CI 3 – CIN : ÉTUDE DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES

CHAPITRE 7 – TORSEURS

TRAVAUX DIRIGÉS

D'après ressources ? ? ?

1 Carrousel au triple mouvement

Question 1
Exprimer $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ *et* $\overrightarrow{V(A\in 2/1)}$.

Corrigé

Les solides S_2 et S_1 sont en liaison pivot de centre O, d'angle β et d'axe $\overrightarrow{k_{21}}$. En conséquence en O, on a :

$$\{\mathscr{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot\beta \overrightarrow{k_{21}} \\ \overrightarrow{V(O,2/1)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot\beta \overrightarrow{k_{21}} \\ \overrightarrow{V(A,2/1)} = \overrightarrow{V(O,2/1)} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} \end{array} \right\}_A$$

$$\overrightarrow{V(A,2/1)} = -L\overrightarrow{i_2} \wedge \dot\beta \overrightarrow{k_{21^*}} = L\dot\beta \overrightarrow{j_2}$$

Question 2
Exprimer $\overrightarrow{\Omega(3/1)}$ *et* $\overrightarrow{V(C\in 3/1)}$.

Corrigé

Pour calculer la vitesse relative entre S_3 et S_1, il faut décomposer le torseur cinématique : $\{\mathscr{V}(3/1)\} = \{\mathscr{V}(3/2)\} + \{\mathscr{V}(2/1)\}$

Les solides S_3 et S_2 sont en liaison pivot de centre A, d'angle γ et d'axe $\overrightarrow{k_{321^*}}$; donc :

$$\{\mathscr{V}(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/2)} = \dot\gamma \overrightarrow{k_{321^*}} \\ \overrightarrow{V(A,3/2)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$$

On a donc :

$$\{\mathscr{V}(3/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/1)} = \left(\dot\beta + \dot\gamma\right) \overrightarrow{k_{321^*}} \\ \overrightarrow{V(A,3/1)} = L\dot\beta \overrightarrow{j_2} \end{array} \right\}_A$$

En conséquences,

$$\overrightarrow{V(C,3/1)} = \overrightarrow{V(A,3/1)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/1)} = L\dot\beta \overrightarrow{j_2} + \left(-R\overrightarrow{i_3} - h\overrightarrow{k_{1^*}}\right) \wedge \left(\dot\beta + \dot\gamma\right) \overrightarrow{k_{321^*}}$$

$$\overrightarrow{V(C,3/1)} = L\dot\beta \overrightarrow{j_2} + R\left(\dot\beta + \dot\gamma\right) \overrightarrow{j_3}$$

Question 3
Exprimer $\overrightarrow{V(G\in 4/1)}$.

En prenant un peu de recul, il n'est pas forcément indispensable d'écrire entièrement le torseur cinématique. Par exemple, dans le cas de $\overrightarrow{V(G,4/1)}$:

$$\overrightarrow{V(G,4/1)} = \overrightarrow{V(C,4/1)} + \overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{\Omega(4/1)} = \underbrace{\overrightarrow{V(C,4/3)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{V(C,3/1)} + \overrightarrow{GC} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega(4/1)}}_{\overrightarrow{\Omega(4/3)}+\overrightarrow{\Omega(3/1)}}$$

$$\overrightarrow{V(G,4/1)} = L\dot{\beta}\,\overrightarrow{j_2} + R\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{j_3} + e\,\overrightarrow{k_4} \wedge \left(\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{k_{321^*}} + \dot{\psi}\,\overrightarrow{j_{43}}\right)$$

On a :

$$\overrightarrow{k_4} \wedge \overrightarrow{k_{321^*}} = -\sin\psi\,\overrightarrow{j_{43}}$$

$$\overrightarrow{k_4} \wedge \overrightarrow{j_{43}} = -\overrightarrow{i_4}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{V(G,4/1)} = L\dot{\beta}\,\overrightarrow{j_2} + R\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{j_3} - e\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\sin\psi\,\overrightarrow{j_{43}} - e\dot{\psi}\,\overrightarrow{i_4}$$

$$\overrightarrow{V(G,4/1)} = L\dot{\beta}\,\overrightarrow{j_2} + \left(R - e\sin\psi\right)\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{j_3} - e\dot{\psi}\,\overrightarrow{i_4}$$

Corrigé

Le fût 1 est muni d'une poulie de diamètre D sur laquelle s'enroule une courroie qui entraîne en rotation la poulie de diamètre $D/2$ liée au disque 3 lors du mouvement de 2 par rapport à 1.

