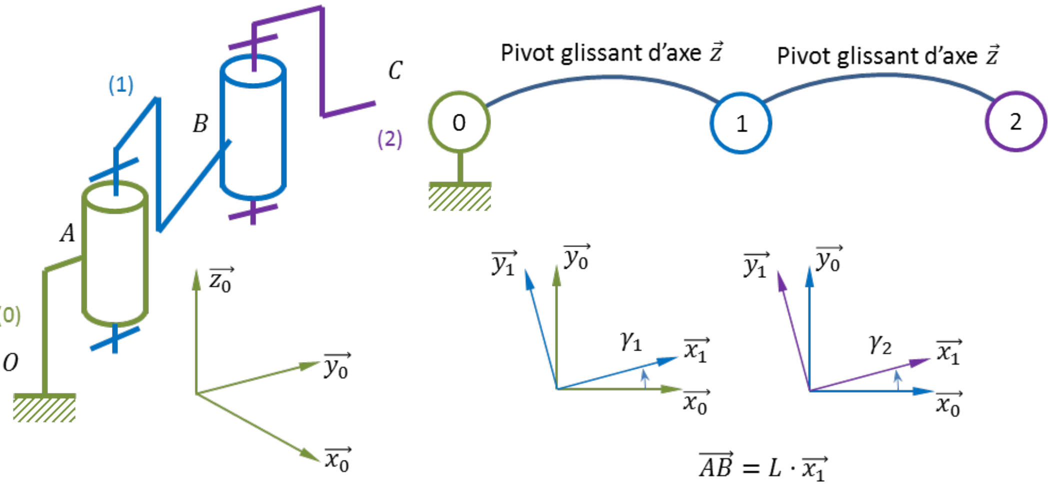
CI 9 : Étude des mécanismes complexes

Chapitre 1 – Introduction aux chaînes de solides – Applications

Exercice 1 - Chaîne ouverte

On donne le schéma suivant :



Question
Quelle est, a priori, la liaison équivalente entre les solides 0 et 2 ?

Question
Donner, par la méthode de votre choix, la liaison équivalente entre les solides 0 et 2 ?

Méthode 1 – Décomposition du torseur cinématiques

Torseur cinématique de la liaison pivot en A entre 0 et 1 :

$$\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\gamma}_1 \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(A\in 1/0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$$

Torseur cinématique de la liaison pivot en B puis en A entre 2 et 1 :

$$\{\mathscr{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\gamma}_2 \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(B\in 2/1)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\gamma}_2 \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(A\in 2/1)} = -L\dot{\gamma}_2 \overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}_A$$

Par composition du torseur cinématique, on a :

$$\{\mathscr{V}(2/1)\} + \{\mathscr{V}(1/0)\} = \{\mathscr{V}(2/0)\}$$

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)\, \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(A\in 2/0)} = -L\dot{\gamma}_2 \overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)\, \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(A\in 2/0)} = -L\dot{\gamma}_2 \left(\cos\gamma_1 \overrightarrow{y_0} - \sin\gamma_1 \overrightarrow{x_0}\right) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \dot{u}_{eq} \\ 0 & \dot{v}_{eq} \\ \dot{\gamma}_{eq} & 0 \end{array} \right\}_A$$

Cette liaison permet donc deux translations suivant $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$ et une rotation autour de $\overrightarrow{z_0}$. La liaison équivalente à ces deux liaisons pivot en série est donc une liaison appui-plan.

