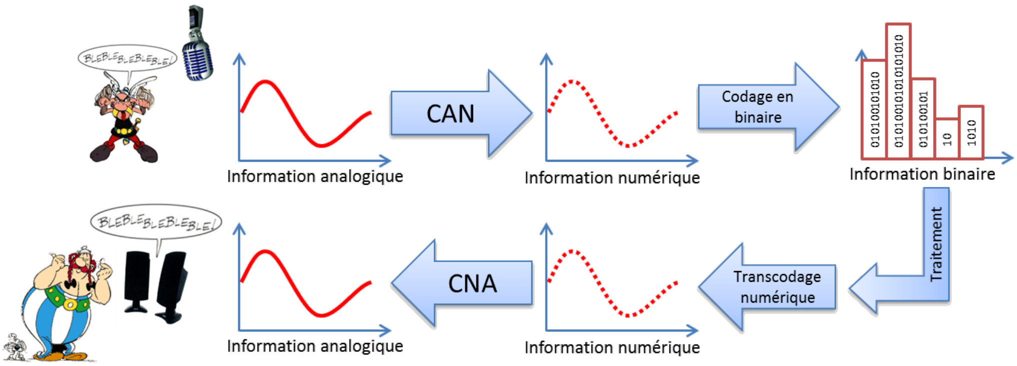
Révisions 1 – Définitions préliminaires et détermination des performances

1 Définitions

Définition — Informations analogiques et numériques.

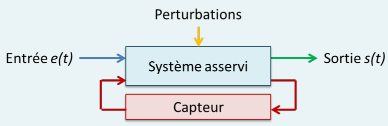
- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).



Définition — Systèmes automatiques ou asservis.

Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

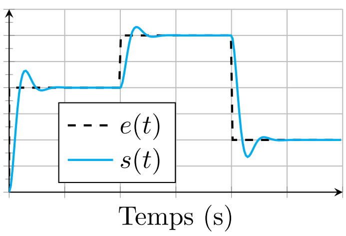
- la loi de consigne $e(t)$ est une grandeur de commande qui est modifiable ;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

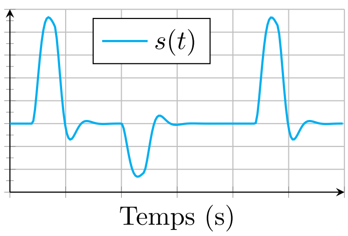


La sortie $s(t)$ est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger de la qualité de la tâche accomplie.

Définition — Systèmes suiveurs et régulateurs.

- Pour un système suiveur la consigne $e(t)$ fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- Pour un système régulateur la consigne $e(t)$ est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.





2 Performance des systèmes – Critères graphiques

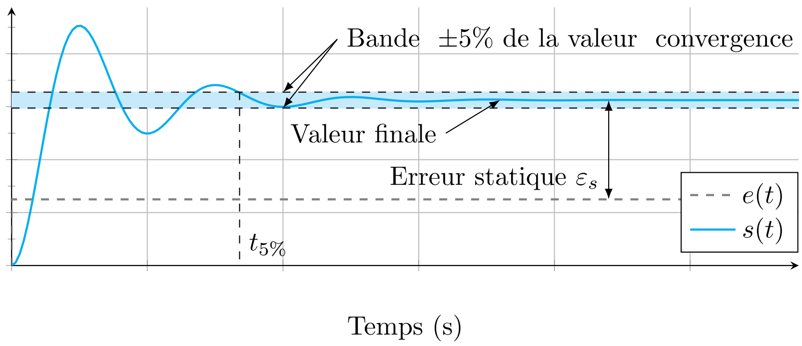
Définition — Précision en position – Écart statique ε_S. Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique ε_S comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse $s(t)$ en régime permanent.

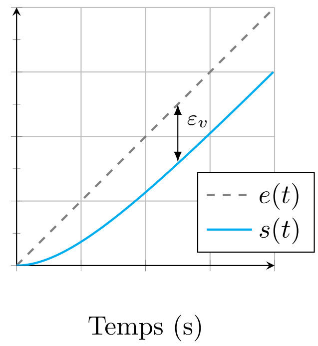
Définition — Précision en vitesse – Écart dynamique ε_V. Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

Définition — Rapidité. La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

Méthode — Détermination du temps de réponse à n%. (En pratique $n = 5$).

1. Tracer sur le même graphe la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n$% de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.





Définition — Stabilité. La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

1 Définitions

Définition — Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles.

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour $t=0^+$:

$$f(0^+)=0 \quad \frac{\mathrm{d}f(0^+)}{\mathrm{t}}=0 \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(0^+)}{\mathrm{d}t^2}=0...$$

On parle de conditions initiales nulles.

