

Application 1 :

Pompe à pistons axiaux – Corrigé

D'après É. Durif.

B2-16

Présentation

On considère, la pompe à pistons axiaux suivante. Nous avons retenu une modélisation avec 4 classes d'équivalence y compris le bâti.

On note n le nombre de classes d'équivalence hors bâti (ici $n = 3$). Dans cette étude, on se place directement dans la base $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ qui est en rotation par rapport à la base $B_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ autour de l'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ avec le paramètre de rotation θ . Le plateau inclinable est supposé fixe au cours du temps. On lui associe le repère $R_{0*} = (\vec{x}_{0*}, \vec{y}_{0*}, \vec{z}_{0*})$ qui est en rotation par rapport au repère $R_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ autour de l'axe \vec{y}_0 avec le paramètre angulaire α . On introduit le repère $R_{1*} = (\vec{x}_{1*}, \vec{y}_{1*}, \vec{z}_{1*})$ directement obtenu à partir de R_{0*} par une rotation autour de \vec{z}_{0*} et d'angle θ . On donne également : $\vec{AB} = L_1 \vec{z}_0$, $\vec{BC} = -R \vec{x}_1$, $\vec{CD} = \lambda \vec{z}_1$, $\vec{DE} = h \vec{z}_{1*}$.

- 0 : bâti;
- 1 : barillet;
- 2 : piston;
- 3 : poussoir.

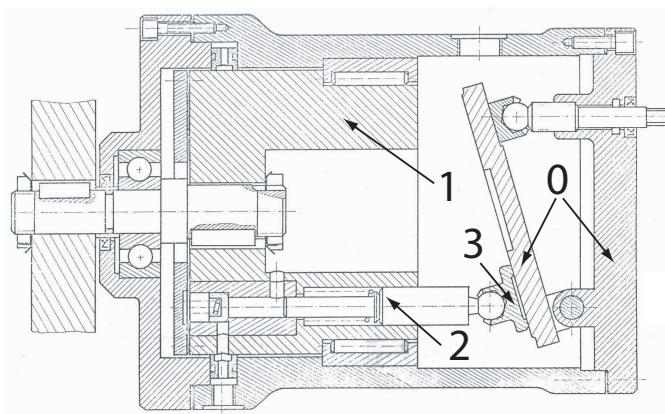


FIGURE 1 – Schéma technologique d'une pompe à pistons axiaux

Les liaisons entre les différentes classes d'équivalence permettent de modéliser le système avec le schéma cinématique ci-après.

- Les liaisons sont parfaites : sans frottements ni jeux.
- Le poids et les effets d'inerties sont négligés.
- On introduit une action de pression s'exerçant sur le piston 2 assimilable à un glisseur d'axe central (C, \vec{z}_1) et qui a pour résultante en effort : $\vec{F}_p = F_p \vec{z}_1$

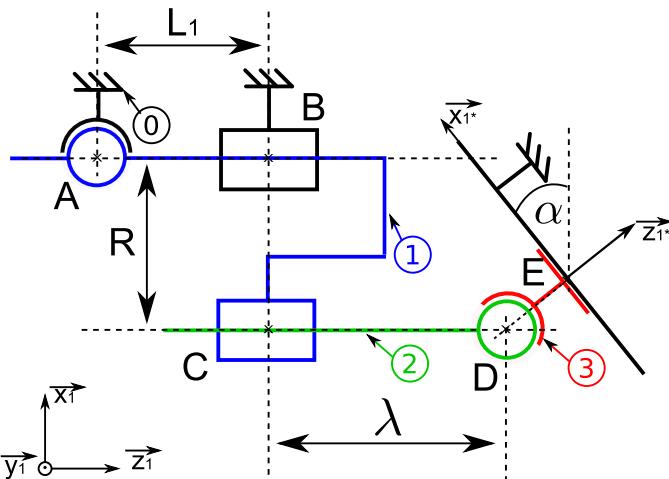


FIGURE 2 – Schéma cinématique d'une pompe à pistons axiaux

Etude préliminaire

Question 1 Tracer le graphe de structure du mécanisme.

Question 2 En utilisant les formules globales de l'hyperstatisme, déterminer le degré d'hyperstatisme en utilisant la méthode statique puis la méthode cinématique.

Étude statique

Question 3 Isoler successivement les pièces 1, 2 puis 3 et réaliser le PFS en B , C et D .

Question 4 Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

Étude cinématique

Question 5 Écrire les fermetures de chaînes associées au mécanisme.

