Application 0
Télécabine à stabilité accrue : le funitel – Corrigé

Mines Ponts PSI – 2003.

Mise en situation

Objectif

On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de 0,15 m s^{-2}. On se place à l'instant ou la vitesse de 7,2 m s^{-1} va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse $V_e = 30\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

Question 1 Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée E_{c_T}, des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de M_c, M_p, μ, L, V, D_P et I_M.

Correction

- Énergie cinétique des 4 brins de câbles : $\mathcal{E}_c\left(\text{cables}/0\right) = \dfrac{1}{2}4L\mu V^2$.
- Énergie cinétique des 8 cabines montantes : $\mathcal{E}_c\left(C_m/0\right) = \dfrac{1}{2}8\left(M_c + M_p\right)V^2$.
- Énergie cinétique des 8 cabines descendantes : $\mathcal{E}_c\left(C_d/0\right) = \dfrac{1}{2}8M_cV^2$.
- Énergie cinétique de la motorisation : $\mathcal{E}_c\left(\text{M}/0\right) = \dfrac{1}{2}I_M\omega_M^2$.

On a par ailleurs $V = \omega_M \cdot \dfrac{D_p}{2}$.

On a donc $\mathcal{E}_c\left(\Sigma/0\right) = \dfrac{1}{2}\left(4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M\dfrac{4}{D_p^2}\right)V^2$.

On a donc $M_{\text{eq}} = 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M\dfrac{4}{D_p^2} = 4\times 1669\times 8,47 + 16\times 2500 + 8\times 2080 + 575\times 10^3\dfrac{4}{16} = 256\,936\,\text{kg}$ et $\mathcal{E}_c\left(\Sigma/0\right) = 6,7\,\text{MJ}$.

Question 2 Déterminer la puissance galiléenne, notée P_p, des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de M_p, V, h, g et L.

Correction

Les puissances de la pesanteur sur les cabines montantes s'exprime ainsi :

$\mathcal{P}\left(\text{pes}\rightarrow C_m/0\right) = \left\{\mathcal{T}\left(\text{pes}\rightarrow C_m\right)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}\left(C_m/0\right)\right\} = 8\left\{\begin{array}{c} -\left(M_c+M_p\right)g\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_c} \otimes \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ V\overrightarrow{i} \end{array}\right\}_{G_c}$

$= -8\left(M_c+M_p\right)gV\overrightarrow{z}\cdot\overrightarrow{i} = -8\left(M_c+M_p\right)gV\sin\alpha$.

Les puissances de la pesanteur sur les cabines descendantes s'exprime ainsi :

$\mathcal{P}\left(\text{pes}\rightarrow C_d/0\right) = \left\{\mathcal{T}\left(\text{pes}\rightarrow C_d\right)\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}\left(C_d/0\right)\right\} = 8\left\{\begin{array}{c} -M_cg\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_c} \otimes \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ -V\overrightarrow{i} \end{array}\right\}_{G_c}$

$= 8M_c g V \overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{i}$
$= 8M_c g V \sin\alpha$.
Remarque : la puissance de la pesanteur sur le câble sont opposées pour la partie montante et la partie descendante.
Ainsi, $\mathcal{P}\,(\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = 8M_c g V \sin\alpha - 8\left(M_c + M_p\right) g V \sin\alpha = -8M_p g V \sin\alpha = -359\,289\,\text{W}$.

Question 3 Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée P_v des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de ρ, S_f, V, V_e et $\alpha = \arcsin(h/L)$.

Correction

Le vent va dans le sens de la descente. En montée, $\overrightarrow{V\,(G_c, \text{vent}/C_m)} = \overrightarrow{V\,(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V\,(G_c, C_m/0)} = -V_e \overrightarrow{i} - V \overrightarrow{i}$.
En descente, $\overrightarrow{V\,(G_c, \text{vent}/C_d)} = \overrightarrow{V\,(G_c, \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V\,(G_c, C_d/0)} = -V_e \overrightarrow{i} + V \overrightarrow{i}$.
Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi : $p = \frac{1}{2}\rho V_a^2 = \frac{1}{2}\rho\,(-V - V_e)^2$ $\mathcal{P}\,(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}\,(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}\,(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -pS_f \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ V \overrightarrow{i} \end{array} \right\}_{G_c} = -8S_f V \frac{1}{2}\rho\,(V + V_e)^2 \cos\alpha$.
Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi : $p = \frac{1}{2}\rho V_a^2 = \frac{1}{2}\rho\,(V - V_e)^2$ $\mathcal{P}\,(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathcal{T}\,(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathcal{V}\,(C_m/0)\} = 8 \left\{ \begin{array}{c} -pS_f \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ -V \overrightarrow{i} \end{array} \right\}_{G_c} = 8S_f V \frac{1}{2}\rho\,(V - V_e)^2 \cos\alpha$.
Au final, $\mathcal{P}\,(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = 8S_f V \frac{1}{2}\rho\left((V - V_e)^2 - (V + V_e)^2\right)\cos\alpha$
$= 8S_f V \frac{1}{2}\rho\,(-4VV_e)\cos\alpha$
$= -16S_f \rho V^2 V_e \cos\alpha$. On a donc $\mathcal{P}\,(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -218\,677\,\text{W}$

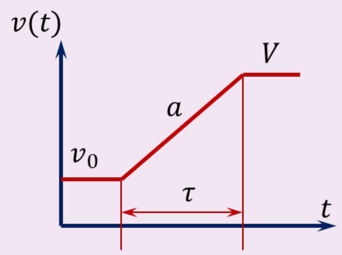
Question 4 En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée P_T pour l'entrainement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.

Correction

On applique le théorème de l'énergie cinétique :
$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c\,(\Sigma/0)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}\,(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathcal{P}\,(\text{pes} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathcal{P}\,(\text{frottement} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}\,(\text{moteur} \rightarrow \Sigma/0)$.
On a donc, en régime permanent : $0 = -229672 - 359289 - 400000 + P_T$ $P_T = 218677 + 359289 + 400000 = 977\,966\,\text{W} \simeq 1000\,\text{kW}$.
En tenant compte de l'accélération, on a $P_T = 1000\,\text{kW} + M_{\text{eq}} V \dot{V} = 1000\,\text{kW} + M_{\text{eq}} 7,2 \cdot 0,15 \simeq 1266\,\text{kW}$.
Le surplus de puissance est nécessaire en cas de situation plus défavorable (plus de vent, dépassement du nombre de passagers...).

Question 5 Quelle est alors la durée t de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur x (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de a , v_0, t et V. Pour que l'accélération de 1,3 m s^{-2} permette le lancement des cabines de $v_0 = 0{,}3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ à $V = 7{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, l'application numérique donne environ : $x = 20\,\mathrm{m}$.

Correction



On a $v(t) = at + k$. Par ailleurs, $v(t_2) = V = at_2 + k$ et $v(t_1) = v_0 = at_1 + k$. On a donc $V - v_0 = a\tau$ soit $\tau = \dfrac{V - v_0}{a} = \dfrac{6,9}{1,3} = 5{,}3\,\mathrm{s}$.
La distance parcourue pendant la durée τ correspond à l'intégrale de la vitesse soir à l'aire sous la courbe. On a donc $x = \tau \cdot \dfrac{1}{2}(V + v_0) = 5,3 \times 0,5 \times 7,5 = 19{,}875\,\mathrm{m}$.