Mouvement RR 3D ★

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.
$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\overrightarrow{i_1}+\ell\overrightarrow{i_2}+r\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathcal{R}_0}$.

Calculons :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)}\wedge\overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$ ($\overrightarrow{i_1}=\overrightarrow{i_2}$).
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)}\wedge\overrightarrow{j_2} = \left(\dot{\theta}\overrightarrow{k_0}+\dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}\right)\wedge\overrightarrow{j_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_1}\wedge\overrightarrow{j_2}+\dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}\wedge\overrightarrow{j_2} = -\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1}+\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}$.

On a donc, $\overrightarrow{V(C,2/0)} = (R+\ell)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} - r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1}+r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}$.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition.
On a $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)}+\overrightarrow{V(C,1/0)}$.

- $\overrightarrow{V(C,2/1)}$: on passe par B car B est le centre de la pivot entre 2 et 1 et que $\overrightarrow{V(B,2/1)}=\overrightarrow{0}$. $\overrightarrow{V(C,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)}+\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/1)} = \left(-\ell\overrightarrow{i_2}-r\overrightarrow{j_2}\right)\wedge\dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}$
  $= -\ell\overrightarrow{i_2}\wedge\dot{\varphi}\overrightarrow{i_1} - r\overrightarrow{j_2}\wedge\dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}$.
  $= r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}$.
- $\overrightarrow{V(C,1/0)}$: on passe par A car A est le centre de la pivot entre 1 et 0 et que $\overrightarrow{V(A,1/0)}=\overrightarrow{0}$ est nul. $\overrightarrow{V(C,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)}+\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)}$
  $= \left(-r\overrightarrow{j_2}-\ell\overrightarrow{i_2}-R\overrightarrow{i_1}\right)\wedge\dot{\theta}\overrightarrow{k_1}$
  $= -r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1}+\ell\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}+R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$

Au final, $\overrightarrow{V(C,2/0)} = r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}-r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1}+\ell\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}+R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{l}\dot{\theta}\overrightarrow{k_1}+\dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}\\ (R+\ell)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}-r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1}+r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}\end{array}\right\}_C$$

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0}$

$= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(R+\ell)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}-r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1}+r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}\right]_{\mathcal{R}_0}$

Calculons :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)}\wedge\overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)}\wedge\overrightarrow{j_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta}\overrightarrow{i_1}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_2}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)}\wedge\overrightarrow{k_2} = \left(\dot{\theta}\overrightarrow{k_0}+\dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}\right)\wedge\overrightarrow{k_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_1}\wedge\overrightarrow{k_2}+\dot{\varphi}\overrightarrow{i_2}\wedge\overrightarrow{k_2} = \dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{i_1}-\dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}$.

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = (R+\ell)\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1}-(R+\ell)\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}-r\ddot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1}+r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\overrightarrow{i_1}-r\dot{\theta}^2\cos\varphi\overrightarrow{j_1}+r\ddot{\varphi}\overrightarrow{k_2}+r\dot{\varphi}\left(\dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{i_1}-\dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}\right)$.