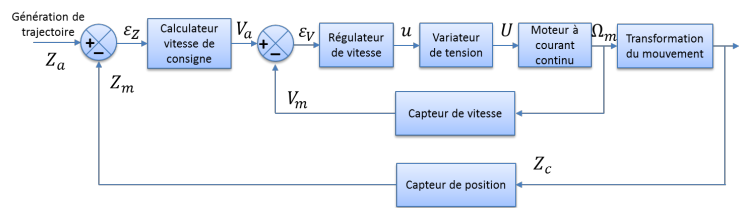


# CI 2 – SLCI : ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS

## CHAPITRE 6 – ÉTUDE DES PERFORMANCES DES SYSTÈMES COMPLEXES – PRÉCISION – STABILITÉ



DMU 60 eVo Linear  
Centre d'usinage 5 axes continus[1]



Modélisation par schéma bloc  
d'un axe numérique asservi [2]

### PROBLÉMATIQUE :

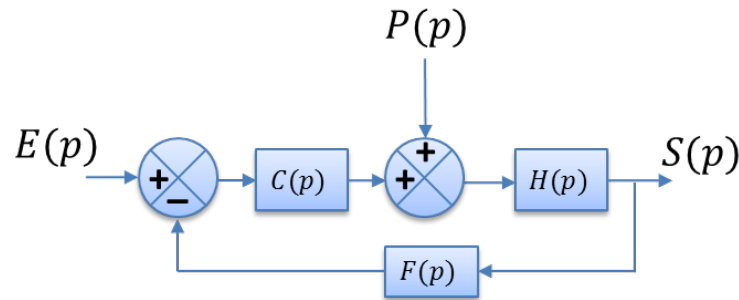
- La modélisation de systèmes multiphysiques donne lieu à des schémas bloc de plus en plus complexes. Comment améliorer la performance de ces systèmes en vue d'améliorer la rapidité, la stabilité ou la précision ?

*Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.*

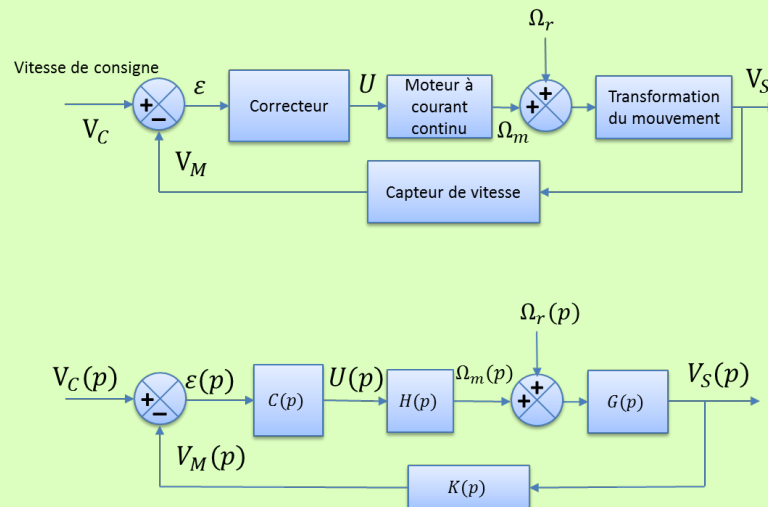
1	Introduction .....	1
2	Étude du modèle sans perturbation .....	2
2.1	Entrée échelon .....	3
2.2	Entrée rampe .....	4
2.3	Entrée en accélération .....	4
2.4	Bilan .....	4
3	Étude du système soumis à une perturbation .....	5
4	Étude de la stabilité des systèmes .....	6
4.1	Système d'ordre 1 .....	6
4.2	Système d'ordre 2 .....	6

## 1 Introduction

On s'intéresse à un système asservi classique. Les contraintes à respecter vis-à-vis du cahier des charges sont des contraintes de stabilité, rapidité et de précision.



