Application 1
Magic Arms – Corrigé

Florestan Mathurin.

Question 1 Construire les figures planes associées au schéma cinématique.

Correction

Question 2 Calculer $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$.

Correction

$\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta}\overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{\Omega(3/2)} = \dot{\varphi}\overrightarrow{y_2}$.

Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Correction

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega(2/0)} &= \overrightarrow{\Omega(2/1)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \\
&= (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\overrightarrow{z_0} \\
\overrightarrow{\Omega(3/0)} &= \overrightarrow{\Omega(3/2)} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \\
&= (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\overrightarrow{z_0} + \dot{\varphi}\overrightarrow{y_2}
\end{aligned}$$

Question 4 Calculer les produits vectoriels suivants : $\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{z_3}$, $\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_2}$, $\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{z_1}$, $\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_0}$.

Correction

$\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{z_3} = \sin\varphi\overrightarrow{y_2}$
$\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{x_2} = -\sin\varphi\overrightarrow{y_2}$
$\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\right)\overrightarrow{y_2} = -\cos\varphi\overrightarrow{y_2}$
$\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{0}$
$\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{x_0} = \left(\cos\beta\overrightarrow{x_1} + \sin\beta\overrightarrow{y_1}\right) \wedge \overrightarrow{x_0} = -\cos\beta\sin\alpha\overrightarrow{z_0} - \sin\beta\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\overrightarrow{z_0} = (-\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha)\overrightarrow{z_0} = -\sin(\beta + \alpha)\overrightarrow{z_0}$
$\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_0} = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\right)\overrightarrow{y_2} = -\cos\varphi\overrightarrow{y_2}$.

Question 5 Calculer $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)}$, $\overrightarrow{V(O_3, 3/0)}$ et $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$.

Correction

$\overrightarrow{V(O_2,2/0)} = \overrightarrow{V(O_2,2/1)} + \overrightarrow{V(O_2,1/0)} = \overrightarrow{V(O_1,1/0)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{O_1O_2} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} \wedge (-l_1\overrightarrow{y_1})$
$\overrightarrow{V(O_2,2/0)} = l_1\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1}$
$\overrightarrow{V(O_3,3/0)} = \overrightarrow{V(O_3,3/2)} + \overrightarrow{V(O_3,2/0)} = \overrightarrow{V(O_2,2/0)} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{O_2O_3} = l_1\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\overrightarrow{z_0} \wedge (-l_2\overrightarrow{y_2})$
$\overrightarrow{V(O_3,3/0)} = l_1\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\overrightarrow{x_2}$
$\overrightarrow{V(P,3/0)} = \overrightarrow{V(O_3,3/0)} + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \overrightarrow{O_3P} = l_1\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\overrightarrow{x_2} + \left((\dot{\alpha} + \dot{\beta})\overrightarrow{z_0} + \dot{\varphi}\overrightarrow{y_2}\right) \wedge (-R\overrightarrow{z_3})$

$\overrightarrow{V(P,3/0)} = l_1\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{x_2} - R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{y_2} - R\dot{\varphi}\overrightarrow{x_3}$

On donne, sur la figure en bas de page (à gauche) l'évolution des vitesses angulaires des moteurs du manège en fonction du temps.

Question 6 Déterminer les valeurs des paramètres $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varphi}$ puis l'expression analytique des positions angulaires $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ et $\varphi(t)$ dans l'intervalle de temps $[17;27]$ secondes en sachant qu'à l'instant $t = 17$ s, on a $\alpha = 10{,}5$ rad, $\beta = 3{,}76$ rad et $\varphi = -10{,}676$ rad.

Correction

Dans l'intervalle de temps compris entre 17 et 27 secondes, les vitesses angulaires sont constantes.

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0{,}84\,\text{rad/s} \\ \dot{\beta} = 0{,}94\,\text{rad/s} \\ \dot{\varphi} = -0{,}628\,\text{rad/s} \end{cases}$$

Ainsi, par intégration : $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^{t} \dot{\alpha}\, d\tau$

Question 7 Déterminer les valeurs numériques à l'instant $t_1 = 19,8\ s$ de α, β et φ.

