TD 1
Quille pendulaire ★ – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

Mise en situation

Objectif

L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

C1-02

C2-04

Modélisation du vérin

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

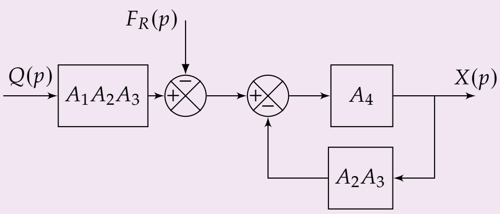
Correction

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace : $Q(p) = SpX(p) + \dfrac{V}{2B}p\Sigma(p)$ et $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$.
En utilisant le schéma-blocs, on a $\Sigma(p) = A_2\left(A_1Q(p) - X(p)\right) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$.
Par ailleurs $\Sigma(p) = \dfrac{Q(p) - SpX(p)}{\dfrac{V}{2B}p} = Q(p)\dfrac{2B}{Vp} - X(p)\dfrac{S2B}{V}$. On a donc $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_1A_2 = \dfrac{2B}{Vp}$ soit $A_1 = \dfrac{2B}{Vp}\dfrac{V}{S2B} = \dfrac{1}{Sp}$.
On a aussi $X(p) = A_4\left(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)\right) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$. Par ailleurs, $X(p)\left(Mp^2 + \lambda p + k\right) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \dfrac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \dfrac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$. On a donc : $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ et $A_3 = S$.
Au final, $A_1 = \dfrac{1}{Sp}$, $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1, A_2, A_3 et A_4, puis de la variable p et des constantes.

Correction

Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes On a $X(p) = \left(H_1Q(p) - F_R(p)\right)H_2(p)$.
Par ailleurs, on a vu que $X(p) = A_4\left(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)\right)$ et $\Sigma(p) = A_2\left(A_1Q(p) - X(p)\right)$.
On a donc $X(p) = A_4\left(-F_R(p) + A_3A_2\left(A_1Q(p) - X(p)\right)\right) \Leftrightarrow X(p)\left(1 + A_2A_3A_4\right) = A_4\left(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p)\right)$. On a donc $H_1(p) = A_1A_2A_3$ et $H_2 = \dfrac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$.
Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs Revient à utiliser la méthode précédente.
Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.
$A_1 = \dfrac{1}{Sp}$, $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

En faisant le calcul on obtient : $H_1(p) = \dfrac{2BS}{pV}$ et $H_2 = \dfrac{\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}}{1+\dfrac{2BS^2}{V}\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}}$

$= \dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k+\dfrac{2BS^2}{V}}$.

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Correction

Dans ce cas, $\dfrac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p)\dfrac{2BS}{p\left(MVp^2+\lambda pV+kV+2BS^2\right)}$.

Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

Question 4 À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de K_{SV} ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

Correction

En début de simulation, il y a une saturation du débit à $20 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3 s^{-1}}$. La tension de commande en régime saturé étant de 10 V, on a $K_{SV} = 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3 s^{-1} V^{-1}}$.
Jusqu'à 1,9 seconde, le retour n'a aucune influence sur la commande. On est donc en BO. Au delà, la régulation entre en en jeu. On est donc en BF.

Question 5 Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

Correction

Exigences	Niveau	Simulation	Validation
Stabilité :			
C11 : Marge de gain	10 dB	–	–
C12 : Dépassement vis-à-vis d'une entrée en échelon	Aucun	Dépassement faible	NON
Rapidité :			
C21 : Temps de réponse à 5 %	4 s maxi	$\simeq$ 2,5 s	OUI
C22 : Vitesse angulaire de rotation de la quille	8°/s maxi	$\simeq 20\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$	NON
Précision			
C3 : Erreur statique vis-à-vis d'une entrée en échelon	Nulle	Difficile à mesurer	–

Comportement pour une commande de faible amplitude

Question 6 Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension $v(t)$ à l'instant initial $t = 0^+$, $v(0^+)$. Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

Correction

En BO, on va avoir $v(0^+) = 5 \cdot K'_C = 5{,}5\,\text{V}$.
$v(0^+) < 10\,\text{V}$. On est ici en BO. La tension ne peut donc pas dépasser la tension de saturation.

Question 7 De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

Correction

Pour de telles tension, on est donc en régime **linéaire**.

Question 8 Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de $H_{\text{BO}}(p)$ en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

Correction

On a : $H_{\text{BO}}(p) = \dfrac{2,2}{p\left(1 + 0,12p + 0,04p^2\right)}$. En conséquences, $\dfrac{1}{\omega_0^2} = 0,04$ et $\omega_0 = 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ et $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = 0,12 \Leftrightarrow \xi = 0,3$.
On a donc une asymptote de $-20\,\text{dB/decade}$ pour $\omega < 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ et $-60\,\text{dB/decade}$ pour $\omega > 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.
De plus, pour $\omega = 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, on a $20\log\dfrac{2,2}{5} = -7{,}1\,\text{dB}$.

