

# TD 1

## Gyrolock ★ – Sujet

Centrale Supélec PSI 2022.

### Effet gyroscopique et modélisation du stabilisateur

#### Objectif

Étudier les actions mécaniques créées par le système GyroLock, définir et régler la chaîne d'asservissement de l'étrier puis modéliser le comportement du stabilisateur grâce à une étude dynamique.

C1-05

C2-09

#### Étude de l'effet gyroscopique généré par le système GyroLock

Pour déterminer les actions mécaniques créées par le système GyroLock sur le stabilisateur (1), un modèle simplifié du mécanisme, donné figure 1, est utilisé. Ce modèle simplifié, dans lequel la liaison entre le stabilisateur (1) et la table d'opération (0) est modélisée par un encastrement, permet :

- ▶ d'étudier l'effet gyroscopique  $c_x(t)$  créé par le système GyroLock permettant de compenser l'effet de l'effort cardiaque, sans prendre en compte le mouvement du stabilisateur (1);
- ▶ de déterminer les conditions d'utilisation du système GyroLock afin de minimiser les autres actions mécaniques créées et considérées comme indésirables.

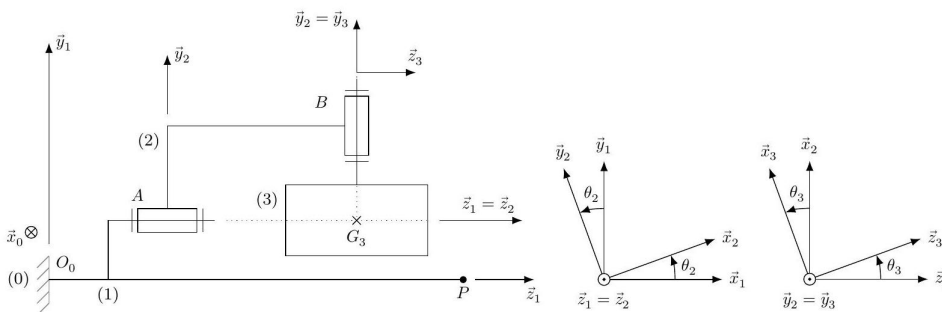


FIGURE 1 – Schéma cinématique simplifié du mécanisme (représenté pour  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ ) et figures de changement de base

Le système GyroLock, dont la modélisation est donnée figure 1, est composé de trois solides :

- ▶ le support, relié au stabilisateur (1) de repère associé  $\mathcal{R}_1 (O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , en liaison encastrement au point  $O_0$  avec la table d'opération (0);
- ▶ l'étrier (2) de repère associé  $\mathcal{R}_2 (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  tel que  $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ ;
- ▶ la toupie (3) de repère associé  $\mathcal{R}_3 (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  tel que  $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ .

Pour la modélisation des actions mécaniques extérieures, les hypothèses suivantes sont adoptées :

- ▶ les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques;

Toutes les liaisons sont supposées parfaites et les caractéristiques inertielles des solides sont les suivantes :

- ▶ étrier (2) : masse et inertie négligeables;
- ▶ toupie (3) : masse  $m_3$ , centre d'inertie  $G_3$  tel que  $\vec{O_0G_3} = L_{G_3}\vec{z}_1 + H_{G_3}\vec{y}_1$ . L'axe  $(G_3, \vec{y}_3 = \vec{y}_2)$  étant un axe de symétrie de révolution de la toupie (3), sa matrice d'inertie au point  $G_3$  s'exprime dans la base  $\mathcal{B}_2$  sous la forme  $\mathcal{I}(G_3, 3) =$

$$\begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

- l'action mécanique transmise par la liaison encastrement entre les solides (0) et (1) est modélisée au point  $G_3$  par  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01}\vec{x}_1 + Y_{01}\vec{y}_1 + Z_{01}\vec{z}_1 \\ L_{01}\vec{x}_1 + M_{01}\vec{y}_1 + N_{01}\vec{z}_1 \end{array} \right\}_{G_3}$ .

Le référentiel  $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à la table d'opération (0) est galiléen.

**Question 1** Exprimer, dans la base  $\mathcal{B}_2$ , le moment cinétique au point  $G_3$  du solide (3) en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ , noté  $\vec{\sigma} (G_3, 3/0)$ .

**Question 2** En déduire, dans la base  $\mathcal{B}_2$ , le moment dynamique au point  $G_3$  du solide (3) en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ , noté  $\vec{\delta} (G_3, 3/0)$ .

**Question 3** Après avoir clairement précisé le système isolé et le théorème utilisé, exprimer  $L_{01}$ ,  $M_{01}$  et  $N_{01}$  en fonction de  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  (et leurs dérivées temporelles),  $A_3$  et  $B_3$ .

