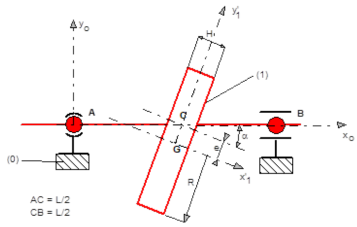
Colle 0
Disque déséquilibré – Corrigé

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

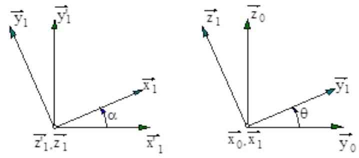
C1-05

C2-09

Soit le rotor **(1)** défini ci-contre. Il est constitué d'un arbre de masse négligeable en liaison pivot par rapport à un bâti **(0)**. Sur cet arbre est monté, en liaison complète, un disque de masse M, de rayon R et d'épaisseur H. Le repère $\mathcal{R}'_1 = \left(G; \overrightarrow{x'_1}, \overrightarrow{y'_1}, \overrightarrow{z'_1}\right)$ est attaché à ce solide.



La base $\mathcal{B}'_1 = \left(\overrightarrow{x'_1}, \overrightarrow{y'_1}, \overrightarrow{z'_1}\right)$ se déduit de $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ par une rotation d'angle α autour de $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z'_1}$.



La base $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ se déduit de $\mathcal{B}_0 = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ par une rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0}$.

Enfin, le rotor **1** est entrainé par un moteur (non représenté) fournissant un couple noté $C_m\overrightarrow{x_0}$. Le montage de ce disque présente deux défauts :

- un défaut de perpendicularité caractérisé par l'angle α ;
- un défaut d'excentricité représenté par la cote e.

Question 1 Déterminer la forme de la matrice d'inertie du cylindre en C dans la base $\mathcal{B}'_1$.

Question 2 Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de **(1)** dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Question 3 Appliquer le PFD pour déterminer les inconnues de liaison.

CORRIGE

Q1- Déterminer l'expression littérale de la matrice d'inertie de (1) au point C dans la base B'_1. Dans ce qui suit garder la matrice sous la forme générique (A, B, C, ...)

Matrice d'inertie de (1) dans la base B'1

On sait que : $$\tilde{\tilde{I}}(G,1) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} \end{bmatrix}_{B'_1}$$

Transfert au point C : $\overrightarrow{CG} = -e\ \overrightarrow{y'_1}$

$$\tilde{\tilde{I}}(C,1) = \tilde{\tilde{I}}(G,1) + m \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}_{B'_1}$$

Ainsi : $$\tilde{\tilde{I}}(C,1) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{2}+e^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2+12e^2) \end{bmatrix}_{B'_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1}$$

Q2- Déterminer les éléments de réduction en C du torseur cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{C\ (1/R_0)\} = \left\{ \begin{matrix} m\ \overrightarrow{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}\ (C,1/R_0) \end{matrix} \right\}_C$$

Résultante cinétique : $m\ \overrightarrow{V}(G/R_0) = -\,m\,e\ \dot{\theta}\ \cos\alpha\ \vec{z}_1$

Moment cinétique : $$\vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\ c\alpha \\ \dot{\theta}\ s\alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{B'_1} = \dot{\theta}\ (A\ c\alpha\ \overrightarrow{x'_1} + B\ s\alpha\ \overrightarrow{y'_1})$$

Or : $\overrightarrow{x'_1} = c\alpha\ \vec{x}_1 - s\alpha\ \vec{y}_1$ et $\overrightarrow{y'_1} = c\alpha\ \vec{y}_1 + s\alpha\ \vec{x}_1$

$$\vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \dot{\theta}\ \{ (A\ c^2\alpha + B s^2\alpha)\ \vec{x_1} + (B-A)\ s\alpha\ c\alpha\ \vec{y_1} \} = \dot{\theta}\ (A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1})$$

$$\boxed{\{C\ (1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m\ \vec{V}\ (G/R_0) = -\ m\ e\ \dot{\theta}\ \cos\alpha\ \vec{z_1} \\ \vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \dot{\theta}\ \{ (A\ c^2\alpha + B s^2\alpha)\ \vec{x_1} + (B-A)\ s\alpha\ c\alpha\ \vec{y_1} \} = \dot{\theta}\ (A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) \end{array} \right\}_C}$$

Q3- Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{D\ (1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M\ \vec{\Gamma}\ (G/R_0) \\ \vec{\delta}\ (C,1/R_0) \end{array} \right\}_C$$

Résultante dynamique : $M\ \vec{\Gamma}\ (G/R_0) = -\ m\ e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z_1} - \dot{\theta}^2\ \vec{y_1})$

Moment dynamique : C est un point fixe, donc : $\vec{\delta}\ (C,1/R_0) = \dfrac{d\vec{\sigma}\ (C,1/R_0)}{dt/R_0}$

$$\vec{\delta}\ (C,1/R_0) = \frac{d\ \{\dot{\theta}\ (A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1})\}}{dt/R_0} = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) + B'\dot{\theta}^2\ \vec{z_1}$$

