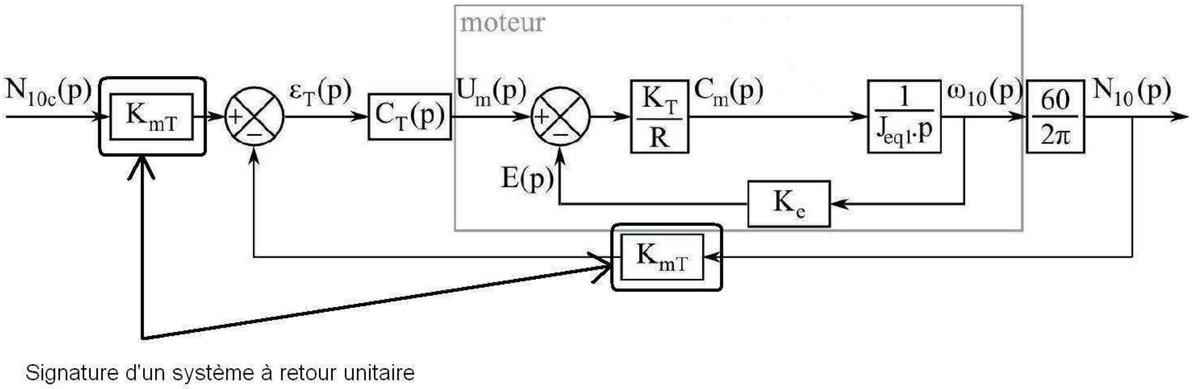
Le tambour peut être considéré comme un cylindre plein de rayon R_2 , de hauteur L et de masse $\rho\pi R_2^2 L$ auquel on soustrait un cylindre plein de rayon R_1, de hauteur L et de masse $\rho\pi R_1^2 L$. On aura donc :

$$J_1 = \rho\pi R_2^2 L \frac{R_2^2}{2} - \rho\pi R_1^2 L \frac{R_1^2}{2} \qquad \boxed{J_1 = \frac{\rho\pi}{2} L\left(R_2^4 - R_1^4\right)} \quad \boxed{J_1 = 427\ kg.m^2}$$

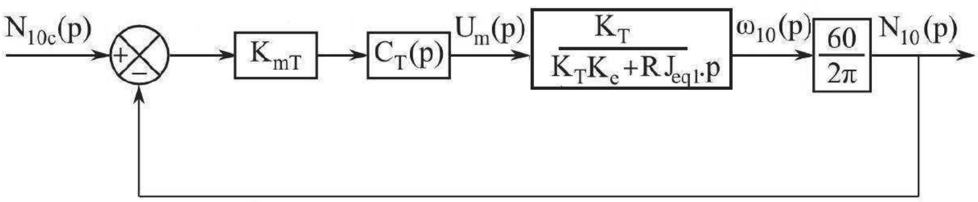
Donc : $\boxed{J_{eq1} = 528{,}2\ kg.m^2}$

Question 16 : mettre le schéma de la figure 12 sous la forme de la figure 14. Donner les expressions sous forme canonique de $H_1(p)$ et de $H_2(p)$ en fonction des données du moteur $M_{tambour}$.

On va utiliser le théorème de superposition et commencer par déterminer $N_{10}(p)$ en fonction de $N_{10C}(p)$ lorsque le couple résistant est nul. On a donc le schéma suivant :



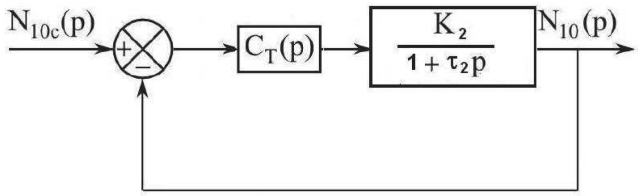
La fonction de transfert du moteur est : $\dfrac{\omega_{10}(p)}{U_m(p)} = \dfrac{K_T}{RJ_{eq1}p\left(1+\dfrac{K_TK_e}{RJ_{eq1}p}\right)} = \dfrac{K_T}{K_TK_e + RJ_{eq1}p}$



