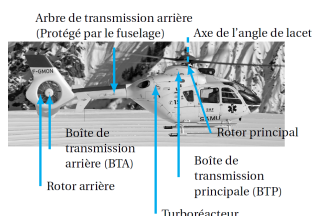


## Colle 01



## Banc d'essai de boîte de transmission principale (BTP)

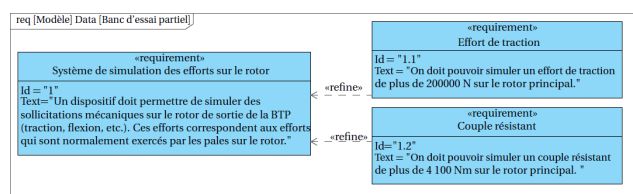
CCP TSI

Savoirs et compétences :

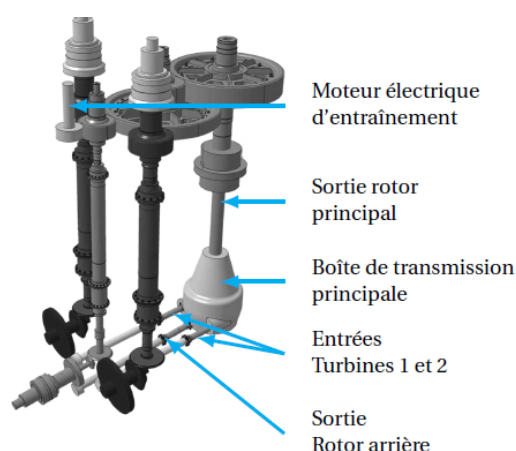
## Mise en situation

La Boîte de Transmission Principale (BTP) permet de distribuer la puissance au rotor principal, au rotor de queue ainsi qu'à différents accessoires d'un hélicoptère (alternateur, pompe hydraulique, etc.).

Afin d'évaluer la qualité de la BTP, un banc d'essai permet de la solliciter et de recréer les conditions de vol. Le diagramme des exigences partiel des exigences est donné figure suivante.

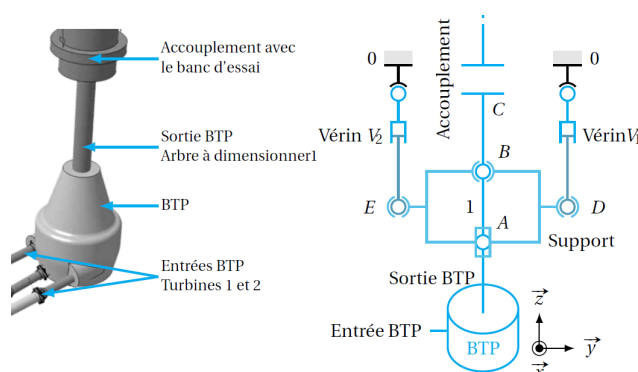


**Objectif** L'objectif de cette étude est de dimensionner l'arbre faisant la jonction entre la BTP et le banc d'essai.



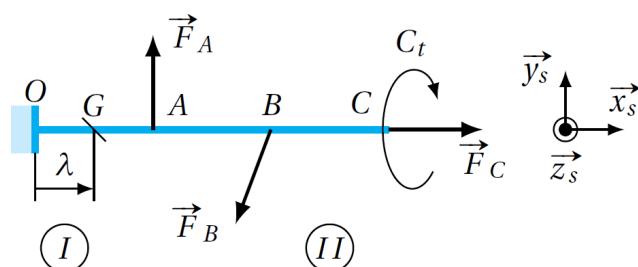
## Modélisation de la structure

Le modèle suivant présente l'arbre de sortie de BTP intégré dans le banc d'essai.



