

## Parallélépipède★

03 DYN

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de

masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

La matrice d'inertie d'un parallélépipède de cotés  $a, b$  et  $c$  et de masse  $m$  est donnée en

son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec  $A = m \frac{b^2 + c^2}{12}, B = m \frac{a^2 + c^2}{12},$

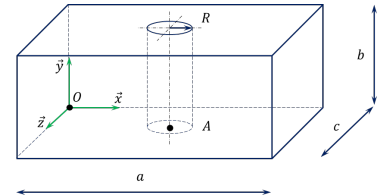
$$C = m \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Soit la pièce suivante.

On pose  $\vec{OA} = \frac{a}{2}\vec{x} + \frac{c}{2}\vec{z}$ .

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$ , en  $A$  puis  $O$ .



Corrigé voir .



## Parallélépipède percé★

03 DYN

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de

masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

La matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle de cotés  $a, b$  et  $c$  et de masse  $m$  est

donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec  $A = m \frac{b^2 + c^2}{12},$

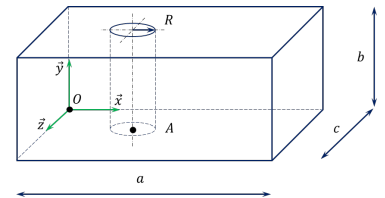
$$B = m \frac{a^2 + c^2}{12}, C = m \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Soit la pièce suivante.

On pose  $\vec{OA} = \frac{a}{3}\vec{x} + \frac{c}{2}\vec{z}$ .

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$ .



Corrigé voir 2.



## Cylindre percé ★

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de

masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

Soit la pièce suivante.

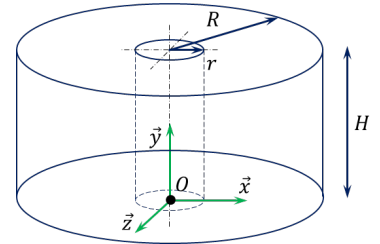
On pose  $\vec{OA} = -\frac{R}{2} \vec{x}$ .

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$  puis en  $O$ .

03 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.



Corrigé voir 2.



## Cylindre percé ★

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de

masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

Soit la pièce suivante constituée d'un grand cylindre noté **1** de rayon  $R$ . **1** est percé d'un cylindre de diamètre de rayon  $r$ . On considère que **1** est constitué d'un matériau homogène de masse volumique  $\rho$ .

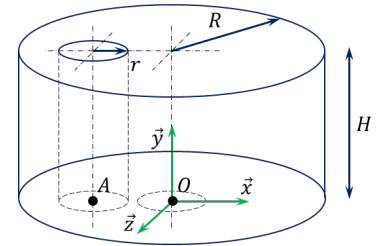
On note  $\vec{OA} = -\frac{R}{2}\vec{x}$ .

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$  puis en  $O$ .

03 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.



Corrigé voir 2.





**Disque ★★**

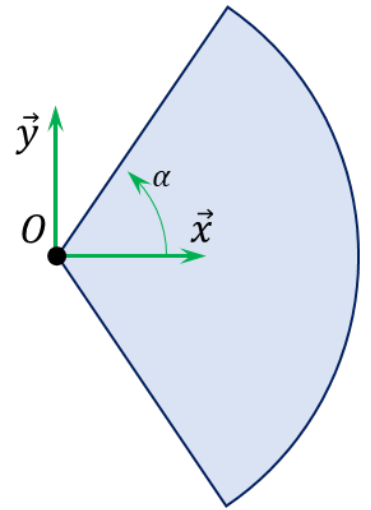
Soit un secteur de disque de rayon  $R$ , d'épaisseur négligeable et de masse surfacique  $\mu$ .

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $O$ .

**03** DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.



Corrigé voir 2.



