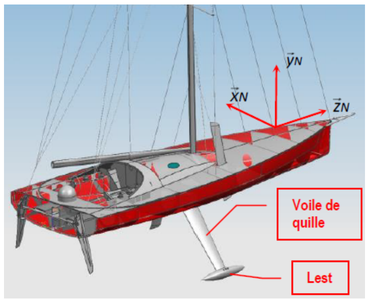
TD 1
Quille pendulaire ★ – Corrigé

Concours Commun Mines Ponts 2014.

C1-05

C2-08



Mise en situation

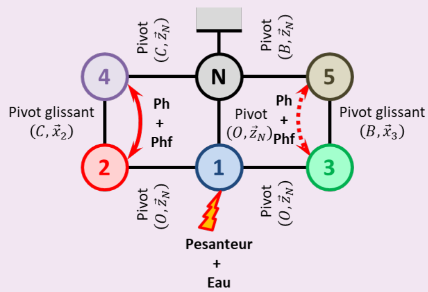
Objectif

L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Vecteurs vitesse

Question 1 Tracer le graphe de liaisons.

Correction



Question 2 Exprimer les vitesses suivantes :

1. $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)}$ *en fonction de* $\dfrac{d\theta_1(t)}{dt}$ *et des paramètres géométriques utiles ;*
2. $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)}$ *en fonction de* $\dfrac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\dfrac{dx_{24}(t)}{dt}$, x_{24} *et des paramètres géométriques utiles ;*
3. $\overrightarrow{V(G_3, 3/N)}$ *en fonction de* $\dfrac{d\theta_3(t)}{dt}$, $\dfrac{dx_{35}(t)}{dt}$, x_{35} *et des paramètres géométriques utiles ;*
4. $\overrightarrow{V(A, 2/4)}$ *en fonction de* $\dfrac{dx_{24}(t)}{dt}$.

Correction

1. $\overrightarrow{V(G_1, 1/N)} = \overrightarrow{V(O, 1/N)} + \overrightarrow{G_1O} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/N)} = L_1\overrightarrow{y_1} \wedge \dot{\theta}_1\overrightarrow{z_N} = L_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}$.
2. $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(R\overrightarrow{y_1} - L_2\overrightarrow{x_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = -R\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1} - L_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{y_2}$.

   On a aussi $\overrightarrow{V(G_2, 2/N)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(x_{24}(t)\overrightarrow{x_2} - L_2\overrightarrow{x_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} =$ $\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2\left(x_{24}(t) - L_2\right)\overrightarrow{y_2}$.

3. $\overrightarrow{V(G_3,3/N)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(R\overrightarrow{y_1}+L_2\overrightarrow{x_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = -R\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}+L_2\dot{\theta}_3\overrightarrow{y_3}$.

   On a aussi $\overrightarrow{V(G_3,3/N)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(-x_{35}(t)\overrightarrow{x_3}+L_2\overrightarrow{x_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = -\dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3}+\dot{\theta}_3\left(-x_{35}(t)+L_2\right)\overrightarrow{y_3}$.
4. $\overrightarrow{V(A,2/4)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{CA}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_4} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_4} = \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}$.

Énergie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note $\mathscr{E}_c\left(i/N\right)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N.

Question 3 Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

1. *$\mathscr{E}_c\left(1/N\right)$, en fonction de $\dfrac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles ;*
2. *$\mathscr{E}_c\left(2/N\right)$, en fonction de $\dfrac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\dfrac{dx_{24}(t)}{dt}$, $x_{24}(t)$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.*
3. *$\mathscr{E}_c\left(4/N\right)$, en fonction de $\dfrac{d\theta_2(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.*

Correction

1. $\mathscr{E}_c\left(1/N\right) = \dfrac{1}{2}\left\{\mathscr{V}\left(1/N\right)\right\}\otimes\left\{\mathscr{C}\left(1/N\right)\right\} = \dfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega\left(1/N\right)}\\ \overrightarrow{V\left(G_1,1/N\right)}\end{array}\right\}_{G_1}\otimes\left\{\begin{array}{c}M_1\overrightarrow{V\left(G_1,1/N\right)}\\ \overrightarrow{\sigma\left(G_1,1/N\right)}\end{array}\right\}_{G_1} = \dfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_N}\\ L_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}\end{array}\right\}_{G_1}\otimes\left\{\begin{array}{l}M_1L_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}\\ \dot{\theta}_1\left(-D_1\overrightarrow{y_N}+C_1\overrightarrow{z_N}\right)\end{array}\right\}_{G_1}$
   $= \dfrac{1}{2}\left(\dot{\theta}_1^2\left(-D_1\overrightarrow{y_N}+C_1\overrightarrow{z_N}\right)\overrightarrow{z_N}+M_1L_1^2\dot{\theta}_1^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dot{\theta}_1^2C_1+M_1L_1^2\dot{\theta}_1^2\right) = \dfrac{1}{2}\dot{\theta}_1^2\left(C_1+M_1L_1^2\right)$.
2. $\mathscr{E}_c\left(2/N\right) = \dfrac{1}{2}\left\{\mathscr{V}\left(2/N\right)\right\}\otimes\left\{\mathscr{C}\left(2/N\right)\right\} = \dfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega\left(2/N\right)}\\ \overrightarrow{V\left(G_2,2/N\right)}\end{array}\right\}_{G_2}\otimes\left\{\begin{array}{c}M_2\overrightarrow{V\left(G_2,2/N\right)}\\ \overrightarrow{\sigma\left(G_2,2/N\right)}\end{array}\right\}_{G_2}$
   $= \dfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_N}\\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}\end{array}\right\}_{G_2}\otimes\left\{\begin{array}{l}M_2\left(\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}\right)\\ \dot{\theta}_2B_2\overrightarrow{z_N}\end{array}\right\}_{G_1}$
   $= \dfrac{1}{2}\left(B_2\dot{\theta}_2^2+M_2\left(\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}\right)^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(B_2\dot{\theta}_2^2+M_2\left(\dot{x}_{24}(t)^2+\dot{\theta}_2^2\left(x_{24}(t)-L_2\right)^2\right)\right)$.
3. $\mathscr{E}_c\left(4/N\right) = \dfrac{1}{2}C_4\dot{\theta}_2^2$.

