Mouvement RR 3D ★★

C2-08

C2-09

Question 1 Exprimer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(1/0)\}$ en B.

Par définition, $\{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(B,1/0)} \end{array} \right\}_B$.

Calculons $\overrightarrow{R_d(1/0)}$

$\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1,1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$

Calcul de $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ **:** $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$ **:** $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,1/0)}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}$.

Au final, $\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1\left(R\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}\right)$.

Calculons $\overrightarrow{\delta(B,1/0)}$ B est le centre d'inertie du solide 1; donc d'une part, $\overrightarrow{\delta(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}\right]_{\mathcal{R}_0}$.

D'autre part, $\overrightarrow{\sigma(B,1/0)} = I_B(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} = C_1\dot{\theta}\overrightarrow{k_0}$.

Par suite, $\overrightarrow{\delta(B,1/0)} = C_1\ddot{\theta}\overrightarrow{k_0}$.

Au final, $\{\mathcal{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_1\left(R\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}\right) \\ C_1\ddot{\theta}\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_B$.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

Tout d'abord, $\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)} = \overrightarrow{\delta(A,1/0)} + \overrightarrow{\delta(A,2/0)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A,1/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$ **– Méthode 1**

$\overrightarrow{\delta(A,1/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \left(\overrightarrow{\delta(B,1/0)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_d(1/0)}\right) \cdot \overrightarrow{k_0} = \left(C_1\ddot{\theta}\overrightarrow{k_0} + R\overrightarrow{i_1} \wedge m_1\left(R\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}\right)\right) \cdot \overrightarrow{k_0} = C_1\ddot{\theta} + m_1R^2\ddot{\theta}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A,2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$ **– Méthode 1**

A est un point fixe. On a donc $\overrightarrow{\delta(A,2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(A,2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0} \cdot \overrightarrow{k_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(A,2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}\right]_{\mathcal{R}_0} - \underbrace{\overrightarrow{\sigma(A,2/0)} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_0}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}$.

A est un point fixe. On a donc $\overrightarrow{\sigma(A,2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \left(I_A(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)}\right) \cdot \overrightarrow{k_0}$

$I_A(2) = I_{G_2}(2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2R^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$ et $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_2} = \dot{\theta}\left(\cos\varphi\overrightarrow{k_2} + \sin\varphi\overrightarrow{j_2}\right) + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_2}$.

On a donc $\overrightarrow{\sigma(A,2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 + m_2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 m_2R^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\theta}\cos\varphi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} A_2\dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\sin\varphi\left(B_2 + m_2R^2\right) \\ \dot{\theta}\cos\varphi\left(C_2 + m_2R^2\right) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$.

De plus $\overrightarrow{k_1} = \cos\varphi\overrightarrow{k_2} + \sin\varphi\overrightarrow{j_2}$. On a alors $\overrightarrow{\sigma(A,2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \dot{\theta}\sin^2\varphi\left(B_2 + m_2R^2\right) + \dot{\theta}\cos^2\varphi\left(C_2 + m_2R^2\right)$.

Enfin, $\overrightarrow{\delta(A,2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \left(B_2 + m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right) + \left(C_2 + m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\cos^2\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\right.$ c

Conclusion

$\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0} = C_1\ddot{\theta} + m_1R^2\ddot{\theta} + \left(B_2 + m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right) + \left(C_2 + m_2R^2\right)\left(\ddot{\theta}\right.$ cos