



## TD 1

# Système de freinage d'un TGV DUPLEX– Corrigé

Concours Centrale Supélec PSI 2006 –  
Ressources UPSTI



## Mise en situation

## Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

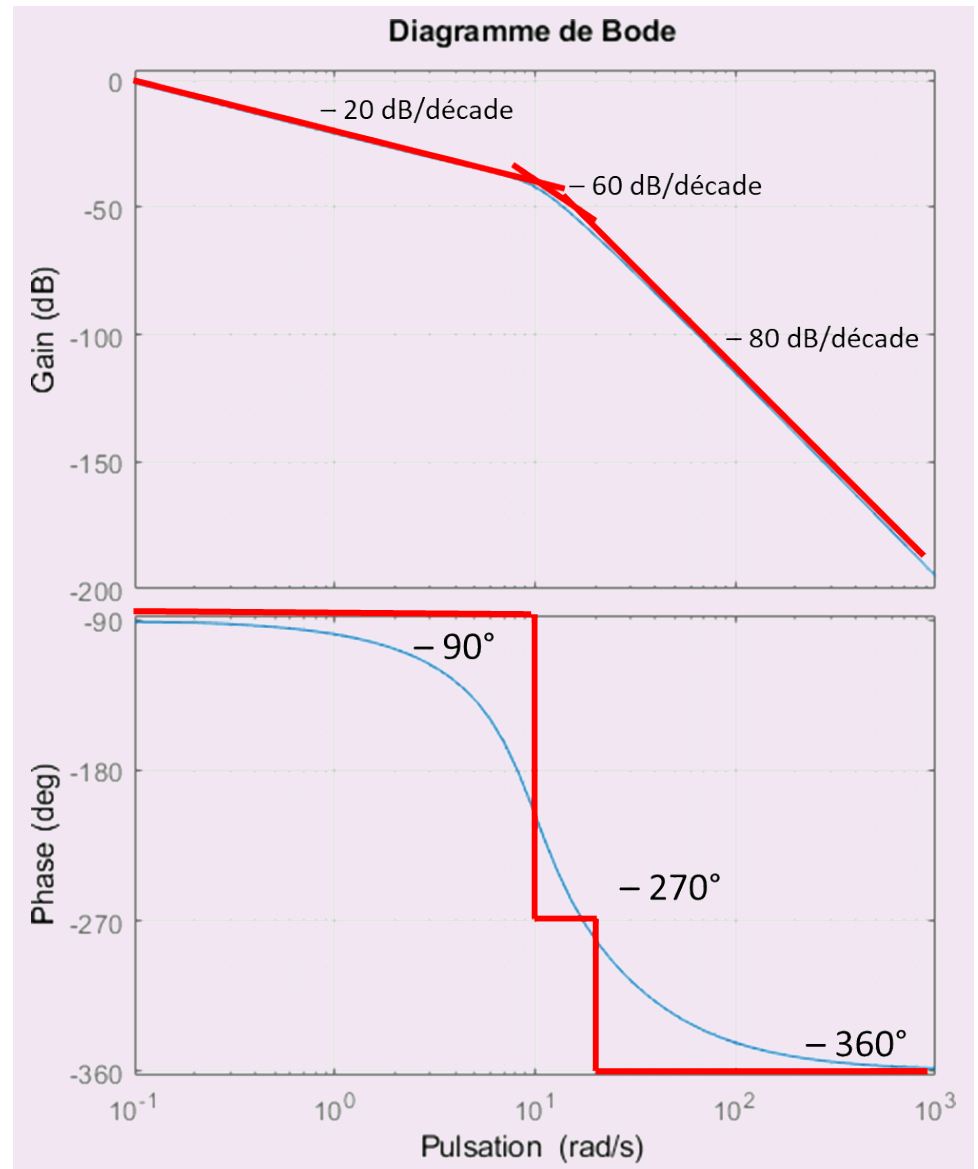
### Correction

On a pour  $H_1(p)$ ,  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,01 \Leftrightarrow \omega_0 = 10$  et  $2\frac{\xi}{\omega_0} = 0,1$  soit  $\xi = 0,1 \times 10/2 = 0,5$ . Les pulsations caractéristiques de la FTBO sont donc  $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$  et  $1/0,05 = 20 \text{ rad s}^{-1}$ . Pour tracer un diagramme de Bode avec un intégrateur, il est nécessaire de définir un point pour définir la « hauteur » du tracé. Pour cela on prend un point pour lequel seul l'intégrateur et les constantes ont de l'effet. Ainsi, pour  $\omega = 0,1 \text{ rad s}^{-1}$ , on a  $FTBO(p) \simeq \frac{2000 \times 45 \times 10^{-6}}{p}$ .

