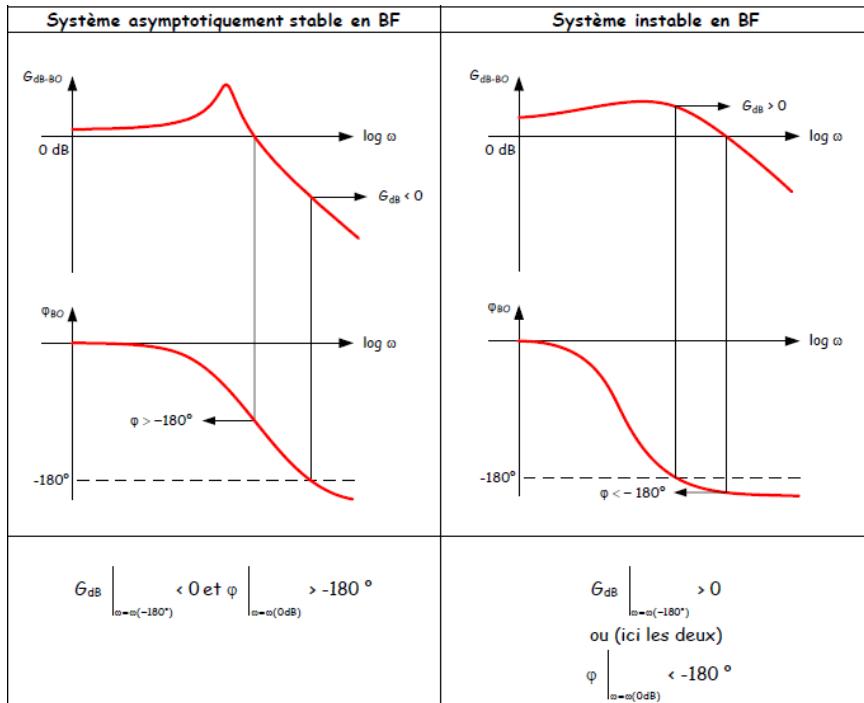
Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a :**

$$G_{dB}|_{\omega=\omega_{-180^\circ}} < 0_{dB} \quad \text{et} \quad \varphi|_{\omega=\omega_{0dB}} > -180^\circ.$$

En notant ω_{-180° la pulsation pour laquelle la phase vaut -180° et ω_{0dB} la pulsation pour laquelle le gain est nul.

Résultat –

Condition (non suffisante ...) de stabilité : les pôles de la FTBO doivent être à partie réelle positive.



Vers le système réel...

Le résultat donné ci-dessus est un résultat théorique dans le sens où le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système réel aura un écart avec le diagramme de Bode du système modélisé.

Résultat – Marges

Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considérera, dans le cas général que le système est stable si :

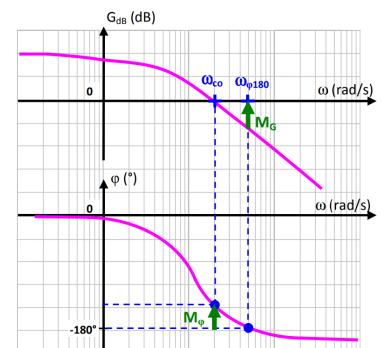
- ▶ la marge de gain est supérieure à 10 dB;
- ▶ la marge de phase est supérieure à 45°.

Définition – Marge de phase

La marge de phase est définie telle que $M_\varphi = 180^\circ + \arg(\text{FTBO}(j\omega_{c0}))$ où ω_{c0} est la pulsation de coupure pour laquelle $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{c0})| = 0 \text{ dB}$.

Définition – Marge de gain

La marge de gain est définie telle que $M_G = -20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})|$ où $\omega_{\varphi180}$ est la pulsation pour laquelle $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})) = -180^\circ$.



La marge de gain permet compte de tenir compte de variations de gain de la boucle ouverte.

De même, la marge de phase permet de tenir compte de variation de phase (retard ou déphasage non modélisés).

La nécessité d'avoir recours à des marges de stabilité apparaît notamment lorsque :

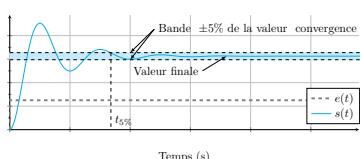
- ▶ la simplification du modèle amène à considérer uniquement les pôles dominant,
- ▶ le modèle ne prend pas en compte la dynamique de certains composants du système;
- ▶ le système n'est pas invariant au cours du temps;
- ▶ on s'éloigne de la zone de fonctionnement linéaire;
- ▶ certaines non linéarités sont ignorées.

2.2 Rapidité des systèmes asservis

Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.

Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Temps de réponse à 5%



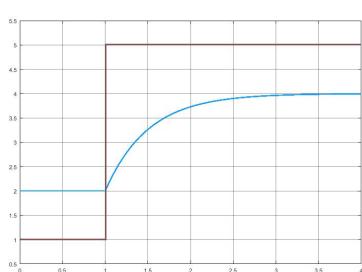
Méthode – Détermination du temps de réponse

En pratique, on détermine le temps de réponse à 5%.

1. Tracer sur le même graphe la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.

Résultat –

Plus le temps de réponse à 5% d'un système est petit, plus le régime transitoire disparaît rapidement.



Exemple – Donner le temps de réponse à 5% de la réponse à un échelon donné dans la figure suivante.

Les pièges du temps de réponse à 5% :

- ▶ le temps de réponse à 5% se mesure à plus ou moins 5% de la sortie (et pas de l'entrée). Ainsi, si le système est stable, le temps de réponse n'est **jamais l'infini**;
- ▶ si le signal ne part pas de 0 (en ordonnée), il faut réaliser la bande à $S_0 + \Delta s \pm 0.05\Delta s$;
- ▶ si le signal ne part pas de 0 (en abscisse), il faut tenir compte du décalage des temps.

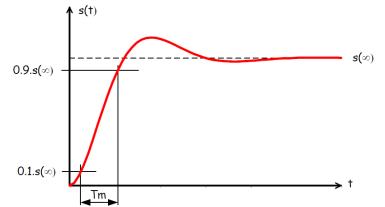
Temps de montée

Pour caractériser la rapidité d'un système, on peut aussi utiliser le temps de montée. Il s'agit du temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur finale. Ce temps de montée caractérise la « vivacité » d'un système.

2.2.2 Rapidité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2

Systèmes d'ordre 1

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5% est donné par 3τ .



Résultat –

Pour un système du premier ordre, plus la constante de temps est petite, plus le système est rapide.

Soit un système du premier ordre bouclé avec un retour unitaire. L'expression de la FTBF est donnée par $\text{FTBF}(p) = \frac{K}{1 + \tau p + K}$. La constante de temps est alors $\tau_{\text{BF}} = \frac{\tau}{1 + K}$.

Résultat –

Pour un système du premier ordre bouclé (avec un retour unitaire), plus le gain statique est grand, plus le système est rapide.

Systèmes d'ordre 2

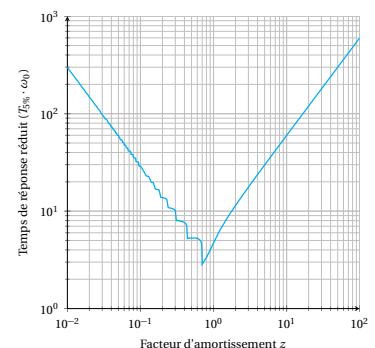
Résultat –

Pour un système du second, à ξ constant, plus la pulsation propre est grande, plus le système est rapide.

Soit un système du deuxième ordre bouclé avec un retour unitaire. En déterminant les caractéristiques de la FTBF, on obtient $K_{\text{BF}} = \frac{K}{1 + K}$, $\omega_{\text{BF}} = \omega_0 \sqrt{1 + K}$, $\xi_{\text{BF}} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K}}$.

Résultat –

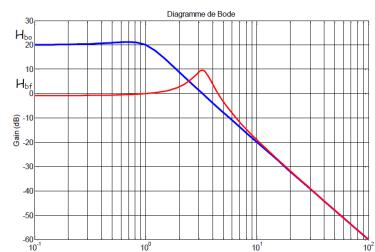
- ▶ L'augmentation du gain de FTBO augmente la pulsation de la FTBF.
- ▶ L'augmentation du gain de FTBO diminue le coefficient d'amortissement. Suivant la valeur de ξ_{BF} le système peut devenir plus ou moins rapide.



2.2.3 Résultats dans le diagramme de Bode

Résultat –

Plus la bande passante d'un système est élevée, plus le système est rapide.



Résultat -

Plus la pulsation de coupure à 0 dB de la boucle ouverte est grande, plus le système asservi est rapide.

2.3 Précision des systèmes asservis

2.3.1 Système non perturbé

Frédéric Mazet, Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.

Florestan Mathurin, Stabilité des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

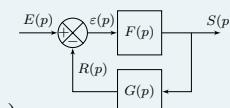
Définition -

La précision est l'écart entre la valeur de consigne et la valeur de la sortie. Pour caractériser la précision d'un système, on s'intéresse généralement à l'écart en régime permanent.

Attention à bien s'assurer que, lors d'une mesure expérimentale par exemple, les grandeurs de consigne et de sortie sont bien de la même unité (et qualifient bien la même grandeur physique).

Pour un système non perturbé dont le schéma-blocs est celui donné ci-contre, on caractérise l'écart en régime permanent par :

$$\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) \iff \varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

**Définition -**

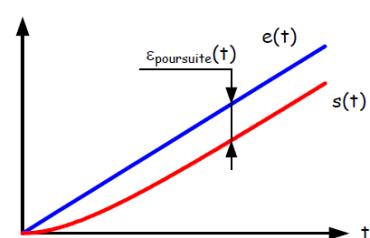
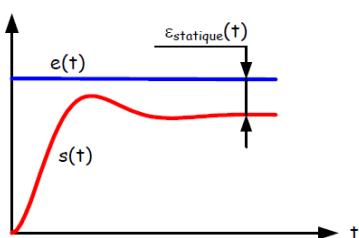
Un système est précis pour une entrée lorsque $\varepsilon_{\text{permanent}} = 0$.

Définition -

~

Le nom de l'écart dépend de l'entrée avec lequel le système est sollicité :

- ▶ écart statique, système sollicité par une entrée échelon : $e(t) = E_0$ et $E(p) = \frac{E_0}{p}$;
- ▶ écart en vitesse ou en poursuite, système sollicité par une rampe : $e(t) = Vt$ et $E(p) = \frac{V}{p^2}$;
- ▶ écart en accélération : système sollicité par une parabole, $e(t) = At^2$ et $E(p) = \frac{A}{p^3}$.



Petit développement ...

Calculons l'écart statique pour le système précédent. On a : $\varepsilon(p) = E(p) - R(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p) \iff \varepsilon(p)(1 + F(p)G(p)) = E(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + F(p)G(p)}$.

Résultat –

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$$

Poursuivons ...

On a $\text{FTBO}(p) = \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^\alpha (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}$ avec $m < n$.

FTBO de classe nulle

- ▶ Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$.
- ▶ Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = +\infty$.
- ▶ Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = +\infty$.

FTBO de classe 1

- ▶ Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$.
- ▶ Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = \frac{V}{K_{BO}}$.
- ▶ Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = +\infty$.

FTBO de classe 2

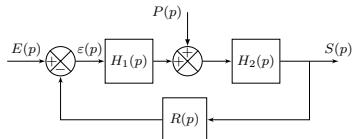
- ▶ Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$.
- ▶ Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = 0$.
- ▶ Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{perm}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^3} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^2 (1 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}} = \frac{A}{K_{BO}}$.

Résultat -

Classe	Consigne échelon $e(t) = E_0$ $E(p) = \frac{E_0}{p}$	Consigne en rampe $e(t) = Vt$ $E(p) = \frac{V}{p^2}$	Consigne parabolique $e(t) = At^2$ $E(p) = \frac{A}{p^3}$
0	$\varepsilon_S = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$	$\varepsilon_V = +\infty$	$\varepsilon_A = +\infty$
1	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_V = \frac{V}{K_{BO}}$	$\varepsilon_A = +\infty$
2	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_V = 0$	$\varepsilon_A = \frac{A}{K_{BO}}$

Remarque

L'écart statique est nul si la boucle ouverte comprend au moins une intégration. À défaut, l'augmentation du gain statique de la boucle ouverte provoque une amélioration de la précision.

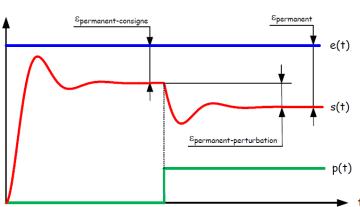
2.3.2 Système perturbé

Soit le schéma-blocs ci-contre.

L'écart est caractérisé par le soustracteur principal, c'est-à-dire celui situé le plus à gauche du schéma-blocs.

Par lecture directe, on a : $\varepsilon(p) = E(p) - R(p)S(p) = E(p) - R(p)(H_2(p)(P(p) + \varepsilon(p)H_1(p)))$
 $\iff \varepsilon(p) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) - R(p)H_1(p)H_2(p)\varepsilon(p) \iff \varepsilon(p)(1 + R(p)H_1(p)H_2(p)) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)} - \frac{R(p)H_2(p)}{1 + R(p)H_1(p)H_2(p)}P(p).$

On a donc : $\varepsilon(p) = \underbrace{\frac{1}{1 + FTBO(p)}E(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la consigne}} - \underbrace{\frac{R(p)H_2(p)}{1 + FTBO(p)}P(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la perturbation}}.$

**Résultat -**

Il faut au moins un intégrateur en amont d'une perturbation constante pour annuler l'écart vis-à-vis de cette perturbation. Un intégrateur placé en aval n'a aucune influence.

Quand ce n'est pas le cas, un gain K_1 important en amont de la perturbation réduit toujours l'écart vis-à-vis de cette perturbation.

Application 1

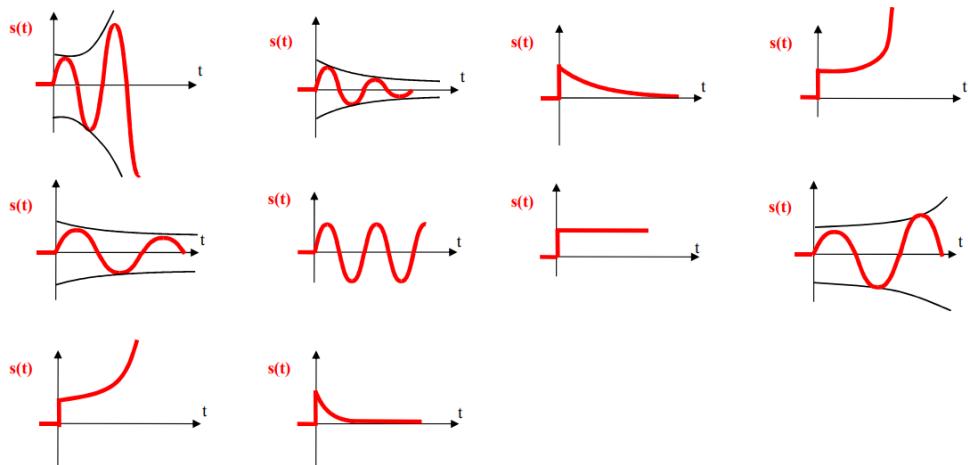
Stabilité des systèmes – Sujet

Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

C1-01

C2-03



Exercice 2 – Pôles de la FTBF

On donne les pôles des FTBF de plusieurs systèmes :

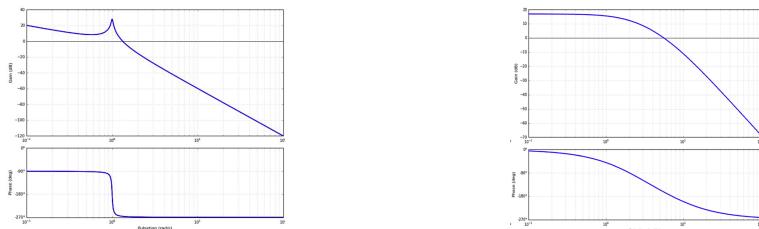
- | | | |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------|
| 1. $-1, -2;$ | 4. $-2 + 3j, -2 - 3j, -2;$ | 7. $-1 + j, -1 - j;$ |
| 2. $-3, -2, 0;$ | 5. $-j, j, -1, 1;$ | 8. $2, -1, -3;$ |
| 3. $-2 + j, -2 - j, 2j, -2j;$ | 6. $-1, +1;$ | 9. $-6, -4, 7.$ |

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

Question 2 Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

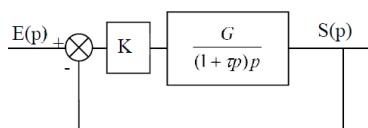


Exercice 4 – Étude de la stabilité

Objectif

- ▶ Caractériser la stabilité d'un système à partir de la FTBO.
- ▶ La marge de gain est supérieure à 10 dB et que la marge de phase est supérieure à 45°.

On donne le schéma ci-contre.



On a $K = 1$, $\tau = 0,1$ et $G = 20$.

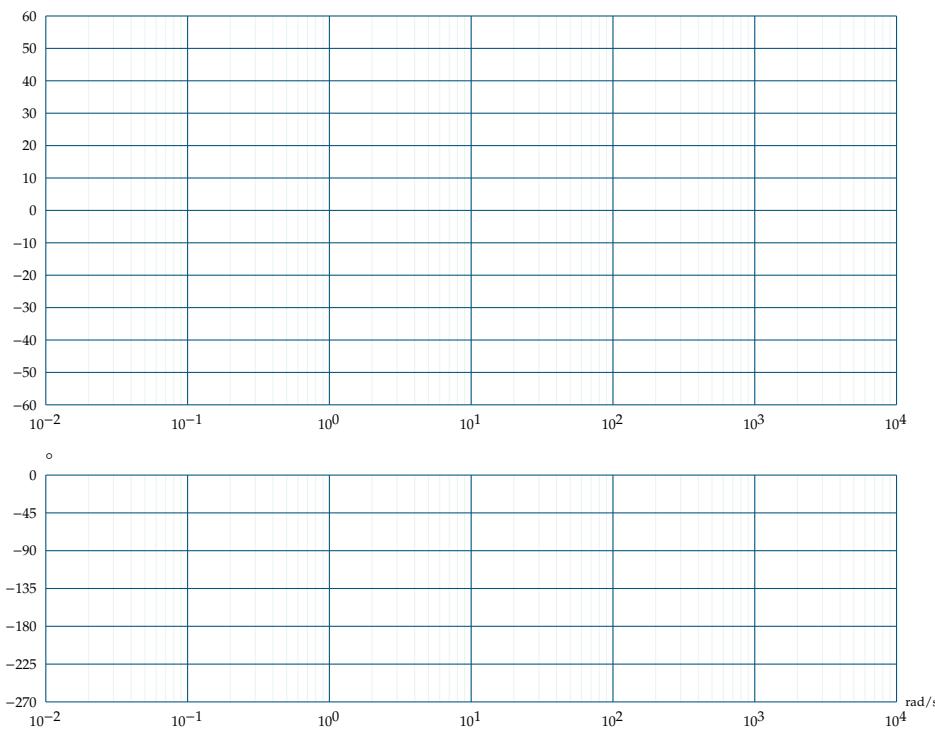
Question 1 Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

Question 2 Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

Question 3 Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

Question 4 Confirmer ces résultats par le calcul.