On étudie la phase de vie où l'hélicoptère passe d'une condition de vol stationnaire à un déplacement. Cette configuration du banc d'essai se traduit par la modélisation donnée figure suivante. Les efforts sont les suivants en A, B et C dans le repère  $(O, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ .

$$\{\mathcal{T}(\text{Ext}_A \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_S}, \{\mathcal{T}(\text{Ext}_B \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} -F_x & 0 \\ -F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_S}, \{\mathcal{T}(\text{Ext}_C \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} F_x & C_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_S}.$$



- $OA = \ell_1 = 100 \text{ mm}$ ;
- $OB = \ell_2 = 200 \text{ mm}$ ;
- $OC = \ell_3 = 300 \text{ mm}$ ;
- $F_x = 80\,000 \text{ N}$ ;
- $F_y = 120\,000 \text{ N}$ ;
- $C_t = 4100 \text{ Nm}$ ;
- $R_e = 600 \text{ Mpa}$
- limite d'élasticité au glissement :  $R_{eg} = 0,5 R_e$ .

## Évaluer les contraintes dans l'arbre

**Question 1** Après avoir identifié les différents tronçons à étudier, déterminer le torseur de cohésion dans l'arbre de sortie de la BTP.

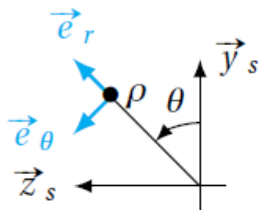
**Question 2** Tracer les diagrammes des sollicitations associés à chacune des composantes du torseur de cohésion.

**Question 3** En ne tenant compte que des sollicitation donnant lieu à une contrainte normale, donner, dans chacun des tronçons :

- l'expression vectorielle de contrainte normale;
- l'allure du champ des contraintes;
- le diamètre minimal de l'arbre permettant de rester dans le domaine élastique.

**Question 4** En ne prenant en compte que le moment de torsion, déterminer quel serait le rayon minimal de la poutre.

**Question 5** Sur le tronçon ]AB[, déterminer l'expression de la norme du vecteur « contrainte de cisaillement ». Tracer l'allure du champ des contraintes sur ce tronçon. Pour réaliser ce calcul, on pourra introduire le système de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  décrit par la figure ci-dessous.

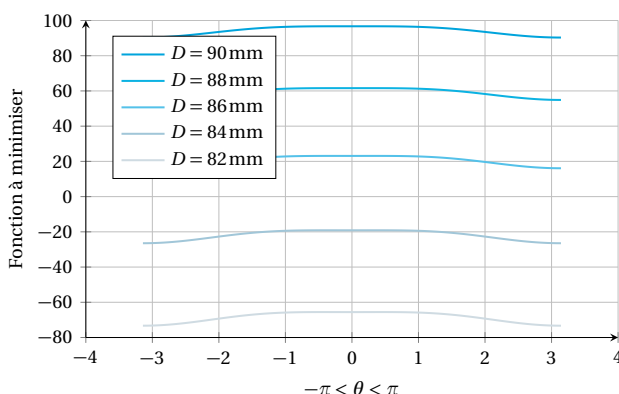


Il n'est pas possible de sommer des contraintes normales et des contraintes de cisaillement. On utilise alors le critère de von Mises, basé sur l'utilisation d'une contrainte équivalente. En utilisant le système de coordonnées polaires dans une section droite, on définit cette contrainte équivalente par  $\sigma_{vm}(\rho, \theta) = \sqrt{\sigma_n^2(\rho, \theta) + 3\tau^2(\rho, \theta)}$  où  $\sigma_n$  et  $\tau$  représentent respectivement les contraintes normale et tangentielle. Le critère de von Mises est alors :  $\sigma_{vm} \leq R_e$ .

**Question 6** Exprimer  $\sigma_{vm}(\rho, \theta)$  pour tout point d'une section circulaire de diamètre  $D$  du tronçon ]AB[. On exprimera le résultat en fonction de  $C_t$ ,  $F_y$ ,  $D$ ,  $\lambda$ ,  $\ell_2$ .

