

Révisions de géométrie et de cinématique

7

7.1 Modélisation géométrique – Lois entrées-sorties

7.1.1 Modélisation et paramétrage des systèmes mécaniques

Méthode – Modélisation d'un système mécanique réel

Pour modéliser un système mécanique réel (en TP par exemple) il faut :

- ▶ identifier les classes d'équivalence cinématique, c'est-à-dire tous les ensembles de pièces reliés entre elles par des liaisons encastrement;
- ▶ identifier les surfaces de contact entre les classes d'équivalence;
- ▶ associer une liaison cinématique aux surfaces de contact;
- ▶ tracer les liaisons en utilisant une couleur par classe d'équivalence et respectant leur positionnement relatif;
- ▶ relier les liaisons de manière filaire;
- ▶ indiquer le bâti, les centres de liaisons et la numérotation des classes d'équivalence.

Méthode – Paramétrage d'un mécanisme cinématique

Pour paramétrier un mécanisme, il faut associer un repère à chaque classe d'équivalence, une constante à chaque dimension fixe (pour une même classe d'équivalence) et une variable à chaque degré de mobilité de liaison (entre deux classes d'équivalence).

- ▶ si la mobilité est une translation, on définit un paramètre variable entre deux points selon une seule direction (la direction de la translation);
- ▶ si la mobilité est une rotation il faut définir l'axe de rotation et l'angle variable en précisant la figure de changement de base.

7.1	Modélisation géométrique	
–	Lois entrées-sorties	1
7.2	Modélisation cinématique	2
7.3	Transmetteurs de puissance	4

Par usage, nous associerons une lettre grecque à un paramètre variable et une lettre romane à une dimension fixe. Cela permet de repérer plus facilement quelles sont les variables temporelles lors de calcul de dérivées.

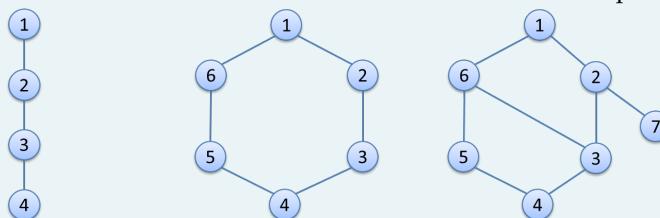
Définition – Graphe de structure – Chaînes

Graphe qui permet d'avoir une vue d'ensemble du mécanisme :

- ▶ les classes d'équivalences sont schématisées par des cercles avec un repère (celui défini précédemment);
- ▶ les liaisons sont schématisées par des traits qui relient les cercles.

On définit 3 types de chaînes :

Les chaînes ouvertes Les chaînes fermées Les chaînes complexes



7.1.2 Résolution des lois entrée–sortie

Méthode – Calcul de la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Un système se présentant sous forme d'une chaîne de solide fermée a pour but de transformer un mouvement. On s'intéresse alors pour cela à la relation cinématique liant le mouvement d'entrée du système et le mouvement de sortie. On écrit pour cela une **fermeture de chaîne géométrique**. Pour cela :

1. paramétriser le mécanisme ;
2. identifier la grandeur d'entrée et de sortie ;
3. à l'aide du théorème de Chasles, exprimer le vecteur nul en fonction des vecteurs liant le centre de chacune des liaisons ;
4. projeter la relation vectorielle sur une des bases ;
5. combiner les relations pour exprimer la sortie en fonction de l'entrée ;
6. dériver si besoin pour avoir le lien entre les vitesses.

Méthode – Manipulation du système d'équations

1. Pour supprimer une longueur λ : on met les deux équations sous la forme $\lambda =$ et on fait le rapport des deux équations.
2. Pour supprimer l'angle φ : on met une équation sous la forme $\cos \varphi =$ et la seconde sous la forme $\sin \varphi =$ et on utilise la relation $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.
3. Dans d'autres cas, on peut avoir à utiliser l'expression de la tangente.

Méthode – Autre idée pour calculer la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Dans certains mécanismes, on peut observer que deux vecteurs sont toujours orthogonaux. En utilisant le fait que le produit scalaire entre ces deux vecteurs est nul puis en projetant les vecteurs dans une même base puis en réalisant le calcul, il est possible de déterminer une loi entrée-sortie.

7.2 Modélisation cinématique

Définition – Solide Indéformable

On considère deux points A et B d'un solide indéformable noté S . On note t le temps. $\forall A, B \in S, \forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB}(t)^2 = \text{constante}$.

Définition – Trajectoire d'un point appartenant à un solide

Soit un point P se déplaçant dans un repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. La trajectoire du point P est définie par la courbe $\mathcal{C}(t)$ paramétrée par le temps t . On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{OP}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = x(t)\vec{i}_0 + y(t)\vec{j}_0 + z(t)\vec{k}_0$$

Définition – Vitesse d'un point appartenant à un solide

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0 \left(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0 \right)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1, \left(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \right)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0 . Soit un point P appartenant au solide S_1 . La vitesse du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)}(t) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0P(t)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

Résultat –

Lorsque il n'y a pas de degré de liberté de translation dans une liaison, la vitesse au centre de la liaison est nulle. Ainsi :

- ▶ si les solides S_1 et S_2 sont en liaison rotule de centre O alors $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \vec{0}$;
- ▶ si les solides S_1 et S_2 sont en liaison pivot de d'axe (O, \vec{u}) alors $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \vec{0}$;
- ▶ si les solides S_1 et S_2 sont en liaison rotule à doigt de centre O alors $\overrightarrow{V(O, S_2/S_1)} = \vec{0}$.

