

# Application 0

## Conducteur virtuel pour véhicule automobile – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2014.

### Objectif

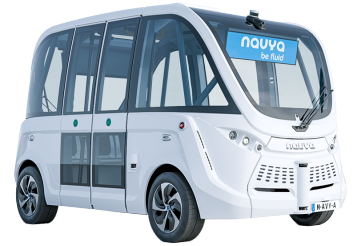
L'objet de cette partie est de déterminer un modèle mécanique du véhicule en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au véhicule. L'idée est d'utiliser un modèle mécanique relativement simple, associé à une commande très robuste.

C1-05

C2-09

### Modélisation du comportement dynamique du véhicule

**Question 1** Déterminer les composantes dans le repère  $\mathcal{R}_L$  du moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma}(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g)$  au point  $O$ , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_g$ , en fonction de  $\dot{\psi}$ ,  $\alpha$ ,  $h$ ,  $V$  et des caractéristiques inertielles.



### Correction

La matrice d'inertie étant donnée en  $G$ , commençons par calculer  $\overrightarrow{\sigma}(G, \text{VH}/\mathcal{R}_g) = I_G(\text{VH}) \overrightarrow{\Omega}(\text{VH}/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \dot{\psi} \vec{Z}_g = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$ .

Il faut alors déplacer le moment cinétique. On aura pour cela besoin de  $\overrightarrow{V}(G, \text{VH}/\mathcal{R}_g) = \overrightarrow{V}(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g) + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega}(\text{VH}/\mathcal{R}_g) = V\vec{U} - h\vec{Z}_g \wedge \dot{\psi}\vec{Z}_g = V\vec{U}$ .

Au final,  $\overrightarrow{\sigma}(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g) = \overrightarrow{\sigma}(G, \text{VH}/\mathcal{R}_g) + \overrightarrow{GO} \wedge M\vec{V} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + h\vec{Z}_g \wedge MV\vec{U} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} - hMV \sin\alpha \\ hMV \cos\alpha \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$ .

– Je note  $\vec{V}$  le vecteur tel que  $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{Z}_L)$  est une base. –

**Question 2** Déterminer les composantes dans le repère  $\mathcal{R}_L$  du moment dynamique  $\overrightarrow{\delta}(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g)$  au point  $O$ , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_g$ , en fonction de  $\dot{\psi}$ ,  $\ddot{\psi}$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\alpha$ ,  $h$ ,  $V$  et des caractéristiques inertielles.

### Correction

On a en un point quelconque  $\overrightarrow{\delta}(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g) = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma}(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{V}(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g) \wedge M\overrightarrow{\Omega}(G, \text{VH}/\mathcal{R}_g)$ .

D'une part,  $\left[ \frac{d\vec{X}_L}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = \dot{\psi}\vec{Y}_L$  et  $\left[ \frac{d\vec{Y}_L}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = -\dot{\psi}\vec{X}_L$ . On a donc  $\left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma}(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = \begin{pmatrix} -E\ddot{\psi} - \dot{\alpha}hMV \cos\alpha - \dot{\psi}(hMV \cos\alpha) \\ -\dot{\alpha}hMV \sin\alpha + \dot{\psi}(-E\dot{\psi} - hMV \sin\alpha) \\ C\ddot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$ .

D'autre part,  $\overrightarrow{V}(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g) \wedge M\overrightarrow{\Omega}(G, \text{VH}/\mathcal{R}_g) = V\vec{U} \wedge M\dot{\psi}\vec{Z}_g = \vec{0}$ .

$$\text{Au final, } \overrightarrow{\delta(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g)} = \begin{pmatrix} -E\ddot{\psi} - (\dot{\alpha} + \dot{\psi}) hMV \cos \alpha \\ -E\dot{\psi}^2 - (\dot{\alpha} + \dot{\psi}) hMV \sin \alpha \\ C\ddot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}.$$

**Question 3** On note  $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)}$  le vecteur accélération de appartenant à (VH) dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_G$ . Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \overrightarrow{Y_L}$  en fonction de  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\alpha$ ,  $V$ . Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par  $\alpha = 0$ ,  $\psi = 0$  et  $\beta = 0$ .

#### Correction

On a vu que  $\overrightarrow{V(G, \text{VH}/\mathcal{R}_g)} = V\overrightarrow{U}$ , donc  $\overrightarrow{\Gamma(G, \text{VH}/\mathcal{R}_g)} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})\overrightarrow{V} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})(\cos \alpha \overrightarrow{Y_L} - \sin \alpha \overrightarrow{X_L})$ . On a donc  $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \overrightarrow{Y_L} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha}) \cos \alpha$ . En linéarisant cette relation, on a  $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \overrightarrow{Y_L} = V(\dot{\psi} + \dot{\alpha})$ .

