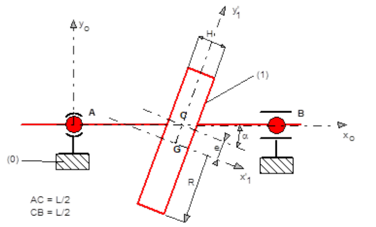
Colle 0
Disque déséquilibré – Corrigé

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir.

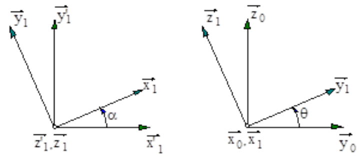
C1-05

C2-09

Soit le rotor **(1)** défini ci-contre. Il est constitué d'un arbre de masse négligeable en liaison pivot par rapport à un bâti **(0)**. Sur cet arbre est monté, en liaison complète, un disque de masse M, de rayon R et d'épaisseur H. Le repère $\mathcal{R}'_1 = \left(G; \overrightarrow{x'_1}, \overrightarrow{y'_1}, \overrightarrow{z'_1}\right)$ est attaché à ce solide.



La base $\mathcal{B}'_1 = \left(\overrightarrow{x'_1}, \overrightarrow{y'_1}, \overrightarrow{z'_1}\right)$ se déduit de $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ par une rotation d'angle α autour de $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z'_1}$.



La base $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ se déduit de $\mathcal{B}_0 = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ par une rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0}$.

Enfin, le rotor **1** est entrainé par un moteur (non représenté) fournissant un couple noté $C_m\overrightarrow{x_0}$. Le montage de ce disque présente deux défauts :

- un défaut de perpendicularité caractérisé par l'angle α ;
- un défaut d'excentricité représenté par la cote e.

Question 1 Déterminer la forme de la matrice d'inertie dy cylindre en C dans la base $\mathcal{B}'_1$.

Question 2 Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de **(1)** dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Question 3 Appliquer le PFD pour déterminer les inconnues de liaison.

CORRIGE

Q1- Déterminer l'expression littérale de la matrice d'inertie de (1) au point C dans la base B'_1. Dans ce qui suit garder la matrice sous la forme générique (A, B, C, ...)

Matrice d'inertie de (1) dans la base B'1

On sait que : $\tilde{\tilde{I}}(G,1) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} \end{bmatrix}_{B'_1}$

Transfert au point C : $\overrightarrow{CG} = - e\ \overrightarrow{y'_1}$

$$\tilde{\tilde{I}}(C,1) = \tilde{\tilde{I}}(G,1) + m\begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}_{B'_1}$$

Ainsi : $\tilde{\tilde{I}}(C,1) = \begin{bmatrix} m\,(\frac{R^2}{2}+e^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2+12e^2) \end{bmatrix}_{B'_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1}$

Q2- Déterminer les éléments de réduction en C du torseur cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{C\ (1/R_0)\} = \left\{ \begin{matrix} m\,\overrightarrow{V}\,(G/R_0) \\ \vec{\sigma}\,(C,1/R_0) \end{matrix} \right\}_C$$

Résultante cinétique : $m\,\overrightarrow{V}\,(G/R_0) = - m\,e\,\dot{\theta}\,\cos\alpha\ \vec{z_1}$

Moment cinétique : $\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\,c\alpha \\ \dot{\theta}\,s\alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{B'_1} = \dot{\theta}\,(A\,c\alpha\,\overrightarrow{x'_1} + B\,s\alpha\,\overrightarrow{y'_1})$

Or : $\overrightarrow{x'_1} = c\alpha\ \vec{x_1} - s\alpha\ \vec{y_1}$ et $\overrightarrow{y'_1} = c\alpha\ \vec{y_1} + s\alpha\ \vec{x_1}$

$$\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = \dot{\theta}\ \{(A\,c^2\alpha+B s^2\alpha)\,\vec{x_1}+(B-A)\ s\alpha\ c\alpha\ \vec{y_1}\} = \dot{\theta}\ (A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})$$

$$\boxed{\{C\,(1/R_0)\} = \underset{C}{\left\{\begin{array}{l} m\,\vec{V}\,(G/R_0) = -\,m\,e\ \dot{\theta}\ \cos\alpha\ \vec{z_1} \\ \vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = \dot{\theta}\ \{(A\,c^2\alpha+B s^2\alpha)\,\vec{x_1}+(B-A)\ s\alpha\ c\alpha\ \vec{y_1}\} = \dot{\theta}\ (A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1}) \end{array}\right\}}}$$

Q3- Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{D\,(1/R_0)\} = \underset{C}{\left\{\begin{array}{l} M\,\vec{\Gamma}\,(G/R_0) \\ \vec{\delta}\,(C,1/R_0) \end{array}\right\}}$$

Résultante dynamique : $M\,\vec{\Gamma}\,(G/R_0) = -\,m\,e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z_1}-\dot{\theta}^2\ \vec{y_1})$