## Disque ★★

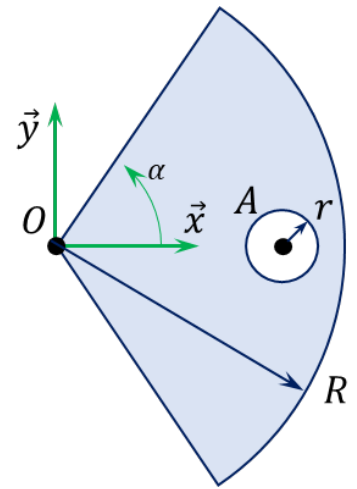
Soit un secteur de disque de rayon  $R$ , d'épaisseur négligeable et de masse surfacique  $\mu$ . Il est percé d'un trou de rayon  $r$  tel que  $\overrightarrow{OA} = \frac{3}{4}R\vec{x}$ .

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $O$ .

03 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.



Corrigé voir 2.



# Suspension automobile – Sujet

Ressources de Florestan MATHURIN.

On s'intéresse à une suspension automobile dont on donne ci-dessous un extrait de cahier des charges fonctionnel ainsi qu'une modélisation. L'objectif est de vérifier si la suspension satisfait le niveau du critère d'affaissement statique maximal du cahier des charges, c'est à dire vérifier si la voiture, soumise à son propre poids, s'affaisse de moins ou de plus de 12 cm, suite à l'écrasement des amortisseurs.

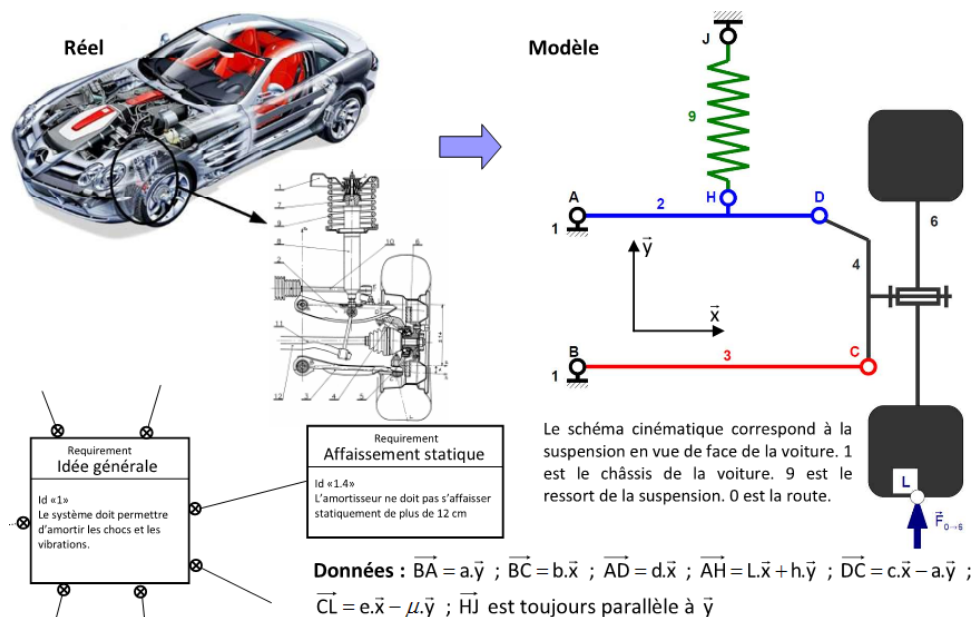
**Question 1** Tracer le graphe de liaisons du mécanisme et déterminer l'hyperstatisme.

**Question 2** En minimisant le nombre d'équations, déterminer une relation entre  $Y_{19}$  (action dans le ressort 9) et  $F_{06}$ .

Données :  $a = 16\text{cm}$ ,  $b = 33\text{cm}$ ,  $c = 8\text{cm}$ ,  $d = 25\text{cm}$ ,  $h = 3\text{cm}$ ,  $L = 15\text{cm}$ ,  $e = 9\text{cm}$ ,  $\mu = 18\text{cm}$ .