Corrigé

Méthode 2 – Utilisation des torseurs statiques

Torseur statique de la liaison pivot en A entre 0 et 1 :

$$\{\mathcal{T}(0\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{cc} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{array}\right\}_{A,\mathcal{R}_0}$$

Torseur statique de la liaison pivot en B puis en A entre 2 et 1 :

$$\{\mathcal{T}(2\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{cc} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{array}\right\}_{B,\mathcal{R}_0}=\left\{\begin{array}{cc} X_{21} & L_{21}+L\sin\gamma_1 Z_{21} \\ Y_{21} & M_{21}-L\cos\gamma_1 Z_{21} \\ Z_{21} & L\cos\gamma_1 Y_{21}-L\sin\gamma_1 X_{21} \end{array}\right\}_{A,\mathcal{R}_0}$$

Le torseur équivalent à la liaison entre 0 et 2 est donc tel que :

$$\{\mathcal{T}(2\rightarrow 1)\}=\{\mathcal{T}(0\rightarrow 1)\}=\{\mathcal{T}_{eq}\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} X_{21}=X_{01}=X_{eq} \\ Y_{21}=Y_{01}=Y_{eq} \\ Z_{21}=Z_{01}=Z_{eq} \\ L_{21}+L\sin\theta Z_{21}=L_{01}=L_{eq} \\ M_{21}+L\cos\theta Z_{21}=M_{01}=M_{eq} \\ L\cos\theta Y_{21}-L\sin\theta X_{21}=0=N_{eq} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X_{21}=X_{01}=X_{eq} \\ Y_{21}=Y_{01}=Y_{eq} \\ Z_{eq}\neq 0 \\ L_{eq}\neq 0 \\ M_{eq}\neq 0 \\ N_{eq}=0 \\ Y_{21}\cos\theta-X_{21}\sin\theta=0 \end{array}\right.$$

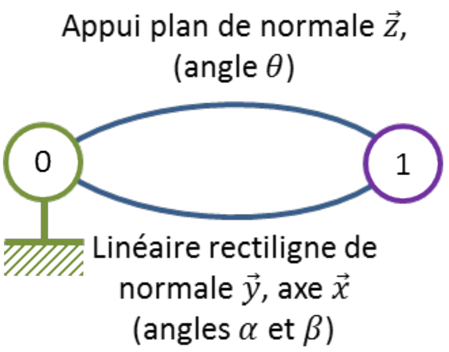
Nécessairement $X_{21}=0$ *et* $Y_{21}=0$.
La liaison équivalente a donc pour torseur la forme suivante :

$$\{\mathcal{T}_{eq}\}=\left\{\begin{array}{cc} 0 & L_{eq} \\ 0 & M_{eq} \\ Z_{eq} & 0 \end{array}\right\}_{A,\mathcal{R}_1}$$

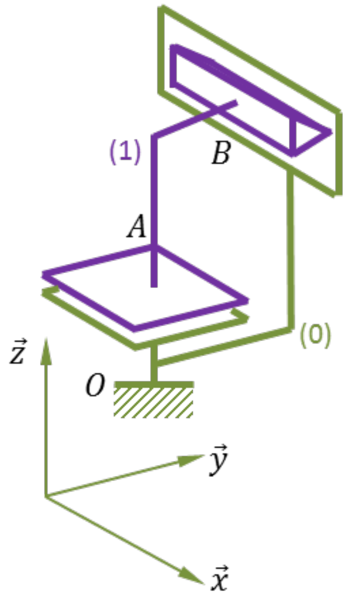
Corrigé

Exercice 2 - Chaîne fermée

On donne le schéma suivant :



$$\overrightarrow{AB} = H \cdot \overrightarrow{z_1} + L \cdot \overrightarrow{y_1}$$



Question

Donner, par la méthode de votre choix, la liaison équivalente entre les solides 0 et 1 ?

Méthode 1 – Utilisation du torseur cinématique

Torseur cinématique de la liaison appui-plan en A entre 0 et 1 :

$$\{\mathscr{V}(1/0)\}_{AP} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)}_{AP} = \dot{\gamma}_{AP}\,\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{V(A\in 1/0)}_{AP} = \dot{u}_{AP}\,\overrightarrow{x_1} + \dot{v}_{AP}\,\overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}_A$$

Torseur cinématique de la liaison linéaire rectiligne en B puis en A entre 1 et 0 :