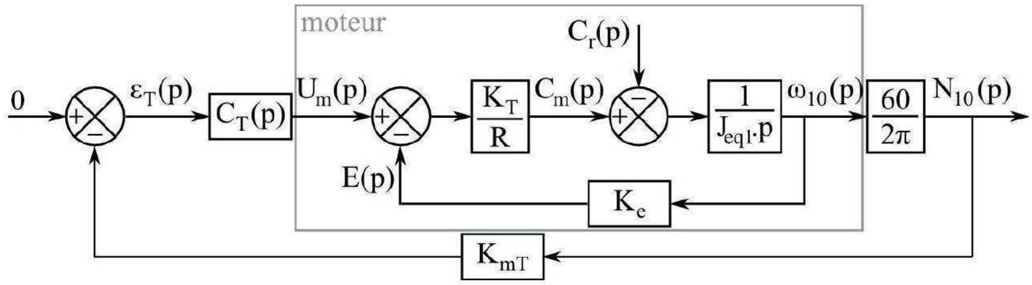
$$H_2(p) = \frac{60}{2\pi}\frac{K_{mT}K_T}{K_TK_e + RJ_{eq1}p} \qquad \boxed{H_2(p) = \frac{60K_{mT}}{2\pi K_e}\frac{1}{1+\dfrac{RJ_{eq1}}{K_TK_e}p}}$$

$$\boxed{K_2 = \frac{60K_{mT}}{2\pi K_e}} \qquad \boxed{\tau_2 = \frac{RJ_{eq1}}{K_TK_e}}$$

A couple résistant nul, on a bien le schéma suivant :



On va déterminer $N_{10}(p)$ en fonction de $Cr(p)$ lorsque la vitesse de consigne est nulle.



$\varepsilon_T(p) = -K_{mT} N_{10}(p)$ $\qquad E(p) = K_e \dfrac{2\pi}{60} N_{10}(p)$ $\qquad U_m(p) = -C_T(p) K_{mT} N_{10}(p)$

$$C_m(p) = \frac{K_T}{R}\left(-C_T(p) K_{mT} N_{10}(p) - K_e \frac{2\pi}{60} N_{10}(p)\right)$$

On a donc :

$$\left(-C_r(p) - \frac{K_T}{R}\left(C_T(p) K_{mT} N_{10}(p) + K_e \frac{2\pi}{60} N_{10}(p)\right)\right)\frac{60}{2\pi J_{eq1} p} = N_{10}(p)$$

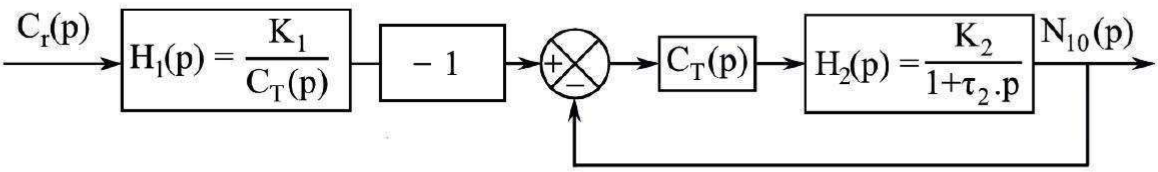
$$-C_r(p) = N_{10}(p)\frac{2\pi J_{eq1} p}{60} + \frac{K_T}{R}\left(C_T(p) K_{mT} N_{10}(p) + K_e \frac{2\pi}{60} N_{10}(p)\right)$$

$$-C_r(p) = N_{10}(p)\left(\frac{2\pi R J_{eq1} p + K_T\left(60 C_T(p) K_{mT} + K_e 2\pi\right)}{60R}\right)$$

$$-C_r(p)\frac{60R}{2\pi R J_{eq1} p + K_T\left(60 C_T(p) K_{mT} + K_e 2\pi\right)} = N_{10}(p) = \frac{60R}{2\pi K_e K_T}\frac{1}{1 + \dfrac{R J_{eq1}}{K_e K_T} p + \dfrac{60 K_{mT}}{2\pi K_e} C_T(p)}\left(-C_r(p)\right)$$

$$N_{10}(p) = \frac{R K_2}{K_{mT} K_T}\frac{1}{1 + \tau_2 p + K_2 C_T(p)}\left(-C_r(p)\right)$$