Résultat – Déivation vectorielle

Soient S_0 et S_1 deux solides en mouvements relatifs et \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_1 les repères orthonormés directs associés. Soit \vec{v} un vecteur de l'espace. On note $\overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$ le vecteur instantané de rotation permettant d'exprimer les rotations entre chacune des deux bases. La dérivée d'un vecteur dans une base mobile se calcule donc ainsi :

$$\left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \vec{v}.$$

Résultat – Champ du vecteur vitesse dans un solide – Formule de Varignon – Formule de BABAR

Soient A et B deux points appartenant à un solide S_1 en mouvement par rapport à S_0 . Le champ des vecteurs vitesses est donc déterminé ainsi :

$$\overrightarrow{V(B \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(A \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}_{\vec{R}}$$

Résultat – Composition du vecteur vitesse

Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 et un solide S_2 par rapport au solide S_1 . Pour chacun des points A appartenant au solide S_2 , on a :

$$\overrightarrow{V(A, S_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V(A, S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(A, S_1/\mathcal{R}_0)}$$

Remarque

- $\overrightarrow{V(A, S_2/\mathcal{R}_0)}$ est appelé vecteur vitesse absolu;
- $\overrightarrow{V(A, S_2/S_1)}$ est appelé vecteur vitesse relatif;
- $\overrightarrow{V(A, S_1/\mathcal{R}_0)}$ est appelé vecteur vitesse d'entraînement.

Résultat – Composition du vecteur vitesse

Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 et un solide S_2 par rapport au solide S_1 . On a :

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)}$$

Définition – Accélération d'un point appartenant à un solide

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0 .

Soit un point P appartenant au solide S_1 . L'accélération du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/S_0)(t)} = \left[\frac{d(\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)(t)})}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

7.3 Transmetteurs de puissance

7.3.1 Transmission par engrenages

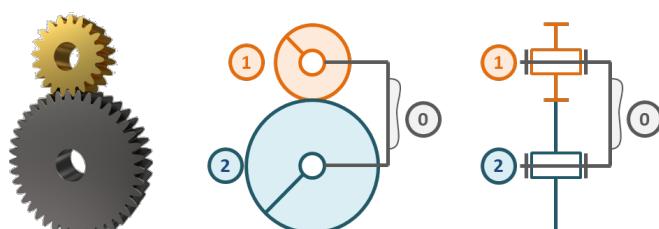
Définition –

Engrenage Un engrenage est constitué de deux roues dentées en contact. Une roue dentée est caractérisée (entre autre) par son nombre de dents Z , son diamètre primitif D en mm et son module en mm. On a $D = mZ$. Pour que deux dents engrènent elles doivent avoir le même module.

Engrenage – Contact extérieur**Résultat –**

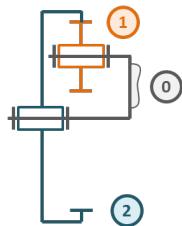
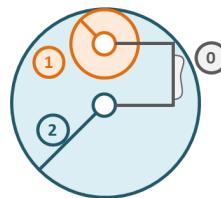
$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

n caractérise le nombre de contacts extérieurs, ici $n = 1$.

**Engrenage – Contact intérieur**

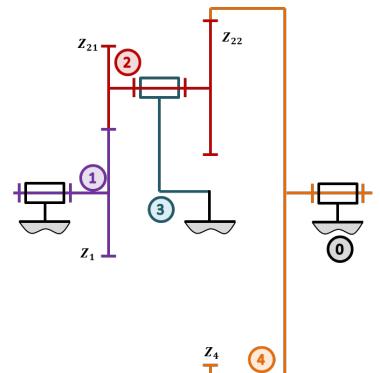
Résultat –

$$\text{ici } n = 0, \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{\prod Z_{\text{menantes}}}{\prod Z_{\text{menées}}} = -\frac{Z_1 Z_2}{Z_2 Z_3}$$

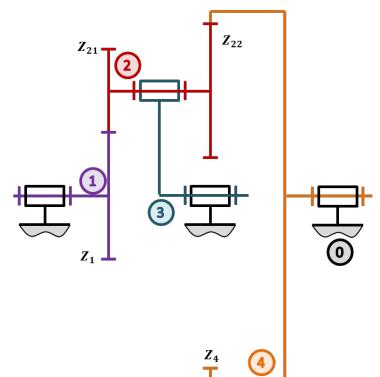
**Train d'engrenages à axes fixes****Résultat –**

$$\frac{\omega(4/0)}{\omega(1/0)} = (-1)^n \frac{\prod Z_{\text{menantes}}}{\prod Z_{\text{menées}}} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$$

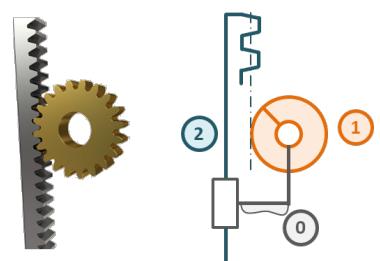
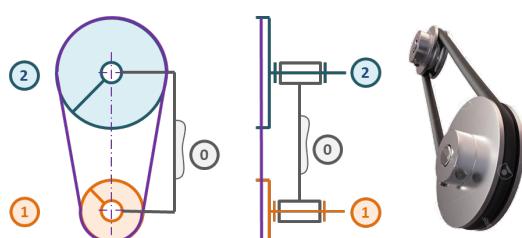
n caractérise le nombre de contacts extérieurs, ici $n = 1$.

**Train d'engrenages épicycloïdal****Méthode –**

1. On identifie le porte-satellite, ici 3.
2. On bloque le porte-satellite. On peut alors se ramener au cas du train simple (voir ci-dessus).
3. On écrit le rapport de vitesse **par rapport au porte-satelltite 3** : $\frac{\omega(4/3)}{\omega(1/3)} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} = K$ (raison du train épicycloïdal).
4. En fonction de la roue bloquée, on réalise une décomposition des vitesses.
Par exemple, Si 4 est bloquée, on peut chercher à établir $\frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)}$.
5. On repart du point 3 et on a : $\frac{\omega(4/3)}{\omega(1/3)} = K \Leftrightarrow \frac{\omega(4/0) + \omega(0/3)}{\omega(1/0) + \omega(0/3)} = K \Leftrightarrow \frac{-\omega(3/0)}{\omega(1/0) - \omega(3/0)} = K \Leftrightarrow \frac{\omega(3/0)}{\omega(1/0)} = \frac{K}{K-1}$.