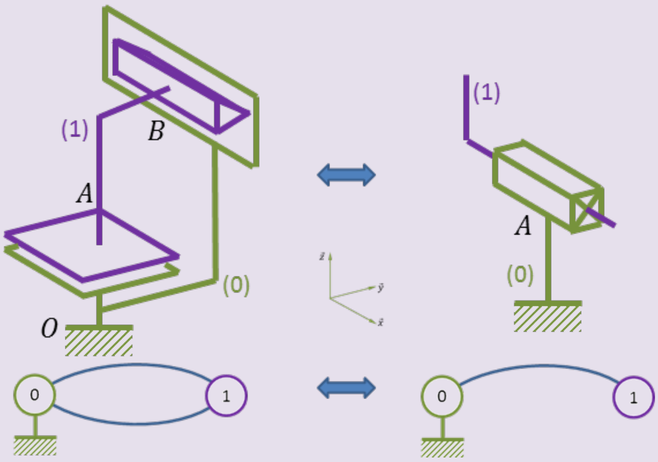
$$\begin{aligned} \{\mathscr{V}(1/0)\}_{LR} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)}_{LR} = \dot{\alpha}_{LR}\,\overrightarrow{x_1} + \dot{\beta}_{LR}\,\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{V(B\in 1/0)}_{LR} = \dot{u}_{LR}\,\overrightarrow{x_1} + \dot{w}_{LR}\,\overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_B \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)}_{LR} = \dot{\alpha}_{LR}\,\overrightarrow{x_1} + \dot{\beta}_{LR}\,\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{V(A\in 1/0)}_{LR} = \left(\dot{u}_{LR} - H\dot{\beta}_{LR}\right)\overrightarrow{x_1} + H\dot{\alpha}_{LR}\,\overrightarrow{y_1} + \left(\dot{w}_{LR} + L\dot{\alpha}_{LR}\right)\overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_A \end{aligned}$$

Les deux liaisons étant en parallèles, il est nécessaire qu'elles permettent les mêmes mobilités. En conséquence, on doit avoir :

$$\{\mathscr{V}(1/0)\}_{LR} = \{\mathscr{V}(1/0)\}_{AP}$$

En conséquence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}_{LR} = 0 \\ \dot{\beta}_{LR} = 0 \\ 0 = \dot{\gamma}_{AP} \\ \dot{u}_{LR} - H\dot{\beta} = \dot{u}_{AP} \\ H\dot{\alpha}_{LR} = \dot{v}_{AP} \\ \dot{w}_{LR} + L\dot{\alpha}_{LR} = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}_{LR} = 0 \\ \dot{\beta}_{LR} = 0 \\ \dot{\gamma}_{AP} = 0 \\ \dot{u}_{LR} = \dot{u}_{AP} \\ \dot{v}_{AP} = 0 \\ \dot{w}_{LR} = 0 \end{array} \right.$$



Corrigé

Au final,

$$\{\mathscr{V}_{eq}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \dot{u} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{A}$$

La seule composante non nulle du torseur cinématique est donc la vitesse de déplacement suivant $\overrightarrow{x_1}$. La liaison est donc une liaison glissière d'axe $\overrightarrow{x_1}$

Méthode 2 – Utilisation du torseur statique

Torseur statique de la liaison appui-plan en A entre 0 et 1 :

$$\{\mathscr{T}(1 \rightarrow 0)\}_{AP} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{01,AP} \\ 0 & M_{01,AP} \\ Z_{01,AP} & 0 \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_1}$$

Torseur statique de la liaison linéaire rectiligne en B puis en A entre 1 et 0 :

$$\{\mathscr{T}(1 \rightarrow 0)\}_{LR} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{01,LR} & 0 \\ 0 & N_{01,LR} \end{array} \right\}_{B,\mathscr{R}_1} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -HY_{01,LR} \\ Y_{01,LR} & 0 \\ 0 & N_{01,LR} \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_1}$$

En appliquant le PFS au solide 1 au point A, on a donc :

$$\{\mathscr{T}(0 \rightarrow 1)\}_{AP} + \{\mathscr{T}(0 \rightarrow 1)\}_{LR} = \{\mathscr{T}_{eq}\}$$

