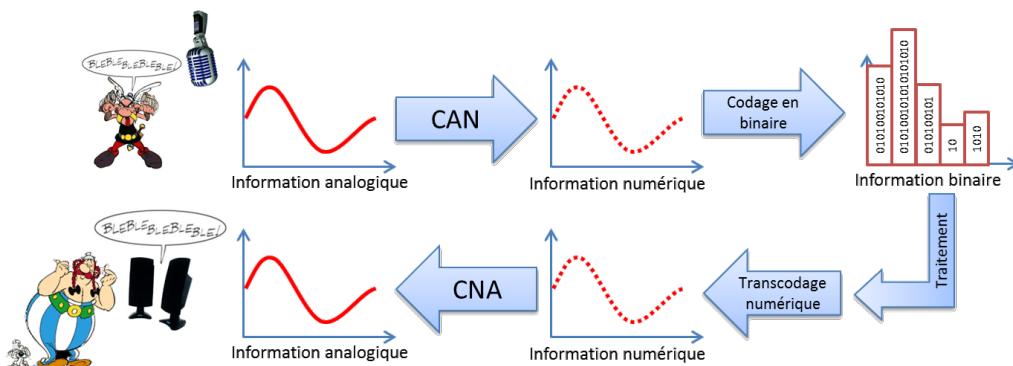


### 1 Définitions

#### Définition — Informations analogiques et numériques.

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).

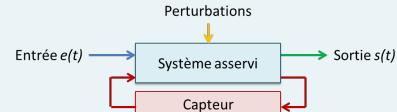


#### Définition — Systèmes automatiques ou asservis.

Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

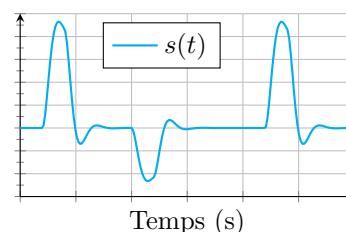
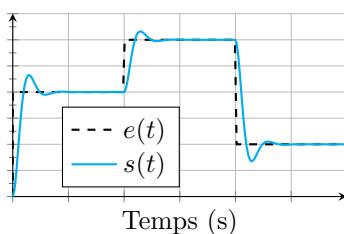
- la loi de consigne  $e(t)$  est une grandeur de commande qui est modifiable;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie  $s(t)$  est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger de la qualité de la tâche accomplie.



#### Définition — Systèmes suiveurs et régulateurs.

- Pour un système suiveur la consigne  $e(t)$  fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- Pour un système régulateur la consigne  $e(t)$  est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.



### 2 Performance des systèmes – Critères graphiques

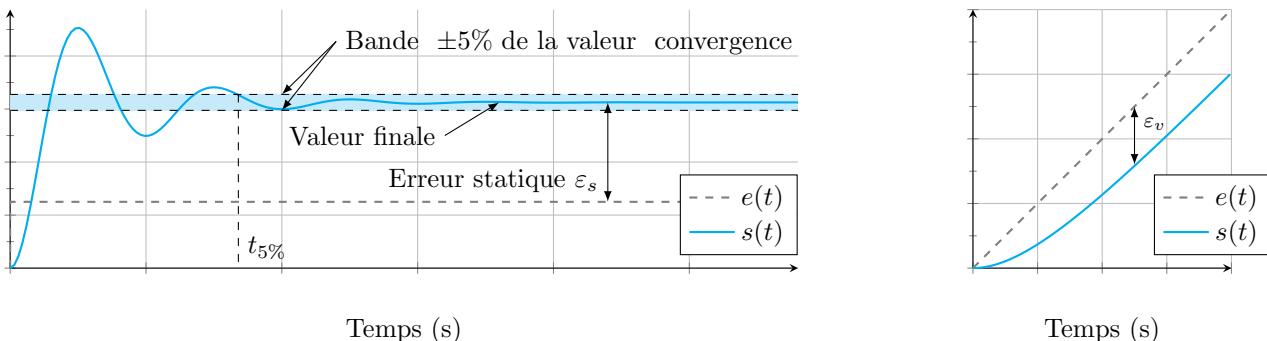
**Définition — Précision en position – Écart statique  $\varepsilon_S$ .** Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique  $\varepsilon_S$  comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse  $s(t)$  en régime permanent.

**Définition — Précision en vitesse — Écart dynamique  $\varepsilon_v$ .** Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

**Définition — Rapidité.** La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

**Méthode — Détermination du temps de réponse à  $n\%$ .** (En pratique  $n = 5$ ).

1. Tracer sur le même graphe la consigne  $e(t)$  et la réponse du système  $s(t)$ .
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de  $s(t)$ .
3. Tracer la bande correspondant à une variation de  $\pm n\%$  de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle  $s(t)$  coupe la bande et n'en sort plus.



**Définition — Stabilité.** La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

## 1 Définitions

### Définition — Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles.

Une fonction temporelle  $f(t)$  vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour  $t = 0^+$  :

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{t} = 0 \quad \frac{d^2f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

### Définition — Transformée de Laplace.

À toute fonction du temps  $f(t)$ , nulle pour  $t \leq 0$  (fonction causale), on fait correspondre une fonction  $F(p)$  de la variable complexe  $p$  telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

On note  $\mathcal{L}[f(t)]$  la transformée directe et  $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$  la transformée inverse.

De manière générale on note  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ ,  $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$ ,  $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$ ,  $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$ ,  $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p) \dots$

### Résultat — Dérivation.

Dans les conditions de Heaviside :  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$     $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$     $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n F(p)$ .

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par  $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = pF(p) - f(0^+)$ .

### Définition — Transformées usuelles.

Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$	Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
Fonction linéaire $f(t) = t$	$F(p) = \frac{1}{p^2}$	Puissances $f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p + a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p + a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p + a)^{n+1}}$		

## 2 Théorèmes

### Théorème — Théorème de la valeur initiale.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

### Théorème — Théorème du retard.

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

### Théorème — Théorème de la valeur finale.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

### Théorème — Théorème de l'amortissement.

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

## 1 Définitions

### Définition — Fonction de transfert – Transmittance.

Soit un système linéaire continu invariant dont on note le signal d'entrée  $e$  et le signal de sortie  $s$ , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction  $H$  telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

### Définition — Classe, ordre, pôles et zéros.

$H(p)$  est une fonction rationnelle en  $p$ . En factorisant le numérateur et le dénominateur,  $H(p)$  peut s'écrire sous cette forme :

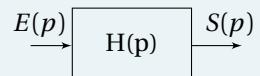
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{p^\alpha(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}$$

- Les  $z_i$  sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Les  $p_i$  sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Le degré de  $D(p)$  est appelé ordre  $n$  du système ( $n \geq m$  pour les systèmes physiques).**
- L'équation  $D(p)=0$  est appelée équation caractéristique.
- Le facteur constant  $K$  est appelé gain du système.
- S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre  $\alpha$  de  $D(p)$ , un terme  $p^\alpha$  apparaît au dénominateur.  **$\alpha$  est la classe (ou type) de la fonction de transfert.** Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

### Définition — Modélisation d'un bloc.

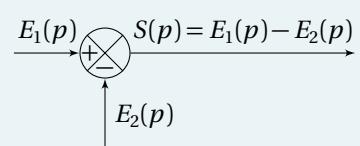
Soit un système d'entrée  $E(p)$ , de sortie  $S(p)$ , caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$



### Définition — Modélisation d'un comparateur.

Soit l'équation  $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$ . Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.



## 2 Algèbre de blocs

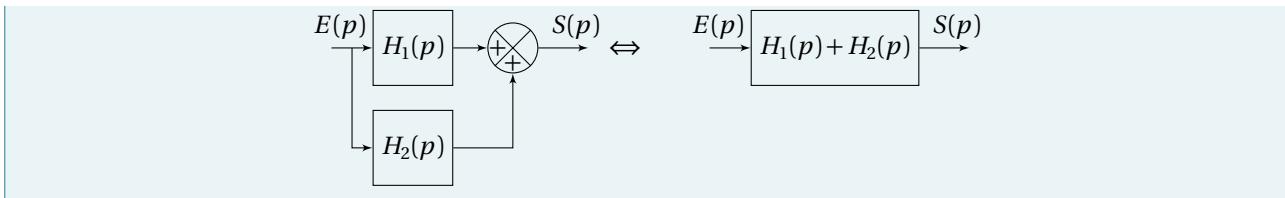


Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsque on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.

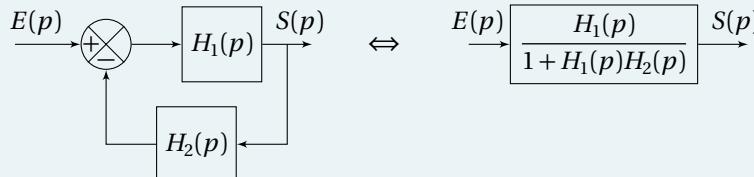
### Résultat — Blocs en série.



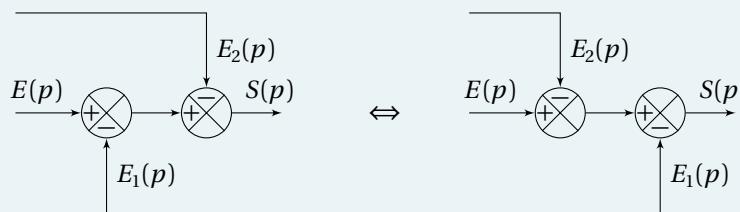
### Résultat — Blocs en parallèle.



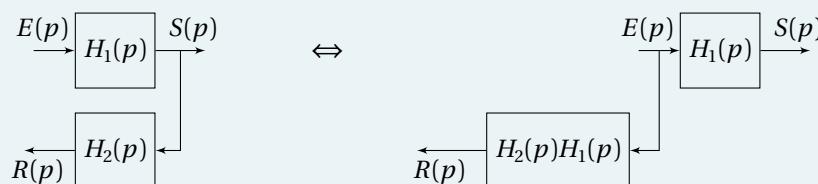
**Résultat** — **Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT.**



**Résultat** — **Comparateurs en série.**



**Résultat** — **Point de prélèvement.**

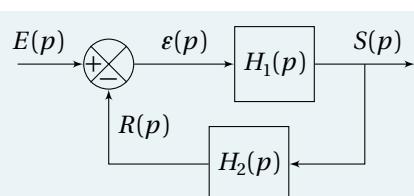


### 3 Fonctions usuelles

**Définition** — **Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF.**

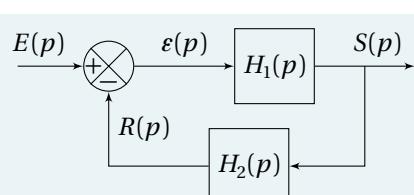
Formule de Black

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$



**Définition** — **Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO.**

$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$



**Définition** — **Théorème de superposition.**

Soit un système d'entrées  $E_1$  et  $E_2$  et de sortie  $S$ . On note  $H_1 = \frac{S}{E_1}$  lorsque  $E_2$  est nulle et  $H_2 = \frac{S}{E_2}$  lorsque  $E_1$  est nulle. En superposant, on a alors :  $S = H_1 E_1 + H_2 E_2$ .

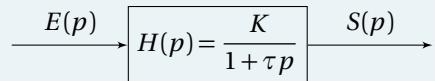
## 1 Systèmes d'ordre 1

**Définition** Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$



On note :

- $\tau$  la constante de temps en secondes ( $\tau > 0$ );
- $K$  le gain statique du système ( $K > 0$ ).

### Résultat — Réponse à un échelon d'un système du premier ordre.

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude  $E_0$ . Lorsque  $E_0 = 1$  ( $1/p$  dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

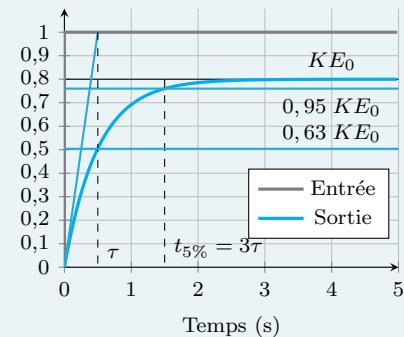
Analytiquement, on montre que  $s(t) = K E_0 u(t) (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ .

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- le gain à partir de l'asymptote  $KE_0$ ;
- la constante de temps à partir de  $t_{5\%}$  ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- valeur finale  $s_\infty = KE_0$ ;
- pente à l'origine **non nulle**;
- $t_{5\%} = 3\tau$ ;
- pour  $t = \tau$ ,  $s(\tau) = 0,63 s_\infty$ .



### Résultat — Réponse à un échelon d'un système du premier ordre.

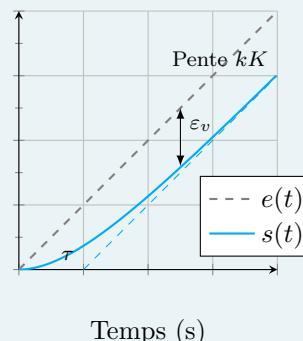
On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente  $k$  :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que  $s(t) = K k (t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}) u(t)$ .

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- pente de l'asymptote  $Kk$ ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses :  $t = \tau$ ;
- $\varepsilon_v = kK\tau$ .



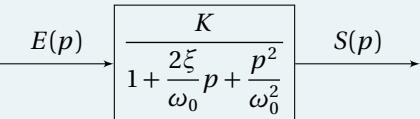
## 2 Systèmes d'ordre 2

**Définition** Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$



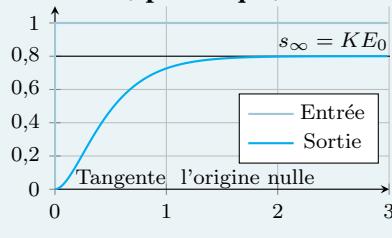
On note :

- $K$  est appelé le gain statique du système (rapport des unités de  $S$  et de  $E$ );
- $\xi$  (lire  $\kappa$ ) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- $\omega_0$  pulsation propre du système (rad/s ou  $s^{-1}$ ).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

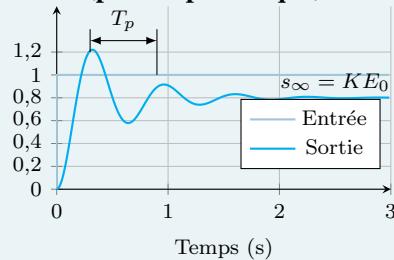
### Résultat

$\xi \geq 1$  : système non oscillant et amorti (apériodique)



- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.

$\xi < 1$  : système oscillant et amorti (pseudo périodique)



- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$ .
- La valeur du premier dépassement vaut :  $D_1 = \frac{-\pi \xi}{KE_0 e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$ .

### Résultat

- Pour  $\xi = 0$  le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude  $KE_0$  ( $2KE_0$  crête à crête).
- Pour  $\xi \approx 0,69$  le système du second ordre le temps à un de réponse à 5% le plus petit avec dépassement et  $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ .
- Pour  $\xi = 1$  on obtient le système du second ordre plus rapide sans dépassement.

### 1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme  $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  et on note :

- $A$  : l'amplitude de la sinusoïde;
- $\omega$  : la pulsation en rad/s;
- $\varphi$  : la phase à l'origine en rad.

On a par ailleurs :

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$  : la période de la sinusoïde en s;
- $f = \frac{1}{T}$  : fréquence de la sinusoïde en Hz.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

**Définition** Soit  $H(p)$  une fonction de transfert. On pose  $p = j\omega$  et on note :

- $H_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$  le gain décibel de la fonction de transfert;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$ .

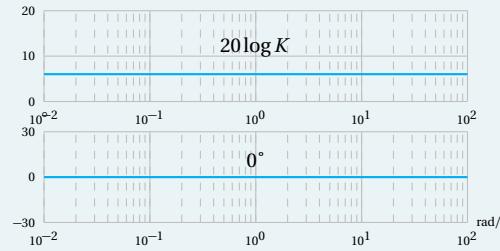
**Propriété** On note  $H(p) = G_1(p)G_2(p)$ . On a :

- $H_{\text{dB}}(\omega) = G_{1\text{dB}}(\omega) + G_{2\text{dB}}(\omega)$ ;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G_{1\text{dB}}(\omega)) + \text{Arg}(G_{2\text{dB}}(\omega))$ .

### 2 Gain

**Résultat** — Diagramme de Bode d'un gain pur.

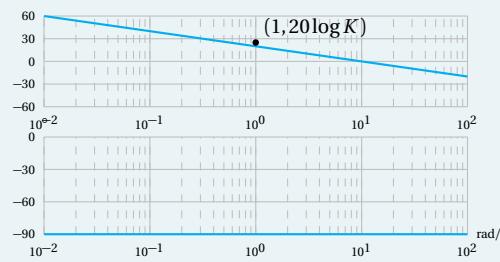
- Fonction de transfert :  $H(p) = K$ .
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ .
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ .



### 3 Intégrateur

**Résultat** — Diagramme de Bode d'un intégrateur.

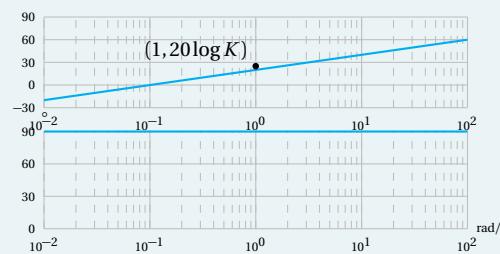
- Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{p}$ .
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $-20 \text{ dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



### 4 Dérivateur

**Résultat** — Diagramme de Bode d'un déivateur.

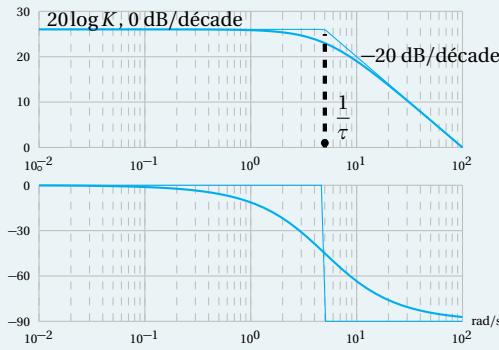
- Fonction de transfert :  $H(p) = Kp$ .
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $20 \text{ dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $+90^\circ$ .



### 5 Systèmes d'ordre 1

**Résultat — Diagramme de Bode d'un système du premier ordre.**

- Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ .
- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$  ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite de pente  $-20 \text{ dB/decade}$ .
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$  ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$  .



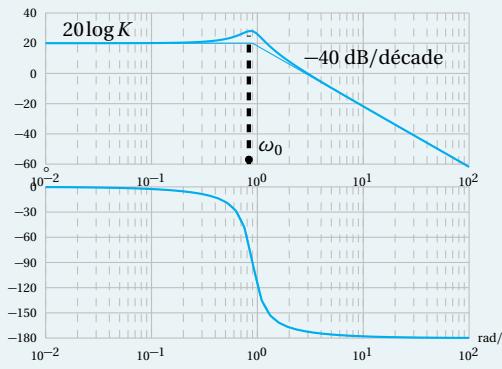
## 6 Systèmes d'ordre 2

**Résultat — Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre.**

- Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ .

Cas où  $\xi < 1$ .

- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$  ;
  - pour  $\omega > \omega_0$  : droite de pente  $-40 \text{ dB/decade}$ .
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$  ;
  - pour  $\omega > \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $-180^\circ$ .



Dans le cas où  $\xi > 1$ , le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$ . On se ramène alors au tracé du produit de deux premiers ordre.

**Résultat Phénomène de résonance**

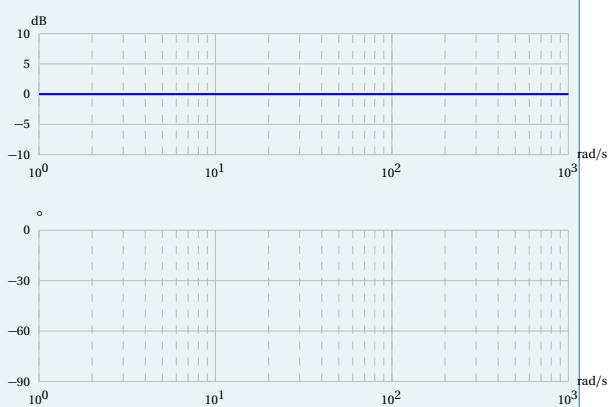
Le phénomène de résonance s'observe lorsque  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

À la résonance, l'amplitude maximale est de  $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ . (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit  $20 \log A_{\max}$  lorsque  $\omega = \omega_r$ .)

## 7 Retard

**Résultat — Diagramme de Bode d'un retard pur.**

- Fonction de transfert :  $H(p) = e^{-Tp}$ .
- Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- Diagramme de phase asymptotique :  $\arg(H(p)) = -\tau\omega$  ... à tracer.



## 8 Tracé du diagramme de Bode

### Méthode

#### Méthode 1 : sommation dans le diagramme de Bode

1. décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus);
2. tracer chacune des fonctions de transfert;
3. sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

#### Méthode 2 : tableau de variation

1. décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus);
2. réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes;
3. sommer les pentes;
4. tracer le diagramme de Bode.

## Application 01

## Application

Savoirs et compétences :

 ...

## Mise en situation

Airbus Helicopters commercialise des hélicoptères civils et militaires. Le déplacement des hélicoptères est assuré par un rotor principal permettant la sustentation et la translation de l'appareil. Un rotor arrière permet de compenser le couple de réaction engendré par le rotor principal et de contrôler les mouvements de lacet de l'appareil (figure 1). La puissance est délivrée par deux turboréacteurs (certains hélicoptères ne sont équipés que d'un turboréacteur). Ces turboréacteurs entraînent en rotation une boîte de transmission principale (BTP) qui elle-même entraîne d'une part le rotor principal et d'autre part le rotor arrière, par l'intermédiaire d'un arbre de transmission et d'une boîte de transmission arrière (BTA). La BTP assure aussi l'entraînement d'une série d'accessoires permettant le fonctionnement de l'appareil (alternateur, pompe hydraulique ...). Pour chaque association hélicoptère - turboréacteur, un banc d'essai permet de vérifier que la BTP répond au cahier des charges. La figure 2 présente la structure du banc d'essai.

**Objectif** Valider Req 1.1.1.

«requirement»	
Précision de la régulation	
Id = "1.1.1"	
Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul."	

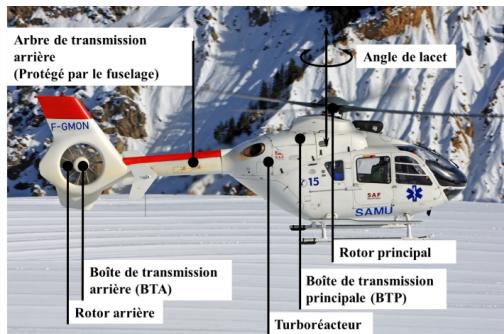


Figure 1 – Hélicoptère.

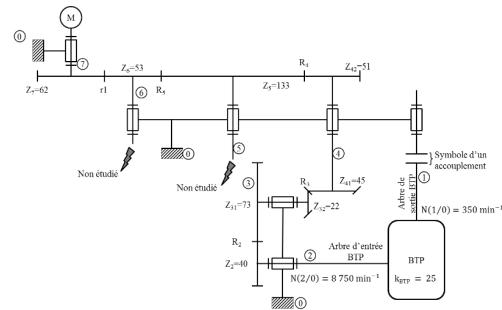


Figure 2 – Structure du banc d'essai.

## Le moteur à courant continu

Le banc d'essai est équipé d'un dispositif permettant de générer un couple résistant sur le rotor de sortie de la BTP. Cela permet de simuler les actions aérodynamiques sur les pales. Il faut donc évaluer l'impact de ce couple sur la vitesse du moteur. La modélisation adoptée pour le moteur à courant continu est celle de la figure 3.

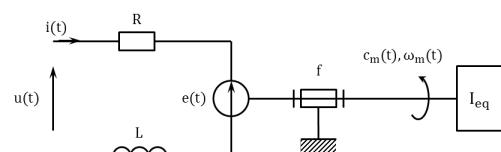


Figure 3 – Schéma équivalent du moteur à courant continu.

On note :

- $u(t)$  : la tension appliquée aux bornes de l'induit;
- $i(t)$  : le courant absorbé par l'induit;
- $e(t)$  : la force contre-électromotrice;
- $R$  : la résistance de l'induit;
- $L$  : l'inductance de l'induit;
- $\omega_m(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- $c_m(t)$  : le couple moteur;
- $c_r(t)$  : le couple résistant sur l'arbre moteur dû à la génération d'un couple résistant en sortie de BTP;
- $f$  : le coefficient de frottement, qui génère un couple résistant proportionnel à  $\omega_m(t)$ ;
- $I_{eq}$  : l'inertie équivalente du banc d'essai ramené à l'arbre moteur;
- $K_c$  : la constante de couple définie telle que  $c_m(t) = K_c i(t)$  (équation 1);
- $K_e$  : la constante de force contre-électromotrice définie telle que  $e(t) = K_e \omega_m(t)$  (équation 2).

Hypothèses :

- le comportement de chacun des composants sera considéré comme linéaire, continu et invariant;
- les conditions de Heaviside sont considérées comme vérifiées;
- on note  $p$  la variable de Laplace. La transformée de Laplace d'une fonction temporelle  $f(t)$  sera notée  $F(p)$  (la transformée de  $\omega(t)$  sera notée  $\Omega(p)$ ).

## Modélisation de l'asservissement en vitesse

Hypothèses :

- on néglige l'inductance du moteur à courant continu ainsi que l'effet du coefficient de frottement;
- on fait l'hypothèse que  $K_c = K_e = K$ ;
- pour simplifier l'étude, la boucle de courant n'a pas été modélisée.

Le schéma bloc de l'asservissement en vitesse du moteur à courant continu est donné sur la figure 10.

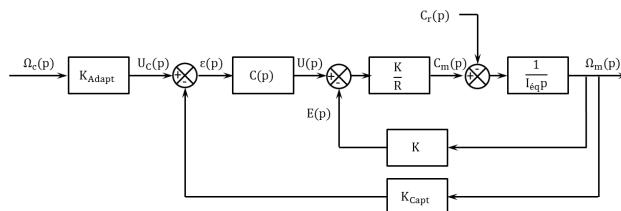


Figure 10 – Régulation en vitesse du banc d'essai.

**Question 1** Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour? Comment déterminer la valeur du gain  $K_{Adapt}$ ?

**Hypothèse 1 : on considère que**  $C_r(p) = 0$  **et**  $\Omega_c(p) \neq 0$ .

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_c(p))$ . On considère que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constant. Mettre  $H_1(p)$  sous la forme  $K_1/(1 + \tau_1 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$ .

**Hypothèse 2 : on considère que**  $\Omega_c(p) = 0$  **et que**  $C_r(p) \neq 0$ .

**Question 3** Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$ . On considère que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constante. Mettre  $H_2(p)$  sous la forme  $-K_2/(1 + \tau_2 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_2$  et  $\tau_2$ .

**Hypothèse 3 : on considère maintenant que**  $\Omega_c(p) \neq 0$  **et que**  $C_r(p) \neq 0$ .

**Question 5** En utilisant le théorème de superposition, exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $\Omega_c(p)$  et  $C_r(p)$ .

À une fréquence de rotation de  $350 \text{ min}^{-1}$  en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de  $1928 \text{ min}^{-1}$  soit environ  $202 \text{ rad/s}$ . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à  $990 \text{ Nm}$ . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude  $202 \text{ rad/s}$  et à un couple résistant de  $990 \text{ Nm}$ .

**Question 6** Après avoir exprimé la consigne  $\Omega_c(p)$  puis le couple résistant  $C_r(p)$ , calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 7** Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain  $K_I$  de la forme  $C(p) = K_I/p$  ?

**Question 8** En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée?



On verra ultérieurement qu'un correcteur intégral pur ne permet pas forcément de garantir la stabilité d'un système.

## Partie supplémentaire

**Question 9** Tracer le diagramme de Bode de  $C(p) \cdot F(p)$  avec  $F(p) = 118/(1 + 0,5p)$  du système lorsque :

- $C(p) = 1$ ;
- $C(p) = 20$ ;
- $C(p) = 30/p$ .

## Application 02

## Application

Savoirs et compétences :

 ...

## Modélisation par schéma-blocs

**Méthode** Dans le cas où vous ne savez pas comment démarrer, vous pouvez suivre la méthode suivante.

1. Identifier la grandeur physique d'entrée et la grandeur physique de sortie.
2. Lorsqu'une équation lie deux grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation.
3. Lorsqu'une équation lie trois grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation en utilisant un comparateur.
4. Relier les blocs en commençant par l'entrée. Inverser les blocs si nécessaire.

- débit dans le vérin dans le cas d'une hypothèse de fluide incompressible  $q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt}$ ;
- capteur de position :  $u_s(t) = K_c \cdot x(t)$ ;
- le servo-distributeur est un composant de la chaîne de commande conçu pour fournir un débit hydraulique  $q(t)$  proportionnel au courant de commande  $i(t)$ . (Attention, valable uniquement en régime permanent.) Le constructeur fournit sa fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1 + T p}$$

où  $K_d$  est le gain du servo-distributeur et  $T$  sa constante de temps.

## Modélisation du moteur à courant continu

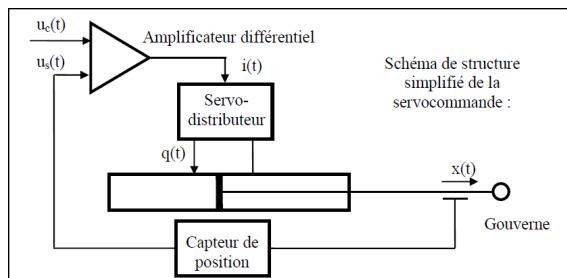
On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ ;
- $e(t) = K \omega(t)$ ;
- $c(t) = K i(t)$ ;
- $c(t) - c_r(t) - f \omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$ .

**Question 1** Réaliser le schéma-blocs.

**Question 2** Exprimer  $\Omega(p)$  sous la forme  $\Omega(p) = F_1(p)U(p) + F_2(p)C_r(p)$ . Les fonctions de transfert  $F_1$ ,  $F_2$  seront exprimées sous forme canonique. Les constantes du système du second ordre seront explicitées.

## Modélisation d'une servo-commande



Les différentes équations temporelles qui modélisent le fonctionnement d'une servocommande sont :

- un amplificateur différentiel défini par :  $u_c(t) = \frac{i(t)}{K_a} + u_s(t)$ ;

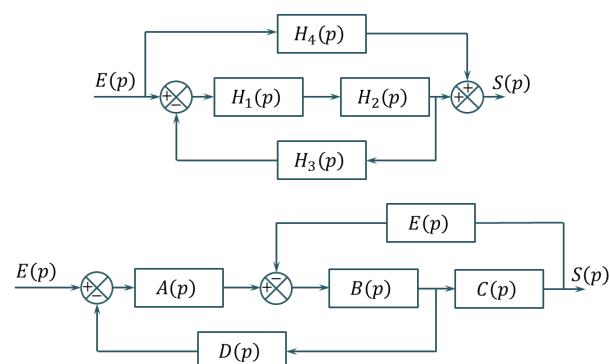
**Question 1** Réaliser le schéma-blocs.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

## Réduction de schéma-blocs

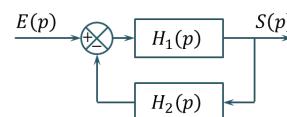
D'après ressources de V. Reydellet.

**Question** Réduire les schéma-blocs suivants.

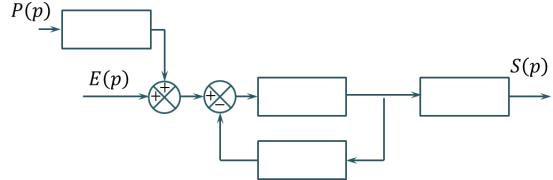
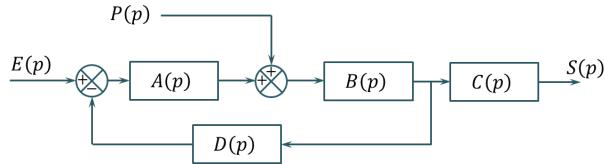


## Transformation de schéma-blocs

**Question** Transformer le schéma-bloc suivant pour obtenir un schéma-blocs à retour unitaire.



**Question** Modifier le schéma-blocs suivant pour obtenir la forme proposée. Déterminer ensuite l'expression de  $S(p)$  en fonction de  $E(p)$  et  $P(p)$ .



## Application 02 – Application Corrigé

### Savoirs et compétences :

...

### Modélisation par schéma-blocs

**Méthode** Dans le cas où vous ne savez pas comment démarrer, vous pouvez suivre la méthode suivante.

1. Identifier la grandeur physique d'entrée et la grandeur physique de sortie.
2. Lorsqu'une équation lie deux grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation.
3. Lorsqu'une équation lie trois grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation en utilisant un comparateur.
4. Relier les blocs en commençant par l'entrée. Inverser les blocs si nécessaire.

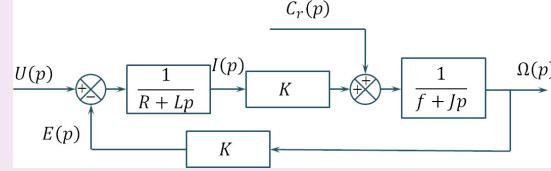
### Modélisation du moteur à courant continu

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ ;
- $e(t) = K\omega(t)$ ;
- $c(t) = Ki(t)$ ;
- $c(t) - c_r(t) - f\omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$ .

**Question 3** Réaliser le schéma-blocs.

#### Correction



**Question 4** Exprimer  $\Omega(p)$  sous la forme  $\Omega(p) = F_1(p)U(p) + F_2(p)C_r(p)$ . Les fonctions de transfert  $F_1$   $F_2$  seront exprimées sous forme canonique. Les constantes du système du second ordre seront explicitées.

