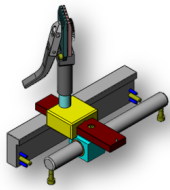
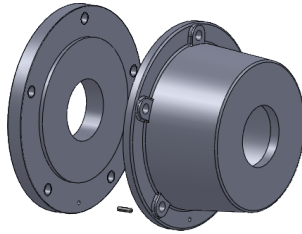


CI 9 : ÉTUDE DES MÉCANISMES COMPLEXES

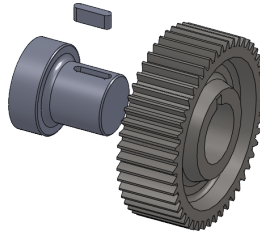
CHAPITRE 1 – INTRODUCTION AUX CHÂÎNES DE SOLIDES



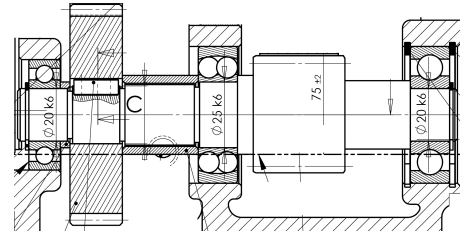
Pince de la cordeuse



Montage de carters



Montage d'une poulie



Montage de roulement

Lors de la résolution d'un problème de mécanique, plusieurs problèmes peuvent parfois se poser. Par exemple, en cinématique, dans le cas d'un calcul de loi entrée/sortie, des liaisons pourraient parfois être associées afin de simplifier les calculs. D'autre part en statique, il est souvent pertinent de s'interroger sur la faisabilité du problème. En effet, dans certains cas, toutes les inconnues ne peuvent pas être déterminées.

Problématique

PROBLÉMATIQUE :

- Comment associer des liaisons afin de simplifier les calculs de cinématique ?
- Comment prévoir si un problème de statique peut être résolu ou non ?

Savoir

SAVOIRS :

- Mod-C14.1 : Liaison cinématiquement équivalente
- Mod-C14.2 : Mobilité d'une chaîne ouverte
- Mod-C14.3 : Hyperstatisme et mobilité d'une chaîne fermée
 - Mod-C14-S3 : Déterminer la liaison cinématiquement équivalente à une association de liaisons
 - Mod-C14-S4 : Déterminer les mobilités d'un mécanisme
 - Mod-C14-S5 : Déterminer le degré d'hyperstaticité d'un mécanisme
 - Mod-C14-S6 : Identifier les conséquences géométriques de l'hyperstaticité.

1	Détermination des liaisons équivalentes	2
1.1	Rappels	2
1.2	Méthodes	2
1.3	Chaînes ouvertes	4
1.4	Chaînes fermées	5
1.5	Chaînes complexes	7
2	Notions d'hyperstatismes	8
2.1	Cas d'une chaîne fermée	9
2.2	Notion de mobilités dans les chaînes fermées	12
3	Notion de puissance délivrée par un mécanisme	15

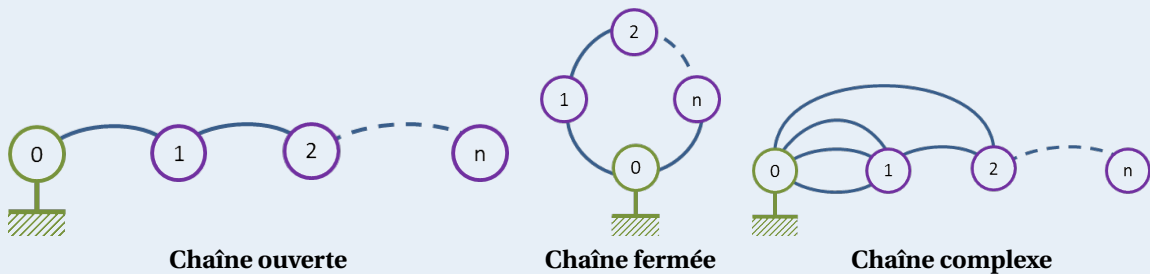
Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1 Détermination des liaisons équivalentes

1.1 Rappels

Définition

Structure des chaînes



Décomposition du torseur cinématique

Soient n solides en chaîne ouverte. On a :

$$\{\mathcal{V}(1/n)\} = \{\mathcal{V}(1/2)\} + \{\mathcal{V}(2/3)\} + \dots + \{\mathcal{V}(n-1/n)\} = \sum_{i=1}^{n-1} \{\mathcal{V}(i/n+1)\}$$

En utilisant le vecteur instantané de rotation et le vecteur vitesse exprimé en un point P , on a donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega(1/n)} = \overrightarrow{\Omega(1/2)} + \overrightarrow{\Omega(2/3)} + \dots + \overrightarrow{\Omega(n-1/n)} \\ \overrightarrow{V(P \in 1/n)} = \overrightarrow{V(P \in 1/2)} + \overrightarrow{V(P \in 2/3)} + \dots + \overrightarrow{V(P \in n-1/n)} \end{cases}$$

Définition

Principe fondamental de la statique

Soient n solides liés au solide 1. En isolant 1, d'après le principe fondamental de la statique appliqué au point 1, on a :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1)\} + \dots + \{\mathcal{T}(n \rightarrow 1)\} = \{0\}$$

En utilisant le théorème de la résultante statique et le théorème du moment statique au point P , on a donc :

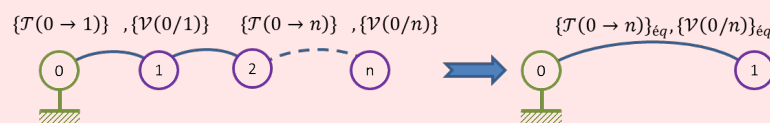
$$\begin{cases} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} + \overrightarrow{R(3 \rightarrow 1)} + \dots + \overrightarrow{R(n \rightarrow 1)} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, 2 \rightarrow 1)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, 3 \rightarrow 1)} + \dots + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, n \rightarrow 1)} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Définition

1.2 Méthodes

Méthode

Liaisons en séries



Méthode statique

1. On pose :

$$\{\mathcal{T}_{eq}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{eq} & L_{eq} \\ Y_{eq} & M_{eq} \\ Z_{eq} & N_{eq} \end{array} \right\}_{P,\mathcal{R}}$$

- Écrire les torseurs **statiques** de chacune des liaisons.
- Déplacer les torseurs au même point.
- On applique le PFS à chacun des solides.
- Ainsi, s'il y a n solides (hors bâti), le PFS permet donc d'écrire n équations.

Méthode cinématique

1. On pose :

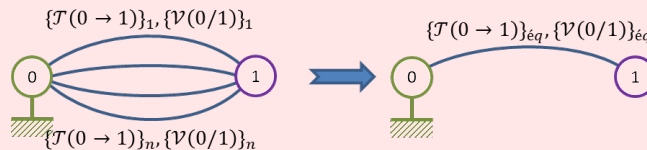
$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{eq} & u_{eq} \\ \beta_{eq} & v_{eq} \\ \gamma_{eq} & w_{eq} \end{array} \right\}_{P,\mathcal{R}}$$

- Écrire les torseurs **cinématiques** de chacune des liaisons.
- Déplacer les torseurs au même point.
- D'après la composition du torseur cinématique, on a alors :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \{\mathcal{V}(0/1)\} + \dots + \{\mathcal{V}(n-1 \rightarrow n)\}$$

- Suivant les composantes de $\{\mathcal{V}_{eq}\}$ on peut donc l'associer à une liaison usuelle, ou non.