On a donc  $20 \log 0,09 - 20 \log 0,1 \simeq -0,92 \text{ dB}$ .

On peut dresser le tableau de variations de la FTBO puis tracer les asymptotes.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega = 10$	$\omega = 20$	$\omega \rightarrow \infty$
$\ H_1(j\omega)\ _{dB}$	$20 \log 2000$	$-40 \text{ dB/decade}$	$-40 \text{ dB/decade}$	
$\ H_2(j\omega)\ _{dB}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-20 \text{ dB/decade}$	
$\ M(j\omega)\ _{dB}$	0	0	$-20 \text{ dB/decade}$	
$\ FTBO(j\omega)\ _{dB}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-60 \text{ dB/decade}$	$-80 \text{ dB/decade}$	
$\text{Arg}(FTBO(j\omega))$	$-90^\circ$	$-270^\circ$	$-360^\circ$	



### Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_{ip}} \right).$$

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

#### Méthode – Marge de phase

Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0$  dB. On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .

**Correction**

La pulsation de coupure souhaitée est  $\omega_c \approx 1 \text{ rad s}^{-1}$ . On cherche donc  $K_r$  et  $T_i$  tels que  $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ) = 60^\circ$ .

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \underbrace{\frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}}_{\rightarrow -5,7^\circ \text{ qd } \omega=\omega_c} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + 0,05p}}_{\rightarrow -2,8^\circ \text{ qd } \omega=\omega_c} \cdot \underbrace{K_r}_{\rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \cdot \underbrace{\frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}}_{\rightarrow -90^\circ} \right] =$$

$$\arg \left[ \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \right] - 98,5$$

**Remarque**

Ci-dessus, ce sont les **arguments** que l'on évalue lorsque  $\omega = \omega_c$ . L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] - 98,5.$$

Pour respecter la marge souhaitée, il est donc nécessaire que  $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180) \geq 60$

$$\text{Soit } \arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] - 98,5 + 180 \geq 60 \text{ et } \arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ.$$

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Correction**

On en déduit que pour  $\omega = \omega_c = 1$ ,  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ \Leftrightarrow \arctan(T_i \omega) - 90 \geq -21,5^\circ$   
 $\Leftrightarrow \arctan(T_i \omega) \geq 68,5^\circ$  et donc  $\Rightarrow T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$ .

**Attention** : à ce stade, la marge de phase serait de  $60^\circ$  **SI** la pulsation de coupure était de  $1 \text{ rad s}^{-1}$  ce qui n'est pas encore le cas pour le moment.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode –**

Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0$ .

**Correction**

En raisonnant graphiquement à l'aide du diagramme en boucle ouverte non corrigé, on lit que le gain est d'environ  $-20 \text{ dB}$  lorsque  $\omega = 1$ . La fonction de transfert du correcteur est

$$C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_r \frac{T_i p + 1}{T_i p}. \text{ Le gain dB du correcteur doit donc être de } 20 \text{ dB lorsque}$$

$$\omega = 1 : 20 \log K_r + 20 \log \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} - 20 \log T_i \omega = 20 \Leftrightarrow \log K_r + \log \sqrt{T_i^2 + 1} - \log T_i = 1$$

$$\Leftrightarrow \log K_r = 1 - \log \sqrt{T_i^2 + 1} + \log T_i.$$

On a donc  $K_r = 9,3$ .

