Application 1
Chariot élévateur à bateaux – Corrigé

X – ENS – PSI – 2012.

Présentation

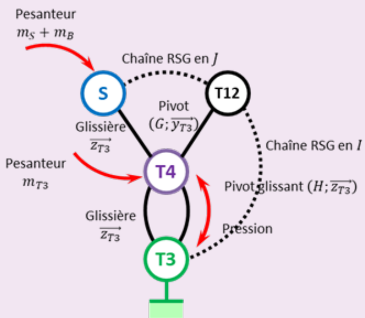
Question 1 Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

C1-05

C2-08

Correction

On isole l'ensemble : {bateau ; S ; chaîne ; T12 ; T4}. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $P_{\text{int}}(E)+\mathcal{P}\left(\overline{E}\rightarrow E/\mathcal{R}_g\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{E}_c\left(E/\mathcal{R}_g\right)\right]$.



Relation cinématique :

- $\overrightarrow{V(G,S/T_3)}=V_B\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{V(G,T_4/T_3)}=V_V\overrightarrow{z}$
- $\overrightarrow{V(G,S/T_3)}=\overrightarrow{V(G,S/T_{12})}+\overrightarrow{V(G,T_{12}/T_4)}+\overrightarrow{V(G,T_4/T_3)}$
  - $\overrightarrow{V(G,S/T_{12})}=\overrightarrow{V(J,S/T_{12})}+\overrightarrow{GJ}\wedge\overrightarrow{\Omega(S/T_{12})}=R\overrightarrow{x}\wedge\omega(T_4/T_{12})\overrightarrow{y}=R\omega(T_4/T_{12})\overrightarrow{z}$
  - $V_B=R\omega(T_4/T_{12})+V_V$
- $\overrightarrow{V(G,S/T_3)}=\overrightarrow{V(G,S/T_{12})}+\overrightarrow{V(G,T_{12}/T_3)}$
  - $\overrightarrow{V(G,T_{12}/T_3)}=\overrightarrow{V(I,T_{12}/T_3)}+\overrightarrow{GI}\wedge\overrightarrow{\Omega(T_{12}/T_3)}=-R\overrightarrow{x}\wedge\omega(T_{12}/T_4)\overrightarrow{y}=R\omega(T_4/T_{12})\overrightarrow{z}$
  - $V_B=R\omega(T_4/T_{12})+R\omega(T_4/T_{12})=2R\omega(T_4/T_{12})$
- $V_B=V_B/2+V_V\iff V_B=2V_V$ et $\omega(T_4/T_{12})=-\dfrac{V_B}{2R}$.

(Remarque : erreur de signe éventuelle sur $\omega(T_{12}/T_4)$, non pénalisante pour la suite. . .)

Bilan des puissances extérieures :

- $\mathcal{P}\left(\text{pes}\rightarrow S/\mathcal{R}_g\right)=\left\{\begin{array}{c}-(m_S+m_B)g\overrightarrow{z}\\\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G_B}\otimes\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\V_B\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_{G_B}=-(m_S+m_B)gV_B$;
- $\mathcal{P}\left(\text{pes}\rightarrow T_4/\mathcal{R}_g\right)=\left\{\begin{array}{c}-m_T4g\overrightarrow{z}\\\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G_{T_4}}\otimes\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\V_V\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_{G_{T_4}}=-m_T4gV_V=-\dfrac{1}{2}m_T4gV_B$;
- $\mathcal{P}\left(\text{pre}\rightarrow T_4/\mathcal{R}_g\right)=\left\{\begin{array}{c}F_V\overrightarrow{z}\\\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{H}\otimes\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\V_V\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_{G_B})=F_VV_V=\dfrac{1}{2}.F_VV_B$.
- $\mathcal{P}\left(T_3\rightarrow T_4/\mathcal{R}_g\right)=0$: glissière et pivot glissant sans frottement
- $\mathcal{P}\left(T_3\rightarrow 12/\mathcal{R}_g\right)=0$: roulement sans glissement.

- $\mathcal{P}\left(\overline{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g\right) = V_B(\frac{1}{2}.F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g)$

Bilan des puissances intérieures :

- $\mathcal{P}\left(E \overset{0}{\leftrightarrow =}\right)$.

Calcul de l'énergie cinétique :

- $\mathcal{E}_c\,(S/3) = \frac{1}{2}(m_S + m_B)V_B^2$ (mouvement de translation du bateau par rapport au référentiel galiléen) ;
- $\mathcal{E}_c\,(T_4/3) = \frac{1}{2}m_T 4 V_V^2 = \frac{1}{8}m_T 4 V_B^2$ (mouvement de translation du vérin par rapport au référentiel galiléen) ;
- $\mathcal{E}_c\,(T_{12}/3) = \frac{1}{2}J\omega(T_{12}/3)^2 = \frac{1}{2}\frac{JV_B^2}{4R^2}$ (mouvement de rotation et translation du solide 12 – masse négligeable) (Remarque : le terme 1/4 n'apparait pas sur le corrigé initial).
- $\mathcal{E}_c\,(E/3) = \frac{1}{2}(m_S + m_B + 1/4m_T 4 + J/(4R^2))V_B^2$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[E_c(t)\right] = \left(m_S + m_B + \frac{1}{4}m_T 4 + \frac{J}{4R^2}\right)V_B\gamma$ et $\gamma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[V_B(t)\right]$.

