

Application 02 –
Corrigé

Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Concours Centrale Supélec PSI 2006 – Ressources UPSTI
Savoirs et compétences :

□ ...

Mise en situation

Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

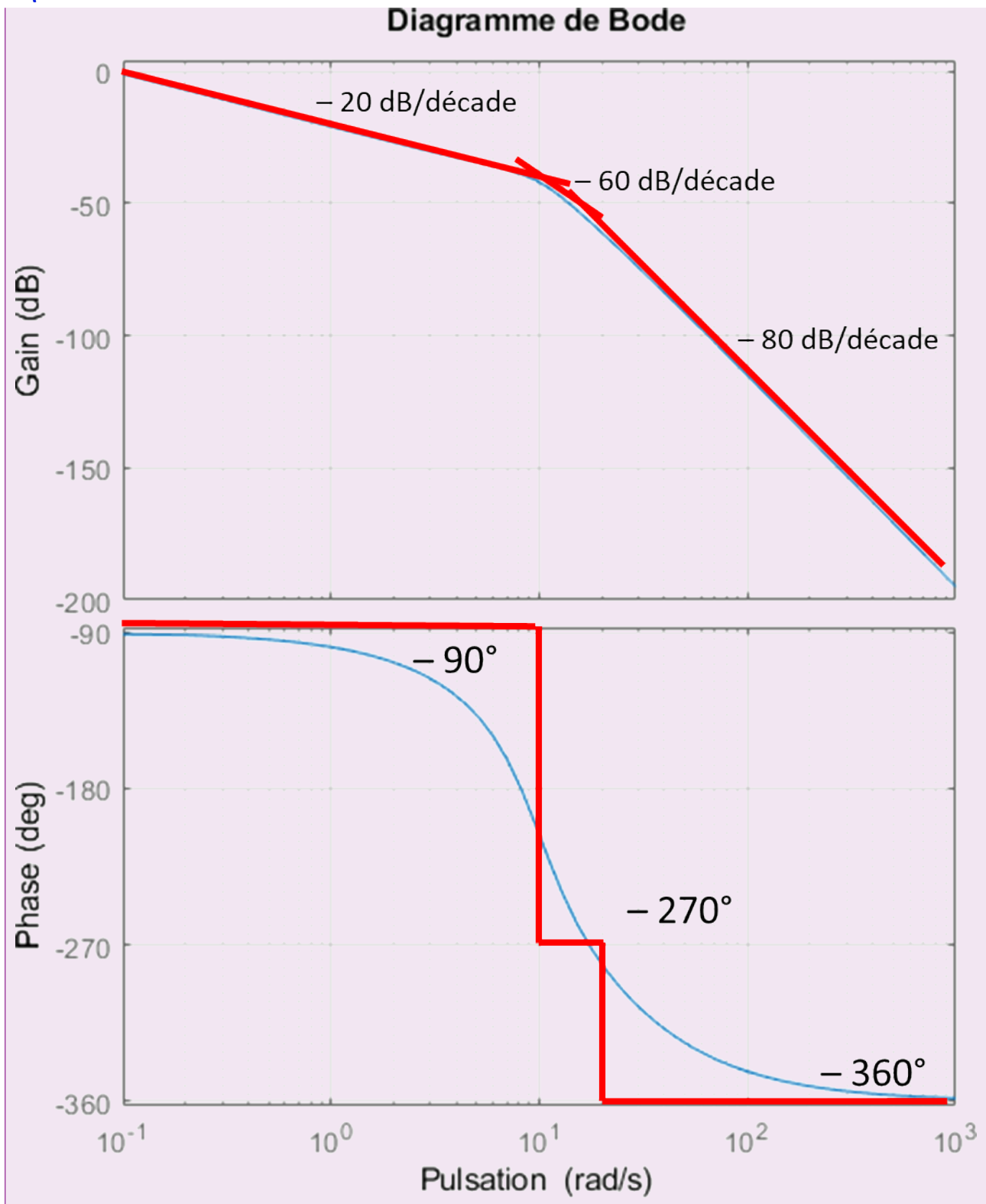
Question 1 En prenant $C(p) = 1$, compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.

