Cours de cinétique ★

04 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.

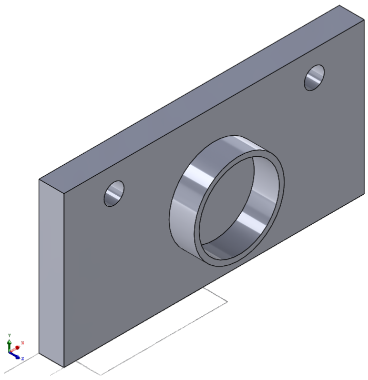
Question 1 Donner l'expression du moment cinétique en un point quelconque.

Question 2 Donner l'expression du moment dynamique en un point quelconque.

Question 3 Donner l'expression du torseur cinétique.

Question 4 Donner l'expression du torseur dynamique.

Question 5 Proposer une expression de la matrice d'inertie du solide au point de votre choix.



Corrigé voir 3.

Cours de cinétique ★

04 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.

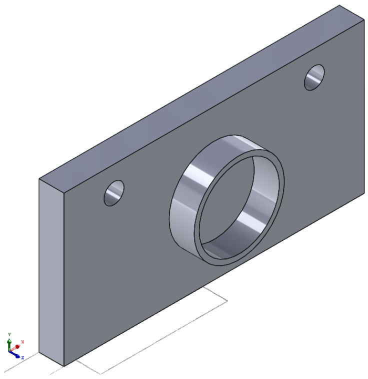
Question 1 Donner l'expression du moment cinétique en un point quelconque.

Question 2 Donner l'expression du moment dynamique en un point quelconque.

Question 3 Donner l'expression du torseur cinétique.

Question 4 Donner l'expression du torseur dynamique.

Question 5 Proposer une expression de la matrice d'inertie du solide au point de votre choix.



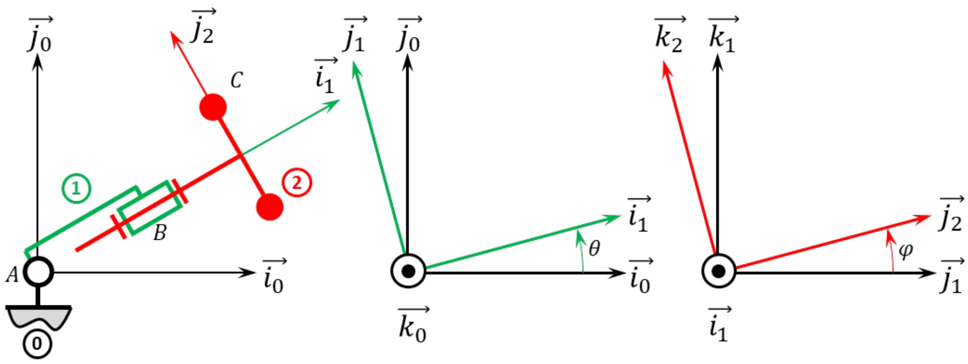
Mouvement RR 3D ★★

04 DYN

C2-09

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BC} = \ell\,\overrightarrow{i_2} + r\,\overrightarrow{j_2}$. On note $R+\ell = L = 20$ mm et $r = 10$ mm. De plus :

- $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de **1**, on note m_1 la masse de **1** et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- G_2 désigne le centre d'inertie de **2** tel que $\overrightarrow{BG_2} = \ell\,\overrightarrow{i_2}$, on note m_2 la masse de **2** et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.



Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en B.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

Corrigé voir 5.

Question 3 Déterminer les lois de mouvements.

04 DYN

Mouvement RR 3D ★★

C2-09

Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en B.

Par définition, $\{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(B, 1/0)} \end{array} \right\}_B$.

Calculons $\overrightarrow{R_d(1/0)}$

$\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1, 1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)}$

Calcul de $\overrightarrow{V(B, 1/0)}$: $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)}$: $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B, 1/0)}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}$.

Au final, $\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1\left(R\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}\right)$.

