

Application 02



Freinage d'Airbus

David Violeau

Savoirs et compétences :

□ ...

Présentation du système

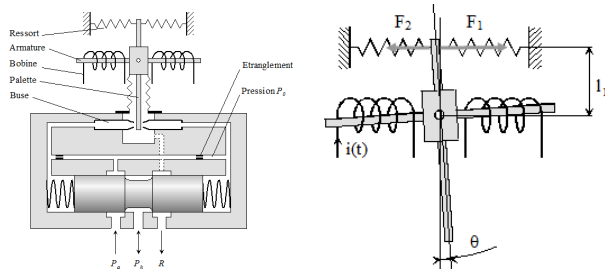
Le freinage est une des fonctions vitales d'un avion, au même titre que la propulsion ou la sustentation. C'est grâce à lui que l'avion peut s'immobiliser après l'atterrissage, circuler au sol en toute sécurité mais également s'arrêter en cas d'urgence lors d'une interruption de décollage alors que l'avion est à pleine charge de carburant et lancé à la vitesse de décollage (même si le risque est de l'ordre de 1 pour 1 million de décollages).

Modélisation du système de freinage

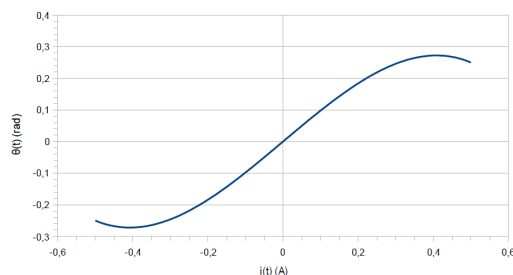
On souhaite définir un modèle pour l'asservissement en décélération. Pour cela, on propose de déterminer une fonction de transfert pour tous les constituants.

Modélisation de la servovalve

Une servovalve électrohydraulique est un appareil qui convertit une grandeur électrique (courant ou tension) en une grandeur hydraulique proportionnelle (débit ou pression).



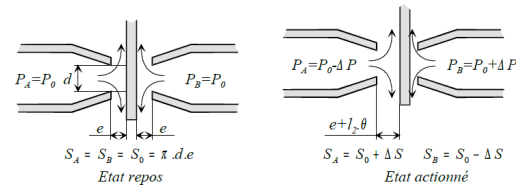
On donne ci-dessous la caractéristique reliant l'intensité $i(t)$ du moteur à l'angle $\theta(t)$ dont bascule l'armature.



Question 1 Que peut-on dire de cette caractéristique sur tout le domaine de variation de $i(t)$? Sachant que θ est très petit (varie autour de 0), on utilise la relation suivante

$\theta(t) = K_1 i(t)$. Déterminer la valeur de K_1 à partir de la courbe.

On admet que, pour le système buse-palette, la rotation d'angle θ de la palette se traduit par un accroissement ou diminution de la distance buse-palette. Les sections de fuite sont alors augmentées ou diminuées, ce qui entraîne une augmentation ou diminution des pressions P_A et P_B proportionnelle à ΔS .



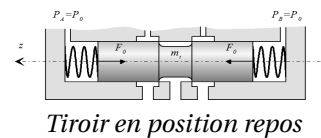
On peut alors définir les relations suivantes :

$$\Delta S(t) = K_2 \theta(t)$$

$$\Delta P(t) = K_3 \Delta S(t)$$

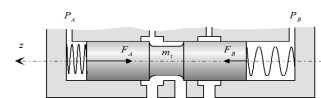
Cette pression différentielle permet de mettre en mouvement le tiroir de la servovalve.

En situation repos, lorsque $P_A = P_B = P_0$, le tiroir est en position milieu, $z = 0$ (cf figure ci-dessous).



Tiroir en position repos

En position travail, la pression différentielle se répercute aux extrémités du tiroir et provoque son déplacement.



Tiroir en position travail

On utilise les notations suivantes :

- m_t : masse du tiroir ;
- S_t : section du tiroir à ses extrémités ;
- F_A et F_B : efforts exercés par les deux ressorts de coefficient de raideur k_t montés de part et d'autre du tiroir du distributeur ;
- c_t : coefficient de frottement visqueux entre tiroir et cylindre.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au tiroir donne la relation suivante :

$$m_t \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -2k_t z(t) + 2S_t \Delta P(t) - c_t \frac{dz(t)}{dt}$$

Question 2 Calculer la fonction de transfert $H_I(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)}$ où $Z(p)$ et $\Delta P(p)$ sont les transformées de Laplace de $z(t)$ et $\Delta P(t)$ en précisant l'hypothèse retenue.

