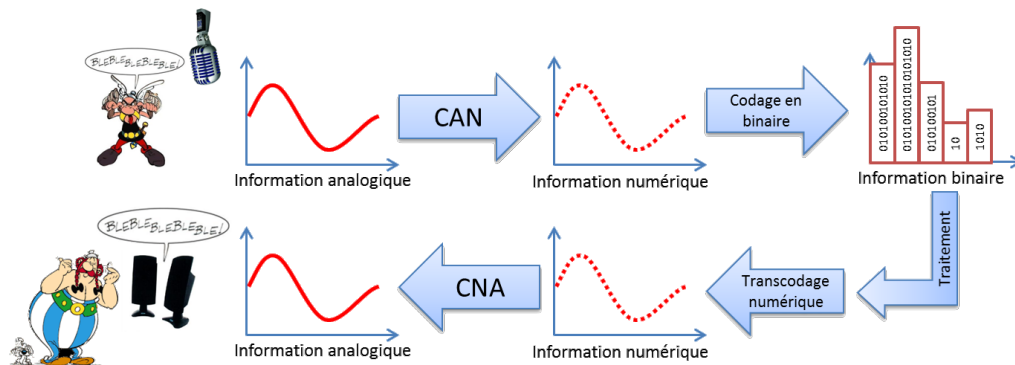


1 Définitions

Définition — Informations analogiques et numériques.

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).

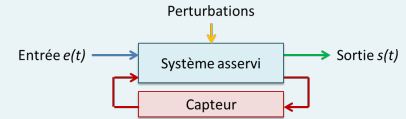


Définition — Systèmes automatiques ou asservis.

Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

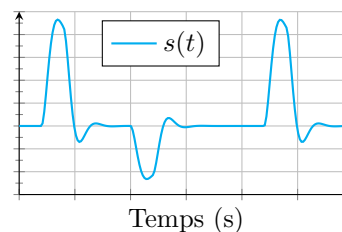
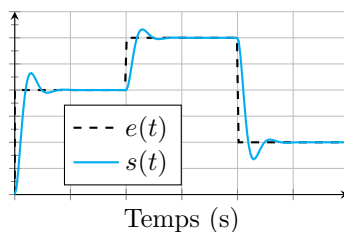
- la loi de consigne $e(t)$ est une grandeur de commande qui est modifiable;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie $s(t)$ est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger de la qualité de la tâche accomplie.



Définition — Systèmes suiveurs et régulateurs.

- Pour un système suiveur la consigne $e(t)$ fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- Pour un système régulateur la consigne $e(t)$ est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.



2 Performance des systèmes – Critères graphiques

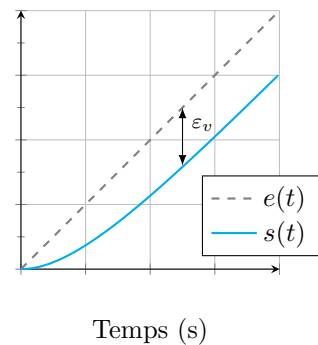
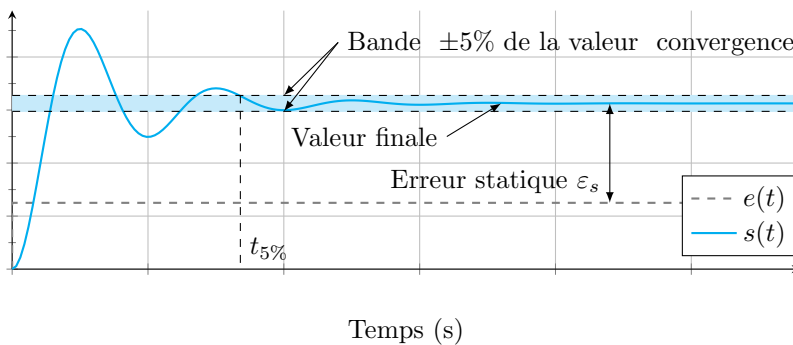
Définition — Précision en position – Écart statique ε_s . Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique ε_s comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse $s(t)$ en régime permanent.

Définition — Précision en vitesse – Écart dynamique ε_v . Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

Définition — Rapidité. La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

Méthode — Détermination du temps de réponse à $n\%$. (En pratique $n = 5$).

1. Tracer sur le même graphique la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.



Définition — Stabilité. La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

1 Définitions

Définition — Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles.

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour $t = 0^+$:

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2 f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

Définition — Transformée de Laplace.

À toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t \leq 0$ (fonction causale), on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

On note $\mathcal{L}[f(t)]$ la transformée directe et $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ la transformée inverse.

De manière générale on note $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$, $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$, $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$, $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p) \dots$

Résultat — Dérivation.

Dans les conditions de Heaviside : $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 F(p)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n F(p)$.

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$.

Définition — Transformées usuelles.

Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$	Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
Fonction linéaire $f(t) = t$	$F(p) = \frac{1}{p^2}$	Puissances $f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$		

2 Théorèmes

Théorème — Théorème de la valeur initiale.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p)$$

Théorème — Théorème du retard.

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

Théorème — Théorème de la valeur finale.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$$

Théorème — Théorème de l'amortissement.

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

1 Définitions

Définition — Fonction de transfert – Transmittance.

Soit un système linéaire continu linéaire invariant dont on note le signal d'entrée e et le signal de sortie s , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction H telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

Définition — Classe, ordre, pôles et zéros.

$H(p)$ est une fonction rationnelle en p . En factorisant le numérateur et le dénominateur, $H(p)$ peut s'écrire sous cette forme :

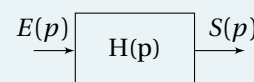
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

- Les z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Les p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- **Le degré de $D(p)$ est appelé ordre n du système ($n \geq m$ pour les systèmes physiques).**
- L'équation $D(p) = 0$ est appelée équation caractéristique.
- Le facteur constant K est appelé gain du système.
- S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre α de $D(p)$, un terme p^α apparaît au dénominateur. **α est la classe (ou type) de la fonction de transfert.** Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

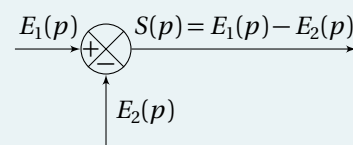
Définition — Modélisation d'un bloc.

Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$, caractérisé par une fonction de transfert $H(p)$. Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$

**Définition — Modélisation d'un comparateur.**

Soit l'équation $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$. Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

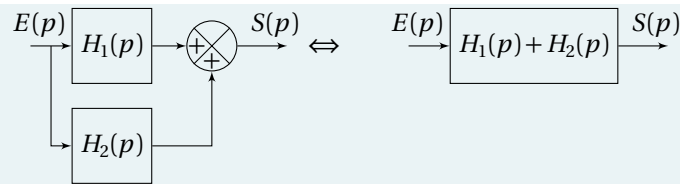


2 Algèbre de blocs

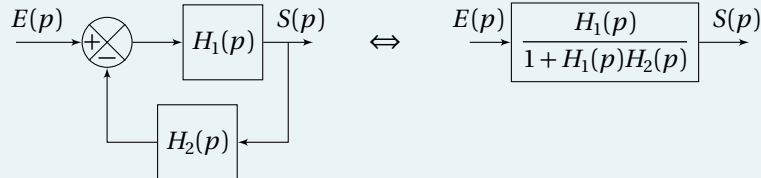


Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsque on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.

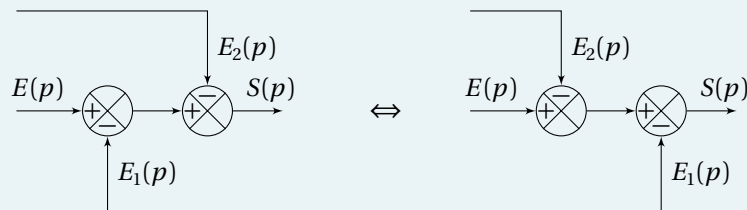
Résultat — Blocs en série.**Résultat — Blocs en parallèle.**



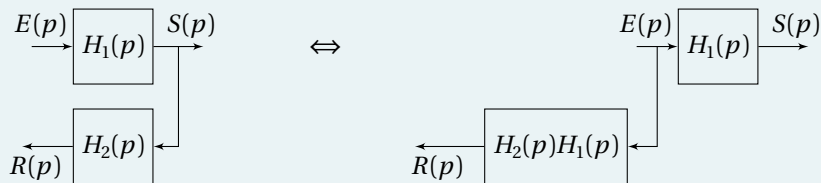
Résultat — Réduction de boucle – À MAÎTRISER PARFAITEMENT.



Résultat — Comparateurs en série.



Résultat — Point de prélèvement.

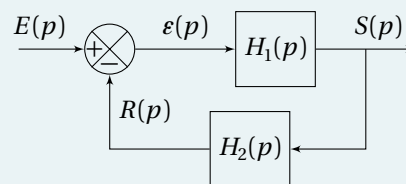


3 Fonctions usuelles

Définition — Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF.

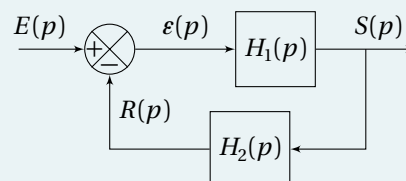
Formule de Black

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$



Définition — Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO.

$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$



Définition — Théorème de superposition.

Soit un système d'entrées E_1 et E_2 et de sortie S . On note $H_1 = \frac{S}{E_1}$ lorsque E_2 est nulle et $H_2 = \frac{S}{E_2}$ lorsque E_1 est nulle. En superposant, on a alors : $S = H_1 E_1 + H_2 E_2$.