Définition — Transformée de Laplace.
À toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t \leq 0$ (fonction causale), on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=F(p)=\int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

On note $\mathscr{L}\left[f(t)\right]$ la transformée directe et $\mathscr{L}^{-1}\left[F(p)\right]$ la transformée inverse.
De manière générale on note $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=F(p)$, $\mathscr{L}\left[e(t)\right]=E(p)$, $\mathscr{L}\left[s(t)\right]=S(p)$, $\mathscr{L}\left[\omega(t)\right]=\Omega(p)$, $\mathscr{L}\left[\theta(t)\right]=\Theta(p)$ ...

Résultat — Dérivation.

Dans les conditions de Heaviside : $\mathscr{L}\left[\mathbf{\frac{df(t)}{dt}}\right]=\mathbf{pF(p)}$ $\quad \mathscr{L}\left[\mathbf{\frac{d^2f(t)}{dt^2}}\right]=\mathbf{p^2F(p)}$ $\quad \mathscr{L}\left[\mathbf{\frac{d^nf(t)}{dt^n}}\right]=\mathbf{p^nF(p)}$.

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par $\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=pF(p)-f(0^+)$.

Définition — Transformées usuelles.

Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$	Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$\mathbf{F(p)=1}$	Échelon $u(t)=k$	$\mathbf{U(p)=\frac{k}{p}}$
Fonction linéaire $f(t)=t$	$\mathbf{F(p)=\frac{1}{p^2}}$	Puissances $f(t)=t^n\cdot u(t)$	$F(p)=\frac{n!}{p^{n+1}}$
$f(t)=\sin(\omega_0 t)\cdot u(t)$	$F(p)=\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$	$f(t)=\cos(\omega_0 t)\cdot u(t)$	$F(p)=\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$
$f(t)=e^{-at}\cdot u(t)$	$F(p)=\frac{1}{p+a}$	$f(t)=e^{-at}\sin(\omega_0 t)\cdot u(t)$	$F(p)=\frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^2}$
$f(t)=t^n e^{-at}u(t)$	$F(p)=\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$		

2 Théorèmes

Théorème — Théorème de la valeur initiale.

$$\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{p\to\infty} pF(p)$$

Théorème — Théorème de la valeur finale.

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} pF(p)$$

Théorème — Théorème du retard.

$$\mathscr{L}\left[f(t-t_0)\right]=e^{-t_0p}F(p)$$

Théorème — Théorème de l'amortissement.

$$\mathscr{L}\left[e^{-at}f(t)\right]=F(p+a)$$

Cycle 01

Modéliser le comportement linéaire et non linéaire des systèmes multiphysiques

Révisions 3 – Modélisation par fonction de transfert et schéma-blocs

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

PSI⋆ – MP

1 Définitions

Définition — Fonction de transfert – Transmittance.
Soit un système linéaire continu linéaire invariant dont on note le signal d'entrée e et le signal de sortie s, régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction H telle que :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i}=\frac{N(p)}{D(p)}.$$

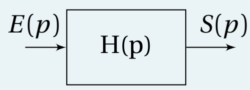
Définition — Classe, ordre, pôles et zéros.
$H(p)$ est une fonction rationnelle en p. En factorisant le numérateur et le dénominateur, $H(p)$ peut s'écrire sous cette forme :

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=K\frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{p^\alpha(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}$$

- Les z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Les p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- **Le degré de $D(p)$ est appelé ordre n du système ($n \geq m$ pour les systèmes physiques).**
- L'équation $D(p)=0$ est appelée équation caractéristique.
- Le facteur constant K est appelé gain du système.
- S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre α de $D(p)$, un terme p^α apparaît au dénominateur. α **est la classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

Définition — Modélisation d'un bloc.

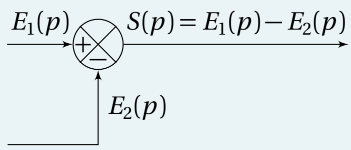
Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$, caractérisé par une fonction de transfert $H(p)$. Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :



$$S(p)=E(p)\cdot H(p).$$

Définition — Modélisation d'un comparateur.