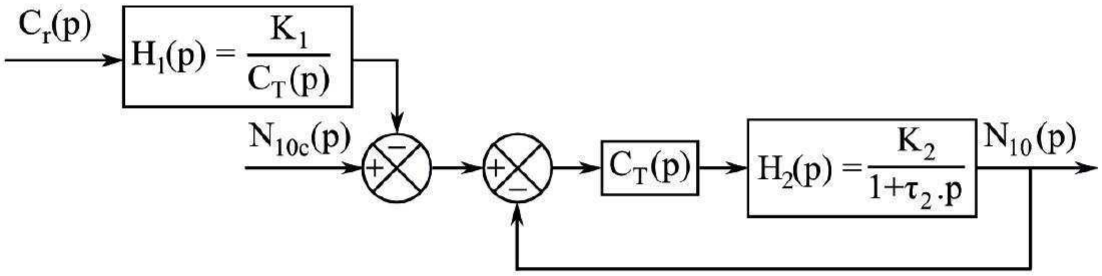
Ce qui doit correspondre au schéma suivant :



$$\frac{N_{10}(p)}{C_r(p)} = -\frac{K_1}{C_T(p)}\frac{C_T(p)K_2}{1+\tau_2 p}\frac{1}{1+\frac{C_T(p)K_2}{1+\tau_2 p}} = -K_1K_2\frac{1}{1+\tau_2 p+K_2C_T(p)} = -\frac{RK_2}{K_{mT}K_T}\frac{1}{1+\tau_2 p+K_2C_T(p)}$$

D'où : $\boxed{K_1 = \frac{R}{K_{mT}K_T}}$

En superposant, on arrive au résultat suivant :



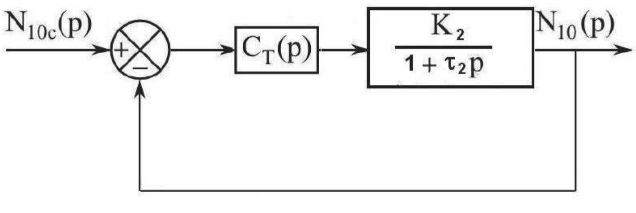
En faisant les applications numériques :

$\boxed{K_1 = 71{,}4\,tours/(\min Nm)}$ $\boxed{K_2 = 5{,}11\cdot 10^{-3}}$ $\boxed{\tau_2 = 20{,}2s}$

Question 17 : donner l'écart statique $\varepsilon_S = \lim_{p\to 0}(N_{10c}(p) - N_{10}(p) - H_1(p)C_r(p))$ pour les 4 cas du tableau ci-dessous en fonction de K_1, K_2, τ_2, K_c, K_i, $|N_{10c}(t)|$, $|N_{10c}(t)|$ et $|C_r(t)|$. Pour quel(s) correcteur(s), le critère de précision de la fonction FS5 est-il vérifié ?

Etant donné qu'on demande le calcul de l'erreur statique soit à perturbation nulle, soit à consigne nulle, j'utilise le théorème de superposition et décompose l'erreur statique comme étant la somme de l'erreur statique à couple résistant nul $\varepsilon_{S\,Cr=0}$ et de l'erreur statique à consigne nulle $\varepsilon_{S\,N10c=0}$.

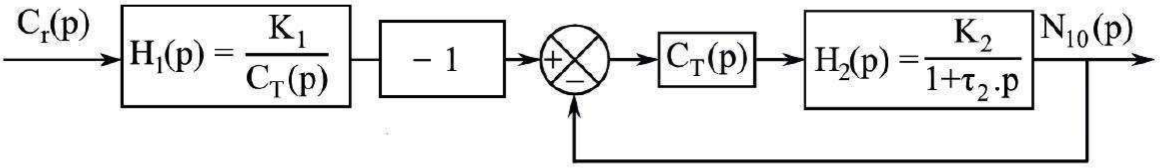
Lorsque le couple résistant est nul, le système est un système à retour unitaire donc :



$$H_2(p) = K_2\frac{1}{1+\tau_2 p}$$

$$\varepsilon_{S\,Cr=0} = \lim_{p\to 0} p\left(N_{10C}(p)\frac{1}{1+C_T(p)H_2(p)}\right)$$

Lorsque la consigne est nulle :



$$\varepsilon_{S\,N10c=0}=\lim_{p\to0} p\left(0-K_1K_2\frac{1}{1+\tau_2 p+K_2C_T(p)}(-C_r(p))\right)=\lim_{p\to0} p\left(K_1K_2\frac{1}{1+\tau_2 p+K_2C_T(p)}C_r(p)\right)$$

D'où :

$$\varepsilon_S=\lim_{p\to0} p\left(N_{10C}(p)\frac{1}{1+C_T(p)H_2(p)}\right)+\lim_{p\to0} p\left(K_1K_2\frac{1}{1+\tau_2 p+K_2C_T(p)}C_r(p)\right)$$

On a les cas suivants :