Question 5 Conclure par rapport au cahier des charges.



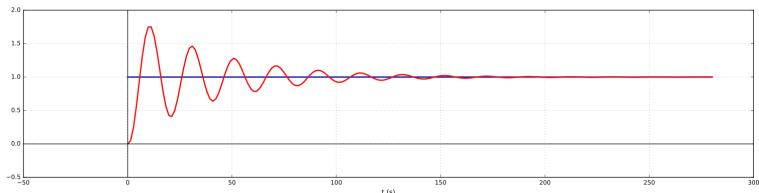
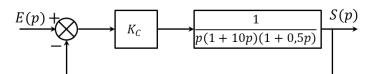
Application 2

Stabilité des systèmes – Sujet

C1-01

On considère le schéma-blocs ci-contre et la réponse indicielle pour $K_C = 1$.

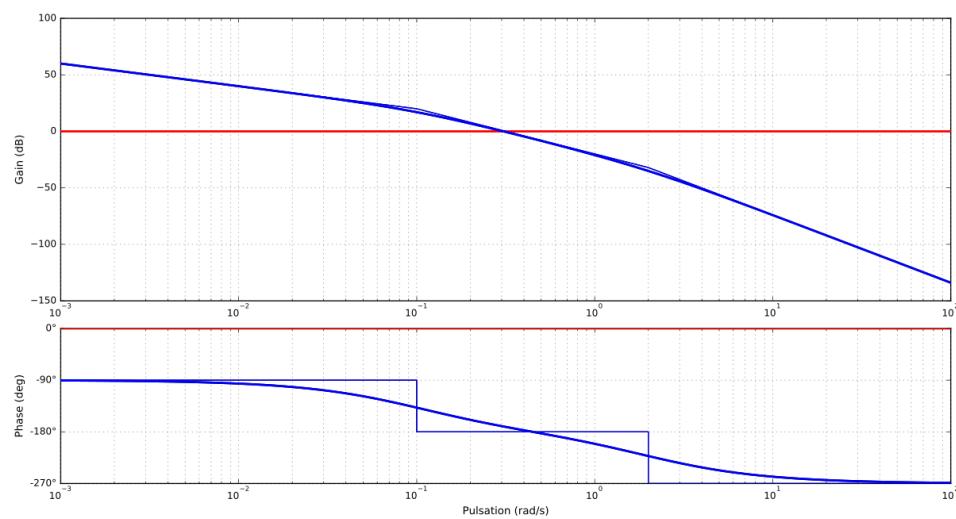
Question 1 Justifier l'allure du diagramme du diagramme de Bode donné ci-dessous pour $K_C = 1$.



Question 2 Donner graphiquement les marges de phase et de gain pour $K_C = 1$.

Question 3 Donner analytiquement les marges de phase et de gain pour $K_C = 1$ (méthode).

Question 4 Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et 40°. Déterminer la plus grande valeur de K_C permettant de vérifier ce cahier des charges



Application 3

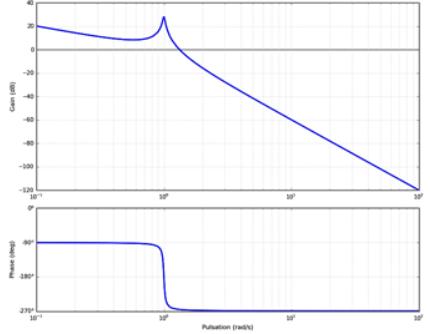
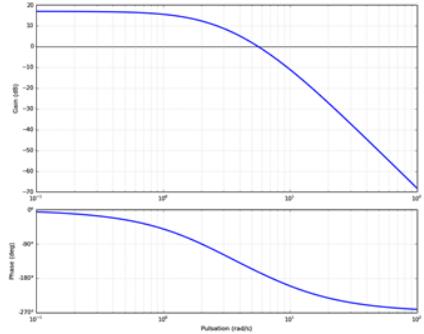
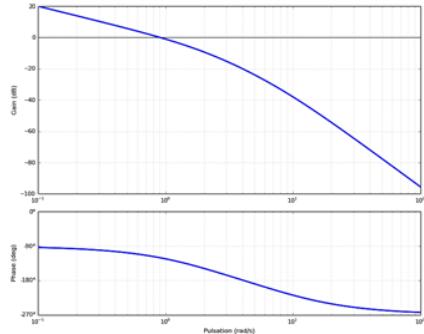
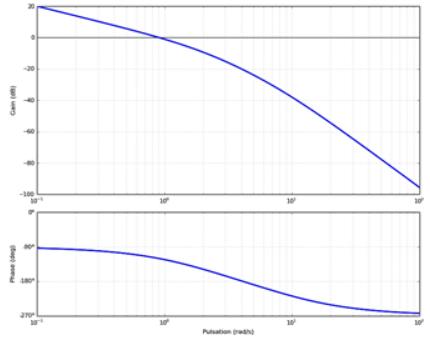
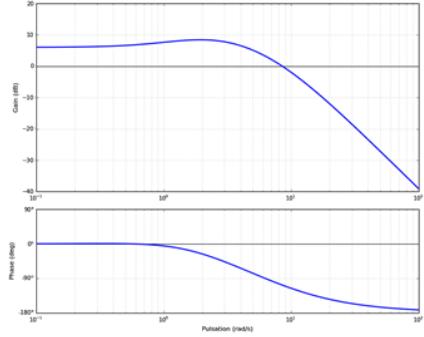
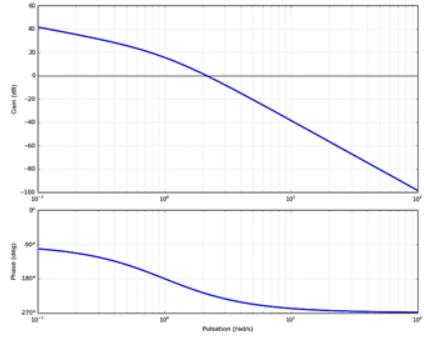
Stabilité des systèmes – Sujet

C1-01

C2-03

P. Dupas?

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.





TD 1

Drone quadri-rotor – Sujet

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction \vec{z}) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe (O, \vec{x})) et en tangage (rotation autour de l'axe (O, \vec{y})) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ($\frac{\omega_2}{\omega_4}$ pour le roulis et $\frac{\omega_1}{\omega_3}$ pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

Objectif

- ▶ Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- ▶ Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.

Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

u représente la tension de commande du moteur, $\omega(t)$ son taux de rotation, τ et k_v des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme $k_q\omega^2$ provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en ω^2 , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement ω_0 , fréquence

Accélération verticale	Vers le haut : 3g Vers le bas : 0,5g (valeur absolue)
Précision	Erreur statique nulle
Stabilité	Marge de phase minimale : 35°. Dépassement maximal < 5 %
Rapidité	$t_{r5\%} < 0,6$ s



de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ et $u = u_0 + \delta u$ où $\delta\omega$ et δu représentent des petites variations de ω et u autour du point de fonctionnement.

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0 .

Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta\omega$ et δu est de la forme $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 . On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu .

Question 3 Calculer la fonction de transfert $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Recherche du point de fonctionnement ω_0

Dans le mouvement de déplacement vertical de direction \vec{Z} , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$. La masse totale du drone est $m = 240$ g. On prendra $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 . La poussée F varie avec ω^2 . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant F à la fréquence de rotation ω en rad/s.

Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

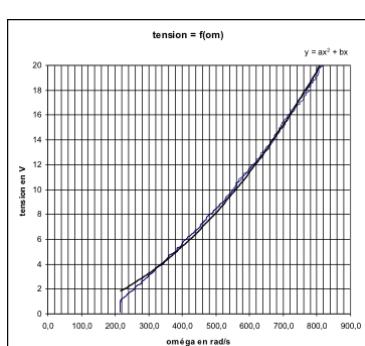
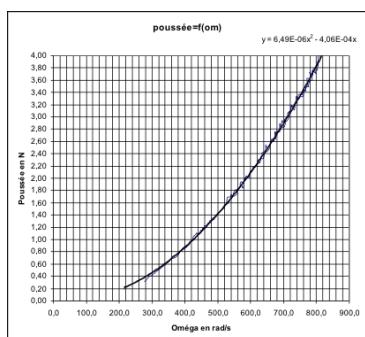
Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande u et la fréquence de rotation ω en rad/s en régime permanent lorsque $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$. La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme $y = ax^2 + bx$. On donne la constante de temps du moteur : $\tau = 125$ ms.

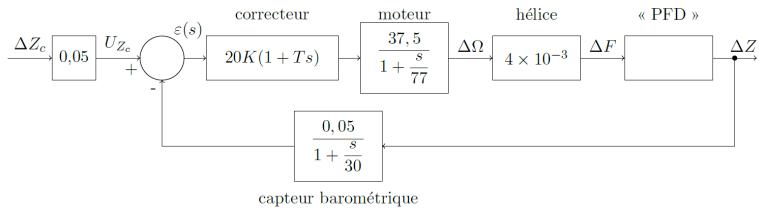
Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a , b et τ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$.

Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement ω_0 , par le schéma-bloc suivant :





Le gain du capteur barométrique est de $0,05 \text{ V m}^{-1}$. On pose $z(t) = z_0 + \delta z(t)$, $\Delta Z(p)$ la transformée de Laplace de $\delta z(t)$, $F = F_0 + \delta F$ représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire : $m\ddot{z} = 4F - mg$.

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté $K_{BO} = 2,5K$. La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée figure 2.3, en gras avec un correcteur proportionnel ($T = 0$) et en trait fin avec le correcteur retenu ($K = 1$ et $T = 0,2s$).

Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0,2s$ et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad s^{-1} , le gain sera compris entre -120 dB et 10 dB .

Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega_{c0 \text{ dB}} = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié ? Justifier.

La figure 2.4 représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain K précédemment déterminée.

Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié ?

Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

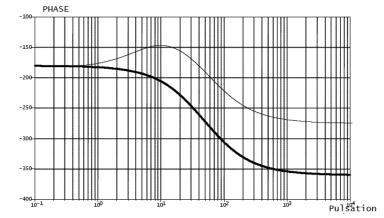


FIGURE 2.3 – Courbe de phase

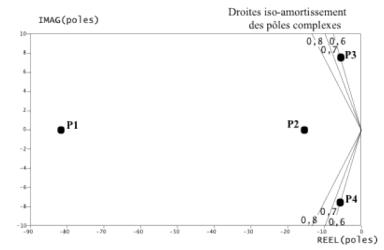
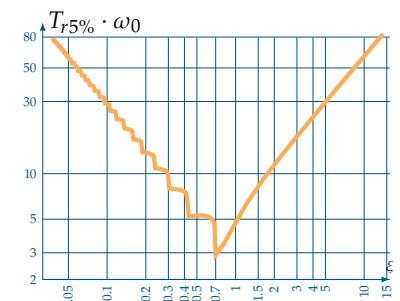


FIGURE 2.4 – Carte des pôles



Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Éléments de correction

1. $-\frac{1}{\tau}\omega_0 - k_q\omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau}u_0 = 0;$
2. $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q\omega_0$ et $B = \frac{k_v}{\tau}.$
3. $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q \omega_0}$ et $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q \omega_0}.$
4. $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6 \text{ N}.$
5. $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}.$
6. $k_v = \frac{1}{b} (\text{rad/s/V})$ et $k_b = \frac{a}{b\tau}.$
7. $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2} \cdot H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1+Tp}{\left(1+\frac{p}{77}\right)\left(1+\frac{p}{30}\right)}.$
- 8.
- 9.
10. $K = 17,9.$
11. FTBO de classe 2, ε_s nul.
12. $p_2 = -15, p_3 = -5 + 8j, p_4 = -5 - 8j.$
13. $\xi = 0,6$
- 14.
15. $p = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}.$ $\omega_n \simeq 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
16. $t_{5\%} \simeq 0,61 \text{ s}.$



TD 2

Stabilisateur actif d'image – Sujet

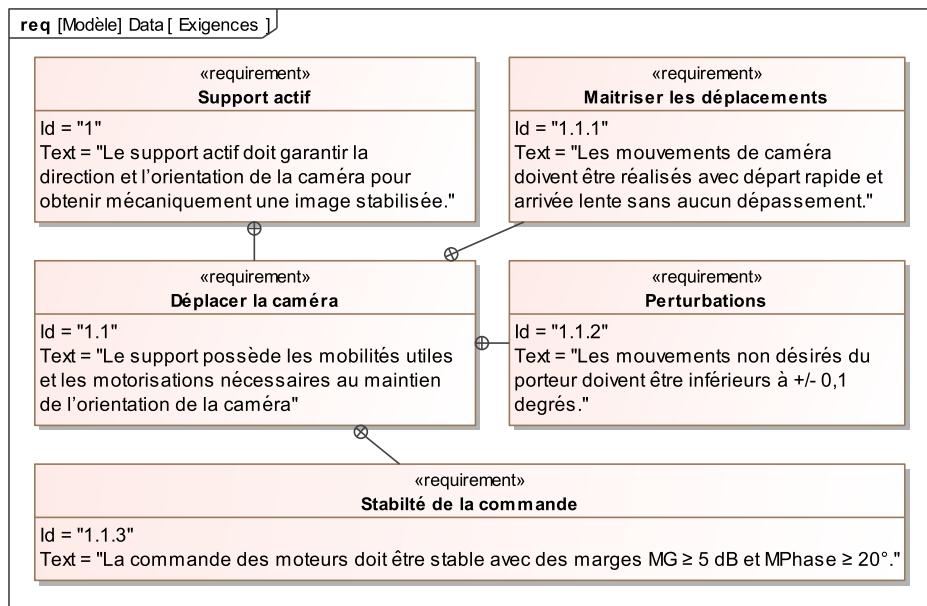
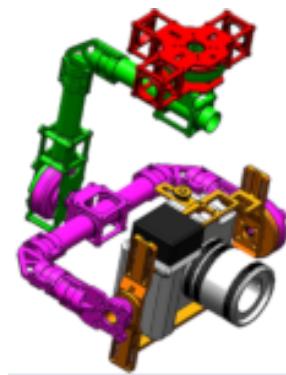
Mines Ponts 2018 – PSI

C1-01

C2-03

Mise en situation

On s'intéresse à une nacelle active de caméra. Ce système de stabilisation, nommé CAM-GYR, permet de s'assurer que quelque soit l'orientation du porteur (caméraman), l'axe vertical de la caméra et toujours parallèle à la direction de la pesanteur. Le système est équipé de 3 moteurs permettant d'ajuster le roulis, le tangage et le lacet. On s'intéresse ici uniquement à la stabilisation de l'axe de tangage.



Objectif

Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

Travail demandé

On considère un modèle de l'axe de tangage sans perturbation et qui reçoit des consignes assez rapides modélisées par des échelons. L'ensemble {moteur, charge} ne

présente pas de réducteur. Il est modélisé par un ensemble en série de deux fonctions de transfert :

- un gain pur de valeur K_m ;
- une fonction de transfert du premier ordre de gain statique A et de constante de temps τ_m .

Cet ensemble présente comme entrée la commande du moteur $\text{com}(t)$ et comme sortie la vitesse angulaire de rotation du moteur $\omega_m(t)$. Le réglage retenu est tel que $K_m A = 1$. **Le retour K_D agit par un sommateur.** Dans cette étude, $A_i(p) = 1$.

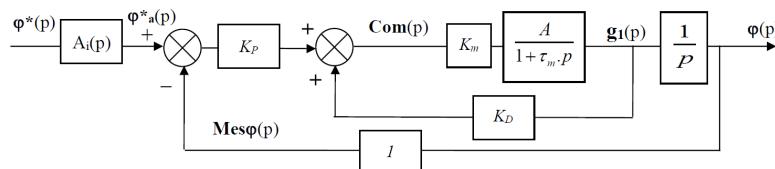


FIGURE 2.5 – Modèle 1 de l'axe de tangage.

Question 1 Avec $K_m A = 1$, calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas : $A_i(p) = 1$.

Question 2 Quelle est la valeur maximale de K_D pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

En accord avec les résultats précédents, on fixe $K_D = 0,5$ et $\tau_m = 0,2\text{s}$. Dans un premier temps on impose $K_P = 10\text{s}^{-1}$.

Question 3 Lorsque $A_i(p) = 1$, le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Dans un second temps on se place en mode stabilisation. On s'intéresse toujours au comportement de l'axe de tangage mais sans le filtre passe bas ($A_i(p) = 1$). On considère ici que la consigne est constante donc $\varphi_a^*(t) = 0$. Une perturbation $\text{Pe}(p)$ agit au niveau de l'ensemble (moteur, charge) modélisée sur le schéma bloc (Modèle 2). On appelle $\text{Com}(p)$ la transformée de Laplace de la commande du moteur $\text{com}(t)$.