**Système pignon – crémaillère****Résultat –**

Soit R le rayon primitif du pignon. On a $V(2/0) = \pm R\omega(1/0)$.

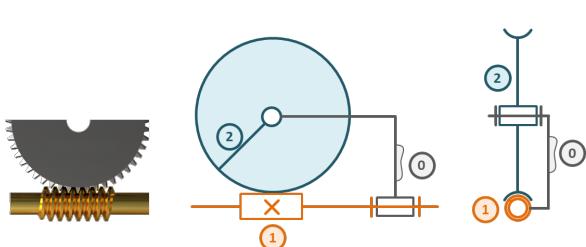
**Transmission par poulie chaîne et par poulie courroie****Résultat –**

$$\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Roue et vis sans fin



Soit Z le nombre de dents de la roue et n le



nombre de filets de la vis, on a $\frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)} = \frac{n}{Z}$

Résultat –

En notant v la vis et e l'écrou, soit p le pas de la vis (ici à droite) on a

$$v(v/e) = \omega(v/e) \frac{p\text{as}}{2\pi}$$

Système de transmission Rotation – Rotation

	Joint de Oldham	Joint de cardan	Joint tripode
Homocinétique	Oui	Non, Oui si doublé	Quasi
Défaut d'alignement axial	Oui	Non	Non
Défaut d'orientation entre les axes	Non	Oui	Oui
Utilisation	Maxpid :)	Colonne de direction (DAE), manivelle de volet roulant	Automobile



Application 1

Micromoteur d'un avion de modélisme – Sujet

Mise en situation

La mise en mouvement d'une certaine catégorie d'avions de modélisme est assurée par un moteur thermique. La figure ci-dessous propose un éclaté d'un modèle 3D ainsi que le schéma cinématique associé.

On appelle :

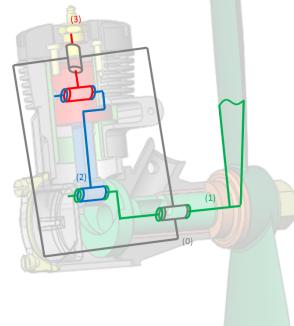
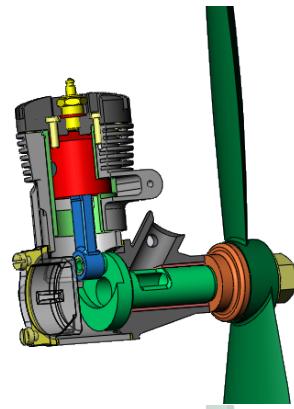
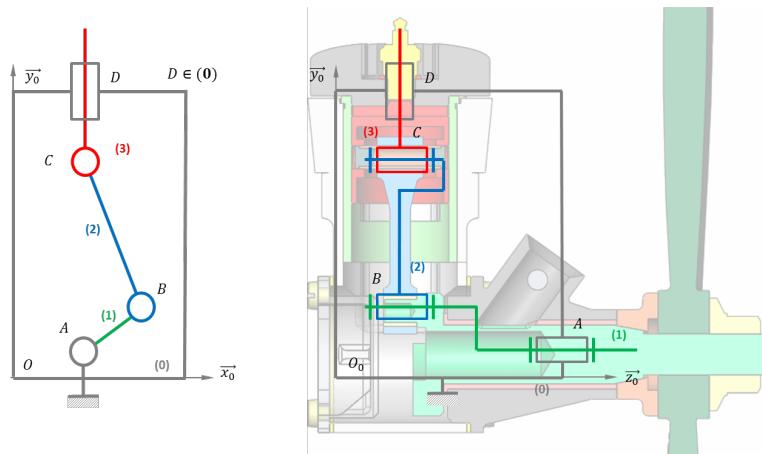
- (0) la bâti lié à la voilure de l'avion ;
- (1) le vilebrequin, solidaire de l'hélice de l'avion ;
- (2) la bielle ;
- (3) le piston.

Objectif

- Déterminer la loi de position et de vitesse du piston pour avoir un taux de rotation du moteur de 9000 tr min^{-1} .
- Vérifier que l'accélération est inférieure à $10\,000 \text{ m s}^{-2}$.

Modélisation

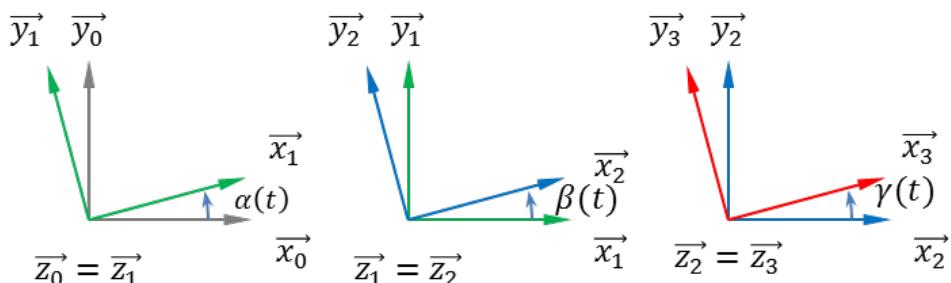
La modélisation par schéma cinématique est donnée dans le schéma ci-dessous.



On appelle :

- $\mathcal{R}_0 = (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au bâti (0) ;
- $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ le repère lié au vilebrequin (1) avec $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ le repère lié à la bielle (2) avec $\beta(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ avec $\vec{AB} \cdot \vec{x}_1 = e$ et $e = 5,25 \text{ mm}$;
- $\mathcal{R}_3 = (C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ le repère lié au piston (3) avec $\gamma(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ avec $\vec{BC} = L\vec{x}_2$ et $\vec{AC} \cdot \vec{y}_0 = \lambda(t)$ et $L = 23,9 \text{ mm}$.

