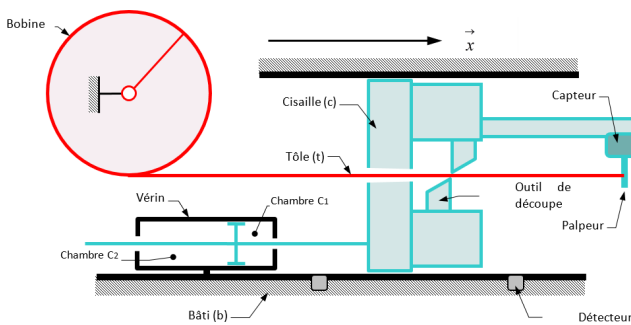


TD 03

Cisaille à découpe au vol

D'après P. Dubois, C. Gamelon.

Savoirs et compétences :



La machine, représentée par le schéma ci-dessus, permet de débiter en continu une bobine de tôle en tronçons de même longueur¹. La rotation continue à fréquence variable de la bobine impose à la tôle (t) une vitesse linéaire $v(t)$ par rapport au bâti (b) constante. Les outils de découpe sont portés par la cisaille (c) qui est mise en mouvement par un vérin hydraulique.

En avançant, la tôle déplace le palpeur du capteur porté par la cisaille. Celui-ci délivre alors une tension $u(t)$ proportionnelle à l'écart de position entre la tôle et la cisaille. Un amplificateur transforme ce signal en courant d'intensité $i(t)$ pour commander un distributeur hydraulique qui fournit au vérin un débit d'huile $q(t)$. Au bout d'un certain temps, se déplaçant à la même vitesse, la cisaille et la tôle arrivent face à un détecteur qui déclenche la coupe. La tôle tombe, la cisaille recule jusqu'à son point de départ et attend que la tôle revienne en contact avec le palpeur pour recommencer un cycle. La position de la cisaille est ainsi « asservie » à la position de la tôle.

On notera par des majuscules les transformées de Laplace des fonctions du temps notées en minuscules.

$$\text{Rappels : } \mathcal{L}[a] = \frac{a}{p}, \mathcal{L}[at] = \frac{a}{p^2} \text{ et } \mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}.$$

1. <https://goo.gl/azqSkT>

Schéma-bloc du système

On note :

- $e(t)$ le déplacement de la tôle (t) par rapport au bâti (b) ;
- $\varepsilon(t)$ le déplacement de la tôle par rapport à la cisaille (c) ;
- $x(t)$ le déplacement de la cisaille par rapport au bâti.

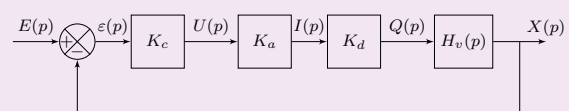
On considère comme instant initial le moment où la tôle touche le palpeur. À cet instant e et x sont nuls. L'équation reliant les déplacements est donnée par :

$$\varepsilon(t) = e(t) - x(t).$$

Le capteur, l'amplificateur et le distributeur délivrent des signaux de sortie proportionnels à leurs signaux d'entrée. On notera K_c , K_a et K_d leurs gains respectifs. Soit $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$ la fonction de transfert associée à l'ensemble vérin plus charge déplacée, ($X(p)$ est la transformée de Laplace du déplacement $x(t)$ et $Q(p)$ celle du débit $q(t)$).

Question 1 Représenter le schéma-blocs du système. Indiquer les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.

Correction



Fonction de transfert de l'ensemble vérin et charge

Équation de comportement dynamique

On note :

- m la masse totale mise en mouvement par le vérin ;
- f le coefficient de frottement visqueux associé au déplacement de l'ensemble mobile. Les frottements créent un effort qui s'oppose au déplacement et qui est proportionnel à la vitesse : $F_f(t) = -f \frac{dx}{dt}$;
- $\Delta p(t)$ la différence de pression entre les deux chambres C_1 et C_2 du vérin ;
- S la surface du piston en contact avec l'huile.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble mobile en projection sur \vec{x} , on a :

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = S \Delta p(t) - f \frac{dx(t)}{dt}.$$

Fonction de transfert du vérin

Pour le type de vérin utilisé, le débit d'alimentation a pour expression : $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\Delta p(t)}{dt}$. V est le volume moyen d'une chambre et B le module d'élasticité de l'huile, (ces deux paramètres sont des constantes).

