

Application 0

Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie – Corrigé

Émilien Durif.



Question 1 Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

Correction

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Correction

On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ($E = \{1 + 2 + 3\}$) en projection sur l'axe (K, \vec{z}_0) : $\mathcal{M}(K, \vec{E} \rightarrow E) \cdot \vec{z}_0 = \overline{\delta(K, E/R_0)} \cdot \vec{z}_0$
 $\Leftrightarrow C_m = \left(\overline{\delta(K, 1/R_0)} + \overline{\delta(K, 2/R_0)} + \overline{\delta(K, 3/R_0)} \right) \cdot \vec{z}_0$.

Question 3 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment cinétique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée $\overline{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0$.

Correction

- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (K, \vec{z}_0) :
- $\overline{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = \left(\bar{I}_K(1) \cdot \vec{\Omega}(1/0) \right) \cdot \vec{z}_0 = \left(\bar{I}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 \right) \cdot \vec{z}_0$.

Or on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}) soit : $\bar{I}_K(1) \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0 = J$.

Ainsi : $\overline{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J \dot{\alpha}$.

Remarque

En considérant que $\bar{I}_K(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & J \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$, $\bar{I}_K(1) \vec{\Omega}(1/0) = \begin{pmatrix} -E_1 \dot{\alpha} \\ -D_1 \dot{\alpha} \\ J \dot{\alpha} \end{pmatrix}$ et $\overline{\sigma(K, 1/0)} \cdot \vec{z}_0 = J \dot{\alpha}$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\overline{\sigma(K, 2/0)}$ calculé au point K de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

Correction

- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- On connaît l'opérateur d'inertie en G , on calcule donc : $\overline{\sigma(G, 2/0)} : \overline{\sigma(G, 2/0)} = \bar{I}_G(2) \cdot \vec{\Omega}(2/0)$.
- On calcule $\vec{\Omega}(2/0) : \vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} (\cos \beta \vec{z}_2 + \sin \beta \vec{y}_2)$.
- On calcule $\overline{\sigma(G, 2/0)} : \overline{\sigma(G, 2/0)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$

$$= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

► On calcule $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0)$:

- $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) = \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{R_c}(2/0) = \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) + a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V}(G \in 2/0)$
- On calcule $\vec{V}(G \in 2/0) : \vec{V}(G \in 2/0) = \vec{V}(K \in 2/0) + \overrightarrow{GK} \wedge \vec{\Omega}(2/0) = \vec{0} - a \cdot \vec{x}_1 \wedge (\dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1)$
 $= a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$
- On calcule $a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V}(G \in 2/0) : a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V}(G \in 2/0) = a \cdot \vec{x}_1 \wedge M (a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1) = M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$
- On en déduit $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) : \overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}(K, 3/0)$

Correction

- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi $\overrightarrow{\sigma}(Q, 3/0) = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{\sigma}(K, 3/0) = \overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \vec{V}(Q \in 3/0)$:
 - On calcule $\overrightarrow{KQ} : \overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2$
 - On calcule $\vec{V}(Q \in 3/0) : \vec{V}(Q \in 3/0) = \vec{V}(Q \in 3/2) + \vec{V}(Q \in 2/1) + \vec{V}(Q \in 1/0)$
 $= \vec{0} + \vec{V}(G \in 2/1) + \overrightarrow{GQ} \wedge \vec{\Omega}(2/1) + \vec{V}(G \in 1/0) + \overrightarrow{GQ} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = \vec{0} + b \cdot \vec{z}_2 \wedge \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + b \cdot \vec{z}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}$
 - On calcule $\overrightarrow{KQ} \wedge m \vec{V}(Q \in 3/0) :$
 $\overrightarrow{KQ} \wedge m \vec{V}(Q \in 3/0) = m \cdot [a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2] \wedge [b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}]$
 $= m [a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2]$
- $\overrightarrow{\sigma}(K, 3/0) = m [a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2]$

Question 6 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 1/0)$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 1/0) = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(K, 1/0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 1/0)}{dt} \right]_{R_0} - \frac{d}{dt} [\vec{z}_0]_{R_0} \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 1/0) = J \cdot \ddot{\alpha}$$

Question 7 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 2/0)$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 2/0)}{dt} \right]_{R_0} - \frac{d}{dt} [\vec{z}_0]_{R_0} \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 2/0)$$

Or, $\vec{z}_{0,1} = \cos \beta \cdot \vec{z}_2 + \sin \beta \cdot \vec{y}_2$,

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} &= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \\ &= \dot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] \end{aligned}$$

d'où,

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] + 2 \cdot \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta [B - C].$$

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon $\vec{z}_0 : \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$.

Correction

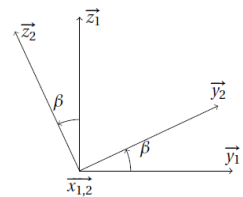
On trouve alors :

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)} &= m \frac{d[a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cos \beta + a^2 \cdot \dot{\alpha} + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin^2 \beta]}{dt} \\ &= m [a \cdot b \cdot (\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 \cdot (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)] \end{aligned}$$

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Correction

Le théorème du moment dynamique autour de l'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ donne : $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta$.



$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_2 = \cos \beta$$

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_1 = 1$$

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_0 = 0$$

$$\vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_1 = 0$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 = \sin \beta$$