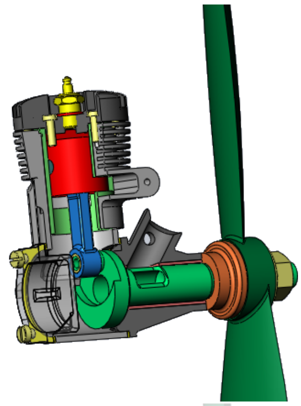
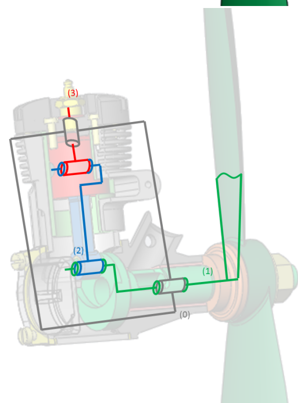
Application 1
Micromoteur d'un avion de modélisme – Corrigé

Mise en situation

La mise en mouvement d'une certaine catégorie d'avions de modélisme est assurée par un moteur thermique. La figure ci-dessous propose un éclaté d'un modèle 3D ainsi que le schéma cinématique associé.





On appelle :

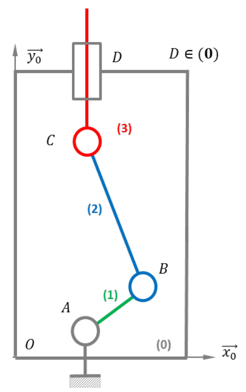
- **(0)** la bâti lié à la voilure de l'avion ;
- **(1)** le vilebrequin, solidaire de l'hélice de l'avion ;
- **(2)** la bielle ;
- **(3)** le piston.

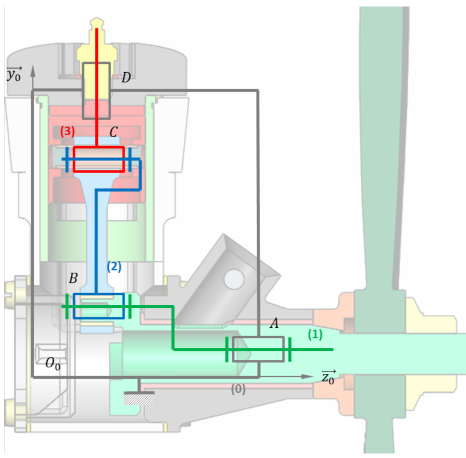
Objectif

- Déterminer la loi de position et de vitesse du piston pour avoir un taux de rotation du moteur de 9000 tr min^{-1}.
- Vérifier que l'accélération est inférieure à 10 000 m s^{-2}.

Modélisation

La modélisation par schéma cinématique est donnée dans le schéma ci-dessous.

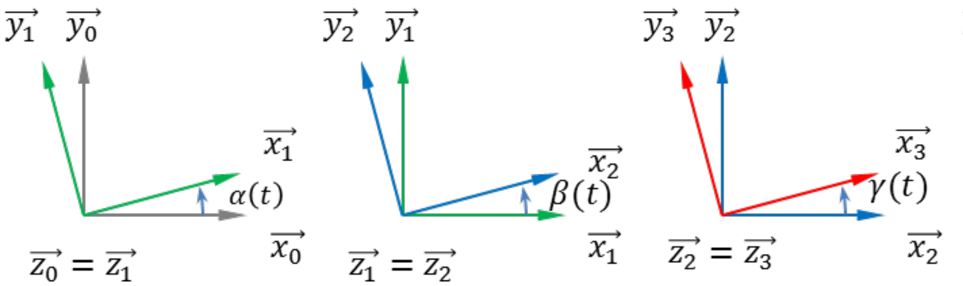




On appelle :

- $\mathcal{R}_0 = \left(A, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ le repère lié au bâti **(0)** ;
- $\mathcal{R}_1 = \left(A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0}\right)$ le repère lié au vilebrequin **(1)** avec $\alpha(t) = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right)$;
- $\mathcal{R}_2 = \left(B, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_0}\right)$ le repère lié à la bielle **(2)** avec $\beta(t) = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right)$ avec $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{x_1} = e$ et $e = 5{,}25$ mm ;
- $\mathcal{R}_3 = \left(C, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_0}\right)$ le repère lié au piston **(3)** avec $\gamma(t) = \left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}\right)$ avec $\overrightarrow{BC} = L\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{y_0} = \lambda(t)$ et $L = 23{,}9$ mm.

Les figures planes de changement de repère sont données ci-dessous :



Question 1 Tracer le graphe de structure. Définir le nombre de cycles, la mobilité du mécanisme et le nombre de degrés de liberté de chacune des liaisons en 2D et en 3D.

Question 2 Préciser la variable d'entrée ainsi que la variable de sortie du système.

Question 3 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique du système.

