Application 1
Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant★ – Corrigé

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

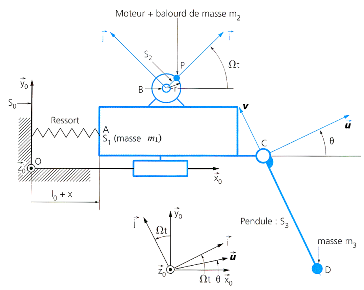
Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide S_1, de masse m_1 en liaison glissière parfaite avec un support S_0, fixe par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$ supposé galiléen.

Le solide S_1 est rappelé par un ressort de longueur libre l_0 et de raideur k. Une masse ponctuelle m_2 excentrée, placée en P, tourne sur un rayon r et est entraînée à vitesse constante Ω. Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur S_2.

Un pendule simple de longueur L, porte à son extrémité D une masse concentrée m_3, l'ensemble constitue le solide S_3, en liaison pivot parfaite d'axe $\left(C,\overrightarrow{z_0}\right)$ avec S_1.

Les masses autres que m_1, m_2 et m_3 sont négligées.



Objectif

Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse du système.

Correction

Question 2 Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x, θ et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles.

Correction

Question 3 Déterminer ces deux équations.

Correction

On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$ en supposant que x, θ, $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

Question 4 Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

Correction

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme $x(t) = A\cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B\cos(\Omega t)$.

Question 5 Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B.

Correction

Question 6 Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t) = 0$ en régime forcé.

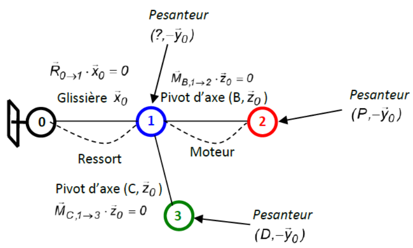
Correction

Éléments de correction

1. $(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3 L\ddot{\theta}\cos\theta - m_3 L\dot{\theta}^2 \sin\theta = m_2 r\Omega^2 \cos(\Omega t)$ et $\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$.
2. $(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3 L\ddot{\theta} = m_2 r\Omega^2 \cos(\Omega t)$ et $\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0$.
3. $A = \dfrac{m_2 r\Omega^2\left(-L\Omega^2 + g\right)}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}$ et $B = \dfrac{m_2 r\Omega^2}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}$.
4. $L = \dfrac{g}{\Omega^2}$.

1. Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x, θ , leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède trois degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver trois équations du mouvement indépendantes.
Une équation est déjà imposée : $\Omega = cte$. Reste à déterminer $\theta(t)$ et $x(t)$.

On isole Σ =1+2+3.
Le théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ en projection sur $\vec{x}_0$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{R}_{d\,\Sigma/0}\cdot\vec{x}_0 = \vec{R}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\cdot\vec{x}_0}$$

On isole 3.
Le théorème du moment dynamique appliqué à 3 au point C et en projection sur $\vec{z}_0$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 3 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0 = \vec{M}_{C,\overline{3}\to3}\cdot\vec{z}_0}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{R}_{\overline{(1+2+3)}\to(1+2+3)}\cdot\vec{x}_0$:

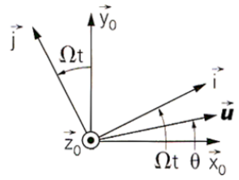
$\left\{T_{0\to1}\right\} = \underset{\forall P}{\begin{cases}\vec{R}_{0\to1}\\ \vec{M}_{P,0\to1}\end{cases}}$ *avec* $\vec{R}_{0\to1}\cdot\vec{x}_0 = 0$ $\qquad \left\{T_{0\xrightarrow{ressort}1}\right\} = \underset{\forall P\in(A,\vec{x}_0)}{\begin{cases}-kx\vec{x}_0\\ \vec{0}\end{cases}}$

