TD 1
Asservissement par traitement d'image d'une plateforme Hexapode – Corrigé

Concours Centrale Supelec PSI 2016.

Mise en situation

Analyse d'une structure mono-boucle

C1-02

C2-04

Question 1 La figure en toute fin de document montre le diagramme de Bode de la fonction $H(p)$. Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant $C_1(p) = 1$).

Correction

La fonction de transfert de la FTBO non corrigée est donc $F_{\text{BO}}(p) = H(p)e^{-\tau p}$.
On note $G_{\text{dB}}(\omega)$ le gain de la fonction de transfert et $\varphi(\omega)$ la phase.
$e^{-\tau j\omega}$ est un nombre complexe de gain 1 et de phase $-\tau\omega = -0,04\omega$ (en rad). En degrés, le retard ajoute un déphasage de $-0,04\omega\dfrac{180}{\pi}$. Ainsi :

- pour $\omega = 1\,\text{rad/s}$, la phase est baissée de 2°,
- pour $\omega = 10\,\text{rad/s}$, la phase est baissée de 20°,
- pour $\omega = 50\,\text{rad/s}$, la phase est baissée de 100°,
- pour $\omega = 100\,\text{rad/s}$, la phase est baissée de 220°...

Ce qui permet de modifier le diagramme de bode de la phase.

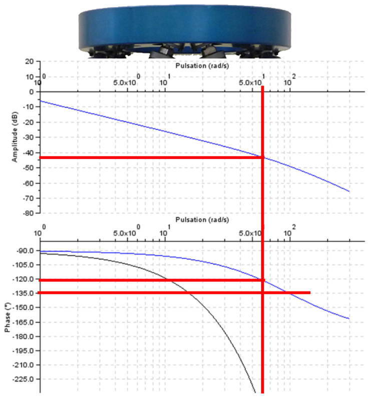

Figure 1 – FTBO retardée.

Question 2 Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur $C_1(j\omega)$ doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur τ ;
- en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral $C_1(p) = K_1\left(1 + \dfrac{1}{T_{i1}p}\right)$, justifier qu'un correcteur de ce type :
  - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure ;
  - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaine de mesure.

Correction

D'après le cahier des charges :

- pulsation de coupure ω_c à 0 dB en boucle ouverte $\omega_c = 60\,\text{rad s}^{-1}$;
- marge de phase $\Delta\varphi \geq 45°$.

Pour le système non retardé, le correcteur PI permettra de remonter le gain de 45 dB afin d'obtenir la pulsation de coupire souhaitée. En réglant T_i tel que $1/T_i = 60/10$, on pourra conserver une marge de phase de 55 à 60°ce qui est compatible avec le cahier des charges (ou la descebdre à 45°en affinant la valeur de T_i.
Pour le systèmer retardé, le correcteur PI permettra de régler la pulsation de coupure, mais la phase est trop basse pour espérer la corriger ainsi.

Structure de commande adaptée à un système avec retard

Question 3 En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral $C(p) = K\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)$ permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- déterminer la condition en phase, soit $\arg(C(j\omega))$, que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale T_i ;
- pour la valeur de T_i obtenue, déterminer alors la valeur du gain K permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

Correction

Le système non corrigé a une marge de phase de 60°. On veut que la pulsation de coupure soit de 60 rad/s.

On cherche donc T_i, tel que $\arg\left(K\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right) = -15°$ pour 60 rad/s. Soit $\arctan(60T_i) - 90 = -15$ soit $T_i = \dfrac{\tan 75}{60} \simeq 0{,}062$ s.

De plus pour que la pulsation de coupure soit à 60 rad/s, il faut que $\left|K\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right| = 10^{\frac{45}{20}}$ pour 60 rad/s.

On a donc $K\sqrt{T_i^2\omega^2+1} = 60T_i \times 10^{\frac{45}{20}}$ et $K = \dfrac{0,062\times 60\times 10^{\frac{45}{20}}}{\sqrt{0,062^2\times 60^2+1}} = 171$.

Question 4 Pour une consigne nulle $L^*(t)$, une perturbation en sortie nulle $d(t)=0$ et un échelon de perturbation en entrée $f_u(t) = F_0 h(t)$ où h(t) est l'échelon d'Heaviside :

- déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a)) ;
- compte tenu de la forme de $H(p)$, en déduire alors le comportement de la grandeur $x(t)$ lorsque t tend vers l'infini ;
- au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

Correction

Pour le schéma a, on a $U(p) = -L^d(p)e^{-\tau p}\times\dfrac{C(p)}{1+C(p)H(p)\left(1-e^{\tau p}\right)}$ et $L^d(p) = H(p)\left(U(p)+F_u(p)\right)$. On a donc $U(p) = -H(p)\left(U(p)+F_u(p)\right)e^{-\tau p}\times\dfrac{C(p)}{1+C(p)H(p)\left(1-e^{\tau p}\right)}$.