Question 2 Transformer les deux équations précédentes dans le domaine de Laplace. En déduire l'expression de la fonction de transfert : $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$, que l'on mettra sous la forme : $H_v(p) = \frac{k}{p(a p^2 + b p + 1)}$.

Correction

D'une part, $m p^2 X(p) = S \Delta P(p) - f p X(p) \Leftrightarrow \frac{p(m p + f)}{S} X(p) = \Delta P(p)$.

D'autre part : $Q(p) = S p X(p) + \frac{V}{2B} p \Delta P(p) \Leftrightarrow 2B \frac{Q(p) - S p X(p)}{V p} = \Delta P(p)$.

On a donc : $\frac{p(m p + f)}{S} X(p) = 2B \frac{Q(p) - S p X(p)}{V p}$
 $\Leftrightarrow \frac{p(m p + f)}{S} X(p) + \frac{2B S p X(p)}{V p} = \frac{2B Q(p)}{V p}$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{p(m p + f)}{S} + \frac{2B S p}{V p} \right) \frac{V p}{2B} = \frac{Q(p)}{X(p)} \Leftrightarrow \left(\frac{p(m p + f)}{S} \frac{V p}{2B} + S p \right) = \frac{Q(p)}{X(p)}$.

On a donc, $H_v(p) = \frac{1}{p \left(\frac{(m p + f) V p}{S} + S \right)} = \frac{1}{p \left(\frac{V m}{2B S} p^2 + \frac{f V}{2B S} p + S \right)} = \frac{1/Q}{p \left(\frac{V m}{2B S^2} p^2 + \frac{f V}{2B S^2} p + 1 \right)}$.
 Au final, $k = \frac{1}{Q}$, $a = \frac{V m}{2B S}$ et $b = \frac{f V}{2B S^2}$.

Détermination des paramètres canoniques à partir du diagramme de Bode

On pose $H_v(p) = \frac{K_v}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$.

Une simulation numérique a permis de tracer le diagramme de Bode donné page suivante. On se propose de retrouver les valeurs de K_v , ω_0 et ξ à partir du diagramme.

Question 3 Donner l'expression littérale du gain fréquentiel en décibel $G_{dB}(\omega)$ en fonction des notations K_v , ω_0 et ξ , (ne pas développer le dénominateur pour le calcul du module de $H_v(j\omega)$). Quelle est sa valeur pour $\omega = \omega_0$?

Correction $H_v(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}$

En conséquence,

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &= 20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \right| \\ &= 20 \log K_v - 20 \log |j\omega| - 20 \log \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right| \\ &= 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \left| \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2} \right| \\ \text{Au final, } G_{dB}(\omega_0) &= 20 \log K_v - 20 \log \omega_0 - 20 \log 2\xi. \end{aligned}$$

Question 4 Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω_0 tend vers 0. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'horizontale à 0 dB ?

Correction On a $G_{dB}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \left| \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2} \right|$.

Lorsque ω tend vers 0, le gain tend $20 \log K_v - 20 \log \omega$. La pente est donc de -20 dB/decade. Elle coupe l'horizontale à 0 dB en $\omega = K_v$.