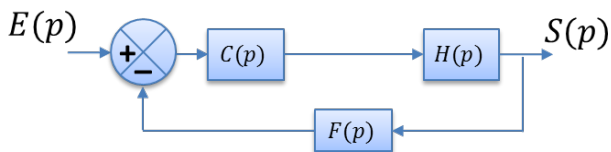
Pour modéliser l'axe asservi d'une machine outil la modélisation suivante :



Exemple

On prendra  $K(p) = 1$ ,  $H(p)$  une fonction de transfert du premier ordre de gain  $K_M$  et de constante de temps  $\tau$ ,  $G(p) = \frac{K_T}{p}$  combine à la fois la transformation d'une vitesse de rotation en une vitesse de translation puis une position en translation.  $C(p)$  est un correcteur de la forme  $C(p) = K_C$ .

## 2 Étude du modèle sans perturbation



Dans ces conditions, exprimons la fonction de transfert en boucle fermée, la fonction de transfert en boucle ouverte et la précision du système :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)F(p)}$$

$$FTBO(p) = C(p) \cdot H(p) \cdot F(p)$$

Dans tous les cas,  $FTBO(p)$  est une fraction rationnelle et peut s'écrire sous la forme suivante :

$$FTBO(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K(1 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_m p^m)}{p^\alpha(1 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_n p^n)}$$

Remarque

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} \cdot E(p) = \frac{1}{1 + C(p) \cdot H(p) \cdot F(p)}$$

La précision du système dépend des caractéristiques de la FTBO. On note  $K$  son gain et  $\alpha$  sa classe.

Exprimons l'erreur du système :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + FTBO(p)} \cdot E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha}} \cdot E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot E(p)$$

On considère la perturbation nulle. La fonction de transfert du moteur est de la forme  $H(p) = \frac{K_M}{1 + \tau p}$ .

On a donc :

$$FTBF(p) = \frac{K_C \cdot \frac{K_M}{1 + \tau p} \cdot K_T}{1 + K_C \cdot \frac{K_M}{1 + \tau p} \cdot K_T} = \frac{K_C K_M K_T}{(1 + \tau p) + K_C K_M K_T}$$

$$FTBO(p) = K_C \cdot \frac{K_M}{1 + \tau p} \cdot K_T$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \frac{K_C K_M K_T}{1 + \tau p}} \cdot E(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + \tau p + K_C K_M K_T} \cdot E(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{\frac{1}{1 + K_C K_M K_T} (1 + \tau p)}{1 + \frac{1}{1 + K_C K_M K_T} p} \cdot E(p)$$

Exemple

## 2.1 Entrée échelon

Dans ce cas :

$$\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 p^\alpha}{p^\alpha + K}$$

Ainsi :

- si  $\alpha = 0$  :  $\varepsilon_S = \frac{E_0}{1 + K}$ . Le système est donc plus précis lorsque le gain  $K$  de la FTBO augmente ;
- si  $\alpha > 0$  :  $\varepsilon_S = 0$ . L'écart statique est donc nul quel que soit  $K$ .

Exemple

$$\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{1}{1 + K_C K_M K_T} (1 + \tau p)}{1 + \frac{\tau}{1 + K_C K_M K_T} p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{1 + K_C K_M K_T}$$

Pour augmenter la précision statique, il faut augmenter le gain du correcteur proportionnel  $K_C$ .

## 2.2 Entrée rampe

Dans ce cas :

$$\varepsilon_V = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p}$$

Ainsi :

- si  $\alpha = 0$  :  $\varepsilon_S = \infty$ . Le système est donc instable ;
- si  $\alpha = 1$  :  $\varepsilon_S = \frac{E_0}{K}$ . L'écart de trainage diminue lorsque  $K$  augmente ;
- si  $\alpha > 1$  :  $\varepsilon_S = 0$ . L'écart de trainage est nul.

Exemple

$$\varepsilon_V = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{1}{1 + K_C K_M K_T} (1 + \tau p)}{1 + \frac{\tau}{1 + K_C K_M K_T} p} \cdot \frac{1}{p^2} = +\infty$$

Le système est donc instable lorsqu'il est soumis à une rampe. Utiliser un correcteur intégral de la forme  $C(p) = \frac{K_C}{p}$  permettrait de stabiliser le système. En augmentant alors  $K_C$ , on réduirait l'erreur de traînage.

