

# Colle 0

## Quille pendulaire ★ – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

### Mise en situation

#### Objectif

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

C1-02

C2-04

### Modélisation du vérin

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

#### Correction

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace :  $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$  et  $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$ .

En utilisant le schéma-blocs, on a  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$ .

Par ailleurs  $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$ . On a donc  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$  soit  $A_1 = \frac{2B}{Vp} \frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}$ .

On a aussi  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$ . Par ailleurs,  $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$ . On a donc :  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$  et  $A_3 = S$ .

Au final,  $A_1 = \frac{1}{Sp}$ ,  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .



**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

#### Correction

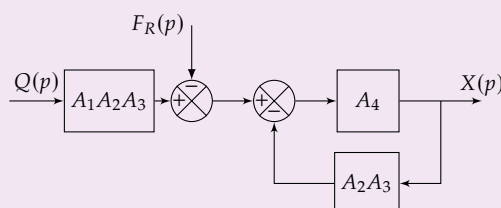
**Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes** On a  $X(p) = (H_1Q(p) - F_R(p))H_2(p)$ .

Par ailleurs, on a vu que  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p))$  et  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p))$ .

On a donc  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2(A_1Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p))$ . On a donc  $H_1(p) = A_1A_2A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$ .

**Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs** Revient à utiliser la méthode précédente.

**Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs** Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$$A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S \text{ et } A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}.$$

$$\begin{aligned} \text{En faisant le calcul on obtient : } H_1(p) &= \frac{2BS}{pV} \text{ et } H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} \\ &= \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}. \end{aligned}$$

**Question 3** Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

#### Correction

$$\text{Dans ce cas, } \frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}.$$

### Comportement pour une commande de faible amplitude

**Question 4** Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de  $H_{BO}(p)$  en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

#### Correction

On a :  $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$ . En conséquences,  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,04$  et  $\omega_0 = 5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\frac{2\xi}{\omega_0} = 0,12 \Leftrightarrow \xi = 0,3$ .  
On a donc une asymptote de  $-20 \text{ dB/decade}$  pour  $\omega < 5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $-60 \text{ dB/decade}$  pour  $\omega > 5 \text{ rad s}^{-1}$ .  
De plus, pour  $\omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$ , on a  $20 \log \frac{2,2}{5} = -7,1 \text{ dB}$ .

**Question 5** Déterminer par calcul la pulsation de résonance  $\omega_r$  de cette fonction de transfert.

#### Correction

$$\text{On a } \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = 5 \times \sqrt{1 - 2 \times 0,3^2} \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}.$$

**Question 6** Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation  $\omega_r$  la différence, notée  $\Delta K$  et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

#### Correction

L'amplitude de résonance ne dépend que du système du second ordre. On a alors (résultat de cours sur le second ordre) :  $\Delta K = 20 \log \left( \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \right) = 20 \log \left( \frac{1}{2 \times 0,3\sqrt{1-0,3^2}} \right) = 4,8 \text{ dB}$ .

**Question 7** Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et

de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour  $K_{COR} = 1$ . Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

#### Correction

On a  $b > 1$  donc  $T < bT$  et  $\frac{1}{T} > \frac{1}{bT}$ .

Pour  $\omega < \frac{1}{bT}$  on a donc un gain de pente nulle et un déphasage nul.

Pour  $\frac{1}{bT} < \omega < \frac{1}{T}$  on a donc un gain de pente -20 dB/decade et un déphasage de  $-180^\circ$ .

Pour  $\omega > \frac{1}{T}$  on a donc un gain de pente 0 dB/decade et un déphasage de  $0^\circ$ .

**Question 8** Déterminer alors en fonction de  $b$ , l'amplitude  $|C(j\omega^*)|_{dB}$  à la pulsation notée  $\omega^*$ .

#### Correction

$$|C(j\omega^*)|_{dB} = 10 \log \frac{1 + T^2 \frac{1}{T^2 b}}{1 + b^2 T^2 \frac{1}{T^2 b}} = 10 \log \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + b} = 10 \log \frac{1}{b} \frac{1+b}{1+b} = -10 \log b.$$

**Question 9** Pour  $K_{COR} = 1$ , en faisant correspondre la pulsation de résonance  $\omega_r$  de  $H_{BO}$  à  $\omega^*$  :

- calculer  $b$  pour que « l'excès » de gain  $\Delta K$  soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de  $T$  ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation  $\omega^*$ .

#### Correction

D'une part, on veut que  $|C(j\omega^*)|_{dB} = -4,8$  soit  $10 \log b = 4,8$  et  $b = 3,02$ . D'autre part,  $\omega^* = \omega_r$  et  $T = \frac{1}{\omega_r \sqrt{b}} = 0,127$  s.

Par ailleurs, on a donc  $\phi(\omega^*) = \arcsin\left(\frac{1-b}{1+b}\right) = \arcsin\left(\frac{1-3,02}{1+3,02}\right) \approx -28,79^\circ$ .

## Validation du cahier des charges

**Question 10** Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

#### Correction

En regardant où la courbe a la pente la plus importante, on a approximativement  $2/0,5 \approx 4^\circ/s$ .  
 $t_{5\%} \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s } 4^\circ/s < 8^\circ/s$ .  
 CDCF validé.

**Question 11** Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

#### Correction

