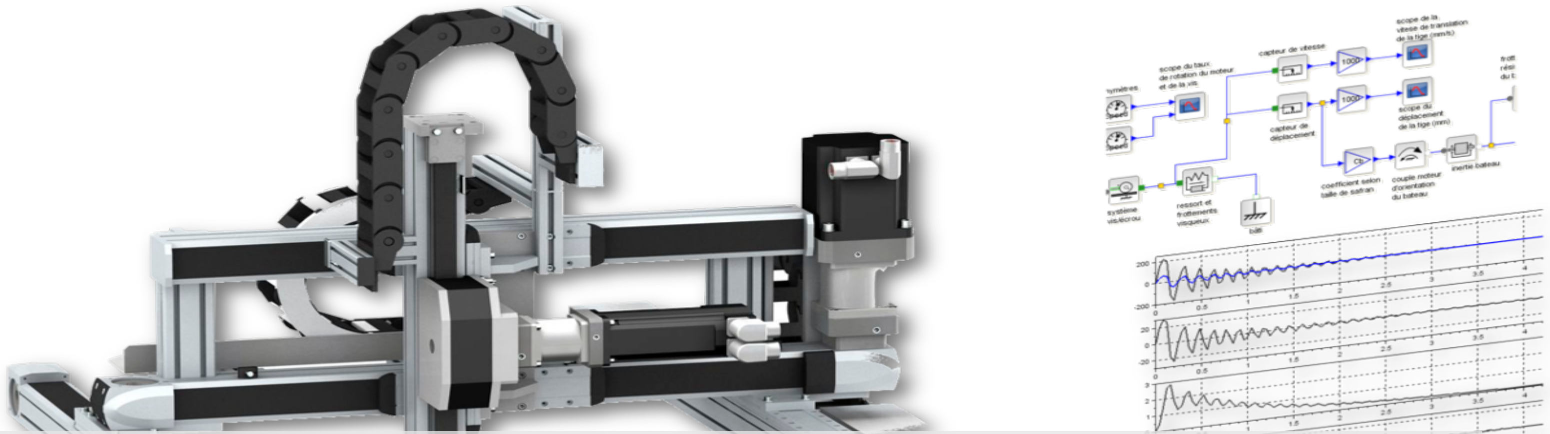


1 Rappels sur la modélisation des systèmes asservis

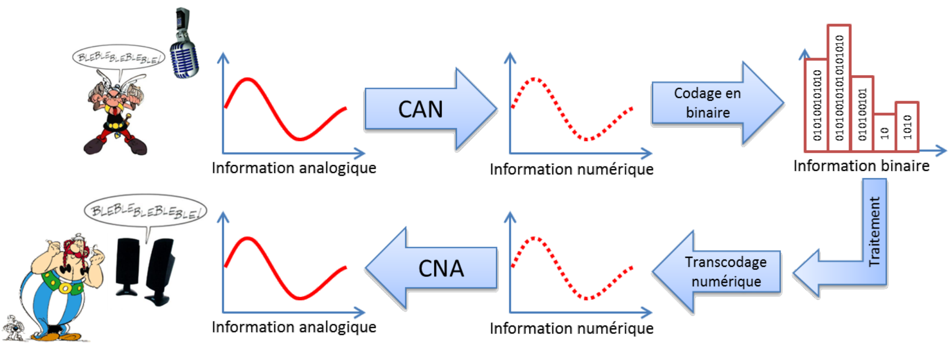
01 SLCI 02 SLCI 03 SLCI 07 SLCI 08 SLCI 09 SLCI 10 SLCI 11 SLCI

1.1 Définitions préliminaires et détermination des performances

1.1.1 Définitions

Définition – Informations analogiques et numériques

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).

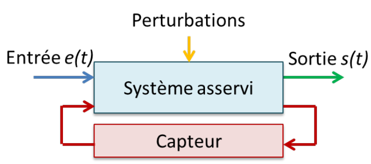


Définition – Systèmes automatiques ou asservis

Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

- la loi de consigne $e(t)$ est une grandeur de commande qui est modifiable ;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie $s(t)$ est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger



de la qualité de la tâche accomplie.