Correction On a pour $H_1(p)$, $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,01 \Leftrightarrow \omega_0 = 10$ et $2\frac{\xi}{\omega_0} = 0,1$ soit $\xi = 0,1 \times 10/2 = 0,5$. Les pulsations caractéristiques de la FTBO sont donc $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$ et $1/0,05 = 20 \text{ rad s}^{-1}$.

Pour tracer un diagramme de Bode avec un intégrateur, il est nécessaire de définir un point pour définir la « hauteur » du tracé. Pour cela on prend un point pour lequel seul l'intégrateur et les constantes ont de l'effet. Ainsi, pour $\omega = 0,1 \text{ rad s}^{-1}$, on a $FTBO(p) \simeq \frac{2000 \times 45 \times 10^{-6}}{p}$. On a donc $20 \log 0,09 - 20 \log 0,1 \simeq -0,92 \text{ dB}$.

On peut dresser le tableau de variations de la FTBO puis tracer les asymptotes.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega = 10$	$\omega = 20$	$\omega \rightarrow \infty$
$\ H_1(j\omega)\ _{dB}$	$20 \log 2000$	-40 dB/decade	-40 dB/decade	
$\ H_2(j\omega)\ _{dB}$	-20 dB/decade	-20 dB/decade	-20 dB/decade	
$\ M(j\omega)\ _{dB}$	0	0	-20 dB/decade	
$\ FTBO(j\omega)\ _{dB}$	-20 dB/decade	-60 dB/decade	-80 dB/decade	
$\text{Arg}(FTBO(j\omega))$	-90°	-270°	-360°	



Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type PI, dont la fonction de transfert est : $C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$.

Question 2 Calculer la valeur que doit prendre l'argument de $C(p)$ afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure ω_c souhaitée.

Méthode Si on note ω_c on définit la pulsation de coupure telle que $|\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0$ dB. On peut alors définir la marge de phase par $M_\varphi = \arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ)$.

Correction La pulsation de coupure souhaitée est $\omega_c \simeq 1 \text{ rad s}^{-1}$. On cherche donc K_r et T_i tels que $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ) = 60^\circ$.

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[\underbrace{\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}}_{\rightarrow -5,7^\circ \text{ qd } \omega=\omega_c} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+0,05p}}_{\rightarrow -2,8^\circ \text{ qd } \omega=\omega_c} \cdot \underbrace{K_r}_{\rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \cdot \underbrace{\frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}}_{\rightarrow -90^\circ} \right] = \arg \left[\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \right] - 98,5$$

R Ci-dessus, ce sont les **arguments** que l'on évalue lorsque $\omega = \omega_c$. L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg \left[\frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] - 98,5.$$

Pour respecter la marge souhaitée, il est donc nécessaire que $\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180) \geq 60$ Soit $\arg \left[\frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] - 98,5 + 180 \geq 60$ et $\arg \left[\frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ$.

Question 3 Calculer la valeur minimale, T_{imin} , que l'on peut conférer à la constante T_i de l'action intégrale du régulateur.

Correction On en déduit que pour $\omega = \omega_c = 1$, $\arg \left[\frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ \Leftrightarrow \arctan(T_i \omega) - 90 \geq -21,5^\circ \Leftrightarrow \arctan(T_i \omega) \geq 68,5^\circ$ et donc $\Rightarrow T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$.

! **Attention** : à ce stade, la marge de phase serait de 60° **SI** la pulsation de coupure était de 1 rad s^{-1} ce qui n'est pas encore le cas pour le moemnt.

Question 4 En adoptant $T_i = T_{imin}$, déterminer alors le gain K_r du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

Méthode Il faut chercher K_r tel que $20 \log \|\text{FTBO}(j\omega_c)\| = 0$.

