

# TD 1

## Quille pendulaire ★ – Sujet

Concours Commun Mines Ponts 2014.

C1-05

C2-08

### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.

### Objectif

L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

### Hypothèses

- ▶ Les liaisons sont toutes parfaites.
- ▶ Le bateau est à l'arrêt et son repère  $R_N$  est galiléen.
- ▶ Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que :  $F_{h2} > 0$  et  $F_{h3} = 0$ . Le vérin 2-4 est alors moteur et le vérin 3-5 est libre ( $F_{h2}$  désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2; on a donc  $-F_{h2}$  qui agit sur 4).
- ▶ Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures ci-contre.

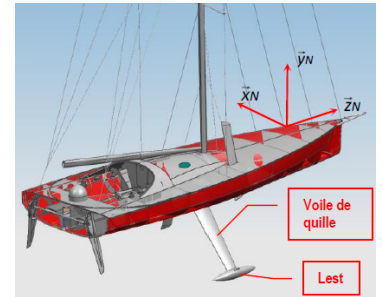
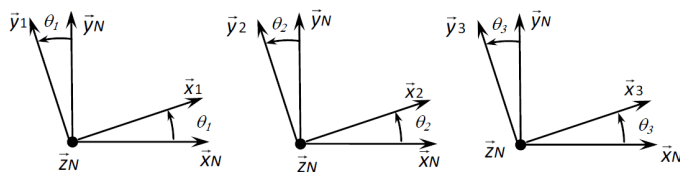


FIGURE 1 – Modèle volumique 3D

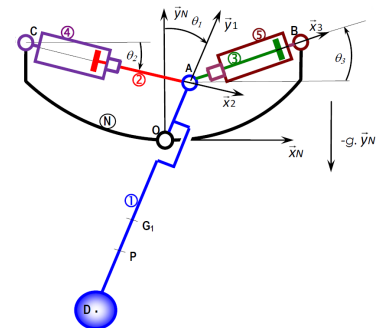


FIGURE 2 – Modèle 2D

FIGURE 3 – Paramétrage

Données géométriques, massiques et inertielles  $\overrightarrow{OA} = R\overrightarrow{y_1}$ ;

$$\overrightarrow{CA} = x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}; \overrightarrow{AB} = x_{35}(t)\overrightarrow{x_3},$$

- Solide 1, masse  $M_1$ , centre d'inertie  $G_1$ ,  $\overrightarrow{OG_1} = -L_1\overrightarrow{y_1}$ ,  $I_{G_1}(1) =$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 2, masse  $M_2$ , centre d'inertie  $G_2$ ,  $\overrightarrow{AG_2} = -L_2\overrightarrow{x_2}$ ,  $I_{G_2}(2) =$

$$\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 3, masse  $M_3 = M_2$ , centre d'inertie  $G_3$ ,  $\overrightarrow{AG_3} = L_2\overrightarrow{x_3}$ ,

$$I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 4, masse  $M_4$ , centre d'inertie  $C$ ,  $I_C(4) =$

$$\begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_N})}.$$

- Solide 5, masse  $M_5$ , centre d'inertie  $B$ ,  $I_B(5) =$

$$\begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_N})}.$$

### Actions mécaniques

- Action de pression de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} F_{h2}\overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_C$ .
- Action de pression de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -F_{h3}\overrightarrow{x_3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_B$ .
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \overrightarrow{x_3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action hydrodynamique de l'eau sur 1 :  $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{pmatrix} F_p \overrightarrow{z_1} + F_t \overrightarrow{x_1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_P$  avec  $\overrightarrow{OP} = -h\overrightarrow{y_1}$ .

## Vecteurs vitesse

**Question 1** Tracer le graphe de liaisons.

**Question 2** Exprimer les vitesses suivantes :

1.  $\overrightarrow{V}(G_1, 1/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres géométriques utiles ;
2.  $\overrightarrow{V}(G_2, 2/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}$  et des paramètres géométriques utiles ;
3.  $\overrightarrow{V}(G_3, 3/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$ ,  $x_{35}$  et des paramètres géométriques utiles ;
4.  $\overrightarrow{V}(A, 2/4)$  en fonction de  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ .

## Énergie cinétique

Soit  $E$  l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note  $\mathcal{E}_c(i/N)$  l'énergie cinétique de  $i$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_N$ .

**Question 3** Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

1.  $\mathcal{E}_c(1/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres inertiels et géométriques utiles ;
2.  $\mathcal{E}_c(2/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}(t)$  et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
3.  $\mathcal{E}_c(4/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$  et des paramètres inertiels et géométriques utiles.