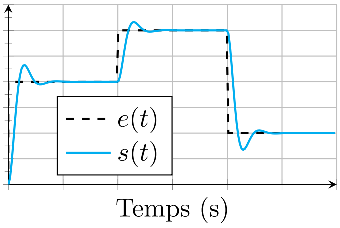


Figure 1.1 – Système suiveur.

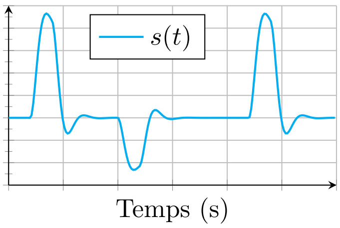


Figure 1.2 – Système régulateur.

Définition – Systèmes suiveurs et régulateurs

- Pour un système suiveur la consigne $e(t)$ fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- Pour un système régulateur la consigne $e(t)$ est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.

1.1.2 Performance des systèmes – Critères graphiques

Définition – Précision en position – Erreur statique ε_S

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'erreur statique ε_S comme la différence entre la consigne (un échelon) et la réponse $s(t)$ en régime permanent.

Définition – Précision en vitesse ε_V

Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

Définition – Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

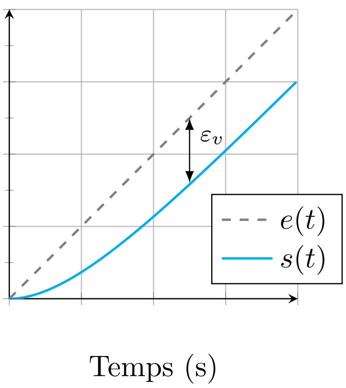


Figure 1.3 – Erreur de trainage.

Méthode – Détermination du temps de réponse 5 %

1. Tracer sur le même graphe la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.

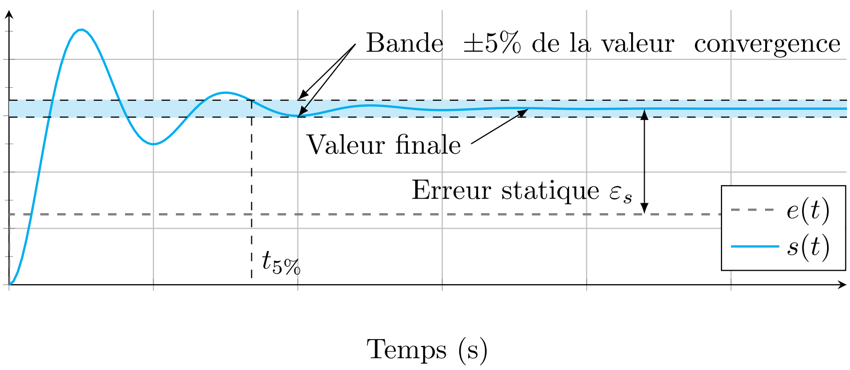


Figure 1.4 – Performances sur une réponse à un échelon.

Définition – Stabilité

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.
On parle parfois de système EBSB (Entrée Bornée – Sortie Bornée), même si cette définition me convient moyennement.

1.2 Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace

02 SLCI

1.2.1 Définitions

Définition – Conditions de Heavisde – Fonction causale – Conditions initiales nulles

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour $t = 0^+$:

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{\mathrm{d}f(0^+)}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(0^+)}{\mathrm{d}t^2} = 0...$$

Définition – Transformée de Laplace

À toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t \leq 0$ (fonction causale), on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-pt} \mathrm{d}t.$$

On note $\mathscr{L}\left[f(t)\right]$ la transformée directe et $\mathscr{L}^{-1}\left[F(p)\right]$ la transformée inverse.

