

## Application 01

## Application

Savoirs et compétences :

 ...

## Mise en situation

Airbus Helicopters commercialise des hélicoptères civils et militaires. Le déplacement des hélicoptères est assuré par un rotor principal permettant la sustentation et la translation de l'appareil. Un rotor arrière permet de compenser le couple de réaction engendré par le rotor principal et de contrôler les mouvements de lacet de l'appareil (figure 1). La puissance est délivrée par deux turboréacteurs (certains hélicoptères ne sont équipés que d'un turboréacteur). Ces turboréacteurs entraînent en rotation une boîte de transmission principale (BTP) qui elle-même entraîne d'une part le rotor principal et d'autre part le rotor arrière, par l'intermédiaire d'un arbre de transmission et d'une boîte de transmission arrière (BTA). La BTP assure aussi l'entraînement d'une série d'accessoires permettant le fonctionnement de l'appareil (alternateur, pompe hydraulique ...). Pour chaque association hélicoptère - turboréacteur, un banc d'essai permet de vérifier que la BTP répond au cahier des charges. La figure 2 présente la structure du banc d'essai.

**Objectif** Valider Req 1.1.1.

«requirement»	Pécision de la régulation
Id = "1.1.1"	Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul."

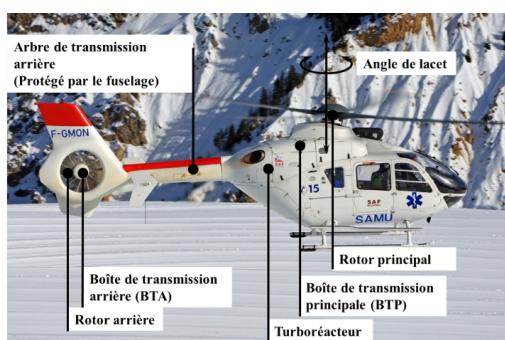


Figure 1 – Hélicoptère.

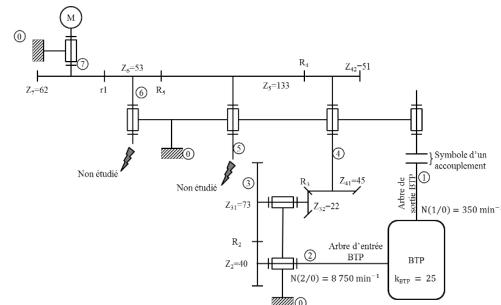


Figure 2 – Structure du banc d'essai.

## Le moteur à courant continu

Le banc d'essai est équipé d'un dispositif permettant de générer un couple résistant sur le rotor de sortie de la BTP. Cela permet de simuler les actions aérodynamiques sur les pales. Il faut donc évaluer l'impact de ce couple sur la vitesse du moteur. La modélisation adoptée pour le moteur à courant continu est celle de la figure 3.

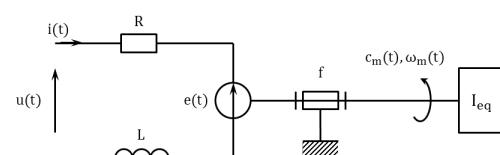


Figure 3 – Schéma équivalent du moteur à courant continu.

On note :

- $u(t)$  : la tension appliquée aux bornes de l'induit;
- $i(t)$  : le courant absorbé par l'induit;
- $e(t)$  : la force contre-électromotrice;
- $R$  : la résistance de l'induit;
- $L$  : l'inductance de l'induit;
- $\omega_m(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- $c_m(t)$  : le couple moteur;
- $c_r(t)$  : le couple résistant sur l'arbre moteur dû à la génération d'un couple résistant en sortie de BTP;
- $f$  : le coefficient de frottement, qui génère un couple résistant proportionnel à  $\omega_m(t)$ ;
- $I_{eq}$  : l'inertie équivalente du banc d'essai ramené à l'arbre moteur;
- $K_c$  : la constante de couple définie telle que  $c_m(t) = K_c i(t)$  (équation 1);
- $K_e$  : la constante de force contre-électromotrice définie telle que  $e(t) = K_e \omega_m(t)$  (équation 2).

Hypothèses :

- le comportement de chacun des composants sera considéré comme linéaire, continu et invariant;
- les conditions de Heaviside sont considérées comme vérifiées;
- on note  $p$  la variable de Laplace. La transformée de Laplace d'une fonction temporelle  $f(t)$  sera notée  $F(p)$  (la transformée de  $\omega(t)$  sera notée  $\Omega(p)$ ).

## Modélisation de l'asservissement en vitesse

Hypothèses :

- on néglige l'inductance du moteur à courant continu ainsi que l'effet du coefficient de frottement;
- on fait l'hypothèse que  $K_c = K_e = K$ ;
- pour simplifier l'étude, la boucle de courant n'a pas été modélisée.

Le schéma bloc de l'asservissement en vitesse du moteur à courant continu est donné sur la figure 10.

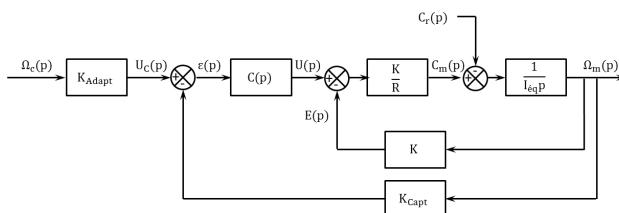


Figure 10 – Régulation en vitesse du banc d'essai.

**Question 1** Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour? Comment déterminer la valeur du gain  $K_{Adapt}$ ?

**Hypothèse 1 : on considère que  $C_r(p)=0$  et  $\Omega_c(p)\neq 0$ .**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_m(p)=(\Omega_m(p))/U(p)$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p)=(\Omega_m(p))/(\Omega_c(p))$ . On considère que  $C(p)=K_P$ ,  $K_P$  étant constante. Mettre  $H_1(p)$  sous la forme  $K_1/(1+\tau_1 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$ .

**Hypothèse 2 : on considère que  $\Omega_c(p)=0$  et que  $C_r(p)\neq 0$ .**

**Question 3** Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p)=(\Omega_m(p))/(C_r(p))$ . On considère que  $C(p)=K_P$ ,  $K_P$  étant constante. Mettre  $H_2(p)$  sous la forme  $-K_2/(1+\tau_2 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_2$  et  $\tau_2$ .

**Hypothèse 3 : on considère maintenant que  $\Omega_c(p)\neq 0$  et que  $C_r(p)\neq 0$ .**

**Question 5** En utilisant le théorème de superposition, exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $\Omega_c(p)$  et  $C_r(p)$ .

À une fréquence de rotation de  $350 \text{ min}^{-1}$  en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de  $1928 \text{ min}^{-1}$  soit environ  $202 \text{ rad/s}$ . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à  $990 \text{ Nm}$ . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude  $202 \text{ rad/s}$  et à un couple résistant de  $990 \text{ Nm}$ .

**Question 6** Après avoir exprimé la consigne  $\Omega_c(p)$  puis le couple résistant  $C_r(p)$ , calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 7** Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain  $K_I$  de la forme  $C(p)=K_I/p$  ?

**Question 8** En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée?



On verra ultérieurement qu'un correcteur intégral pur ne permet pas forcément de garantir la stabilité d'un système.

## Partie supplémentaire

**Question 9** Tracer le diagramme de Bode de  $C(p) \cdot F(p)$  avec  $F(p)=118/(1+0,5p)$  du système lorsque :

- $C(p)=1$ ;
- $C(p)=20$ ;
- $C(p)=30/p$ .

## Application 02 – Corrigé

## Application

Savoirs et compétences :

 ...

## Modélisation par schéma-blocs

**Méthode** Dans le cas où vous ne savez pas comment démarrer, vous pouvez suivre la méthode suivante.

- Identifier la grandeur physique d'entrée et la grandeur physique de sortie.
- Lorsqu'une équation lie deux grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation.
- Lorsqu'une équation lie trois grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation en utilisant un comparateur.
- Relier les blocs en commençant par l'entrée. Inverser les blocs si nécessaire.

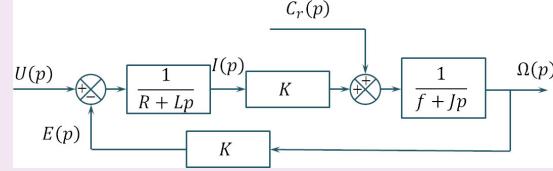
## Modélisation du moteur à courant continu

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt};$
- $e(t) = K\omega(t);$
- $c(t) = Ki(t);$
- $c(t) - c_r(t) - f\omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}.$

**Question 1** Réaliser le schéma-blocs.

## Correction



**Question 2** Exprimer  $\Omega(p)$  sous la forme  $\Omega(p) = F_1(p)U(p) + F_2(p)C_r(p)$ . Les fonctions de transfert  $F_1$   $F_2$  seront exprimées sous forme canonique. Les constantes du système du second ordre seront explicitées.

**Correction** Par superposition, on a :  $\Omega_1(p)/U(p) = \frac{K}{R+Lp} \frac{1}{Jp+f}$

$$\frac{1}{1+K^2} \frac{1}{R+Lp} \frac{1}{Jp+f} = \frac{K}{(Jp+f)(Lp+R)+K^2}.$$

Par ailleurs,  $\Omega_2(p)/C_r(p) = \frac{1}{1+K^2} \frac{1}{R+Lp} \frac{1}{Jp+f}$

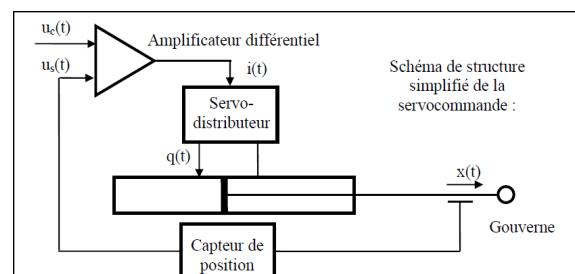
$$= \frac{Lp+R}{(Jp+f)(Lp+R)+K^2}.$$

Au final,  $\Omega(p) = \frac{K}{(Jp+f)(Lp+R)+K^2} U(p) + \frac{Lp+R}{(Jp+f)(Lp+R)+K^2} C_r(p).$

On peut alors mettre  $F_1$  sous forme canonique :

$$F_0 = \frac{K}{fR+K^2} \quad \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{RJ+Lf}{fR+K^2} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{LJ}{fR+K^2}.$$

## Modélisation d'une servo-commande



Les différentes équations temporelles qui modélisent le fonctionnement d'une servocommande sont :

- un amplificateur différentiel défini par :  $u_c(t) = \frac{i(t)}{K_a} + u_s(t);$
- débit dans le vérin dans le cas d'une hypothèse de fluide incompressible  $q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt};$
- capteur de position :  $u_s(t) = K_c \cdot x(t);$
- le servodistributeur est un composant de la chaîne de commande conçu pour fournir un débit hydraulique  $q(t)$  proportionnel au courant de commande  $i(t)$ . (Attention, valable uniquement en régime permanent.) Le constructeur fournit sa fonction de

transfert :

$$F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1 + T p}$$

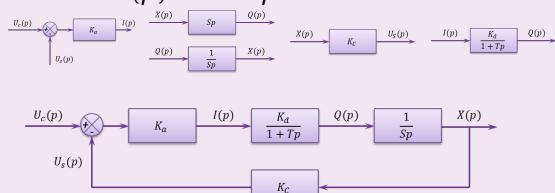
où  $K_d$  est le gain du servo-distributeur et  $T$  sa constante de temps.

