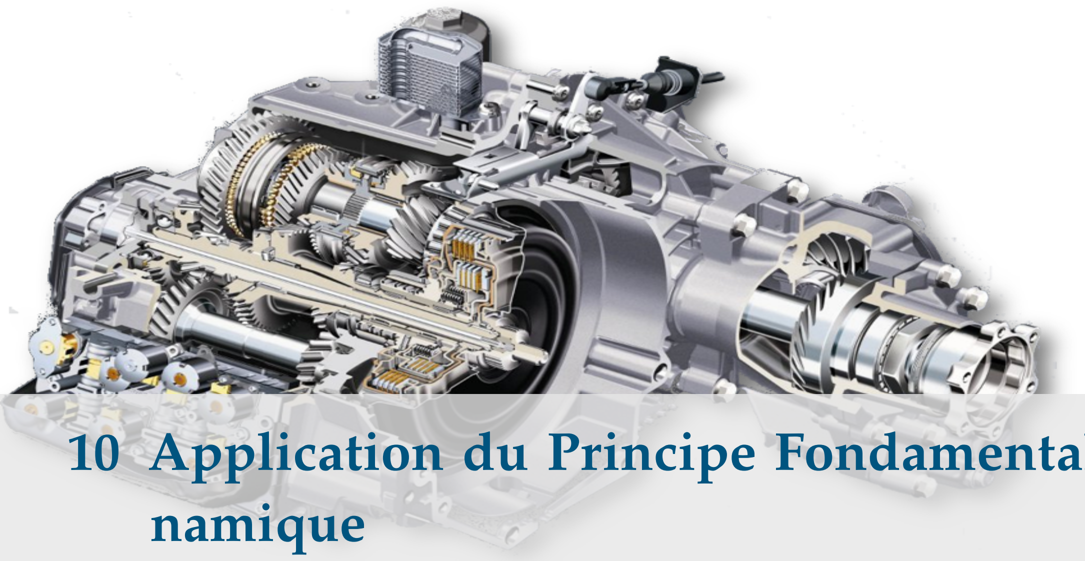


http://www.engineworld.fr/les-boites-robotisees-a-double-embrayage-22/

10 Application du Principe Fondamental de la Dynamique

04 DYN

Emilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

Florestan Mathurin, *Géométrie des masses*, Lycée Bellevue, Toulouse `http://florestan.mathurin.free.fr/`.

10.1 Introduction

Objectif

L'objectif de ce cycle est triple. L'étude dynamique des systèmes de solide permet de :

- déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en tenant compte des masses (et des répartitions de masses) des pièces ou des classes d'équivalence cinématique ;
- dimensionner les actionneurs permettant d'actionner un système ;
- déterminer les équations de mouvement.

On distingue deux principaux types de problèmes en dynamique :

- **type 1** :
  - on connaît : les actionneurs et les inerties,
  - on détermine : les équations de mouvement et les actions mécaniques dans les liaisons ;
- **type 2** :
  - on connaît : les équations de mouvement et inerties,
  - on détermine : les caractéristiques des actionneurs et les actions mécaniques de liaison.

Définition – Équations de mouvement

Une **équation de mouvement** est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure **aucune composante inconnue d'action mécanique**. Il est parfois nécessaire d'écrire plusieurs équations pour trouver par substitution une équation de mouvement. On nomme « **intégrale première du mouvement** » une équation différentielle du premier ordre avec un second membre constant, obtenue par intégration d'une équation de mouvement.

Définition – Référentiel galiléen

Un **référentiel galiléen** se définit à partir d'une repère spatial (orthonormé direct

$\left(O_g;\overrightarrow{x_g},\overrightarrow{y_g},\overrightarrow{z_g}\right)$ et d'une base de temps (t) et est animé d'un mouvement de **translation rectiligne uniforme** (à vitesse constante) par rapport à un référentiel absolu fixe ou à un autre référentiel galiléen $\left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$.
On peut également le définir comme un référentiel « dans lequel le principe fondamental de la dynamique s'applique ».

Remarques

Dans la pratique, on fera toujours la **supposition qu'un repère est galiléen**. Cela dépendra effectivement des mouvements mis en jeu et des **échelles temporelles et spatiales** considérées. Par exemple :

- pour étudier des mouvements de l'ordre de quelques minutes à l'échelle humaine, le **référentiel terrestre** (origine liée au centre de la terre et les trois axes liés au globe terrestre) est approprié ;
- pour étudier les effets météorologiques (ouragans, courants marins), ou les mouvements des satellites, il convient alors de tenir compte de l'inertie de la terre et on pourra choisir le **référentiel géocentrique** (origine liée au centre de la terre et les trois axes dirigés vers trois étoiles très éloignées) comme référentiel galiléen ;
- pour étudier le mouvement des planètes, il convient mieux d'utiliser le **référentiel héliocentrique** (origine liée au centre du soleil et les trois axes dirigés vers trois étoiles très éloignées).

Une chronologie galiléenne est obtenue par une horloge précise (Quartz, atomique, ou mouvement des astres). En mécanique classique (ou Newtonienne), les deux repères d'**espace et de temps** sont supposés **indépendants** ce qui n'est pas le cas de la mécanique relativiste.

10.2 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

Définition – Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique

Soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égale au torseur dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\left\{\mathcal{D}\left(E/R_0\right)\right\} = \left\{\mathcal{T}\left(\overline{E}\rightarrow E\right)\right\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.
Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\left\{\mathcal{D}\left(E/R_0\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_d\left(E/R_0\right)} = m\,\overrightarrow{\Gamma\left(G,E/R_0\right)}\\ \overrightarrow{\delta\left(A,E/R_0\right)}\end{array}\right\}_A.$$

- On note $\overrightarrow{R_d\left(S/R_0\right)}$ la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie G.
- Le **moment dynamique** dépend du point A et se note $\overrightarrow{\delta\left(A,E/R_0\right)}$.

Le torseur des actions mécanique est noté ainsi : $\left\{\mathcal{T}\left(\overline{E}\rightarrow E\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R\left(\overline{E}\rightarrow E\right)}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}\left(P,\overline{E}\rightarrow E\right)}\end{array}\right\}_P.$

Résultat – Relation de Varignon

Le torseur dynamique étant un torseur, on peut utiliser la relation de Varignon pour changer le point d'application du torseur dynamique :

$$\overrightarrow{\delta\left(B, S_2/S_1\right)} = \overrightarrow{\delta\left(A, S_2/S_1\right)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d\left(S_2/S_1\right)}.$$

Du Principe Fondamental de la dynamique découle plusieurs **théorèmes généraux**.