La raideur du ressort est  $k = 100\,000\text{N/m}$ . La masse de la voiture est de  $2200\text{ kg}$ .

**Question 3** Conclure quant à la capacité de la suspension de voiture à satisfaire l'exigence Affaissement statique du cahier des charges.





# Application 2

## Pilote automatique de voilier – Sujet

Le safran d'un voilier lui permet de se diriger. Dans le cas du pilote hydraulique du laboratoire, l'angle du safran est asservi afin de pouvoir maintenir un cap, en tenant compte des aléas extérieurs (courants marins, vents violents...). Le safran est actionné par un vérin hydraulique, la pièce 2 étant relié à la tige du vérin et la pièce 3 constituant le corps du vérin. La pièce 1 représente le safran sur lequel agit la pression de l'eau  $p$ , perpendiculairement au plan du safran.

L'objectif de l'étude est de calculer les efforts dans les liaisons dans le but ultérieur de dimensionner le vérin hydraulique et les éléments mécaniques assurant les liaisons (éléments roulants ou coussinets).

On donne :

- ▶  $\overrightarrow{A_1B} = h \overrightarrow{y}$
- ▶  $\overrightarrow{CB} = \lambda \overrightarrow{x}$

**Question 1** Tracer le graphe de structure associé au système.

**Question 2** Donner le degré d'hyperstatisme associé au modèle proposé.

**Question 3** Sur le graphe d'architecture du système indiquer par des flèches les actions mécaniques agissant sur chacune des pièces.

Par la suite, on négligera l'action de la pesanteur sur les pièces 2 et 3.

**Question 4** Déterminer le torseur d'action mécanique de l'eau sur le gouvernail au point  $A_2$ . On considérera que  $\overrightarrow{OA_2} = \vec{0}$ . On négligera l'épaisseur du safran.

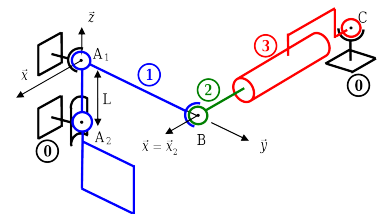
**Question 5** Déterminer l'effort à délivrer par le vérin pour supporter la pression de l'eau sur le safran.

**Question 6** Déterminer alors la pression à délivrer par le vérin en fonction d'une section  $S$ .

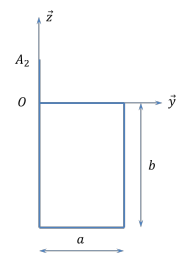
D'après Florestan MATHURIN.



**FIGURE 5.1** – Safrans... du SAFRAN (Skipper Marc Guillemot)



**FIGURE 5.2** – Schéma d'architecture







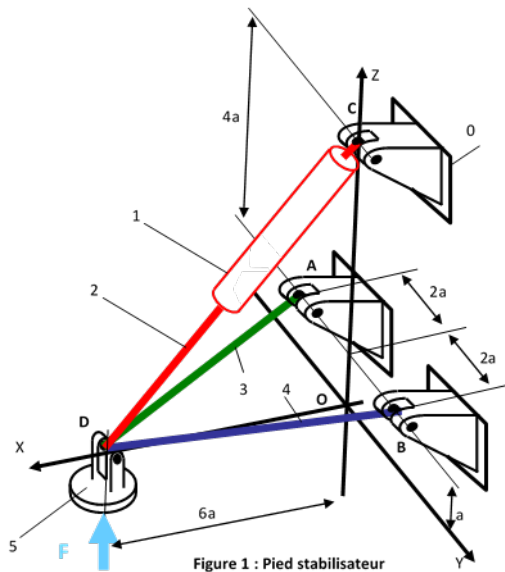
# Application 3

## Pied stabilisateur – Sujet

Equipe La Martinière Monplaisir.



