Parallélépipède★

B2-10

Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide. Pour des raisons de symétrie, on a directement $\overrightarrow{OG} = \dfrac{a}{2}\overrightarrow{x} + \dfrac{b}{2}\overrightarrow{y} + \dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}$.

Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G, en A puis O.
Notons (1) le parallélépipède rectangle et (2) le cylindre (plein). On note $\mathcal{B}_0 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ On a $I_G(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$ et $I_G(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$ (attention l'axe du cylindre est $\overrightarrow{y}$).

On a donc $I_G(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.

Par ailleurs, $m = m_1 - m_2$ et $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{2}\overrightarrow{y}$; donc $I_A(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 + m\dfrac{b^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 + m\dfrac{b^2}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.

Enfin, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{a}{2}\overrightarrow{x} + \dfrac{b}{2}\overrightarrow{y} + \dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}$; donc $I_O(S) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - A_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} + m\begin{pmatrix} \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{c^2}{4} & -\dfrac{ab}{4} & -\dfrac{ac}{4} \\ -\dfrac{ab}{4} & \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{c^2}{4} & -\dfrac{bc}{4} \\ -\dfrac{ac}{4} & -\dfrac{bc}{4} & \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.