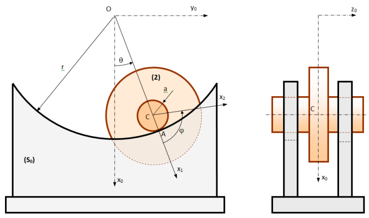
Colle 0
Mesure de moment d'inertie – Corrigé

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

C1-05

C2-09



La figure ci-dessus représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie I d'un solide de révolution **(2)** par rapport à son axe. Soit R_0 un repère galiléen lié au bâti (S_0) tel que l'axe $\left(O, \overrightarrow{x_0}\right)$ soit vertical descendant. Les deux portées sur lesquelles roule le solide **(2)** sont des portions de la surface d'un cylindre de révolution d'axe $\left(O, \overrightarrow{z_0}\right)$ et de rayon r. Le solide **(2)**, de masse m, de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a. Soit f le coefficient de frottement entre **(2)** et (S_0). L'étude se ramène à celle d'un problème plan paramétré de la façon suivante :

- le tourillon de **(2)**, de centre C, roule sans glisser en A sur la portée cylindrique de (S_0) ;
- R_1 est un repère tel que $\overrightarrow{OA} = r\overrightarrow{x_1}$ et on pose $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right)$;
- R_2 est un repère lié à 2 avec $\varphi = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right)$. On suppose que $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Question 1 Donner la relation entre φ et θ.

Question 2 Déterminer l'équation du mouvement de **(2)** par rapport à (S_0) en fonction de θ.

Question 3 On suppose que l'angle θ reste petit au cours du mouvement. Montrer que le mouvement est périodique et déterminer la période T des oscillations de **(2)**.

Question 4 En déduire le moment d'inertie I de **(S)** sachant que : $T = 5\,\text{s}$; $a = 12{,}5\,\text{mm}$; $r = 141{,}1\,\text{mm}$; $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$; $m = 7217\,\text{g}$; $f = 0,15$.

Question 5 Déterminer l'angle θ_0 maxi pour qu'il n'y ait pas glissement en A. Faire l'application numérique.

Dispositif de mesure de moment d'inertie. 1/2

1. RSG en A $\quad \vec{V}(A\in S/R_0) = \vec{0} = \vec{V}(C\in S/R_0) + \vec{AC}\wedge\vec{\Omega}(S/R_0)$

$\Leftrightarrow (r-a)\dot{\theta}\,\vec{y_1} - a\,\vec{x_1}\wedge(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\,\vec{z_0}$

$\Leftrightarrow r\dot{\theta} + a\dot{\varphi} = 0$ en intégrant avec $c_1 = 0$: $\boxed{r\theta + a\varphi = 0}$

2. Isolons $\{S\}$

$\mathcal{T}(\text{pesanteur}\to S) = \left\{\begin{matrix} mg\,\vec{x_0} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_C$ et $\mathcal{T}(S_0\to S) = \left\{\begin{matrix} N\vec{x_1}+T\vec{y_1} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A$

Appliquons le th de l'énergie cinétique $\quad P(\text{ext}\to S/S_0) = \dfrac{dE_c(S/S_0)}{dt}$

- $E_c(S/S_0) = \frac{1}{2}m\left[(r-a)\dot{\theta}\right]^2 + \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{1}{2}m(r-a)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\dot{\theta}^2$

$= \dfrac{(r-a)^2}{2}\left[m + \dfrac{I}{a^2}\right]\dot{\theta}^2$

$\dfrac{dE_c(S/S_0)}{dt} = (r-a)^2\left(m+\dfrac{I}{a^2}\right)\dot{\theta}\,\ddot{\theta}$

- $P(\text{ext}\to S/S_0) = \mathcal{T}(\text{pesanteur}\to S)\otimes\mathcal{V}(S/R_0) + \mathcal{T}(S_0\to S)\otimes\mathcal{V}(S/R_0)$