On s'intéresse à un pied stabilisateur d'un engin de chantier. La figure 1 représente l'un des 4 pieds stabilisateurs d'un engin de chantier. Chaque pied est composé d'un patin (5), de deux barres (3) et (4) et d'un vérin hydraulique (1+2) (1=corps, 2=piston). Les barres sont articulées en A et B sur le bâti (0) de l'engin et en D sur le patin. La liaison entre (1) et (2) est modélisée par une liaison pivot glissant. Toutes les autres liaisons sont considérées comme des liaisons rotules. (La pièce (5) est en liaison rotule de centre D avec les pièces (2), (3) et (4).)



Extrait du diagramme des exigences :

Exigences	Critères	Niveau	Limite
Adaptation au vérin hydraulique	Effort transmissible par le vérin	60 kN	Maxi
Dimensionnement RdM	Action dans les barres	25 kN	Maxi

On donne  $\overrightarrow{R}(\text{ext} \rightarrow 5) = F \vec{z}$  avec  $F = 30\,000\text{ N}$ .

La dimension  $a = 400\text{ mm}$ , les points A, B et C sont dans le plan  $(O, \vec{y}, \vec{z})$ . On a :  $\overrightarrow{OD} = 6a \vec{x}$ ,  $\overrightarrow{OC} = 5a \vec{z}$ ,  $\overrightarrow{OB} = 2a \vec{y} + a \vec{z}$ ,  $\overrightarrow{OA} = -2a \vec{y} + a \vec{z}$ .

On pourra noter :  $\overrightarrow{CD} = L_{12} \vec{x}_{12}$ ,  $\overrightarrow{AD} = L_3 \vec{x}_3$ ,  $\overrightarrow{BD} = L_4 \vec{x}_4$ .

**Question 1** Analyser le mécanisme (calculer le degré d'hyperstisme) et proposer les étapes de résolution du problème de détermination des efforts dans les liaisons.

**Question 2** Calculer les actions exercées par le patin sur les barres et le vérin.

**Question 3** Réaliser l'application numérique.

**Question 4** Les exigences du cahier des charges sont-elles vérifiées ?



# TD 4

## Machine de forage – Sujet

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

Dans le domaine du génie civil, les foreuses permettent de réaliser des perçages profonds afin de couler des pieux en béton armé. On s'intéresse aux conditions de basculement statique de la foreuse.

Pour prévenir le basculement de la foreuse, l'opérateur peut observer dans un coin de son écran : le pourcentage  $b_{\%}$  d'atteinte de la posture critique de basculement pour une orientation de tourelle donnée (figure 5.3).

Afin d'assurer la stabilité de l'engin, on cherche à satisfaire l'exigence 1.2 (figure 5.4).

Le paramétrage mécanique est donné sur la figure 5.5 :

- $\mathbf{0}$  le sol,  $\mathbf{S1}$  le châssis de la foreuse,  $\mathbf{S2}$  sa tourelle et son mât et  $\mathbf{S3}$  l'ensemble {table de forage + outil} ;
- $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère attaché aux solides  $\mathbf{S0}$  et  $\mathbf{S1}$  ;
- $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  la base attachée aux solides  $\mathbf{S2}$  et  $\mathbf{S3}$  telle que  $(\vec{x}, \vec{x}_2) = \theta$  où  $\theta$  est connu ;
- $\Sigma = \{\mathbf{S1}, \mathbf{S2}, \mathbf{S3}\}$  l'ensemble de la foreuse, de centre de gravité  $G$  tel que  $\vec{OG} = r\vec{x}_2 + z_G\vec{z}$  ;
- $M = 186,5$  tonnes la masse de l'ensemble  $\Sigma$  et  $m = 18$  tonnes la masse de  $\mathbf{S3}$  seul ;
- $2F_w\vec{z}$  connu, l'effort du câble d'avance sur  $\mathbf{S3}$ . La masse du câble est négligée dans la suite ;
- $F_{\text{sol}}\vec{z}$ , inconnu, l'effort de forage du sol  $\mathbf{0}$  sur l'outil de forage  $\mathbf{S3}$  au point  $F$ , connu, défini par  $\vec{OF} = R\vec{x}_2$  ;
- $-g\vec{z}$  où  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ , l'accélération de la pesanteur terrestre.

