

## 1 Systèmes d'ordre 1

**Définition** Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

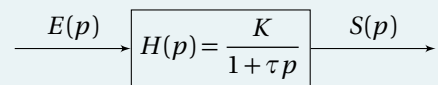
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

- $\tau$  la constante de temps en secondes ( $\tau > 0$ );
- $K$  le gain statique du système ( $K > 0$ ).



**Résultat — Réponse à un échelon d'un système du premier ordre.**

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude  $E_0$ . Lorsque  $E_0 = 1$  ( $1/p$  dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

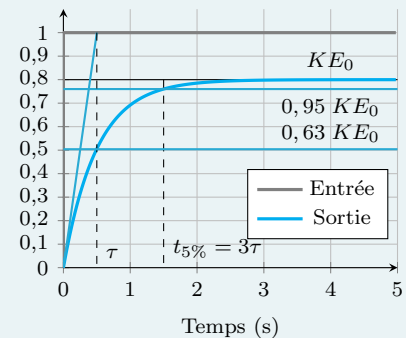
Analytiquement, on montre que  $s(t) = K E_0 u(t) (1 - e^{-t/\tau})$ .

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- le gain à partir de l'asymptote  $K E_0$ ;
- la constante de temps à partir de  $t_{5\%}$  ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- valeur finale  $s_{\infty} = K E_0$ ;
- pente à l'origine **non nulle**;
- $t_{5\%} = 3\tau$ ;
- pour  $t = \tau$ ,  $s(\tau) = 0,63 s_{\infty}$ .



**Résultat — Réponse à un échelon d'un système du premier ordre.**

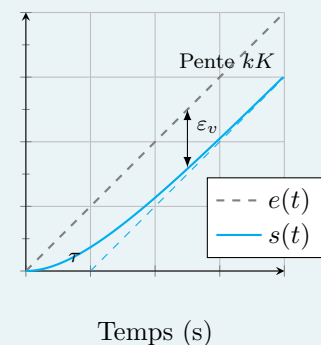
On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente  $k$  :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que  $s(t) = K k (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}) u(t)$ .

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- pente de l'asymptote  $K k$ ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses :  $t = \tau$ ;
- $\varepsilon_v = k K \tau$ .



## 2 Systèmes d'ordre 2

**Définition** Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

$E(p) \rightarrow \boxed{\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} \rightarrow S(p)$

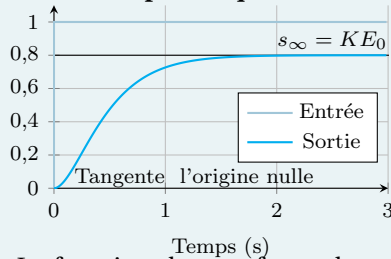
On note :

- $K$  est appelé le gain statique du système (rapport des unités de  $S$  et de  $E$ );
- $\xi$  (lire  $xi$ ) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- $\omega_0$  pulsation propre du système (rad/s ou  $s^{-1}$ ).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

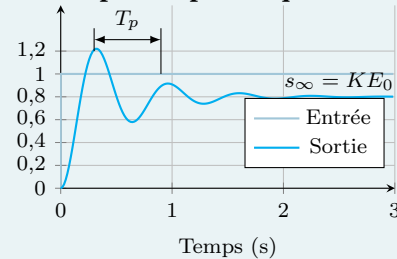
### Résultat

$\xi \geq 1$  : système non oscillant et amorti  
(apériodique)



- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.

$\xi < 1$  : système oscillant et amorti  
(pseudo périodique)



- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$ .
- La valeur du premier dépassement vaut :  $D_1 = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ .

### Résultat

- Pour  $\xi = 0$  le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude  $K E_0$  ( $2K E_0$  crête à crête).
- Pour  $\xi \approx 0,69$  le système du second ordre le temps à un de réponse à 5% le plus petit **avec dépassement** et  $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ .
- Pour  $\xi = 1$  on obtient le système du second ordre plus rapide **sans dépassement**.