Soit l'équation $S(p)=E_1(p)-E_2(p)$. Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

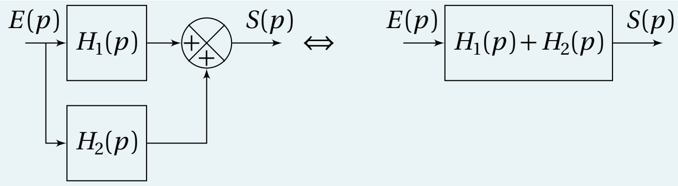


2 Algèbre de blocs

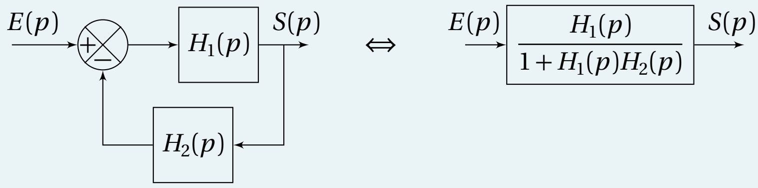
! Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsque on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.

Résultat — Blocs en série.

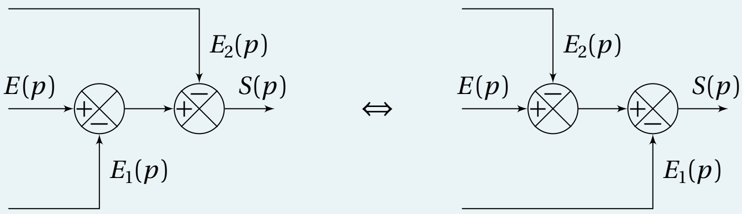
Résultat — Blocs en parallèle.



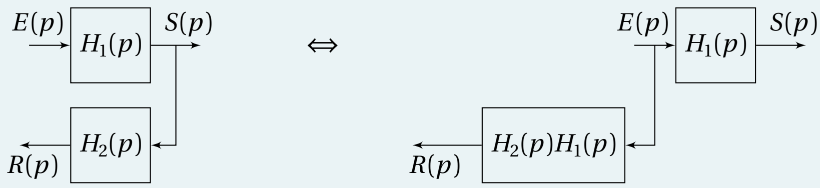
Résultat — Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT.



Résultat — Comparateurs en série.



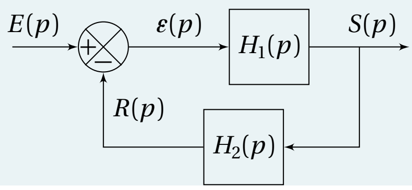
Résultat — Point de prélèvement.



3 Fonctions usuelles

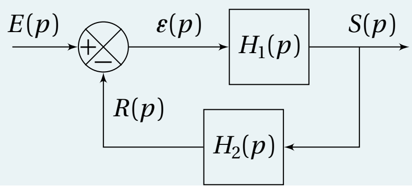
Définition — Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF.
Formule de Black

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1+H_1(p)H_2(p)}$$



Définition — Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO.

$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$



Définition — Théorème de superposition.
Soit un système d'entrées E_1 et E_2 et de sortie S. On note $H_1 = \dfrac{S}{E_1}$ lorsque E_2 est nulle et $H_2 = \dfrac{S}{E_2}$ lorsque E_1 est nulle. En superposant, on a alors : $S = H_1 E_1 + H_2 E_2$.

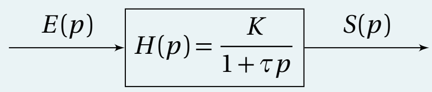
1 Systèmes d'ordre 1

Définition Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\tau \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = K e(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$



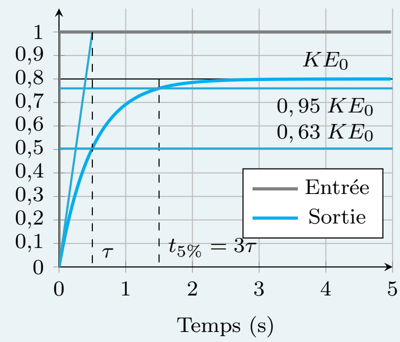
On note :
- τ la constante de temps en secondes ($\tau > 0$) ;
- K le gain statique du système ($K > 0$).

Résultat — Réponse à un échelon d'un système du premier ordre.
On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude E_0. Lorsque $E_0 = 1$ ($1/p$ dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p}\frac{K}{1+\tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = K E_0 u(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.
Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :
- le gain à partir de l'asymptote $K E_0$;
- la constante de temps à partir de $t_{5\%}$ ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :
- valeur finale $s_\infty = K E_0$;
- pente à l'origine **non nulle** ;
- $t_{5\%} = 3\tau$;
- pour $t = \tau$, $s(\tau) = 0,63\ s_\infty$.

