TD 1
Exosquelette Atalante ★ – Corrigé

Centrale Supélec PSI 2023.

Comportement dynamique de l'exosquelette

Question 1 Déterminer l'expression de l'accélération du point G_3 appartenant à l'ensemble {pied+tibia} 3 dans son mouvement par rapport au buste 1 , en fonction de $L_0, L_2, \theta_1, \theta_2$ et leurs dérivées temporelles.

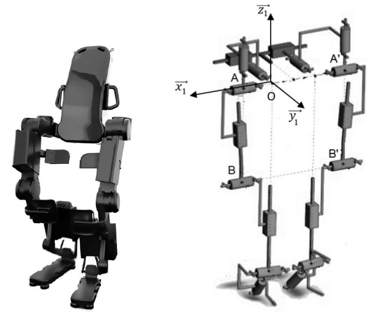

FIGURE 1 – Exosquelette Atalante et modélisation 3D associée

Correction

On cherche $\overrightarrow{\Gamma(G_3,3/1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(G_3,3/1)}\right]_{\mathcal{R}_1}$.

$\overrightarrow{V(G_3,3/1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG_3}\right]_{\mathcal{R}_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-L_2\overrightarrow{z_2}-L_0\overrightarrow{z_3}'\right]_{\mathcal{R}_1}$

$= L_2\dot{\theta}_1\overrightarrow{y_2} + L_0\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\overrightarrow{y_3}'$.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{z_3}'\right]_{\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{\Omega(3/1)}\wedge\overrightarrow{z_3}'$
$= \left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\overrightarrow{x_3}\wedge\overrightarrow{z_3}'$
$= -\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\overrightarrow{y_3}'$

Par suite, $\overrightarrow{\Gamma(G_3,3/1)} = L_2\ddot{\theta}_1\overrightarrow{y_2} + L_2\dot{\theta}_1^2\overrightarrow{z_2} + L_0\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)\overrightarrow{y_3}' + L_0\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2\overrightarrow{z_3}'$.

Question 2 Déterminer l'expression de la projection suivant $\vec{x}_1$ du moment dynamique en A de l'ensemble { pied+tibia } 3 dans son mouvement par rapport au buste 1, $\vec{\delta}_{A,3/1}\cdot\vec{x}_1$, sous la forme : $\vec{\delta}_{A,3/1}\cdot\vec{x}_1 = A_1\ddot{\theta}_1 + A_2\ddot{\theta}_2 + A_3\dot{\theta}_1^2 + A_4\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2$. Préciser les expressions littérales de A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties de l'exosquelette.

Correction

On cherche $\overrightarrow{\delta(A,3/1)}\cdot\overrightarrow{x_1}$.

On a $\overrightarrow{\delta(A,3/1)}\cdot\overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{\delta(G_3,3/1)}+\overrightarrow{AG_3}\wedge m_3\overrightarrow{\Gamma(G_3,3/1)}\right)\cdot\overrightarrow{x_1} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(G_3,3/1)}\right]_{\mathcal{R}_1}+\overrightarrow{AG_3}\wedge m_3\overrightarrow{\Gamma(G_3,3/1)}\right)\cdot\overrightarrow{x_1}$.

Or, en G_3, centre d'inertie de 3, $\overrightarrow{\sigma(G_3,3/1)} = I_{G_3}(3)\overrightarrow{\Omega(3/1)} = \begin{pmatrix} I_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y3} & I_{yz3} \\ 0 & I_{yz3} & I_{z3}\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}\cdot\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\overrightarrow{x_3} = I_{x3}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\overrightarrow{x_3}$.