## 2.3 Entrée en accélération

Dans ce cas :

$$\varepsilon_A = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \cdot \frac{E_0}{p^2}$$

Ainsi :

- si  $\alpha = 0$  :  $\varepsilon_A = \infty$ . Le système est donc instable ;
- si  $\alpha = 1$  :  $\varepsilon_A = \infty$ . Le système est donc instable ;
- si  $\alpha = 2$  :  $\varepsilon_A = \frac{E_0}{K}$ . L'écart diminue lorsque  $K$  augmente.

## 2.4 Bilan

La précision d'un système dépend du gain  $K$  et de la classe  $\alpha$  de la FTBO.

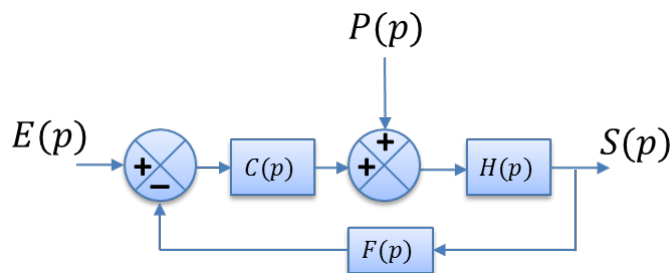
$e(t)$	$E(p)$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Échelon	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1+K}$	0	0
Rampe	$\frac{1}{p^2}$	$\infty$	$\frac{1}{K}$	0
Accélération	$\frac{1}{p^3}$	$\infty$	$\infty$	$\frac{1}{K}$

Résultat

Remarque

On montre en deuxième année que l'augmentation de  $K$  ou de la classe peut être cause d'instabilité.

## 3 Étude du système soumis à une perturbation



Exprimons l'erreur du système soumis à perturbation en fonction des deux entrées :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(p) &= E(p) - S(p) \cdot F(p) \\
 &= E(p) - (P(p) + \varepsilon(p)C(p)) \cdot F(p)H(p) \\
 &= E(p) - P(p)F(p)H(p) - \varepsilon(p)C(p)F(p)H(p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \quad \varepsilon(p)(1 + C(p)F(p)H(p)) &= E(p) - P(p)F(p)H(p) \\
 \Leftrightarrow \quad \varepsilon(p) &= \frac{E(p) - P(p)F(p)H(p)}{1 + C(p)F(p)H(p)} \\
 \Leftrightarrow \quad \varepsilon(p) &= \frac{1}{1 + C(p)F(p)H(p)} E(p) - \frac{F(p)}{1 + C(p)F(p)H(p)} P(p)
 \end{aligned}$$

Cas 1 :  $C(p) = K_C$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + G(p)H(p)C(p)} V_c(p) - \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)C(p)} \Omega_r(p)$$

Exemple

Exemple

$$\varepsilon(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p} V_c(p) - K_T \frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p} \Omega_r(p)$$

Le système est soumis à une consigne échelon d'amplitude  $E_c$  et à une perturbation échelon d'amplitude  $E_p$ . Dans ce cas,

$$\varepsilon(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p} \frac{E_c}{p} - K_T \frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p} \frac{E_p}{p}$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p} E_c - K_T \frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p} E_p$$

$$\varepsilon_S = \frac{E_c - K_T E_p}{1 + K_T K_M K_C}$$

L'augmentation du gain du correcteur permet de diminuer l'écart statique.

Exemple

$$\text{Cas 2 : } C(p) = \frac{K_C}{p}$$

## 4 Étude de la stabilité des systèmes

Il ne s'agit pas ici de faire une étude exhaustive de la stabilité des systèmes asservis, mais d'avoir une idée sur un des critères de stabilité

### 4.1 Système d'ordre 1

Soit un système du premier ordre sous sa forme canonique :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Sa réponse temporelle à une entrée échelon d'amplitude  $E_0$  est donnée par :

$$s(t) = E_0 K \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Le système est instable si  $\tau$  est négatif.