Car $\dfrac{d\ \vec{y_1}}{dt/R_0} = \dfrac{d\ \vec{y_1}}{dt/R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{y_1} = \dot{\theta}\ \vec{x_1} \wedge \vec{y_1} = \dot{\theta}\ \vec{z_1}$

$$\boxed{\{D\ (1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M\ \vec{\Gamma}\ (G/R_0) = -\ m\ e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z_1} - \dot{\theta}^2\ \vec{y_1}) \\ \vec{\delta}\ (C,1/R_0) = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) + B'\dot{\theta}^2\ \vec{z_1} \end{array} \right\}_C}$$

Calculons :

$$\vec{\delta}\ (A,1/R_0) = \vec{\delta}\ (C,1/R_0) + \vec{AC} \wedge m\vec{\Gamma}(G,1/R_0)$$

$$\vec{\delta}\ (A,1/R_0) = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) + B'\dot{\theta}^2\ \vec{z_1} + \vec{AC} \wedge (-\ m\ e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z_1} - \dot{\theta}^2\ \vec{y_1})$$

Or : $\vec{AC} = \dfrac{L}{2}\ \vec{x_1}$

$$\vec{\delta}\ (A,1/R_0) = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) + B'\dot{\theta}^2\ \vec{z_1} + m\ e\ \cos\alpha\ \frac{L}{2}\ (\ddot{\theta}\ \vec{y_1} + \dot{\theta}^2\ \vec{z_1})$$

$$\vec{\delta}\ (A,1/R_0) = \vec{x_1}(A'\ddot{\theta}) + \vec{y_1}\ (B' + m\ e\frac{L}{2}\cos\alpha\ )\ddot{\theta}\ + \vec{z_1}(B' + m\ e\ \frac{L}{2}\cos\alpha)\ \dot{\theta}^2$$

$$\{D(1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{l} M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\,\vec{y}_1) \\ \vec{\delta}(A,1/R_0) = \vec{x}_1(A'\ddot{\theta}) + \vec{y}_1\,(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\ddot{\theta} + \vec{z}_1(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\dot{\theta}^2 \end{array}\right\}_A$$

Q4- Déterminer l'énergie cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

C étant fixe dans R_0 : $2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0).\,[\tilde{I}(C,S)\,\vec{\Omega}(S/R_0)]$

$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}(C,S/R_0)$

$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = \dot{\theta}\vec{x}_1\,.\,\dot{\theta}(A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1)$

$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = A'\,\dot{\theta}^2 = (A\,c^2\alpha + B s^2\alpha)\dot{\theta}^2$

$$\boxed{2\,T(S/R_0) = A'\,\dot{\theta}^2 = (A\,c^2\alpha + B s^2\alpha)\dot{\theta}^2}$$

Q5- Les liaisons en A et B sont supposées parfaites. Le rotor tourne à vitesse constante $\dot{\theta} = \omega$. Déterminer les actions de liaison en A et B et le couple moteur nécessaire C_m pour obtenir ce mouvement

On isole 1 et on lui applique le PFD : $\{D(1/R_0)\} = \{\bar{1} \to 1\}$

Or : $\{D(1/R_0)\} = \{A \to 1\} + \{B \to 1\} + \{\text{Poids} \to 1\} + \{Cm\}$

$$\{\bar{1} \to 1\} = \left\{\begin{array}{cc} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{array}\right\}_{A,\,B_0} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{array}\right\}_{B,\,B_0} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{G,\,B_0} + \left\{\begin{array}{cc} 0 & Cm \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{B_0}$$

On réduit tout en A dans la base B_0 :

LA en B : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R} = L\,\vec{x}_0 \wedge (X_B\,\vec{x}_0 + Y_B\,\vec{y}_0 + Z_B\,\vec{z}_0) = L(Y_B\,\vec{z}_0 - Z_B\,\vec{y}_0)$

Pesanteur : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R} = (\frac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y}'_1) \wedge -mg\,\vec{y}_0 = -mg\frac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\,\vec{y}'_1 \wedge \vec{y}_0$

Or : $\vec{y}'_1 = c\alpha\,\vec{y}_1 + s\alpha\,\vec{x}_0$ et $\vec{y}_1 = c\theta\,\vec{y}_0 + s\theta\,\vec{z}_0$

$\vec{y}'_1 = c\alpha\,(c\theta\,\vec{y}_0 + s\theta\,\vec{z}_0) + s\alpha\,\vec{x}_0 = s\alpha\,\vec{x}_0 + c\alpha\,c\theta\,\vec{y}_0 + c\alpha\,s\theta\,\vec{z}_0$

$\vec{y}'_1 \wedge \vec{y}_0 = (s\alpha\,\vec{x}_0 + c\alpha\,c\theta\,\vec{y}_0 + c\alpha\,s\theta\,\vec{z}_0) \wedge \vec{y}_0 = s\alpha\,\vec{z}_0 - c\alpha\,s\theta\,\vec{x}_0$