Correction En raisonnant graphiquement à l'aide du diagramme en boucle ouverte non corrigé, on lit que le gain est d'environ -20 dB lorsque $\omega = 1$. La fonction de transfert du correcteur est $C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_r \frac{T_i p + 1}{T_i p}$.

Le gain dB du correcteur doit donc être de 20 dB lorsque $\omega = 1$: $20 \log K_r + 20 \log \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} - 20 \log T_i \omega = 20$
 $\Leftrightarrow \log K_r + \log \sqrt{T_i^2 + 1} - \log T_i = 1 \Leftrightarrow \log K_r = 1 - \log \sqrt{T_i^2 + 1} + \log T_i$.

On a donc $K_r = 9,3$.

Analytiquement (à vérifier...) $20 \log \|\text{FTBO}(j\omega_c)\| = 0 \Rightarrow \|\text{FTBO}(j\omega_c)\| = 1$.

$$\begin{aligned} \|\text{FTBO}(j\omega)\| &= \left\| \frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2} \cdot \frac{1}{1+0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\ &= \left\| \frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2} \cdot \frac{1}{1+0,05p} \cdot K_r \frac{1+T_i p}{T_i p} \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p} \right\| \\ &= \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \sqrt{1+T_i^2 \omega^2} \left\| \frac{1}{1+0,1p+0,01p^2} \frac{1}{1+0,05p} \right\| = \frac{K_r}{T_i \omega^2} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1+T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{1+0,05^2 \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2 \omega^2)^2 + 0,1^2 \omega^2}} \\ &= \frac{K_r}{T_i} 90 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1+T_i^2}}{\sqrt{1+0,05^2}} \frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2)^2 + 0,1^2}} \end{aligned}$$

Question 5 Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

Méthode Soit ω_φ la pulsation telle que $\varphi(\omega_\varphi) = -180^\circ$. La marge de gain s'exprime alors par $MG = -20 \log \|H(j\omega_\varphi)\|$.

Correction Approche analytique On résout $\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = -180^\circ$

$$\arg[\text{FTBO}(j\omega)] = \arg\left[\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2} \cdot \frac{1}{1+0,05p} \cdot K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \cdot \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}\right]$$

Approche graphique

Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

Question 6 En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$, justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.

Correction

Question 7 Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

Correction • $K_f = 1$: lorsque ω tend vers 0, le gain tend vers 0 ;

• $\omega_0 = 0,5$: valeur de la pulsation de résonance ;

• $\tau_1 = \frac{1}{0,9} = 1,11 \text{ s}$;

• $\tau_2 = \frac{1}{7} = 0,14 \text{ s}$;

• $\xi < 0,7$ (résonance).

Question 8 En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert $F(p)$ par la forme suivante : $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$.

Correction

La pulsation propre ω_0 est relativement loin de la bande passante, en conséquence sa dynamique sera rapide vis-à-vis du zéro et du pôle double (pôles dominants). On adopte donc :

$$F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{(1 + 3,3 p)}{(1 + 1,66 p)^2}$$

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement : $f(t) = \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2}\right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$.

Question 9 Calculer le temps du 1^{er} maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif $v_c(t) = v_{c0} u(t)$ où $u(t)$ désigne l'échelon unité.

Correction

Calcul du temps du 1^{er} maximum

Le temps du 1^{er} maximum est donné par $f(t_m) = 0$, soit pour :

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t_m + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} = 0$$

On obtient donc :

$$t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$$

L'application numérique avec les valeurs adoptées conduit à $t_m = 3,3$ s.