Question 9 Déterminer par calcul la pulsation de résonance ω_r de cette fonction de transfert.

Correction

On a $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} = 5 \times \sqrt{1 - 2\times 0,3^2} \simeq 4{,}5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 10 Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation ω_r la différence, notée ΔK et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Correction

L'amplitude de résonance ne dépend que du système du second ordre. On a alors (résultat de cours sur le second ordre) : $\Delta K = 20\log\left(\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\right) = 20\log\left(\dfrac{1}{2\times 0,3\sqrt{1-0,3^2}}\right) = 4{,}8\,\text{dB}$.

Question 11 Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour $K_{\text{COR}} = 1$. Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

Correction

On a $b > 1$ donc $T < bT$ et $\dfrac{1}{T} > \dfrac{1}{bT}$.
Pour $\omega < \dfrac{1}{bT}$ on a donc un gain de pente nulle et un déphasage nul.
Pour $\dfrac{1}{bT} < \omega < \dfrac{1}{T}$ on a donc un gain de pente -20 dB/decade et un déphasage de $-180°$.
Pour $\omega > \dfrac{1}{T}$ on a donc un gain de pente 0 dB/decade et un déphasage de 0°.

Question 12 Déterminer alors en fonction de b, l'amplitude $|C(j\omega^*)|_{\mathrm{dB}}$ à la pulsation notée ω^*.

Correction

$$|C(j\omega^*)|_{\mathrm{dB}} = 10\log\frac{1+T^2\frac{1}{T^2b}}{1+b^2T^2\frac{1}{T^2b}} = 10\log\frac{1+\frac{1}{b}}{1+b} = 10\log\frac{1}{b}\frac{1+b}{1+b} = -10\log b.$$

Question 13 Pour $K_{\mathrm{COR}} = 1$, en faisant correspondre la pulsation de résonance ω_r de H_{BO} à ω^* :

- calculer b pour que « l'excès » de gain ΔK soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de T ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation ω^*.

Correction

D'une part, on veut que $|C(j\omega^*)|_{\mathrm{dB}} = -4,8$ soit $10\log b = 4,8$ et $b = 3,02$. D'autre part, $\omega^* = \omega_r$ et $T = \dfrac{1}{\omega_r\sqrt{b}} = 0{,}127\,\mathrm{s}$.
Par ailleurs, on a donc $\phi(\omega^*) = \arcsin\left(\dfrac{1-b}{1+b}\right) = \arcsin\left(\dfrac{1-3,02}{1+3,02}\right) \simeq -28,79°$.

Validation du cahier des charges

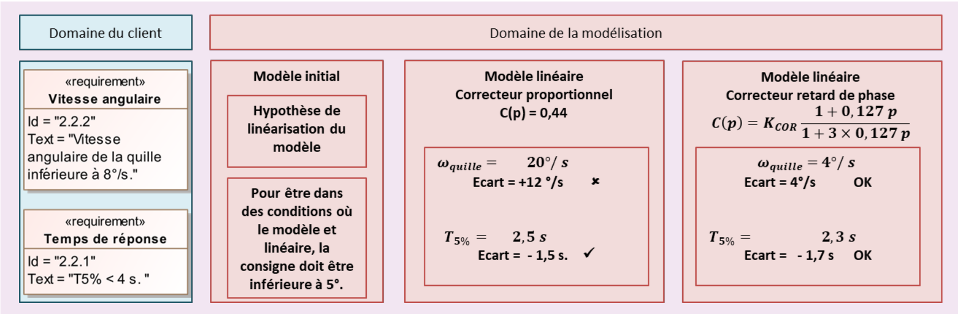
Question 14 Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

Correction

En regardant où la courbe a la pente la plus importante, on a approximativement $2/0,5 \simeq 4°/s$.
$t_{5\%} \simeq 2{,}3\,\mathrm{s} < 4\,\mathrm{s}$ $4°/s < 8°/s$.
CDCF validé.

Question 15 Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

Correction


Domaine du client
Domaine de la modélisation
«requirement»
Vitesse angulaire
Id = "2.2.2"
Text = "Vitesse angulaire de la quille inférieure à 8°/s."
«requirement»
Temps de réponse
Id = "2.2.1"
Text = "T5% < 4 s. "
Modèle initial
Hypothèse de linéarisation du modèle
Pour être dans des conditions où le modèle et linéaire, la consigne doit être inférieure à 5°.
Modèle linéaire
Correcteur proportionnel
C(p) = 0,44
$\omega_{quille} = 20°/s$
Ecart = +12 °/s
$T_{5\%} = 2,5\ s$
Ecart = - 1,5 s.
Modèle linéaire
Correcteur retard de phase
$C(p) = K_{COR}\dfrac{1+0,127\,p}{1+3\times 0,127\,p}$
$\omega_{quille} = 4°/s$
Ecart = 4°/s OK
$T_{5\%} = 2,3\ s$
Ecart = - 1,7 s OK