

# TD 1

## Gyrolock ★ – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2022.  
Corrigé proposé par l'UPSTI.

### Effet gyroscopique et modélisation du stabilisateur

#### Objectif

Étudier les actions mécaniques créées par le système GyroLock, définir et régler la chaîne d'asservissement de l'étrier puis modéliser le comportement du stabilisateur grâce à une étude dynamique.

C1-05

C2-09

#### Étude de l'effet gyroscopique généré par le système GyroLock

**Question 1** Exprimer, dans la base  $\mathcal{B}_2$ , le moment cinétique au point  $G_3$  du solide (3) en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ , noté  $\vec{\sigma}(G_3, 3/0)$ .

#### Correction

**Au centre d'inertie** on a :  $\vec{\sigma}(G_3, 3/0) = \mathcal{I}(G_3, 3)\vec{\Omega}(3/0)$  avec par **composition des vitesses**  

$$\vec{\Omega}(3/0) = \underbrace{\vec{\Omega}(3/2)}_{\dot{\theta}_3 \vec{y}_2} + \underbrace{\vec{\Omega}(2/1)}_{\dot{\theta}_2 \vec{z}_2} + \underbrace{\vec{\Omega}(1/0)}_{\vec{0}}$$
 la vitesse de rotation du solide (3) par rapport à (0)  
 exprimée dans la base  $\mathcal{B}_2$ . Alors :  $\vec{\sigma}(G_3, 3/0) = B_3 \dot{\theta}_3 \vec{y}_2 + A_3 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2$ .

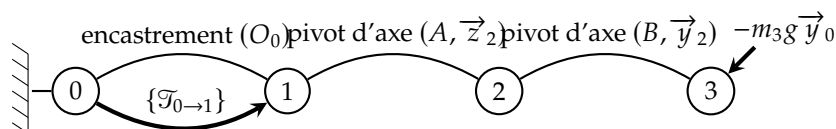
**Question 2** En déduire, dans la base  $\mathcal{B}_2$ , le moment dynamique au point  $G_3$  du solide (3) en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ , noté  $\vec{\delta}(G_3, 3/0)$ .

#### Correction

Toujours **au centre d'inertie** on a

$$\vec{\delta}(G_3, 3/0) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(G_3, 3/0)}{dt} \right|_0 = -B_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \vec{x}_2 + B_3 \ddot{\theta}_3 \vec{y}_2 + A_3 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2.$$

**Question 3** Après avoir clairement précisé le système isolé et le théorème utilisé, exprimer  $L_{01}$ ,  $M_{01}$  et  $N_{01}$  en fonction de  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  (et leurs dérivées temporelles),  $A_3$  et  $B_3$ .



#### Correction

Pour la clarté on propose le graphe des liaisons ci-dessus avec les différentes actions mécaniques qui s'exercent sur le système.

On isole le système  $\Sigma = \{1 + 2 + 3\}$  soumis à :

- l'action de (0) sur (1) en  $G_3$  :  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\}$  ;
- l'action du poids en  $G_3$  :  $-m_3 g \vec{y}_0$ .

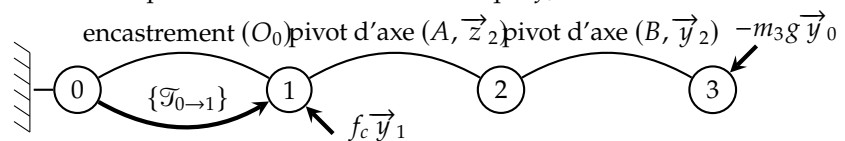
On applique le **théorème du moment dynamique au système  $\Sigma$  au point  $G_3$**  :

$$\vec{\delta}(G_3, \Sigma/0) = L_{01} \vec{x}_1 + M_{01} \vec{y}_1 + N_{01} \vec{z}_1$$

