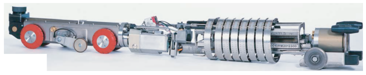
TD 1
Robot de dépose de fibres optiques ★ – Corrigé

Concours Mines Ponts – PSI 2004.

C1-05

C2-08



Présentation

Objectif

En fin des mouvements des bras, on doit avoir $\delta = 14°$ et $\dot{\delta} \leq 50°.s^{-1}$.

Hypothèses

Repères et paramétrage

Cahier des charges

Modélisation dynamique

Question 1 Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble $\Sigma = \{1+2+3+4\}$, puis la calculer.

Correction

Pour calculer l'énergie cinétique de l'ensemble seule la masse de la tige 1 est prise en compte.
$2\ E_c(\Sigma/R_0) = \{\mathscr{C}(\Sigma/R_0)\} \otimes \{\mathscr{V}(\Sigma/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega}(1/0)\\ \overrightarrow{V}(G_1,1/0)\end{array}\right\}_{G_1} \otimes \left\{\begin{array}{c}m_1\ \overrightarrow{V}(G_1,1/0)\\ \overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0)\end{array}\right\}_{G_1}$
$= m_1\ \left(\overrightarrow{V}(G_1,1/0)\right)^2 + \overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0)\cdot\overrightarrow{\Omega}(1/0)$.

- Vecteur de taux de rotation de 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\delta}\ \overrightarrow{z_0}$.
- Vitesse du point G_1 appartenant à 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{V}(G_1,1/0) = \overrightarrow{V}(I,1/0) + \overrightarrow{G_1I_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = -\left(R\ \overrightarrow{y_0} + \frac{L_1}{2}\overrightarrow{x_1}\right) \wedge \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} = -R\ \dot{\delta}\ \overrightarrow{x_0} + \frac{L_1}{2}\ \dot{\delta}\overrightarrow{y_1}$.
- Caractéristiques d'inertie de la tige 1 : la tige 1 supposée unidimensionnelle présente naturellement des symétries matérielles suivant des plans contenant $\overrightarrow{x_1}$. Les produits d'inertie sont donc nuls. Le moment d'inertie en G_1 suivant $\overrightarrow{z_0}$ est $C_1 = \frac{m_1\ L_1^2}{12}$.
- Moment cinétique en G_1 de 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0) = \overline{\overline{I}}_{G_1}(1)\cdot\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \frac{m_1\ L_1^2}{12}\dot{\delta}\ \overrightarrow{z_0}$.
- On en déduit $E_c(1/0)$: $E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) = \frac{1}{2}\ m_1\ \dot{\delta}^2\left(R^2 + \frac{L_1^2}{4} + R\ L_1\ \sin\delta\right) + \frac{m_1\ L_1^2}{12}\ \dot{\delta}^2$
$= \frac{1}{2}\ m_1\ \dot{\delta}^2\left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\ L_1 \sin\delta\right)$.

Question 2 Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ.

Correction

$\mathscr{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) = \mathscr{P}(\text{pesanteur} \rightarrow \Sigma/0) + \mathscr{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) + \mathscr{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0)$

- Actions de la pesanteur :

$\mathscr{P}(\text{pes} \longrightarrow \Sigma/0) = \mathscr{P}(\text{pes} \longrightarrow 1/0) = \{\mathscr{T}(\text{pes} \longrightarrow 1)\} \otimes \{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1\, g\, \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_1} \otimes$
$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(1/0 \\ \overrightarrow{V}(G_1, 1/0) \end{array} \right\}_{G_1}$
$= -m_1\, g\, \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{V}(G_1, 1/0) = -m_1\, g \frac{L_1}{2} \dot{\delta}\, \cos\delta$.

- Actions du contact en I entre 0 et 4 (*le contact se fait par roulement sans glissement*) :
  $\mathscr{P}(\text{contact en I} \longrightarrow \Sigma/0) = \{\mathscr{T}(0 \longrightarrow 4)\} \otimes \{\mathscr{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{04} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_I \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(4/0) \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_I = 0.$
- Actions du contact en E entre 0 et 2 (*le contact se fait sans frottement*) :
  $\mathscr{P}(\text{contact en E} \longrightarrow \Sigma/0) = \{\mathscr{T}(0 \longrightarrow 2)\} \otimes \{\mathscr{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{02}\, \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E \otimes$
  $\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(2/0) \\ \overrightarrow{V}(E, 2/0) \end{array} \right\}_E = R_{02}\, \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{V}(E, 2/0) = 0.$

Question 3 Donner la puissance intérieure à Σ.

