TD 0
Mobilité assistée à l'aide d'une canne robotisée – Corrigé

Concours CCP – PSI 2018.

Présentation du prototype de canne robotisée étudié

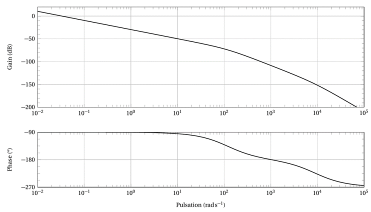
Étude de l'exigence 3.1.6.2 « Commande de l'axe linéaire »

C1-02

C2-04

Modèle comportemental

Question 1 À partir du diagramme de Bode, proposer un modèle de comportement du système en boucle ouverte. Soit $H_{BO\_1}(p)$ cette fonction de transfert, donner sa forme canonique factorisée. Soient T_1 et T_2, telles que $T_1 < T_2$, les constantes de temps introduites et K_{BO} le gain de $H_{BO\_1}(p)$, préciser les valeurs numériques et unités de T_1, T_2 et K_{BO}. Vous laisserez apparaître les traits de construction nécessaires à l'identification du modèle sur le document réponse.



Correction

L'allure des courbes de gain et de phase de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte montre clairement que le comportement est équivalent à celui d'un système du second ordre (avec coefficient d'amortissement $z > 1$, car les courbes présentent deux cassures nettes en $\omega_{c1} = 1/T_1$ et $\omega_{c2} = 1/T_2$) associé à un intégrateur pur (pente de -20 dB/dec quand $\omega \longrightarrow 0$ pour la courbe de gain et asymptote à -90°quand $\omega \longrightarrow 0$ pour la courbe de phase). La forme canonique factorisée peut donc se mettre sous la forme :
$H_{BO\_1}(p) = K_{\text{BO}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1+T_1 \cdot p} \cdot \frac{1}{1+T_2 \cdot p}$
On relève sur les courbes :
$\omega_{c1} \simeq 10^4$ rad/s, donc $T_1 = 10^{-4}$ s = 0,1 ms,
$\omega_{c2} \simeq 10^2$ rad/s, donc $T_2 = 10^{-2}$ s = 10 ms,
et en remarquant que pour $\omega = 10^0 = 1$ rad/s, $G_{\text{BO}} = 20.log(K_{\text{BO}}) = -30dB$, on obtient $K_{\text{BO}} = 10^{-30/20} \simeq 0{,}032\ \text{s}^{-1}$.

Question 2 Déterminer la fréquence moyenne en Hz de la marche saine à allure rapide.

Correction

Une cadence de 113 pas par minute correspond à une fréquence de marche de l'ordre de $\frac{113}{60} \simeq 1{,}88$ Hz.

Question 3 Justifier, à l'aide de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte, la validité de cette modélisation approchée.

Correction

$F_{\text{MAX}} = 4$ Hz correspond à une sollicitation de pulsation $\omega_{\text{MAX}} = 4 \times 2\pi \simeq 25$ rad/s.
On constate que $\omega_{\text{MAX}} < \omega_{c2} = 100$ rad/s $<< \omega_{c1} = 10^4$ rad/s.
Pour $\omega < \omega_{\text{MAX}}$, le système se comporte donc comme un intégrateur pur de gain égal à K_{BO}. L'approximation de $H_{\text{BO}}(p)$ par K_{BO}/p avec $K_{\text{BO}} = 1/30 \simeq 0{,}032$ est donc acceptable.

Question 4 Déterminer l'expression de $H_{\text{BF}}(p) = X(p)/X_c(p)$, la fonction de transfert en boucle fermée de la modélisation de la **??**. Déterminer les paramètres caractéristiques de $H_{\text{BF}}(p)$ et en déduire les performances de cette modélisation pour $C(p) = K_{\text{corr}} = 1$. Conclure vis-à vis des performances d'asservissement de l'axe linéaire.

Correction

En appliquant la formule de Black, il vient $H_{BF}(p) = \frac{K_{corr}.K_{BO}/p}{1+K_{corr}.K_{BO}/p}$, avec $K_{corr} = 1$, on obtient : $H_{BF}(p) = \frac{K_{BO}}{p+K_{BO}}$, soit sous forme canonique : $H_{BF}(p) = \frac{1}{1+\frac{1}{K_{BO}}.p}$.
La fonction de transfert est donc celle d'un système du 1er ordre, de gain unitaire $K_{BF} = 1$ et de constante de temps $1/K_{BO} = 30$ s.
Les performances de ce système sont donc :

- système stable car système du 1er ordre $\Rightarrow$ cdcf vérifié,
- système précis car de gain unitaire $\Rightarrow$ cdcf vérifié,
- système ne présente pas de dépassement car système du 1er ordre $\Rightarrow$ cdcf vérifié,
- tr5% $= 3 \times 30 = 90$ s $\Rightarrow$ cdcf non vérifié car le temps de réponse attendu est de 60 ms.

