Application 01 – Corrigé

Application

Savoirs et compétences :

- ...

Mise en situation

Objectif Valider Req 1.1.1.

Le moteur à courant continu

Modélisation de l'asservissement en vitesse

Question 1 *Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour ? Comment déterminer la valeur du gain K_{Adapt} ?*

Correction Il s'agit de réaliser un asservissement en fréquence de rotation. On pourrait utiliser une génératrice tachymétrique.

Afin d'avoir un asservissement précis ($\varepsilon(p)=0$ lorsque $\Omega_c(p)=\Omega(p)$), on prend $K_{\text{Adapt}}=K_{\text{Capt}}$.

Hypothèse 1 : on considère que $C_r(p)=0$ et $\Omega_c(p)\neq 0$.

Question 2 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_m(p)=(\Omega_m(p))/U(p)$ puis la fonction de transfert en boucle fermée $H_1(p)=(\Omega_m(p))/(\Omega_C(p))$. On considère que $C(p)=K_P$, K_P étant constant. Mettre $H_1(p)$ sous la forme $K_1/(1+\tau_1 p)$ où on explicitera les valeurs de K_1 et τ_1.*

Correction

$$H_m(p)=\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}=\frac{\dfrac{K}{RI_{\text{eq}}p}}{1+\dfrac{K^2}{RI_{\text{eq}}p}}=\frac{K}{RI_{\text{eq}}p+K^2}=\frac{1/K}{1+\dfrac{RI_{\text{eq}}}{K^2}p}$$

$$H_1(p)=\frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}=K_{\text{Adapt}}\frac{\dfrac{K}{RI_{\text{eq}}p+K^2}C(p)}{1+\dfrac{K}{RI_{\text{eq}}p+K^2}C(p)K_{\text{Capt}}}=\frac{K_{\text{Adapt}}KC(p)}{RI_{\text{eq}}p+K^2+KC(p)K_{\text{Capt}}}$$

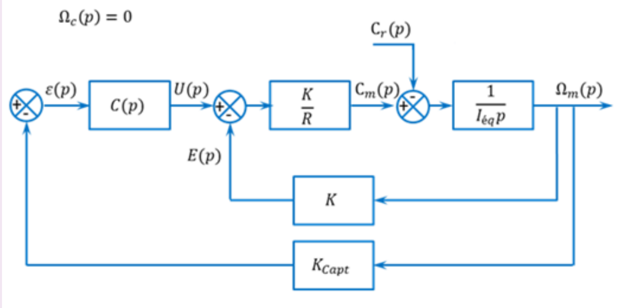
$$H_1(p)=\frac{K_{\text{Adapt}}KK_P}{RI_{\text{eq}}p+K^2+KK_PK_{\text{Capt}}}=\frac{\dfrac{K_{\text{Adapt}}K_P}{K+K_pK_{\text{Capt}}}}{\dfrac{RI_{\text{eq}}}{K^2+KK_PK_{\text{Capt}}}p+1}=\frac{K_1}{1+\tau_1 p}$$

Soit par identification : $K_1=\dfrac{K_{\text{Adapt}}K_P}{K+K_PK_{\text{Capt}}}$ et $\tau_1=\dfrac{RI_{\text{eq}}}{K^2+KK_PK_{\text{Capt}}}$.

Hypothèse 2 : on considère que $\Omega_C(p)=0$ et que $C_r(p)\neq 0$.

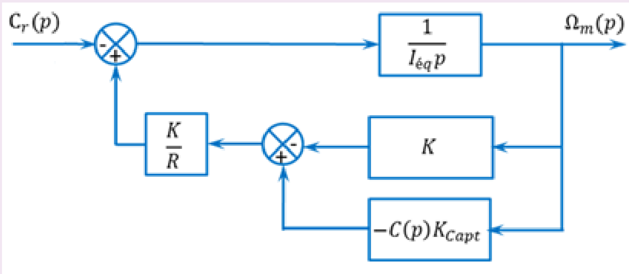
Question 3 *Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.*

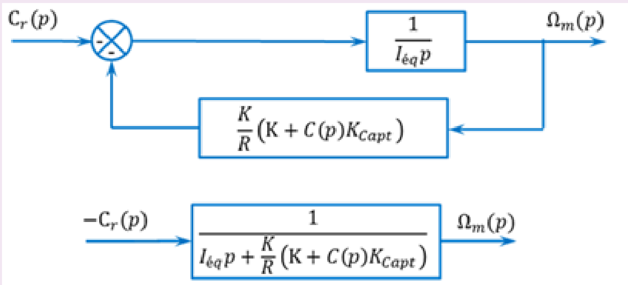
Correction



Question 4 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$. On considère que $C(p) = K_P$, K_P étant constante. Mettre $H_2(p)$ sous la forme $-K_2/(1+\tau_2 p)$ où on explicitera les valeurs de K_2 et τ_2.*

Correction





On a donc : $H_2(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = -\dfrac{1}{\dfrac{K}{R}\left(K + K_P K_{\text{Capt}}\right) + I_{\text{eq}} p} = -\dfrac{\dfrac{R}{K\left(K + K_P K_{\text{Capt}}\right)}}{1 + \dfrac{R I_{\text{eq}}}{K\left(K + K_P K_{\text{Capt}}\right)} p} = -\dfrac{K_2}{1+\tau_2 p}$ Soit par identification : $K_2 = \dfrac{R}{K\left(K + K_P K_{\text{Capt}}\right)}$ et $\tau_2 = \tau_1 = \dfrac{R I_{\text{eq}}}{K(K + K_P K_{\text{Capt}})}$.

Hypothèse 3 : on considère maintenant que $\Omega_C(p) \neq 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

Question 5 *En utilisant le théorème de superposition, exprimer $\Omega_m(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $\Omega_c(p)$ et $C_r(p)$.*

Correction Par superposition on a : $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p)$.

À une fréquence de rotation de 350 min^{-1} en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de 1928 min^{-1} soit environ 202 rad/s. Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à 990 Nm. On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude 202 rad/s et à un couple résistant de 990 Nm.

Question 6 *Après avoir exprimé la consigne $\Omega_c(p)$ puis le couple résistant $C_r(p)$, calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.*

Correction On a, pour des échelons de consignes : $\Omega_c(p) = \dfrac{\Omega_{c0}}{p}$ avec $\Omega_{c0} = 202$ rad/s et $C_r(p) = \dfrac{C_{r0}}{p}$ avec $C_{r0} =$ 990 Nm.

L'écart statique ε_S s'écrit en sortie du comparateur :

$\varepsilon_S = \lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}\Omega_m(p)) = \lim\limits_{p\to 0}\left(p(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_1(p)\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_2(p)C_r(p))\right)$

$\varepsilon_S = \lim_{p\to 0} p\left(K_{\text{Adapt}}\dfrac{\Omega_{c0}}{p} - K_{\text{Capt}}K_1\dfrac{\Omega_{c0}}{p} + K_{\text{Capt}}K_2\dfrac{C_{r0}}{p}\right)$

$\varepsilon_S = \left(K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}}K_1\right)\Omega_{c0} + K_{\text{Capt}}K_2C_{r0}$

L'écart statique ne pourra pas être nul (exigence 1.1.1 du cahier des charges non vérifiée).

Question 7 *Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain K_I de la forme $C(p) = K_I/p$?*

Correction En choisissant $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$, l'écart statique pourra être réduit à condition d'avoir un gain K_P important $K_1 \to 1$ et $K_2 \to 0$, mais pas trop pour ne pas rendre le système instable. Avec un correcteur intégral, le système devient de classe 1 et l'écart statique est annulé.

Question 8 *En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?*

Correction En reprenant le raisonnement de la question **, et en remplaçant $C(p)$ par K_I/p dans les expressions de $H_1(p)$ et $H_2(p)$: $\lim\limits_{p\to 0} H_1(p) = \lim\limits_{p\to 0} K_{\text{Adapt}}\dfrac{\dfrac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2}\dfrac{K_I}{p}}{1 + \dfrac{K}{RI_{\text{eq}}p + K^2}\dfrac{K_I}{p}K_{\text{Capt}}} = \dfrac{K_{\text{Adapt}}}{K_{\text{Capt}}}$.

$\lim\limits_{p\to 0} H_2(p) = \lim\limits_{p\to 0} -\dfrac{1}{\dfrac{K}{R}\left(K + \dfrac{K_I}{p}K_{\text{Capt}}\right) + I_{\text{eq}}p} = 0$

$\varepsilon_S = \lim\limits_{p\to 0} p\left(K_{\text{Adapt}}\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_1(p)\Omega_c(p) - K_{\text{Capt}}H_2(p)C_r(p)\right)$

$\varepsilon_S = \lim\limits_{p\to 0} K_{\text{Adapt}}\Omega_{c0} - K_{\text{Capt}}K_{\text{Adapt}}/K_{\text{Capt}}\Omega_{c0} - K_{\text{Capt}}0C_r0 = 0$

Dans ce cas, l'application d'un couple perturbateur n'a donc pas d'influence sur l'écart statique. La fréquence de rotation du rotor peut être temporairement impactée, mais au bout d'un laps de temps, l'écart statique tend vers 0. L'exigence 1.1.1 est donc vérifiée.

Application 02 – Corrigé

Application

Savoirs et compétences :

- ...

