TD 1
Stabilisateur passif d'image – Corrigé

Mines Ponts 2018 – PSI.

C1-05

C2-09

Mise en situation

Objectif

Suite à une sollicitation brève de 0,5 m s^{-2}, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les 0,5°.

Travail demandé

Question 1 Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans **(0)** galiléen s'exprime comme $Q_1 \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$.

Correction

(1) et **(E)** sont en liaison pivot d'axe $\left(O, \overrightarrow{Y_0}\right)$. On va donc réaliser un théorème du moment dynamique appliqué à **(E)** en O en projection sur $\overrightarrow{Y_0}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O, E/0)}$

Méthode 1 – En passant par le calcul de $\overrightarrow{\delta(O, \mathbf{2}/0)}$, $\overrightarrow{\delta(O, \mathbf{C}/0)}$ **et** $\overrightarrow{\delta(O, \mathbf{Cp}/0)}$

Le support 2 étant sans masse, on a $\overrightarrow{\delta(O, 2/0)} = \overrightarrow{0}$. La caméra et le contrepoids étant considérés comme des masses ponctuelles, on a $\overrightarrow{\delta(G_C, \mathrm{C}/0)} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\delta\left(G_{Cp}, \mathrm{Cp}/0\right)} = \overrightarrow{0}$.

> **Calcul de** $\overrightarrow{\delta(O, \mathbf{C}/0)}$
>
> On a $\overrightarrow{\delta(O, \mathrm{C}/0)} = \overrightarrow{\delta(G_C, \mathrm{C}/0)} + \overrightarrow{OG_C} \wedge M_C \overrightarrow{\Gamma(G_C, \mathrm{C}/0)}$.
>
> **Calcul de** $\overrightarrow{\Gamma(G_C, \mathbf{C}/0)}$
>
> $\overrightarrow{V(G_C, \mathrm{C}/0)} = \overrightarrow{V(G_C, \mathrm{C}/1)} + \overrightarrow{V(G_C, 1/0)} = \overrightarrow{G_C O} \wedge \overrightarrow{\Omega(\mathrm{C}/0)} + v(t)\overrightarrow{X_0} = -L_C \overrightarrow{Z_2} \wedge \dot{\varphi}\overrightarrow{Y_2} + v(t)\overrightarrow{X_0} = L_C \dot{\varphi}\overrightarrow{X_2} + v(t)\overrightarrow{X_0}$.
>
> De plus $\overrightarrow{\Gamma(G_C, \mathrm{C}/0)} = L_C \ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2} - L_C \dot{\varphi}^2 \overrightarrow{Z_2} + a(t)\overrightarrow{X_0}$.
>
> Au final, $\overrightarrow{\delta(O, \mathrm{C}/0)} = \overrightarrow{OG_C} \wedge M_C \overrightarrow{\Gamma(G_C, \mathrm{C}/0)} = L_C \overrightarrow{Z_2} \wedge M_C \left(L_C \ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2} - L_C \dot{\varphi}^2 \overrightarrow{Z_2} + a(t)\overrightarrow{X_0}\right)$
>
> $\overrightarrow{\delta(O, \mathrm{C}/0)} = L_C M_C \left(L_C \ddot{\varphi}\overrightarrow{Y_2} + a(t)\cos\varphi \overrightarrow{Y_0}\right)$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O,\mathbf{Cp}/0)}$

On a $\overrightarrow{\delta(O,\mathrm{Cp}/0)} = \delta\left(\overrightarrow{G_{Cp},\mathrm{Cp}/0}\right) + \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp}\Gamma\left(\overrightarrow{G_{Cp},\mathrm{C}/0}\right)$.

Calcul de $\Gamma\left(\overrightarrow{G_{Cp},\mathbf{Cp}/0}\right)$

De même, $V\left(\overrightarrow{G_{Cp},\mathrm{Cp}/0}\right) = V\left(\overrightarrow{G_{Cp},\mathrm{Cp}/1}\right) + V\left(\overrightarrow{G_{Cp},1/0}\right) = \overrightarrow{G_{Cp}O} \wedge \overrightarrow{\Omega(\mathrm{Cp}/0)} + v(t)\overrightarrow{X_0} = L_{Cp}\overrightarrow{Z_2} \wedge \dot{\varphi}\overrightarrow{Y_2} + v(t)\overrightarrow{X_0} = -L_{Cp}\dot{\varphi}\overrightarrow{X_2} + v(t)\overrightarrow{X_0}$.