Calcul du dépassement

La réponse indicielle peut être obtenue par intégration de la réponse impulsionnelle, le dépassement étant donné par la valeur de la sortie pour $t = t_m$:

$$v(t_m) = \int_0^{t_m} f(t) dt = \int_0^{t_m} (a y(t) + b \dot{y}(t)) dt = a \int_0^{t_m} y(t) dt + b [y(t)]_0^{t_m}$$

Avec $y(t) = t e^{-t/\tau_2}$ dont l'intégration peut être effectuée facilement par parties :

$$\int_0^{t_m} t e^{-t/\tau_2} dt = \left[-\tau_2 t e^{-t/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t/\tau_2} \right]_0^{t_m} = -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2$$

$$v(t_m) = \frac{1}{\tau_2^2} \left[-\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2 \right] + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} t_m e^{-t_m/\tau_2}$$

Pour $t = t_m$ on obtient $v(t_m) = 1,13$, soit un dépassement de 13%.

Question 10 Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

Correction

- Le temps du 1^{er} maximum est inférieur à 3,5 s. et le dépassement inférieur à 20% ce qui vérifie le cahier des charges.
- Le régulateur comportant une action intégrale, l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une consigne constante.

Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

Question 11 Déterminer la fonction de transfert $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{ext}(p)}$ entre le glissement et la force de perturbation que vous explicitez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose v_c nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée $\|F_2(j\omega)\|$, de cette fonction peut être approché par la relation : $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[\|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$.

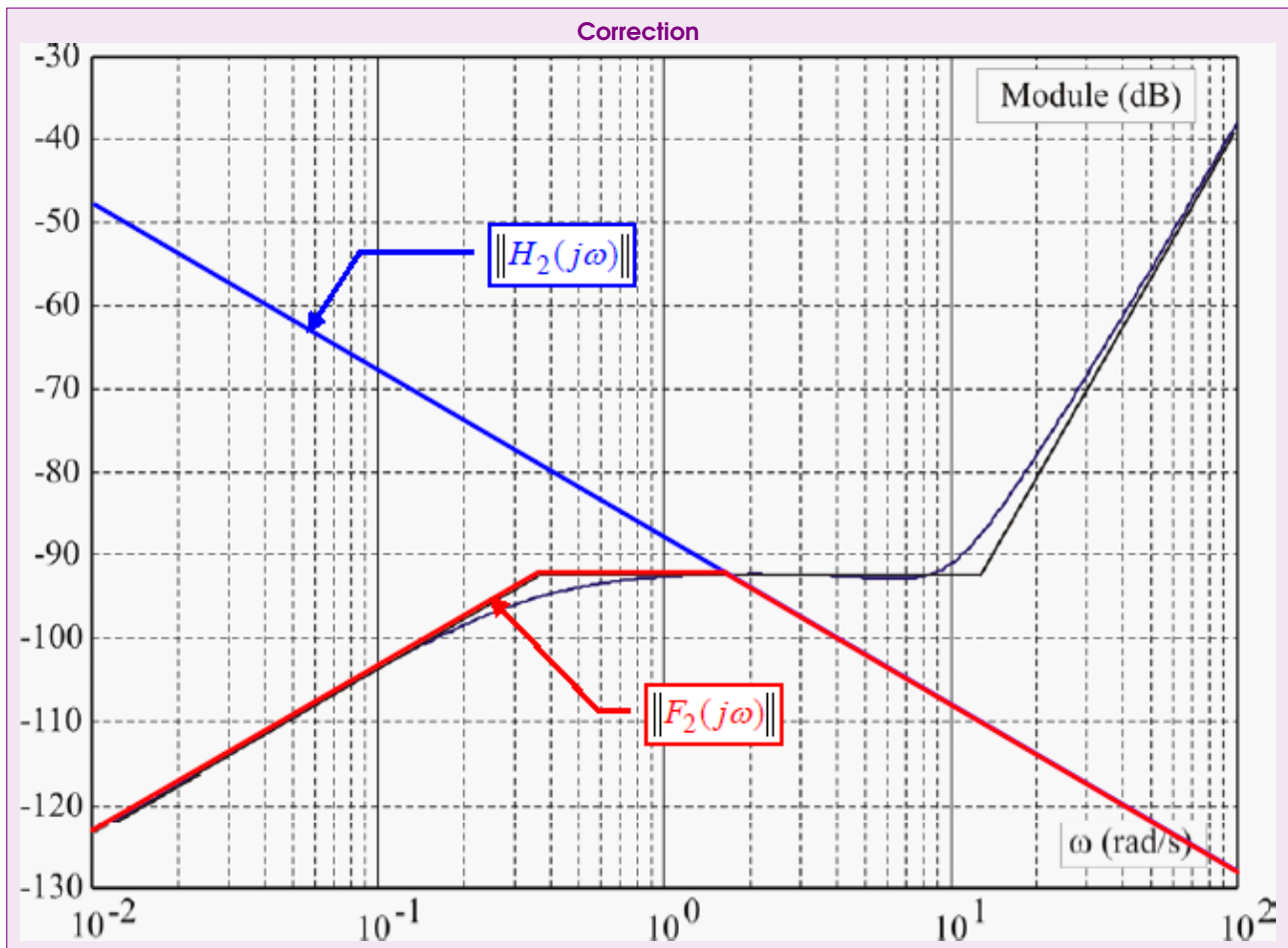
Correction On a directement $F_2(p) = -\frac{H_2(p)}{1 + H_2(p)M(p)C(p)H_1(p)}$.