De manière générale on note $\mathscr{L}\left[f(t)\right] = F(p)$, $\mathscr{L}\left[e(t)\right] = E(p)$, $\mathscr{L}\left[s(t)\right] = S(p)$, $\mathscr{L}\left[\omega(t)\right] = \Omega(p)$, $\mathscr{L}\left[\theta(t)\right] = \Theta(p)$ ...

Résultat – Dérivation

Dans les conditions de Heaviside : $\mathscr{L}\left[\dfrac{\mathbf{d}f(t)}{\mathbf{d}t}\right] = pF(p)$, $\mathscr{L}\left[\dfrac{\mathbf{d}^2 f(t)}{\mathbf{d}t^2}\right] = p^2 F(p)$, $\mathscr{L}\left[\dfrac{\mathbf{d}^n f(t)}{\mathbf{d}t^n}\right] = p^n F(p)$.

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par $\mathscr{L}\left[\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = pF(p) - f(0^+)$.

1.2.2 Théorèmes

Théorème – Valeur initiale

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\in\mathbb{R}, p\to\infty} pF(p)$$

Théorème – Valeur finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\in\mathbb{R}, p\to 0} pF(p)$$

Théorème – Retard

$$\mathcal{L}\left[f\left(t-t_0\right)\right]=e^{-t_0 p}F(p)$$

Théorème – Amortissement

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}f\left(t\right)\right]=F(p+a)$$

1.3 Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

03 SLCI

1.3.1 Définitions

Définition – Fonction de transfert – Transmittance

Soit un système linéaire continu linéaire invariant dont on note le signal d'entrée e et le signal de sortie s, régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction H telle que :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i}=\frac{N(p)}{D(p)}.$$

Définition – Classe – Ordre – Pôles – Zéros

$H(p)$ est une fonction rationnelle en p. En factorisant le numérateur et le dénominateur, $H(p)$ peut s'écrire sous cette forme :

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=K\frac{\left(p-z_1\right)\left(p-z_2\right)\dots\left(p-z_m\right)}{p^{\alpha}\left(p-p_1\right)\left(p-p_2\right)\dots\left(p-p_n\right)}$$

- Les z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Les p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- **Le degré de $D(p)$ est appelé ordre n du système ($n \geq m$ pour les systèmes physiques).**
- L'équation $D(p)=0$ est appelée équation caractéristique.
- S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre α de $D(p)$, un terme p^{α} apparaît au dénominateur. α **est la classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

Exemple

$H(p) = \dfrac{K}{p\left(1+\tau_1 p\right)\left(1+\tau_2 p\right)}$ est d'ordre 3 et de classe 1.

Exemple

$H_1(p) = \dfrac{K}{a+1+bp+cp^2} = \dfrac{K}{a+1}\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a+1}p+\dfrac{c}{a+1}p^2}$.

$H_2(p) = \dfrac{K}{\left(a_1+b_1p\right)\left(a_2+b_2p\right)} = \dfrac{K}{a_1a_2}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{b_1}{a_1}p\right)\left(1+\dfrac{b_2}{a_2}p\right)}$.

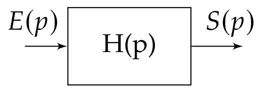
Définition – Forme canonique

On appelle forme canonique d'une fonction de transfert une forme pour laquelle le coefficient du monome de plus bas degré est 1 au numérateur et au dénominateur. On appelle gain la coefficent ainsi mis en facteur.

