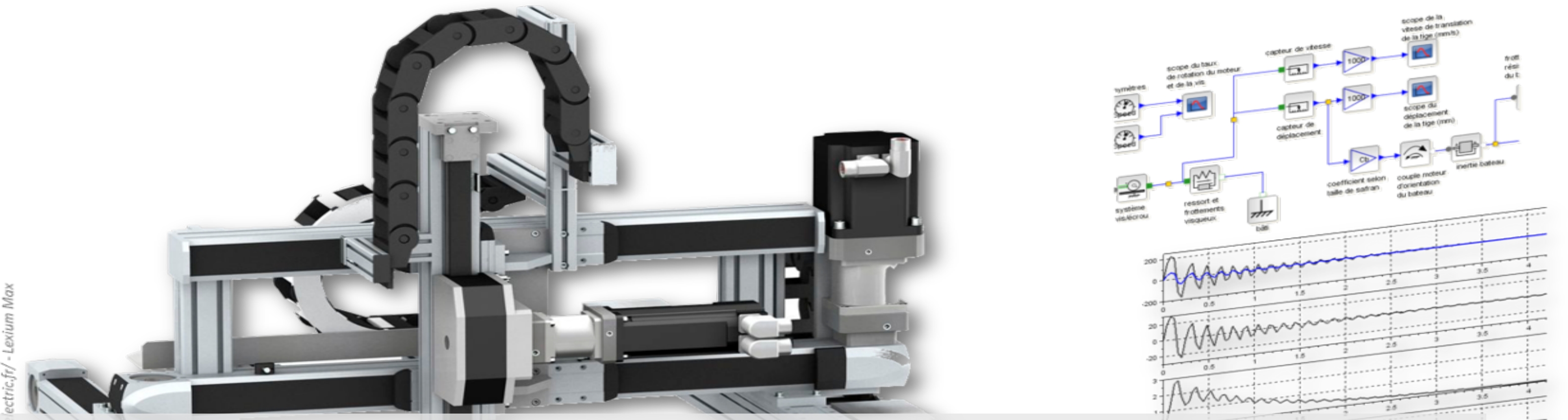


2 Rappels sur la détermination des performances des systèmes asservis

2.1 Stabilité des systèmes asservis

2.1.1 Notion de stabilité

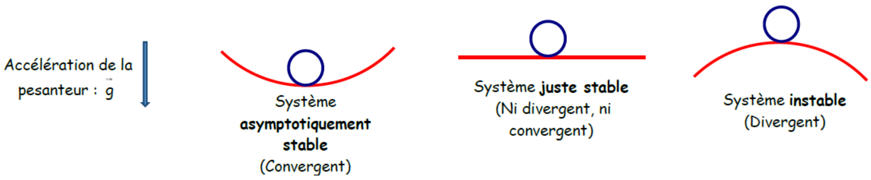
Représentation graphique [1]

C1-01

C2-03

Un état d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre par une cause extérieure, finit par retrouver ce même état d'équilibre après disparition de la cause. Illustrons cette définition de façon très intuitive à travers l'exemple suivant : une boule soumise à l'accélération de la pesanteur se déplaçant (avec un peu de dissipation énergétique) sur une surface donnée.

Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.
Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse `http://florestan.mathurin.free.fr/`.



Premières définitions

Définition – Définition intuitive

Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :

- abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre ;
- son régime transitoire finit par disparaître ;
- sa sortie finit par ressembler à l'entrée ;
- sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

Remarque

La stabilité d'un système **est indépendante** de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionnelle (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...

Pour simplifier les calculs, une première approche pourra être d'utiliser la réponse impulsionnelle.

Définition –

En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro au cours du temps.

Étude des pôles de la fonction de transfert

Dans le cas général la fonction de transfert d'un système peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } n \geq m.$$

Lors du calcul de la réponse temporelle en utilisant la transformée de Laplace inverse (quelle que soit l'entrée), la nature du régime transitoire ne dépend que des pôles $p_i$de la fonction de transfert (zéros du dénominateur).

En factorisant le numérateur et le dénominateur de $H(p)$ on peut alors retrouver une fonction de la forme :

$$H(p) = \frac{(p + z_m) \cdot (p + z_{m-1}) \ldots}{(p + p_n) \cdot (p + p_{n-1}) \ldots} \quad \text{avec } p_i, z_i \in \mathbb{C}.$$

En passant dans le domaine temporel :

Mode : fonction temporelle associée à un pôle.

- les pôles réels (de type $p = -a$) induisent des modes du type e^{-at} ;
- les pôles complexes conjugués (de type $p = -a \pm j\omega$) induisent des modes du type $e^{-at} \sin \omega t$.

On peut ainsi constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.

Ainsi, on peut observer la réponse temporelle des systèmes en fonction du positionnement des pôles dans le plan complexe.

