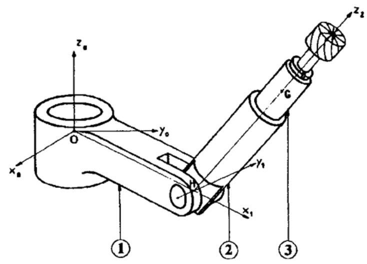
Colle 0
Porte outil – Corrigé

C1-05

C2-09



Le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage est composé de trois solides **1**, **2** et **3**.

Le repère $\mathcal{R}_0 = \left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$, avec $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ vertical ascendant, est lié au bâti **0** de la machine. Il est supposé galiléen. Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Le repère $\mathcal{R}_1 = \left(O;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0}\right)$ est lié au support tournant **1** en liaison pivot d'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ avec le bâti **0**. La position de **1** par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ est repérée par $\alpha = \left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)$.

On note I_1 le moment d'inertie de **1** par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ et H le point tel que $\overrightarrow{OH} = h\overrightarrow{x_1}$.

Le repère $\mathcal{R}_2 = \left(H;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_2}\right)$ est lié au bras pivotant **2** en liaison pivot d'axe $\left(H,\overrightarrow{y_1}\right)$ avec **1**. La position de **2** est repérée par $\beta = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right) = \left(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_2}\right)$.

On note m_2 la masse de **(2)**, de centre d'inertie H de matrice d'inertie $I_H(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$.

Le repère $\mathcal{R}_3 = \left(G;\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_2}\right)$ est lié au porte-outil **(3)** (avec l'outil à affûter tenu par le mandrin) en liaison pivot glissant d'axe $\left(H,\overrightarrow{z_2}\right)$ avec **(2)**.

La position de **(3)** est repérée par $\gamma = \left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}\right) = \left(\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{y_3}\right)$ et par $\overrightarrow{HG} = \lambda\overrightarrow{z_2}$.

On note m_3 la masse de **(3)**, de centre d'inertie G de matrice d'inertie $I_G(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$.

Question 1 Justifier la forme de la matrice de la pièce **(3)**.

Question 2 Calculer $\overrightarrow{V(G,3/0)}$.

Question 3 Indiquer la méthode permettant de calculer le torseur dynamique en G de **(3)** en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en projection sur $\overrightarrow{z_2}$.

Question 4 Calculer le moment dynamique en H appliqué à l'ensemble **{2, 3}** en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en projection sur $\overrightarrow{y_1}$.

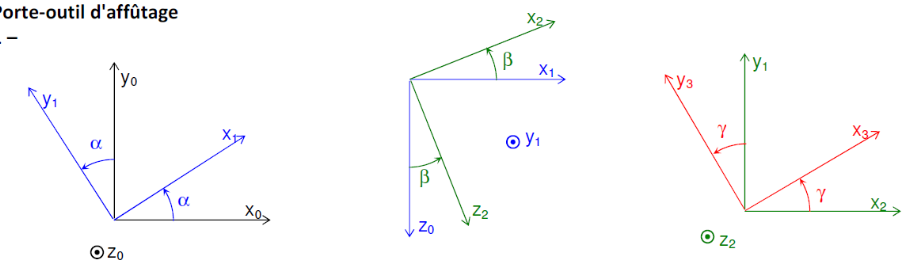
Question 5 Calculer le moment dynamique en O appliqué à l'ensemble **{1, 2, 3}** en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

1. $\left\{\mathcal{V}(3/\mathcal{R}_0)\right\} = \left\{\begin{array}{l} \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} + \dot{\beta}\overrightarrow{y_1} + \dot{\gamma}\overrightarrow{z_2} \\ r\dot{\beta}\overrightarrow{x_2} + (h + r\sin\beta)\,\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} + \dot{r}\overrightarrow{z_2} \end{array}\right\}_G$.

