

Application 0

Magic Arms – Corrigé

Florestan Mathurin.



Question 1 Construire les figures planes associées au schéma cinématique.

Correction

Question 2 Calculer $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$.

Correction

$$\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0, \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta} \vec{z}_0, \overrightarrow{\Omega(3/2)} = \dot{\phi} \vec{y}_2.$$

Question 3 Calculer $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$.

Correction

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega(2/0)} &= \overrightarrow{\Omega(2/1)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \\ &= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{\Omega(3/0)} &= \overrightarrow{\Omega(3/2)} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \\ &= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\phi} \vec{y}_2 \end{aligned}$$

Question 4 Calculer les produits vectoriels suivants : $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2$, $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1$, $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0$, $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0$.

Correction

$$\begin{aligned} \vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3 &= \sin \varphi \vec{y}_2 \\ \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 &= -\sin \varphi \vec{y}_2 \\ \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 &= -\sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \vec{y}_2 = -\cos \varphi \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1 &= \vec{0} \\ \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0 &= \left(\cos \beta \vec{x}_1 + \sin \beta \vec{y}_1 \right) \wedge \vec{x}_0 = -\cos \beta \sin \alpha \vec{z}_0 - \sin \beta \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \vec{z}_0 = (-\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha) \vec{z}_0 = -\sin(\beta + \alpha) \vec{z}_0 \\ \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0 &= -\sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \vec{y}_2 = -\cos \varphi \vec{y}_2. \end{aligned}$$

Question 5 Calculer $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)}$, $\overrightarrow{V(O_3, 3/0)}$ et $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$.

Correction

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(O_2, 2/0)} &= \overrightarrow{V(O_2, 2/1)} + \overrightarrow{V(O_2, 1/0)} = \overrightarrow{V(O_1, 1/0)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{O_1 O_2} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge (-l_1 \vec{y}_1) \\ \overrightarrow{V(O_2, 2/0)} &= l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} &= \overrightarrow{V(O_3, 3/2)} + \overrightarrow{V(O_3, 2/0)} = \overrightarrow{V(O_2, 2/0)} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{O_2 O_3} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \wedge (-l_2 \vec{y}_2) \\ \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} &= l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 \\ \overrightarrow{V(P, 3/0)} &= \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \overrightarrow{O_3 P} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 + \left((\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\phi} \vec{y}_2 \right) \wedge (-R \vec{z}_3) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{V(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3$$

On donne, sur la figure en bas de page (à gauche) l'évolution des vitesses angulaires des moteurs du manège en fonction du temps.

Question 6 Déterminer les valeurs des paramètres $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et $\dot{\varphi}$ puis l'expression analytique des positions angulaires $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ et $\varphi(t)$ dans l'intervalle de temps $[17; 27]$ secondes en sachant qu'à l'instant $t = 17$ s, on a $\alpha = 10,5$ rad, $\beta = 3,76$ rad et $\varphi = -10,676$ rad.

Correction

Dans l'intervalle de temps compris entre 17 et 27 secondes, les vitesses angulaires sont constantes.

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0,84 \text{ rad/s} \\ \dot{\beta} = 0,94 \text{ rad/s} \\ \dot{\varphi} = -0,628 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Ainsi, par intégration : $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^t \dot{\alpha} d\tau$

Question 7 Déterminer les valeurs numériques à l'instant $t_1 = 19,8$ s de α , β et φ .

Correction

Pour $t = 19,8$ s,

$$\begin{cases} \alpha = 0,84 \times (19,8 - 17) + 10,5 = 12,85 \text{ rad} \\ \beta = 0,94 \times (19,8 - 17) + 3,76 = 6,39 \text{ rad} \\ \varphi = -0,628 \times (19,8 - 17) - 10,676 = 12,43 \text{ rad} \end{cases}$$

Question 8 On pose $\overrightarrow{V(P, 3/0)} = V_{x2} \vec{x}_2 + V_{y2} \vec{y}_2 + V_{z2} \vec{z}_2$. Déterminer les expressions littérales de V_{x2} , V_{y2} , V_{z2} puis les valeurs numériques de à $t_1 = 19,8$ s. (On donne : $l_1 = 3,9$ m, $l_2 = 2,87$ m, $R = 2,61$ m.)

Correction

Il s'agit de projeter le vecteur $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. En effet, le vecteur \vec{z}_2 est identique au vecteur \vec{z}_0 .

$$\overrightarrow{V(P, 3/0)} = V_{x2} \vec{x}_2 + V_{y2} \vec{y}_2 + V_{z2} \vec{z}_2$$

$$V_{x2} = \overrightarrow{V(P, 3/0)} \cdot \vec{x}_2$$

$$= (l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3) \cdot \vec{x}_2$$

$$V_{x2} = l_1 \dot{\alpha} \cos \beta + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - R \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$V_{y2} = \overrightarrow{V(P, 3/0)} \cdot \vec{y}_2$$

$$= (l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3) \cdot \vec{y}_2$$

$$V_{y2} = -l_1 \dot{\alpha} \sin \beta - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})$$

$$V_{z2} = \overrightarrow{V(P, 3/0)} \cdot \vec{z}_2$$

$$= (l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3) \cdot \vec{z}_2$$

$$V_{z2} = R \dot{\varphi} \sin \varphi$$

Valeurs numériques à $t = 19,8 \text{ s}$:

$$V_{x2} = 3,9 \times 0,84 \times \cos(6,39) + 2,87 \times (0,84 + 0,94) + 2,61 \times 0,628 \times \cos(12,43)$$

$$= \boxed{9,99 \text{ m/s}}$$

$$V_{y2} = -3,9 \times 0,84 \times \sin(6,39) - 2,61 \times \sin(12,43) \times (0,84 + 0,94)$$

$$= \boxed{-0,28 \text{ m/s}}$$

$$V_{z2} = -2,61 \times 0,628 \times \sin(12,43)$$

$$= \boxed{-0,22 \text{ m/s}}$$

Question 9 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$.

