TD 1
Gyrolock ★ – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2022.
Corrigé proposé par l'UPSTI.

C1-05

C2-09

Comportement dynamique du stabilisateur

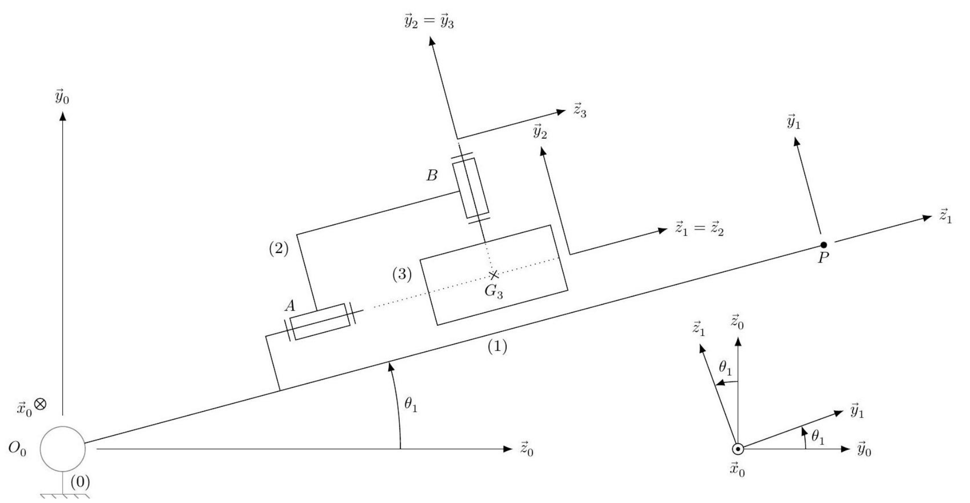

Figure 1 – Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour $\theta_2 = \theta_3 = 0$)

Dans la modélisation retenue (figure 1), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel $\mathcal{R}_0\left(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère $\mathcal{R}_1\left(O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\right)$ avec $\theta_1 = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1\right) = \left(\vec{z}_0, \vec{z}_1\right)$. Le point P tel que $O_0P = L$ représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

Paramétrage, notations et hypothèses

- La liaison pivot d'axe $\left(O_0, \vec{x}_0\right)$ entre les solides (0) et (1) possède une raideur k et un coefficient de frottement visqueux f, d'où $\vec{M}\left(O_0, 0 \rightarrow 1\right) \cdot \vec{x}_0 = -\left(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1\right)$;
- les autres liaisons sont supposées parfaites ;
- l'action du cœur sur le stabilisateur (1) est modélisée par $\{\mathcal{T}_{c\rightarrow 1}\} = \left\{\begin{array}{c} f_c\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array}\right\}_P$;
- seul le déplacement vertical du point P est pris en compte. On note $y(t) = -\overrightarrow{O_0P} \cdot \vec{y}_0$;
- le stabilisateur (1) est de masse m_1 et possède un centre d'inertie G_1 tel que $\overrightarrow{O_0G_1} = L_{G_1}\vec{z}_1$ et l'opérateur d'inertie est $\mathcal{J}\left(G_1, 1\right) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables ;
- la toupie (3) est de masse m_3 et possède un centre d'inertie G_3 tel que $\overrightarrow{O_0G_3} = L_{G_3}\vec{z}_1 + H_{G_3}\vec{y}_1$;
- les figures de changement de base sont données figures 6 et 9 ;
- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques. Q 14. Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en $\theta_1(t)$). L'ensemble isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

Question 1 Exprimer $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0$, la projection sur $\vec{x}_0$ du moment dynamique au point O_0 du solide (1) en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.

Correction

Par formule de Varignon :

$$\overrightarrow{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = \overrightarrow{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 + \left(\overrightarrow{O_0G_1} \wedge m_1 \overrightarrow{\Gamma}(G_1, 1/0)\right) \cdot \overrightarrow{x}_0$$

avec $\overrightarrow{\Gamma}(G_1, 1/0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O_0G_1}}{\mathrm{d}t^2}\right|_0 = -L_{G_1}\ddot{\theta}_1\overrightarrow{y}_1 - L_{G_1}\dot{\theta}_1^2\overrightarrow{z_1}$ donc $\left(\overrightarrow{O_0G_1} \wedge m_1 \overrightarrow{\Gamma}(G_1, 1/0)\right) \cdot \overrightarrow{x}_0 = m_1 L_{G_1}^2 \ddot{\theta}_1$.

De plus **au centre d'inertie** G_1 : $\overrightarrow{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0}{\mathrm{d}t}\right|_0$ avec $\overrightarrow{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = \mathcal{I}(G_1, 1)\overrightarrow{\Omega}(1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0$.

Donc $\overrightarrow{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = A_1\dot{\theta}_1$ et $\overrightarrow{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = A_1\ddot{\theta}_1$.

Finalement $\boxed{\overrightarrow{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 = (A_1 + m_1 L_{G_1}^2)\ddot{\theta}_1}$.

Question 2 Exprimer littéralement la vitesse $\vec{V}(G_3, 3/0)$ dans la base $\mathcal{B}_1$, puis l'accélération $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

Correction

Le point G_3 étant **physiquement rattaché à (3)** on peut écrire

$\boxed{\overrightarrow{V}(G_3, 3/0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0G_3}}{\mathrm{d}t}\right|_0 = -L_{G_3}\dot{\theta}_1\overrightarrow{y}_1 + H_{G_3}\dot{\theta}_1\overrightarrow{z}_1}$.