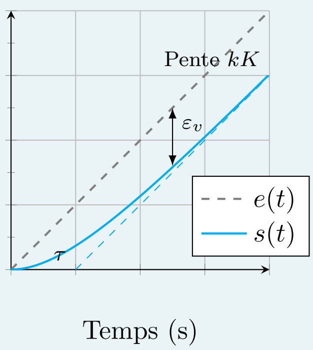


Résultat — Réponse à un échelon d'un système du premier ordre.

On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente k :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2}\frac{K}{1+\tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = K k \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u(t)$.
Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :
- pente de l'asymptote $K k$;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses : $t = \tau$;
- $\varepsilon_v = k K \tau$.



2 Systèmes d'ordre 2

Définition Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}+s(t)=K e(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}} \longrightarrow S(p)$$

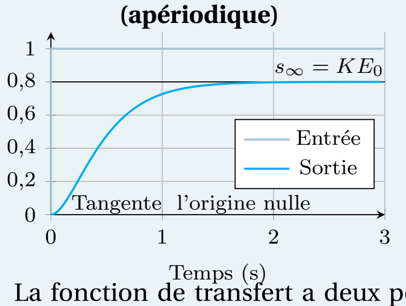
On note :

- K est appelé le gain statique du système (rapport des unités de S et de E) ;
- ξ (lire *xi*) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité) ;
- ω_0 pulsation propre du système (rad/s ou s^{-1}).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

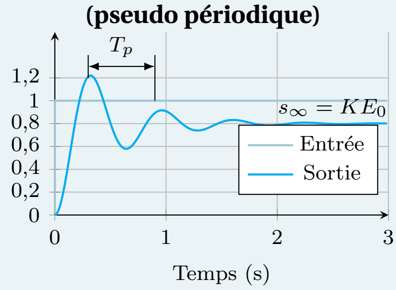
Résultat

$\xi \geq 1$: système non oscillant et amorti (apériodique)



- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.

$\xi < 1$: système oscillant et amorti (pseudo périodique)



- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$.
- La valeur du premier dépassement vaut : $D_1 = K E_0 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$.

Résultat

- Pour $\xi = 0$ le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude $K E_0$ ($2K E_0$ crête à crête).
- Pour $\xi \simeq 0,69$ le système du second ordre le temps à un de réponse à 5% le plus petit **avec dépassement** et $t_{r5\%}\cdot\omega_0 \simeq 3$.
- Pour $\xi = 1$ on obtient le système du second ordre plus rapide **sans dépassement**.

Cycle 01

Modéliser le comportement linéaire et non linéaire des systèmes multiphysiques

Révisions 5 – Modélisation des systèmes du premier et du deuxième ordre

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

PSI⋆ – MP

1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme $f(t) = A\sin(\omega \cdot t + \varphi)$ et on note :

- A : l'amplitude de la sinusoïde ;
- ω : la pulsation en rad/s ;
- φ : la phase à l'origine en rad.

On a par ailleurs :

- $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: la période de la sinusoïde en s ;
- $f = \dfrac{1}{T}$: fréquence de la sinusoïde en Hz.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

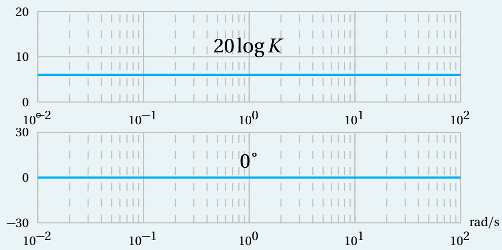
Définition Soit $H(p)$ une fonction de transfert. On pose $p = j\omega$ et on note :
- $H_{\text{dB}}(\omega) = 20\log|H(j\omega)|$ le gain décibel de la fonction de transfert ;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}\big(H(j\omega)\big)$.

Propriété On note $H(p) = G_1(p)G_2(p)$. On a :
- $H_{\text{dB}}(\omega) = G1_{\text{dB}}(\omega) + G2_{\text{dB}}(\omega)$;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G1_{\text{dB}}(\omega)) + \text{Arg}(G2_{\text{dB}}(\omega))$.

2 Gain

Résultat — Diagramme de Bode d'un gain pur.

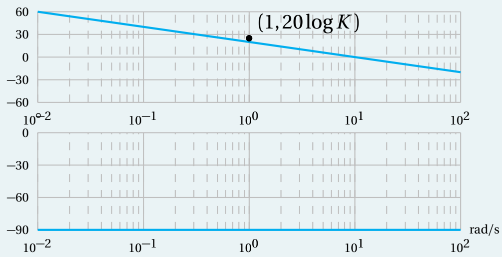
- Fonction de transfert : $H(p) = K$.
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée $20\log K$.
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée $0°$.



3 Intégrateur

Résultat — Diagramme de Bode d'un intégrateur.