Question 3 Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et donner son ordre.

On admet pour finir que la pression d'utilisation $P_h(t)$ du fluide est proportionnelle au déplacement $z(t)$ du tiroir : $P_h(t) = K_4 z(t)$.

Question 4 À partir de toutes les informations précédentes (modélisation armature, buse/palette, tiroir...), recopier et compléter le schéma-bloc de la servovalve donné ci-dessous, en précisant les fonctions de transfert de chaque bloc (utiliser les notations algébriques).



Question 5 En déduire la fonction de transfert $S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)}$ de la servovalve.

Question 6 Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{1 + \frac{2\xi p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

où on donnera les expressions littérales de K_{sv} , ξ et ω_0 .

On souhaite que la réponse à une entrée $i(t)$ de type échelon de valeur i_0 soit la plus rapide possible **sans toutefois produire de dépassement**.

Question 7 A quelle valeur de ξ correspond cette spécification ?

Question 8 Démontrer que cette condition ne peut être satisfaite que si $k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$.

Question 9 Montrer alors que la fonction de transfert de la servovalve peut se mettre sous la forme :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

on donnera l'expression littérale de T_{sv} .

Question 10 Déterminer la réponse indicielle $P_h(t)$ pour une entrée échelon de valeur $i(t) = i_0 u(t)$.

$$\text{On rappelle que } \mathcal{L}(t e^{-at} u(t)) = \frac{1}{(p+a)^2}.$$

Modélisation de l'accéléromètre

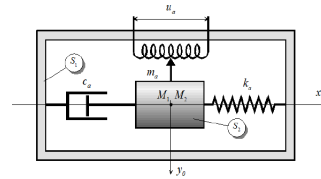
La centrale inertielle contient des accéléromètres qui permettent de mesurer les accélérations suivant les trois directions x_a , y_a , z_a d'un repère lié à l'avion.

L'accéléromètre renvoie au BSCU un signal électrique $u_a(t)$ image de l'accélération $a(t)$ suivant la direction x_a . La tension $u_a(t)$ est convertie en grandeur numérique a_m par un convertisseur analogique-numérique et rangée dans la mémoire du BSCU.

Principe de l'accéléromètre

Un accéléromètre (voir figure ci-dessous) est constitué de deux solides S_1 et S_2 :

- S_1 , le corps, est lié à l'avion,
- S_2 est lié à S_1 par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k_a et d'un frottement visqueux de valeur c_a .



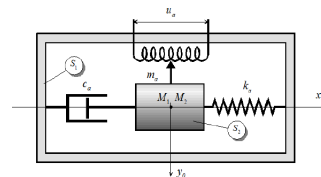
Accéléromètre en position repos

On considère (voir figure ci-dessus) deux points M_1 et M_2 appartenant respectivement à S_1 et S_2 . On note $x_1(t)$ et $x_2(t)$ leurs coordonnées dans un repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On considère nulles les conditions initiales. En particulier, à l'état repos, M_1 et M_2 sont confondus. Quand S_1 est animé d'un mouvement de translation suivant x_0 , on note :

$$\varepsilon(t) = x_1(t) - x_2(t) \quad (1)$$

$$a(t) = \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \text{ accélération de } S_1 \quad (2)$$



Accéléromètre en action

D'autre part, par application du principe fondamental de la dynamique, on a :

$$m_a \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = c_a \left(\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \right) + k_a (x_1(t) - x_2(t)) \quad (3)$$

avec m_a, c_a, k_a constantes.

Le solide S_2 est relié à un potentiomètre qui renvoie une tension u_a proportionnelle au déplacement ε du solide S_2 par rapport à S_1 . On note :

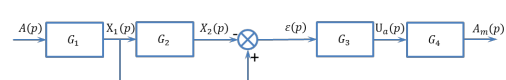
$$u_a(t) = K_p \varepsilon(t) \quad (4)$$

Finalement, le CAN (convertisseur analogique numérique) fournit la valeur a_m telle que :

$$a_m(t) = K_{CAN} u_a(t) \quad (5)$$

Question 11 Déterminer les transformées de Laplace des expressions (1) à (5).