On peut alors déterminer le module et on a $\|F_2(j\omega)\| = \left\| \frac{H_2(j\omega)}{1 + H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|$.

Dans ces conditions :

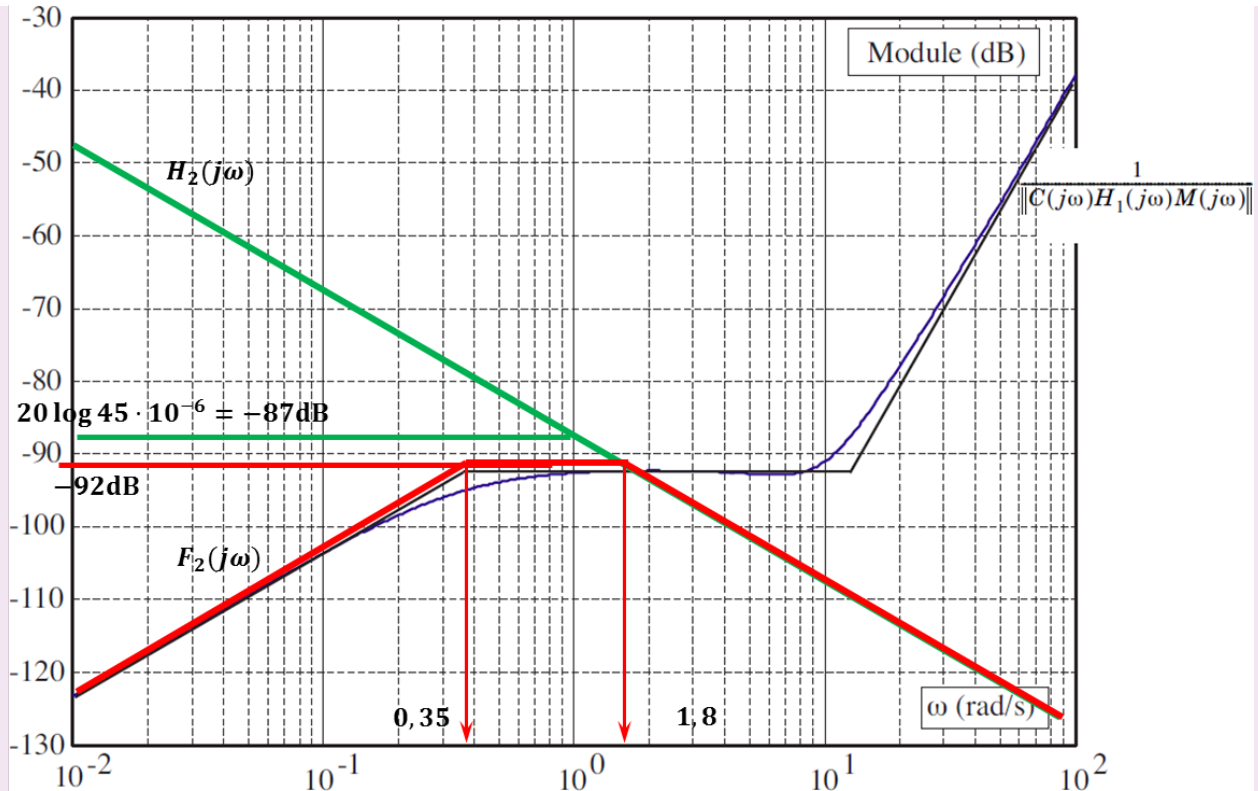
- si $\|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\| \gg 1$ alors $\|F_2(j\omega)\| \simeq \left\| \frac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\| \simeq \left\| \frac{1}{M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)} \right\|$;
 - si $\|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\| \ll 1$ alors $\|F_2(j\omega)\| \simeq \|H_2(j\omega)\|$.
- On peut en conclure que $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[\|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$.