Liaisons en parallèles



Méthode statique

1. On pose :

$$\{\mathcal{T}_{eq}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{eq} & L_{eq} \\ Y_{eq} & M_{eq} \\ Z_{eq} & N_{eq} \end{array} \right\}_{P,\mathcal{R}}$$

- Écrire les torseurs **statiques** de chacune des liaisons.
- Déplacer les torseurs au même point.
- On a alors :

$$\{\mathcal{T}_{eq}\} = \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} + \dots + \{\mathcal{T}(n-1 \rightarrow n)\}$$

- Suivant les composantes de $\{\mathcal{T}_{eq}\}$ on peut donc l'associer à une liaison usuelle, ou non.

Méthode cinématique

1. On pose :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{eq} & u_{eq} \\ \beta_{eq} & v_{eq} \\ \gamma_{eq} & w_{eq} \end{array} \right\}_{P,\mathcal{R}}$$

- Écrire les torseurs **cinématiques** de chacune des liaisons.
- Déplacer les torseurs au même point.
- On a alors :

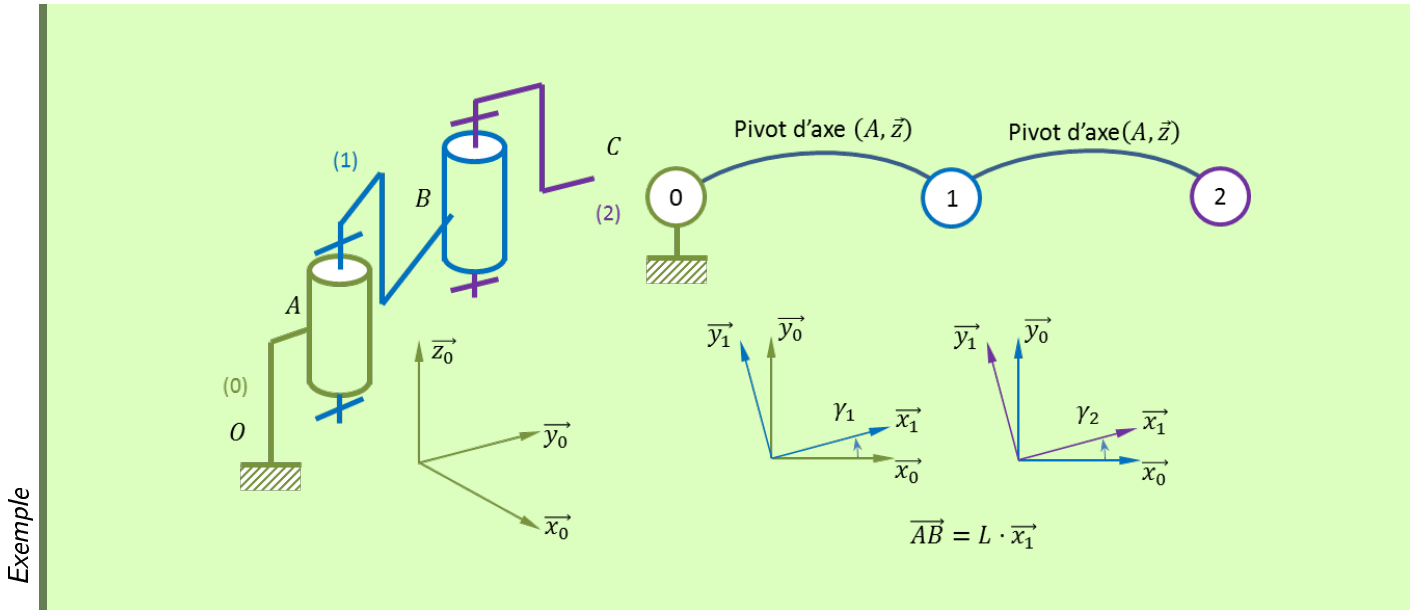
$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \{\mathcal{V}(0/1)\} = \dots = \{\mathcal{V}(n-1/n)\}$$

- Suivant les composantes de $\{\mathcal{V}_{eq}\}$ on peut donc l'associer à une liaison usuelle, ou non.

Il est souvent plus facile de faire une somme de torseurs plutôt que de résoudre un système de n équations. Pour calculer des liaisons équivalente, on utilisera donc, de préférence :

- pour les liaisons en séries, la méthode cinématique ;
- pour les en parallèles, la méthode statique.

1.3 Chaînes ouvertes



Méthode 1 – Composition du torseur cinématique

Torseur cinématique de la liaison pivot en A entre 0 et 1 :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\gamma}_1 \overrightarrow{z_0} \\ V(A \in 1/0) = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$$

Torseur cinématique de la liaison pivot en B puis en A entre 2 et 1 :

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\gamma}_2 \overrightarrow{z_0} \\ V(B \in 2/1) = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\gamma}_2 \overrightarrow{z_0} \\ V(A \in 2/1) = -L \dot{\gamma}_2 \overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}_A$$

Par composition du torseur cinématique, on a :

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} = \{\mathcal{V}(2/0)\}$$

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \overrightarrow{z_0} \\ V(A \in 2/0) = -L \dot{\gamma}_2 \overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \overrightarrow{z_0} \\ V(A \in 2/0) = -L \dot{\gamma}_2 (\cos \gamma_1 \overrightarrow{y_0} - \sin \gamma_1 \overrightarrow{x_0}) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \dot{u}_{eq} \\ 0 & \dot{v}_{eq} \\ \dot{\gamma}_{eq} & 0 \end{array} \right\}_A$$

Cette liaison permet donc deux translations suivant $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$ et une rotation autour de $\overrightarrow{z_0}$. La liaison équivalente à ces deux liaisons pivot en série est donc une liaison appui-plan.