$\left\{T_{pes\to1}\right\} = \underset{\forall P\in(G_1,\vec{y}_0)}{\begin{cases}-m_1 g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{cases}}$ $\qquad \left\{T_{pes\to2}\right\} = \underset{\forall P\in(G_2,\vec{y}_0)}{\begin{cases}-m_2 g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{cases}}$ $\qquad \left\{T_{pes\to3}\right\} = \underset{\forall P\in(G_3,\vec{y}_0)}{\begin{cases}-m_3 g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{cases}}$

$\vec{R}_{\overline{(1+2+3)}\to(1+2+3)}\cdot\vec{x}_0 = -kx$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0$:

$$\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = \sum_{i=1}^{3} m_i \vec{\Gamma}_{G_i \in i/0} \cdot \vec{x}_0$$



Soit $\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = m_1 \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} \cdot \vec{x}_0 + m_2 \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} \cdot \vec{x}_0 + m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} \cdot \vec{x}_0$

$$\vec{V}_{G_1 \in 1/0} = \dot{x}\vec{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} = \ddot{x}\vec{x}_0}$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/1} = \cancel{\vec{V}_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{G_2 B} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -r\vec{i} \wedge \Omega \vec{z}_0 = r\Omega \vec{j}$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/0} = \vec{V}_{G_2 \in 2/1} + \vec{V}_{G_2 \in 1/0} = r\Omega \vec{j} + \dot{x}\vec{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} = \ddot{x}\vec{x}_0 - r\Omega^2 \vec{i}} \quad \text{car } \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_0 = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{j} = \Omega \vec{z}_0 \wedge \vec{j} = -\Omega \vec{i}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/1} = \cancel{\vec{V}_{C \in 3/1}} + \overrightarrow{G_3 C} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} = L\vec{v} \wedge \dot{\theta}\vec{z}_0 = L\dot{\theta}\vec{u}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{V}_{G_3 \in 3/1} + \vec{V}_{G_3 \in 1/0} = L\dot{\theta}\vec{u} + \dot{x}\vec{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = \ddot{x}\vec{x}_0 + L\ddot{\theta}\vec{u} + L\dot{\theta}^2\vec{v}} \quad \text{car } \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_0 = \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{u} = \dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge \vec{u} = \dot{\theta}\vec{v}$$

Théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ=S1 + S2 + S3 en projection sur $\vec{x}_0$: $\vec{R}_{d\,\Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{R}_{\bar{\Sigma} \to \Sigma} \cdot \vec{x}_0$

$$-kx = m_1 \ddot{x} + m_2\left(\ddot{x} - r\Omega^2 \cos(\Omega t)\right) + m_3\left(\ddot{x} + L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2 \sin\theta\right)$$

$$\boxed{(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3 L\ddot{\theta}\cos\theta - m_3 L\dot{\theta}^2 \sin\theta = m_2 r\Omega^2 \cos(\Omega t)}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{C,\bar{3}\to 3} \cdot \vec{z}_0$:

$$\{T_{2\to 3}\} = \underset{\forall P \in (C,\vec{z}_0)}{\begin{cases} \vec{R}_{2\to 3} \\ \vec{M}_{P,2\to 3} \end{cases}} \; avec \;\; \vec{M}_{P,2\to 3} \cdot \vec{z}_0 = 0 \qquad \{T_{pes\to 3}\} = \underset{\forall P \in (G_3,\vec{y}_0)}{\begin{cases} -m_3 g\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases}}$$

$$\vec{M}_{C,pes\to 3} \cdot \vec{z}_0 = \left(\cancel{\vec{M}_{G_3,pes\to 3}} + \overrightarrow{CG_3} \wedge -m_3 g\vec{y}_0\right) \cdot \vec{z}_0 = \left[-L\vec{v} \wedge -m_3 g\vec{y}_0\right] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 g L \sin\theta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{\delta}_{C,3/0} \cdot \vec{z}_0$:

