

TD 0

Stabilisateur passif d'image – Corrigé

Mines Ponts 2018 – PSI.

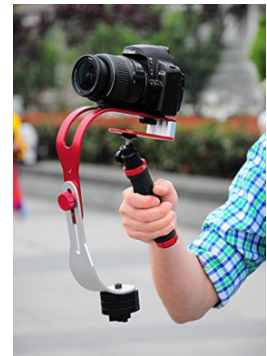
C1-05

C2-09

Mise en situation

Objectif

Suite à une sollicitation brève de $0,5 \text{ m s}^{-2}$, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les $0,5^\circ$.



Travail demandé

Question 1 Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans (0) galiléen s'exprime comme $Q_1 \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$.

Correction

(1) et (E) sont en liaison pivot d'axe (O, \vec{Y}_0) . On va donc réaliser un théorème du moment dynamique appliqué à (E) en O en projection sur \vec{Y}_0 .

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O, E/0)}$

Méthode 1 – En passant par le calcul de $\overrightarrow{\delta(O, 2/0)}$, $\overrightarrow{\delta(O, C/0)}$ et $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)}$

Le support 2 étant sans masse, on a $\overrightarrow{\delta(O, 2/0)} = \vec{0}$. La caméra et le contrepois étant considérés comme des masses ponctuelles, on a $\overrightarrow{\delta(G_C, C/0)} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\delta(G_{Cp}, Cp/0)} = \vec{0}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O, C/0)}$

On a $\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = \overrightarrow{\delta(G_C, C/0)} + \overrightarrow{OG_C} \wedge M_C \overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)}$

$\overrightarrow{V(G_C, C/0)} = \overrightarrow{V(G_C, C/1)} + \overrightarrow{V(G_C, 1/0)} = \overrightarrow{G_C O} \wedge \overrightarrow{\Omega(C/0)} + v(t)\vec{X}_0 = -L_C \vec{Z}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{Y}_2 + v(t)\vec{X}_0 = L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 + v(t)\vec{X}_0$.

De plus $\overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \ddot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t)\vec{X}_0$.

Au final, $\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = \overrightarrow{OG_C} \wedge M_C \overrightarrow{\Gamma(G_C, C/0)} = L_C \vec{Z}_2 \wedge M_C (L_C \dot{\varphi} \vec{X}_2 - L_C \dot{\varphi}^2 \vec{Z}_2 + a(t)\vec{X}_0)$

$\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = L_C M_C (L_C \ddot{\varphi} \vec{Y}_2 + a(t) \cos \varphi \vec{Y}_0)$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O, Cp/0)}$

$$\text{On a } \overrightarrow{\delta(O, Cp/0)} = \overrightarrow{\delta(G_{Cp}, Cp/0)} + \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \Gamma(G_{Cp}, C/0).$$

Calcul de $\Gamma(G_{Cp}, Cp/0)$

$$\text{De même, } V(G_{Cp}, Cp/0) = V(G_{Cp}, Cp/1) + V(G_{Cp}, 1/0) = \overrightarrow{G_{Cp}O} \wedge \overrightarrow{\Omega(Cp/0)} + v(t)\overrightarrow{X_0} = L_{Cp}\overrightarrow{Z_2} \wedge \dot{\varphi}\overrightarrow{Y_2} + v(t)\overrightarrow{X_0} = -L_{Cp}\dot{\varphi}\overrightarrow{X_2} + v(t)\overrightarrow{X_0}.$$

$$\text{De plus } \Gamma(G_{Cp}, Cp/0) = -L_{Cp}\ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2} + L_{Cp}\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Z_2} + a(t)\overrightarrow{X_0}.$$

$$\text{Au final, } \overrightarrow{\delta(O, Cp/0)} = \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp} \Gamma(G_{Cp}, Cp/0) = -L_{Cp}\overrightarrow{Z_2} \wedge M_{Cp} (-L_{Cp}\dot{\varphi}\overrightarrow{X_2} + L_{Cp}\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Z_2} + a(t)\overrightarrow{X_0})$$

$$\overrightarrow{\delta(O, C/0)} = -L_{Cp}M_{Cp} (-L_{Cp}\dot{\varphi}\overrightarrow{Y_2} + a(t)\cos\varphi\overrightarrow{Y_0})$$

$$\text{On a donc } \overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} = M_{Cp}L_{Cp}^2\ddot{\varphi} - M_{Cp}L_{Cp}a(t)\cos\varphi + M_C L_C^2\ddot{\varphi} + M_C L_C a(t)\cos\varphi$$

Méthode 2 – En passant par le calcul de $I_O(E)$

$$\text{On a } I_O(C) = M_C \begin{pmatrix} L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \text{ et } I_O(Cp) = M_{Cp} \begin{pmatrix} L_{Cp}^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_{Cp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \text{ et donc}$$

$$I_O(E) = \begin{pmatrix} M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

$$O \text{ est un point quelconque ; donc } \overrightarrow{\delta(O, E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} =$$

$$\overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \left[\frac{d\sigma(O, E/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(E/R_0)} \text{ et } \overrightarrow{\sigma(O, E/R_0)} = I_O(E) \cdot$$

$$\overrightarrow{\Omega(E/R_0)} + M \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V(O, E/R_0)}.$$

$$\text{De plus, } \overrightarrow{OG} = \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{Z_2}, \overrightarrow{V(O, E/R_0)} = v(t)\overrightarrow{X_0} \text{ et } \overrightarrow{V(G, E/R_0)} = v(t)\overrightarrow{X_0} + \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi}\overrightarrow{X_2}.$$