Définition – Modélisation d'un bloc

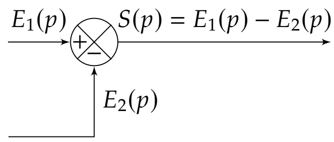
Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$, caractérisé par une fonction de transfert $H(p)$. Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$



Définition – Modélisation d'un comparateur

Soit l'équation $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$. Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

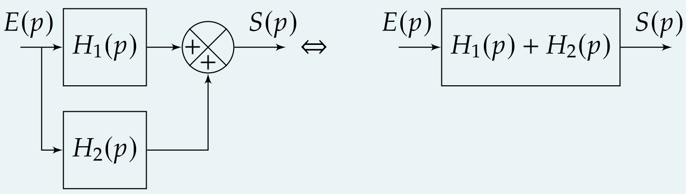


1.3.2 Algèbre de blocs

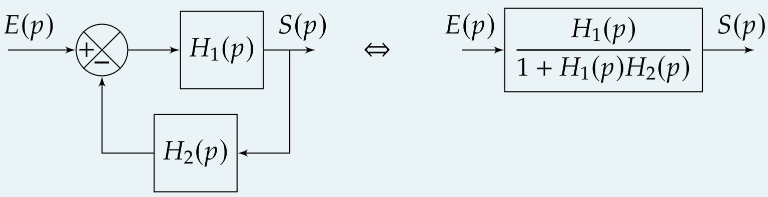
Remarque – Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsqu'on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.

Résultat – Blocs en série

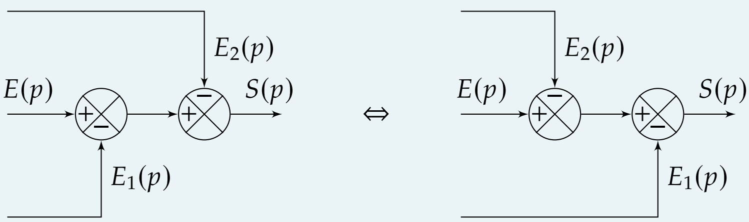
Résultat – Blocs en parallèle



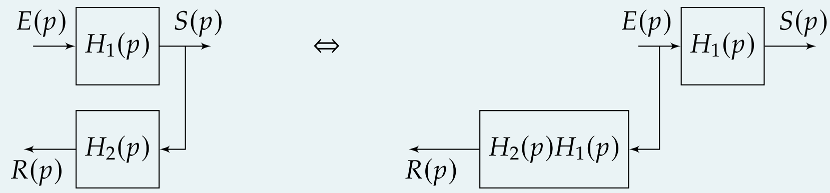
Résultat – Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT



Résultat – Comparateurs en série

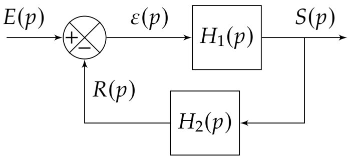


Résultat – Point de prélèvement



1.3.3 Fonctions usuelles

08 SLCI



Définition – Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF

Formule de Black

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$

Définition – Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO

$$\mathrm{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

Définition – Théorème de superposition

Soit un système d'entrées E_1 et E_2 et de sortie S. On note $H_1 = \dfrac{S}{E_1}$ lorsque E_2 est nulle et $H_2 = \dfrac{S}{E_2}$ lorsque E_1 est nulle. En superposant, on a alors : $S = H_1E_1 + H_2E_2$.

1.4 Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

07 SLCI

1.4.1 Systèmes d'ordre 1

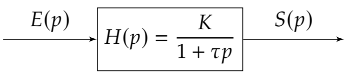
Définition – Système d'ordre 1

Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\tau\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t).$$

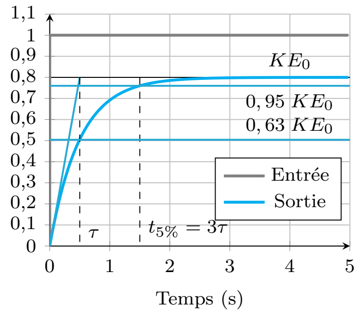
Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$



On note :

- τ la constante de temps en secondes ($\tau > 0$) ;
- K le gain statique du système ($K > 0$).



Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude E_0. Lorsque $E_0 = 1$ ($1/p$ dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

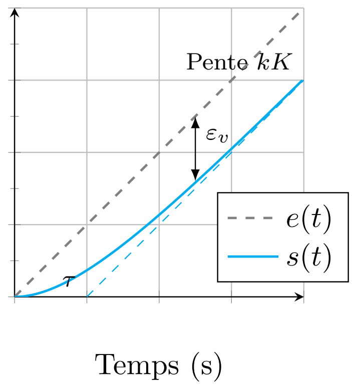
$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p}\frac{K}{1+\tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = KE_0 u(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.
Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- le gain à partir de l'asymptote KE_0 ;
- la constante de temps à partir de $t_{5\%}$ ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- valeur finale $s_\infty = KE_0$;
- pente à l'origine **non nulle** ;
- $t_{5\%} = 3\tau$;
- pour $t = \tau$, $s(\tau) = 0,63\, s_\infty$.



Résultat – Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

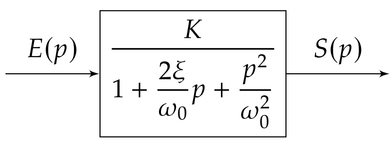
On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente k :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2}\frac{K}{1+\tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = Kk\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$.
Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- pente de l'asymptote Kk ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses : $t = \tau$.

1.4.2 Systèmes d'ordre 2



Définition – Systèmes d'ordre 2

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t).$$

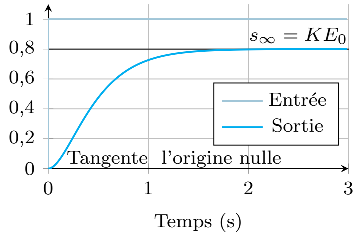
Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

- K est appelé le gain statique du système (rapport des unités de S et de E) ;

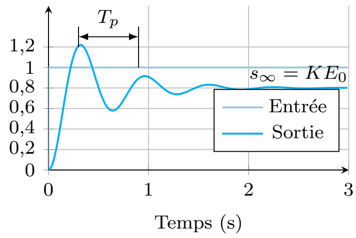
- ξ (lire *xi*) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité) ;
- ω_0 pulsation propre du système (rad/s ou s^{-1}).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.



Résultat – $\xi \geq 1$: système non oscillant et amorti (apériodique)

- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.



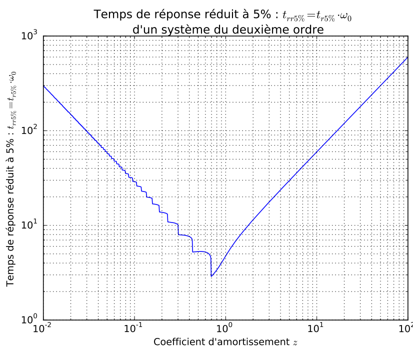
Sur la figure ci dessus, le dépassement est de 0,4 et le dépassement pour cent est $D_\% = \dfrac{0,4}{0,8} = 0,5$. En utilisant la formule donnée pour identifier ξ, on a alors $\xi \simeq 0,15$.

Résultat – $\xi < 1$: système oscillant et amorti (pseudo périodique)

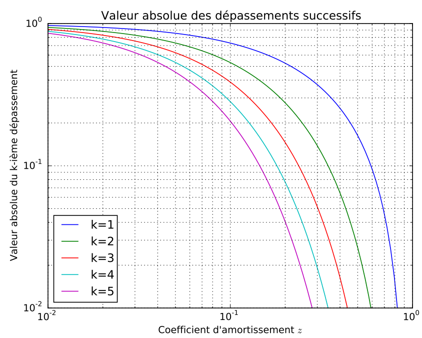
- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$.
- La valeur du premier dépassement vaut : $D_1 = KE_0 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$.
  - En notant $D_\% = \dfrac{D_1}{KE_0}$, on pourra aussi retenir que $\xi = \sqrt{\dfrac{(\ln D_\%)^2}{\pi^2 + (\ln D_\%)^2}}$.

Résultat –

- Pour $\xi = 0$ le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude KE_0 ($2KE_0$ crête à crête).
- Pour $\xi \simeq 0,69$ on obtient le système du second ordre le plus rapide **avec dépassement**. Le temps de réponse à 5% est donné par $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \simeq 3$.
- Pour $\xi = 1$ on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.



