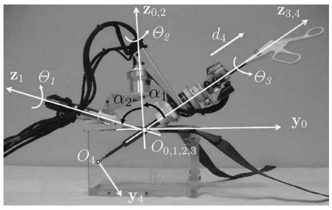
TD 0
Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique– Corrigé

Mines Ponts 2016.

B2-04



Présentation générale

Validation des performances de l'asservissement d'effort

Modèle de connaissance de l'asservissement

Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Correction

$H_1(p) = \dfrac{1}{Jp}$, $H_2(p) = \dfrac{1}{p}$ et $H_3(p) = K_{C\theta}$.

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Correction

Calculons $F(p) = \dfrac{C_e(p)}{C_m(p)} = \dfrac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \dfrac{K_{C\theta}\dfrac{1}{Jp}\dfrac{1}{p}}{1+K_{C\theta}\dfrac{1}{Jp}\dfrac{1}{p}} = \dfrac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}$.

Par suite $H_{\text{BF}}(p) = \dfrac{F(p)H_{\text{cor}}(p)}{1+F(p)H_{\text{cor}}(p)}$ soit $H_{\text{BF}}(p) = \dfrac{\dfrac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}}{1+\dfrac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}} = \dfrac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}+K_{C\theta}}$

$= \dfrac{1/2}{\dfrac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$.

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Correction

Le coefficient d'amortissement étant nul, il s'agit d'un oscillateur harmonique d'amplitude $C_0/2$. Le système vibre ce qui est incompatible avec le mouvement d'un robot chirurgical.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B. On s'intéresse ici à la définition analytique de B. Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.

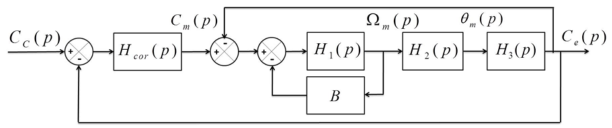


Figure 1 – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle B de telle façon que, pour $H_{\text{cor}}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{\text{BO}}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{\text{BO}}(p) = \dfrac{1}{(1+\tau p)^2}$.

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B, en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ.

Correction

D'une part, $F_1(p) = \dfrac{\dfrac{1}{Jp}}{1+\dfrac{B}{Jp}} = \dfrac{1}{Jp+B}$. Par suite $\text{FTBO}(p) = \dfrac{F_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+F_1(p)H_2(p)H_3(p)}$

$$= \frac{\dfrac{1}{Jp+B}\dfrac{K_{C\theta}}{p}}{1+\dfrac{1}{Jp+B}\dfrac{K_{C\theta}}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{p\,(Jp+B)+K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+Bp+K_{C\theta}} = \frac{1}{\dfrac{J}{K_{C\theta}}p^2+\dfrac{B}{K_{C\theta}}p+1}.$$

Par ailleurs, $H_{\text{BO}}(p) = \dfrac{1}{(1+\tau p)^2} = \dfrac{1}{1+2\tau p+\tau^2 p^2}$.

On a donc $\dfrac{B}{K_{C\theta}} = 2\tau \Rightarrow \dfrac{B}{2K_{C\theta}} = \tau$. D'autre part, $\tau^2 = \dfrac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \dfrac{B}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\dfrac{J}{K_{C\theta}}}$.

Au final, $B = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ et $\tau = \dfrac{B}{2K_{C\theta}} = \dfrac{2\sqrt{JK_{C\theta}}}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\dfrac{J}{K_{C\theta}}}$.

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i. Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 2.

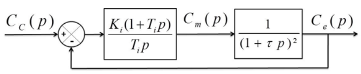


Figure 2 – Régulation avec correcteur PI.

Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Correction

- Méthode 1 : la FTBO est de classe 1. L'écart statique est donc nul.
- Méthode 2 (à savoir faire absolument, mais à éviter car trop long).

On a $\varepsilon(p) = \dfrac{C_c(p)}{1+\text{FTBO}(p)} = \dfrac{C_0}{p}\dfrac{1}{1+\dfrac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p^2)}} = C_0\dfrac{1}{p+\dfrac{K_i(1+T_i p)}{T_i(1+\tau p)^2}}$.

Par suite, $\lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = 0$.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : $\dfrac{K_{\text{BF}}}{1 + \dfrac{2\xi_{\text{BF}}}{\omega_{0\text{BF}}} p + \dfrac{p^2}{\omega_{0\text{BF}}^2}}$.

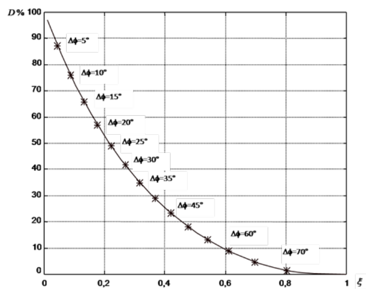
Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i.