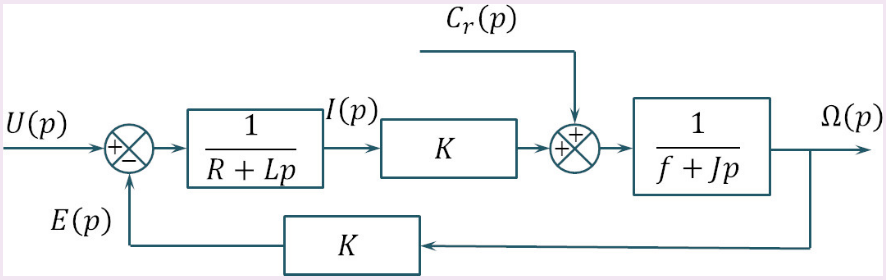
Modélisation par schéma-blocs

Méthode Dans le cas où vous ne savez pas comment démarrer, vous pouvez suivre la méthode suivante.
1. Identifier la grandeur physique d'entrée et la grandeur physique de sortie.
2. Lorsqu'une équation lie deux grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation.
3. Lorsqu'une équation lie trois grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation en utilisant un comparateur.
4. Relier les blocs en commençant par l'entrée. Inverser les blocs si nécessaire.

Modélisation du moteur à courant continu

Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*

Correction



Question 2 *Exprimer $\Omega(p)$ sous la forme $\Omega(p) = F_1(p)U(p) + F_2(p)C_r(p)$. Les fonctions de transfert F_1 F_2 seront exprimées sous forme canonique. Les constantes du système du second ordre seront explicitées.*

Correction Par superposition, on a : $\Omega_1(p)/U(p) = \dfrac{K\dfrac{1}{R+Lp}\dfrac{1}{Jp+f}}{1+K^2\dfrac{1}{R+Lp}\dfrac{1}{Jp+f}} = \dfrac{K}{(Jp+f)(Lp+R)+K^2}$.

Par ailleurs, $\Omega_2(p)/C_r(p) = \dfrac{\dfrac{1}{Jp+f}}{1+K^2\dfrac{1}{R+Lp}\dfrac{1}{Jp+f}} = \dfrac{Lp+R}{(Jp+f)(Lp+R)+K^2}$.

Au final, $\Omega(p) = \dfrac{K}{(Jp+f)(Lp+R)+K^2}U(p) + \dfrac{Lp+R}{(Jp+f)(Lp+R)+K^2}C_r(p)$.

On peut alors mettre F_1 sous forme canonique :

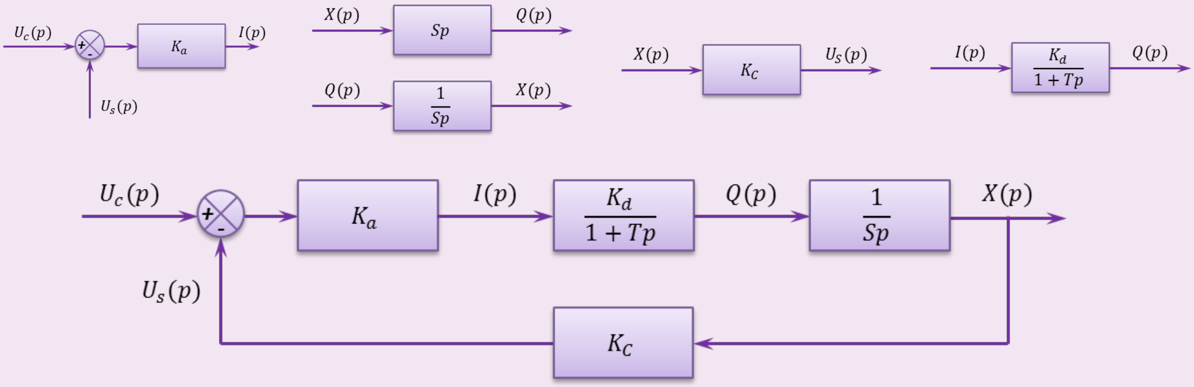
$$K_0 = \frac{K}{fR+K^2} \quad \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{RJ+Lf}{fR+K^2} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{LJ}{fR+K^2}.$$

Modélisation d'une servo-commande

Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*

Correction On a :

- $U_c(p) = \dfrac{1}{K_a} I(p) + U_s(p)$
- $Q(p) = SpX(p)$
- $U_S(p) = K_C \cdot X(p)$
- $F(p) = \dfrac{Q(p)}{I(p)} = \dfrac{K_d}{1+Tp}$

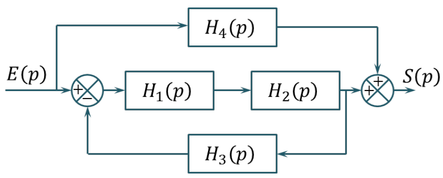


Question 2 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.*

Réduction de schéma-blocs

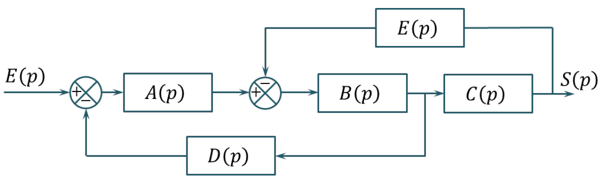
D'après ressources de V. Reydellet.

Question *Réduire les schéma-blocs suivants.*



Correction

- Boucle intérieure : $\dfrac{H_1 H_2}{1+H_1 H_2 H_3}$.
- $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = H_4(p) + \dfrac{H_1(p)H_2(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)}$.

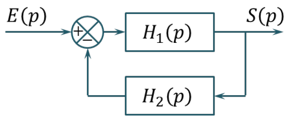


Correction

- On décale le point de prélèvement de droite vers la gauche (ce qui nécessite alors d'ajouter un bloc C dans la boucle de retour supérieure). La boucle intérieure peut donc être mise sous la forme : $\dfrac{B}{1+BCE}$.
- Réduction de la boucle totale : $C\dfrac{A\dfrac{B}{1+BCE}}{1+AD\dfrac{B}{1+BCE}} = \dfrac{ABC}{1+BCE+ABD}$.

Transformation de schéma-blocs

Question *Transformer le schéma-bloc suivant pour obtenir un schéma-blocs à retour unitaire.*



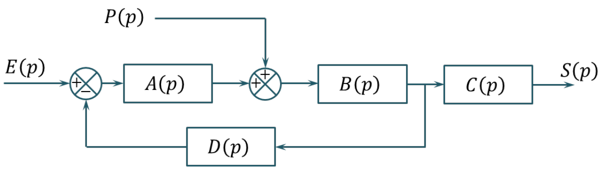
Correction

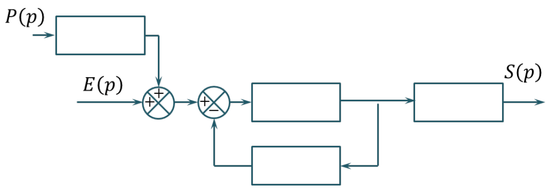
D'une part, on a $\dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{H_1(p)}{1+H_1(p)H_2(p)}$.

D'autre part, on prend un bloc $X_1(p)$ en série avec $X_2(p)$ « possédant » un retour unitaire. On a donc $\dfrac{S(p)}{E(p)} = X_1(p)\dfrac{X_2(p)}{1+X_2(p)}$.

On a donc $H_1 = X_1X_2$ et $X_2 = H_1H_2$; donc $X_1 = \dfrac{H_1}{X_2} = \dfrac{H_1}{H_1H_2} = \dfrac{1}{H_2}$.

Question *Modifier le schéma-blocs suivant pour obtenir la forme proposée. Déterminer ensuite l'expression de $S(p)$ en fonction de $E(p)$ et $P(p)$.*





TD 01 – Corrigé

Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec TSI 2017

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C4 : calcul symbolique ;*
- *Mod2.C7.SF1 : analyser ou établir le schéma-bloc du système ;*
- *Res2.C10 : précision des SLCI : erreur en régime permanent ;*
- *Res2.C10.SF1 : déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon ou en rampe (consigne ou perturbation).*

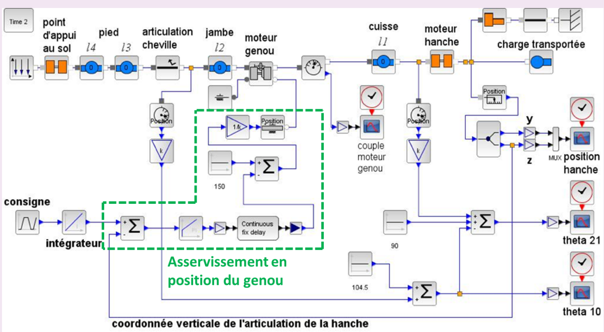
Mise en situation

Gestion du mouvement vertical

Objectif Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Question 1 *Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).*

Correction
Il s'agit d'un asservissement en position.



Question 2 *Exprimer $H_\Omega(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J, K_2 et p.*

Correction En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a : $H_\Omega(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \dfrac{C_\Omega(p)M_C(p)\dfrac{1}{Jp+f}}{1+C_\Omega(p)M_C(p)\dfrac{1}{Jp+f}}$. En conséquences : $H_\Omega(p) = \dfrac{C_\Omega K_2}{Jp+C_\Omega K_2} = \dfrac{1}{\dfrac{Jp}{C_\Omega K_2}+1}$.

Question 3 *Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p.*

Correction D'une part, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$. D'autre part, $\theta_m(p) = H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}\varepsilon(p)$. Par suite, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}\varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)\left(1+H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}\right) = \theta_{mC}(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = \dfrac{\theta_{mC}(p)}{1+H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}}$.