Méthode 2 – Utilisation des torseurs statiques

Torseur statique de la liaison pivot en A entre 0 et 1 :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{ll} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$$

Torseur statique de la liaison pivot en B puis en A entre 2 et 1 :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_0} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} + L \sin \gamma_1 Z_{21} \\ Y_{21} & M_{21} - L \cos \gamma_1 Z_{21} \\ Z_{21} & L \cos \gamma_1 Y_{21} - L \sin \gamma_1 X_{21} \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_0}$$

D'après le PFS appliqué au solide 1, $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \{0\}$. Le torseur équivalent à la liaison entre 0 et 2 est donc tel que :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \{\mathcal{T}_{eq}\}$$

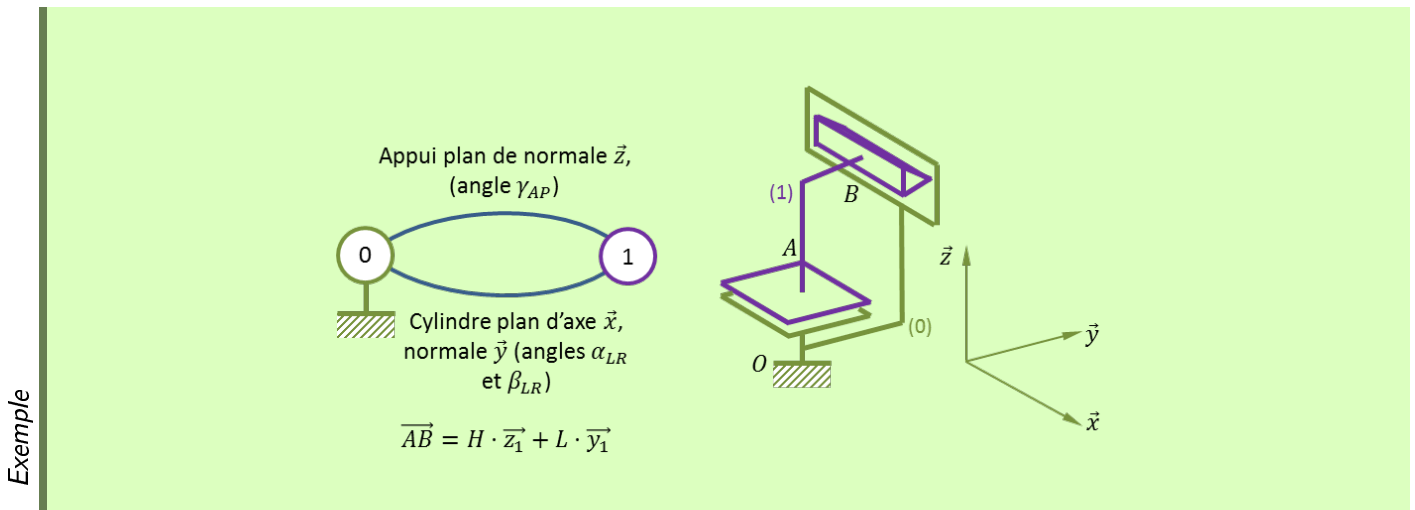
$$\begin{cases} X_{12} = X_{01} = X_{eq} \\ Y_{12} = Y_{01} = Y_{eq} \\ Z_{12} = Z_{01} = Z_{eq} \\ L_{12} + L \sin \theta Z_{12} = L_{01} = L_{eq} \\ M_{12} + L \cos \theta Z_{12} = M_{01} = M_{eq} \\ L \cos \theta Y_{12} - L \sin \theta X_{12} = 0 = N_{eq} \end{cases} \iff \begin{cases} X_{12} = X_{01} = X_{eq} \\ Y_{12} = Y_{01} = Y_{eq} \\ Z_{eq} \neq 0 \\ L_{eq} \neq 0 \\ M_{eq} \neq 0 \\ N_{eq} = 0 \\ Y_{12} \cos \theta - X_{12} \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Nécessairement $X_{12} = 0$ et $Y_{12} = 0$.

La liaison équivalente a donc pour torseur la forme suivante :

$$\{\mathcal{T}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{eq} \\ 0 & M_{eq} \\ Z_{eq} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$$

1.4 Chaînes fermées



Méthode 1 – Utilisation du torseur cinématique

Torseur cinématique de la liaison appui-plan en A entre 0 et 1 :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\}_{AP} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)}_{AP} = \dot{\gamma}_{AP} \vec{z}_1 \\ V(A \in 1/0)_{AP} = \dot{u}_{AP} \vec{x}_1 + \dot{v}_{AP} \vec{y}_1 \end{array} \right\}_A$$

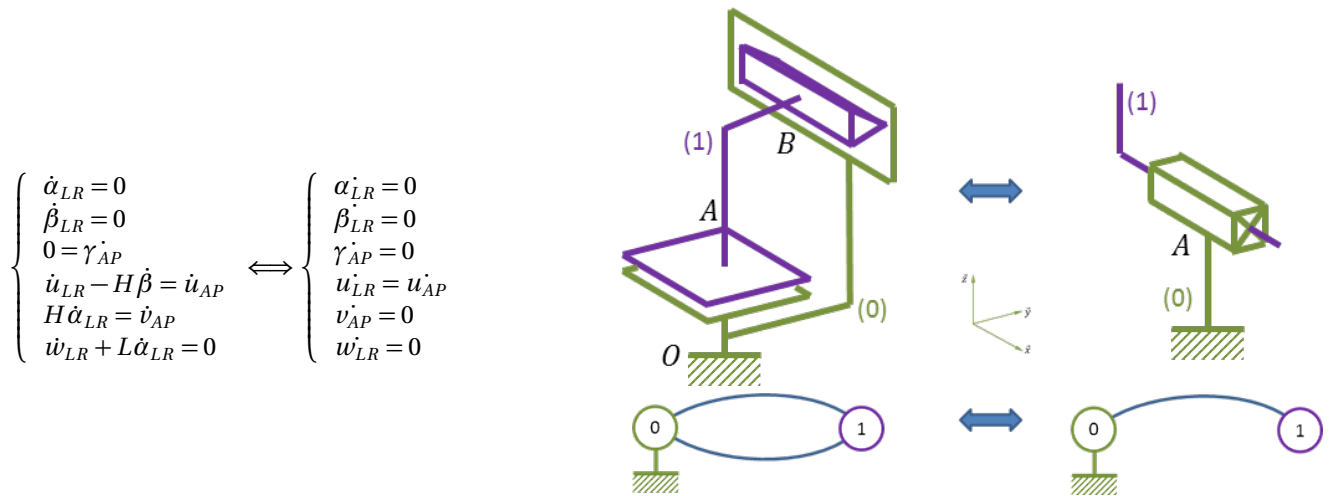
Torseur cinématique de la liaison linéaire rectiligne en B puis en A entre 1 et 0 :

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}(1/0)\}_{LR} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)}_{LR} = \dot{\alpha}_{LR} \vec{x}_1 + \dot{\beta}_{LR} \vec{y}_1 \\ \overrightarrow{V(B \in 1/0)}_{LR} = \dot{u}_{LR} \vec{x}_1 + \dot{w}_{LR} \vec{z}_1 \end{array} \right\}_B \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)}_{LR} = \dot{\alpha}_{LR} \vec{x}_1 + \dot{\beta}_{LR} \vec{y}_1 \\ \overrightarrow{V(A \in 1/0)}_{LR} = (\dot{u}_{LR} - H\dot{\beta}_{LR}) \vec{x}_1 + H\dot{\alpha}_{LR} \vec{y}_1 + (\dot{w}_{LR} + L\dot{\alpha}_{LR}) \vec{z}_1 \end{array} \right\}_A\end{aligned}$$

Les deux liaisons étant en parallèles, il est nécessaire qu'elles permettent les mêmes mobilités. En conséquence, on doit avoir :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\}_{LR} = \{\mathcal{V}(1/0)\}_{AP}$$