**Correction** Par superposition, on a :  $\Omega_1(p)/U(p) =$

$$\frac{K}{R+Lp} \frac{1}{Jp+f} = \frac{K}{(Jp+f)(Lp+R)+K^2}.$$

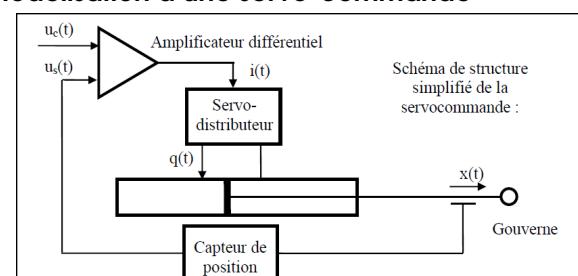
$$\text{Par ailleurs, } \Omega_2(p)/C_r(p) = \frac{\frac{1}{Jp+f}}{1+K^2 \frac{1}{R+Lp} \frac{1}{Jp+f}} = \frac{Lp+R}{(Jp+f)(Lp+R)+K^2}.$$

$$\text{Au final, } \Omega(p) = \frac{K}{(Jp+f)(Lp+R)+K^2} U(p) + \frac{Lp+R}{(Jp+f)(Lp+R)+K^2} C_r(p).$$

On peut alors mettre  $F_1$  sous forme canonique :

$$F_0 = \frac{K}{fR+K^2}, \quad \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{RJ+Lf}{fR+K^2}, \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{LJ}{fR+K^2}.$$

### Modélisation d'une servo-commande



Les différentes équations temporelles qui modélisent le fonctionnement d'une servocommande sont :

- un amplificateur différentiel défini par :  $u_c(t) = \frac{i(t)}{K_a} + u_s(t)$ ;
- débit dans le vérin dans le cas d'une hypothèse de fluide incompressible  $q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt}$ ;
- capteur de position :  $u_s(t) = K_c \cdot x(t)$ ;
- le servo-distributeur est un composant de la chaîne de commande conçu pour fournir un débit hydraulique  $q(t)$  proportionnel au courant de commande  $i(t)$ . (Attention, valable uniquement en régime permanent.) Le constructeur fournit sa fonction de

transfert :

$$F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1 + T p}$$

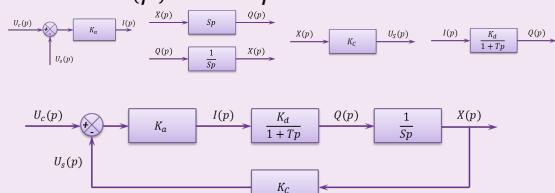
où  $K_d$  est le gain du servo-distributeur et  $T$  sa constante de temps.

**Question 1** Réaliser le schéma-blocs.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

**Correction** On a :

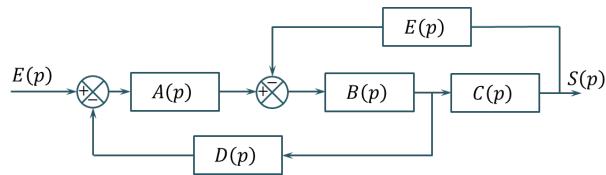
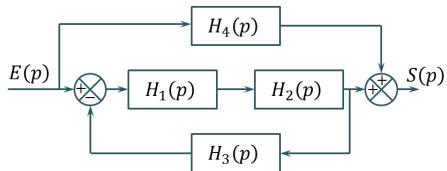
- $U_c(p) = \frac{1}{K_a} I(p) + U_s(p)$
- $Q(p) = S p X(p)$
- $U_S(p) = K_C \cdot X(p)$
- $F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1 + T p}$



## Réduction de schéma-blocs

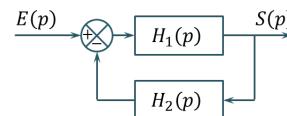
D'après ressources de V. Reydellet.

**Question** Réduire les schéma-blocs suivants.

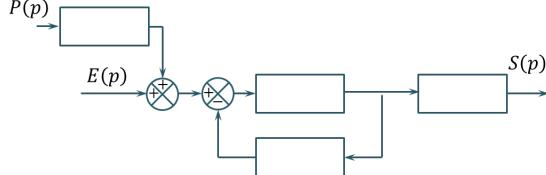
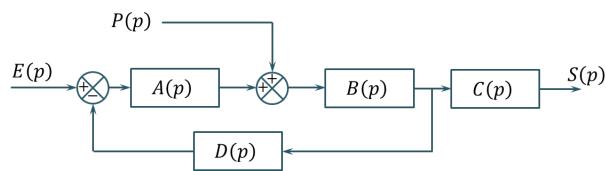


## Transformation de schéma-blocs

**Question** Transformer le schéma-bloc suivant pour obtenir un schéma-blocs à retour unitaire.



**Question** Modifier le schéma-blocs suivant pour obtenir la forme proposée. Déterminer ensuite l'expression de  $S(p)$  en fonction de  $E(p)$  et  $P(p)$ .



## TD 01



## Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec TSI 2017

## Savoirs et compétences :

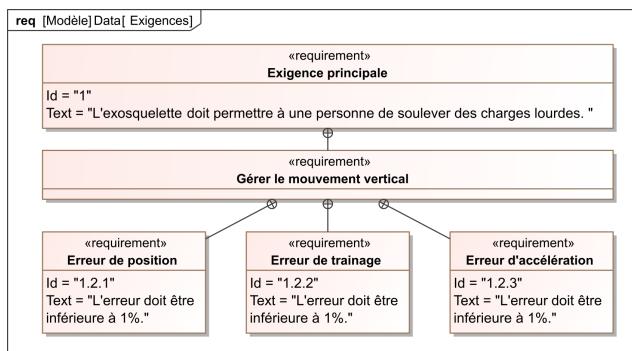
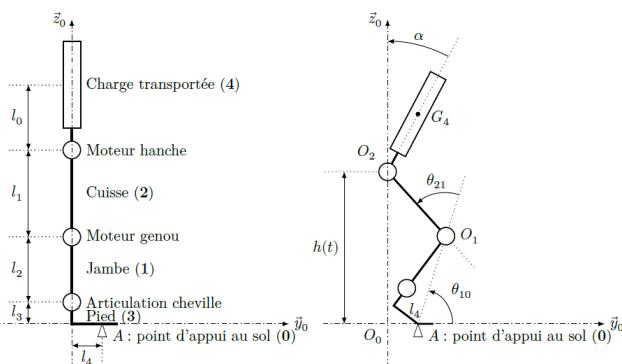
- Mod2.C4 : calcul symbolique;
- Mod2.C7.SF1 : analyser ou établir le schéma-bloc du système;
- Res2.C10 : précision des SLCI : erreur en régime permanent;
- Res2.C10.SF1 : déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon ou en rampe (consigne ou perturbation).

## Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



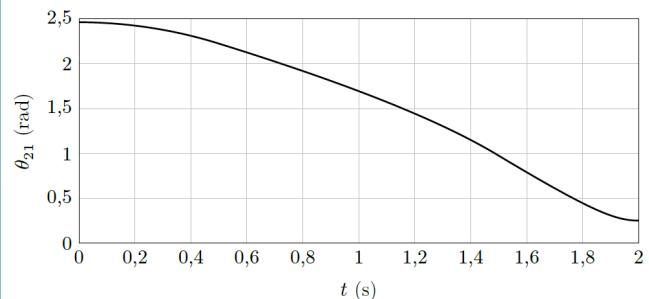
On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.



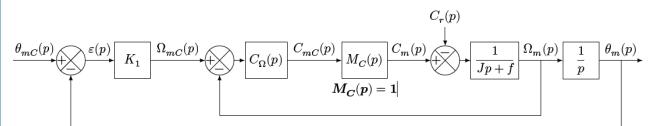
## Gestion du mouvement vertical

**Objectif** Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.



## Notations :

- $\theta_{mc}(p)$  consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_{mc}(t)$  en rad);
- $\theta_m(p)$  position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_m(t)$  en rad);
- $C_{mc}(p)$  consigne de couple moteur (variable temporelle :  $c_{mc}(t)$  en Nm);
- $C_m(p)$  couple moteur (variable temporelle :  $c_m(t)$  en Nm);
- $C_r(p)$  couple résistant perturbateur (variable temporelle :  $c_r(t)$  en Nm);
- $K_1$  gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en  $s^{-1}$ );

- $\Omega_{mC}(p)$  consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_{mC}(t)$  en rad s<sup>-1</sup>);
- $\Omega_m(p)$  vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_m(t)$  en rad s<sup>-1</sup>);
- $C_\Omega(p)$  correcteur de l'asservissement de vitesse;
- $M_C(p)$  modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles :  $M_C(p) = 1$ ;
- $J$  moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur;
- $f$  coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement.

Le correcteur est de la forme :  $C_\Omega(p) = K_2 \left( \frac{Jp + f}{Jp} \right)$ .

En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que :

- l'écart est défini par la variable  $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ ;
- l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable  $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ .

Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart  $\varepsilon(t)$  est égal à l'erreur  $\mu(t)$ .

**Hypothèse(s)** Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude  $C_r(p) = 0$ .

**Question 1** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

**Question 2** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

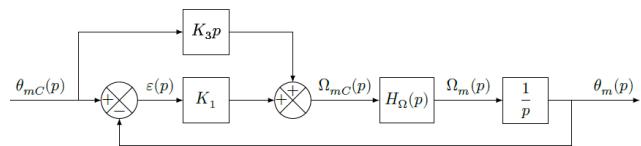
**Question 3** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

**Méthode** On peut définir l'erreur de position  $\varepsilon_p$  par  $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$  avec  $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$  (entrée échelon).

**Question 4** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Question 5** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec  $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$  et  $T = 33$  ms.



**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

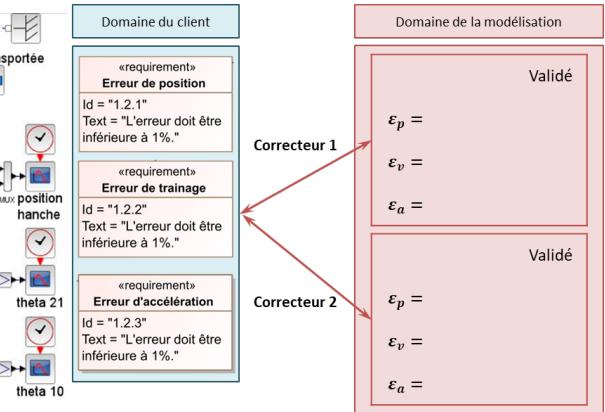
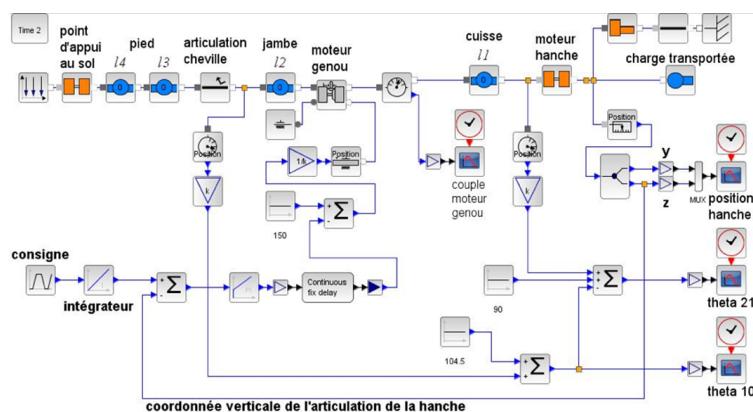
**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Synthèse

**Question 9** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.

Eléments de corrigé :

1. Asservissement en position.
2.  $H_\Omega(p) = 1 / \left( \frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1 \right)$ .
3.  $\varepsilon(p) = (\theta_{mC}(p)) / \left( 1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \right)$
4.  $\varepsilon(p) = 0$ ,  $\varepsilon_v = \frac{1}{K_1}$  et  $K_1 > 100$ .
5.  $\varepsilon_a = \infty$ .
6.  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) (p(1 + Tp - K_3)) / (p(1 + Tp) + K_1)$ .
7.  $\varepsilon_v = \frac{1 - K_3}{K_1}$ ,  $K_3 = 1$ .
8.  $\varepsilon_a = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$ . Le cahier des charges est donc validé.



## TD 01 – Corrigé



## Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec TSI 2017

Savoirs et compétences :

- Mod2.C4 : calcul symbolique;
- Mod2.C7.SF1 : analyser ou établir le schéma-bloc du système;
- Res2.C10 : précision des SLCI : erreur en régime permanent;
- Res2.C10.SF1 : déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon ou en rampe (consigne ou perturbation).

## Mise en situation

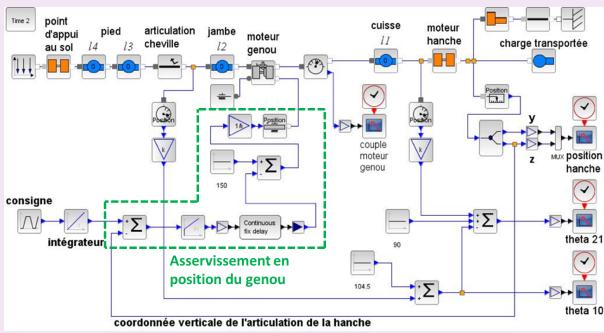
## Gestion du mouvement vertical

**Objectif** Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

**Question 10** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

## Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



**Question 11** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

**Correction** En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a :  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \frac{C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}}{1 + C_\Omega(p)M_C(p)\frac{1}{Jp+f}} = \frac{C_\Omega K_2}{Jp + C_\Omega K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1}$ . En conséquences :  $H_\Omega(p) = \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1}$ .

**Question 12** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

**Correction** D'une part,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$ . D'autre part,  $\theta_m(p) = H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p)$ . Par suite,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p) \left( 1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \right) = \theta_{mC}(p)$ . En conséquences,  $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}}$ .

**Question 13** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Correction** On a :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varepsilon_p &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} = 0 \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1);} \\ \bullet \quad \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \dot{\varepsilon}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{Jp}{C_\Omega K_2} - K_1} = \frac{1}{K_1} \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et de gain } K_1 \text{ en BO).} \end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut  $\frac{1}{K_1} < 0,01$  et  $K_1 > 100$ .

**Question 14** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

**Correction** En raisonnant de même, on a :  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{\varepsilon}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \ddot{\varepsilon}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3} =$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{Jp} \frac{K_1}{C_\Omega K_2} + 1} \frac{1}{p^2} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{Jp}{C_\Omega K_2} K_1} = \infty \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1).}$$

Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

**Question 15** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

**Correction** En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$ ;
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)$ ;
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1+Tp}$ .

$$\text{On a donc : } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1+Tp} = \theta_{mC}(p) - (K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)) \frac{1}{p(1+Tp)} = \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1+Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1+Tp)} \varepsilon(p).$$

$$\text{On a alors } \varepsilon(p) \left( 1 + \frac{K_1}{p(1+Tp)} \right) = \theta_{mC}(p) \left( 1 - \frac{K_3}{1+Tp} \right) \Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1+Tp)+K_1}{p(1+Tp)} = \theta_{mC}(p) \frac{1+Tp-K_3}{1+Tp}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1}.$$

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 16** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

$$\begin{aligned} \text{Correction} \quad \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} = \\ &\frac{1-K_3}{K_1}. \end{aligned}$$

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir  $K_3 = 1$ .

