



# TD 1

## Robot de consolidation de parois rocheuses

### Roboclimber – Corrigé

Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert.

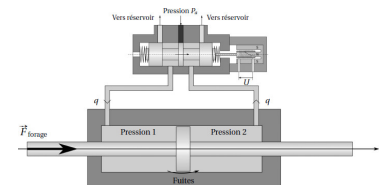
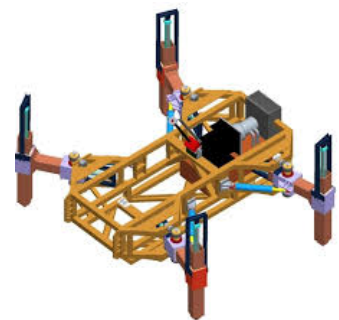
#### Mise en situation

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servovalve, elle-même commandée en tension  $u$  par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servovalve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.

Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

- ▶ précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5% ;
- ▶ rapidité de l'asservissement :  $t_{5\%} = 0,15$  s ;
- ▶ stabilité : marge de phase de  $45^\circ$ , marge de gain de 10 dB ;
- ▶ sécurité du mouvement : aucun dépassement.



#### Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- ▶  $S = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , surface utile des pistons ;
- ▶  $b = 10^9 \text{ Pa}$  : module de compressibilité du fluide utilisé ;
- ▶  $P_a = 150 \times 10^5 \text{ Pa}$  : pression d'alimentation de la servovalve ;
- ▶  $K = 10^{-7} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1} \text{ Pa}^{-0.5}$  : constante de débit de la servovalve ;
- ▶  $\varphi = 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-1}$  : facteur de fuite dans le vérin ;
- ▶  $q(t)$  : débit entrant et sortant du vérin ;
- ▶  $V_1$  et  $V_2$  : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse :  $V_1 = V_2 = V = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$  ;
- ▶  $p(t) = p_1 - p_2$  : différence des pressions dans les chambres du vérin ;
- ▶  $z(t)$  : déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre ;
- ▶  $M = 700 \text{ kg}$  : masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot ;
- ▶  $k = 10^5 \text{ Nm}^{-1}$  : raideur équivalente de la structure du robot ;

- ▶  $\mu = 100 \text{ N s m}^{-1}$  : coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- ▶  $F_0 = 3000 \text{ N}$  : effort nominal sur le vérin ;
- ▶  $Z_0 = 50 \text{ cm}$  : position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur  $k$ .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe  $\vec{z}$  du vérin, conduit à l'équation :

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}.$$

**Question 1** Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| ▶ l'inertie du robot ;            | ▶ à la compressibilité de l'huile ;    |
| ▶ à la raideur du robot ;         | ▶ au déplacement de la tige de vérin ; |
| ▶ au frottement visqueux ;        | ▶ aux fuites entre les chambres.       |
| ▶ à la pression dans la chambre ; |  |

#### Correction

Termes correspondant :

- ▶ l'inertie du robot :  $M \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$  ;
- ▶ à la raideur du robot :  $-k(z(t) - Z_0)$  ;
- ▶ au frottement visqueux :  $-\mu \frac{dz(t)}{dt}$  ;
- ▶ à la pression dans la chambre :  $Sp(t)$  ;
- ▶ à la compressibilité de l'huile :  $\frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}$  ;
- ▶ au déplacement de la tige de vérin :  $S \frac{dz(t)}{dt}$  ;
- ▶ aux fuites entre les chambres :  $\varphi p(t)$ .

**Question 2** En considérant une évolution au point de fonctionnement  $P_0$ ,  $F_0$  et  $Z_0$ , traduire l'équation d'équilibre du vérin.

#### Correction

On a :  $M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t)$ . Au point de fonctionnement, on a donc  $0 = SP_0 - F_0$  et donc  $SP_0 = F_0$ .

