

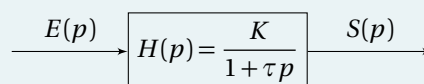
1 Systèmes d'ordre 1

Définition Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$



On note :

- τ la constante de temps en secondes ($\tau > 0$);
- K le gain statique du système ($K > 0$).

Résultat — Réponse à un échelon d'un système du premier ordre.

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude E_0 . Lorsque $E_0 = 1$ ($1/p$ dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

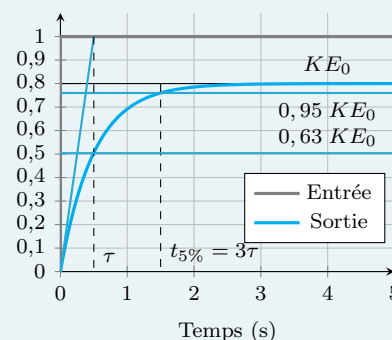
Analytiquement, on montre que $s(t) = K E_0 u(t) (1 - e^{-t/\tau})$.

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- le gain à partir de l'asymptote $K E_0$;
- la constante de temps à partir de $t_{5\%}$ ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- valeur finale $s_\infty = K E_0$;
- pente à l'origine **non nulle**;
- $t_{5\%} = 3\tau$;
- pour $t = \tau$, $s(\tau) = 0,63 s_\infty$.



Résultat — Réponse à une rampe d'un système du premier ordre.

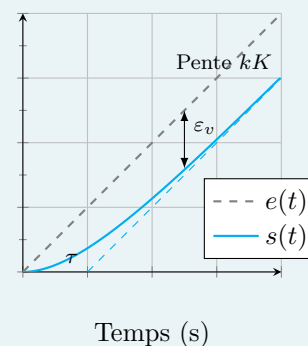
On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente k :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = K k (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}) u(t)$.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- pente de l'asymptote $K k$;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses : $t = \tau$;
- $\varepsilon_v = k K \tau$.



2 Systèmes d'ordre 2

Définition Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

$E(p) \rightarrow \boxed{\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} \rightarrow S(p)$

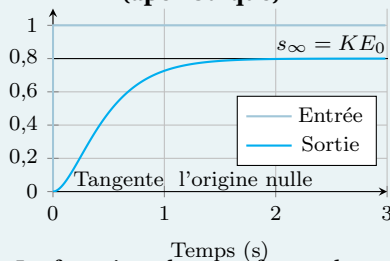
On note :

- K est appelé le gain statique du système (rapport des unités de S et de E);
- ξ (lire *xi*) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- ω_0 pulsation propre du système (rad/s ou s^{-1}).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

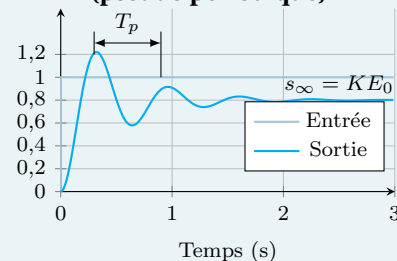
Résultat

$\xi \geq 1$: système non oscillant et amorti
(apériodique)



- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.

$\xi < 1$: système oscillant et amorti
(pseudo périodique)



- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$.
- La valeur du premier dépassement vaut : $D_1 = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$.

Résultat

- Pour $\xi = 0$ le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude $K E_0$ ($2K E_0$ crête à crête).
- Pour $\xi \simeq 0,69$ on obtient le système du second ordre le plus rapide **avec dépassement**. Le temps de réponse à 5% est donné par $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \simeq 3$.
- Pour $\xi = 1$ on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.