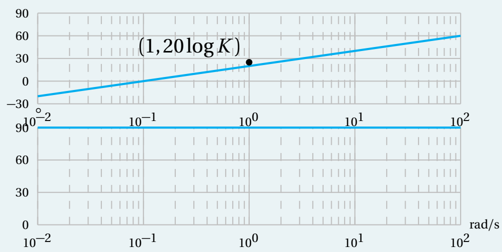
- Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{p}$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente -20dB/decade passant par le point $(1, 20\log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée -90 °.



4 Dérivateur

Résultat — Diagramme de Bode d'un dérivateur.

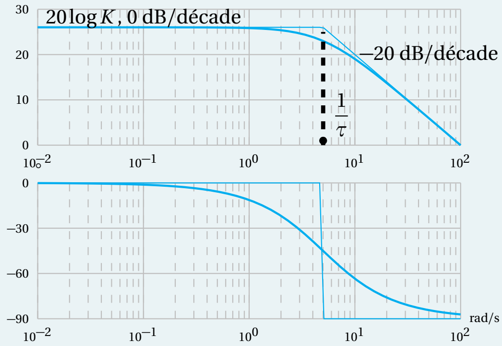
- Fonction de transfert : $H(p) = Kp$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente 20dB/decade passant par le point $(1, 20\log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée $+90$ °.



5 Systèmes d'ordre 1

Résultat — Diagramme de Bode d'un système du premier ordre.

- Fonction de transfert : $H(p)=\dfrac{K}{1+\tau p}$.
- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour $\omega < \dfrac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $20\log K$;
  - pour $\omega > \dfrac{1}{\tau}$: droite de pente −20dB/decade.
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour $\omega < \dfrac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée 0 ° ;
  - pour $\omega > \dfrac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée −90 °.



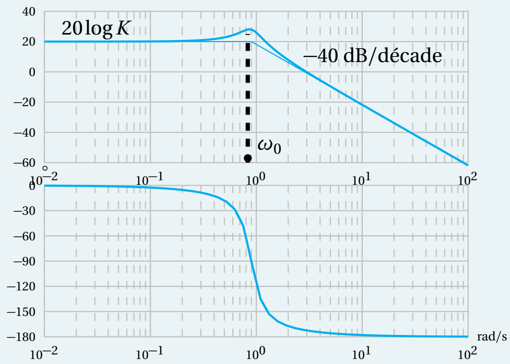
6 Systèmes d'ordre 2

Résultat — Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre.

- Fonction de transfert : $H(p)=\dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$.

Cas où $\xi < 1$.

- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée $20\log K$;
  - pour $\omega > \omega_0$: droite de pente −40dB/decade.
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée 0 ° ;
  - pour $\omega > \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée −180°.



Dans le **cas où** $\xi > 1$, le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme $\left(1+\tau_1 p\right)\left(1+\tau_2 p\right)$. On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

Résultat Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque $\xi < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$.

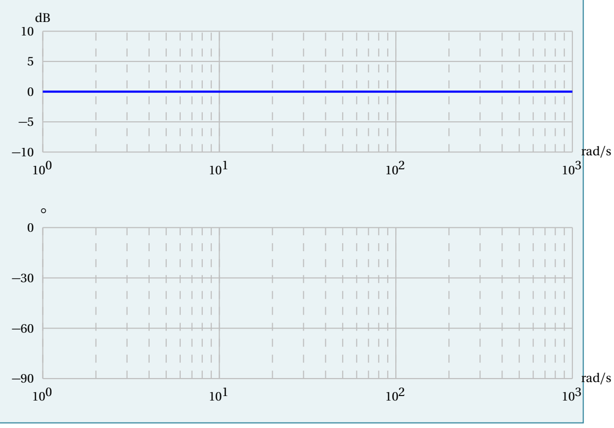
À la résonance, l'amplitude maximale est de $A_{\max} = \dfrac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$. (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit $20\log A_{\max}$ lorsque $\omega=\omega_r$.)

7 Retard

Résultat — Diagramme de Bode d'un retard pur.

- Fonction de transfert : $H(p)=e^{-Tp}$.
- Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- Diagramme de phase asymptotique : $\arg\left(H(p)\right)=-\tau\omega$

  ... à tracer.



8 Tracé du diagramme de Bode

Méthode

Méthode 1 : sommation dans le diagramme de Bode

1. décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus) ;
2. tracer chacune des fonctions de transfert ;
3. sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

Méthode 2 : tableau de variation

1. décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus) ;
2. réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes ;
3. sommer les pentes ;
4. tracer le diagramme de Bode.