$$\begin{aligned}
& \text{Analytiquement (à vérifier...) } 20 \log ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0 \Rightarrow ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 1. \\
& ||\text{FTBO}(j\omega)|| = \left\| \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\
& = \left\| \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \frac{1 + T_i p}{T_i p} \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\
& = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2} \left\| \frac{1}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \frac{1}{1 + 0,05p} \right\| = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot \\
& 10^{-3} \frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + 0,05^2 \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,01^2 \omega^2)^2 + 0,1^2 \omega^2}} \\
& = \frac{K_r}{T_i} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1 + T_i^2}}{\sqrt{1 + 0,05^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,01^2)^2 + 0,1^2}}
\end{aligned}$$

**Question 5** Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

#### Méthode –

Soit  $\omega_\varphi$  la pulsation telle que  $\varphi(\omega_\varphi) = -180^\circ$ . La marge de gain s'exprime alors par  $MG = -20 \log ||H(j\omega_\varphi)||$ .

#### Correction

**Approche analytique** On résout  $\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = -180^\circ$

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right]$$

**Approche graphique**

### Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

**Question 6** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

#### Correction

**Question 7** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

#### Correction

- ▶  $K_f = 1$  : lorsque  $\omega$  tend vers 0, le gain tend vers 0;
- ▶  $\omega_0 = 0,5$  : valeur de la pulsation de résonance;
- ▶  $\tau_1 = \frac{1}{0,9} = 1,11 \text{ s}$ ;
- ▶  $\tau_2 = \frac{1}{7} = 0,14 \text{ s}$ ;
- ▶  $\xi < 0,7$  (résonance).

**Question 8** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

#### Correction

La pulsation propre  $\omega_0$  est relativement loin de la bande passante, en conséquence sa dynamique sera rapide vis-à-vis du zéro et du pôle double (pôles dominants). On adopte donc :

$$F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{(1 + 3,3 p)}{(1 + 1,66 p)^2}$$

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$ .

**Question 9** Calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $v_c(t) = v_{c0} u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

#### Correction

##### Calcul du temps du 1<sup>er</sup> maximum

Le temps du 1<sup>er</sup> maximum est donné par  $f(t_m) = 0$ , soit pour :

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t_m + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} = 0$$

On obtient donc :

$$t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$$

L'application numérique avec les valeurs adoptées conduit à  $t_m = 3,3$  s.

##### Calcul du dépassement

La réponse indicielle peut être obtenue par intégration de la réponse impulsionnelle, le dépassement étant donné par la valeur de la sortie pour  $t = t_m$  :

$$v(t_m) = \int_0^{t_m} f(t) dt = \int_0^{t_m} (a v(t) + b \dot{v}(t)) dt = a \int_0^{t_m} v(t) dt + b [v(t)]_0^{t_m}$$

Avec  $v(t) = t e^{-t/\tau_2}$  dont l'intégration peut être effectuée facilement par parties :

$$\int_0^{t_m} t e^{-t/\tau_2} dt = \left[ -\tau_2 t e^{-t/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t/\tau_2} \right]_0^{t_m} = -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2$$

$$v(t_m) = \frac{1}{\tau_2^2} \left[ -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2 \right] + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} t_m e^{-t_m/\tau_2}$$

Pour  $t = t_m$  on obtient  $v(t_m) = 1,13$ , soit un dépassement de 13%.

**Question 10** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la

consigne de glissement relatif.

#### Correction

- Le temps du 1<sup>er</sup> maximum est inférieur à 3,5 s. et le dépassement inférieur à 20% ce qui vérifie le cahier des charges.
- Le régulateur comportant une action intégrale, l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une consigne constante.

### Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

**Question 11** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{\text{ext}}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous explicitez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $v_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right].$$

#### Correction

On a directement  $F_2(p) = -\frac{H_2(p)}{1 + H_2(p)M(p)C(p)H_1(p)}$ .

On peut alors déterminer le module et on a  $\|F_2(j\omega)\| = \left\| \frac{H_2(j\omega)}{1 + H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|$ .