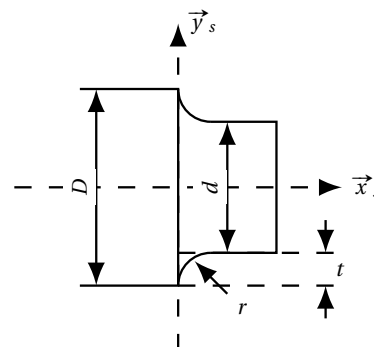
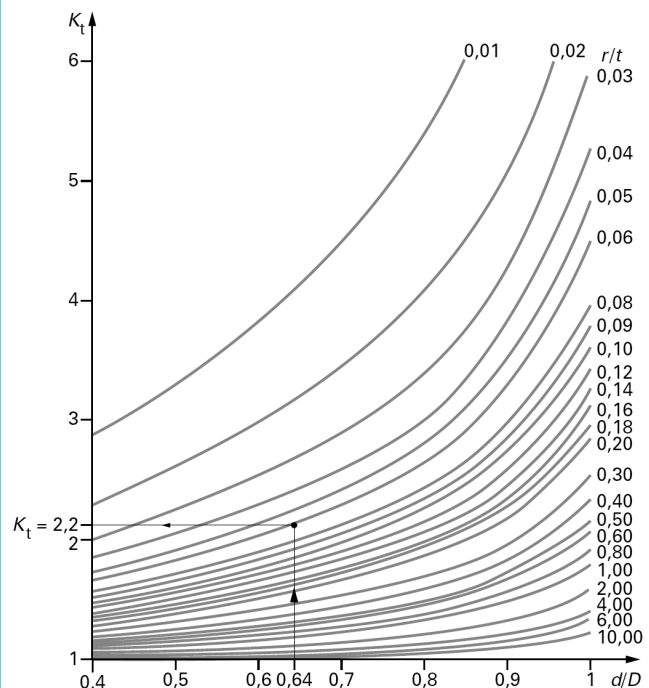
**Question 7** Pour quelles valeurs de  $\lambda$  et  $\rho$  cette contrainte est-elle maximale? Exprimer alors le critère de dimensionnement à appliquer en fonction de  $D$ ,  $F_y$ ,  $C_t$ ,  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ ,  $\theta$  et  $R_e$ .

La figure suivante représente la fonction  $R_e - \sigma_{vm}$  pour  $\theta$  compris dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  pour différents diamètres.



**Question 8** On choisit un diamètre de 59 mm pour le tronçon ]BC[. Proposer un diamètre de l'arbre pour le tronçon ]AB[ en utilisant la figure précédente.

**Question 9** En conservant les dimensions précédentes et en considérant une phase de vie où l'arbre n'est soumis qu'à de la torsion, déterminer, en utilisant l'abaque de concentration de contraintes en torsion de la figure suivante le rayon de raccordement pour que le coefficient de concentration de contrainte soit inférieur à 1,5.



**Conclusion : Retour par rapport à l'objectif initial**

Une analyse éléments finis a été menée sur l'arbre prédimensionné par la démarche que nous venons de suivre (voir Figure ci-dessous).



**Question 10** Que peut-on en conclure? Justifiez le besoin d'utiliser un coefficient de sécurité pour mener les études de prédimensionnement. Dans le cas où un coefficient de sécurité serait imposé dans un nouveau cahier des charges, quelles seraient les étapes à modifier?

1) **On considère le tronçon  $[OA]$  pour lequel  $\lambda \in ]0, \ell_1[$ .**

- On isole la partie  $II$ .
- On réalise le bilan des actions mécaniques :

$$\begin{aligned}
 - \text{ action en } \{A \rightarrow II\} &= \left\{ \begin{array}{c} F_y \vec{y}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} F_y \vec{y}_s \\ F_y (\ell_1 - \lambda) \vec{z}_s \end{array} \right\}_G ; \\
 - \text{ action en } \{B \rightarrow II\} &= \left\{ \begin{array}{c} -F_x \vec{x}_s - F_y \vec{y}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} -F_x \vec{x}_s - F_y \vec{y}_s \\ -F_y (\ell_2 - \lambda) \vec{z}_s \end{array} \right\}_G ; \\
 - \text{ action en } \{C \rightarrow II\} &= \left\{ \begin{array}{c} F_x \vec{x}_s \\ C_t \vec{x}_s \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} F_x \vec{x}_s \\ C_t \vec{x}_s \end{array} \right\}_G ; \\
 - \{I \rightarrow II\}.
 \end{aligned}$$

