

# TD 1

## Agitateur médical avec chambre de Riccordi – Corrigé

CCP – PSI – 2006.

### Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

C1-02

C2-04

#### Objectif

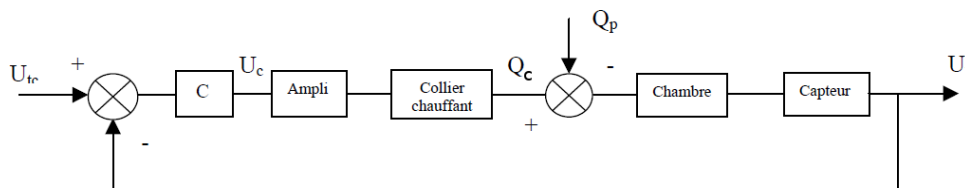
La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Le cahier des charges est le suivant :

- ▶ temps de montée en température : 3 min maxi ;
- ▶ précision de la température :  $\pm 0,5^\circ$  pour un échelon de  $20^\circ$ .

Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- ▶  $U_{tc}$  : tension de consigne ;
- ▶  $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre) ;
- ▶  $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant ;
- ▶  $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant ;
- ▶  $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme. Dans le cadre de cette étude **on néglige les pertes**.



Expérimentalement, on peut déterminer que  $FTBO(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1 + 5p)(1 + 100p)}$ .

### Analyse des performances

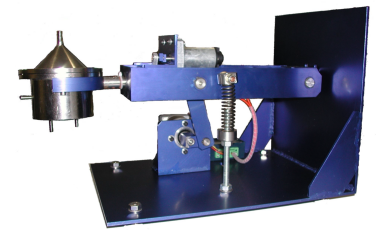
On considère ici que  $C(p) = 1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

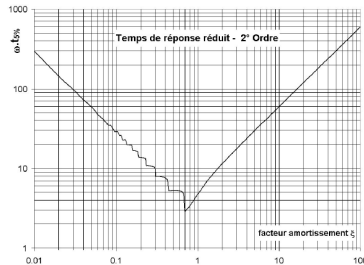
**Question 3** Justifier le tracé du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée.

**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.



## Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p) = K$ .



**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en sortie de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5 V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On utilise pour cela la méthode des compensation de pôles.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.

### Q20 – Temps de réponse du système régulé

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{ic}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{105}{1,5} \cdot p + \frac{500}{1,5} \cdot p^2}$$

D'où l'on déduit :

- la pulsation propre  $\omega_n$  telle que :  $\omega_n^2 = \frac{1,5}{500} = 30 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \omega_n = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ rd/s}$

- le facteur d'amortissement  $\xi$  tel que :  $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = 70 \Rightarrow \xi = 1,92 \# 2$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 12 \Rightarrow t_{5\%} = 218 \text{ s}$  **Incompatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

### Q21 – Ecart de position – Ecart de traînage

$$\text{Fonction de transfert de classe 0 (zéro)} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$$

$\varepsilon_p = 0,66 \quad 66 \%$  **Incompatible** avec le cahier des charges.

### Q22 – Diagrammes de Bode de la F.T.B.O.

$$\text{On procède par superposition : } H_{bo}(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) = \frac{0,5}{1 + j \cdot 5\omega} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot 100\omega}$$

Pulsations de brisure  $\omega_1 = 0,2 \text{ rd/s}$  ;  $\omega_2 = 0,01 \text{ rd/s}$

$$\text{Qd } \omega \rightarrow 0 \quad H_{bo} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -6\text{dB} \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$$

$$G = -6\text{dB} - 10 \cdot \text{Log}(1 + 25 \cdot \omega^2) - 10 \cdot \text{Log}(1 + 10^4 \cdot \omega^2)$$

$$\varphi = -\text{Arc tan}(5 \cdot \omega) - \text{Arc tan}(100 \cdot \omega)$$

|                 |      |       |       |
|-----------------|------|-------|-------|
| $\omega$ (rd/s) | 0,01 | 0,1   | 1     |
| G (dB)          | - 9  | - 27  | - 60  |
| $\varphi$ (°)   | - 48 | - 115 | - 169 |

*Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations*

Tracé des lieux asymptotiques et réels : *Voir le Document Réponse page suivante*

### Q23 – Marges de gain, de phase

Marge de gain :  $\underline{M_G} = \infty$

Marge de phase :  $\underline{M_\varphi} = 180^\circ$

### Q 24 – Réglage du correcteur Proportionnel assurant la stabilité et optimisant les performances du système

Il faut écarter la solution consistant à régler  $K$  afin que le lieu de transfert en B.O. soit tangent au contour fermé à  $2,3 \text{ dB}$ , car alors le facteur d'amortissement devient inférieur à 1, (0,4 pour un second ordre et le dépassement est environ de 25%) ce qui entraînera un dépassement lors la montée en température (Non respect du C.d.C.)

