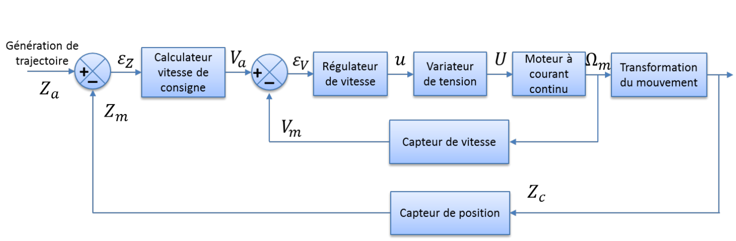
# CI 2 – SLCI : Étude du comportement des Systèmes Linéaires Continus Invariants

## Chapitre 6 – Étude des performances des systèmes complexes – Précision – Stabilité

*DMU 60 eVo Linear*
*Centre d'usinage 5 axes continus*[1]




*Modélisation par schéma bloc*
*d'un axe numérique asservi* [2]

Problématique :
- La modélisation de systèmes multiphysiques donne lieu à des schémas bloc de plus en plus complexes. Comment améliorer la performance de ces systèmes en vue d'améliorer la rapidité, la stabilité ou la précision ?

*Savoir*

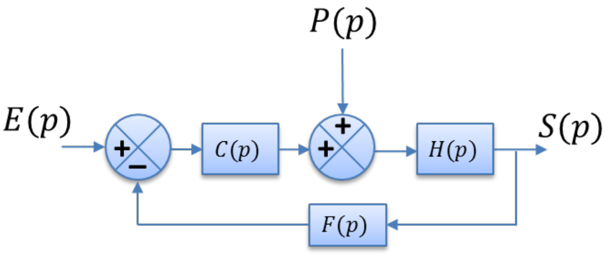
**Savoirs :**
- Mod
  - Mod
  - Mod

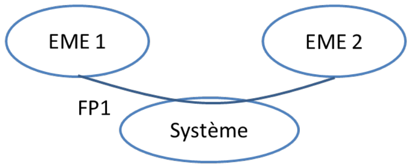
*Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.*

1 Introduction . . . . . 1
2 Étude du modèle sans perturbation . . . . . 2
  2.1 Entrée échelon . . . . . 3
  2.2 Entrée rampe . . . . . 4
  2.3 Entrée en accélération . . . . . 4
  2.4 Bilan . . . . . 4
3 Étude du système soumis a une perturbation . . . . . 5

# 1 Introduction

On s'intéresse à un système asservi classique. Les contraintes à respecter vis-à vis du cahier des charges sont des contraintes de stabilité, rapidité et de précision.

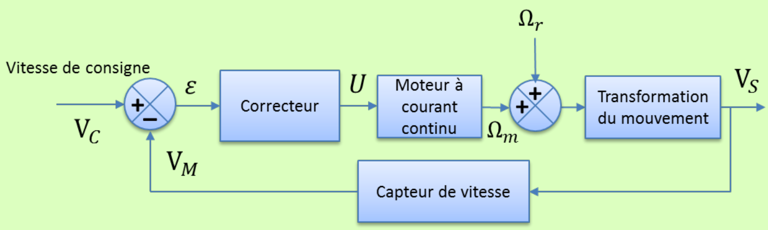


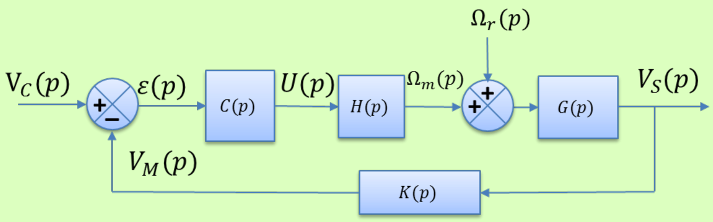




| Fonction | Intitulé | Critère | Niveau |
|---|---|---|---|
| FP1 | Agir sur ... | Stabilité | Stable |
| | | Précision | $\varepsilon_s \varepsilon_d$ |
| | | Rapidité | $t_{r5\%}$ |

Exemple

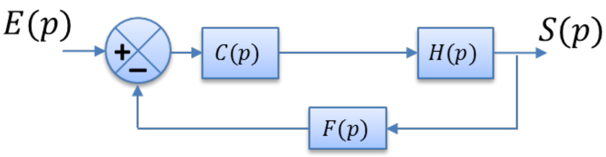
Pour modéliser l'axe asservi d'une machine outil la modélisation suivante :




On prendra $K(p)=1$, $H(p)$ une fonction de transfert du premier ordre de gain $K_M$ et de constante de temps $\tau$, $G(p)=\dfrac{K_T}{p}$ combine à la fois la transformation d'une vitesse de rotation en une vitesse de translation puis une position en translation. $C(p)$ est un correcteur de la forme $C(p)=K_C$.

