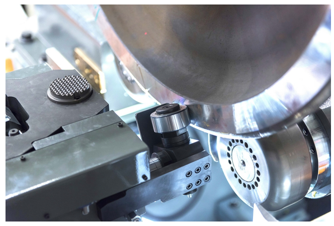
TD 1
Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferroviaires – Asservissement du porte-outil– Sujet

Concours Centrale Supelec – PSI 2018.

B2-07

C2-02



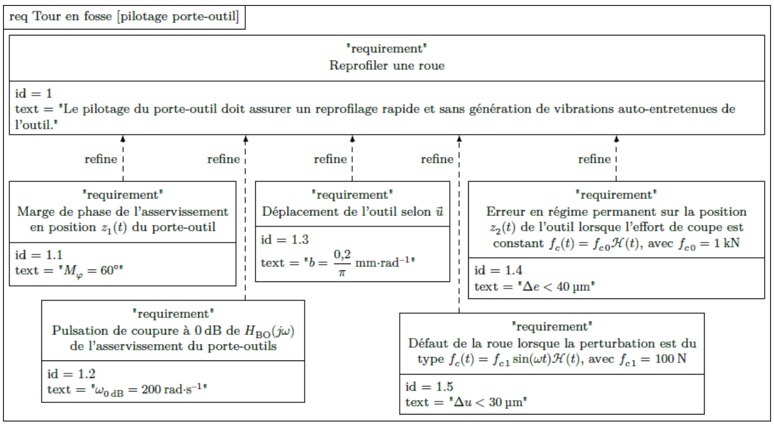
Modélisation du mouvement pour la commande

Objectif

Modéliser le comportement dynamique de l'outil et du porte-outil, puis étudier une commande en position $z_1(t)$ comprenant un correcteur proportionnel.

Le système composé de l'outil et du porte-outil est modélisé sur la figure 2. Le porte-outil, de masse $m_1 = 5522\,\text{kg}$, est considéré indéformable et en liaison glissière de direction $\overrightarrow{z_0}$ avec le bâti. Une chaîne de motorisation électrique permet de déplacer le porte-outil et une structure de commande associée permet d'asservir la position $z_1(t)$ par rapport à une position de référence. La chaîne de motorisation exerce une force motrice $\overrightarrow{f}_m(t) = f_m(t)\overrightarrow{z_0}$ sur le porte-outil.

La cahier des charges est donné sur la figure suivante.



Les positions du porte-outil et du point C par rapport à leur position de référence sont respectivement paramétrées par $z_1(t)\overrightarrow{z_0}$ et $z_2(t)\overrightarrow{z_0}$, avec $z_1(t)\overrightarrow{z_0}$ et $z_2(t)\overrightarrow{z_0}$ des grandeurs algébriques (figure 2). Les conditions initiales sont toujours supposées nulles.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au porte-outil puis à l'outil permet

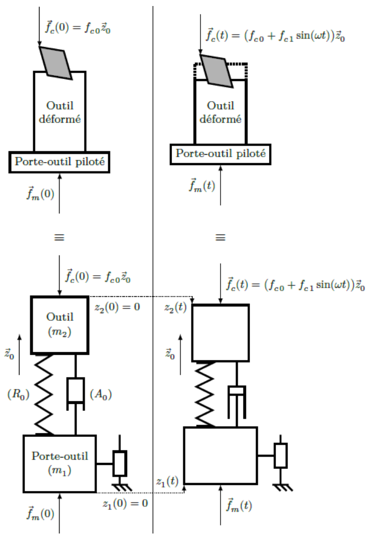


FIGURE 2 – Modèle de déformation de l'outil avec le porte-outil piloté

d'obtenir les deux relations suivantes :

$$m_1\ddot{z}_1(t) + \lambda\dot{z}_1(t) + Kz_1(t) = \lambda\dot{z}_2(t) + Kz_2(t) + f_m(t)$$
$$m_2\ddot{z}_2(t) + \lambda\dot{z}_2(t) + Kz_2(t) = \lambda\dot{z}_1(t) + Kz_1(t) + f_c(t)$$

Le modèle correspondant est représenté par le schéma bloc de la figure 3.

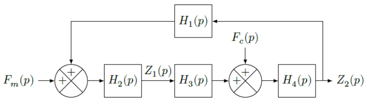


FIGURE 3 – Modèle de l'outil et du porte-outil

Question 1 Exprimer les fonctions $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$ en fonction de K, λ, m_1 et m_2.

Le modèle de la figure 3 est réduit au modèle équivalent de la figure figure 4.

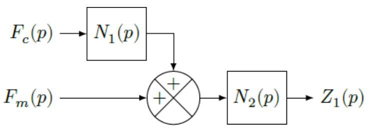
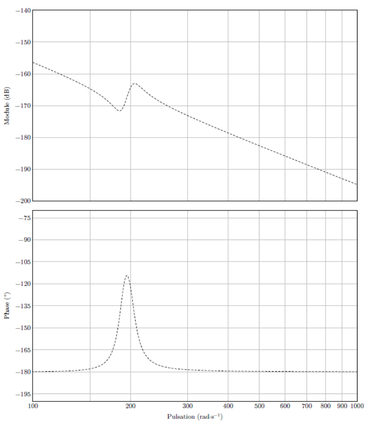


FIGURE 4 – Modèle équivalent

Question 2 Exprimer $N_1(p)$ et $N_2(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$.