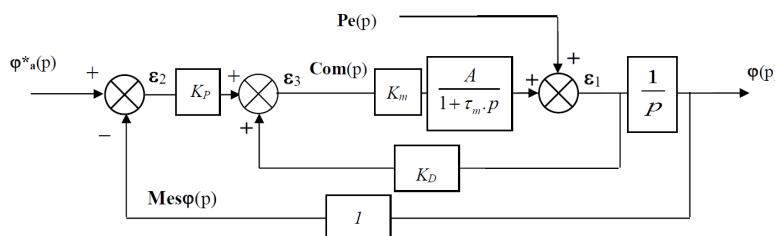
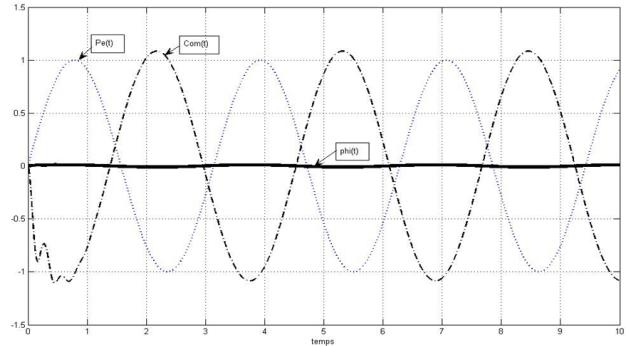
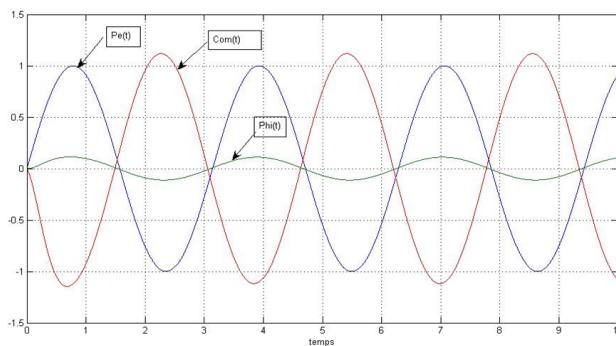


FIGURE 2.6 – Modèle 2 de l'axe de tangage.

Question 4 Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert $\text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)}$ qui lie la commande à la perturbation.

Question 5 Avec le modèle 2 et une entrée $\text{Pe}(p)$ échelon unitaire, déterminer la limite quand t tend vers l'infini de la commande : $\text{com}(t)$. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Question 6 Avec le modèle 2 déterminer la FTBO $\frac{\text{Mesφ}(p)}{\varepsilon_2(p)}$ de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie $\text{Pert}(p) = \frac{\varphi(p)}{\text{Pe}(p)}$.



Question 7 Déterminer la valeur lorsque t tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat?

Question 8 On désire une marge de gain de $M_G \geq 5$ dB et une marge de phase $M\varphi \geq 20^\circ$ (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de K_P en utilisant les données ci-dessous.

$$\text{On note } F(\omega) = \frac{2}{j\omega(1 + 0,4j\omega)}.$$

ω (rad/s)	1	2,5	5	7	10
$\text{Arg}(F(\omega))$	-112°	-135°	-153°	-160°	-166°
$20 \log F(\omega) $	5,4 dB	3 dB	-1 dB	-3 dB	-6,2 dB

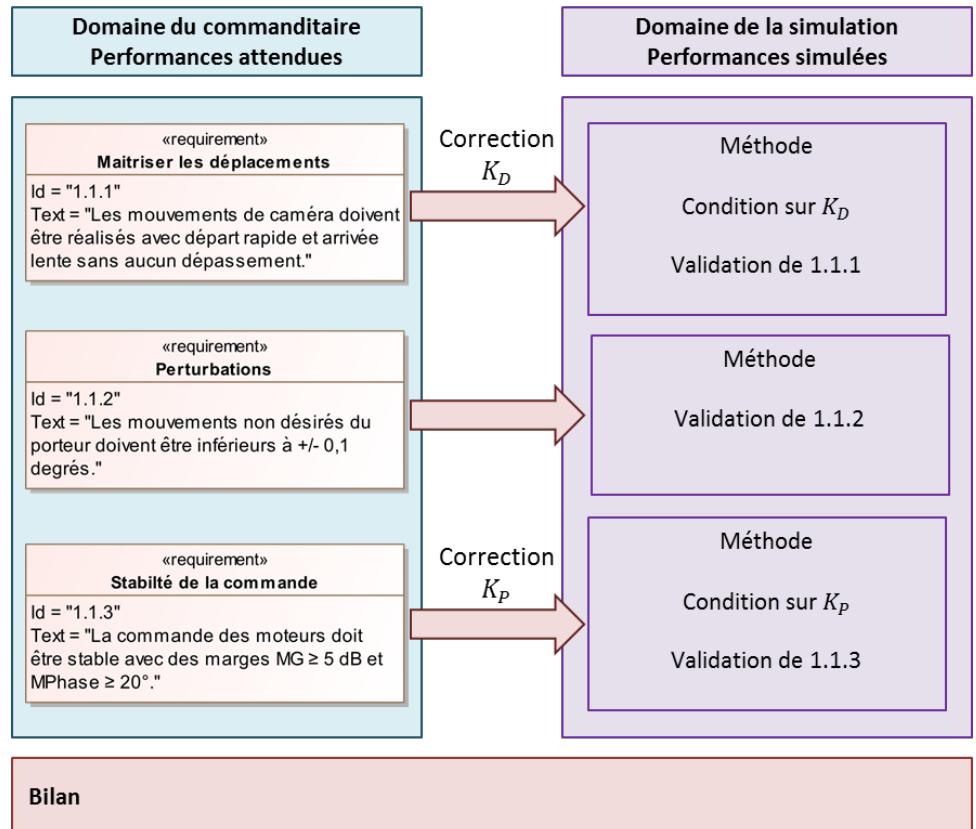
Le figure suivante (droite) présente la réponse temporelle de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale (due par exemple au vent qui crée un balancement de la GYRCAM) (ordonnée en degrés).

Question 9 Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de $Com(t)$ relativement à $Pe(t)$ en utilisant le résultat de la question 5. Afin d'améliorer le comportement, un autre réglage a été effectué (voir figure précédente – droite).

Question 10 Analyser comparativement ce nouveau tracé.

Synthèse

Question 11 En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.



Éléments de correction

1. $FTBO(p) = \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D)}$ et $FTBF(p) = A_i(p) \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P}$.
2. $K_D < 1$.
- 3.
4. $Stab(p) = \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}$.
5. $\lim_{t \rightarrow \infty} com(t) = -1$.
6.
$$\frac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)} \quad \text{et} \quad Pert(p) = \frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D) A K_m}.$$
7. $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, 1^\circ$.
8. $K_P < 1, 41$.
9. .
10. .



TD 3

Direction automobile découplée – Sujet

Banque PT – SIA 2017.

Mise en garde : il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!

Mise en situation

Le principe de la direction découpée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de type télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisé par l'organisation qui suit ([figure 2.7](#)).

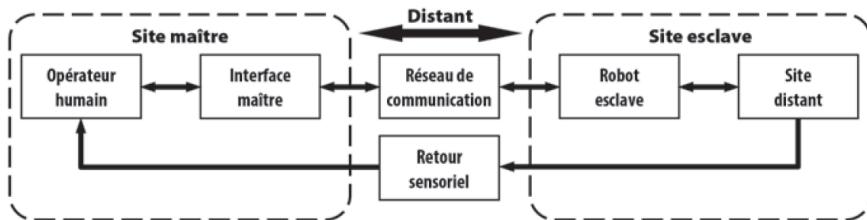


FIGURE 2.7 – Architecture maître-esclave

Une direction automobile découpée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme ([figure 2.14](#)) précise les principales exigences.

Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure [figure 2.8](#).

Notations :

- arbre-volant v : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- G_v : centre d'inertie de l'arbre-volant v ;
- $I_v(G_v)$: opérateur d'inertie de v au point G_v ;
- J_v : le moment d'inertie de v autour de l'axe (G_v, \vec{x}_v) ;
- f_v : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$: l'angle de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\theta_v(p)$ dans le domaine de Laplace);

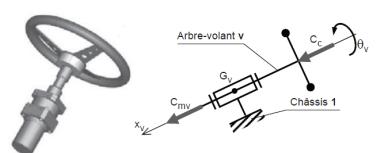


FIGURE 2.8 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

- $\omega_v(t)$: la vitesse de rotation de l'arbre-volant v par rapport au châssis 1 (noté $\Omega_v(p)$ dans le domaine de Laplace).

Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen;
- G_v est situé sur l'axe de la liaison pivot;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux $C_f \vec{x}_v$;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant v se réduisent respectivement aux couples $C_c \vec{x}_v$ et $C_{mv} \vec{x}_v$.

Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la figure 2.9 où le retour est unitaire. On note $\varepsilon_{\theta v}(t)$ l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et $\varepsilon_{cv}(t)$ le couple résultant des couples C_c et C_{mv} .

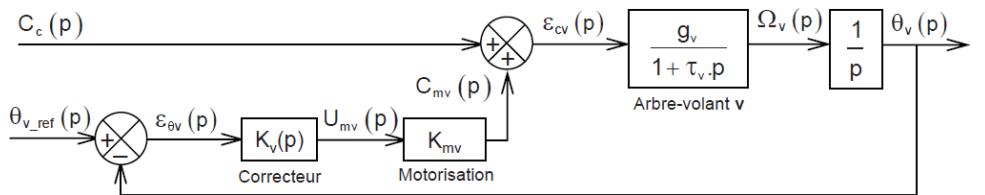


FIGURE 2.9 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes : $g_v = 5 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$; $\tau_v = 0,1 \text{ s}$ et $K_{mv} = 0,4 \text{ N m V}^{-1}$.

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain K_{mv} .

Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que $K_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$ avec $\tau_i = \alpha \tau_v$.

Question 1 Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité ?

Question 2 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v1}(p)$ du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v1}(p) \varepsilon_{\theta v}(p)$ sous la forme $\text{FTBO}_{v1}(p) = K_{BOv1} \frac{1}{p^2} H(p)$ pour laquelle on précisera les expressions de K_{BOv1} et de $H(p)$ avec $H(p)$ de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si α doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de α).

On commence par choisir τ_i en prenant $\alpha = 10$ et on cherche à optimiser K_i .

$$\text{On donne } \varepsilon_{\theta v}(p) = \frac{\theta_{v_ref}(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p(1 + \tau_v p)} \cdot \frac{C_c(p)}{1 + \text{FTBO}_{v1}(p)}.$$

Question 3 Quelle doit être la valeur minimale de K_i pour que les critères de précision soient satisfaits ?

On donne figure 2.15 le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$.

Question 4 Tracer sur le lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

Question 5 Donner, par lecture du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v1}(p)$, la valeur de K_i qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

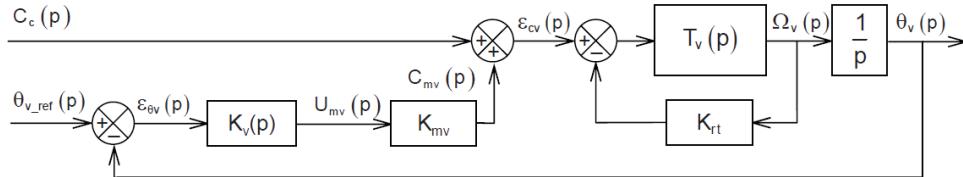
On donne (figure 2.10) l'évolution de cette pulsation ω_ℓ en fonction de α et un abaque qui représente la valeur maximale de φ_m de $\varphi(\omega)$ en fonction de α .

Question 6 Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte, ω_0 , fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de α et/ou K_i ? On pourra s'aider des abaques fournis (figure 2.10) pour justifier la réponse.

On donne (figure 2.11), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1^{er} dépassement en % de la valeur finale, en fonction de K_i et pour $\alpha = 10$.

Question 7 Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en reprenant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi $\alpha = 10$.

Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique



Question 8 Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

Question 9 Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $T_{\text{vrt}}(p)$ définie par $\Omega_v(p) = T_{\text{vrt}}(p)\epsilon_{cv}(p)$ en fonction de $T_v(p)$ et K_{rt} . Mettre alors $T_{\text{vrt}}(p)$ sous la forme $T_{\text{vrt}}(p) = T_v(p)\beta \frac{1 + \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle, on précisera l'expression de β en fonction de K_{rt} et du gain statique g_v .

Question 10 Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte $\text{FTBO}_{v2}(p)$, telle que, $\theta_v(p) = \text{FTBO}_{v2}(p)\epsilon_{\theta_v}(p)$, peut ainsi se mettre sous la forme $\text{FTBO}_{v2}(p) = K_{\text{BOv2}} \frac{1 + \alpha \tau_v p}{p^2 + \beta \tau_v p}$ pour laquelle on donnera l'expression de K_{BOv2} en fonction de K_{mv} , g_v , τ_v , K_i , α et β .

On donne sur la figure 2.15 le tracé du lieu de transfert de la $\text{FTBO}_{v2}(p)$ dans le plan de Bode, pour $K_i = 1,2 \text{ V rad}^{-1}$ (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec $\beta = 1/6$ (non justifié) et pour $\alpha = 10$ (valeur choisie précédemment).

Question 11 Justifier que β doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

On donne (figure 2.13), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement

On note :

- ▶ $\varphi(\omega)$ la phase de $H(p)$, soit $\text{Arg}[H(j\omega)]$;
- ▶ ω_ℓ la plus grande pulsation qui vérifie $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45^\circ$.

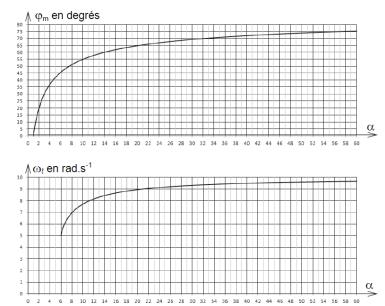


FIGURE 2.10 – Aboques de réglage de $H(p)$ en fréquentiel

FIGURE 2.12 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage avec retour tachymétrique

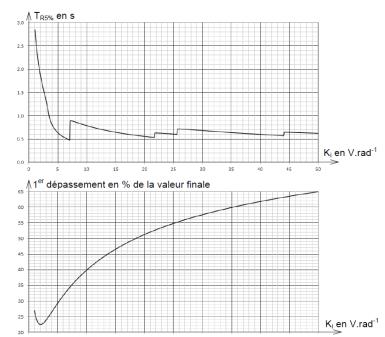


FIGURE 2.11 – Aboques de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée

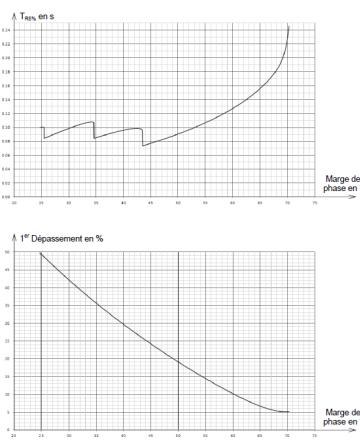


FIGURE 2.13 – Abaque de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée avec retour tachymétrique

Éléments de correction

1. .
2. $K_{BOv1} = \frac{K_i K_{mv} g_v}{\alpha \tau_v}$ et $H(p) = \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \tau_v p}$, $\alpha > 1$.
3. $K_i \geq 10\alpha \frac{\tau_v}{K_{mv}}$ et $K_i \geq 25 \text{ V rad}^{-1}$.
4. .
5. $K_i = 5 \text{ V rad}^{-1}$.
6. .
7. .
8. .
9. $\beta = \frac{1}{1 + K_{rt} g_v}$
10. $K_{BOv2} = \frac{K_i K_{mv} \beta g_v}{\alpha \tau_v}$.
11. .
12. $M_\varphi = 58^\circ$.
13. $K_i = 120 \text{ V rad}^{-1}$.
14. .
15. .

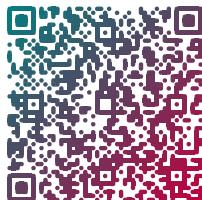
en réponse à un échelon d'angle θ_{v_ref} , en fonction de la marge de phase du système, réglé avec $\beta = 1/6$.

Question 12 Donner par lecture des abaques (figure 2.13), la valeur de la marge de phase la plus grande, permettant de satisfaire les deux critères de temps de réponse et de dépassement.

Question 13 Déterminer par lecture du lieu de transfert dans le plan de Bode de $FTBO_{v2}(p)$, tracé dans les conditions de la question 11, la valeur de K_i permettant d'obtenir la marge de phase trouvée à la question précédente.

Question 14 Faire une synthèse argumentée de la démarche proposée dans cette partie, pour optimiser le comportement de l'unité de pilotage. Conclure, en reprenant chaque critère de l'exigence Id 1-3.3, sur la satisfaction du cahier des charges

Question 15 Avec le réglage établi par le modèle, quel phénomène pourrait endommager certains composants du système réel ? Quelle disposition technologique permettrait d'éviter ce phénomène ? Quelles seraient les conséquences sur les performances du système ?



Exigence	Critères	Niveaux	Flexibilité
Id 1-3.3 – Le système doit fournir au conducteur un retour d'effort qui optimise le confort et la sécurité.	<ul style="list-style-type: none"> 1- Pulsion de coupure à 0dB en boucle ouverte ω_0 2- Temps de réponse à 5% (boucle fermée) 3- Erreur statique en réponse à une consigne d'angle <ul style="list-style-type: none"> - pour une consigne en échelon - pour une consigne en rampe de pente Ω_{v0} 4- Erreur statique en réponse à une perturbation de couple <ul style="list-style-type: none"> - pour une perturbation en échelon - pour une perturbation en rampe de pente C_{o0} 5- Stabilité <ul style="list-style-type: none"> - Marge de phase - Marge de gain 6- Amortissement <ul style="list-style-type: none"> - 1^{er} dépassement en réponse indicielle (boucle fermée) 	<ul style="list-style-type: none"> 30 rad/s (≈ 5 Hz) 0,1 s nulle $\leq 0,5\%$ de Ω_{v0} nulle $\leq 10\%$ de C_{o0} 45° 20 dB 0% 	<ul style="list-style-type: none"> mini ± 20 ms aucune $\pm 0,2\%$ aucune $\pm 5\%$ mini mini 15% maxi

FIGURE 2.14 – Exigences

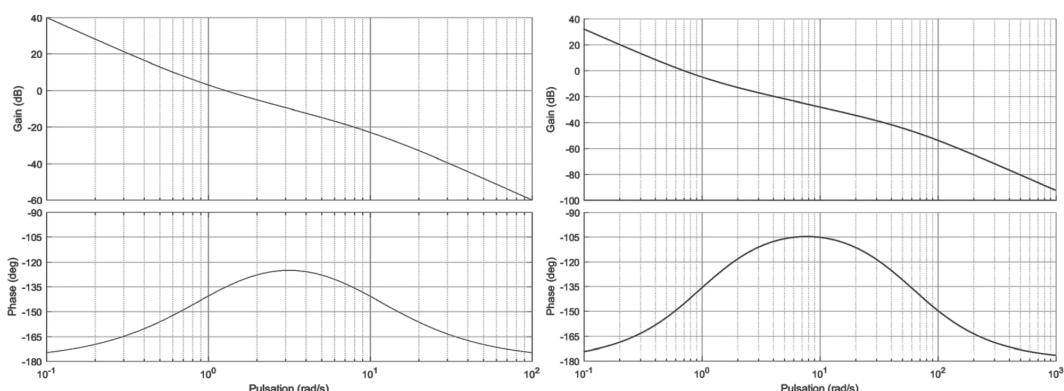


FIGURE 2.15 – Lieux de transfert de $FTBO_{v1}(p)$ et $FTBO_{v2}(p)$

Colle 1

Stabilité – Sujet

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \frac{2}{(10p + 1)^3}$.

