# 6 Rappels de Statique

## 6.1 Modélisation locale des actions mécaniques

**Définition – Action mécanique de contact volumique**

Localement, les actions mécaniques volumiques peuvent être modélisées par le torseur suivant : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1\rightarrow 2)}} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(M)\overrightarrow{u(M)}\mathrm{d}\mathcal{V} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, 1 \rightarrow 2)} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \overrightarrow{PM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M$.

La densité volumique d'effort s'exprime en $\left[\mathrm{Nm}^{-3}\right]$.

**Définition – Action mécanique de contact surfacique**

Localement, les actions mécaniques dans un contact surfacique peuvent être modélisées par le torseur suivant : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1\rightarrow 2)}} = \iint\limits_{\mathcal{S}} f(M)\overrightarrow{u(M)}\mathrm{d}\mathcal{S} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, 1 \rightarrow 2)} = \iint\limits_{\mathcal{S}} \overrightarrow{PM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M$.

La densité surfacique d'effort peut alors se décomposer sur le vecteur normal au contact et sur un vecteur appartenant au plan tangent au contact. On a alors $f(M)\overrightarrow{u(M)} = p_{12}(M)\overrightarrow{n_{12}} + \overrightarrow{\tau_{12}}(M)$. On note ;

- $p_{12}(M)$ pression de contact au point $M$ (en $\left[\mathrm{Nm}^{-2}\right]$) ;
- $\overrightarrow{\tau_{12}}(M)$ : la projection tangentielle de la densité surfacique (norme en $\left[\mathrm{Nm}^{-2}\right]$).

02 STAT

## 6.2 Modélisation globale des actions mécaniques

**Définition – Torseur statique ou torseur sthénique ou torseur d'efforts**

L'action mécanique d'un système matériel $S_1$ (ou d'un phénomène physique) sur un système matériel $S_2$ est représentable par un torseur au point $M$ :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \to S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(S_2 \to S_1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(M, S_2 \to S_1)} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{M,\mathcal{R}}$$

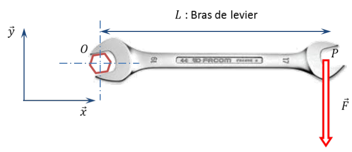
**Remarque**

La norme de vecteur $\overrightarrow{R(S_2 \to S_1)}$ est en Newton (N). La norme du vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}(M, S_2 \to S_1)}$ est en Newton – mètre $(N \cdot m)$.

**Propriété – Varignon**

Le torseur statique étant un torseur, on a donc :

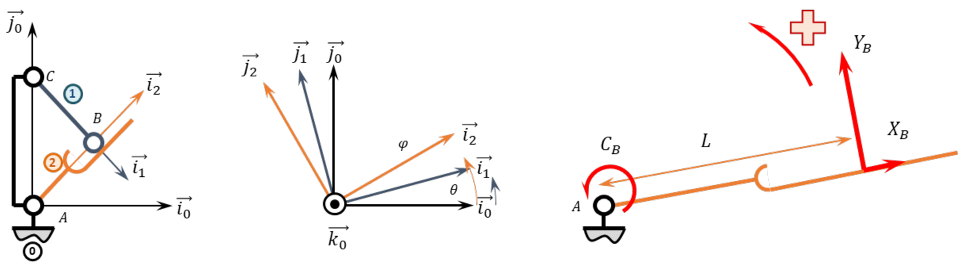
$$\forall B, \overrightarrow{\mathcal{M}(B, S_2 \to S_1)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, S_2 \to S_1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(S_2 \to S_1)}$$




**Remarque – Moment d'une force – Interprétation graphique**

Prenons le cas du serrage d'un écrou avec un effort $\overrightarrow{F} = -F\overrightarrow{y}$ :
Dans l'hypothèse où l'effort $\overrightarrow{F}$ s'appliquerait au point $O$, il n'y aurait donc pas de serrage de l'écrou. Le moment (ou couple de serrage) serait donc nul : $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Clef} \to \text{Ecrou})} = \overrightarrow{0}$.
Si l'effort s'applique en $P$ : $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{Clef} \to \text{Ecrou})} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F} = L\overrightarrow{x} \wedge -F\overrightarrow{y} = -LF\overrightarrow{z}$.
Méthode pour déterminer le moment dans un problème plan :

- norme du vecteur : effort fois bras de levier (on peut éventuellement décomposer l'effort dans le repère de travail) ;
- perpendiculaire au plan ;
- sens : on regarde si, par rapport au point où on chercher le moment, l'effort fait tourner la pièce dans le sens direct ou indirect.