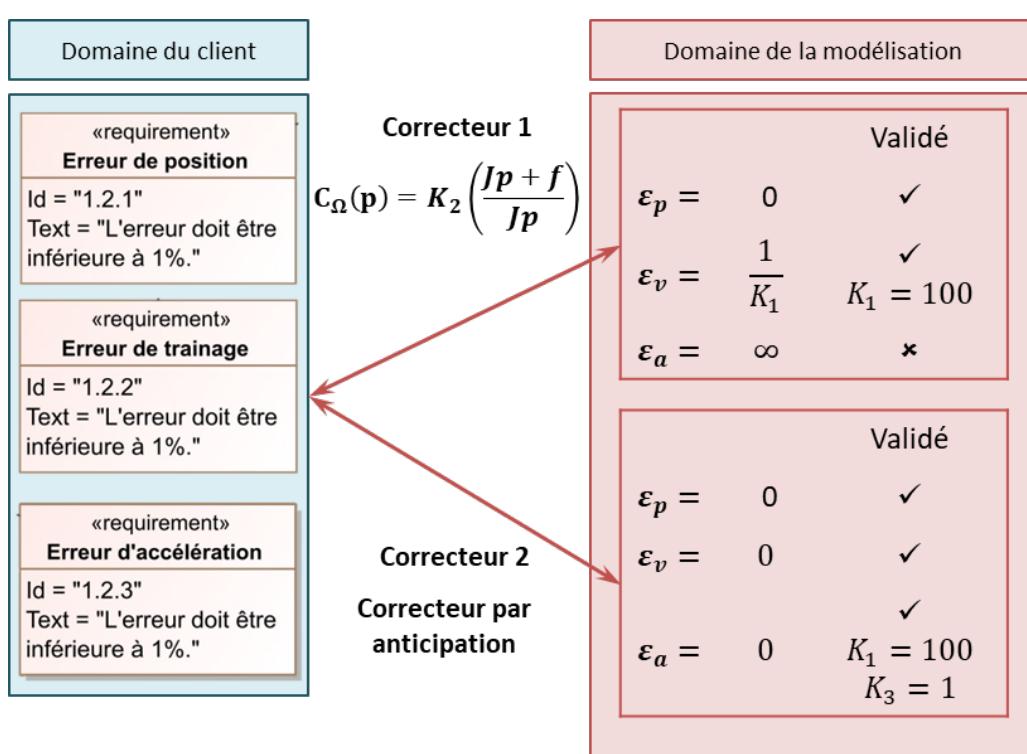
**Question 17** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

On a :

$$\begin{aligned} \text{Correction} \quad \varepsilon_a &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \\ &\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} \frac{1}{p}. \text{ En} \\ &\text{tenant } K_3 = 1 \text{ et } K_1 = 100, \text{ on obtient : } \varepsilon_a = \frac{T}{p(1+Tp)+100} = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}. \text{ L'erreur est donc de} \\ &33 \times 10^{-5}. \text{ Le cahier des charges est donc validé.} \end{aligned}$$

## Synthèse

**Question 18** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.



## Application 03



### Freinage d'Airbus

David Violeau  
Savoirs et compétences :



#### Présentation du système

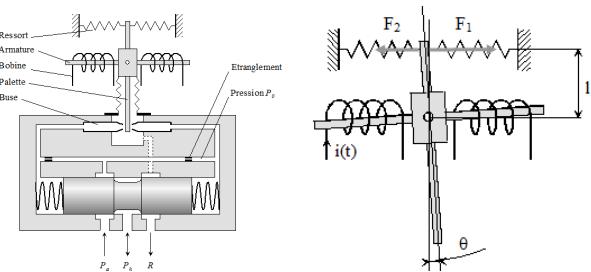
Le freinage est une des fonctions vitales d'un avion, au même titre que la propulsion ou la sustentation. C'est grâce à lui que l'avion peut s'immobiliser après l'atterrissement, circuler au sol en toute sécurité mais également s'arrêter en cas d'urgence lors d'une interruption de décollage alors que l'avion est à pleine charge de carburant et lancé à la vitesse de décollage (même si le risque est de l'ordre de 1 pour 1 million de décollages).

#### Modélisation du système de freinage

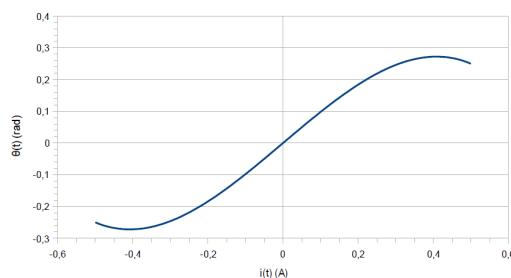
On souhaite définir un modèle pour l'asservissement en décélération. Pour cela, on propose de déterminer une fonction de transfert pour tous les constituants.

#### Modélisation de la servovalve

Une servovalve électrohydraulique est un appareil qui convertit une grandeur électrique (courant ou tension) en une grandeur hydraulique proportionnelle (débit ou pression).



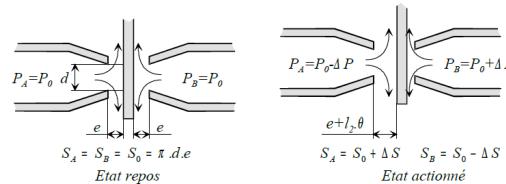
On donne ci-dessous la caractéristique reliant l'intensité  $i(t)$  du moteur à l'angle  $\theta(t)$  dont bascule l'armature.



**Question 1** Que peut-on dire de cette caractéristique sur tout le domaine de variation de  $i(t)$ ? Sachant que  $\theta$  est très petit (varie autour de 0), on utilise la relation suivante

$$\theta(t) = K_1 i(t). \text{ Déterminer la valeur de } K_1 \text{ à partir de la courbe.}$$

On admet que, pour le système buse-palette, la rotation d'angle  $\theta$  de la palette se traduit par un accroissement ou diminution de la distance buse-palette. Les sections de fuite sont alors augmentées ou diminuées, ce qui entraîne une augmentation ou diminution des pressions  $P_A$  et  $P_B$  proportionnelle à  $\Delta S$ .



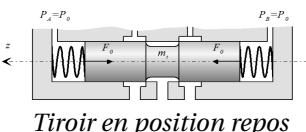
On peut alors définir les relations suivantes :

$$\Delta S(t) = K_2 \theta(t)$$

$$\Delta P(t) = K_3 \Delta S(t)$$

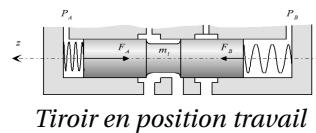
Cette pression différentielle permet de mettre en mouvement le tiroir de la servovalve.

En situation repos, lorsque  $P_A = P_B = P_0$ , le tiroir est en position milieu,  $z = 0$  ( cf figure ci-dessous).



Tiroir en position repos

En position travail, la pression différentielle se répercute aux extrémités du tiroir et provoque son déplacement.



Tiroir en position travail

On utilise les notations suivantes :

- $m_t$  : masse du tiroir;
- $S_t$  : section du tiroir à ses extrémités;
- $F_A$  et  $F_B$  : efforts exercés par les deux ressorts de coefficient de raideur  $k_t$  montés de part et d'autre du tiroir du distributeur;
- $c_t$  : coefficient de frottement visqueux entre tiroir et cylindre.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au tiroir donne la relation suivante :

$$m_t \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -2k_t z(t) + 2S_t \Delta P(t) - c_t \frac{dz(t)}{dt}$$

**Question 2** Calculer la fonction de transfert  $H_t(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)}$  où  $Z(p)$  et  $\Delta P(p)$  sont les transformées de Laplace de  $z(t)$  et  $\Delta P(t)$  en précisant l'hypothèse retenue.

**Question 3** Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et donner son ordre.

On admet pour finir que la pression d'utilisation  $P_h(t)$  du fluide est proportionnelle au déplacement  $z(t)$  du tiroir :  $P_h(t) = K_4 z(t)$ .

**Question 4** À partir de toutes les informations précédentes (modélisation armature, buse/palette, tiroir...), recopier et compléter le schéma-bloc de la servovalve donné ci-dessous, en précisant les fonctions de transfert de chaque bloc (utiliser les notations algébriques).



**Question 5** En déduire la fonction de transfert  $S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)}$  de la servovalve.

**Question 6** Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{1 + \frac{2\xi p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

où on donnera les expressions littérales de  $K_{sv}$ ,  $\xi$  et  $\omega_0$ .

On souhaite que la réponse à une entrée  $i(t)$  de type échelon de valeur  $i_0$  soit la plus rapide possible **sans toutefois produire de dépassement**.

**Question 7** A quelle valeur de  $\xi$  correspond cette spécification ?

**Question 8** Démontrer que cette condition ne peut être satisfaite que si  $k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$ .

**Question 9** Montrer alors que la fonction de transfert de la servovalve peut se mettre sous la forme :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

on donnera l'expression littérale de  $T_{sv}$ .

**Question 10** Déterminer la réponse indicielle  $P_h(t)$  pour une entrée échelon de valeur  $i(t) = i_0 u(t)$ .

$$\text{On rappelle que } \mathcal{L}(te^{-at}u(t)) = \frac{1}{(p+a)^2}.$$

### Modélisation de l'accéléromètre

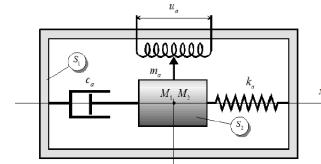
La centrale inertie contient des accéléromètres qui permettent de mesurer les accélérations suivant les trois directions  $x_a$ ,  $y_a$ ,  $z_a$  d'un repère lié à l'avion.

L'accéléromètre renvoie au BSCU un signal électrique  $u_a(t)$  image de l'accélération  $a(t)$  suivant la direction  $x_a$ . La tension  $u_a(t)$  est convertie en grandeur numérique  $a_m$  par un convertisseur analogique-numérique et rangée dans la mémoire du BSCU.

### Principe de l'accéléromètre

Un accéléromètre (voir figure ci-dessous) est constitué de deux solides  $S_1$  et  $S_2$  :

- $S_1$ , le corps, est lié à l'avion,
- $S_2$  est lié à  $S_1$  par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $k_a$  et d'un frottement visqueux de valeur  $c_a$ .



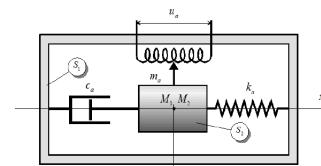
Accéléromètre en position repos

On considère (voir figure ci-dessus) deux points  $M_1$  et  $M_2$  appartenant respectivement à  $S_1$  et  $S_2$ . On note  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  leurs coordonnées dans un repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

On considère nulles les conditions initiales. En particulier, à l'état repos,  $M_1$  et  $M_2$  sont confondus. Quand  $S_1$  est animé d'un mouvement de translation suivant  $x_0$ , on note :

$$\varepsilon(t) = x_1(t) - x_2(t) \quad (1)$$

$$a(t) = \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \text{ accélération de } S_1 \quad (2)$$



Accéléromètre en action

D'autre part, par application du principe fondamental de la dynamique, on a :

$$m_a \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = c_a \left( \frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \right) + k_a (x_1(t) - x_2(t)) \quad (3)$$

avec  $m_a, c_a, k_a$  constantes.

Le solide  $S_2$  est relié à un potentiomètre qui renvoie une tension  $u_a$  proportionnelle au déplacement  $\varepsilon$  du solide  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . On note :

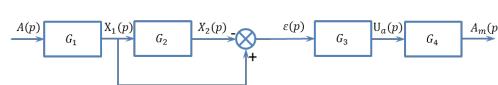
$$u_a(t) = K_p \varepsilon(t) \quad (4)$$

Finalement, le CAN (convertisseur analogique numérique) fournit la valeur  $a_m$  telle que :

$$a_m(t) = K_{CAN} u_a(t) \quad (5)$$

**Question 11** Déterminer les transformées de Laplace des expressions (1) à (5).

**Question 12** En déduire les transmittances  $G_i$  du schéma bloc ci-après.

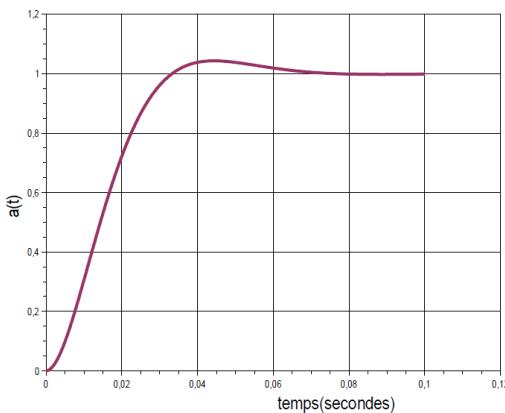


**Question 13** En déduire la fonction de transfert  $\frac{A_m(p)}{A(p)}$  et montrer quelle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{K_{acc}}{1 + 2\frac{\xi_a p}{\omega_a} + \frac{p^2}{\omega_a^2}}$$

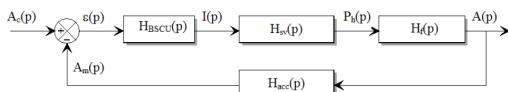
Donner les expressions de  $K_{acc}$ ,  $\xi_a$  et  $\omega_a$ .

**Question 14** La figure ci-dessous donne la réponse indicielle (entrée unitaire) de l'accéléromètre. Identifier les valeurs des constantes  $K_{acc}$ ,  $\xi_a$  et  $\omega_a$  (On pourra utiliser les abaques donnés en annexe).



## Étude de l'asservissement global

La boucle d'asservissement en décélération est donnée ci-après :



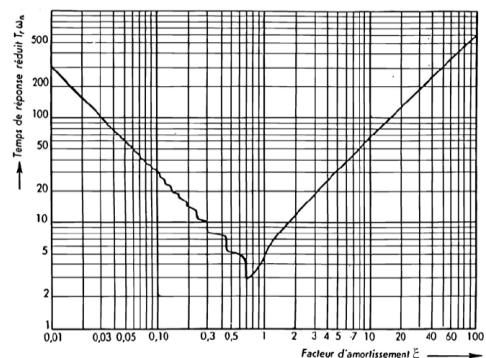
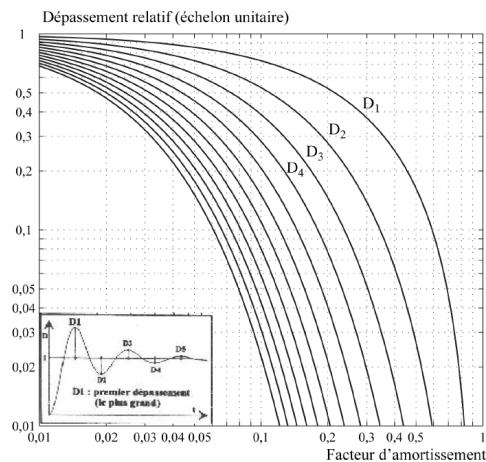
$$\text{avec : } H_{sv}(p) = \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2}, \quad H_{acc}(p) = \frac{K_{acc}}{1 + 2\xi_a p + \frac{p^2}{\omega_a^2}}, \quad H_f(p) = K_f, \quad H_{BSCU}(p) = K_c.$$

**Question 15** Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte. En déduire l'ordre, la classe et le gain de la FTBO( $p$ ).

**Question 16** Exprimer l'écart  $\epsilon(p)$  en fonction de  $a_c(p)$  et de la FTBO( $p$ ).

**Question 17** En déduire l'écart en régime permanent à une entrée de type échelon d'accélération  $a_c(t) = a_c u(t)$ . Que peut-on dire de la performance de précision pour ce correcteur?

**Question 18** On utilise un correcteur (correcteur PI) plus évolué de fonction de transfert  $H_{BSCU}(p) = K_i \frac{1 + T_i p}{p}$ , déterminer à nouveau l'écart en régime permanent et conclure sur ce choix de correcteur.



## Application 03 – Corrigé



### Freinage d'Airbus

David Violeau  
Savoirs et compétences :

...

#### Présentation du système

#### Modélisation du système de freinage

On souhaite définir un modèle pour l'asservissement en décélération. Pour cela, on propose de déterminer une fonction de transfert pour tous les constituants.

#### Modélisation de la servovalve

**Question 19** Que peut-on dire de cette caractéristique sur tout le domaine de variation de  $i(t)$ ? Sachant que  $\theta$  est très petit (varie autour de 0), on utilise la relation suivante  $\theta(t) = K_1 i(t)$ . Déterminer la valeur de  $K_1$  à partir de la courbe.

**Correction** Cette courbe est non linéaire sur tout le domaine de variation de  $i$ . Comme  $\theta$  est très petit, on peut linéariser la courbe au voisinage de 0. La valeur  $K_1$  correspond donc à la pente de la courbe. En conséquence,  $K_1 = 1 \text{ rad} \cdot \text{A}^{-1}$ .

**Question 20** Calculer la fonction de transfert  $H_t(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)}$  où  $Z(p)$  et  $\Delta P(p)$  sont les transformées de Laplace de  $z(t)$  et  $\Delta P(t)$  en précisant l'hypothèse retenue.

**Correction** En se plaçant dans les conditions de Heaviside, on peut transformer l'équation dans le domaine de Laplace. On a donc :

$$m_t p^2 Z(p) = -2k_t Z(p) + 2S_t \Delta P(p) - p c_t Z(p)$$

Ainsi,

$$H_t(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)} = \frac{2S_t}{m_t p^2 + c_t p + 2k_t}$$

**Question 21** Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et donner son ordre.

**Correction** En factorisant par  $2k_t$  on obtient :

$$H_t(p) = \frac{\frac{S_t}{k_t}}{1 + \frac{c_t}{2k_t} p + \frac{m_t}{2k_t} p^2}$$

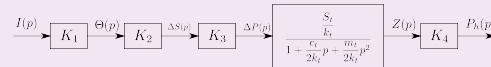
On admet pour finir que la pression d'utilisation  $P_h(t)$  du

fluide est proportionnelle au déplacement  $z(t)$  du tiroir :  $P_h(t) = K_4 z(t)$ .

**Question 22** À partir de toutes les informations précédentes (modélisation armature, buse/palette, tiroir...), recopier et compléter le schéma-bloc de la servovalve donné ci-dessous, en précisant les fonctions de transfert de chaque bloc (utiliser les notations algébriques).

**Correction** On utilise les équations suivantes :  $\theta(t) = K_1 i(t) \Leftrightarrow \Theta(p) = K_1 I(p)$ ,  $\Delta S(t) = K_2 \theta(t) \Leftrightarrow \Delta S(p) = K_2 \Theta(p)$ ,  $\Delta P(t) = K_3 \Delta S(t) \Leftrightarrow \Delta P(p) = K_3 \Delta S(p)$ ,  $P_h(t) = K_4 z(t) \Leftrightarrow P_h(p) = K_4 Z(p)$ .