Moment dynamique : C est un point fixe, donc : $\vec{\delta}\,(C,1/R_0)=\dfrac{d\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0)}{dt/R_0}$

$$\vec{\delta}\,(C,1/R_0)=\frac{d\,\{\dot{\theta}\ (A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})\}}{dt/R_0} = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})+B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1}$$

Car $\dfrac{d\ \vec{y_1}}{dt/R_0} = \dfrac{d\ \vec{y_1}}{dt/R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{y_1} = \dot{\theta}\ \vec{x_1}\wedge\vec{y_1} = \dot{\theta}\ \vec{z_1}$

$$\boxed{\{D\,(1/R_0)\} = \underset{C}{\left\{\begin{array}{l} M\,\vec{\Gamma}\,(G/R_0) = -\,m\,e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z_1}-\dot{\theta}^2\ \vec{y_1}) \\ \vec{\delta}\,(C,1/R_0) = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})+B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1} \end{array}\right\}}}$$

Calculons :

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{\delta}\,(C,1/R_0)+\vec{AC}\wedge m\,\vec{\Gamma}(G,1/R_0)$$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})+B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1} + \vec{AC}\wedge(-\,m\,e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z_1}-\dot{\theta}^2\ \vec{y_1})$$

Or : $\vec{AC} = \dfrac{L}{2}\ \vec{x_1}$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x_1}+B'\vec{y_1})+B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1} + m\,e\ \cos\alpha\ \frac{L}{2}\ (\ddot{\theta}\ \vec{y_1}+\dot{\theta}^2\ \vec{z_1})$$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{x_1}(A'\ddot{\theta}) + \vec{y_1}\ (B'+m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\ )\ddot{\theta} + \vec{z_1}(B'+m\,e\ \frac{L}{2}\cos\alpha)\ \dot{\theta}^2$$

$$\{D\,(1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M\,\vec{\Gamma}\,(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\,\left(\ddot{\theta}\,\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\,\vec{y}_1\right) \\ \vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{x}_1(A'\ddot{\theta}) + \vec{y}_1\,\left(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha\right)\ddot{\theta} + \vec{z}_1\left(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha\right)\dot{\theta}^2 \end{array} \right\}_A$$

Q4- Déterminer l'énergie cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

C étant fixe dans R_0 : $2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0).\,[\tilde{I}(C,S)\,\vec{\Omega}(S/R_0)]$

$$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}(C,S/R_0)$$

$$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = \dot{\theta}\,\vec{x}_1\,.\,\dot{\theta}(A'\,\vec{x}_1 + B'\,\vec{y}_1)$$

$$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = A'\,\dot{\theta}^2 = (A\,c^2\alpha + Bs^2\alpha)\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{2\,T(S/R_0) = A'\,\dot{\theta}^2 = (A\,c^2\alpha + Bs^2\alpha)\dot{\theta}^2}$$

Q5- Les liaisons en A et B sont supposées parfaites. Le rotor tourne à vitesse constante $\dot{\theta} = \omega$. Déterminer les actions de liaison en A et B et le couple moteur nécessaire C_m pour obtenir ce mouvement

On isole 1 et on lui applique le PFD : $\{D\,(1/R_0)\} = \{\bar{1} \to 1\}$

Or : $\{D\,(1/R_0)\} = \{A \to 1\} + \{B \to 1\} + \{\text{Poids} \to 1\} + \{Cm\}$

$$\{\bar{1} \to 1\} = {}_A\left\{ \begin{array}{cc} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{array} \right\}_{B_0} + {}_B\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{array} \right\}_{B_0} + {}_G\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{B_0} + \left\{ \begin{array}{cc} 0 & Cm \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{B_0}$$

On réduit tout en A dans la base B_0 :

LA en B : $\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R} = L\,\vec{x}_0 \wedge (X_B\,\vec{x}_0 + Y_B\,\vec{y}_0 + Z_B\,\vec{z}_0) = L(Y_B\,\vec{z}_0 - Z_B\,\vec{y}_0)$

Pesanteur : $\vec{M}_A = \vec{M}_G + \vec{AG} \wedge \vec{R} = (\frac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y'}_1) \wedge -\,mg\,\vec{y}_0 = -mg\frac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\,\vec{y'}_1 \wedge \vec{y}_0$