ε_S	$C_T(p)=K_c$	$C_T(p)=K_c+\dfrac{K_i}{p}$
$N_{10c}(t)=2000$ tours/min $\quad C_r(t)=0$		
$N_{10c}(t)=0$ tour/min $\quad C_r(t)=3$ kN.m		

- Cas $C_T(p)=K_C$
  - Cas $N_{10C}(t)$=2000 tours/min $\quad C_r(t)$=0 Nm

$$\varepsilon_S=\lim_{p\to0}\frac{2000}{1+K_C\dfrac{K_2}{1+\tau_2 p}}\qquad \boxed{\varepsilon_S=\frac{2000}{1+K_CK_2}}$$

  - Cas $N_{10C}(t)$=0 tours/min $\quad C_r(t)$=3 Nm

$$\varepsilon_S=\lim_{p\to0}\left(K_1K_2\frac{1}{1+\tau_2 p+K_CK_2}3\right)\qquad \boxed{\varepsilon_S=\frac{3K_1K_2}{1+K_CK_2}}$$

- Cas $C_T(p)=\dfrac{K_i+K_C p}{p}$
  - Cas $N_{10C}(t)$=2000 tours/min $\quad C_r(t)$=0 Nm

$$\varepsilon_S=\lim_{p\to0}\left(\frac{2000}{1+\dfrac{K_i+K_C p}{p}\dfrac{K_2}{1+\tau_2 p}}\right)=\lim_{p\to0} 2000\frac{p(1+\tau_2 p)}{p(1+\tau_2 p)+K_2(K_i+K_C p)}\qquad \boxed{\varepsilon_S=0}$$

  - Cas $N_{10C}(t)$=0 tours/min $\quad C_r(t)$=3 Nm

$$\varepsilon_S=\lim_{p\to0} p\left(K_1K_2\frac{1}{1+\tau_2 p+\dfrac{K_i+K_C p}{p}K_2}\frac{3}{p}\right)=\lim_{p\to0}\left(\frac{3K_1K_2 p}{p+\tau_2 p^2+K_i+K_C pK_2}\right)\boxed{\varepsilon_S=0}$$

ε_S	$C_T(p)=K_C$	$C_T(p)=\dfrac{K_i+K_C p}{p}$
N_{10C}(t)=2000tours/min C_r(t)=0 Nm	$\dfrac{2000}{1+K_C K_2}$	0
N_{10C}(t)=0 tours/min C_r(t)=3 Nm	$\dfrac{3K_1K_2}{1+K_C K_2}$	0

Pour vérifier le critère, j'ai estimé qu'il devait être vérifié en considérant le couple résistant non nul.
Pour satisfaire le critère de la fonction FS5 avec le correcteur à action proportionnelle et en considérant que la valeur du couple résistant est conforme à celle donnée dans le sujet, il faut

$$\frac{2000}{1+K_C K_2}+\frac{3K_1K_2}{1+K_C K_2}=\pm 0{,}1 tours/\min \Leftrightarrow \frac{2000+3K_1K_2}{0{,}1}=\pm(1+K_C K_2)\Leftrightarrow 20011=\pm\left(1+5{,}1.10^{-3}K_C\right)$$

On a donc $20011=1+5{,}1.10^{-3}K_C$ ou $20011=-\left(1+5{,}1.10^{-3}K_C\right)$

$20010=5{,}1.10^{-3}K_C$ ou $20012=-5{,}1.10^{-3}K_C$

or $K_C>0$ donc $K_C=\dfrac{20010}{5{,}1}10^3=3923529$, ce qui est un gain élevé.

Avec le correcteur à action proportionnelle et intégrale, le critère de la fonction FS5 est toujours satisfait.

Question 18 : justifier que la stabilité théorique du système bouclé est indépendante des paramètres des correcteurs précédents.

La stabilité théorique du système bouclé ne dépend que de la fonction de transfert en boucle ouverte : $FTBO=C_T(p)H_2(p)$

