

Application 1

Pompe à plateau – Corrigé

D'après C. Gamelon & P. Dubois.

C1-05

C2-08

C2-09

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.

L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe (O, \vec{x}_0) horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

Paramétrage

Le repère $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

- ▶ $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$;
- ▶ $\vec{OB} = e\vec{z}_1, \vec{BI} = R\vec{z}_0, \vec{OA} = z\vec{z}_0$.

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe (O, \vec{x}_0) . Le piston (2) possède une masse m_2 . Le ressort (r), de raideur k , est toujours comprimé. Pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, l'effort de compression est égal à $\vec{F}_0 = -F_0\vec{z}_0$. Un moteur exerce un couple connu de moment $\vec{C}_m = C_m\vec{x}_0$ sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe (O, \vec{z}_0) et de résultante $\vec{F}_h = -F_h\vec{z}_0$.

Résolution cinématique

Question 1 En utilisant une fermeture géométrique ou la méthode de votre choix, déterminer la exprimer z en fonction de θ et de constantes du problème. Déterminer alors $\vec{V}(A, 2/0)$ et $\vec{\Gamma}(A, 2/0)$.

Résolution dynamique

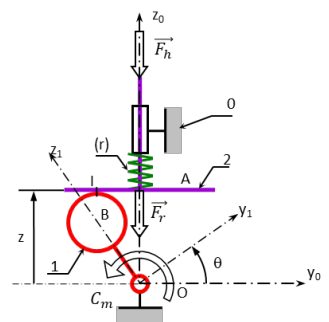
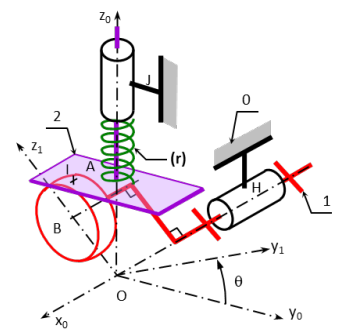
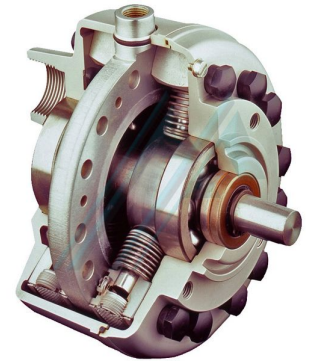
Question 2 Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre θ en utilisant le PFD.

Question 3 Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

Résolution énergétique – Pour plus tard...

Question 4 Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre θ en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

Question 5 Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.



Pour aller plus loin...

Question 6 En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

Fermeture géométrique.

$$\text{On a : } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}.$$

En projection sur \vec{z}_0 : $e \cos \theta + R = z$. Par dérivation successive, on a : $-e \dot{\theta} \sin \theta = \dot{z}$ et $-e \ddot{\theta} \sin \theta - e \dot{\theta}^2 \cos \theta = \ddot{z}$.

On isole le solide (1).

On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot : $\{\mathcal{T} (0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01} \vec{x}_0 + Y_{01} \vec{y}_0 + Z_{01} \vec{z}_0 \\ M_{01} \vec{y}_0 + N_{01} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} Y_{01} \vec{y}_0 + Z_{01} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathcal{T} (2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{21} \vec{y}_0 + Z_{21} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$. On a $Z_{21} < 0$, $Y_{21} > 0$ et à la limite du glissement, $Y_{21} = -f Z_{21}$.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, 2 \rightarrow 1) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(I, 2 \rightarrow 1) + \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{R}(2 \rightarrow 1) = (e \vec{z}_1 + R \vec{z}_0) \wedge (Y_{21} \vec{y}_0 + Z_{21} \vec{z}_0)$$

$$= -e Y_{21} \cos \theta \vec{x}_0 - e Z_{21} \sin \theta \vec{x}_0 - R Y_{21} \vec{x}_0 = -((e \cos \theta + R) Y_{21} + e Z_{21} \sin \theta) \vec{x}_0.$$
- Couple moteur : $\{\mathcal{T} (\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{array} \right\}_O$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta}(O, 1/0) \cdot \vec{x}_0$.

O est un point fixe et I_1 moment d'inertie par rapport à (O, \vec{x}_0) on a donc : $\overrightarrow{\delta}(O, 1/0) \cdot \vec{x}_0$.

$$\vec{x}_0 = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(O, 1/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \quad \vec{x}_0 = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(O, 1/0) \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{dI_O(1) \overrightarrow{\Omega}(1/0) \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{dI_1 \dot{\theta} \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = I_1 \ddot{\theta}.$$

Application du théorème du moment dynamique en projection sur \vec{x}_0 .

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e Z_{21} \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On isole le solide (2).

On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot glissant : $\{\mathcal{T} (0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{02} \vec{y}_0 \\ L_{02} \vec{x}_0 \end{array} \right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathcal{T} (1 \rightarrow 2)\} = -\{\mathcal{T} (2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Y_{21} \vec{y}_0 - Z_{21} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$.
- Ressort : $\{\mathcal{T} (\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_0 - k z \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$.
- Pesanteur : $\{\mathcal{T} (\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$.
- Fluide : $\{\mathcal{T} (\text{Fluide} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_h \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$.

Calcul de $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}$.

$$\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{z_0} = m_2 \ddot{z}$$

Application du théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

$$-F_h - Z_{21} - F_0 - kz - m_2 g = m_2 \ddot{z}.$$

Bilan :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e (-F_h - F_0 - kz - m_2 g - m_2 \ddot{z}) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On a alors :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} - e (F_h + F_0 + k(e \cos \theta + R) + m_2 g - e m_2 (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

Bilan sans frottement :

$$C_m + e (F_h + F_0 + k(e \cos \theta + R) + m_2 g - e m_2 \sin \theta (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) = I_1 \ddot{\theta}.$$