Or : $\vec{y'}_1 = c\alpha\,\vec{y}_1 + s\alpha\,\vec{x}_0$ et $\vec{y}_1 = c\theta\,\vec{y}_0 + s\theta\,\vec{z}_0$

$$\vec{y'}_1 = c\alpha\,(c\theta\,\vec{y}_0 + s\theta\,\vec{z}_0) + s\alpha\,\vec{x}_0 = s\alpha\,\vec{x}_0 + c\alpha\,c\theta\,\vec{y}_0 + c\alpha\,s\theta\,\vec{z}_0$$

$$\vec{y'}_1 \wedge \vec{y}_0 = (s\alpha\,\vec{x}_0 + c\alpha\,c\theta\,\vec{y}_0 + c\alpha\,s\theta\,\vec{z}_0) \wedge \vec{y}_0 = s\alpha\,\vec{z}_0 - c\alpha\,s\theta\,\vec{x}_0$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_G + \vec{AG} \wedge \vec{R} = (\frac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y'}_1) \wedge -\,mg\,\vec{y}_0 = -mg\frac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\,(s\alpha\,\vec{z}_0 - c\alpha\,s\theta\,\vec{x}_0)$$

$$\overrightarrow{M_A} = - e\, m\, g\ c\alpha\ s\theta\ \vec{x_0} + mg\,(e\, s\alpha - \frac{L}{2})\,\vec{z_0}$$

Résultante dynamique

$$M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -\, m\, e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z_1} - \dot{\theta}^2\ \vec{y_1})$$

$\vec{y_1} = c\theta\ \vec{y_0} + s\theta\ \vec{z_0}$ et $\vec{z_1} = c\theta\ \vec{z_0} - s\theta\ \vec{y_0}$

$$M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = -\, m\, e\ \cos\alpha\ \{\ddot{\theta}\ (c\theta\ \vec{z_0} - s\theta\ \vec{y_0}) - \dot{\theta}^2\,(c\theta\ \vec{y_0} + s\theta\ \vec{z_0})\}$$

$$\boxed{M\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) = m\, e\ \cos\alpha\ \{\vec{y_0}(\ddot{\theta}\, s\theta + \dot{\theta}^2\, c\theta) - \vec{z_0}(\ddot{\theta}\ c\theta - \dot{\theta}^2\, s\theta)\}}$$

Moment dynamique :

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{x_0}(A'\ddot{\theta}) + \vec{y_1}\ (B' + m\, e\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\ddot{\theta} + \vec{z_1}(B' + m\, e\ \frac{L}{2}\cos\alpha)\ \dot{\theta}^2$$

$\vec{y_1} = c\theta\ \vec{y_0} + s\theta\ \vec{z_0}$ et $\vec{z_1} = c\theta\ \vec{z_0} - s\theta\ \vec{y_0}$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{x_0}(A'\ddot{\theta}) + (c\theta\ \vec{y_0} + s\theta\ \vec{z_0})\ (B' + m\, e\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\ddot{\theta} + (c\theta\ \vec{z_0} - s\theta\ \vec{y_0})(B' + m\, e\ \frac{L}{2}\cos\alpha)\ \dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = {} & \vec{x_0}(A'\ddot{\theta}) \\ & + (B' + m\, e\frac{L}{2}\cos\alpha)(\ddot{\theta}\ c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\ \vec{y_0} \\ & + (B' + m\, e\ \frac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\ s\theta)\,\vec{z_0}\end{aligned}}$$

En définitive : $\{\bar{1} \rightarrow 1\} = {}_{A}\left\{\begin{matrix} X_A & Cm - e\, m\, g\, c\alpha\ s\theta \\ Y_A + Y_B - mg & -L\ Z_B \\ Z_A + Z_B & LY_B + mg\ (e\ s\alpha - \frac{L}{2}) \end{matrix}\right\}_{B_0}$

$$\{D(1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & A'\ddot{\theta} \\ m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) & (B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\,)(\ddot{\theta}\,c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta) \\ m\,e\,\cos\alpha\,(-\ddot{\theta}\,c\theta + \dot{\theta}^2\,s\theta) & (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\,s\theta) \end{array} \right\}_{A\ B_0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - mg = m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) \\ Z_A + Z_B = m\,e\,\cos\alpha\,(-\ddot{\theta}\,c\theta + \dot{\theta}^2\,s\theta) \\ Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta = A'\ddot{\theta} \\ Z_B = -\frac{1}{L}\{(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\,)(\ddot{\theta}\,c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\} \\ Y_B\ = \frac{1}{L}\{m\,g\,(\frac{L}{2} - e\,s\alpha) + (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\,s\theta)\} \end{array}}$$

Si $\dot{\theta} = \omega = cste$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - mg = m\,e\,\cos\alpha\,\omega^2\,c\theta \\ Z_A + Z_B = m\,e\,\cos\alpha\,\omega^2\,s\theta \\ Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta = 0 \\ Z_B = -\frac{1}{L}(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\,)\,\omega^2\,s\theta \\ Y_B = \frac{1}{L}\{\,m\,g\,(\frac{L}{2} - e\,s\alpha) + (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\omega^2\,c\theta\} \end{array}}$$

ZA et ZB sont non nulles. Si tout était équilibré elles seraient nulles

Le mouvement est imposé. La recherche des composantes de liaisons donne lieu à des équations algébriques