**Question 1** Réaliser le schéma-blocs.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

**Correction** On a :

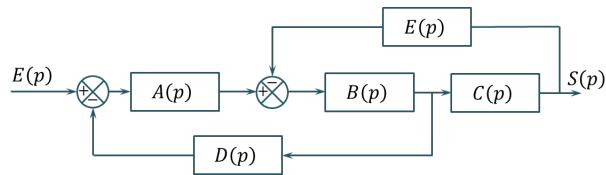
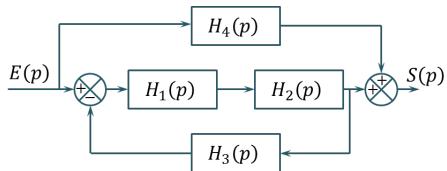
- $U_c(p) = \frac{1}{K_a} I(p) + U_s(p)$
- $Q(p) = S p X(p)$
- $U_S(p) = K_C \cdot X(p)$
- $F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1 + T p}$



## Réduction de schéma-blocs

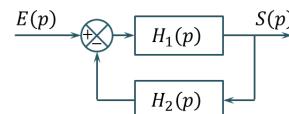
D'après ressources de V. Reydellet.

**Question** Réduire les schéma-blocs suivants.

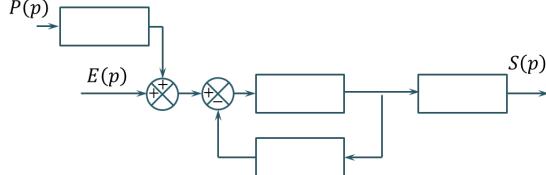
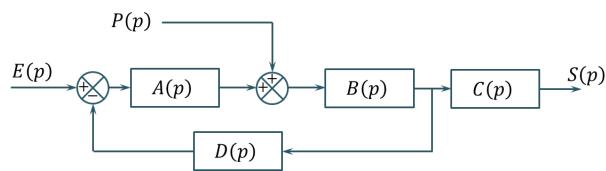


## Transformation de schéma-blocs

**Question** Transformer le schéma-bloc suivant pour obtenir un schéma-blocs à retour unitaire.



**Question** Modifier le schéma-blocs suivant pour obtenir la forme proposée. Déterminer ensuite l'expression de  $S(p)$  en fonction de  $E(p)$  et  $P(p)$ .



## TD 01 – Corrigé



## Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec TSI 2017

Savoirs et compétences :

- Mod2.C4 : calcul symbolique;
- Mod2.C7.SF1 : analyser ou établir le schéma-bloc du système;
- Res2.C10 : précision des SLCI : erreur en régime permanent;
- Res2.C10.SF1 : déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon ou en rampe (consigne ou perturbation).

## Mise en situation

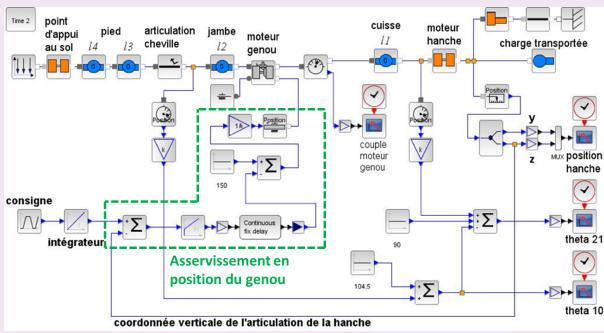
## Gestion du mouvement vertical

**Objectif** Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

**Question 1** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

## Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



**Question 2** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

**Correction** En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a :  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \frac{C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}{1 + C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}} = \frac{C_\Omega K_2}{Jp + C_\Omega K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1}$ . En conséquences :  $H_\Omega(p) = \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1}$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

**Correction** D'une part,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$ . D'autre part,  $\theta_m(p) = H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p)$ . Par suite,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p) \left( 1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \right) = \theta_{mC}(p)$ . En conséquences,  $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}}$ .

**Question 4** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Correction** On a :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varepsilon_p &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} \frac{K_1}{p}} = 0 \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1);} \\ \bullet \quad \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \dot{\varepsilon}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} \frac{K_1}{p}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{Jp}{C_\Omega K_2} K_1} = \frac{1}{K_1} \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et de gain } K_1 \text{ en BO).} \end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut  $\frac{1}{K_1} < 0,01$  et  $K_1 > 100$ .

**Question 5** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

**Correction** En raisonnant de même, on a :  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{\varepsilon}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \ddot{\varepsilon}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3} =$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{Jp} \frac{K_1}{C_\Omega K_2} + 1} \frac{1}{p^2} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{Jp}{C_\Omega K_2} K_1} = \infty \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1).}$$

Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

**Correction** En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$ ;
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)$ ;
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1+Tp}$ .

$$\text{On a donc : } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1+Tp} = \theta_{mC}(p) - (K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)) \frac{1}{p(1+Tp)} = \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1+Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1+Tp)} \varepsilon(p).$$

$$\text{On a alors } \varepsilon(p) \left( 1 + \frac{K_1}{p(1+Tp)} \right) = \theta_{mC}(p) \left( 1 - \frac{K_3}{1+Tp} \right) \Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1+Tp)+K_1}{p(1+Tp)} = \theta_{mC}(p) \frac{1+Tp-K_3}{1+Tp}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1}.$$

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

$$\begin{aligned} \text{Correction } \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} = \\ &\frac{1-K_3}{K_1}. \end{aligned}$$

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir  $K_3 = 1$ .

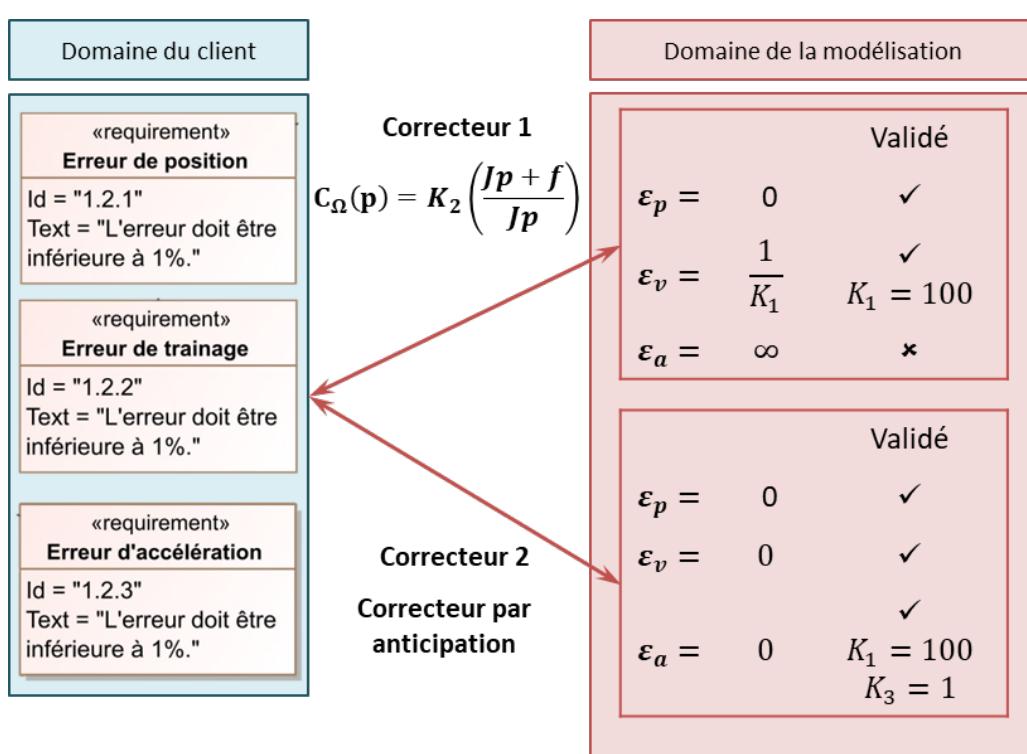
**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

On a :

$$\begin{aligned} \text{Correction } \varepsilon_a &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} \frac{1}{p}. \text{ En} \\ &\text{tenant } K_3 = 1 \text{ et } K_1 = 100, \text{ on obtient : } \varepsilon_a = \frac{T}{p(1+Tp)+100} = \frac{33 \times 10^{-3}}{100} = 33 \times 10^{-5}. \text{ L'erreur est donc de} \\ &33 \times 10^{-5}. \text{ Le cahier des charges est donc validé.} \end{aligned}$$

## Synthèse

**Question 9** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.



## Application 03

### Robot de maraîchage Oz 440

CCP – MP – Florestan Mathurin

Savoirs et compétences :



#### Présentation du système

On s'intéresse à un robot de maraîchage Oz 440 développé par la société Naïo Technologies dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait de cahier des charges. Ce robot est un outil autonome agricole capable d'assister les maraîchers dans les tâches les plus pénibles comme le transport de charges lors des récoltes et le désherbage mécanique à l'aide d'un outil de binage.

Ce robot de petite taille évolue directement entre les rangées de cultures pour un travail de précision. Il peut, par exemple, désherber et aussi suivre des personnes lors de la récolte tout en transportant des charges. Bien plus petit qu'un tracteur classique, il ne casse pas la structure naturelle du sol et évite ainsi le phénomène de compaction des sols provoqué habituellement par les tracteurs ou le piétinement de l'homme. Il roule lentement et passe au plus près des cultures sans risquer de les abîmer. Le robot est constitué d'une plate-forme mobile électrique à 4 roues motrices sur laquelle sont fixés divers outils et capteurs. Le moteur du groupe propulsion gauche actionne les 2 roues gauches ensemble et le moteur du groupe propulsion droit actionne les 2 roues droites ensemble, de façon à reproduire finalement un comportement de type « chenilles ». On s'intéresse à l'asservissement de position du robot suivant la ligne moyenne à suivre dans l'allée. On donne les différents modèles de connaissance associés à cet asservissement.

La variable  $y(t)$  correspond à la distance d'un point particulier du robot par rapport à la ligne moyenne dans le rang de culture. Le modèle de l'asservissement de suivi de l'allée du robot est donné par le schéma-bloc suivant.

#### Détermination de la fonction de transfert H 1 (p) du groupe propulsion

On donne dans un premier temps le modèle de connaissance du groupe propulsion gauche. On supposera que toutes les conditions initiales sont nulles et que  $J, R_m, r, K_i, K_e$  sont des coefficients constants.

	Modèle de connaissance
Le réducteur, de rapport de réduction $r$ , permet de réduire la vitesse angulaire du moteur $\omega_m(t)$ en une vitesse $\omega_g(t)$ disponible pour la roue gauche	$\omega_g(t) = r \cdot \omega_m(t)$
La force électromotrice $e_m(t)$ du moteur est couplée à la vitesse de rotation de l'arbre moteur $\omega_m(t)$ grâce à la constante de force électromotrice $K_e$	$e_m(t) = K_e \cdot \omega_m(t)$
L'équation mécanique du moteur tournant à la vitesse angulaire $\omega_m(t)$ permet de lier l'inertie $J$ de l'arbre en rotation et le couple moteur $C_m(t)$	$J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t)$
L'équation électrique au niveau de l'induit du moteur permet de lier la tension $U_g(t)$ , le courant $i_m(t)$ , la résistance de l'induit $R_m$	$U_g(t) = R_m \cdot i_m(t) + e_m(t)$
Le couple moteur $C_m(t)$ est couplé à l'intensité $i_m(t)$ dans la bobine du moteur grâce à la constante de couple $K_i$	$C_m(t) = K_i \cdot i_m(t)$

**Question 1** Appliquer la transformée de Laplace sur les différentes équations du modèle de connaissance.

**Question 2** Déduire des questions précédentes le schéma-bloc correspondant au groupe propulsion gauche seul.

**Question 3** Déterminer l'expression de la fonction de transfert du système en boucle fermée du groupe propulsion gauche  $H_g(p) = \frac{\Omega_g(p)}{U_g(p)}$  en fonction de  $r, K_i, K_e, J$  et  $R_m$ . Montrer que cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme d'un système du premier ordre  $H_g(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$  où  $K$  et  $\tau$  sont 2 constantes à déterminer. Donner les unités de  $K$  et  $\tau$ .