10.2.1 Théorème de la résultante dynamique

Théorème – Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\overrightarrow{R\left(\bar{E} \rightarrow E\right)} = \overrightarrow{R_d\left(E/R_0\right)} = m\,\overrightarrow{\Gamma\left(G, E/R_0\right)}.$$

10.2.2 Théorème du moment dynamique

Théorème – Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, \bar{E} \rightarrow E\right)} = \overrightarrow{\delta\left(A, E/R_0\right)}.$$

10.3 Cas des mouvements 1D

10.3.1 Théorèmes généraux

Du principe fondamental de la dynamique découle plusieurs théorèmes généraux.

Théorème – Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre de gravité G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 (notée $\overrightarrow{R_d}(E/R_0)$) :

$$\overrightarrow{R\left(\bar{E} \rightarrow E\right)} = \overrightarrow{R_d}(E/R_0) = m\overrightarrow{\Gamma\left(G, E/R_0\right)}.$$

Théorème – Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A (noté $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$) :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, \bar{E} \to E\right)} = \overrightarrow{\delta\left(A, E/R_0\right)}.$$

10.3.2 Principe Fondamental de la Dynamique : applications simplifiées

Définition – Solide en translation par rapport à un référentiel galiléen

Si un ensemble matériel E (de centre d'inertie G) est en mouvement de translation dans un référentiel galiléen (R_g) alors :

- d'après le **théorème de la résultante dynamique :** la résultante des efforts extérieurs est égale au produit de la masse par l'accélération de G par rapport à R_g : $m\,\overrightarrow{\Gamma\left(G, E/R_g\right)} = \overrightarrow{R\left(\bar{E} \to E\right)}$;
- d'après le **théorème du moment dynamique :** le moment des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égal au vecteur nul en tout point : $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, \bar{E} \to E\right)} = \overrightarrow{0}\,\forall A$.

Définition – Solide en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen

Si un ensemble matériel E (de centre d'inertie G) est en mouvement de rotation autour d'un axe Δ (dirigé par $\overrightarrow{u}$ unitaire) fixe dans un référentiel galiléen (R_g) alors, d'après le **théorème du moment dynamique** : $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, \bar{E} \to E\right)} \cdot \overrightarrow{u} = J_\Delta(E) \cdot \ddot{\theta} \quad \forall A \in \Delta$ avec :

- $J_\Delta(E)$ le moment d'inertie de E par rapport à l'axe Δ (en kg m^2) ;
- $\ddot{\theta}$, l'accélération angulaire de E par rapport à R_g suivant Δ : $\overrightarrow{\dot{\Omega}}(E/R_g) \cdot \overrightarrow{u}$.

10.3.3 Méthodologie

Méthode – Résolution du PFD

La méthodologie de résolution d'un problème de dynamique est très similaire à celle utilisée lors de la détermination des performances statiques des systèmes.

1. On choisit un repère galiléen et on effectue le bilan complet des données d'entrée du problème.
2. On construit un graphe de structure.
3. On isole le solide ou le système de solides considérés.
4. On effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures agissant sur le système isolé.
5. On écrit le PFD.
6. On projette les relations vectorielles sur les axes choisis.
7. On injecte les lois de comportement (ressort, lois de Coulomb, ...).
8. On effectue la résolution.

Méthode – Équations de mouvement

Idée de base : minimiser le nombre d'équations à écrire.

- Si on cherche à déterminer un couple moteur, on écrirera plutôt un théorème du moment dynamique en projection sur l'axe de rotation.
- Si on cherche à déterminer l'effort transmis par un vérin, on écrirera plutôt un théorème ce la résultante dynamique en projection sur l'axe de translation.

10.4 Torseur cinétique

10.4.1 Définition

Définition – Torseur cinétique

Le **torseur cinétique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathscr{C}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c}(S/R_0) = \displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{V}(P/R_0)\,\mathrm{d}m \\ \overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)} = \displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/R_0)\,\mathrm{d}m \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur cinétique, $\overrightarrow{R_c}(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_c}(S/R_0) = m\,\overrightarrow{V}(G/R_0)$.
- Le moment cinétique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\sigma(B,S/R_0)} = \overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$.

10.4.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

Propriété –

Pour un solide S de masse m dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

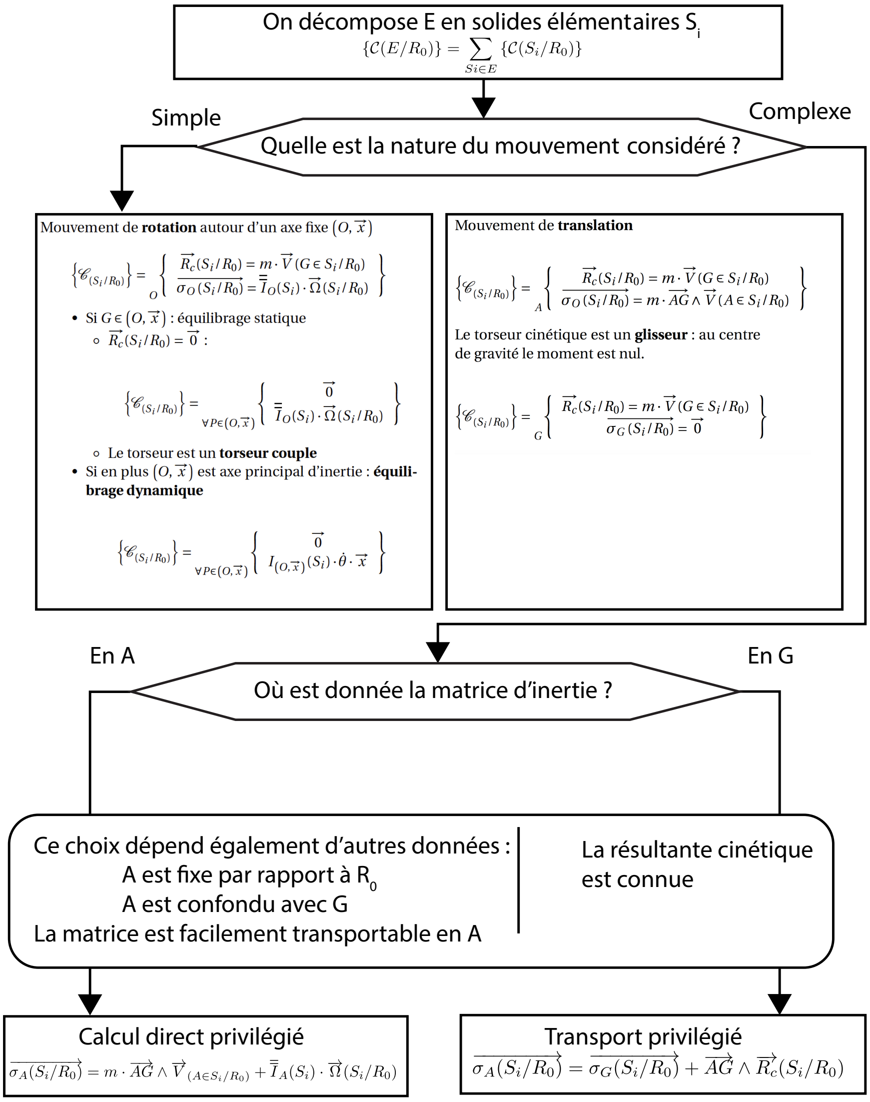
$$\overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)} = I_A(S)\cdot\overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A,S/R_0)}.$$

