

## Applications

## Robot martien &amp; Freinage d'Airbus

Florestan Mathurin &amp; David Violeau

## Savoirs et compétences :

## Étude des performances des motoréducteurs équipant les roues d'un robot Martien

D'après concours X-ENS – PSI – 2005. Adapté par Florestan Mathurin.

**Question 1** Déterminer le nom des composants qui réalisent les fonction  $H(p)$  et  $G(p)$ .**Correction**  $H(p)$  : moteur et  $G(p)$  : réducteur à engrenages.**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système :  $\frac{\Omega_r(p)}{\Omega_c(p)}$ **Correction**  $\frac{\Omega_r(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{H(p)G(p)}{1 + H(p)G(p)}$ .**Question 3** En supposant les conditions initiales nulles (ce qui sera également supposé dans tout le reste de l'exercice), exprimer ces équations dans le domaine de Laplace.**Correction**  $U_m(p) = E(p) + RI(p)$ ,  $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ ,  $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) - f\Omega_m(p)$ ,  $C_m(p) = k_m I(p)$ .**Question 4** Montrer que, dans le domaine de Laplace, la relation entre  $\Omega_m(p)$  et  $U_m(p)$  peut s'écrire sous la forme :  $\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K_m}{1 + T_m p}$  où  $K_m$  et  $T_m$  sont deux constantes à déterminer.**Correction**  $\Omega_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$  avec  $K_m = \frac{k_m}{fR + k_m k_e}$   
et  $T_m = \frac{RJ}{fR + k_m k_e}$ .**Question 5** Déterminer  $\omega_r(t)$  lorsque l'ordinateur du robot demande un échelon de rotation  $\omega_c(t) = \omega_{c0} \cdot u(t)$ .Exprimer le résultat en fonction de  $K$  et  $T$ .**Correction**  $\omega_r(t) = K\omega_{c0} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) u(t)$ .**Question 6** Le robot, initialement immobile, bouge selon le déplacement  $x_r(t)$  tel que  $\frac{d}{dt}x_r(t) = R \cdot \omega_r(t)$  où  $R$  est rayon de la roue ( $R = \text{constante}$ ). Déterminer  $X_r(p)$  en fonction de  $\Omega_r(p)$ .**Correction**  $\frac{dx_r(t)}{dt} = R\omega_r(t)$  et donc  $pX_r(p) = R\Omega_r(p)$ .**Question 7** Toujours dans le cas où l'ordinateur du robot demande un échelon de rotation  $\omega_c(t) = \omega_{c0} \cdot u(t)$ , déterminer la transformée de Laplace de  $X_r(p)$  et en déduire  $x_r(t)$ .**Correction**  $x_r(t) = RK\omega_{c0} \left( t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \right) u(t)$ .La vitesse angulaire que l'ordinateur du robot impose est  $\omega_{c0} = 2 \text{ rad s}^{-1}$ . Le rayon de la roue est  $R = 10 \text{ cm}$ .**Question 8** Déterminer le temps que met le robot à parcourir 1 km, en négligeant la fonction exponentielle présente dans  $x_r(t)$ . Justifier a posteriori que la fonction exponentielle était bien négligeable. Conclure quant à la capacité du robot à satisfaire la performance de vitesse de déplacement.**Correction**  $t_1 = 5000 \text{ s}$  CDCF OK.

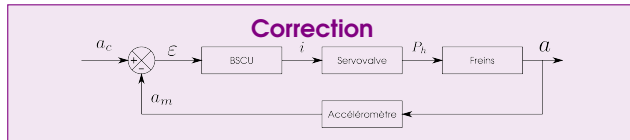
## Système de freinage de l'A318

D'après ressources UPSTI – David Violeau.

## Présentation du système

### Description fonctionnelle du système de freinage

**Question 1** Réaliser un schéma-bloc fonctionnel de l'asservissement en décélération à partir des indications ci-dessus. On prendra  $a_c(t)$  comme entrée et  $a(t)$  comme sortie.



### Modélisation du système de freinage

Dans cette seconde partie, on souhaite définir un modèle pour l'asservissement en décélération. Pour cela, on propose de déterminer une fonction de transfert pour tous les constituants.

#### Modélisation de la servovalve

**Question 2** Que peut-on dire de cette caractéristique sur tout le domaine de variation de  $i(t)$ ? Sachant que  $\theta$  est très petit (varie autour de 0), on utilise la relation suivante  $\theta(t) = K_1 i(t)$ . Déterminer la valeur de  $K_1$  à partir de la courbe.

