Application 1
Frottement exponentiel – Poulie-courroie ⋆ – Corrigé

Lycée Mistral – Avignon.

Le problème du frottement d'une corde, d'une sangle ou d'une courroie sur une poulie ou un tambour est un problème classique.

B2-14

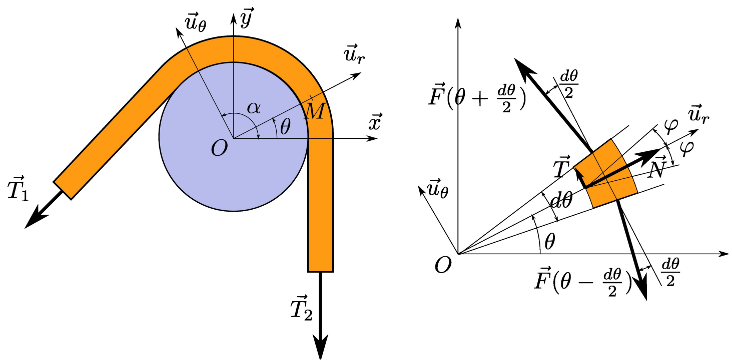
C1-05

C2-07

Objectif

Modéliser l'évolution de la tension dans un câble en fonction de l'angle d'enroulement sur une poulie.

On note f le coefficient de frottement entre le câble et la poulie.



On considère que le câble est enroulé d'un angle α autour de la poulie. Le câble est à la limite du glissement sous l'action des deux brins $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$. Soit $M(\theta)$ un point de l'enroulement.

Question 1 Après avoir isolé une tranche élémentaire de câble en $M(\theta)$ de largeur $\mathrm{d}\theta$, réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures.

Correction

BAME :

- action de tension du câble 1 $\overrightarrow{F}\left(\theta + \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)$;
- action de tension du câble 2 $\overrightarrow{F}\left(\theta - \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)$;
- action de la poulie sur le câble : $N\overrightarrow{u_r} + T\overrightarrow{u_\theta}$ avec $T = \pm f N$.

Question 2 Appliquer le théorème en résultante statique en projection dans la base $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$.

Correction

L'application du TRS à la tranche de câble, on a $\overrightarrow{F}\left(\theta + \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right) + \overrightarrow{F}\left(\theta - \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right) + N\overrightarrow{u_r} + T\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{0}$.

En projetant dans $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l}-F\left(\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)-F\left(\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+N=0\\ F\left(\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)-F\left(\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+T=0\end{array}\right..$$

Question 3 En considérant que l'angle θ est petit, établir l'équation différentielle liant f et $F(\theta)$ et θ.

Correction

En utilisant $\cos\mathrm{d}\theta/2 \simeq 1$ et $\sin\mathrm{d}\theta/2 \simeq \mathrm{d}\theta/2$:

$$\left\{\begin{array}{l}-F\left(\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-F\left(\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{2}+N=0\\ F\left(\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)-F\left(\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+T=0\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-\left(F\left(\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+F\left(\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{2}+N=0\\ F\left(\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)-F\left(\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+T=0\end{array}\right..$$

De plus, en faisant un DL à l'ordre 2, $F\left(\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\simeq F(\theta)+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\frac{\mathrm{d}F(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l}-2F\left(\theta\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{2}+N=0\\ \mathrm{d}F(\theta)+T=0\end{array}\right..$$

En utilisant le modèle de Coulomb, $T=\pm fN$

$$\mathrm{d}F(\theta)\pm f\left(2F\left(\theta\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)=0\Leftrightarrow \mathrm{d}F(\theta)\pm fF\left(\theta\right)\mathrm{d}\theta=0$$

Question 4 Résoudre l'équation différentielle pour établir la relation entre T_1, T_2, f et α.

Correction

On a : $\mathrm{d}F(\theta)=\pm F\left(\theta\right)\mathrm{d}\theta \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}F(\theta)}{F\left(\theta\right)}=\pm\mathrm{d}\theta$

En intégrant l'équation précédente, on a : $\left[\ln F\right]_{T_1}^{T_2}=\pm f\left[\theta\right]_0^{\alpha}$ Soit $\ln T_2-\ln T_1=-f\alpha$ $\Leftrightarrow \ln\frac{T_2}{T_1}=\pm f\alpha$ et $T_2=T_1\mathrm{e}^{\pm f\alpha}$.

(Le signe dépend du sens de glissement.)