Application 02

Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Concours Centrale Supelec PSI 2006

Savoirs et compétences :

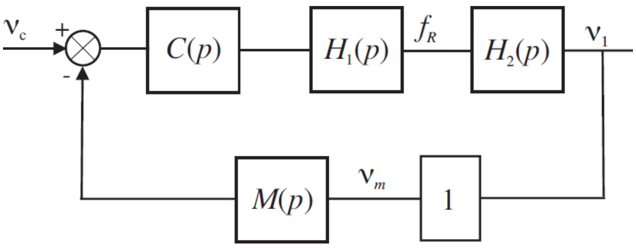
- ❒ ...

Mise en situation

L'objet de cette étude est l'analyse du système de freinage mécanique à énergie pneumatique installé sur les TGV Duplex. Par soucis de sécurité, il est indispensable d'éviter le blocage des roues (phénomène appelé enrayage) lors du freinage. Pour cela il est nécessaire de maîtriser la vitesse de glissement entre la roue et le rail.

Objectif L'objectif est d'étudier la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation.

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure suivante où ν_c est la consigne de glissement.



Structure de la chaîne de régulation de glissement

On note :

- $H_1(p)$ la fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électrovalve) ;
- $H_2(p)$ la fonction de transfert de la roue au freinage ;
- $C(p)$ le correcteur de la boucle de régulation ;
- $M(p)$ la fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement,cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure ;
- ν_m : glissement estimé.

On adoptera pour la suite : $H_1(p) = \dfrac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}$ et $M(p) = \dfrac{1}{1+0,05p}$.

Pour une vitesse de train $V_T = 200\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$, le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse du train par rapport au rail V_T ne font pas l'objet de cette étude.

On a $M = 8200\,\text{kg}$, $V_T = 200\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$, $I/r^2 = 400\,\text{kg}$, $g = 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

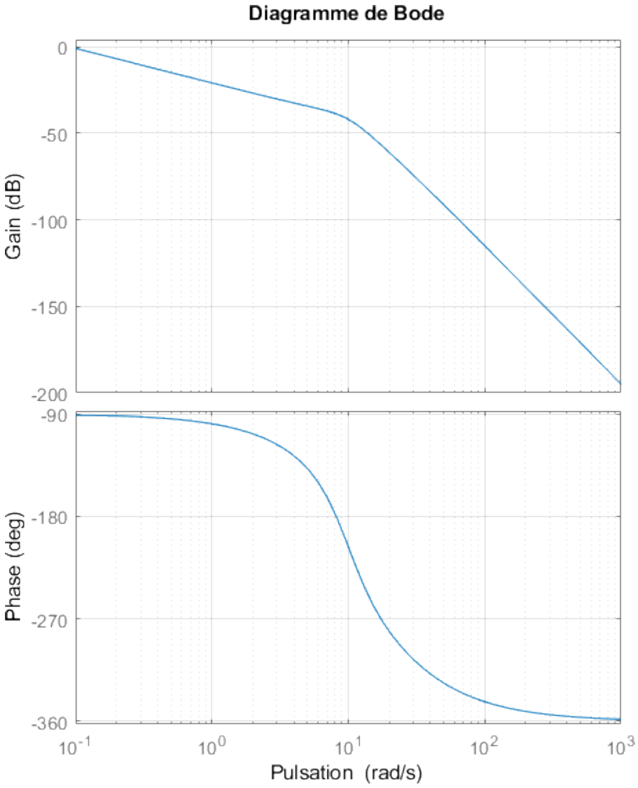
Marges de stabilité, performances en boucle ouverte	
Pulsation de coupure à 0 dB	$\omega_c \simeq 1\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$
Marge de phase	$\Delta\varphi \geq 60°$ au point de fonctionnement nominal B
Stabilité quel que soit le point de fonctionnement sur la caractéristique $\mu = f(\nu)$	
Réponse à un échelon de consigne de glissement	
Écart en régime permanent	Nul
Temps du 1er maximum	$t_m \leq 3{,}5\,\text{s}$
Dépassement	$D \simeq 18\,\%$
Réponse à une variation en échelon de l'adhérence	
Écart en régime permanent	Nul
Temps de réponse	$t_r \leq 9\,\text{s}$

Cahier des charges de la boucle de régulation de glissement pour $V_T = 200\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$

Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

On donne la fonction de transfert entre le glissement relatif et la force de freinage : $H_2(p) = \dfrac{\nu_1(p)}{F_R(p)} = \dfrac{45\cdot 10^{-6}}{p}$.

Question 1 *En prenant $C(p) = 1$, compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.*



Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est : $C(p)=K_r\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)$.

Question 2 *Calculer la valeur que doit prendre l'argument de $C(p)$ afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure ω_c souhaitée.*

> **Méthode** Si on note ω_c on définit la pulsation de coupure telle que $|\text{FTBO}(j\omega_c)|=0\,\text{dB}$. On peut alors définir la marge de phase par $M\varphi=\arg[\text{FTBO}(j\omega_c)]-(-180°)$.

Question 3 *Calculer la valeur minimale, T_{imin}, que l'on peut conférer à la constante T_i de l'action intégrale du régulateur.*

Question 4 *En adoptant $T_i=T_{imin}$, déterminer alors le gain K_r du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)*

> **Méthode** Il faut chercher K_r tel que $20\log\|\text{FTBO}(j\omega_c)\|=0$.