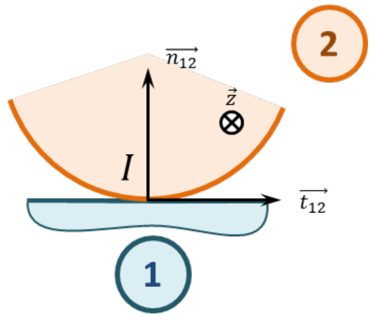



Application du TMS en $A$ : $C_B + Y_B L + 0 = 0$.

B2-14

## 6.3 Modélisation du contact ponctuel entre 2 pièces

### 6.3.1 Torseur des actions mécaniques



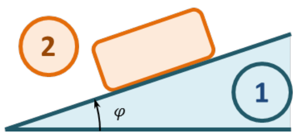

Considérons le contact ponctuel ponctuel entre deux pièces **1** et **2**. En considérant la liaison parfaite, le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 s'écrit sous la forme suivante : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{12}\overrightarrow{n_{12}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_I$ en notant $\overrightarrow{n_{12}}$ le vecteur normal au contact orienté de 1 vers 2. En considérant que la liaison n'est pas parfaite, plusieurs situation peuvent se présenter.

- Si on considère qu'un effort tend à faire translater 2 suivant $\overrightarrow{t_{12}}$, le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\overrightarrow{n_{12}} + T_{12}\overrightarrow{t_{12}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_I$.
- Si on considère qu'un effort tend à faire rouler 2 autour de $\overrightarrow{z_{12}}$, le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\overrightarrow{n_{12}} \\ M_{r12}\overrightarrow{z} \end{array} \right\}_I$ avec $M_{r12}$ moment de résistance au roulement.
- Si on considère qu'un effort tend à faire pivoter 2 autour de $\overrightarrow{n_{12}}$, le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\overrightarrow{n_{12}} \\ M_{p12}\overrightarrow{n_{12}} \end{array} \right\}_I$ avec $M_{p12}$ moment de résistance au pivotement.

**Remarque**

Il est possible de modéliser l'ensemble des composantes dues au frottement dans un même torseur.
On fait l'hypothèse ici d'un problème plan, mais il peut aisément être adapté à un modèle 3D.

### 6.3.2 Facteur de glissement et d'adhérence

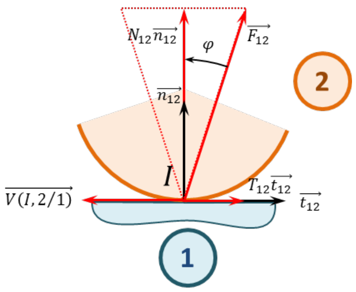



Considérons la pièce 2 sur un plan incliné 1. Notons $\varphi_a$ l'angle à partir duquel la pièce 2 se met à glisser sur le plan. On appelle $f_a = \tan\varphi_a$ le facteur d'adhérence.

On constate expérimentalement qu'une fois la pièce est en mouvement, si on diminue l'angle $\varphi$, la pièce continue à glisser, jusqu'à un angle $\varphi_g$. On appelle $f_g = \tan\varphi_g$ le facteur de glissement.

Ces facteurs sont sans unité. Ils dépendent de la nature des matériaux en contact ainsi que de la nature des surfaces de contact (et d'un lubrifiant éventuel). Ils sont indépendants de l'effort de 2 sur 1. Ces deux facteurs étant relativement proches, on fera l'hypothèse que $f = f_a = f_g$.

### 6.3.3 Modélisation de l'adhérence et du glissement – Lois de Coulomb




**Cas 1 – Glissement – $\overrightarrow{V(I,2/1)} \neq \overrightarrow{0}$**

- Connaissant le sens et la direction de $\overrightarrow{V(I,2/1)}$, alors $\overrightarrow{t_{12}}$ s'oppose à $\overrightarrow{V(I,2/1)}$.
- $|T_{12}| = f|N_{12}|$.
- La vecteur vitesse appartenant au plan tangent au contact, on dit que l'effort résultant ($\overrightarrow{F_{12}} = N_{12}\overrightarrow{n_{12}} + T_{12}\overrightarrow{t_{12}}$) est sur le cône de frottement.