Correction

Pour $t = 19,8$ s,

$$\begin{cases} \alpha &= 0,84 \times (19,8-17) + 10,5 = \boxed{12,85\text{ rad}} \\ \beta &= 0,94 \times (19,8-17) + 3,76 = \boxed{6,39\text{ rad}} \\ \varphi &= -0,628 \times (19,8-17) - 10,676 = \boxed{12,43\text{ rad}} \end{cases}$$

Question 8 On pose $\overrightarrow{V(P,3/0)} = V_{x2}\overrightarrow{x_2} + V_{y2}\overrightarrow{y_2} + V_{z2}\overrightarrow{z_2}$. Déterminer les expressions littérales de V_{x2}, V_{x2}, V_{z2} puis les valeurs numériques de à $t_1 = 19,8\ s$. (On donne : $l_1 = 3,9\ m$, $l_2 = 2,87\ m$, $R = 2,61\ m$.)

Correction

Il s'agit de projeter le vecteur $\overrightarrow{V(P,3/0)}$ dans la base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_0})$. En effet, le vecteur $\overrightarrow{z_2}$ est identique au vecteur $\overrightarrow{z_0}$.

$$\overrightarrow{V(P,3/0)} = V_{x2}\overrightarrow{x_2} + V_{y2}\overrightarrow{y_2} + V_{z2}\overrightarrow{z_0}$$

$$\begin{aligned} V_{x2} &= \overrightarrow{V(P,3/0)} \cdot \overrightarrow{x_2} \\ &= \left(l_1\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{x_2} - R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{y_2} - R\dot{\varphi}\overrightarrow{x_3}\right) \cdot \overrightarrow{x_2} \end{aligned}$$

$V_{x2} = l_1\dot{\alpha}\cos\beta + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta}) - R\dot{\varphi}\cos\varphi$

$$\begin{aligned} V_{y2} &= \overrightarrow{V(P,3/0)} \cdot \overrightarrow{y_2} \\ &= \left(l_1\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{x_2} - R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{y_2} - R\dot{\varphi}\overrightarrow{x_3}\right) \cdot \overrightarrow{y_2} \end{aligned}$$

$V_{y2} = -l_1\dot{\alpha}\sin\beta - R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})$

$$\begin{aligned} V_{z2} &= \overrightarrow{V(P,3/0)} \cdot \overrightarrow{y_2} \\ &= \left(l_1\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{x_2} - R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{y_2} - R\dot{\varphi}\overrightarrow{x_3}\right) \cdot \overrightarrow{z_0} \end{aligned}$$

$V_{z2} = R\dot{\varphi}\sin\varphi$

Valeurs numériques à $t = 19,8$ s :

$$\begin{aligned}
V_{x2} &= 3,9 \times 0,84 \times \cos(6,39) + 2,87 \times (0,84 + 0,94) + 2,61 \times 0,628 \times \cos(12,43)\\
&= \boxed{9,99\ \mathrm{m/s}}\\
V_{y2} &= -3,9 \times 0,84 \times \sin(6,39) - 2,61 \times \sin(12,43) \times (0,84 + 0,94)\\
&= \boxed{-0,28\ \mathrm{m/s}}\\
V_{z2} &= -2,61 \times 0,628 \times \sin(12,43)\\
&= \boxed{-0,22\ \mathrm{m/s}}
\end{aligned}$$

Question 9 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$.

Correction

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma(P,3/0)} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{V(P,3/0)}\right]_0\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(l_1\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{x_2} - R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{y_2} - R\dot{\varphi}\overrightarrow{x_3}\right)_0\\
&= l_1\ddot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + l_1\dot{\alpha}\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{x_1}\right]_0}_{\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}} + l_2(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\overrightarrow{x_2} + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{x_2}\right]_0}_{(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{y_2}} - R\dot{\varphi}\cos\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{y_2}\\
&\quad - R\sin\varphi(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\overrightarrow{y_2} - R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{y_2}\right]_0}_{-(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{x_2}} - R\ddot{\varphi}\overrightarrow{x_3} - R\dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{x_3}\right]_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{x_3}\right]_0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{x_3}\right]_3 + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \overrightarrow{x_3}\\
&= \left((\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{z_0} + \dot{\varphi}\overrightarrow{y_2}\right) \wedge \overrightarrow{x_3}\\
&= (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos\varphi\overrightarrow{y_2} - \dot{\varphi}\overrightarrow{z_3}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma(P,3/0)} = {}& l_1\ddot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + l_1\dot{\alpha}^2\overrightarrow{y_1} + l_2(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\overrightarrow{x_2} + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\overrightarrow{y_2} - 2R\dot{\varphi}\cos\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{y_2}\\
& - R\sin\varphi(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\overrightarrow{y_2} + R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\overrightarrow{x_2} - R\ddot{\varphi}\overrightarrow{x_3} + R\dot{\varphi}^2\overrightarrow{z_3}
\end{aligned}$$

Question 10 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$ dans l'intervalle de temps $[17;27]$ secondes pour lequel les vitesses angulaires sont constantes.