### 4.2 Système d'ordre 2

Soit un système du second ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} = \frac{K \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2 p^2}$$

On le sollicite par un échelon d'amplitude  $E_0$ . En conséquence,  $E(p) = \frac{E_0}{p}$  et on a :

$$S(p) = \frac{E_0}{p} \cdot \frac{K \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2 p^2}$$

#### 4.2.1 Cas où $\xi > 1$

Dans ce cas,  $\omega_0^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2 p^2$  peut se factoriser sous la forme  $(p - p_1) \cdot (p - p_2)$  avec  $p_1 = -\xi \omega_0 + \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$  et  $p_2 = -\xi \omega_0 - \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$ .

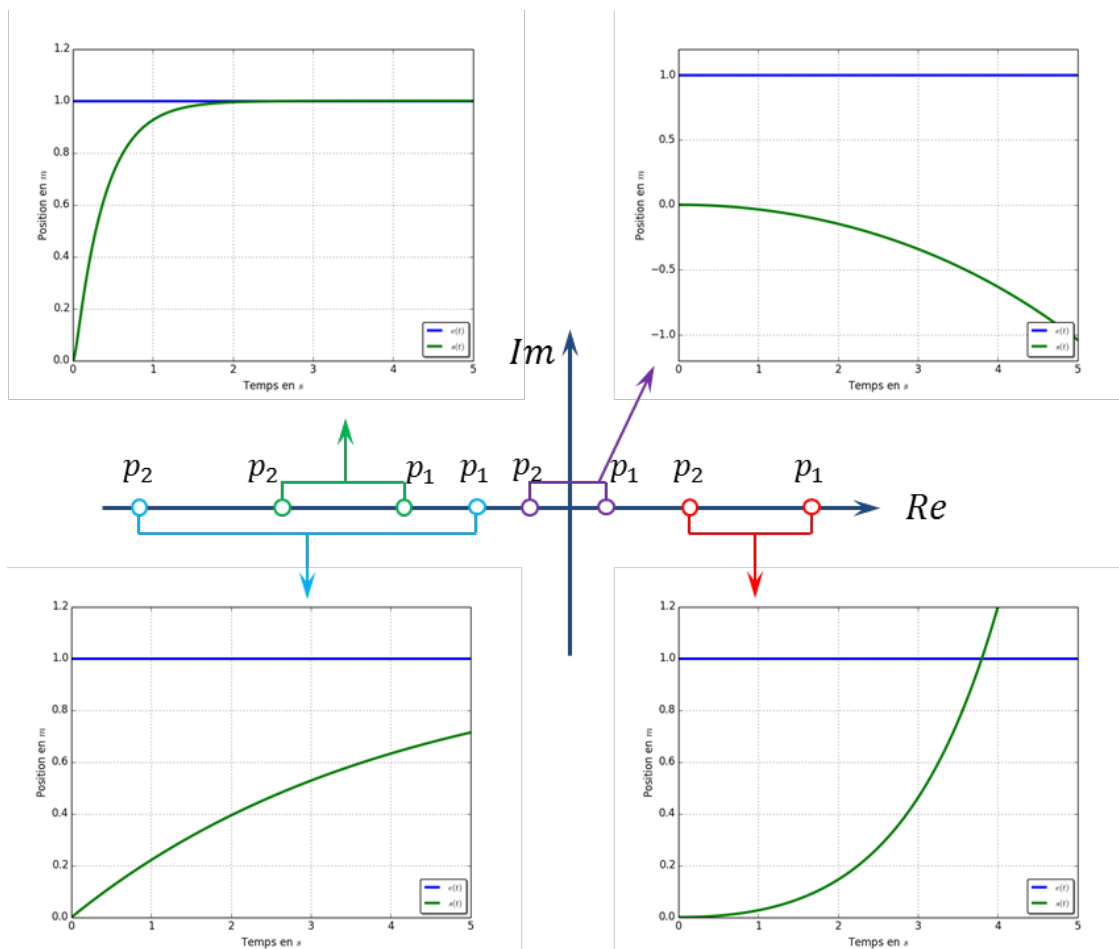
On montre donc que :

$$S(p) = \frac{K E_0}{p} + \frac{K E_0 p_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{K E_0 p_1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{1}{p - p_2}$$

Et alors,

$$s(t) = K E_0 \left( 1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \cdot e^{p_2 t} \right) \cdot u(t)$$

Dans ce cas,



#### 4.2.2 Cas où $\xi = 1$

Dans ce cas,  $\omega_0^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2 p^2$  se met sous la forme  $(p - p_1)^2$  avec  $p_1 = -\omega_0$ .

