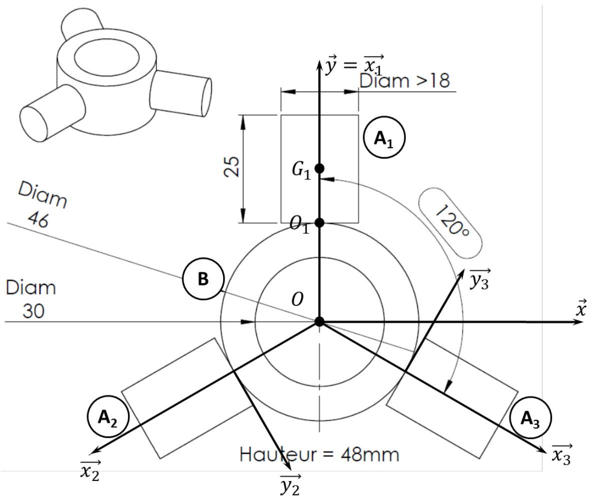
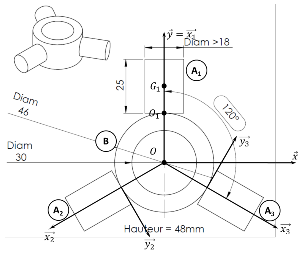
Application 1
Triaxe – Corrigé

On donne le plan d'un triaxe constitué des 3 axes A_1, A_2, A_3 et du moyeu central noté M. On note T l'ensemble.

B2-10





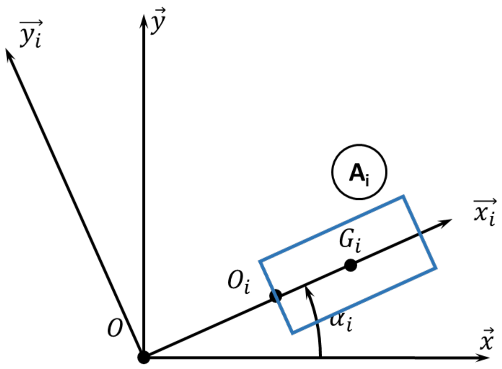
On note :

- $\vec{z}$ l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On se place ci-dessus dans le plan de symétrie $\left(O, \vec{x}, \vec{y}\right)$;
- $\mathcal{R}_i$ le repère $\left(O_i; \vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i}\right)$ et $\mathcal{B}_i$ la base associée.

TOUS LES CALCULS SE FERONT DE MANIÈRE LITTERALE !

- $D_1 = 18\,\text{mm}$ et $H_1 = 25\,\text{mm}$.
- $D = 46\,\text{mm}$, $d = 30\,\text{mm}$ et $H = 48\,\text{mm}$.
- $\alpha_1 = \left(\vec{x}, \vec{x_1}\right) = 90°$, $\alpha_2 = \left(\vec{x}, \vec{x_2}\right) = -150°$ et $\alpha_3 = \left(\vec{x}, \vec{x_3}\right) = -30°$.

On donne ci-dessous le paramétrage d'un axe A_i.



Question 1 Déterminer (sans calcul) la position du centre de gravité du triaxe.

Correction

Le plan $\left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{z} = 0$

Le plan $\left(O, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{x} = 0$

Reste la coordonnée selon $\overrightarrow{y}$.

Les plans $\left(O, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x_2}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x_3}\right)$ étant plans de symétrie, on a $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{y_2} = 0$ et $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{y_3} = 0$.

Or $\overrightarrow{OG} = y_g \overrightarrow{y} = y_g \cos\alpha_2 \overrightarrow{y_2} - y_g \sin\alpha_2 \overrightarrow{x_2}$. Il en résulte que $y_g \cos\alpha_2 = 0$ et donc nécessairement $y_g = 0$ car $\alpha_2 \neq 0$.

Question 2 Déterminer analytiquement la position du centre de gravité G_i du solide A_i dans le repère $\mathcal{R}_i$.

Correction

On pourrait répondre directement en disant que le solide à 3 plans de symétrie orthogonaux entre eux. En utilisant la définition on a :

- $M_1 = \mu H_1 \pi \dfrac{D_1^2}{4}$;
- en coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{O_i P_i} = x \overrightarrow{x_i} + \rho \cos\theta \overrightarrow{y_i} + \rho \sin\theta \overrightarrow{z_i}$ et $\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x$ avec $x \in [0, H_1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, D_1/2]$;
- $m_i x_{G_i} = \mu \iiint x_P dV = \mu \iiint x \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x = \mu \dfrac{H_1^2}{2} 2\pi \dfrac{D_1^2}{8}$;
- $m_i y_{G_i} = \mu \iiint y_P dV = \mu \iiint \rho \cos\theta \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x = 0$;
- $m_i z_{G_i} = \mu \iiint z_P dV = \mu \iiint \rho \sin\theta \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x = 0$.

Au final, $\mu H_1 \pi \dfrac{D_1^2}{4} x_{G_1} = \mu \dfrac{H_1^2}{2} 2\pi \dfrac{D_1^2}{8} \Leftrightarrow x_{G_1} = \dfrac{H_1}{2}$.