**Question 3** On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors  $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$ ,  $F_{\text{forage}}(t) = F_0 + \Delta F(t)$  et  $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$ . Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

**Correction**

Au voisinage du point de fonctionnement, on a donc :  $M \frac{d^2 \Delta z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{d \Delta z(t)}{dt} - k \Delta z(t) + S(P_0 + \Delta p(t)) - F_0 - \Delta F(t)$ . De plus, à l'équilibre,  $SP_0 = F_0$ . Dans le domaine de Laplace, on a alors  $\Delta Z(p) (Mp^2 + \mu p + k) = S \Delta P(p) - \Delta F(p)$ .

**Question 4** En considérant une évolution au point de fonctionnement  $P_0$ ,  $Q_0$  et  $Z_0$ , traduire l'équation de bilan des débits.

**Correction**

On a  $q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}$ . Au point de fonctionnement, on a donc  $Q_0 = \varphi P_0$ .

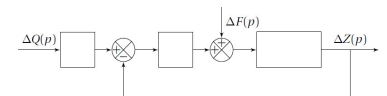
**Question 5** On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors  $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ . Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

**Correction**

Au voisinage du point de fonctionnement, on a donc  
 $Q_0 + \Delta q(t) = S \frac{d(Z_0 + \Delta z(t))}{dt} + \varphi (P_0 + \Delta p(t)) + \frac{V}{2b} \frac{d(P_0 + \Delta p(t))}{dt}$   
 $\Leftrightarrow Q_0 + \Delta q(t) = S \frac{d \Delta z(t)}{dt} + \varphi (P_0 + \Delta p(t)) + \frac{V}{2b} \frac{d \Delta p(t)}{dt}$   
 $\Leftrightarrow \Delta q(t) = S \frac{d \Delta z(t)}{dt} + \varphi \Delta p(t) + \frac{V}{2b} \frac{d \Delta p(t)}{dt}$  (en utilisant la question précédente).

Dans le domaine de Laplace, on a donc  $\Delta Q(p) = Sp \Delta Z(p) + \varphi \Delta P(p) + \frac{V}{2b} p \Delta P(p)$  soit  
 $\Delta Q(p) = Sp \Delta Z(p) + \Delta P(p) \left( \varphi + \frac{V}{2b} p \right)$

**Question 6** À partir des équations obtenues, compléter le le schéma-blocs traduisant son comportement.

**Correction****Modélisation du comportement de la servovalve**

La servovalve permet de fournir le débit  $q(t)$  au vérin à partir d'une tension de commande  $u(t)$  appliquée en entrée : la tension  $u(t)$  est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante  $p_a$  et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension  $u(t)$ , mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire :  $q(t) = Ku(t)\sqrt{p_a - p(t)}$ .

Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

**Question 7** Déterminer la relation liant  $Q_0$ ,  $U_0$  et  $P_0$  au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera  $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$ ,  $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$  et  $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$ .

**Correction**

Au point de fonctionnement,  $Q_0 = KU_0\sqrt{p_a - P_0}$ .

Par ailleurs, on a

$$Q_0 + \Delta q(t) = K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{p_a - P_0 - \Delta p(t)}$$

$$\Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{p_a - P_0 - \Delta p(t)}$$

$$\Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{(p_a - P_0)\left(1 - \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}\right)}$$

$$\text{et } \sqrt{1 - \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}.$$

$$\text{Soit } KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{p_a - P_0}\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{p_a - P_0} - \frac{K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}$$

$$\Leftrightarrow KU_0\sqrt{p_a - P_0} + \Delta q(t) = K(U_0 + \Delta u(t))\sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0\sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0} -$$

$$\underbrace{\frac{K\Delta u(t)\sqrt{p_a - P_0}}{2} \frac{\Delta p(t)}{p_a - P_0}}_{\text{on néglige}}$$

$$\Leftrightarrow \Delta q(t) = K\Delta u(t)\sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2} \frac{\Delta p(t)}{\sqrt{p_a - P_0}}$$

**Question 8** Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servo-valve et vérin, admettant en entrée la tension  $\Delta U(p)$  et la force  $\Delta F(p)$ , et en sortie la position  $\Delta Z(p)$ .