(a) Abaque des temps de réponses réduits à 5 %



(b) Abaques des dépassements

Figure 1.5 – Abaques pour des systèmes d'ordre 2

1.5 Réponse fréquentielle des SLCI

SLCI

1.5.1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme $f(t) = A\sin(\omega \cdot t + \varphi)$ et on note :

- $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: la période de la sinusoïde en s ;
- $f = \dfrac{1}{T}$: fréquence de la sinusoïde en Hz.
- A : l'amplitude de la sinusoïde ;
- ω : la pulsation en rad/s ;
- φ : la phase à l'origine en rad.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

Définition – Gain & Phase

Soit $H(p)$ une fonction de transfert. On pose $p = j\omega$ et on note :

- $H_{dB}(\omega) = 20\log|H(j\omega)|$ le gain décibel de la fonction de transfert ;
- $\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}\left(H(j\omega)\right)$.

Résultat –

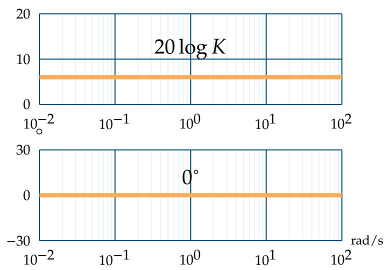
On note $H(p) = G_1(p)G_2(p)$. On a :

- $H_{dB}(\omega) = G1_{dB}(\omega) + G2_{dB}(\omega)$;
- $\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}\left(G1_{dB}(\omega)\right) + \mathrm{Arg}\left(G2_{dB}(\omega)\right)$.

1.5.2 Gain

Résultat – Diagramme de Bode d'un gain pur

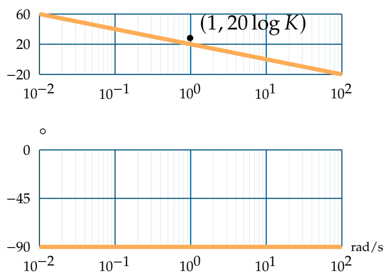
- Fonction de transfert : $H(p) = K$.
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée $20\log K$.
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée 0°.



1.5.3 Intégrateur

Résultat – Diagramme de Bode d'un intégrateur

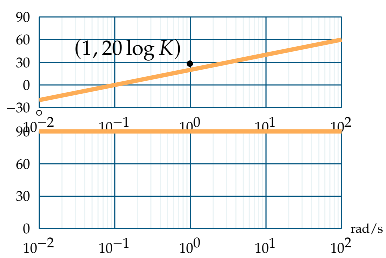
- Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{p}$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente −20dB/decade passant par le point $(1, 20\log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée −90 °.



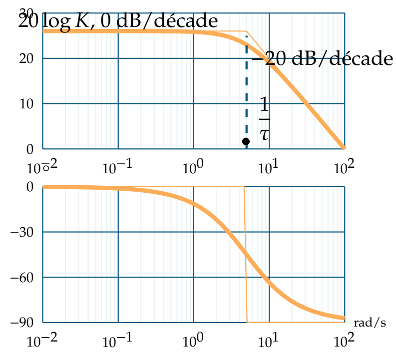
1.5.4 Dérivateur

Résultat – Diagramme de Bode d'un dérivateur

- Fonction de transfert : $H(p) = Kp$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente 20dB/decade passant par le point $(1, 20\log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée +90 °.



