Colle 01

Mât de l'AddBike

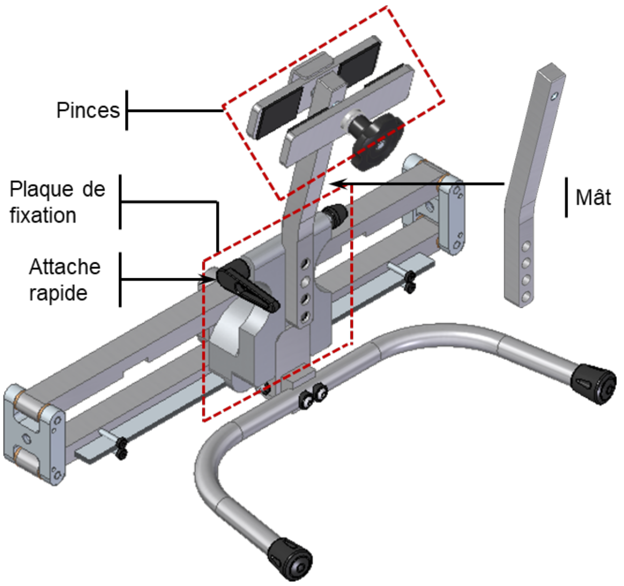
Agrégation SII – 2018

Savoirs et compétences :

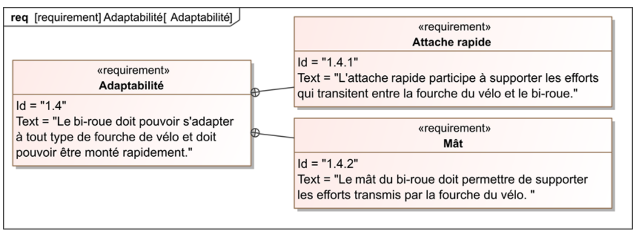
Mise en situation

Le dispositif Bi-roue est un système développé par une start-up dont le but est de développer l'utilisation d'un vélo afin d'en faire une réelle alternative aux autres moyens de transport. Ce produit doit s'adapter à tous types de vélo et doit permettre de transporter de la marchandise (colis ou courses du quotidien) ou encore des enfants.

On représente ci-dessous le système sans les roues et sans le système de transport.

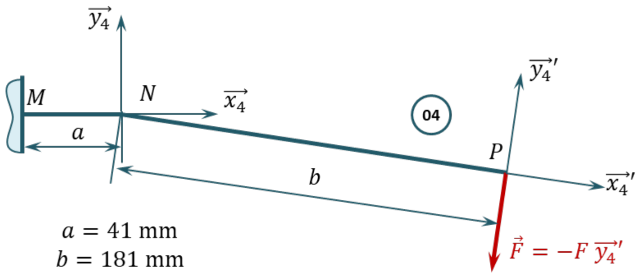


Un extrait des exigences est donné ci-dessous.



Modélisation retenue

On s'intéresse au dimensionnement du mât. Cet élément participe à la rigidité de la liaison entre la fourche du vélo et l'AddBike. Le modèle retenu est proposé figure suivante.



Question 1 *Déterminer le torseur de cohésion dans chacun des deux tronçons de la poutre.*

Question 2 *Tracer les diagrammes des sollicitations et préciser leur nom.*

Choix du matériau et de la géométrie

Quels que soient les résultats de la partie précédente, on considère que le mât n'est soumis qu'à de la flexion. On néglige l'angle du mât. Dans le but de dimensionner la section du mât, on cherche à connaître le matériau proposant le meilleur compromis masse – tenue sans déformation permanente. Les paramètres a et d sont appelés paramètres fixes et c le paramètre ajustable. On note ρ la masse volumique du matériau.

Question 3 *Donner l'expression de la contrainte normale maximale dans le mât. Exprimer sa masse en fonction des paramètres fixes $(a$ et $d)$, du moment de flexion, de la masse volumique et de la contrainte normale.*

On admet que la masse est proportionnelle à $\dfrac{\rho}{\sigma_{\text{maxi}}^{2/3}}$.

Question 4 *Quel critère faut-il maximiser pour minimiser la masse du mât tout en garantissant un fonctionnement sans déformation permanente de la pièce ?*

Question 5 *En utilisant la carte d'Ashby (limite élastique en fonction de la masse volumique), proposer des matériaux permettant d'obtenir les meilleurs compromis masse – contrainte élastique.*

On considère que le moment maximal est de 150 N m.