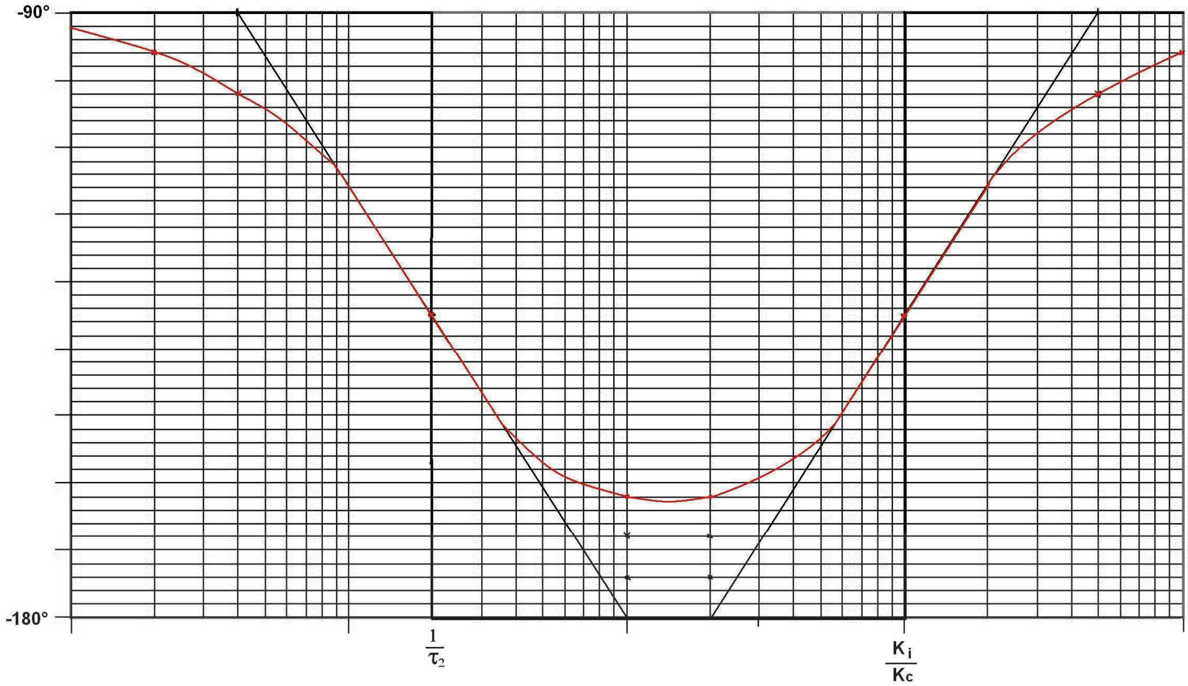
- Cas $C_T(p)=K_C$ $\quad FTBO=K_C\dfrac{K_2}{1+\tau_2 p}$

La FTBO est une fonction de transfert d'ordre un dont la valeur minimale de la phase est -90° : ce système sera toujours stable en boucl e fermée.

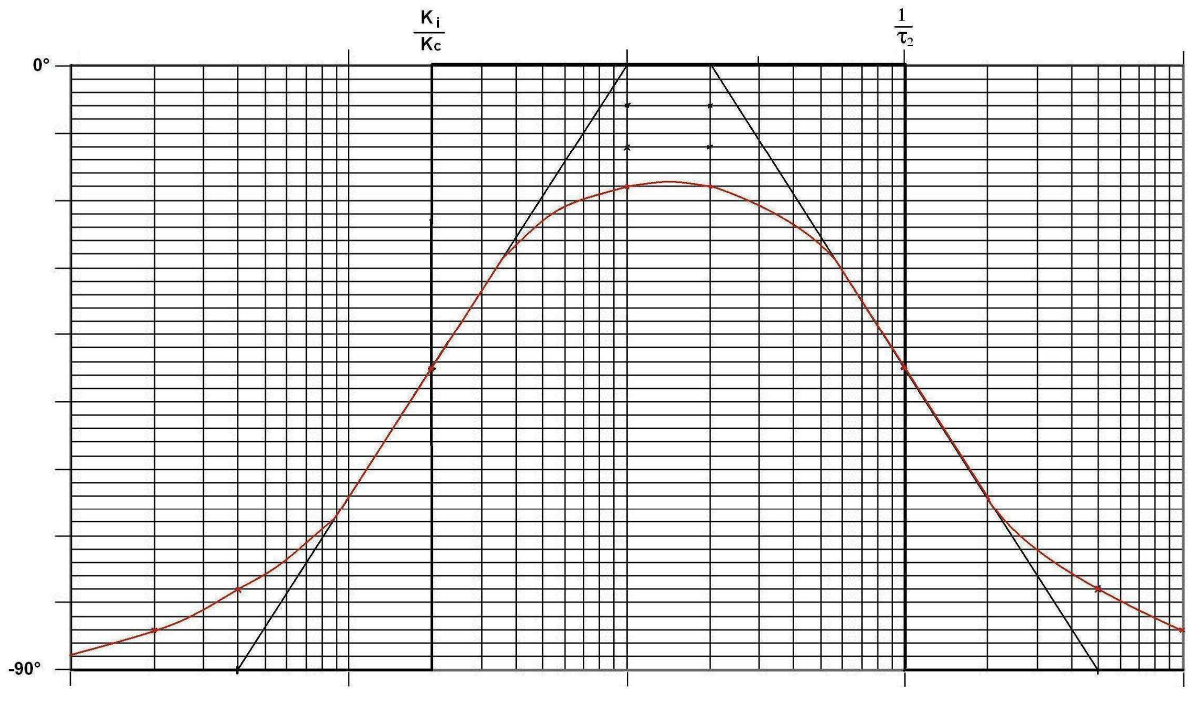
- Cas $C_T(p)=\dfrac{K_i+K_C p}{p}$ $\quad FTBO=\dfrac{K_i+K_C p}{p}\dfrac{K_2}{1+\tau_2 p}=K_2K_i\dfrac{1+\dfrac{K_C}{K_i}p}{p(1+\tau_2 p)}$