On modélise ici les contacts entre le sol et la foreuse **par des contacts ponctuels** :  $F_g\vec{z}$ , (respectivement  $F_d\vec{z}$ ) inconnu, l'effort du sol  $\mathbf{0}$  sur  $\mathbf{S1}$ , supposé ponctuel au centre  $I$  (respectivement  $J$ ) de la surface de contact entre la chenille gauche  $cg$  (respectivement  $cd$ ) et le sol tel que  $\|\vec{OI}\| = a = 2,1 \text{ m}$  (respectivement  $\|\vec{OJ}\| = a = 2,1 \text{ m}$ ).

**Question 1** En appliquant le principe fondamental de la statique en  $O$  à l'isolement de votre choix, donner l'expression de  $F_g$  et de  $F_d$  en fonction des données connues du système, de  $\theta$  et de  $F_{\text{sol}}$ .

Le problème étant symétrique pour  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  (tourelle orientée à droite) et  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  (tourelle orientée à gauche), on n'étudie par la suite que le basculement statique à droite.

**Question 2** Donner la condition en effort pour laquelle il y a basculement statique à droite. En absence d'effort de forage, en déduire la condition sur la position  $(r, \theta)$  du centre de gravité  $G$  pour laquelle le basculement à droite est alors évité.

**Question 3** Interpréter physiquement ce résultat et montrer que  $b_{\%}$  peut être, dans ce cas, approximé par :  $b_{\%} = 100 \frac{|r \cos \theta|}{a}$ .

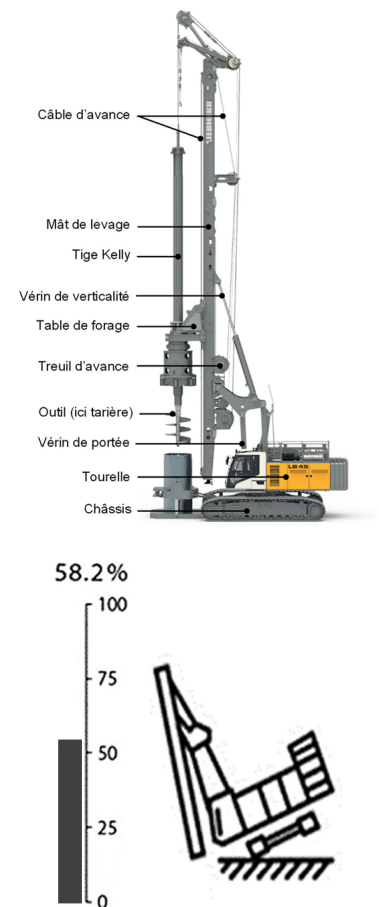


FIGURE 5.3 – Aperçu du contrôle de  $b_{\%}$ .

« requirement »	
Équilibrage statique initial	
Id = '1.2'	
Text = 'b% < 50 % dans la posture la plus défavorable outil levé'	

FIGURE 5.4 – Exigence 1.2.

