Colle 0
Performances – Corrigé

Equipe PT La Martinière Monplaisir.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \dfrac{8}{p^2 + 5p + 6}$.

Question 1 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Correction

Question 2 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

Correction

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$. La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert $B(p) = 3$.

Question 3 Tracer le schéma-blocs.

Correction

Question 4 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45°.

Correction

Question 5 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Correction

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = Ki/p$.

Question 6 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Correction

8.2 La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

soit : $$KG(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45°, on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

soit : $$\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expressions :

$$\tan\left[\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4}\right] = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\varepsilon = 0,123$$

d'où : $$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{4}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{4}} = -1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 4 = 0$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16 = 41$$

La seule solution positive est : $$\omega_{c0} = \frac{5+\sqrt{41}}{2} = 5{,}7 \text{ rad/s}$$

Par définition : $$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega_{c0}^2}\sqrt{16+\omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent : $$K = \sqrt{1+\omega_{c0}^2}\sqrt{16+\omega_{c0}^2} = 40{,}3$$

Le gain K étant réglé sur cette valeur, on a bien une marge de phase de 45° et un temps de montée en boucle fermée que l'on peut estimer en utilisant la relation approchée suivante :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \quad \Rightarrow \quad t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5{,}7} = 0{,}53 \text{ s}$$

Si on souhaite régler le temps de montée sur 0,2 s, on doit avoir :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \quad \Rightarrow \quad \omega_{c0} \approx \frac{3}{0{,}2} = 15 \text{ rad/s}$$

Pour obtenir une telle pulsation de coupure à 0 dB, il faut changer la valeur de K :

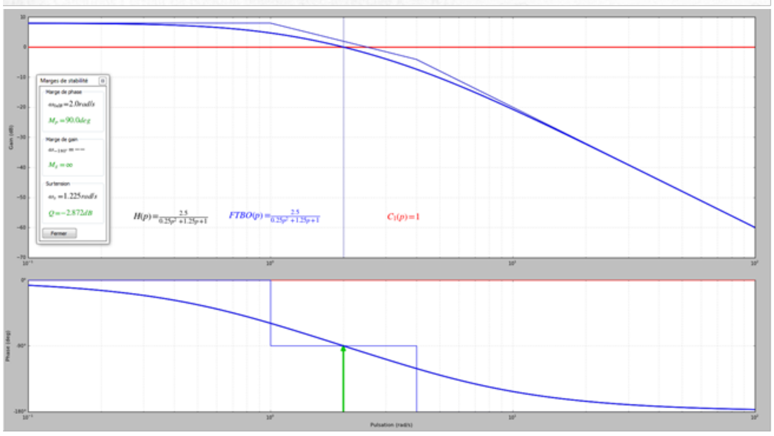
Par définition : $$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega_{c0}^2}\sqrt{16+\omega_{c0}^2}} = 1$$

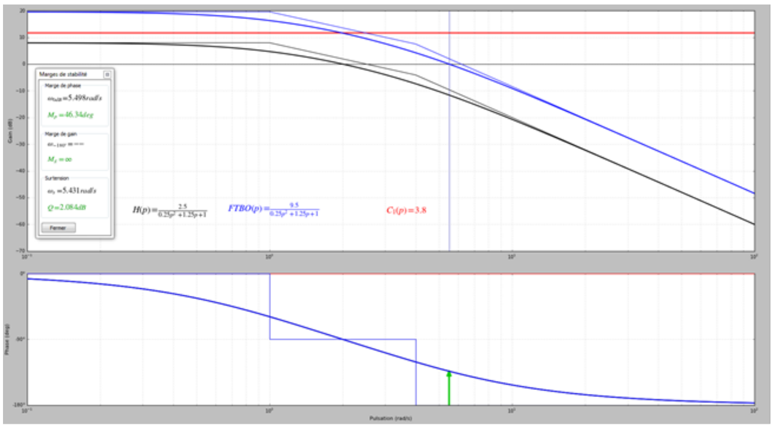
Par conséquent : $$K = \sqrt{1+\omega_{c0}^2}\sqrt{16+\omega_{c0}^2} = 233{,}4$$

La marge de phase a bien évidemment changé :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = 0{,}326 \text{ rad} = 18{,}7\ ^\circ$$

Ce résultat montre bien qu'en cherchant à augmenter la rapidité d'un système par une correction proportionnelle, on dégrade sa stabilité.




Marges de stabilité
Marge de phase
$\omega_{0dB} = 5.498 rad/s$
$M_p = 46.34 deg$
Marge de gain
$M_g = \infty$
Surtension
$\omega_r = 5.431 rad/s$
$Q = 2.084 dB$
Fermer
$H(p) = \frac{2.5}{0.25p^2 + 1.25p + 1}$
$FTBO(p) = \frac{9.5}{0.25p^2 + 1.25p + 1}$
$C_1(p) = 3.8$
Gain (dB)
Phase (deg)
Pulsation (rad/s)