Pour faire pivoter le robot d'un angle  $\varphi(t)$  autour de l'axe vertical ascendant, il est nécessaire de faire tourner les roues droites et gauches avec 2 vitesses angulaires différentes de façon à reproduire finalement un comportement de type « chenilles ».

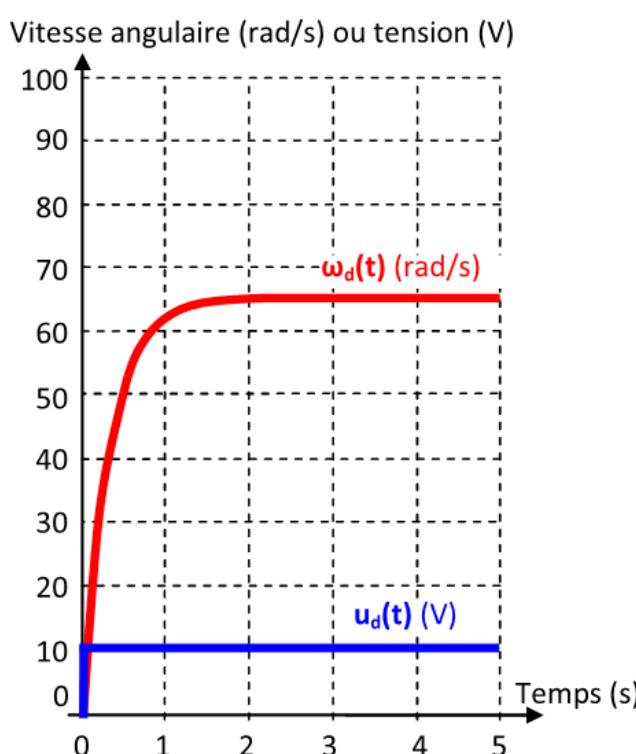
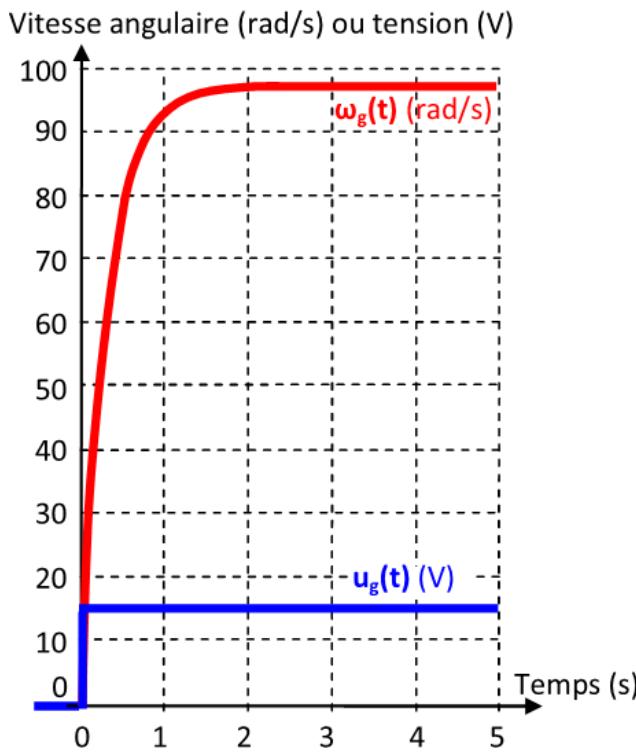
#### Notations

- Vitesse angulaire moyenne de rotation des roues :  $\omega_r(t)$ .
- Différence de vitesse de rotation angulaire entre roues droites et roues gauches :  $\Delta\omega(t) = \omega_d(t) - \omega_g(t)$ .
- Vitesse de rotation des roues gauches et droites :  $\omega_g(t)$  et  $\omega_d(t)$  avec  $\omega_g(t) = \omega_r(t) - \Delta\omega(t)/2$  et  $\omega_d(t) = \omega_r(t) + \Delta\omega(t)/2$ .
- La différence de vitesse de rotation entre roues droites et roues gauches, représentée par  $\Delta\omega(t)$ , permet de contrôler l'orientation du robot, alors que la vitesse moyenne de rotation des roues  $\omega_r(t)$  permet de contrôler la vitesse  $V(t)$  de déplacement en translation du robot.
- Tension de consigne utile pour la rotation :  $\Delta U(t) = U_d(t) - U_g(t)$ .
- Tension de consigne des moteurs gauches et droits :  $U_g(t) = U_m(t) - \Delta U(t)/2$  et  $U_d(t) = U_m(t) + \Delta U(t)/2$ .

- Transformées de Laplace des tensions :  $U_g(p)$ ,  $U_d(p)$  et  $\Delta U(p)$ .
- Transformées de Laplace des vitesses de rotation :  $\Omega_g(p)$ ,  $\Omega_d(p)$  et  $\Delta\Omega(p)$ .

**Question 4** A l'aide des relations ci-dessus, déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du groupe propulsion  $H_1(p) = \frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ . Montrer que cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme d'un système du premier ordre.

On donne les tracés de la réponse à un échelon des chaînes de propulsion gauche et droite.



**Question 5** Déterminer par identification les expressions des fonctions de transfert  $H_g(p) = \frac{\Omega_g(p)}{U_g(p)}$  et  $H_d(p) = \frac{\Omega_d(p)}{U_d(p)}$ . Donner les valeurs numériques des coefficients de ces fonctions de transfert.

#### Détermination de la fonction de transfert $H_2(p)$ du suivi de la trajectoire

La modélisation par schéma bloc du suivi de la trajectoire est ci-dessous. La position du robot est repérée dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  par ses coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$  ainsi que par l'angle du robot avec la ligne moyenne  $\varphi(t)$ .

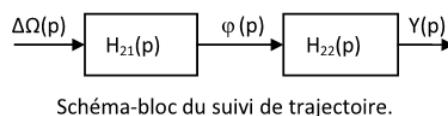


Schéma-bloc du suivi de trajectoire.

On donne le modèle de connaissance du suivi de trajectoire obtenu à l'aide de modèles cinématiques. On supposera que toutes les conditions initiales sont nulles et que  $e$  et  $R$  sont des coefficients constants.

	Modèle de connaissance
La vitesse de rotation du robot $\frac{d}{dt}\varphi(t)$ par rapport à la verticale ascendante dépend du rayon des roues $R$ , de la demi-largeur du robot noté $e$ et de la différence de vitesse de rotation angulaire entre roues droites et rouges	$R.\Delta\varphi(t) = 2.e.\frac{d}{dt}\varphi(t)$
Pour des petits angles, la vitesse de déplacement latéral $\frac{d}{dt}y(t)$ dépend de la vitesse de translation du robot suivant l'axe $\vec{x}$ noté $V$ et de l'angle de rotation du robot par rapport à la verticale ascendante $\varphi(t)$	$\frac{d}{dt}y(t) = V.\varphi(t)$

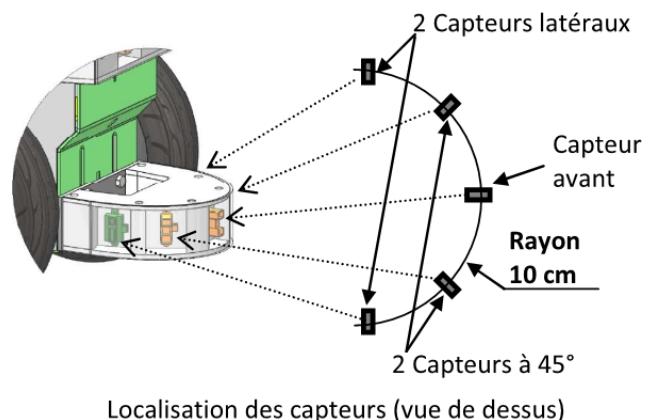
**Question 6** Appliquer la transformée de Laplace sur les 2 relations cinématiques proposées.

**Question 7** En déduire l'expression des fonctions de transfert  $H_{21}(p)$ ,  $H_{22}(p)$  puis  $H_2(p)$ .

#### Détermination de la fonction de transfert $H_3(p)$ correspondant au « capteur de distance »

Les 5 capteurs utilisés pour le guidage dans le rang de culture sont installés sur un demi-cercle à l'avant du robot :

- capteur avant pour la détection des obstacles;
- capteurs latéraux pour la mesure de distance avec les cultures;
- capteurs à 45° pour la mesure de distance avec avant anticipation.

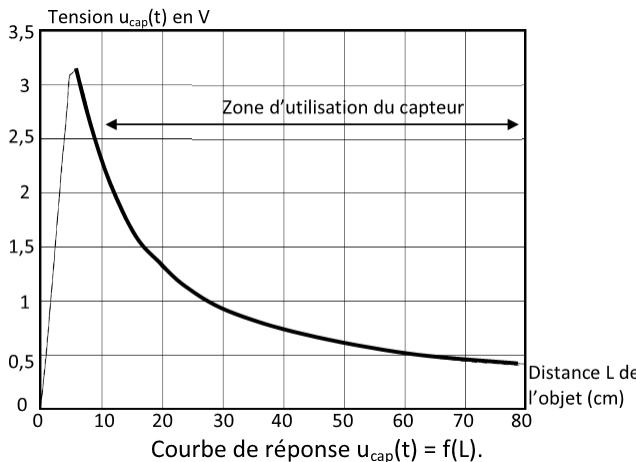


Ces 5 capteurs de distance qui détectent la présence d'objets entre 10 et 80 cm sont des capteurs infrarouges type « télémètre ». Ils ont une courbe de réponse  $u_{\text{cap}}(t)$  en fonction de la distance  $L$  de l'objet.

On suppose que seuls les 2 capteurs latéraux sont utilisés pendant le déplacement en ligne droite. Ils sont utilisés en différentiel tel que :  $u_{\text{mes}}(t) = u_{\text{capt gauche}}(t) - u_{\text{capt droit}}(t)$ .

**Notation :** transformée de Laplace de la tension  $u_{\text{mes}}(t)$  :  $U_{\text{mes}}(p)$ .

La fonction de transfert  $H_3(p) = \frac{U_{\text{mes}}(p)}{Y(p)}$  du bloc « capteur de distance » est supposée réduite à un gain pur noté  $K_c$ . On note  $u_{\text{capt } 0}$  la tension fournie par les 2 capteurs latéraux lorsque le robot est centré entre les 2 rangs de culture distants de 70 cm.



**Question 8** Réaliser un schéma en vue de dessus permettant de visualiser le robot positionné dans l'allée avec ses 2 capteurs latéraux. Indiquer sur ce schéma les distances entre les capteurs et les rangées de culture.