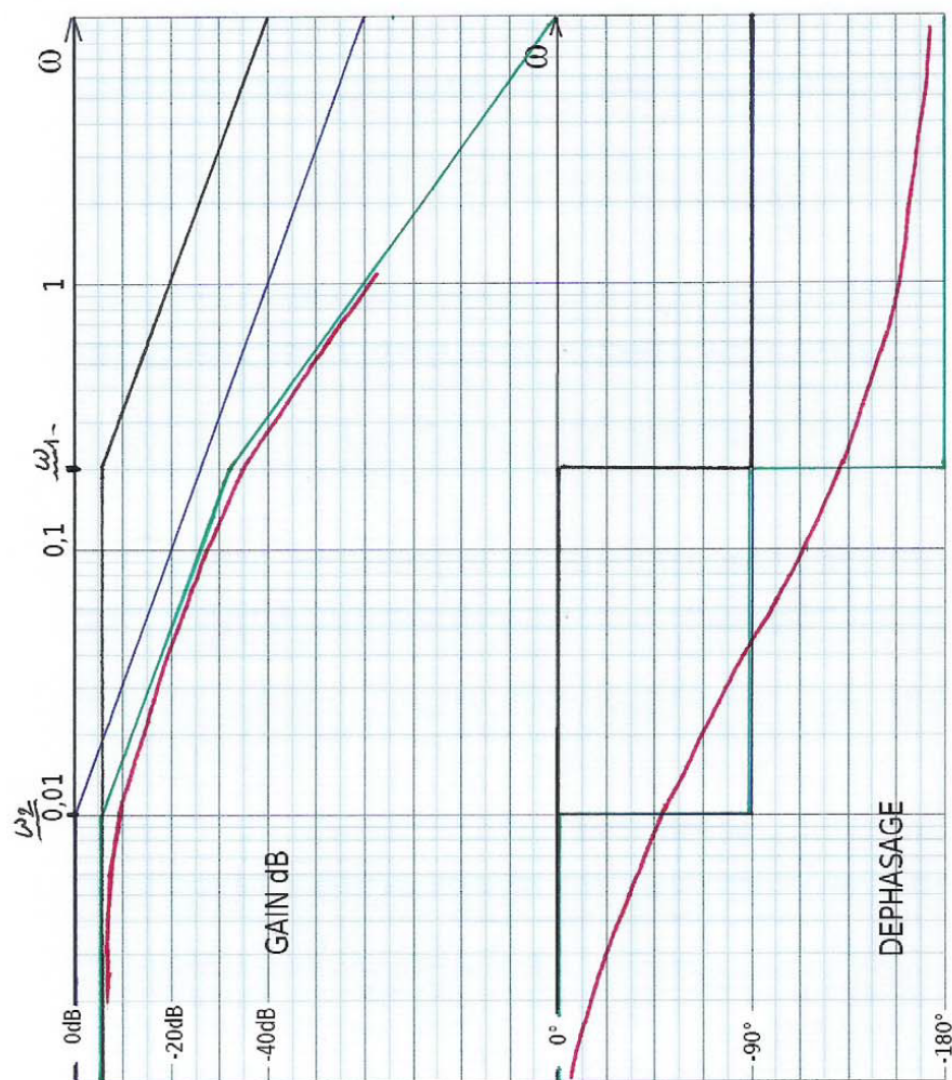
**On règle  $K$**  de telle sorte que  $\xi \geq 1$  ; la réponse indicielle est alors **apériodique critique** ou **apériodique amorti**.

$$H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{1 + 105 \cdot p + 500 \cdot p^2}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{0,5 \cdot K}{1 + 0,5 \cdot K}}{1 + \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K} p + \frac{500}{1 + 0,5 \cdot K} p^2}$$

**Question 22 :** Tracé de Bode



$$\text{Pulsation propre : } \omega_n = \sqrt{\frac{1 + 0,5 \cdot K}{500}}$$

$$\text{Facteur d'amortissement, il est tel que : } \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K},$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{105}{2 \cdot \sqrt{500} \cdot \sqrt{1 + 0,5 \cdot K}}$$

$$\text{Condition de non dépassement : } \xi \geq 1 \Leftrightarrow K \leq 9,02$$

On choisit **K=9** alors  **$\xi \approx 1$**  la réponse indicielle est **apériodique critique**.