En conséquence :



Au final,

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \dot{u} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

La seule composante non nulle du torseur cinématique est donc la vitesse de déplacement suivant \vec{x}_1 . La liaison est donc une liaison glissière d'axe \vec{x}_1

Méthode 2 – Utilisation du torseur statique

Torseur statique de la liaison appui-plan en A entre 0 et 1 :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\}_{AP} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{01,AP} \\ 0 & M_{01,AP} \\ Z_{01,AP} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$$

Torseur statique de la liaison linéaire rectiligne en B puis en A entre 1 et 0 :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\}_{LR} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{01,LR} & 0 \\ 0 & N_{01,LR} \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_1} = \begin{Bmatrix} 0 & -H Y_{01,LR} \\ Y_{01,LR} & 0 \\ 0 & N_{01,LR} \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$$

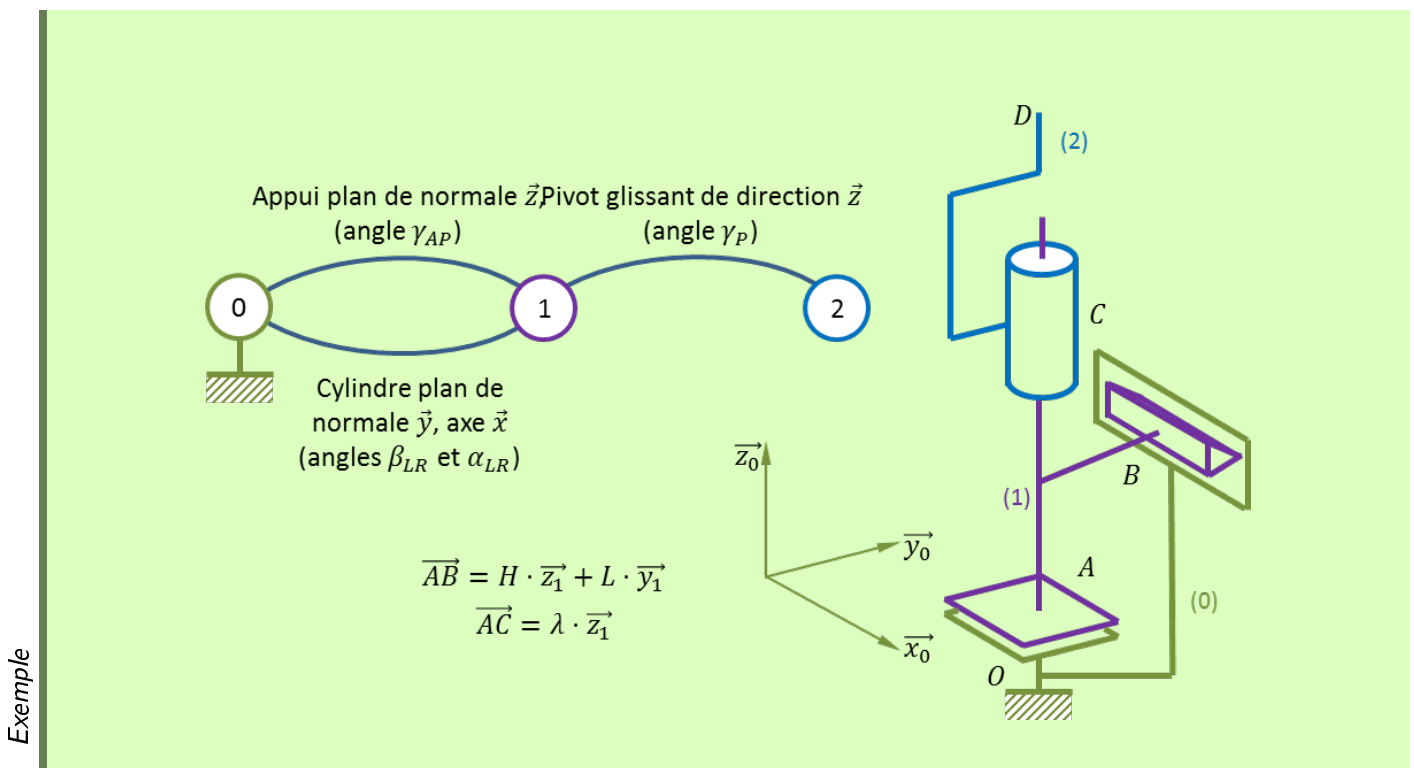
En appliquant le PFS au solide 1 au point A, on a donc :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}_{AP} + \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}_{LR} = \{\mathcal{T}_{eq}\}$$

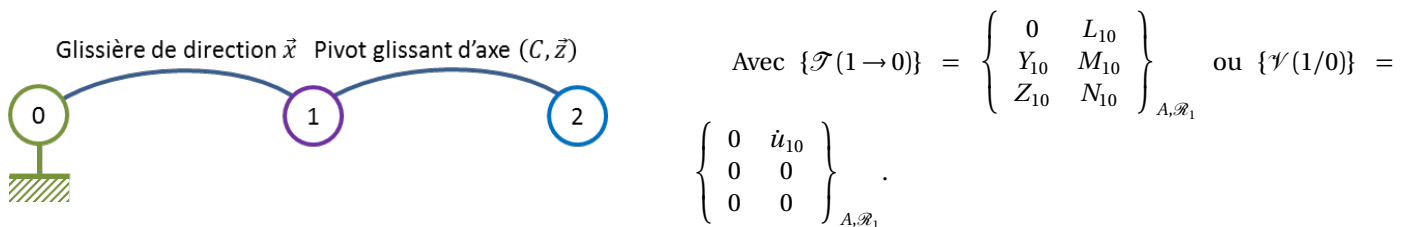
$$\begin{cases} 0 + 0 = X \\ 0 + Y_{01,LR} = Y \\ Z_{01,AP} + 0 = Z \\ L_{01,AP} - H Y_{01,LR} = L \\ M_{01,AP} + 0 = M \\ 0 + N_{01,LR} = N \end{cases} \iff \begin{cases} X = 0 \\ Y = Y_{01,LR} \\ Z = Z_{01,AP} \\ L = L_{01,AP} - H Y_{01,LR} \\ M = M_{01,AP} \\ N = 0 + N_{01,LR} \end{cases} \iff \{\mathcal{T}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$$

Les deux liaisons en parallèles sont donc équivalentes à une liaison glissière d'axe \vec{x}_1 .

1.5 Chaînes complexes



Dans ce schéma, on identifie d'abord que les liaisons entre 0 et 1 sont en parallèles. On a déjà vu que la liaison équivalente (appui-plan et linéaire rectiligne) était une liaison glissière d'axe \vec{x} . La chaîne complexe précédente est alors équivalente à la suivante :



Méthode 1 – Utilisation du torseur cinématique

Torseur cinématique de la liaison glissière en A entre 1 et 0 : $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{u}_{10} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$

Torseur cinématique de la liaison pivot glissant en A entre 2 et 1 : $\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{21} & \dot{w}_{21} \end{pmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$

La liaison équivalente à la chaîne cinématique est donc la suivante :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \{\mathcal{V}(2/0)\} = \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{u}_{10} \\ 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{21} & \dot{w}_{21} \end{pmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$$

Cette liaison permet donc trois degrés de liberté : deux translations suivant \vec{x} et \vec{z} et une rotation autour de \vec{z} . Cette liaison équivalente n'est pas associable à une liaison usuelle.