De plus $\Gamma\left(\overrightarrow{G_{Cp},\mathrm{Cp}/0}\right) = -L_{Cp}\ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2} + L_{Cp}\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Z_2} + a(t)\overrightarrow{X_0}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta(O,\mathrm{Cp}/0)} = \overrightarrow{OG_{Cp}} \wedge M_{Cp}\Gamma\left(\overrightarrow{G_{Cp},\mathrm{Cp}/0}\right) = -L_{Cp}\overrightarrow{Z_2} \wedge M_{Cp}\left(-L_{Cp}\ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2} + L_{Cp}\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Z_2} + a(t)\overrightarrow{X_0}\right)$

$\overrightarrow{\delta(O,\mathrm{C}/0)} = -L_{Cp}M_{Cp}\left(-L_{Cp}\ddot{\varphi}\overrightarrow{Y_2} + a(t)\cos\varphi\overrightarrow{Y_0}\right)$

On a donc $\overrightarrow{\delta(O,E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} = M_{Cp}L_{Cp}^2\ddot{\varphi} - M_{Cp}L_{Cp}a(t)\cos\varphi + M_C L_C^2\ddot{\varphi} + M_C L_C a(t)\cos\varphi$

Méthode 2 – En passant par le calcul de $I_O(E)$

On a $I_O(C) = M_C\begin{pmatrix} L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ et $I_O(Cp) = M_{Cp}\begin{pmatrix} L_{Cp}^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_{Cp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ et donc

$I_O(E) = \begin{pmatrix} M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.

O est un point quelconque ; donc $\overrightarrow{\delta(O,E/0)} \cdot \overrightarrow{Y_0} = \overrightarrow{\delta(O,E/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O,E/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} + \overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(E/R_0)$ et $\overrightarrow{\sigma(O,E/R_0)} = I_O(E) \cdot \overrightarrow{\Omega(E/R_0)} + M\,\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V(O,E/R_0)}$.

De plus, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}}\overrightarrow{Z_2}$, $\overrightarrow{V(O,E/R_0)} = v(t)\overrightarrow{X_0}$ et $\overrightarrow{V(G,E/R_0)} = v(t)\overrightarrow{X_0} + \dfrac{M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}}\dot{\varphi}\overrightarrow{X_2}$.

On a donc, $\overrightarrow{\sigma(O,S/R_0)} = \dot{\varphi}\left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2\right)\overrightarrow{Y_2} + \left(M_C + M_{Cp}\right)\dfrac{M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}}\overrightarrow{Z_2} \wedge v(t)\overrightarrow{X_0} = \dot{\varphi}\left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2\right)\overrightarrow{Y_2} + \left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}\right)v(t)\cos\varphi\overrightarrow{Y_0}$.

$\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O,E/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = \ddot{\varphi}\left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2\right)\overrightarrow{Y_2} + \left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}\right)\left(a(t)\cos\varphi - v(t)\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\overrightarrow{Y_0}$.

$\overrightarrow{V(O/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(E/R_0) = v(t)\overrightarrow{X_0} \wedge \left(M_C + M_{Cp}\right)\left(v(t)\overrightarrow{X_0} + \dfrac{M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}}\dot{\varphi}\overrightarrow{X_2}\right) = \left(M_C + M_{Cp}\right)\left(\dfrac{M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}}{M_C + M_{Cp}}\dot{\varphi}v(t)\sin\varphi\right)\overrightarrow{Y_2} = \left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}\right)\dot{\varphi}v(t)\sin\varphi\overrightarrow{Y_2}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta(O,E/R_0)} = \ddot{\varphi}\left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2\right)\overrightarrow{Y_2} + \left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}\right)a(t)\cos\varphi\overrightarrow{Y_0}$

Bilan des actions mécaniques en O agissant sur E

- Liaison pivot $\{\mathcal{T}(1 \to E)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O,1 \to E)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = 0$.
- $\{\mathcal{T}(\text{pes} \to C)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O,\text{pes} \to C)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = \left(\overrightarrow{OG_C} \wedge -M_C g\overrightarrow{Z_0}\right)\overrightarrow{Y_2} = \left(L_C\overrightarrow{Z_2} \wedge -M_C g\overrightarrow{Z_0}\right)\overrightarrow{Y_2} = L_C M_C g\sin\varphi\overrightarrow{Y_2}$.