Le système avec $K_{corr} = 1$ est donc trop lent.

Question 5 Déterminer la valeur numérique à donner à K_{corr} pour assurer le temps de réponse à 5 % lié à l'exigence de rapidité de l'asservissement de l'axe linéaire.

Correction

Il faut alors augmenter K_{corr}, tel que tr5% $= 3 \times \frac{1}{K_{corr}.K_{BO}} \leqslant 60$ ms. Donc $K_{corr} \geqslant \frac{3}{60.10^{-3}.K_{BO}}$. L'application numérique donne $K_{corr} \geqslant 1500$.

Question 6 L'évolution de la réponse du système est-elle cohérente avec le comportement du modèle retenu ? Justifier. Quelle modification faudrait-il apporter au modèle approché pour retrouver cette forme de réponse temporelle ?

Correction

L'allure de la réponse ne correspond pas à celle d'un système du 1er ordre car un dépassement est observé. Avec $K_{corr} = 1500$, le système en boucle ouverte ne peut plus être modélisé par un intégrateur pur de gain K_{BO}, en effet cette valeur élevée de K_{corr} fait monter la courbe de gain, le système a une bande passante plus élevée et l'action du terme $\frac{1}{1+T_2.p}$ ne peut plus être négligée. Le comportement du système doit donc être modélisé par celui d'un système du second ordre pour se rapprocher du comportement observé.

Question 7 Quelle valeur maximale de K_{corr}, notée K_{corr}^{MAX}, permet de vérifier les critères de précision et de dépassement de l'asservissement de l'axe linéaire ?

Correction

Le critère de précision est satisfait du fait de la présence du terme intégrateur en $\frac{1}{p}$ dans la fonction de transfert en boucle ouverte du système.
Pour assurer un 1er dépassement $D1\% \leq 5\%$, il faut que le système du second ordre ait un coefficient d'amortissement z, tel que $z \geqslant 0,7$. On détermine l'expression de $H_{BF}(p)$, la fonction de transfert en boucle fermée, afin d'identifier z.
D'après la formule de Black, $H_{BF}(p) = \frac{K_{corr}.H_{BO}(p)}{1+K_{corr}.H_{BO}(p)} = \frac{K_{corr}.K_{BO}}{K_{corr}.K_{BO}+p.(1+\tau_{BO}.p)}$.
La forme canonique de $H_{BF}(p)$ est donc : $H_{BF}(p) = \frac{1}{1+\frac{1}{K_{corr}.K_{BO}}.p+\frac{\tau_{BO}}{K_{corr}.K_{BO}}.p^2}$

Par identification, $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr}.K_{BO}}{\tau_{BO}}}$ et $z = \frac{1}{2}.\omega_0.\frac{1}{K_{corr}.K_{BO}}$, donc, $z = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{\tau_{BO}.K_{corr}.K_{BO}}}$. La condition $z \geqslant 0,7$ implique donc $K_{corr} \leq \frac{1}{(2\times0,7)^2.\tau_{BO}.K_{BO}}$. L'application numérique donne $K_{corr} \leq 1700$. On prend donc $K_{corr}^{MAX} = 1700$.

Question 8 Déterminer la valeur du temps de réponse à 5 %, $t_{r5\%}$ de ce modèle pour $K_{corr} = K_{corr}^{MAX}$ à partir de l'abaque du temps de réponse réduit donné ci-dessous.

Correction

D'après l'abaque du temps de réponse réduit donné en **??**, pour $z = 0,7$ on relève $tr_{5\%}.\omega_0 \simeq 3$.
Or $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_{\text{corr}}^{\text{MAX}}.K_{\text{BO}}}{\tau_{\text{BO}}}}$, donc $tr_{5\%} = 3.\sqrt{\dfrac{\tau_{\text{BO}}}{K_{\text{corr}}^{\text{MAX}}.K_{\text{BO}}}}$.
L'application numérique donne : $tr_{5\%} \simeq 38$ ms < 60 ms $\Rightarrow$ cdcf vérifié !

Question 9 Conclure sur les capacités de la correction à action proportionnelle pure vis-à-vis des performances à atteindre.

