TD 1
Machine de forage – Corrigé

D'après Concours CCINP 2023 – MP.

Question 1 En appliquant le principe fondamental de la statique en O à l'isolement de votre choix, donner l'expression de F_g et de F_d en fonction des données connues du système, de θ et de F_{sol}.

B2-14

C1-05

C2-07

Correction

On isole Σ.
BAME

- action du sol en I : $\{\mathcal{T}(0 \to \Sigma)\} = \left\{\begin{array}{c} F_g\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_I$; de plus, $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 0 \to \Sigma)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(I, 0 \to \Sigma)} + \overrightarrow{OI} \wedge F_g\overrightarrow{z} = -a\overrightarrow{x} \wedge F_g\overrightarrow{z} = aF_g\overrightarrow{y}$.
- action du sol en J : $\{\mathcal{T}(0 \to \Sigma)\} = \left\{\begin{array}{c} F_d\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_J$; de plus, $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 0 \to \Sigma)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(J, 0 \to \Sigma)} + \overrightarrow{OJ} \wedge F_d\overrightarrow{z} = a\overrightarrow{x} \wedge F_d\overrightarrow{z} = -aF_d\overrightarrow{y}$.
- pesanteur en G : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \to \Sigma)\} = \left\{\begin{array}{c} -Mg\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_G$; de plus, $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{pes} \to \Sigma)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(G, 0 \to \Sigma)} + \overrightarrow{OG} \wedge -Mg\overrightarrow{z} = \left(r\overrightarrow{x_2} + z_G\overrightarrow{z}\right) \wedge -Mg\overrightarrow{z} = r\overrightarrow{x_2} + \wedge - Mg\overrightarrow{z} = Mgr\overrightarrow{y_2}$.
- l'effort du sol sur l'outil : $\{\mathcal{T}(\text{sol} \to \Sigma)\} = \left\{\begin{array}{c} F_{\text{sol}}\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_F$; de plus, $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \text{sol} \to \Sigma)} = \overrightarrow{OF} \wedge F_{\text{sol}}\overrightarrow{z} = R\overrightarrow{x_2} \wedge F_{\text{sol}}\overrightarrow{z} = -RF_{\text{sol}}\overrightarrow{y_2}$.

On a donc :

- TRS en projection sur $\overrightarrow{z}$: $F_g + F_d - Mg + F_{\text{sol}} = 0$.
- TMS en O en projection sur $\overrightarrow{x}$: $-Mgr\sin\theta + RF_{\text{sol}}\sin\theta = 0$.
- TMS en O en projection sur $\overrightarrow{y}$: $aF_g - aF_d + Mgr\cos\theta - RF_{\text{sol}}\cos\theta = 0$.

La dernière équation est donc :$F_g - F_d + \dfrac{Mgr}{a}\cos\theta - \dfrac{R}{a}F_{\text{sol}}\cos\theta = 0$.

En conséquence, $2F_g - Mg + F_{\text{sol}} + (Mgr - RF_{\text{sol}})\dfrac{\cos\theta}{a} = 0$ et $2F_d - Mg + F_{\text{sol}} - (Mgr - RF_{\text{sol}})\dfrac{\cos\theta}{a} = 0$.

Au final, $\left\{\begin{array}{l} 2F_g = Mg - F_{\text{sol}} - (Mgr - RF_{\text{sol}})\dfrac{\cos\theta}{a} \\ 2F_d = Mg - F_{\text{sol}} + (Mgr - RF_{\text{sol}})\dfrac{\cos\theta}{a} \end{array}\right.$.

Question 2 Donner la condition en effort pour laquelle il y a basculement statique à droite. En absence d'effort de forage, en déduire la condition sur la position (r, θ) du centre de gravité G pour laquelle le basculement à droite est alors évité.

Correction

Il y a basculement lorsque $F_g \leq 0$ et en l'absence de forage, $F_{\text{sol}} = 0$. donc $Mg - (Mgr)\dfrac{\cos\theta}{a} \leq 0 \Rightarrow Mg\left(1 - r\dfrac{\cos\theta}{a}\right) \leq 0 \Rightarrow a - r\cos\theta \leq 0 \Rightarrow a \leq r\cos\theta$.

Question 3 Interpréter physiquement ce résultat et montrer que $b_{\%}$ peut être, dans ce cas, approximé par : $b_{\%} = 100\dfrac{|r\cos\theta|}{a}$.

Correction

Pour ne pas basculer, le centre de gravité doit être à l'intérieur des chenilles.

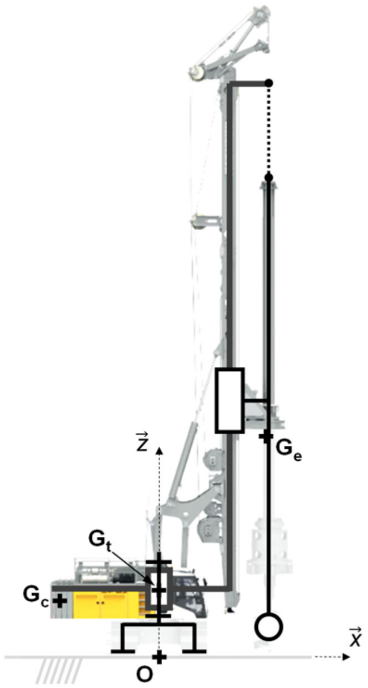

Figure 1 – Position des centres de gravité des différents solides.

Question 4 Exprimer la coordonnée sur $\overrightarrow{x}$, notée r, du centre de gravité G total de la machine en fonction des paramètres connus et de n_{cp}. En déduire le nombre n_{cp} minimum de contrepoids pour respecter l'exigence 1.2.

Correction

On a, par définition du barycentre, $(m_t + m_e + m_c)\overrightarrow{OG} = m_t\overrightarrow{OG_t} + m_e\overrightarrow{OG_e} + m_c\overrightarrow{OG_c}$. En projetant sur $\overrightarrow{x}$, on a : $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{x} = \dfrac{4,4m_e - 4,3m_c}{m_t + m_e + m_c} \Rightarrow r = \dfrac{4,4m_e - 4,3n_{cp}m_1}{m_t + m_e + n_{cp}m_1} \Rightarrow$ $rm_t + rm_e + rn_{cp}m_1 = 4,4m_e - 4,3n_{cp}m_1 \Rightarrow n_{cp}(rm_1 + 4,3m_1) = 4,4m_e - rm_t - rm_e$ $\Rightarrow n_{cp} = \dfrac{4,4m_e - rm_t - rm_e}{rm_1 + 4,3m_1}$.

Pour ne pas basculer, on doit avoir $r < a$. En prenant en compte l'exigence 1.2, il faut que $r < 0,5a$.

On peut en déduire n_{cp}.