10.4.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point A **fixe** dans le mouvement de S/R_0, on a : $\overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)} = I_A(S)\cdot\overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.
- En appliquant cette formule en G, **centre d'inertie** de S, on a : $\overrightarrow{\sigma(G,S/R_0)} = I_G(S)\cdot\overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.

10.4.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i. On étudie son mouvement dans le référentiel R_0. On donne la méthodologie de calcul du moment cinétique en un point A sur la figure suivante.



10.5 Torseur dynamique

10.5.1 Définition

Définition – Torseur dynamique

Le **torseur dynamique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathscr{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \displaystyle\int_{P \in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0)\, \mathrm{d}m \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \displaystyle\int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0)\, \mathrm{d}m \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur dynamique, $\overrightarrow{R_d}(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m\ \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0)$.
- Le moment dynamique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point :$\overrightarrow{\delta(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R_0)$.

10.5.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Propriété – Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Pour un solide S de masse M dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

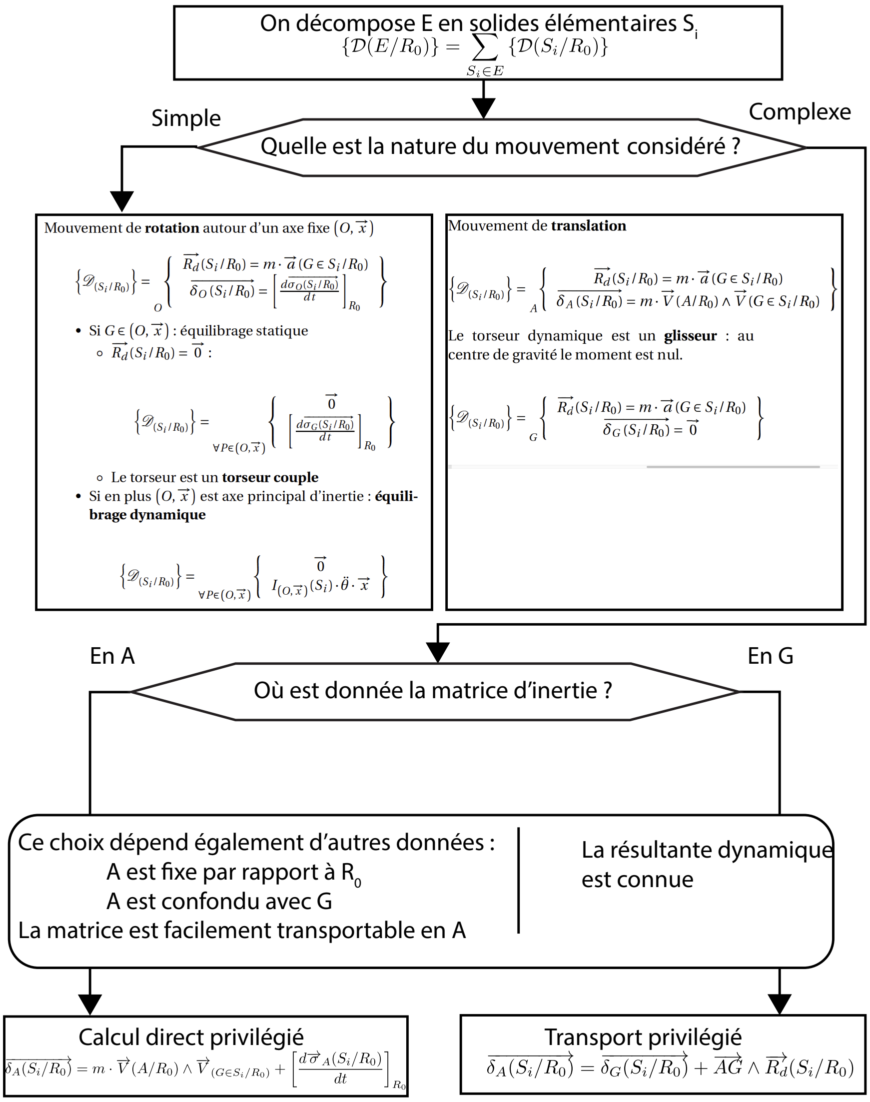
- Relation entre les **résultantes** :$\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{R_c}(S/R_0)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}$.
- Relation entre les **moments** : $\overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$.

10.5.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point O **fixe** dans R_0, on a : $\overrightarrow{\delta(O, S/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}$.
- En appliquant cette formule en un point G**, centre d'inertie de** S, on a : $\overrightarrow{\delta(G, S/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}$.

10.5.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i. On étudie son mouvement dans le référentiel R_0. On donne l'algorigramme de calcul du moment dynamique en un point A sur la figure ci-dessous.