$\Rightarrow U(p)\left(1+\dfrac{C(p)H(p)e^{-\tau p}}{1+C(p)H(p)\left(1-e^{\tau p}\right)}\right) = -\dfrac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1+C(p)H(p)\left(1-e^{\tau p}\right)}$

$\Rightarrow U(p)\dfrac{1+C(p)H(p)\left(1-e^{\tau p}\right)+C(p)H(p)e^{-\tau p}}{1+C(p)H(p)\left(1-e^{\tau p}\right)} = -\dfrac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1+C(p)H(p)\left(1-e^{\tau p}\right)}$

$\Rightarrow U(p) = -\dfrac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1+C(p)H(p)\left(1-e^{\tau p}\right)+C(p)H(p)e^{-\tau p}}$

$\Rightarrow U(p) = -\dfrac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1+C(p)H(p)}$

On a alors, $\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{p\to 0} -p\dfrac{C(p)H(p)F(p)e^{-\tau p}}{1+C(p)H(p)}$

$$= \lim_{p\to 0} -\dfrac{K\dfrac{1+T_i p}{T_i p}\dfrac{0,5}{p\left(1+0,01p\right)}F_0 e^{-\tau p}}{1+K\dfrac{1+T_i p}{T_i p}\dfrac{0,5}{p\left(1+0,01p\right)}} = \lim_{p\to 0} -\dfrac{0,5K\left(1+T_i p\right)F_0 e^{-\tau p}}{T_i p^2\left(1+0,01p\right)+0,5K\left(1+T_i p\right)} = -F_0$$

Le signal de commande sera ensuite intégré par la fonction de transfert $H(p)$. $X(p)$ divergera donc. La commande n'est donc pas stable.

Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Question 5 En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur $L^m(t)$ en régime permanent, soit $\lim_{t\to\infty} L^{m*}(t)$, en réponse à une perturbation $d(t)$ en échelon $d(t) = D_0 h(t)$. Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur $R_e(p)$ selon le schéma de la figure 3(a) reste stable du point vue interne.

Correction

On a $L^m(p) = -L^d(p)e^{-\tau p}\dfrac{C_2(p)}{1+C_2(p)\left(1-e^{-\tau p}\right)T(p)}T(p)$ et $L^d(p) = L^m(p)+D(p)$. Ainsi,

$$L^m(p) = -\left(L^m(p)+D(p)\right)e^{-\tau p}\dfrac{C_2(p)}{1+C_2(p)\left(1-e^{-\tau p}\right)T(p)}T(p)$$

$$\Rightarrow L^m(p)\left(1+\dfrac{C_2(p)T(p)e^{-\tau p}}{1+C_2(p)\left(1-e^{-\tau p}\right)T(p)}\right) = -\dfrac{C_2(p)D(p)T(p)e^{-\tau p}}{1+C_2(p)\left(1-e^{-\tau p}\right)T(p)}$$

$$\Rightarrow L^m(p)\left(1+C_2(p)\left(1-e^{-\tau p}\right)T(p)+C_2(p)T(p)e^{-\tau p}\right) = -C_2(p)D(p)T(p)e^{-\tau p}$$

$$\Rightarrow L^m(p) = -\dfrac{C_2(p)D(p)T(p)e^{-\tau p}}{1+C_2(p)T(p)}$$

On a donc $L^m(p) = -\dfrac{K_2\left(1+\dfrac{1}{T_{i2}p}\right)\dfrac{1}{\left(1+0,05p\right)^2}e^{-\tau p}}{1+K_2\left(1+\dfrac{1}{T_{i2}p}\right)\dfrac{1}{\left(1+0,05p\right)^2}}D(p)$

$$= -\dfrac{K_2\dfrac{T_{i2}p+1}{T_{i2}p}\dfrac{1}{\left(1+0,05p\right)^2}e^{-\tau p}}{1+K_2\dfrac{T_{i2}p+1}{T_{i2}p}\dfrac{1}{\left(1+0,05p\right)^2}}D(p) = -\dfrac{K_2\left(T_{i2}p+1\right)e^{-\tau p}}{T_{i2}p\left(1+0,05p\right)^2+K_2\left(T_{i2}p+1\right)}D(p)$$

On a alors, $\lim_{t\to\infty} L^m(t) = \lim_{p\to 0} pL^m(p) = -D_0\dfrac{K_2}{K_2} = -D_0$.

On a alors $L^d(t) = D_0 - D_0 = 0$.

Retour sur le cahier des charges

Question 6 Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.

Correction

D'après le cahier des charges :

- temps de réponse vis-à-vis de la consigne doit être inférieur à 50 ms, le temps de réponse à 5% mesuré est de $0,06-0,02 = 0,04\,\text{s} < 0,05\,\text{s}$. Critère validé ;
- temps de réponse vis-à-vis de la perturbation doit être inférieur à 100 ms. Le temps de réponse à 5% mesuré vis-à-vis de la perturbation est de 80 ms. CDC respecté.