Or  $\vec{\delta}(G_3, \Sigma/0) = \vec{\delta}(G_3, 3/0)$  car on néglige les effets dynamiques de (1) et (2). Par conséquent :  $-B_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \vec{x}_2 + B_3 \ddot{\theta}_3 \vec{y}_2 + A_3 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 = L_{01} \vec{x}_1 + M_{01} \vec{y}_1 + N_{01} \vec{z}_1$ . Dans la base  $\mathcal{B}_1$  on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} L_{01}(t) = -B_3 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2(t)) - B_3 \ddot{\theta}_3 \sin(\theta_2) \\ M_{01}(t) = -B_3 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2(t)) + B_3 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_2) \\ N_{01}(t) = A_3 \ddot{\theta}_2(t) \end{cases}$$

**Question 4** En supposant que la toupie (3) tourne à vitesse constante par rapport à l'étrier (2), exprimer  $\dot{\theta}_2$  en fonction de  $K_3$ ,  $\theta_2$ ,  $f_c$  et  $L - L_{G_3}$  permettant de garantir  $L_{01} = 0$  et de compenser l'effet de l'effort cardiaque  $f_c$ .



#### Correction

Le nouveau graphe de liaison est donné ci-dessus.

On reprend la stratégie précédente mais on ajoute le moment en  $G_3$  provoqué par la résultante  $\vec{R}_{c \rightarrow 1}$  en  $P$  :  $\vec{M}(G_3, \vec{R}_{c \rightarrow 1}) = \vec{G_3P} \wedge f_c \vec{y}_1 = (L - L_{G_3}) f_c \vec{x}_1$ . L'équation du mouvement précédente écrite dans la base  $\mathcal{B}_1$  donne alors le système d'équations :

$$\begin{cases} L_{01}(t) + (L - L_{G_3}) f_c = -K_3 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2(t)) \\ M_{01}(t) = -K_3 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2(t)) \\ N_{01}(t) = A_3 \ddot{\theta}_2(t) \end{cases}$$

En particulier si on veut  $L_{01} = 0$  alors  $\dot{\theta}_2 = -\frac{(L - L_{G_3}) f_c}{K_3 \cos(\theta_2(t))}$  en faisant attention à avoir  $|\theta_2| < \frac{\pi}{2}$ .

**Question 5** Donner une condition sur l'angle  $\theta_2$  et sur l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}_2$  afin que les moments  $M_{01}$  et  $N_{01}$  soient faibles.

#### Correction

D'après le système d'équations de la question précédente :

- si on veut  $N_{01} \rightarrow 0$  alors il faut  $\ddot{\theta}_2 \rightarrow 0$  (accélération angulaire très faible);
- si on veut  $M_{01} \rightarrow 0$  alors en prenant  $\theta_2 \ll 1 \text{ rad}$  on a une chance d'y arriver.

**Remarque :** d'après la question 8, si on prend  $\omega_3$  très grand alors  $\dot{\theta}_2$  est potentiellement très petit ce qui aide à « écraser »  $M_{01}$ .

**Question 6** Vérifier que la condition de réactivité énoncée ci-dessus est respectée. Justifier que la fonction de transfert de l'étrier (2)  $H_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{\Omega_{c2}(p)}$  peut alors être approchée par un gain statique  $K_2$  de valeur à préciser. Il faut s'assurer que la position  $\theta_2$  de l'étrier (2) ne s'éloigne pas trop de sa position de référence  $\theta_2^* = 0$ . Le non-respect de cette condition, appelé dérive de l'étrier, génère un moment parasite  $M_{01}$  responsable d'un déplacement du point  $P$  selon  $\vec{x}_1$ .

### Correction

La période du signal perturbateur est  $T_c = \frac{1}{f_c}$ , donc la demi période est  $\frac{T_c}{2} = \frac{1}{2f_c} = 0,33s$ .

Si on veut respecter la condition de réactivité il faut donc que le temps de réponse à 5% soit inférieur à 0,033s.

On lit sur le graphe de droite en figure 7 que la valeur finale est atteinte avant 0,03s donc le temps de réponse à 5% est d'autant plus petit et **la condition de réactivité est respectée**.

Si on considère le système très réactif, comme celui-ci est précis on peut supposer que

$$H_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{\Omega_{c2}(p)} = K_2 = 1 .$$