Calculons $\overrightarrow{\delta(B, 1/0)}$ B est le centre d'inertie du solide 1 ; donc d'une part, $\overrightarrow{\delta(B, 1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(B, 1/0)}\right]_{\mathcal{R}_0}$.

D'autre part, $\overrightarrow{\sigma(B, 1/0)} = I_B(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} = C_1\dot{\theta}\overrightarrow{k_0}$.

Par suite, $\overrightarrow{\delta(B, 1/0)} = C_1\ddot{\theta}\overrightarrow{k_0}$.

Au final, $\{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_1\left(R\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}\right) \\ C_1\ddot{\theta}\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_B$.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

Tout d'abord, $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} = \overrightarrow{\delta(A, 1/0)} + \overrightarrow{\delta(A, 2/0)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A, 1/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$ – Méthode 1

$\overrightarrow{\delta(A, 1/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \left(\overrightarrow{\delta(B, 1/0)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_d(1/0)}\right) \cdot \overrightarrow{k_0} = \left(C_1 \ddot{\theta} \overrightarrow{k_0} + R\overrightarrow{i_1} \wedge m_1\left(R\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}\right)\right) \cdot$
$\overrightarrow{k_0} = C_1\ddot{\theta} + m_1 R^2\ddot{\theta}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$ – Méthode 1

A est un point fixe. On a donc $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0} \cdot \overrightarrow{k_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}\right]_{\mathcal{R}_0} -$
$\underbrace{\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_0}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}$.

A est un point fixe. On a donc $\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \left(I_A(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)}\right) \cdot \overrightarrow{k_0}$

$I_A(2) = I_{G_2}(2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2R^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$ et $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_2} = \dot{\theta}\left(\cos\varphi\overrightarrow{k_2} + \sin\varphi\overrightarrow{j_2}\right) +$
$\dot{\varphi}\overrightarrow{i_2}$.

On a donc $\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 + m_2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 m_2 R^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\theta}\cos\varphi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} A_2\dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\sin\varphi\left(B_2 + m_2R^2\right) \\ \dot{\theta}\cos\varphi\left(C_2 + m_2R^2\right) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$.

De plus $\overrightarrow{k_1} = \cos\varphi\overrightarrow{k_2} + \sin\varphi\overrightarrow{j_2}$. On a alors $\overrightarrow{\sigma(A, 2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \dot{\theta}\sin^2\varphi\left(B_2 + m_2R^2\right) +$
$\dot{\theta}\cos^2\varphi\left(C_2 + m_2R^2\right)$.

Enfin, $\overrightarrow{\delta(A, 2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \left(B_2 + m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right) + \left(C_2 + m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\cos^2\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right)$.

Conclusion

$\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} = C_1\ddot{\theta} + m_1R^2\ddot{\theta} + \left(B_2 + m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right) + \left(C_2 + m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\cos^2\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right)$.

Question 3 Déterminer les lois de mouvements.

Cours de cinétique ⋆

04 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.

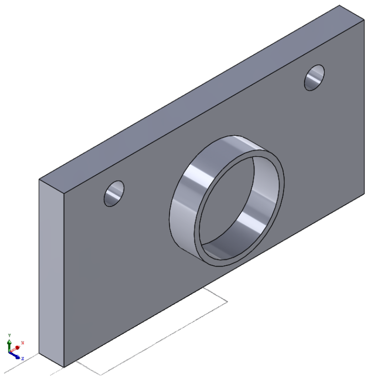
Question 1 Donner l'expression du moment cinétique en un point quelconque.

Question 2 Donner l'expression du moment dynamique en un point quelconque.

Question 3 Donner l'expression du torseur cinétique.

Question 4 Donner l'expression du torseur dynamique.

Question 5 Proposer une expression de la matrice d'inertie du solide au point de votre choix.



Corrigé voir 3.

Cours de cinétique ⋆

04 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.

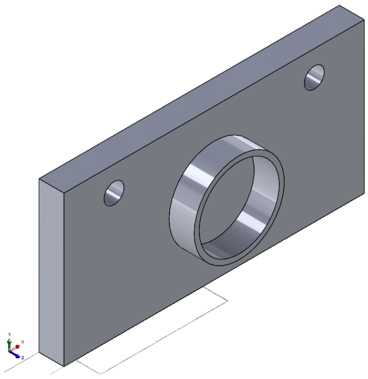
Question 1 Donner l'expression du moment cinétique en un point quelconque.