Correction

Dans le cas ou les vitesses angulaires sont constantes, les accélérations angulaires $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\beta}$, et $\ddot{\varphi}$ sont nulles. L'expression de $\overrightarrow{\Gamma(P,3/0)}$ se simplifie donc :

$$\overrightarrow{\Gamma(P,3/0)} = l_1\dot{\alpha}^2\overrightarrow{y_1} + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\overrightarrow{y_2} - 2R\dot{\varphi}\cos\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{y_2} + R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\overrightarrow{x_2} + R\dot{\varphi}^2\overrightarrow{z_3}$$

Question 11 Comparer les résultats obtenus à la question 6 à ceux du graphe pour le temps $t_1 = 19{,}8$ s.

Correction

Le graphe montre qu'à $t = 19,8$ s, l'intensité du vecteur $\overrightarrow{V(P,3/0)}$ vaut 10 m/s. Or d'après la question 8,

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{V(P,3/0)}\right\| &= \sqrt{V_{x2}^2 + V_{y2}^2 + V_{z2}^2}\\ &= \sqrt{9,99^2 + 0,28^2 + 0,22^2}\\ &= \boxed{10\text{ m/s}}\end{aligned}$$

On constate que le calcul littéral nous donne le même résultat que l'exploitation de la courbe.

Question 12 Relever l'accélération maximale subie par le passager et conclure vis-à-vis du CdCF.

Correction

D'après la courbe de l'accélération (en pointillés), la valeur maximale de l'accélération subie par le passager vaut 17,5 m/s². Le cahier des charges exige que l'accélération maximale ne dépasse pas 2,5 g, soit 24,5 m/s². Le cahier des charges est donc respecté.

1.
2. $\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta}\overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{\Omega(3/2)} = \dot{\varphi}\overrightarrow{y_2}$.
3. $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{z_0} + \dot{\varphi}\overrightarrow{y_2}$;
4. $\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{z_3} = \sin\varphi\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{x_2} = -\sin\varphi\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\cos\varphi\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{z_1} = \vec{0}$, $\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{x_0} = -\sin(\beta+\alpha)\overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_0} = -\cos\varphi\overrightarrow{y_2}$.
5. $\overrightarrow{V(O_2,2/0)} = l_1\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{V(O_3,3/0)} = l_1\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{V(P,3/0)} = l_1\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{x_2} - R$
6. $\dot{\alpha}$= 0,84 rad/s, $\dot{\beta}$= 0,94 rad/s, $\dot{\varphi}$= −0,628 rad/s et $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^{t}\dot{\alpha}d\tau$.
7. $\alpha = \boxed{12,85\text{ rad}}$, $\beta = \boxed{6,39\text{ rad}}$, $\varphi = \boxed{12,43\text{ rad}}$.
8. $V_{x2} = l_1\dot{\alpha}\cos\beta + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta}) - R\dot{\varphi}\cos\varphi = \boxed{9,99\text{ m/s}}$, $V_{y2} = -l_1\dot{\alpha}\sin\beta - R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta}) =$ $\boxed{-0,28\text{ m/s}}$, $V_{z2} = R\dot{\varphi}\sin\varphi = \boxed{-0,22\text{ m/s}}$.
9. $\overrightarrow{\Gamma(P,3/0)} = l_1\ddot{\alpha}\overrightarrow{x_1} + l_1\dot{\alpha}^2\overrightarrow{y_1} + l_2(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\overrightarrow{x_2} + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\overrightarrow{y_2} - 2R\dot{\varphi}\cos\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{y_2} - R\sin\varphi(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\overrightarrow{y_2} + R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\overrightarrow{x_2} - R\ddot{\varphi}\overrightarrow{x_3} + R\dot{\varphi}^2\overrightarrow{z_3}$.
10. $\overrightarrow{\Gamma(P,3/0)} = l_1\dot{\alpha}^2\overrightarrow{y_1} + l_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\overrightarrow{y_2} - 2R\dot{\varphi}\cos\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\overrightarrow{y_2} + R\sin\varphi(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\overrightarrow{x_2} + R\dot{\varphi}^2\overrightarrow{z_3}$.
11. $\left\|\overrightarrow{V(P,3/0)}\right\| = \boxed{10\text{ m/s}}$
12. .