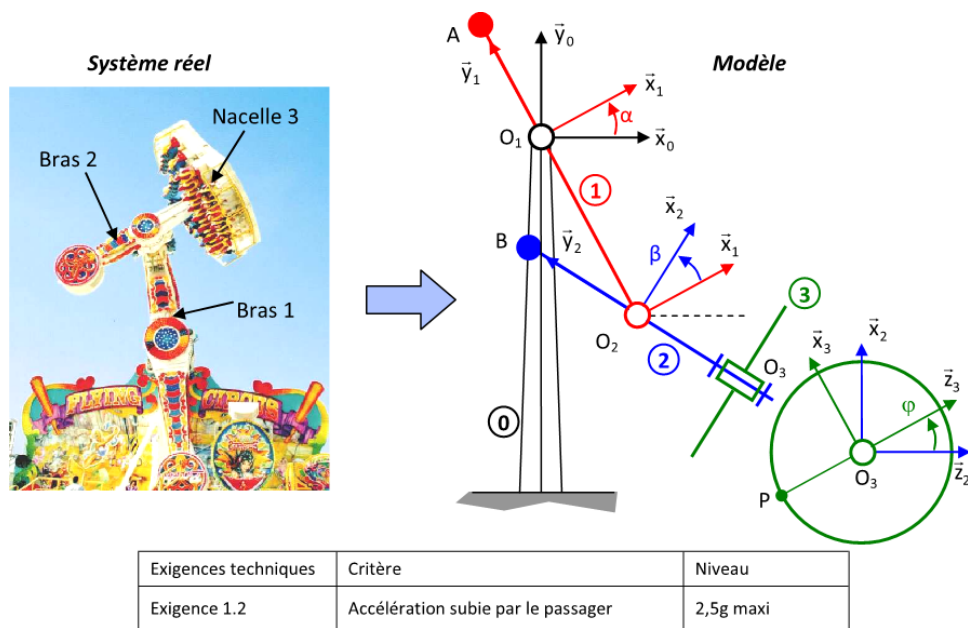


# Application 1

## Magic Arms – Sujet

Florestan Mathurin.

La manège Magic Arms dont la modélisation ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel est composé d'une structure métallique d'environ 12 m de haut avec deux bras mobiles. Les passagers s'assoient sur 39 pièces disposées sur une plate-forme tournante. Dès que tous les passagers sont assis et attachés, la nacelle tourne autour de son axe, le bras principal (bras 1) et le bras secondaires (bras 2), liés l'un à l'autre au début du cycle, commencent à tourner. Après 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les deux bras se désindexent et se mettent à tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par ordinateur.



Le manège, schématisé ci-dessus, comporte :

- un bras principal 1 assimilé à une barre  $AO_1O_2$ . Il est en liaison pivot parfait d'axe  $(O_1, \vec{z}_1)$  caractérisée par le paramètre  $\alpha$  avec le bâti 0. On pose  $\overrightarrow{O_1O_2} = -l_1\vec{y}_1$ ;
- un bras secondaire 2 assimilé à une barre  $BO_2O_3$ . Il est en liaison pivot parfait d'axe  $(O_2, \vec{z}_2)$  caractérisée par le paramètre  $\beta$  avec le bras principal 1. On pose  $\overrightarrow{O_2O_3} = -l_2\vec{y}_2$ ;
- une nacelle 2 assimilée à un disque de centre  $O_3$  et de rayon  $R$ . Elle est en liaison parfaite d'axe  $(O_3, \vec{y}_2)$  caractérisée par le paramètre  $\varphi$  avec le bras 2. On s'intéresse plus particulièrement à un passager considéré comme un point matériel  $P$  tel que  $\overrightarrow{O_3P} = -R\vec{z}_3$ .

**Question 1** Construire les figures planes associées au schéma cinématique.

**Question 2** Calculer  $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$ ,  $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$ .

**Question 3** Calculer  $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$ .

**Question 4** Calculer les produits vectoriels suivants :  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2$ ,  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1$ ,  $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0$ .

**Question 5** Calculer  $\overrightarrow{V}(O_2, 2/0)$ ,  $\overrightarrow{V}(O_3, 3/0)$  et  $\overrightarrow{V}(P, 3/0)$ .

On donne, sur la figure en bas de page (à gauche) l'évolution des vitesses angulaires des moteurs du manège en fonction du temps.

**Question 6** Déterminer les valeurs des paramètres  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  et  $\dot{\phi}$  puis l'expression analytique des positions angulaires  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  et  $\phi(t)$  dans l'intervalle de temps  $[17; 27]$  secondes en sachant qu'à l'instant  $t = 17$  s, on a  $\alpha = 10,5$  rad,  $\beta = 3,76$  rad et  $\phi = -10,676$  rad.