Question 12 En déduire les transmittances G_i du schéma bloc ci-après.

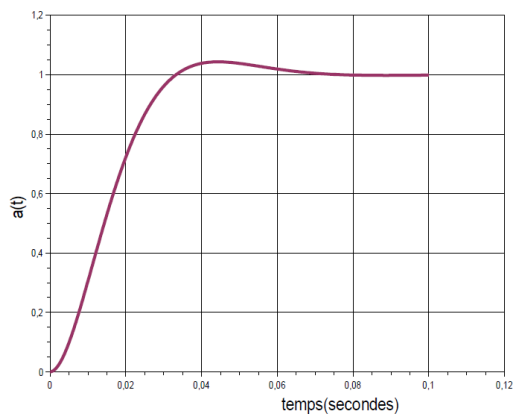


Question 13 En déduire la fonction de transfert $\frac{A_m(p)}{A(p)}$ et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{K_{acc}}{1 + 2\frac{\xi_a p}{\omega_a} + \frac{p^2}{\omega_a^2}}$$

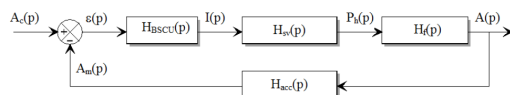
Donner les expressions de K_{acc} , ξ_a et ω_a .

Question 14 La figure ci-dessous donne la réponse indicielle (entrée unitaire) de l'accéléromètre. Identifier les valeurs des constantes K_{acc} , ξ_a et ω_a (On pourra utiliser les abaques donnés en annexe).



Étude de l'asservissement global

La boucle d'asservissement en décélération est donnée ci-après :



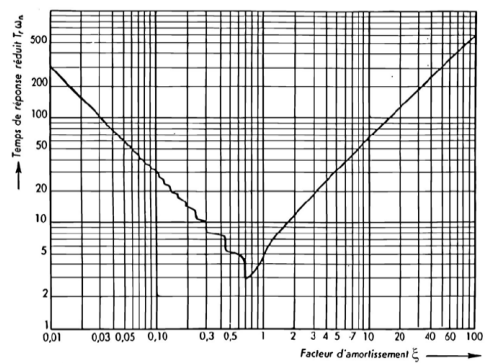
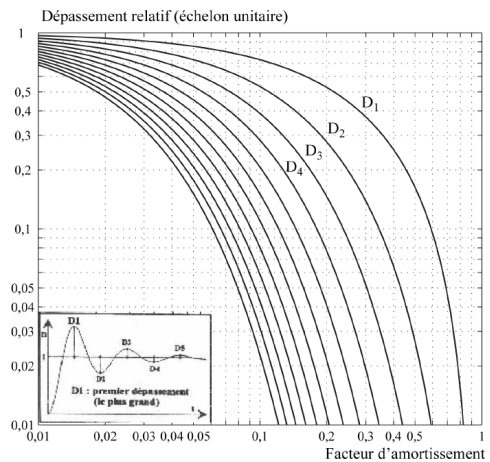
avec : $H_{sv}(p) = \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2}$, $H_{acc}(p) = \frac{K_{acc}}{1 + 2\frac{\xi_a}{\omega_a}p + \frac{p^2}{\omega_a^2}}$, $H_f(p) = K_f$, $H_{BSCU}(p) = K_c$.

Question 15 Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte. En déduire l'ordre, la classe et le gain de la FTBO(p).

Question 16 Exprimer l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de $a_c(p)$ et de la FTBO(p).

Question 17 En déduire l'écart en régime permanent à une entrée de type échelon d'accélération $a_c(t) = a_c u(t)$. Que peut-on dire de la performance de précision pour ce correcteur ?

Question 18 On utilise un correcteur (correcteur PI) plus évolué de fonction de transfert $H_{BSCU}(p) = K_i \frac{1 + T_i p}{p}$, déterminer à nouveau l'écart en régime permanent et conclure sur ce choix de correcteur.



Application 02 –
Corrigé

Freinage d'Airbus

David Violeau

Savoirs et compétences :

□ ...

Présentation du système

Modélisation du système de freinage

On souhaite définir un modèle pour l'asservissement en décélération. Pour cela, on propose de déterminer une fonction de transfert pour tous les constituants.