La phase de cette FTBO est toujours supérieure à -180°, en effet :

  - Si $\dfrac{K_C}{K_i}=\tau_2$, alors la phase est toujours égale à -90°.
  - Si $\dfrac{K_C}{K_i}<\tau_2$, alors le diagramme de Bode en phase est de la forme suivante :



- Si $\dfrac{K_C}{K_i} > \tau_2$, alors le diagramme de Bode en phase est de la forme suivante :



Question 19 : pour cette question, on prend $C_T(p) = K_c$ et $C_r = 0$. Mettre H(p) sous la forme : $H(p)=\dfrac{K}{1+\tau p}$. Donner les valeurs de K et τ en fonction de K_2, τ_2 et K_c. On donne $tr_{1\%} = 7\tau_1$ pour un premier ordre. Donner l'expression de la valeur minimale de Kc en fonction de K2, τ_2 et $tr_{1°/_{\circ\circ}}$ afin de vérifier le cahier des charges. Calculer alors la valeur de Kc permettant d'avoir un temps de réponse à 1‰ de 135 s.

$$H(p)=\frac{K_2K_C}{1+\tau_2 p+K_2K_C} \quad \boxed{H(p)=\frac{K_2K_C}{1+K_2K_C}\frac{1}{1+\frac{\tau_2}{1+K_2K_C}p}} \quad \boxed{K=\frac{K_2K_C}{1+K_2K_C}} \quad \boxed{\tau=\frac{\tau_2}{1+K_2K_C}}$$

On veut $tr_{1°/_{\circ\circ}}=7\tau=135s$

$$7\tau=\frac{7\tau_2}{1+K_2K_C}=tr_{1°/_{\circ\circ}} \Leftrightarrow tr_{1°/_{\circ\circ}}(1+K_2K_C)=7\tau_2 \quad \boxed{K_C=\frac{\frac{7\tau_2}{tr_{1°/_{\circ\circ}}}-1}{K_2}} \quad \boxed{K_{C\min i}=9,3}$$

Question 20 : pour cette question, on prend $C_T(p)=\frac{K_i}{p}$ et Cr = 0. Mettre H(p) sous la forme : $H(p)=\frac{K}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$.Donner les expressions de K3, m et ω0 en fonction de K2, τ_2 et Ki. On donne l'amplitude du premier dépassement (valeur relative) de la réponse indicielle d'un second ordre : $D_1=\exp\left(-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right)$.Calculer alors Ki permettant d'avoir un dépassement maximal de 0,1 %.

$$H(p)=K_2\frac{K_i}{p}\frac{1}{1+\tau_2 p+K_2\frac{K_i}{p}}=\frac{K_2K_i}{p+\tau_2p^2+K_2K_i} \quad \boxed{H(p)=\frac{1}{1+\frac{p}{K_2K_i}+\frac{\tau_2}{K_2K_i}p^2}}$$

$$\boxed{K_3=1} \quad \boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{K_2K_i}{\tau_2}}}$$

$$\frac{2m}{\omega_0}=\frac{1}{K_2K_i} \Leftrightarrow m=\frac{\omega_0}{2K_2K_i} \quad \boxed{m=\frac{1}{2\sqrt{\tau_2K_2K_i}}}$$

On veut $D_1=0,1\%=1.10^{-3}$, on aura forcément m<1.

$$LnD_1=-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}=-6,91 \Leftrightarrow (\pi m)^2=6,91^2(1-m^2) \Leftrightarrow m=\sqrt{\frac{6,91^2}{\pi^2+6,91^2}} \quad m=0,91$$

$$m=\frac{1}{2\sqrt{\tau_2K_2K_i}} \quad \boxed{K_i=\frac{1}{4m^2\tau_2K_2}} \quad \boxed{K_i=2,93}$$

Question 21 : les deux figures suivantes donnent le résultat de la simulation du modèle avec les valeurs de K_c et K_i trouvées aux questions précédentes. Conclure quant au respect des critères de la fonction FS5.

