CI 2 – SLCI : ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS

CHAPITRE 7 – RÉPONSES HARMONIQUES – DIAGRAMMES DE BODE

Savoir

Savoirs :
– Mod.

Ce document évolue. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1 Présentation

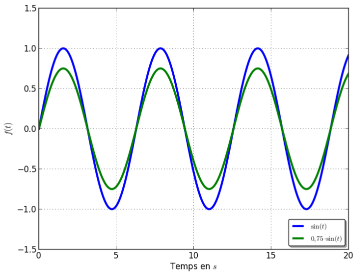
1.1 Caractérisation d'un signal sinusoïdal

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme suivante :

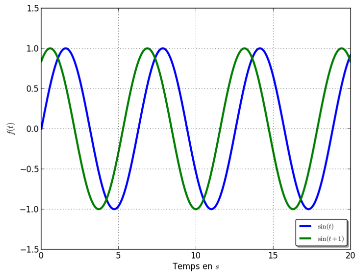
$$f(t) = A\sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

et on note :
- A : l'amplitude de la sinusoïde ;
- ω : la pulsation en rad/s ;
- φ : la phase à l'origine en rad.

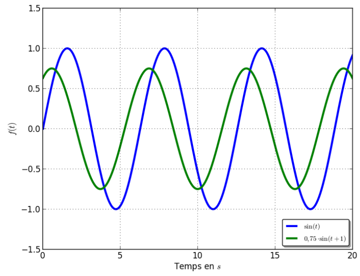
On a par ailleurs :
- $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: la période de la sinusoïde en s ;
- $f = \dfrac{1}{T}$: fréquence de la sinusoïde en Hz.



Sinus amplifiés



Sinus déphasés



Sinus amplifiés et déphasés

1.2 Réponse temporelle d'un système d'ordre 1 à une entrée sinusoïdale

Soit un système du premier ordre de la forme $H(p) = \dfrac{1}{1+\tau p}$. Le gain de la fonction de transfert est donc de 1 et la constante de temps est de 1 seconde.

Calculons la réponse temporelle $s(t)$ d'un premier ordre à une entrée sinusoïdale $e(t) = E_0 \sin(\omega_0 t)$. Dans le domaine de Laplace, on a $E(p) = E_0 \dfrac{\omega_0}{\omega_0^2 + p^2}$. $S(p)$ s'exprime donc sous la forme suivante :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + p^2} \cdot \frac{K}{1+\tau p} = K E_0 \omega_0 \left(\frac{1}{\omega_0^2 + p^2} \cdot \frac{1}{1+\tau p} \right)$$

En réalisant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

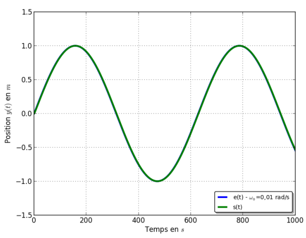
$$s(t) = \frac{K E_0}{1+\tau^2 \omega_0^2} \left(\tau \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau \omega_0 \cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) \right)$$

Définition

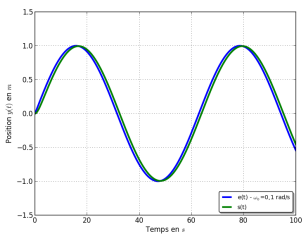
Réponse harmonique

On appelle réponse harmonique la sortie d'un système lorsqu'il est soumis à une entrée sinusoïdale. Elle permet de caractériser le comportement dynamique du système.

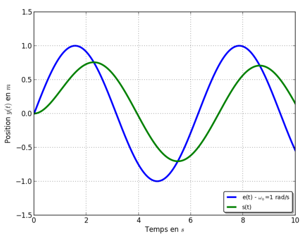
On donne les réponses temporelles pour plusieurs valeurs de la pulsation du signal d'entrée (**attention : les échelles des abscisses ne sont pas les mêmes sur chacune des figures**).



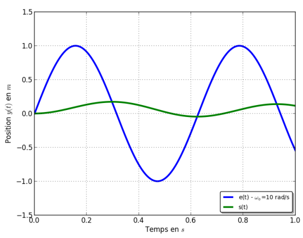
$\omega_0 = 0{,}01\ rad/s - T = 200\pi\ s$



$\omega_0 = 0{,}1\ rad/s - T = 20\pi\ s$



$\omega_0 = 1\ rad/s - T = 2\pi\ s$



$\omega_0 = 10\ rad/s - T = 0{,}2\pi\ s$

On constate que quand la pulsation du signal augmente, on observe un déphasage entre le signal d'entrée et le signal de sortie ainsi qu'une atténuation du signal de sortie.