Question 2 Donner l'expression du moment dynamique en un point quelconque.

Question 3 Donner l'expression du torseur cinétique.

Question 4 Donner l'expression du torseur dynamique.

Question 5 Proposer une expression de la matrice d'inertie du solide au point de votre choix.



Mouvement RR 3D ⋆⋆

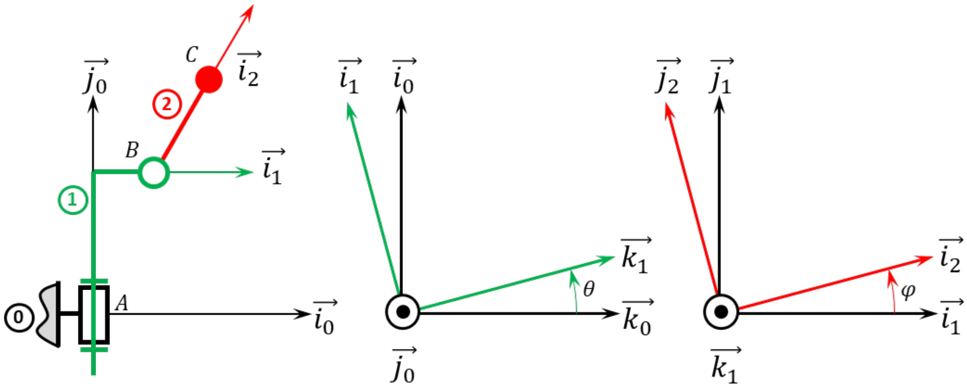
C2-09

04 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = H\overrightarrow{j_1} + R\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BC} = L\overrightarrow{i_2}$. On a $H = 20\,\text{mm}$, $r = 5\,\text{mm}$, $L = 10\,\text{mm}$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de **1** tel que $\overrightarrow{AG_1} = H\overrightarrow{j_1}$, on note m_1 la masse de **1** et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2 la masse de **2** et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.



Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(2/0)\}$ en B.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{j_0}$

Corrigé voir 5.

Question 3 Déterminer les lois de mouvements.

04 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.

Mouvement RR 3D ★★

C2-09

Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(2/0)\}$ en B.

Par définition, $\{\mathscr{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(B, 2/0)} \end{array} \right\}_B$.

Calculons $\overrightarrow{R_d(2/0)}$: $\overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$

Calcul de $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$:

$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[H\overrightarrow{j_1} + R\overrightarrow{i_1} + L\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0}$.

Calculons :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_0}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{0}$;
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{i_1} = -\dot{\theta}\overrightarrow{k_1}$;
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{i_2} = \left(\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}\right) \wedge \overrightarrow{i_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{i_2} + \dot{\varphi}\overrightarrow{k_2} \wedge \overrightarrow{i_2} = -\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}$.

On a donc $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = -R\dot{\theta}\overrightarrow{k_1} + L\left(-\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}\right)$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$:

$\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C, 2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}$

$= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\dot{\varphi}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}\left(R\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\overrightarrow{k_1}\right)\right]_{\mathscr{R}_0}$.

Calculons :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = \left(\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{k_1}\right) \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{j_2} + \dot{\varphi}\overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{k_1} - \dot{\varphi}\overrightarrow{i_2}$.

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}\overrightarrow{i_1}$.

Avec les hypothèses, on a $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = L\dot{\varphi}\left(\dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{k_1} - \dot{\varphi}\overrightarrow{i_2}\right) - \dot{\theta}\left(R\dot{\theta}\overrightarrow{i_1} + L\cos\varphi\dot{\theta}\overrightarrow{i_1} - L\dot{\varphi}\sin\varphi\overrightarrow{k_1}\right)$.

Calculons $\overrightarrow{\delta(C,2/0)}$

C est le centre d'inertie du solide 2 ; donc d'une part, $\overrightarrow{\delta(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(C,2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0}$.