Au final : $\left(m_S + m_B + \frac{1}{4}m_T 4 + \frac{J}{4R^2}\right)V_B\gamma = V_B\left(\frac{1}{2}F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g\right)$ et $\gamma = \dfrac{\frac{1}{2}F_V - \frac{1}{2}m_T 4g - (m_S + m_B)g}{m_S + m_B + 1/4m_T 4 + \frac{J}{4R^2}}$ Cette valeur permet de valider l'exigence 1.1.3 car connaissant la vitesse de levage à atteindre en charge (cf. critère 1.1.2) et l'accélération, on peut connaître le temps du régime transitoire ($t = \frac{V_{\text{levage}}}{\gamma}$).

Phase de déplacement

Question 2 Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle $\varphi(t)$ qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches ? Justifier.

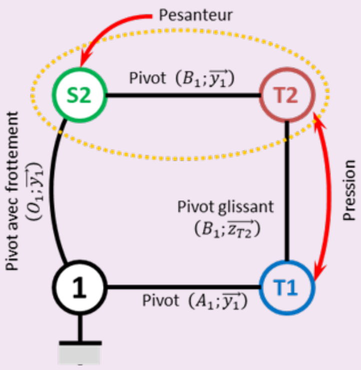
Correction

Quand le chariot avance à vitesse constante ($\varphi_{dec} = 0$), il faut que l'angle $\varphi(t)$ soit nul. Il faut donc envoyer une consigne $\varphi_c = -\delta$.

Question 3 En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle α est petit, montrer que $\alpha(t)$ et $p(t)$ sont liés par l'équation différentielle suivante : $J_{\text{eq}}\ddot{\alpha}(t) + \mu\dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2} g x_{G_{S_2}}$. Exprimer J_{eq}.

Correction

On isole l'ensemble $E = \{S2; T2\}$. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen : $P_{\text{int}}(E) + \mathcal{P}\left(\overline{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{E}_c\,(E/\mathcal{R}_g)\right]$



Calcul des puissances externes :

- $\mathcal{P}\left(\text{pes} \longrightarrow S_2/1\right) = \left\{\begin{array}{c} -m_{S_2} g\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_{S_2}} \otimes \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega\left(S_2/1\right)} = \dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{V\left(G_{S_2}, S_2/1\right)} = -x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{z_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{T_3}} \end{array}\right\}_{G_{S_2}}$
$= \left(-m_{S_2} g\overrightarrow{z_1}\right)\cdot\left(-x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{z_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{T_3}}\right) = -m_{S_2} g\left(-x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\cos\alpha + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\sin\alpha\right)$
$\overrightarrow{V\left(G_{S_2}, S_2/1\right)} = \overrightarrow{V\left(O_1, S_2/1\right)} - \left(x_{G_{S_2}}\overrightarrow{x_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\overrightarrow{z_{T_3}}\right)\wedge\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} = -x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{z_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{T_3}}.$
- $\mathcal{P}\left(1 \rightarrow S_2/1\right) = \left\{\begin{array}{c} - \\ L_{12}\overrightarrow{x_1} - \mu\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} + N_{12}\overrightarrow{z_1} \end{array}\right\}_{O_1} \otimes \left\{\begin{array}{c} \dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{O_1} = -\mu\dot{\alpha}^2$
- $\mathcal{P}\left(T_1 \rightarrow T_2/1\right)_{\text{pivot glissant}} = 0$ (pivot glissant sans frottement)
- $\mathcal{P}\left(T_1 \rightarrow T_2/1\right)_{\text{vérin}} = \left\{\begin{array}{c} p(t)S\overrightarrow{z_{T_2}} \\ - \end{array}\right\}_{B_1} \otimes \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda} \end{array}\right\}_{B_1} = p(t)S\dot{\lambda} = p(t)S\dfrac{\dot{\alpha}}{k}$
- $\mathcal{P}\left(\overline{E} \rightarrow E/\mathcal{R}_g\right) = -m_{S_2} g\left(-x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\cos\alpha + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\sin\alpha\right) - \mu\dot{\alpha}^2 + p(t)S\dot{\alpha}/k.$

Calcul des puissances internes $\mathcal{P}\left(E \overset{0}{\leftrightarrow} =\right)$ pas de frottement dans la liaison pivot.

Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble : seules la masse et l'inertie de S2 sont à prendre en contact (elles sont négligeables pour T2).
$\mathcal{E}_c\left(S_2/1\right) = \dfrac{1}{2}J_{S2}\dot{\alpha}^2 + \dfrac{1}{2}m_{S2}\overrightarrow{V\left(G_{S2}, S_2/1\right)}^2 = \dfrac{1}{2}\left(J_(S_2) + m_{S_2}(x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2)\right)\dot{\alpha}^2 = \dfrac{1}{2}J_{eq}\dot{\alpha}^2$
avec $J_{\text{eq}} = J_(S_2) + m_{S_2}(x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2)$.
On trouve donc, au final :

$$J_{\text{eq}}\ddot{\alpha} + \mu\dot{\alpha} = \frac{p(t)S}{k} + m_{S2}g\left(x_{G_{S2}}\cos\alpha - z_{G_{S2}}\sin\alpha\right).$$

Si on suppose l'angle α nul (situation de la question précédente), on retrouve bien l'expression demandée.