TD 1
Gyrolock ★ – Sujet

Centrale Supelec PSI 2022.

Comportement dynamique du stabilisateur

C1-05

C2-09

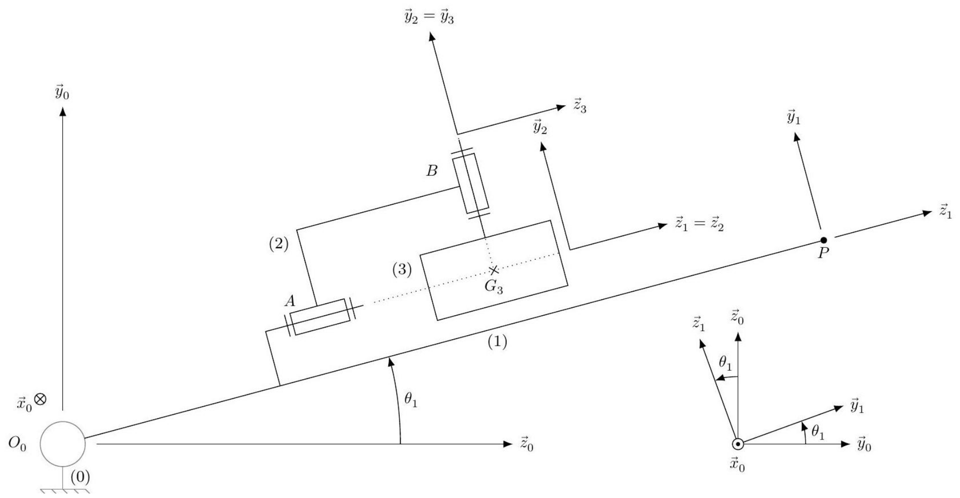

Figure 1 – Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour $\theta_2 = \theta_3 = 0$)

Dans la modélisation retenue (figure 1), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel $\mathcal{R}_0\left(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère $\mathcal{R}_1\left(O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\right)$ avec $\theta_1 = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1\right) = \left(\vec{z}_0, \vec{z}_1\right)$. Le point P tel que $O_0P = L$ représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

Paramétrage, notations et hypothèses

- La liaison pivot d'axe $\left(O_0, \vec{x}_0\right)$ entre les solides (0) et (1) possède une raideur k et un coefficient de frottement visqueux f, d'où $\vec{M}\left(O_0, 0 \rightarrow 1\right) \cdot \vec{x}_0 = -\left(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1\right)$;
- les autres liaisons sont supposées parfaites ;
- l'action du cœur sur le stabilisateur (1) est modélisée par $\{\mathcal{T}_{c\rightarrow 1}\} = \left\{\begin{array}{c} f_c\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array}\right\}_P$;
- seul le déplacement vertical du point P est pris en compte. On note $y(t) = -\overrightarrow{O_0P} \cdot \vec{y}_0$;
- le stabilisateur (1) est de masse m_1 et possède un centre d'inertie G_1 tel que $\overrightarrow{O_0G_1} = L_{G_1}\vec{z}_1$ et l'opérateur d'inertie est $\mathcal{J}\left(G_1, 1\right) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables ;
- la toupie (3) est de masse m_3 et possède un centre d'inertie G_3 tel que $\overrightarrow{O_0G_3} = L_{G_3}\vec{z}_1 + H_{G_3}\vec{y}_1$;
- les figures de changement de base sont données figures 6 et 9 ;
- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques. Q 14. Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en $\theta_1(t)$). L'ensemble isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

Question 1 Exprimer $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0$, la projection sur $\vec{x}_0$ du moment dynamique au point O_0 du solide (1) en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.

Question 2 Exprimer littéralement la vitesse $\vec{V}(G_3, 3/0)$ dans la base $\mathcal{B}_1$, puis l'accélération $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

Question 3 En conservant les conditions de fonctionnement ci-contre [1], il est possible de montrer que $\vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = A_3\ddot{\theta}_1 - c_x(t)$ avec $c_x(t) = B_3\omega_3\dot{\theta}_2$ (résultat admis sans démonstration). En déduire $\vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0$, en fonction de $A_3, c_x(t), m_3, L_{G_3}, H_{G_3}$ et $\ddot{\theta}_1(t)$.

1: $\ddot{\theta}_2 \approx 0, \theta_2 \approx 0$ et $\dot{\theta}_3 = \omega_3$ constante.

Question 4 Exprimer J_x en fonction de $A_1, A_3, m_1, m_3, L_{G_1}, L_{G_3}$ et H_{G_3} permettant d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x\ddot{\theta}_1(t) + f\dot{\theta}_1(t) + k\theta_1(t) = c_x(t) - Lf_c(t)$$

En supposant que θ_1 reste proche de 0, la relation $y(t) = L\theta_1(t)$ sera utilisée.

Les transformées de Laplace de $y(t), c_x(t)$ et $f_c(t)$ sont notées $Y(p), C_x(p)$ et $F_c(p)$.

Question 5 En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert $H_{\text{pert}}(p)$ et $H_1(p)$ du schéma-blocs figure 2 en fonction de L, J_x, f et k.

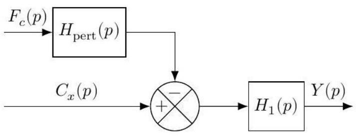

Figure 2 – Schéma bloc du stabilisateur (1)

On rappelle que $L = 0,3$ m et les valeurs retenues pour J_x, f et k sont :

- $J_x = 1,14 \times 10^{-2}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
- $-f = 64 \times 10^{-3}\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$;
- $-k = 95\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$.

Question 6 Écrire $H_1(p)$ sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique K_1, amortissement ξ_1 et pulsation propre ω_1. Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).