Question 4 *Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v. Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.*

Correction On a :

- $\varepsilon_p = \lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{1+H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}}\dfrac{1}{p}$
  $= \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{Jp}{C_\Omega K_2}+1}\dfrac{K_1}{p}} = 0$ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1) ;
- $\varepsilon_v = \lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{1+H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}}\dfrac{1}{p^2}$
  $= \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{Jp}{C_\Omega K_2}+1}\dfrac{K_1}{p}}\dfrac{1}{p} = \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{1}{p+\dfrac{1}{\dfrac{Jp}{C_\Omega K_2}+1}K_1} = \dfrac{1}{K_1}$ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et de gain K_1 en BO).

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut $\dfrac{1}{K_1} < 0,01$ et $K_1 > 100$.

Question 5 *Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.*

Correction En raisonnant de même, on a : $\varepsilon_a = \lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{1+H_\Omega(p)\dfrac{K_1}{p}}\dfrac{1}{p^3} =$

$$\lim_{p\to 0} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{Jp}{C_\Omega K_2}+1}\dfrac{K_1}{p}}\dfrac{1}{p^2} = 0 = \lim_{p\to 0}\dfrac{1}{p^2+\dfrac{p}{\dfrac{Jp}{C_\Omega K_2}+1}K_1} = \infty$$

(ce qui était prévisible pour un système de classe 1).

Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

Question 6 *Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T, K_1, K_3 et p.*

Correction En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p)=\theta_{mC}(p)-\theta_m(p)$;
- $\Omega_{mC}(p)=K_3 p\theta_{mC}(p)+K_1\varepsilon(p)$;
- $\theta_m(p)=\Omega_{mC}(p)\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{1+Tp}$.

On a donc : $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p)-\Omega_{mC}(p)\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{1+Tp} = \theta_{mC}(p)-\left(K_3 p\theta_{mC}(p)+K_1\varepsilon(p)\right)\dfrac{1}{p\left(1+Tp\right)} = \theta_{mC}(p)-\dfrac{K_3 p}{p\left(1+Tp\right)}\theta_{mC}(p)-\dfrac{K_1}{p\left(1+Tp\right)}\varepsilon(p)$.

On a alors $\varepsilon(p)\left(1+\dfrac{K_1}{p\left(1+Tp\right)}\right)=\theta_{mC}(p)\left(1-\dfrac{K_3}{1+Tp}\right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon(p)\dfrac{p\left(1+Tp\right)+K_1}{p\left(1+Tp\right)}=\theta_{mC}(p)\dfrac{1+Tp-K_3}{1+Tp}$.

Enfin, $\varepsilon(p)=\theta_{mC}(p)\dfrac{p\left(1+Tp-K_3\right)}{p\left(1+Tp\right)+K_1}$.

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

Question 7 *Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.*

Correction $\varepsilon_v = \lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{p\left(1+Tp-K_3\right)}{p\left(1+Tp\right)+K_1}\dfrac{1}{p^2} = \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{\left(1+Tp-K_3\right)}{p\left(1+Tp\right)+K_1} = \dfrac{1-K_3}{K_1}$.

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir $K_3=1$.

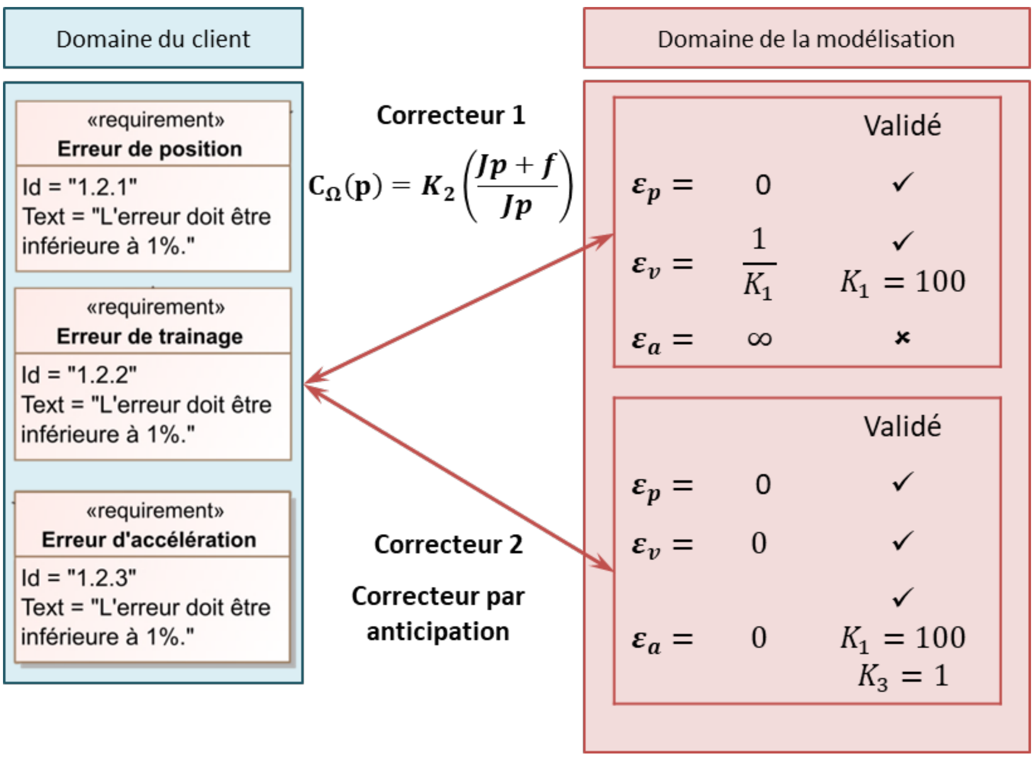
Question 8 *Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.*

On a :

Correction $\varepsilon_a = \lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{p\left(1+Tp-K_3\right)}{p\left(1+Tp\right)+K_1}\dfrac{1}{p^3} = \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{\left(1+Tp-K_3\right)}{p\left(1+Tp\right)+K_1}\dfrac{1}{p}$. En prenant $K_3=1$ et $K_1=100$, on obtient : $\varepsilon_a = \dfrac{T}{p\left(1+Tp\right)+100} = \dfrac{33\times 10^{-3}}{100}$. L'erreur est donc de 33×10^{-5}. Le cahier des charges est donc validé.

Synthèse

Question 9 *En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.*



Application 01 – Corrigé

Robot de maraîchage Oz 440

CCP – MP – Florestan Mathurin

Savoirs et compétences :

- ...

Présentation du système

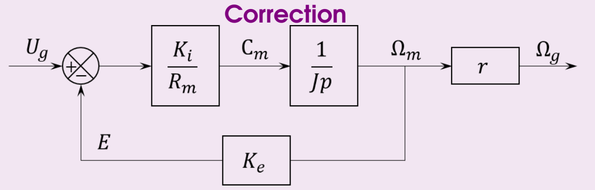
Détermination de la fonction de transfert H 1 (p) du groupe propulsion

Question 1 *Appliquer la transformée de Laplace sur les différentes équations du modèle de connaissance.*

Correction $\Omega_g(p) = r\Omega_m(p)$, $E_m(p) = K_e\Omega_m(p)$, $Jp\Omega_m(p) = C_m(p)$, $U_g(p) = R_m I_m(p) + E_m(p)$, $C_m(p) = K_i I_m(p)$.

Question 2 *Déduire des questions précédentes le schéma-bloc correspondant au groupe propulsion gauche seul.*

Correction



Question 3 *Déterminer l'expression de la fonction de transfert du système en boucle fermée du groupe propulsion gauche $H_g(p) = \dfrac{\Omega_g(p)}{U_g(p)}$ en fonction de r, K_i, K_e, J et R_m. Montrer que cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme d'un système du premier ordre $H_g(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$ où K et τ sont 2 constantes à déterminer. Donner les unités de K et τ.*

Correction

$$H_g(p) = \frac{\Omega_g(p)}{U_g(p)} = r\frac{\dfrac{K_i}{R_m Jp}}{1+\dfrac{K_i K_e}{R_m Jp}} = r\frac{K_i}{R_m Jp + K_i K_e}$$

$$= \frac{\dfrac{r}{K_e}}{\dfrac{R_m J}{K_i K_e}p+1}.$$

On a donc $K = \dfrac{r}{K_e}$ en $\text{rad}\,\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}$ et $\tau = \dfrac{R_m J}{K_i K_e}$ en s.

Question 4 *Déterminer par identification les expressions des fonctions de transfert $H_g(p) = \dfrac{\Omega_g(p)}{U_g(p)}$ et $H_d(p) = \dfrac{\Omega_d(p)}{U_d(p)}$. Donner les valeurs numériques des coefficients de ces fonctions de transfert.*

Correction Par identification, on obtient $H_g(p) = H_d(p) = \dfrac{6,4}{1+0,3p}$.

Question 5 *À l'aide des relations ci-dessus, déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du groupe propulsion $H_1(p) = \dfrac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$. Montrer que cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme d'un système du premier ordre.*

Correction On a $\Delta\Omega(p) = \Omega_d(p) - \Omega_g(p) = H_d(p)U_d(p) - H_g(p)U_g(p)$ avec $H_g(p) = H_d(p)$ on a $\Delta\Omega(p) = H_d(p)\Delta U(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$.

Détermination de la fonction de transfert $H_2(p)$ du suivi de la trajectoire

Question 6 *Appliquer la transformée de Laplace sur les 2 relations cinématiques proposées.*

Correction On a $R\Delta\Omega(p) = 2ep\Phi(p)$ et $pY(p) = V\Phi(p)$.

Question 7 *En déduire l'expression des fonctions de transfert $H_{21}(p)$, $H_{22}(p)$ puis $H_2(p)$.*

Correction On a donc $H_{21}(p) = \dfrac{\Phi(p)}{\Delta\Omega(p)} = \dfrac{R}{2ep}$ et $H_{22}(p) = \dfrac{Y(p)}{\Phi(p)} = \dfrac{V}{p}$ et $H_2(p) = \dfrac{RV}{2ep^2}$.