• On applique le PFS à la partie  $II$  et on a  $\{A \rightarrow II\} + \{B \rightarrow II\} + \{C \rightarrow II\} + \{I \rightarrow II\} = \{0\}$  soit  $\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = \{A \rightarrow II\} + \{B \rightarrow II\} + \{C \rightarrow II\}$ . Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G, \mathcal{R}_s} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & C_t \\ 0 & 0 \\ 0 & F_y (\ell_1 - \ell_2) \end{array} \right\}_{G, \mathcal{R}_s} .$$

**On considère le tronçon  $[AB]$  pour lequel  $\lambda \in ]\ell_1, \ell_2[$ .**

- On isole la partie  $II$ .
- On réalise le bilan des actions mécaniques :

$$\begin{aligned}
 - \text{ action en } \{B \rightarrow II\} &= \left\{ \begin{array}{c} -F_x \vec{x}_s - F_y \vec{y}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} -F_x \vec{x}_s - F_y \vec{y}_s \\ -F_y (\ell_2 - \lambda) \vec{z}_s \end{array} \right\}_G ; \\
 - \text{ action en } \{C \rightarrow II\} &= \left\{ \begin{array}{c} F_x \vec{x}_s \\ C_t \vec{x}_s \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} F_x \vec{x}_s \\ C_t \vec{x}_s \end{array} \right\}_G ; \\
 - \{I \rightarrow II\}.
 \end{aligned}$$

• On applique le PFS à la partie  $II$  et on a  $\{B \rightarrow II\} + \{C \rightarrow II\} + \{I \rightarrow II\} = \{0\}$  soit  $\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = \{B \rightarrow II\} + \{C \rightarrow II\}$ . Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G, \mathcal{R}_s} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & C_t \\ -F_y & 0 \\ 0 & -F_y (\ell_2 - \lambda) \end{array} \right\}_{G, \mathcal{R}_s} .$$

**On considère le tronçon  $[BC]$  pour lequel  $\lambda \in ]\ell_2, \ell_3[$ .**

- On isole la partie  $II$ .
- On réalise le bilan des actions mécaniques :

$$\begin{aligned}
 - \text{ action en } \{C \rightarrow II\} &= \left\{ \begin{array}{c} F_x \vec{x}_s \\ C_t \vec{x}_s \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} F_x \vec{x}_s \\ C_t \vec{x}_s \end{array} \right\}_G ; \\
 - \{I \rightarrow II\}.
 \end{aligned}$$

• On applique le PFS à la partie  $II$  et on a  $\{C \rightarrow II\} + \{I \rightarrow II\} = \{0\}$  soit  $\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = \{C \rightarrow II\}$ . Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G, \mathcal{R}_s} = \left\{ \begin{array}{cc} F_x & C_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{G, \mathcal{R}_s} .$$

2) On obtient immédiatement les diagrammes de sollicitations de la figure 9.49.

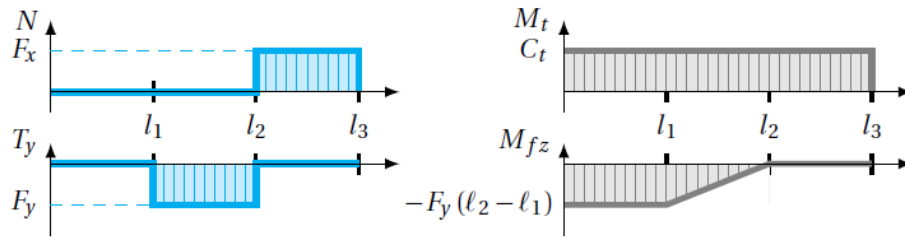


Figure 9.49. Diagrammes des sollicitations.

3) Contraintes de traction compression :

- le tronçon ]OA[ est soumis à un moment fléchissant provoquant l'existence d'une contrainte normale; donc :  $\vec{\sigma}_1 = -\frac{Mfz}{I_{Gz}}y\vec{x}_s = \frac{F_y(\ell_2 - \ell_1)}{I_{Gz}}y\vec{x}_s$ . La contrainte devant toujours être inférieure à  $R_e$  on peut déduire le diamètre maximal ainsi :  $\sigma_{1,\max} < R_e \Rightarrow$

