

# Application 0

## Mesure d'inertie – Corrigé

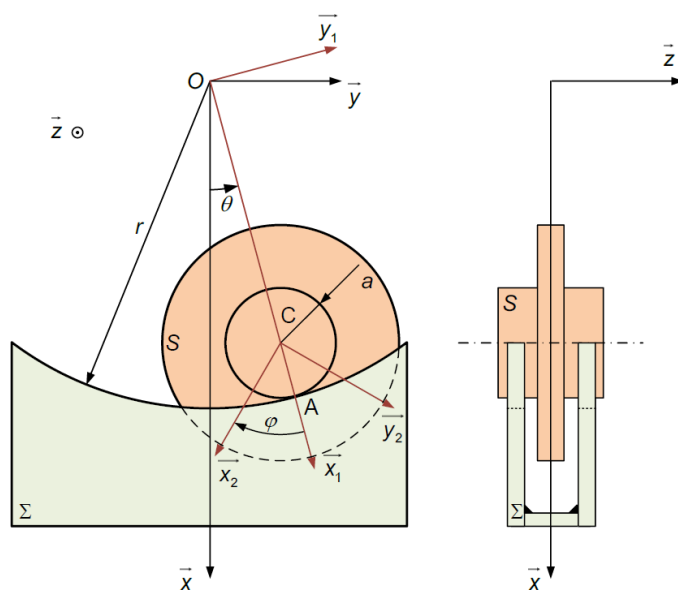
Un classique ...

### Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide  $S$  par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti  $\Sigma$ .

C1-05

C2-08



Soit  $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère galiléen lié au bâti  $\Sigma$ . On désigne par  $\vec{g} = g\vec{x}$  l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de  $\Sigma$  sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe  $(O, \vec{z})$ , de rayon  $r$ . Le solide  $S$  de masse  $m$ , de centre d'inertie  $C$ , possède deux tourillons de même rayon  $a$  ( $a < r$ ).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- ▶ le tourillon  $S$ , de centre  $C$ , roule sans glisser au point  $A$  sur la portée cylindrique de  $\Sigma$ ;
- ▶ soit  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  le repère, tel que le point  $C$  soit sur l'axe  $(O, \vec{x}_1)$ .  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ ;
- ▶ soit  $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  un repère lié à  $S$ . On pose  $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On suppose  $\varphi = 0$  lorsque  $\theta = 0$ .

Notons  $I$  le moment d'inertie de  $S$  par rapport à son axe de symétrie  $(C, \vec{z})$  et  $f$  le coefficient de frottement entre  $S$  et  $\Sigma$ .

On donne  $a = 12,3 \text{ mm}$ ;  $r = 141,1 \text{ mm}$ ;  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;  $m = 7217 \text{ g}$ ;  $f = 0,15$ .

**Question 1** Déterminer la relation entre  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\theta}$ .

**Question 2** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R$ . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur  $\theta$ .

**Question 3** En supposant que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du mouvement, déterminer la période  $T$  des oscillations de  $S$ .

**Question 4** En déduire le moment d'inertie  $I$  de  $S$ , sachant que  $T = 5$  s.

En supposant toujours que l'angle  $\theta$  reste petit, on pose  $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$  avec  $\omega =$

$$\sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)}}.$$

On suppose à la date  $t = 0$ , tel que  $\theta = \theta_0$  et  $\dot{\theta} = 0$ .

**Question 5** Déterminer la valeur maximale de  $\theta_0$  pour que  $S$  roule sans glisser sur  $\Sigma$ .