**Correction** Cette courbe est non linéaire sur tout le domaine de variation de  $i$ . Comme  $\theta$  est très petit, on peut linéariser la courbe au voisinage de 0. La valeur  $K_1$  correspond donc à la pente de la courbe. En conséquence,  $K_1 = 1 \text{ rad} \cdot \text{A}^{-1}$ .

**Question 3** Calculer la fonction de transfert  $H_t(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)}$  où  $Z(p)$  et  $\Delta P(p)$  sont les transformées de Laplace de  $z(t)$  et  $\Delta P(t)$  en précisant l'hypothèse retenue.

**Correction** En se plaçant dans les conditions de Heaviside, on peut transformer l'équation dans le domaine de Laplace. On a donc :

$$m_t p^2 Z(p) = -2k_t Z(p) + 2S_t \Delta P(p) - p c_t Z(p)$$

Ainsi,

$$H_t(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)} = \frac{2S_t}{m_t p^2 + c_t p + 2k_t}$$

**Question 4** Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et donner son ordre.

**Correction** En factorisant par  $2k_t$  on obtient :

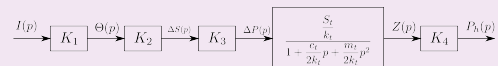
$$H_t(p) = \frac{\frac{S_t}{k_t}}{1 + \frac{c_t}{2k_t} p + \frac{m_t}{2k_t} p^2}$$

On admet pour finir que la pression d'utilisation  $P_h(t)$  du fluide est proportionnelle au déplacement  $z(t)$  du tiroir :  $P_h(t) = K_4 z(t)$ .

**Question 5** À partir de toutes les informations précédentes (modélisation armature, buse/palette, tiroir...), recopier et compléter le schéma-bloc de la servovalve donné ci-dessous, en précisant les fonctions de transfert de chaque bloc (utiliser les notations algébriques).

**Correction** On utilise les équations suivantes :  $\theta(t) = K_1 i(t) \Leftrightarrow \Theta(p) = K_1 I(p)$ ,  $\Delta S(t) = K_2 \theta(t) \Leftrightarrow \Delta S(p) = K_2 \Theta(p)$ ,  $\Delta P(t) = K_3 \Delta S(t) \Leftrightarrow \Delta P(p) = K_3 \Delta S(p)$ ,  $P_h(t) = K_4 z(t) \Leftrightarrow P_h(p) = K_4 Z(p)$ .

On en déduit ainsi le schéma bloc suivant :



**Question 6** En déduire la fonction de transfert  $S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)}$  de la servovalve.

**Correction** On en déduit directement :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 \frac{S_t}{k_t}}{1 + \frac{c_t}{2k_t} p + \frac{m_t}{2k_t} p^2}$$

**Question 7** Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{1 + \frac{2\xi p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

où on donnera les expressions littérales de  $K_{sv}$ ,  $\xi$  et  $\omega_0$ .

**Correction** Par identification, on déduit de la question précédente :

$$K_{sv} = K_1 K_2 K_3 K_4 \frac{S_t}{k_t}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k_t}{m_t}}$$

$$\xi = \frac{c_t}{2\sqrt{2k_t m_t}}$$

On souhaite que la réponse à une entrée  $i(t)$  de type échelon de valeur  $i_0$  soit la plus rapide possible **sans toutefois produire de dépassement**.

**Question 8** A quelle valeur de  $\xi$  correspond cette spécification ?

**Correction** Pour ne pas avoir de dépassement, il est nécessaire que  $\xi \geq 1$ . Le système est le plus rapide lorsque  $\xi = 1$ .

**Question 9** Démontrer que cette condition ne peut être satisfaite que si  $k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$ .

$$\xi = 1 \Leftrightarrow c_t = 2\sqrt{2k_t m_t} \Leftrightarrow k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$$

**Question 10** Montrer alors que la fonction de transfert de la servovalve peut se mettre sous la forme :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

on donnera l'expression littérale de  $T_{sv}$ .

