



# TD 1

## Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique– Corrigé

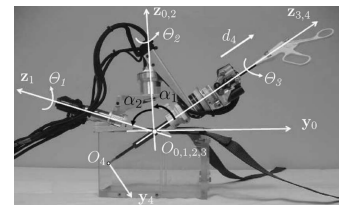
Mines Ponts 2016.

B2-04

### Présentation générale

### Validation des performances de l'asservissement d'effort

### Modèle de connaissance de l'asservissement



#### Objectif

Modéliser l'asservissement en effort.

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

#### Correction

$$H_1(p) = \frac{1}{Jp}, H_2(p) = \frac{1}{p} \text{ et } H_3(p) = K_{C\theta}.$$

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

#### Correction

$$\text{Calculons } F(p) = \frac{C_e(p)}{C_m(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{K_{C\theta} \frac{1}{Jp} \frac{1}{p}}{1 + K_{C\theta} \frac{1}{Jp} \frac{1}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}.$$

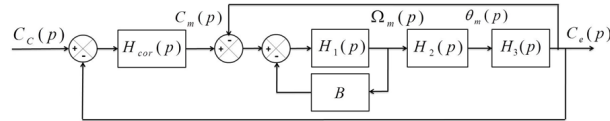
$$\begin{aligned} \text{Par suite } H_{BF}(p) &= \frac{F(p)H_{cor}(p)}{1 + F(p)H_{cor}(p)} \text{ soit } H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}}{1 + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta} + K_{C\theta}} \\ &= \frac{1/2}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2 + 1}. \end{aligned}$$

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

**Correction**

Le coefficient d'amortissement étant nul, il s'agit d'un oscillateur harmonique d'amplitude  $C_0/2$ . Le système vibre ce qui est incompatible avec le mouvement d'un robot chirurgical.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.



**FIGURE 1** – Régulation avec retour tachymétrique.

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

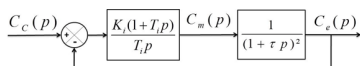
**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

**Correction**

$$\begin{aligned} \text{D'une part, } F_1(p) &= \frac{\frac{1}{Jp}}{1 + \frac{B}{Jp}} = \frac{1}{Jp + B}. \text{ Par suite } FTBO(p) = \frac{F_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + F_1(p)H_2(p)H_3(p)} \\ &= \frac{\frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}}{1 + \frac{1}{Jp + B} \frac{K_{C\theta}}{p}} = \frac{K_{C\theta}}{p(Jp + B) + K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + Bp + K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2 + \frac{B}{K_{C\theta}}p + 1}. \\ \text{Par ailleurs, } H_{BO}(p) &= \frac{1}{(1 + \tau p)^2} = \frac{1}{1 + 2\tau p + \tau^2 p^2}. \\ \text{On a donc } \frac{B}{K_{C\theta}} &= 2\tau \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \tau. \text{ D'autre part, } \tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \frac{B}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}. \\ \text{Au final, } B &= 2\sqrt{JK_{C\theta}} \text{ et } \tau = \frac{B}{2K_{C\theta}} = \frac{2\sqrt{JK_{C\theta}}}{2K_{C\theta}} = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}. \end{aligned}$$

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure 2.



**FIGURE 2** – Régulation avec correcteur PI.

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Correction**

- Méthode 1 : la FTBO est de classe 1. L'écart statique est donc nul.
- Méthode 2 (à savoir faire absolument, mais à éviter car trop long).

$$\text{On a } \varepsilon(p) = \frac{C_c(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i p(1 + \tau p^2)}} = C_0 \frac{1}{p + \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i(1 + \tau p^2)}}.$$

Par suite,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = 0$ .

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme :

$$\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

#### Correction

Pour que la FTBF soit d'ordre 2, la FTBO doit être d'ordre 2.

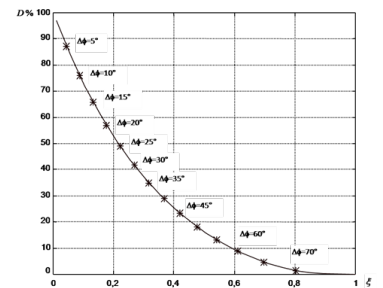
En choisissant  $T_i = \tau$  (compensation du pôle double du système), on a alors  $FTBO(p) =$

$$\frac{K_i(1 + \tau p)}{\tau p(1 + \tau p)^2} = \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}.$$

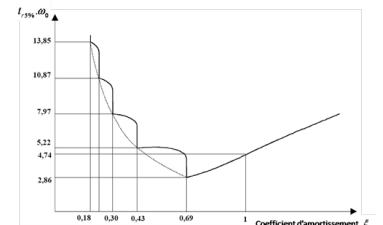
$$\text{On a alors } FTBF(p) = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}}{1 + \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1 + \tau p) + K_i}.$$

**Question 7** À partir des courbes ci-contre, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.

On donne  $K_i = 1$ .