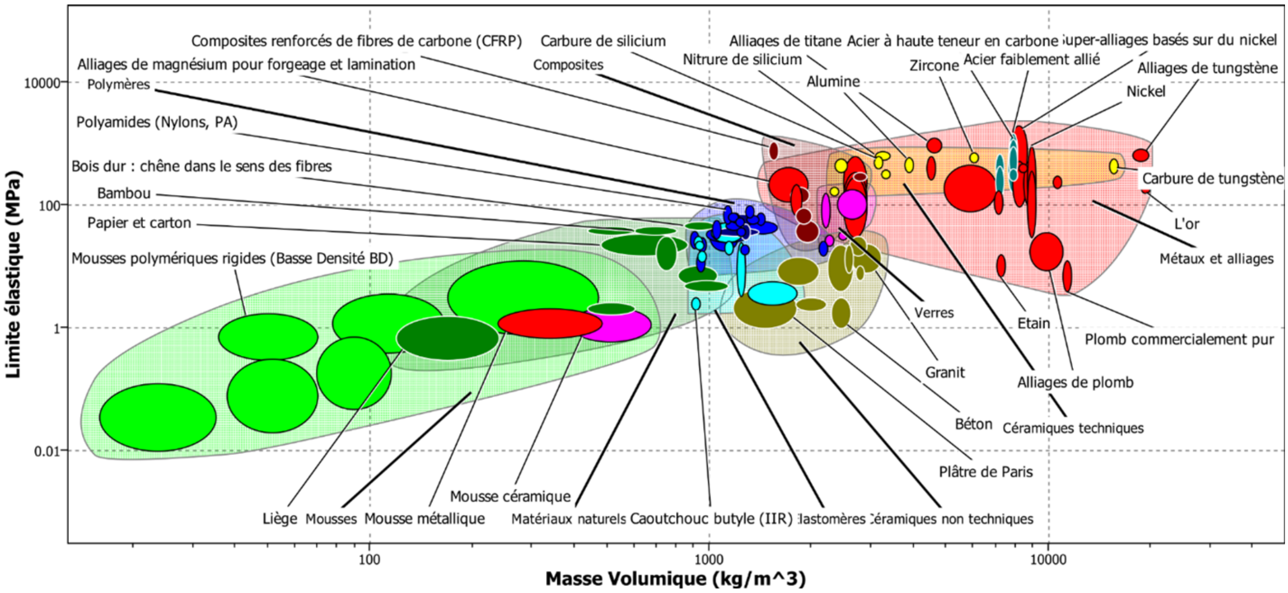
Question 6 *En utilisant un coefficient de sécurité de 2 et les résultats des questions précédentes, choisir un matériau et déterminer la valeur de c permettant que l'exigence*

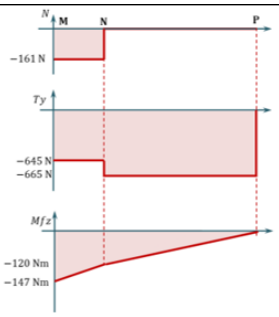
1.4.2 soit satisfaite.

Détermination des déformations

Question 7 *Proposer une méthode permettant de déterminer le déplacement du point P.*

Question 8 *Après validation du professeur, mettre en œuvre cette méthode. .*



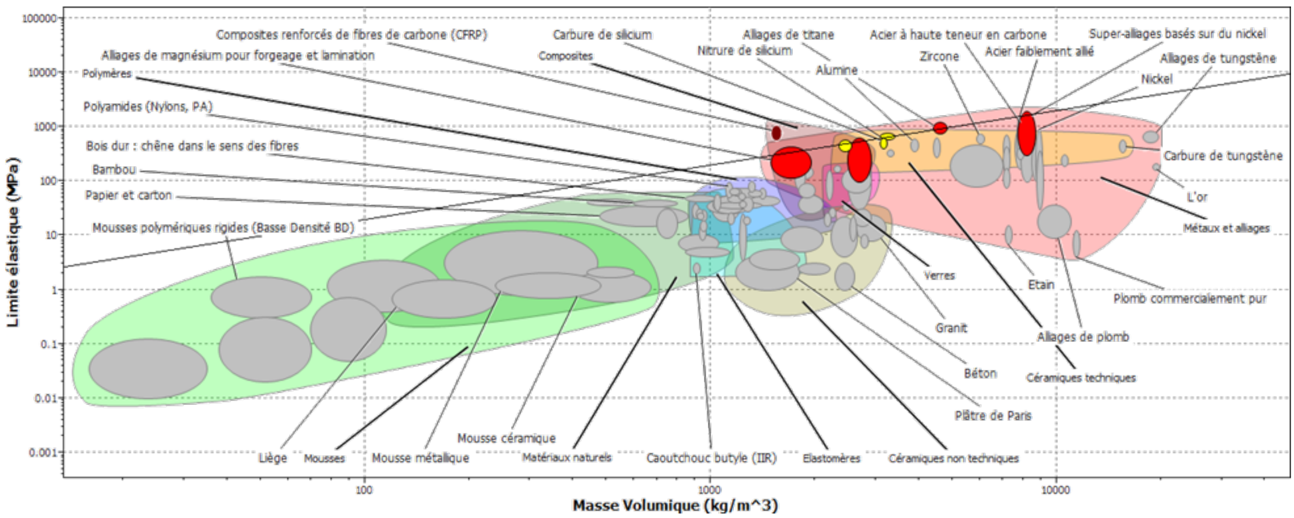
Sur le tronçon MN :	Sur le tronçon NP :	
On isole *II* et on réalise le BAME : • action de $\{I \rightarrow II\}$; • action de $\{F \rightarrow II\}$. On applique le PFS et on a • $\{II\rightarrow I\}=\{F\rightarrow II\}$ $\overrightarrow{M_G}=\overrightarrow{M_P}+\overrightarrow{GP}\wedge -F\overrightarrow{y_4}$ $=((a-\lambda)\overrightarrow{x_4}+d\overrightarrow{x_4})\wedge -F\overrightarrow{y_4}$ $=-F((a-\lambda)\cos\varphi+d)\overrightarrow{z_4}$ $\{II\rightarrow I\}=\begin{Bmatrix} F\sin\varphi & 0 \\ -F\cos\varphi & 0 \\ 0 & -F((a-\lambda)\cos\varphi+d) \end{Bmatrix}_G$	On isole *II* et on réalise le BAME : • action de $\{I\rightarrow II\}$; • action de $\{F\rightarrow II\}$. On applique le PFS et on a • $\{II\rightarrow I\}=\{F\rightarrow II\}$ $\overrightarrow{M_G}=\overrightarrow{M_P}+\overrightarrow{GP}\wedge -F\overrightarrow{y_4}$ $=\left((d-\lambda)\overrightarrow{x_4}\right)\wedge -F\overrightarrow{y_4}$ $=-F(d-\lambda)\overrightarrow{z_4}$ $\{II\rightarrow I\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(d-\lambda) \end{Bmatrix}_G$	 Le tronçon *MN* est en traction et flexion. Le tronçon *NP* est en flexion simple.