Détermination de la fonction de transfert $H_3(p)$ correspondant au « capteur de distance »

Question 8 *Réaliser un schéma en vue de dessus permettant de visualiser le robot positionné dans l'allée avec ses 2 capteurs latéraux. Indiquer sur ce schéma les distances entre les capteurs et les rangées de culture.*

Correction

Question 9 *Quelle est la valeur de la tension u à 0,1 V près ? Quelle est la tension $u_{capt\,droit}$ lorsque le robot est décalé de $y = +5$ cm suivant l'axe $\overrightarrow{y}$ entre ces 2 rangs de culture ? Quelle est la tension $u_{capt\,gauche}$ à ce même instant ?*

Correction La largeur du rang étant de 70 cm et les capteurs étant positionnés sur un rayon de 10 cm, on a 25 cm entre le rang et le capteur. En lisant la courbe cela correspond à une tension mesurée de 1,1 V environ.

Si le robot est décalé vers la droite de 5 cm, le capteur de droite sera 20 cm et celui de gauche à 30 cm. Les grandeurs mesurées seront donc de 1,25 V et 0,9 V.

Question 10 *En déduire le gain K_c du bloc « capteur de distance » autour de ce point de fonctionnement et préciser son unité.*

Correction Autour de ce point de fonctionnement, on a $K_c = \dfrac{1,25-0,9}{5\times 10^{-2}} = 7\,\mathrm{V\,m^{-1}}$.

Réglage du gain d'adaptation

Question 11 *Comment choisir le gain d'adaptation K_a pour que la position $y(t)$ en sortie de l'asservissement soit correctement asservie sur la position de consigne $y_{consigne}(t)$ (on cherche dans ce cas à obtenir un écart $\varepsilon(p)$ nul lorsque la consigne et la sortie sont égales).*

Correction On prend $K_a = K_c$.

On considère dans un premier temps que le correcteur est un correcteur proportionnel. On note donc la la fonction de transfert de ce dernier $C(p) = K_p$.

Question 12 *Déterminer la fonction de transfert boucle ouverte $FTBO(p) = \dfrac{U_{mes}(p)}{\varepsilon(p)}$. Donner la classe et l'ordre de cette fonction de transfert.*

Correction La FTBO est donnée par $\mathrm{FTBO}(p) = K_c \dfrac{RV}{2ep^2}\dfrac{K}{1+\tau p}$ qui est une fonction transfert d'ordre 3 et de classe 2.

Analyse des performances obtenues.

Question 13 *Déterminer si ce réglage semble adapté vis-à-vis des exigences du cahier des charges. Justifier la réponse en laissant notamment apparaître les tracés utiles sur les courbes.*

Correction La seule exigence est sur le temps de réponse (1s). L'exigence est satisfaite. (Tracer à faire).

Application 02 – Corrigé

Freinage d'Airbus

David Violeau

Savoirs et compétences :

- ...

Présentation du système

Modélisation du système de freinage

On souhaite définir un modèle pour l'asservissement en décélération. Pour cela, on propose de déterminer une fonction de transfert pour tous les constituants.

Modélisation de la servovalve

Question 1 *Que peut-on dire de cette caractéristique sur tout le domaine de variation de $i(t)$? Sachant que θ est très petit (varie autour de 0), on utilise la relation suivante $\theta(t)=K_1 i(t)$. Déterminer la valeur de K_1 à partir de la courbe.*

Correction Cette courbe est non linéaire sur tout le domaine de variation de i. Comme θ est très petit, on peut linéariser la courbe au voisinage de 0. La valeur K_1 correspond donc à la pente de la courbe. En conséquence, $K_1 = 1\, rad \cdot A^{-1}$.

Question 2 *Calculer la fonction de transfert $H_t(p)=\dfrac{Z(p)}{\Delta P(p)}$ où $Z(p)$ et $\Delta P(p)$ sont les transformées de Laplace de $z(t)$ et $\Delta P(t)$ en précisant l'hypothèse retenue.*

Correction En se plaçant dans les conditions de Heaviside, on peut transformer l'équation dans le domaine de Laplace. On a donc :

$$m_t p^2 Z(p) = -2k_t Z(p) + 2S_t \Delta P(p) - p c_t Z(p)$$

Ainsi,

$$H_t(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)} = \frac{2S_t}{m_t p^2 + c_t p + 2k_t}$$

Question 3 *Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et donner son ordre.*

Correction En factorisant par $2k_t$ on obtient :

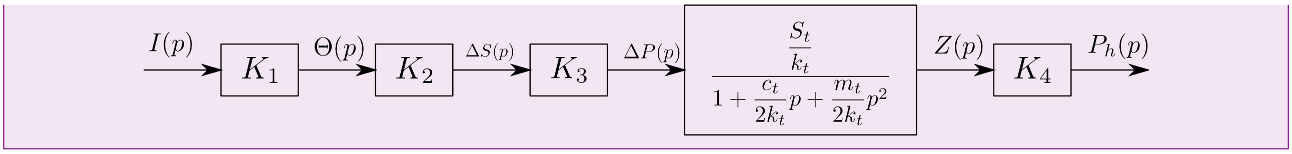
$$H_t(p) = \frac{\dfrac{S_t}{k_t}}{1+\dfrac{c_t}{2k_t}p + \dfrac{m_t}{2k_t}p^2}$$

On admet pour finir que la pression d'utilisation $P_h(t)$ du fluide est proportionnelle au déplacement $z(t)$ du tiroir : $P_h(t) = K_4 z(t)$.

Question 4 *À partir de toutes les informations précédentes (modélisation armature, buse/palette, tiroir...), recopier et compléter le schéma-bloc de la servovalve donné ci-dessous, en précisant les fonctions de transfert de chaque bloc (utiliser les notations algébriques).*

Correction On utilise les équation suivantes : $\theta(t) = K_1 i(t) \Leftrightarrow \Theta(p) = K_1 I(p)$, $\Delta S(t) = K_2 \theta(t) \Leftrightarrow \Delta S(p) = K_2 \Theta(p)$, $\Delta P(t) = K_3 \Delta S(t) \Leftrightarrow \Delta P(p) = K_3 \Delta S(p)$, $P_h(t) = K_4 z(t) \Leftrightarrow P_h(p) = K_4 Z(p)$.

On en déduit ainsi le schéma bloc suivant :



Question 5 *En déduire la fonction de transfert* $S_v(p)=\dfrac{P_h(p)}{I(p)}$ *de la servovalve.*

Correction On en déduit directement :

$$S_v(p)=\frac{P_h(p)}{I(p)}=\frac{K_1K_2K_3K_4\dfrac{S_t}{k_t}}{1+\dfrac{c_t}{2k_t}+\dfrac{m_t}{2k_t}p^2}$$

Question 6 *Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :*

$$S_v(p)=\frac{P_h(p)}{I(p)}=\frac{K_{sv}}{1+\dfrac{2\xi p}{\omega_0}+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

où on donnera les expressions littérales de K_{sv}*,* ξ *et* ω_0*.*

Correction Par identification, on déduit de la question précédente :
$K_{SV}=K_1K_2K_3K_4\dfrac{S_t}{k_t}$, $\omega_0=\sqrt{\dfrac{2k_t}{m_t}}$, $\xi=\dfrac{c_t}{2\sqrt{2k_tm_t}}$.

On souhaite que la réponse à une entrée $i(t)$ de type échelon de valeur i_0 soit la plus rapide possible **sans toutefois produire de dépassement.**

Question 7 *A quelle valeur de* ξ *correspond cette spécification ?*

Correction Pour ne pas avoir de dépassement, il est nécessaire que $\xi\geq 1$. Le système est le plus rapide lorsque $\xi=1$.

Question 8 *Démontrer que cette condition ne peut être satisfaite que si* $k_t=\dfrac{c_t^2}{8m_t}$.

$$\xi=1\Leftrightarrow c_t=2\sqrt{2k_tm_t}\Leftrightarrow k_t=\frac{c_t^2}{8m_t}$$

Question 9 *Montrer alors que la fonction de transfert de la servovalve peut se mettre sous la forme :*

$$S_v(p)=\frac{P_h(p)}{I(p)}=\frac{K_{sv}}{\left(1+T_{sv}p\right)^2}$$

on donnera l'expression littérale de T_{sv}*.*

Correction Lorsque $\xi=1$, le discriminant du dénominateur de la fonction $S_v(p)$ est nul. En conséquence ce dénominateur possède une racine double. En utilisant la formulation proposée, cette racine est égale à $\dfrac{-1}{T_{sv}}$. En développant la fonction proposée, on peut donc identifier T_sv : $\left(1+T_{sv}p\right)^2=1+\dfrac{2p}{\omega_0}+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}\Leftrightarrow 1+2T_{sv}p+T_{sv}^2p^2$ $=1+\dfrac{2p}{\omega_0}+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}$

On a donc : $T_{sv}=\dfrac{1}{\omega_0}=\sqrt{\dfrac{m_t}{2k_t}}=\sqrt{\dfrac{m_t}{2\dfrac{c_t^2}{8m_t}}}=2\dfrac{m_t}{c_t}$

Question 10 *Déterminer la réponse indicielle* $P_h(t)$ *pour une entrée échelon de valeur* $i(t)=i_0u(t)$*.*

On rappelle que $\mathscr{L}\left(t\,e^{-at}\,u(t)\right)=\dfrac{1}{(p+a)^2}$.

