TD 1
Drone quadri-rotor – Corrigé

Pole SII Chateaubriand – Joliot Curie

C1-01

C2-03

Présentation

Objectif

- Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0.

Correction

En vol stationnaire, dans les conditions idéales, la vitesse de rotation des hélices est constante ; donc $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = 0$. De plus, il n'y a pas de variation de la vitesse de rotation des hélices et donc pas de variation de la tension d'alimentation. En conséquence, $\delta u = 0$ et $\delta\omega = 0$.
On a donc $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \dfrac{k_v}{\tau}u$ En notant ω_0 et u_0 les vitesses en tensions à l'état stationnaire, on a $\dfrac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \dfrac{k_v}{\tau}u_0$.

Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta\omega$ et δu est de la forme $\dfrac{\mathrm{d}\delta\omega(t)}{\mathrm{d}t} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ, k_v, k_q et ω_0.

Correction

On utilise le changement de variable proposé autour d'un point de fonctionnement et on a :
$\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \dfrac{k_v}{\tau}u$
$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\left(\omega_0 + \delta\omega\right)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\left(\omega_0 + \delta\omega\right) - k_q\left(\omega_0 + \delta\omega\right)^2 + \dfrac{k_v}{\tau}\left(u_0 + \delta u\right)$
$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\left(\delta\omega\right)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\omega_0 - \dfrac{1}{\tau}\delta\omega - k_q\omega_0^2 - k_q\left(\delta\omega\right)^2 - k_q 2\omega_0\delta\omega + \dfrac{k_v}{\tau}u_0 + \dfrac{k_v}{\tau}\delta u$
Or $\dfrac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \dfrac{k_v}{\tau}u_0$ (question précédente) ; donc : $\dfrac{\mathrm{d}\left(\delta\omega\right)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\delta\omega - k_q\left(\delta\omega\right)^2 - k_q 2\omega_0\delta\omega + \dfrac{k_v}{\tau}\delta u$
En négligeant les termes d'ordre 2, on a donc : $\dfrac{\mathrm{d}\left(\delta\omega\right)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\delta\omega - k_q 2\omega_0\delta\omega + \dfrac{k_v}{\tau}\delta u$

Au final, $A = \dfrac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0$ et $B = \dfrac{k_v}{\tau}$.

On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu.

Question 3 Calculer la fonction de transfert $\dfrac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ, k_v, k_q et ω_0.

Correction

En utilisant la transformée de Laplace, on obtient $p\Delta\Omega(s) = -A\Delta\Omega(s) + B\Delta U(s)$ et donc $\dfrac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)} = \dfrac{B}{p+A} = \dfrac{B/A}{p/A+1}$. En conséquence, $K_m = \dfrac{B}{A} = \dfrac{\frac{k_v}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0} = \dfrac{k_v}{1+\tau k_q 2\omega_0}$. $\tau_m = \dfrac{\tau}{1+\tau k_q 2\omega_0}$

Recherche du point de fonctionnement ω_0

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 .

Correction

On a $4F_0 = mg$. Le poids du drone est de $0,240 \times 9,81 = 2{,}3544\,\text{N}$. Chaque moteur doit donc exercer $\dfrac{2,3544}{4} = 0{,}59\,\text{N}$.

Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

Correction

En lisant le graphe, on obtient $\omega_0 = 340\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a, b et τ. Préciser leur unité.

Correction

Lorsque $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}(t)} = 0$, on a $u = a\omega0^2 + b\omega_0$. Par ailleurs en régime stationnaire, on a $\dfrac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \dfrac{k_v}{\tau}u_0$. Il en résulte que $u_0 = \dfrac{1}{k_v}\omega_0 + \dfrac{k_q\tau}{k_v}\omega_0^2$.

On a donc $a = \dfrac{k_q\tau}{k_v}$ et $b = \dfrac{1}{k_v}$. On a donc b tel que $[\text{V}] = [\text{B}][\text{s}^{-1}]$ et $[\text{B}] = [\text{V}][\text{s}]$. On a donc k_v en $[\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}]$.

Par ailleurs, $[\text{V}] = [\text{k}_\text{q}][\text{s}][\text{Vs}][\text{s}^{-2}]$ et k_q n'a pas d'unité.