2. $\overrightarrow{\Gamma(G,3/\mathcal{R}_0)} = \left(2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{x_2}$
$\quad + \left[2\dot{\alpha}\left(\dot{r}\sin\beta + r\dot{\beta}\cos\beta\right) + (h + r\sin\beta)\,\ddot{\alpha}\right]\overrightarrow{y_1}$
$\quad - (h + r\sin\beta)\,\dot{\alpha}^2\overrightarrow{x_1}$
$\quad + \left(\ddot{r} - r\dot{\beta}^2\right)\overrightarrow{z_2}.$

Porte-outil d'affûtage

1 –



Torseur cinématique de **3** / R_0: $\mathcal{V}(3/R_0) = \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(3/R_0) = \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(G \in 3/R_0) = \left[\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} \end{matrix}\right\}_G$

$\overrightarrow{OG} = h\,\vec{x}_1 + r\,\vec{z}_2$

$\vec{V}(G \in 3/R_0) = h\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2 + r\left[\dfrac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0}$ avec $\left[\dfrac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{z}_0) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_1$

$$\boxed{\mathcal{V}(3/R_0) = \left\{\begin{matrix} \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{y}_1 + \dot{\gamma}\,\vec{z}_2 \\ r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2 \end{matrix}\right\}_G}$$

2 – Accélération de $G \in 3/R_0$: $\vec{\Gamma}(G \in 3/R_0) = \left[\dfrac{d\vec{V}(G \in 3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}$

$= \dot{r}\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + r\ddot{\beta}\,\vec{x}_2 + r\dot{\beta}\left[\dfrac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_0} + (\dot{r}\sin\beta + r\dot{\beta}\cos\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + (h + r\sin\beta)(\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 - \dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1) + \ddot{r}\,\vec{z}_2 + \dot{r}(\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_1)$

avec $\left[\dfrac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{x}_2 = (\dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{z}_0) \wedge \vec{x}_2 = -\dot{\beta}\,\vec{z}_2 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y}_1$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(G \in 3/R_0) = (2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta})\,\vec{x}_2 + [2\dot{\alpha}(\dot{r}\sin\beta + r\dot{\beta}\cos\beta) + (h + r\sin\beta)\ddot{\alpha}]\,\vec{y}_1 - (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1 + (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2)\,\vec{z}_2}$$

3 – Pour déterminer F_{23} et C_{23}, faisons le bilan des actions mécaniques extérieures sur le solide **3**:

Liaison pivot glissant d'axe (G, $\vec{z}_2$) entre **2** et **3**: $\mathcal{T}(2 \rightarrow 3) = \left\{\begin{matrix} X_{23}\,\vec{x}_2 + Y_{23}\,\vec{y}_1 \\ L_{23}\,\vec{x}_2 + M_{23}\,\vec{y}_1 \end{matrix}\right\}_G$

Action de l'actionneur M_{23}: $\mathcal{T}(M_{23} \rightarrow 3) = \left\{\begin{matrix} F_{23}\,\vec{z}_2 \\ C_{23}\,\vec{z}_2 \end{matrix}\right\}_H$

Action de la pesanteur: $\mathcal{T}(\text{pesanteur} \rightarrow 3) = \left\{\begin{matrix} -m_3\,g\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$

Pour déterminer F_{23}, il faut appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide **3** en mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{z}_2$:

$m_3\ \bar{\Gamma}(G \in 3/R_0).\bar{z}_2 = F_{23} - m_3\, g\, \bar{z}_0.\bar{z}_2$

$m_3(-(h + r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\, \bar{x}_1.\bar{z}_2 + (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2)\ ) = F_{23} - m_3\, g\, \cos\beta$

$$\boxed{F_{23} = m_3(\ddot{r} - r\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2(h + r\sin\beta)\sin\beta + g\cos\beta)}$$

Pour déterminer C_{23}, il faut appliquer le théorème du moment dynamique au solide **3**, en mouvement par rapport à R_0, en G (la matrice d'inertie de **3** est donnée en G) en projection sur $\bar{z}_2$:

$\bar{\delta}_G(3/R_0).\bar{z}_2 = C_{23} + \overrightarrow{GH} \wedge F_{23}\bar{z}_2 = C_{23} - r\bar{z}_2 \wedge F_{23}\bar{z}_2 = C_{23}$

$\bar{\delta}_G(3/R_0).\bar{z}_2 = \left[\dfrac{d\bar{\sigma}_G(3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}.\bar{z}_2 = \dfrac{d[\bar{\sigma}_G(3/R_0).\bar{z}_2]}{dt} - \bar{\sigma}_G(3/R_0).\left[\dfrac{d\bar{z}_2}{dt}\right]_{R_0}$

$\bar{\sigma}_G(3/R_0) = \mathcal{I}_G(3)\,\bar{\Omega}(3/R_0)$ avec $\bar{\Omega}(3/R_0) = \dot{\alpha}\,\bar{z}_0 + \dot{\beta}\,\bar{y}_1 + \dot{\gamma}\,\bar{z}_2$