On en déduit ainsi le schéma bloc suivant :



**Question 23** En déduire la fonction de transfert  $S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)}$  de la servovalve.

**Correction** On en déduit directement :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 \frac{S_t}{k_t}}{1 + \frac{c_t}{2k_t} + \frac{m_t}{2k_t} p^2}$$

**Question 24** Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

où on donnera les expressions littérales de  $K_{sv}$ ,  $\xi$  et  $\omega_0$ .

**Correction** Par identification, on déduit de la question précédente :

$$K_{SV} = K_1 K_2 K_3 K_4 \frac{S_t}{k_t}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k_t}{m_t}}$$

$$\xi = \frac{c_t}{2\sqrt{2k_t m_t}}$$

On souhaite que la réponse à une entrée  $i(t)$  de type échelon de valeur  $i_0$  soit la plus rapide possible **sans toutefois produire de dépassement**.

**Question 25** A quelle valeur de  $\xi$  correspond cette spécification ?

**Correction** Pour ne pas avoir de dépassement, il est nécessaire que  $\xi \geq 1$ . Le système est le plus rapide lorsque  $\xi = 1$ .

**Question 26** Démontrer que cette condition ne peut être satisfaite que si  $k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$ .

$$\xi = 1 \Leftrightarrow c_t = 2\sqrt{2k_t m_t} \Leftrightarrow k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$$

**Question 27** Montrer alors que la fonction de transfert de la servovalve peut se mettre sous la forme :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

on donnera l'expression littérale de  $T_{sv}$ .

**Correction** Lorsque  $\xi = 1$ , le discriminant du dénominateur de la fonction  $S_v(p)$  est nul. En conséquence ce dénominateur possède une racine double. En utilisant la formulation proposée, cette racine est égale à  $\frac{-1}{T_{sv}}$ . En développant la fonction proposée, on peut donc identifier  $T_{sv}$  :

$$(1 + T_{sv}p)^2 = 1 + \frac{2p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2} \Leftrightarrow 1 + 2T_{sv}p + T_{sv}^2 p^2 = 1 + \frac{2p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}$$

On a donc :

$$T_{sv} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m_t}{2k_t}} = \sqrt{\frac{m_t}{2\frac{c_t^2}{8m_t}}} = 2\frac{m_t}{c_t}$$

**Question 28** Déterminer la réponse indicielle  $P_h(t)$  pour une entrée échelon de valeur  $i(t) = i_0 u(t)$ .

$$\text{On rappelle que } \mathcal{L}(t e^{-at} u(t)) = \frac{1}{(p+a)^2}.$$

**Correction** On soumet le système à une entre échelon. En conséquence, on a :

$$I(p) = \frac{i_0}{p}$$

On a alors :

$$P_h(p) = \frac{i_0}{p} \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

En réalisant la décomposition en éléments simples, on a :

$$P_h(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1 + T_{sv}p} + \frac{\gamma}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

En calculant  $P_h(p)p$  et en posant  $p = 0$ , on obtient  $\alpha = K_{sv} i_0$ .

En calculant  $P_h(p)(1 + T_{sv}p)^2$  et en posant  $p = -\frac{1}{T_{sv}}$ , on obtient  $\alpha = K_{sv} i_0$ . On obtient alors  $\gamma = -K_{sv} T_{sv} i_0$ .

Enfin, en calculant  $\lim_{p \rightarrow +\infty} p P_h(p)$  on obtient  $\beta = -K_{sv} T_{sv} i_0$ .

Au final, on obtient :

$$P_h(p) = K_{sv} i_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{T_{sv}}{1 + T_{sv}p} - \frac{T_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2} \right) = K_{sv} i_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{T_{sv}} + p} - \frac{1}{(\frac{1}{T_{sv}} + p)^2} \right)$$

En repassant dans le domaine temporel, on obtient :

$$P_h(t) = K_{sv} i_0 \left( 1 - e^{-\frac{-t}{T_{sv}}} - \frac{t}{T_{sv}} e^{-\frac{-t}{T_{sv}}} \right) u(t)$$

### Modélisation de l'accéléromètre

#### Principe de l'accéléromètre

**Question 29** Déterminer les transformées de Laplace des expressions (1) à (5).

**Correction** On obtient directement :

$$\varepsilon(p) = X_1(p) - X_2(p)$$

$$A(p) = p^2 X_1(p)$$

$$m_a p^2 X_2(p) = c_a (p X_1(p) - p X_2(p)) + k_a (X_1(p) - X_2(p))$$

$$U_a(p) = K_p \varepsilon(p)$$

$$A_m(p) = K_{CAN} U_a(p)$$

**Question 30** En déduire les transmittances  $G_i$  du schéma bloc ci-après.

**Correction** On a :

$$G_1(p) = \frac{X_1(p)}{A(p)} = \frac{1}{p^2}$$

D'après la troisième relation, on a :

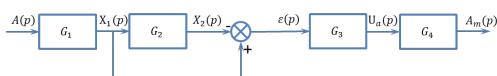
$$X_2(p)(m_a p^2 + c_a p + k_a) = X_1(p)(c_a p + k_a)$$

et donc

$$G_2(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$$

$$G_3(p) = \frac{U_a(p)}{\varepsilon(p)} = K_p$$

$$G_4(p) = \frac{A_m(p)}{U_a(p)} = K_{CAN}$$



**Question 31** En déduire la fonction de transfert  $\frac{A_m(p)}{A(p)}$  et montrer quelle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{K_{acc}}{1 + 2\frac{\xi_a p}{\omega_a} + \frac{p^2}{\omega_a^2}}$$

Donner les expressions de  $K_{acc}$ ,  $\xi_a$  et  $\omega_a$ .

**Correction** D'après le schéma bloc, on a :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = G_1(1 - G_2) G_3 G_4$$

D'où

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{1}{p^2} \left( 1 - \frac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a} \right) K_p K_{CAN} = \frac{K_p K_{CAN}}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$$

En mettant la fonction cette fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{\frac{K_p K_{CAN} m_a}{k_a}}{\frac{m_a}{k_a} p^2 + \frac{c_a}{k_a} p + 1}$$

Au final :

$$K_{acc} = \frac{K_p K_{CAN} m_a}{k_a}$$

$$\xi_a = \frac{c_a}{2\sqrt{k_a m_a}}$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$$

**Question 32** La figure ci-dessous donne la réponse indicielle (entrée unitaire) de l'accéléromètre. Identifier les valeurs des constantes  $K_{acc}$ ,  $\xi_a$  et  $\omega_a$  (On pourra utiliser les abaques donnés en annexe).

**Correction** D'après le tracé de la réponse indicielle avec une entrée unitaire, on observe bien la réponse d'un système du second ordre (tangente horizontale et un dépassement).

L'entrée est unitaire et le système tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini. En conséquence on a  $K_{acc} = 1$ .

La valeur du premier dépassement est de 1,05. En conséquence le dépassement est de 5%. D'après l'abaque du dépassement relatif, on a donc :  $\xi_a = 0,7$ .

En utilisant l'abaque donnant  $t_r \omega_0$  en fonction de  $\xi$  on lit que  $t_r \omega_0 = 3$ .

Enfin, en mesurant le temps de réponse à 5% on a  $t_r \approx 0,03s..$ . En conséquence :  $\omega_a = \frac{3}{0,03} \approx 100 \text{ rad/s.}$

Réponse acceptée : pour le temps de réponse à 5%  $t_r = 0,045s..$  En conséquence :  $\omega_a = \frac{3}{0,045} \approx 66 \text{ rad/s.}$

## Étude de l'asservissement global

**Question 33** Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte. En déduire l'ordre, la classe et le gain de la FTBO( $p$ ).

**Correction** Par définition, la FTBO s'exprime par la relation :  $\text{FTBO}(p) = H_{BSCU} \cdot H_{SC}(p) \cdot H_f(p) \cdot H_{acc}(p) = \frac{K_c K_{SV} K_f K_{acc}}{(1 + T_{sv} p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi_a}{\omega_a} p + \frac{p^2}{\omega_a^2} \right)}$

Le gain de la FTBO est donné par le numérateur :  $K_c K_{SV} K_f K_{acc}$ .

L'ordre de la FTBO est donné par le monôme de plus haut degré : l'ordre est donc de 4 (lorsqu'on développe le système).

La classe du système est donné par le nombre d'intégrateur présent au dénominateur. Ici,  $p$  ne peut pas être mis en facteur du dénominateur. La classe est donc de 0.

**Question 34** Exprimer l'écart  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $a_c(p)$  et de la FTBO( $p$ ).

**Correction** D'après le schéma bloc, on a :

$$\varepsilon(p) = A_c(p) - A_m(p) = A_c(p) - \varepsilon(p) \cdot \text{FTBO}(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)(1 - \text{FTBO}(p)) = A_c(p)$$

On a donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{A_c(p)}{(1 - \text{FTBO}(p))}$$

**Question 35** En déduire l'écart en régime permanent à une entrée de type échelon d'accélération  $a_c(t) = a_c u(t)$ . Que peut on dire de la performance de précision pour ce

correcteur ?

**Correction** L'écart est donné par la fonction  $\varepsilon$ . L'écart en régime permanent est donné par la limite de  $\varepsilon(t)$  en l'infini. D'après le théorème de la valeur finale on a donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p A_c(p)}{1 - FTBO(p)}$$

L'entrée est un échelon d'accélération d'amplitude  $a_c$ . En conséquence :

$$A_c(p) = \frac{a_c}{p}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a_c}{p} \frac{p}{1 - FTBO(p)}$$

Or,

$$\lim_{p \rightarrow 0} FTBO(p) = K_c K_{SV} K_f K_{acc}$$

En conséquence,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \frac{a_c}{1 + K_c K_{SV} K_f K_{acc}}$$

L'écart statique de ce système n'étant pas nul, le système n'est donc pas précis.

**Question 36** On utilise un correcteur (correcteur PI) plus évolué de fonction de transfert  $H_{BSCU}(p) = K_i \frac{1 + T_i p}{p}$ , déterminer à nouveau l'écart en régime permanent et conclure sur ce choix de correcteur.

**Correction** Il suffit dans un premier temps de calculer la limite quand  $p$  vers 0 de la nouvelle FTBO.

Cette FTBO vaut :

$$FTBO(p) = \frac{K_c K_{SV} K_f K_{acc}}{(1 + T_{sv} p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi_a}{\omega_a} p + \frac{p^2}{\omega_a^2} \right)} \frac{K_i (1 + T_i p)}{p}$$

On a alors :

$$\lim_{p \rightarrow 0} FTBO(p) = +\infty$$

En conséquence,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

L'écart statique étant nul, le système est donc précis.

## Application 04

### Applications

D'après Sébastien Grange

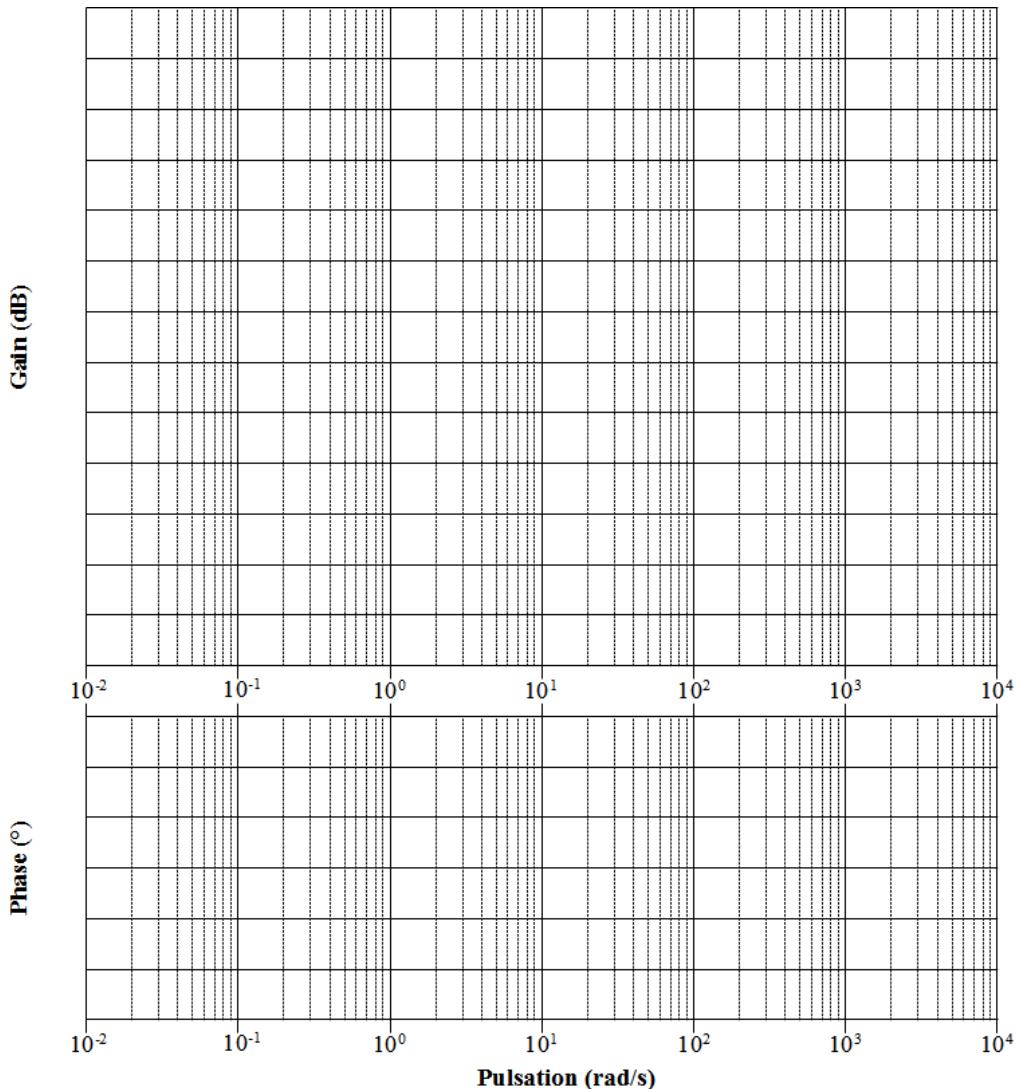
Savoirs et compétences :



### Diagramme de Bode

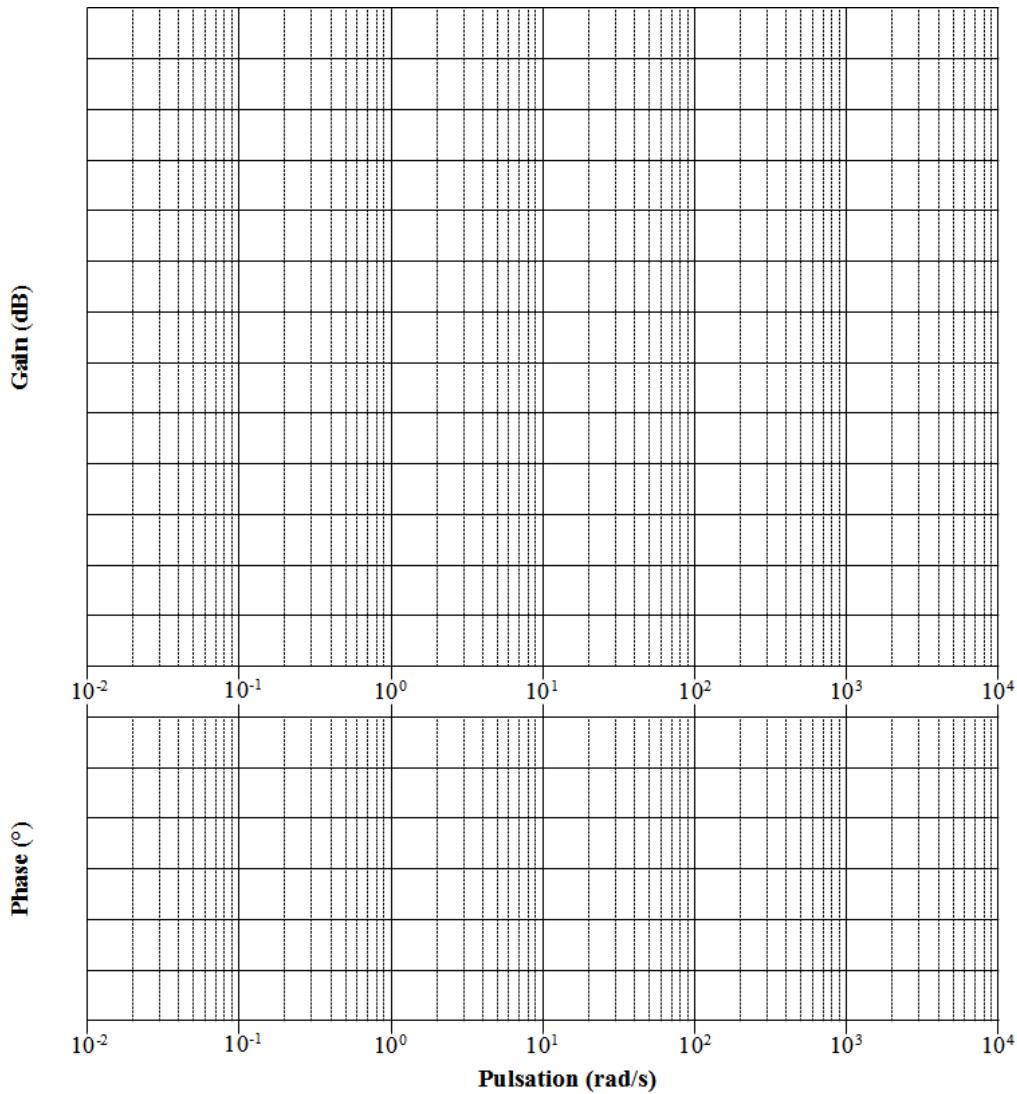
**Question 1** Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