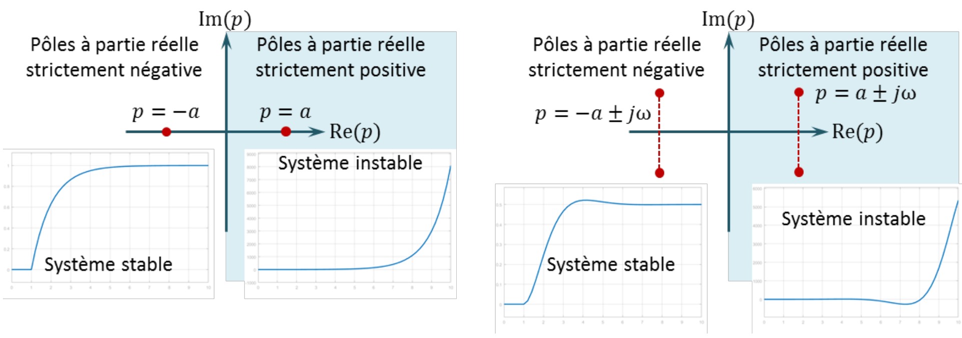


FIGURE 2.1 – Représentation d'un système à pôle simple et à pôles conjugués dans le plan complexe – Réponse indicielle

Position des pôles dans le plan complexe

Par extension on peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicielle associée.

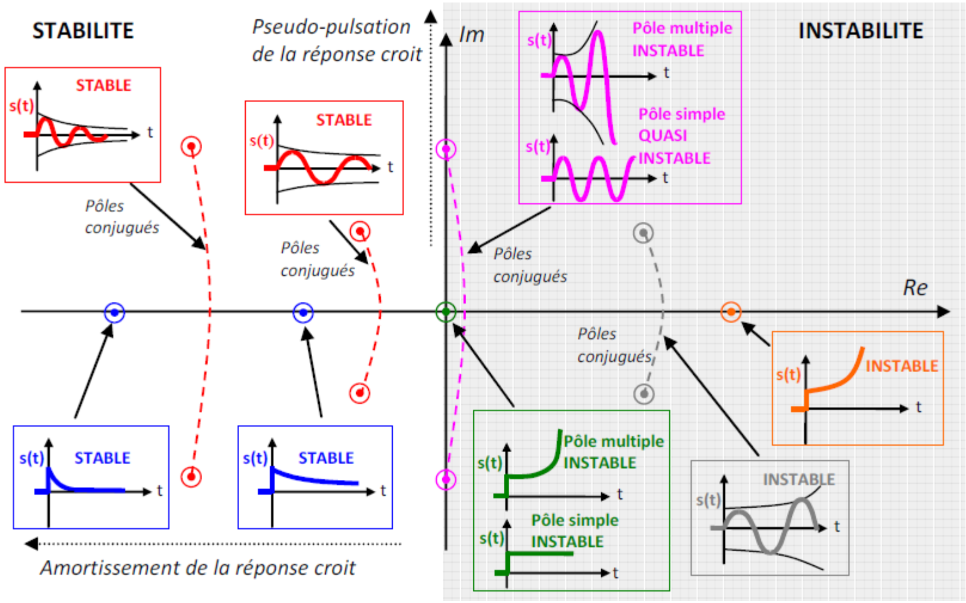


Figure 2.2 – Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système [**F. Mathurin**].

Définition –

À retenir Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (**en boucle fermée**) sont à partie réelle strictement négative.

Remarque

On peut montrer que :

- **pour les systèmes d'ordre 1 et 2 :** le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe ;
- **pour les systèmes d'ordre 3 :** de la forme $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3$ les coefficients doivent être strictement de même signe et $a_2 a_1 > a_3 a_0$.

Pôles dominants [1]

Lors de l'étude d'un système, on se contente en général de ne prendre en compte que les pôles les plus influents. Ces pôles sont appelés les pôles dominants. Pour un système asymptotiquement stable, ce sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires, puisque ce sont eux qui induisent des modes qui disparaissent dans le temps le plus lentement.

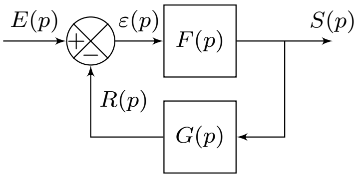
Caractéristiques dans le lieu de pôles

Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [1].

2.1.2 Marges de stabilité

Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par $H_{BO}(p) = \dfrac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)G(p)$.



La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $H_{BF}(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{F(p)}{1+F(p)G(p)} = \dfrac{F(p)}{1+H_{BO}(p)}$.

Définition – Équation caractéristique

Soit $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ une fonction de transfert. On appelle $D(p) = 0$ l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de $D(p)$ correspondent aux pôles de $H(p)$.

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera $1 + H_{BO}(p) = 0$.

Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh

Pour un système d'ordre supérieur à 3 il devient délicat d'obtenir analytiquement (ou numériquement) les racines du polynôme et ainsi conclure sur la stabilité à partir du signe des parties réelles.

Il existe un critère algébrique permettant de vérifier la stabilité d'un système : il s'agit de critère de Routh. Pour un système bouclé, ce critère utilise le dénominateur de la BF. Ce critère n'étant pas au programme, on pourra rechercher dans la littérature des articles s'y référant si nécessaire.