La matrice d'inertie du solide **3** est donnée sur le repère R_3 mais l'axe (G, $\bar{z}_2$) étant de révolution (voir l'allure de la matrice), elle est identique sur le repère R_2. Il est plus simple d'exprimer $\bar{\Omega}(3/R_0)$ sur R_2 que sur R_3:

$\bar{\Omega}(3/R_0) = \dot{\alpha}\ (\cos\beta\,\bar{z}_2 - \sin\beta\,\bar{x}_2) + \dot{\beta}\,\bar{y}_1 + \dot{\gamma}\bar{z}_2 = -\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2 + \dot{\beta}\,\bar{y}_1 + (\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta)\bar{z}_2$

$$\bar{\sigma}_G(3/R_0).\bar{z}_2 = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta \end{pmatrix}.\bar{z}_2 = \left[-D\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2 + D\dot{\beta}\,\bar{y}_1 + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta)\bar{z}_2\right].\bar{z}_2$$

soit $\bar{\sigma}_G(3/R_0).\bar{z}_2 = E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta)$

$\bar{\sigma}_G(3/R_0).\left[\dfrac{d\bar{z}_2}{dt}\right]_{R_0} = (-D\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2 + D\dot{\beta}\,\bar{y}_1 + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta)\bar{z}_2)(\dot{\beta}\,\bar{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{y}_1) = 0$

d'où $C_{23} = \dfrac{d[E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ \cos\beta]}{dt}$

$$\boxed{C_{23} = E(\ddot{\gamma} + \ddot{\alpha}\ \cos\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\ \sin\beta)}$$

Pour déterminer C_{12}, le bilan des actions mécaniques extérieures sur le solide **2** fait intervenir les actions de **3** sur **2** et celles de **1** sur **2**.
La liaison entre **1** et **2** étant une liaison pivot d'axe (H, $\bar{y}_1$), la seule équation ne faisant pas intervenir d'inconnues de cette liaison est la projection du théorème du moment dynamique sur l'axe (H, $\bar{y}_1$) mais celle-ci va faire intervenir les inconnues de la liaison **3/2.** Il faut donc isoler l'ensemble {**2**, **3**}.

Bilan des actions mécaniques extérieures sur l'ensemble {**2**, **3**}:

Liaison pivot d'axe (H, $\bar{y}_1$) entre **1** et **2**: $\mathcal{T}(1 \to 2) = {}_G\begin{Bmatrix} X_{12}\,\bar{x}_1 + Y_{12}\,\bar{y}_1 + Z_{12}\bar{z}_0 \\ L_{12}\,\bar{x}_1 + N_{12}\,\bar{z}_0 \end{Bmatrix}$

Action du moteur M_{12}: $\mathcal{T}(M_{12} \to 2) = {}_H\begin{Bmatrix} \bar{0} \\ C_{12}\,\bar{y}_1 \end{Bmatrix}$

Action de la pesanteur: $\mathcal{T}(\text{pesanteur} \to 2+3) = {}_G\begin{Bmatrix} -m_3\, g\,\bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{Bmatrix} + {}_H\begin{Bmatrix} -m_2\, g\,\bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{Bmatrix}$

Théorème du moment dynamique en H appliqué à l'ensemble {**2**, **3**} en mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{y}_1$:

$$\bar{\delta}_H(2/R_0).\bar{y}_1 + \bar{\delta}_H(3/R_0).\bar{y}_1 = C_{12} + (\overrightarrow{HG} \wedge -m_3 g\bar{z}_0).\bar{y}_1 = C_{12} - (r\bar{z}_2 \wedge m_3 g\bar{z}_0).\bar{y}_1 = C_{12} + r\,m_3\,g\sin\beta$$

$$* \ \bar{\delta}_H(2/R_0).\bar{y}_1 = \left[\frac{d\bar{\sigma}_H(2/R_0)}{dt}\right]_{R_0}.\bar{y}_1 = \frac{d[\bar{\sigma}_H(2/R_0).\bar{y}_1]}{dt} - \bar{\sigma}_H(2/R_0).\left[\frac{d\bar{y}_1}{dt}\right]_{R_0} \quad \text{avec} \quad \left[\frac{d\bar{y}_1}{dt}\right]_{R_0} = -\dot{\alpha}\,\bar{x}_1$$

