# CI 3 – CIN : Étude du comportement cinématique des systèmes

Chapitre 7 – Torseurs

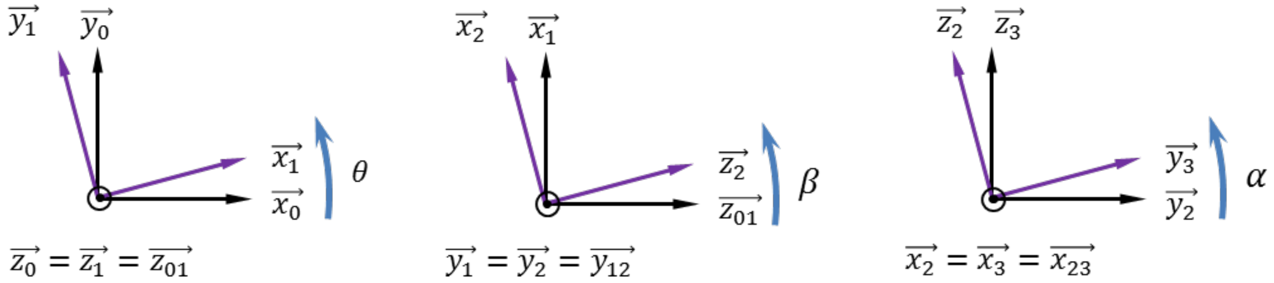
Travaux dirigés

*D'après ressources ? ? ?*

# 1 Pales d'hélicoptères

## 1.1 Mise en situation

## 1.2 Cinématique analytique




**Question 1**
*Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V(G\in S_3/S_2)}$.*

Corrigé

On a :

$$\{\mathscr{V}(S_3/S_2)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)}=\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{23}}\\ \overrightarrow{V(A_3\in S_3/S_2)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{A_3}$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(G\in S_3/S_2)}=\underbrace{\overrightarrow{V(A_3\in S_3/S_2)}}_{\overrightarrow{0}}+\overrightarrow{GA_3}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)}=-a\overrightarrow{x_{23}}\wedge\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{23}}=\overrightarrow{0}$$

Au final,

$$\{\mathscr{V}(S_3/S_2)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)}=\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{23}}\\ \overrightarrow{V(G\in S_3/S_2)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G}$$

**Question 2**
*Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}$.*

Corrigé

On a :

$$\{\mathscr{V}(S_2/S_1)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}=\dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}}\\ \overrightarrow{V(A_3\in S_2/S_1)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{A_3}$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}=\underbrace{\overrightarrow{V(A_3\in S_2/S_1)}}_{\overrightarrow{0}}+\overrightarrow{GA_3}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}=-a\overrightarrow{x_{23}}\wedge\dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}}=-a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}$$

Corrigé

Au final,

$$\left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}=\dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}}\\ \overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}=-a\dot{\beta}\,\overrightarrow{z_2}\end{array}\right\}_G$$

**Question 3**
*Déterminer le vecteur* $\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}$.

Corrigé

On a :

$$\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}}\\ \overrightarrow{V(O\in S_1/S_0)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}=\underbrace{\overrightarrow{V(O\in S_1/S_0)}}_{\overrightarrow{0}}+\overrightarrow{GO}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=\left(-a\overrightarrow{x_{23}}-r\,\overrightarrow{x_1}\right)\wedge\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}}=a\dot{\theta}\cos\beta\overrightarrow{y_{12}}+r\dot{\theta}\overrightarrow{y_{12}}$$

Au final,

$$\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}}\\ \overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}=\dot{\theta}\left(a\cos\beta+r\right)\overrightarrow{y_{12}}\end{array}\right\}_G$$

**Question 4**
*Déduire des questions précédentes le torseur* $\left\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\right\}$ *au point* $G$.

Corrigé

Par composition du torseur cinématique on a :

$$\left\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\right\}=\left\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\right\}+\left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\}+\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}$$

Tous les torseurs ayant déjà été exprimés au même point, on a :

$$\left\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\right\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_3/S_0)}=\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}}+\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{23}}+\dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}}\\ \overrightarrow{V(G\in S_3/S_0)}=\dot{\theta}\left(a\cos\beta+r\right)\overrightarrow{y_{12}}-a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}\end{array}\right\}_G$$

On pose maintenant $\overrightarrow{V(G\in S_3/S_0)}=(a\cdot\cos\beta+r)\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{y_{12}}-a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}$.

On pose maintenant $\overrightarrow{V(G\in S_3/S_0)}=(a\cdot\cos\beta+r)\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{y_{12}}-a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}$.

**Question 5**
*Exprimer l'accélération* $\overrightarrow{\Gamma(G\in S_3/S_0)}$.

Corrigé

Par définition,

$$\overrightarrow{\Gamma(G\in S_3/S_0)}=\left[\frac{\overrightarrow{V(G\in S_3/S_0)}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

Il est donc nécessaire de dériver $\overrightarrow{y_{12}}$ et $\overrightarrow{z_2}$ :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_{12}}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{y_{12}}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_1}+\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}\wedge\overrightarrow{y_{12}}=\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}}\wedge\overrightarrow{y_{12}}=-\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_1}$$

*Corrigé*

$$\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} \wedge \overrightarrow{z_2} = \left(\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}} + \dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}}\right) \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}\sin\beta\overrightarrow{y_1} + \dot{\beta}\overrightarrow{x_2}$$

Au final :

$$\overrightarrow{\Gamma(G \in S_3/S_0)} = -a\dot{\beta}\sin\beta\dot{\theta}\overrightarrow{y_{12}} + (a\cos\beta + r)\ddot{\theta}\overrightarrow{y_{12}} - (a\cos\beta + r)\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} - a\ddot{\beta}\overrightarrow{z_2} - a\dot{\beta}\left(\dot{\theta}\sin\beta\overrightarrow{y_1} + \dot{\beta}\overrightarrow{x_2}\right)$$

**Question 6**

*La longueur des pales est, entre autre, limitée par la vitesse du son en bout de pale (Exigence 1.1.1.1.1). Pour $\beta = 0$, calculer la longueur maximale de la pale pour ne pas dépasser la vitesse du son. La vitesse du rotor est de 250 $tr/min$.*

*Corrigé*

Lorsque $\beta = 0$ la vitesse en bout de pale est donnée par $L\dot{\theta}$. $\dot{\theta} = 250\ tr/min = \frac{250 \cdot 2\pi}{60}\ rad/s = 26,18\ rad/s$ On a donc :

$$L = \frac{295,1}{26,18} = 11,2\ m$$