

Application 1

Mesure d'inertie – Corrigé

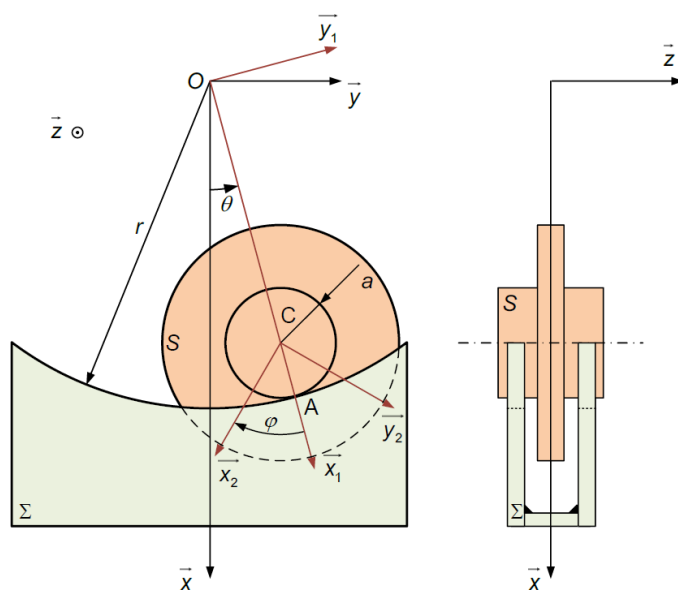
Un classique ...

Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide S par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti Σ .

C1-05

C2-08



Soit $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti Σ . On désigne par $\vec{g} = g\vec{x}$ l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de Σ sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe (O, \vec{z}) , de rayon r . Le solide S de masse m , de centre d'inertie C , possède deux tourillons de même rayon a ($a < r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- ▶ le tourillon S , de centre C , roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de Σ ;
- ▶ soit $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe (O, \vec{x}_1) . $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$;
- ▶ soit $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à S . On pose $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On suppose $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Notons I le moment d'inertie de S par rapport à son axe de symétrie (C, \vec{z}) et f le coefficient de frottement entre S et Σ .

On donne $a = 12,3 \text{ mm}$; $r = 141,1 \text{ mm}$; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; $m = 7217 \text{ g}$; $f = 0,15$.

Question 1 Déterminer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.

Question 2 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S dans son mouvement par rapport à R . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur θ .

Question 3 En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de S .

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de S , sachant que $T = 5$ s.

En supposant toujours que l'angle θ reste petit, on pose $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega =$

$$\sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)}}.$$

On suppose à la date $t = 0$, tel que $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$.

Question 5 Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que S roule sans glisser sur Σ .