**Question 8** Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.



#### Correction

### Diagrammes de Bode

On prend  $K_i = 0,4$ ,  $T_i = 0,01$  s et  $\tau = 0,5$  s.

**Question 9** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $G(p) = \frac{K_i(1 + T_i p)}{T_i p(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 2.**

D'après l'équation de mouvement,  $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) - C_e(p)$ . On a donc  $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$ .  
On a  $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$  ; donc  $H_2(p) = \frac{1}{p}$ .  
Enfin,  $C_e(p) = K_{C\theta}\theta_m(p)$  et donc  $H_3(p) = K_{C\theta}$ .

**Question 3.**

On a dans un premier temps  $\frac{C_e(p)}{C_m(p)} = F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp^2}K_{C\theta}}{1+\frac{1}{Jp^2}K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}$ .  
Dans un second temps,  $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}} - H_{cor}(p)}{1+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}} - H_{cor}(p)} = \frac{K_{C\theta}H_{cor}(p)}{Jp^2+K_{C\theta}+K_{C\theta}H_{cor}(p)}$ .  
Avec  $H_{cor}(p) = 1$  :  $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+2K_{C\theta}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$ .

**Question 4.**

On peut mettre la fonction précédente sous forme canonique. On a :  $H_{BF}(p) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$ . Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. On a alors un oscillateur harmonique et la réponse du système à un échelon d'amplitude  $C_0$  est une sinusoïde (d'amplitude  $C_0$  et de moyenne  $\frac{C_0}{2}$ ).  
Un mouvement sinusoïdal est surement incompatible avec l'asservissement d'un axe sur un robot chirurgical.

**Question 5.**

On a  $H_{BO}(p) = \frac{H_{cor}(p) \cdot \frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)}{1+\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+pB+K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{Jp^2}{K_{C\theta}}+\frac{pB}{K_{C\theta}}+1}$ .  
Par ailleurs,  $(1+\tau p)^2 = 1 + \tau^2 p^2 + 2\tau p$ .  
En identifiant,  $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}}$  et  $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}}$ . On a donc  $B = 2\tau K_{C\theta} = 2K_{C\theta}\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$  et  $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$ .

**Question 6.**

On a :  $\varepsilon(p) = \frac{C_e(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+\tau_i p)}{\tau_i p(1+\tau p)^2}}$ . En conséquences,  $\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+\tau_i p)}{\tau_i p(1+\tau p)^2}} = \lim_{p \rightarrow 0} C_0 \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+\tau_i p)}{\tau_i p(1+\tau p)^2}} = 0 \text{ Nm}$ .  
L'exigence 1.2.2.1 est vérifiée.

**Question 7.**

On a  $\frac{K_i(1+\tau_i p)}{\tau_i p(1+\tau p)^2} = \frac{K_i(1+\tau_i p)}{\tau_i p(1+\tau p)^2 + K_i(1+\tau_i p)}$ . Avec  $T_i = \tau$ , on a  $\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)+K_i}$ . La FTBF est bien d'ordre 2.

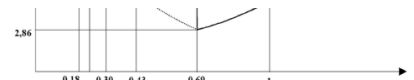


Pour avoir  $D\% \leq 15\%$  il faut  $\xi \geq 0,5$

Cependant, on trouve sur ce diagramme qu'il faut avoir  $\xi \geq 0,8$  pour avoir une marge de phase de  $70^\circ$ .

Si on souhaite obtenir le temps de réponse à 5% le plus rapide, comme  $\xi \geq 0,8 > 0,7$ , il faut prendre  $\xi$  le plus faible possible. Cela impose  $\xi = 0,8$  et comme  $\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_i}}$  on a

$$\text{alors } K_i = \frac{1}{4\xi^2} = 0,4.$$



Pour  $\xi = 0,8$ , la lecture de l'abaque donne donc  $t_{R5\%} \cdot \omega_0 \geq 3,5$  et avec  $t_{R5\%} \leq 0,5s$  on a  $\omega_0 \geq 7 \text{ rad/s}$

**Question 9.**

Critère	Valeur
Dépassement	2% <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px;">1</span>
Tr5%	<0,5 s <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px;">1</span>
Erreur statique en réponse à un échelon	0 <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px;">1</span>

Allure de la réponse indicielle :