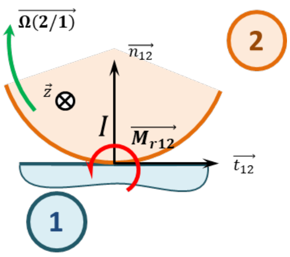
**Cas 2 – Adhérence – $\overrightarrow{V(I,2/1)} = \overrightarrow{0}$**

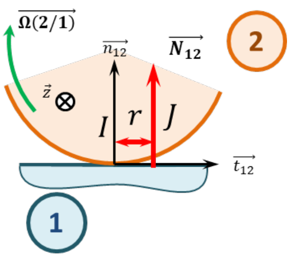
- La direction de $\overrightarrow{t_{12}}$ n'est pas connue.
- $|T_{12}| \leq f|N_{12}|$.
- La direction $\overrightarrow{t_{12}}$ n'étant pas connue, on dit que l'effort résultant ($\overrightarrow{F_{12}} = N_{12}\overrightarrow{n_{12}} + T_{12}\overrightarrow{t_{12}}$) appartient au cône d'adhérence.

**Remarque**

En considérant que la direction du vecteur vitesse peut décrire le plan tangent au contact, la résultante des efforts $\overrightarrow{F_{12}}$ décrit alors un cône. On parle donc de cône d'adhérence.

### 6.3.4 Modélisation de la résistance au roulement et au pivotement




**Modélisation de la résistance au roulement**

- Le moment de résistance au roulement $\overrightarrow{M_{r12}}$ s'oppose à $\overrightarrow{\Omega(2/1)} \cdot \overrightarrow{z}$.
- On note $r$ le coefficient de résistance au roulement ([m]) et on a $||\overrightarrow{M_{r12}}|| = r||\overrightarrow{N_{12}}||$.

**Modélisation de la résistance au pivotement**

- Le moment de résistance au pivotement $\overrightarrow{M_{p12}}$ s'oppose à $\overrightarrow{\Omega(2/1)} \cdot \overrightarrow{n_{12}}$.
- On note $p$ le coefficient de résistance au pivotement ([m]) et on a $||\overrightarrow{M_{p12}}|| = p||\overrightarrow{N_{12}}||$.

Ainsi pour modéliser la résistance au roulement, on peut faire l'hypothèse que l'action normale de 1 sur 2 est « avancée » de $r$ par rapport au point $I$.

## 6.4 Modélisation locale des actions mécaniques

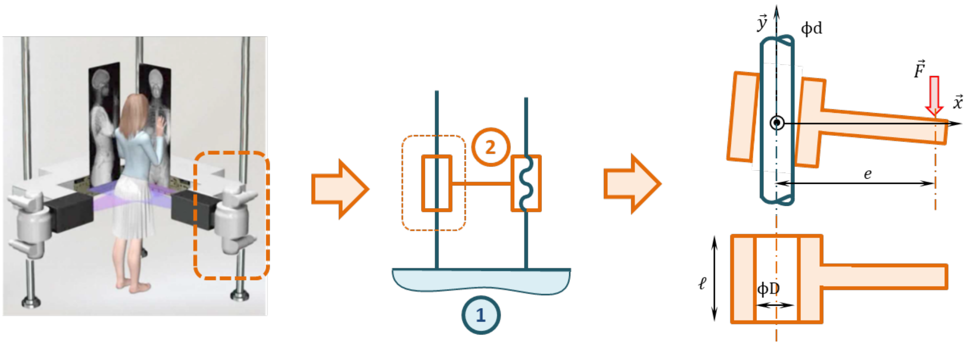
**Définition – Action mécanique locale**

Localement, les actions mécaniques dans un contact ponctuel avec frottement peuvent être modélisées par le torseur suivant : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1\rightarrow 2)}} = \iint_{\mathcal{S}} f(M)\overrightarrow{u(M)}\mathrm{d}S \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P,1 \rightarrow 2)} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{PM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M$.
La densité surfacique d'effort peut alors se décomposer sur le vecteur normal au contact et sur un vecteur appartenant au plan tangent au contact. On a alors $f(M)\overrightarrow{u(M)} = p_{12}(M)\overrightarrow{n_{12}} + \overrightarrow{\tau_{12}}(M)$. Dans le cas du glissement : $||\overrightarrow{\tau_{12}}(M)|| = p_{12} \cdot f$. En notant :

- $p_{12}(M)$ pression de contact au point $M$ (en $\left[\text{Nm}^{-2}\right]$) ;
- $\overrightarrow{\tau_{12}}(M)$ : la projection tangentielle de la densité surfacique (norme en $\left[\text{Nm}^{-2}\right]$) ;
- $f$ facteur de frottement.