Correction On soumet le système à une entre échelon. En conséquence, on a : $I(p)=\dfrac{i_0}{p}$.

On a alors $P_h(p)=\dfrac{i_0}{p}\dfrac{K_{sv}}{(1+T_{sv}p)^2}$.

En réalisant la décomposition en éléments simples, on a : $P_h(p)=\dfrac{\alpha}{p}+\dfrac{\beta}{1+T_{sv}p}+\dfrac{\gamma}{(1+T_{sv}p)^2}$.

En calculant $P_h(p)p$ et en posant $p=0$, on obtient $\alpha=K_{sv}i_0$.

En calculant $P_h(p)(1+T_{sv}p)^2$ et en posant $p=-\dfrac{1}{T_{sv}}$, on obtient $\alpha=K_{sv}i_0$. On obtient alors $\gamma=-K_{sv}T_{sv}i_0$.

Enfin, en calculant $\lim\limits_{p\to+\infty} p P_h(p)$ on obtient $\beta=-K_{sv}T_{sv}i_0$.

Au final, on obtient : $P_h(p)=K_{sv}i_0\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{T_{sv}}{1+T_{sv}p}-\dfrac{T_{sv}}{(1+T_{sv}p)^2}\right)=K_{sv}i_0\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{T_{sv}}+p}-\dfrac{\dfrac{1}{T_{sv}}}{\left(\dfrac{1}{T_{sv}}+p\right)^2}\right)$

En repassant dans le domaine temporel, on obtient : $P_h(t)=K_{sv}i_0\left(1-e^{-\dfrac{-t}{T_{sv}}}-\dfrac{t}{T_{sv}}e^{-\dfrac{-t}{T_{sv}}}\right)u(t)$

Modélisation de l'accéléromètre

Principe de l'accéléromètre

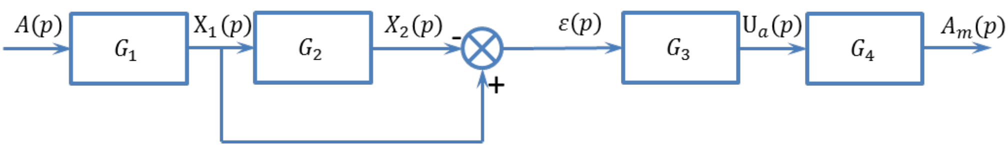
Question 11 *Déterminer les transformées de Laplace des expressions (1) à (5).*

Correction On obtient directement : $\varepsilon(p)=X_1(p)-X_2(p)$, $A(p)=p^2X_1(p)$, $m_a p^2 X_2(p)=c_a\left(pX_1(p)-pX_2(p)\right)+k_a\left(X_1(p)-X_2(p)\right)$, $U_a(p)=K_p\varepsilon(p)$, $A_m(p)=K_{CAN}U_a(p)$.

Question 12 *En déduire les transmittances G_i du schéma bloc ci-après.*

Correction On a : $G_1(p)=\dfrac{X_1(p)}{A(p)}=\dfrac{1}{p^2}$.

D'après la troisième relation, on a : $X_2(p)\left(m_a p^2+c_a p+k_a\right)=X_1(p)\left(c_a p+k_a\right)$ et donc $G_2(p)=\dfrac{X_2(p)}{X_1(p)}=\dfrac{c_a p+k_a}{m_a p^2+c_a p+k_a}$, $G_3(p)=\dfrac{U_a(p)}{\varepsilon(p)}=K_p$ et $G_4(p)=\dfrac{A_m(p)}{U_a(p)}=K_{CAN}$.



Question 13 *En déduire la fonction de transfert $\dfrac{A_m(p)}{A(p)}$ et montrer quelle peut se mettre sous la forme :*

$$\frac{A_m(p)}{A(p)}=\frac{K_{acc}}{1+2\dfrac{\xi_a p}{\omega_a}+\dfrac{p^2}{\omega_a^2}}$$

Donner les expressions de K_{acc}, ξ_a et ω_a.

Correction D'après le schéma bloc, on a :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)}=G_1(1-G_2)G_3G_4$$

D'où $\dfrac{A_m(p)}{A(p)} = \dfrac{1}{p^2}\left(1-\dfrac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a}\right) K_p K_{CAN} = \dfrac{K_p K_{CAN} m_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$

En mettant la fonction cette fonction de transfert sous la forme canonique : $\dfrac{A_m(p)}{A(p)} = \dfrac{\dfrac{K_p K_{CAN} m_a}{k_a}}{\dfrac{m_a}{k_a}p^2 + \dfrac{c_a}{k_a}p + 1}$.

Au final : $K_{acc} = \dfrac{K_p K_{CAN} m_a}{k_a}$, $\xi_a = \dfrac{c_a}{2\sqrt{k_a m_a}}$ et $\omega_a = \sqrt{\dfrac{k_a}{m_a}}$.

Question 14 La figure ci-dessous donne la réponse indicielle (entrée unitaire) de l'accéléromètre. Identifier les valeurs des constantes K_{acc}, ξ_a et ω_a (On pourra utiliser les abaques donnés en annexe).

Correction D'après le tracé de la réponse indicielle avec une entrée unitaire, on observe bien la réponse d'un système du second ordre (tangente horizontale et un dépassement).

L'entrée est unitaire et le système tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini. En conséquence on a $K_{acc} = 1$.

La valeur du premier dépassement est de 1,05. En conséquence le dépassement est de 5%. D'après l'abaque du dépassement relatif, on a donc : $\xi_a = 0,7$.

En utilisant l'abaque donnant $t_r\omega_0$ en fonction de ξ on lit que $t_r\omega_0 = 3$.

Enfin, en mesurant le temps de réponse à 5% on a $t_r \simeq 0,03 s$.. En conséquence : $\omega_a = \dfrac{3}{0,03} \simeq 100\ rad/s$.

Réponse acceptée : pour le temps de réponse à 5% $t_r = 0,045 s$.. En conséquence : $\omega_a = \dfrac{3}{0,045} \simeq 66\ rad/s$.

Étude de l'asservissement global

Question 15 *Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte. En déduire l'ordre, la classe et le gain de la FTBO(p).*

Correction Par définition, la FTBO s'exprime par la relation : $\mathrm{FTBO}(p) = H_{BSCU} \cdot H_{SC}(p) \cdot H_f(p) \cdot H_{acc}(p) = \dfrac{K_c K_{SV} K_f K_{acc}}{\left(1+T_{sv}p\right)^2 \left(1 + \dfrac{2\xi_a}{\omega_a}p + \dfrac{p^2}{\omega_a^2}\right)}$

Le gain de la FTBO est donné par le numérateur : $K_c K_{SV} K_f K_{acc}$.

L'ordre de la FTBO est donné par le monôme de plus haut degré : l'ordre est donc de 4 (lorsqu'on développe le système).

La classe du système est donné par le nombre d'intégrateur présent au dénominateur. Ici, p ne peut pas être mis en facteur du dénominateur. La classe est donc de 0.

Question 16 *Exprimer l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de $a_c(p)$ et de la FTBO(p).*

Correction D'après le schéma bloc, on a : $\varepsilon(p) = A_c(p) - A_m(p) = A_c(p) - \varepsilon(p)\cdot \mathrm{FTBO}(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)\left(1-\mathrm{FTBO}(p)\right) = A_c(p)$

On a donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{A_c(p)}{\left(1-\mathrm{FTBO}(p)\right)}$$

Question 17 *En déduire l'écart en régime permanent à une entrée de type échelon d'accélération $a_c(t) = a_c\, u(t)$. Que peut on dire de la performance de précision pour ce correcteur ?*

Correction L'écart est donné par la fonction ε. L'écart en régime permanent est donné par la limite de $\varepsilon(t)$ en l'infini. D'après le théorème de la valeur finale on a donc :

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} \frac{p A_c(p)}{\left(1-\mathrm{FTBO}(p)\right)}$$

L'entrée est un échelon d'accélération d'amplitude a_c. En conséquence : $A_c(p) = \dfrac{a_c}{p}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{a_c}{p}\dfrac{p}{1+\mathrm{FTBO}(p)}$.

Or, $\lim\limits_{p\to 0} \mathrm{FTBO}(p) = K_c K_{SV} K_f K_{acc}$.

En conséquence, $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \dfrac{a_c}{1+K_c K_{SV} K_f K_{acc}}$.

L'écart statique de ce système n'étant pas nul, le système n'est donc pas précis.

Question 18 *On utilise un correcteur (correcteur PI) plus évolué de fonction de transfert $H_{BSCU}(p) = K_i \dfrac{1+T_i p}{p}$, déterminer à nouveau l'écart en régime permanent et conclure sur ce choix de correcteur.*

Correction Il suffit dans un premier temps de calculer la limite quand p vers 0 de la nouvelle FTBO.

Cette FTBO vaut :

$$\text{FTBO}(p) = \dfrac{K_c K_{SV} K_f K_{acc}}{\left(1+T_{sv}p\right)^2\left(1+\dfrac{2\xi_a}{\omega_a}p+\dfrac{p^2}{\omega_a^2}\right)} \dfrac{K_i\left(1+T_i p\right)}{p}$$

On a alors :

$$\lim_{p\to+\infty} \text{FTBO}(p) = +\infty$$

En conséquence,

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \dfrac{1}{1+\infty} = 0$$

L'écart statique étant nul, le système est donc précis.

Application 02 – Corrigé

Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Concours Centrale Supelec PSI 2006 – Ressources UPSTI

Savoirs et compétences :

- ...