Méthode 2 – Utilisation du torseur statique

Torseur statique de la liaison glissière en A entre 1 et 0 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\} = \begin{pmatrix} 0 & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{pmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$

Torseur statique de la liaison pivot glissant en A entre 2 et 1 : $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \begin{pmatrix} X_{20} & L_{20} \\ Y_{20} & M_{20} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$

La liaison équivalente à la chaîne cinématique est donc la suivante :

$$\{\mathcal{T}_{eq}\} = \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\} \iff \begin{cases} 0 = X_{20} \\ Y_{10} = Y_{20} \\ Z_{10} = 0 \\ L_{10} = L_{20} \\ M_{10} = M_{20} \\ N_{10} = 0 \end{cases} \quad \{\mathcal{T}_{eq}\} = \begin{pmatrix} 0 & L_{20} \\ Y_{20} & M_{20} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$$

Cette liaison a donc trois degrés de liaison : une translation suivant \vec{y} et deux rotations autour de \vec{x} et \vec{z} . Cette liaison équivalente n'est pas associable à une liaison usuelle.

2 Notions d'hyperstatismes

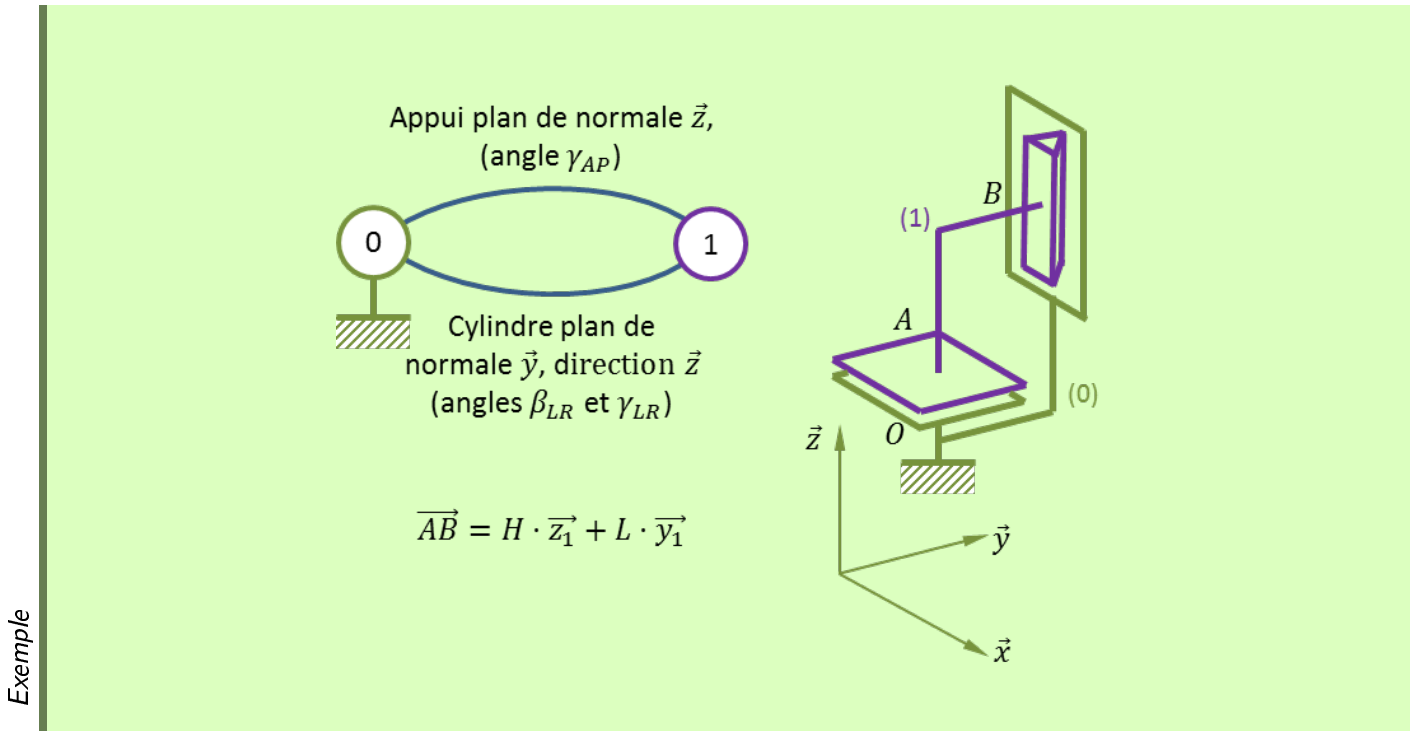
Hyperstatisme Un système est dit hyperstatique lorsque l'application du PFS ne permet pas de calculer toutes les inconnues d'effort dans les liaisons.

On parle alors de degré d'hyperstatisme, noté h . Il correspond au nombre d'inconnues qu'il faudrait imposer pour pouvoir calculer les inconnues restantes.

- Si $h > 0$: le mécanisme est dit hyperstatique (trop d'inconnues de liaisons ou trop de degré de liberté supprimés), le fonctionnement correct du mécanisme nécessitera h conditions géométriques.
- Si $h = 0$: le mécanisme est dit isostatique.
- Si $h < 0$: le mécanisme est dit hypostatique (trop de degrés de liberté, pas de transmission possible de la puissance ou dysfonctionnement).

Définition

2.1 Cas d'une chaîne fermée



Méthode 1 – Utilisation du torseur cinématique

Torseur cinématique de la liaison appui plan en A entre 1 et 0 : $\{\mathcal{V}(1/0)\}_{AP} = \begin{Bmatrix} 0 & \dot{u}_{10,AP} \\ 0 & \dot{v}_{10,AP} \\ \dot{\gamma}_{10,AP} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$

Torseur cinématique de la liaison cylindre – plan en B puis en A entre 1 et 0 :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\}_{CyP} = \begin{Bmatrix} 0 & \dot{u}_{10,CyP} \\ \dot{\beta}_{10,CyP} & 0 \\ \dot{\gamma}_{10,CyP} & \dot{w}_{10,CyP} \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_\infty} = \begin{Bmatrix} 0 & \dot{u}_{10,CyP} + L \cdot \dot{\gamma}_{10,CyP} - H \cdot \dot{\beta}_{10,CyP} \\ \dot{\beta}_{10,CyP} & 0 \\ \dot{\gamma}_{10,CyP} & \dot{w}_{10,CyP} \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_1}$$