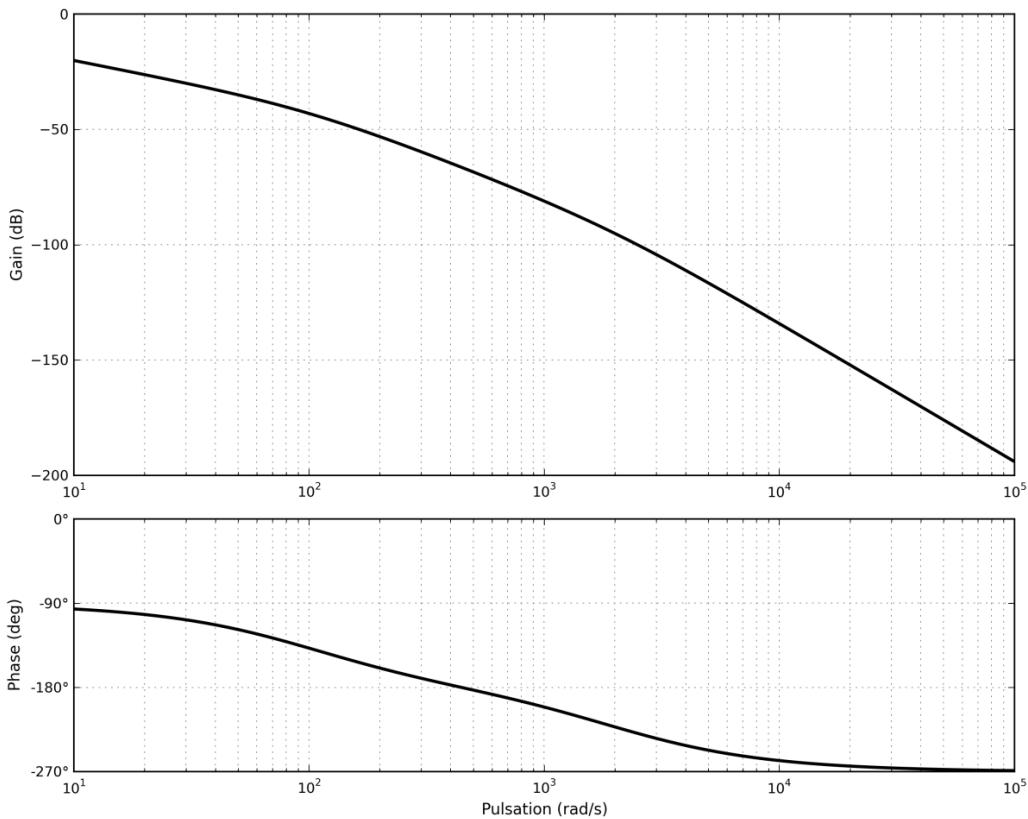


**Question 2** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

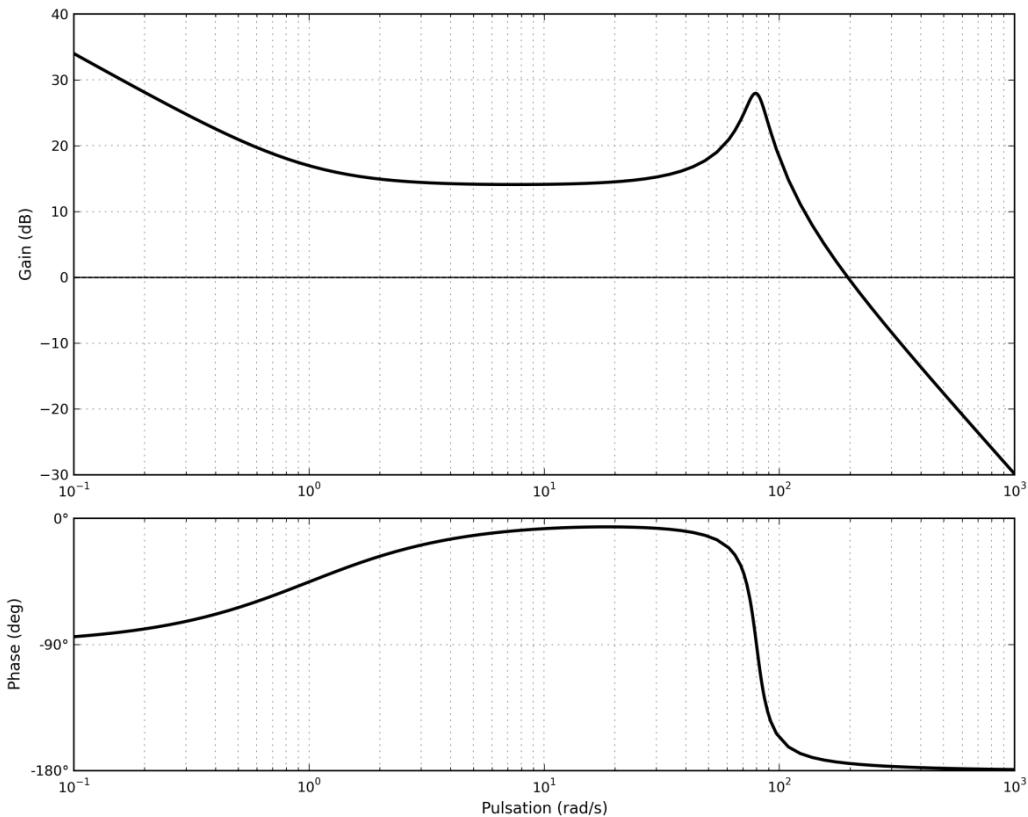


**Question 3** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .



**Question 4** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

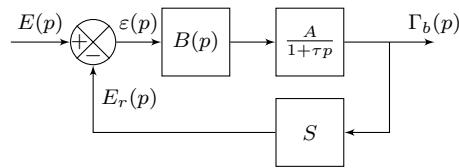
**Question 5** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .



**Question 6** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

## Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.



On a  $A = 100 \text{ g ms}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $S = 10 \cdot 10^{-3} / \text{g V} / (\text{m/s}^2)$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur.  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement et  $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma b(t)$ .

$$B(p) = 1$$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

**Question 1** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

**Question 2** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

**Deuxième étude :**  $B(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 3** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2V.

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.

Application 04 –  
Corrigé

**Applications**  
*D'après Sébastien Grange*  
*Savoirs et compétences :*

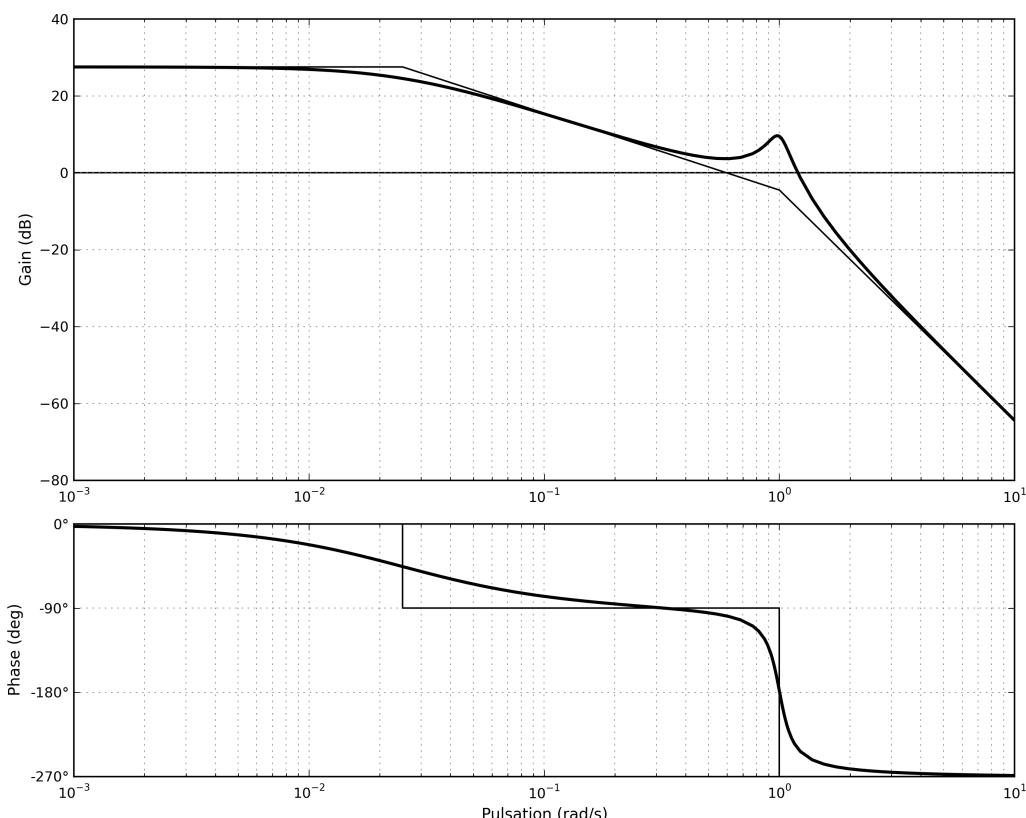
...

## Diagramme de Bode

**Question 5** Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

**Correction**  $H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)} = \frac{24}{(1+40p)\left(1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1}p + \frac{p^2}{1^2}\right)}$

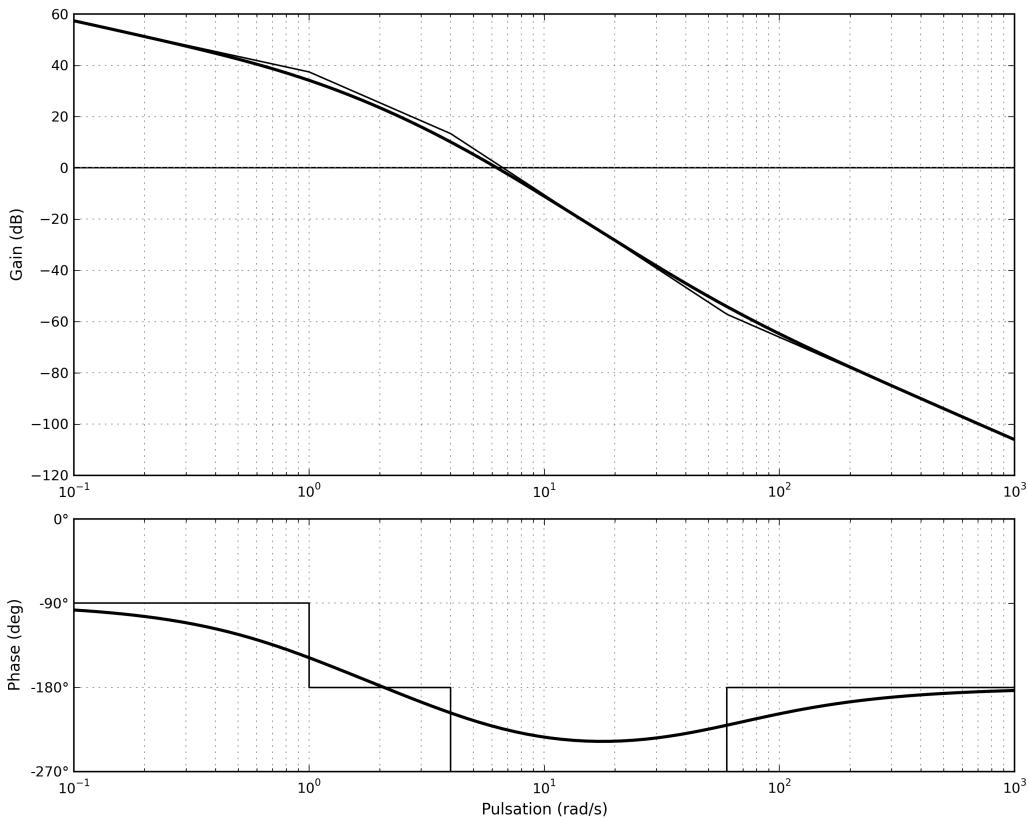


**Question 6** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

**Correction**

$$H(p) = \frac{5(p+60)}{p(p^2+5p+4)} = \frac{75(1+0,0167p)}{p(1+(2 \cdot 1,25)/2)p + p^2/2^2} = \frac{75(1+0,0167p)}{p(1+p)(1+0,25p)}$$



**Question 7** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .

**Correction** D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. De plus la phase diminue dans un premier temps de 90 degrés puis encore de 90 degrés ce qui justifie les 2 1<sup>er</sup>ordres.

Pour identifier les constantes de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un premier ordre passe par -45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $\frac{1}{\tau}$ . Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc les pulsations de coupure lorsque la phase vaut -135 degrés puis -225 degrés. On a :  $1/T_1 \approx 100$  et  $1/T_2 \approx 2000$  donc  $T_1 = 0,01$  s et  $T_2 = 0,0005$  s.

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ . Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1<sup>er</sup> ordre valent environ  $20 \log K$  et celui de l'intégrateur  $20 \log(1/\omega)$ . On a donc pour  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$  :  $20 \log(K/0,1) \approx -20$   $K \approx 1$

$$\text{On a donc : } H(p) = \frac{1}{p(1+0.01p)(1+0.0005p)}.$$

Le pôle dominant est le pôle qui met le plus de temps à converger, c'est-à-dire celui qui a la constante de temps la plus grande, on a donc :  $H(p) \approx \frac{1}{p(1+0.01p)}$ .

**Question 8** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

**Correction** On sait que la sortie sera également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais déphasée et d'amplitude différente :  $s(t) = S_0 \sin(300t + \varphi)$ .

Le diagramme de Bode nous donne le rapport de l'amplitude entre la sortie et l'entrée (courbe de gain) et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (courbe de phase).

$$G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) = 20 \log(S_0/E_0) = 20 \log(S_0/3).$$

On peut lire que :  $G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) \approx -60 \text{ dB}$  et donc  $S_0 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ . D'après la courbe de phase, on peut lire :  $\varphi(\omega = 300 \text{ rad/s}) = -175 \text{ degrés}$ . On a donc :  $s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(300t - 3,05)$ . L'angle est à mettre en radians.

**Question 9** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .

**Correction** D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. Ensuite la phase augmente dans un premier temps de 90 degrés, ce qui signifie la présence d'un « 1er ordre » en numérateur. Puis la phase diminue de 180 degrés et le gain résonne ce qui justifie la présence d'un 2ème ordre avec un coefficient d'amortissement plus petit que  $1/\sqrt{2}$ .

$$H(p) = \frac{K(1+Tp)}{p(1+2\xi/\omega_0 p + p^2/(\omega_0^2))}$$

Pour identifier la constante de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un « premier ordre » au numérateur passe par 45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $1/\tau$ . Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -45 degrés. On a :  $1/T \simeq 1$  et  $T = 1$  s.

Pour identifier la pulsation de coupure, on va utiliser le fait que la phase d'un 2ème ordre passe par -90 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $\omega_0$ . Ici, il y a un intégrateur et un « 1er ordre » au numérateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -90 degrés. On a :  $\omega_0 \simeq 80$  rad/s.

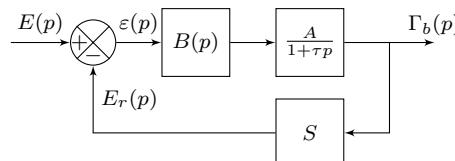
Pour identifier le coefficient d'amortissement, on va utiliser la résonnance. On a :  $20 \log(1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})) \simeq 13$  et  $\xi \simeq 0,11$ .

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici  $\omega = 0,1$  rad/s. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1er ordre et du 2ème ordre valent environ  $20 \log K$  et celui de l'intégrateur  $20 \log(1/\omega)$ . On a donc pour  $\omega = 0,1$  rad/s :  $20 \log(K/0,1) \simeq 33$  et  $K \simeq 4,5$

**Question 10** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

### Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.



On a  $A = 100 \text{ g ms}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2$  s et  $S = 10 \cdot 10^{-3} / (\text{g V} / (\text{m/s}^2))$  où  $\text{g}$  est l'accélération de pesanteur.  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement et  $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma b(t)$ .

