Application 1
Dynamique du véhicule – Segway de première génération★ – Corrigé

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier.

C1-05

C2-09

Présentation

Objectif

L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}$, du point G_E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C. Exprimer la vitesse linéaire $V_L = ||\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}||$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Correction

On a $\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)} = -R_C\dot{\theta}\overrightarrow{x_1}$. On a alors $V_L = R_C\dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer l'accélération, notée $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)}$, du point G_E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C.

Correction

$$\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V(G_E/\mathcal{R}_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C\ddot{\theta}\overrightarrow{x_1} - R_C\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} = -R_C\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} \text{ ($\dot{\theta}$ est constant).}$$

Question 3 Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A, T_B, N_A, N_B et f traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant $T_A + T_B$ à f et $N_A + N_B$.

Correction

La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc, $T_A \leq fN_A$ et $T_B \leq fN_B$. En sommant les inégalités, on a donc $T_A + T_B \leq f(N_A + N_B)$.

Question 4 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

Correction

E étant un ensemble indéformable, on a : $\overrightarrow{R_d(E/\mathcal{R}_0)} = -m_E R_C\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1}$ (pas de projection sur $\overrightarrow{z_0}$. On isole E et les roues et on réalise le BAME :

- pesanteur sur E ;
- action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur $\overrightarrow{z_{01}}$, on a donc : $N_A + N_B - m_E g = 0$.

Question 5 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{y_1}$. En déduire une inéquation donnant la vitesse limite V_L de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

Correction

En appliquant le TRD en projection sur $\overrightarrow{y_1}$, on a : $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$. En utilisant les résultats de la question précédente, $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$. En notant $V_L = R_C \dot{\theta}$ la vitesse limite avant dérapage, on a $\dfrac{V_L^2}{R_C} \leq f g$. On a donc $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$.

Question 6 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction

La vitesse limite est donc de $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ soient $36\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ce qui satisfait le cahier des charges.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

Question 7 Calculer le torseur dynamique du système matériel E en G_E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = \left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$. Exprimer ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$.

Correction

Au centre d'inertie de E, on a $\overrightarrow{\delta\left(G_E, E/\mathcal{R}_0\right)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma\left(G_E, E/\mathcal{R}_0\right)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$. On a $\overrightarrow{\Omega\left(E/\mathcal{R}_0\right)} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_0}$.

On a donc, $\overrightarrow{\sigma\left(G_E, E/\mathcal{R}_0\right)} = -E\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} - D\dot{\theta}\overrightarrow{y_1} + C\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}}$. On a donc $\overrightarrow{\delta\left(G_E, E/\mathcal{R}_0\right)} = -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1}$.

En conséquence, $\left\{\mathcal{D}\left(E/\mathcal{R}_0\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c} -m_E R_C \dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} \\ -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} \end{array}\right\}_{G_E}$.

Question 8 Calculer $\overrightarrow{\delta\left(B, E/\mathcal{R}_0\right)} \cdot \overrightarrow{x_1}$ le moment dynamique au point B de l'ensemble (E) dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = \left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ en projection sur $\overrightarrow{x_1}$.

Correction

$\overrightarrow{\delta\left(B, E/\mathcal{R}_0\right)} = \overrightarrow{\delta\left(G_E, E/\mathcal{R}_0\right)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d\left(B/E\right)} = -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} + \left(h\overrightarrow{z_0} - l\overrightarrow{y_1}\right) \wedge \left(-m_E R_C \dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1}\right) = -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} + h m_E R_C \dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1}$. $\overrightarrow{\delta\left(B, E/\mathcal{R}_0\right)} \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(D + h m_E R_C\right)\dot{\theta}^2$.

Question 9 En appliquant le théorème du moment dynamique au point B à l'ensemble E et les roues dans leur mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$, en projection sur $\overrightarrow{x_1}$, écrire l'équation scalaire qui donne N_A en fonction de $\overrightarrow{\delta\left(B, E/\mathcal{R}_0\right)} \cdot \overrightarrow{x_1}$ et des données du problème.

Correction

On a :

- $\overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \overrightarrow{z_{01}} = \left(-l\overrightarrow{y_1} + h\overrightarrow{z_0}\right) \wedge -m_E g\overrightarrow{z_{01}} = l m_E g \overrightarrow{x_1}$;

- $\overrightarrow{BA} \wedge \left(-T_A\overrightarrow{y_1} + N_A\overrightarrow{z_1}\right) = -2l\overrightarrow{y_1} \wedge \left(-T_A\overrightarrow{y_1} + N_A\overrightarrow{z_1}\right) = -2lN_A\overrightarrow{x_1}$.

En appliquent le TMD en B suivant $\overrightarrow{x_1}$, on a : $lm_E g - 2lN_A = \left(D + hm_E R_C\right)\dot{\theta}^2$.
Au final, $N_A = \dfrac{lm_E g - \left(D + hm_E R_C\right)\dot{\theta}^2}{2l}$.

Question 10 Écrire la condition de non renversement du véhicule.

Correction

Pour qu'il y ait non renversement, N_A doit rester positif ou nul.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 11 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction

$N_A \simeq \dfrac{lm_E g - hm_E R_C\dot{\theta}^2}{2l} \geq 0$.Ce qui est positif (pas de basculement).
$N_A \geq 0 \Rightarrow \dfrac{lm_E g - \left(D + hm_E R_C\right)\dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow lg - hR_C\dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow lg - hV_L^2/R_C \geq 0$
$\Rightarrow lg \geq hV_L^2/R_C \Rightarrow \sqrt{\dfrac{R_C l g}{h}} \geq V_L \Rightarrow V_L \leq 6{,}38\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 22{,}9\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. CDCF Validé.