$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R} = (\frac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y}'_1) \wedge -mg\,\vec{y}_0 = -mg\frac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\,(s\alpha\,\vec{z}_0 - c\alpha\,s\theta\,\vec{x}_0)$

$$\overrightarrow{M_A} = -e\,m\,g\;c\alpha\,s\theta\;\overrightarrow{x_0} + mg\,(e\,s\alpha - \frac{L}{2})\,\overrightarrow{z_0}$$

Résultante dynamique

$$M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -m\,e\,\cos\alpha\;(\ddot{\theta}\;\overrightarrow{z_1} - \dot{\theta}^2\;\overrightarrow{y_1})$$

$\overrightarrow{y_1} = c\theta\;\overrightarrow{y_0} + s\theta\;\overrightarrow{z_0}$ et $\overrightarrow{z_1} = c\theta\;\overrightarrow{z_0} - s\theta\;\overrightarrow{y_0}$

$$M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -m\,e\,\cos\alpha\;\{\ddot{\theta}\;(c\theta\;\overrightarrow{z_0} - s\theta\;\overrightarrow{y_0}) - \dot{\theta}^2\,(c\theta\;\overrightarrow{y_0} + s\theta\;\overrightarrow{z_0})\}$$

$$\boxed{M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = m\,e\,\cos\alpha\;\{\overrightarrow{y_0}(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) - \overrightarrow{z_0}(\ddot{\theta}\;c\theta - \dot{\theta}^2\,s\theta)\}}$$

Moment dynamique :

$$\overrightarrow{\delta}\,(A,1/R_0) = \overrightarrow{x_0}(A'\ddot{\theta}) + \overrightarrow{y_1}\;(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\ddot{\theta} + \overrightarrow{z_1}(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\;\dot{\theta}^2$$

$\overrightarrow{y_1} = c\theta\;\overrightarrow{y_0} + s\theta\;\overrightarrow{z_0}$ et $\overrightarrow{z_1} = c\theta\;\overrightarrow{z_0} - s\theta\;\overrightarrow{y_0}$

$$\overrightarrow{\delta}\,(A,1/R_0) = \overrightarrow{x_0}(A'\ddot{\theta}) + (c\theta\;\overrightarrow{y_0} + s\theta\;\overrightarrow{z_0})\;(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\ddot{\theta} + (c\theta\;\overrightarrow{z_0} - s\theta\;\overrightarrow{y_0})(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\;\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{\delta}\,(A,1/R_0) = {} & \overrightarrow{x_0}(A'\ddot{\theta}) \\ & + (B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha)(\ddot{\theta}\;c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\;\overrightarrow{y_0} \\ & + (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\;s\theta)\,\overrightarrow{z_0}\end{aligned}}$$

En définitive : $\{\overline{1} \rightarrow 1\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{cc} X_A & Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta \\ Y_A + Y_B - mg & -L\,Z_B \\ Z_A + Z_B & LY_B + mg\,(e\,s\alpha - \frac{L}{2}) \end{array}\right\}_{B_0}$

$$\{D\,(1/R_o)\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & A'\ddot{\theta} \\ m\,e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) & (B' + m\,e\dfrac{L}{2}\cos\alpha\ )(\ddot{\theta}\ c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta) \\ m\,e\ \cos\alpha\ (-\ddot{\theta}\ c\theta + \dot{\theta}^2\,s\theta) & (B' + m\,e\ \dfrac{L}{2}\cos\alpha)\ (c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\ s\theta) \end{array}\right\}_{B_0}$$
A

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - mg = m\,e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) \\ Z_A + Z_B = m\,e\ \cos\alpha\ (-\ddot{\theta}\ c\theta + \dot{\theta}^2\,s\theta) \\ Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta = A'\ddot{\theta} \\ Z_B = -\dfrac{1}{L}\{(B' + m\,e\dfrac{L}{2}\cos\alpha\ )(\ddot{\theta}\ c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\} \\ Y_B\ = \dfrac{1}{L}\{m\,g\,(\dfrac{L}{2} - e\ s\alpha) + (B' + m\,e\ \dfrac{L}{2}\cos\alpha)\ (c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\ s\theta)\} \end{array}}$$

Si $\overset{o}{\theta}$ = ω = cste

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - mg = m\,e\ \cos\alpha\ \omega^2\,c\theta \\ Z_A + Z_B = m\,e\ \cos\alpha\ \omega^2\,s\theta \\ Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta = 0 \\ Z_B = -\dfrac{1}{L}(B' + m\,e\dfrac{L}{2}\cos\alpha\ )\ \omega^2\,s\theta \\ Y_B = \dfrac{1}{L}\{\ m\,g\,(\dfrac{L}{2} - e\ s\alpha) + (B' + m\,e\ \dfrac{L}{2}\cos\alpha)\ \omega^2\,c\theta\} \end{array}}$$

ZA et ZB sont non nulles. Si tout était équilibré elles seraient nulles
Le mouvement est imposé. La recherche des composantes de liaisons donne lieu à des équations algébriques