La liaison équivalente à la chaîne cinématique est donc la suivante :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \{\mathcal{V}(1/0)\}_{SP} = \{\mathcal{V}(1/0)\}_{CyP} = \begin{Bmatrix} 0 & \dot{u}_{10,AP} \\ 0 & \dot{v}_{10,AP} \\ \dot{\gamma}_{10,AP} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1} = \begin{Bmatrix} 0 & \dot{u}_{10,CyP} + L \cdot \dot{\gamma}_{10,CyP} - H \cdot \dot{\beta}_{10,CyP} \\ \dot{\beta}_{10,CyP} & 0 \\ \dot{\gamma}_{10,CyP} & \dot{w}_{10,CyP} \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_1}$$

D'où :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \dot{u}_{10,CyP} + L \cdot \dot{\gamma}_{10,CyP} \\ 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{10,CyP} & 0 \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_1} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{u}_{10,APP} = \dot{u}_{10,CyP} + L \cdot \dot{\gamma}_{10,CyP} \\ \dot{\gamma}_{10,APP} = \dot{\gamma}_{10,CyP} \end{cases}$$

Cette liaison permet donc deux degrés de liberté : une translations suivant \vec{x} et une rotation autour de \vec{z} . Cette liaison équivalente n'est pas associable à une liaison usuelle.

Méthode 2 – Utilisation du torseur statique

Torseur statique de la liaison appui plan en A entre 1 et 0 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\}_{AP} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{10,AP} \\ 0 & M_{10,AP} \\ Z_{10,AP} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$

Torseur statique de la liaison cylindre – plan en B puis en A entre 1 et 0 :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\}_{CyP} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{10,CyP} \\ Y_{10,CyP} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_1} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{10,CyP} - H Y_{10,CyP} \\ Y_{10,CyP} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_1}$$

La liaison équivalente à la chaîne cinématique est donc la suivante :

$$\{\mathcal{T}_{eq}\} = \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\}_{SP} + \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 0)\}_{CyP} \iff \begin{cases} X_{eq} = 0 + 0 \\ Y_{eq} = Y_{10,CyP} + 0 \\ Z_{eq} = 0 + Z_{10,AP} \\ L_{eq} = L_{10,AP} - H Y_{10,CyP} + L_{10,CyP} \\ M_{eq} = 0 + M_{10,AP} \\ N_{eq} = 0 + 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X_{eq} = 0 \\ Y_{eq} = Y_{10,CyP} \\ Z_{eq} = Z_{10,AP} \\ L_{eq} = L_{10,CyP} - H Y_{10,CyP} + L_{10,AP} \\ M_{eq} = M_{10,AP} \\ N_{eq} = 0 \end{cases}$$

$$\{\mathcal{T}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{10,CyP} - H Y_{10,CyP} + L_{10,AP} \\ Y_{CyP} & M_{10,AP} \\ Z_{CyP} & 0 \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_1}$$

Cette liaison permet donc deux degrés de liberté : une translations suivant \vec{x} et une rotation autour de \vec{z} . Cette liaison équivalente n'est pas associable à une liaison usuelle.

Interprétation

On note $\{\mathcal{T}_{ext}\}$ le torseur associé à une action mécanique s'exerçant sur le solide 1. Les composantes de ce torseur sont connues. L'application du PFS au solide donne donc :

$$\{\mathcal{T}_{ext}\} + \{\mathcal{T}_{eq}\} = \{0\} \iff \begin{cases} 0 + X_{ext} = 0 \\ Y_{CyP} + Y_{ext} = 0 \\ Z_{CyP} + Z_{ext} = 0 \\ L_{10,CyP} - H Y_{10,CyP} + L_{10,AP} + L_{ext} = 0 \\ M_{10,AP} + M_{ext} = 0 \\ 0 + N_{ext} = 0 \end{cases}$$

Ce système ne permet pas de résoudre les inconnues de liaisons suivantes : $L_{10,CyP}$ et $L_{10,AP}$. En conséquence, le système est hyperstatique d'ordre 1. (Si une des inconnues est donnée, lors peut être déduite).

Conséquences du point de vue du calcul des efforts

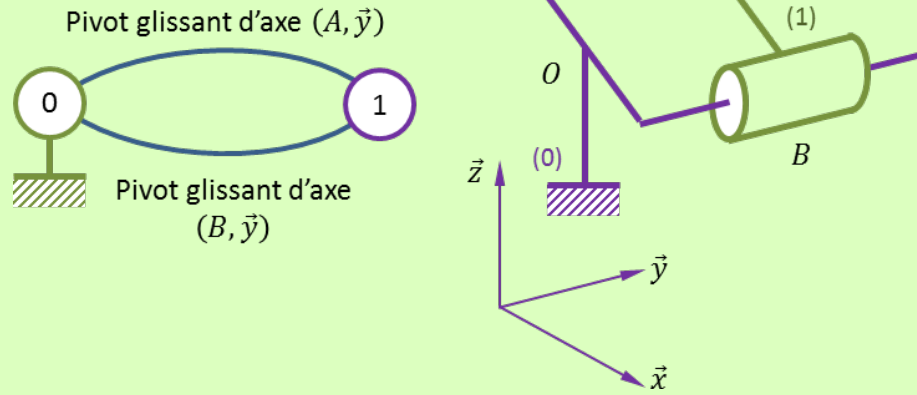
Si on désire calculer les inconnues dans les liaisons, il est nécessaire de rendre le système isostatique. Pour cela, il est nécessaire d'avoir $L_{10,CyP} = 0$ **OU** $L_{10,AP} = 0$. Dans le premier cas, la liaison cylindre plan est transformée en liaison ponctuelle de normale \vec{y} .

Dans le second cas, la liaison appui plan est transformé en liaison linéaire rectiligne "d'axe" \vec{x} .

Conséquences du point de vue de fonctionnement du mécanisme

Dans la réalité, les systèmes sont très souvent hyperstatiques ce qui ne les empêche pas de fonctionner. Cela impose cependant des contraintes lors de la fabrication du mécanisme. Ici, le degré d'hyperstatisme provient d'une rotation autour de \vec{x} . Il faudrait donc imposer une contrainte angulaire dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) .

Exemple



Méthode 1 – Utilisation du torseur cinématique

Torseur cinématique de la liaison pivot glissant en A entre 1 et 0 : $\{\mathcal{V}(1/0)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\beta}_A & \dot{v}_A \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$

Torseur cinématique de la liaison pivot glissant en B puis en A entre 1 et 0 :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\beta}_B & \dot{v}_B \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\beta}_B & \dot{v}_B \\ 0 & L\dot{\beta}_B \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$$

Le torseur équivalent à ces deux liaisons en parallèles se calcule donc ainsi :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \{\mathcal{V}(1/0)\}_A = \{\mathcal{V}(1/0)\}_B \iff \begin{cases} \dot{\alpha}_{eq} = 0 = 0 \\ \dot{\beta}_{eq} = \dot{\beta}_A = \dot{\beta}_B \\ \dot{\gamma}_{eq} = 0 = 0 \\ \dot{u}_{eq} = 0 = 0 \\ \dot{v}_{eq} = \dot{v}_A = \dot{v}_B \\ \dot{w}_{eq} = 0 = L\dot{\beta}_B \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{v}_{eq} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$$