Bilan

Point considéré	Point quelconque A	Centre de gravité G	Point fixe dans $\mathcal{R}_0$ A
Torseur cinétique $\{\mathscr{C}(S/R_0)\}$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{V(G,S/R_0)}\\ \overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)}=I_A(S)\cdot\overrightarrow{\Omega(S/R_0)}+m\,\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V(A,S/R_0)}\end{array}\right\}_A$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{V(G,S/R_0)}\\ \overrightarrow{\sigma(G,S/R_0)}=I_G(S)\cdot\overrightarrow{\Omega(S/R_0)}\end{array}\right\}_G$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{V(G,S/R_0)}\\ \overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)}=I_A(S)\cdot\overrightarrow{\Omega(S/R_0)}\end{array}\right\}_A$
Torseur dynamique $\{\mathscr{D}(S/R_0)\}$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{\Gamma}(G,S/R_0)\\ \overrightarrow{\delta(A,S/R_0)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}+\overrightarrow{V(A/R_0)}\wedge\overrightarrow{R_c}(S/R_0)\end{array}\right\}_A$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{\Gamma}(G,S/R_0)\\ \overrightarrow{\delta(G,S/R_0)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}\end{array}\right\}_G$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{\Gamma}(G,S/R_0)\\ \overrightarrow{\delta(A,S/R_0)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}\end{array}\right\}_A$

$\overrightarrow{R_d(1+2/0)}=\overrightarrow{R_d(1/0)}+\overrightarrow{R_d(2/0)}=m_1\overrightarrow{\Gamma(G_1,1/0)}+m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)}$

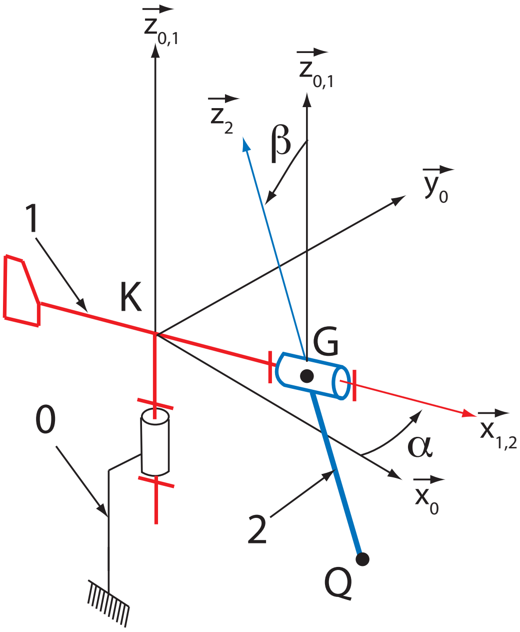
$\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)}=\overrightarrow{\delta(A,1/0)}+\overrightarrow{\delta(A,2/0)}$

Application 1
Éolienne bipale – Sujet

04 DYN

D'après Émilien Durif.

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides.On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 crée un couple C_m selon la direction $\overrightarrow{z_0}$.

L'éolienne est composée de :

- un support **0**, auquel on associe un repère $R_0 = \left(K; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$;
- une girouette **1** (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $\left(K, \overrightarrow{z_{0,1}}\right)$ avec le support **0**. On lui associe un repère $R_1 = \left(K; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_{0,1}}\right)$ et on pose $\alpha = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe $\left(K, \overrightarrow{z_1}\right)$: $J = I_{\left(K,\overrightarrow{z_1}\right)}(1)$;
- une hélice **2**, en liaison pivot d'axe $\left(K, \overrightarrow{x_{1,2}}\right)$ avec **1**. On lui associe un repère $R_2 = \left(K; \overrightarrow{x_{1,2}}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ choisi tel que $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1}$ et on pose $\beta = \left(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}\right)$. On note M

sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\overrightarrow{KG} = a\,\overrightarrow{x_1}$. On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\overline{\overline{I}}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd **3** assimilé à une masse ponctuelle m au point Q. On pose $\overrightarrow{GQ} = -b\overrightarrow{z_2}$.

Question 1 Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Question 3 Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment cinétique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **1**, notée $\overrightarrow{\sigma(K,1/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}$ calculé au point K de l'hélice **2** dans son mouvement par rapport à **0**.

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K,3/0)}$

Question 6 Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support **0**, notée $\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K,1/0)}$.

Question 7 Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment dynamique $\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)}$.

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon $\overrightarrow{z_0}$: $\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K,3/0)}$.

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice **2** ($\dot\beta$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre **0** et **1**) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Éléments de correction

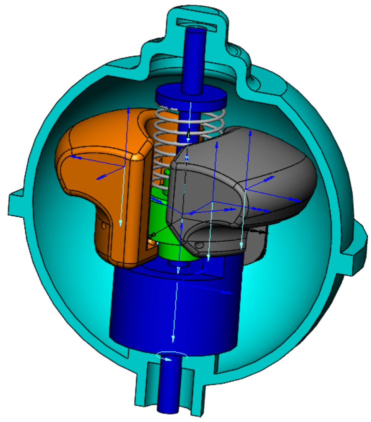
1.
2. $C_m = \left(\overrightarrow{\delta(K,1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K,2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K,3/R_0)}\right) \cdot \overrightarrow{z_0}$
3. $\overrightarrow{\sigma(K,1/0)} \cdot \overrightarrow{z_0} = J\dot\alpha$
4. $\overrightarrow{\sigma(K,2/0)} : \overrightarrow{\sigma(K,2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot\beta \\ B \cdot \dot\alpha \sin\beta + M \cdot a^2\dot\alpha \sin\beta \\ C \cdot \dot\alpha \cos\beta + M \cdot a^2\dot\alpha \cos\beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$
5. $\overrightarrow{\sigma(K,3/0)} = m\left[ab\dot\beta\overrightarrow{z_2} + a^2\dot\alpha\overrightarrow{z_1} + b^2\dot\beta\overrightarrow{x}_2 + ba\dot\alpha\cos\beta \cdot \overrightarrow{x_1} + b^2\dot\alpha\sin\beta\overrightarrow{y_2}\right]$
6. $\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K,1/0)} = J\ddot\alpha$.
7. $\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)} = \ddot\alpha\left[B\sin^2\beta + C\cos^2\beta + Ma^2\right] + 2\dot\alpha\dot\beta\cos\beta\sin\beta\,[B - C]$.
8. $\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)} = m\left[ab\left(\ddot\beta\cos\beta - \dot\beta^2\sin\beta\right) + a^2\ddot\alpha + b^2\left(\ddot\alpha\sin^2\beta + 2\dot\alpha\dot\beta\sin\beta\cos\beta\right)\right]$
9. $C_m = -mab\dot\beta^2\sin\beta$

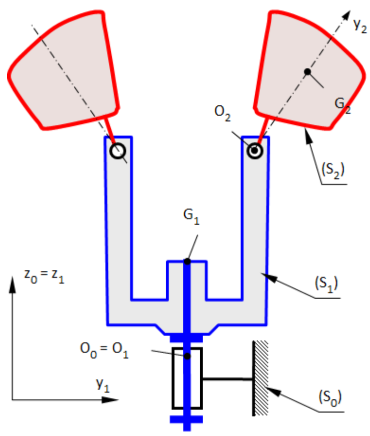
Application 2
Régulateur centrifuge – Sujet

C. Gamelon & P. Dubois.

04 DYN

On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor **(S_1)** et la masselotte **(S_2)** représentés schématiquement ci-contre.