$$\bar{\sigma}_H(2/R_0) = \mathcal{I}_H(2)\,\bar{\Omega}(2/R_0) \qquad \text{avec } \bar{\Omega}(2/R_0) = \dot{\alpha}\,\bar{z}_0 + \dot{\beta}\,\bar{y}_1 = \dot{\alpha}(\cos\beta\,\bar{z}_2 - \sin\beta\,\bar{x}_2) + \dot{\beta}\,\bar{y}_1$$

$$\bar{\sigma}_H(2/R_0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix} = -A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2 + B\dot{\beta}\,\bar{y}_1 + C\dot{\alpha}\cos\beta\,\bar{z}_2$$

d'où $\quad \bar{\delta}_H(2/R_0).\bar{y}_1 = \dfrac{d(B\dot{\beta})}{dt} - A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2.\dot{\alpha}\,\bar{x}_1 + C\dot{\alpha}\cos\beta\,\bar{z}_2.\dot{\alpha}\,\bar{x}_1 = B\ddot{\beta} + (C-A)\,\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta$

$$* \ \bar{\delta}_H(3/R_0).\bar{y}_1 = \left[\frac{d\bar{\sigma}_G(3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}.\bar{y}_1 + \left[\overrightarrow{HG} \wedge m_3\,\bar{\Gamma}(G \in 3/R_0)\right]\bar{y}_1$$

$$= \frac{d[\bar{\sigma}_G(3/R_0).\bar{y}_1]}{dt} - \bar{\sigma}_G(3/R_0).\left[\frac{d\bar{y}_1}{dt}\right]_{R_0} + \left[r\bar{z}_2 \wedge m_3\,\bar{\Gamma}(G \in 3/R_0)\right]\bar{y}_1$$

$$= \frac{d(D\dot{\beta})}{dt} - D\dot{\alpha}^2\sin\beta\,\bar{x}_2.\bar{x}_1 + E\dot{\alpha}(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta)\,\bar{z}_2.\bar{x}_1 + r\,m_3\,(\bar{y}_1 \wedge \bar{z}_2).\bar{\Gamma}(G \in 3/R_0)$$

$$= D\ddot{\beta} - D\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta + E\dot{\alpha}(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta)\sin\beta + r\,m_3\,[2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta} - (h + r\sin\beta)\,\dot{\alpha}^2\,\bar{x}_1.\bar{x}_2]$$

d'où $\quad C_{12} = -r\,m_3\,g\sin\beta + B\ddot{\beta} + (C-A)\,\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta$

$$+ D\ddot{\beta} - D\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta + E\dot{\alpha}(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta)\sin\beta + r\,m_3\,[2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta} - (h + r\sin\beta)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta]$$

$$\boxed{C_{12} = \ddot{\beta}(B + D + m_3 r^2) + \dot{\alpha}^2[(C - A - D + E + m_3 r^2)\sin\beta - hrm_3\,]\cos\beta + E\,\dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\sin\beta + r\,m_3\,(2\dot{r}\dot{\beta} - g\sin\beta)}$$

Pour déterminer C_{01}, faisons le bilan des actions mécaniques extérieures à l'ensemble {**1**, **2**, **3**}:

Liaison pivot d'axe (O, $\vec{z}_0$) entre **0** et **1**: $\mathcal{T}(0 \to 1) = {}_O\begin{Bmatrix} X_{01}\,\bar{x}_0 + Y_{01}\,\bar{y}_0 + Z_{01}\bar{z}_0 \\ L_{01}\,\bar{x}_0 + M_{01}\,\bar{y}_0 \end{Bmatrix}$

Action du moteur M_{01}: $\mathcal{T}(M_{01} \to 1) = {}_O\begin{Bmatrix} \bar{0} \\ C_{01}\,\bar{z}_0 \end{Bmatrix}$

Action de la pesanteur: $\mathcal{T}(\text{pesanteur} \to 1{+}2{+}3) = {}_G\begin{Bmatrix} -m_3\,g\,\bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{Bmatrix} + {}_H\begin{Bmatrix} -m_2\,g\,\bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{Bmatrix} + {}_O\begin{Bmatrix} -m_1\,g\,\bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{Bmatrix}$

