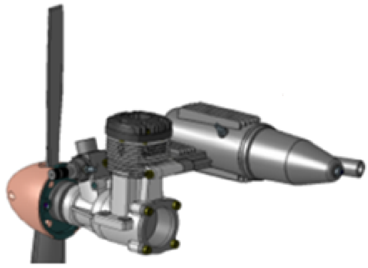
Application 1
Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme ★ – Corrigé

Équipe PT La Martinière Monplaisir.



Mise en situation

Question 1 Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin **(1)** et la vitesse du piston **(3)**, notée $\dot{\lambda} = V_{3/0}$.

Correction

On réalise une fermeture géométrique dans le triangle ABC et on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow e\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} - \lambda_3\overrightarrow{y_0} \Leftrightarrow e\left(\cos\theta_1\overrightarrow{x_0} + \sin\theta_1\overrightarrow{y_0}\right) + L_2\left(\cos\theta_2\overrightarrow{x_0} + \sin\theta_2\overrightarrow{y_0}\right) - \lambda_3\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0}$.
On a donc : $\left\{\begin{array}{l} e\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 = 0 \\ e\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2 - \lambda_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} L_2\cos\theta_2 = -e\cos\theta_1 \\ L_2\sin\theta_2 = \lambda_3 - e\sin\theta_1 \end{array}\right.$ Au final, $L_2^2 = e^2\cos^2\theta_1 + (\lambda_3 - e\sin\theta_1)^2 \Leftrightarrow L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1 = (\lambda_3 - e\sin\theta_1)^2$
$\Rightarrow \sqrt{L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1} = \lambda_3 - e\sin\theta_1 \Rightarrow \lambda_3 = \sqrt{L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1} + e\sin\theta_1$.

Question 2 En considérant que seul le plan $\left(H, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.

Correction

On a donc une invariance suivant $\overrightarrow{y_1}$ et $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\left(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)}$

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie $I_A(1)$, $I_{G_2}(2)$ et $I_{G_3}(3)$ sont diagonales.

Correction

H est un point fixe :

- $\{\mathscr{C}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(1/0)} = m_1\overrightarrow{V(G_1,1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(H,1/0)} = I_H(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} \end{array}\right\}_H = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1} \end{array}\right\}_H$
- $\{\mathscr{D}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1\overrightarrow{\Gamma(G_1,1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(H,1/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\delta(H,1/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} \end{array}\right\}_H = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_1\ddot{\theta}_1\overrightarrow{z_1} \end{array}\right\}_H$

G_3 est le centre de gravité de 3. Le solide 3 est en translation par rapport à 0.

- $\{\mathscr{C}(3/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(3/0)} = m_3\overrightarrow{V(G_3,3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)} \end{array}\right\}_{G_3} = \left\{\begin{array}{l} m_3\dot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_3}$
- $\{\mathscr{D}(3/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(3/0)} = m_1\overrightarrow{\Gamma(G_3,3/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_3,1/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} \end{array}\right\}_{G_3} = \left\{\begin{array}{l} m_3\ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_3}$

G_2 est le centre de gravité de 2.

- $\{\mathscr{C}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(2/0)} = m_2\overrightarrow{V(G_2,2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)} = I_{G_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} \end{array}\right\}_{G_2} = \left\{\begin{array}{l} m_2\left(\dot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} + a_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}\right) \\ C_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_0} \end{array}\right\}_{G_2}$

- $\{\mathscr{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_2,2/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2\left(\ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} + a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{x_2} + a_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}\right) \\ C_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$

Détail des calculs.

Calcul de $\overrightarrow{V(G_2,2/0)}$.