$$\text{On a donc, } \overrightarrow{\sigma(O, S/R_0)} = \dot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C + M_{Cp}) \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \overrightarrow{Z_2} \wedge v(t)\overrightarrow{X_0} = \dot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) v(t) \cos\varphi \overrightarrow{Y_0}.$$

$$\left[\frac{d\sigma(O, E/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \ddot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) (a(t) \cos\varphi - v(t) \dot{\varphi} \sin\varphi) \overrightarrow{Y_0}.$$

$$\overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(E/R_0)} = v(t)\overrightarrow{X_0} \wedge (M_C + M_{Cp}) \left(v(t)\overrightarrow{X_0} + \frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi}\overrightarrow{X_2} \right)$$

$$= (M_C + M_{Cp}) \left(\frac{M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}} \dot{\varphi} v(t) \sin\varphi \right) \overrightarrow{Y_2} = (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) \dot{\varphi} v(t) \sin\varphi \overrightarrow{Y_2}.$$

$$\text{Au final, } \overrightarrow{\delta(O, E/R_0)} = \ddot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) \overrightarrow{Y_2} + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos\varphi \overrightarrow{Y_0}$$

Bilan des actions mécaniques en O agissant sur E

$$\blacktriangleright \text{ Liaison pivot } \{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\} \text{ avec } \overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = 0.$$

$$\blacktriangleright \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C)\} \text{ avec } \overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \rightarrow C)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = (\overrightarrow{OG_C} \wedge -M_C g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} = (L_C \overrightarrow{Z_2} \wedge -M_C g \overrightarrow{Z_0}) \overrightarrow{Y_2} = L_C M_C g \sin\varphi \overrightarrow{Y_2}.$$

► $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow C_p)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, \text{pes} \rightarrow C_p) \cdot \overrightarrow{Y_2} = \left(-L_{Cp} \overrightarrow{Z_2} \wedge -M_{Cp} g \overrightarrow{Z_0} \right) \overrightarrow{Y_2} = -L_{Cp} M_{Cp} g \sin \varphi \overrightarrow{Y_2}$.

Théorème du moment dynamique en O en projection sur $\overrightarrow{Y_2}$

$$\ddot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) + (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos \varphi = L_C M_C g \sin \varphi - L_{Cp} M_{Cp} g \sin \varphi.$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} (M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2) + (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \sin \varphi = - (M_C L_C - M_{Cp} L_{Cp}) a(t) \cos \varphi.$$

On a donc : $Q_1 = M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \sin \varphi$, $Q_3(t) = (M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C) \cos \varphi$.

Question 2 Établir sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de m_c , m_{cp} , L_c , L_{cp} et g .

Correction

Dans les conditions précédentes, on a $Q_1 = M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \varphi$ et $Q_3(t) = (M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C)$.

L'équation de comportement devient donc $Q_1 \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \varphi = Q_3 a(t)$

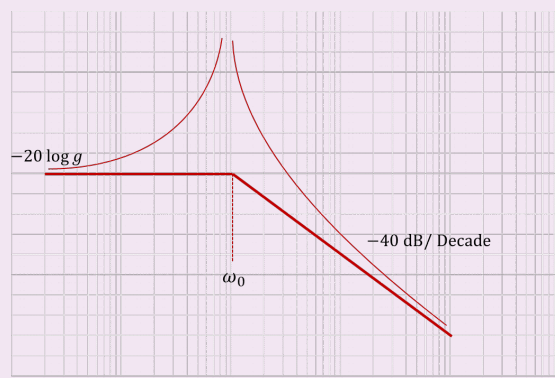
$$\Rightarrow Q_1 p^2 \Phi(p) + (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \Phi(p) = Q_3 A(p) \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{Q_3}{Q_1 p^2 + (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g}.$$

On a donc $\omega_0^2 = \frac{(L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g}{Q_1} = \frac{(L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g}{M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}$. Le gain K vaut

$$\frac{M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C}{(L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g} = \frac{1}{g}.$$

Question 3 Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain $G_{dB} = f(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$. Placer les caractéristiques remarquables.

Correction



Question 4 Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que $\omega_0 = 0,1 \omega_a$.

Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple (m_{cp}, L_{cp}) . En utilisant le comportement asymptotique en gain de G_{dB} , estimer numériquement l'amplitude $\Delta\varphi$ (en degrés) des oscillations de **(E)** selon l'axe (O, \vec{y}_0) .

Correction

On a $\omega_a = 10\omega_0$. Une décade après ω_0 , $G_{dB} = -20 \log 10 - 40 = -60$ dB. Une atténuation de -60 dB correspond à un gain de $10^{-\frac{60}{20}} = 0,001$. L'amplitude des oscillations sera donc de $0,001a_0 = 5 \times 10^{-4}$ rad soit $0,03^\circ$.

Éléments de correction

1. $Q_1 = M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2, \quad Q_2(t) = (L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g \sin \varphi, \quad Q_3(t) = (M_{Cp} L_{Cp} - M_C L_C) \cos \varphi.$
2. $\omega_0^2 = \frac{(L_{Cp} M_{Cp} - L_C M_C) g}{M_{Cp} L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}.$
3. .
4. $0,03^\circ.$
5. .

Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

Correction

On a $0,03^\circ < 0,5^\circ$. Le cahier des charges est vérifié au voisinage de $10\omega_0$.