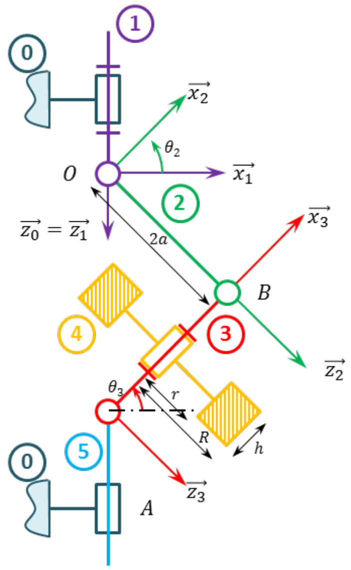
Colle 0
Régulateur – Corrigé

C1-05

C2-09

Un système matériel est constitué de 5 solides reliés au bâti **(0)**. Les solides **(1)**, **(2)**, **(3)** et **(5)** sont des barres sans épaisseur, articulées par des pivots en O, A ou B de manière à demeurer dans un même plan noté $\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1}\right)$. Cet ensemble est donc mobile en rotation autour de $\overrightarrow{z_1}$. On repère sa position angulaire par le paramètre ψ.



Au bâti **(0)**, on associé le repère fixe $\mathcal{R}_0$.

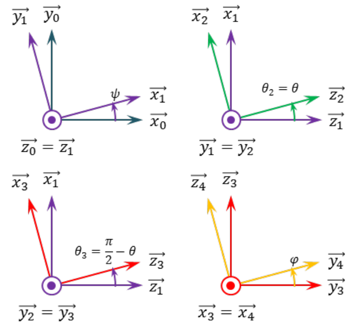
À chaque S_i on associe une base $\mathcal{B}_i\left(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{y_i},\overrightarrow{z_i}\right)$. Les repère $\mathcal{R}_i$ sont d'origine O ou A selon le cas.

Les rotations internes sont définies par θ_2 autour de $\left(O,\overrightarrow{y_1}\right)$ et θ_3 autour de $\left(A,\overrightarrow{y_1}\right)$.

Les barres **(2)** et **(3)** sont identiques, de longueur $2a$ et de masse $m_2=m_3=m$.

Les barres **(1)** et **(5)** ont une masse m_i et des longueurs ℓ_i. **(4)** est un volant d'inertie de masse M qui fait l'objet d'une liaison pivot d'axe $\left(G,\overrightarrow{x_3}\right)$ avec la barre **(3)**. Un repère $\mathcal{R}_4$ est lié à ce volant dont on définit sa position par le paramètre angulaire φ.

On donne le paramétrage suivant.



Question 1 Proposer une matrice d'inertie pour chacun des solides.

Question 2 Déterminer les torseurs cinétiques suivants : $\{\mathscr{C}(1/0)\}_O$, $\{\mathscr{C}(2/0)\}_O$.

Question 3 Déterminer les torseurs dynamiques suivants : $\{\mathscr{D}(1/0)\}_O$, $\{\mathscr{D}(2/0)\}_O$. En déduire $\{\mathscr{D}(1\cup 2/0)\}_O$

Correction

Détermination de $\{\mathscr{C}(1/0)\}_O$ O est un point fixe. On a donc :

$$\{\mathscr{C}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{c} m_1\overrightarrow{V(G_1,1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(O_1,1/0)}=I_O(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)}\end{array}\right\}_O$$

(1) est une tige d'axe $\overrightarrow{z_0}$ et de rayon négligeable. On a donc $I_O(1)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0\\ 0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ avec $A_1=\dfrac{m_1 l_1^2}{3}$. De plus, $\{\mathscr{V}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(1/0)}=\dot\psi\overrightarrow{z_1}\\ \overrightarrow{V(O,1/0)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$. On a donc $I_O(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0\\ 0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot\psi\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}=\overrightarrow{0}$. Au final :

$$\{\mathscr{C}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$$

Détermination de $\{\mathscr{C}(2/0)\}_O$ O est un point fixe. On a donc :

$$\{\mathscr{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_2\overrightarrow{V(G_2,2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(O,2/0)} \end{array} \right\}_O$$

(2) est une tige d'axe $\overrightarrow{z_2}$ et de rayon négligeable. On a donc $I_{O_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2}$ avec $A_2 = \dfrac{4ma^2}{3}$ =. De plus, $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{V(G_2,2/0)} \end{array} \right\}_{G_2}$.

$\overrightarrow{V(G_2,2/0)} = \overrightarrow{V(O,2/0)} + \overrightarrow{G_2O} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/0)} = -a\overrightarrow{z_2} \wedge \left(\dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{y_2}\right) = a\left(\dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{x_2}\right) = a\left(\dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}\left(\cos\theta\overrightarrow{x_1} - \sin\theta\overrightarrow{z_1}\right)\right)$

On a donc

$$I_{O_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} = \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2}.$$

Au final :

$$\{\mathscr{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} ma\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} ma\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ A_2\dot{\psi}\sin\theta\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \end{array} \right\}_O$$

Détermination de $\{\mathscr{C}(3/0)\}_O$ ***************** Au point G_3, on a :

$$\{\mathscr{C}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_3\overrightarrow{V(G_3,3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)} \end{array} \right\}_O$$

(3) est une tige d'axe $\overrightarrow{x_3}$ et de rayon négligeable. On a donc $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_3}$ avec $A_4 = \dfrac{4ma^2}{3}$ =. De plus, $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_3\overrightarrow{y_3} \\ \overrightarrow{V(G_3,3/0)} \end{array} \right\}_{G_3}$.

$\overrightarrow{V(G_3,3/0)}$

On a donc

$$I_{O_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} = \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2}.$$

Au final :

$$\{\mathscr{C}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} ma\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_2} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} ma\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ A_2\dot{\psi}\sin\theta\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \end{array} \right\}_O$$

Question 4 Déterminer les torseur dynamique $\{\mathscr{D}(4/0)\}_G$.

Correction

Question 5 Déterminer les torseur dynamique $\{\mathscr{D}(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5/0)\}_O$.

Correction

Question 6 Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble du système dans son mouvement par rapport au bâti.

Correction