Critère « graphique » de stabilité : le critère du Revers

On parle ici de critère graphique car l'interprétation graphique dans le diagramme de Bode est directe.

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme $1 + H_{BO}(p) = 0$. Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation $H_{BO}(p) = -1$. Ainsi dans le plan complexe, le point $(-1;0)$ permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain dB nul) et une phase de $-180°$.

Résultat – Critère du Revers

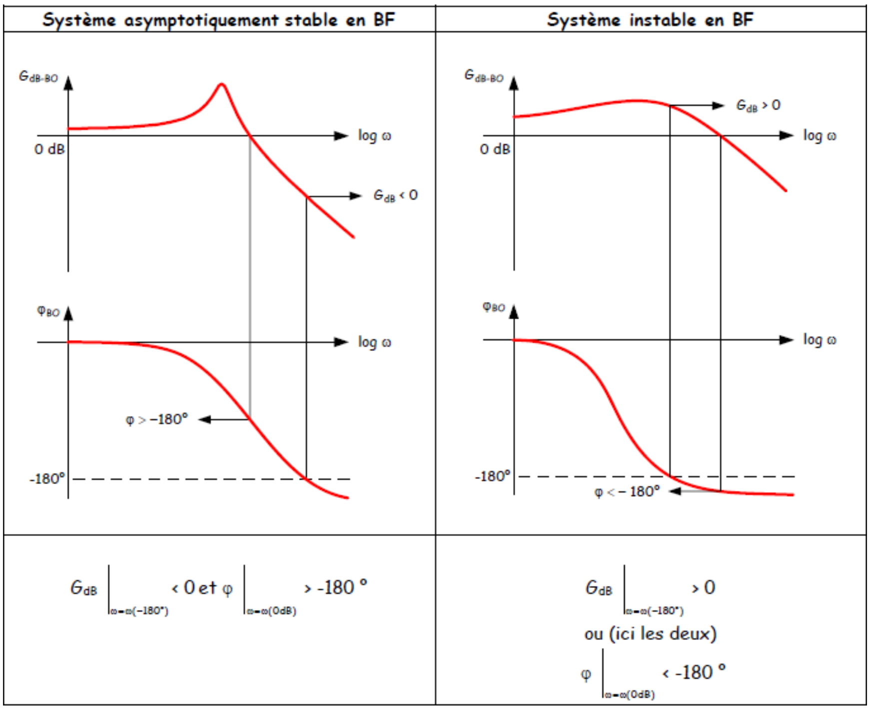
Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a** :

$$G_{\text{dB}}\big|_{\omega=\omega_{-180°}} < 0_{\text{dB}} \quad \text{et} \quad \varphi\big|_{\omega=\omega_{0\text{dB}}} > -180°.$$

En notant $\omega_{-180°}$ la pulsation pour laquelle la phase vaut $-180°$ et $\omega_{0\text{dB}}$ la pulsation pour laquelle le gain est nul.

Résultat –

Condition (non suffisante ...) de stabilité : les pôles de la FTBO doivent être à partie réelle positive.



Vers le système réel...

Le résultat donné ci-dessus est un résultat théorique dans le sens ou le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système réel aura un écart avec le diagramme de Bode du système modélisé.

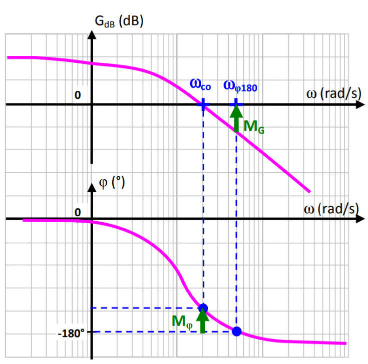
Résultat – Marges

Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considèrera, dans le cas général que le système est stable si :

- la marge de gain est supérieure à 10 dB ;
- la marge de phase est supérieure à 45°.

Définition – Marge de phase

La marge de phase est définie telle que $M_\varphi = 180° + \arg\left(\text{FTBO}(j\omega_{c0})\right)$ où ω_{c0} est la pulsation de coupure pour laquelle $20\log\left|\text{FTBO}\left(j\omega_{c0}\right)\right| = 0\,\text{dB}$.



Définition – Marge de gain

La marge de gain est définie telle que $M_G = -20\log\left|\text{FTBO}(j\omega_{\varphi 180})\right|$ où $\omega_{\varphi 180}$ est la pulsation pour laquelle $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi 180})) = -180\,°$.

La marge de gain permet compte de tenir compte de variations de gain de la boucle ouverte.

De même, la marge de phase permet de tenir compte de variation de phase (retard ou déphasage non modélisés).

La nécessité d'avoir recours à des marges de stabilité apparaît notamment lorsque :

- la simplification du modèle amène à considérer uniquement les pôles dominant,
- le modèle ne prend pas en compte la dynamique de certains composants du système ;
- le système n'est pas invariant au cours du temps ;
- on s'éloigne de la zone de fonctionnement linéaire ;
- certaines non linéarités sont ignorées.