**Correction****Asservissement de position**

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

- la servovalve, qui fournit le débit  $q(t)$  au vérin à partir d'un signal de commande  $u(t)$ ;
- un capteur de position de fonction de transfert  $k_c$ , qui fournit une tension  $\text{Im}(z(t))$  image de la position réelle  $z(t)$ ;
- un correcteur  $C(p)$  qui élabore la commande  $u(t)$  de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre  $\text{Im}(z_c(t))$ , image de la consigne de position, et  $\text{Im}(z(t))$ .  $\text{Im}(z_c(t))$  est obtenue grâce à un adaptateur  $K_a$  situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

**Question 9** Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

**Correction**

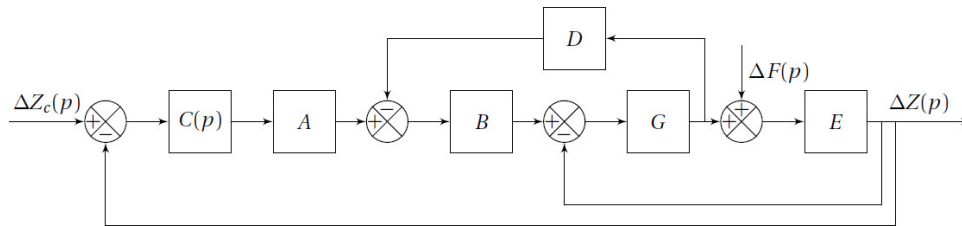
**Question 10** Préciser l'expression de l'adaptateur  $K_a$  pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

**Correction**

Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , et  $G$  sont utilisés pour simplifier les calculs.

**Question 11** À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.

#### Correction



#### Validation des performances pour une correction unitaire $C(p) = 1$

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle fermée,  $FTBF(p) = \frac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2}p + 1,78 \times 10^{-4}p^2 + 4,8 \times 10^{-6}p^3}$ , ainsi que les valeurs numériques des pôles :  $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$  et  $p_3 = -30,4$  (en rad/s).

**Question 12** Le système est-il stable ? Est-il précis ?

#### Correction

**Question 13** À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

#### Correction

**Question 14** À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassements.

#### Correction

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte,  $FTBO(p) = \frac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2}p + 7,03 \times 10^{-3}p^2 + 1,9 \times 10^{-4}p^3}$ , ainsi que les valeurs numériques des pôles :  $p_{12} = -18 \pm 81,6j$  et  $p_3 = -0,75$  (rad/s)

**Question 15** Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.

## Correction

## Optimisation du comportement : réduction des oscillations

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur »,

$$\text{de fonction de transfert : } C(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_2}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } \xi_1 < \xi_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Question 16** Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

## Correction

On choisit de prendre  $\omega_0$  égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et  $\xi_2 = 0,7$ .

**Question 17** Proposer une valeur pour le paramètre  $\xi_1$ . Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).

## Correction

## Éléments de correction

1. ...
2.  $(Mp^2 + \mu p + k) \Delta Z(p) = S \Delta p(p) - \Delta F(p)$  et  $\Delta Q(p) = Sp \Delta Z(p) + \left( \varphi + \frac{V}{2b} p \right) \Delta P(p)$ .
3. ...
4.  $\Delta q = K \Delta U \sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}} \Delta p + \text{termes néglig.}$
5. ...
6. ...
7.  $K_a = k_c$ .
8.  $\text{FTBO}(p) = \frac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE}$  et  $\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$ .
9. ...
10. ...
11. ...
12.  $\omega_0 = 83,6 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\xi = 0,21$ ,  $\omega_3 = 0,75 \text{ rad s}^{-1}$ .
13. ...
14. ...