Application 1
Conducteur virtuel pour véhicule automobile – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2014.

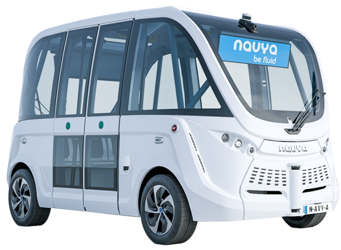
C1-05

C2-09

Objectif

L'objet de cette partie est de déterminer un modèle mécanique du véhicule en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au véhicule . L'idée est d'utiliser un modèle mécanique relativement simple, associé à une commande très robuste.

Modélisation du comportement dynamique du véhicule



Question 1 Déterminer les composantes dans le repère $\mathcal{R}_L$ du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma\left(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)}$ au point O, du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_g$, en fonction de $\dot{\psi}$, α, h, V et des caractéristiques inertielles.

Correction

La matrice d'inertie étant donnée en G, commençons par calculer $\overrightarrow{\sigma\left(G, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = I_G\left(\text{VH}\right)\overrightarrow{\Omega\left(\text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \dot{\psi}\overrightarrow{Z_g} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$.

Il faut alors déplacer le moment cinétique. On aura pour cela besoin de $\overrightarrow{V\left(G, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = \overrightarrow{V\left(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega\left(\text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = V\overrightarrow{U} - h\overrightarrow{Z_g} \wedge \dot{\psi}\overrightarrow{Z_g} = V\overrightarrow{U}$.

Au final, $\overrightarrow{\sigma\left(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = \overrightarrow{\sigma\left(G, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} + \overrightarrow{OG} \wedge MV\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + h\overrightarrow{Z_g} \wedge MV\overrightarrow{U}$
$= \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} \\ 0 \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV\left(\cos\alpha\overrightarrow{Y_L} - \sin\alpha\overrightarrow{X_L}\right) = \begin{pmatrix} -E\dot{\psi} - hMV\sin\alpha \\ hMV\cos\alpha \\ C\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$.

– Je note $\overrightarrow{V}$ le vecteur tel que $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{Z_L}\right)$ est une base. –

Question 2 Déterminer les composantes dans le repère $\mathcal{R}_L$ du moment dynamique $\overrightarrow{\delta\left(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)}$ au point O, du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_g$, en fonction de $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$, $\dot{\alpha}$, α, h, V et des caractéristiques inertielles.

Correction

On a en un point quelconque $\overrightarrow{\delta\left(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma\left(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{V\left(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} \wedge MV\overrightarrow{\left(G, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)}$.

D'une part, $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{X_L}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_g} = \dot{\psi}\overrightarrow{Y_L}$ et $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{Y_L}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_g} = -\dot{\psi}\overrightarrow{X_L}$. On a donc $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma\left(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_g}$
$= \begin{pmatrix} -E\ddot{\psi} - \dot{\alpha}hMV\cos\alpha - \dot{\psi}\left(hMV\cos\alpha\right) \\ -\dot{\alpha}hMV\sin\alpha + \dot{\psi}\left(-E\dot{\psi} - hMV\sin\alpha\right) \\ C\ddot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$.

D'autre part, $\overrightarrow{V\left(O, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} \wedge M\overrightarrow{V\left(G, \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = V\overrightarrow{U} \wedge MV\overrightarrow{U} = \overrightarrow{0}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta\left(O,\text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = \begin{pmatrix} -E\ddot{\psi} - \left(\dot{\alpha}+\dot{\psi}\left(hMV\cos\alpha\right)\right) \\ -E\dot{\psi}^2 - \left(\dot{\alpha}+\dot{\psi}\right)hMV\sin\alpha \\ C\ddot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$.

Question 3 On note $\overrightarrow{\Gamma\left(G/\mathcal{R}_g\right)}$ le vecteur accélération de appartenant à (VH) dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_G$. Déterminer $\overrightarrow{\Gamma\left(G/\mathcal{R}_g\right)} \cdot \overrightarrow{Y_L}$ en fonction de $\dot{\psi}$, $\dot{\alpha}$, α, V. Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0$, $\psi = 0$ et $\beta = 0$.

Correction

On a vu que $\overrightarrow{V\left(G,\text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = V\overrightarrow{U}$, donc $\overrightarrow{\Gamma\left(G,\text{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = V\left(\dot{\psi}+\dot{\alpha}\right)\overrightarrow{V} = V\left(\dot{\psi}+\dot{\alpha}\right)\left(\cos\alpha\overrightarrow{Y_L} - \sin\alpha\overrightarrow{X_L}\right)$. On a donc $\overrightarrow{\Gamma\left(G/\mathcal{R}_g\right)} \cdot \overrightarrow{Y_L} = V\left(\dot{\psi}+\dot{\alpha}\right)\cos\alpha$. En linéarisant cette relation, on a $\overrightarrow{\Gamma\left(G/\mathcal{R}_g\right)} \cdot \overrightarrow{Y_L} = V\left(\dot{\psi}+\dot{\alpha}\right)$.