Correction

Pour que la FTBF soit d'ordre 2, la FTBO doit être d'ordre 2.
En choisissant $T_i = \tau$ (compensation du pôle double du système), on a alors $\text{FTBO}(p) = \dfrac{K_i(1+\tau p)}{\tau p(1+\tau p)^2} = \dfrac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}$.

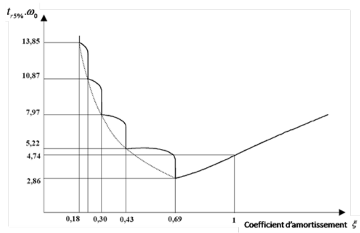
On a alors $\text{FTBF}(p) = \dfrac{\dfrac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}}{1 + \dfrac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}} = \dfrac{K_i}{\tau p(1+\tau p) + K_i}$.

Question 7 À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.



On donne $K_i = 1$.

Question 8 Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{c0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.



Correction

Diagrammes de Bode

On prend $K_i = 0,4$, $T_i = 0{,}01\,\text{s}$ et $\tau = 0{,}5\,\text{s}$.

Question 9 Tracer le diagrame de Bode de la fonction de transfert $G(p) = \dfrac{K_i\,(1+T_i p)}{T_i p\,(1+\tau p)^2}$.

Question 2.

D'après l'équation de mouvement, $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) - C_e(p)$. On a donc $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$. 2

On a $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$; donc $H_2(p) = \frac{1}{p}$. 2

Enfin, $C_e(p) = K_{C\theta}\theta_m(p)$ et donc $H_3(p) = K_{C\theta}$. 1

Question 3.

On a dans un premier temps $\frac{C_e(p)}{C_m(p)} = F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp}\frac{1}{p}K_{C\theta}}{1+\frac{1}{Jp}\frac{1}{p}K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}$.

Dans un second temps, $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)}{1+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)} = \frac{K_{C\theta}H_{cor}(p)}{Jp^2+K_{C\theta}+K_{C\theta}H_{cor}(p)}$.

Avec $H_{cor}(p) = 1$: $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+2K_{C\theta}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$. 5

Question 4.

On peut mettre la fonction précédente sous forme canonique. On a : $H_{BF}(p) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{Jp^2}{2K_{C\theta}}+1}$. Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. On a alors un oscillateur harmonique et la réponse du système à un échelon d'amplitude C_0 est une sinusoïde (d'amplitude C_0 et de moyenne $\frac{C_0}{2}$). 3

Un mouvement sinusoïdal est surement incompatible avec l'asservissement d'un axe sur un robot chirurgical. 2

Question 5.

On a $H_{BO}(p) = \frac{H_{cor}(p)\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B}H_2(p)H_3(p)}{1+\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B}H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+pB+K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{Jp^2}{K_{C\theta}}+\frac{pB}{K_{C\theta}}+1}$.

Par ailleurs, $(1+\tau p)^2 = 1+\tau^2p^2+2\tau p$. 3 2

En identifiant, $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}}$ et $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}}$. On a donc $B = 2\tau K_{C\theta} = 2K_{C\theta}\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ et $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$.

Question 6.

On a : $\varepsilon(p) = \frac{C_c(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{C_0}{p}\cdot\frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2}}$. En conséquences, $\varepsilon_S = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{C_0}{p}\cdot\frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2}} = \lim_{p\to 0} C_0\cdot\frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2}} = 0$ Nm. 3 L'exigence 1.2.2.1 est vérifiée. 2

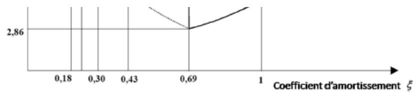
Question 7.

On a $\frac{\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2}}{1+\frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2}} = \frac{K_i(1+T_ip)}{T_ip(1+\tau p)^2+K_i(1+T_ip)}$. Avec $T_i = \tau$, on a $\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)+K_i}$. 5 La FTBF est bien d'ordre 2.

Pour avoir $D\% \leq 15\%$ il faut $\xi \geq 0{,}5$

Cependant, on trouve sur ce diagramme qu'il faut avoir $\xi \geq 0{,}8$ pour avoir une marge de phase de 70°.

Si on souhaite obtenir le temps de réponse à 5% le plus rapide, comme $\xi \geq 0{,}8 > 0{,}7$, il faut prendre ξ le plus faible possible. Cela impose $\boxed{\xi = 0{,}8}$ et comme $\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_i}}$ on a alors $K_i = \frac{1}{4\xi^2} = 0{,}4$.



Pour $\xi = 0{,}8$, la lecture de l'abaque donne donc $t_{R5\%}.\omega_0 \geq 3{,}5$ et avec $t_{R5\%} \leq 0{,}5s$ on a $\boxed{\omega_0 \geq 7 rad/s}$

Question 9.

Critère	Valeur
Dépassement	2%
Tr5%	<0,5 s
Erreur statique en réponse à un échelon	0

1 1 1

Allure de la réponse indicielle : 2