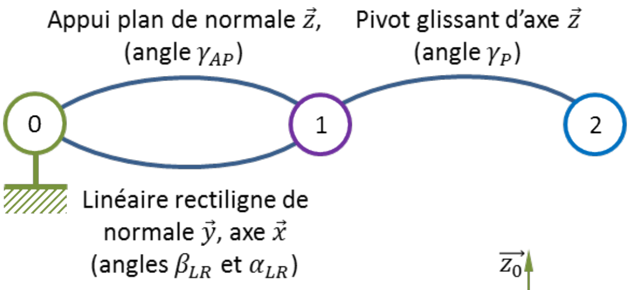
$$\left\{ \begin{array}{l} 0+0=X \\ 0+Y_{01,LR}=Y \\ Z_{01,AP}+0=Z \\ L_{01,AP}-HY_{01,LR}=L \\ M_{01,AP}+0=M \\ 0+N_{01,LR}=N \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X=0 \\ Y=Y_{01,LR} \\ Z=Z_{01,AP} \\ L=L_{01,AP}-HY_{01,LR} \\ M=M_{01,AP} \\ N=0+N_{01,LR} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \{\mathscr{T}_{eq}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_1}$$

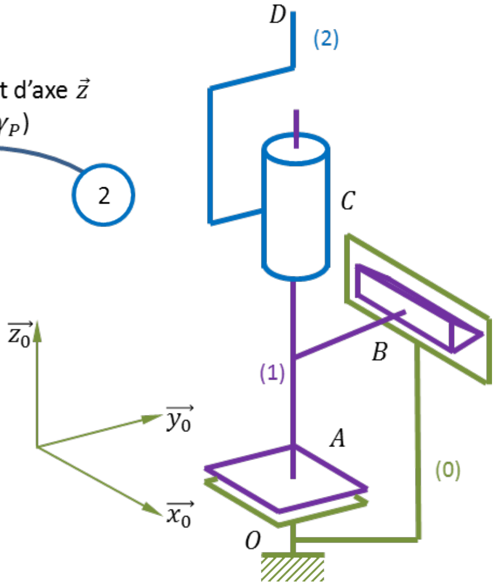
Les deux liaisons en parallèles sont donc équivalentes à une liaison glissière d'axe $\overrightarrow{x_1}$.

Corrigé

Exercice 3 – Chaînes complexes

On donne le schéma suivant :



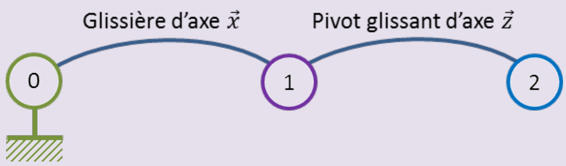


$$\overrightarrow{AB} = H \cdot \vec{z_1} + L \cdot \vec{y_1}$$
$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \vec{z_1}$$

Question

Donner, par la méthode de votre choix, la liaison équivalente entre les solides 0 et 2 ?

Dans ce schéma, on identifie d'abord que les liaisons entre 0 et 1 sont en parallèles. On a déjà vu que la liaison équivalente (appui-plan et linéaire rectiligne) était une liaison glissière d'axe $\overrightarrow{x}$. La chaîne complexe précédente est alors équivalente à la suivante :



Avec $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_1}$ ou $\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \dot{u}_{10} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_1}$.

Méthode 1 – Utilisation du torseur cinématique

Torseur cinématique de la liaison glissière en A entre 1 et 0 : $\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \dot{u}_{10} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_1}$

Torseur cinématique de la liaison pivot glissant en A entre 2 et 1 : $\{\mathscr{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{21} & \dot{w}_{21} \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_1}$

La liaison équivalente à la chaîne cinématique est donc la suivante :

$$\{\mathscr{V}_{eq}\} = \{\mathscr{V}(2/0)\} = \{\mathscr{V}(2/1)\} + \{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \dot{u}_{10} \\ 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{21} & \dot{w}_{21} \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_1}$$

Cette liaison permet donc trois degrés de liberté : deux translations suivant $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{z}$ et une rotation autour de $\overrightarrow{z}$. Cette liaison équivalente n'est pas associable à une liaison usuelle.