- L'objectif est de minimiser la masse du mât.
- Contraintes :
  - paramètres fixés : longueur du mât, effort en bout de mât, faible déformation élastique ;
  - paramètre ajustable : mât section carrée de côté *c*.
- Relations physiques :
  - Masse : $m=\rho V=\rho(a+d)c^2$
  - Contrainte : $\sigma_{maxi}=-\frac{M_{fz}y}{I_{Gz}}=-\frac{M_{fz}\frac{c}{2}}{\frac{c^4}{12}}=-\frac{6M_{fz}}{c^3}$
- Fonction objectif : exprimer m indépendamment de c : $\sigma_{maxi}=-\frac{6M_{fz}}{c^3}\Leftrightarrow c=\sqrt[3]{-\frac{6M_{fz}}{\sigma_{maxi}}}$

$$m=\rho(a+d)\left(\sqrt[3]{-\frac{6M_{fz}}{\sigma_{maxi}}}\right)^2=(a+d)\rho\left(\frac{-6M_{fz}}{\sigma_{maxi}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

En utilisant la relation précédente, on exprime σ_{maxi} en fonction de ρ conformément au diagramme d'Ashby proposé : $\sigma_{maxi}^{\frac{2}{3}}=\frac{a+d}{m}\rho(-6M_{fz})^{\frac{2}{3}}=\rho K$

- Ainsi, minimiser la masse revient à maximiser *K*.
- En diagramme semi logarithmique on a $\frac{2}{3}\log\sigma_{maxi}=\log K+\log\rho$.
- On trace ainsi une droite de pente 3/2 dans le diagramme d'Ashby ce qui permet de choisir les matériaux suivants :
  - composites renforcés de fibres de carbone ;
  - alliages de titane ;
  - aciers à haute teneur en carbone…



- On a vu que $\sigma_{maxi}=\frac{6M_{fz}}{c^3}$.
- Choisissons un acier faiblement allié pour lequel la limite élastique est de $1000\,MPa$ (il faudrait recroiser l'étude précédente avec une étude économique pour vérifier qu'un matériau avec une telle limite élastique a un prix acceptable pour l'entreprise).
- Ainsi, $\sigma_{maxi}<\frac{\sigma_E}{2} \Leftrightarrow \frac{12M_{fz}}{\sigma_E}<c^3 \Rightarrow c>\sqrt[3]{\frac{12M_{fz}}{\sigma_E}} \Rightarrow c>\sqrt[3]{\frac{12\cdot 150\,000}{1000}} \Rightarrow c>12,16$ mm.

Pour $\sigma_E=250$ MPa (acier de moins bonne qualité) c>19,3 mm.

Détermination de la déformée : $EI_{G_z}\dfrac{\mathrm{d}^2(x)}{\mathrm{d}x^2}=Mf_z$

$$EI_{G_z}\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}=Mf_z$$
$$EI_{G_z}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=Mf_z x+k_1$$
$$EI_{G_z}y(x)=\frac{Mf_z x^2}{2}+k_1x+k_2$$

Conditions aux limites : $y(0)=0$ et $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$

On a donc $k_1=0$ et $k_2=0$.

En conséquence, $y(a)=\frac{Fba^2}{2EI_{G_z}}$ et $y'(a)=\frac{\mathrm{Fba}}{EI_{G_z}}$

$$EI_{G_z}\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}=Mf_z$$
$$EI_{G_z}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=Mf_z x+k_1$$
$$EI_{G_z}y(x)=\frac{Mf_z x^2}{2}+k_1x+k_2$$

Conditions aux limites : $y(0)=y_a$ et $\left.\frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}=y'_a$

On a donc

$$EI_{G_z}y_a=k_2$$
$$EI_{G_z}y'_a=k_1$$