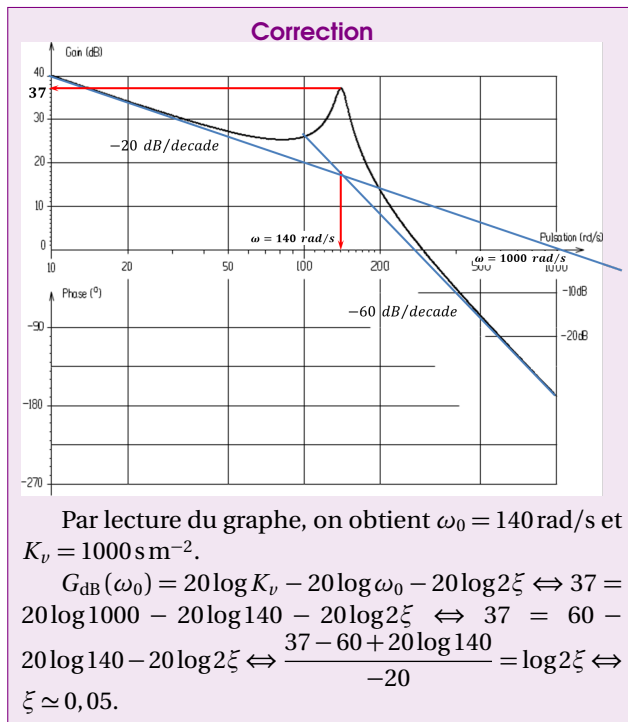
Question 5 Déterminer l'asymptote de la courbe de gain lorsque ω tend vers l'infini. Quelle est sa pente ? Pour quelle valeur de ω coupe-t-elle l'asymptote précédente ?

Correction On a $G_{dB}(\omega) = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \left| \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0} \right)^2} \right|$.

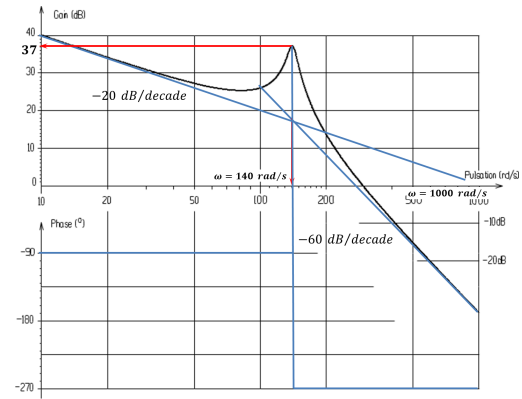
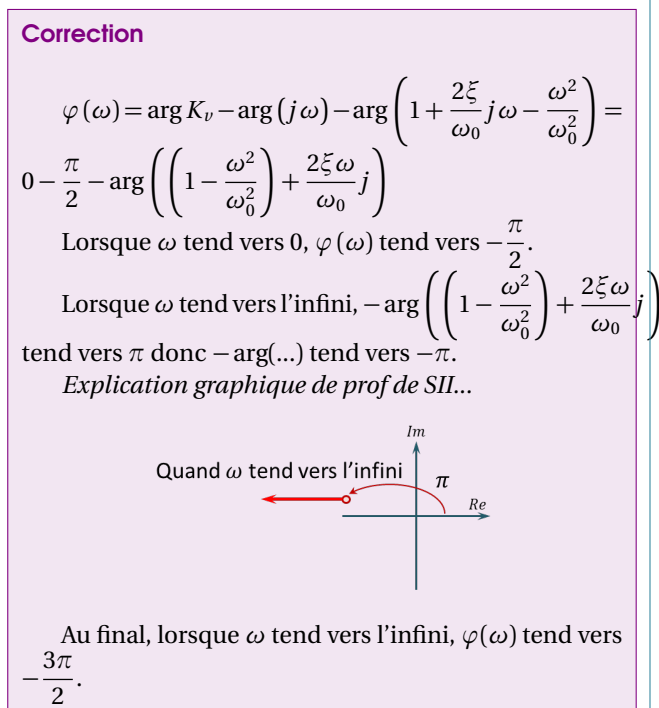
Lorsque ω tend vers l'infini, le gain tend $20 \log K_v - 20 \log \omega$, G_{dB} tend vers $20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 20 \log K_v - 20 \log \omega - 20 \log \omega^2 + 20 \log \omega_0^2 = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega$.

