

Colle 0

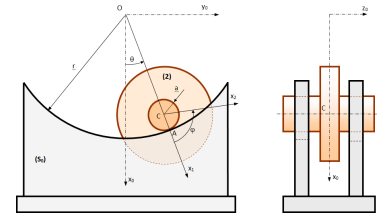
Mesure de moment d'inertie – Corrigé

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09

La figure ci-dessus représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie I d'un solide de révolution **(2)** par rapport à son axe. Soit R_0 un repère galiléen lié au bâti (S_0) tel que l'axe (O, \vec{x}_0) soit vertical descendant. Les deux portées sur lesquelles roule le solide **(2)** sont des portions de la surface d'un cylindre de révolution d'axe (O, \vec{z}_0) et de rayon r . Le solide **(2)**, de masse m , de centre d'inertie C , possède deux tourillons de même rayon a . Soit f le coefficient de frottement entre **(2)** et (S_0) . L'étude se ramène à celle d'un problème plan paramétré de la façon suivante :



- ▶ le tourillon de **(2)**, de centre C , roule sans glisser en A sur la portée cylindrique de (S_0) ;
- ▶ R_1 est un repère tel que $\overrightarrow{OA} = r\vec{x}_1$ et on pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- ▶ R_2 est un repère lié à **(2)** avec $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On suppose que $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Question 1 Donner la relation entre φ et θ .

Question 2 Déterminer l'équation du mouvement de **(2)** par rapport à (S_0) en fonction de θ .

Question 3 On suppose que l'angle θ reste petit au cours du mouvement. Montrer que le mouvement est périodique et déterminer la période T des oscillations de **(2)**.

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de **(S)** sachant que : $T = 5$ s ; $a = 12,5$ mm ; $r = 141,1$ mm ; $g = 9,81$ m s⁻² ; $m = 7217$ g ; $f = 0,15$.

Question 5 Déterminer l'angle θ_0 maxi pour qu'il n'y ait pas glissement en A . Faire l'application numérique.

Dispositif de mesure de moment d'inertie.

1/2

$$1. \text{ RSG en } A \quad \vec{V}(A \in S/R_0) = \vec{0} = \vec{V}(C \in S/R_0) + \vec{AC} \wedge \vec{\omega}(S/R_0)$$

$$\Leftrightarrow (r-a) \dot{\theta} \vec{y}_1 - a \vec{x}_1 \wedge (\dot{\varphi} + \theta) \vec{z}_0$$

$$\Leftrightarrow r \dot{\theta} + a \dot{\varphi} = 0 \quad \text{en intégrant avec } c_1 = 0 : \underline{r\theta + a\varphi = 0}$$

2. Isolons $\{S\}$

$$\mathcal{C}_{(\text{pesanteur} \rightarrow S)} = \begin{Bmatrix} m g \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{(S_0 \rightarrow S)} = \begin{Bmatrix} N \vec{x}_1 + T \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Appliquons le th de l'énergie cinétique $P_{(ext \rightarrow S/S_0)} = \frac{dE_c(S/S_0)}{dt}$

$$\begin{aligned} E_c(S/S_0) &= \frac{1}{2} m [(r-a) \dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2} I (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2} m (r-a)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{a-r}{a}\right)^2 \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{(r-a)^2}{2} \left(m + \frac{I}{a^2}\right) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dE_c(S/S_0)}{dt} = (r-a)^2 \left(m + \frac{I}{a^2}\right) \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$\begin{aligned} P_{(ext \rightarrow S/S_0)} &= \mathcal{C}_{(\text{pesanteur} \rightarrow S)} \otimes \mathcal{V}(S/R_0) + \mathcal{C}_{(S_0 \rightarrow S)} \otimes \mathcal{V}(S/R_0) \\ &= \begin{Bmatrix} m g \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C \otimes \begin{Bmatrix} (\theta + \dot{\varphi}) \vec{z}_0 \\ (r-a) \dot{\theta} \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_C + \begin{Bmatrix} N \vec{x}_1 + T \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} (\theta + \dot{\varphi}) \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \\ &= -m g (r-a) \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

d'où $(r-a) \left(m + \frac{I}{a^2}\right) \dot{\theta} = -m g \sin \theta$

$$\Leftrightarrow \underline{(r-a) \left(m a^2 + I\right) \dot{\theta} + m g a^2 \sin \theta = 0} \quad (1)$$