Mise en situation

Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

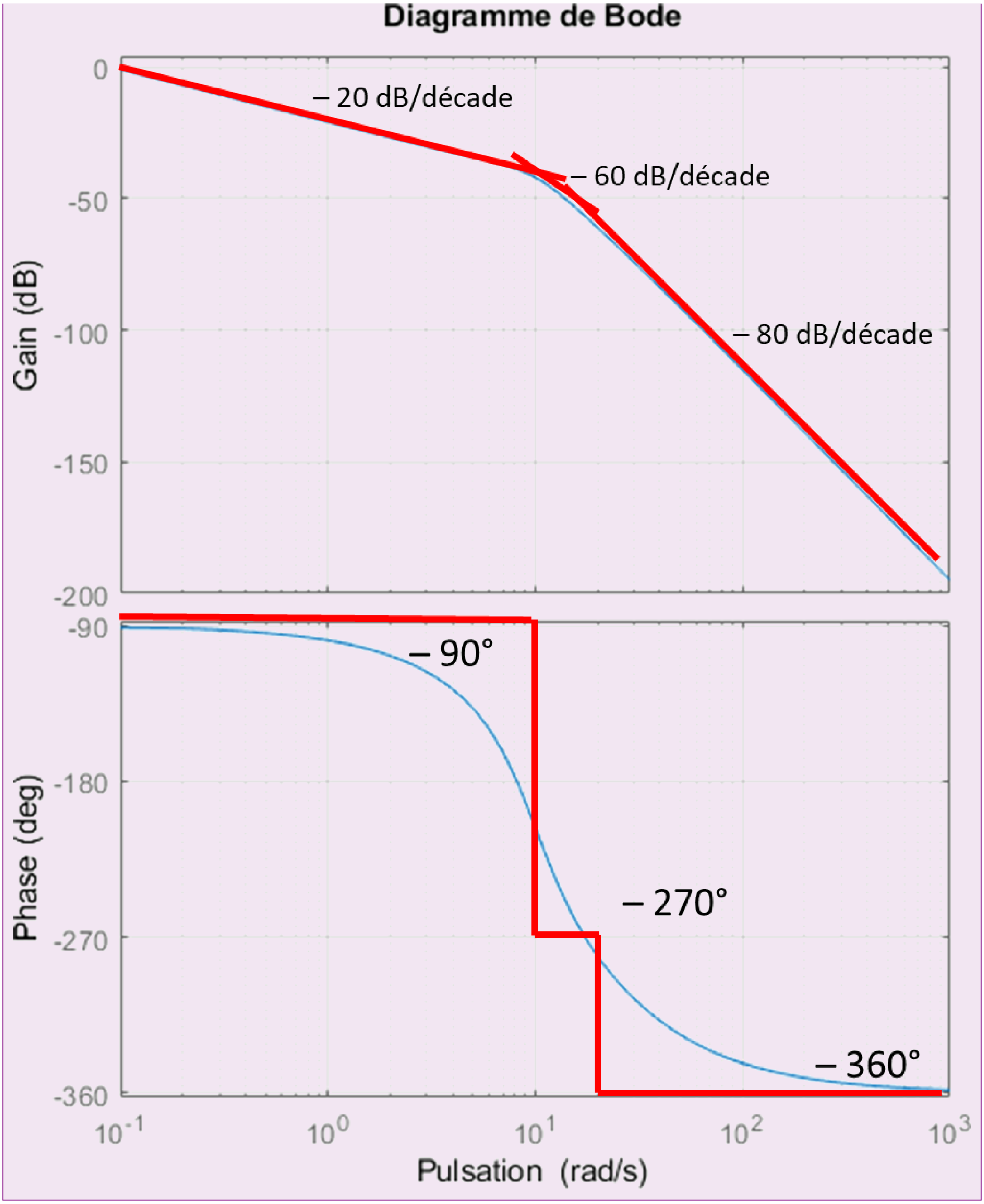
Question 1 *En prenant $C(p)=1$, compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.*

Correction On a pour $H_1(p)$, $\dfrac{1}{\omega_0^2}=0,01 \Leftrightarrow \omega_0=10$ et $2\dfrac{\xi}{\omega_0}=0,1$ soit $\xi=0,1\times 10/2=0,5$. Les pulsations caractéristiques de la FTBO sont donc $\omega_0=10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et $1/0,05=20\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Pour tracer un diagramme de Bode avec un intégrateur, il est nécessaire de définir un point pour définir la « hauteur » du tracé. Pour cela on prend un point pour lequel seul l'intégrateur et les constantes ont de l'effet. Ainsi, pour $\omega=0{,}1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, on a $\mathrm{FTBO}(p)\simeq\dfrac{2000\times 45\times 10^{-6}}{p}$. On a donc $20\log 0,09-20\log 0,1\simeq -0{,}92\,\mathrm{dB}$.

On peut dresser le tableau de variations de la FTBO puis tracer les asymptotes.

	$\omega\to 0$	$\omega=10$	$\omega=20$	$\omega\to\infty$
$\lVert H_1(j\omega)\rVert_{dB}$	$20\log 2000$	$-40\,dB/decade$	$-40\,dB/decade$	
$\lVert H_2(j\omega)\rVert_{dB}$	$-20\,dB/decade$	$-20\,dB/decade$	$-20\,dB/decade$	
$\lVert M(j\omega)\rVert_{dB}$	0	0	$-20\,dB/decade$	
$\boldsymbol{\lVert FTBO(j\omega)\rVert_{dB}}$	$\boldsymbol{-20\,dB/decade}$	$\boldsymbol{-60\,dB/decade}$	$\boldsymbol{-80\,dB/decade}$	
$\boldsymbol{Arg(FTBO(j\omega))}$	$\boldsymbol{-90°}$	$\boldsymbol{-270°}$	$\boldsymbol{-360°}$	



Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est : $C(p) = K_r\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)$.

Question 2 *Calculer la valeur que doit prendre l'argument de $C(p)$ afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure ω_c souhaitée.*

Méthode Si on note ω_c on définit la pulsation de coupure telle que $|\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0\,\text{dB}$. On peut alors définir la marge de phase par $M\varphi = \arg\left[\text{FTBO}(j\omega_c)\right] - (-180°)$.

Correction La pulsation de coupure souhaitée est $\omega_c \simeq 1\,\text{rad s}^{-1}$. On cherche donc K_r et T_i tels que $\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega_c\right)\right] - (-180°) = 60°$.

$$\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega\right)\right] = \arg\left[\underbrace{\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}}_{\to -5,7°\text{ qd }\omega=\omega_c}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+0,05p}}_{\to -2,8°\text{ qd }\omega=\omega_c}\cdot\underbrace{K_r}_{\to 0}\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\cdot\underbrace{\frac{45\cdot 10^{-6}}{p}}_{\to -90°}\right] = \arg\left[\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\right] - 98,5$$

> **R** Ci-dessus, ce sont les **arguments** que l'on évalue lorsque $\omega = \omega_c$. L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

$\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega\right)\right] = \arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] - 98,5$.

Pour respecter la marge souhaitée, il est donc nécessaire que $\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega_c\right)\right] - (-180) \geq 60$ Soit $\arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] - 98,5 + 180 \geq 60$ et $\arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] \geq -21,5°$.

Question 3 *Calculer la valeur minimale, T_{imin}, que l'on peut conférer à la constante T_i de l'action intégrale du régulateur.*

Correction On en déduit que pour $\omega = \omega_c = 1$, $\arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] \geq -21,5° \Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) - 90 \geq -21,5° \Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) \geq 68,5°$ et donc $\Rightarrow T_i \geq \tan(68,5) = 2,54\,\text{s}$.

> **!** **Attention** : à ce stade, la marge de phase serait de 60°**SI** la pulsation de coupure était de $1\,\text{rad s}^{-1}$ ce qui n'est pas encore le cas pour le moemnt.

Question 4 *En adoptant $T_i = T_{imin}$, déterminer alors le gain K_r du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)*

Méthode Il faut chercher K_r tel que $20\log||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0$.

Correction En raisonnant graphiquement à l'aide du diagramme en boucle ouverte non corrigé, on lit que le gain est d'environ -20 dB lorsque $\omega = 1$. La fonction de transfert du correcteur est $C(p) = K_r\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right) = K_r\dfrac{T_i p+1}{T_i p}$.

Le gain dB du correcteur doit donc être de 20 dB lorsque $\omega = 1$: $20\log K_r + 20\log\sqrt{T_i^2\omega^2+1} - 20\log T_i\omega = 20$ $\Leftrightarrow \log K_r + \log\sqrt{T_i^2+1} - \log T_i = 1 \Leftrightarrow \log K_r = 1 - \log\sqrt{T_i^2+1} + \log T_i$.

On a donc $K_r = 9,3$.

Anlaytiquement (à vérifier....) $20\log||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0 \Rightarrow ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 1$.

$$||\text{FTBO}\left(j\omega\right)|| = \left|\left|\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}\cdot\frac{1}{1+0,05p}\cdot K_r\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\cdot\frac{45\cdot 10^{-6}}{p}\right|\right|$$
$$= \left|\left|\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}\cdot\frac{1}{1+0,05p}\cdot K_r\frac{1+T_i p}{T_i p}\frac{45\cdot 10^{-6}}{p}\right|\right|$$
$$= \frac{K_r}{T_i\omega^2}90\cdot 10^{-3}\sqrt{1+T_i^2\omega^2}\left|\left|\frac{1}{1+0,1p+0,01p^2}\frac{1}{1+0,05p}\right|\right| = \frac{K_r}{T_i\omega^2}90\cdot 10^{-3}\frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{\sqrt{1+0,05^2\omega^2}}\frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2\omega^2)^2+0,1^2\omega^2}}$$
$$= \frac{K_r}{T_i}90\cdot 10^{-3}\frac{\sqrt{1+T_i^2}}{\sqrt{1+0,05^2}}\frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2)^2+0,1^2}}$$

Question 5 *Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)*

Méthode Soit ω_φ la pulsation telle que $\varphi\left(\omega_\varphi\right) = -180°$. La marge de gain s'exprime alors par $MG = -20\log||H\left(j\omega_\varphi\right)||$.