$\overrightarrow{V(G_2,2/0)} = \overrightarrow{V(G_2,2/3)} + \overrightarrow{V(G_2,3/0)}$

$\overrightarrow{V(G_2,2/3)} = \overrightarrow{V(C,2/3)} + \overrightarrow{G_2C} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/3)} = \overrightarrow{0} + a_2\overrightarrow{y_2} \wedge \dot{\theta}_2\overrightarrow{z_0} = a_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}$ $\quad \overrightarrow{V(G_2,3/0)} = \dot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0}$

$\overrightarrow{V(G_2,2/0)} = \dot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} + a_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)}$.

$\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)} = \ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} + a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{x_2} + a_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}$.

Question 3 Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.

Correction

- On isole **(1)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(A,0 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,0 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(B,2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison). Par ailleurs, $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B,2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} + \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)}\right)\overrightarrow{z_0} = \left(e\overrightarrow{x_1} \wedge \left(X_{21}\overrightarrow{x_2} + Y_{21}\overrightarrow{y_2}\right)\right)\overrightarrow{z_0} = \left(eX_{21}\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} + eY_{21}\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2}\right)\overrightarrow{z_0} = eX_{21}\sin(\theta_2 - \theta_1) + eY_{21}\cos(\theta_2 - \theta_1)$
  - Couple moteur : $\{\mathscr{T}(0_m \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_A$.
- On applique le TMD en A en projection suivant $\overrightarrow{z}$:

$$eX_{21}\sin(\theta_2 - \theta_1) + eY_{21}\cos(\theta_2 - \theta_1) + C_m = C_1\ddot{\theta}_1$$

- On isole **(2)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(3 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 3)} \\ -\overrightarrow{\mathscr{M}(C,2 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_C$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(C,2 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
- On applique le TMD en C en projection sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$-\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{\delta(C,2/0)} \cdot \overrightarrow{z} \Longleftrightarrow L_2\overrightarrow{y_2} \wedge \left(X_{21}\overrightarrow{x_2} + Y_{21}\overrightarrow{y_2}\right) \cdot \overrightarrow{z} = \left(\overrightarrow{\delta(G_2,2/0)} + \overrightarrow{CG_2} \wedge m_2\overrightarrow{\Gamma(\ldots}\right.$$

$$\Longrightarrow -L_2X_{21} = C_2\ddot{\theta}_2\left(-a_2\overrightarrow{y_2} \wedge \left(m_2\left(\ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} + a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{x_2} + a_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}\right)\right)\right) \cdot \overrightarrow{z}$$

$$\Longrightarrow -L_2 X_{21} = C_2\ddot{\theta}_2 + a_2 m_2 \left(\ddot{\lambda}_3 \sin\theta_2 - a_2\ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2}\right)$$

- On isole **(2+3)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison glissière : $\left\{\mathcal{T}\left(0\rightarrow 3\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R\left(0\rightarrow 3\right)}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}\left(A,0\rightarrow 3\right)}\end{array}\right\}_A$ avec $\overrightarrow{R\left(0\rightarrow 3\right)}\cdot\overrightarrow{y_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\left\{\mathcal{T}\left(1\rightarrow 2\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c}-\overrightarrow{R\left(2\rightarrow 1\right)}\\ -\overrightarrow{\mathcal{M}\left(B,2\rightarrow 1\right)}\end{array}\right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(B,2\rightarrow 1\right)}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Force explosion : $\left\{\mathcal{T}\left(0_e\rightarrow 3\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c}F_y\overrightarrow{y} + F_z\overrightarrow{z}\\ \overrightarrow{C_{exp}}\end{array}\right\}_C$.
- On applique le TRD en projection sur $\overrightarrow{y_0}$:

$$F_y - Y_{21} = m_3\ddot{\lambda}_3 + \left(m_2\left(\ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} + a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{x_2} + a_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}\right)\right)\cdot\overrightarrow{y_0}$$

$$\Longleftrightarrow F_y - Y_{21} = m_3\ddot{\lambda}_3 + \left(m_2\left(\ddot{\lambda}_3 + a_2\ddot{\theta}_2\sin\theta_2 + a_2\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2\right)\right)$$