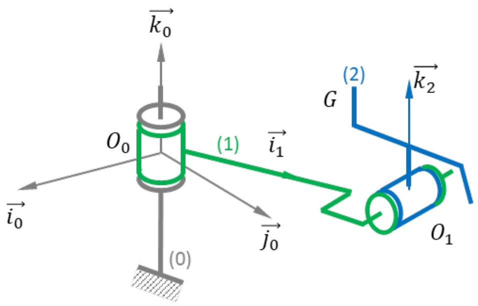
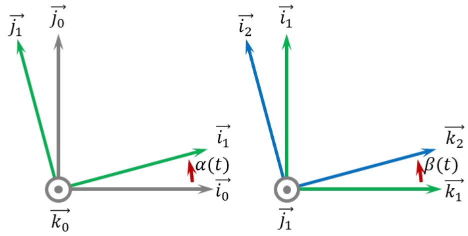
Application 1
Centrifugeuse humaine – Corrigé

Afin d'analyser les effets de l'accélération sur le corps humaine, le CNRS / MEDES a développé une centrifugeuse humaine. On donne ci-dessous la modélisation cinématique de la centrifugeuse.



Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci dessous :



Les paramètres constants du système sont les suivants :

- $\overrightarrow{O_0O_1} = a\,\overrightarrow{i_1}$;
- $\overrightarrow{O_1G} = b\,\overrightarrow{i_2} + c\overrightarrow{k_2}$.

Trajectographie

Question 1 Donner la trajectoire du point G dans le repère $\mathcal{R}_0$.

Correction

La trajectoire du point G dans le repère $\mathcal{R}_0$ est donnée par le vecteur :

$$\overrightarrow{O_0G}(t) = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1G} = a\,\overrightarrow{i_1} + b\,\overrightarrow{i_2} + c\overrightarrow{k_2}$$

Il faut alors projeter les vecteurs dans $\mathcal{R}_0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_0G}(t) &= a\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right) + b\left(\cos\beta(t)\overrightarrow{i_1} - \sin\beta(t)\overrightarrow{k_1}\right) + c\left(\cos\beta(t)\overrightarrow{k_1} + \sin\beta(t)\overrightarrow{i_1}\right)\\
&= a\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right) + b\left(\cos\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right) - \sin\beta(t)\overrightarrow{k_0}\right)\\
&\quad +c\left(\cos\beta(t)\overrightarrow{k_0} + \sin\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right)\right)\\
&= \begin{bmatrix} a\cos\alpha(t) + b\cos\beta(t)\cos\alpha(t) + c\sin\beta(t)\cos\alpha(t)\\ a\sin\alpha(t) + b\cos\beta(t)\sin\alpha(t) + c\sin\beta(t)\sin\alpha(t)\\ -b\sin\beta(t) + c\cos\beta(t)\end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}
\end{aligned}$$

On a ainsi l'équation paramétrique de la position du point G.

Cinématique

Question 2 Calculer $\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)}$.

Accélération

Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(G, S_2/S_0)}$.

Correction

Méthode 1 – PAS RECOMMANDE Par définition,

$$\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0O_1}(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(a\,\overrightarrow{i_1}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0} = a\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0} &= \left[\frac{\mathrm{d}\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{\mathrm{d}\sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0} \\
&= \frac{\mathrm{d}\cos\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i_0} + \cos\alpha(t)\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{i_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}} + \frac{\mathrm{d}\sin\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i_0} + \sin(t)\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{j_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}} \\
&= -\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\overrightarrow{j_0} = \dot{\alpha}(t)\overrightarrow{j_1}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = \begin{bmatrix} -a\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t) \\ a\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ a\dot{\alpha}(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

Dans les deux cas, $\overrightarrow{O_0O_1}(t)$ est dérivé par rapport $\mathcal{R}_0$ mais il s'exprime différemment dans $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$:

- $\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = -a\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + a\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\overrightarrow{j_0}$: ici la base de **projection** et de **dérivation** est la base $\mathcal{B}_0$;
- $\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}(t)\overrightarrow{j_1}$: ici la base de dérivation est la base $\mathcal{B}_0$ et la base de projection est $\mathcal{B}_1$.

Méthode 2 – Utilisation de la dérivation vectorielle.
Calcul de $\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)}$.
On rappelle que :

$$\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = a\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

Le calcul de $\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$ peut donc être réalisé ainsi :

$$\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_1}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\alpha}\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\alpha}\overrightarrow{j_1}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}\overrightarrow{j_1}$$

Méthode 3 – Calcul de $\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)}$.
S_1 et S_0 sont en liaison pivot de centre O_0, on a donc : $\overrightarrow{V(O_0, S_1/S_0)} = \overrightarrow{0}$.
En conséquence,

$$\overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(O_0, S_1/S_0)} + \overrightarrow{O_1O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \overrightarrow{0} - a\overrightarrow{i_1} \wedge \left(\dot{\alpha}\overrightarrow{k_0}\right) = a\dot{\alpha}\overrightarrow{j_1}$$

Correction

Calcul de $\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)}$.
On a :

$$\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)} = \overrightarrow{V(G, S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(G, S_1/S_0)}$$

Calculons $\overrightarrow{V(G, S_1/S_0)}$:

$$\overrightarrow{V(G, S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(O_1, S_1/S_0)} + \overrightarrow{GO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}\overrightarrow{j_1} - \left(b\overrightarrow{i_2} + c\overrightarrow{k_2}\right) \wedge \left(\dot{\alpha}\overrightarrow{k_0}\right)$$

$$\overrightarrow{V(G, S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}\overrightarrow{j_1} + b\dot{\alpha}\sin(\beta + \pi/2)\overrightarrow{j_1} + c\dot{\alpha}\sin\beta\overrightarrow{j_1} = \dot{\alpha}\left(a + b\cos\beta + c\sin\beta\right)\overrightarrow{j_1}$$

Par ailleurs calculons $\overrightarrow{V(G, S_2/S_1)}$:

$$\overrightarrow{V(G, S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(O_1, S_2/S_1)} + \overrightarrow{GO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = -\left(b\overrightarrow{i_2} + c\overrightarrow{k_2}\right) \wedge \left(\dot{\beta}\overrightarrow{j_1}\right) = -\dot{\beta}\left(b\overrightarrow{k_2} - c\overrightarrow{i_2}\right)$$

Au final,

$$\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)} = \dot{\alpha}\left(a + b\cos\beta + c\sin\beta\right)\overrightarrow{j_1} - \dot{\beta}\left(b\overrightarrow{k_2} - c\overrightarrow{i_2}\right)$$

Il est aussi possible de calculer $\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)}$ ainsi :

$$\overrightarrow{V(G, S_2/S_0)} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0G}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$$