Automate d'exploration de l'hémostase ⋆

C2-09

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 En exprimant la condition de roulement sans glissement en I, déterminer ω_b et v, les composantes du torseur cinématique en G de la bille par rapport au rail 0, en fonction de $\dot{\theta}$, r et R.

- On isole la bille.
- On réalise le bilan des actions mécaniques :
  - $\{\mathcal{T}(\text{rail} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} -N_I\overrightarrow{z_1} + T_I\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} -N_I\overrightarrow{z_1} + T_I\overrightarrow{x_1} \\ rT_I\overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}_G.$
  - $\{\mathcal{T}(\text{bob} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F}(\text{bob} \rightarrow \text{bille}) = F(t)\overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G.$
  - $\{\mathcal{T}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille}) = -f_v\overrightarrow{V(G, \text{bille}/0)} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G.$
  - $\{\mathcal{T}(g \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G.$
- On calcule le torseur dynamique de la bille $\{\mathcal{D}(\text{bille}/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m\overrightarrow{\Gamma(G, \text{bille}/0)} \\ -J\dfrac{R-r}{r}\ddot{\theta}\overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_G$

  avec $\overrightarrow{\Gamma(G, \text{bille}/0)} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V(G, \text{bille}/0)}}{\mathrm{d}t} = (R-r)\ddot{\theta}\overrightarrow{x_1} - (R-r)\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_1}.$

En appliquant le TRD à la bille en projection sur $\overrightarrow{z_1}$, on a : $-N_I + F(t)\overrightarrow{x_0}\cdot\overrightarrow{z_1} + mg\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{z_1} = -m(R-r)\dot{\theta}^2 \Longleftrightarrow -N_I + F(t)\sin\theta + mg\cos\theta = -m(R-r)\dot{\theta}^2$.

En appliquant le TMD à la bille, en G, en projection sur $\overrightarrow{y_0}$, on a : $rT_1 = -J\dfrac{R-r}{r}\ddot{\theta}$ $\Longleftrightarrow rT_1 = -\dfrac{2}{5}mr^2\dfrac{R-r}{r}\ddot{\theta} \Longleftrightarrow T_1 = \dfrac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}$.

Question 2 En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés : montrer que les efforts normal N_I et tangentiel T_I du rail sur la bille sont liés à l'angle θ par les équations suivantes : $N_I = F(t)\sin\theta + mg\cos\theta + m(R-r)\dot{\theta}^2$ et $T_I = \dfrac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}$.

En appliquant le TRD à la bille en projection sur $\overrightarrow{x_1}$, on a : $T_I + F(t)\overrightarrow{x_0}\cdot\overrightarrow{x_1} + mg\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{x_1} - f_v(R-r)\dot{\theta} = m(R-r)\ddot{\theta} \Longleftrightarrow T_I + F(t)\cos\theta - mg\sin\theta - f_v(R-r)\dot{\theta} = m(R-r)\ddot{\theta}$.

En utilisant la question précédente, on a alors $\dfrac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta} + F(t)\cos\theta - mg\sin\theta - f_v(R-r)\dot{\theta} = m(R-r)\ddot{\theta}$

$\Longleftrightarrow F(t)\cos\theta = mg\sin\theta + f_v(R-r)\dot{\theta} + \dfrac{7}{5}m(R-r)\ddot{\theta}$

(Signe à revoir ?).

Question 3 En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés, montrer que $\dfrac{7}{5}m(r-R)\ddot{\theta} + f_v(r-R)\dot{\theta} + mg\sin\theta = F(t)\cos\theta$. Si θ est petit $\dfrac{7}{5}m(r-R)\ddot{\theta} + f_v(r-R)\dot{\theta} + mg\theta = F(t)$. En passant dans le domaine de Laplace, on a $\dfrac{7}{5}m(r-R)p^2\theta(p) + f_v(r-R)p\theta(p) + mg\theta(p) = F(p)$ soit $H(p) = \dfrac{1}{\dfrac{7}{5}m(r-R)p^2 + f_v(r-R)p + mg}$

$$= \frac{\frac{1}{mg}}{\frac{7}{5g}(r-R)p^2 + \frac{f_v}{mg}(r-R)p + 1}.$$

On a donc $K_S = \dfrac{1}{mg}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{5g}{7(r-R)}}$, $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = \dfrac{f_v(r-R)}{mg}$ soit $\xi = \dfrac{f_v(r-R)}{2mg}\sqrt{\dfrac{5g}{7(r-R)}} = \dfrac{f_v}{2mg}\sqrt{\dfrac{5g(r-R)}{7}}$