Les figures planes de changement de repère sont données ci-dessous :



Question 1 Tracer le graphe de structure. Définir le nombre de cycles, la mobilité du mécanisme et le nombre de degrés de liberté de chacune des liaisons en 2D et en 3D.

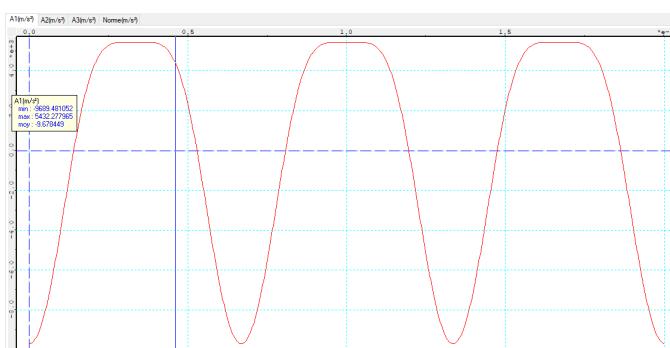
Question 2 Préciser la variable d'entrée ainsi que la variable de sortie du système.

Question 3 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique du système.

Question 4 Déterminer la loi entrée-sortie cinématique du système.

Question 5 Tracer l'allure de la loi de vitesse du piston.

Une simulation réalisée sous Méca3D permet d'obtenir l'évolution de l'accélération du piston :



Question 6 Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Application 2

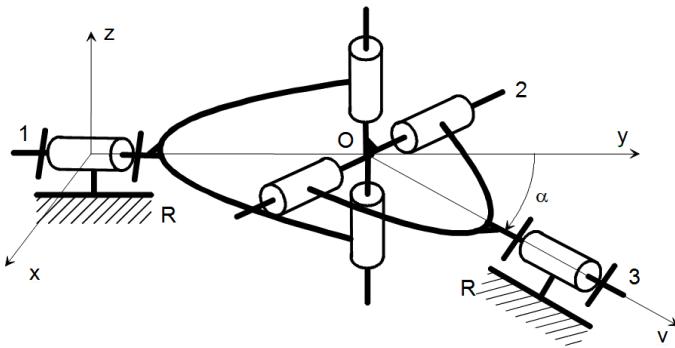
Joint de cardan – Sujet

Joint de Cardan

Un joint de Cardan est un accouplement qui permet de transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres concourants mais non alignés. L'angle maximum pratiquement utilisé entre les arbres est de 45. Une application courante est la transmission entre boîte de vitesses et roues-avant d'une voiture.

Les vues ci-contre donnent des images d'un joint de cardan.

La modélisation suivante est proposée.



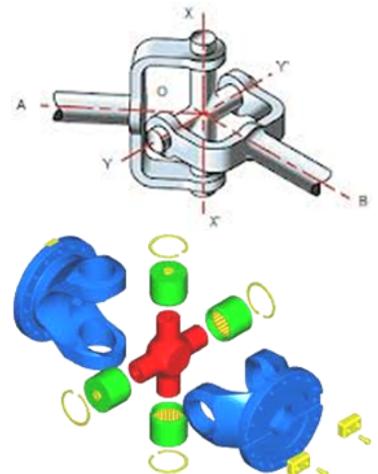
On appelle :

- ▶ \mathcal{R} le repère lié au solide R considéré comme fixe. $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$;
- ▶ \mathcal{R}' le repère lié au solide R considéré comme fixe. $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$. On pose $\alpha = (\vec{y}, \vec{v})$ (constant);
- ▶ α l'"angle de brisure";
- ▶ \mathcal{R}_1 le repère lié au solide 1. $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}_1)$. On pose $\theta_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1)$;
- ▶ \mathcal{R}_3 le repère lié au solide 3. $\mathcal{R}_3 = (O, \vec{x}_3, \vec{v}, \vec{z}_3)$. On pose $\theta_3 = (\vec{u}, \vec{x}_3)$.

Question 1 Tracer en vue orthogonale, les trois dessins (figures de changement de base) permettant le passage de \mathcal{R} à \mathcal{R}_1 , de \mathcal{R} à \mathcal{R}' et de \mathcal{R}' à \mathcal{R}_3 .

Question 2 Exprimer la condition géométrique sur 2 permettant de lier \mathcal{R}_1 à \mathcal{R}_3 .

Question 3 Développer cette relation et trouver la loi entrée sortie : $\theta_3 = f(\theta_1, \alpha)$.
Tracer, pour $\alpha = 45$, la courbe représentant l'évolution de la sortie θ_3 en fonction de l'entrée θ_1 avec θ_1 variant de $-\pi$ à $+\pi$.





Question 4 Dériver cette relation par rapport au temps pour trouver la vitesse de sortie $\dot{\theta}_3$ en fonction de la vitesse d'entrée $\dot{\theta}_1$, de θ_1 et de α .

Question 5 Tracer l'évolution de la vitesse de sortie $\dot{\theta}_3$ en fonction notamment de l'évolution de l'angle d'entrée θ_1 . On prendra un angle de brisure de 45 et une vitesse d'entrée constante $\dot{\theta}_1$ de 1 rad/s.

Question 6 Conclure sur une des propriétés de ce mécanisme.

Application 3

Centrifugeuse humaine – Sujet

Afin d'analyser les effets de l'accélération sur le corps humaine, le CNRS / MEDES a développé une centrifugeuse humaine. On donne ci-dessous la modélisation cinématique de la centrifugeuse.

Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci-contre.

Les paramètres constants du système sont les suivants :

- $\overrightarrow{O_0 O_1} = a \vec{i}_1$;
- $\overrightarrow{O_1 G} = b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$.

Trajectographie

Question 1 Donner la trajectoire du point G dans le repère \mathcal{R}_0 .

Cinématique

Question 2 Calculer $\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)}$.