## 6.5 Résolution des problèmes d'arc-boutement

L'arc-boutement est un phénomène de blocage d'une liaison (souvent glissière ou pivot glissant). Ce phénomène est causé d'une part par le frottement dans une liaison et d'autre part par le jeu existant entre les deux pièces en mouvement. En effet, le jeu dans la liaison autorise une légère rotation de la pièce mâle, modifiant les zones de contact. Le frottement dans ces zones de contact conduit à l'arc-boutement.




On commence donc par modéliser le contact par des liaisons ponctuelles avec frottement. L'écriture du PFS et l'utilisation du modèle de Coulomb permet de déterminer des conditions géométriques à la limite du coincement. (Pour cela, on fait l'hypothèse qu'on est à la limite du glissement en un point (égalité) et dans le cône d'adhérence à l'autre point inégalité.)

## 6.1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer

01 STAT 03 STAT

1. **Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.**
2. **Faire un bilan des actions mécaniques extérieures et écrire le torseur associé.**
3. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
4. **Faire un graphe d'analyse (ou de structure : liaisons et actions mécaniques extérieures).**
5. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
6. **Faire des produits vectoriels le plus vite possible.**
7. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
8. **Simplifier les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons dans le cas d'un problème plan**.

## 6.2 Les types de problèmes

Le principe fondamental de la statique a pour objectif de calculer des actions mécaniques dans deux cas :

1. **connaître toutes les actions mécaniques dans toutes les liaisons ;**
2. **connaître la loi entrée-sortie en effort**, c'est à dire :
   - quel couple moteur faut-il pour déplacer un objet ?
   - quel effort doit fournir le vérin pour soulever cette masse ?
   - ...

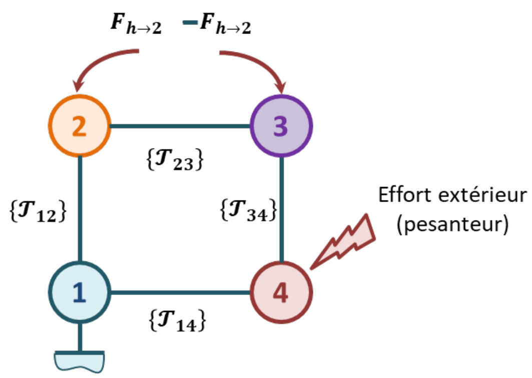
Dans le cas 1, il faut isoler chacune des pièces et réaliser le PFS.

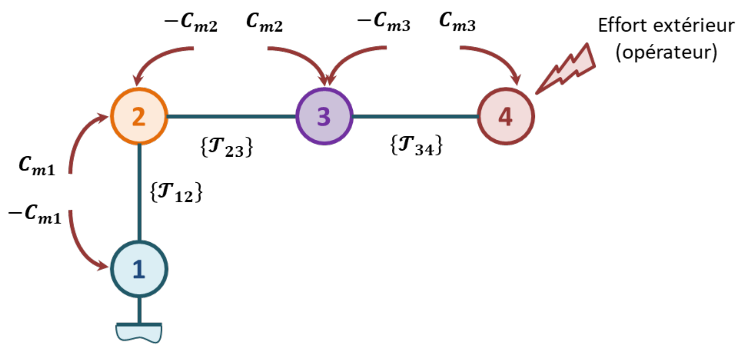
Dans le cas 2, on peut essayer de minimiser le nombre d'équations à écrire. C'est cette stratégie que nous allons présenté.

## 6.3 Stratégie d'isolement

### 6.3.1 Graphe d'analyse, ou de structure

On rencontre principalement deux types de structures : des chaînes fermées, ou des chaînes ouvertes.




**Remarques :**

- Entre les pièces (ou les groupes de pièces), on matérialise les liaisons (dont vous connaissez super bien les torseurs).
- Entre certaines pièces (ou groupes de pièces), il peut exister des actions mécaniques extérieures qui agissent « en positif » sur une des pièces et « en négatif » sur l'autre. **C'est par exemple le cas des moteurs et des vérins**. Il faut bien préciser que l'action mécanique agit sur les deux pièces.
- Les actions strictement extérieures (comme la pesanteur) ne sont pas en interactions entre deux pièces.

### 6.3.2 Isoler les solides soumis à 2 glisseurs

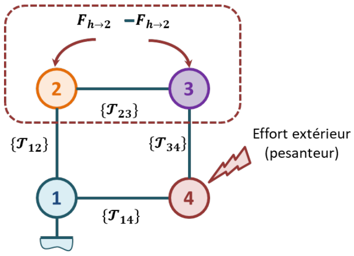
On commence toujours, toujours, toujours, toujours, toujours par isoler les ensembles soumis à 2 glisseurs. Cela permet de conclure que, d'après le PFS (et le principe des actions réciproques qui en découle) les actions mécaniques agissant sur ce solide ont même direction, même norme et sens opposé. Ce qui supprime des inconnues.