Dans ces conditions :

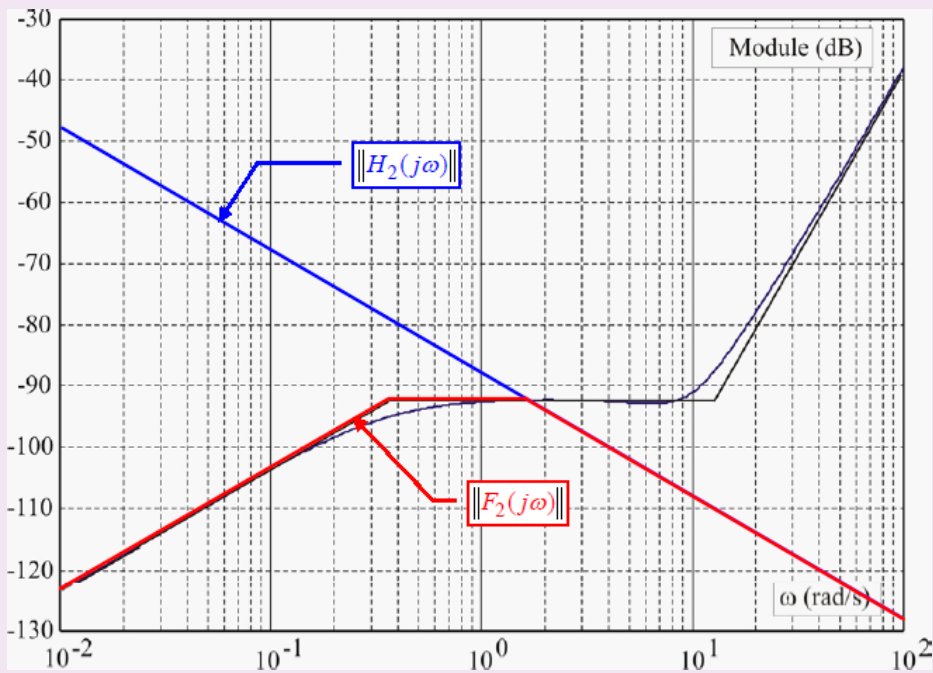
- si  $\|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\| \gg 1$  alors  $\|F_2(j\omega)\| \approx \left\| \frac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\| \approx \left\| \frac{1}{M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|$ ;
- si  $\|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\| < 1$  alors  $\|F_2(j\omega)\| \approx \|H_2(j\omega)\|$ .

On peut en conclure que  $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$ .

**Question 12** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|}$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $\|H_2(j\omega)\|$ .

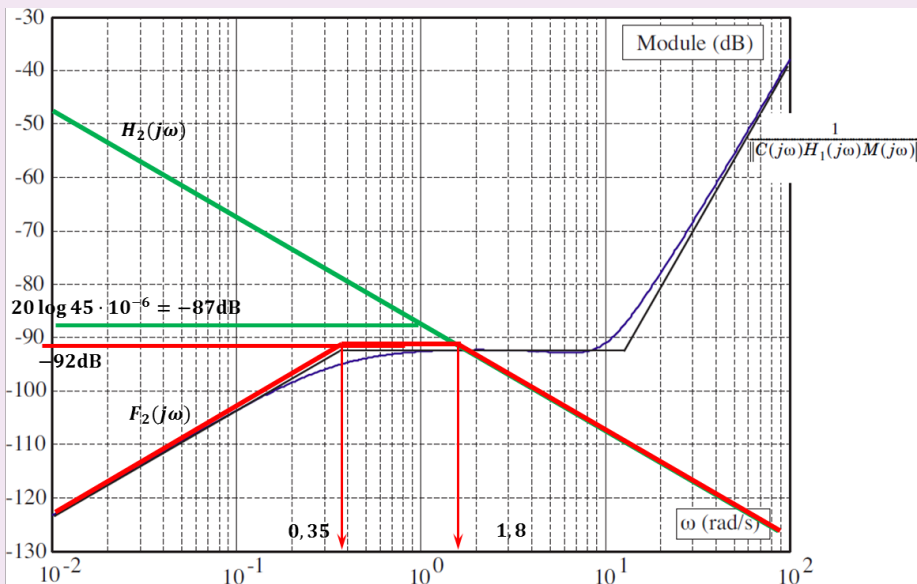


## Correction



**Question 13** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $\|F_2(j\omega)\|$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