Question 3 Montrer que $N_2(p)$ peut s'écrire sous la forme $N_2(p) = A\dfrac{p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2}{p^2\left(p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2\right)}$. Exprimer ξ_1, ξ_2, ω_1, ω_2 et A en fonction de m_1n m_2, λ et K.

Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_2(p)$ est représenté ci-contre.



Question 4 Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

Question 5 Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert $N_2(p)$ peut être approchée par la fonction $N_{2\text{app}}(p) = \dfrac{A}{p^2}$. En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_{2\text{app}}(p)$ sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

Le modèle approché ($N_{2\text{app}}(p)$) est retenu pour la suite de l'étude. Le schéma bloc modélisant la régulation de la position $z_1(t)$ est donné en figure figure 5, en considérant un correcteur proportionnel de gain K_p.

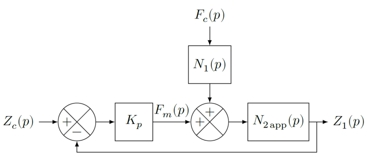


FIGURE 5 – Modèle de synthèse de la régulation en position $z_1(t)$ du porte-outil

Question 6 Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la figure 1.

Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$.

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t-\tau)$ où τ est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

D'un point de vue numérique, $K_f = 1{,}5\times10^9\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ et $\tau = 1\,\mathrm{s}$.

Question 7 Déterminer $H_r(p)$ en fonction de τ.

Le schéma-blocs retenu est donné ci-contre.

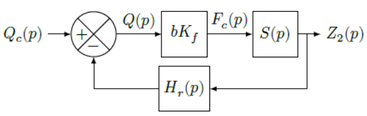


FIGURE 6 – Modèle équivalent de la chaîne d'asservissement complète

La figure 7 représente le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système modélisé figure 6, avec $b = \dfrac{5\times10^{-2}}{\pi}\,\mathrm{mm\,rad^{-1}}$

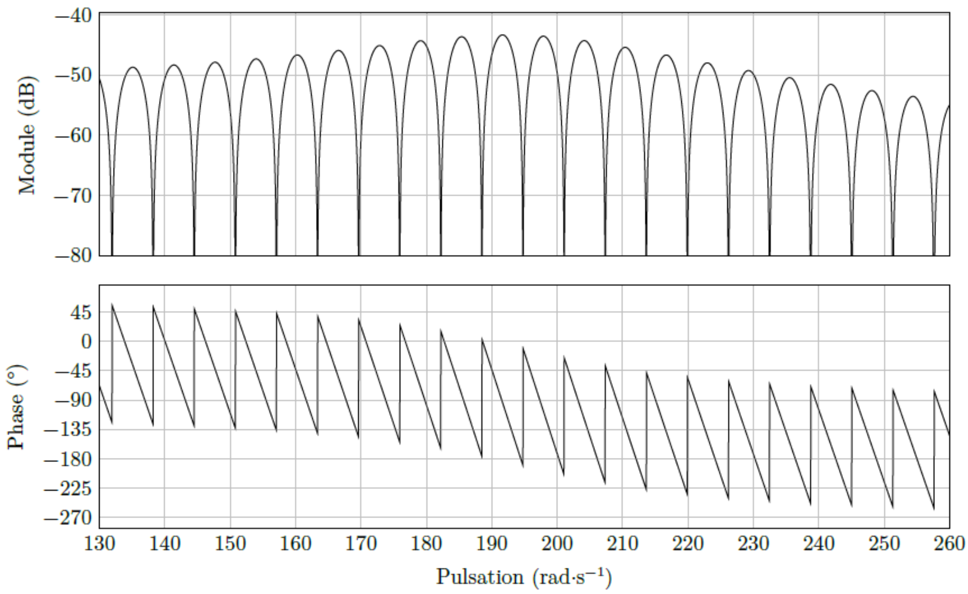


FIGURE 7 – Diagramme de Bode de la boucle ouverte du schéma-blocs

Les « zéros de transmission » d'une fonction de transfert $H(p)$ correspondent aux pulsations ω pour lesquelles $H(j\omega)$ est nul.

Question 8 Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la figure 7 en analysant les « zéros de transmission ».

Question 9 Déterminer un ordre de grandeur du paramètre b permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

Éléments de correction

1. $H_1(p) = \lambda p + K$, $H_2(p) = \dfrac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K}$, $H_3(p) = \lambda p + K$, $H_4(p) = \dfrac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$.
2. $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$ et $N_2(p) = \dfrac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$.
3. $\omega_1^2 = \dfrac{K}{m_2}$, $\omega_2^2 = K\dfrac{m_1+m_2}{m_1m_2}$, $\xi_1 = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{m_2K}}$ et $\xi_2 = \lambda\dfrac{\sqrt{m_1+m_2}}{2\sqrt{Km_1m_2}}$.
4. .
5. $A = 1,87 \cdot 10^{-4}$.
6. .
7. $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}$.
8. .
9. $b_{\text{lim}} = 2{,}83\,\text{mm}\,\text{rad}^{-1}$.