## 2 Étude du modèle sans perturbation




Dans ces conditions, exprimons la fonction de transfert en boucle fermée, la fonction de transfert en boucle ouverte et la précision du système :

$$FTBF(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{C(p)H(p)}{1+C(p)H(p)F(p)}$$

$$FTBO(p)=C(p)\cdot H(p)\cdot F(p)$$

Dans tous les cas, $FTBO(p)$ est une fraction rationnelle et peut s'écrire sous la forme suivante :

$$FTBO(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{K\left(1+a_1p+a_2p^2+...+a_mp^m\right)}{p^\alpha\left(1+b_1p+b_2p^2+...+b_np^n\right)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+FTBO(p)} \cdot E(p) = \frac{1}{1+C(p)\cdot H(p)\cdot F(p)}$$

Remarque

La précision du système dépend des caractéristiques de la FTBO. On note $K$ son gain et $\alpha$ sa classe.

Exprimons l'erreur du système :

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{1}{1+FTBO(p)}\cdot E(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{1}{1+\dfrac{K}{p^\alpha}}\cdot E(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{p^\alpha}{p^\alpha+K}\cdot E(p)$$

Exemple

On considère la perturbation nulle. La fonction de transfert du moteur est de la forme $H(p) = \dfrac{K_M}{1+\tau p}$.

On a donc :

$$FTBF(p) = \frac{K_C\cdot\dfrac{K_M}{1+\tau p}\cdot K_T}{1+K_C\cdot\dfrac{K_M}{1+\tau p}\cdot K_T} = \frac{K_C K_M K_T}{(1+\tau p)+K_C K_M K_T}$$

$$FTBO(p) = K_C\cdot\frac{K_M}{1+\tau p}\cdot K_T$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+\dfrac{K_C K_M K_T}{1+\tau p}}\cdot E(p) = \frac{1+\tau p}{1+\tau p+K_C K_M K_T}\cdot E(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{\dfrac{1}{1+K_C K_M K_T}(1+\tau p)}{1+\dfrac{\tau}{1+K_C K_M K_T}p}\cdot E(p)$$

## 2.1 Entrée échelon

Dans ce cas :

$$\varepsilon_S = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\frac{p^\alpha}{p^\alpha+K}\cdot\frac{E_0}{p} = \lim_{p\to 0}\frac{E_0 p^\alpha}{p^\alpha+K}$$

Ainsi :

- si $\alpha = 0$ : $\varepsilon_S = \dfrac{E_0}{1+K}$. Le système est donc plus précis lorsque le gain $K$ de la FTBO augmente ;
- si $\alpha > 0$ : $\varepsilon_S = 0$. L'écart statique est donc nul quel que soit $K$.

Exemple

$$\varepsilon_S = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{\dfrac{1}{1+K_C K_M K_T}(1+\tau p)}{1+\dfrac{\tau}{1+K_C K_M K_T}p}\cdot\frac{1}{p} = \frac{1}{1+K_C K_M K_T}$$

Pour augmenter la précision statique, il faut augmenter le gain du correcteur proportionnel $K_C$.

## 2.2 Entrée rampe

Dans ce cas :

$$\varepsilon_V = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{p^\alpha}{p^\alpha+K}\cdot\frac{E_0}{p^2} = \lim_{p\to 0}\frac{p^\alpha}{p^\alpha+K}\cdot\frac{E_0}{p}$$

Ainsi :
- si $\alpha=0$ : $\varepsilon_S=\infty$. Le système est donc instable ;
- si $\alpha=1$ : $\varepsilon_S=\dfrac{E_0}{K}$. L'écart de trainage diminue lorsque $K$ augmente ;
- si $\alpha>1$ : $\varepsilon_S=0$. L'écart de trainage est nul.

Exemple

$$\varepsilon_V = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{\dfrac{1}{1+K_CK_MK_T}(1+\tau p)}{1+\dfrac{\tau}{1+K_CK_MK_T}p}\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{1+K_CK_MK_T}$$

Le système est donc instable lorsqu'il est soumis à une rampe. Utiliser un correcteur intégral de la forme $C(p)=\dfrac{K_C}{p}$ permettrait de stabiliser le système. En augmentant alors $K_C$, on réduirait l'erreur de traînage.