**Correction** Lorsque  $\xi = 1$ , le discriminant du dénominateur de la fonction  $S_v(p)$  est nul. En conséquence ce dénominateur possède une racine double. En utilisant la formulation proposée, cette racine est égale à  $-\frac{1}{T_{sv}}$ . En développant la fonction proposée, on peut donc identifier  $T_{sv}$  :

$$(1 + T_{sv}p)^2 = 1 + \frac{2p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2} \Leftrightarrow 1 + 2T_{sv}p + T_{sv}^2 p^2 = 1 + \frac{2p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}$$

On a donc :

$$T_{sv} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m_t}{2k_t}} = \sqrt{\frac{m_t}{2 \frac{c_t^2}{8m_t}}} = 2 \frac{m_t}{c_t}$$

**Question 11** Déterminer la réponse indicielle  $P_h(t)$  pour une entrée échelon de valeur  $i(t) = i_0 u(t)$ .

$$\text{On rappelle que } \mathcal{L}(t e^{-at} u(t)) = \frac{1}{(p+a)^2}.$$

**Correction** On soumet le système à une entrée échelon. En conséquence, on a :

$$I(p) = \frac{i_0}{p}$$

On a alors :

$$P_h(p) = \frac{i_0}{p} \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

En réalisant la décomposition en éléments simples, on a :

$$P_h(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1 + T_{sv}p} + \frac{\gamma}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

En calculant  $P_h(p)p$  et en posant  $p = 0$ , on obtient  $\alpha = K_{sv} i_0$ .

En calculant  $P_h(p)(1 + T_{sv}p)^2$  et en posant  $p = -\frac{1}{T_{sv}}$ , on obtient  $\alpha = K_{sv} i_0$ . On obtient alors  $\gamma = -K_{sv} T_{sv} i_0$ .

Enfin, en calculant  $\lim_{p \rightarrow +\infty} p P_h(p)$  on obtient  $\beta = -K_{sv} T_{sv} i_0$ .

Au final, on obtient :

$$P_h(p) = K_{sv} i_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{T_{sv}}{1 + T_{sv}p} - \frac{T_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2} \right) = K_{sv} i_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{T_{sv}} + p} - \frac{1}{(1 + T_{sv}p)^2} \right)$$

En repassant dans le domaine temporel, on obtient :

$$P_h(t) = K_{sv} i_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_{sv}}} - \frac{t}{T_{sv}} e^{-\frac{t}{T_{sv}}} \right) u(t)$$

## Modélisation de l'accéléromètre

### Principe de l'accéléromètre

**Question 12** Déterminer les transformées de Laplace des expressions (1) à (5).

**Correction** On obtient directement :

$$\varepsilon(p) = X_1(p) - X_2(p)$$

$$A(p) = p^2 X_1(p)$$

$$m_a p^2 X_2(p) = c_a (p X_1(p) - p X_2(p)) + k_a (X_1(p) - X_2(p))$$

$$U_a(p) = K_p \varepsilon(p)$$

$$A_m(p) = K_{CAN} U_a(p)$$

**Question 13** En déduire les transmittances  $G_i$  du schéma bloc ci-après.

**Correction** On a :

$$G_1(p) = \frac{X_1(p)}{A(p)} = \frac{1}{p^2}$$

D'après la troisième relation, on a :

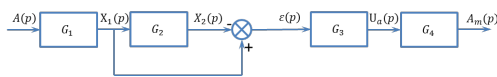
$$X_2(p)(m_a p^2 + c_a p + k_a) = X_1(p)(c_a p + k_a)$$

et donc

$$G_2(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$$

$$G_3(p) = \frac{U_a(p)}{\varepsilon(p)} = K_p$$

$$G_4(p) = \frac{A_m(p)}{U_a(p)} = K_{CAN}$$



**Question 14** En déduire la fonction de transfert  $\frac{A_m(p)}{A(p)}$  et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{K_{acc}}{1 + 2 \frac{\xi_a p}{\omega_a} + \frac{p^2}{\omega_a^2}}$$

Donner les expressions de  $K_{acc}$ ,  $\xi_a$  et  $\omega_a$ .

**Correction** D'après le schéma bloc, on a :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = G_1(1 - G_2)G_3G_4$$

D'où

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{1}{p^2} \left( 1 - \frac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a} \right) K_p K_{CAN} = \frac{K_p K_{CAN}}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$$

En mettant la fonction cette fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{\frac{K_p K_{CAN} m_a}{k_a}}{\frac{m_a}{k_a} p^2 + \frac{c_a}{k_a} p + 1}$$

Au final :

$$K_{acc} = \frac{K_p K_{CAN} m_a}{k_a}$$

$$\xi_a = \frac{c_a}{2 \sqrt{k_a m_a}}$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$$

**Question 15** La figure ci-dessous donne la réponse indicielle (entrée unitaire) de l'accéléromètre. Identifier les valeurs des constantes  $K_{acc}$ ,  $\xi_a$  et  $\omega_a$  (On pourra utiliser les abaques donnés en annexe).

