Cycle 01

Modéliser le comportement linéaire et non linéaire des systèmes multiphysiques

Révisions 4 – Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre – Domaine temporel

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Cy01 - R 03

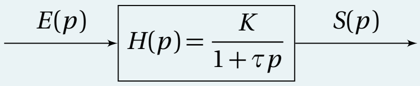
1 Systèmes d'ordre 1

Définition Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\tau \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$



On note :
- τ la constante de temps en secondes ($\tau > 0$) ;
- K le gain statique du système ($K > 0$).

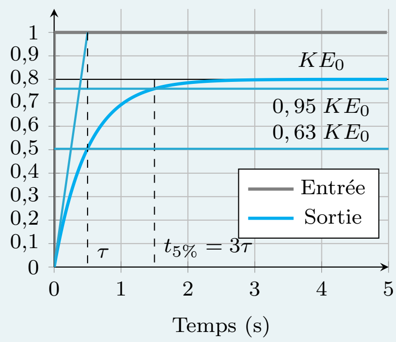
Résultat — Réponse à un échelon d'un système du premier ordre.
On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude E_0. Lorsque $E_0 = 1$ ($1/p$ dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p}\frac{K}{1+\tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = KE_0 u(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :
- le gain à partir de l'asymptote KE_0 ;
- la constante de temps à partir de $t_{5\%}$ ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :
- valeur finale $s_\infty = KE_0$;
- pente à l'origine **non nulle** ;
- $t_{5\%} = 3\tau$;
- pour $t = \tau$, $s(\tau) = 0,63\ s_\infty$.

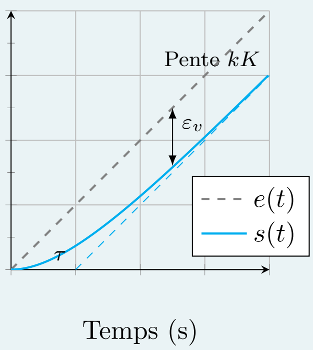


Résultat — Réponse à un échelon d'un système du deuxième ordre.

On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente k :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2}\frac{K}{1+\tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = Kk\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$.
Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :
- pente de l'asymptote Kk ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses : $t = \tau$;
- $\varepsilon_v = kK\tau$.



2 Systèmes d'ordre 2

Définition Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}+s(t)=Ke(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}} \longrightarrow S(p)$$

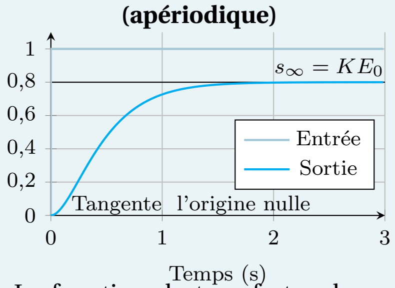
On note :

- K est appelé le gain statique du système (rapport des unités de S et de E) ;
- ξ (lire *xi*) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité) ;
- ω_0 pulsation propre du système (rad/s ou s^{-1}).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

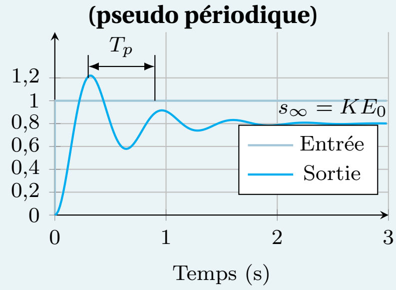
Résultat

$z \geq 1$: système non oscillant et amorti (apériodique)



- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.

$z < 1$: système oscillant et amorti (pseudo périodique)



- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme $T_p=\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$.
- La valeur du premier dépassement vaut : $D_1=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$.

Résultat

- Pour $\xi \simeq 0,7$ le système du second ordre le temps à un de réponse à 5% le plus petit **avec dépassement**.
- Pour $\xi = 1$ on obtient le système du second ordre plus rapide **sans dépassement**.