Correction **Approche analytique** On résout $\arg\left[\text{FTBO}(j\omega)\right] = -180°$

$$\arg\left[\text{FTBO}(j\omega)\right] = \arg\left[\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}\cdot\frac{1}{1+0,05p}\cdot K_r\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\cdot\frac{45\cdot 10^{-6}}{p}\right]$$

Approche graphique

Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

Question 6 *En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$, justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.*

Correction

Question 7 *Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.*

Correction

- $K_f = 1$: lorsque ω tend vers 0, le gain tend vers 0;
- $\omega_0 = 0,5$: valeur de la pulsation de résonance;
- $\tau_1 = \dfrac{1}{0,9} = 1{,}11\,\text{s}$;
- $\tau_2 = \dfrac{1}{7} = 0{,}14\,\text{s}$;
- $\xi < 0,7$ (résonance).

Question 8 *En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert $F(p)$ par la forme suivante : $F(p) = \dfrac{v_1(p)}{v_c(p)} = \dfrac{K_f(1+\tau_1 p)}{(1+\tau_2 p)^2}$.*

Correction

La pulsation propre ω_0 est relativement loin de la bande passante, en conséquence sa dynamique sera rapide vis-à-vis du zéro et du pôle double (pôles dominants). On adopte donc :

$$\boxed{F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{(1+3,3\,p)}{(1+1,66\,p)^2}}$$

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement : $f(t) = \left(\dfrac{\tau_2-\tau_1}{\tau_2^3}t + \dfrac{\tau_1}{\tau_2^2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_2}}u(t)$.

Question 9 *Calculer le temps du 1er maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif $v_c(t) = v_{c0}u(t)$ où $u(t)$ désigne l'échelon unité.*

Correction

Calcul du temps du 1er maximum

Le temps du 1er maximum est donné par $f(t_m)=0$, soit pour :

$$\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_2^3}t_m+\frac{\tau_1}{\tau_2^2}=0$$

On obtient donc :

$$\boxed{t_m=\frac{\tau_2\tau_1}{\tau_1-\tau_2}}$$

L'application numérique avec les valeurs adoptées conduit à $t_m=3,3$ s.

Calcul du dépassement

La réponse indicielle peut être obtenue par intégration de la réponse impulsionnelle, le dépassement étant donné par la valeur de la sortie pour $t=t_m$:

$$v(t_m)=\int_0^{t_m}f(t)dt=\int_0^{t_m}(ay(t)+b\dot{y}(t))dt=a\int_0^{t_m}y(t)dt+b\left[y(t)\right]_0^{t_m}$$

Avec $y(t)=te^{-t/\tau_2}$ dont l'intégration peut être effectuée facilement par parties :

$$\int_0^{t_m}te^{-t/\tau_2}=\left[-\tau_2te^{-t/\tau_2}-\tau_2^2e^{-t/\tau_2}\right]_0^{t_m}=-\tau_2t_me^{-t_m/\tau_2}-\tau_2^2e^{-t_m/\tau_2}+\tau_2^2$$

$$\boxed{v(t_m)=\frac{1}{\tau_2^2}\left[-\tau_2t_me^{-t_m/\tau_2}-\tau_2^2e^{-t_m/\tau_2}+\tau_2^2\right]+\frac{\tau_1}{\tau_2^2}t_me^{-t_m/\tau_2}}$$

Pour $t=t_m$ on obtient $v(t_m)=1,13$, soit un dépassement de 13%.

Question 10 *Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.*

Correction

- Le temps du 1er maximum est inférieur à 3,5 s. et le dépassement inférieur à 20% ce qui vérifie le cahier des charges.
- Le régulateur comportant une action intégrale, l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une consigne constante.

Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

Question 11 *Déterminer la fonction de transfert $F_2(p)=\dfrac{\nu_1(p)}{F_{ext}(p)}$ entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose ν_c nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée $||F_2(j\omega)||$, de cette fonction peut être approché par la relation : $||F_2(j\omega)||=\min\left[||H_2(j\omega)||;\dfrac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}\right]$.*

Correction On a directement $F_2(p) = -\dfrac{H_2(p)}{1+H_2(p)M(p)C(p)H_1(p)}$.

On peut alors déterminer le module et on a $||F_2(j\omega)|| = \left|\left|\dfrac{H_2(j\omega)}{1+H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)}\right|\right|$.

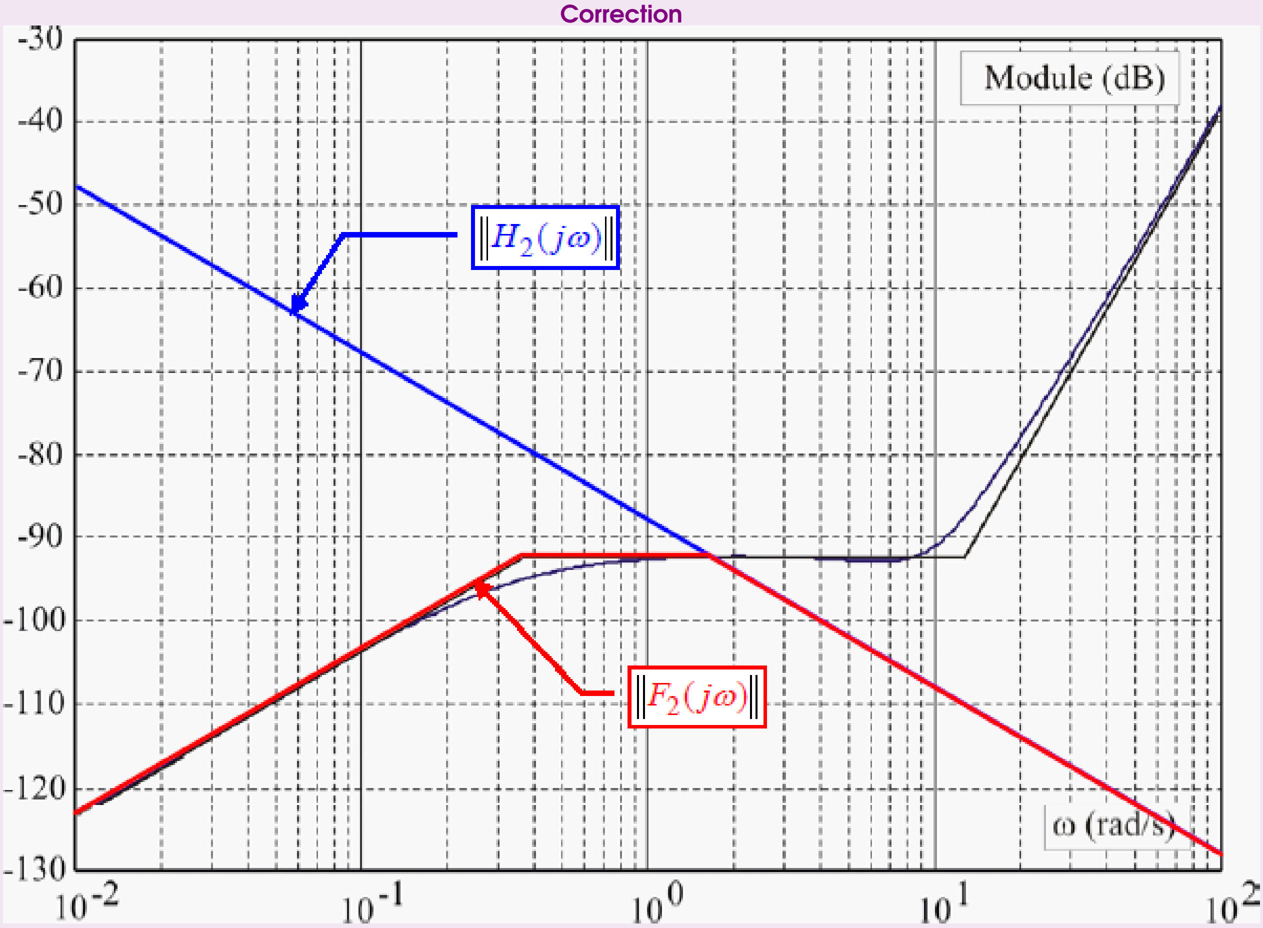
Dans ces conditions :

- si $\left|\left|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\right|\right| >> 1$ alors $||F_2(j\omega)|| \simeq \left|\left|\dfrac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)}\right|\right| \simeq \left|\left|\dfrac{1}{M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)}\right|\right|$;
- si $\left|\left|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\right|\right| << 1$ alors $||F_2(j\omega)|| \simeq \left|\left|H_2(j\omega)\right|\right|$.

On peut en conclure que $||F_2(j\omega)|| = \min\left[||H_2(j\omega)||; \dfrac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}\right]$.

