Moteur à courant continu★

B2-04

Question 1 Exprimer la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$. En passant les équations dans le domaine de Laplace, on a :

- $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p)$;
- $E(p) = K_m\Omega(p)$;
- $C(p) = K_m I(p)$;
- $C(p) - f\Omega(p) = Jp\Omega(p) \Leftrightarrow C(p) = \Omega(p)(Jp + f)$.

Vous devez savoir qu'un moteur à courant continu est piloté en tension ($U(p)$) et qu'en sortie on observe le taux de rotation ($\Omega(p)$).

En ne conservant que $U(p)$ et $\Omega(p)$, on a donc $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p) \Leftrightarrow U(p) = K_m\Omega(p) + (R + Lp)\dfrac{C(p)}{K_m} \Leftrightarrow U(p) = K_m\Omega(p) + (R + Lp)\dfrac{\Omega(p)(Jp + f)}{K_m} \Leftrightarrow U(p) = \left(K_m + (R + Lp)\dfrac{(Jp + f)}{K_m}\right)\Omega(p) \Leftrightarrow U(p) = \dfrac{K_m^2 + (R + Lp)(Jp + f)}{K_m}\Omega(p)$.

On a donc $H(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)} = \dfrac{K}{K^2 + (R + Lp)(Jp + f)}$.

Question 2 Préciser l'ordre et la classe de H. H est d'ordre 2 et de classe 0 car on ne peut pas mettre de p en facteur. Le terme de plus haut degré du dénominateur est de degré 2.

Question 3 Mettre $H(p)$ sous forme canonique. $H(p) = \dfrac{K_m}{K_m^2 + Rf + (RJ + Lf)p + LJp^2}$

$$\Leftrightarrow H(p) = \dfrac{\dfrac{K_m}{K_m^2 + Rf}}{1 + \dfrac{(RJ + Lf)}{K_m^2 + Rf}p + \dfrac{LJ}{K_m^2 + Rf}p^2}.$$

Question 4 Donner les caractéristiques de la fonction de transfert. En identifiant avec la forme canonique standard, $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$ soit $K = \dfrac{K_m}{K_m^2 + Rf}$, $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = \dfrac{(RJ + Lf)}{K_m^2 + Rf}$ et $\dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{LJ}{K_m^2 + Rf}$.

Au final, $K = \dfrac{K_m}{K_m^2 + Rf}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_m^2 + Rf}{LJ}}$, $\xi = \dfrac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ\left(K_m^2 + Rf\right)}}$.

Question 5 Vérifier l'homgénéité des différentes constantes.

Le gain doit être en $\mathrm{rad\,s^{-1}V^{-1}}$.

D'une part, $[K_m] = \mathrm{N\,m\,A^{-1}}$. D'autre part, $[K_m] = \mathrm{V\,rad^{-1}\,s}$. On a donc $\mathrm{V\,rad^{-1}\,s} = \mathrm{N\,m\,A^{-1}}$. (On pourrait aussi le montrer par une analyse dimensionnelle...)

De plus $[R] = \Omega = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$ et $[f] = \mathrm{N\,m\,rad^{-1}\,s}$.

On a donc $[K] = \dfrac{\mathrm{N\,m\,A^{-1}}}{(\mathrm{N\,m\,A^{-1}})^2 + \mathrm{N\,m\,rad^{-1}\,s} \times \mathrm{VA^{-1}}} = \dfrac{1}{\mathrm{N\,m\,A^{-1}} + \mathrm{rad^{-1}\,s\,V}} = \dfrac{1}{\mathrm{rad^{-1}\,s\,V}} = \mathrm{rad\,s^{-1}\,V^{-1}}$.

La pulsation propre doit être en $\mathrm{s^{-1}}$ ou $\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

On a vu que $[K_m^2] = [Rf]$. De plus $[L] = H = \mathrm{V\,s\,A^{-1}}$ et $[J] = \mathrm{Nm\,rad^{-1}s^2}$ (PFD).

$[\omega_0] = \sqrt{\dfrac{\mathrm{N^2\,m^2\,A^{-2}}}{\mathrm{V\,s\,A^{-1}} \times \mathrm{Nm\,rad^{-1}s^2}}} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{N\,m\,rad}}{\mathrm{V\,s\,A\,s^2}}}$. Or, $\mathrm{W} = \mathrm{N\,m\,rad\,s^{-1}} = \mathrm{VA}$.

On a alors $[\omega_0] = \sqrt{\dfrac{\mathrm{N\,m\,rad\,s^{-1}}}{\mathrm{V\,s^2\,A}}} = \sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{s^2}}} = \mathrm{s^{-1}}$.

Enfin, ξ est sans unité... à vérifier :)