DM 1

Cisaille à découpe au vol

D'après P. Dubois, C. Gamelon.

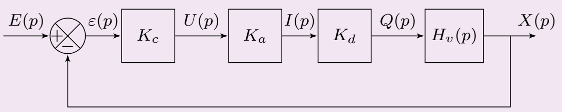
Savoirs et compétences :

Mise en situation

Schéma-bloc du système

Question 1 *Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.*

Correction



Fonction de transfert de l'ensemble vérin et charge

Équation de comportement dynamique

Fonction de transfert du vérin

Question 2 *Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace. En déduire l'expression de la fonction de transfert : $H_v(p) = \dfrac{X(p)}{Q(p)}$, que l'on mettra sous la forme : $H_v(p) = \dfrac{k}{p\left(ap^2+bp+1\right)}$.*

Correction

D'une part, $mp^2X(p) = S\Delta P(p) - fpX(p) \Leftrightarrow \dfrac{p(mp+f)}{S}X(p) = \Delta P(p)$.

D'autre part : $Q(p) = SpX(p) + \dfrac{V}{2B}p\Delta P(p) \Leftrightarrow 2B\dfrac{Q(p)-SpX(p)}{Vp} = \Delta P(p)$.

On a donc : $\dfrac{p(mp+f)}{S}X(p) = 2B\dfrac{Q(p)-SpX(p)}{Vp}$ $\Leftrightarrow \dfrac{p(mp+f)}{S}X(p) + \dfrac{2BSpX(p)}{Vp} = \dfrac{2BQ(p)}{Vp} \Leftrightarrow$ $\left(\dfrac{p(mp+f)}{S} + \dfrac{2BSp}{Vp}\right)\dfrac{Vp}{2B} = \dfrac{Q(p)}{X(p)}$

Correction $\Leftrightarrow \left(\dfrac{p(mp+f)}{S}\dfrac{Vp}{2B} + Sp\right) = \dfrac{Q(p)}{X(p)}$.

On a donc, $H_v(p) = \dfrac{1}{p\left(\dfrac{(mp+f)}{S}\dfrac{Vp}{2B}+S\right)} = \dfrac{1}{p\left(\dfrac{Vm}{2BS}p^2 + \dfrac{fV}{2BS}p + S\right)} = \dfrac{1/Q}{p\left(\dfrac{Vm}{2BS^2}p^2 + \dfrac{fV}{2BS^2}p + 1\right)}$.

Au final, $k = \dfrac{1}{Q}$, $a = \dfrac{Vm}{2BS}$ et $b = \dfrac{fV}{2BS^2}$.

Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

Question 3 *Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel GdB(ω) en fonction des notations K_v, ω_0 et ξ, (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de $H_v(j\omega)$). Quelle est sa valeur pour $\omega = \omega_0$?*

Correction $H_v(j\omega) = \dfrac{K_v}{j\omega\left(1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$

En conséquence,

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log\left|\dfrac{K_v}{j\omega\left(1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}\right|$$

$$= 20\log K_v - 20\log\left|j\omega\right| - 20\log\left|1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|$$

$$= 20\log K_v - 20\log\omega - 20\log\left|\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2}\right|$$

Au final, $G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log K_v - 20\log\omega_0 - 20\log 2\xi$.

Question 4 *Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω_0 tend vers 0. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB ?*

Correction On a $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log K_v - 20\log\omega - 20\log\left|\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2}\right|$.

Lorsque ω tend vers 0, le gain tend $20\log K_v - 20\log\omega$. La pente est donc de -20 dB/decade. Elle coupe l'horizontale à 0 dB en $\omega = K_v$.

Question 5 *Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω tend vers l'∞. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'asymptote précédente ?*

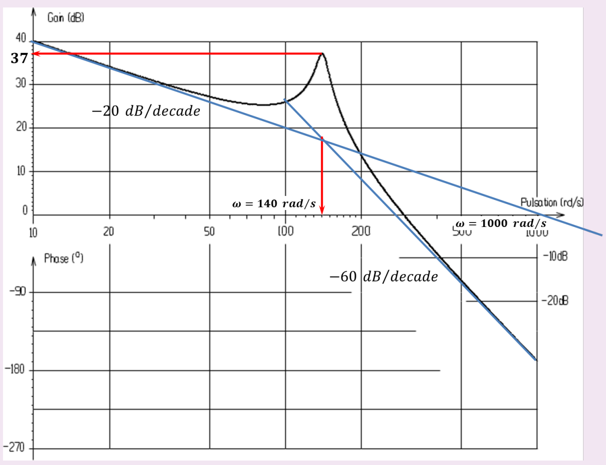
Correction On a $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log K_v - 20\log\omega - 20\log\left|\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2}\right|$.