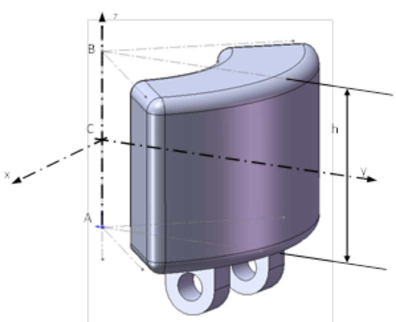


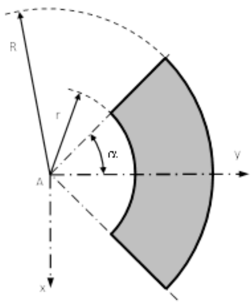


- **(S_1)** est en liaison pivot d'axe $\left(O_1, \overrightarrow{z_0}\right)$ avec **(S_0)**.
- **(S_2)** est en liaison pivot d'axe $\left(O_2, \overrightarrow{x_1}\right)$ avec **(S_1)**.
- $\left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}\right) = \theta_1$.
- $\left(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}\right) = \left(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}\right) = \theta_2$.
- $\overrightarrow{O_0G_1} = h_1\overrightarrow{z_0}$.
- $\overrightarrow{O_0O_2} = d_1\overrightarrow{z_0} + L_1\overrightarrow{y_1}$.
- $\overrightarrow{O_2G_2} = L_2\overrightarrow{y_2}$.

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.





Question 1 Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Afin de moins alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesse de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

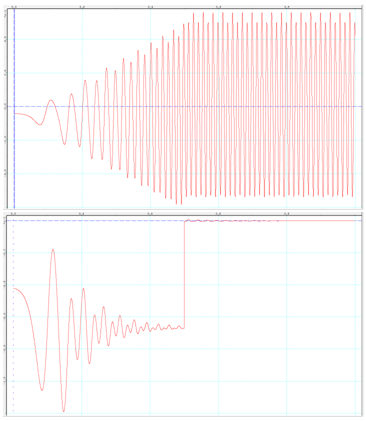
Question 2 Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

Question 3 Déterminer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(S_1/R_0)\}$ en O_1 et le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(S_2/R_0)\}$ en O_2.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \overrightarrow{x_2}$.

Question 5 Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(E/R_0)\}$ en O_2 ?

Question 6 Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.



Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre S_1 et S_2 (couple maximal 0,46 Nm) , une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

Question 7 Commenter ces résultats.

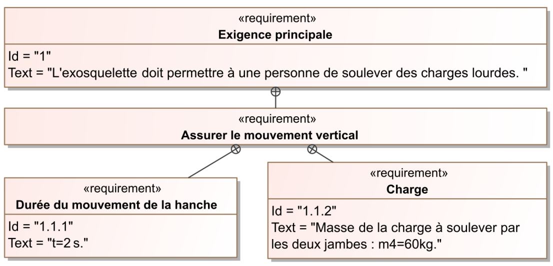
Application 3
Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Sujet

Concours Centrale Supelec TSI 2017.

04 DYN

Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



Objectif

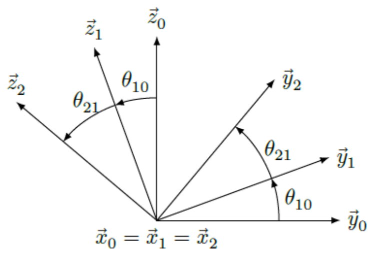
Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

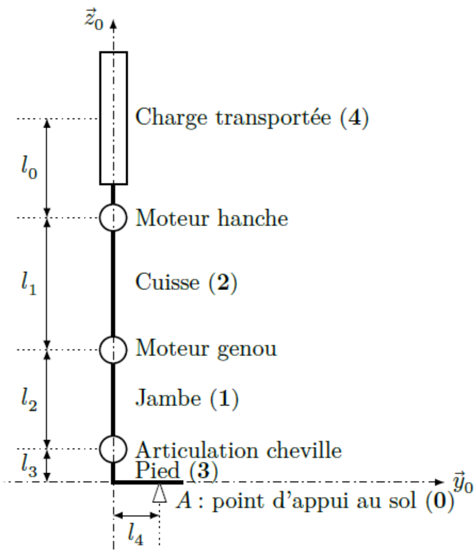
Élaboration du modèle dynamique

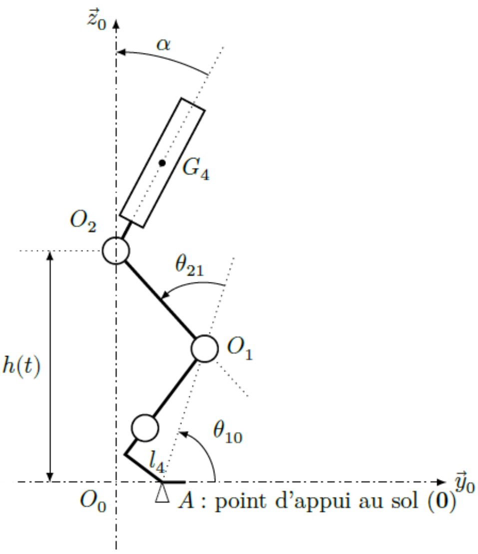
Objectif

Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

Ces calculs visent à déterminer l'équation dynamique qui permet d'obtenir le couple moteur (minimal) en fonction des caractéristiques géométriques et massique de la charge à soulever ainsi que des conditions d'utilisation. Le modèle d'étude est celui représenté à la figure suivante correspondant au modèle d'étude plan position fléchie.

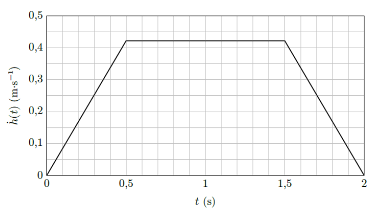






Données :

- $\overrightarrow{O_1G_4} = \lambda(t)\overrightarrow{z_0} - L\cos\theta_{10}\overrightarrow{y_0}$;
- accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$;
- longueur de la cuisse $l_1 = 43{,}1\,\mathrm{cm}$.
- longueur de la jambe $l_2 = 43{,}3\,\mathrm{cm}$.
- longueur de l'articulation de la cheville à la plante arrière du pied $l_3 = 6{,}9\,\mathrm{cm}$.
- longueur de la plante arrière du pied au point d'appui sur le sol $l_4 = 13\,\mathrm{cm}$.
- longueur $\overrightarrow{O_0O_1} = L\overrightarrow{y_1}$ avec $L = 51{,}8\,\mathrm{cm}$.
- rapport de réduction : $r = \dfrac{\omega_r}{\omega_m} = \dfrac{1}{120}$.



