

Application 0

Dynamique du véhicule – Chariot élévateur à bateaux– Corrigé

X – ENS – PSI – 2012.

Présentation

Étude de la position du centre de gravité

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req C206 : la position du centre de gravité de l'ensemble $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$ doit être situé à un tiers de l'empattement par rapport à l'axe des roues arrière ».



Question 1 Déterminer l'expression de x_{G_C} afin de valider l'exigence req C206.

Correction

On a $\vec{OG} = \frac{m_T}{m_T + m_1 + m_C} \vec{OG_T} + \frac{m_1}{m_T + m_1 + m_C} \vec{OG_1} + \frac{m_C}{m_T + m_1 + m_C} \vec{OG_C}$. On souhaite que $\vec{OG} = \vec{0}$. On a donc $0 = \frac{m_T}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_T} + \frac{m_1}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_1} + \frac{m_C}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_C}$ et donc : $x_{G_C} = -\frac{m_T}{m_C} x_{G_T} - \frac{m_1}{m_C} x_{G_1}$.

Pour toute la suite de l'étude, les points G et O sont supposés confondus et la masse totale de l'ensemble $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$ est notée M.

Étude du basculement frontal

Question 2 Écrire les équations issues de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble $\{\Sigma, B\}$. Le théorème du moment dynamique sera appliqué au point I_4 .

Correction

On isole $\{\Sigma, B\}$.

On fait le BAME.

- Poids du bateau : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow B)\} = \left\{ \begin{matrix} -m_B g \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} -m_B g \vec{z} \\ m_B g \vec{y} \left(x_{G_B} - \frac{2L}{3} \right) + E m_B g \vec{x} \end{matrix} \right\}_{I_4}$.
- Poids de Σ : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow \Sigma)\} = \left\{ \begin{matrix} -M g \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} -M g \vec{z} \\ -\frac{2MgL}{3} \vec{y} + E M g \vec{x} \end{matrix} \right\}_{I_4}$.
- Action du sol sur chaque roue :
 - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_1)\} = \left\{ \begin{matrix} -T_1 \vec{x} + N_1 \vec{z} \\ L N_1 \vec{y} \end{matrix} \right\}_{I_4}$;
 - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_2)\} = \left\{ \begin{matrix} -T_1 \vec{x} + N_1 \vec{z} \\ -2E N_2 \vec{x} + L N_2 \vec{y} - 2E T_2 \vec{z} \end{matrix} \right\}_{I_4}$;
 - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_3)\} = \left\{ \begin{matrix} -T_3 \vec{x} + N_3 \vec{z} \\ -2E N_3 \vec{x} - 2E T_3 \vec{z} \end{matrix} \right\}_{I_4}$;

$$\bullet \{ \mathcal{F} (\text{sol} \rightarrow P_4) \} = \left\{ \begin{array}{c} -T_4 \vec{x} + N_4 \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_4}.$$

Calcul du $\{\mathcal{D}(\{\Sigma, B\}/0)\}$.

$$\{\mathcal{D}(\{\Sigma, B\}/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(\{\Sigma, B\}/0)} \\ \overrightarrow{\delta(I_4, \{\Sigma, B\}/0)} \end{array} \right\}_{I_4}.$$

On a $\overrightarrow{R_d(\{\Sigma, B\}/0)} = -(M + m_B) \text{dec}_x \vec{x}_1$.