**Question 9** Quelle est la valeur de la tension  $u$  à 0,1 V près ? Quelle est la tension  $u_{\text{capt droit}}$  lorsque le robot est décalé de  $y = +5\text{ cm}$  suivant l'axe  $\vec{y}$  entre ces 2 rangs de culture ? Quelle est la tension  $u_{\text{capt gauche}}$  à ce même instant ?

**Question 10** En déduire le gain  $K_c$  du bloc « capteur de distance » autour de ce point de fonctionnement et préciser son unité.

## Réglage du gain d'adaptation

Le bloc d'adaptation est un gain proportionnel noté  $K_a$  qui permet de convertir la consigne  $y_{\text{consigne}}(t)$  en une tension  $u_{\text{consigne}}(t)$  image de la consigne.

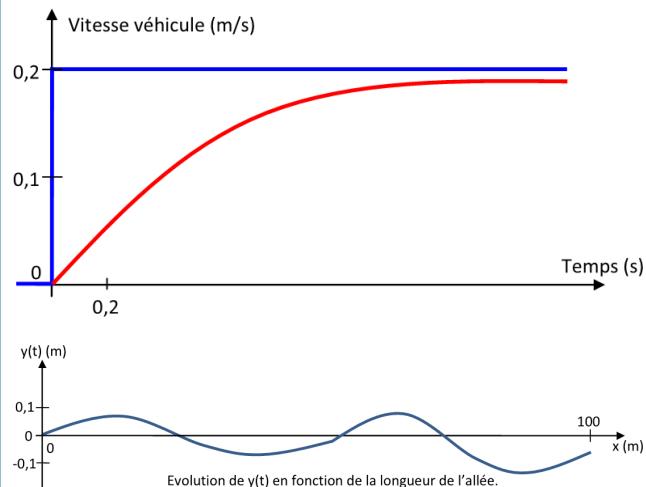
**Question 11** Comment choisir le gain d'adaptation  $K_a$  pour que la position  $y(t)$  en sortie de l'asservissement soit correctement asservie sur la position de consigne  $y_{\text{consigne}}(t)$  (on cherche dans ce cas à obtenir un écart  $\varepsilon(p)$  nul lorsque la consigne et la sortie sont égales).

On considère dans un premier temps que le correcteur est un correcteur proportionnel. On note donc la fonction de transfert de ce dernier  $C(p) = K_p$ .

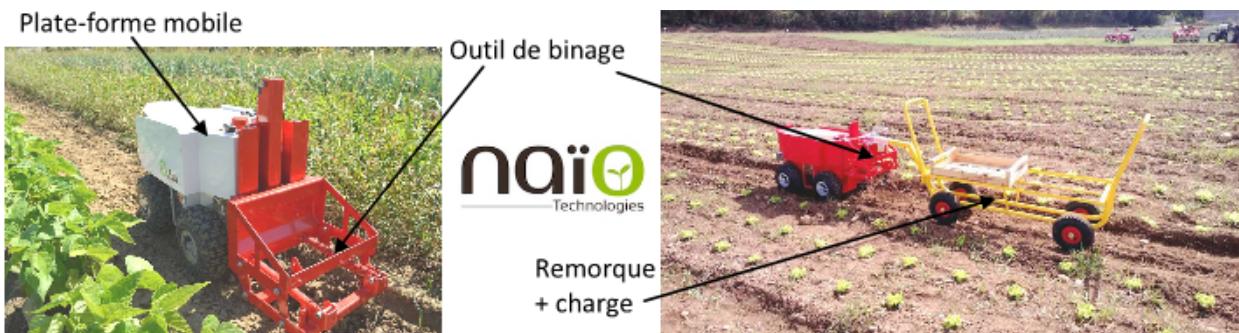
**Question 12** Déterminer la fonction de transfert boucle ouverte  $FTBO(p) = \frac{U_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ . Donner la classe et l'ordre de cette fonction de transfert.

## Analyse des performances obtenues.

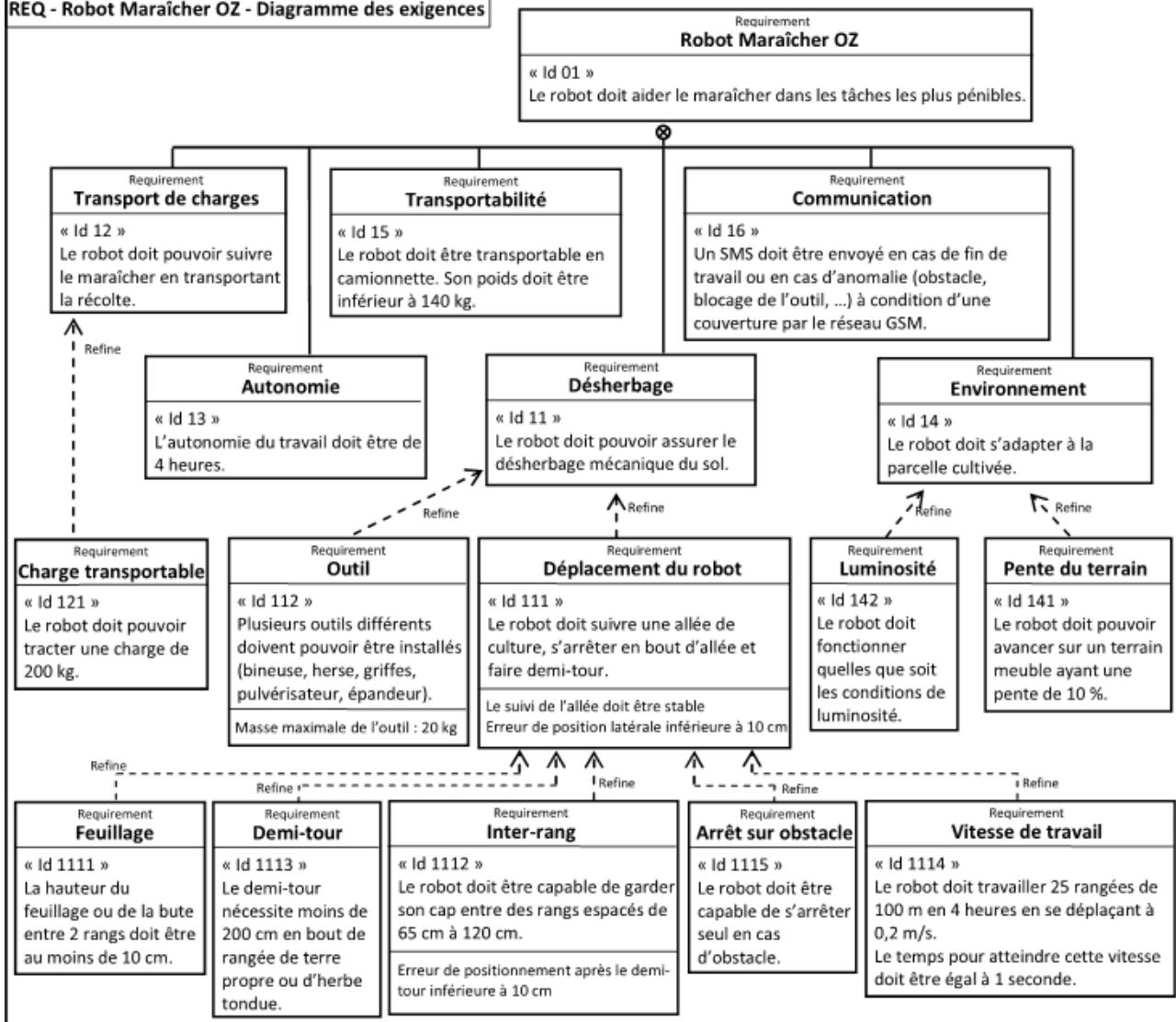
On donne ci-dessous la courbe donnant l'évolution du paramètre  $y(t)$  sur une allée de 100 m pour un premier réglage de correcteur. On donne d'autre part la réponse du véhicule en vitesse de translation pour une consigne échelon de 0,2 m/s.



**Question 13** Déterminer si ce réglage semble adapté vis-à-vis des exigences du cahier des charges. Justifier la réponse en laissant notamment apparaître les tracés utiles sur les courbes.



REQ - Robot Maraîcher OZ - Diagramme des exigences



## Application 04 –

## Corrigé



## Freinage d'Airbus

David Violeau  
Savoirs et compétences :

□ ...

## Présentation du système

## Modélisation du système de freinage

On souhaite définir un modèle pour l'asservissement en décélération. Pour cela, on propose de déterminer une fonction de transfert pour tous les constituants.

## Modélisation de la servovalve

**Question 1** Que peut-on dire de cette caractéristique sur tout le domaine de variation de  $i(t)$ ? Sachant que  $\theta$  est très petit (varie autour de 0), on utilise la relation suivante  $\theta(t) = K_1 i(t)$ . Déterminer la valeur de  $K_1$  à partir de la courbe.

**Correction** Cette courbe est non linéaire sur tout le domaine de variation de  $i$ . Comme  $\theta$  est très petit, on peut linéariser la courbe au voisinage de 0. La valeur  $K_1$  correspond donc à la pente de la courbe. En conséquence,  $K_1 = 1 \text{ rad} \cdot \text{A}^{-1}$ .

**Question 2** Calculer la fonction de transfert  $H_t(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)}$  où  $Z(p)$  et  $\Delta P(p)$  sont les transformées de Laplace de  $z(t)$  et  $\Delta P(t)$  en précisant l'hypothèse retenue.

**Correction** En se plaçant dans les conditions de Heaviside, on peut transformer l'équation dans le domaine de Laplace. On a donc :

$$m_t p^2 Z(p) = -2k_t Z(p) + 2S_t \Delta P(p) - p c_t Z(p)$$

Ainsi,

$$H_t(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)} = \frac{2S_t}{m_t p^2 + c_t p + 2k_t}$$

**Question 3** Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et donner son ordre.

**Correction** En factorisant par  $2k_t$  on obtient :

$$H_t(p) = \frac{\frac{S_t}{k_t}}{1 + \frac{c_t}{2k_t} p + \frac{m_t}{2k_t} p^2}$$

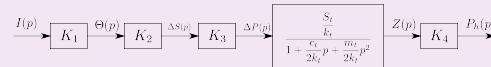
On admet pour finir que la pression d'utilisation  $P_h(t)$  du

fluide est proportionnelle au déplacement  $z(t)$  du tiroir :  $P_h(t) = K_4 z(t)$ .

**Question 4** À partir de toutes les informations précédentes (modélisation armature, buse/palette, tiroir...), recopier et compléter le schéma-bloc de la servovalve donné ci-dessous, en précisant les fonctions de transfert de chaque bloc (utiliser les notations algébriques).

**Correction** On utilise les équations suivantes :  $\theta(t) = K_1 i(t) \Leftrightarrow \Theta(p) = K_1 I(p)$ ,  $\Delta S(t) = K_2 \theta(t) \Leftrightarrow \Delta S(p) = K_2 \Theta(p)$ ,  $\Delta P(t) = K_3 \Delta S(t) \Leftrightarrow \Delta P(p) = K_3 \Delta S(p)$ ,  $P_h(t) = K_4 z(t) \Leftrightarrow P_h(p) = K_4 Z(p)$ .

On en déduit ainsi le schéma bloc suivant :



**Question 5** En déduire la fonction de transfert  $S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)}$  de la servovalve.

**Correction** On en déduit directement :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 \frac{S_t}{k_t}}{1 + \frac{c_t}{2k_t} + \frac{m_t}{2k_t} p^2}$$

**Question 6** Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

où on donnera les expressions littérales de  $K_{sv}$ ,  $\xi$  et  $\omega_0$ .