Les critères à vérifier sont les suivants, le débit extraction moyen horaire a déjà été vérifié précédemment.

FS5 : traiter les boues	Débit extraction moyen horaire	11 m^3/h ± 10 %
	Taux de siccité	20 % obtenu pour une vitesse relative de 2 tours/min
	Rapidité	Temps de réponse à 1 ‰ de 270 s ± 135 s
	Dépassement maximum pour la vitesse du tambour	0,2 % ± 0,1 %
	Marge de phase pour la vitesse du tambour	45° minimum
	Marge de gain pour la vitesse du tambour	7 db minimum
	Précision pour la vitesse du tambour	N_{10c} ± 0,1 tour/min N_{10c} : vitesse de consigne du tambour
	Précision pour la vitesse relative (différentielle)	V_{Rc} ± 0,1 tour/min V_{Rc} : vitesse relative de consigne

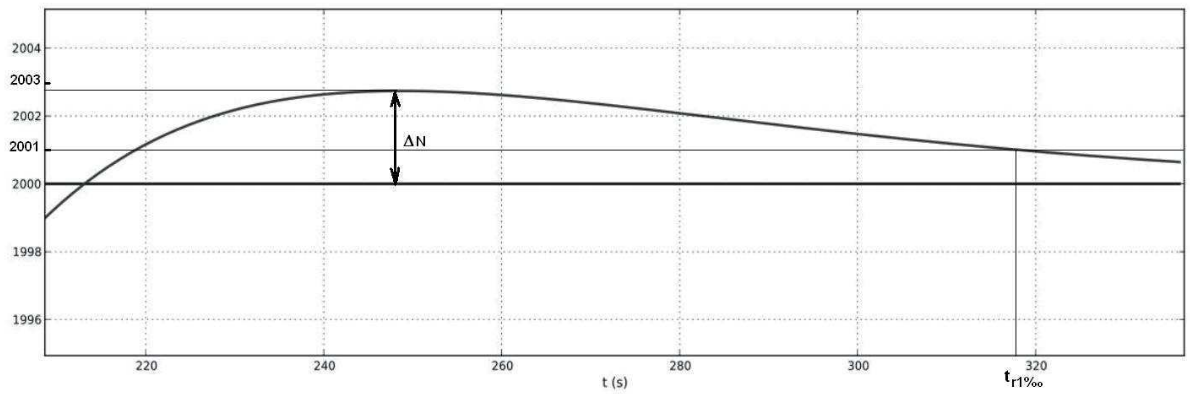


Figure 15 : Réponse de la FTBF à un échelon de 2 000 tours/min avec un zoom

$\boxed{tr_{1‰} = 318s}$ Le critère est vérifié pour $tr_{1‰}$

$\boxed{\Delta N < 3 tours/\min}$ 0,3% de 2000 tours/min correspond à 6 tours/min : le critère est vérifié pour le dépassement maximum pour la vitesse de tambour.

