Mouvement RT ⋆

C2-09

Question 1 Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide **2** en projection sur $\overrightarrow{i_1}$.

On isole le solide **2**.

On réalise le BAME :

- liaison glissière : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}$ tel que $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{i_1} = 0$;
- pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$ avec $-m_2 g \overrightarrow{j_0} \cdot \overrightarrow{i_1} = -m_2 g \sin\theta$;
- action du vérin $\{\mathcal{T}(\text{Vérin} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_v \overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$.

On applique le théorème de la résultante dynamique au solide 2 en projection sur $\overrightarrow{i_1}$:
$\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{i_1} + \left(-m_2 g \overrightarrow{j_0}\right) \cdot \overrightarrow{i_1} + F_v \overrightarrow{i_1} \cdot \overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{i_1}$.

Calcul de $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{i_1}$:

$\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{i_1} = m_2 \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{AG_2}\right]_{\mathcal{R}_0} \cdot \overrightarrow{i_1} = m_2 \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\lambda(t)\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} \cdot \overrightarrow{i_1} = m_2 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathcal{R}_0} \cdot \overrightarrow{i_1}$

$= m_2\left(\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} + \lambda(t)\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} - \lambda(t)\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{i_1}\right) \cdot \overrightarrow{i_1} = m_2\left(\ddot{\lambda}(t) - \lambda(t)\dot{\theta}^2(t)\right)$

Au final, l'application du TRD à 2 en projection sur $\overrightarrow{i_1}$ donne :

$$F_v - m_2 g \sin\theta = m_2\left(\ddot{\lambda}(t) - \lambda(t)\dot{\theta}^2(t)\right).$$

Question 2 Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème du moment dynamique à l'ensemble **1+2** au point A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On isole le solide **1+2**.

On réalise le BAME :

- liaison pivot : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$ tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{k_0} = 0$.
- pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{pes} \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \left(\overrightarrow{AB} \wedge -m_2 g \overrightarrow{j_0}\right) \cdot \overrightarrow{k_0} = \left(\lambda(t)\overrightarrow{i_1} \wedge -m_2 g \overrightarrow{j_0}\right) \cdot \overrightarrow{k_0} = -m_2 g \lambda(t) \cos\theta(t)$;
- pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_1}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{pes} \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{k_0} = \left(\overrightarrow{AG_1} \wedge -m_1 g \overrightarrow{j_0}\right) \cdot \overrightarrow{k_0} = \left(L_1 \overrightarrow{i_1} \wedge -m_1 g \overrightarrow{j_0}\right) \cdot \overrightarrow{k_0} = -m_1 g L_1 \cos\theta(t)$;
- action du moteur $\{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_A$.

On applique le théorème du moment dynamique au solide 1+2 en projection sur $\overrightarrow{k_0}$:
$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{k_0} + \overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{pes} \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{k_0} + \overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{pes} \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{k_0} + C_m \overrightarrow{k_0} = \overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A,1+2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}=\overrightarrow{\delta(A,1/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}+\overrightarrow{\delta(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A,1/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}$:

$\overrightarrow{\delta(A,1/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}=\left(\overrightarrow{\delta(G_1,1/0)}+\overrightarrow{AG_1}\wedge\overrightarrow{R_d(1/0)}\right)\cdot\overrightarrow{k_0}=\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(G_1,1/0)}\right]_0+m_1\overrightarrow{AG_1}\wedge\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{AG_1}\right]_0\right)\cdot$
$\overrightarrow{k_0}$

$=\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(G_1,1/0)}\right]_0\cdot\overrightarrow{k_0}+\left(m_1\overrightarrow{AG_1}\wedge\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{AG_1}\right]_0\right)\cdot\overrightarrow{k_0}\right)$

$=\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(G_1,1/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}\right]_0+\left(m_1L_1\overrightarrow{i_1}\wedge\left(L_1\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}-L_1\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{i_1}\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0}\right)$ car $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_0}\right]_0=$
$\overrightarrow{0}$.

$=C_1\ddot{\theta}(t)+m_1L_1^2\ddot{\theta}(t)$

Calcul de $\overrightarrow{\delta(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}$

$\overrightarrow{\delta(A,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}=\left(\overrightarrow{\delta(G_2,2/0)}+\overrightarrow{AG_2}\wedge\overrightarrow{R_d(2/0)}\right)\cdot\overrightarrow{k_0}=\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(B,2/0)}\right]_0+m_2\overrightarrow{AB}\wedge\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[AB]_0\right)\cdot$
$\overrightarrow{k_0}$

$=\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(B,2/0)}\right]_0\cdot\overrightarrow{k_0}+\left(m_2\overrightarrow{AB}\wedge\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{AB}\right]_0\right)\cdot\overrightarrow{k_0}\right)$

$=\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(B,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}\right]_0+\left(m_2\lambda(t)\overrightarrow{i_1}\wedge\left(\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}+\lambda(t)\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}-\lambda(t)\dot{\theta}^2\right.\right.\right.$
car $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_0}\right]_0=\overrightarrow{0}$.

$=C_2\ddot{\theta}(t)+m_2\lambda(t)\left(\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)+\lambda(t)\ddot{\theta}(t)\right)$.

On a donc (j'espère ...) :

$C_m-m_1gL_1\cos\theta(t)-m_2g\lambda(t)\cos\theta(t)=C_1\ddot{\theta}(t)+m_1L_1^2\ddot{\theta}(t)+C_2\ddot{\theta}(t)+m_2\lambda(t)\left(2\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)+\lambda(t)\ddot{\theta}(\right.$

$$C_m-(m_1L_1+m_2\lambda(t))\,g\cos\theta(t)=C_1\ddot{\theta}(t)+m_1L_1^2\ddot{\theta}(t)+C_2\ddot{\theta}(t)+2m_2\lambda(t)\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)+m_2\lambda^2(t)\ddot{\theta}(t).$$