Hypothèses :

- L'étude est modélisable dans le plan.
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- Les inerties des pièces sont négligées.
- Toutes les masses sont négligées **sauf la masse m_4 de la charge à soulever**.
- L'angle α entre la charge transportée et la verticale $\overrightarrow{z_0}$ reste constant.
- G_4, centre de gravité de la charge transportée (4), reste en permanence à la verticale du point A d'appui au sol.

On note E={cuisse(2)+charge transportée(4)}.

Question 1 Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\sigma\left(O_1, E/0\right)} \cdot \overrightarrow{x_0}$ en fonction de m_4, $\dot{h}(t)$, L et $\cos\theta_{10}$.

Question 3 Déduire $\overrightarrow{\delta\left(O_1, E/0\right)} \cdot \overrightarrow{x_0}$ en fonction de m_4, $\ddot{h}(t)$, L et $\cos\theta_{10}$.

La loi d'évolution de la vitesse de la hanche est donnée à la figure ci-contre.

Question 4 Déterminer l'expression littérale du couple C_r exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche. Calculer numériquement ce couple pour une valeur de θ_{10} égale à 54,5°correspondant à la valeur maximale du couple.

Question 5 Calculer le couple C_m au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte $\eta = 0{,}75$ (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

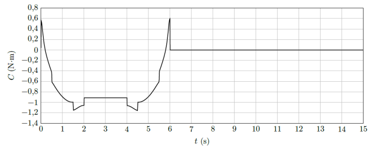
Question 6 Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

Validation du dimensionnement du moteur

Objectif

Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

Le cycle suivant obtenu à l'aide du modèle multiphysique de représente l'évolution du couple moteur, et ce en tenant compte du moment d'inertie du rotor, sur un cycle de période $T = 15$ s.



Quatre phases sont définies sur cette période :

- phase 1 pour $0 \leq t < 2$ s, valeur efficace du couple moteur $C_1 = 0{,}838$ Nm ;
- phase 2 pour $2 \leq t < 4$ s, couple moteur constant $C_2 = -0{,}912$ Nm ;
- phase 3 pour $4 \leq t < 6$ s, valeur efficace du couple moteur $C_3 = 0{,}838$ Nm ;
- phase 4 pour $6 \leq t < 15$ s, couple moteur nul.

Question 7 Préciser à quels mouvements correspondent les 4 phases de ce cycle.

Le couple efficace est également appelé couple thermiquement équivalent, il est défini par : $C_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T c(t)^2 \mathrm{d}t}$. On a aussi $C_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\sum\limits_{i=1}^{n} C_{\text{i,eff}}^2 T_i}$

Question 8 Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

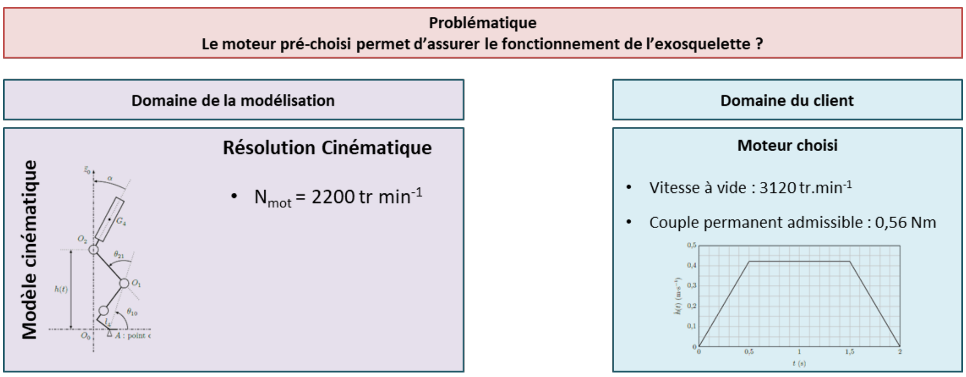
Retour sur l'objectif

Le couple moteur varie entre $-1{,}156$ Nm et $0{,}596$ Nm. Les caractéristiques du moteur choisi sont :

- vitesse à vide de 3120 tr min^{-1} pour une alimentation nominale en amont de l'onduleur de 36 V ;
- couple permanent admissible de 0,560 Nm ;
- pente de la courbe de la vitesse en fonction du couple de 423 tr min^{-1}N^{-1}m^{-1}.

De plus une étude cinématique précédente a montré que le moteur permettant d'actionner le moteur doit pouvoir atteindre une vitesse de 2200 tr min^{-1}.

Question 9 Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.



Éléments de correction

1. .
2. $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = -Lm_4 \cos\theta_{10} \dot{h}(t)$.
3. $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = -Lm_4 \cos\theta_{10} \ddot{h}(t)$.
4. $C_r = -m_4 L \cos\theta_{10}\left(g + \ddot{h}(t)\right) \simeq -190{,}5$ Nm.
5. $C_m \simeq 2{,}12$ Nm.
6. ...
7. ...
8. $C_{\text{eff}} \simeq 0{,}546$ Nm.

TD 1
Orthèse d'épaule – Sujet

Centrale Supélec PSI 2010.

04 DYN

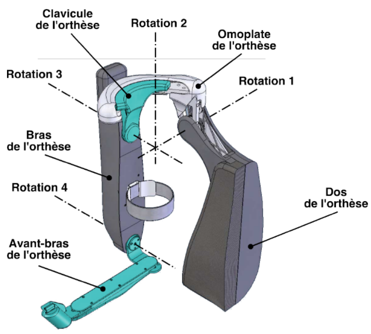
Mise en situation

Le support de cette étude est une orthèse portable, de type exosquelette, qui contribue au développement de la tonicité musculaire de l'épaule et du bras. Installée dans le dos de l'individu et liée à la fois au bras et à la main, elle offre une résistance aux mouvements de la main. Ainsi, le thérapeute peut réaliser des protocoles très fins de rééducation en programmant des spectres d'efforts résistants pour chaque mouvement du patient. Le travail du patient peut également être optimisé en le plaçant dans un environnement de réalité virtuelle permettant de visualiser les situations de travail conçues par le thérapeute.

Objectif

L'objectif est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force prédéterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion.