Correction

- Les liaisons sont supposées comme parfaites donc : $\mathscr{P}\left(1 \overset{\text{Pivot}}{\leftrightarrow} 2\right) = \mathscr{P}\left(1 \overset{\text{Pivot Gl.}}{\leftrightarrow} 3\right) =$
  $\mathscr{P}\left(3 \overset{\text{Pivot}}{\leftrightarrow} 2\right) = 0.$
- Action du vérin entre 1 et 3 :
  $\mathscr{P}\left(1 \overset{\text{Vérin}}{\leftrightarrow} 3\right) = \{\mathscr{T}(1 \longrightarrow 3)\} \otimes \{\mathscr{V}(3/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_N \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V}(N, 3/1) \end{array} \right\}_N =$
  $F\, \overrightarrow{V}(N, 3/1) \cdot \overrightarrow{x_1}$.
  En considérant que $\overrightarrow{MN}$ est porté par $\overrightarrow{x_1}$ (hypothèse faite dans l'énoncé), on obtient :
  $\overrightarrow{V}(N, 3/1) \cdot \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{V}(M, 3/1) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{V}(M, 3/2) + \overrightarrow{V}(M, 2/1)\right) \cdot \overrightarrow{x_1} =$
  $\left(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{V}(B, 2/1) + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(-b\overrightarrow{x_2} \wedge (\dot{\beta} - \dot{\delta})\, \overrightarrow{z_0}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = b\, (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \cdot \overrightarrow{y_2} \cdot \overrightarrow{x_1} =$
  $-b\, (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta)$.
  On en déduit : $\mathscr{P}\left(1 \overset{\text{Vérin}}{\leftrightarrow} 3\right) = -F\, b\, (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta)$.

Question 4 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre F, δ, et β.

Correction

On applique alors le théorème de l'énergie cinétique à Σ par rapport au référentiel galiléen R_0 :
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c(\Sigma/R_0)) = \mathscr{P}(\text{ext} \longrightarrow \Sigma/0) + \mathscr{P}_{\text{int}}(\Sigma)$.
Or, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c(\Sigma/R_0)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\, m_1\, \dot{\delta}^2 \left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\, L_1 \sin\delta\right)\right] =$
$m_1\, \dot{\delta} \left[\ddot{\delta}\left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\, L_1 \sin\delta\right) + \frac{1}{2}\dot{\delta}^2\, R\, L_1 \cos\delta\right]$.
Ainsi on obtient, l'équation :

$$\boxed{m_1\, \dot{\delta} \left[\ddot{\delta}\left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\, L_1 \sin\delta\right) + \frac{1}{2}\dot{\delta}^2\, R\, L_1 \cos\delta\right] = -F\, b\, (\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta) - m_1\, g \frac{L_1}{2} \dot{\delta}\, \cos\delta.}$$

Des simulations pour différentes valeurs de F donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de δ en fonction du temps.

Question 5 Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot{\delta}$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.

Correction

- F = 700 N : le régime est fortement oscillant. Le système ne parvient pas à soulever le robot jusqu'à 14°. Celui-ci se comporte comme un oscillateur non amorti (le modèle est considéré sans frottement).
  Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.
- F = 750 N : le système atteint les 14°. La pente à l'accostage vaut environ 37.5°$/s$ ce qui est raisonnable vis-à-vis du cahier des charges. Cependant, le modèle utilisé pour trouver ce résultat utilise des liaisons parfaites, sans frottement. L'effort de 700 N étant insuffisant avec ce modèle parfait, il est possible qu'un effort de 750 N devienne insuffisant en réalité.
  Cette valeur est théoriquement satisfaisante mais l'écart entre modèle et réalité risque de modifier la conclusion.
- F = 800 N : Le système atteint les 14° La pente à l'accostage vaut environ 45°$/s$ ce qui est inférieur à la limite de 50°$/s$ imposée par le cahier des charges. L'effort est 15% supérieur à la valeur minimale nécessaire pour atteindre les 14° ce qui semble une marge suffisante pour vaincre les frottements non pris en compte dans le modèle.
  Cette valeur est satisfaisante.
- F = 950 N : Le système atteint les 14°. La pente à l'accostage vaut environ 75°$/s$ ce qui est supérieur à la limite de 50°$/s$ imposée par le cahier des charges.
  Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.