Par suite, $\overrightarrow{\delta(A,3/1)}\cdot\overrightarrow{x_1} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(G_3,3/1)}\right]_{\mathcal{R}_1}\cdot\overrightarrow{x_1}+\left(\overrightarrow{AG_3}\wedge m_3\overrightarrow{\Gamma(G_3,3/1)}\right)\cdot\overrightarrow{x_1}\right)$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(G_3,3/1)}\cdot\overrightarrow{x_1}\right]_{\mathcal{R}_1} - \overrightarrow{\sigma(G_3,3/1)}\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{x_1}\right]_{\mathcal{R}_1}}_{0} + \left(\overrightarrow{AG_3}\wedge m_3\overrightarrow{\Gamma(G_3,3/1)}\right)\cdot\overrightarrow{x_1}\right)$$

$= I_{x3}\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right) + \left(\left(-L_2\overrightarrow{z_2}-L_0\overrightarrow{z_3}'\right)\wedge m_3\left(L_2\ddot{\theta}_1\overrightarrow{y_2}+L_2\dot{\theta}_1^2\overrightarrow{z_2}+L_0\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)\overrightarrow{y_3}'+L_0\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2\overrightarrow{z_3}'\right)\right)\cdot\overrightarrow{x_1}$

$= \ddot{\theta}_1\left(I_{x3}+m_3L_2^2+L_2m_3L_0\cos(\theta_2+\alpha)+m_3L_0L_2\cos(\theta_2+\alpha)+m_3L_0^2\right) + \ddot{\theta}_2\left(I_{x3}+L_2m_3L_0\cos(\theta_2+\alpha)+m_3L_0^2\right) + \dot{\theta}_1^2\left(m_3L_0L_2\sin(\theta_2+\alpha)\right) + \left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2\left(-L_2m_3L_0\sin(\theta_2+\alpha)\right)$

Soit : $\begin{cases} A_1 = I_{x3}+m_3L_2^2+2m_3L_0L_2\cos(\theta_2+\alpha)+m_3L_0^2 \\ B_1 = I_{x3}+m_3L_0L_2\cos(\theta_2+\alpha)+m_3L_0^2 \\ C_1 = m_3L_0L_2\sin(\theta_2+\alpha) \\ D_1 = -m_3L_0L_2\sin(\theta_2+\alpha)\end{cases}$.

Question 3 Proposer une démarche permettant de déterminer l'expression de C_1, l'action mécanique exercée sur la cuisse 2 par l'actionneur correspondant. Préciser le(les) ensemble(s) isolé(s), le(s) bilan(s) des actions mécaniques extérieurs, le(s) théorème(s) utilisé(s) et la(les) équation(s) utile(s).

Correction

- On isole l'ensemble $\{2+3\}$.
- Bilan des actions mécaniques :
  - liaison pivot en A telle que $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, 1 \rightarrow 2\right)} \cdot \overrightarrow{x_1} = 0$;
  - actionneur de 1 sur 2 tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, 1 \rightarrow 2_m\right)} \cdot \overrightarrow{x_1} = C_1$;
  - action du patient sur la hanche telle que $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, 1 \rightarrow 2_p\right)} \cdot \overrightarrow{x_1} = C_{\text{hanche}}$;
  - action de la pesanteur sur 2 en G_2 ;
  - action de la pesanteur sur 3 en G_3.
- On écrit alors le théorème du moment dynamique en A en projection sur $\overrightarrow{x_0}$.

Question 4 Déterminer l'expression de C_1 en fonction de θ_1, θ_2, leurs différentes dérivées, de C_{hanche} et des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties de l'exosquelette.

Correction

Détermination des actions mécaniques.

- $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, \text{pes} \rightarrow 2\right)} \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{AG_2} \wedge -m_2 g \overrightarrow{z_1}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\left(l_2 - L_2\right) \overrightarrow{z_2} \wedge -m_2 g \overrightarrow{z_1}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = m_2 g \left(l_2 - L_2\right) \sin \theta_1$;
- $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A, \text{pes} \rightarrow 3\right)} \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{AG_3} \wedge -m_3 g \overrightarrow{z_1}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\left(-L_2 \overrightarrow{z_2} - L_0 \overrightarrow{z_3}'\right) \wedge -m_3 g \overrightarrow{z_1}\right) \cdot \overrightarrow{x_1}$ $= \left(\left(L_2 \overrightarrow{z_2} + L_0 \overrightarrow{z_3}'\right) \wedge m_3 g \overrightarrow{z_1}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = -m_3 g \left(L_2 \sin \theta_1 + L_0 \sin\left(\alpha + \theta_2 + \theta_1\right)\right)$.