Question 12 La figure suivante comporte le tracé de la fonction $\frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|}$. Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction $\|H_2(j\omega)\|$.



Question 13 En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction $\|F_2(j\omega)\|$. En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert $F_2(p)$ entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

Correction



En analysant les brisures de F_2 , on peut proposer la fonction de transfert suivante : $F_2 = -\frac{Kp}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$
avec $\tau_1 = \frac{1}{0,35} \simeq 2,9\text{s}$, $\tau_2 = \frac{1}{1,8} \simeq 0,6\text{s}$. Avec cette proposition, en basse fréquence, seul le dérivateur existe, on a donc $20\log K\omega = 20\log 0,01K = -123$ soit $K = 100 \times 10^{-123/20} \simeq 7 \cdot 10^{-5}$.
Au final, $F_2 = -\frac{7 \cdot 10^{-5} p}{(1+2,9p)(1+0,6p)}$.

Question 14 Préciser les pôles de la fonction $F_2(p)$ déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme : $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1+T p}$.

Correction

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux pôles :

$$\begin{cases} p_1 = -0,35 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

Le pôle p_2 étant caractérisé par une dynamique relativement rapide par rapport à celle de p_1 , on va pouvoir le négliger pour l'étude de la réponse temporelle. Soit la fonction approchée :