Modélisation de la servovalve

Question 1 Que peut-on dire de cette caractéristique sur tout le domaine de variation de $i(t)$? Sachant que θ est très petit (varie autour de 0), on utilise la relation suivante $\theta(t) = K_1 i(t)$. Déterminer la valeur de K_1 à partir de la courbe.

Correction Cette courbe est non linéaire sur tout le domaine de variation de i . Comme θ est très petit, on peut linéariser la courbe au voisinage de 0. La valeur K_1 correspond donc à la pente de la courbe. En conséquence, $K_1 = 1 \text{ rad} \cdot \text{A}^{-1}$.

Question 2 Calculer la fonction de transfert $H_t(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)}$ où $Z(p)$ et $\Delta P(p)$ sont les transformées de Laplace de $z(t)$ et $\Delta P(t)$ en précisant l'hypothèse retenue.

Correction En se plaçant dans les conditions de Heaviside, on peut transformer l'équation dans le domaine de Laplace. On a donc :

$$m_t p^2 Z(p) = -2k_t Z(p) + 2S_t \Delta P(p) - p c_t Z(p)$$

Ainsi,

$$H_t(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)} = \frac{2S_t}{m_t p^2 + c_t p + 2k_t}$$

Question 3 Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et donner son ordre.

Correction En factorisant par $2k_t$ on obtient :

$$H_t(p) = \frac{\frac{S_t}{k_t}}{1 + \frac{c_t}{2k_t} p + \frac{m_t}{2k_t} p^2}$$

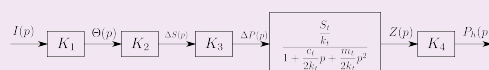
On admet pour finir que la pression d'utilisation $P_h(t)$ du

fluide est proportionnelle au déplacement $z(t)$ du tiroir : $P_h(t) = K_4 z(t)$.

Question 4 À partir de toutes les informations précédentes (modélisation armature, buse/palette, tiroir...), recopier et compléter le schéma-bloc de la servovalve donné ci-dessous, en précisant les fonctions de transfert de chaque bloc (utiliser les notations algébriques).

Correction On utilise les équations suivantes : $\theta(t) = K_1 i(t) \Leftrightarrow \Theta(p) = K_1 I(p)$, $\Delta S(t) = K_2 \theta(t) \Leftrightarrow \Delta S(p) = K_2 \Theta(p)$, $\Delta P(t) = K_3 \Delta S(t) \Leftrightarrow \Delta P(p) = K_3 \Delta S(p)$, $P_h(t) = K_4 z(t) \Leftrightarrow P_h(p) = K_4 Z(p)$.

On en déduit ainsi le schéma bloc suivant :



Question 5 En déduire la fonction de transfert $S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)}$ de la servovalve.

Correction On en déduit directement :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 \frac{S_t}{k_t}}{1 + \frac{c_t}{2k_t} p + \frac{m_t}{2k_t} p^2}$$

Question 6 Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{1 + \frac{2\xi p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

où on donnera les expressions littérales de K_{sv} , ξ et ω_0 .

Correction Par identification, on déduit de la question précédente :

$$K_{SV} = K_1 K_2 K_3 K_4 \frac{S_t}{k_t}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k_t}{m_t}}$$

$$\xi = \frac{c_t}{2\sqrt{2k_t m_t}}$$

On souhaite que la réponse à une entrée $i(t)$ de type échelon de valeur i_0 soit la plus rapide possible **sans toutefois produire de dépassement**.

Question 7 A quelle valeur de ξ correspond cette spécification ?

Correction Pour ne pas avoir de dépassement, il est nécessaire que $\xi \geq 1$. Le système est le plus rapide lorsque $\xi = 1$.

Question 8 Démontrer que cette condition ne peut être satisfaite que si $k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$.

$$\xi = 1 \Leftrightarrow c_t = 2\sqrt{2k_t m_t} \Leftrightarrow k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$$

Question 9 Montrer alors que la fonction de transfert de la servovalve peut se mettre sous la forme :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

on donnera l'expression littérale de T_{sv} .