Question 6 Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

Hyperstatisme

Question 7 Proposer des conditions géométriques permettant d'assurer l'assemblage du système.

Question 8 Proposer une modèle isostatique cinématiquement équivalent.

Bilan des actions mécanique pour chacune des classes d'équivalence

Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 1

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point B :

► Action de 0 sur 1 en A :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1A})\} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & 0 \\ Y_{A01} & 0 \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & L_1 Y_{A01} \\ Y_{A01} & -L_1 X_{A01} \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

► Action de 0 sur 1 en B :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1B})\} = \begin{Bmatrix} X_{B01} & L_{B01} \\ Y_{B01} & M_{B01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

► Action de 2 sur 1 en C :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & -R Y_{21} \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 2

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point C :

► Action de 3 sur 2 en D :

$$\{\mathcal{T}(S_3 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{32} & -\lambda Y_{32} \\ Y_{32} & \lambda X_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

► Action de 1 sur 2 en C :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} -X_{21} & -L_{21} \\ -Y_{21} & -M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

► Action de la pression en C :

$$\{\mathcal{T}(\text{pression} \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_p & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 3

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point D :

► Action de 2 sur 3 en D :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} = \begin{Bmatrix} -X_{32} & 0 \\ -Y_{32} & 0 \\ -Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1}$$

► Action de 0 sur 3 en E :

$$\{\mathcal{T}(S0 \rightarrow S3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_{1*}} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_{1*}} = \begin{Bmatrix} Z_{03} \sin(\alpha) & L_{03} \cos(\alpha) \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} \cos(\alpha) & -L_{03} \sin(\alpha) \end{Bmatrix}_{D,R_{1*}}$$

Résolution d'un système linéaire homogène

En appliquant successivement le principe fondamental de la statique pour chacun des trois ensemble on obtient un système de 18 équations :

(1)résultante suivant \vec{x}_1	$X_{A01} + X_{B01} + X_{C21} = 0$
(2)résultante suivant \vec{y}_1	$Y_{A01} + Y_{B01} + Y_{C21} = 0$
(3)résultante suivant \vec{z}_1	$Z_{A01} = 0$
(4)moment suivant (B, \vec{x}_1)	$L_1 Y_{A01} + L_{B01} + L_{C21} = 0$
(5)moment suivant (B, \vec{y}_1)	$-L_1 X_{A01} + M_{B01} + M_{C21} = 0$
(6)moment suivant (B, \vec{z}_1)	$-R Y_{C21} = 0$
(7)résultante suivant \vec{x}_1	$X_{D32} - X_{C21} = 0$
(8)résultante suivant \vec{y}_1	$Y_{D32} - Y_{C21} = 0$
(9)résultante suivant \vec{z}_1	$Z_{D32} + F_p = 0$
(10)moment suivant (C, \vec{x}_1)	$-\lambda Y_{D32} - L_{C21} = 0$
(11)moment suivant (C, \vec{y}_1)	$\lambda X_{D32} - M_{C21} = 0$
(12)moment suivant (C, \vec{z}_1)	$0 = 0$
(13)résultante suivant \vec{x}_1	$-X_{D32} + Z_{E03} \sin(\alpha) = 0$
(14)résultante suivant \vec{y}_1	$-Y_{D32} = 0$
(15)résultante suivant \vec{z}_1	$-Z_{D32} + Z_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(16)moment suivant $D\vec{x}_1$	$L_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(17)moment suivant $D\vec{y}_1$	$M_{E03} = 0$
(18)moment suivant $D\vec{z}_1$	$-M_{E03} \sin(\alpha) = 0$

Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

Bilan de l'approche statique

- On obtient alors un système de $E_s = 18$ équations statiques.
- La modélisation comporte $I_s = 17$ inconnues statiques.
- Certaines de ces équations ne sont pas significatives, elles correspondent aux mobilités cinématiques du mécanisme :

- Équation (12) "0 = 0" : mobilité de rotation de piston autour de (C, \vec{z}_1) .
- Les équations (6) (8) et (14) sont équivalentes à deux équations libres : mobilité de rotation du barillet autour de (B, \vec{z}_1) .
- Équation (18) liée à (17) : rotation du poussoir autour de (E, \vec{z}_{1*}) .

Le système possède alors 3 mobilités cinématiques ($m_c = 3$).