Lorsque la toupie (3) tourne avec une vitesse constante  $\omega_3$  par rapport à l'étrier (2), l'expression des moments  $L_{01}$ ,  $M_{01}$  et  $N_{01}$  est la suivante : 
$$\begin{cases} L_{01}(t) = -c_x(t) \cos \theta_2(t) \\ M_{01}(t) = -c_x(t) \sin \theta_2(t) \\ N_{01}(t) = A_3 \ddot{\theta}_2(t) \end{cases}$$

où  $c_x(t) = B_3 \omega_3 \dot{\theta}_2(t) = K_3 \dot{\theta}_2(t)$  correspond à l'effet gyroscopique.

L'action du cœur sur le stabilisateur est modélisée par un glisseur de résultante  $\vec{R}_{c \rightarrow 1} = f_c \vec{y}_1$  au point  $P$  tel que  $\vec{O_0 P} = L \vec{z}_1$ .

Les moments  $L_{01}$ ,  $M_{01}$  et  $N_{01}$  doivent rester faibles afin de limiter les déformations de l'attache reconfigurable liant le stabilisateur (1) à la table d'opération (0).

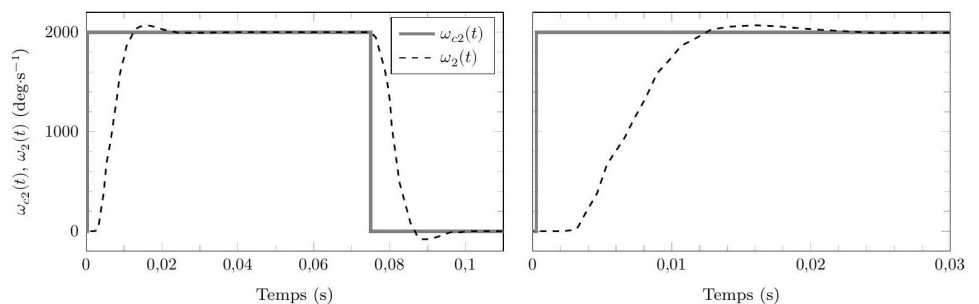
**Question 4** En supposant que la toupie (3) tourne à vitesse constante par rapport à l'étrier (2), exprimer  $\dot{\theta}_2$  en fonction de  $K_3$ ,  $\theta_2$ ,  $f_c$  et  $L - L_{G_3}$  permettant de garantir  $L_{01} = 0$  et de compenser l'effet de l'effort cardiaque  $f_c$ .

**Question 5** Donner une condition sur l'angle  $\theta_2$  et sur l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}_2$  afin que les moments  $M_{01}$  et  $N_{01}$  soient faibles.

L'étrier (2) doit être piloté en vitesse de rotation pour que l'effet gyroscopique  $c_x(t) = K_3 \dot{\theta}_2(t)$  compense l'effet de l'effort cardiaque. La campagne expérimentale présentée en partie I a permis de déterminer que la fréquence fondamentale de l'effort cardiaque  $f_c(t)$  est de 1,5 Hz.

La réponse de l'étrier (2) sera considérée comme suffisamment réactive si le temps de réponse à 5% de la vitesse  $\dot{\theta}_2(t) = \omega_2(t)$  pour une consigne  $\dot{\theta}_{c2}(t) = \omega_{c2}(t)$  en échelon est d'un ordre inférieur à la demi-période du signal perturbateur  $f_c(t)$ .

La réponse expérimentale à un échelon de vitesse  $\omega_{c2}(t)$  d'amplitude  $2000 \text{ deg} \cdot \text{s}^{-1}$  est représentée figure 2.



**FIGURE 2** – Réponse expérimentale de l'étrier et consigne associée (à droite, zoom sur le régime transitoire)

Les transformées de Laplace de  $\omega_2(t)$ ,  $\omega_{c2}(t)$ ,  $\theta_2(t)$  et  $c_x(t)$  sont notées  $\Omega_2(p)$ ,  $\Omega_{c2}(p)$ ,  $\theta_2(p)$  et  $C_x(p)$ .

**Question 6** Vérifier que la condition de réactivité énoncée ci-dessus est respectée. Justifier que la fonction de transfert de l'étrier (2)  $H_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{\Omega_{r2}(p)}$  peut alors être approchée par un gain statique  $K_2$  de valeur à préciser. Il faut s'assurer que la position  $\theta_2$  de l'étrier (2) ne s'éloigne pas trop de sa position de référence  $\theta_2^* = 0$ . Le non-respect de cette condition, appelé dérive de l'étrier, génère un moment parasite  $M_{01}$  responsable d'un déplacement du point  $P$  selon  $\vec{x}_1$ .