$\vec{\delta}_{G_3,3/0} = \vec{0}$ (masse ponctuelle)

$$\vec{\delta}_{C,3/0} \cdot \vec{z}_0 = \left[\vec{\delta}_{G_3,3/0} + \overrightarrow{CG_3} \wedge \vec{R}_{d\,3/0}\right] \cdot \vec{z}_0 = \left[-L\vec{v} \wedge m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0}\right] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 L\left[\vec{z}_0 \wedge \vec{v}\right] \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L\vec{u} \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L\left[\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta}\right]$$

Théorème du moment dynamique appliqué à *S3* au point C et en projection sur $\vec{z}_0$: $\vec{\delta}_{C,3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C,\bar{3}\to 3} \cdot \vec{z}_0$

$$-m_3 g L \sin\theta = m_3 L\left[\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta}\right] \qquad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$

2. Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

En considérant que $x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de la position d'équilibre $(x_0,\theta_0)=(0,0)$, et que le développement limité de $f(x)$ à l'ordre n en a est $f(x+a)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}x+\cdots+\frac{f^n(a)}{n!}x^n$, on a :

$$\text{ordre 0}:\begin{cases}\cos\theta=1\\ \sin\theta=0\end{cases}\quad \text{ordre 1}:\begin{cases}\cos\theta=1\\ \sin\theta=\theta\end{cases}\quad \text{ordre 2}:\begin{cases}\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}\\ \sin\theta=\theta\end{cases}\quad \text{ordre 3}:\begin{cases}\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}\\ \sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}\end{cases}$$

et $\dot{\theta}^2\approx 0$

Donc : $\boxed{(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+kx+m_3L\ddot{\theta}=m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)}$ et $\boxed{\ddot{x}+L\ddot{\theta}+g\theta=0}$

3. Déterminer le système d'équations permettant de calculer *A* et *B*.

En posant $x(t)=A\cos(\Omega t)$ et $\theta(t)=B\cos(\Omega t)$, on a : $\ddot{x}(t)=-A\Omega^2\cos(\Omega t)$ et $\ddot{\theta}(t)=-B\Omega^2\cos(\Omega t)$

Les deux équations obtenues précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases}-(m_1+m_2+m_3)A\Omega^2\cos(\Omega t)+kA\cos(\Omega t)-m_3LB\Omega^2\cos(\Omega t)=m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)\\ -A\Omega^2\cos(\Omega t)-LB\Omega^2\cos(\Omega t)+gB\cos(\Omega t)=0\end{cases}$$

Ce qui conduit à : $\begin{cases}\left[-(m_1+m_2+m_3)\Omega^2+k\right]A-m_3L\Omega^2B=m_2r\Omega^2\\ -A\Omega^2+\left(-L\Omega^2+g\right)B=0\end{cases}$

Soit :

$$\boxed{A=\frac{m_2r\Omega^2\left(-L\Omega^2+g\right)}{\left[-(m_1+m_2+m_3)\Omega^2+k\right]\left(-L\Omega^2+g\right)-m_3L\Omega^4}}$$

$$\boxed{B=\frac{m_2r\Omega^4}{\left[-(m_1+m_2+m_3)\Omega^2+k\right]\left(-L\Omega^2+g\right)-m_3L\Omega^4}}$$

4. Indiquer la condition que doit vérifier la longueur *L* afin d'assurer $x(t)=0$ en régime forcé.

On a $x(t)=0$ en régime forcé, si $A=0$.

Ce qui implique que : $A=\frac{m_2r\Omega^2\left(-L\Omega^2+g\right)}{\left[-(m_1+m_2+m_3)\Omega^2+k\right]\left(-L\Omega^2+g\right)-m_3L\Omega^4}$ Soit : $\boxed{L=\frac{g}{\Omega^2}}$

Dans ce cas $B=\frac{-m_2r}{m_3L}$ et $\theta(t)=B\cos(\Omega t)=\frac{-m_2r}{m_3L}\cos(\Omega t)$