Correction

Dans le cas d'un système bielle-manivelle comme le moteur de modélisme, on veut connaître la vitesse de rotation de l'hélice $\dot{\alpha}(t)$ en fonction de la vitesse de translation du piston $\dot{\lambda}(t)$. La fermeture géométrique est donc la suivante :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}.$$

Le mécanisme étant plan dans le plan $\left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}\right)$, on ne tient pas compte des distances suivant $\overrightarrow{z_0}$ et on a :

$$e\overrightarrow{x_1} + L\overrightarrow{x_2} - \lambda(t)\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0}.$$

Exprimons $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ dans la base $\mathcal{R}_0$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{x_1} & = & \cos\alpha(t)\overrightarrow{x_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{x_2} & = & \cos\beta(t)\overrightarrow{x_1} + \sin\beta(t)\overrightarrow{y_1} \\ & = & \cos\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{x_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{y_0}\right) + \sin\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{y_0} - \sin\alpha(t)\overrightarrow{x_0}\right) \end{array}\right.$$

On peut aussi observer que directement $\overrightarrow{x_2} = \cos\left(\alpha(t) + \beta(t)\right)\overrightarrow{x_0} + \sin\left(\alpha(t) + \beta(t)\right)\overrightarrow{y_0}$.
En projetant l'équation vectorielle sur $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} e\cos\alpha + L\cos(\alpha+\beta) = 0 \\ e\sin\alpha + L\sin(\alpha+\beta) - \lambda = 0 \end{array}\right.$$

On cherche à éliminer à $\alpha + \beta$:

$$\left\{\begin{array}{l} L\cos(\alpha+\beta) = -e\cos\alpha \\ L\sin(\alpha+\beta) = \lambda - e\sin\alpha \end{array}\right.$$

En passant au carré et en sommant les deux expressions, on a donc :

$$L^2 = e^2\cos^2\alpha + \lambda^2 + e^2\sin^2\alpha - 2\lambda e\sin\alpha = e^2 + \lambda^2 - 2\lambda e\sin\alpha.$$

Et donc :

$$\lambda^2 - 2\lambda e\sin\alpha + e^2 - L^2 = 0$$

On a $\Delta = 4e^2\sin^2\alpha - 4\left(e^2 - L^2\right)$ et $\lambda = \dfrac{2e\sin\alpha \pm \sqrt{4e^2\sin^2\alpha - 4\left(e^2 - L^2\right)}}{2} = e\sin\alpha \pm \sqrt{e^2\sin^2\alpha - \left(e^2 - L^2\right)}$.
Au final,

$$\lambda(t) = e\sin\alpha(t) + \sqrt{e^2\sin^2\alpha(t) - \left(e^2 - L^2\right)}$$

Question 4 Déterminer la loi entrée-sortie cinématique du système.

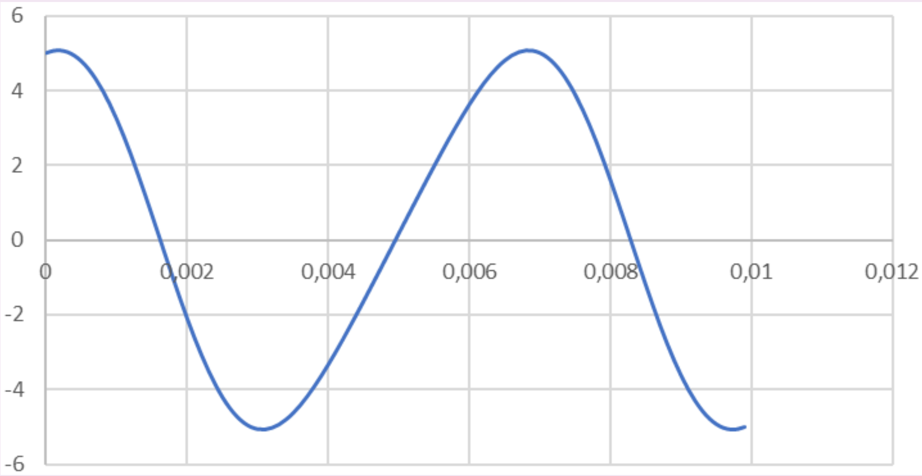
Correction

Il suffit de dériver l'expression précédente :

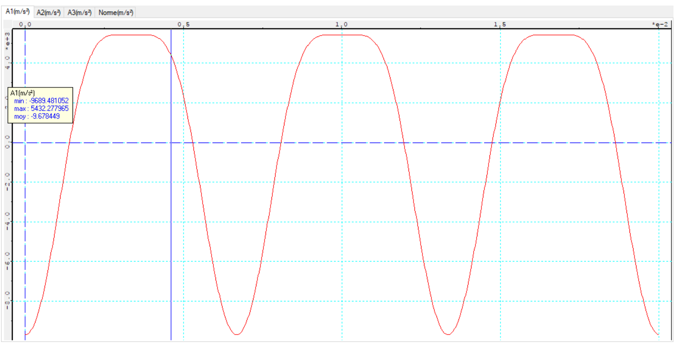
$$\lambda(t) = e\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t) + \frac{1}{2}\left(2e^2\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\cos\alpha(t)\right)\left(e^2\sin^2\alpha(t) - \left(e^2 - L^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Question 5 Tracer l'allure de la loi de vitesse du piston.

Correction



Une simulation réalisée sous Méca3D permet d'obtenir l'évolution de l'accélération du piston :



Question 6 Conclure vis-à-vis du cahier des charges.