Le TMD en A appliqué 2+3 en projections sur $\overrightarrow{x_1}$ se traduit donc par :
$C_1 + C_{\text{hanche}} - m_3 g \left(L_2 \sin \theta_1 + L_0 \sin\left(\alpha + \theta_2 + \theta_1\right)\right) + m_2 g \left(l_2 - L_2\right) \sin \theta_1 = A_1 \ddot{\theta}_1 + A_2 \ddot{\theta}_2 + A_3 \dot{\theta}_1^2 + A_4 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2$.

Question 5 Déduire des deux équations précédentes que le modèle dynamique considéré peut s'écrire sous la forme matricielle suivante : $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + M_2 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + C + M_3 \begin{pmatrix} C_{\text{hanche}} \\ C_{\text{genou}} \end{pmatrix}$ où C est une matrice colonne et M_1, M_2 et M_3 sont des matrices 2×2. Donner l'expression littérale des coefficients de C, M_1, M_2 et M_3 par des relations non linéaires des paramètres de mouvement (θ_1, θ_2), leurs dérivés premières et des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties du problème.

Correction

On a :

$$\begin{cases} C_1 = -C_{\text{hanche}} + m_3 g \left(L_2 \sin \theta_1 + L_0 \sin\left(\alpha + \theta_2 + \theta_1\right)\right) - m_2 g \left(l_2 - L_2\right) \sin \theta_1 - A_1 \ddot{\theta}_1 - A_2 \ddot{\theta}_2 - A_3 \dot{\theta}_1^2 \\ C_2 = \left[I_{x3} + m_3 L_0^2\right] \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + m_3 L_2 L_0 \left[\ddot{\theta}_1 \cos\left(\theta_2 + \alpha\right) + \dot{\theta}_1^2 \sin\left(\theta_2 + \alpha\right)\right] + m_3 g L_0 \sin\left(\theta_2 + \theta_1 + \alpha\right) \end{cases}$$

Par identification : $M_1 = \begin{pmatrix} -A_1 & -A_2 \\ \left[I_{x3} + m_3 L_0^2\right] + m_3 L_2 L_0 \cos\left(\theta_2 + \alpha\right) & \left[I_{x3} + m_3 L_0^2\right] \end{pmatrix}$,

$M_2 = \begin{pmatrix} -A_3 \dot{\theta}_1 & 0 \\ 0 & m_3 L_2 L_0 \dot{\theta}_1 \sin\left(\theta_2 + \alpha\right) \end{pmatrix}$,

$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

et $C=\begin{pmatrix} m_3g\left(L_2\sin\theta_1+L_0\sin\left(\alpha+\theta_2+\theta_1\right)\right)-m_2g\left(l_2-L_2\right)\sin\theta_1-A_4\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2 \\ m_3gL_0\sin\left(\theta_2+\theta_1+\alpha\right)\end{pmatrix}$.

Si on part du principe que le vecteur C ne doit pas dépendre de $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ on obtient cette autre solution :

$M_1=\begin{pmatrix} -A_1 & -A_2 \\ \left[I_{x3}+m_3L_0^2\right]+m_3L_2L_0\cos\left(\theta_2+\alpha\right) & \left[I_{x3}+m_3L_0^2\right]\end{pmatrix}$,

$M_2=\begin{pmatrix} -\left(A_3+A_4\right)\dot{\theta}_1-2A_4\dot{\theta}_2 & -A_4\left(\dot{\theta}_2+2\dot{\theta}_1\right) \\ 0 & m_3L_2L_0\dot{\theta}_1\sin\left(\theta_2+\alpha\right)\end{pmatrix}$,

$M_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$

et $C=\begin{pmatrix} m_3g\left(L_2\sin\theta_1+L_0\sin\left(\alpha+\theta_2+\theta_1\right)\right)-m_2g\left(l_2-L_2\right)\sin\theta_1 \\ m_3gL_0\sin\left(\theta_2+\theta_1+\alpha\right)\end{pmatrix}$.