Méthode 2 – Utilisation du torseur statique

Torseur cinématique de la liaison pivot glissant en A entre 1 et 0 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}_A = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ 0 & 0 \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$

Torseur cinématique de la liaison pivot glissant en B puis en A entre 1 et 0 :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}_B = \begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ 0 & 0 \\ Z_B & N_B \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_1} = \begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ 0 & -LZ_B \\ Z_B & N_B \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$$

Le torseur équivalent est donc :

$$\{T_{eq}\} = \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}_A + \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}_B \iff \begin{cases} X_{eq} = X_A + X_B \\ Y_{eq} = 0 \\ Z_{eq} = Z_A + Z_B \\ L_{eq} = L_A + L_B \\ M_{eq} = -LZ_B \\ N_{eq} = N_A + N_B \end{cases} \implies \{T_{eq}\} = \begin{pmatrix} X_A + X_B & L_A + L_B \\ 0 & -LZ_B \\ Z_A + Z_B & N_A + N_B \end{pmatrix}_{A, \mathcal{R}_1}$$

Interprétation

On note $\{\mathcal{T}_{ext}\}$ le torseur associé à une action mécanique s'exerçant sur le solide 1. Les composantes de ce torseur sont connues. L'application du PFS au solide donne donc :

$$\{\mathcal{T}_{ext}\} + \{T_{eq}\} = \{0\} \iff \begin{cases} X_A + X_B + X_{ext} = 0 \\ 0 + Y_{ext} = 0 \\ Z_A + Z_B + Z_{ext} = 0 \\ L_A + L_B + L_{ext} = 0 \\ -LZ_B + M_{ext} = 0 \\ N_A + N_B + N_{ext} = 0 \end{cases}$$

Ce système ne permet pas de résoudre les inconnues de liaisons suivantes : X_A , X_B , L_A , L_B , N_A , N_B . Attention, la 5^e équation permet de calculer Z_B et le 4^e de calculer Z_A .

Ici, le système est hyperstatique d'ordre 3.

Conséquences du point de vue du calcul des efforts

Si on désire calculer les inconnues dans les liaisons, il existe plusieurs combinaisons de composantes à rendre nulles pour rendre le système isostatique.

Par exemple, si X_A , L_A et N_A sont nuls, la liaison en A est transformée en une liaison ponctuelle de normale A.

Conséquences du point de vue de fonctionnement du mécanisme

Ici, le degré d'hyperstatisme provenant de deux rotations autour de \vec{x} et autour de \vec{z} , ainsi que d'un effort suivant \vec{x} , il faudrait donc 3 conditions géométriques :

- une distance suivant \vec{x} (entraxe) ;
- le parallélisme dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) ;
- le parallélisme dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) .

2.2 Notion de mobilités dans les chaînes fermées

Attention

Ce vocabulaire est utilisé dans le cas des chaînes fermées. Dans ce cas, il est alors possible d'écrire des lois entrées sorties.

2.2.1 Cas des mobilités utiles

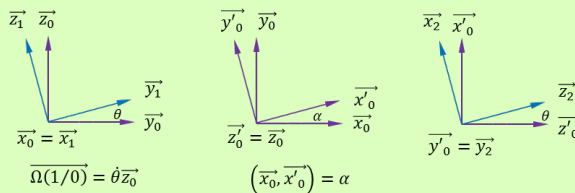
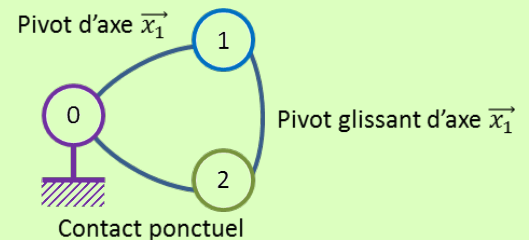
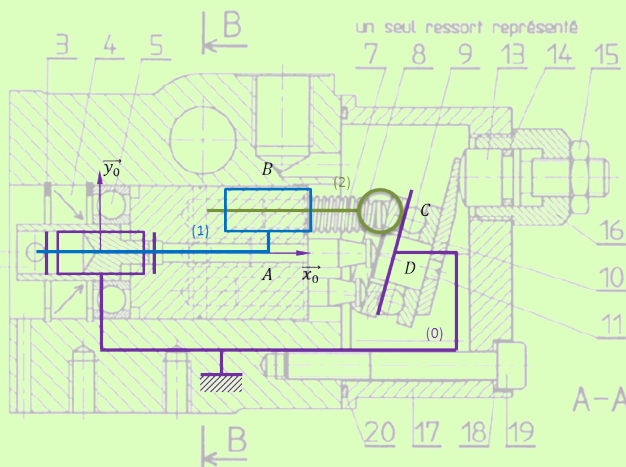
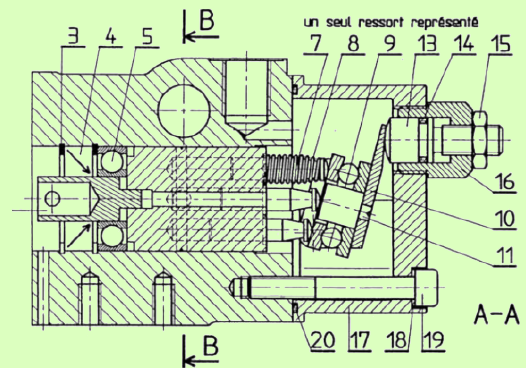
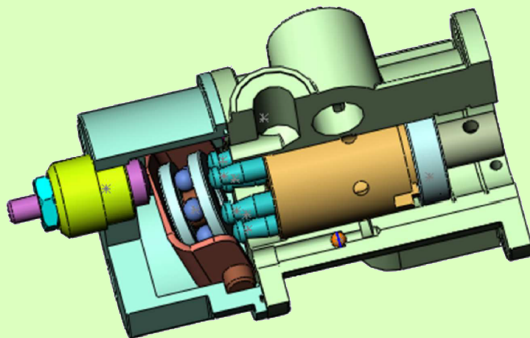
Définition

Les mobilités dites "utiles" permettent à un mécanisme de transformer et de transmettre un mouvement. L'écriture de la loi **entrée – sortie** permet d'ajouter une équation cinématique et donc, le cas échéant, d'identifier une inconnue supplémentaire.

L'écriture de la fermeture de chaîne cinématique permet telle qu'on l'a vu ultérieurement permet d'obtenir la loi entrée – sortie d'un mécanisme.

Une seconde solution pour obtenir la loi entrée sortie d'un mécanisme et d'utiliser la composition du torseur cinématique.

Modélisation de la pompe du pilote automatique de volier



On cherche à obtenir une relation entre la vitesse de rotation de l'ensemble 1 ($\dot{\theta}$) en fonction de la vitesse de translation d'un piston $\lambda(t)$.

λ est défini tel que lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = 0$. Dans ces conditions, C et D sont alignés suivant le vecteur \vec{y}_1 . On a alors $\overrightarrow{BC} = (L + \lambda(t)) \vec{x}_0$ et $\overrightarrow{AD} = L \vec{x}_0$.