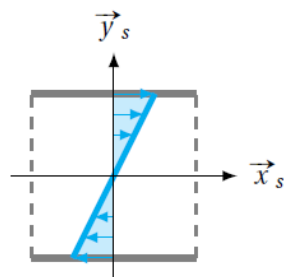
$$D_1 > \sqrt[3]{32 \frac{F_y(\ell_2 - \ell_1)}{\pi R_e}}. \text{ AN : } D_1 = 59 \text{ mm};$$

- sur le tronçon ]AB[ la contrainte normale due au moment fléchissant s'exprime par  $\vec{\sigma}_2 = -\frac{Mfz}{I_{Gz}}y\vec{x}_s = \frac{F_y(\ell_2 - \lambda)}{I_{Gz}}y\vec{x}_s$  ( $F_y$  étant positif et  $\ell_2$  supérieur à  $\lambda$  on a la partie supérieure de la poutre en traction et la partie inférieure en compression). La contrainte devant toujours être inférieure à  $R_e$  on peut déduire le diamètre maximal ainsi :  $\sigma_{2,\max} <$

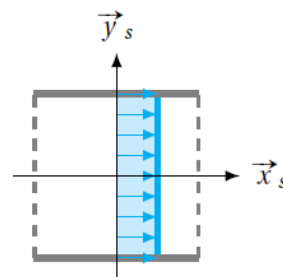
$$R_e \Rightarrow D_2 > \sqrt[3]{32 \frac{F_y(\ell_2 - \ell_1)}{\pi R_e}}. \text{ AN : } D_2 = 59 \text{ mm};$$

- sur le tronçon ]BC[ la contrainte normale est due à la sollicitation de traction :  $\vec{\sigma}_3 = \frac{N}{S}\vec{x}_s$ . La contrainte étant uniforme dans la section, on a donc  $\sigma_{3,\max} < R_e \Leftrightarrow \frac{N}{S} <$

$$R_e \Leftrightarrow \frac{F_x}{\frac{\pi D_3^2}{4}} < R_e \Leftrightarrow D_3 > \sqrt{\frac{4F_x}{\pi R_e}}. \text{ AN : } D_3 = 14 \text{ mm}.$$



Contrainte normale due à la flexion  
dans les deux premiers tronçons



Contrainte normale due à la traction  
dans le dernier tronçon

4) L'ensemble de la poutre étant soumise à un moment de torsion, on a :  $\tau(\rho) = \frac{M_t}{I_0} \rho$

avec  $I_0 = \frac{\pi D^4}{32}$ . La contrainte est maximale lorsque le rayon est maximal. Ainsi,  $\tau_{t,\max} =$

$$\frac{M_t}{I_0} \frac{D}{2} < R_{eg} \Rightarrow D > \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi R_{eg}}}. \text{ AN : } D = 41 \text{ mm.}$$

5) Le tronçon ]AB[ est soumis à de la flexion simple et à de la torsion. L'effort tranchant étant uniforme, la contrainte de cisaillement est de  $\vec{\tau}_{2,c} = \frac{-F_y}{S} \vec{y}_s$ . En sommant les contraintes, on a  $\vec{\tau}_2 = \frac{-F_y}{S} \vec{y}_s + \frac{C_t}{I_0} \rho \vec{e}_\theta = \frac{-F_y}{S} \vec{y}_s + \frac{C_t}{I_0} \rho (-\sin \theta \vec{y}_s + \cos \theta \vec{z}_s)$ . Ainsi,  $\|\vec{\tau}_2\|^2 = \left( \frac{F_y}{S} + \frac{C_t}{I_0} \rho \sin \theta \right)^2 + \left( \frac{C_t}{I_0} \rho \cos \theta \right)^2$ . La figure 9.50 illustre les contraintes dues à la torsion simple (première figure) et l'état de contrainte dû au cisaillement sommé à la torsion (dernière figure).