Méthode 2 – Utilisation du torseur statique

Torseur statique de la liaison glissière en A entre 1 et 0 : $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & N_{10} \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_1}$

Corrigé

Corrigé

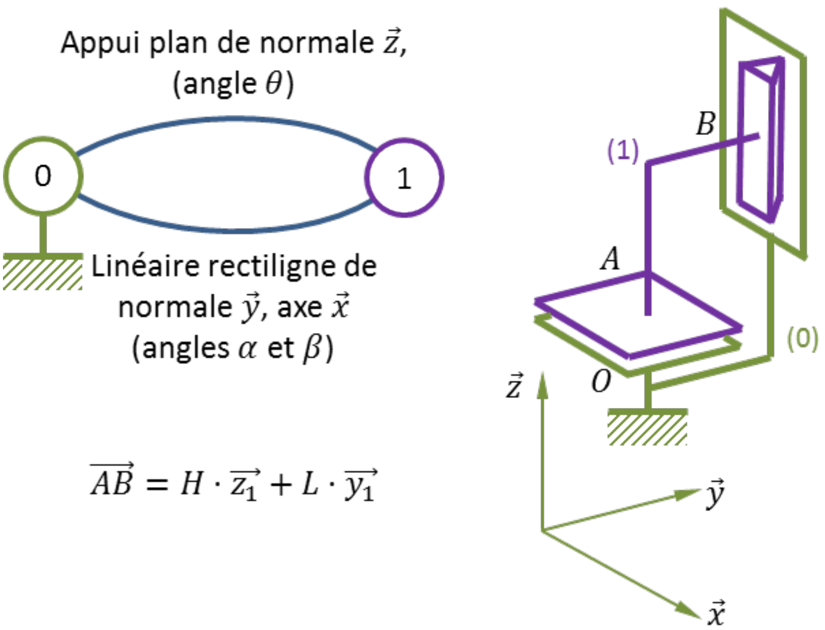
Torseur statique de la liaison pivot glissant en A entre 2 et 1 : $\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{cc} X_{20} & L_{20} \\ Y_{20} & M_{20} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{A,\mathscr{R}_1}$

La liaison équivalente à la chaîne cinématique est donc la suivante :

$$\{\mathscr{T}_{eq}\} = \{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\} + \{\mathscr{T}(1\rightarrow 0)\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = X_{20} \\ Y_{10} = Y_{20} \\ Z_{10} = 0 \\ L_{10} = L_{20} \\ M_{10} = M_{20} \\ N_{10} = 0 \end{array}\right. \quad \{\mathscr{T}_{eq}\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & L_{20} \\ Y_{20} & M_{20} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{A,\mathscr{R}_1}$$

Cette liaison a donc trois degrés de liaison : une translation suivant $\overrightarrow{y}$ et deux rotations autour de $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$. Cette liaison équivalente n'est pas associable à une liaison usuelle.

Exercice 4 – Un peu d'hyperstatisme



Question
Donner, par la méthode de votre choix, la liaison équivalente entre les solides 0 et 1 ?

Corrigé

Méthode 1 – Utilisation du torseur cinématique

Torseur cinématique de la liaison appui plan en A entre 1 et 0 : $\{\mathscr{V}(1/0)\}_{AP} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \dot{u}_{10,AP} \\ 0 & \dot{v}_{10,AP} \\ \dot{\gamma}_{10,AP} & 0 \end{array}\right\}_{A,\mathscr{R}_1}$