Théorème du moment dynamique en O appliqué à l'ensemble {**1**, **2**, **3**} en mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{z}_0$:

$$\bar{\delta}_O(1/R_0).\bar{z}_0 + \bar{\delta}_O(2/R_0).\bar{z}_0 + \bar{\delta}_O(3/R_0).\bar{z}_0 = C_{01} + (\overrightarrow{OG} \wedge -m_3 g\bar{z}_0 + \overrightarrow{OH} \wedge -m_2 g\bar{z}_0).\bar{z}_0 = C_{01}$$

$$= \frac{d[\bar{\sigma}_O(1/R_0).\bar{z}_0 + \bar{\sigma}_O(2/R_0).\bar{z}_0 + \bar{\sigma}_O(3/R_0).\bar{z}_0]}{dt}$$

* $\bar{\sigma}_O(1/R_0).\bar{z}_0 = I_1\,\dot{\alpha}$ car **1/0 =** rotation autour de l'axe (O, $\bar{z}_0$) fixe dans R_0

* $\bar{\sigma}_O(2/R_0).\bar{z}_0 = \bar{\sigma}_H(2/R_0).\bar{z}_0 + [\overrightarrow{OH} \wedge m_2\bar{V}(H \in 2/R_0)].\bar{z}_0$

$$= -A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2.\bar{z}_0 + B\dot{\beta}\,\bar{y}_1.\bar{z}_0 + C\dot{\alpha}\,\cos\beta\,\bar{z}_2.\bar{z}_0 + (h\,\bar{x}_1 \wedge m_2 h\,\dot{\alpha}\,\bar{y}_1).\bar{z}_0$$

$$= A\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + C\,\dot{\alpha}\,\cos^2\beta + m_2h^2\,\dot{\alpha}$$

* $\bar{\sigma}_O(3/R_0).\bar{z}_0 = \bar{\sigma}_G(3/R_0).\bar{z}_0 + [\overrightarrow{OG} \wedge m_3\bar{V}(G \in 3/R_0)].\bar{z}_0$

$$\bar{\sigma}_G(3/R_0).\bar{z}_0 = -D\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2.\bar{z}_0 + D\dot{\beta}\,\bar{y}_1.\bar{z}_0 + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\,\cos\beta)\bar{z}_2.\bar{z}_0$$

$$= D\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\,\cos\beta)\cos\beta$$

$$[\overrightarrow{OG} \wedge m_3\bar{V}(G \in 3/R_0)].\bar{z}_0 = m_3[(h\,\bar{x}_1 + r\,\bar{z}_2) \wedge (r\dot{\beta}\,\bar{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\bar{y}_1 + \dot{r}\,\bar{z}_2)].\bar{z}_0$$

$$= m_3[\bar{z}_0 \wedge (h\,\bar{x}_1 + r\,\bar{z}_2)].[r\dot{\beta}\,\bar{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\bar{y}_1 + \dot{r}\,\bar{z}_2)]$$

$$= m_3(h + r\sin\beta)\bar{y}_1.[r\dot{\beta}\,\bar{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\bar{y}_1 + \dot{r}\,\bar{z}_2)]$$

$$= m_3(h + r\sin\beta)\bar{y}_1.[r\dot{\beta}\,\bar{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\bar{y}_1 + \dot{r}\,\bar{z}_2)]$$

$$= m_3(h + r\sin\beta)^2\dot{\alpha}$$

d'où $C_{01} = \dfrac{d}{dt}\left[I_1\,\dot{\alpha} + A\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + C\,\dot{\alpha}\,\cos^2\beta + m_2h^2\,\dot{\alpha} + D\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\,\cos\beta)\cos\beta m_3(h + r\sin\beta)^2\dot{\alpha}\right]$

$$\boxed{C_{01} = \frac{d}{dt}\left[(I_1 + (A + D)\sin^2\beta + (C + E)\,\cos^2\beta + m_2h^2 + m_3(h + r\sin\beta)^2\,)\dot{\alpha} + E\,\dot{\gamma}\cos\beta\right]}$$

<u>Nota:</u> si on applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble {**1**, **2**, **3**}, on va trouver une relation liant C_{01}, C_{12}, C_{23} et F_{23}. En effet:

$$P(M_{01}\to 1/R_0) + P(0\to 1/R_0) + P(\text{pesanteur}\to 1{+}2{+}3/R_0) + \sum P_{int} = \frac{d}{dt}T(1{+}2{+}3/R_0)$$

avec $P(M_{01}\to 1/R_0) = C_{01}\,\dot{\alpha}$

$P(0\to 1/R_0) = 0$ (liaison parfaite)