Correction Lorsque $\xi = 1$, le discriminant du dénominateur de la fonction $S_v(p)$ est nul. En conséquence ce dénominateur possède une racine double. En utilisant la formulation proposée, cette racine est égale à $\frac{-1}{T_{sv}}$. En développant la fonction proposée, on peut donc identifier T_{sv} :

$$(1 + T_{sv}p)^2 = 1 + \frac{2p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2} \Leftrightarrow 1 + 2T_{sv}p + T_{sv}^2 p^2 = 1 + \frac{2p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}$$

On a donc :

$$T_{sv} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m_t}{2k_t}} = \sqrt{\frac{m_t}{2 \frac{c_t^2}{8m_t}}} = 2 \frac{m_t}{c_t}$$

Question 10 Déterminer la réponse indicielle $P_h(t)$ pour une entrée échelon de valeur $i(t) = i_0 u(t)$.

$$\text{On rappelle que } \mathcal{L}(te^{-at}u(t)) = \frac{1}{(p+a)^2}.$$

Correction On soumet le système à une entrée échelon. En conséquence, on a :

$$I(p) = \frac{i_0}{p}$$

On a alors :

$$P_h(p) = \frac{i_0}{p} \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

En réalisant la décomposition en éléments simples, on a :

$$P_h(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1 + T_{sv}p} + \frac{\gamma}{(1 + T_{sv}p)^2}$$

En calculant $P_h(p)p$ et en posant $p = 0$, on obtient $\alpha = K_{sv}i_0$.

En calculant $P_h(p)(1 + T_{sv}p)^2$ et en posant $p = -\frac{1}{T_{sv}}$, on obtient $\alpha = K_{sv}i_0$. On obtient alors $\gamma = -K_{sv}T_{sv}i_0$.

Enfin, en calculant $\lim_{p \rightarrow +\infty} pP_h(p)$ on obtient $\beta = -K_{sv}T_{sv}i_0$.

Au final, on obtient :

$$P_h(p) = K_{sv}i_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{T_{sv}}{1 + T_{sv}p} - \frac{T_{sv}}{(1 + T_{sv}p)^2} \right) = K_{sv}i_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{T_{sv}} + p} - \frac{1}{(1 + T_{sv}p)^2} \right)$$

En repassant dans le domaine temporel, on obtient :

$$P_h(t) = K_{sv}i_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{sv}}} - \frac{t}{T_{sv}} e^{-\frac{t}{T_{sv}}} \right) u(t)$$

Modélisation de l'accéléromètre

Principe de l'accéléromètre

Question 11 Déterminer les transformées de Laplace des expressions (1) à (5).

Correction On obtient directement :

$$\varepsilon(p) = X_1(p) - X_2(p)$$

$$A(p) = p^2 X_1(p)$$

$$m_a p^2 X_2(p) = c_a (p X_1(p) - p X_2(p)) + k_a (X_1(p) - X_2(p))$$

$$U_a(p) = K_p \varepsilon(p)$$

$$A_m(p) = K_{CAN} U_a(p)$$

Question 12 En déduire les transmittances G_i du schéma bloc ci-après.

Correction On a :

$$G_1(p) = \frac{X_1(p)}{A(p)} = \frac{1}{p^2}$$

D'après la troisième relation, on a :

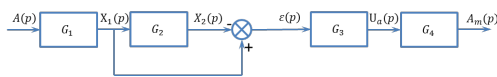
$$X_2(p)(m_a p^2 + c_a p + k_a) = X_1(p)(c_a p + k_a)$$

et donc

$$G_2(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$$

$$G_3(p) = \frac{U_a(p)}{\varepsilon(p)} = K_p$$

$$G_4(p) = \frac{A_m(p)}{U_a(p)} = K_{CAN}$$



Question 13 En déduire la fonction de transfert $\frac{A_m(p)}{A(p)}$ et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{K_{acc}}{1 + 2 \frac{\xi_a p}{\omega_a} + \frac{p^2}{\omega_a^2}}$$

Donner les expressions de K_{acc} , ξ_a et ω_a .

Correction D'après le schéma bloc, on a :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = G_1 (1 - G_2) G_3 G_4$$

D'où

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a} \right) K_p K_{CAN} = \frac{K_p K_{CAN}}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$$

En mettant la fonction cette fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{\frac{K_p K_{CAN} m_a}{k_a}}{\frac{m_a}{k_a} p^2 + \frac{c_a}{k_a} p + 1}$$

Au final :

$$K_{acc} = \frac{K_p K_{CAN} m_a}{k_a}$$

$$\xi_a = \frac{c_a}{2 \sqrt{k_a m_a}}$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$$

Question 14 La figure ci-dessous donne la réponse indicielle (entrée unitaire) de l'accéléromètre. Identifier les valeurs des constantes K_{acc} , ξ_a et ω_a (On pourra utiliser les abaques donnés en annexe).