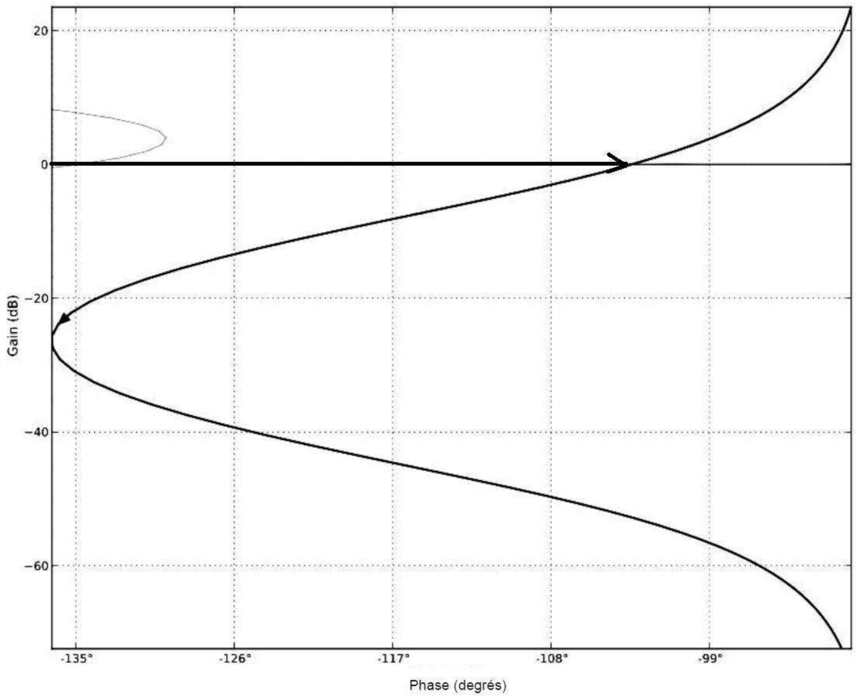


Figure 16 : Diagramme de Black de la FTBO dans le cas où $C_r = 0$

$\boxed{M\varphi = -104° + 180° = 76°}$ Le critère est vérifié pour la marge de phase puisqu'elle est supérieure à 45°.

$\boxed{MG \to +\infty}$ Le critère est vérifié pour la marge de gain puisqu'elle est supérieure à 7 dB.

Question 22 : conclure quant à la capacité de l'asservissement à vérifier le critère de précision de la vitesse relative.

D'après la figure 17, la vitesse relative tend bien vers 2 tours/min, donc le critère de précision de la vitesse relative est vérifié.

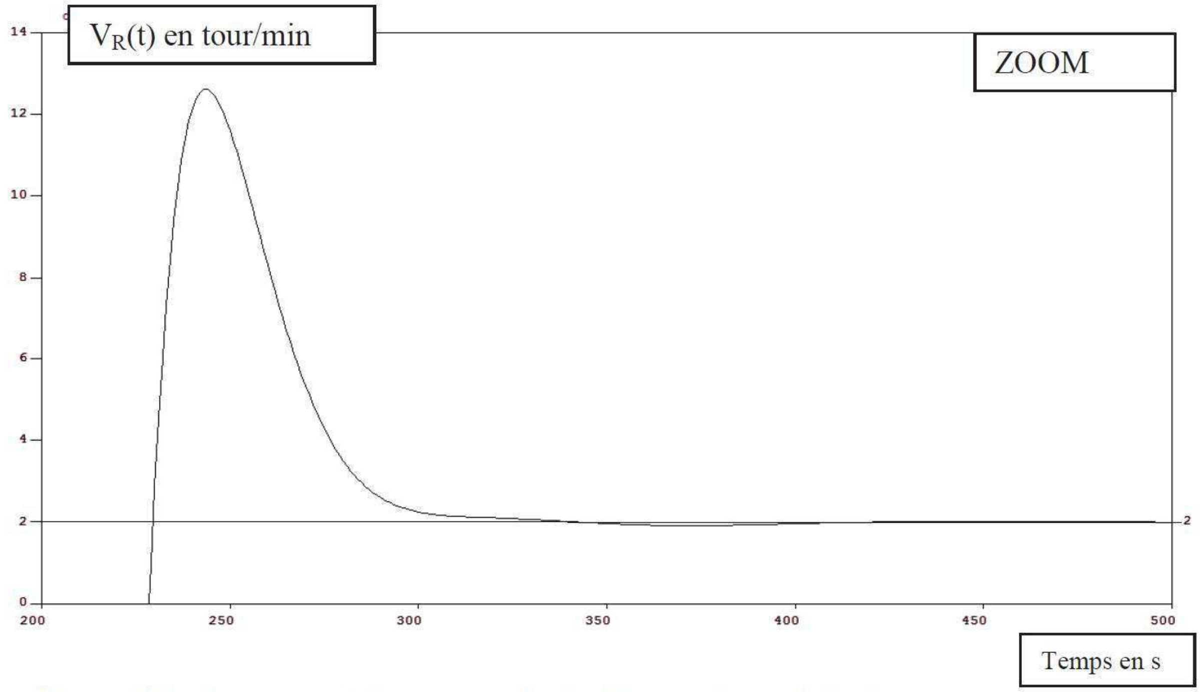


Figure 17 : Lancement du moteur de décalage au bout de 180 s avec une consigne de vitesse relative de 2 tours/min et une consigne de rotation du tambour de 2 000 tours/min

---

Fin du corrigé