**Mais qu'est-ce qu'un glisseur ?**

Un glisseur est un torseur dont-il existe un point tel que le moment est nul. Ainsi, le torseur statique d'une lisaison rotule est un glisseur. Le torseur statique d'une liaison pivot n'est pas un glisseur.

**Remarque**

Pour démontrer qu'un torseur est un glisseur, on peut par exemple montrer que son automoment est nul. L'automoment est le produit de la résultante et du moment d'un torseur. Il est identique en tout point. C'est un invariant du torseur (comme la résultante).




Dans le cas ci-contre, si on isole 2, 3 et $h$ (qui pourrait être une action hydraulique). Ainsi, si $\{\mathcal{T}_{12}\}$ et $\{\mathcal{T}_{43}\}$ sont des glisseurs de « centres » respectifs $A$ et $B$ et qu'on note $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||}$. Alors on a $\{\mathcal{T}_{12}\} = -\{\mathcal{T}_{43}\} = \left\{\begin{array}{c} F\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A$.

**Il faut bien comprendre que $\{\mathcal{T}_{12}\}$ et $\{\mathcal{T}_{43}\}$ pouvaient avoir chacun 2 ou 3 inconnues et que maintenant nous avons au total UNE inconnue.**

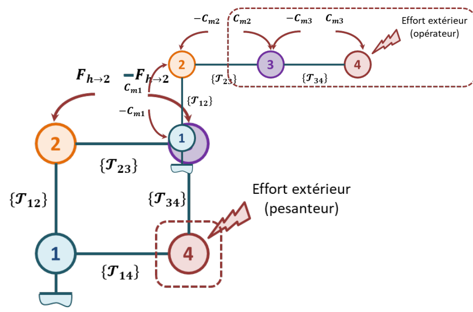
### 6.3.3 Isoler les solides soumis à 3 glisseurs ou plus

La stratégie est toujours la suivante :

1. **Isoler la pièce.**
2. **Réaliser le bilan des actions mécaniques, en écrivant les torseurs** et en laissant de la place à gauche de la feuille pour les déplacer.
3. **Citer L'équation du PFS qu'on va utiliser.** Cela peut être le théorème de la résultante statique (TRS) suivant l'axe $\overrightarrow{u}$ ou le théorème du moment statique (TMS) au point $A$ en projection sur $\overrightarrow{u}$.
4. **Effectuer la résolution.** (Déplacer les torseurs, appliquer le PFS.)
5. **Réitérer avec un autre isolement.**

### 6.3.4 Oui, mais quel est le problème ?

Le problème est de choisir **L'**équation. Je dirai qu'il faut écrire le théorème qui correspond à la mobilité de la pièce isolée, mais cela a-t-il vraiment un sens ? Prenons des exemples...




Si on a isolé 4 et que $\{\mathcal{T}_{14}\}$ est une liaison pivot d'axe $\left(A, \overrightarrow{z}\right)$, on réalisera un théorème du moment statique en $A$ en projection suivant $\overrightarrow{z}$.

Si on a isolé 4 et que $\{\mathcal{T}_{14}\}$ est une liaison glissière de direction $\overrightarrow{u}$, on réalisera un théorème de la résultante statique en projection suivant $\overrightarrow{u}$.

... **Est-ce que c'est plus clair ?**... J'espère...

Si on cherche une relation entre l'effort extérieur et $C_{m2}$, que la liaison entre 2 et 3 est une liaison pivot d'axe $\left(B, \overrightarrow{x}\right)$, on isolera **{3 et 4}** et on réalisera un théorème du moment statique en $B$ en projection suivant $\overrightarrow{x}$.

... **Toujours pas clair ?**... Si ?

### 6.3.5 Il y a plus qu'à ...

Petite remarque pour finir : le produit mixte. Lorsqu'on applique un TMS suivant une direction, le produit mixte peut être un bon outil : $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 1 \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{z} = \left(\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}\right) \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{z} + \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}\right) \cdot \overrightarrow{z}$... et $\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) \cdot \overrightarrow{z} = \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{z}\right) \cdot \overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{z} \wedge \overrightarrow{u}\right) \cdot \overrightarrow{v}$.