**Correction** Par identification, on déduit de la question précédente :

$$K_{SV} = K_1 K_2 K_3 K_4 \frac{S_t}{k_t}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k_t}{m_t}}$$

$$\xi = \frac{c_t}{2\sqrt{2k_t m_t}}$$

On souhaite que la réponse à une entrée  $i(t)$  de type échelon de valeur  $i_0$  soit la plus rapide possible **sans toutefois produire de dépassement**.

**Question 7** A quelle valeur de  $\xi$  correspond cette spécification ?

**Correction** Pour ne pas avoir de dépassement, il est nécessaire que  $\xi \geq 1$ . Le système est le plus rapide lorsque  $\xi = 1$ .

**Question 8** Démontrer que cette condition ne peut être satisfaite que si  $k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$ .

$$\xi = 1 \Leftrightarrow c_t = 2\sqrt{2k_t m_t} \Leftrightarrow k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$$

**Question 9** Montrer alors que la fonction de transfert de la servovalve peut se mettre sous la forme :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

on donnera l'expression littérale de  $T_{sv}$ .

**Correction** Lorsque  $\xi = 1$ , le discriminant du dénominateur de la fonction  $S_v(p)$  est nul. En conséquence ce dénominateur possède une racine double. En utilisant la formulation proposée, cette racine est égale à  $\frac{-1}{T_{sv}}$ . En développant la fonction proposée, on peut donc identifier  $T_{sv}$  :

$$(1 + T_{sv}p)^2 = 1 + \frac{2p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2} \Leftrightarrow 1 + 2T_{sv}p + T_{sv}^2 p^2 = 1 + \frac{2p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}$$

On a donc :

$$T_{sv} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m_t}{2k_t}} = \sqrt{\frac{m_t}{2\frac{c_t^2}{8m_t}}} = 2\frac{m_t}{c_t}$$

**Question 10** Déterminer la réponse indicielle  $P_h(t)$  pour une entrée échelon de valeur  $i(t) = i_0 u(t)$ .

$$\text{On rappelle que } \mathcal{L}(t e^{-at} u(t)) = \frac{1}{(p+a)^2}.$$

**Correction** On soumet le système à une entre échelon. En conséquence, on a :

$$I(p) = \frac{i_0}{p}$$

On a alors :

$$P_h(p) = \frac{i_0}{p} \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

En réalisant la décomposition en éléments simples, on a :

$$P_h(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1 + T_{sv}p} + \frac{\gamma}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

En calculant  $P_h(p)p$  et en posant  $p = 0$ , on obtient  $\alpha = K_{sv} i_0$ .

En calculant  $P_h(p)(1 + T_{sv}p)^2$  et en posant  $p = -\frac{1}{T_{sv}}$ , on obtient  $\alpha = K_{sv} i_0$ . On obtient alors  $\gamma = -K_{sv} T_{sv} i_0$ .

Enfin, en calculant  $\lim_{p \rightarrow +\infty} p P_h(p)$  on obtient  $\beta = -K_{sv} T_{sv} i_0$ .

Au final, on obtient :

$$P_h(p) = K_{sv} i_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{T_{sv}}{1 + T_{sv}p} - \frac{T_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2} \right) = K_{sv} i_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{T_{sv}} + p} - \frac{1}{(\frac{1}{T_{sv}} + p)^2} \right)$$

En repassant dans le domaine temporel, on obtient :

$$P_h(t) = K_{sv} i_0 \left( 1 - e^{-\frac{-t}{T_{sv}}} - \frac{t}{T_{sv}} e^{-\frac{-t}{T_{sv}}} \right) u(t)$$

### Modélisation de l'accéléromètre

#### Principe de l'accéléromètre

**Question 11** Déterminer les transformées de Laplace des expressions (1) à (5).

**Correction** On obtient directement :

$$\varepsilon(p) = X_1(p) - X_2(p)$$

$$A(p) = p^2 X_1(p)$$

$$m_a p^2 X_2(p) = c_a (p X_1(p) - p X_2(p)) + k_a (X_1(p) - X_2(p))$$

$$U_a(p) = K_p \varepsilon(p)$$

$$A_m(p) = K_{CAN} U_a(p)$$

**Question 12** En déduire les transmittances  $G_i$  du schéma bloc ci-après.

**Correction** On a :

$$G_1(p) = \frac{X_1(p)}{A(p)} = \frac{1}{p^2}$$

D'après la troisième relation, on a :

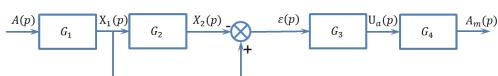
$$X_2(p)(m_a p^2 + c_a p + k_a) = X_1(p)(c_a p + k_a)$$

et donc

$$G_2(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$$

$$G_3(p) = \frac{U_a(p)}{\varepsilon(p)} = K_p$$

$$G_4(p) = \frac{A_m(p)}{U_a(p)} = K_{CAN}$$



**Question 13** En déduire la fonction de transfert  $\frac{A_m(p)}{A(p)}$  et montrer quelle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{K_{acc}}{1 + 2\frac{\xi_a p}{\omega_a} + \frac{p^2}{\omega_a^2}}$$

Donner les expressions de  $K_{acc}$ ,  $\xi_a$  et  $\omega_a$ .

**Correction** D'après le schéma bloc, on a :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = G_1(1 - G_2) G_3 G_4$$

D'où

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{1}{p^2} \left( 1 - \frac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a} \right) K_p K_{CAN} = \frac{K_p K_{CAN}}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$$

En mettant la fonction cette fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{\frac{K_p K_{CAN} m_a}{k_a}}{\frac{m_a}{k_a} p^2 + \frac{c_a}{k_a} p + 1}$$

Au final :

$$K_{acc} = \frac{K_p K_{CAN} m_a}{k_a}$$

$$\xi_a = \frac{c_a}{2\sqrt{k_a m_a}}$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$$

**Question 14** La figure ci-dessous donne la réponse indicielle (entrée unitaire) de l'accéléromètre. Identifier les valeurs des constantes  $K_{acc}$ ,  $\xi_a$  et  $\omega_a$  (On pourra utiliser les abaques donnés en annexe).

**Correction** D'après le tracé de la réponse indicielle avec une entrée unitaire, on observe bien la réponse d'un système du second ordre (tangente horizontale et un dépassement).

L'entrée est unitaire et le système tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini. En conséquence on a  $K_{acc} = 1$ .

La valeur du premier dépassement est de 1,05. En conséquence le dépassement est de 5%. D'après l'abaque du dépassement relatif, on a donc :  $\xi_a = 0,7$ .

En utilisant l'abaque donnant  $t_r \omega_0$  en fonction de  $\xi$  on lit que  $t_r \omega_0 = 3$ .

Enfin, en mesurant le temps de réponse à 5% on a  $t_r \approx 0,03s..$ . En conséquence :  $\omega_a = \frac{3}{0,03} \approx 100 \text{ rad/s.}$

Réponse acceptée : pour le temps de réponse à 5%  $t_r = 0,045s..$  En conséquence :  $\omega_a = \frac{3}{0,045} \approx 66 \text{ rad/s.}$

## Étude de l'asservissement global

**Question 15** Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte. En déduire l'ordre, la classe et le gain de la FTBO( $p$ ).

**Correction** Par définition, la FTBO s'exprime par la relation :  $\text{FTBO}(p) = H_{BSCU} \cdot H_{SC}(p) \cdot H_f(p) \cdot H_{acc}(p) = \frac{K_c K_{SV} K_f K_{acc}}{(1 + T_{sv} p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi_a}{\omega_a} p + \frac{p^2}{\omega_a^2} \right)}$

Le gain de la FTBO est donné par le numérateur :  $K_c K_{SV} K_f K_{acc}$ .

L'ordre de la FTBO est donné par le monôme de plus haut degré : l'ordre est donc de 4 (lorsqu'on développe le système).

La classe du système est donné par le nombre d'intégrateur présent au dénominateur. Ici,  $p$  ne peut pas être mis en facteur du dénominateur. La classe est donc de 0.

**Question 16** Exprimer l'écart  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $a_c(p)$  et de la FTBO( $p$ ).

**Correction** D'après le schéma bloc, on a :

$$\varepsilon(p) = A_c(p) - A_m(p) = A_c(p) - \varepsilon(p) \cdot \text{FTBO}(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)(1 - \text{FTBO}(p)) = A_c(p)$$

On a donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{A_c(p)}{(1 - \text{FTBO}(p))}$$

**Question 17** En déduire l'écart en régime permanent à une entrée de type échelon d'accélération  $a_c(t) = a_c u(t)$ . Que peut on dire de la performance de précision pour ce

correcteur ?

**Correction** L'écart est donné par la fonction  $\varepsilon$ . L'écart en régime permanent est donné par la limite de  $\varepsilon(t)$  en l'infini. D'après le théorème de la valeur finale on a donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p A_c(p)}{1 - FTBO(p)}$$

L'entrée est un échelon d'accélération d'amplitude  $a_c$ . En conséquence :

$$A_c(p) = \frac{a_c}{p}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a_c}{p} \frac{p}{1 + FTBO(p)}$$

Or,

$$\lim_{p \rightarrow 0} FTBO(p) = K_c K_{SV} K_f K_{acc}$$

En conséquence,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \frac{a_c}{1 + K_c K_{SV} K_f K_{acc}}$$

L'écart statique de ce système n'étant pas nul, le système n'est donc pas précis.

**Question 18** On utilise un correcteur (correcteur PI) plus évolué de fonction de transfert  $H_{BSCU}(p) = K_i \frac{1 + T_i p}{p}$ , déterminer à nouveau l'écart en régime permanent et conclure sur ce choix de correcteur.

**Correction** Il suffit dans un premier temps de calculer la limite quand  $p$  vers 0 de la nouvelle FTBO.

Cette FTBO vaut :

$$FTBO(p) = \frac{K_c K_{SV} K_f K_{acc}}{(1 + T_{sv} p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi_a}{\omega_a} p + \frac{p^2}{\omega_a^2} \right)} \frac{K_i (1 + T_i p)}{p}$$

On a alors :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} FTBO(p) = +\infty$$

En conséquence,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

L'écart statique étant nul, le système est donc précis.