Question 3 Déterminer (sans calcul) la **forme** de la matrice d'inertie du triaxe.

Correction

Le plan $\left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $E = \iiint xz\mathrm{d}m = 0$ et $D = \iiint yz\mathrm{d}m = 0$.

Le plan $\left(O, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $E = \iiint xz\mathrm{d}m = 0$ et $F = \iiint xy\mathrm{d}m = 0$.

La matrice est donc diagonale et de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

Question 4 Déterminer analytiquement la matrice d'inertie du solide A_i en G_i dans $\mathcal{R}_i$. On la note $I_{G_i}(A_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_i}$ où les constantes seront à déterminer littéralement.

Correction

Le solide étant axisymétrique, on a : $D_i = E_i = F_i = 0$ et $C_i = B_i$. D'où $I_{G_i}(A_1) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & B_i \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$.

Calculons $A_i = \iiint \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m = \mu \iiint \left(\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta\right) \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x$

$= \mu \iiint \rho^3 \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z = \mu \left[\dfrac{\rho^4}{4}\right]_0^{D_1/2} 2\pi H_1 = \mu \dfrac{D_1^4}{16\cdot 4} 2\pi H_1 = M_1 \dfrac{D_1^2}{8}$.

Calculons $B_i = \iiint \left(x^2+z^2\right) \mathrm{d}m = \mu \iiint \left(x^2+\rho^2 \sin^2\theta\right) \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x$

$B_x = \mu \iiint x^2 \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x + \mu \iiint \rho^2 \sin^2\theta \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x = \mu \iiint x^2 \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x = \mu \dfrac{H_1^3}{4\cdot 3} \dfrac{D_1^2}{8} 2\pi = M \dfrac{H_1^2}{12}$

$B_z = \mu \iiint \rho^2 \sin^2\theta \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x = \mu \iiint \rho^3 \dfrac{1-\cos 2x}{2} \theta \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x = \mu \iiint \dfrac{\rho^3}{2} \theta \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x = \mu \dfrac{D_i^4}{2\cdot 16\cdot 4} 2\pi H_1 = M \dfrac{D_i^2}{16}$.

Au final, $A_i = M_1 \dfrac{D_1^2}{8}$ et $B_i = M\left(\dfrac{H_1^2}{12} + \dfrac{D_1^2}{16}\right)$.

Question 5 Déterminer $I_{G_i}\left(A_i\right)$ dans la base $\mathscr{B}\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ puis $I_O\left(A_i\right)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Correction

On a $\overrightarrow{x_i} = \cos\alpha \overrightarrow{x} + \sin\alpha \overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{y_i} = \cos\alpha \overrightarrow{y} - \sin\alpha \overrightarrow{x}$. En conséquences, on a : $P_{10} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc $I_{G_1}\left(A_1\right)_{\mathscr{R}} = P_{10}^{-1} I_{G_1}\left(A_1\right)_{\mathscr{R}_1} P_{10}$.

$$I_{G_1}\left(A_1\right)_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1\cos\alpha & -A_1\sin\alpha & 0 \\ B_1\sin\alpha & B_1\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1\cos^2\alpha + B_1\sin^2\alpha & -A_1\sin\alpha\cos\alpha + B_1\cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ -A_1\sin\alpha\cos\alpha + B_1\cos\alpha\sin\alpha & A_1\sin^2\alpha + B_1\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{OG_i} = \dfrac{H+D}{2}\overrightarrow{x_i} = \dfrac{H+D}{2}\left(\cos\alpha\overrightarrow{x} + \sin\alpha\overrightarrow{y}\right)$; donc :

$$I_O\left(A_i\right)_{\mathscr{R}} = I_{G_i}\left(A_i\right)_{\mathscr{R}} + M_1 \begin{pmatrix} \left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right) & 0 \\ \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right) & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 + \left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}}.$$

$$I_O\left(A_i\right)_{\mathscr{R}} = I_{G_i}\left(A_i\right)_{\mathscr{R}} + M_1 \begin{pmatrix} \left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 & \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}}.$$

Au final, $I_O\left(A_i\right)_{\mathscr{R}} =$

$$\begin{pmatrix} A_1\cos^2\alpha + B_1\sin^2\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 & \left(B_1-A_1\right)\sin\alpha\cos\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ \left(B_1-A_1\right)\sin\alpha\cos\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & A_1\sin^2\alpha + B_1\cos^2\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

On note $I_O\left(A_i\right)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} f(\alpha) & fg(\alpha) & 0 \\ fg(\alpha) & g(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & h(\alpha) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

Question 6 Déterminer $I_O\left(B\right)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Question 7 Proposer une méthode pour déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base $\mathcal{B}$.

Question 8 Déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base $\mathcal{B}$.

Correction

Question 9 Déterminer $I_O\left(M\right)$ la matrice d'inertie du moyeu M.

Correction

Question 10 Déterminer $I_O\left(T\right)$ la matrice d'inertie du triaxe T.

Correction