Application 1
Éolienne bipale – Corrigé

Émilien Durif.

Question 1 Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

Correction

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Correction

On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ($E = \{1+2+3\}$) en projection sur l'axe $\left(K, \overrightarrow{z_0}\right)$: $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(K, \bar{E} \rightarrow E\right)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\delta\left(K, E/R_0\right)} \cdot \overrightarrow{z_0}$
$\Leftrightarrow C_m = \left(\overrightarrow{\delta\left(K, 1/R_0\right)} + \overrightarrow{\delta\left(K, 2/R_0\right)} + \overrightarrow{\delta\left(K, 3/R_0\right)}\right) \cdot \overrightarrow{z_0}$.

Question 3 Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment cinétique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **1**, notée $\overrightarrow{\sigma\left(K, 1/0\right)} \cdot \overrightarrow{z_0}$.

Correction

- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $\left(K, \overrightarrow{z_0}\right)$:
- $\overrightarrow{\sigma\left(K, 1/0\right)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \left(\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0)\right) \cdot \overrightarrow{z_0} = \left(\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_0}\right) \cdot \overrightarrow{z_0}$.

Or on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe $\left(K, \overrightarrow{z}\right)$ soit : $\bar{\bar{I}}_K(1) \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{z_0} = J$.

Ainsi : $\overrightarrow{\sigma\left(K, 1/0\right)} \cdot \overrightarrow{z_0} = J\dot{\alpha}$.

Remarque

En considérant que $\bar{\bar{I}}_K(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & J \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$, $\bar{\bar{I}}_K(1)\overrightarrow{\Omega\left(1/0\right)} = \begin{pmatrix} -E_1\dot{\alpha} \\ -D_1\dot{\alpha} \\ J\dot{\alpha} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\sigma\left(K, 1/0\right)} \cdot \overrightarrow{z_0} = J\dot{\alpha}$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma\left(K, 2/0\right)}$ calculé au point K de l'hélice **2** dans son mouvement par rapport à **0**.

Correction

- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- On connaît l'opérateur d'inertie en G, on calcule donc : $\overrightarrow{\sigma\left(G, 2/0\right)}$:$\overrightarrow{\sigma\left(G, 2/0\right)} = \bar{\bar{I}}_G(2) \cdot \overrightarrow{\Omega}(2/0)$.
- On calcule $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$: $\overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha}\left(\cos\beta\overrightarrow{z_2} + \sin\beta\overrightarrow{y_2}\right)$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma\left(G, 2/0\right)}$: $\overrightarrow{\sigma\left(G, 2/0\right)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)}$

$$= \begin{pmatrix} A\cdot\dot\beta \\ B\cdot\dot\alpha\cdot\sin\beta \\ C\cdot\dot\alpha\cdot\cos\beta \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)}.$$

- On calcule $\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}$:
  - $\overrightarrow{\sigma(K,2/0)} = \overrightarrow{\sigma(G,2/0)} + \overrightarrow{KG}\wedge\overrightarrow{R_c}(2/0) = \overrightarrow{\sigma(G,2/0)} + a\cdot\overrightarrow{x_1}\wedge M\cdot\overrightarrow{V}(G\in 2/0)$
  - On calcule $\overrightarrow{V}(G\in 2/0)$: $\overrightarrow{V}(G\in 2/0) = \overrightarrow{V}(K\in 2/0) + \overrightarrow{GK}\wedge\overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{0} - a\cdot\overrightarrow{x_1}\wedge\left(\dot\beta\cdot\overrightarrow{x}_{1,2} + \dot\alpha\cdot\overrightarrow{z}_1\right)$
    $= a\cdot\dot\alpha\overrightarrow{y}_1$
  - On calcule $a\cdot\overrightarrow{x_1}\wedge M\cdot\overrightarrow{V}(G\in 2/0)$: $a\cdot\overrightarrow{x_1}\wedge M\cdot\overrightarrow{V}(G\in 2/0) = a\cdot\overrightarrow{x_1}\wedge M\left(a\cdot\dot\alpha\overrightarrow{y}_1\right) = M\cdot a^2\cdot\dot\alpha\cdot\overrightarrow{z_1}$
  - On en déduit $\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}$: $\overrightarrow{\sigma(K,2/0)} = \begin{pmatrix} A\cdot\dot\beta \\ B\cdot\dot\alpha\cdot\sin\beta + M\cdot a^2\cdot\dot\alpha\sin\beta \\ C\cdot\dot\alpha\cdot\cos\beta + M\cdot a^2\cdot\dot\alpha\cos\beta \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)}$