L'intersection des deux asymptotes a lieu quand $20 \log K_v - 20 \log \omega = 20 \log K_v + 40 \log \omega_0 - 60 \log \omega \Leftrightarrow \log \omega = \log \omega_0$. Ainsi, l'intersection des asymptotes a lieu en $\omega = \omega_0$.

Question 6 Déduire des résultats précédents et du diagramme de Bode de $H_v(p)$ donné sur la feuille réponse les valeurs des paramètres K_v , ω_0 et ξ (on tracera les asymptotes avec leur pente réelle).



Question 7 Donner l'expression littérale de la phase $\varphi(\omega)$ en fonction des notations ω_0 et ξ . Déterminer ses limites lorsque ω tend vers 0 et lorsque ω tend vers l'infini. Tracer le diagramme asymptotique de phase. Calculer les valeurs de la phase en degrés pour la pulsation propre ω_0 puis pour 100 et 200 rad s^{-1} . Tracer la courbe de phase.



Détermination des gains K_c , K_a et K_d

Pour que le système soit stable en boucle fermée on décide de régler le correcteur pour avoir une marge de gain de 6 dB.

Question 8 Quelle valeur K doit-on donner au produit des gains $K_c K_a K_d$ (préciser les unités). On note K_0 le produit $K K_v$ (gain en boucle ouverte). Quelle est la valeur de K_0 ? Quelle est la marge de phase ainsi obtenue ?

Erreur de traînage

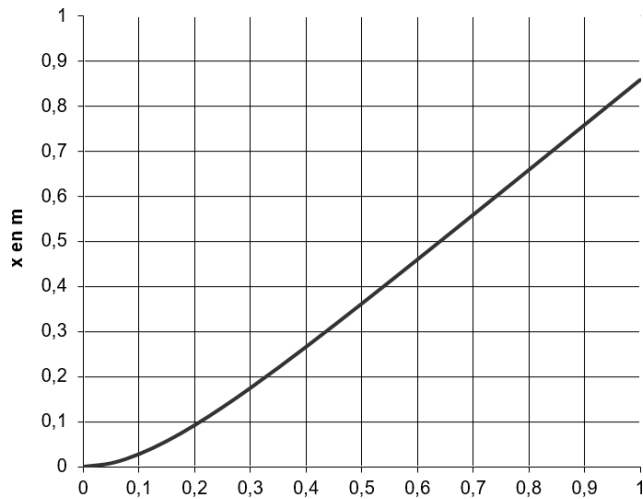
On note : $H(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$.

Question 9 Donner l'expression de l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de $E(p)$ et $H(p)$. La tôle se déplace à vitesse constante v , quelle est la transformée $E(p)$ de $e(t)$? Donner l'expression de $\varepsilon(p)$ en fonction de v et des paramètres canoniques.

Question 10 On appelle erreur de traînage ε_t la différence entre l'entrée et la sortie en régime permanent pour une entrée en rampe. Donner l'expression de ε_t . Faire l'application numérique avec $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ et $K_0 = 7$ (unité SI). Quel réglage suffit-il de faire sur la cisaille pour compenser cette erreur ?

Identification temporelle

On donne ci-dessous, le tracé de la courbe $x(t)$ obtenu à l'aide d'un logiciel de simulation. Cette réponse est voisine de celle d'un premier ordre soumis à la même entrée. Soit $F(p) = \frac{K_f}{1 + T_p p}$ la fonction de transfert du système du premier ordre associé.



Question 11 Déterminer l'expression de la réponse temporelle de ce système soumis à une entrée identique à celle de la cisaille (déplacement de la tôle à vitesse constante : $v = 1 \text{ m s}^{-1}$).

Question 12 Déterminer les valeurs numériques de K_f et T à l'aide de relevés sur la courbe.

Question 13 Vérifier que l'on a la même erreur de traînage.