La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

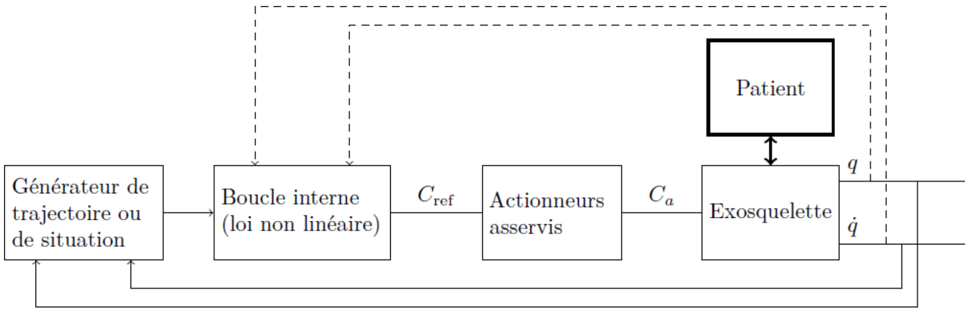


Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs (K_1, K_2) de maintien (pour ce critère, seule la force Z_F est considérée).	$\lvert \Delta Z_F / \Delta\gamma \rvert = K_1 \geq 500\,\text{N}\,\text{rad}^{-1} (\pm 5\%)$ $\lvert \Delta Z_F / \Delta\delta \rvert = K_2 \geq 500\,\text{N}\,\text{rad}^{-1} (\pm 5\%)$

L'actionneur ne peut fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation qu'un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose, de plus, qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent. On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras (γ et δ) et la variation de la force Z_F (ces grandeurs seront définies par la suite) exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs (K_1, K_2).

La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- q et $\dot{q}$ sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations ;
- une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail ;
- une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire ;
- un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence $C_a = C_{\text{ref}}$.

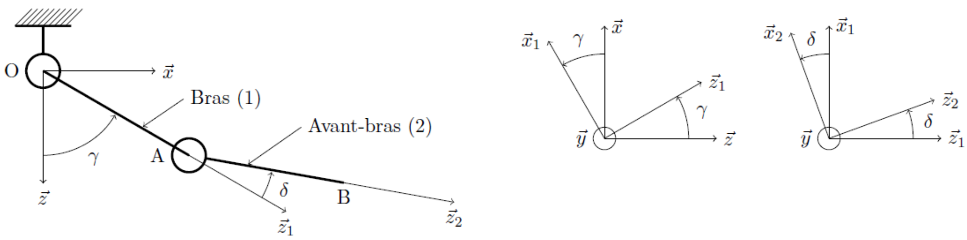


Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

Objectif

Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

Le système étudié se réduit donc à l'ensemble {Bras + Avant-bras} relativement au reste du dispositif supposé fixe : on suppose que les angles d'abduction/adduction et de rotation interne/rotation externe de l'épaule sont maintenus identiquement nuls par l'action des moteurs situés dans la partie dorsale du dispositif (non étudiée ici). Le paramétrage se réduit donc à la situation de la figure suivante qui représente l'ensemble étudié dans un plan $\left(\overrightarrow{x};\overrightarrow{z}\right)$ donné, où l'on choisit $\overrightarrow{z}$ vertical dans le sens descendant. Le tableau précise les différents paramètres utiles pour le calcul de dynamique envisagé.



<table>
<tr><td colspan="3">Bâti</td></tr>
<tr><td colspan="3">Repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe, galiléen</td></tr>
<tr><td colspan="3">Bras (moteurs compris)</td></tr>
<tr><td>Repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
Angle $\gamma = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$
$\vec{y} = \vec{y}_1$</td><td>Longueur $l_1 = 350$ mm
Masse $m_1 = 2{,}3$ kg
Centre d'inertie G_1 tel que :
$\overrightarrow{OG_1} = \lambda_1 \vec{z}_1,\ \lambda_1 = 50$ mm</td><td>Matrice d'inertie
$I(G_1, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$
$A_1 = 2{,}4 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$
$B_1 = 2{,}3 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$
$D_1 = 2{,}1 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Avant-bras</td></tr>
<tr><td>Repère $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
Angle $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$
$\vec{y}_1 = \vec{y}_2$</td><td>Longueur $l_2 = 270$ mm
Masse $m_2 = 0{,}3$ kg
Centre d'inertie G_2 tel que :
$\overrightarrow{AG_2} = \lambda_2 \vec{z}_2,\ \lambda_2 = 135$ mm</td><td>Matrice d'inertie
$I(G_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$
$A_2 = 1{,}8 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$
$B_2 = 1{,}8 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$
$D_2 = 4{,}3 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$</td></tr>
</table>

Question 1 Exprimer littéralement, au point G_2 et dans le repère R_1, le torseur dynamique du mouvement du solide {Avant-bras} par rapport au référentiel fixe R_0 supposé galiléen : $\left\{\mathscr{D}\left(\text{Avant-bras}/R_0\right)\right\}_{G2,(\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})}$.

Les différentes actions mécaniques agissant sur le dispositif sont les suivantes :

- l'action de la pesanteur sur les solides {Bras} et {Avant-bras} ;
- l'action du bâti sur le solide {Bras} au travers de la liaison pivot d'axe $\left(O, \vec{y}\right)$ et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante : $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Bâti} \rightarrow \text{Bras}\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_1\vec{x_1} + Y_1\vec{y_1} + Z_1\vec{z_1} \\ L_1\vec{x_1} + M_1\vec{y_1} + N_1\vec{z_1} \end{array} \right\}_O$ où les paramètres $(X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1)$ sont inconnus ;
- l'action du premier actionneur sur le solide {Bras} : $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras}\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1(t)\vec{y} \end{array} \right\}_O$ où le couple $C_1(t)$ exercé est connu au cours du temps ;
- l'action du solide {Bras} sur le solide {Avant-bras} au travers de la liaison pivot d'axe $\left(A, \vec{y}\right)$ et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante : $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Bras} \rightarrow \text{Avant-bras}\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_2\vec{x_1} + Y_2\vec{y} + Z_2\vec{z_1} \\ L_2\vec{x_1} + M_2\vec{y} + N_2\vec{z_1} \end{array} \right\}_A$ où les paramètres $(X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2)$ sont inconnus ;
- les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées : $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras}\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_2(t)\vec{y} \end{array} \right\}_A$ et $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras}\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_2(t)\vec{y} \end{array} \right\}_A$ où le couple $C_2(t)$ exercé est connu au cours du temps ;
- l'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité B de l'avant-bras et définie par : $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras}\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_F\vec{x} + Z_F\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$.

On veut déterminer les deux équations permettant de décrire le mouvement des deux axes de l'orthèse. On suppose pour cela que les deux liaisons pivots sont parfaites.