Lorsque ω tend vers l'infini, le gain tend $20\log K_v - 20\log\omega$, G_{dB} tend vers $= 20\log K_v - 20\log\omega - 20\log\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ $= 20\log K_v - 20\log\omega - 20\log\omega^2 + 20\log\omega_0^2 = 20\log K_v + 40\log\omega_0 - 60\log\omega$.

L'intersection des deux asymptotes a lieu quand $20\log K_v - 20\log\omega = 20\log K_v + 40\log\omega_0 - 60\log\omega$ $\Leftrightarrow \log\omega = \log\omega_0$. Ainsi, l'intersection des asymptotes a lieu en $\omega = \omega_0$.

Question 6 *Déduire des résultats précédents et du diagramme de Bode de $H_v(p)$ donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres K_v, ω_0 et ξ (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).*

Correction



Par lecture du graphe, on obtient $\omega_0 = 140\,\mathrm{rad/s}$ et $K_v = 1000\,\mathrm{s\,m^{-2}}$.

$G_{\mathrm{dB}}(\omega_0) = 20\log K_v - 20\log\omega_0 - 20\log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 20\log 1000 - 20\log 140 - 20\log 2\xi \Leftrightarrow 37 = 60 - 20\log 140 - 20\log 2\xi \Leftrightarrow \frac{37-60+20\log 140}{-20} = \log 2\xi \Leftrightarrow \xi \simeq 0,05$.

Question 7 *Donner l'expression littérale de la phase $\varphi(\omega)$ en fonction des notations ω_0 et ξ. Déterminer ses limites lorsque ω tend vers 0 et lorsque ω tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre ω_0 puis pour 100 et 200 $\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Tracer la courbe de phase.*

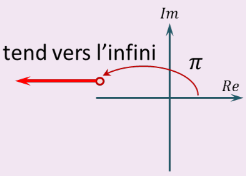
Correction

$$\varphi(\omega) = \arg K_v - \arg(j\omega) - \arg\left(1+\frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arg\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+\frac{2\xi\omega}{\omega_0}j\right)$$

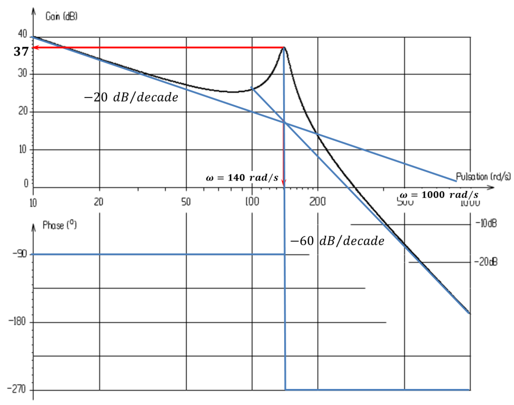
Lorsque ω tend vers 0, $\varphi(\omega)$ tend vers $-\frac{\pi}{2}$.

Lorsque ω tend vers l'infini, $-\arg\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+\frac{2\xi\omega}{\omega_0}j\right)$ tend vers π donc $-\arg(\ldots)$ tend vers $-\pi$.

Explication graphique de prof de SII...



Au final, lorsque ω tend vers l'infini, $\varphi(\omega)$ tend vers $-\frac{3\pi}{2}$.



Détermination des gains K_c, K_a et K_d

Question 8 *Quelle valeur K doit-on donner au produit des gains $K_c K_a K_d$ (préciser les unités). On note K_0 le produit $K K_v$ (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de K_0 ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue ?*

Correction Étant donné l'exigence demandée, le gain de la FTBO doit être de -6 dB lorsque la phase vaut -180°. On a déjà vu que pour cette phase, le gain décibel de H_v vaut 37 dB. Le gain dB vaut $20\log K + 20\log|H_v|$. On cherche donc K tel que $20\log K + 20\log|H_v| = -6$. Au final, $K = 7\,10^{-3}\mathrm{m^2\,s^{-1}}$. Par suite, $K_0 = 7\,\mathrm{s^{-1}}$.