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K,3/0)}$

Correction

- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi $\overrightarrow{\sigma(Q,3/0)} = \overrightarrow{0}$.
- $\overrightarrow{\sigma(K,3/0)} = \overrightarrow{KQ}\wedge m\cdot\overrightarrow{V}(Q\in 3/0)$:
  - On calcule $\overrightarrow{KQ}$: $\overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a\cdot\overrightarrow{x_1} - b\cdot\overrightarrow{z_2}$
  - On calcule $\overrightarrow{V}(Q\in 3/0)$: $\overrightarrow{V}(Q\in 3/0) = \overrightarrow{V}(Q\in 3/2) + \overrightarrow{V}(Q\in 2/1) + \overrightarrow{V}(Q\in 1/0)$
    $= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{V}(G\in 2/1) + \overrightarrow{QG}\wedge\overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{V}(G\in 1/0) + \overrightarrow{QG}\wedge\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \overrightarrow{0} + b\cdot\overrightarrow{z_2}\wedge\dot\beta\cdot\overrightarrow{x}_2 + a\cdot\dot\alpha\cdot\overrightarrow{y}_1 + b\cdot\overrightarrow{z_2}\wedge\dot\alpha\cdot\overrightarrow{z_1} = b\cdot\dot\beta\cdot\overrightarrow{y_2} + a\cdot\dot\alpha\cdot\overrightarrow{y}_1 - b\cdot\dot\alpha\sin\beta\cdot\overrightarrow{x}_{1,2}$
  - On calcule $\overrightarrow{KQ}\wedge m\overrightarrow{V}(Q\in 3/0)$:
    $\overrightarrow{KQ}\wedge m\overrightarrow{V}(Q\in 3/0) = m\cdot\left[a\cdot\overrightarrow{x_1} - b\cdot\overrightarrow{z_2}\right]\wedge\left[b\cdot\dot\beta\cdot\overrightarrow{y_2} + a\cdot\dot\alpha\cdot\overrightarrow{y}_1 - b\cdot\dot\alpha\sin\beta\cdot\overrightarrow{x}_{1,2}\right]$
    $= m\left[a\cdot b\cdot\overrightarrow{z_2} + a^2\cdot\dot\alpha\cdot\overrightarrow{z_1} + b^2\cdot\dot\beta\cdot\overrightarrow{x}_2 + b\cdot a\cdot\dot\alpha\cdot\cos\beta\cdot\overrightarrow{x_1} + b^2\cdot\dot\alpha\sin\beta\cdot\overrightarrow{y_2}\right]$
- $\overrightarrow{\sigma(K,3/0)} = m\left[a\cdot b\cdot\dot\beta\overrightarrow{z_2} + a^2\cdot\dot\alpha\cdot\overrightarrow{z_1} + b^2\cdot\dot\beta\cdot\overrightarrow{x}_2 + b\cdot a\cdot\dot\alpha\cdot\cos\beta\cdot\overrightarrow{x_1} + b^2\cdot\dot\alpha\sin\beta\cdot\overrightarrow{y_2}\right]$

Question 6 Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support **0**, notée $\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\delta(K,1/0)}$.

Correction

$$\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\delta(K,1/0)} = \overrightarrow{z_0}\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K,1/0)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\sigma(K,1/0)}}{dt}\right]_{R_0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[z_0\right]_{\mathcal{R}_0}\cdot\overrightarrow{\sigma(K,1/0)} = J\cdot\ddot\alpha$$

Question 7 Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment dynamique $\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\delta(K,2/0)}$.

Correction

$$\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\delta(K,2/0)} = \overrightarrow{z_0}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[z_0\right]_{\mathcal{R}_0}\cdot\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}$$

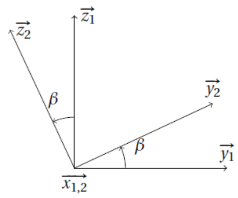
Or, $\overrightarrow{z_{0,1}} = \cos\beta \cdot \overrightarrow{z_2} + \sin\beta \cdot \overrightarrow{y_2}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} &= \begin{pmatrix} A \cdot \dot\beta \\ B \cdot \dot\alpha \cdot \sin\beta + M \cdot a^2 \cdot \dot\alpha \sin\beta \\ C \cdot \dot\alpha \cdot \cos\beta + M \cdot a^2 \cdot \dot\alpha \cos\beta \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)} \\ &= \dot\alpha \left[B \cdot \sin^2\beta + C \cdot \cos^2\beta + M \cdot a^2\right]\end{aligned}$$

d'où,

$$\boxed{\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot\alpha \left[B \cdot \sin^2\beta + C \cdot \cos^2\beta + M \cdot a^2\right] + 2 \cdot \dot\alpha\dot\beta \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta \left[B - C\right].}$$

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon $\overrightarrow{z_0}$: $\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{z_{0,1}} \cdot \overrightarrow{z_2} &= \cos\beta \\ \overrightarrow{z_{0,1}} \cdot \overrightarrow{z_1} &= 1 \\ \overrightarrow{z_{0,1}} \cdot \overrightarrow{x}_0 &= 0 \\ \overrightarrow{z_{0,1}} \cdot \overrightarrow{x_1} &= 0 \\ \overrightarrow{z_1} \cdot \overrightarrow{y_2} &= \sin\beta\end{aligned}$$

Correction

On trouve alors :
$\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)} = m \dfrac{\mathrm{d}\left[a \cdot b \cdot \dot\beta \cos\beta + a^2 \cdot \dot\alpha + b^2 \cdot \dot\alpha \sin^2\beta\right]}{\mathrm{d}t}$
$= m \left[a \cdot b \cdot \left(\ddot\beta \cos\beta - \dot\beta^2 \sin\beta\right) + a^2\ddot\alpha + b^2 \cdot \left(\ddot\alpha \sin^2\beta + 2\dot\alpha\dot\beta \sin\beta\cos\beta\right)\right]$

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice **2** ($\dot\beta$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre **0** et **1**) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Correction

Le théorème du moment dynamique autour de l'axe $\left(K, \overrightarrow{z_{0,1}}\right)$ donne : $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot\beta^2 \sin\beta$.