On a les hypothèses suivantes :

– non glissement entre la courroie et les poulies ;
– la courroie est inextensible.

De plus le siège 4 est bloqué dans la position $\psi = -\pi/2$ par rapport au disque 3.

Question 4
En utilisant les hypothèses précédentes, montrer que $\dot{\gamma} = -2\dot{\beta}$.

En considérant l'hypothèse de roulement sans glissement au point I, le point I est immobile lorsqu'on considère le mouvement de la courroie (notée c) par rapport à la poule 1 :

$$\overrightarrow{V(I,c/1)} = \overrightarrow{0}$$

En utilisant la décomposition du vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{V(I,c/1)} = \overrightarrow{V(I,c/2)} + \overrightarrow{V(I,2/1)}$$

En conséquence,

$$\overrightarrow{V(I,c/2)} = -\overrightarrow{V(I,2/1)}$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(I,2/1)} = \overrightarrow{V(O,2/1)} + \overrightarrow{IO} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = 0 - \frac{D}{2}\overrightarrow{i_c} \wedge \dot{\beta}\,\overrightarrow{k_{321^*}} = \frac{D}{2}\dot{\beta}\,\overrightarrow{j_c}$$

De même, en considérant l'hypothèse de roulement sans glissement au point J, le point J est immobile lorsqu'on considère le mouvement de la courroie (notée c) par rapport à la poule 3 :

$$\overrightarrow{V(J,c/3)} = \overrightarrow{0}$$

Corrigé

Corrigé

En utilisant la décomposition du vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{V(J,c/3)} = \overrightarrow{V(J,c/2)} + \overrightarrow{V(J,2/3)}$$

En conséquence,

$$\overrightarrow{V(J,c/2)} = -\overrightarrow{V(J,2/3)}$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(J,2/3)} = \overrightarrow{V(A,2/3)} + \overrightarrow{JO} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/3)} = 0 - \frac{D}{4}\overrightarrow{i_c} \wedge -\dot{\gamma}\overrightarrow{k_{321^*}} = -\frac{D}{4}\dot{\gamma}\overrightarrow{j_c}$$

La courroie étant inextensible,

$$\overrightarrow{V(I,c/2)} = \overrightarrow{V(J,c/2)}$$

Et donc :

$$\dot{\gamma} = -2\dot{\beta}$$

Question 5

En déduire la nouvelle expression de $\overrightarrow{V(G,4/1)}$ en fonction de R, L, e et $\dot{\beta}$.

Corrigé

On a donc $\dot{\psi} = 0$ et :

$$\overrightarrow{V(G,4/1)} = L\dot{\beta}\,\overrightarrow{j_2} - \dot{\beta}(R+e)\,\overrightarrow{j_3}$$

Question 6

Exprimer l'accélération du point G dans le mouvement de 4/1 en fonction de R, L, e, $\dot{\beta}$ si $\dot{\beta}$ est constant.