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

**Question 4** Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

**Question 5** Recenser, puis exprimer les puissances galiléennes non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$ ) développées par les actions mécaniques extérieures à E. Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

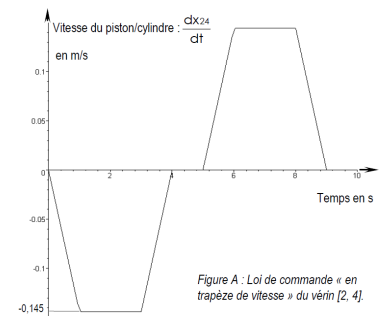
**Question 6** Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N. Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position  $\theta_1 = 0$  à la position  $\theta_1 = 45^\circ$  en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position  $\theta_1 = 0$  en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure 4.

**Question 7** Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants  $t = 0$  s,  $t = 1$  s,  $t = 3$  s et  $t = 4$  s. Sur cet intervalle  $[0, 4$  s], évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

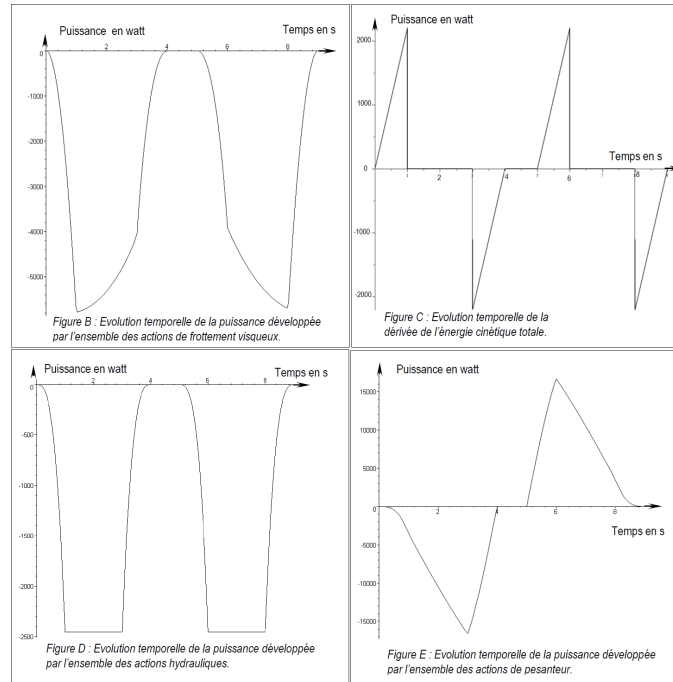
**Question 8** Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.



### Éléments de correction

1. .
2. a)  $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)} = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1$ .
- b)  $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = -R \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2$ . On a aussi  $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2 + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \vec{y}_2$ .
- c)  $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = -R \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 + L_2 \dot{\theta}_3 \vec{y}_3$ . On a aussi  $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)} = -\dot{x}_{35}(t) \vec{x}_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \vec{y}_3$ .
- d)  $\overrightarrow{V(A, 2/4)} = \dot{x}_{24}(t) \vec{x}_2$ .
3. a)  $\mathcal{E}_c(1/N) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2)$ .
- b)  $\mathcal{E}_c(2/N) = \frac{1}{2} \left( B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 \left( \dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2 \right) \right)$ .

FIGURE 4 – Evolution temporelle des puissances



$$c) \mathcal{E}_c(4/N) = \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2.$$

$$4. \quad \mathcal{P} \left( 4 \leftrightarrow 2 \right)^{\text{Ph}} = F_{h2} \dot{x}_{24};$$

$$\mathcal{P} \left( 4 \leftrightarrow 2 \right)^{\text{Phf}} = -k \dot{x}_{24}^2(t);$$

$$\mathcal{P} \left( 3 \leftrightarrow 5 \right)^{\text{Ph}} = F_h \dot{x}_{35}(t);$$

$$\mathcal{P} \left( 3 \leftrightarrow 5 \right)^{\text{Phf}} = -k \dot{x}_{35}^2(t).$$

5. la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;

$$\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1;$$

$$\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) = -M_2 g \dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 - M_2 g \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2;$$

$$\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/R_N) = -M_3 g (-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3);$$

$$\mathcal{P}(\text{eau} \rightarrow 1/R_N) = F_t h \dot{\theta}_1.$$

$$6. \quad \mathcal{P}(\bar{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_N)}{dt}.$$