Le PFD permet d'obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned}
C_1(t) = \; & \left(B_1 + B_2 + m_1\lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2\lambda_2^2\right)\ddot{\gamma} + \left(B_2 + m_2\lambda_2^2\right)\ddot{\delta} \\
& + m_2 l_1 \left(\lambda_2\left(2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}\right)\cos\delta + \lambda_2\left(\dot{\gamma}^2 - \left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2\right)\sin\delta\right) \\
& + m_1 g \lambda_1 \sin\gamma + m_2 g\left(l_1\sin\gamma + \lambda_2\sin\left(\gamma+\delta\right)\right) \\
& - X_F\left(l_1\cos\gamma + l_2\cos\left(\gamma+\delta\right)\right) + Z_F\left(l_1\sin\gamma + l_2\left(\gamma+\delta\right)\right)
\end{aligned}$$

Question 2 Détailler la démarche qui a permis d'obtenir cette équation, on précisera en particulier l'isolement, le bilan des Actions Mécaniques Extérieures et le choix des équations utilisées.

Question 3 Appliquer la démarche pour retrouver l'équation donnée.

Question 4 Écrire une deuxième relation issue du Principe Fondamental de la Dynamique, indépendante de la précédente, faisant intervenir le couple $C_2(t)$, et qui permette de ne pas faire apparaître les composantes L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2 des torseurs des actions de liaison. On détaillera la démarche de la même façon que lors de la première question.

Question 5 En déduire que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante : $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q\begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ où C est un vecteur et A, B et Q sont des matrices 2×2 que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement (γ, δ) et de leurs dérivées premières $\left(\dot{\gamma}, \dot{\delta}\right)$.

Question 6 Calculer les couples (C_1, C_2) exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ($X_F = 0$, $Z_F = 0$) et dans une position statique. Discuter de la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

Question 7 Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

TD 2
Stabilisateur passif d'image – Sujet

04 DYN

Mines Ponts 2018 – PSI.

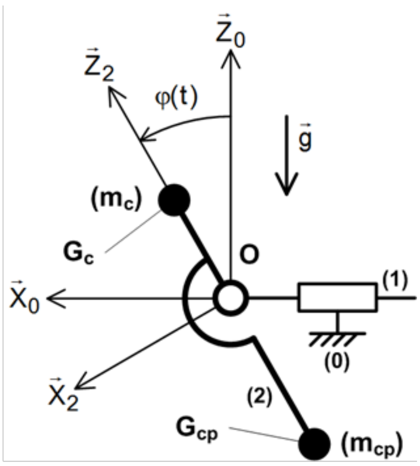
Mise en situation

Les appareils photos modernes fonctionnent en rafales : 8 à 10 images par seconde et en mode vidéo. Le besoin de stabilisation de l'image dans de telles conditions est impératif. Le but de ce sujet est de s'intéresser au support de la caméra assurant la liaison entre le bras de l'utilisateur et la caméra elle-même.

Le stabilisateur se compose principalement de trois objets :

- une poignée orientable **(1)** manipulée directement par le photographe, liée au support **(2)** en O ;
- un support rigide **(2)** (**supposé sans masse**) sur lequel vient se fixer une caméra assimilée en première approximation à une masse ponctuelle m_c placée en G_c ;
- un contrepoids lié à **(2)** et assimilé à une masse ponctuelle m_{cp} placée en G_{cp}.

Système réel



Modèle utilisé

L'utilisateur tient fermement la poignée **(1)** dans une position angulaire quelconque, ce qui permet d'affirmer que le **(porteur + (1))** ne forme qu'une seule classe d'équivalence. Afin de produire des images toujours fluides, sans à-coups, ce stabilisateur à main doit maintenir constamment la caméra dans une position verticale (parallèle au champ de gravité), que le porteur soit immobile (plan fixe) ou en mouvement (travelling).

Dans le cas général, le mouvement du bras par rapport au référentiel terrestre est quelconque (6 degrés de libertés). Ici, on se limite à un mouvement de translation. Dans le cas général, afin que la caméra soit en position verticale, le support doit permettre 3 rotations dans la liaison avec **(porteur + (1))**. Ici on se limite à la stabilisation d'une seule rotation.

Objectif

Suite à une sollicitation brève de 0,5 m s^{-2}, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les 0,5°.

Travail demandé

On se place à présent dans une phase dite « dynamique ». Le porteur **(1)** est en mouvement par rapport au sol. On suppose qu'à l'instant initial, l'ensemble **(E)=Support(2) + Caméra(C) + Contrepoids(Cp)** est en équilibre stable en position verticale. On note $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{V(P,1/0)} = v(t)\overrightarrow{X_0}\end{array}\right\}_{\forall P}$. On note $a(t) = \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$. De plus, $\overrightarrow{OG_C} = L_C\overrightarrow{Z_2}$ et $\overrightarrow{OG_{CP}} = -L_{CP}\overrightarrow{Z_2}$.

Question 1 Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans **(0)** galiléen s'exprime comme $Q_1\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2}+Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$.

Afin de quantifier la modification d'attitude de (E), l'équation de mouvement est linéarisée autour de la position d'équilibre (verticale) en supposant que les valeurs de l'angle restent faibles. On transpose cette équation différentielle dans le domaine de Laplace et on note $\mathcal{L}\left(\varphi(t)\right) = \Phi(p)$ et $\mathcal{L}\left(a(t)\right) = A(p)$. Afin de conserver la fluidité des images lors de travelling, les fluctuations indésirables des mouvements du porteur ne doivent pas être intégralement transmisses à (E).

On suppose que $a(t) = a_0 \sin\left(\omega_a t\right)$ avec $a_0 = 0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Question 2 Établir sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\Phi(p)}{A(p)}$. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de m_c, m_{cp}, L_c, L_{cp} et g.

Question 3 Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain $G_{\mathrm{dB}} = f\left(\omega\right)$ de la fonction de transfert $H\left(j\omega\right)$. Placer les caractéristiques remarquables.

Question 4 Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que $\omega_0 = 0,1\omega_a$. Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple $\left(m_{cp}, L_{cp}\right)$. En utilisant le comportement asymptotique en gain de G_{dB}, estimer numériquement l'amplitude $\Delta\varphi$ (en degrés) des oscillations de **(E)** selon l'axe $\left(O,\overrightarrow{y_0}\right)$.

Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

Éléments de correction

1. $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g\sin\varphi$, $Q_3(t) = \left(M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C\right)\cos\varphi$.

2. $\omega_0^2 = \dfrac{\left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g}{M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}$.
3. .
4. $0,03°$.
5. .