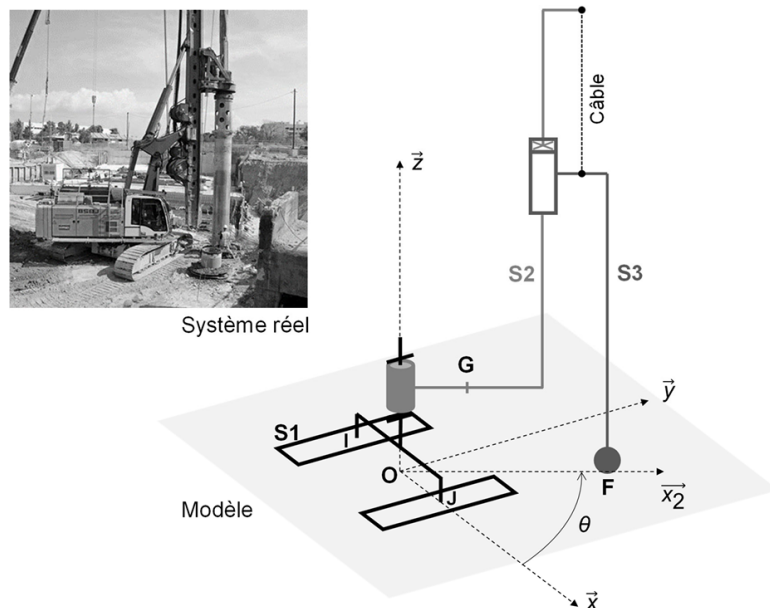


FIGURE 5.5 – Paramétrage mécanique

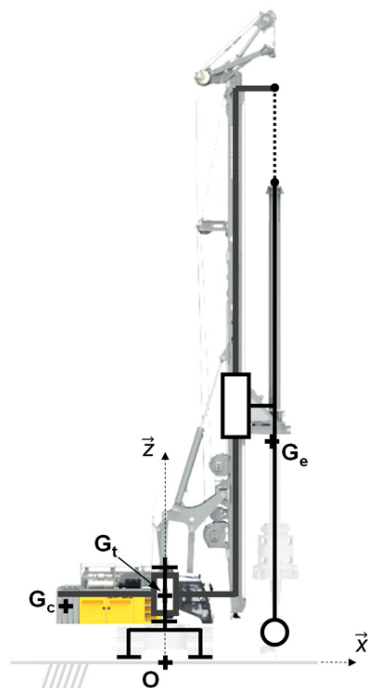


FIGURE 5.6 – Position des centres de gravité des différents solides.

On désire dimensionner le nombre de contrepoids de 8 tonnes à placer à l'arrière de la tourelle pour que, en l'absence de forage et en extension maximale, l'exigence 1.2 d'équilibrage statique initial soit respectée même dans le pire des cas où la tourelle est pleinement orientée à droite ( $\theta = 0^\circ$ ). Dans cette posture, le schéma de la figure 5.6 illustre où se situent, dans le même plan, les centres de gravité des différents éléments de la machine :

- $G_t$  est le centre de gravité de la tourelle et du châssis. La masse de cet ensemble  $S_t$  est notée  $m_t = 44,7$  tonnes ;
- $G_e$  est le centre de gravité de tous les équipements mobiles (tige Kelly, potences, vérins, mât, table de forage, outillage, terre à évacuer), positionnés dans la configuration la plus défavorable. La masse de cet ensemble  $S_e$  est notée  $m_e = 48,8$  tonnes ;
- $G_c$  est le centre de gravité des contrepoids. Il y a  $n_{cp}$  contrepoids de masse totale  $m_c = n_{cp} \cdot m_1$ , où  $m_1 = 8$  tonnes est la masse d'un seul contrepoids ;
- l'accélération de la pesanteur est notée :  $\vec{g} = -g\vec{z} = -9,8\vec{z}$  (en  $m/s^2$ ).

On note (en mètres) :  $\overrightarrow{OG_t} = 2,2\vec{z}$ ,  $\overrightarrow{OG_e} = 4,4\vec{x} + 13\vec{z}$  ;  $\overrightarrow{OG_c} = -4,3\vec{x} + 2,3\vec{z}$ . On fait l'hypothèse que  $\overrightarrow{OG_c}$  reste identique, indépendamment du nombre de contrepoids.

**Question 4** Exprimer la coordonnée sur  $\vec{x}$ , notée  $r$ , du centre de gravité  $G$  total de la machine en fonction des paramètres connus et de  $n_{cp}$ . En déduire le nombre  $n_{cp}$  minimum de contrepoids pour respecter l'exigence 1.2.