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 3 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

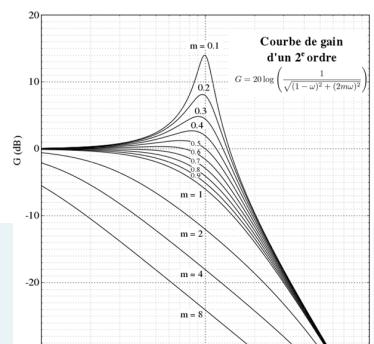
Question 4 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

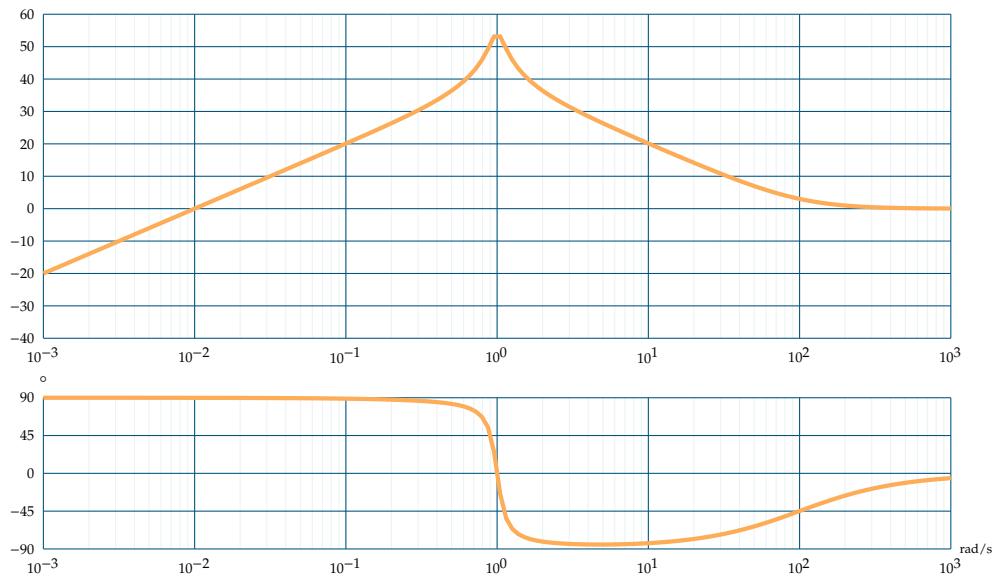
Question 5 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \frac{Ki}{p}$.

Question 6 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 7 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.





Colle 2

Stabilité – Sujet

Équipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{10}{(p+1)(p+4)}.$$

Question 1 Tracer le schéma-blocs.

Question 2 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 3 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

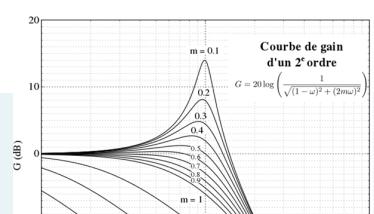
Question 4 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

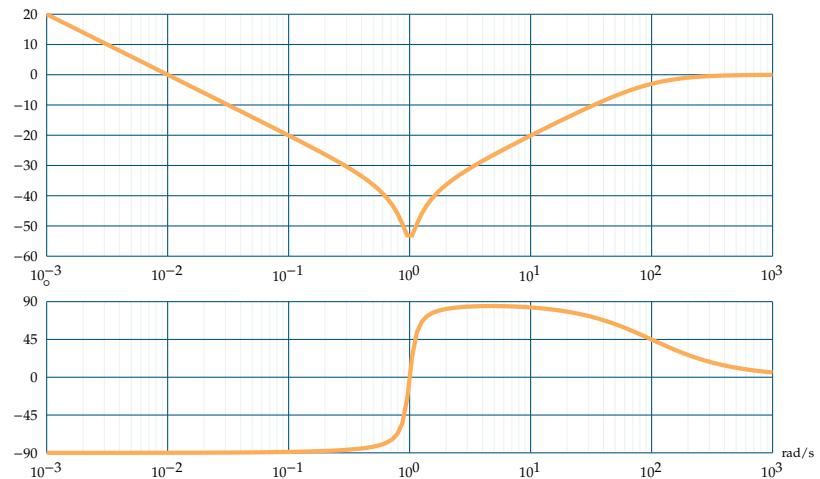
Question 5 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \frac{Ki}{p}$.

Question 6 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 7 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.





Colle 3

Performances – Sujet

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$.

Question 1 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 2 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$. La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert $B(p) = 3$.

Question 3 Tracer le schéma-blocs.

Question 4 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

Question 5 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = Ki/p$.

Question 6 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.



Colle 4

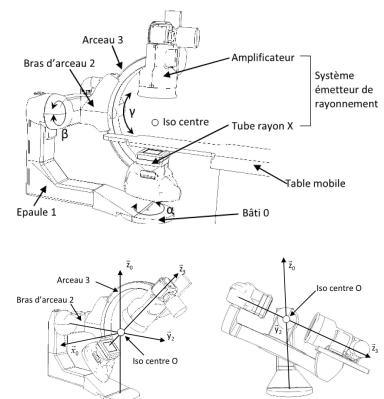
Imagerie médicale – Sujet

F. Mathurin.

L'étude porte sur un système permettant de réaliser des imageries médicales de vaisseaux sanguins sur un patient. Ce système, conçu par General Electric Medical System, envoie des rayons X dans le corps du patient et mesure leur rayonnement. En fonction des informations reçues, une image de synthèse en 3 dimensions est réalisée, permettant de voir les éventuels problèmes médicaux à venir.

Ce système est constitué des éléments suivants : le bâti 0, une épaule 1 qui peut être mis en mouvement par rapport au bâti 0, un bras d'arceau 2 qui peut s'orienter par rapport à l'épaule 1 et un arceau 3 qui se déplace par rapport à bras d'arceau 2. Le patient est situé sur une table mobile. Le réglage en hauteur du patient sur la table mobile est possible pour son confort mais n'est pas utilisé au cours d'une analyse. Seuls les degrés de liberté α , β et γ sont utilisés pendant l'analyse. L'émetteur de rayons, situé sur l'arceau, focalise la vision interne du patient en un point appelé iso centre.

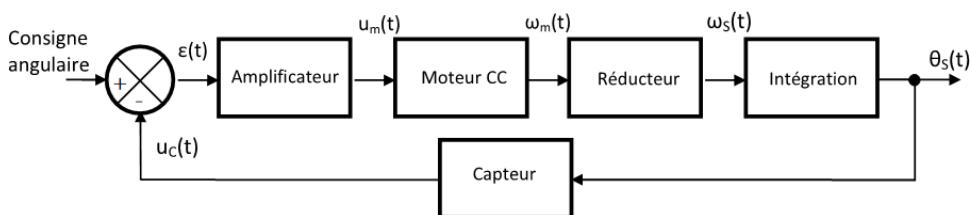
Sur l'image de gauche, l'arceau 3 s'oriente par rapport au bras d'arceau 2 et sur l'image de droite le bras d'arceau 2 se déplace par rapport à l'épaule 1. On donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel du système de positionnement dans la phase de vie correspondant à une mesure d'imagerie :



Exigences	Critère	Niveau
1.1	... Vitesse angulaire par axe élémentaire Stabilité (Marge de phase Mφ) $10^\circ/\text{s} \pm 10\%$ $M\phi > 45^\circ$...

Conformément au cahier des charges, chaque axe élémentaire, piloté séparément, doit avoir une vitesse angulaire de $10^\circ/\text{s}$ en phase de mesure. Technologiquement, la chaîne d'action de chaque axe élémentaire est constituée d'un réducteur entre le moteur et l'effecteur. Ce réducteur diminue la vitesse angulaire d'un facteur 558.

On s'intéresse à l'axe permettant de déplacer le bras d'arceau 2 par rapport à l'épaule 1. La structure de la chaîne fonctionnelle asservie de cet axe est la suivante :



Les différents éléments de cette chaîne fonctionnelle sont les suivants :

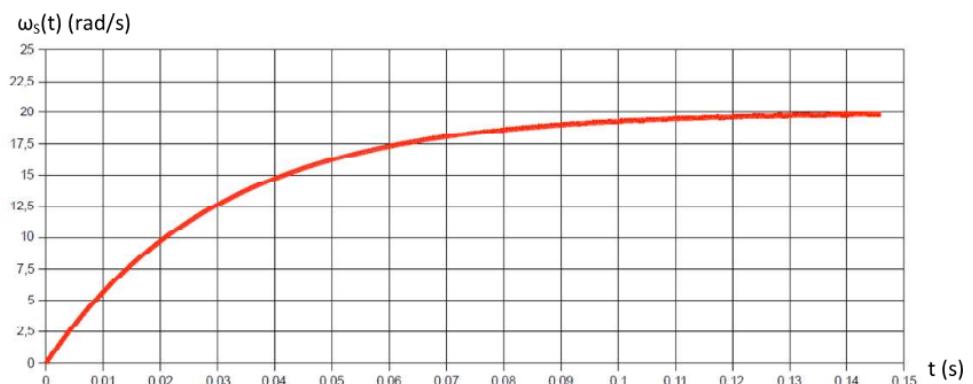
- ▶ l'amplificateur est un gain pur : K_a ;
- ▶ le réducteur est un gain pur K_r (sans dimension) ;
- ▶ le capteur est un gain pur : K_c ;
- ▶ le moteur est un système d'ordre 1, de constante de temps T_m et de gain K_m . On note la fonction de transfert du moteur $H_m(p)$.

Question 1 Déterminer la valeur numérique du bloc du réducteur K_r .

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en chaîne directe $FTCD(p)$, la fonction de transfert en boucle ouvert $FTBO(p)$ et la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(p)$ de cet asservissement. Exprimer les résultats en fonction de K_a , K_m , K_r , K_c et T_m .

Question 3 Montrer que la fonction de transfert en boucle fermée de ce système peut s'écrire sous la forme d'un deuxième ordre $\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. Donner l'expression littérale de K , z et ω_0 en fonction de K_a , K_m , K_r , K_c et T_m .

Question 4 La réponse du système à cette entrée en échelon de tension $u_m(t) = 10u(t)$ a été mesurée en sortie du réducteur. On donne ci-contre la courbe obtenue. Déterminer les valeurs numériques expérimentales de K_m et T_m à partir de la courbe.

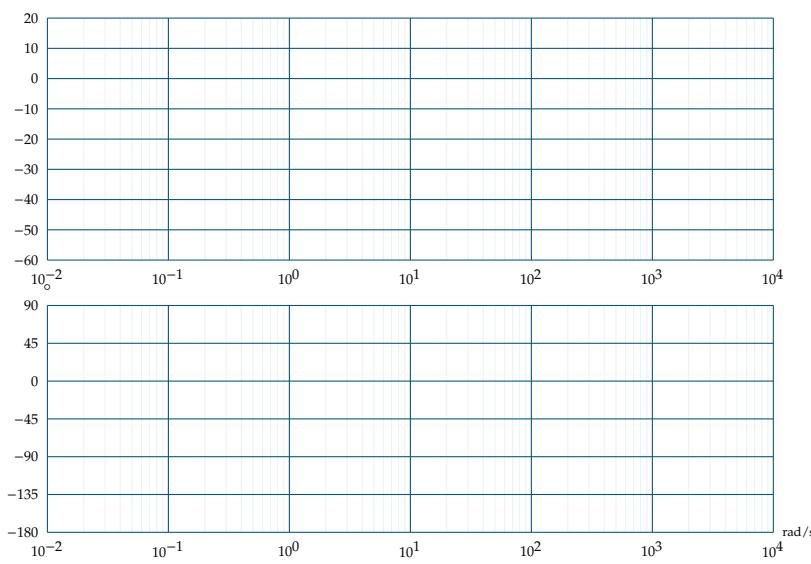
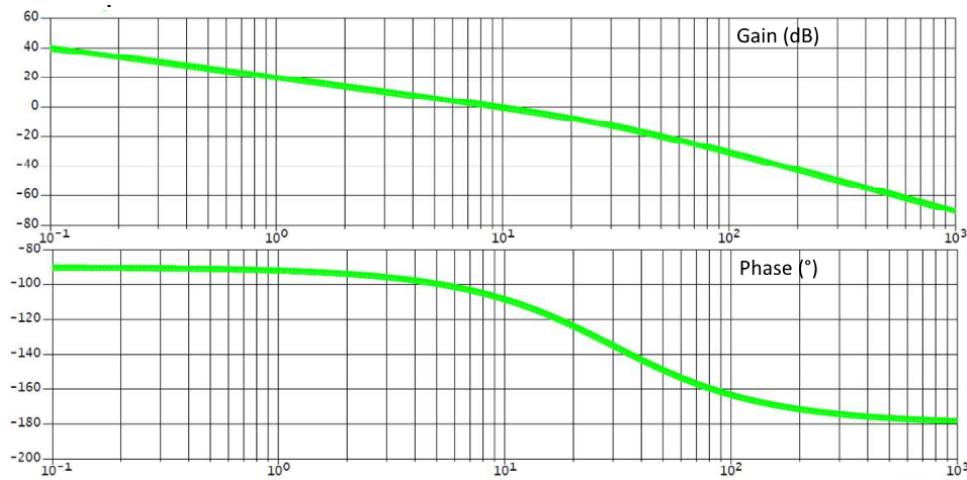


Avec les valeurs numériques des coefficients des différents gains, on peut déterminer la valeur numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte : $FTBO(p) = \frac{10}{p \left(1 + \frac{1}{30}p \right)}$.

Question 5 Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction de transfert en boucle ouverte sur le diagramme vierge en bleu.

Question 6 Calculer le gain et la phase exacte pour $\omega = 30$ rad/s.

Question 7 On donne les tracés réels des courbes de gain et de phase de la FTBO. Déterminer la pulsation qui annule le gain puis déterminer la marge de phase du système $M\varphi$. Conclure quant à la capacité du système à satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges.



Colle 5

Robot MIR : Machine d'inspection des réacteurs rapides – Sujet

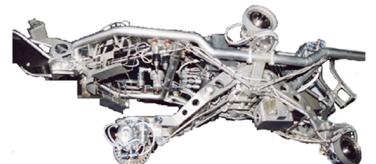
E3A MP – 2012.

Mise en situation

Le robot MIR développé pour la vérification des cuves de Superphenix doit être adapté pour le contrôle d'une nouvelle génération de réacteurs à neutrons rapides.

L'objectif du robot MIR est de :

- ▶ assurer le contrôle surfacique télévisuel des soudures des deux cuves et des zones adjacentes ;
- ▶ assurer le contrôle volumique par ultrasons des soudures de la cuve principale et des zones adjacentes. Une possibilité était offerte d'effectuer ce contrôle sur la cuve de sécurité ;
- ▶ mesurer en permanence la distance entre les deux cuves.



Étude de la fonction Ft12 : Déplacer le transducteur à vitesse constante

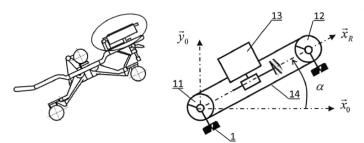
Le robot MIR étant à l'arrêt entre les deux cuves, le mini bac est plaqué contre la paroi de la cuve à contrôler. Pour l'inspection des soudures, le transducteur 13 (capteur de l'état des soudures) doit se déplacer à l'intérieur du mini bac d'inspection à vitesse constante. Le mini bac est rempli d'un fluide visqueux. L'inspection peut avoir lieu pour n'importe quelle position du robot MIR, donc l'angle α qui caractérise la direction du déplacement du transducteur par rapport à l'horizontale, est susceptible de prendre toute valeur comprise entre $-\pi/2$ (robot tête en bas) et $\pi/2$ (robot tête en haut). Afin de garantir la qualité des résultats de mesure, le transducteur doit donc se déplacer à une vitesse V_0 constante par rapport à la paroi, et ceci pour toute valeur de l'angle α .

Objectif

Qualifier la précision statique du système et définir les améliorations à apporter.

L'objectif de cette partie est de dimensionner le correcteur nécessaire au respect d'un écart statique nul, et ceci malgré le caractère variable de l'angle α .

Le transducteur est en liaison glissière de direction \vec{x}_r , avec le corps 1 du robot MIR. La chaîne d'énergie est composée entre autre, d'un actionneur rotatif qui exerce un couple $c(t)$ sur le pignon 11, qui est en liaison pivot, supposée parfaite, avec le robot MIR. Un système pouliés (11 et 12) et courroie crantée 14 impose le mouvement de translation au transducteur 13.



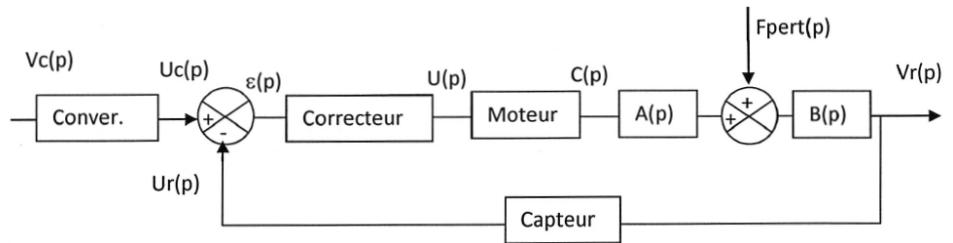
Le comportement dynamique du système est régit par l'équation suivante :

$$M_{eq} \frac{dv_r(t)}{dt} = \delta c(t) + \beta v_r(t) + \gamma g u(t)$$

avec $u(t)$ échelon unitaire.

On cherche à garantir une vitesse de translation du transducteur **13** égale à la valeur de consigne indépendamment de l'angle α .