Accélération

Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(G, S_2/S_0)}$.

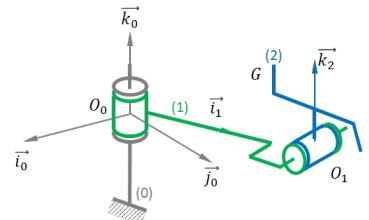


FIGURE 7.1 – Modélisation cinématique

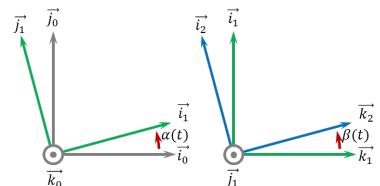


FIGURE 7.2 – Paramétrage



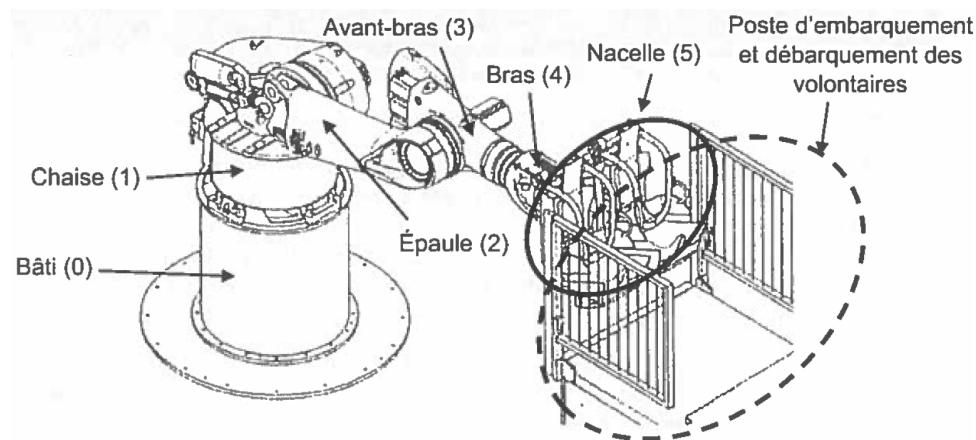
Application 4

Danse avec les robots – Sujet

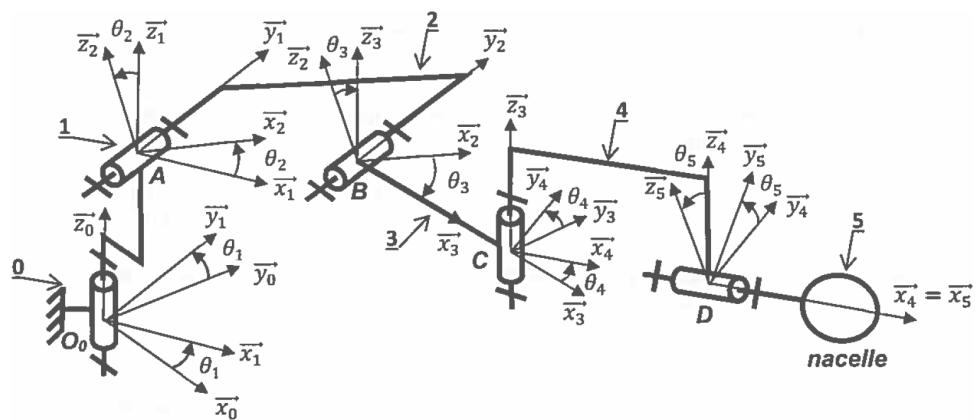
ICNA 2017.

« Danse avec les robots » est une attraction du Futuroscope de Poitiers. Le principe consiste à attacher deux personnes au bout d'un bras de robot 5 axes. Les personnes sont ainsi remués au rythme de la musique.

On appelle nacelle l'ensemble de solides composé des sièges, des harnais de sécurité et des 2 volontaires.



On donne sur la figure suivant le schéma cinématique spatial d'un des robots avec le paramétrage associé aux différents solides et aux liaisons.



L'ensemble des repères sont considérés orthonormés directs.

- ▶ On note $\mathcal{R}_0 = \left(O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ le repère supposé galiléen associé au sol de la salle de spectacle, appelé bâti 0.
- ▶ On note $\mathcal{R}_1 = \left(O_0; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\right)$ le repère associé à la chaise 1 et $\theta_1 = \left(\vec{x}_0, \vec{x}_1\right) = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1\right)$ l'angle de rotation de la chaise 1 par rapport au bâti 0.
- ▶ On note $\mathcal{R}_2 = \left(A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2\right)$ le repère associé à l'épaule 2, $\overrightarrow{O_0 A} = a \vec{z}_0 + b \vec{x}_1$ et $\theta_2 = \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = \left(\vec{z}_1, \vec{z}_2\right)$ l'angle de rotation de l'épaule 2 par rapport à la chaise 1.
- ▶ On note $\mathcal{R}_3 = \left(B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3\right)$ le repère associé à l'avant-bras 3, $\overrightarrow{A B} = c \vec{x}_2$ et $\theta_3 = \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) = \left(\vec{z}_2, \vec{z}_3\right)$ l'angle de rotation de l'avant-bras 3 par rapport à l'épaule 2.
- ▶ On note $\mathcal{R}_4 = \left(C; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4\right)$ le repère associé au bras 4, $\overrightarrow{B C} = d \vec{x}_3$ et $\theta_4 = \left(\vec{x}_3, \vec{x}_4\right) = \left(\vec{y}_3, \vec{y}_4\right)$ l'angle de rotation du bras 4 par rapport à l'avant-bras 3.
- ▶ On note $\mathcal{R}_5 = \left(D; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5\right)$ le repère associé à la nacelle 5, $\overrightarrow{C D} = e \vec{x}_4$ et $\theta_5 = \left(\vec{y}_4, \vec{y}_5\right) = \left(\vec{z}_4, \vec{z}_5\right)$ l'angle de rotation de la nacelle 5 par rapport au bras 4.