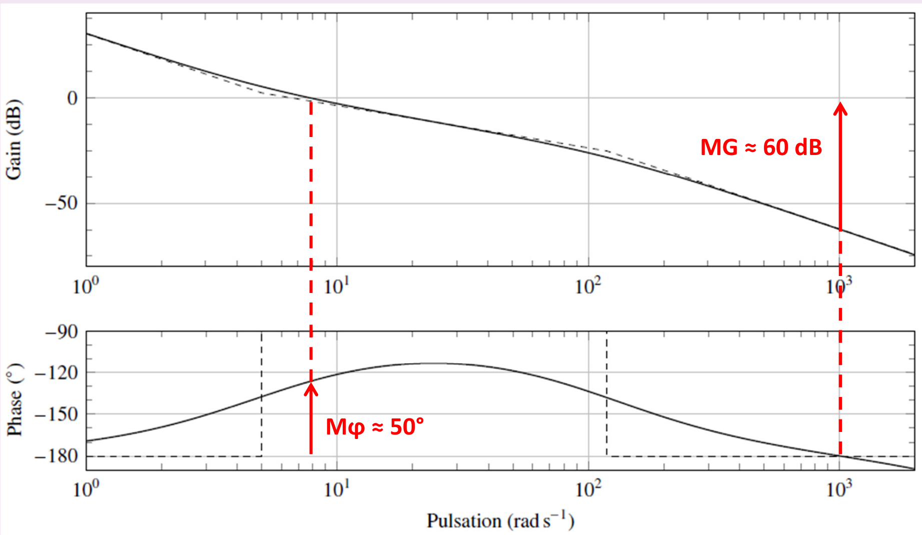
Correction

Les performances de stabilité, rapidité et de 1er dépassement sont vérifiées. Cependant, le système avec correction proportionnelle n'arrive pas à atténuer suffisamment la perturbation (l'erreur est de l'ordre de 15 à 20% bien supérieure au 5% du cahier des charges). Un autre type de correction doit donc être envisagé pour satisfaire l'ensemble des critères.

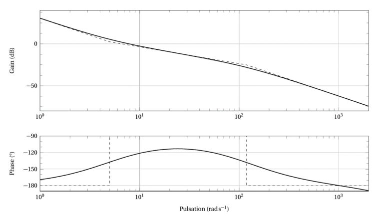
Question 10 Représenter sur le document réponse les marges de Gain M_G et de Phase M_ϕ du système corrigé.

Correction

D'après la figure ci-dessous, on relève une marge de Gain $M_G \simeq 60$ dB et une marge de Phase $M_\varphi \simeq 50^\circ$. Avec ces valeurs le cahier des charges ($M_G = 45$ dB et $M_\varphi = 35^\circ$) est vérifié.



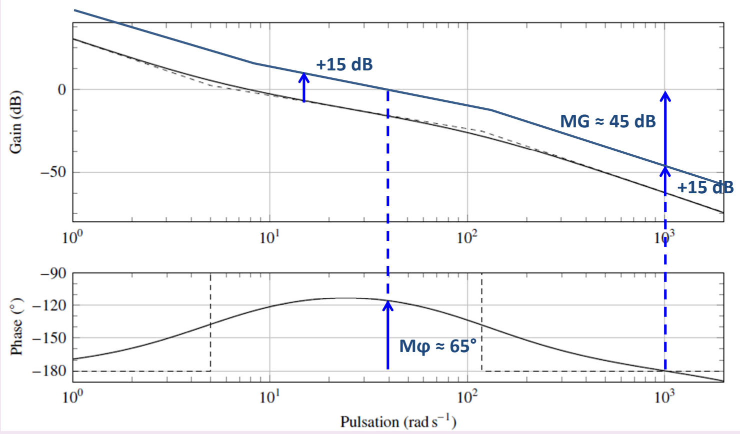
Question 11 En déduire la valeur maximale à donner au gain K_{corr}, en conservant $T_d = 0,2$ s, afin de respecter les performances en stabilité de l'asservissement de l'axe linéaire tout en augmentant au maximum la bande passante du système.