Par conséquent, sur le diagramme de Black, **on translate** le lieu de transfert en B.O. **dans la direction verticale** de **20 Log 9**, c'est-à-dire d'environ **19 dB**.

#### **O 25 – Eléments de performances, temps de réponse à 5 %, écarts de position et de traînage**

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H<sub>bo2</sub>)

La marge de gain est inchangée : **M<sub>G</sub> = ∞**

On relève : **M<sub>φ</sub> = 90°**

**La stabilité est assurée.**

$$\text{Pulsation propre : } \omega_n = \sqrt{\frac{1 + 0,5 \cdot 9}{500}} = \sqrt{\frac{5,5}{500}} \approx 0,1 \text{ rd/s}$$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5 \Rightarrow$  **t<sub>5%</sub> = 50 s** **Compatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

$$\text{Fonction de transfert de classe 0 (zéro)} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$$

**ε<sub>p</sub> = 0,55** **55 %** **Incompatible** avec le cahier des charges.

#### **O26 – Tension en entrée de l'amplificateur, tension d'alimentation du collier chauffant lorsque l'échelon de tension de consigne U<sub>tc</sub> est de 5 V**

A 17° C correspond U<sub>c</sub> = 0 V, donc U<sub>t</sub> = 0 V.

Si U<sub>tc</sub> = 5 V  $\Rightarrow$  **U<sub>c</sub> = 45 V** . ( U<sub>c</sub> = K . ε )

Alors **U<sub>a</sub> = 450 V** Il y aura **saturation de l'ampli** et donc augmentation du temps de réponse.

**O 27 – Choix d'un correcteur à action P.I. – Réglage de ce correcteur**

$$C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$$

Le réglage du correcteur se fait **par compensation du pôle le plus lent**. Méthode qui consiste à choisir la constante de temps  $T_i$  du correcteur égale à **la constante de temps la plus grande** du système à corriger. On réglera le gain  $K$  du correcteur afin que **la réponse indicielle ne présente pas de dépassement** (on choisit  $\xi = 1$ ). Le choix de  $T_i$  devant satisfaire le C.d.C. (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

La F.T.B.O. s'écrit alors :  $H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{T_i \cdot p + 500 \cdot p^2}$

La F.T.B.F. s'écrit alors :  $H_{bf}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{0,5 \cdot K} \cdot p + \frac{500}{0,5 \cdot K} \cdot p^2}$

La pulsation propre (non amortie) vaut alors :  $\omega_n = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{K}{10}}$

Le facteur d'amortissement vaut alors :  $\xi = \frac{T_i}{10 \cdot \sqrt{10 \cdot K}}$

On choisit  $\xi = 1$  la réponse indicielle est apériodique critique.

Alors :  $K = 10^{-3} \cdot T_i$

On a toujours :  $\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5$  puisque  $\xi = 1$

Tableau des valeurs de  $K$ ,  $\omega_n$ ,  $t_{5\%}$  en fonction du choix de  $T_i$

| $T_i$               | $K$                | $\omega_n$             | $t_{5\%}$          | Commentaires     |
|---------------------|--------------------|------------------------|--------------------|------------------|
| 5 s                 | $25 \cdot 10^{-3}$ | $5 \cdot 10^{-3}$ rd/s | 1 000 s            | <b>A rejeter</b> |
| <b><u>100 s</u></b> | 10                 | 0,1 rd/s               | <b><u>50 s</u></b> | <b>A RETENIR</b> |

Tracé du lieu de transfert de la F.T.B.O. dans le plan de Black :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{5}{j \cdot 100\omega \cdot (1 + j \cdot 5\omega)}$$

Gain :  $G = -26 \text{ dB} - 20 \cdot \text{Log} \omega - 10 \cdot \text{Log}(1 + 25 \cdot \omega^2)$

Argument :  $\varphi = -90^\circ - \text{Arc tan}(5\omega)$

| $\omega$ (rd/s) | 0,01 | 0,1    | 0,2   | 1     |
|-----------------|------|--------|-------|-------|
| G (dB)          | 14   | - 7    | - 15  | - 40  |
| $\varphi$ (°)   | - 93 | - 117° | - 135 | - 169 |

*Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations*

Compte tenu de la forme de la F.T.B.O. , le lieu de transfert présente deux asymptotes verticales d'équations  $\varphi = -90^\circ$  et  $\varphi = -180^\circ$  .

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée  $H_{b03}$ )

La marge de gain est inchangée :  $\underline{M_G} = \infty$

On relève :  $\underline{M_\varphi} \approx 77^\circ$

**La stabilité est assurée.**

**O 28 – Nouvel écart de position**

Le système est de **classe 1**  $\Rightarrow \underline{\varepsilon_p} = 0$