#### B(p) = 1

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

**Question 1** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

**Question 2** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

**Deuxième étude :**  $B(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 3** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.

## Application 05



### Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Concours Centrale Supelec PSI 2006

*Savoirs et compétences :*

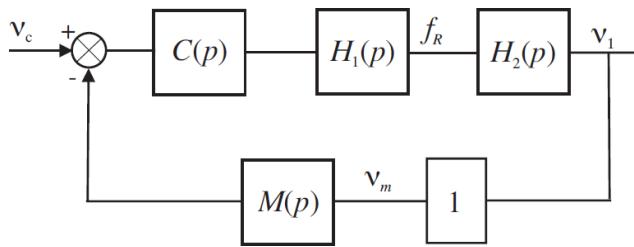
...

#### Mise en situation

L'objet de cette étude est l'analyse du système de freinage mécanique à énergie pneumatique installé sur les TGV Duplex. Par soucis de sécurité, il est indispensable d'éviter le blocage des roues (phénomène appelé en-rayage) lors du freinage. Pour cela il est nécessaire de maîtriser la vitesse de glissement entre la roue et le rail.

**Objectif** L'objectif est d'étudier la loi de commande du dispositif d'anti-en-rayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation.

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure suivante où  $v_c$  est la consigne de glissement.



Structure de la chaîne de régulation de glissement

On note :

- $H_1(p)$  la fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électrovalve);
- $H_2(p)$  la fonction de transfert de la roue au freinage;
- $C(p)$  le correcteur de la boucle de régulation;
- $M(p)$  la fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement, cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure;
- $v_m$  : glissement estimé.

On adoptera pour la suite :  $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$  et  $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

Pour une vitesse de train  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ , le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse du train par rapport au rail  $V_T$  ne font pas l'objet de cette étude.

On a  $M = 8200 \text{ kg}$ ,  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ ,  $I/r^2 = 400 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

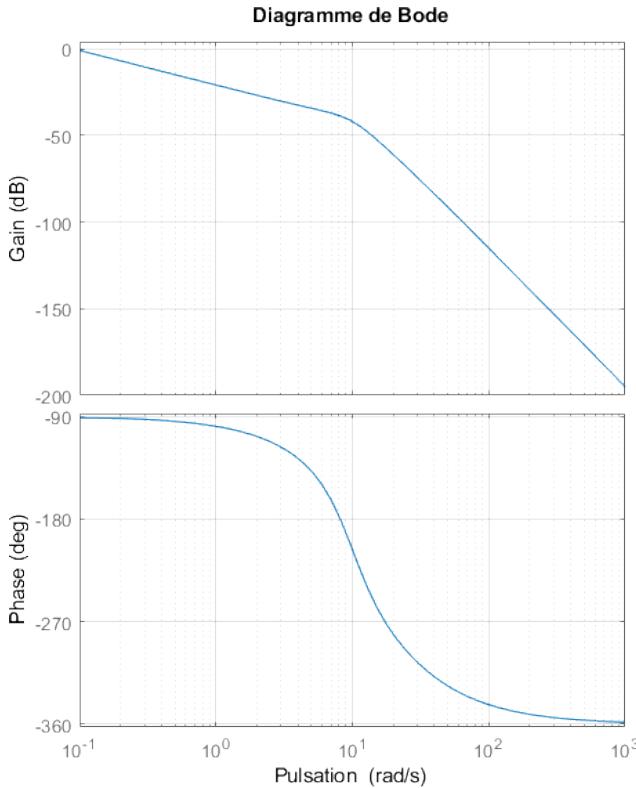
Marges de stabilité, performances en boucle ouverte	
Pulsation de coupure à 0 dB	$\omega_c \approx 1 \text{ rad s}^{-1}$
Marge de phase	$\Delta\varphi \geq 60^\circ$ au point de fonctionnement nominal $B$
Stabilité quel que soit le point de fonctionnement sur la caractéristique $\mu = f(\nu)$	
<b>Réponse à un échelon de consigne de glissement</b>	
Écart en régime permanent	Nul
Temps du 1 <sup>er</sup> maximum	$t_m \leq 3,5 \text{ s}$
Dépassement	$D \approx 18 \%$
<b>Réponse à une variation en échelon de l'adhérence</b>	
Écart en régime permanent	Nul
Temps de réponse	$t_r \leq 9 \text{ s}$

*Cahier des charges de la boucle de régulation de glissement pour  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$*

#### Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

On donne la fonction de transfert entre le glissement relatif et la force de freinage :  $H_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}$ .

**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.



### Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type PI, dont la fonction de transfert est :  $C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument  $C(p)$  de afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Méthode** Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$ . On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode** Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0$ .

### Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

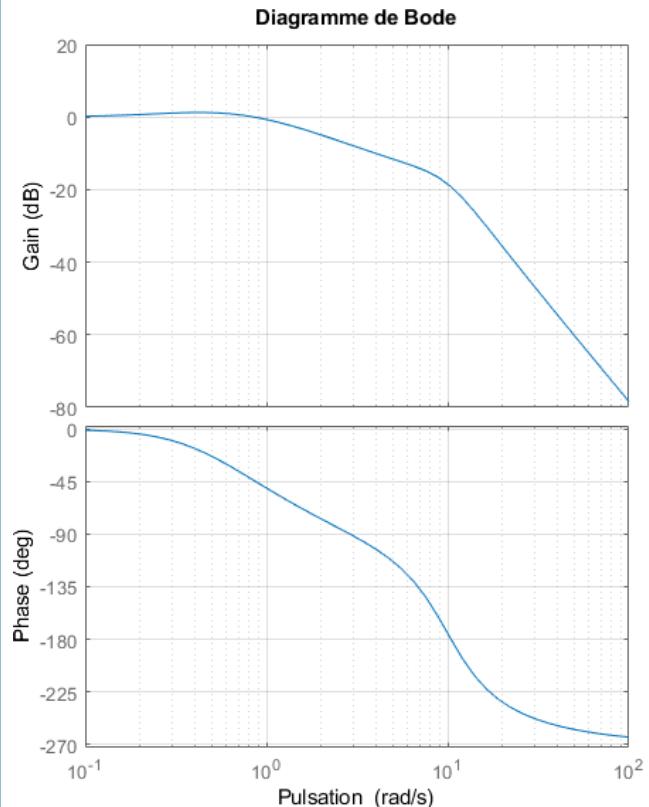
Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérifi-

cation concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de glissement : temps du 1<sup>er</sup> maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)}$ , on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante :  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$ .

On supposera sans aucune justification que  $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$ .

**Question 5** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.



**Question 6** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Question 7** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

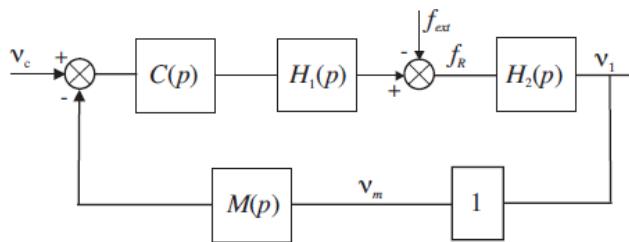
On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) = \begin{cases} t \\ \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t). \end{cases}$

**Question 8** Calculer le temps du 1<sup>er</sup>maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $v_c(t) = v_{c0}u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

**Question 9** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

### Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

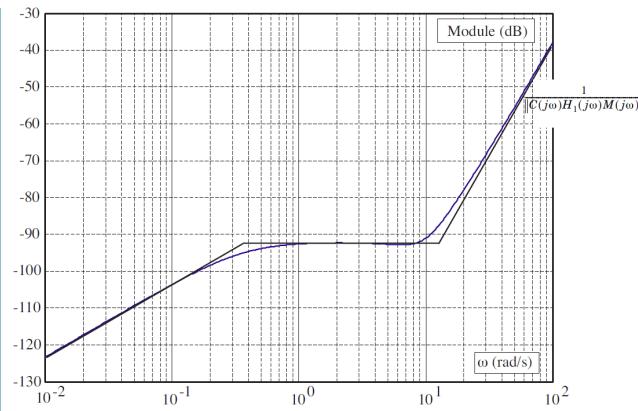
La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive. On admet que cette modélisation conduit au schéma bloc représenté sur la figure ci-dessous.



On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

**Question 10** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{ext}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $v_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :  $\|F_2(j\omega)\| = \min\left[\frac{1}{\|H_2(j\omega)\|}; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|}\right]$ .

**Question 11** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|}$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $\|H_2(j\omega)\|$ .



**Question 12** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $\|F_2(j\omega)\|$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

**Question 13** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

**Question 14** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{ext} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000$  N.

**Question 15** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).

### Retour sur le cahier des charges

**Question 16** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

## Application 05 –

## Corrigé



## Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Concours Centrale Supelec PSI 2006

Savoirs et compétences :

 ...

## Mise en situation

## Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

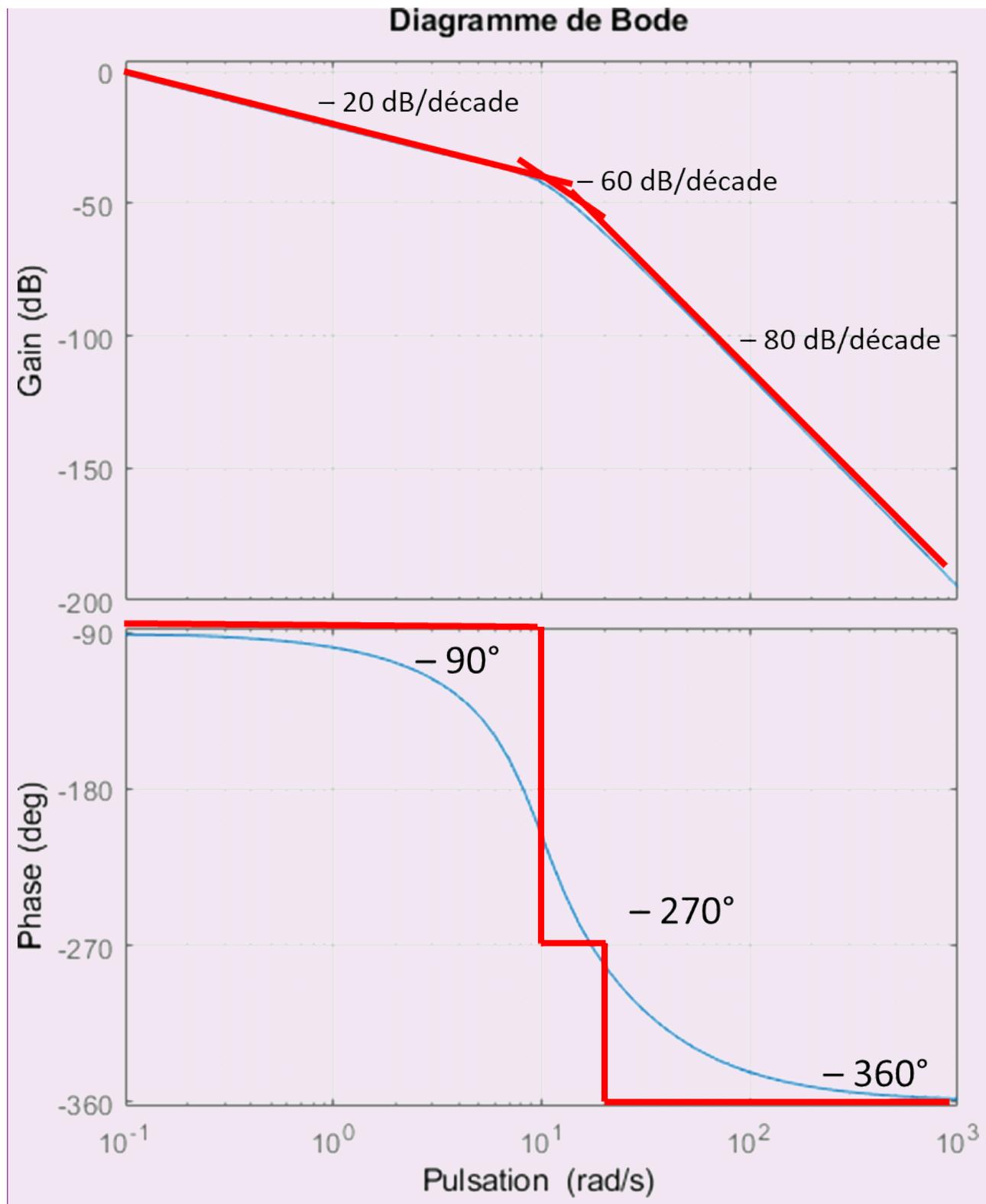
**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

**Correction** On a pour  $H_1(p)$ ,  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,01 \Leftrightarrow \omega_0 = 10$  et  $2\frac{\xi}{\omega_0} = 0,1$  soit  $\xi = 0,1 \times 10/2 = 0,5$ . Les pulsations caractéristiques de la FTBO sont donc  $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$  et  $1/0,05 = 20 \text{ rad s}^{-1}$ .

Pour tracer un diagramme de Bode avec un intégrateur, il est nécessaire de définir un point pour définir la « hauteur » du tracé. Pour cela on prend un point pour lequel seul l'intégrateur et les constantes ont de l'effet. Ainsi, pour  $\omega = 0,1 \text{ rad s}^{-1}$ , on a  $\text{FTBO}(p) \simeq \frac{2000 \times 45 \times 10^{-6}}{p}$ . On a donc  $20 \log 0,09 - 20 \log 0,1 \simeq -0,92 \text{ dB}$ .

On peut dresser le tableau de variations de la FTBO puis tracer les asymptotes.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega = 10$	$\omega = 20$	$\omega \rightarrow \infty$
$\ H_1(j\omega)\ _{dB}$	$20 \log 2000$	$-40 \text{ dB/decade}$	$-40 \text{ dB/decade}$	
$\ H_2(j\omega)\ _{dB}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-20 \text{ dB/decade}$	
$\ M(j\omega)\ _{dB}$	0	0	$-20 \text{ dB/decade}$	
$\ \text{FTBO}(j\omega)\ _{dB}$	<b><math>-20 \text{ dB/decade}</math></b>	<b><math>-60 \text{ dB/decade}</math></b>	<b><math>-80 \text{ dB/decade}</math></b>	
$\text{Arg}(\text{FTBO}(j\omega))$	<b><math>-90^\circ</math></b>	<b><math>-270^\circ</math></b>	<b><math>-360^\circ</math></b>	



### Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :  $C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument  $C(p)$  de afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Méthode** Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|FTBO(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$ . On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg[FTBO(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .

**Correction** La pulsation de coupure souhaitée est  $\omega_c \simeq 1 \text{ rad s}^{-1}$ . On cherche donc  $K_r$  et  $T_i$  tels que  $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ) = 60^\circ$ .

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \underbrace{\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}}_{\rightarrow -5,7^\circ \text{ qd } \omega=\omega_c} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+0,05p}}_{\rightarrow -2,8^\circ \text{ qd } \omega=\omega_c} \cdot \underbrace{K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}}_{\rightarrow -90^\circ} \right] = \arg \left[ \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \right] - 98,5$$

(R)

Ci-dessus, ce sont les **arguments** que l'on évalue lorsque  $\omega = \omega_c$ . L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] - 98,5.$$

Pour respecter la marge souhaitée, il est donc nécessaire que  $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180) \geq 60$  Soit  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] - 98,5 + 180 \geq 60$  et  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ$ .

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{imin}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Correction** On en déduit que pour  $\omega = \omega_c = 1$ ,  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ \Leftrightarrow \arctan(T_i \omega) - 90 \geq -21,5^\circ \Leftrightarrow \arctan(T_i \omega) \geq 68,5^\circ$  et donc  $\Rightarrow T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$ .

!

Attention : à ce stade, la marge de phase serait de  $60^\circ$  SI la pulsation de coupure était de  $1 \text{ rad s}^{-1}$  ce qui n'est pas encore le cas pour le moment.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{imin}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de saisir la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode** Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log \|\text{FTBO}(j\omega_c)\| = 0$ .

**Correction** En raisonnant graphiquement à l'aide du diagramme en boucle ouverte non corrigé, on lit que le gain est d'environ  $-20 \text{ dB}$  lorsque  $\omega = 1$ . La fonction de transfert du correcteur est  $C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_r \frac{T_i p + 1}{T_i p}$ . Le gain dB du correcteur doit donc être de  $20 \text{ dB}$  lorsque  $\omega = 1$  :  $20 \log K_r + 20 \log \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} - 20 \log T_i \omega = 20 \Leftrightarrow \log K_r + \log \sqrt{T_i^2 + 1} - \log T_i = 1 \Leftrightarrow \log K_r = 1 - \log \sqrt{T_i^2 + 1} + \log T_i$ . On a donc  $K_r = 9,3$ .