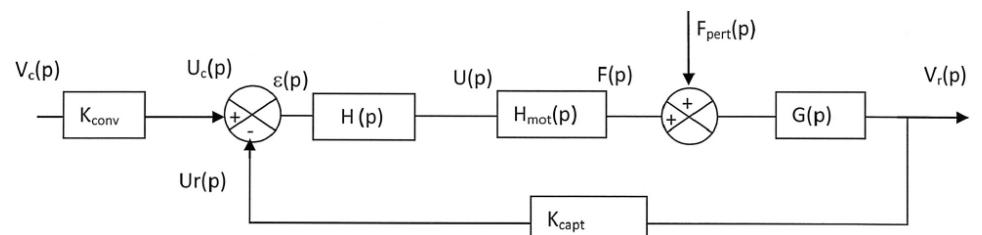
Pour cela, on réalise le système bouclé suivant :



Question 1 En supposant des conditions initiales nulles, exprimer les fonctions de transfert $A(p)$ et $B(p)$ en fonction entre autres de δ , β et M_{eq} .

Le capteur est modélisé par un gain pur de valeur K_{capt} .

Question 2 En supposant une perturbation nulle, quelle doit être la valeur du gain K_{conv} du convertisseur modélisé par un gain pur, afin que l'écart $\varepsilon(t)$ soit nul quand la valeur de la vitesse réelle $v_r(t)$ est égale à la valeur de la consigne $v_c(t)$. On adopte pour la suite la modélisation suivante :



Avec $H_{mot}(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p}$, $G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ et $H(p) = K_{cor}$ fonction de transfert du correcteur.

Question 3 Exprimer les deux fonctions de transfert : $H_1(p) = \left(\frac{V_r(p)}{V_c(p)} \right)_{F_{pert}(p)=0}$ et $H_2(p) = \left(\frac{V_r(p)}{F_{pert}(p)} \right)_{V_c(p)=0}$ en fonction des gains K_{conv} , K_{cor} , et K_{capt} ainsi que des fonctions de transfert $H_{mot}(p)$ et $G(p)$.

Question 4 En supposant que $K_{cor} = 1$ et en indiquant les valeurs remarquables, tracer les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $\frac{U_r(p)}{\varepsilon(p)}$ en utilisant les valeurs numériques suivantes : $K_m = 0,1 \text{ N V}^{-1}$, $\tau_m = 0,01 \text{ s}$, $K_{capt} = 50 \text{ V s m}^{-1}$, $K = 200 \text{ m s}^{-1} \text{ N}^{-1}$, $\tau = 1 \text{ s}$.

Question 5 Déterminer le gain en décibel de la fonction de transfert en boucle ouverte (courbe réelle) pour la pulsation de 100 rad s^{-1} .

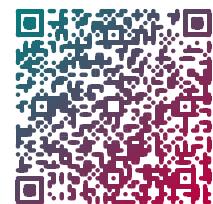
On formule l'hypothèse simplificatrice suivante : la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte pour une pulsation de 100 rad/s est de -135° .

Question 6 On souhaite une marge de gain 12 dB et un marge de phase de 45° , en utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la valeur numérique correspondante de K_{cor} . Commenter la valeur de la marge de gain obtenue ?

Question 7 On impose une vitesse constante en entrée de valeur v_0 ($v_c(t) = v_0 \cdot u(t)$) avec $u(t)$ fonction échelon unitaire de Heaviside. Exprimer l'écart statique en régime permanent en tenant compte de la perturbation (en fonction de l'angle α , de la valeur de K_{cor} et des données).

On souhaite obtenir une vitesse de translation indépendante de l'inclinaison. Pour toute la suite du sujet, on installe un correcteur intégral du type $\frac{K_c}{p}$, placé au début de la chaîne d'action.

Question 8 On impose de nouveau une vitesse constante en entrée de valeur v_0 ($v_c(t) = v_0 \cdot u(t)$); exprimer l'expression du nouvel écart statique en régime permanent (en fonction de l'angle α et des données). Pouvait-on prévoir ce résultat ?



Colle 6

Préhenseur – Sujet

Présentation

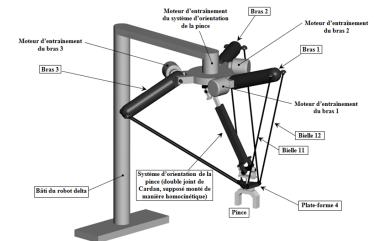
Une usine de fabrication de flacons en verre possède un poste de mise en cartons qui est l'objet de la présente étude. Ce poste est équipé de deux robots permettant de déplacer les flacons, déplacer des cartons, détecter des flacons dans des cartons, ranger des flacons dans les cartons. Ces robots sont de type « Delta » à architecture parallèle.

Architecture de la commande

On se propose ici de valider le niveau des performances de la commande de l'axe d'orientation de la pince.

Le servo-entraînement met en rotation un arbre télescopique muni à chacune de ses extrémités d'un joint de Cardan. Le mouvement d'orientation de la pince est indépendant des mouvements de la plate-forme 4. Afin d'assurer un bon positionnement angulaire de la pince P, la commande de sa rotation est asservie de la façon suivante :

- ▶ la consigne de position θ_{PC} , entrée par l'utilisateur grâce à une interface graphique (lors des réglages) ou imposée par la Partie Commande (lors des cycles de travail), est transformée en une tension v_{PC} grâce à un convertisseur qui sera assimilé à un système de gain pur K_C (en $V \text{ rad}^{-1}$).
- ▶ la vitesse de rotation ω_M (en rad s^{-1}) et l'angle de rotation θ_M (en rad) de l'arbre moteur sont mesurés par un codeur incrémental, monté directement sur l'arbre moteur, qui délivre une information numérique ; celle-ci est alors transformée par une carte de conversion numérique-analogique (C.A.N.) supposée linéaire en deux tensions v_ω et v_θ telles que :
 - pour la vitesse : $v_\omega = K_\omega \omega_M$,
 - pour la position : $v_\theta = K_\theta \theta_M$;
- ▶ la tension v_θ (image de la rotation θ_M du moteur) est soustraite à la tension v_{PC} pour donner la tension ε_P ;
- ▶ cette tension ε_P est modifiée par un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ pour donner la tension ε_{VP} ;
- ▶ la tension v_ω (image de la vitesse de rotation ω_M du moteur) est soustraite à la tension ε_{VP} en sortie du correcteur pour donner la tension ε_v ;
- ▶ cette tension ε_v est amplifiée par un amplificateur de gain pur G pour donner la tension d'alimentation du moteur u_M ; le moteur tourne alors à la vitesse angulaire ω_M telle que $\Omega_M(p) = M(p)U_M(p)$;



Les fonctions dans le domaine temporel seront notées en minuscule, alors que celles dans le domaine de Laplace seront notées en majuscule : par exemple : $\omega(t)$ et $\mathcal{L}(\omega(t)) = \Omega(t)$.

- ▶ la rotation θ_{EC} de la pièce d'entrée du double joint de Cardan est telle que $\theta_{EC} = \lambda \theta_M$, grâce au réducteur de vitesse fixé sur l'arbre moteur ;
- ▶ le double joint de Cardan est homocinétique et a pour fonction de transfert $R(p) = 1$ (l'entrée est l'angle θ_{EC} , et la sortie est $\theta_{SC} = \theta_P$ où θ_P est la rotation de la pince fixée sur la pièce de sortie du double joint de Cardan).

Question 1 Tracer le schéma bloc d'asservissement en position, d'entrée $\theta_{PC}(p)$ et de sortie $\theta_P(p)$, faisant apparaître toutes les variables et les fonctions de transfert définies ci-dessus.

Performances de la commande

Le servo-entraînement utilisé est le AXL305RS330E5 qui est composé du moteur RS330E, du variateur 10/20-60 et du réducteur GB à train épicycloïdal de réduction $\lambda = 0,2$. Le moteur RS330E a comme caractéristiques :

- ▶ constante de force électromotrice : $K_E = 14,3 \text{ V}/1000 \text{ tours min}^{-1}$;
- ▶ constante de couple : $K_T = 0,137 \text{ N m A}^{-1}$;
- ▶ résistance de l'induit : $R_I = 1 \Omega$;
- ▶ inductance de l'induit : $L_I = 1,65 \text{ mH}$;
- ▶ frottement visqueux rapporté à l'axe de rotation du moteur négligeable;
- ▶ inertie du rotor + de la charge entraînée rapportée à l'axe de rotation du moteur : $J = 12 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$.

On donne : $\lambda = 0,2$ et $K_\theta = 0,01 \text{ V rad}^{-1}$.

Question 2 On veut que lorsque la pince atteint la position demandée (soit $\theta_P = \theta_{PC}$) l'écart $\varepsilon_P = v_{PC} - v_\theta$ soit nul. En déduire la relation entre K_C , K_θ et λ puis la valeur numérique de K_C qui permette d'assurer cet écart nul.

À partir des équations du moteur à courant continu, on obtient la fonction de transfert suivante : $M(p) = \frac{\Omega_M(p)}{U_M(p)} = \frac{K_T}{K_E K_T + J R p + J L p^2}$. On donne $K_\omega = 6 \text{ V}/1000 \text{ tours min}^{-1}$.

Question 3 Déterminer l'expression littérale et la valeur numérique du gain G de l'amplificateur pour que la boucle tachymétrique (d'entrée ε_{VP} et de sortie ω_M) présente un temps de réponse à 5% minimum pour une entrée en échelon. Quel est alors le temps de réponse à 5 % ?

Avec la valeur de G trouvée précédemment, on a alors calculé la fonction de transfert de boucle (ou en boucle ouverte) suivante pour l'asservissement en position : $H_B(p) = \frac{V_\theta(p)}{\varepsilon_P} = C(p) \frac{86}{p(10^3 + 3,2p + 5,310^{-3}p^2)}$.

Les exigences de l'orientation du flacon sont données dans le tableau suivant.

Fonction	Critères	Niveaux
Orienter le flacon	Stabilité	Marge de phase $M\varphi > 45^\circ$ Marge de gain $MG > 10 \text{ dB}$
	Précision	Écart statique nul à une entrée en échelon $\varepsilon_\infty = 0$
	Rapidité	Bande passante à 0 dB de la fonction $H_B(p)$: $BP_0 > 50 \text{ rad s}^{-1}$. On définit la bande passante par sa largeur de bande (ici : 50 rad s^{-1}).

On considère pour l'instant que le système n'est pas corrigé : $C(p) = 1$.

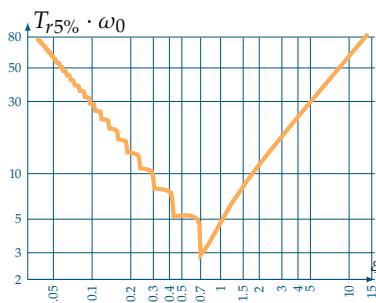
Question 4 Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode en amplitude et phase de la fonction de transfert $H_{BO}(p)$ du système non corrigé en plaçant avec précision les points caractéristiques.

Pour la fin, la courbe de gain sera assimilée à son tracé asymptotique.

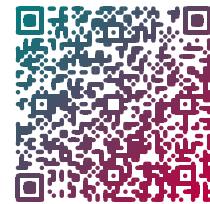
Question 5 Déterminer les valeurs de $M\varphi$, marge de phase, MG , marge de gain et BP_0 , bande passante à 0 dB de la fonction de transfert $H_B(p)$. Les critères de la fonction précédente sont-ils vérifiés ?

Question 6 Vérifier les valeurs des marges par le calcul.

On prend une correction proportionnelle : $C(p) = C_0$.



Question 7 Déterminer la bande de valeurs de C_0 qui permettent de vérifier les critères du cahier des charges partiel donné précédemment.





TD 4

Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber – Sujet

Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert.

Mise en situation

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servovalve, elle-même commandée en tension u par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servovalve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.

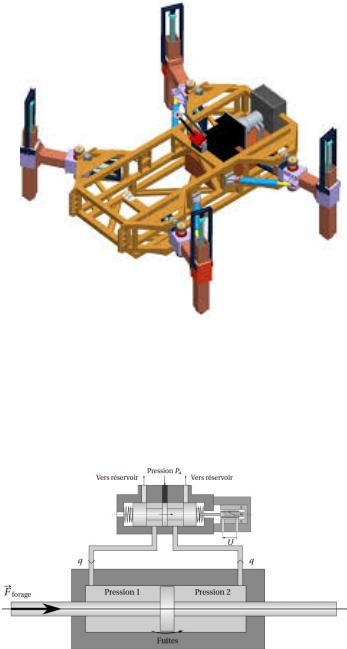
Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

- ▶ précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5%;
- ▶ rapidité de l'asservissement : $t_{5\%} = 0,15 \text{ s}$;
- ▶ stabilité : marge de phase de 45° , marge de gain de 10 dB;
- ▶ sécurité du mouvement : aucun dépassement.

Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- ▶ $S = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, surface utile des pistons;
- ▶ $b = 10^9 \text{ Pa}$: module de compressibilité du fluide utilisé;
- ▶ $P_a = 150 \times 10^5 \text{ Pa}$: pression d'alimentation de la servovalve;
- ▶ $K = 10^{-7} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1} \text{Pa}^{-0.5}$: constante de débit de la servovalve;
- ▶ $\varphi = 10^{-11} \text{ m}^3 \text{Pa}^{-1}$: facteur de fuite dans le vérin;
- ▶ $q(t)$: débit entrant et sortant du vérin;
- ▶ V_1 et V_2 : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse : $V_1 = V_2 = V = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$);
- ▶ $p(t) = p_1 - p_2$: différence des pressions dans les chambres du vérin;
- ▶ $z(t)$: déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre;
- ▶ $M = 700 \text{ kg}$: masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot;
- ▶ $k = 10^5 \text{ Nm}^{-1}$: raideur équivalente de la structure du robot;



- $\mu = 100 \text{ N s m}^{-1}$: coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- $F_0 = 3000 \text{ N}$: effort nominal sur le vérin ;
- $Z_0 = 50 \text{ cm}$: position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur k .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe \vec{z} du vérin, conduit à l'équation :

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}.$$

Question 1 Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ► l'inertie du robot; ► à la raideur du robot; ► au frottement visqueux; ► à la pression dans la chambre; | <ul style="list-style-type: none"> ► à la compressibilité de l'huile; ► au déplacement de la tige de vérin; ► aux fuites entre les chambres. |
|--|---|

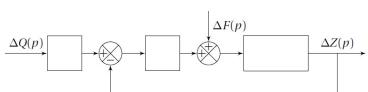
Question 2 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0 , F_0 et Z_0 , traduire l'équation d'équilibre du vérin.

Question 3 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $F_{\text{forage}(t)} = F_0 + \Delta F(t)$ et $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Question 4 En considérant une évolution au point de fonctionnement P_0 , Q_0 et Z_0 , traduire l'équation de bilan des débits.

Question 5 On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$. Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

Question 6 À partir des équations obtenues, compléter le schéma-blocs traduisant son comportement.



Modélisation du comportement de la servovalve

La servovalve permet de fournir le débit $q(t)$ au vérin à partir d'une tension de commande $u(t)$ appliquée en entrée : la tension $u(t)$ est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante p_a et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension $u(t)$, mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire : $q(t) = Ku(t)\sqrt{p_a - p(t)}$.

Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

Question 7 Déterminer la relation liant Q_0 , U_0 et P_0 au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$, $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ et $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$.

Question 8 Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servovalve et vérin, admettant en entrée la tension $\Delta U(p)$ et la force $\Delta F(p)$, et en sortie la position $\Delta Z(p)$.

Asservissement de position

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

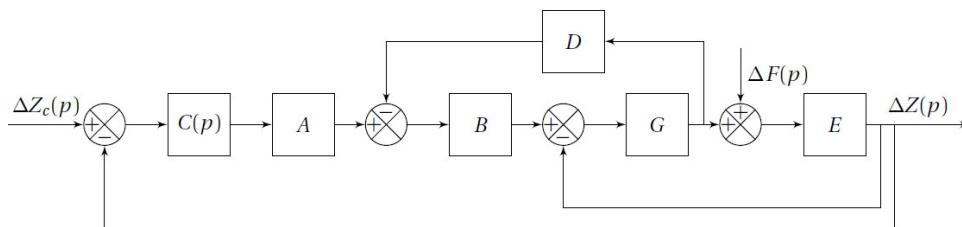
- ▶ la servovalve, qui fournit le débit $q(t)$ au vérin à partir d'un signal de commande $u(t)$;
- ▶ un capteur de position de fonction de transfert k_c , qui fournit une tension $\text{Im}(z(t))$ image de la position réelle $z(t)$;
- ▶ un correcteur $C(p)$ qui élabore la commande $u(t)$ de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre $\text{Im}(z_c(t))$, image de la consigne de position, et $\text{Im}(z(t))$. $\text{Im}(z_c(t))$ est obtenue grâce à un adaptateur K_a situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

Question 9 Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

Question 10 Préciser l'expression de l'adaptateur K_a pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où A , B , C , D , E , et G sont utilisés pour simplifier les calculs.

Question 11 À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.



Validation des performances pour une correction unitaire $C(p) = 1$

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert $0,975$ en boucle fermée, $\text{FTBF}(p) = \frac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2}p + 1,78 \times 10^{-4}p^2 + 4,8 \times 10^{-6}p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$ et $p_3 = -30,4$ (en rad/s).

Question 12 Le système est-il stable ? Est-il précis ?

Question 13 À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

Question 14 À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassements.

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte, $\text{FTBO}(p) = \frac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2}p + 7,03 \times 10^{-3}p^2 + 1,9 \times 10^{-4}p^3}$, ainsi que les valeurs numériques des pôles : $p_{12} = -18 \pm 81,6j$ et $p_3 = -0,75$ (rad/s)

Question 15 Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.

Optimisation du comportement : réduction des oscillations

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur »,

$$\text{de fonction de transfert : } C(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_2}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } \xi_1 < \xi_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Question 16 Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

On choisit de prendre ω_0 égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et $\xi_2 = 0,7$.

Question 17 Proposer une valeur pour le paramètre ξ_1 . Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).



Éléments de correction

1. ...
2. $(Mp^2 + \mu p + k) \Delta Z(p) = S\Delta p(p) - \Delta F(p) \text{ et } \Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \left(\varphi + \frac{V}{2b}p\right)\Delta P(p).$
3. ...
4. $\Delta q = K\Delta U \sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}}\Delta p + \text{termes néglig..}$
5. ...
6. ...
7. $K_a = k_c.$
8. $\text{FTBO}(p) = \frac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE} \text{ et } \text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}.$
9. ...
10. ...
11. ...
12. $\omega_0 = 83,6 \text{ rad s}^{-1}$ et $\xi = 0,21$, $\omega_3 = 0,75 \text{ rad s}^{-1}$.
13. ...
14. ...

TD 5

Radar d'avion – Sujet

F. Mathurin.

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.