Ensuite $\boxed{\overrightarrow{\Gamma}(G_3, 3/0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}(G_3, 3/0)}{\mathrm{d}t}\right|_0 = -\left(L_{G_3}\ddot{\theta}_1 + H_{G_3}\dot{\theta}_1^2\right)\overrightarrow{y}_1 + \left(H_{G_3}\ddot{\theta}_1 - L_{G_3}\dot{\theta}_1^2\right)\overrightarrow{z}_1}$.

Question 3 En conservant les conditions de fonctionnement ci-contre [1], il est possible de montrer que $\vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = A_3\ddot{\theta}_1 - c_x(t)$ avec $c_x(t) = B_3\omega_3\dot{\theta}_2$ (résultat admis sans démonstration). En déduire $\vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0$, en fonction de $A_3, c_x(t), m_3, L_{G_3}, H_{G_3}$ et $\ddot{\theta}_1(t)$.

1: $\ddot{\theta}_2 \approx 0$, $\theta_2 \approx 0$ et $\dot{\theta}_3 = \omega_3$ constante.

Correction

Par formule de Varignon :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 &= \overrightarrow{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \overrightarrow{x}_0 + \left(\overrightarrow{O_0G_3} \wedge m_3 \overrightarrow{\Gamma}(G_3, 3/0)\right) \cdot \overrightarrow{x}_0 \\
&= A_3\ddot{\theta}_1 - c_x(t) + m_3 L_{G_3}\left(L_{G_3}\ddot{\theta}_1 + H_{G_3}\dot{\theta}_1^2\right) + m_3 H_{G_3}\left(H_{G_3}\ddot{\theta}_1 - L_{G_3}\dot{\theta}_1^2\right) \\
&= \left(A_3 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2\right)\ddot{\theta}_1 - c_x(t)
\end{aligned}$$

Question 4 Exprimer J_x en fonction de $A_1, A_3, m_1, m_3, L_{G_1}, L_{G_3}$ et H_{G_3} permettant d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x\ddot{\theta}_1(t) + f\dot{\theta}_1(t) + k\theta_1(t) = c_x(t) - Lf_c(t)$$

Correction

En appliquant la stratégie vue en question 14 on a l'équation (effets dynamiques de (2) négligés et actions de la pesanteur négligées) :

$$\overrightarrow{\delta}(O_0,1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0+\overrightarrow{\delta}(O_0,3/0)\cdot\overrightarrow{x}_0=-(k\theta_1+f\dot{\theta}_1)+\left(\overrightarrow{O_0P}\wedge f_c\overrightarrow{y}_1\right)\cdot\overrightarrow{x}_0$$

Tout calcul fait avec $\overrightarrow{O_0P}=L\overrightarrow{z}_1$:

$$\boxed{\left(A_1+A_3+m_1L_{G_1}^2+m_3L_{G_3}^2+m_3H_{G_3}^2\right)\ddot{\theta}_1+f\dot{\theta}_1+k\theta_1=c_x(t)-Lf_c(t)}$$

On identifie $\boxed{J_x=A_1+A_3+m_1L_{G_1}^2+m_3L_{G_3}^2+m_3H_{G_3}^2}$.

En supposant que θ_1 reste proche de 0, la relation $y(t)=L\theta_1(t)$ sera utilisée.

Les transformées de Laplace de $y(t)$, $c_x(t)$ et $f_c(t)$ sont notées $Y(p)$, $C_x(p)$ et $F_c(p)$.

Question 5 En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert $H_{\text{pert}}(p)$ et $H_1(p)$ du schéma-blocs figure 2 en fonction de L, J_x, f et k.

Correction

Le schéma-bloc donne $\dfrac{Y(p)}{H_1(p)}=C_x(p)-H_{\text{pert}}(p)F_c(p)$. L'équation différentielle précédente rapportée dans le domaine de Laplace (**conditions initiales nulles**) s'écrit (avec $Y(p)=L\theta_1(p)$) :

$$\left(J_xp^2+fp+k\right)\frac{Y(p)}{L}=C_x(p)-LF_c(p)$$

On identifie $\boxed{H_1(p)=\dfrac{L}{J_xp^2+fp+k}}$ et $\boxed{H_{\text{pert}}(p)=L}$.

On rappelle que $L=0,3$ m et les valeurs retenues pour J_x, f et k sont :

- $J_x=1,14\times10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$;
- $-f=64\times10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$;
- $-k=95\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$.

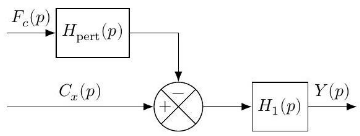

Figure 2 – Schéma bloc du stabilisateur (1)

Question 6 Écrire $H_1(p)$ sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique K_1, amortissement ξ_1 et pulsation propre ω_1. Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).

Correction

On a $H_1(p)=\dfrac{\frac{L}{k}}{1+\frac{f}{k}p+\frac{J_x}{k}p^2}$, on identifie alors :

- le gain statique $K_1=\dfrac{L}{k}=\dfrac{0,3}{95}=3,2\cdot10^{-3}\text{rad/N}$;
- la pulsation propre $\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{J_x}}=\sqrt{\dfrac{95}{1,14\cdot10^{-2}}}=91,3\text{rad/s}$;
- l'amortissement $\xi_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f}{\sqrt{kJ_x}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{64\cdot10^{-3}}{\sqrt{95\times1,14\cdot10^{-2}}}=0,03$.

On choisit de décrire le comportement dans le domaine fréquentiel. On a un système d'ordre 2 avec résonance (car $\xi_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$) à la pulsation $\omega_r=\omega_1\sqrt{1-2\xi_1^2}$. Le diagramme de Bode associé est le suivant :