Méthode Cette question est un peu prématurée par rapport à notre avancée. Cependant, vous pouvez tentez d'appliquer la méthode suivante :

1. Déterminer le gain (en dB) pour lequel la phase vaut -180°.
2. Chercher K tel que $20\log|FTBO| = -6$.
3. Calculer K_0.

Erreur de traînage

Question 9 *Donner l'expression de l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de $E(p)$ et $H(p)$. La tôle se déplace à vitesse constante v, quelle est la transformée $E(p)$ de $e(t)$? Donner l'expression de $\varepsilon(p)$ en fonction de v et des paramètres canoniques.*

Correction On peut redémontrer le résultat suivant : $\varepsilon(p) = \dfrac{E(p)}{1+FTBO(p)} = \dfrac{E(p)}{1+H(p)}$.

Exprimons $\varepsilon(p)$: $\varepsilon(p) = E(p) - X(p) = E(p) - H(p)\varepsilon(p)$; donc $\varepsilon(p)\left(1+H(p)\right) = E(p) \Longleftrightarrow \varepsilon(p) = \dfrac{E(p)}{1+H(p)}$.

Le consigne étant une vitesse, on a donc $E(p) = \dfrac{v}{p^2}$.

On a donc : $\varepsilon(p) = \dfrac{v}{p^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{K_v K_c K_a K_d}{p\left(1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}\right)}}$.

Question 10 *On appelle erreur de traînage ε_t la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de ε_t. Faire l'application numérique avec $v = 1\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ et $K_0 = 7$ (unité SI).*

Correction L'entrée en vitesse précédente correspondant à une entrée en rampe, on a donc $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to+\infty}\varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{v}{p^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{K_v K_c K_a K_d}{p\left(1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}\right)}} = \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{v}{p+\dfrac{K_v K_c K_a K_d}{\left(1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}\right)}} = \dfrac{v}{K_v K_c K_a K_d} = 1/7\,\text{m} \simeq 0.14\,\text{m}$. Pour compenser cette erreur, il suffit de régler la butée de la tôle à découper.

Identification temporelle

Question 11 *Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante : $v = 1\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$).*

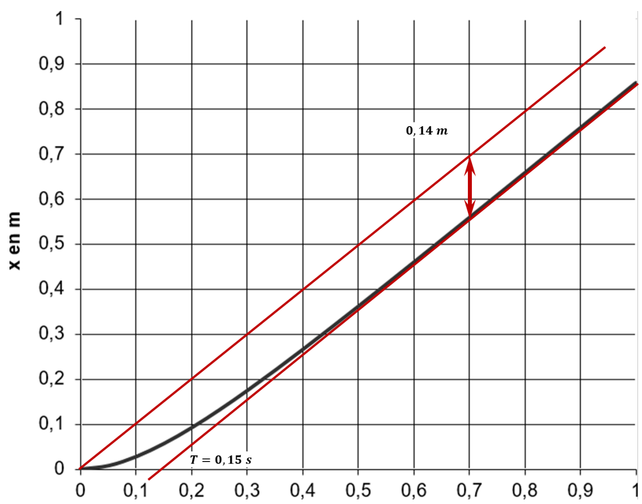
Question 12 *Déterminer les valeurs numériques de K_f et T à l'aide de relevés sur la courbe.*

Correction Première solution : cf cours pour un système du premier ordre soumis à une rampe.

Seconde solution : se raccrocher à ce que l'on sait (peut-être) pour un premier ordre soumis à un échelon... en effet, la rampe peut être assimilée à un premier ordre intégré. Ainsi, pour un système du premier ordre soumis à un échelon d'amplitude v, la valeur finale est vK_f. Ainsi, en intégrant, la pente en régime permanent sera de vK_f.

Par lecture sur la courbe on obtient une pente de $\dfrac{0,65}{0,7} = 0.93\,\text{m/s}$ soit $K_f = 0,93$.

Reste à savoir que l'asymptote coupe l'axe des abscisses en T. Après lecture, $T = 0.15\,\text{s}$.



Question 13 *Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.*

Correction Même erreur que précédemment.

Question 14 *Quel réglage peut-on envisager sur la cisaille pour compenser cette erreur ?*

Correction Il est possible de décaler la butée de 14 cm et ainsi supprimer l'écart de trainage.