On peut ainsi déduire le modèle $\dfrac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\dfrac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \dfrac{37,5}{1+\dfrac{p}{77}}$.

Vérification des performances

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\dfrac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Correction

On a vu que $4_0F = mg$.
Par ailleurs, $m\ddot{z} = 4F - mg$ et donc, $m\dfrac{\mathrm{d}\left(z_0 + \delta z(t)\right)}{\mathrm{d}t} = 4\left(F_0 + \delta F(t)\right) - mg$ et $m\dfrac{\mathrm{d}\left(\delta z(t)\right)}{\mathrm{d}t} = 4\delta F(t)$. Dans le domaine de Laplace, on a $mp^2\Delta Z(p) = 4\Delta F(p)$. En conséquences, $\dfrac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \dfrac{4}{mp^2}$.
La FTBO s'exprime alors par $H_{\mathrm{BO}}(p) = \dfrac{2,5K}{p^2}\dfrac{1+Tp}{\left(1+\dfrac{p}{77}\right)\left(1+\dfrac{p}{30}\right)}$.

Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0{,}2\,\mathrm{s}$ et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad s^{-1}, le gain sera compris entre −120 dB et 10 dB.

Correction

On a $H_{\mathrm{BO}}(p) = \dfrac{2,5K}{p^2}\dfrac{1+Tp}{\left(1+\dfrac{p}{77}\right)\left(1+\dfrac{p}{30}\right)}$. Les pulsations de cassure sont alors : 5 rad s^{-1}, 30 rad s^{-1} et 77 rad s^{-1}. Les pentes sont alors :

- pour $\omega < 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$: −40 dB/décade ;
- pour $5\,\mathrm{rad\,s^{-1}} < \omega < 30\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$: −20 dB/décade ;
- pour $30\,\mathrm{rad\,s^{-1}} < \omega < 77\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$: −40 dB/décade
- pour $\omega > 77\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$: −60 dB/décade.

Pour une pulsation de $10 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, on a FTBO(p) $\simeq \dfrac{2,5}{p^2}$. On a donc un gain $\simeq 20\log\left(\dfrac{2,5}{0,01^2}\right) \simeq 88\,\mathrm{dB}$. Reste à tracer...

Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega_{c0\,\mathrm{dB}} = 1{,}5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

Correction

Si on considère que pour $\omega < 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, on a $H_{\mathrm{BO}}(p) \simeq \dfrac{2,5K}{p^2}$. Dans ces conditions, pour $K = 1$, on a $\left|\dfrac{2,5}{-\omega^2}\right| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{2,5} \simeq 1{,}58\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Correction

En raisonnant analytiquement, on cherche la pulsation ω_{-145} pour laquelle la phase est de $-180° + 35° = -145°$, soit $\arg \mathrm{FTBO}(j\omega) = -145°$. (Résolution à faire à la calculatrice, sur

Python ou autre. Il y asurement 2 solutions vu le profil de courbe de phase). On cherche ensuite K tel que $|\text{FTBO}(j\omega_{-145})| = 1$. (Résolution à faire à la calculatrice, sur Python ou autre.)

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié ? Justifier.

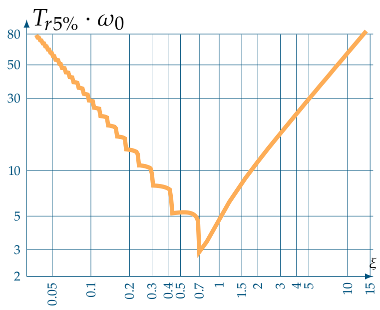
Correction

La boucle ouverte comporte 2 intégrateurs. L'écart statique est donc nul. Le cahier des charges est vérifié.

Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

Correction

Les pôles dominants sont $P2 \simeq -15$, $P3 \simeq -5+8i$, $P4 \simeq -5-8i$.



Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Correction

Dans ce cas, on ne prend que $P3$ et $P4$. $\xi = 0,6$.

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié ?

Correction

Le coefficient d'amortissement est inférieur à 0,69. Il y aura donc des oscillations verticales lors du drone. Le dépassement sera supérieur à 5 % de la valeur finale. En conséquence, le critère de stabilité n'est pas totalement respecté.

Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

Correction

Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Correction