**Question 4** En admettant que l'angle de dérive de la roue avant s'écrit :  $\delta_{12} \simeq \alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}$  et celui de la roue arrière  $\delta_{34} \simeq \alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}$ , en déduire l'expression de  $\overrightarrow{R(\overline{\text{VH}} \rightarrow \text{VH})} \cdot \overrightarrow{Y_L}$ . Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par  $\alpha = 0$ ,  $\psi = 0$  et  $\beta = 0$ .

#### Correction

On a  $Y_{12} = -2D\delta_{12}$  et  $Y_{34} = -2D\delta_{34}$ . En conséquence,  $Y_{12} = -2D\left(\alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right)$  et  $Y_{34} = -2D\left(\alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$ .  
Au final,  $\overrightarrow{R(\overline{\text{VH}} \rightarrow \text{VH})} \cdot \overrightarrow{Y_L} = -2D\left(\alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right) - 2D\left(\alpha - \frac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right) = -2D\left(2\alpha - \beta + \frac{\ell_1 - \ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$ .

**Question 5** Montrer que l'on obtient le système d'équations différentielles suivant en indiquant clairement (point, vecteur unitaire, résultante ou moment, ...) à quelle équation scalaire issue du PFD correspond chaque relation :

$$\begin{cases} \left(MV + \frac{2D(\ell_1 - \ell_2)}{V}\right)\dot{\psi} + MV\dot{\alpha} + 4D\alpha = 2D\beta \\ C\ddot{\psi} + \frac{2D(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{V}\dot{\psi} + 2D(\ell_1 - \ell_2)\alpha = 2D\ell_1\beta \end{cases}.$$

Avec les valeurs numériques :  $\ell_1 = 1 \text{ m}$ ,  $\ell_2 = 1,5 \text{ m}$ ,  $D = 21\,000 \text{ N rad}^{-1}$ ,  $C = 3100 \text{ kg m}^2$ ,  $M = 1500 \text{ kg}$ ,  $V = 15 \text{ m s}^{-1}$ , on obtient le système d'équations différentielles suivant, permettant de décrire l'évolution du véhicule (données en unités S.I.) :

$$\begin{cases} 211\dot{\psi}(t) + 225\dot{\alpha}(t) + 840\alpha(t) = 420\beta(t) \\ 31\ddot{\psi}(t) + 91\dot{\psi}(t) - 210\alpha(t) = 420\beta(t) \end{cases}.$$

**Correction**

La première équation correspond au théorème de la résultante dynamique appliqué à VH en projection sur  $\vec{Y}_L$ .

La seconde équation correspond au théorème du moment dynamique appliqué à VH en O projection sur  $\vec{Z}_L$ .

**Question 6** En supposant que les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression numérique de la fonction de transfert  $H_2(p)$  entre l'angle de lacet  $\psi(p)$  et l'angle de braquage  $\beta(p)$  de la roue avant :  $H_2(p) = \frac{\psi(p)}{\beta(p)}$ . Discuter de la stabilité de ce modèle.

**Correction**

Dans le domaine de Laplace, on a

$$\begin{cases} 211p\psi(p) + 225p\alpha(p) + 840\alpha(p) = 420\beta(p) \\ 31p^2\psi(p) + 91p\psi(p) - 210\alpha(p) = 420\beta(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (225p + 840)\alpha(p) = 420\beta(p) - 211p\psi(p) \\ (31p^2 + 91p)\psi(p) - 210\alpha(p) = 420\beta(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(p) = \frac{420\beta(p) - 211p\psi(p)}{225p + 840} \\ (31p^2 + 91p)\psi(p) - 210 \frac{420\beta(p) - 211p\psi(p)}{225p + 840} = 420\beta(p) \end{cases}$$

$$\left( 31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840} \right) \psi(p) - 210 \frac{420\beta(p)}{225p + 840} = 420\beta(p)$$

$$\Rightarrow \left( 31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840} \right) \psi(p) + \left( \frac{-210 \times 420}{225p + 840} - 420 \right) \beta(p) = 0$$

$$\Rightarrow H_2(p) = \frac{\frac{210 \times 420}{225p + 840} + 420}{31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}} = \frac{210 \times 420 + 420(225p + 840)}{(225p + 840)(31p^2 + 91p) + 210 \times 211p}$$

$$= \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p((225p + 840)(31p + 91) + 210 \times 211)}$$

$$= \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p(225 \times 31p^2 + 840 \times 31p + 91 \times 225p + 91 \times 840 + 210 \times 211)}$$

$$= \frac{441000 + 94500p}{p(6975p^2 + 46515p + 120750)}$$