Torseur des actions mécaniques transmissibles dans un coussinet ⋆

B2-14

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note $\overrightarrow{R(1 \to 3)}$.

Correction

1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en M : $\mathrm{d}\overrightarrow{R(1 \to 3)} = p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r}$.
2. La pression étant uniforme, on a $p(M) = p$.
3. La géométrie du coussinet étant cylindrique, on se place en coordonnées cylindriques et $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.
4. θ varie sur $[\pi, 2\pi]$ et z sur $[0, L]$.
5. $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{x} + \sin\theta\overrightarrow{y}$.

Au final, $\overrightarrow{R(1 \to 3)} = \int p\left(\cos\theta\overrightarrow{x} + \sin\theta\overrightarrow{y}\right)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = pR\int\left(\cos\theta\overrightarrow{x} + \sin\theta\overrightarrow{y}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
$= pR\left(\int\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{x} + \int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{y}\right) = LpR\left(\int\cos\theta\mathrm{d}\theta\overrightarrow{x} + \int\sin\theta\mathrm{d}\theta\overrightarrow{y}\right)$
$= LpR\left([\sin\theta]_\pi^{2\pi}\overrightarrow{x} - [\cos\theta]_\pi^{2\pi}\overrightarrow{y}\right)$
$= LpR\left(-(1-(-1))\overrightarrow{y}\right)$
$= LpR\left(-(1-(-1))\overrightarrow{y}\right) = -2LpR\overrightarrow{y} = -LDp\overrightarrow{y}$.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \to 3)}\overrightarrow{z_N}$.

Correction

1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en M : $\mathrm{d}\overrightarrow{R(1 \to 3)} = p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r}$.
2. Au point O, on a $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \to 3)} = \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{R(1 \to 3)} = \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{R(1 \to 3)}$
3. $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{z}$.

On a alors, $\overrightarrow{\mathcal{M}(0, 1 \to 3)}\overrightarrow{z} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{R(1 \to 3)}\right)\overrightarrow{z}$
$= \left(\left(R\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{z}\right) \wedge p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r}\right)\overrightarrow{z}$
$= \left(z\overrightarrow{z} \wedge p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r}\right)\overrightarrow{z} = 0$

Rappel : le produit mixte est invariant par permutation circulaire : $\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c} = \left(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{b} = \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right)\cdot\overrightarrow{a}$.

On considère maintenant que la pression n'est pas uniforme et vaut au point M $p(M) = p_0\sin\theta$.

Question 3 Justifier que $\overrightarrow{R(1 \to 3)}$ n'a une composante que sur $\overrightarrow{y}$.

Correction

Pour des raisons de symétrie du champ de pression, la seule composante sera sur $\overrightarrow{y_N}$.

Question 4 Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note $\overrightarrow{R\left(1\longrightarrow 3\right)}$. On rappelle que $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$.

Correction

On cherche donc $\overrightarrow{R\left(1\longrightarrow 3\right)}\cdot\overrightarrow{y_N}$.

1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en M : $\mathrm{d}\overrightarrow{R\left(1\longrightarrow 3\right)} = p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r}$.
2. La pression étant uniforme, on a $p(M) = p_0\sin\theta$.
3. La géométrie du coussinet étant cylindrique, on se place en coordonnées cylindriques et $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.
4. θ varie sur $[\pi, 2\pi]$ et z sur $[0, L]$.

On a $\mathrm{d}\overrightarrow{R\left(1\longrightarrow 3\right)}\cdot\overrightarrow{y_N} = p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{y_N} = p_0\mathrm{d}S\sin^2\theta$.

On a donc $\overrightarrow{R\left(1\longrightarrow 3\right)}\cdot\overrightarrow{y_N} = \int p_0\sin^2\theta R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = p_0RL\int\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{2}p_0RL\left[\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi}^{2\pi} = \dfrac{1}{2}p_0RL\pi = \dfrac{1}{4}p_0DL\pi$.