Corrigé

$$\overrightarrow{\Gamma(G,4/1)} = \left[\frac{d\overrightarrow{V(G,4/1)}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_1} = L\underbrace{\ddot{\beta}}_{0}\,\overrightarrow{j_2} + L\dot{\beta}\left[\frac{d\overrightarrow{j_2}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_1} - \underbrace{\ddot{\beta}}_{0}(R+e)\,\overrightarrow{j_3} - \dot{\beta}(R+e)\left[\frac{d\overrightarrow{j_3}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_1}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{j_2}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_1} = \left[\frac{d\overrightarrow{j_2}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/1)} \wedge \overrightarrow{j_2} = \overrightarrow{0} + \dot{\beta}\overrightarrow{k_{21^*}} \wedge \overrightarrow{j_2} = -\dot{\beta}\,\overrightarrow{i_2}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{j_3}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_1} = \left[\frac{d\overrightarrow{j_3}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_3} + \overrightarrow{\Omega(3/1)} \wedge \overrightarrow{j_3} = \overrightarrow{0} + (\dot{\beta}+\dot{\gamma})\overrightarrow{k_{321^*}} \wedge \overrightarrow{j_3} = \dot{\beta}\,\overrightarrow{i_3}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G,4/1)} = -L\dot{\beta}^2\,\overrightarrow{i_2} - \dot{\beta}^2(R+e)\,\overrightarrow{i_3}$$

Question 7

Calculer la valeur maximale de la norme de cette accélération pour $\dot{\beta} = 2rad/s$, $L = 5m$, $R = 1m$, $e = 1m$.

Corrigé

On a :

$$||\overrightarrow{\Gamma(G,4/1)}||^2 = L^2\dot{\beta}^4 + \dot{\beta}^4(R+e)^2 + 2L\dot{\beta}^4(R+e)\cos(\overrightarrow{i_2},\overrightarrow{i_3}) = L^2\dot{\beta}^4 + \dot{\beta}^4(R+e)^2 + 2L\dot{\beta}^4(R+e)\cos\gamma$$

Corrigé

$||\overrightarrow{\Gamma(G,4/1)}||^2$ est maximal lorsque $\cos\gamma = 1$; donc

$$||\overrightarrow{\Gamma(G,4/1)}|| = \sqrt{L^2\dot{\beta}^4 + \dot{\beta}^4(R+e)^2 + 2L\dot{\beta}^4(R+e)} = \dot{\beta}^2(L+R+e) = 28\ m\cdot s^{-2}$$

Le dessin ci-dessous montre le mécanisme permettant de faire varier en fonctionnement l'angle θ_1. L'actionneur de ce mécanisme est le vérin hydraulique 5–6.

Soit $\overrightarrow{FH} = 2a\,\overrightarrow{i_7}$, $\overrightarrow{FE} = 3a\,\overrightarrow{i_1}$ (où a est une constante positive) ; $\overrightarrow{EH} = x(t)\overrightarrow{i_{56}}$ et $\varphi(t) = (\overrightarrow{i_7}, \overrightarrow{i_1})$.

Question 8

Exprimer x en fonction de a et φ puis la vitesse de sortie de la tige du vérin, soit $\overrightarrow{V(H,6/5)}$, en fonction de a, φ et $\dot{\varphi}$.

Corrigé

Commençons par écrire la fermeture de chaîne cinématique dans le triangle EFH :

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow x(t)\overrightarrow{i_{56}} = 2a\,\overrightarrow{i_7} - 3a\,\overrightarrow{i_1}$$

En élevant cette relation au carré, on a :

$$x(t)^2 = 4a^2 + 9a^2 - 12a^2\cos\phi$$

En conséquence,

$$x(t) = a\sqrt{13 - 12\cos\phi}$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(H,6/5)} = \left[\frac{d\overrightarrow{EH}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_5} = \frac{d(a\sqrt{13-12\cos\phi})}{dt}\overrightarrow{i_{56}}$$

$$\overrightarrow{V(H,6/5)} = \frac{6a\dot{\phi}\sin\phi}{\sqrt{13-12\cos\phi}}\overrightarrow{i_{56}}$$