$= \left\{\begin{matrix} mg\,\vec{x_0} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_C \otimes \left\{\begin{matrix} (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\vec{z_0} \\ (r-a)\dot{\theta}\,\vec{y_1}\end{matrix}\right\}_C + \left\{\begin{matrix} N\vec{x_1}+T\vec{y_1} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix} (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A$

$= -mg(r-a)\dot{\theta}\sin\theta$

d'où $\quad (r-a)\left(m+\dfrac{I}{a^2}\right)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

$\Leftrightarrow \boxed{(r-a)(ma^2+I)\ddot{\theta} + mga^2\sin\theta = 0} \quad (1)$

Autre solution : PFD appliqué à $\{S\}$ en A :

$\left\{\begin{matrix} m\,\vec{\Gamma}(C\in S/R_0) \\ \vec{\delta}_A(S/R_0)\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} mg\,\vec{x_0} + N\vec{x_1} + T\vec{y_1} \\ mga\sin\theta\,\vec{z_0}\end{matrix}\right\}_A$

2/2

avec $\overrightarrow{\delta_A}(S/R_0) = \overrightarrow{\delta_C}(S/R_0) + \overrightarrow{AC} \wedge m\overrightarrow{\Gamma}(C \in S/R_0)$

$$= \frac{d}{dt}\left[\underbrace{J_C(S)\,\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)}_{I(\dot\theta+\dot\varphi)\vec{z_0}}\right] - ma\,\vec{x_1} \wedge \left[(r-a)\ddot\theta\,\vec{y_1} - (r-a)\dot\theta^2\,\vec{x_1}\right]$$

$$= \left[I\left(1-\frac{r}{a}\right)\ddot\theta - ma(r-a)\ddot\theta\right]\vec{z_0}$$

TMD en $A/\vec{z_0}$ $\quad (r-a)\left[I+ma^2\right]\ddot\theta + mga^2\sin\theta = 0 \qquad (1)$

3 _ θ petit $\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$ d'où l'éq diff du 2^{nd} ordre :

$$\ddot\theta + \frac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\,\theta = 0$$

Le coef de θ étant positif, on a un phénomène périodique de période $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(r-a)(I+ma^2)}{mga^2}}}$

4 _ $T^2 = 4\pi^2\,\dfrac{(r-a)(I+ma^2)}{mga^2} \iff I = \dfrac{T^2.mga^2}{4\pi^2(r-a)} - ma^2$

A.N $\quad I = \dfrac{25 \,.\, 7{,}217 \;\, 9{,}81 \;\, 12{,}5^2\; 10^{-6}}{4\pi^2\,(141{,}1 - 12{,}5)\,10^{-3}} - 7{,}217\;\, 12{,}5^2\; 10^{-6} = \boxed{53{,}3.10^{-3}\ kg\,m^2}$

5 _ Th de la résultante dynamique appliqué à $\{S\}$: $m\left[(r-a)\ddot\theta\,\vec{y_1} - (r-a)\dot\theta^2\,\vec{x_1}\right] = mg\vec{x_0} + N\vec{x_1} + T\vec{y_1}$

$/\vec{x_1}$ $\quad -m(r-a)\dot\theta^2 = mg\cos\theta + N \iff N = -m(r-a)\dot\theta^2 - mg\cos\theta$

$/\vec{y_1}$ $\quad m(r-a)\ddot\theta = T - mg\sin\theta \iff T = m(r-a)\ddot\theta + mg\sin\theta$

pas de glissement $\Rightarrow \|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\| \iff |m(r-a)\ddot\theta + mg\sin\theta| < f\left(m(r-a)\dot\theta^2 + mg\cos\theta\right)$

de (1) $\quad \ddot\theta = \dfrac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\,.\sin\theta \quad$ et $\dot\theta_0 = 0$ car il y a risque de glissement quand θ est max, (ici θ_0)

d'où : $\quad m(r-a)\dfrac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\sin\theta_0 + mg\sin\theta_0 < f\,mg\cos\theta_0$

$$\iff \boxed{\tan\theta_0 < f.\left(1 + \frac{ma^2}{I}\right)}$$

A.N. $\quad \boxed{\theta_0 < 8{,}7°}$