Correction D'après le tracé de la réponse indicielle avec une entrée unitaire, on observe bien la réponse d'un système du second ordre (tangente horizontale et un dépassement).

L'entrée est unitaire et le système tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini. En conséquence on a $K_{acc} = 1$.

La valeur du premier dépassement est de 1,05. En conséquence le dépassement est de 5%. D'après l'abaque du dépassement relatif, on a donc : $\xi_a = 0,7$.

En utilisant l'abaque donnant $t_r \omega_0$ en fonction de ξ on lit que $t_r \omega_0 = 3$.

Enfin, en mesurant le temps de réponse à 5% on a $t_r \approx 0,03s$. En conséquence : $\omega_a = \frac{3}{0,03} \approx 100 \text{ rad/s}$.

Réponse acceptée : pour le temps de réponse à 5% $t_r = 0,045s$. En conséquence : $\omega_a = \frac{3}{0,045} \approx 66 \text{ rad/s}$.

Étude de l'asservissement global

Question 15 Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte. En déduire l'ordre, la classe et le gain de la FTBO(p).

Correction Par définition, la FTBO s'exprime par la relation : $FTBO(p) = H_{BSCU} \cdot H_{SC}(p) \cdot H_f(p) \cdot H_{acc}(p)$

$$= \frac{K_c K_{SV} K_f K_{acc}}{(1 + T_{sv} p)^2 \left(1 + \frac{2\xi_a}{\omega_a} p + \frac{p^2}{\omega_a^2} \right)}$$

Le gain de la FTBO est donné par le numérateur : $K_c K_{SV} K_f K_{acc}$.

L'ordre de la FTBO est donné par le monôme de plus haut degré : l'ordre est donc de 4 (lorsqu'on développe le système).

La classe du système est donné par le nombre d'intégrateur présent au dénominateur. Ici, p ne peut pas être mis en facteur du dénominateur. La classe est donc de 0.

Question 16 Exprimer l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de $a_c(p)$ et de la FTBO(p).

Correction D'après le schéma bloc, on a :

$$\varepsilon(p) = A_c(p) - A_m(p) = A_c(p) - \varepsilon(p) \cdot FTBO(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p) (1 - FTBO(p))$$

On a donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{A_c(p)}{(1 - FTBO(p))}$$

Question 17 En déduire l'écart en régime permanent à une entrée de type échelon d'accélération $a_c(t) = a_c u(t)$. Que peut-on dire de la performance de précision pour ce

correcteur?

Correction L'écart est donné par la fonction ε . L'écart en régime permanent est donné par la limite de $\varepsilon(t)$ en l'infini. D'après le théorème de la valeur finale on a donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p A_c(p)}{(1 - FTBO(p))}$$

L'entrée est un échelon d'accélération d'amplitude a_c . En conséquence :

$$A_c(p) = \frac{a_c}{p}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a_c}{p} \frac{p}{1 + FTBO(p)}$$

Or,

$$\lim_{p \rightarrow 0} FTBO(p) = K_c K_{SV} K_f K_{acc}$$

En conséquence,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \frac{a_c}{1 + K_c K_{SV} K_f K_{acc}}$$

L'écart statique de ce système n'étant pas nul, le système n'est donc pas précis.

Question 18 On utilise un correcteur (correcteur PI) plus évolué de fonction de transfert $H_{BSCU}(p) = K_i \frac{1 + T_i p}{p}$, déterminer à nouveau l'écart en régime permanent et conclure sur ce choix de correcteur.

Correction Il suffit dans un premier temps de calculer la limite quand p vers 0 de la nouvelle FTBO.

Cette FTBO vaut :

$$FTBO(p) = \frac{K_c K_{SV} K_f K_{acc}}{(1 + T_{sv} p)^2 \left(1 + \frac{2\xi_a}{\omega_a} p + \frac{p^2}{\omega_a^2} \right)} \frac{K_i (1 + T_i p)}{p}$$

On a alors :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} FTBO(p) = +\infty$$

En conséquence,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

L'écart statique étant nul, le système est donc précis.