Application 05 –  
Corrigé

**Applications**  
*D'après Sébastien Grange*  
*Savoirs et compétences :*

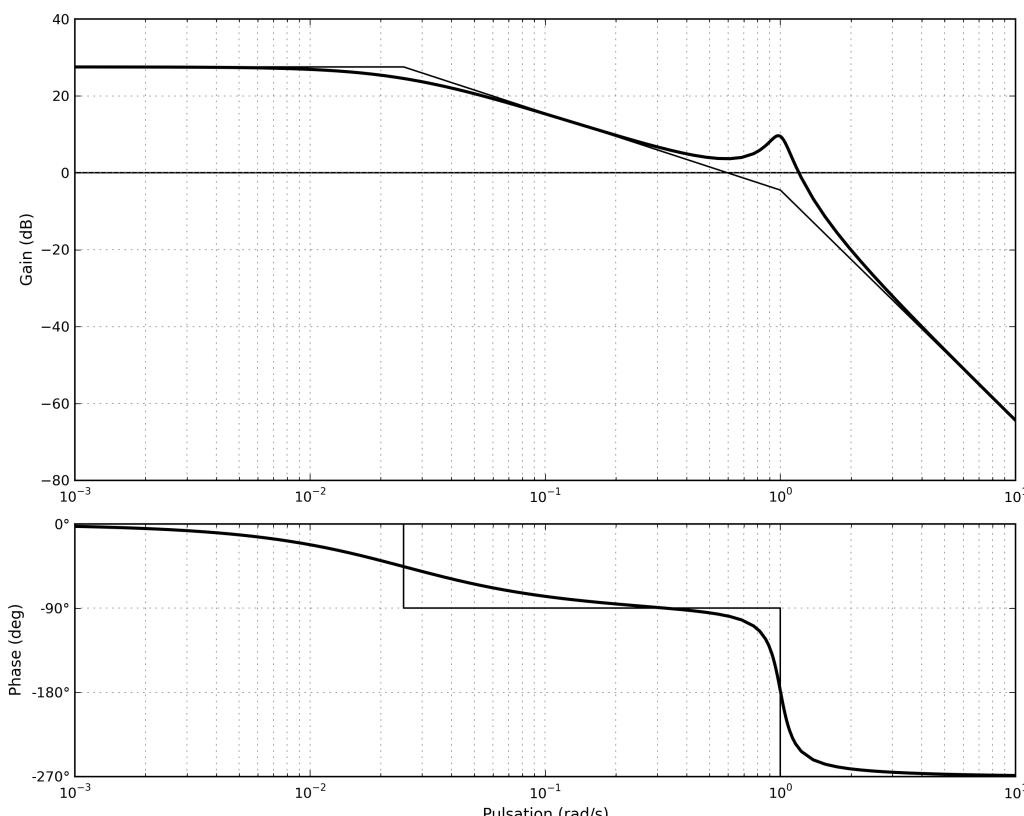
...

## Diagramme de Bode

**Question 1** Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

**Correction**  $H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)} = \frac{24}{(1+40p)\left(1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1}p + \frac{p^2}{1^2}\right)}$

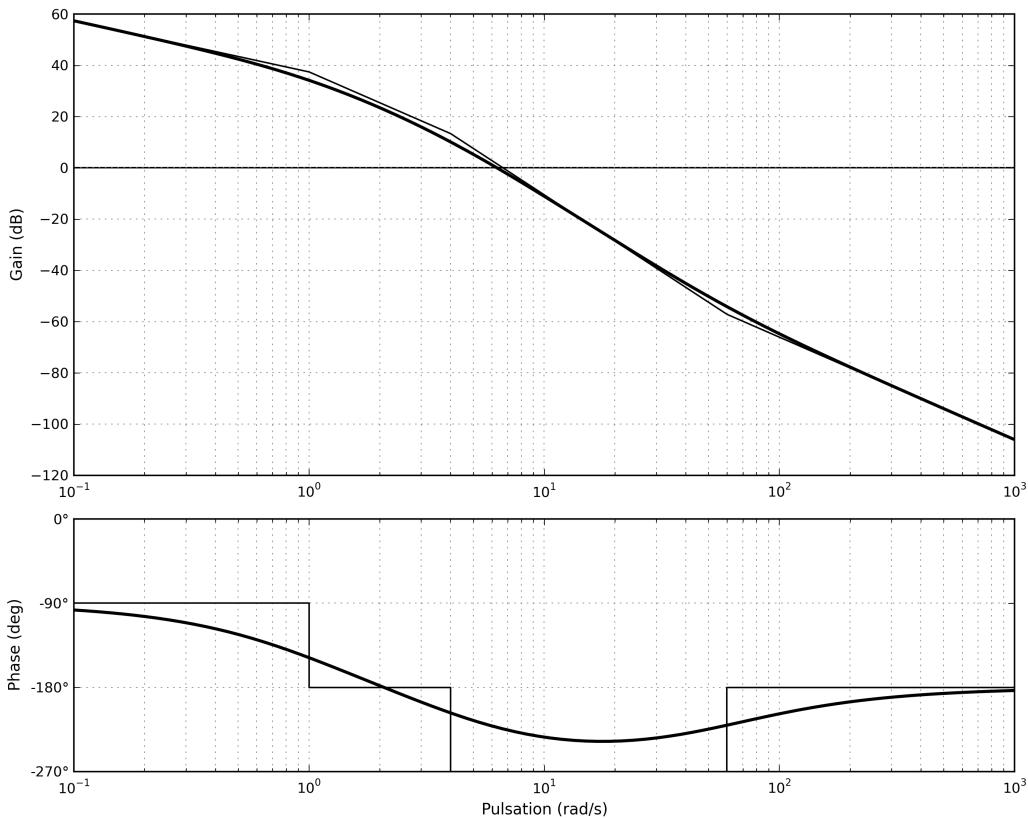


**Question 2** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

**Correction**

$$H(p) = \frac{5(p+60)}{p(p^2+5p+4)} = \frac{75(1+0,0167p)}{p(1+(2 \cdot 1,25)/2)p + p^2/2^2} = \frac{75(1+0,0167p)}{p(1+p)(1+0,25p)}$$



**Question 3** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .

**Correction** D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. De plus la phase diminue dans un premier temps de 90 degrés puis encore de 90 degrés ce qui justifie les 2 1<sup>er</sup>ordres.

Pour identifier les constantes de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un premier ordre passe par -45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $\frac{1}{\tau}$ . Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc les pulsations de coupure lorsque la phase vaut -135 degrés puis -225 degrés. On a :  $1/T_1 \approx 100$  et  $1/T_2 \approx 2000$  donc  $T_1 = 0,01 \text{ s}$  et  $T_2 = 0,0005 \text{ s}$ .

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ . Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1<sup>er</sup> ordre valent environ  $20 \log K$  et celui de l'intégrateur  $20 \log(1/\omega)$ . On a donc pour  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$  :  $20 \log(K/0,1) \approx -20$   $K \approx 1$

$$\text{On a donc : } H(p) = \frac{1}{p(1+0.01p)(1+0.0005p)}.$$

Le pôle dominant est le pôle qui met le plus de temps à converger, c'est-à-dire celui qui a la constante de temps la plus grande, on a donc :  $H(p) \approx \frac{1}{p(1+0.01p)}$ .

**Question 4** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

**Correction** On sait que la sortie sera également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais déphasée et d'amplitude différente :  $s(t) = S_0 \sin(300t + \varphi)$ .

Le diagramme de Bode nous donne le rapport de l'amplitude entre la sortie et l'entrée (courbe de gain) et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (courbe de phase).

$$G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) = 20 \log(S_0/E_0) = 20 \log(S_0/3).$$

On peut lire que :  $G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) \approx -60 \text{ dB}$  et donc  $S_0 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ . D'après la courbe de phase, on peut lire :  $\varphi(\omega = 300 \text{ rad/s}) = -175 \text{ degrés}$ . On a donc :  $s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(300t - 3,05)$ . L'angle est à mettre en radians.

**Question 5** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .

**Correction** D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. Ensuite la phase augmente dans un premier temps de 90 degrés, ce qui signifie la présence d'un « 1er ordre » en numérateur. Puis la phase diminue de 180 degrés et le gain résonne ce qui justifie la présence d'un 2ème ordre avec un coefficient d'amortissement plus petit que  $1/\sqrt{2}$ .

$$H(p) = \frac{K(1+Tp)}{p(1+2\xi/\omega_0 p + p^2/(\omega_0^2))}$$

Pour identifier la constante de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un « premier ordre » au numérateur passe par 45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $1/\tau$ . Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -45 degrés. On a :  $1/T \simeq 1$  et  $T = 1\text{s}$ .

Pour identifier la pulsation de coupure, on va utiliser le fait que la phase d'un 2ème ordre passe par -90 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $\omega_0$ . Ici, il y a un intégrateur et un « 1er ordre » au numérateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -90 degrés. On a :  $\omega_0 \simeq 80\text{ rad/s}$ .

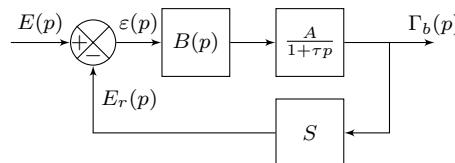
Pour identifier le coefficient d'amortissement, on va utiliser la résonnance. On a :  $20 \log(1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})) \simeq 13$  et  $\xi \simeq 0,11$ .

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici  $\omega = 0,1\text{ rad/s}$ . Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1er ordre et du 2ème ordre valent environ  $20 \log K$  et celui de l'intégrateur  $20 \log(1/\omega)$ . On a donc pour  $\omega = 0,1\text{ rad/s}$  :  $20 \log(K/0,1) \simeq 33$  et  $K \simeq 4,5$

**Question 6** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

## Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.



On a  $A = 100\text{ g ms}^{-2}\text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2\text{ s}$  et  $S = 10 \cdot 10^{-3}/g\text{ V}/(m/s^2)$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur.  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement et  $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma b(t)$ .

### B(p) = 1

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

**Question 1** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

**Question 2** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega t = 10\text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

**Deuxième étude :**  $B(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 3** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.

## Application 06 –

## Corrigé



## Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Concours Centrale Supelec PSI 2006

Savoirs et compétences :

 ...

## Mise en situation

## Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

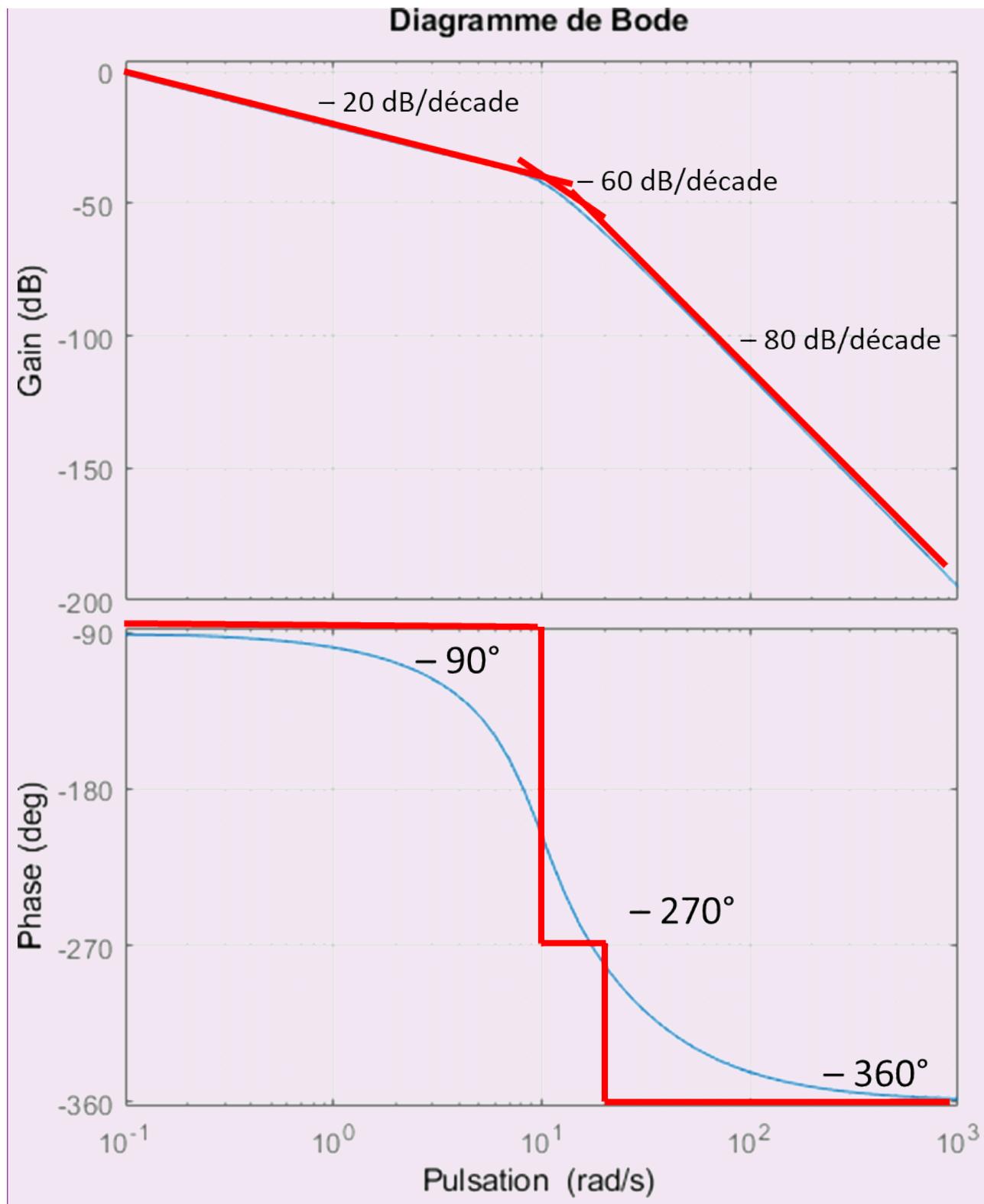
**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

**Correction** On a pour  $H_1(p)$ ,  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,01 \Leftrightarrow \omega_0 = 10$  et  $2\frac{\xi}{\omega_0} = 0,1$  soit  $\xi = 0,1 \times 10/2 = 0,5$ . Les pulsations caractéristiques de la FTBO sont donc  $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$  et  $1/0,05 = 20 \text{ rad s}^{-1}$ .

