

TD 1

Gyrolock ★ – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2022.
Corrigé proposé par l'UPSTI.

Comportement dynamique du stabilisateur

C1-05

C2-09

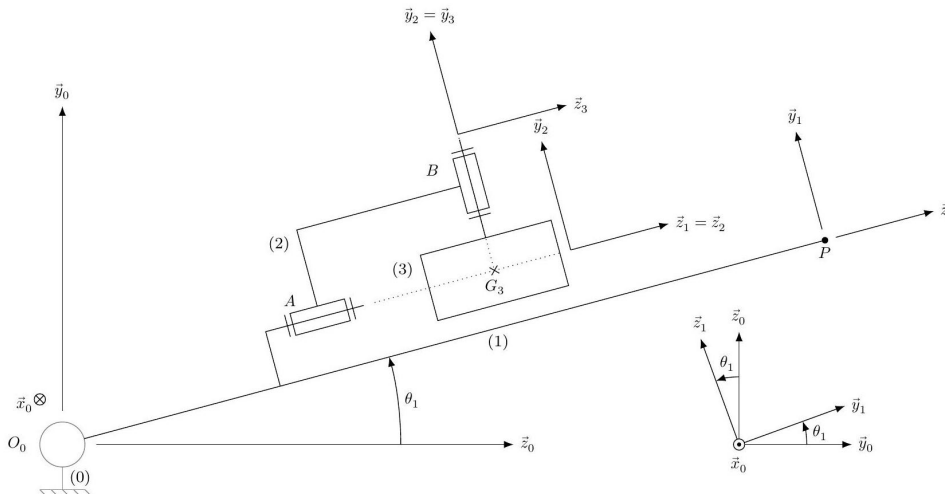


FIGURE 1 – Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour $\theta_2 = \theta_3 = 0$)

Dans la modélisation retenue (figure 1), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère $\mathcal{R}_1 (O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ avec $\theta_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$. Le point P tel que $O_0P = L$ représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

Paramétrage, notations et hypothèses

- La liaison pivot d'axe (O_0, \vec{x}_0) entre les solides (0) et (1) possède une raideur k et un coefficient de frottement visqueux f , d'où $\vec{M}(O_0, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1)$;
- les autres liaisons sont supposées parfaites;
- l'action du cœur sur le stabilisateur (1) est modélisée par $\{\mathcal{T}_{c \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} f_c \vec{y}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_P$;
- seul le déplacement vertical du point P est pris en compte. On note $y(t) = -\vec{O_0P} \cdot \vec{y}_0$;
- le stabilisateur (1) est de masse m_1 et possède un centre d'inertie G_1 tel que $\vec{O_0G_1} = L_{G_1} \vec{z}_1$ et l'opérateur d'inertie est $\mathcal{J}(G_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$;
- la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables;
- la toupie (3) est de masse m_3 et possède un centre d'inertie G_3 tel que $\vec{O_0G_3} = L_{G_3} \vec{z}_1 + H_{G_3} \vec{y}_1$;
- les figures de changement de base sont données figures 6 et 9;
- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques. Q 14. Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en $\theta_1(t)$). L'ensemble isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

Question 1 Exprimer $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0$, la projection sur \vec{x}_0 du moment dynamique au point O_0 du solide (1) en mouvement dans le référentiel \mathcal{R}_0 .

Correction

Par formule de Varignon :

$$\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \vec{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 + \left(\overrightarrow{O_0 G_1} \wedge m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) \right) \cdot \vec{x}_0$$

$$\text{avec } \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{O_0 G_1}}{dt^2} \right|_0 = -L_{G_1} \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - L_{G_1} \dot{\theta}_1^2 \vec{z}_1 \text{ donc } \left(\overrightarrow{O_0 G_1} \wedge m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) \right) \cdot \vec{x}_0 = m_1 L_{G_1}^2 \ddot{\theta}_1.$$

$$\text{De plus au centre d'inertie } G_1 : \vec{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \left. \frac{d\vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0}{dt} \right|_0 \text{ avec}$$

$$\vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \mathcal{I}(G_1, 1) \vec{\Omega}(1/0) \cdot \vec{x}_0.$$

$$\text{Donc } \vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = A_1 \dot{\theta}_1 \text{ et } \vec{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = A_1 \ddot{\theta}_1.$$

$$\text{Finalement } \boxed{\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = (A_1 + m_1 L_{G_1}^2) \ddot{\theta}_1}.$$

Question 2 Exprimer littéralement la vitesse $\vec{V}(G_3, 3/0)$ dans la base \mathcal{B}_1 , puis l'accélération $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0)$ dans la base \mathcal{B}_1 .