Autre solution : PFD appliqué à $\{S\}$ en A :

$$\begin{Bmatrix} m \vec{\Gamma}(C \in S/R_0) \\ \vec{\delta}_A(S/R_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m g \vec{x}_0 + N \vec{x}_1 + T \vec{y}_1 \\ m g a \sin \theta \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec } \vec{\delta}_A(S/R_0) &= \vec{\delta}_C(S/R_0) + \vec{AC} \wedge m \vec{\Gamma}(C \in S/R_0) \\
 &= \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\int_C(S) \vec{r}_2(S/R_0)}_{I(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{z}_0} \right] - m a \vec{x}_1 \wedge [(r-a)\theta \vec{y}_1 - (r-a)\dot{\theta} \vec{x}_1] \\
 &= [I(1 - \frac{a}{r}) \ddot{\theta} - m a (r-a) \dot{\theta}] \vec{z}_0
 \end{aligned}$$

2/2

$$\text{TTD en A / } \vec{z}_0 \quad (r-a) [I + m a^2] \ddot{\theta} + m g a \sin \theta = 0 \quad (1)$$

3 - θ petit $\Rightarrow \sin \theta \approx \theta$ d'où l'éq diff du 2nd ordre :

$$\ddot{\theta} + \frac{m g a^2}{(r-a)(I + m a^2)} \theta = 0$$

Le coef de θ étant positif, on a un phénomène périodique de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{(r-a)(I + m a^2)}{m g a^2}}$

$$4 - T^2 = 4\pi^2 \frac{(r-a)(I + m a^2)}{m g a^2} \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{T^2 \cdot m g a^2}{4\pi^2 (r-a)} - m a^2$$

$$\text{A.N. } I = \frac{25,7277 \cdot 9,81 \cdot 12,5^2 \cdot 10^{-6}}{4\pi^2 (141,1 - 12,5) \cdot 10^{-3}} - 7,277 \cdot 12,5^2 \cdot 10^{-6} = 53,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$5 - \text{Th de la résultante dynamique appliquée à } \{S\}: m[(r-a)\ddot{\theta} \vec{y}_1 - (r-a)\dot{\theta}^2 \vec{x}_1] = m g \vec{x}_0 + N \vec{x}_1 + T \vec{y}_1$$

$$/ \vec{x}_1 \quad -m(r-a)\dot{\theta}^2 = m g \cos \theta + N \quad \Leftrightarrow \quad N = -m(r-a)\dot{\theta}^2 - m g \cos \theta$$

$$/ \vec{y}_1 \quad m(r-a)\ddot{\theta} = T - m g \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad T = m(r-a)\ddot{\theta} + m g \sin \theta$$

$$\text{pas de glissement} \Rightarrow \|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\| \quad \Leftrightarrow \quad |m(r-a)\ddot{\theta} + m g \sin \theta| < f(m(r-a)\dot{\theta}^2 + m g \cos \theta)$$

$$\text{de (1)} \quad \ddot{\theta} = \frac{m g a^2}{(r-a)(I + m a^2)} \cdot \sin \theta \quad \text{et } \dot{\theta}_0 = 0 \text{ car il y a risque de glissement quand } \theta \text{ est max, (ici } \theta_0)$$

$$\text{d'où : } m(r-a) \frac{m g a^2}{(r-a)(I + m a^2)} \sin \theta_0 + m g \sin \theta_0 < f m g \cos \theta_0$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta_0 < f \cdot \left(1 + \frac{m a^2}{I}\right)$$

$$\text{A.N. } \theta_0 < 8,7^\circ$$