Par ailleurs, on a $\overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma, B\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G, \Sigma/0)} + \overrightarrow{\delta(G, B/0)}$. Le bateau étant en translation par rapport au bâti, on a donc :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma\}/0)} &= \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{\delta(I_4, \{\Sigma\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma\}/0)} + \overrightarrow{I_4 G} \wedge \overrightarrow{R_d(\{\Sigma\}/0)} = \\ &= \left(-2\frac{L}{3}\vec{x}_1 - E\vec{y}_1 + h\vec{z}_1 \right) \wedge -M\text{dec}_x \vec{x}_1 = -M\text{dec}_x \left(E\vec{z}_1 + h\vec{y}_1 \right); \\ \blacktriangleright \overrightarrow{\delta(G_B, \{B\}/0)} &= \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{\delta(I_4, \{B\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G_B, \{B\}/0)} + \overrightarrow{I_4 G_B} \wedge \\ &\overrightarrow{R_d(\{B\}/0)} = \left(\left(-x_{G_B} + 2\frac{L}{3} \right) \vec{x}_1 + E\vec{y}_1 + (z_{G_B} + h) \vec{z}_1 \right) \wedge -m_B\text{dec}_x \vec{x}_1 = \\ &m_B\text{dec}_x \left(E\vec{z}_1 - (z_{G_B} + h) \vec{y}_1 \right); \\ \blacktriangleright \text{au final, } \overrightarrow{\delta(I_4, \{\Sigma, B\}/0)} &= m_B\text{dec}_x \left(E\vec{z}_1 - (z_{G_B} + h) \vec{y}_1 \right) - M\text{dec}_x \left(E\vec{z}_1 + h\vec{y}_1 \right). \end{aligned}$$

On applique le PFD.

► Théorème de la résultante dynamique :

- suivant \vec{x}_1 : $-(M + m_B) \text{dec}_x = -\sum_{i=1}^4 T_i$;
- suivant \vec{y}_1 : $0 = 0$;
- suivant \vec{z}_1 : $0 = \sum_{i=1}^4 N_i - (M + m_B) g$.

► Théorème du moment dynamique :

- suivant \vec{x}_1 : $0 = Em_B g + EMg - 2EN_2 - 2EN_3$;
- suivant \vec{y}_1 : $-m_B\text{dec}_x (z_{G_B} + h) - M\text{dec}_x h = L(N_1 + N_2) + m_B g \left(x_{G_B} - 2\frac{L}{3} \right) - \frac{Mg2L}{3}$;
- suivant \vec{z}_1 : $m_B\text{dec}_x E - M\text{dec}_x E = -2ET_2 - 2ET_3$.

Question 3 Donner les hypothèses qui peuvent être faites afin de réduire le nombre d'inconnues du problème.

Correction

La mise en équation précédente permet d'exprimer 8 inconnues (N_i et T_i pour i allant de 1 à 4).

En faisant l'hypothèse que le plan $(G_1, \vec{z}_1, \vec{x}_1)$ est plan de symétrie, on peut considérer que $N_4 = N_3, T_4 = T_3, N_1 = N_2, T_1 = T_2$. Il reste donc 4 inconnues.

De plus, à la limite du basculement frontal, les roues arrières se décolleraient. Il resterait donc les inconnues N_3 et T_3 .

On considère que le basculement a lieu lorsque les roues arrière perdent le contact avec le sol.

Question 4 Déterminer alors l'expression de dec_x .

Correction

Le basculement frontal du véhicule peut se traduire par un théorème du moment dynamique appliqué en I_4 en projection sur \vec{y}_1 . On utilise les conditions précédentes. On a donc :

$$-m_B \text{dec}_x (z_{G_B} + h) - M \text{dec}_x h = m_B g \left(x_{G_B} - 2\frac{L}{3} \right) - \frac{Mg2L}{3} \quad \text{soit} \quad \text{dec}_x =$$

$$\frac{m_B g \left(x_{G_B} - 2\frac{L}{3} \right) - \frac{Mg2L}{3}}{-m_B (z_{G_B} + h) - Mh}$$

$$\Leftrightarrow \text{dec}_x = -g \frac{m_B (3x_{G_B} - 2L) - M2L}{3m_B (z_{G_B} + h) + 3Mh}$$

Le facteur d'adhérence entre le pneu et la route est noté f .

Question 5 Donner les expressions de N_4 et T_4 et expliquer qualitativement comment vérifier que le basculement a lieu avant le glissement afin de justifier l'hypothèse faite en début d'étude.

Correction**Étude du basculement latéral**

Question 6 Quel théorème doit-on utiliser afin d'obtenir directement l'équation permettant de déterminer l'expression de V qui provoque le basculement latéral ?

Correction

Question 7 En déduire l'expression de V qui provoque le basculement latéral.

Correction