Le centre de gravité de la nacelle 5 (siège + volontaire + harnais) est tel que $\overrightarrow{D G} = f \vec{x}_4 + h \vec{z}_5$.

On définit la position du point G dans la base $\mathcal{B}_0 = \left(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ telle que $\overrightarrow{O_0 G} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0$.

Question 1 Tracer les figures planes de changement de repère.

Question 2 Exprimer la position du point G suivant \vec{x}_0 .

Objectif

Valider que l'exigence d'accélération est satisfaite : l'accélération ressentie doit être au maximum de 3,5 g.



Question 3 Exprimer la vitesse du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée $\overrightarrow{V(G, 5/0)}$.

On limite désormais l'étude dans au cas où $\dot{\theta}_2 = 1,45 \text{ rad s}^{-1}$, $\theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0$.

Question 4 Exprimer l'accélération du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée $\overrightarrow{\Gamma(G, 5/0)}$.

Question 5 Conclure quant au respect de l'exigence d'accélération ressentie.

Application 5

Robot de peinture – Sujet

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

Robot de peinture

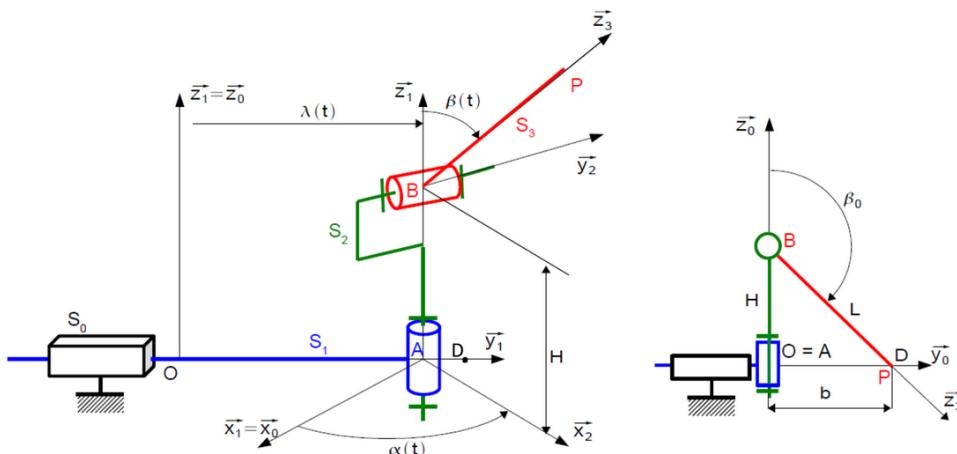
On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot, pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.



Exigences techniques	Critère	Niveau
1.7	Vitesse de déplacement relatif	Vitesse constante



La modélisation cinématique du robot est donnée sur la figure suivante :



Shéma cinématique du robot

Position médiane (P est en D)
(et A en O)

Le chariot S_1 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est en mouvement de translation de direction \vec{y}_0 par rapport au bâti S_0 de repère $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Le corps S_2 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{z}_0) avec le chariot S_1 .

Le bras S_3 , auquel on associe le repère $\mathcal{R}_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est en mouvement de rotation autour de l'axe (B, \vec{y}_2) avec le corps S_2 .

Question 1 Construire les figures planes de repérage/paramétrage.

Question 2 Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$, $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)}$.

Question 5 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} \cdot \vec{x}_0$.

Question 6 Calculer les produits vectoriels et scalaires suivants : $\vec{z}_3 \wedge \vec{x}_2$ et $\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_2$, $\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_1$ et $\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1$.

On a $\overrightarrow{OD} = b\vec{y}_0$ avec $b = \sqrt{L^2 - H^2}$. On désire que P décrive la droite (D, \vec{x}_0) à vitesse constante V , conformément au cahier des charges.

Question 7 Représenter sur une figure dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, puis sur une figure dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, les positions des points O, D, A, B et P du robot lorsque celui-ci est en position extrême (A est en D).



Question 8 Traduire, à l'aide de l'expression de $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ le fait que P se déplace à la vitesse V selon \vec{x}_0 . En déduire $\dot{\beta}$.

Question 9 Exprimer alors $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de L, V, α et β_0 .

Question 10 A l'aide de la figure précédente, exprimer β_0 en fonction de b et L .

Question 11 Exprimer $\dot{\lambda}$ et $\dot{\alpha}$ en fonction de V, b et α .

Application 6

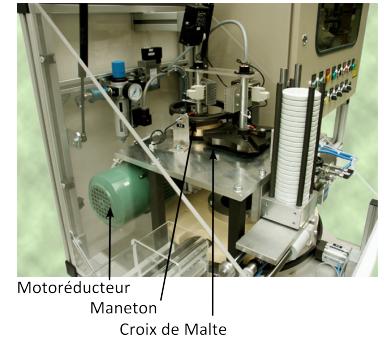
Capsuleuse de bocaux – Galet – Sujet

Le conditionnement de nombreux produits alimentaires est réalisé dans des bocaux en verre fermés par des capsules vissées. La société RAVOUX, spécialisée dans le conditionnement, a créé ce prototype afin d'optimiser ses machines de production. Elle est donc équipée de nombreux capteurs permettant, via un ordinateur, d'optimiser les paramètres de production tels que qualité totale, production maximale, ...

Le système de laboratoire proposé s'insère dans une chaîne de conditionnement de produits alimentaires, entre l'unité de remplissage des bocaux et le poste d'étiquetage. Sa fonction principale est la «fermeture étanche de bocaux préalablement remplis de produits alimentaires»

On s'intéresse ici au système de croix de Malte. Il permet d'obtenir une rotation discontinue à partir d'un mouvement de rotation continue. Ainsi, pendant que la croix de Malte ne tourne pas, le système peut agir sur la matière d'œuvre (flacon).