Question 4 En admettant que l'angle de dérive de la roue avant s'écrit : $\delta_{12} \simeq \alpha - \beta + \dfrac{\ell_1}{V}\dot{\psi}$ et celui de la roue arrière $\delta_{34} \simeq \alpha - \dfrac{\ell_2}{V}\dot{\psi}$, en déduire l'expression de $\overrightarrow{R\left(\overline{\text{VH}} \rightarrow \text{VH}\right)} \cdot \overrightarrow{Y_L}$. Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0$, $\psi = 0$ et $\beta = 0$.

Correction

On a $Y_{12} = -2D\delta_{12}$ et $Y_{34} = -2D\delta_{34}$. En conséquence, $Y_{12} = -2D\left(\alpha - \beta + \dfrac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right)$ et $Y_{34} = -2D\left(\alpha - \dfrac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$.

Au final, $\overrightarrow{R\left(\overline{\text{VH}} \rightarrow \text{VH}\right)} \cdot \overrightarrow{Y_L} = -2D\left(\alpha - \beta + \dfrac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right) - 2D\left(\alpha - \dfrac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right) = -2D\left(2\alpha - \beta + \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$.

Question 5 Montrer que l'on obtient le système d'équations différentielles suivant en indiquant clairement (point, vecteur unitaire, résultante ou moment, ...) à quelle équation scalaire issue du PFD correspond chaque relation :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(MV + \dfrac{2D\left(\ell_1 - \ell_2\right)}{V}\right)\dot{\psi} + MV\dot{\alpha} + 4D\alpha = 2D\beta \\ C\ddot{\psi} + \dfrac{2D\left(\ell_1^2 + \ell_2^2\right)}{V}\dot{\psi} + 2D\left(\ell_1 - \ell_2\right)\alpha = 2D\ell_1\beta \end{array}\right. .$$

Avec les valeurs numériques : $\ell_1 = 1\,\text{m}$, $\ell_2 = 1{,}5\,\text{m}$, $D = 21\,000\,\text{N}\,\text{rad}^{-1}$, $C = 3100\,\text{kg}\,\text{m}^2$, $M = 1500\,\text{kg}$, $V = 15\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$, on obtient le système d'équations différentielles suivant, permettant de décrire l'évolution du véhicule (données en unités S.I.) :

$$\left\{\begin{array}{l} 211\dot{\psi}(t) + 225\dot{\alpha}(t) + 840\alpha(t) = 420\beta(t) \\ 31\ddot{\psi}(t) + 91\dot{\psi}(t) - 210\alpha(t) = 420\beta(t) \end{array}\right. .$$

Correction

La première équation correspond au théorème de la résultante dynamique appliqué à VH en projection sur $\overrightarrow{Y_L}$.
La seconde équation correspond au théorème du moment dynamique appliqué à VH en O projection sur $\overrightarrow{Z_L}$.

Question 6 En supposant que les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression numérique de la fonction de transfert $H_2(p)$ entre l'angle de lacet $\psi(p)$ et l'angle de braquage $\beta(p)$ de la roue avant : $H_2(p) = \dfrac{\psi(p)}{\beta(p)}$. Discuter de la stabilité de ce modèle.

Correction

Dans le domaine de Laplace, on a

$$\left\{\begin{array}{l} 211p\psi(p) + 225p\alpha(p) + 840\alpha(p) = 420\beta(p) \\ 31p^2\psi(p) + 91p\psi(p) - 210\alpha(p) = 420\beta(p) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (225p + 840)\,\alpha(p) = 420\beta(p) - 211p\psi(p) \\ \left(31p^2 + 91p\right)\psi(p) - 210\alpha(p) = 420\beta(p) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha(p) = \dfrac{420\beta(p) - 211p\psi(p)}{225p + 840} \\ \left(31p^2 + 91p\right)\psi(p) - 210\dfrac{420\beta(p) - 211p\psi(p)}{225p + 840} = 420\beta(p) \end{array}\right.$$

$$\left(31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}\right)\psi(p) - 210\frac{420\beta(p)}{225p + 840} = 420\beta(p)$$

$$\Rightarrow \left(31p^2 + 91p + \frac{210 \times 211p}{225p + 840}\right)\psi(p) + \left(\frac{-210 \times 420}{225p + 840} - 420\right)\beta(p) = 0$$

$$\Rightarrow H_2(p) = \frac{\dfrac{210 \times 420}{225p + 840} + 420}{31p^2 + 91p + \dfrac{210 \times 211p}{225p + 840}} = \frac{210 \times 420 + 420\,(225p + 840)}{(225p + 840)\left(31p^2 + 91p\right) + 210 \times 211p}$$

$$= \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p\,((225p + 840)\,(31p + 91) + 210 \times 211)}$$

$$= \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p\left(225 \times 31p^2 + 840 \times 31p + 91 \times 225p + 91 \times 840 + 210 \times 211\right)}$$

$$= \frac{210 \times 420 + 420 \times 840 + 420 \times 225p}{p\left(225 \times 31p^2 + 840 \times 31p + 91 \times 225p + 91 \times 840 + 210 \times 211\right)}$$

$$= \frac{441000 + 94500p}{p\left(6975p^2 + 46515p + 120750\right)}$$