$$F_2(p) = -\frac{\frac{p}{12100}}{(1+2,8p)}$$

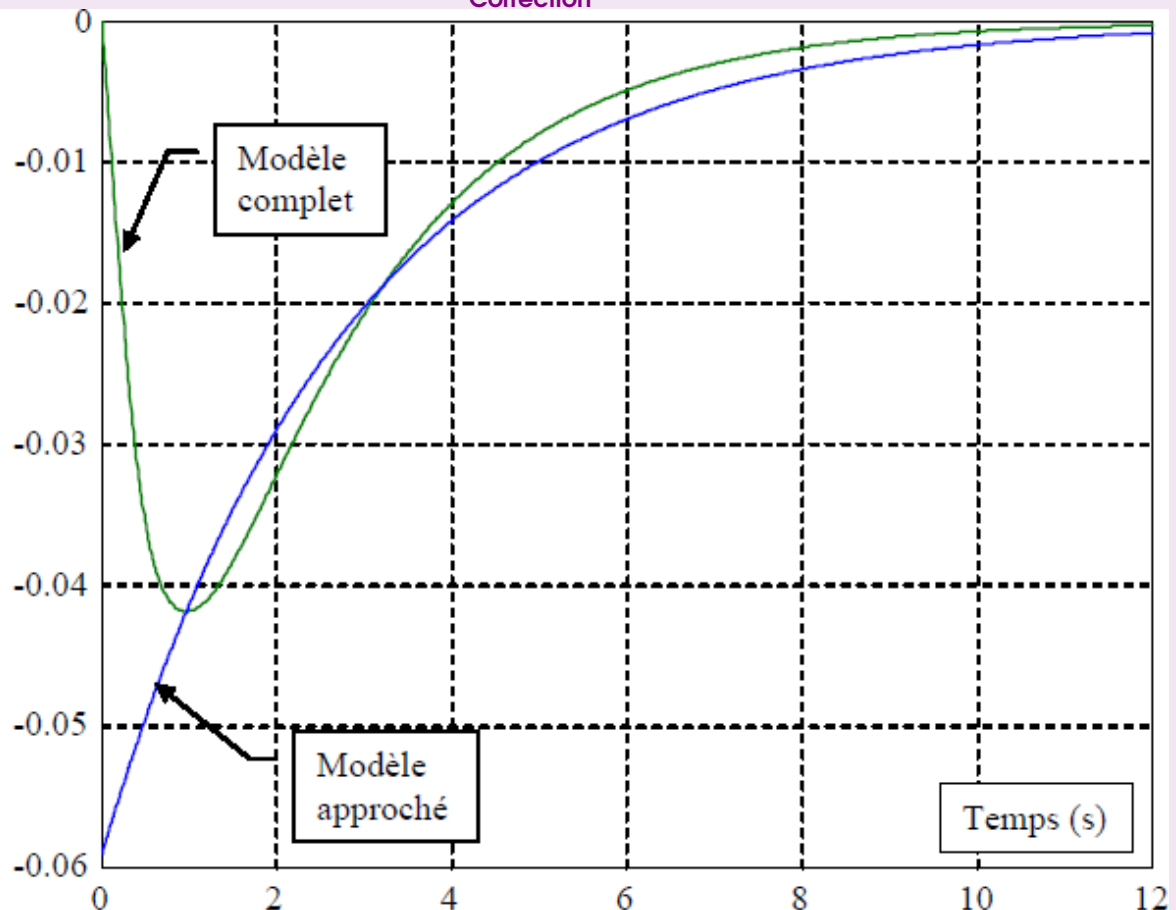
Question 15 En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif $v_1(t)$ en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice $F_{ext} = F_0 u(t)$, où $u(t)$ représente l'échelon unité et avec $F_0 = 2000\text{N}$.

Correction

La réponse à un échelon de perturbation est donnée sur la figure suivante, c'est la réponse typique d'une fonction du 1^{er} ordre en partant d'une condition non nulle ($v_1 = 0,05$) avec une entrée nulle. Le temps de réponse est alors de $t_r = 3T = 8,4$ s.

Question 16 Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif $v_1(t)$ en précisant la valeur initiale $v_1(0)$. En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse t_r à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale $v_1(0)$ (valeurs à considérer en valeur absolue).

Correction



Calcul exact du temps de réponse

$$v_1(t_r) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t_r/T} = -0,05 \cdot \frac{K_2}{T} F_0 \Rightarrow t_r = T \cdot \ln(1/0,05) = 3T$$

Retour sur le cahier des charges

Question 17 Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

- Le temps de réponse de 8,4 s. est inférieur au temps de réponse de 9 s. demandé. En conséquence on peut conclure que le cahier des charges est satisfait au regard de cette contrainte.
- Le régulateur comportant une action intégrale (donc avant le point d'entrée de la perturbation) l'erreur statique est nulle comme montré sur la réponse temporelle.

Correction

1. ...
2. $\arg\left[\frac{T_i p + 1}{T_i p}\right] \geq -21,5^\circ$.
3. $T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$.
4. ***
5. ***
6. ***
7. ***
8. ***
9. ***
10. ***