Lors de la rotation de la croix de Malte, la capsuleuse déplace deux flacons. Afin d'accroître la productivité, il faut diminuer la durée de cette phase. Cependant, si la croix de Malte tourne trop vite, les flacons basculent ce qui entraîne un mauvais fonctionnement du système. Ainsi, on désire que la **vitesse de la croix soit inférieure à 50 tours/minute.**

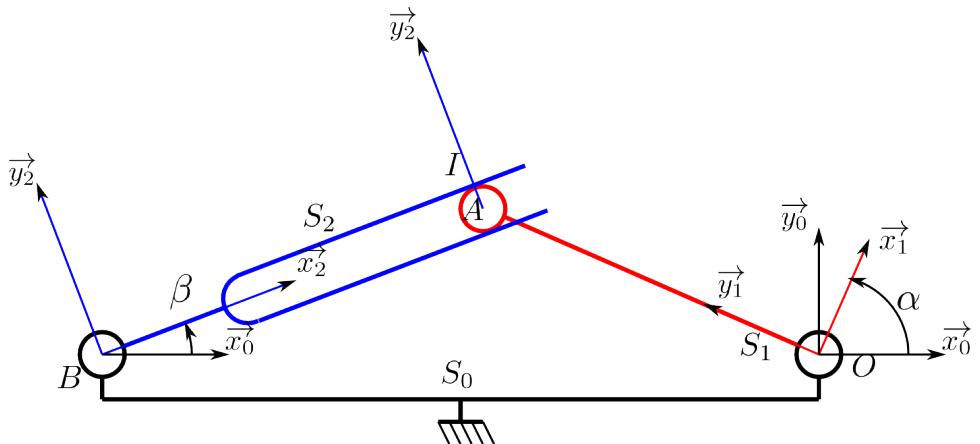


Modélisation sans galet

Afin de modéliser le système à croix de malte, on propose le schéma cinématique ci-dessous.

On note :

- ▶ $\mathcal{R} = \left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \right)$ le repère lié au bâti S_0 . On note $\overrightarrow{OB} = -L\vec{x}_0$ avec $L = 145 \text{ mm}$;
- ▶ $\mathcal{R}_1 = \left(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 \right)$ le repère lié à l'arbre S_1 . On pose $\overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1$ avec $R = 141 \text{ mm}$ et $\alpha = \left(\vec{x}_0, \vec{x}_1 \right)$. L'arbre S_1 est lié au motoréducteur de la capsuleuse. On a : $\dot{\alpha} = 10 \text{ tr/min}$;
- ▶ $\mathcal{R}_2 = \left(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 \right)$ le repère lié à l'arbre S_2 . On pose $\overrightarrow{BA} = \lambda(t)\vec{x}_2$, $\overrightarrow{AI} = r\vec{y}_2$ et $\beta = \left(\vec{x}_0, \vec{x}_2 \right)$;



Question 1 Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

Question 2 Établir la loi entrée/sortie du système.

Question 3 Donner une méthode permettant de valider la cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

Question 4 Donner l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$.

Question 5 Donner l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$.

Question 6 En déduire l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$ dans la base \mathcal{R}_2 . On donne $\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta)\vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta)\vec{y}_2$.

Question 7 D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide S_1 par rapport à S_2 ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.

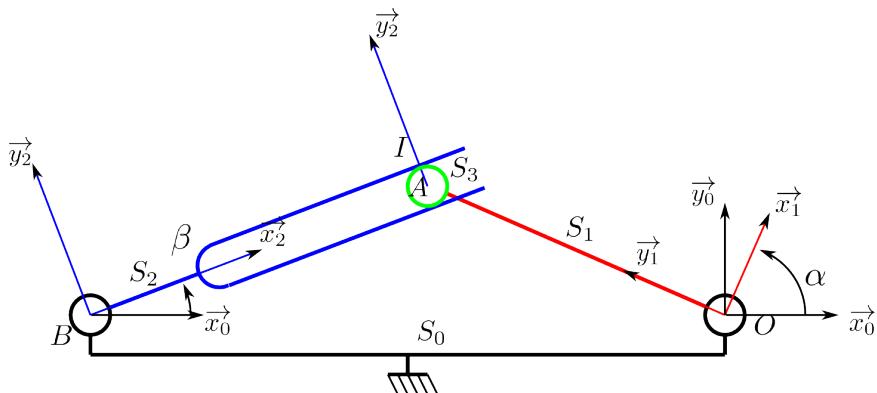
Question 8 $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} \cdot \vec{x}_2$ est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse? Si oui, comment? Si non, proposez une modification du système permettant la prise en compte de ce problème.

Modélisation avec galet

On considère maintenant l'existence d'un galet S_3 en bout de l'arbre S_1 . On fait l'hypothèse que le galet roule sans glisser dans le S_2 . S_3 et S_1 sont en liaison pivot d'axe \vec{z}_0 et de centre A .



Le galet a un diamètre extérieur de 16 mm. D'après la documentation constructeur, la vitesse de rotation du galet ne doit pas dépasser les 5000 tr/min.



Question 9 Quelle est la modification sur le paramétrage du système ?

Question 10 Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement sans glissement** ?

Question 11 Calculer la vitesse de rotation du galet $\dot{\gamma}$ en commençant par exprimer $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$? Indice : décomposer $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$ en fonction des mouvements connus.

Question 12 Valider le choix du galet.