Pour résoudre ce système on se retrouve donc avec $r_s = 15$ équations significatives (rang du système d'équations statiques r_s) pour $I_s = 17$ inconnues. Nous avons donc un déficit de 2 équations ou encore 2 inconnues statiques de trop

pour résoudre le problème. Le système est donc **hyperconstraint**. On dit que la modélisation du système est **hyperstatique d'ordre 2**

$$\boxed{h = I_s - r_s = I_s - (E_s - m_c)} \quad (0.1)$$

Étude cinématique

Objectifs

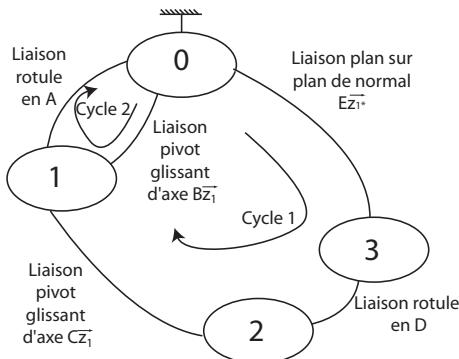
- ▶ La résolution cinématique a pour but de déterminer les caractéristiques cinématiques au niveau de toutes les liaisons de la chaîne.
- ▶ Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypertstaticité en vue de déterminer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.
- ▶ Elle permet enfin de déterminer la loi entrée-sortie cinématique du mécanisme.

Démarche

Le graphe de liaison donné ci-après montre que le mécanisme possède deux chaînes fermées :

- ▶ Chaîne 1 : {0 – 3 – 2 – 1 – 0}.
- ▶ Chaîne 2 : {0 – 1 – 0}.

L'approche cinématique consiste à écrire pour chaque chaîne la fermeture cinématique à l'aide des torseurs.



Graphe de structure de la pompe

Fermeture de chaîne cinématique

Chaine cinématique 1

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en C :

► $\{\mathcal{V}(3/0)\}$:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}(3/0)\} &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array} \right\}_{E,R_{1*}} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array} \right\}_{D,R_{1*}} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & u_{30} \cos(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} & -u_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) & 0 \end{array} \right\}_{D,R_1} \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & u_{30} \cos(\alpha) - \lambda & r_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} & 0 \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1}\end{aligned}$$

► $\{\mathcal{V}(3/2)\}$:

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{32} & 0 \\ q_{32} & 0 \\ r_{32} & 0 \end{array} \right\}_{D,R_1} = \left\{ \begin{array}{ccc} p_{32} & -\lambda & q_{32} \\ q_{32} & \lambda & p_{32} \\ r_{32} & 0 & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

► $\{\mathcal{V}(2/1)\}$:

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & w_{21} \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

► $\{\mathcal{V}(1/0)\}$:

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & 0 \end{array} \right\}_{B,R_1} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R & r_{B10} \\ r_{B10} & 0 & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

Chaine cinématique 2

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \{\mathcal{V}(1_B/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en A :

► $\{\mathcal{V}(1_A/0)\}$:

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{A10} & 0 \\ q_{A10} & 0 \\ r_{A10} & 0 \end{array} \right\}_{A,R_1}$$

► $\{\mathcal{V}(1_B/0)\}$:

$$\{\mathcal{V}(1_B/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & w_{B10} \end{array} \right\}_{A,R_1}$$

Résolution

On écrit alors la fermeture cinématique pour chaque fermeture cinématique. Cela donnera 12 équation pour 13 inconnues avec les deux fermetures de chaines :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(1/0)}^A \right\} - \left\{ \mathcal{V}_{(1/0)}^B \right\} = \{0\}$$

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} - \{\mathcal{V}(3/0)\} = \{0\}$$

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (3) & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (7) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (9) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ (10) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & \lambda \sin(\alpha) & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ (11) & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ (12) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{A10} \\ q_{A10} \\ r_{A10} \\ r_{B10} \\ w_{B10} \\ u_{30} \\ v_{30} \\ r_{30} \\ p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \\ r_{21} \\ w_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

Approche cinématique

- ▶ Avec deux cycles fermés, on obtient alors un système de $E_c = 12$ équations.
- ▶ La modélisation comporte $I_c = 13$ inconnues cinématiques.
- ▶ Le rang du système vaut $r_c = 10$ car deux équations ((4) et (5)) donnent “ $0 = 0$ ” et ne sont donc pas significatives.
- ▶ Le nombre d'équations non-significatives correspond directement à l'**hyperstaticité** (ici $h = 2$)
- ▶ La mobilité cinématique se définit comme la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques (I_c) et le nombre d'équations significatives (r_c) : **ici** $m_c = 3$

$$m_c = I_c - r_c = I_c - (E_c - h). \quad (0.2)$$