On montre donc que :

$$S(p) = \frac{K E_0}{p} - \frac{K E_0}{p - p_1} - \frac{K E_0 \omega_0}{(p - p_1)^2}$$

Et alors,

$$s(t) = K E_0 (1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}) \cdot u(t)$$

#### 4.2.3 Cas où $\xi < 1$

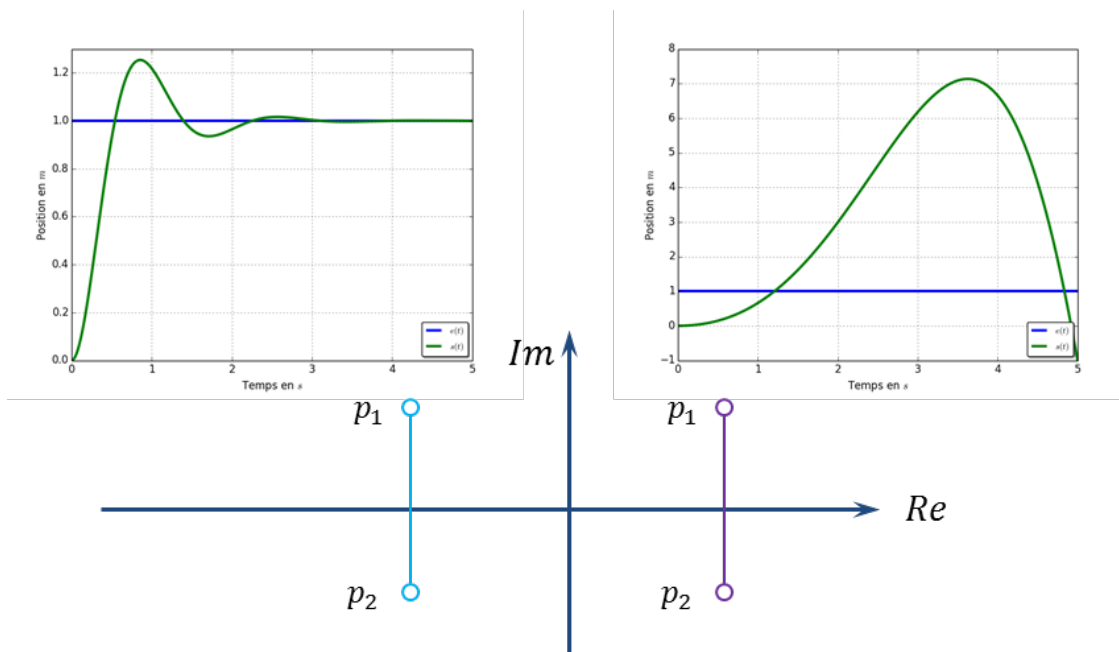
Dans ce cas,  $\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 p^2$  peut se factoriser sous la forme  $(p - p_1) \cdot (p - p_2)$  avec  $p_1 = -\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$  et  $p_2 = -\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ .

On montre donc que :

$$S(p) = K E_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{p + \xi\omega_0}{(p + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-\xi^2)} - \frac{\xi\omega_0}{(p + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-\xi^2)} \right)$$

Et alors,

$$s(t) = K E_0 \left( 1 - e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \cos(t\omega_0\sqrt{1-\xi^2}) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \sin(t\omega_0\sqrt{1-\xi^2}) \right) \cdot u(t)$$



Résultat

On montre qu'un système est stable si les pôles de la FTBF sont à partie réelle **strictement négative**.

## Références

[1] DMU 60 eVo linear, DMG – Deckel Maho – Gildemeiseter, <http://fr.dmg.com>.



- [2] Programmation des machines-outils à commande numérique (MOCN), *Étienne Lefur et Christophe Sohier*, École Normale Supérieure de Cachan, <http://etienne.lefur.free.fr/>.
- [3] SLCI : Systèmes asservis en boucle fermée : stabilité et précision, *Joël Boiron*, PTSI – Lycée Gustave Eiffel de Bordeaux.