Correction

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} &= \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{V(P, 3/0)}]_0 \\ &= \frac{d}{dt} \left(l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3 \right)_0 \\ &= l_1 \ddot{\alpha} \vec{x}_1 + l_1 \dot{\alpha} \underbrace{\frac{d}{dt} [\vec{x}_1]_0}_{\dot{\alpha} \vec{y}_1} + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{x}_2 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \underbrace{\frac{d}{dt} [\vec{x}_2]_0}_{(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2} - R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 \\ &\quad - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \underbrace{\frac{d}{dt} [\vec{y}_2]_0}_{-(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2} - R \dot{\varphi} \vec{x}_3 - R \dot{\varphi} \frac{d}{dt} [\vec{x}_3]_0 \\ \frac{d}{dt} [\vec{x}_3]_0 &= \frac{d}{dt} [\vec{x}_3]_3 + \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \vec{x}_3 \\ &= ((\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\varphi} \vec{y}_2) \wedge \vec{x}_3 \\ &= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \varphi \vec{y}_2 - \dot{\varphi} \vec{z}_3 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} &= l_1 \ddot{\alpha} \vec{x}_1 + l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{x}_2 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 \\ &\quad - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 - R \ddot{\varphi} \vec{x}_3 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3 \end{aligned}$$

Question 10 Calculer $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$ dans l'intervalle de temps $[17; 27]$ secondes pour lequel les vitesses angulaires sont constantes.

Correction

Dans le cas où les vitesses angulaires sont constantes, les accélérations angulaires $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\beta}$, et $\ddot{\varphi}$ sont nulles. L'expression de $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)}$ se simplifie donc :

$$\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3$$

Question 11 Comparer les résultats obtenus à la question 6 à ceux du graphe pour le temps $t_1 = 19,8 \text{ s}$.

Correction

Le graphe montre qu'à $t = 19,8$ s, l'intensité du vecteur $\overrightarrow{V(P, 3/0)}$ vaut 10 m/s. Or d'après la question 8,

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{V(P, 3/0)}\right\| &= \sqrt{V_{x2}^2 + V_{y2}^2 + V_{z2}^2} \\ &= \sqrt{9,99^2 + 0,28^2 + 0,22^2} \\ &= \boxed{10 \text{ m/s}}\end{aligned}$$

On constate que le calcul littéral nous donne le même résultat que l'exploitation de la courbe.

Question 12 Relever l'accélération maximale subie par le passager et conclure vis-à-vis du CdCF.

Correction

D'après la courbe de l'accélération (en pointillés), la valeur maximale de l'accélération subie par le passager vaut $17,5 \text{ m/s}^2$. Le cahier des charges exige que l'accélération maximale ne dépasse pas $2,5 g$, soit $24,5 \text{ m/s}^2$. Le cahier des charges est donc respecté.

1. $\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0, \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta} \vec{z}_0, \overrightarrow{\Omega(3/2)} = \dot{\varphi} \vec{y}_2.$
2. $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0, \overrightarrow{\Omega(3/0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\varphi} \vec{y}_2;$
3. $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3 = \sin \varphi \vec{y}_2, \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\sin \varphi \vec{y}_2, \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 = -\cos \varphi \vec{y}_2, \vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1 = \vec{0},$
 $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0 = -\sin(\beta + \alpha) \vec{z}_0, \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0 = -\cos \varphi \vec{y}_2.$
4. $\overrightarrow{V(O_2, 2/0)} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1, \overrightarrow{V(O_3, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2, \overrightarrow{V(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \dot{\varphi} \vec{z}_3.$
5. $\dot{\alpha} = 0,84 \text{ rad/s}, \dot{\beta} = 0,94 \text{ rad/s}, \dot{\varphi} = -0,628 \text{ rad/s}$ et $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^t \dot{\alpha} d\tau.$
6. $\alpha = \boxed{12,85 \text{ rad}}, \beta = \boxed{6,39 \text{ rad}}, \varphi = \boxed{12,43 \text{ rad}}.$
7. $V_{x2} = l_1 \dot{\alpha} \cos \beta + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - R \dot{\varphi} \cos \varphi = \boxed{9,99 \text{ m/s}}, V_{y2} = -l_1 \dot{\alpha} \sin \beta - R \sin \varphi(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = \boxed{-0,28 \text{ m/s}}, V_{z2} = R \dot{\varphi} \sin \varphi = \boxed{-0,22 \text{ m/s}}.$
8. $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \ddot{\alpha} \vec{x}_1 + l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{x}_2 + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \sin \varphi(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 - R \ddot{\varphi} \vec{x}_3 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3.$
9. $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3.$
10. $\left\|\overrightarrow{V(P, 3/0)}\right\| = \boxed{10 \text{ m/s}}$
11. .
12. .