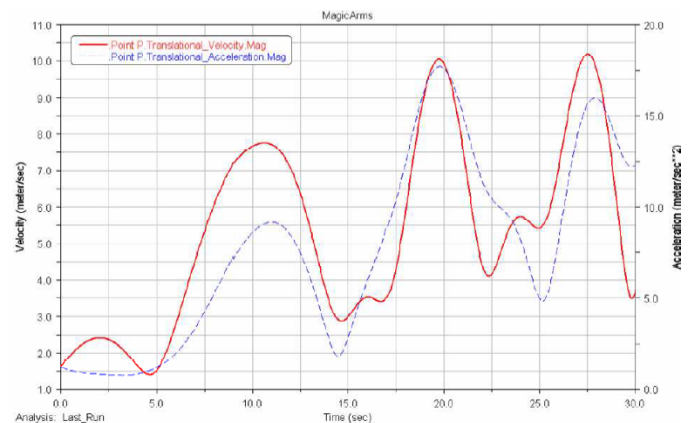
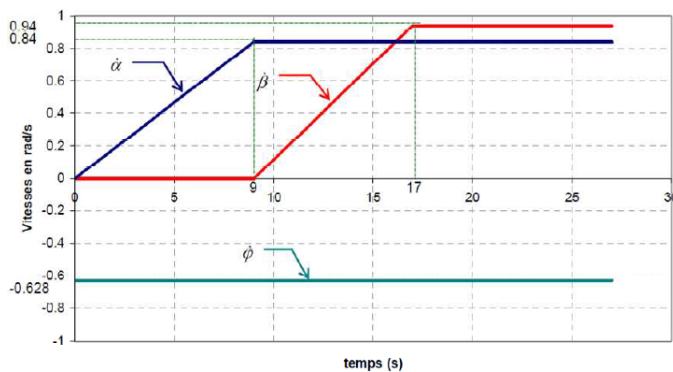
**Question 7** Déterminer les valeurs numériques à l'instant  $t_1 = 19,8$  s de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\phi$ .

**Question 8** On pose  $\overrightarrow{V}(P, 3/0) = V_{x2}\vec{x}_2 + V_{y2}\vec{y}_2 + V_{z2}\vec{z}_2$ . Déterminer les expressions littérales de  $V_{x2}$ ,  $V_{y2}$ ,  $V_{z2}$  puis les valeurs numériques de à  $t_1 = 19,8$  s. (On donne :  $l_1 = 3,9$  m,  $l_2 = 2,87$  m,  $R = 2,61$  m.)

**Question 9** Calculer  $\overrightarrow{\Gamma}(P \in 3/0)$ .

**Question 10** Calculer  $\overrightarrow{\Gamma}(P \in 3/0)$  dans l'intervalle de temps  $[17; 27]$  secondes pour lequel les vitesses angulaires sont constantes.

Le graphe ci-dessous (à droite), obtenu par simulation numérique, présente le module de la vitesse du passager  $P$  par rapport au bâti 0 ainsi que le module de l'accélération du passager  $P$  par rapport au bâti 0 en fonction du temps.



**Question 11** Comparer les résultats obtenus à la question 6 à ceux du graphe pour le temps  $t_1 = 19,8$  s.

**Question 12** Relever l'accélération maximale subie par le passager et conclure vis-à-vis du CdCF.

1.  $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{\Omega}(2/1) = \dot{\beta}\vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{\Omega}(3/2) = \dot{\phi}\vec{y}_2$ .
2.  $\overrightarrow{\Omega}(2/0) = (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{\Omega}(3/0) = (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\vec{z}_0 + \dot{\phi}\vec{y}_2$ ;
3.  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3 = \sin \phi \vec{y}_2$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\sin \phi \vec{y}_2$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 = -\cos \phi \vec{y}_2$ ,  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}$ ,  $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0 = -\sin(\beta + \alpha)\vec{z}_0$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0 = -\cos \phi \vec{y}_2$ .
4.  $\overrightarrow{V}(O_2, 2/0) = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1$ ,  $\overrightarrow{V}(O_3, 3/0) = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2$ ,  $\overrightarrow{V}(P, 3/0) = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \dot{\phi} \vec{y}_2$ .
5.  $\dot{\alpha} = 0,84$  rad/s,  $\dot{\beta} = 0,94$  rad/s,  $\dot{\phi} = -0,628$  rad/s et  $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^t \dot{\alpha} d\tau$ .
6.  $\alpha = 12,85$  rad,  $\beta = 6,39$  rad,  $\phi = 12,43$  rad.
7.  $V_{x2} = l_1 \dot{\alpha} \cos \beta + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - R \dot{\phi} \cos \phi = 9,99$  m/s,  $V_{y2} = -l_1 \dot{\alpha} \sin \beta - R \sin \phi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = -0,28$  m/s,  $V_{z2} = R \dot{\phi} \sin \phi = -0,22$  m/s.

9.  $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \ddot{\alpha} \overrightarrow{x_1} + l_1 \dot{\alpha}^2 \overrightarrow{y_1} + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \overrightarrow{x_2} + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{y_2} - 2R\dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \overrightarrow{y_2} + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{x_2} - R\ddot{\varphi} \overrightarrow{x_3} + R\dot{\varphi}^2 \overrightarrow{z_3}.$
10.  $\overrightarrow{\Gamma(P, 3/0)} = l_1 \dot{\alpha}^2 \overrightarrow{y_1} + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{y_2} - 2R\dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{x_2} + R\dot{\varphi}^2 \overrightarrow{z_3}.$
11.  $\left\| \overrightarrow{V(P, 3/0)} \right\| = \boxed{10 \text{ m/s}}$
12. .