On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est $\theta_c(t)$, l'angle réel du radar est $\theta_r(t)$. La différence des deux angles est transformée en une tension $u_m(t)$, selon la loi $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur de fonction de transfert $H_m(t)$, une vitesse angulaire $\omega_m(t)$. Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$ ($B < 1$), $\omega_r(t)$ étant la vitesse angulaire du radar.

Question 1 Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$, $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t)$ et $c_m(t) = k_m i(t)$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

Question 3 Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$ et déterminer les valeurs littérales de K_m et T_m .

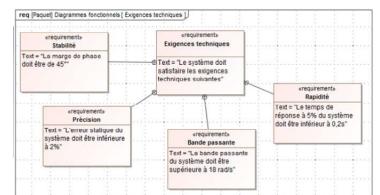
Question 4 En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de $H(p)$ à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :

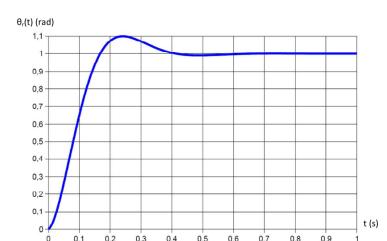
Question 6 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K , z et ω_0 .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite : $K = 1$, $z = 0,5$ et $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$.



Avec :

- ▶ $u(t)$: tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur);
- ▶ $e(t)$: force contre-électromotrice (en V);
- ▶ $i(t)$: intensité (en A);
- ▶ $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s);
- ▶ $C_m(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner);
- ▶ J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m²) ;
- ▶ R : résistance électrique du moteur;
- ▶ k_e : constante de force contre-électromotrice;
- ▶ k_m : constante de couple.



Question 7 Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}.$$

Question 8 Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

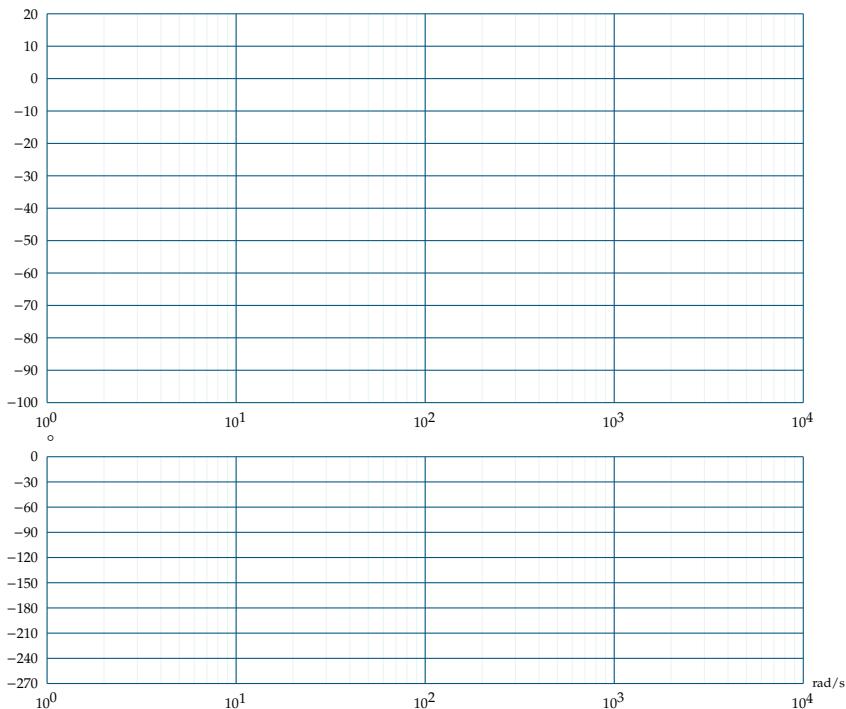
Question 9 Déterminer G et φ pour $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Question 10 Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$.

Pour $\omega < 20 \text{ rad/s}$, on a $H(p) \approx \frac{1}{1 + 0,05p}$.

Question 11 Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à -3 dB . Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

Question 12 Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.



TD 6

Base TC200 Tecdron – Sujet

Centrale Supelec TSI 2021.

C2-03

Mise en situation

Dans l'industrie, il est désormais possible d'associer des tâches robotisées et des tâches manuelles. Après l'essor des robots collaboratifs, Tecdron, entreprise Française basée à La Rochelle, propose une base mobile nommée TC200, capable de recevoir différents types de bras robotisés – dont des bras collaboratifs – mais aussi de se déplacer de manière autonome dans un environnement industriel complexe composé de robots et d'humains.

Les figures ci-après donnent la structure du robot étudié.



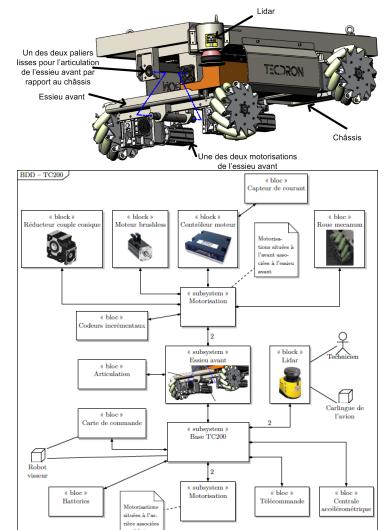
Validation de l'asservissement du moteur

Objectif

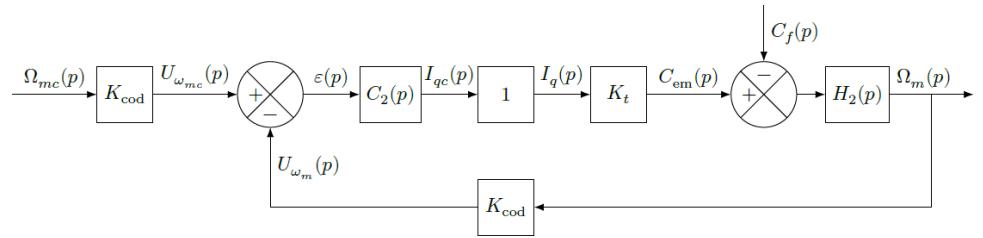
Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

La boucle de courant étant supposée parfaite, le schéma-blocs de la figure suivante correspond à l'asservissement de vitesse d'une des motorisations. Le modèle est considéré pour le moment non perturbé, c'est-à-dire $C_f(p) = 0$.



Exigence	Critère	Performance attendue
Précision	Erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon d'amplitude ω_{mc0}	$\mu_{v\infty} < 1\%$
Rapidité	Erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne en rampe telle que $\omega_{mc}(t) = at$	$\leq 100 \text{ rad s}^{-1}$ pour une pente de 1800 rad s^{-1}
Stabilité	Temps de réponse à 5 %	$t_{5\%} < 180 \text{ ms}$
	Dépassement maximal	$\leq 10\%$
	Marge de phase	$\geq 60^\circ$



Fonction de transfert	Expression	Valeur
Codeur et sa carte de traitement	K_{cod}	$0,2 \text{ V s rad}^{-1}$
Constante de couple	K_t	$0,09 \text{ N m A}^{-1}$
Corrètore de type proportionnel	$C_2(p) = K_2$	
Dynamique de la motorisation	$H_2(p) = \frac{1}{J_{eq} p}$	$J_{eq} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$

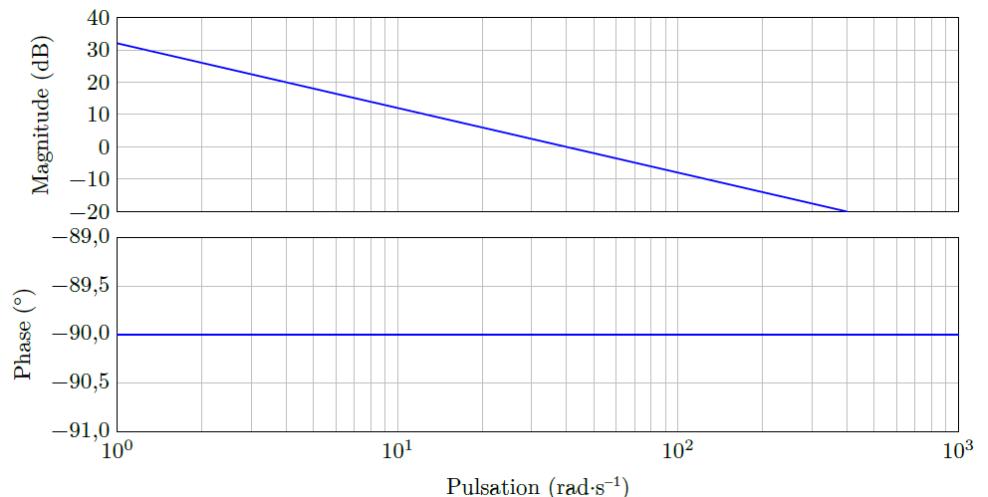
Question 1 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$ pour $C_f(p) = 0$.

Question 2 Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

Question 3 Déterminer la condition sur K_2 afin de satisfaire l'exigence de rapidité.

Question 4 Calculer l'erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne de vitesse en échelon de valeur ω_{mc0} .

On donne les diagrammes de Bode de la FTBO.



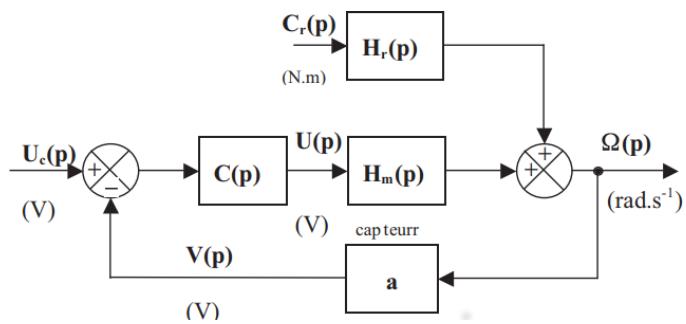
Question 5 Identifier la valeur de K_2 qui a été réellement choisie par le constructeur.

Question 6 À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_\infty$ pour une consigne de vitesse en rampe de pente a et valider le critère de précision des exigences.

Application 4

Précision des systèmes – Sujet

On considère le schéma-blocs suivant.



On a $H_r(p) = K_r \frac{1 + 0,492p}{1 + 10,34p + 5,1p^2}$ et $K_r = 0,37 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$. $H_m(p) = \frac{0,5}{(1 + 10p)(1 + 0,5p)}$.

Le gain du capteur est de $a = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

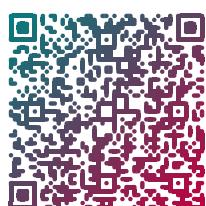
Question 2 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_ip}$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 3 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_ip}$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 4 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.



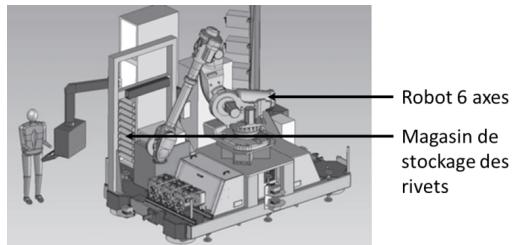
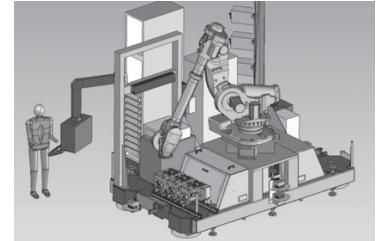
Application 5

Cellule d'assemblage pour avion Falcon Sujet

E3A – PSI 2015.

Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.



Objectif

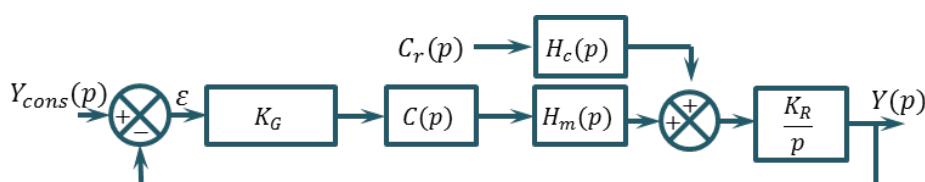
Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant C_r dû à l'action de pesanteur est supposé constant.

$$H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} \quad \text{et}$$

$$\frac{(R + Lp) K_M}{K_C} \\ H_C(p) = \frac{K_C}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}.$$



Etude du modèle sans perturbation

Question 1 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 2 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Etude du modèle avec perturbation

Question 3 Donner l'expression de $\varepsilon(p)$.

Question 4 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 5 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 6 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Question 7 On souhaite déterminer l'erreur pour un entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?



TD 7

Fauteuil dynamique de cinéma – Sujet

Concours Centrale-Supélec TSI 2015

C1-01

C2-03

Présentation du système

Ce concept a été inventé au Canada en 2008, et s'est étendu à toute l'Amérique du Nord avant de traverser l'Atlantique pour proposer un cinéma dynamique avec une quantité d'effets spéciaux et spatiaux. Le fauteuil dynamique de cinéma est principalement destiné à l'industrie du divertissement et de la simulation.



Mise en situation

Le siège dynamique est constitué :

- ▶ du dossier qui permet d'agir directement sur la tête du spectateur afin d'amplifier la sensation d'accélération (via l'oreille interne);
- ▶ de l'assise du siège qui permet d'obtenir un mouvement de tangage et un mouvement de roulis du spectateur.

Les trois motorisations (une pour le dossier et deux pour l'assise) sont composées chacune d'un moteur à courant continu à aimants permanents et d'un réducteur de vitesse. Chaque moteur est alimenté par un variateur de vitesse dont la structure de puissance est un hacheur. Un capteur de courant interne au variateur est utilisé par ce dernier pour réaliser un asservissement de courant, donc implicitement de couple. Une génératrice tachymétrique accouplée à l'axe de chaque moteur est utilisée par le variateur correspondant pour réaliser un asservissement de vitesse. Un codeur incrémental accouplé aussi sur l'axe de chaque moteur est utilisé par une carte à base de microcontrôleur pour réaliser un asservissement de position, une sortie analogique de cette carte étant reliée à l'entrée de consigne du variateur de vitesse.

Exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération »

Objectif

Proposer un modèle de comportement des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Exigence : amplifier la sensation d'accélération

- ▶ Précision statique de la boucle d'asservissement de position :

- erreur statique de position < 1%;
 - erreur statique de traînage < 1%;
 - erreur statique d'accélération < 1% .
- Rapidité pour un échelon de consigne d'accélération :
- temps de montée de 0 à 100% de la consigne < 5 ms ;
 - dépassement < 20%.

Comportement de l'ensemble variateur et moteur du dossieret

Objectif

- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de courant.
- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de vitesse.
- Analyser la précision de l'asservissement de position.

Modélisation de l'asservissement de vitesse

NE PAS TRAITER LES QUESTIONS 1 à 3.

Remarque

Les 3 premières questions n'ont pas vraiment d'intérêt. Je les ai laissées car elles apparaissaient dans le sujet initial.

L'étude suivante consiste à obtenir un modèle simplifié de la boucle d'asservissement de vitesse (figure suivante) au regard des réglages effectués et de l'influence d'une perturbation de type échelon sur le dossieret. En effet, vu la courte durée des sollicitations, la perturbation sur le dossieret, dont l'origine peut être une action du spectateur sur ses muscles cervicaux, peut être modélisée par un échelon.

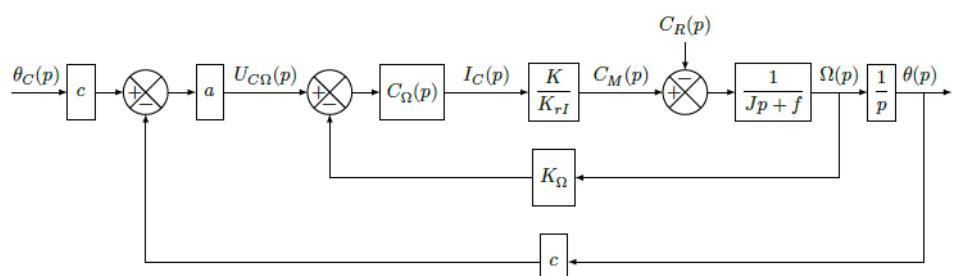


FIGURE 2.16 – Modèle de la boucle d'asservissement de vitesse

On a $C_\Omega(p) = k_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right)$. De plus : $K = 0,115 \text{ N m A}^{-1}$; $R = 1 \Omega$; $L = 1,1 \text{ mH}$; $K_{RI} = 0,5 \text{ V A}^{-1}$; $r = 1/50$; $f = 4,1 \times 10^{-4} \text{ N m s rad}^{-1}$; $J = 0,16 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert de la boucle de vitesse $H_\Omega(p) = \Omega(p)/U_{C\Omega}(p)$, lorsque $C_R(p) = 0$. Le résultat sera mis sous une forme canonique.

Question 2 T_1 étant égal à J/f , montrer alors que la fonction de transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme $\frac{b}{\tau p + 1}$. Calculer les valeurs numériques des termes b et τ .

Question 3 En déduire, à l'aide de la figure précédente, $\theta(p)/C_R(p)$ lorsque $\theta_C(p) = 0$. Calculer ensuite la valeur finale de $\theta(t)$ lorsque $c_R(t)$ est un échelon unitaire. Conclure quant à l'action, en régime permanent, du correcteur proportionnel et intégral sur les effets d'une perturbation $c_R(t)$ de type échelon.

Modélisation de la boucle d'asservissement de position

Après toutes les simplifications précédentes, est obtenu le modèle de la figure suivante où seul le comportement en réponse à la consigne θ_C est abordé.

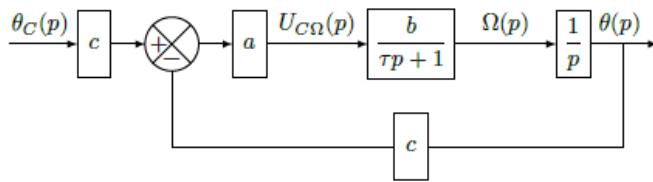


FIGURE 2.17 – Modèle simplifié de la boucle d'asservissement de position

Question 4 Exprimer la fonction de transfert $\theta(p)/\theta_C(p)$. Déterminer ensuite la valeur numérique de a pour avoir un facteur d'amortissement égal à 0,7. Justifier le choix de ce facteur d'amortissement. (Pour ce calcul et les calculs suivants prendre $b = 63 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$, $\tau = 2,2 \text{ ms}$, $c = 40 \text{ rad}^{-1}$.)

