Parallélépipède percé★

B2-10

Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G du solide. On note m_C la masse du cylindre (plein) et m_P la masse du parallélépipède. On a alors $m = m_P - m_C$. De plus, $\overrightarrow{OG_P} = \dfrac{a}{2}\overrightarrow{x} + \dfrac{b}{2}\overrightarrow{y} + \dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{OG_C} = \dfrac{a}{3}\overrightarrow{x} + \dfrac{b}{2}\overrightarrow{y} + \dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}$.

On a alors $m\overrightarrow{OG} = m_P\overrightarrow{OG_P} - m_C\overrightarrow{OG_C} = m_P\left(\dfrac{a}{2}\overrightarrow{x} + \dfrac{b}{2}\overrightarrow{y} + \dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}\right) - m_C\left(\dfrac{a}{3}\overrightarrow{x} + \dfrac{b}{2}\overrightarrow{y} + \dfrac{c}{2}\overrightarrow{z}\right)$.

Par suite, $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m_P - m_C}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$.

Question 2 Déterminer la matrice d'inertie du solide en G.

Les plans $(G, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ et $(G, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x})$ sont des plans de symétrie. On a donc $I_G(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

On déplace la matrice du parallélépipède rectangle en G.

On a $I_{G_P}(P) = \begin{pmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P & 0 \\ 0 & 0 & C_P \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et

$\overrightarrow{G_PG} = \overrightarrow{G_PO} + \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{2} \\ -\dfrac{b}{2} \\ -\dfrac{c}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m_P - m_C}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m_P - m_C}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) - \dfrac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \Delta_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Ainsi, $I_G(P) = I_{G_P}(P) + m_P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_x^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P + m_P\Delta_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_P + m_P\Delta_x^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

On déplace la matrice du cylindre en G.

De même $I_{G_C}(C) = \begin{pmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_C & 0 \\ 0 & 0 & A_C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et

$\overrightarrow{G_CG} = \overrightarrow{G_CO} + \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{3} \\ -\dfrac{b}{2} \\ -\dfrac{c}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{m}\left(\dfrac{m_P}{2} - \dfrac{m_C}{3}\right) - \dfrac{a}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \Delta'_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Ainsi, $I_G(C) = I_{G_C}(C) + m_C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_x'^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_C + m_C \Delta_x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_C + m_C \Delta_x'^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Bilan.

Au final, $I_G(E) = I_G(P) - I_G(C)$ et

$$I_G(E) = \begin{pmatrix} A_P - A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_P + m_P \Delta_x^2 - B_C - m_C \Delta_x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_P + m_P \Delta_x^2 - A_C - m_C \Delta_x'^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$