Fermeture de chaîne géométrique ABCD :

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{0} \\ R\overrightarrow{y_1} + (L + \lambda(t))\overrightarrow{x_0} - r\overrightarrow{z_2} - L\overrightarrow{x_0} &= \overrightarrow{0} \\ R\overrightarrow{y_1} + \lambda(t)\overrightarrow{x_0} - r\overrightarrow{x_2} &= \overrightarrow{0} \\ R(\cos\theta\overrightarrow{y_0} + \sin\theta\overrightarrow{z_0}) + \lambda(t)\overrightarrow{x_0} - r(\cos\theta\overrightarrow{x_0} - \sin\theta\overrightarrow{z_0}) &= \overrightarrow{0} \\ R(\cos\theta\overrightarrow{y_0} + \sin\theta\overrightarrow{z_0}) + \lambda(t)\overrightarrow{x_0} - r(\cos\theta(\cos\alpha\overrightarrow{x_0} + \sin\alpha\overrightarrow{y_0}) - \sin\theta\overrightarrow{z_0}) &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Par ailleurs, $r = \frac{R}{\sin\alpha}$, en conséquence :

$$\left(\lambda(t) - \frac{R}{\sin\alpha} \cos\theta \cos\alpha\right)\overrightarrow{x_0} + \left(R \cos\theta - \frac{R}{\sin\alpha} \cos\theta \sin\alpha\right)\overrightarrow{y_0} + \left(R \sin\theta + \frac{R}{\sin\alpha} \sin\theta\right)\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{0}$$

En projection l'équation sur $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$:

$$\begin{aligned}\text{Projection sur } \overrightarrow{x_0} : \quad \lambda(t) - \frac{R}{\sin\alpha} \cos\theta \cos\alpha &= 0 \\ \text{Projection sur } \overrightarrow{y_0} : \quad R \cos\theta - R \cos\theta &= 0 \\ \text{Projection sur } \overrightarrow{z_0} : \quad R \sin\theta + \frac{R}{\sin\alpha} \sin\theta &= 0\end{aligned}$$

La projection sur \overrightarrow{x} donne directement une relation entre $\lambda(t)$ et θ . En dérivant cette expression on a :

$$\dot{\lambda}(t) - R \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \dot{\theta} \sin\theta = 0$$

Composition du torseur cinématique :

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}(1/0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\theta} \overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{V(A \in 1/0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\theta} \overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{V(D \in 1/0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D \\ \{\mathcal{V}(2/1)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta} \overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{V(B \in 2/1)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta} \overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{V(D \in 2/1)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} \\ \quad = \dot{\lambda} \overrightarrow{x_0} + (-L \overrightarrow{x_0} + R \overrightarrow{y_1}) \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} \\ \quad = \dot{\lambda} \overrightarrow{x_0} + (-L \overrightarrow{x_0} + R \overrightarrow{y_1}) \wedge \dot{\beta} \overrightarrow{x_0} \\ \quad = \dot{\lambda} \overrightarrow{x_0} - R \dot{\beta} \overrightarrow{z_1} \\ \quad = \dot{\lambda} \overrightarrow{x_0} - R \dot{\beta} (\cos\theta \overrightarrow{z_0} - \sin\theta \overrightarrow{y_0}) \end{array} \right\}_A \\ \{\mathcal{V}(2/0)\} &= \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \overrightarrow{\Omega(2/1)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \\ \overrightarrow{V(D \in 2/0)} = \overrightarrow{V(D \in 2/1)} + \overrightarrow{V(D \in 1/0)} \end{array} \right\}_D \\ \{\mathcal{V}(2/0)\} &= \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\beta} \overrightarrow{x_0} + \dot{\theta} \overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{V(A \in 2/0)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{x_0} - R \dot{\beta} \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_A\end{aligned}$$

Exemple

Par ailleurs la liaison entre 2 et 0 est une liaison ponctuelle de normale \vec{y}'_0 :

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\psi} \vec{x}'_0 + \dot{\theta} \vec{y}'_0 + \dot{\varphi} \vec{z}'_0 \\ \overrightarrow{V(D \in 2/0)} = \left[\begin{array}{c} -r \vec{x}'_2 \\ d t \end{array} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ = r \dot{\theta} \vec{z}_2 \\ = r \dot{\theta} (\cos \theta \vec{z}'_0 + \sin \theta \vec{x}'_0) \\ = r \dot{\theta} (\cos \theta \vec{z}_0 + \sin \theta (\cos \alpha \vec{x}_0 + \sin \alpha \vec{y}_0)) \end{array} \right\}_D$$

En identifiant les torseurs (et avec $r = \frac{R}{\sin \alpha}$), la projection sur \vec{y}'_0 on a donc :

$$\dot{\lambda} = \frac{R}{\sin \alpha} \dot{\theta} \sin \theta \cos \alpha$$

Exemple

2.2.2 Cas des mobilités internes

Mobilité interne

Il s'agit du nombre de paramètres indépendants à imposer pour connaître les mouvements (ou positions) des pièces internes seulement du mécanisme (indépendamment de la loi entrée sortie).

Définition

Pompe

Sur la pompe précédente on peut observer que le piston 2 est en liaison pivot glissant avec la pièce 1. On observe que la rotation propre du piston ne change rien au fonctionnement du mécanisme. Ainsi, dans le cas où cette rotation était supprimé, le fonctionnement serait inchangé.

La rotation de ce piston pourrait donc être supprimée et la liaison pivot glissant pourrait être remplacée par une liaison glissière.

Exemple

3 Notion de puissance délivrée par un mécanisme

Puissance

La puissance dans un mécanisme est donnée par le co-moment du torseur statique et du torseur cinématique. Elle s'exprime en Watt :

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \rightarrow E)\} \otimes \{\mathcal{V}(\overline{E}/E)\}$$

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}} \otimes \left\{ \begin{array}{cc} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\overline{E} \rightarrow E)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, \overline{E} \rightarrow E)} \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(\overline{E}/E)} \\ \overrightarrow{V(A \in \overline{E}/E)} \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}}$$

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{R(\overline{E} \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{V(A \in \overline{E}/E)} + \overrightarrow{\Omega(\overline{E}/E)} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}(A, \overline{E} \rightarrow E)}$$

Définition

Puissance consommée par une liaison pivot sans frottement :

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}} \otimes \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L \\ M \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Dans les liaisons sans frottement la puissance dissipée est nulle.

Puissance consommée par une liaison pivot avec frottement visqueux :

Le couple de frottement visqueux est proportionnel à la vitesse de rotation : $C_f = f \dot{\gamma}$

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & f \dot{\gamma} \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}} \otimes \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L \\ M \\ f \dot{\gamma} \end{bmatrix} = f \dot{\gamma}^2$$

Puissance de coupe

Exemple

Références

- [1] Mécanique – Partie 5, Analyse des mécanismes : chaînes de solides. Cours de Maryline Carrez – PT (2009–2010). Lycée Jules Haag, Besançon.