Analyse de la précision du système

Un aspect important pour la simulation sensorielle du siège dynamique est la capacité du système à reproduire fidèlement la consigne de position issue du programme de simulation sensorielle du siège dynamique. Dans un premier temps, l'étude se limite à la précision statique en utilisant le modèle défini à la figure précédente. L'erreur représente la différence entre l'entrée $\theta_C(t)$ et la sortie $\theta(t)$ et est définie par la variable $\mu(t) = \theta_C(t) - \theta(t)$.

Question 5 Exprimer dans un premier temps $\mu(p)$ en fonction de $\theta_C(p)$, puis déterminer de façon littérale et numérique l'erreur de position μ_p , l'erreur de trainage μ_v et l'erreur en accélération μ_a . Conclure quant à la précision statique du système suite aux différentes consignes $\theta_C(p)$ de type échelon, rampe et accélération.

Validation et optimisation de la performance simulée en accélération du dossieret

Objectif

Valider la performance simulée en accélération au regard du cahier des charges fonctionnel.

La figure suivante représente la structure d'une correction par anticipation qui permet d'améliorer la précision statique du système

Question 6 Déterminer l'erreur de position μ_p puis l'erreur de traînage μ_v . Conclure sur l'erreur de position au regard du cahier des charges.

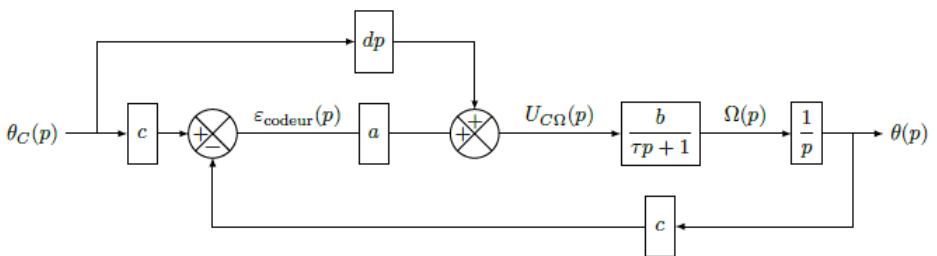


FIGURE 2.18 – Structure avec anticipation

Question 7 D'après l'erreur de traînage μ_v déterminée à la question précédente, calculer la valeur numérique de d qui permet d'annuler cette erreur de traînage. En prenant en compte la valeur numérique de d et de b , déterminer l'expression de l'erreur en accélération μ_a . Calculer ensuite sa valeur numérique et conclure au regard du cahier des charges.

Un aspect important pour la simulation sensorielle du siège dynamique est la capacité du système à reproduire rapidement les consignes d'accélération. À l'aide d'une simulation, la variable accélération $\dot{\theta}_d$ possède les deux comportements donnés figure suivante pour la période transitoire, et ce lorsque la consigne vaut $\theta_{Cd}(t) = \frac{t^2}{2} u(t)$.

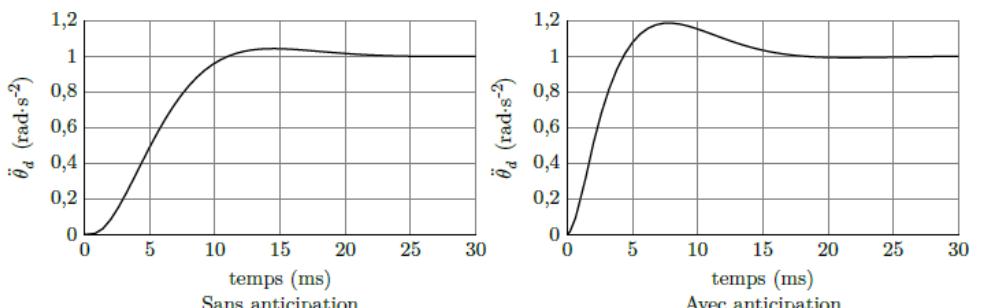


FIGURE 2.19 – Accélération du dossieret avec et sans anticipation

Question 8 Conclure quant au respect du cahier des charges vis-à-vis des accélérations produites par le dossieret du siège dynamique de cinéma.

Exigence fonctionnelle « incliner le spectateur suivant l'axe de tangage et de roulis »

Objectif

Valider le choix de conception pour la réalisation de la commande simultanée des deux moteurs de l'assise du siège.

En mode simultané (figure suivante), les consignes de vitesse de chaque variateur sont issues d'un calculateur numérique : a , d et c sont identiques. En revanche, le réglage du retour vitesse des cartes variateur est effectué à l'aide d'un potentiomètre et celui-ci peut ne pas avoir été réglé avec précision. En imposant le réglage du retour vitesse de la motorisation 1 à 5 V pour 3000 tr min^{-1} et celui de la motorisation 2 à 5,5 V pour 3000 tr min^{-1} ,

les calculs donnent $b_1 = 62,8 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ et $b_2 = 57,1 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$. Les inerties au niveau de chaque moteur, supérieures à celle au niveau du moteur de dossieret, peuvent fluctuer en fonction de la position du spectateur.

En tenant compte d'une variation d'inertie de 10%, les calculs donnent $\tau_1 = 1/366 \text{ s}$ et $\tau_2 = 1/447 \text{ s}$. On prendra $a = 0,09 \text{ V}$, $c = 40 \text{ rad}^{-1}$ et $d = 0,016 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$.

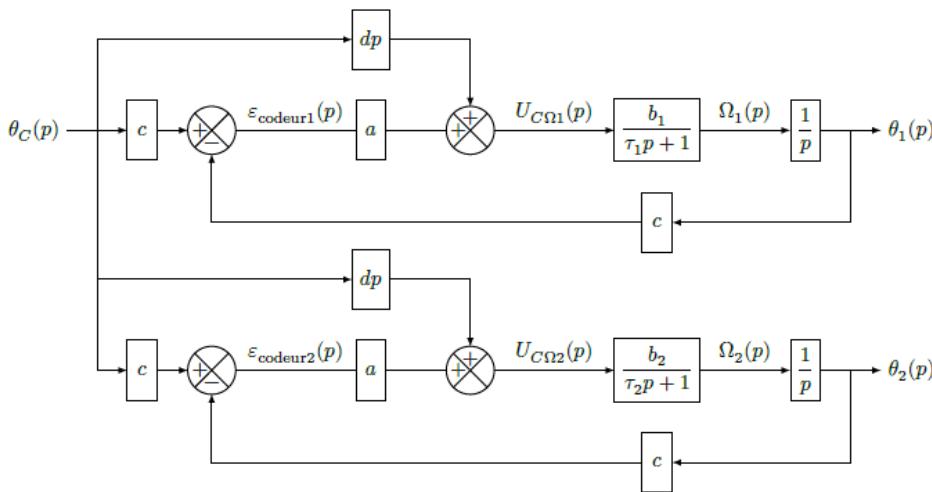


FIGURE 2.20 – Commande simultanée des deux moteurs

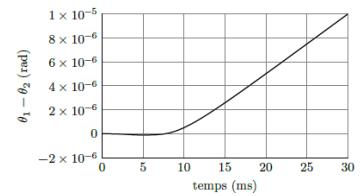
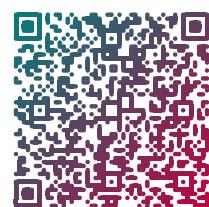
Question 9 En réutilisant éventuellement les calculs effectués aux questions 6 et 7 et en tenant compte des différences de réglage de retour vitesse et des différences d'inertie entre les deux motorisations, exprimer la valeur finale de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ lorsque la consigne $\theta_C(t)$ est respectivement égale à $u(t)$, $t \cdot u(t)$ puis $\frac{t^2}{2}u(t)$, $u(t)$ étant la fonction échelon unité.

La figure 2.21 représente le résultat d'une simulation de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ pour une consigne $\theta_C(t) = \frac{t^2}{2}U(t)$

Question 10 Conclure quant à l'erreur en accélération lors de la commande simultanée.

Éléments de correction

1. $H_\Omega(p) = \frac{\frac{1}{K_\Omega}(1+T_1p)}{\frac{T_1K_{rI}J}{K_\Omega k_1 K}p^2 + \left(\frac{fK_{rI}}{K_\Omega k_1 K} + 1\right)T_1p + 1}$.
2. $b = \frac{1}{K_\Omega} = 20\pi = 62,8 \text{ rad s}^{-1}\text{V}^{-1}$ et $\tau = \frac{K_{rI}J}{k_1 K K_\Omega} = 2,17 \times 10^{-3} \text{ s}$.
3. $-\frac{T_1 K_{rI} p}{k_1 (T_1 p + 1) K} \cdot \frac{b}{p(1 + \tau p) + abc}$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 1$.
4. $a = \frac{1}{4bc\tau\xi^2} = 0,092$.
5. $\mu(p) = \frac{p(1 + \tau p)}{p(1 + \tau p) + abc} \theta_c(p)$, $\mu_p = 0$, $\mu_v = \frac{1}{abc}$ et $\mu_a = \infty$.
6. $\mu_p = 0$ et $\mu_v = \frac{1 - bd}{ab}$.
7. ...
8. ...
9. ...
10. ...

FIGURE 2.21 – $\theta_1 - \theta_2$ en fonction du temps

TD 8

Robot à câbles – Sujet

Concours Centrale-Supélec 2023 – TSI.

Présentation

Les robots parallèles à câbles sont une structure de robots apparus au début des années 2000. Dans ce système, la plate-forme est déplacée et orientée par rapport à une référence fixe dans toutes les directions de l'espace par l'enroulement ou le déroulement de plusieurs câbles (figure 2.22). Cette structure permet à la plate-forme d'atteindre une grande zone de travail avec une très grande précision dans le positionnement comme dans l'orientation.

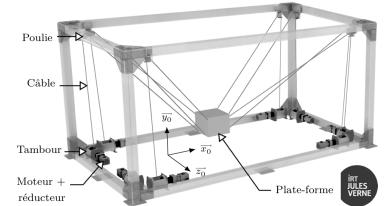


FIGURE 2.22 – Robot à câbles CAROCA

Étude de l'asservissement de la longueur d'un câble pour gérer le mouvement

Objectif

Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs permettant d'assurer l'enroulement adéquat des câbles.

Le programme de pilotage tient compte de l'allongement relatif des câbles suite aux efforts de traction lors du déplacement de la plate-forme chargée. Il génère alors, pour chacun des huit moteurs, des consignes de position et de vitesse qui sont envoyées aux variateurs de vitesse qui alimentent les moteurs afin d'assurer un positionnement de la plate-forme conforme aux attentes de l'utilisateur. L'ensemble composé d'un variateur et du moteur associé est appelé moto-variateur pour la suite. L'algorithme implanté dans le variateur est de type commande vectorielle, ce qui rend le moto-variateur équivalent à un système du premier ordre avec une bande passante à -3 dB de 200 Hz. Le modèle défini figure est adopté pour la suite.

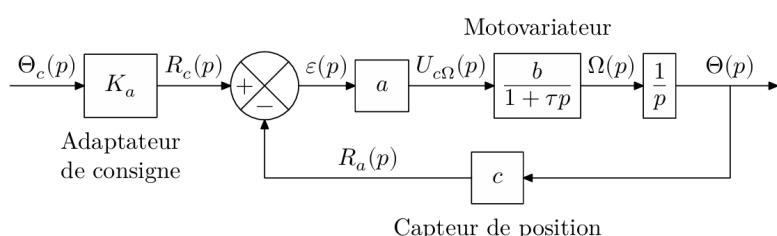


FIGURE 2.23 – Schéma-bloc de la commande en position du moteur

Notations

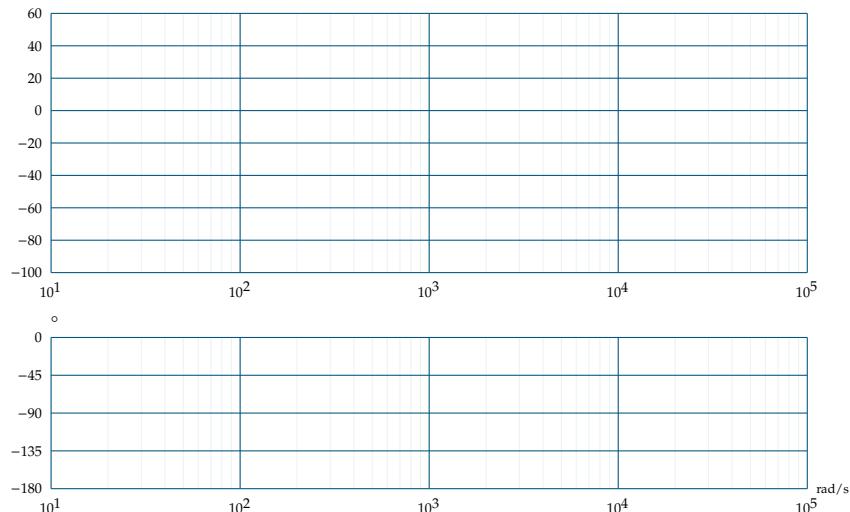
- $\Theta_c(p)$ et $\Theta(p)$ sont respectivement les images de la consigne de position angulaire $\theta_c(t)$ (en rad) issue du programme de pilotage et de la position angulaire effective $\theta(t)$ du moteur (en rad). $\Omega(p)$ est l'image de la vitesse angulaire $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ du moteur (grandeur temporelle en rad s⁻¹).
- Le capteur de position (codeur optique incrémental associé à une unité de comptage sur 13 bits) est de gain $c = 1304$ point rad⁻¹.
- L'adaptateur est de gain K_a , grandeur en point rad⁻¹.
- Le correcteur est de type proportionnel de gain a , ce qui permet de délivrer une tension $u_{c\Omega}(t)$ proportionnelle à l'écart $\varepsilon(t)$. Un pré-réglage a permis de choisir la valeur $a = 43,4$ mV point⁻¹.
- Le comportement du motovariableur est assimilé à un premier ordre de gain $b = 31,4$ rad s⁻¹ V⁻¹ et de constante de temps $\tau = 796 \mu\text{s}$.

Question 1 Justifier la valeur numérique proposée pour la constante de temps τ .

Dans la structure de l'asservissement de position de la figure 2.23, l'erreur est définie par $\mu(t) = \theta_c(t) - \theta(t)$ (grandeur en rad) et l'écart par $\varepsilon(t) = r_c(t) - r_a(t)$ (grandeur en point).

Question 2 On souhaite que l'erreur $\mu(t)$ soit nulle quand l'écart $\varepsilon(t)$ l'est : en déduire la relation entre K_a et c .

Question 3 Après avoir donné l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(j\omega)$, tracer son diagramme asymptotique de Bode (courbes de gain et de phase en précisant la valeur de la cassure et le gain associé) et esquisser le plus précisément possible l'allure des courbes réelles de réponse fréquentielle.



Question 4 Relever sur la courbe tracée à la question précédente la valeur de la marge de phase $M\varphi$. Sachant qu'on souhaite que cette marge soit de $M\varphi = 45^\circ$, conclure quant au réglage de a .

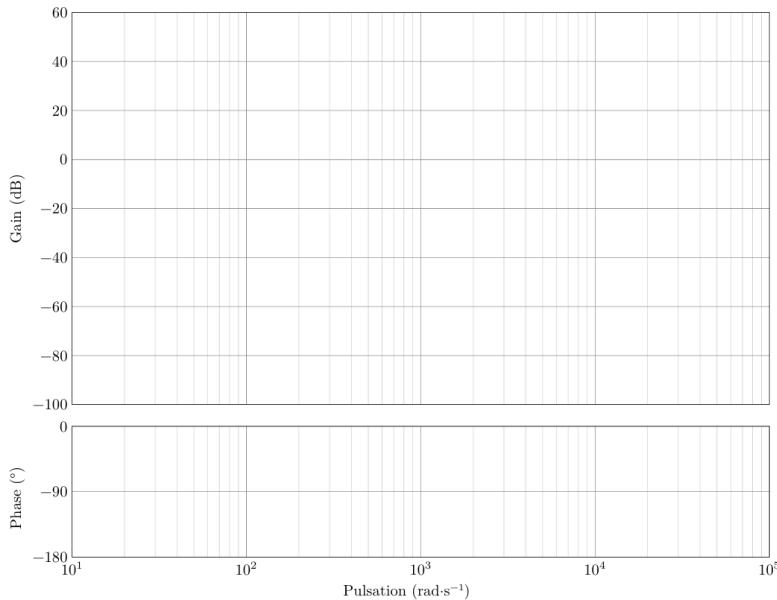
Question 5 Déterminer l'expression de l'image $\mu(p)$ de l'erreur en fonction de l'image $\Theta_c(p)$ de la consigne angulaire et de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p)$ de l'asservissement.

La précision du système s'évalue par l'erreur en régime permanent pour des consignes de position de types :

- ▶ échelon d'amplitude θ_0 (en rad) : l'erreur en régime permanent, notée μ_p (en rad), est dite « statique »;
- ▶ rampe de pente ω_0 (en rad s^{-1}) : l'erreur en régime permanent, notée μ_v (en rad s^{-1}), est dite « de poursuite ».

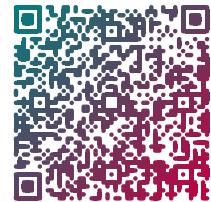
Les exigences de l'utilisateur imposent que ces deux erreurs doivent être inférieures à 0,1% de la consigne.

Question 6 Déterminer la valeur de l'erreur statique μ_p . Déterminer l'expression de l'erreur de poursuite μ_v en fonction des gains a , b et c et de la pente ω_0 . Faire l'application numérique et vérifier si les exigences de l'utilisateur sont vérifiées.



Éléments de correction

1. .
2. $K_a = c$.
3. $H_{BO}(j\omega) = \frac{1777}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{1256}\right)}$.
4. .
5. $\mu(p) = \frac{\Theta_c(p)}{1 + H_{BO}(p)}$.
6. $\mu_p = 0$, $\mu_v = \frac{\omega_0}{abc}$.



TD 9

Exosquelette lombaire – Sujet

Concours Centrale-Supélec 2023 – MP.

Mise en situation

On s'intéresse à un banc d'essai permettant de valider un actionneur linéaire. Dans ce cadre, il est nécessaire de proposer un modèle de connaissance de l'asservissement en force, le valider par comparaison avec une mesure sur le banc d'essai et vérifier les performances de l'actionneur linéaire sur ce banc d'essai. Ce modèle permettra de valider une commande pour le cas spécifique étudié.

Le schéma-blocs est donné dans la figure 2.25.