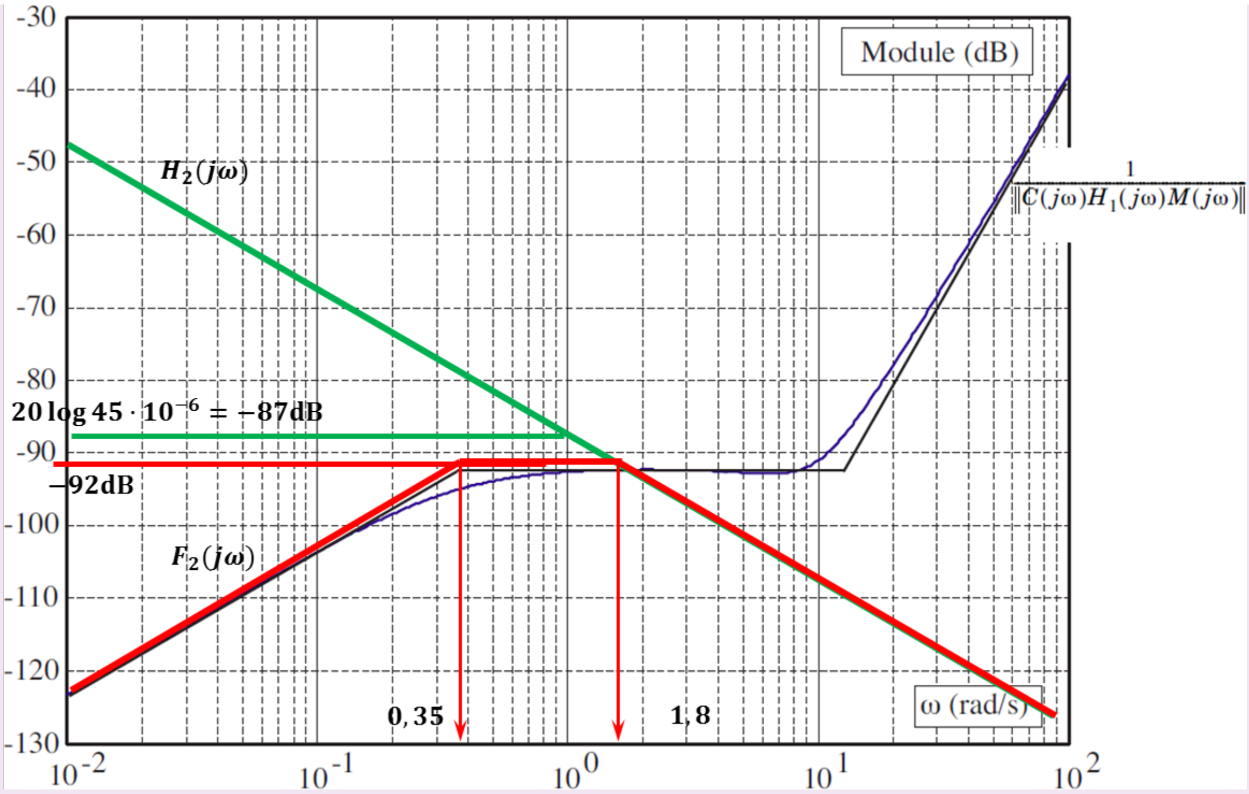
Question 12 *La figure suivante comporte le tracé de la fonction* $\dfrac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}$. *Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction* $||H_2(j\omega)||$.

Correction



Question 13 *En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction* $||F_2(j\omega)||$. *En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert* $F_2(p)$ *entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.*

Correction



En analysant les brisures de F_2, on peut proposer la fonction de transfert suivante : $F_2=-\dfrac{Kp}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ avec $\tau_1=\dfrac{1}{0,35}\simeq 2{,}9\,\text{s}$, $\tau_2=\dfrac{1}{1,8}\simeq 0{,}6\,\text{s}$. Avec cette proposition, en basse fréquence, seul le dérivateur existe, ona donc $20\log K\omega=20\log 0{,}01K=-123$ soit $K=100\times 10^{-123/20}\simeq 7\cdot 10^{-5}$.

Au final, $F_2=-\dfrac{7\cdot 10^{-5}p}{(1+2{,}9p)(1+0{,}6p)}$.

Question 14 *Préciser les pôles de la fonction $F_2(p)$ déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :* $F_2(p)=\dfrac{K_2 p}{1+Tp}$.

Correction

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux pôles :

$$\begin{cases} p_1=-0,35 \\ p_2=-2 \end{cases}$$

Le pôle p_2 étant caractérisé par une dynamique relativement rapide par rapport à celle de p_1, on va pouvoir le négliger pour l'étude de la réponse temporelle. Soit la fonction approchée :

$$\boxed{F_2(p)=-\frac{\dfrac{p}{12100}}{(1+2,8p)}}$$

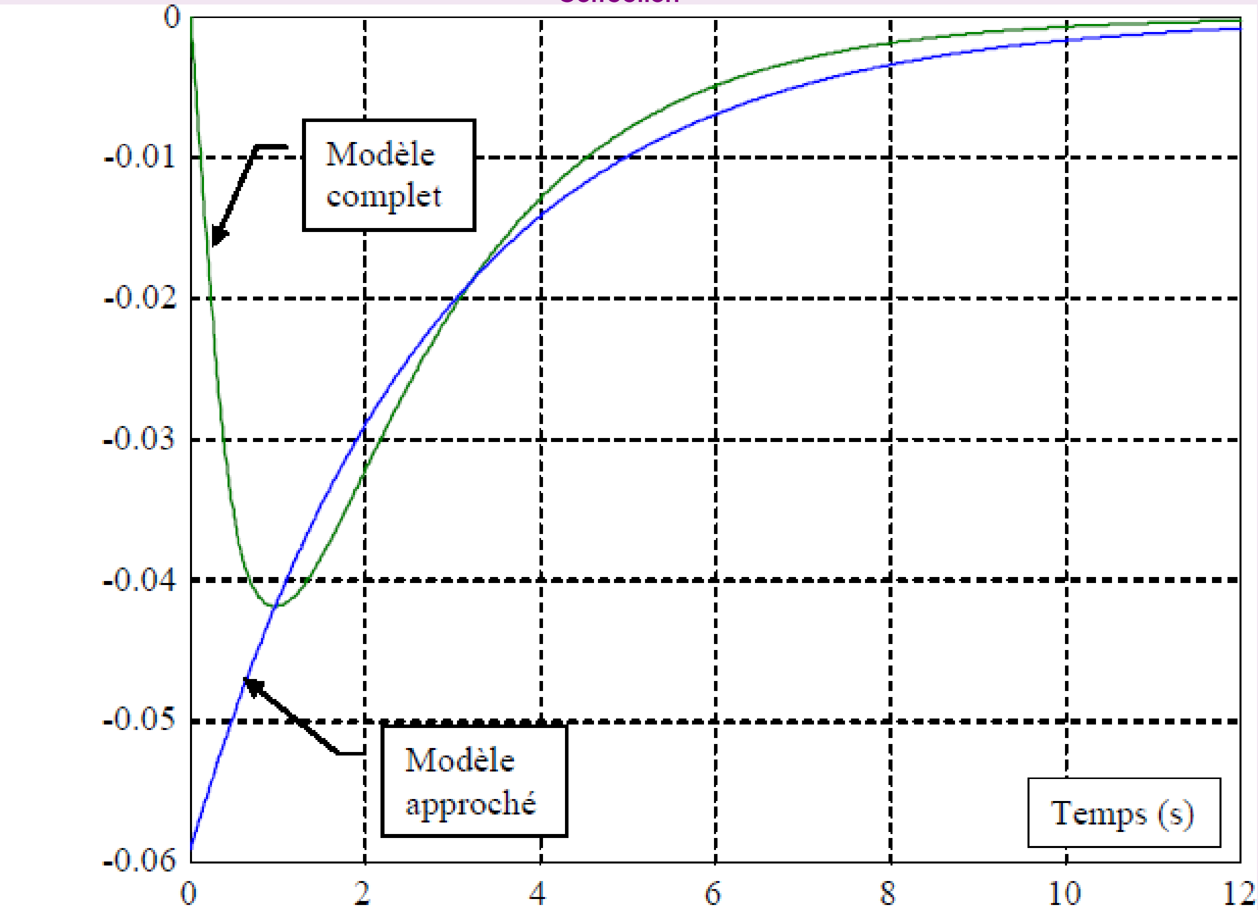
Question 15 *En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif $v_1(t)$ en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice $F_{ext}=F_0 u(t)$, où $u(t)$ représente l'échelon unité et avec $F_0=2000\,\text{N}$.*

Correction

La réponse à un échelon de perturbation est donnée sur la figure suivante, c'est la réponse typique d'une fonction du 1er ordre en partant d'une condition non nulle ($\nu_1 = 0,05$) avec une entrée nulle. Le temps de réponse est alors de $t_r = 3T = 8,4$ s.

Question 16 *Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif $\nu_1(t)$ en précisant la valeur initiale $\nu_1(0)$. En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse t_r à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale $\nu_1(0)$ (valeurs à considérer en valeur absolue).*

Correction



Calcul exact du temps de réponse

$$\nu_1(t_r) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t_r/T} = -0,05 \cdot \frac{K_2}{T} F_0 \quad \Rightarrow \quad t_r = T \cdot \ln(1/0,05) = 3T$$

Retour sur le cahier des charges

Question 17 *Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.*

Correction

- Le temps de réponse de 8,4 s. est inférieur au temps de réponse de 9 s. demandé. En conséquence on peut conclure que le cahier des charges est satisfait au regard de cette contrainte.
- Le régulateur comportant une action intégrale (donc avant le point d'entrée de la perturbation) l'erreur statique est nulle comme montré sur la réponse temporelle.

1. ...
2. $\arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] \geq -21{,}5\,°$.
3. $T_i \geq \tan(68,5) = 2{,}54\,\text{s}$.
4. ***
5. ***
6. ***
7. ***
8. ***
9. ***
10. ***