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements ;
- $\mathcal{P}\left(4 \overset{\text{Ph}}{\leftrightarrow} 2\right) = \{\mathcal{T}(4 \to 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(4 \to 2)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 4 \to 2)} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/4)} \\ \overrightarrow{V(A, 2/4)} \end{array} \right\}_A$ $= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(4 \to 2)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 2/4)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} F_{h2}\overrightarrow{x_2} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} \end{array} \right\}_A = F_{h2}\dot{x}_{24}$;
- $\mathcal{P}\left(4 \overset{\text{Phf}}{\leftrightarrow} 2\right) = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(4 \to 2)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 2/4)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} -k\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} \end{array} \right\}_A = -k\dot{x}_{24}^2(t)$;
- $\mathcal{P}\left(3 \overset{\text{Ph}}{\leftrightarrow} 5\right) = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(5 \to 3)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 3/5)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} F_h\overrightarrow{x_3} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} \end{array} \right\}_A$ $= F_h\dot{x}_{35}(t)$;
- $\mathcal{P}\left(3 \overset{\text{Phf}}{\leftrightarrow} 5\right) = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(5 \to 3)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A, 3/5)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} -k\dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} \end{array} \right\}_A = -k\dot{x}_{35}^2(t)$.

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 Recenser, puis exprimer les puissances galiliéennes non nulles (notées $\mathcal{P}(i \to j/k)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E. Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements ;
- $\mathcal{P}(\text{pes} \to 1/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \to 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{l} -M_1 g\overrightarrow{y_N} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1\overrightarrow{z_N} \\ \overrightarrow{V(G_1, 1/R_N)} = L_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_{G_1}$ $= -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}\overrightarrow{y_N} = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1$;
- $\mathcal{P}(\text{pes} \to 2/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \to 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{l} -M_2 g\overrightarrow{y_N} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1\overrightarrow{z_N} \\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2\left(x_{24}(t) - L_2\right)\overrightarrow{y_2} \end{array} \right\}_{G_1}$ $= -M_2 g\overrightarrow{y_N}\left(\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2\left(x_{24}(t) - L_2\right)\overrightarrow{y_2}\right) = -M_2 g\dot{x}_{24}(t)\sin\theta_2 -$

$M_2 g \dot{\theta}_2 \left(x_{24}(t) - L_2\right) \cos\theta_2$;

- $\mathscr{P}\left(\text{pes} \rightarrow 3/R_N\right) = -M_3 g \overrightarrow{y_N} \left(-\dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}_3 \left(-x_{35}(t) + L_2\right)\overrightarrow{y_3}\right)$
$= -M_3 g \left(-\dot{x}_{35}(t) \sin\theta_3 + \dot{\theta}_3 \left(-x_{35}(t) + L_2\right)\cos\theta_3\right)$;
- $\mathscr{P}\left(\text{eau} \rightarrow 1/R_N\right) = \{\mathscr{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathscr{V}(1/R_N)\} = \left\{\begin{array}{l} F_p\overrightarrow{z_1} + F_t\overrightarrow{x_1} \\ 0 \end{array}\right\}_P \otimes \left\{\begin{array}{l} \dot{\theta}_1\overrightarrow{z_N} \\ h\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1} \end{array}\right\}_P$
$= F_t h \dot{\theta}_1$;

Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N. Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

Correction

On a : $\mathscr{P}\left(\bar{E} \rightarrow E/R_N\right) + \sum \mathscr{P}(i \leftrightarrow j) = \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c\left(E/R_N\right)}{\mathrm{d}t}$

Question 7 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0\,\text{s}$, $t = 1\,\text{s}$, $t = 3\,\text{s}$ et $t = 4\,\text{s}$. Sur cet intervalle $[0, 4\,\text{s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Correction

D'après UPSTI. À 1 s, 2200 + 5800 + 2500 + 4000 = 14 500 W à 3 s 0 + 4000 + 2500 + 16000 = 22 500 W Maximum à environ 22,5 kW. Le maximum est bien sur cet intervalle car le poids y est résistant (le poids est moteur sur [5 s ; 8 s]).

Question 8 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

Correction

D'après UPSTI. La différence est de 7,5 kW. Elle ne peut pas provenir des hypothèses faites (liaisons parfaites et RN galiléen). Elle provient certainement du fait que le système est surdimensionné pour pallier les erreurs de modélisation des actions de l'eau, le vieillissement de la quille avec les algues collées qui rajoutent du poids...