- $\{\mathcal{T}(\text{pes} \to Cp)\}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \to Cp)} \cdot \overrightarrow{Y_2} = \left(-L_{Cp}\overrightarrow{Z_2} \wedge -M_{Cp} g \overrightarrow{Z_0}\right)\overrightarrow{Y_2} = -L_{Cp} M_{Cp} g \sin\varphi \overrightarrow{Y_2}$.

Théorème du moment dynamique en O en projection sur $\overrightarrow{Y_2}$

$\ddot{\varphi}\left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2\right) + \left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}\right) a(t)\cos\varphi = L_C M_C g \sin\varphi - L_{Cp}M_{Cp} g \sin\varphi$.

$\Leftrightarrow \ddot{\varphi}\left(M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2\right) + \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g \sin\varphi = -\left(M_C L_C - M_{Cp}L_{Cp}\right) a(t)\cos\varphi$.

On a donc : $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g \sin\varphi$, $Q_3(t) = \left(M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C\right)\cos\varphi$.

Question 2 Établir sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\Phi(p)}{A(p)}$. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de m_c, m_{cp}, L_c, L_{cp} et g.

Correction

Dans les conditions précédentes, on a $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g\varphi$ et $Q_3(t) = \left(M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C\right)$.

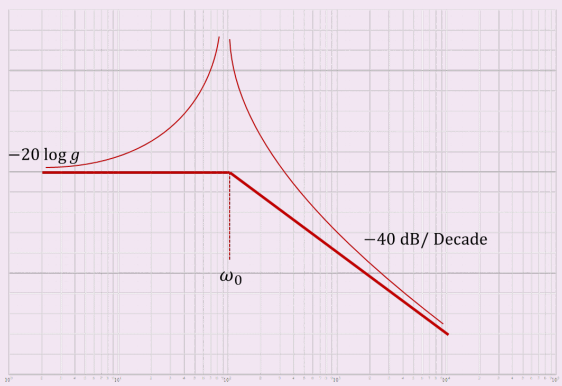
L'équation de comportement devient donc $Q_1 \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g\varphi = Q_3 a(t)$

$\Rightarrow Q_1 p^2 \Phi(p) + \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g\Phi(p) = Q_3 A(p)$ et $H(p) = \dfrac{Q_3}{Q_1 p^2 + \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g}$.

On a donc $\omega_0^2 = \dfrac{\left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g}{Q_1} = \dfrac{\left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g}{M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}$. Le gain K vaut $\dfrac{M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C}{\left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g} = \dfrac{1}{g}$.

Question 3 Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain $G_{\text{dB}} = f(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$. Placer les caractéristiques remarquables.

Correction



Question 4 Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que $\omega_0 = 0,1\omega_a$.

Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple $\left(m_{cp}, L_{cp}\right)$. En utilisant le comportement asymptotique en gain de G_{dB}, estimer numériquement l'amplitude $\Delta\varphi$ (en degrés) des oscillations de **(E)** selon l'axe $\left(O, \overrightarrow{y_0}\right)$.

Correction

On a $\omega_a = 10\omega_0$. Une décade après ω_0, $G_{\text{dB}} = -20\log 10 - 40 = -60\,\text{dB}$. Une atténuation de $-60\,\text{dB}$ correspond à un gain de $10^{-\frac{60}{20}} = 0,001$. L'amplitude des oscillations sera donc de $0,001 a_0 = 5\times 10^{-4}$ rad soit $0,03°$.

Éléments de correction

1. $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g \sin\varphi$, $Q_3(t) = \left(M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C\right)\cos\varphi$.
2. $\omega_0^2 = \dfrac{\left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g}{M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}$.
3. .
4. $0,03°$.
5. .

Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

Correction

On a $0,03° < 0,5°$. Le cahier des charges est vérifié au voisinage de $10\omega_0$.