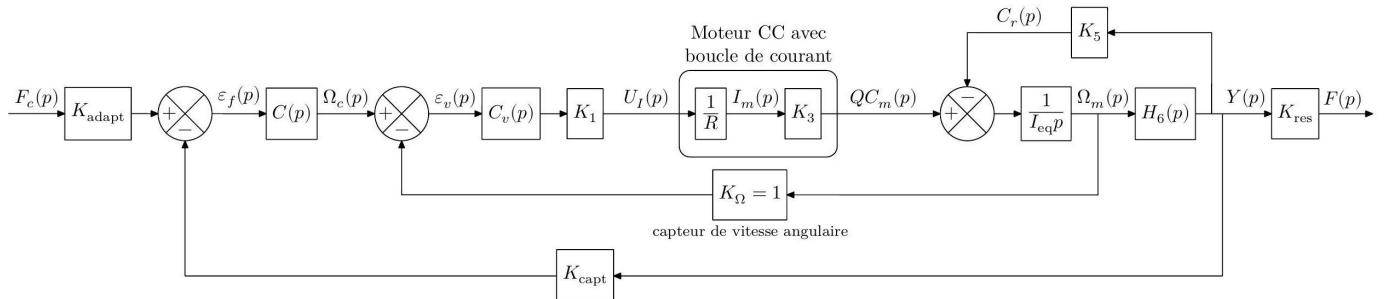
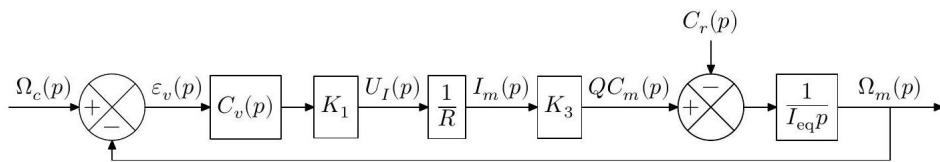


FIGURE 2.25 – Schéma-blocs de l'asservissement de force développée par un actionneur linéaire placé sur le banc d'essai

Réglage de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur

Le schéma-blocs décrivant la structure de l'asservissement de la vitesse angulaire du moteur est fourni sur la figure 2.26. Cet asservissement doit respecter le cahier des charges fourni dans le tableau 2.1.



Le choix d'un correcteur proportionnel intégral est fait afin de diminuer l'influence de la perturbation en couple modélisée par $C_r(p)$. La fonction de transfert du correcteur de la boucle d'asservissement en vitesse angulaire est noté $C_v(p)$, tel que $C_v(p) = K_i \frac{1+\tau_ip}{\tau_ip}$.

FIGURE 2.26 – Schéma-blocs de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur électrique

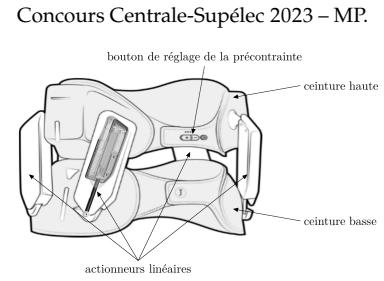


FIGURE 2.24 – Exosquelette lombaire Japet

TABLE 2.1 – Critères concepteur pour la boucle d’asservissement de la vitesse angulaire

Critère concepteur	Niveau
Marge de phase	$\geq 80^\circ$
Erreur en régime permanent pour une perturbation en échelon constant	Nulle
Pulsation de coupure à 0 dB	$\omega_0 \text{ dB} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

On note $H_{BOv}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\varepsilon_v(p)}$ la fonction de transfert en boucle ouverte de l’asservissement de vitesse angulaire du moteur.

Question 1 Déterminer l’expression littérale de la phase de $H_{BOv}(i\omega)$. En déduire la valeur numérique de τ_i respectant les critères concepteur de la boucle de vitesse.

Le diagramme de Bode de la boucle ouverte $H_{BOv}(p)$, avec $K_i = 1$ et τ_i déterminé à la question 1, est donné sur la figure 2.27.

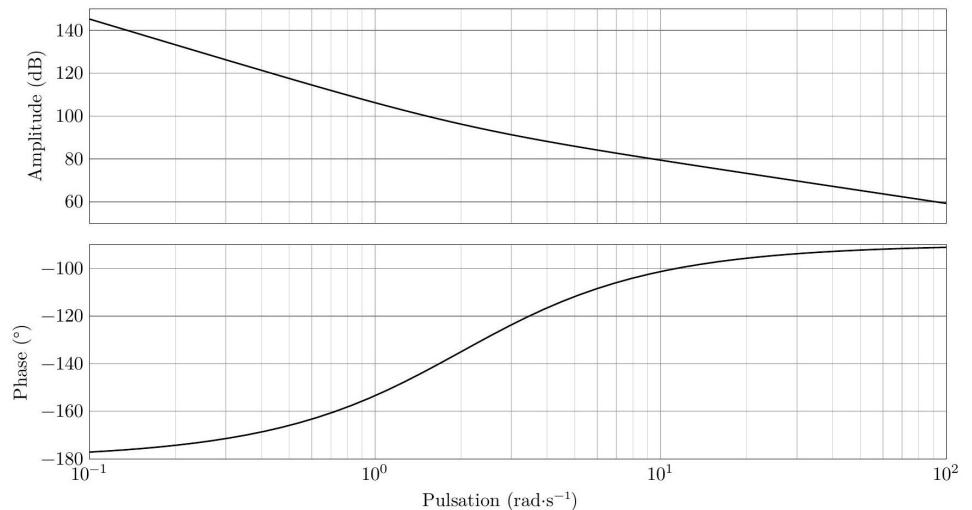


FIGURE 2.27 – Diagramme de Bode de $H_{BOv}(p)$

Question 2 Déterminer la valeur numérique de K_i afin que la boucle d’asservissement de vitesse respecte les critères concepteur du tableau 2.1.

Simplification du modèle de connaissance

Il est possible de mettre le schéma-blocs de la figure 2.25 sous la forme du schéma-blocs de la figure 2.28, afin de faciliter la prévision des performances simulées.

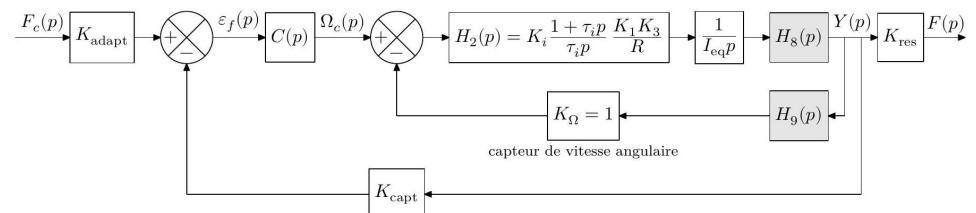


FIGURE 2.28 – Schéma-blocs de l’asservissement de la force développée par un actionneur linéaire

Question 3 Déterminer les fonctions de transfert $H_8(p)$ et $H_9(p)$ en fonction de K_5 , I_{eq} et $H_6(p)$. Ne pas remplacer K_5 et $H_6(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Pour faciliter l’analyse des performances simulées, le schéma-blocs de la figure 2.28 est adapté afin de disposer d’un schéma-blocs à retour unitaire, tel que décrit sur la figure 2.29.

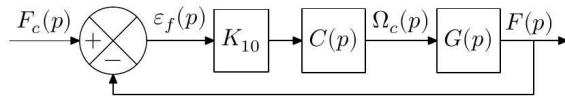


FIGURE 2.29 – Schéma-blocs de l'asservissement de la force développée par un actionneur linéaire à retour unitaire

Question 4 Déterminer l'expression du gain K_{10} en fonction de K_{capt} et de K_{res} .

Question 5 Déterminer la fonction de transfert $G(p)$ en fonction de $H_2(p)$, I_{eq} , $H_8(p)$, $H_9(p)$ et K_{res} . Ne pas remplacer $H_2(p)$, $H_8(p)$ et $H_9(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Pour la suite, on donne la fonction de transfert $G(p)$, obtenue avec les valeurs de réglage correctes déterminées aux questions 1 et 2,

$$G(p) = \frac{F(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1 + \tau_i p}{p} \frac{1,2 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-4} + 9,7 \times 10^{-5} p + 5,3 \times 10^{-6} p^2}.$$

Analyse des performances de l'asservissement en force développée par un actionneur linéaire

Il est proposé dans cette section d'analyser les performances simulées de l'asservissement en force dont un extrait du cahier des charges est présenté dans le tableau 2.2.

Id	Exigence	Critère	Niveau
Id1.1	Stabilité	Marge de phase	$\geq 60^\circ$
		Marge de gain	$> 20 \text{ dB}$
		Dépassement maximal	$< 2,5\%$
Id1.2	Précision	Erreur en régime permanent pour une entrée en échelon	$< 1\%$
Id1.3	Rapidité	Temps de réponse à 5% pour une consigne en échelon de force de 40 N	$\text{tr}_{5\%} < 1 \text{ s}$
		Vitesse maximale de montée de la force de traction	$100 \text{ N} \cdot \text{s}^{-1}$

TABLE 2.2 – Extrait du cahier des charges fonctionnel de l'actionneur linéaire sur le banc d'essai

On note $H_{BOf}(p) = \frac{F(p)}{\epsilon_f(p)}$ la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en force développé par un actionneur linéaire. Dans un premier temps, le choix d'un correcteur proportionnel $C(p) = K_{\text{cor}}$ est réalisé. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert $H_{BOf}(p) = \frac{F(p)}{\epsilon_f(p)} = K_{\text{cor}} K_{10} G(p)$, avec $K_{\text{cor}} = 1$ et la valeur de τ_i déterminée à la question 1, est donné sur la figure 2.30.

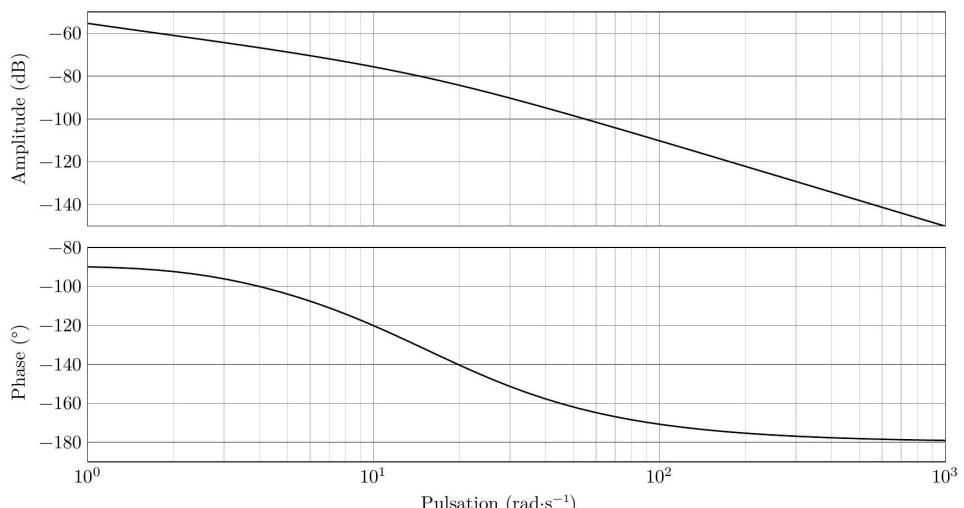


FIGURE 2.30 – Diagramme de Bode de $H_{BOf}(p)$

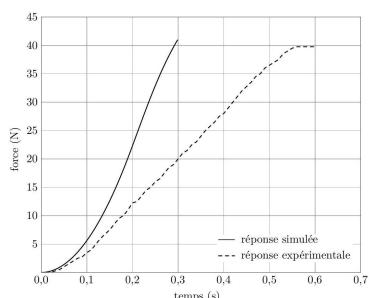


FIGURE 2.31 – Réponses temporelles du modèle et expérimentale, pour une consigne en échelon de force de 40 N

Question 6 Déterminer la valeur numérique limite de K_{cor} afin que la boucle d’asservissement de force respecte les critères de marge de phase et de gain du tableau 2.2.

Les courbes sur la figure 2.31 représentent les réponses temporelles du modèle de connaissance de la figure 2.25, avec les correcteurs $C_v(p)$ et $C(p)$ correctement réglés, et de l’expérimentation sur le banc d’essai pour une consigne en échelon de force de 40 N.

Question 7 Quel critère du tableau des exigences (tableau 2.2) n’est pas pris en compte dans le modèle de connaissance ? D’après la courbe expérimentale, ce critère est-il respecté par le système réel ?



TD 10

Contrôle d'une machine de forage – Sujet

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

On travaille avec le schéma-bloc simplifié de la figure 2.32 où K_0 est un gain d'adaptation fixe.

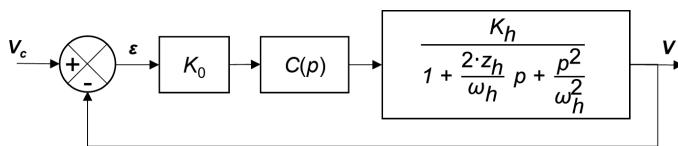


FIGURE 2.32 – Schéma-bloc de l'asservissement en vitesse simplifié

On prend dans un premier temps un correcteur $C(p)$ proportionnel : $C(p) = K_p$.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{BO}(p) = \frac{V(p)}{\varepsilon(p)}$.

Question 2 Avec un correcteur proportionnel, peut-on satisfaire l'exigence de précision de vitesse indiquée à l'exigence 2.1.1.? Justifier.

On utilise dans un second temps un correcteur proportionnel intégral : $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$.

Question 3 L'exigence de précision sur la vitesse est-elle satisfaite? Justifier.

Ce correcteur est initialement réglé avec les valeurs suivantes : $K_p = 1$ et $T_i = 10$ s.

Question 4 Tracer les diagrammes de Bode asymptotique et réel de ce correcteur. Détailler les constructions.

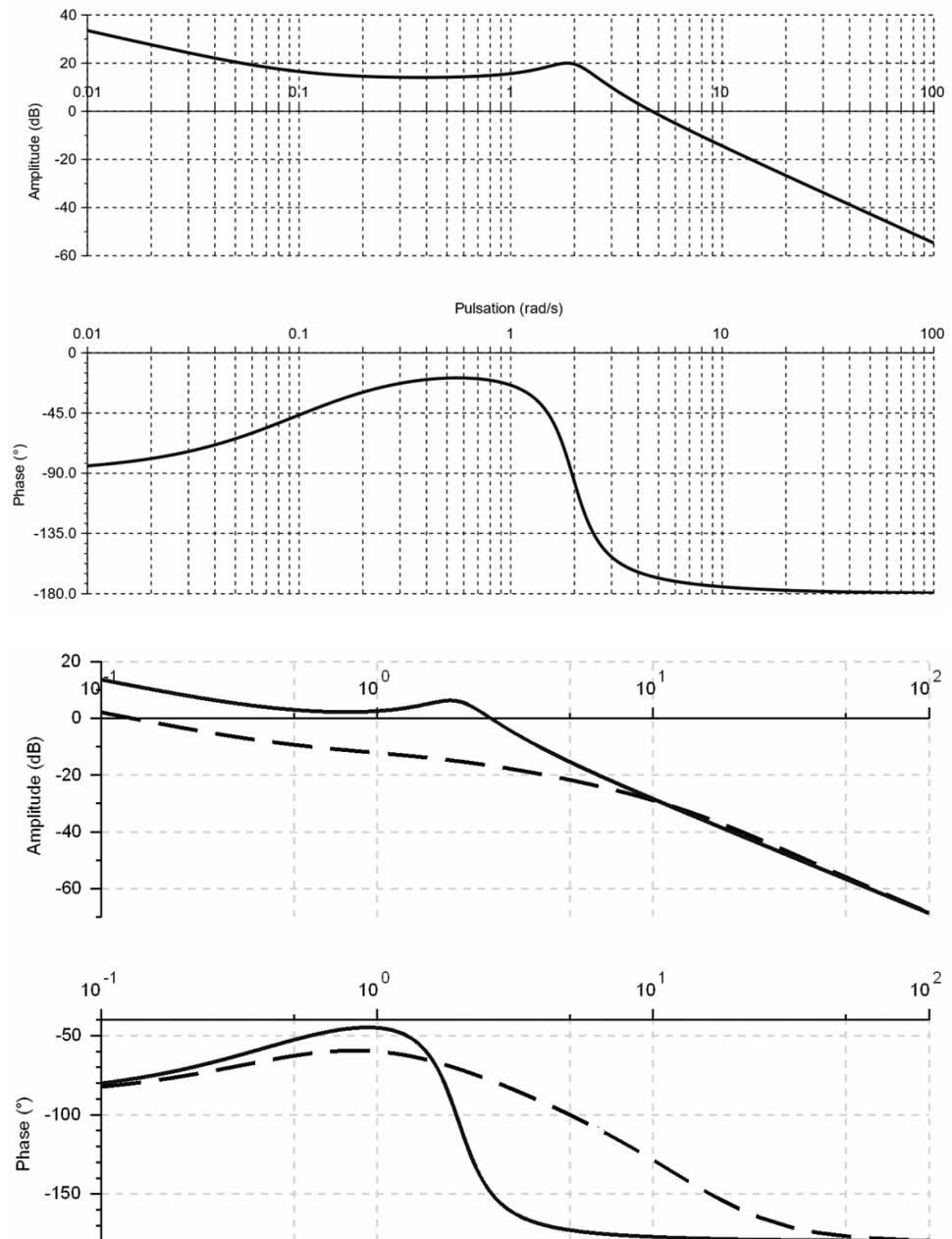
Pour le réglage de la question précédente, on donne le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ainsi corrigée sur le DR3.

Question 5 Affiner le réglage du correcteur (sans modifier la valeur de T_i) en proposant une valeur de K_p permettant de garantir la marge de phase spécifiée dans l'exigence 2.1.1.

Enfin, on souhaite valider ou invalider l'hypothèse faite en début de cette sous-partie concernant la non-influence de l'amortisseur sur les performances d'asservissement en vitesse d'avance de la table de forage. Les diagrammes de Bode de la figure suivante, illustrent la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée sans (en train plein) et avec amortisseur (en pointillés).

« requirement » Performances de l'axe

Id = '2.1.1'
Text = 'La vitesse de l'axe d'avance doit respecter les performances suivantes :
- précision : erreur statique nulle
- stabilité : marges de phase de 30° et de gain de 40dB'



Question 6 Sur quelle(s) performance(s) la présence de l'amortisseur peut-elle influer ? Justifier que le correcteur choisi permet de répondre aux exigences 2.1.1 en présence de l'amortisseur.