

1 Définitions

Définition — Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles.

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour $t = 0^+$:

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2 f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

Définition — Transformée de Laplace.

À toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t \leq 0$ (fonction causale), on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

On note $\mathcal{L}[f(t)]$ la transformée directe et $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ la transformée inverse.

De manière générale on note $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$, $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$, $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$, $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p)$...

Résultat — Dérivation.

Dans les conditions de Heaviside : $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 F(p)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n F(p)$.

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$.

Définition — Transformées usuelles.

Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$	Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
Fonction carrée $f(t) = t^2$	$F(p) = \frac{1}{p^3}$	Puissances $f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t)$ est T périodique	$F(p) = \frac{\mathcal{L}[f_0(t)]}{1 - e^{-Tp}} \cdot u(t)$	$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

2 Théorèmes

Théorème — Théorème de la valeur initiale.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p)$$

Théorème — Théorème de la valeur finale.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$$

Théorème — Théorème du retard.

$$\mathcal{L} [f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

Théorème — Théorème de l'amortissement.

$$\mathcal{L} [e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$