Pour tracer un diagramme de Bode avec un intégrateur, il est nécessaire de définir un point pour définir la « hauteur » du tracé. Pour cela on prend un point pour lequel seul l'intégrateur et les constantes ont de l'effet. Ainsi, pour  $\omega = 0,1 \text{ rad s}^{-1}$ , on a  $\text{FTBO}(p) \simeq \frac{2000 \times 45 \times 10^{-6}}{p}$ . On a donc  $20 \log 0,09 - 20 \log 0,1 \simeq -0,92 \text{ dB}$ .

On peut dresser le tableau de variations de la FTBO puis tracer les asymptotes.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega = 10$	$\omega = 20$	$\omega \rightarrow \infty$
$\ H_1(j\omega)\ _{dB}$	$20 \log 2000$	$-40 \text{ dB/decade}$	$-40 \text{ dB/decade}$	
$\ H_2(j\omega)\ _{dB}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-20 \text{ dB/decade}$	
$\ M(j\omega)\ _{dB}$	0	0	$-20 \text{ dB/decade}$	
$\ \text{FTBO}(j\omega)\ _{dB}$	<b><math>-20 \text{ dB/decade}</math></b>	<b><math>-60 \text{ dB/decade}</math></b>	<b><math>-80 \text{ dB/decade}</math></b>	
$\text{Arg}(\text{FTBO}(j\omega))$	<b><math>-90^\circ</math></b>	<b><math>-270^\circ</math></b>	<b><math>-360^\circ</math></b>	



### Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :  $C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument  $C(p)$  de afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Méthode** Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|FTBO(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$ . On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg[FTBO(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .

**Correction** La pulsation de coupure souhaitée est  $\omega_c \simeq 1 \text{ rad s}^{-1}$ . On cherche donc  $K_r$  et  $T_i$  tels que  $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ) = 60^\circ$ .

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \underbrace{\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}}_{\rightarrow -5,7^\circ \text{ qd } \omega=\omega_c} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+0,05p}}_{\rightarrow -2,8^\circ \text{ qd } \omega=\omega_c} \cdot \underbrace{K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}}_{\rightarrow -90^\circ} \right] = \arg \left[ \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \right] - 98,5$$

(R)

Ci-dessus, ce sont les **arguments** que l'on évalue lorsque  $\omega = \omega_c$ . L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] - 98,5.$$

Pour respecter la marge souhaitée, il est donc nécessaire que  $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180) \geq 60$  Soit  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] - 98,5 + 180 \geq 60$  et  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ$ .

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{imin}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Correction** On en déduit que pour  $\omega = \omega_c = 1$ ,  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ \Leftrightarrow \arctan(T_i \omega) - 90 \geq -21,5^\circ \Leftrightarrow \arctan(T_i \omega) \geq 68,5^\circ$  et donc  $\Rightarrow T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$ .

!

Attention : à ce stade, la marge de phase serait de  $60^\circ$  SI la pulsation de coupure était de  $1 \text{ rad s}^{-1}$  ce qui n'est pas encore le cas pour le moment.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{imin}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de saisir la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode** Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log \|\text{FTBO}(j\omega_c)\| = 0$ .

**Correction** En raisonnant graphiquement à l'aide du diagramme en boucle ouverte non corrigé, on lit que le gain est d'environ  $-20 \text{ dB}$  lorsque  $\omega = 1$ . La fonction de transfert du correcteur est  $C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_r \frac{T_i p + 1}{T_i p}$ . Le gain dB du correcteur doit donc être de  $20 \text{ dB}$  lorsque  $\omega = 1$  :  $20 \log K_r + 20 \log \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} - 20 \log T_i \omega = 20 \Leftrightarrow \log K_r + \log \sqrt{T_i^2 + 1} - \log T_i = 1 \Leftrightarrow \log K_r = 1 - \log \sqrt{T_i^2 + 1} + \log T_i$ . On a donc  $K_r = 9,3$ .

Analytiquement (à vérifier....)  $20 \log \|\text{FTBO}(j\omega_c)\| = 0 \Rightarrow \|\text{FTBO}(j\omega_c)\| = 1$ .

$$\begin{aligned} \|\text{FTBO}(j\omega)\| &= \left\| \frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2} \cdot \frac{1}{1+0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\ &= \left\| \frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2} \cdot \frac{1}{1+0,05p} \cdot K_r \frac{1+T_i p}{T_i p} \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\ &= \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \sqrt{1+T_i^2 \omega^2} \left\| \frac{1}{1+0,1p+0,01p^2} \frac{1}{1+0,05p} \right\| = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1+T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{1+0,05^2 \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2 \omega^2)^2 + 0,1^2 \omega^2}} \\ &= \frac{K_r}{T_i} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1+T_i^2}}{\sqrt{1+0,05^2}} \frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2)^2 + 0,1^2}} \end{aligned}$$

**Question 5** Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode** Soit  $\omega_\varphi$  la pulsation telle que  $\varphi(\omega_\varphi) = -180^\circ$ . La marge de gain s'exprime alors par  $MG = -20 \log \|H(j\omega_\varphi)\|$ .

**Correction** **Approche analytique** On résout  $\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = -180^\circ$

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left( 1 + \frac{1}{T_ip} \right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right]$$

**Approche graphique**

### Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

**Question 6** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

**Correction**

**Question 7** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Correction**

- $K_f = 1$  : lorsque  $\omega$  tend vers 0, le gain tend vers 0;
- $\omega_0 = 0,5$  : valeur de la pulsation de résonance;
- $\tau_1 = \frac{1}{0,9} = 1,11 \text{ s}$ ;
- $\tau_2 = \frac{1}{7} = 0,14 \text{ s}$ ;
- $\xi < 0,7$  (résonance).

**Question 8** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

**Correction**

La pulsation propre  $\omega_0$  est relativement loin de la bande passante, en conséquence sa dynamique sera rapide vis-à-vis du zéro et du pôle double (pôles dominants). On adopte donc :

$$F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{(1 + 3,3p)}{(1 + 1,66p)^2}$$

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$ .

**Question 9** Calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $\nu_c(t) = \nu_{c0} u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

**Correction**

### Calcul du temps du 1<sup>er</sup> maximum

Le temps du 1<sup>er</sup> maximum est donné par  $f(t_m) = 0$ , soit pour :

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t_m + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} = 0$$

On obtient donc :

$$t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$$

L'application numérique avec les valeurs adoptées conduit à  $t_m = 3,3$  s.

### Calcul du dépassement

La réponse indicielle peut être obtenue par intégration de la réponse impulsionale, le dépassement étant donné par la valeur de la sortie pour  $t = t_m$  :

$$\nu(t_m) = \int_0^{t_m} f(t) dt = \int_0^{t_m} (ay(t) + b\dot{y}(t)) dt = a \int_0^{t_m} y(t) dt + b [y(t)]_0^{t_m}$$

Avec  $y(t) = te^{-t/\tau_2}$  dont l'intégration peut être effectuée facilement par parties :

$$\int_0^{t_m} te^{-t/\tau_2} dt = \left[ -\tau_2 te^{-t/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t/\tau_2} \right]_0^{t_m} = -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2$$

$$\nu(t_m) = \frac{1}{\tau_2^2} \left[ -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2 \right] + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} t_m e^{-t_m/\tau_2}$$

Pour  $t = t_m$  on obtient  $\nu(t_m) = 1,13$ , soit un dépassement de 13%.

**Question 10** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

#### Correction

- Le temps du 1<sup>er</sup> maximum est inférieur à 3,5 s. et le dépassement inférieur à 20% ce qui vérifie le cahier des charges.
- Le régulateur comportant une action intégrale, l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une consigne constante.

### Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

**Question 11** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{ext}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $v_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :  $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \frac{1}{\|H_2(j\omega)\|}, \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$ .