**Correction** D'après le tracé de la réponse indicielle avec une entrée unitaire, on observe bien la réponse d'un système du second ordre (tangente horizontale et un dépassement).

L'entrée est unitaire et le système tend vers 1 lorsque  $t$  tend vers l'infini. En conséquence on a  $K_{acc} = 1$ .

La valeur du premier dépassement est de 1,05. En conséquence le dépassement est de 5%. D'après l'abaque du dépassement relatif, on a donc :  $\xi_a = 0,7$ .

En utilisant l'abaque donnant  $t_r \omega_0$  en fonction de  $\xi$  on lit que  $t_r \omega_0 = 3$ .

Enfin, en mesurant le temps de réponse à 5% on a  $t_r \approx 0,03s$ . En conséquence :  $\omega_a = \frac{3}{0,03} \approx 100 \text{ rad/s}$ .

Réponse acceptée : pour le temps de réponse à 5%  $t_r = 0,045s$ . En conséquence :  $\omega_a = \frac{3}{0,045} \approx 66 \text{ rad/s}$ .

## Étude de l'asservissement global

**Question 16** Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte. En déduire l'ordre, la classe et le gain de la FTBO(p).

**Correction** Par définition, la FTBO s'exprime par la relation :

$$FTBO(p) = H_{BSCV} \cdot H_{SC}(p) \cdot H_f(p) \cdot H_{acc}(p) = \frac{K_c K_{SV} K_f K_{acc}}{(1 + T_{sv} p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi_a}{\omega_a} p + \frac{p^2}{\omega_a^2} \right)}$$

Le gain de la FTBO est donné par le numérateur :  $K_c K_{SV} K_f K_{acc}$ .

L'ordre de la FTBO est donné par le monôme de plus haut degré : l'ordre est donc de 4 (lorsqu'on développe le système).

La classe du système est donné par le nombre d'intégrateur présent au dénominateur. Ici,  $p$  ne peut pas être mis en facteur du dénominateur. La classe est donc de 0.

**Question 17** Exprimer l'écart  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $a_c(p)$  et de la FTBO(p).

**Correction** D'après le schéma bloc, on a :

$$\varepsilon(p) = A_c(p) - A_m(p) = A_c(p) - \varepsilon(p) \cdot FTBO(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)(1 - FTBO(p)) = A_c(p)$$

On a donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{A_c(p)}{(1 - FTBO(p))}$$

**Question 18** En déduire l'écart en régime permanent à une entrée de type échelon d'accélération  $a_c(t) = a_c u(t)$ .

Que peut-on dire de la performance de précision pour ce correcteur ?

**Correction** L'écart est donné par la fonction  $\varepsilon$ . L'écart en régime permanent est donné par la limite de  $\varepsilon(t)$  en l'infini. D'après le théorème de la valeur finale on a donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pA_c(p)}{(1 - FTBO(p))}$$

L'entrée est un échelon d'accélération d'amplitude  $a_c$ . En conséquence :

$$A_c(p) = \frac{a_c}{p}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a_c}{p} \frac{p}{1 + FTBO(p)}$$

Or,

$$\lim_{p \rightarrow 0} FTBO(p) = K_c K_{SV} K_f K_{acc}$$

En conséquence,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \frac{a_c}{1 + K_c K_{SV} K_f K_{acc}}$$

L'écart statique de ce système n'étant pas nul, le système n'est donc pas précis.

**Question 19** On utilise un correcteur (correcteur PI) plus évolué de fonction de transfert  $H_{BSCU}(p) = K_i \frac{1 + T_i p}{p}$ , déterminer à nouveau l'écart en régime permanent et conclure sur ce choix de correcteur.

**Correction** Il suffit dans un premier temps de calculer la limite quand  $p$  vers 0 de la nouvelle FTBO.

Cette FTBO vaut :

$$FTBO(p) = \frac{K_c K_{SV} K_f K_{acc}}{(1 + T_{sv} p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi_a}{\omega_a} p + \frac{p^2}{\omega_a^2} \right)} \frac{K_i (1 + T_i p)}{p}$$

On a alors :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} FTBO(p) = +\infty$$

En conséquence,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

L'écart statique étant nul, le système est donc précis.