## 2.3 Entrée en accélération

Dans ce cas :

$$\varepsilon_A = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{p^\alpha}{p^\alpha+K}\cdot\frac{E_0}{p^3} = \lim_{p\to 0}\frac{p^\alpha}{p^\alpha+K}\cdot\frac{E_0}{p^2}$$

Ainsi :
- si $\alpha=0$ : $\varepsilon_A=\infty$. Le système est donc instable ;
- si $\alpha=1$ : $\varepsilon_A=\infty$. Le système est donc instable ;
- si $\alpha=2$ : $\varepsilon_A=\dfrac{E_0}{K}$. L'écart diminue lorsque $K$ augmente.

## 2.4 Bilan

Résultat

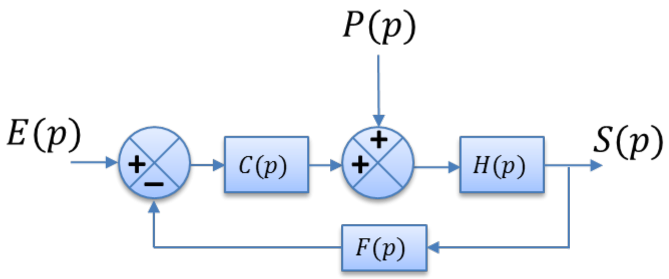
La précision d'un système dépend du gain $K$ et de la classe $\alpha$ de la FTBO.

| $e(t)$ | $E(p)$ | $\alpha=0$ | $\alpha=1$ | $\alpha=2$ |
|---|---|---|---|---|
| Échelon | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1}{1+K}$ | 0 | 0 |
| Rampe | $\frac{1}{p^2}$ | $\infty$ | $\frac{1}{K}$ | 0 |
| Accélération | $\frac{1}{p^3}$ | $\infty$ | $\infty$ | $\frac{1}{K}$ |

Remarque

On montre en deuxième année que l'augmentation de $K$ ou de la classe peut être cause d'instabilité.

# 3 Étude du système soumis a une perturbation




Exprimons l'erreur du système soumis à perturbation en fonction des deux entrées :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(p) &= E(p) - S(p)\cdot F(p) \\
&= E(p) - \big(P(p) + \varepsilon(p)C(p)\big)\cdot F(p)H(p) \\
&= E(p) - P(p)F(p)H(p) - \varepsilon(p)C(p)F(p)H(p)
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varepsilon(p)\big(1 + C(p)F(p)H(p)\big) = E(p) - P(p)F(p)H(p)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varepsilon(p) = \frac{E(p) - P(p)F(p)H(p)}{1 + C(p)F(p)H(p)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varepsilon(p) = \frac{1}{1 + C(p)F(p)H(p)}E(p) - \frac{F(p)}{1 + C(p)F(p)H(p)}P(p)$$

*Exemple*

Cas 1 : $C(p) = K_C$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + G(p)H(p)C(p)}V_c(p) - \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)C(p)}\Omega_r(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p}V_c(p) - K_T\frac{1 + \tau_p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p}\Omega_r(p)$$

Le système est soumis à une consigne échelon d'amplitude $E_c$ et à une perturbation échelon d'amplitude $E_p$. Dans ce cas,

$$\varepsilon(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p}\frac{E_c}{p} - K_T\frac{1 + \tau_p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p}\frac{E_p}{p}$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0}\frac{1 + \tau p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p}E_c - K_T\frac{1 + \tau_p}{1 + K_T K_M K_C + \tau p}E_p$$

$$\varepsilon_S = \frac{E_c - K_T E_p}{1 + K_T K_M K_C}$$

L'augmentation du gain du correcteur permet de diminuer l'écart statique.

Exemple

Cas 2 : $C(p)=\dfrac{K_C}{p}$

## Références

[1] DMU 60 eVo linear, *DMG – Deckel Maho – Gildemeiseter*, http://fr.dmg.com.

[2] Programmation des machines-outils à commande numérique (MOCN), *Étienne Lefur et Christophe Sohier*, École Normale Supérieure de Cachan, http://etienne.lefur.free.fr/.

[3] SLCI : Systèmes asservis en boucle fermée : stabilité et précision, *Joël Boiron*, PTSI – Lycée Gustave Eiffel de Bordeaux.