**Correction** On a directement  $F_2(p) = -\frac{H_2(p)}{1 + H_2(p)M(p)C(p)H_1(p)}$ .

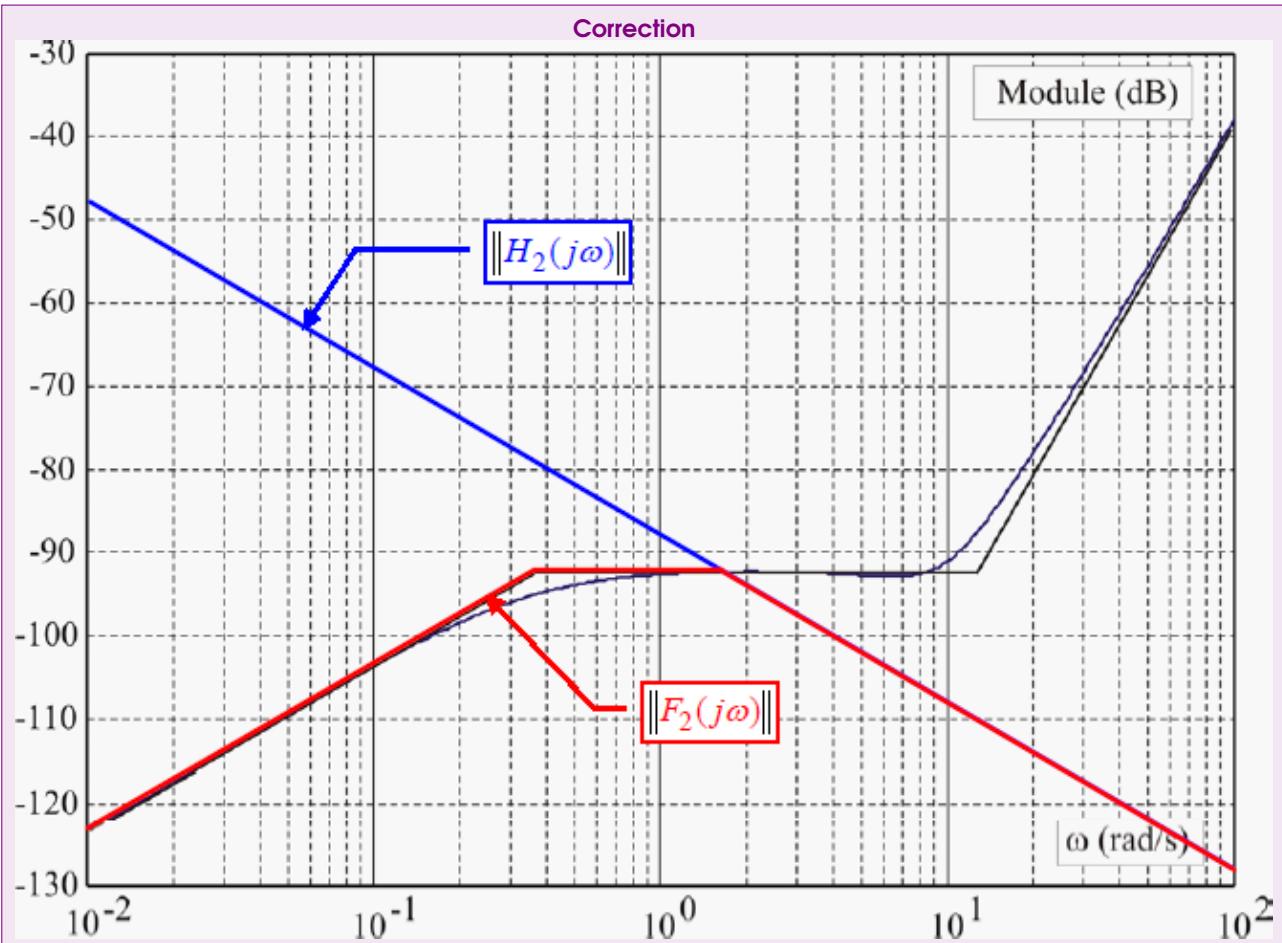
On peut alors déterminer le module et on a  $\|F_2(j\omega)\| = \left\| \frac{H_2(j\omega)}{1 + H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|$ .

Dans ces conditions :

- si  $\|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\| \gg 1$  alors  $\|F_2(j\omega)\| \simeq \left\| \frac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\| \simeq \left\| \frac{1}{M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|$ ;
- si  $\|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\| \ll 1$  alors  $\|F_2(j\omega)\| \simeq \|H_2(j\omega)\|$ .

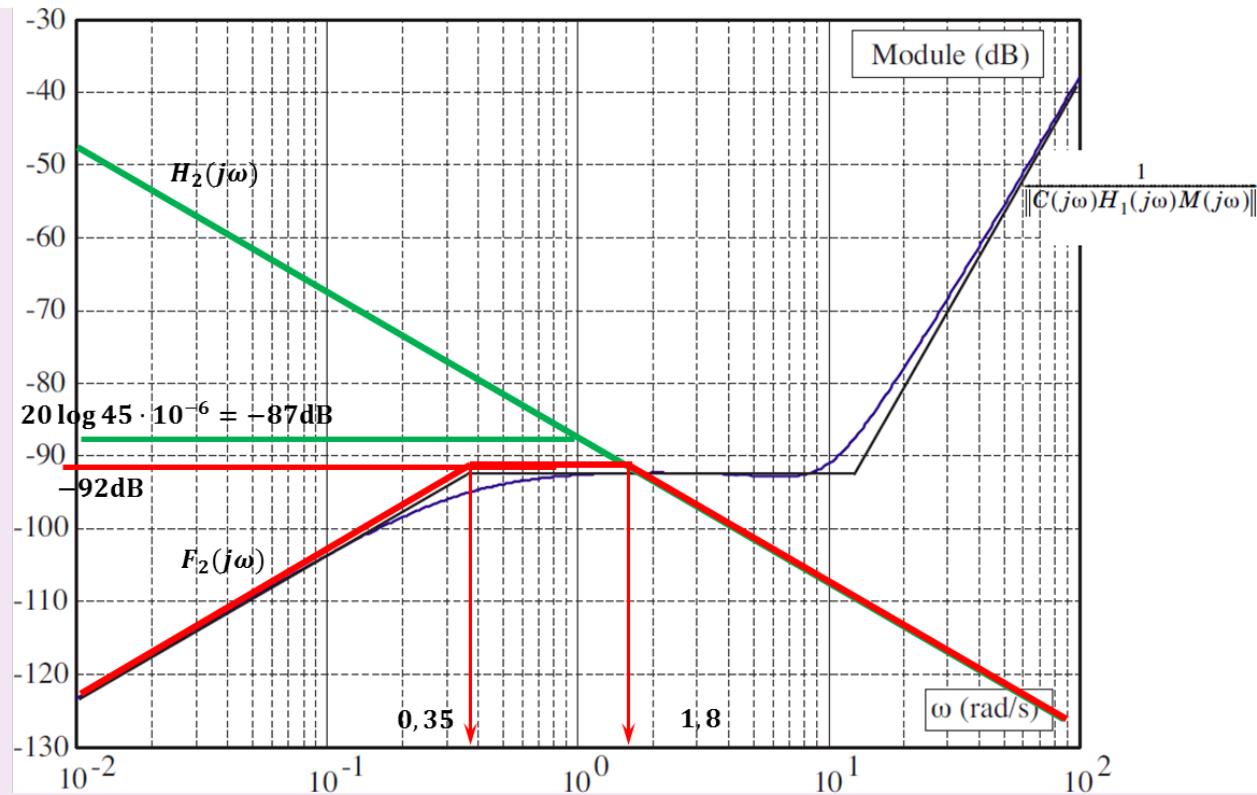
On peut en conclure que  $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$ .

**Question 12** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|}$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $\|H_2(j\omega)\|$ .



**Question 13** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $\|F_2(j\omega)\|$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

**Correction**



En analysant les brisures de  $F_2$ , on peut proposer la fonction de transfert suivante :  $F_2 = -\frac{Kp}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$

avec  $\tau_1 = \frac{1}{0,35} \simeq 2,9 \text{ s}$ ,  $\tau_2 = \frac{1}{1,8} \simeq 0,6 \text{ s}$ . Avec cette proposition, en basse fréquence, seul le déivateur existe, on a donc  $20 \log K \omega = 20 \log 0,01 K = -123$  soit  $K = 100 \times 10^{-123/20} \simeq 7 \cdot 10^{-5}$ .

$$\text{Au final, } F_2 = -\frac{7 \cdot 10^{-5} p}{(1+2,9p)(1+0,6p)}.$$

**Question 14** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

#### Correction

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux pôles :

$$\begin{cases} p_1 = -0,35 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

Le pôle  $p_2$  étant caractérisé par une dynamique relativement rapide par rapport à celle de  $p_1$ , on va pouvoir le négliger pour l'étude de la réponse temporelle. Soit la fonction approchée :

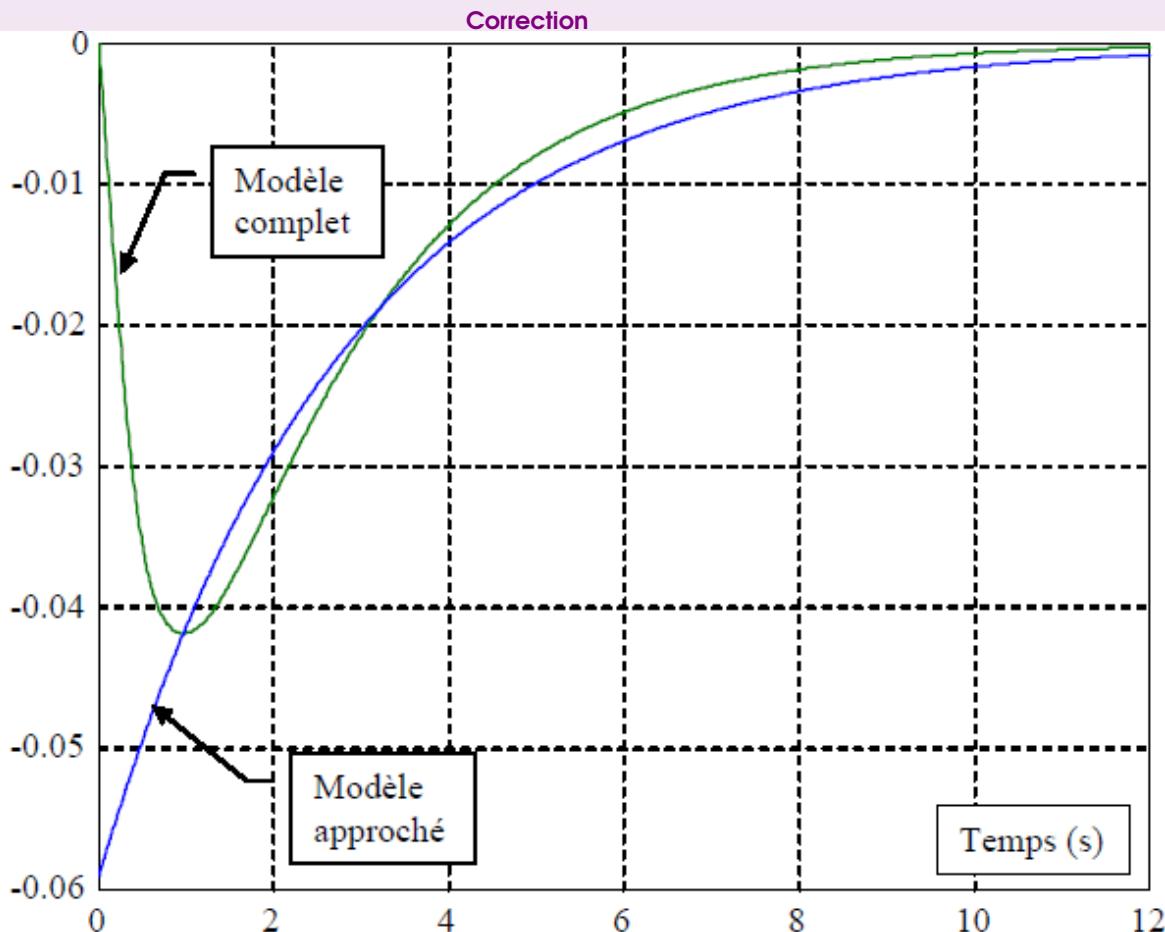
$$F_2(p) = -\frac{\frac{p}{12100}}{(1+2,8p)}$$

**Question 15** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{ext} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

**Correction**

La réponse à un échelon de perturbation est donnée sur la figure suivante, c'est la réponse typique d'une fonction du 1<sup>er</sup> ordre en partant d'une condition non nulle ( $v_1 = 0,05$ ) avec une entrée nulle. Le temps de réponse est alors de  $t_r = 3T = 8,4$  s.

**Question 16** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).



Calcul exact du temps de réponse

$$v_1(t_r) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t_r/T} = -0,05 \cdot \frac{K_2}{T} F_0 \Rightarrow t_r = T \cdot \ln(1/0,05) = 3T$$

**Retour sur le cahier des charges**

**Question 17** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

- Le temps de réponse de 8,4 s. est inférieur au temps de réponse de 9 s. demandé. En conséquence on peut conclure que le cahier des charges est satisfait au regard de cette contrainte.
- Le régulateur comportant une action intégrale (donc avant le point d'entrée de la perturbation) l'erreur statique est nulle comme montré sur la réponse temporelle.

**Correction**