

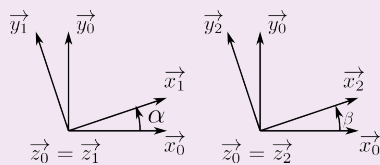
# Application 1

## Capsuleuse de bocal – Galet – Corrigé

### Modélisation sans galet

**Question 1** Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

#### Correction



**Question 2** Établir la loi entrée/sortie du système.

#### Correction

On a :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0} \iff R\vec{y}_1 - \lambda(t)\vec{x}_2 + L\vec{x}_0 = \overrightarrow{0}$$

En projetant sur  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  on a :

$$\begin{cases} -R \sin \alpha(t) - \lambda(t) \cos \beta(t) + L = 0 \\ R \cos \alpha(t) - \lambda(t) \sin \beta(t) = 0 \end{cases}$$

Suivant le cas, on peut donc avoir  $\alpha$  en fonction de  $\beta$  ou  $\lambda$  en fonction de  $\alpha$  ou  $\beta$  :

$$\tan \beta = \frac{R \cos \alpha}{L - R \sin \alpha}$$

$$\lambda(t)^2 = R^2 + L^2 - 2RL \sin \alpha$$

**Question 3** Donner une méthode permettant de valider le cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

#### Correction

On peut calculer :

$$\dot{\beta} = \frac{R^2 \dot{\alpha} - LR \dot{\alpha} \sin \alpha}{L^2 - 2RL \sin \alpha + R^2}$$

Le tracé Excel permet de valider que la vitesse de rotation de la croix de Malte reste inférieure à 50 tours par minute.

**Question 4** Donner l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$ .

#### Correction

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(O, S_1/S_0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = \overrightarrow{IO} \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_I$$

$$\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = (-R\vec{y}_1 - r\vec{y}_2) \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 = -R\dot{\alpha} \vec{x}_1 - r\dot{\alpha} \vec{x}_2$$

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = -R\dot{\alpha} \vec{x}_1 - r\dot{\alpha} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I$$

**Question 5** Donner l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$ .

#### Correction

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(B, S_2/S_0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} = \vec{IB} \wedge \dot{\beta} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_I \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} &= (-\lambda(t) \vec{x}_2 - r \vec{y}_2) \wedge \dot{\beta} \vec{z}_0 = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r \dot{\beta} \vec{x}_2 \\ \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r \dot{\beta} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I \end{aligned}$$

**Question 6** En déduire l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$  dans la base  $\mathcal{R}_2$ . On donne  $\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2$ .

#### Correction

D'après la composition du torseur cinématique on a :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} + \{\mathcal{V}(S_0/S_1)\} \iff \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} - \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} - \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} - \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r \dot{\beta} \vec{x}_2 + R\dot{\alpha} \vec{x}_1 + r\dot{\alpha} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I \\ \vec{x}_1 &= \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r \dot{\beta} \vec{x}_2 + R\dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + R\dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2 + r\dot{\alpha} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -r\dot{\beta} + R\dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r\dot{\alpha} \\ \lambda(t) \dot{\beta} + R\dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

**Question 7** D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide  $S_1$  par rapport à  $S_2$  ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.

#### Correction

Nécessairement, la vitesse de glissement appartient au plan tangent au contact. On a donc :

$$\begin{cases} -r\dot{\beta} + R\dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \\ \lambda(t) \dot{\beta} + R\dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) = 0 \end{cases}$$

**Question 8**  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} \cdot \vec{x}_2$  est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse ? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse ? Si oui, comment ? Si non, proposez une modification du système permettant la prise en compte de ce problème.

**Correction**

Cette vitesse de glissement provoque le frottement du doigt sur la croix de Malte. Ce frottement entraînant de l'usure, la capsuleuse de bocaux est équipée d'un galet.

**Modélisation avec galet**

**Question 9** Quelle est la modification sur le paramétrage du système ?

**Correction**

Un angle  $\gamma$  correspondant à la rotation du galet sur lui même apparaît.

**Question 10** Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement** sans glissement ?

**Correction**

La vitesse est nulle entre le galet et la croix de Malte est nulle au point  $I$  :

$$\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} = \vec{0}$$

**Question 11** Calculer la vitesse de rotation du galet  $\dot{\gamma}$  en commençant par exprimer  $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$  ? Indice : décomposer  $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$  en fonction des mouvements connus.

**Correction**

Malgré l'introduction d'un nouveau composant, la position du point  $I$  reste inchangée. Il faut identifier le torseur  $\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\}$ . Pour cela, la composition des vitesses donne :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \{\mathcal{V}(S_3/S_1)\} + \{\mathcal{V}(S_1/S_2)\}$$

Au point  $I$  on connaît déjà  $\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\}$ .

Calculons  $\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_1)} = \dot{\gamma} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(A, S_3/S_1)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_1)} = \dot{\gamma} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_3/S_1)} = \vec{IA} \wedge \dot{\gamma} \vec{z}_0 = -r \vec{y}_2 \wedge \dot{\gamma} \vec{z}_0 = -r \dot{\gamma} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} &= \overrightarrow{V(I, S_3/S_1)} + \overrightarrow{V(I, S_1/S_2)} \\ \overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} &= -r \dot{\gamma} \vec{x}_2 + (-r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha}) \vec{x}_2 - (\lambda(t) \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)) \vec{y}_2 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} = \left[ \begin{array}{c} -r \dot{\gamma} + (-r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha}) \\ -(\lambda(t) \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)) \\ 0 \end{array} \right]_{\mathcal{R}_2}$$

D'après l'hypothèse de roulement sans glissement, on a :

$$\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} = \vec{0} \implies \dot{\gamma} = -\frac{-r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha}}{r}$$

**Question 12** Valider le choix du galet.

**Correction**

$$\dot{\gamma} = -\frac{-r\dot{\beta} + R\dot{\alpha}\cos(\alpha - \beta) + r\dot{\alpha}}{r}$$