Modéliser le comportement linéaire et non linéaire des systèmes multiphysiques

Révisions 5 – Modélisation des systèmes linéaires – Domaine fréquentiel

1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme $f(t) = A\sin(\omega \cdot t + \varphi)$ et on note :

- A : l'amplitude de la sinusoïde ;
- ω : la pulsation en rad/s ;
- φ : la phase à l'origine en rad.

On a par ailleurs :

- $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: la période de la sinusoïde en s ;
- $f = \dfrac{1}{T}$: fréquence de la sinusoïde en Hz.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

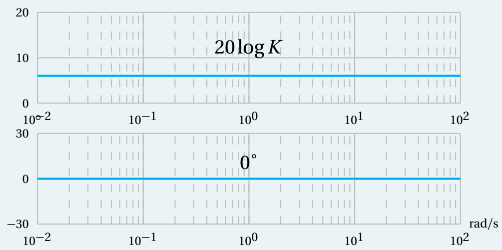
Définition Soit $H(p)$ une fonction de transfert. On pose $p = j\omega$ et on note :
- $H_{\text{dB}}(\omega) = 20\log|H(j\omega)|$ le gain décibel de la fonction de transfert ;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}\left(H(j\omega)\right)$.

Propriété On note $H(p) = G_1(p)G_2(p)$. On a :
- $H_{\text{dB}}(\omega) = G1_{\text{dB}}(\omega) + G2_{\text{dB}}(\omega)$;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G1_{\text{dB}}(\omega)) + \text{Arg}(G2_{\text{dB}}(\omega))$.

2 Gain

Résultat — Diagramme de Bode d'un gain pur.

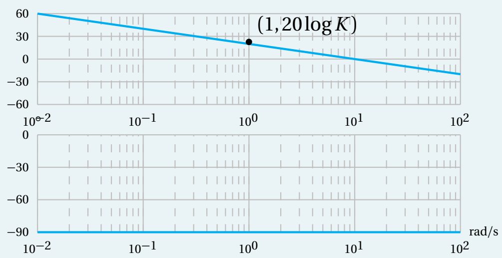
- Fonction de transfert : $H(p) = K$.
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée $20\log K$.
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée 0°.



3 Intégrateur

Résultat — Diagramme de Bode d'un intégrateur.

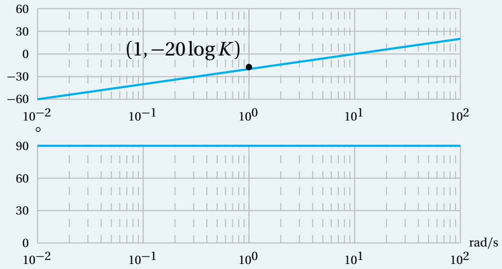
- Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{p}$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente -20dB/decade passant par le point $(1, 20\log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée $-90\,^\circ$.



4 Dérivateur

Résultat — Diagramme de Bode d'un dérivateur.

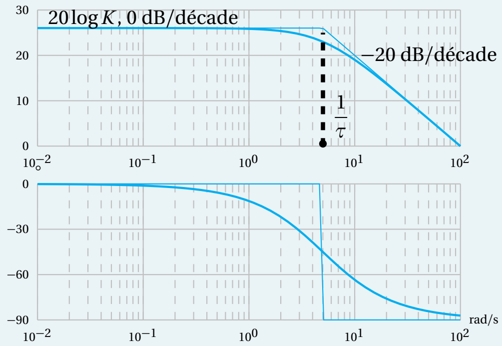
- Fonction de transfert : $H(p) = Kp$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente 20dB/decade passant par le point $(1, -20\log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée -90 °.



5 Systèmes d'ordre 1

Résultat — Diagramme de Bode d'un système du premier ordre.

- Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$.
- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour $\omega < \dfrac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $20\log K$;
  - pour $\omega > \dfrac{1}{\tau}$: droite de pente -20dB/decade.
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour $\omega < \dfrac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée 0 ° ;
  - pour $\omega > \dfrac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée -90 °.



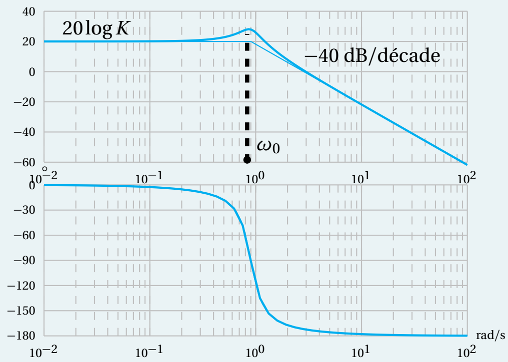
6 Systèmes d'ordre 2

Résultat — Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre.

- Fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$.

Cas où $\xi < 1$.

- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée $20\log K$;
  - pour $\omega > \omega_0$: droite de pente -40dB/decade.
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée 0 ° ;
  - pour $\omega > \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée -180°.



Dans le **cas où** $\xi > 1$, le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme $(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)$. On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

Résultat Phénomène de résonance

Le phénomène de résonance s'observe lorsque $\xi < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$

À la résonance, l'amplitude maximale est de $A_{\max} = \dfrac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$. (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit $20\log A_{\max}$ lorsque $\omega = \omega_r$.)

7 Tracé du diagramme de Bode

Méthode