2 Diagrammes de Bode

2.1 Calcul complexe

Lorsque le système est soumis à une entrée sinusoïdale, la variable de la Laplace p est substituée par $j\omega$. $H(j\omega)$ est appelée réponse en fréquence ou réponse harmonique du système.

Résultat

On rappelle que si $H(j\omega) = \dfrac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}$, alors :

- on appelle $A(\omega) = |H(j\omega)|$ le module de H (ou le gain de H) et on a :

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

- on appelle $\varphi(\omega) = Arg(H(j\omega))$ l'argument de H (ou la phase de H) et on a :

$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{y_1}{x_1} - \arctan\frac{y_2}{x_2}$$

Remarque

On appelle Adb le gain en décibel et on a :

$$Adb(\omega) = 20\log A(\omega)$$

Exemple

Soit $H(p)$ une fonction de transfert d'ordre 1 :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1+\tau j\omega}$$

On a alors :

$$Adb(\omega) = 20\log\left(\frac{\sqrt{K^2}}{\sqrt{1^2+(\tau\omega)^2}}\right) = 20\log K - 10\log\left(1+\tau^2\omega^2\right)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{0}{K} - \arctan\frac{\tau\omega}{1} = -\arctan\tau\omega$$

2.2 Définition

Définition

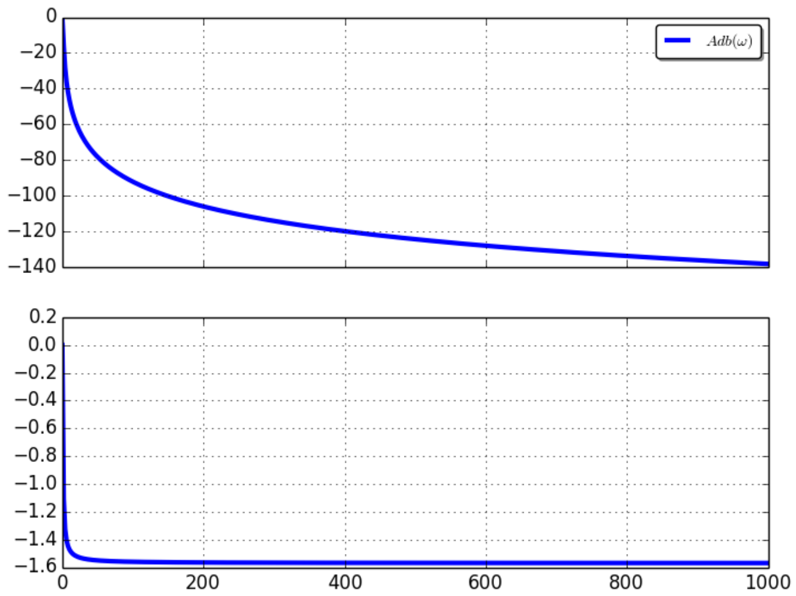
Diagrammes de Bode

Les diagrammes de Bode représentent deux courbes sur deux diagrammes distincts dans des repère semi logarithmiques :

- la courbe de gain en décibel en fonction de la pulsation ω ;
- la courbe de phase (en degrés ou radians) en fonction de la pulsation ω.

2.2.1 Tracé des diagrammes de Bode

Le tracé de Bode comprend toujours le diagramme de gain superposé avec le diagramme de phase. Dans le cas du premier ordre, la représentation directe du diagramme de Bode serait la suivante :



On remarque de fortes variations de la courbe lorsque ω est petit. En conséquences, on choisit usuellement de représenter les diagrammes de Bode dans un repère semi logarithmique.

2.3 Représentation d'un système asservi

Généralement, une fonction de transfert s'écrit sous la forme d'un produit de fonction rationnelles. Ainsi, notons $H(j\omega) = F(j\omega) \cdot G(j\omega)$.

On montre que le gain décibel de H est sous la forme :

$$Adb(\omega) = 20\log|F(j\omega)| + 20\log|G(j\omega)|$$

et que la phase est sous la forme :

$$Adb(\omega) = Arg\left(F(j\omega)\right) + Arg\left(G(j\omega)\right)$$

Ainsi pour tracer le gain et la phase d'une fonction de transfert s'exprimant sous la forme de produit de fonctions de transfert élémentaire, il suffit de tracer les fonctions de transfert élémentaire dans les diagrammes de Bode puis de les sommer.

3 Réponse harmonique d'un gain

4 Réponse harmonique d'un intégrateur

4.1 Réponse harmonique système proportionnel intégral

5 Réponse harmonique d'un système du premier ordre

6 Réponse harmonique d'un système du second ordre

6.1 Cas où $\xi > 1$

6.2 Cas où $\xi = 1$

6.3 Cas où $\xi < 1$

7 Réponse harmonique d'un système asservi

Références