D'autre part, $\overrightarrow{\sigma(C,2/0)} = I_C(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)}$.

Or $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{k_2} = \dot{\theta}\left(\cos\varphi\overrightarrow{j_2} + \sin\varphi\overrightarrow{i_2}\right) + \dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}$.

$$\overrightarrow{\sigma(C,2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}A_2\sin\varphi \\ \dot{\theta}B_2\cos\varphi \\ C_2\dot{\varphi} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)}\cdot\overrightarrow{j_0}$

Question 3 Déterminer les lois de mouvements.

Cours de cinétique ★

04 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.

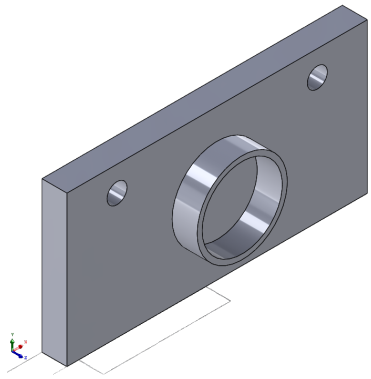
Question 1 Donner l'expression du moment cinétique en un point quelconque.

Question 2 Donner l'expression du moment dynamique en un point quelconque.

Question 3 Donner l'expression du torseur cinétique.

Question 4 Donner l'expression du torseur dynamique.

Question 5 Proposer une expression de la matrice d'inertie du solide au point de votre choix.



Corrigé voir 3.

Cours de cinétique ★

04 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.

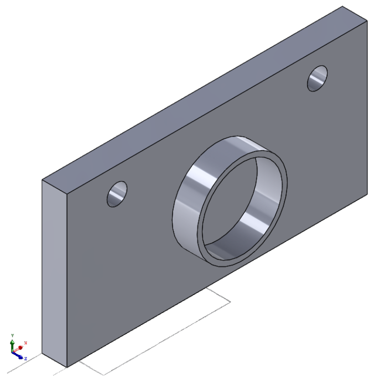
Question 1 Donner l'expression du moment cinétique en un point quelconque.

Question 2 Donner l'expression du moment dynamique en un point quelconque.

Question 3 Donner l'expression du torseur cinétique.

Question 4 Donner l'expression du torseur dynamique.

Question 5 Proposer une expression de la matrice d'inertie du solide au point de votre choix.

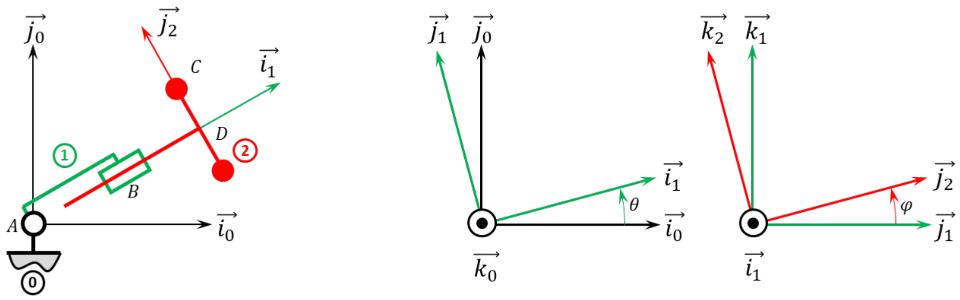


Mouvement RTR ★

04 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BC} = \lambda(t)\overrightarrow{i_2} + r\overrightarrow{j_2}$. Le solide 1 est de masse m_1 et le plan $\left(A, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}\right)$ est plan de symétrie. Le solide 2 est de masse m_2 est axisymétrique d'axe $\left(B, \overrightarrow{i_2}\right)$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{i_1}$.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(D, 2/0)} \cdot \overrightarrow{i_1}$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$.

Corrigé voir 5.

04 DYN

Pas de corrigé pour cet exercice.

Mouvement RTR ★

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{i_1}$.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(D, 2/0)} \cdot \overrightarrow{i_1}$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$.