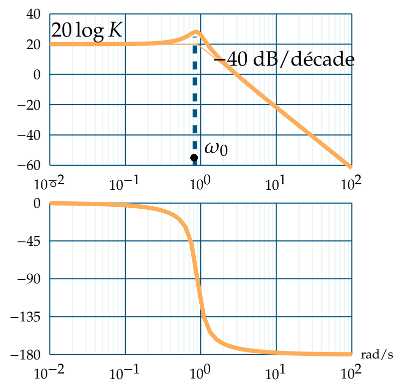
1.5.5 Systèmes d'ordre 1



Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

- Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$.
- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour $\omega < \dfrac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $20\log K$;
  - pour $\omega > \dfrac{1}{\tau}$: droite de pente -20dB/decade.
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour $\omega < \dfrac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $0\,^\circ$;
  - pour $\omega > \dfrac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $-90\,^\circ$.

1.5.6 Systèmes d'ordre 2



En utilisant la figure précédente, on lit un gain maximal de 30 dB soit $A_{\max} = 10^{1,5}$ et on a un gain de $K = 10$. ξ est solution de $10^{1,5} \times 2\xi\sqrt{1-\xi^2} - 10$.

Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre

- Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$.

Cas où $\xi < 1$.

- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée $20\log K$;
  - pour $\omega > \omega_0$: droite de pente -40dB/decade.
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée $0\,^\circ$;
  - pour $\omega > \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée -180°.

Dans le **cas où** $\xi > 1$, le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme $\left(1+\tau_1 p\right)\left(1+\tau_2 p\right)$. On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

Résultat – Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque $\xi < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$.
À la résonance, l'amplitude maximale est de $A_{\max} = \dfrac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$. (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit $20\log A_{\max}$ lorsque $\omega = \omega_r$.)

1.5.7 Retard

Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur

- Fonction de transfert : $H(p) = e^{-Tp}$.
- Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- Diagramme de phase asymptotique : $\arg\big(H(p)\big) = -\tau\omega$.

1.5.8 Tracé du diagramme de Bode

Méthode – 1 : Sommation dans le diagramme de Bode

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Tracer chacune des fonctions de transfert.
3. Sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

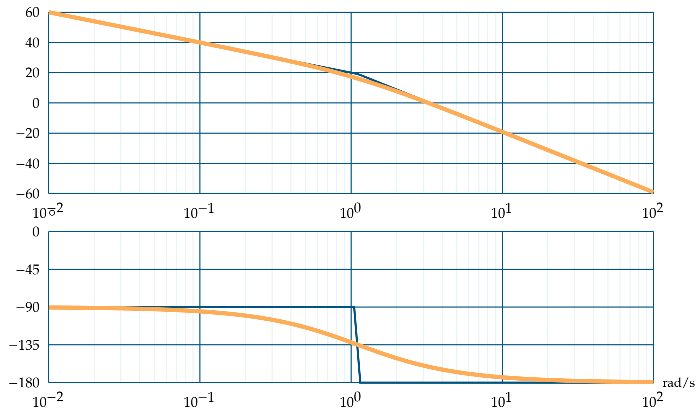
Méthode – 2 : Tableau de variations

1. Décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus).
2. Réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes.
3. Sommer les pentes.
4. Déterminer le gain en basse fréquence si la classe est nulle ou déterminer le gain pour une pulsation donnée si la classe est non nulle.
5. Tracer le diagramme de Bode.

Application : tracer de $F(p) = \dfrac{10}{p\left(1+0,9p\right)}$.

	$\omega \to 0$ $\quad \omega = \frac{1}{0,9} = 1,11$	$\omega \to \infty$
$\frac{1}{p}$	-20 dB/décade $-90°$	-20 dB/décade $-90°$
$\frac{10}{1+0,9p}$	0 dB/décade 0°	-20 dB/décade $-90°$
$F(p)$	-20 dB/décade $-90°$	-40 dB/décade $-180°$

Ici le système est de classe 1. Pour $\omega << 1,11$, $F(p) \simeq \dfrac{10}{p}$. Pour $\omega = 0,01$, on a donc $G_{\text{dB}}(0,01) \simeq 20\log 10 - 20\log(0,1) = 20 - 20\times(-2) = 60$.


60
40
20
0
−20
−40
−60
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
0
−45
−90
−135
−180
rad/s
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}