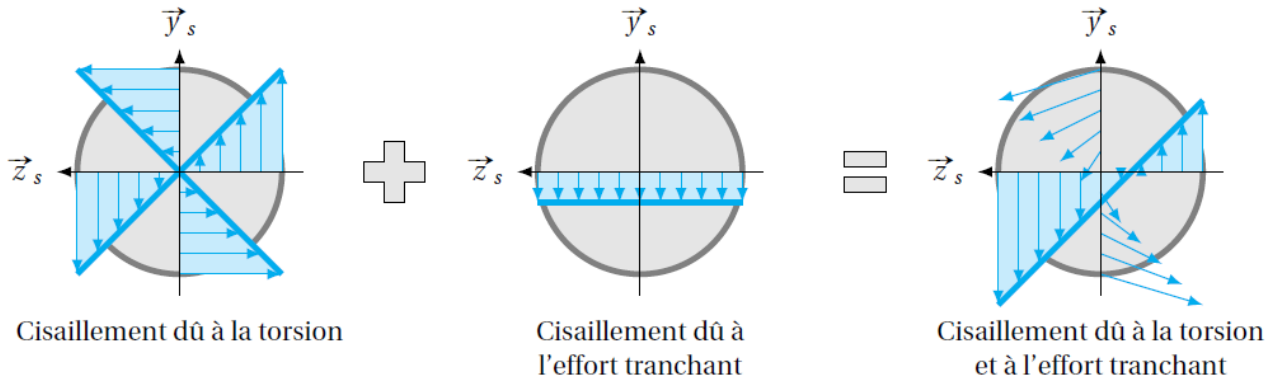


Figure 9.50. Somme des contraintes de cisaillement pour le tronçon ]AB[.

6) D'après la question précédente,  $\|\vec{\tau}\|^2 = \left( \frac{C_t}{I_0} \rho \sin \theta + \frac{F_y}{S} \right)^2 + \left( \frac{C_t}{I_0} \rho \cos \theta \right)^2$  soit  $\tau^2 = \left( \frac{32C_t}{\pi D^4} \rho \cos \theta \right)^2 + \left( \frac{32C_t}{\pi D^4} \rho \sin \theta + \frac{4F_y}{D^2} \right)^2$ . En conséquences,

$$\sigma_{vm}^2 = \left( \frac{64F_y(\ell_2 - \lambda)\rho}{\pi D^4} \right)^2 + 3 \left( \frac{32C_t}{\pi D^4} \rho \sin \theta + \frac{F_y}{\pi D^2} \right)^2 + 3 \left( \frac{32C_t}{\pi D^4} \rho \cos \theta \right)^2.$$

7) Cette contrainte sera maximale pour  $\rho = D/2$  car aussi bien la contrainte normale que la contrainte tangentielle sont maximales à la périphérie de la section. D'autre part, la contrainte normale est maximale dans la section du point A. Ainsi,  $\sigma_{vm}$  sera maximale pour  $\lambda = \ell_1$ . Après simplification, il reste

$$\sigma_{vm}^2 = \left( \frac{32F_y(\ell_2 - \ell_1)}{\pi D^3} \right)^2 + 3 \left( \frac{16C_t}{\pi D^3} \sin \theta + \frac{F_y}{\pi D^2} \right)^2 + 3 \left( \frac{16C_t}{\pi D^3} \cos \theta \right)^2.$$

Le critère de dimensionnement à appliquer est alors  $Re - \sigma_{vm} > 0$ , où  $\sigma_{vm}$  est exprimé ci-dessus.

8) On a  $Re - \sigma \geq 0$  pour assurer la résistance de la pièce. D'après les courbes proposées, le diamètre dans la zone centrale doit donc être au minimum de 86 mm.



9) Choisissons un diamètre de 86 mm pour la zone centrale et un diamètre de 59 mm pour le tronçon  $BC$  on a :  $\frac{d}{D} = 0,69$ . Pour  $K_t = 1,5$ , on a  $\frac{r}{t} = 0,3$ . Or  $t = 13,5$  mm et donc  $r = 4,05$  mm.

10) L'analyse éléments finis montre qu'il existe des points où la contrainte élastique est dépassée. En conséquence, l'étude de prédimensionnement ne permet pas d'avoir les dimensions finales du produit, mais des dimensions qui sont tout de même avec un ordre de grandeur acceptable. Une des solutions pour limiter les risques de ruptures lors du prédimensionnement serait d'utiliser un coefficient de sécurité  $s$  ( $s > 1$ ). Dans ce cas, il faudrait s'assurer que les contraintes de traction ne dépassent pas  $R_e/s$  et les contraintes de cisaillement ne dépassent pas  $R_{pg}/s$ .