$P(\text{pesanteur}\to 1/R_0) = 0$ car le centre de gravité O de **1** est fixe dans R_0

$P(\text{pesanteur}\to 2/R_0) = 0$ car la vitesse du centre de gravité H de **2** est perpendiculaire au poids

$P(\text{pesanteur}\to 3/R_0) = -m_3\,g\,\bar{z}_0.\bar{V}(G \in 3/R_0) = -m_3\,g\,\bar{z}_0.[r\dot{\beta}\,\bar{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\bar{y}_1 + \dot{r}\,\bar{z}_2]$

$$= m_3\,g(r\dot{\beta}\sin\beta - \dot{r}\cos\beta)$$

$\sum P_{int} = P_i(1,2) + P_i(2,3)$

$$= [\mathcal{T}(1\to 2) + \mathcal{T}(M_{12}\to 2)] \otimes \mathcal{V}(2/1) + [\mathcal{T}(2\to 3) + \mathcal{T}(M_{23}\to 3)] \otimes \mathcal{V}(3/2)$$

$$= {}_H\begin{Bmatrix} \bar{0} \\ C_{12}\,\bar{y}_1 \end{Bmatrix} \otimes {}_H\begin{Bmatrix} \dot{\beta}\,\bar{y}_1 \\ \bar{0} \end{Bmatrix} + {}_H\begin{Bmatrix} F_{23}\,\bar{z}_2 \\ C_{23}\,\bar{z}_2 \end{Bmatrix} \otimes {}_H\begin{Bmatrix} \dot{\gamma}\,\bar{z}_2 \\ \dot{r}\,\bar{z}_2 \end{Bmatrix} = C_{12}\,\dot{\beta} + C_{23}\,\dot{\gamma} + F_{23}\,\dot{r}$$

$$T(1/R_0) = \frac{1}{2}I_1\,\dot{\alpha}^2$$

$$T(2/R_0) = \frac{1}{2}m_2\bar{V}^2(H \in 2/R_0) + \frac{1}{2}\bar{\Omega}(2/R_0).\bar{\sigma}_H(2/R_0)$$

$$= \frac{1}{2}m_2h^2\,\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}\,\bar{z}_0 + \dot{\beta}\,\bar{y}_1)(-A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2 + B\dot{\beta}\,\bar{y}_1 + C\dot{\alpha}\,\cos\beta\,\bar{z}_2)$$

$$= \frac{1}{2}m_2h^2\,\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(A\,\dot{\alpha}^2\,\sin^2\beta + C\,\dot{\alpha}^2\cos^2\beta + B\dot{\beta}^2)$$

$$T(3/R_0) = \frac{1}{2}m_3\bar{V}^2(G \in 3/R_0) + \frac{1}{2}\bar{\Omega}(3/R_0).\bar{\sigma}_G(3/R_0)$$

$$= \frac{1}{2}m_3[r\dot{\beta}\,\bar{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\bar{y}_1 + \dot{r}\,\bar{z}_2]^2$$

$$+ \frac{1}{2}[-\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2 + \dot{\beta}\,\bar{y}_1 + (\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\,\cos\beta)\bar{z}_2]\left[-D\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\bar{x}_2 + D\dot{\beta}\,\bar{y}_1 + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\,\cos\beta)\bar{z}_2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m_3[r^2\,\dot{\beta}^2 + (h + r\sin\beta)^2\,\dot{\alpha}^2 + \dot{r}^2\,] + \frac{1}{2}\left[D(\dot{\alpha}^2\,\sin^2\beta + \dot{\beta}^2\,) + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\,\cos\beta)^2\,\right]$$

soit
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} [I_1 + m_2h^2 + (A + D)\sin^2\beta + (C + E)\,\cos^2\beta + m_3(h + r\sin\beta)^2\,]\dot{\alpha}^2 \\ + [B + D + m_3r^2\,]\dot{\beta}^2 + m_3\dot{r}^2 + E\dot{\gamma}^2 + 2E\,\dot{\gamma}\dot{\alpha}\,\cos\beta \end{Bmatrix}$$

$$= C_{01}\,\dot{\alpha} + C_{12}\,\dot{\beta} + C_{23}\,\dot{\gamma} + F_{23}\,\dot{r} + m_3\,g(r\dot{\beta}\sin\beta - \dot{r}\cos\beta)$$