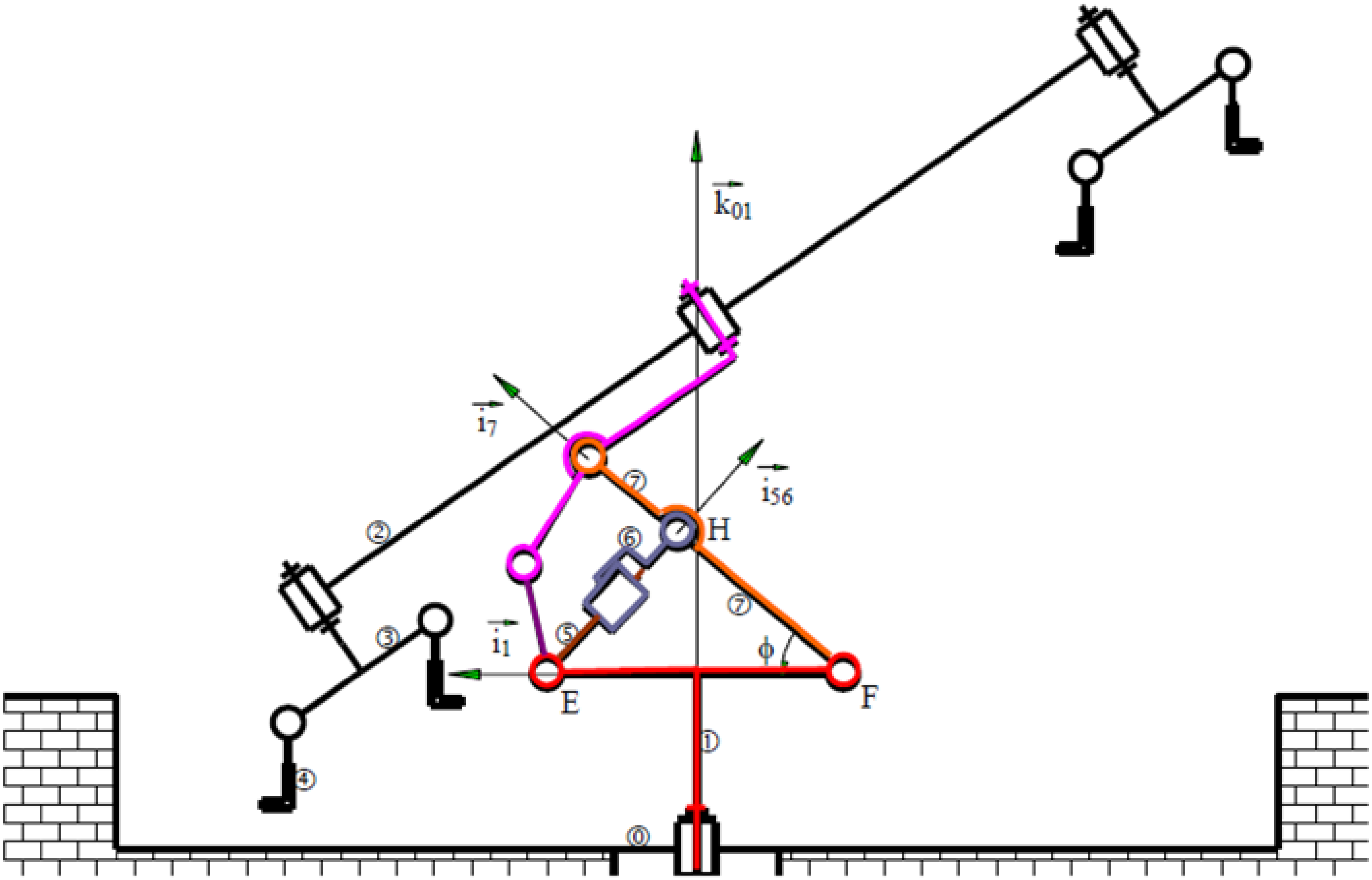
Question 9

En considérant que dans cet intervalle de temps, $\dot{\varphi}$ est constante, déterminer le volume d'huile nécessaire au passage de la position $\varphi = \pi/9$ à la position $\varphi = \pi/3$, si S est la section du piston sur laquelle agit l'huile.

Corrigé

$$Vol = S\cdot\left(x\left(\frac{\pi}{9}\right) - x\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 0,187\ m^3$$

AN : $a = 2m$, $S = 700cm^2$.


$\vec{k}_{01}$
$\vec{i}_7$
$\vec{i}_{56}$
$\vec{i}_1$
H
E
F
ϕ
⑦
⑦
⑥
⑤
②
③
④
①
⓪