## Correction



En analysant les brisures de  $F_2$ , on peut proposer la fonction de transfert suivante :  $F_2 = \frac{Kp}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$  avec  $\tau_1 = \frac{1}{0,35} \approx 2,9\text{s}$ ,  $\tau_2 = \frac{1}{1,8} \approx 0,6\text{s}$ . Avec cette proposition, en basse fréquence, seul le dérivateur existe, on a donc  $20 \log K\omega = 20 \log 0,01K = -123$  soit  $K = 100 \times 10^{-123/20} \approx 7 \cdot 10^{-5}$ .

$$\text{Au final, } F_2 = -\frac{7 \cdot 10^{-5} p}{(1 + 2,9p)(1 + 0,6p)}.$$

**Question 14** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous

la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

#### Correction

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux pôles :

$$\begin{cases} p_1 = -0,35 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

Le pôle  $p_2$  étant caractérisé par une dynamique relativement rapide par rapport à celle de  $p_1$ , on va pouvoir le négliger pour l'étude de la réponse temporelle. Soit la fonction approchée :

$$F_2(p) = -\frac{\frac{p}{12100}}{(1 + 2,8p)}$$

**Question 15** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{\text{ext}} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

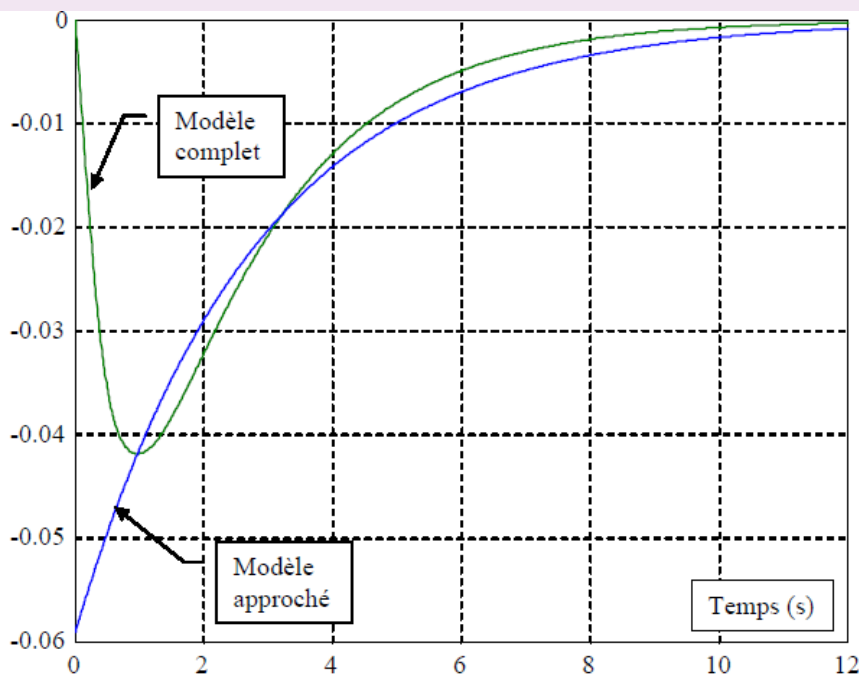
#### Correction

La réponse à un échelon de perturbation est donnée sur la figure suivante, c'est la réponse typique d'une fonction du 1<sup>er</sup> ordre en partant d'une condition non nulle ( $v_1 = 0,05$ ) avec une entrée nulle. Le temps de réponse est alors de  $t_r = 3T = 8,4 \text{ s}$ .

**Question 16** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).



## Correction



Calcul exact du temps de réponse

$$v_1(t_r) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t_r/T} = -0,05 \cdot \frac{K_2}{T} F_0 \Rightarrow t_r = T \cdot \ln(1/0,05) = 3T$$

## Retour sur le cahier des charges

**Question 17** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

## Correction

- Le temps de réponse de 8,4 s. est inférieur au temps de réponse de 9 s. demandé. En conséquence on peut conclure que le cahier des charges est satisfait au regard de cette contrainte.
- Le régulateur comportant une action intégrale (donc avant le point d'entrée de la perturbation) l'erreur statique est nulle comme montré sur la réponse temporelle.