Analytiquement (à vérifier....)  $20 \log \|\text{FTBO}(j\omega_c)\| = 0 \Rightarrow \|\text{FTBO}(j\omega_c)\| = 1$ .

$$\begin{aligned} \|\text{FTBO}(j\omega)\| &= \left\| \frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2} \cdot \frac{1}{1+0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\ &= \left\| \frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2} \cdot \frac{1}{1+0,05p} \cdot K_r \frac{1+T_i p}{T_i p} \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\ &= \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \sqrt{1+T_i^2 \omega^2} \left\| \frac{1}{1+0,1p+0,01p^2} \frac{1}{1+0,05p} \right\| = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1+T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{1+0,05^2 \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2 \omega^2)^2 + 0,1^2 \omega^2}} \\ &= \frac{K_r}{T_i} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1+T_i^2}}{\sqrt{1+0,05^2}} \frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2)^2 + 0,1^2}} \end{aligned}$$

**Question 5** Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode** Soit  $\omega_\varphi$  la pulsation telle que  $\varphi(\omega_\varphi) = -180^\circ$ . La marge de gain s'exprime alors par  $MG = -20 \log \|H(j\omega_\varphi)\|$ .

**Correction** **Approche analytique** On résout  $\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = -180^\circ$

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[ \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,05p} \cdot K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right]$$

**Approche graphique**

### Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

**Question 6** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

**Correction**

**Question 7** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Correction**

- $K_f = 1$  : lorsque  $\omega$  tend vers 0, le gain tend vers 0;
- $\omega_0 = 0,5$  : valeur de la pulsation de résonance;
- $\tau_1 = \frac{1}{0,9} = 1,11 \text{ s}$ ;
- $\tau_2 = \frac{1}{7} = 0,14 \text{ s}$ ;
- $\xi < 0,7$  (résonance).

**Question 8** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

**Correction**

La pulsation propre  $\omega_0$  est relativement loin de la bande passante, en conséquence sa dynamique sera rapide vis-à-vis du zéro et du pôle double (pôles dominants). On adopte donc :

$$F(p) = \frac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)} = \frac{(1 + 3,3p)}{(1 + 1,66p)^2}$$

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$ .

**Question 9** Calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $\nu_c(t) = \nu_{c0} u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

**Correction**

### Calcul du temps du 1<sup>er</sup> maximum

Le temps du 1<sup>er</sup> maximum est donné par  $f(t_m) = 0$ , soit pour :

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t_m + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} = 0$$

On obtient donc :

$$t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$$

L'application numérique avec les valeurs adoptées conduit à  $t_m = 3,3$  s.

### Calcul du dépassement

La réponse indicielle peut être obtenue par intégration de la réponse impulsionale, le dépassement étant donné par la valeur de la sortie pour  $t = t_m$  :

$$\nu(t_m) = \int_0^{t_m} f(t) dt = \int_0^{t_m} (ay(t) + b\dot{y}(t)) dt = a \int_0^{t_m} y(t) dt + b [y(t)]_0^{t_m}$$

Avec  $y(t) = te^{-t/\tau_2}$  dont l'intégration peut être effectuée facilement par parties :

$$\int_0^{t_m} te^{-t/\tau_2} dt = \left[ -\tau_2 te^{-t/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t/\tau_2} \right]_0^{t_m} = -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2$$

$$\nu(t_m) = \frac{1}{\tau_2^2} \left[ -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2 \right] + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} t_m e^{-t_m/\tau_2}$$

Pour  $t = t_m$  on obtient  $\nu(t_m) = 1,13$ , soit un dépassement de 13%.

**Question 10** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

#### Correction

- Le temps du 1<sup>er</sup> maximum est inférieur à 3,5 s. et le dépassement inférieur à 20% ce qui vérifie le cahier des charges.
- Le régulateur comportant une action intégrale, l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une consigne constante.

### Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

**Question 11** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{ext}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $v_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :  $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \frac{1}{\|H_2(j\omega)\|}, \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$ .

**Correction** On a directement  $F_2(p) = -\frac{H_2(p)}{1 + H_2(p)M(p)C(p)H_1(p)}$ .

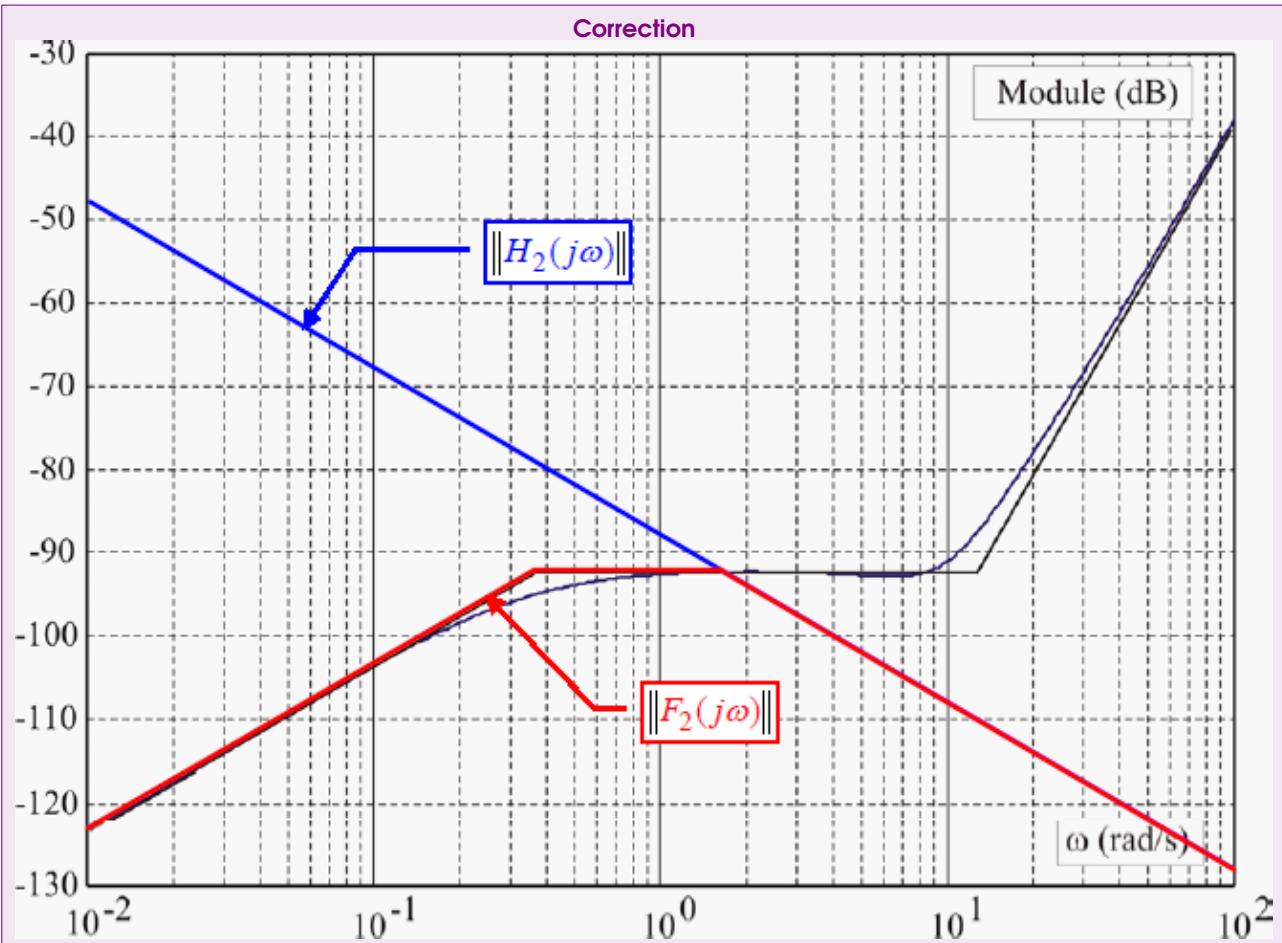
On peut alors déterminer le module et on a  $\|F_2(j\omega)\| = \left\| \frac{H_2(j\omega)}{1 + H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|$ .

Dans ces conditions :

- si  $\|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\| \gg 1$  alors  $\|F_2(j\omega)\| \simeq \left\| \frac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\| \simeq \left\| \frac{1}{M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|$ ;
- si  $\|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\| \ll 1$  alors  $\|F_2(j\omega)\| \simeq \|H_2(j\omega)\|$ .

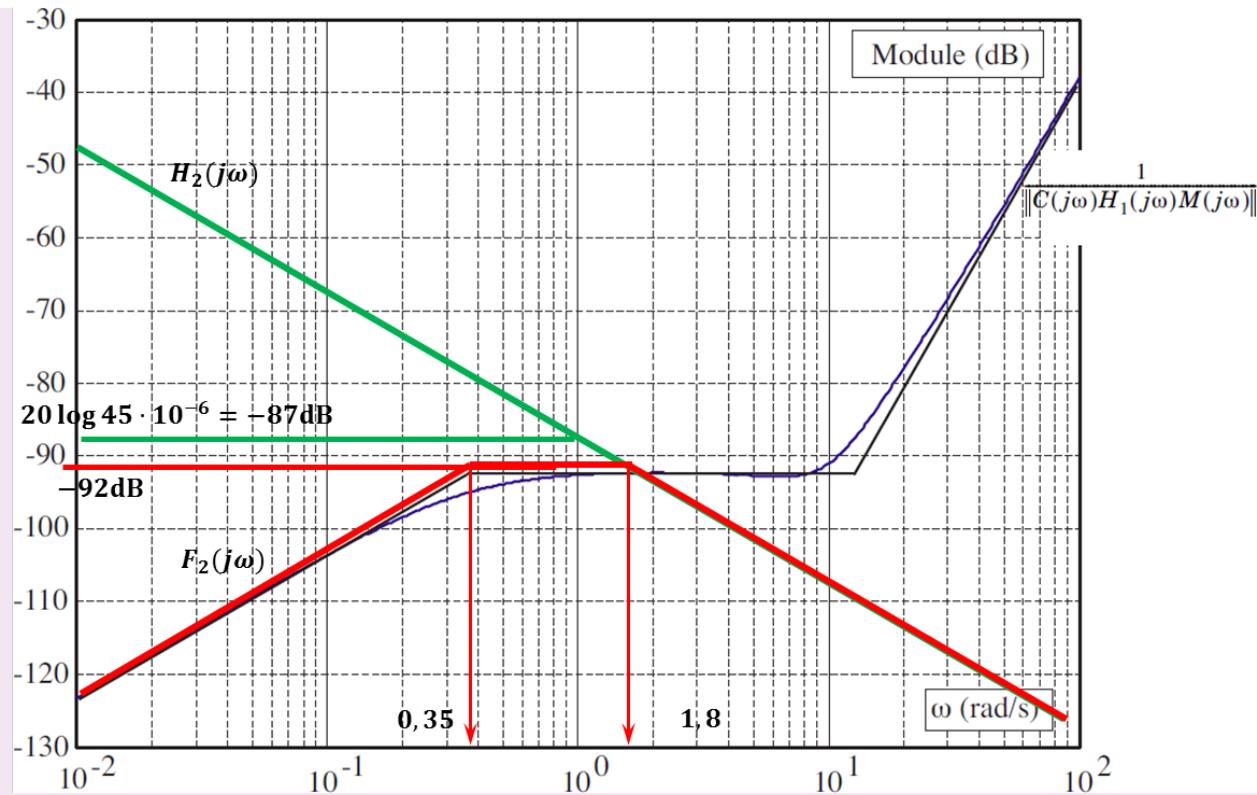
On peut en conclure que  $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$ .

**Question 12** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|}$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $\|H_2(j\omega)\|$ .



**Question 13** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $\|F_2(j\omega)\|$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

**Correction**



En analysant les brisures de  $F_2$ , on peut proposer la fonction de transfert suivante :  $F_2 = -\frac{Kp}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$

avec  $\tau_1 = \frac{1}{0,35} \simeq 2,9 \text{ s}$ ,  $\tau_2 = \frac{1}{1,8} \simeq 0,6 \text{ s}$ . Avec cette proposition, en basse fréquence, seul le déivateur existe, on a donc  $20 \log K \omega = 20 \log 0,01 K = -123$  soit  $K = 100 \times 10^{-123/20} \simeq 7 \cdot 10^{-5}$ .

Au final,  $F_2 = -\frac{7 \cdot 10^{-5} p}{(1+2,9p)(1+0,6p)}$ .

**Question 14** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

#### Correction

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux pôles :

$$\begin{cases} p_1 = -0,35 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

Le pôle  $p_2$  étant caractérisé par une dynamique relativement rapide par rapport à celle de  $p_1$ , on va pouvoir le négliger pour l'étude de la réponse temporelle. Soit la fonction approchée :

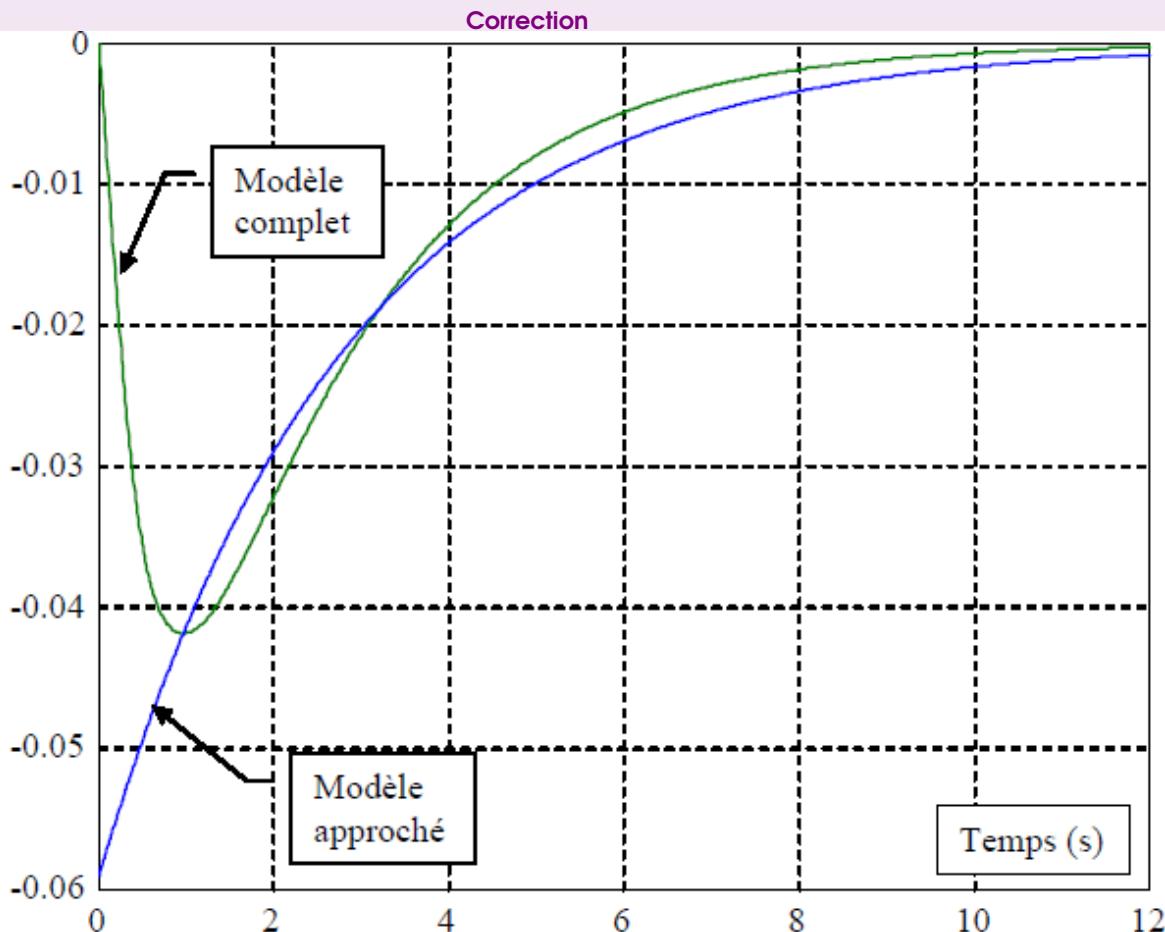
$$F_2(p) = -\frac{\frac{p}{12100}}{(1+2,8p)}$$

**Question 15** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{ext} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

**Correction**

La réponse à un échelon de perturbation est donnée sur la figure suivante, c'est la réponse typique d'une fonction du 1<sup>er</sup> ordre en partant d'une condition non nulle ( $v_1 = 0,05$ ) avec une entrée nulle. Le temps de réponse est alors de  $t_r = 3T = 8,4$  s.

**Question 16** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).



Calcul exact du temps de réponse

$$v_1(t_r) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t_r/T} = -0,05 \cdot \frac{K_2}{T} F_0 \Rightarrow t_r = T \cdot \ln(1/0,05) = 3T$$

**Retour sur le cahier des charges**

**Question 17** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

- Le temps de réponse de 8,4 s. est inférieur au temps de réponse de 9 s. demandé. En conséquence on peut conclure que le cahier des charges est satisfait au regard de cette contrainte.
- Le régulateur comportant une action intégrale (donc avant le point d'entrée de la perturbation) l'erreur statique est nulle comme montré sur la réponse temporelle.

**Correction**