Torseur cinématique de la liaison cylindre – plan en B puis en A entre 1 et 0 :

$$\{\mathscr{V}(1/0)\}_{CyP} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \dot{u}_{10,CyP} \\ \dot{\beta}_{10,CyP} & 0 \\ \dot{\gamma}_{10,CyP} & \dot{w}_{10,CyP} \end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_\infty} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \dot{u}_{10,CyP} + L\cdot\dot{\gamma}_{10,CyP} - H\cdot\dot{\beta}_{10,CyP} \\ \dot{\beta}_{10,CyP} & 0 \\ \dot{\gamma}_{10,CyP} & \dot{w}_{10,CyP} \end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_1}$$

La liaison équivalente à la chaîne cinématique est donc la suivante :

$$\{\mathscr{V}_{eq}\} = \{\mathscr{V}(1/0)\}_{SP} = \{\mathscr{V}(1/0)\}_{CyP} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \dot{u}_{10,AP} \\ 0 & \dot{v}_{10,AP} \\ \dot{\gamma}_{10,AP} & 0 \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_1} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \dot{u}_{10,CyP} + L\cdot\dot{\gamma}_{10,CyP} - H\cdot\dot{\beta}_{10,CyP} \\ \dot{\beta}_{10,CyP} & 0 \\ \dot{\gamma}_{10,CyP} & \dot{w}_{10,CyP} \end{array} \right\}_{B,\mathscr{R}_1}$$

D'où :

$$\{\mathscr{V}_{eq}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \dot{u}_{10,CyP} + L\cdot\dot{\gamma}_{10,CyP} \\ 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{10,CyP} & 0 \end{array} \right\}_{B,\mathscr{R}_1} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_{10,APP} = \dot{u}_{10,CyP} + L\cdot\dot{\gamma}_{10,CyP} \\ \dot{\gamma}_{10,APP} = \dot{\gamma}_{10,CyP} \end{array} \right.$$

Cette liaison permet donc deux degrés de liberté : une translations suivant $\overrightarrow{x}$ et une rotation autour de $\overrightarrow{z}$. Cette liaison équivalente n'est pas associable à une liaison usuelle.

Méthode 2 – Utilisation du torseur statique

Torseur statique de la liaison appui plan en A entre 1 et 0 : $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 0)\}_{AP} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{10,AP} \\ 0 & M_{10,AP} \\ Z_{10,AP} & 0 \end{array} \right\}_{A,\mathscr{R}_1}$

Torseur statique de la liaison cylindre – plan en B puis en A entre 1 et 0 :

$$\{\mathscr{T}(1\rightarrow 0)\}_{CyP} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{10,CyP} \\ Y_{10,CyP} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{B,\mathscr{R}_1} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{10,CyP} - HY_{10,CyP} \\ Y_{10,CyP} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{B,\mathscr{R}_1}$$

La liaison équivalente à la chaîne cinématique est donc la suivante :

$$\{\mathscr{T}_{eq}\} = \{\mathscr{T}(1\rightarrow 0)\}_{SP} + \{\mathscr{T}(1\rightarrow 0)\}_{CyP} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} X_{eq} & = & 0+0 \\ Y_{eq} & = & Y_{10,CyP}+0 \\ Z_{eq} & = & 0+Z_{10,AP} \\ L_{eq} & = & L_{10,AP} \\ & & -HY_{10,CyP}+L_{10,CyP} \\ M_{eq} & = & 0+M_{10,AP} \\ N_{eq} & = & 0+0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_{eq} = 0 \\ Y_{eq} = Y_{10,CyP} \\ Z_{eq} = Z_{10,AP} \\ L_{eq} = L_{10,CyP} - HY_{10,CyP} + L_{10,AP} \\ M_{eq} = M_{10,AP} \\ N_{eq} = 0 \end{array} \right.$$

$$\{\mathscr{T}_{eq}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{10,CyP} - HY_{10,CyP} + L_{10,AP} \\ Y_{CyP} & M_{10,AP} \\ Z_{CyP} & 0 \end{array} \right\}_{B,\mathscr{R}_1}$$

Cette liaison permet donc deux degrés de liberté : une translations suivant $\overrightarrow{x}$ et une rotation autour de $\overrightarrow{z}$. Cette liaison équivalente n'est pas associable à une liaison usuelle.

Corrigé