Correction

Le point G_3 étant **physiquement rattaché à (3)** on peut écrire

$$\boxed{\vec{V}(G_3, 3/0) = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0 G_3}}{dt} \right|_0 = -L_{G_3} \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + H_{G_3} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1}.$$

$$\text{Ensuite } \boxed{\vec{\Gamma}(G_3, 3/0) = \left. \frac{d\vec{V}(G_3, 3/0)}{dt} \right|_0 = -\left(L_{G_3} \ddot{\theta}_1 + H_{G_3} \dot{\theta}_1^2\right) \vec{y}_1 + \left(H_{G_3} \ddot{\theta}_1 - L_{G_3} \dot{\theta}_1^2\right) \vec{z}_1}.$$

1: $\ddot{\theta}_2 \approx 0$, $\theta_2 \approx 0$ et $\dot{\theta}_3 = \omega_3$ constante.

Question 3 En conservant les conditions de fonctionnement ci-contre ¹, il est possible de montrer que $\vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$ avec $c_x(t) = B_3 \omega_3 \dot{\theta}_2$ (résultat admis sans démonstration). En déduire $\vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0$, en fonction de A_3 , $c_x(t)$, m_3 , L_{G_3} , H_{G_3} et $\ddot{\theta}_1(t)$.

Correction

Par formule de Varignon :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0 &= \vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 + \left(\overrightarrow{O_0 G_3} \wedge m_3 \vec{\Gamma}(G_3, 3/0) \right) \cdot \vec{x}_0 \\ &= A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t) + m_3 L_{G_3} \left(L_{G_3} \ddot{\theta}_1 + H_{G_3} \dot{\theta}_1^2 \right) + m_3 H_{G_3} \left(H_{G_3} \ddot{\theta}_1 - L_{G_3} \dot{\theta}_1^2 \right) \\ &= \left(A_3 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2 \right) \ddot{\theta}_1 - c_x(t) \end{aligned}$$

Question 4 Exprimer J_x en fonction de A_1 , A_3 , m_1 , m_3 , L_{G_1} , L_{G_3} et H_{G_3} permettant d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x \ddot{\theta}_1(t) + f \dot{\theta}_1(t) + k \theta_1(t) = c_x(t) - L f_c(t)$$

Correction

En appliquant la stratégie vue en question 14 on a l'équation (effets dynamiques de (2) négligés et actions de la pesanteur négligées) :

$$\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0 + \vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1) + (\overrightarrow{O_0P} \wedge f_c \vec{y}_1) \cdot \vec{x}_0$$

Tout calcul fait avec $\overrightarrow{O_0P} = L \vec{z}_1$:

$$\left(A_1 + A_3 + m_1 L_{G_1}^2 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2 \right) \ddot{\theta}_1 + f \dot{\theta}_1 + k \theta_1 = c_x(t) - L f_c(t)$$

On identifie $J_x = A_1 + A_3 + m_1 L_{G_1}^2 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2$.

En supposant que θ_1 reste proche de 0, la relation $y(t) = L\theta_1(t)$ sera utilisée.

Les transformées de Laplace de $y(t)$, $c_x(t)$ et $f_c(t)$ sont notées $Y(p)$, $C_x(p)$ et $F_c(p)$.

Question 5 En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert $H_{\text{pert}}(p)$ et $H_1(p)$ du schéma-blocs figure 2 en fonction de L , J_x , f et k .

Correction

Le schéma-bloc donne $\frac{Y(p)}{H_1(p)} = C_x(p) - H_{\text{pert}}(p)F_c(p)$. L'équation différentielle précédente rapportée dans le domaine de Laplace (**conditions initiales nulles**) s'écrit (avec $Y(p) = L\theta_1(p)$) :

$$(J_x p^2 + f p + k) \frac{Y(p)}{L} = C_x(p) - L F_c(p)$$

On identifie $H_1(p) = \frac{L}{J_x p^2 + f p + k}$ et $H_{\text{pert}}(p) = L$.

On rappelle que $L = 0,3$ m et les valeurs retenues pour J_x , f et k sont :

- ▶ $J_x = 1,14 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
- ▶ $-f = 64 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$;
- ▶ $-k = 95 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$.

Question 6 Écrire $H_1(p)$ sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique K_1 , amortissement ξ_1 et pulsation propre ω_1 . Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).

Correction

On a $H_1(p) = \frac{L}{1 + \frac{f}{k}p + \frac{J_x}{k}p^2}$, on identifie alors :

- le gain statique $K_1 = \frac{L}{k} = \frac{0,3}{95} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/N}$;
- la pulsation propre $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{J_x}} = \sqrt{\frac{95}{1,14 \cdot 10^{-2}}} = 91,3 \text{ rad/s}$;
- l'amortissement $\xi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{\sqrt{k J_x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{64 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{95 \cdot 1,14 \cdot 10^{-2}}} = 0,03$.

On choisit de décrire le comportement dans le domaine fréquentiel. On a un système d'ordre 2 avec résonance (car $\xi_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$) à la pulsation $\omega_r = \omega_1 \sqrt{1 - 2\xi_1^2}$. Le diagramme de Bode

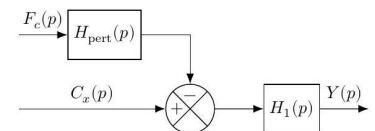


FIGURE 2 – Schéma bloc du stabilisateur (1)

associé est le suivant :