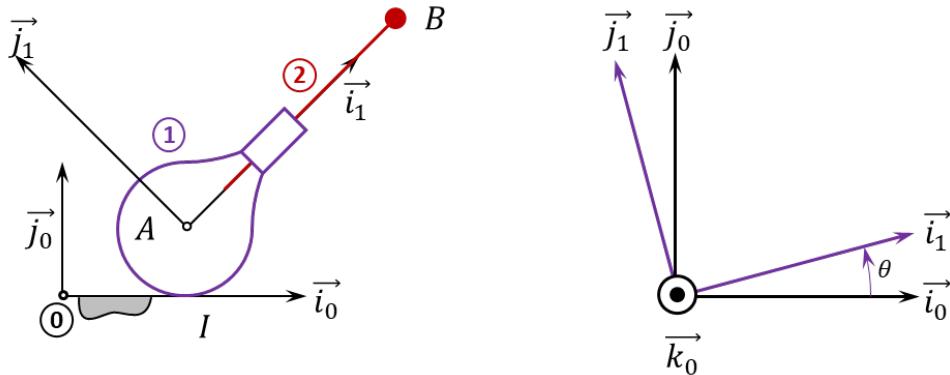


Applications au Roulement sans glissement

Mouvement RT – RSG ★★

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\vec{IA} = R\vec{j}_0$ et $\vec{AB} = \lambda(t)\vec{i}_1$. De plus $R = 15 \text{ mm}$. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I .



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B .

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$.

Éléments de correction

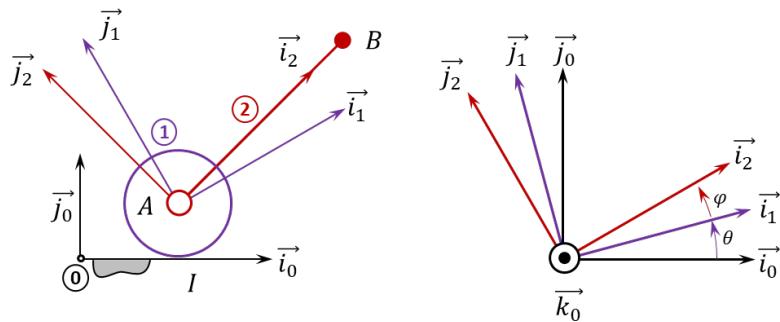
1. $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \dot{\lambda}\vec{i}_1 + \dot{\theta}(\lambda(t)\vec{j}_1 - R\vec{i}_0)$.
2. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}\vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}\vec{i}_1 + \dot{\theta}(\lambda(t)\vec{j}_1 - R\vec{i}_0) \end{array} \right\}_B$.
3. $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\vec{i}_1 + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\vec{j}_1 + \ddot{\theta}(t)(\lambda(t)\vec{j}_1 - R\vec{i}_0) + \dot{\theta}(t)(\dot{\lambda}(t)\vec{j}_1 - \lambda(t)\dot{\theta}\vec{i}_1)$.

Corrigé voir 12.

Mouvement RR – RSG ★★

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\vec{IA} = R\vec{j}_0$ et $\vec{AB} = L\vec{i}_2$. De plus $R = 15 \text{ mm}$. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I .



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$.

Éléments de correction A Vérifier...

$$1. \overrightarrow{V(B, 2/0)} = L\dot{\phi}(t)\vec{j}_2 + \dot{\theta}(t) \left(L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0 \right).$$

$$2. \{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{k}_0 \\ L\dot{\phi}(t)\vec{j}_2 + \dot{\theta}(t) \left(L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0 \right) \end{array} \right\}_B.$$

Corrigé voir 3.

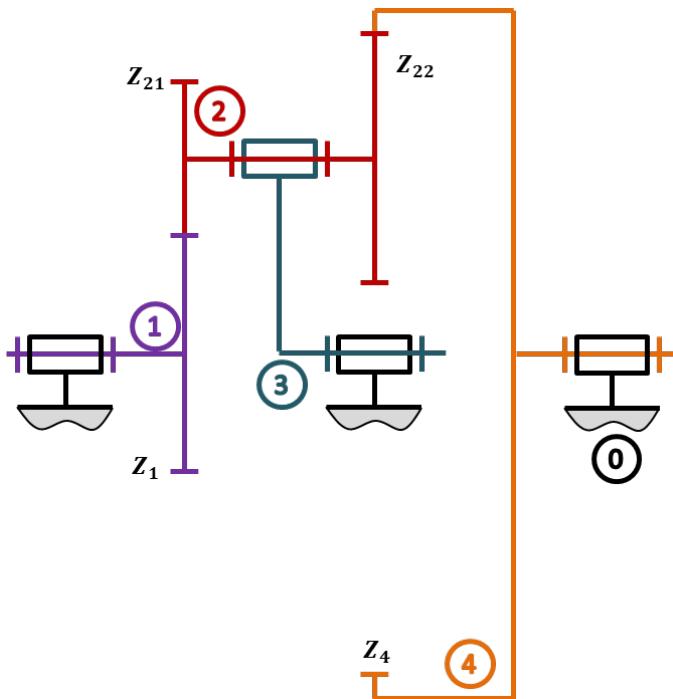
$$3. \overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} = L\ddot{\phi}(t)\vec{j}_2 - L\dot{\phi}(t)(\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{i}_2 + \ddot{\theta}(t) \left(L\vec{j}_2 - R\vec{i}_0 \right) - L\dot{\theta}(t)(\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t))\vec{i}_2.$$

Train simple ★

A3-05

C2-06

Soit le train épicycloïdal suivant.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer ω_{40} en fonction de ω_{30} et ω_{10} .

Question 3 On suppose que ω_{40} est bloqué. Exprimer le rapport $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$.

Corrigé voir 3.

Train simple ★

Soit le train d'engrenages suivant.

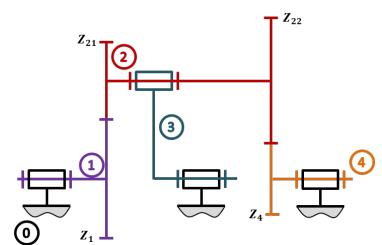
Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer ω_{40} en fonction de ω_{30} et ω_{10} .

Question 3 On suppose que ω_{40} est bloqué. Exprimer le rapport $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$.

A3-05

C2-06



Corrigé voir 3.

Éléments de correction

$$1. \omega_{40} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30}.$$

$$2. \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_1 Z_{22} - Z_{21} Z_4}$$