Correction

La modification de la valeur du gain K_{corr} n'affecte que la courbe de gain. L'augmentation de K_{corr} va faire remonter la courbe de gain du système en boucle ouverte. Graphiquement, on observe que c'est le critère sur la marge de Gain qui limite la remonté de la courbe de gain (voir figure ci-dessous). La courbe de gain peut donc être remontée de +15 dB, on relève alors une marge de Gain $M_G \simeq 45$ dB et une marge de Phase $M_\phi \simeq 65^\circ$.
Initialement on avait $K_{\text{corr}}^{\text{init}} = 1000$, pour remonter la courbe de gain de +15 dB, il faudra prendre $K_{\text{corr}}^{\text{new}}$ tel que :
$20 \times \log(K_{\text{corr}}^{\text{new}}) = 20 \times \log(K_{\text{corr}}^{\text{init}}) + 15$

$\Leftrightarrow K_{corr}^{new} = K_{corr}^{init} \times 10^{15/20}$
L'application numérique donne $K_{corr}^{new} \simeq 5620$.



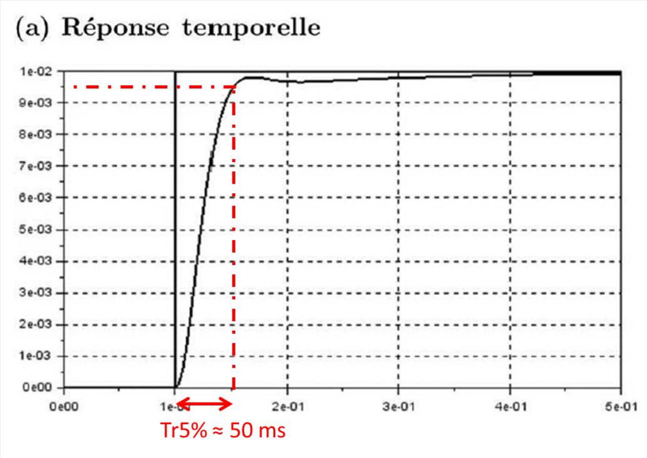
Question 12 Conclure sur les performances du système perturbé vis-à-vis des exigences de l'asservissement de l'axe linéaire. Commenter l'évolution de l'intensité simulée avec les caractéristiques de la carte de commande du moteur.

Correction

Avec cette correction la réponse temporelle respecte l'ensemble des critères du cahier des charges :

- le système est stable et $M_G \simeq 45$ dB et $M_\phi \simeq 65°$ $\Rightarrow$ cdcf vérifié ;
- le système est précis $\Rightarrow$ cdcf vérifié ;
- système ne présente pas de dépassement $\Rightarrow$ cdcf vérifié ;
- tr5% $\simeq$ 50 ms $\Rightarrow$ cdcf vérifié (< 60 ms).

Par contre, on relève un courant $I_{mot}^{MAX} \simeq 35$ A. Or la carte ELMO ne supporte qu'un courant maximal de 20 A. Le contrôleur ELMO ne permet donc pas de réaliser cette commande.



Synthèse – Étude de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche »

Question 13 Conclure sur l'influence de la correction de l'axe linéaire sur le respect de l'exigence de maintien de la hauteur de main.

Correction

Le cahier des charges (performance Id 7) impose un écart de hauteur de main de 3 cm pour un cycle de marche. Sans correction, l'écart peut atteindre jusqu'à 4,5 cm, avec correction l'écart est limité à 2,5 cm maxi ce qui vérifie le cdcf.
Avec correction les variations de hauteur de la main sont donc moins importantes au commencement de la phase d'appui. Ceci apporte un confort dans l'utilisation avec le sentiment d'avoir une canne plus rigide (moins d'affaissement) lors de l'appui.

Question 14 Conclure sur le réglage des paramètres d'asservissement mis en place vis-à-vis des performances liées à la synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.

Correction

Le cahier des charges stipule comme performance à atteindre pour l'assistance de la marche (cadre Id 7) :

- un écart maximal sur l'angle d'orientation entre la canne et la jambe de 20° ;
- le respect de l'exigence de suivi du pied, l'appui au sol de la canne doit se situer entre l'avant et l'arrière du pied de la jambe invalide.

Pour les deux allures de marche, l'exigence de suivi de pied est respectée car la courbe de position de la canne reste comprise entre les courbes de position de l'avant du pied et de l'arrière du pied (c'est à la limite de l'avant du pied pour le cas de la marche rapide).
Pour ce qui concerne l'exigence sur l'angle d'orientation, pour les deux allures l'exigence est respectée car les écarts restent inférieurs à 20°. Mise à part la phase d'appui en allure normale, l'orientation de la canne est en retard par rapport à l'orientation de la jambe, et ce retard est d'autant plus important que l'allure de la marche est élevée.
On peut donc conclure que ce réglage des paramètres d'asservissement permet de satisfaire les performances liées à la synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.