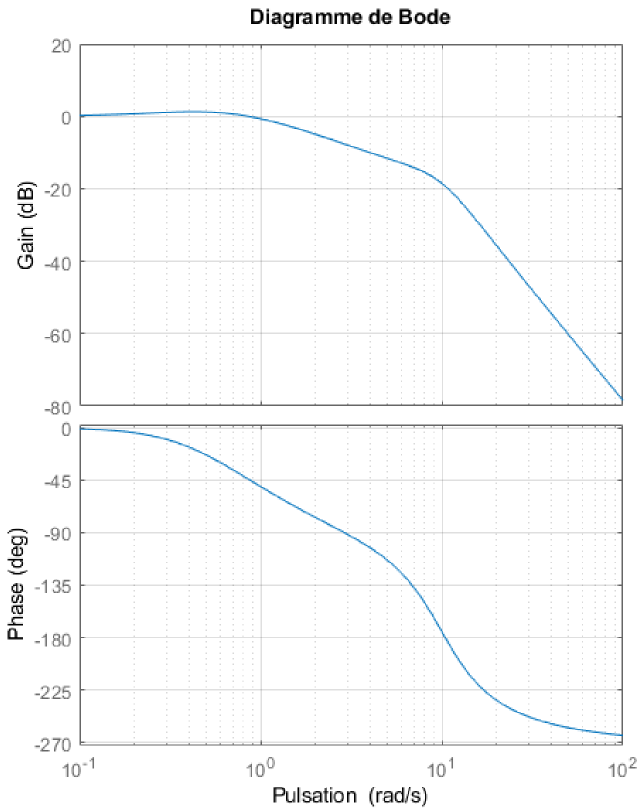
Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérification concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de glissement : temps du 1er maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée $F(p)=\dfrac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)}$, on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante : $F(p)=\dfrac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)}=\dfrac{K_f(1+\tau_1 p)}{(1+\tau_2 p)^2\left(1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$.

On supposera sans aucune justification que $\omega_0>\dfrac{1}{\tau_2}$.

Question 5 *En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$, justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.*



Question 6 *Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.*

Question 7 *En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert $F(p)$ par la forme suivante : $F(p)=\dfrac{\nu_1(p)}{\nu_c(p)}=\dfrac{K_f(1+\tau_1 p)}{(1+\tau_2 p)^2}$.*

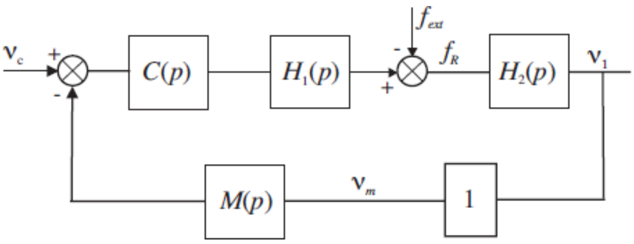
On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement : $f(t)=\left(\dfrac{\tau_2-\tau_1}{\tau_2^3}t+\dfrac{\tau_1}{\tau_2^2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_2}}u(t)$.

Question 8 *Calculer le temps du 1er maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif $\nu_c(t) = \nu_{c0}\,u(t)$ où $u(t)$ désigne l'échelon unité.*

Question 9 *Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.*

Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

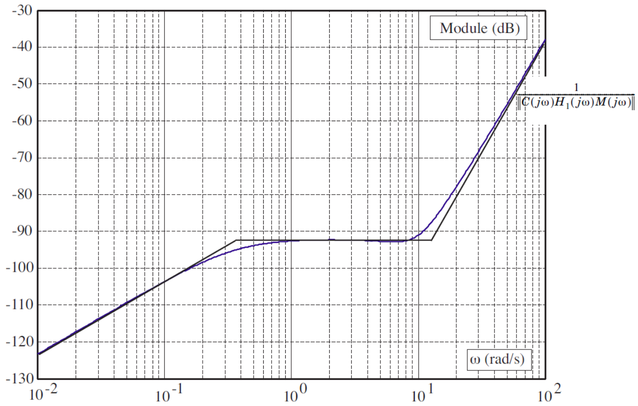
La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive . On admet que cette modélisation conduit au schéma bloc représenté sur la figure ci-dessous.



On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

Question 10 *Déterminer la fonction de transfert $F_2(p) = \dfrac{\nu_1(p)}{F_{ext}(p)}$ entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose ν_c nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée $||F_2(j\omega)||$, de cette fonction peut être approché par la relation : $||F_2(j\omega)|| = \min\left[||H_2(j\omega)||;\dfrac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}\right]$.*

Question 11 *La figure suivante comporte le tracé de la fonction $\dfrac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}$. Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction $||H_2(j\omega)||$.*



Question 12 *En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction $||F_2(j\omega)||$. En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert $F_2(p)$ entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.*

Question 13 *Préciser les pôles de la fonction $F_2(p)$ déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme : $F_2(p) = \dfrac{K_2 p}{1+Tp}$.*

Question 14 *En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif $\nu_1(t)$ en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice $F_{ext} = F_0\,u(t)$, où $u(t)$ représente l'échelon unité et avec $F_0 = 2000\,\text{N}$.*

Question 15 *Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif $\nu_1(t)$ en précisant la valeur initiale $\nu_1(0)$. En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse t_r à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale $\nu_1(0)$ (valeurs à considérer en valeur absolue).*

Retour sur le cahier des charges

Question 16 *Concluer sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.*

1. ...
2. $\arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] \geq -21{,}5°$.
3. $T_i \geq \tan(68,5) = 2{,}54\,\text{s}$.
4. ***
5. ***
6. ***
7. ***
8. ***
9. ***
10. ***

Application 02 – Corrigé

Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Concours Centrale Supelec PSI 2006 – Ressources UPSTI

Savoirs et compétences :

- ...

Mise en situation

Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

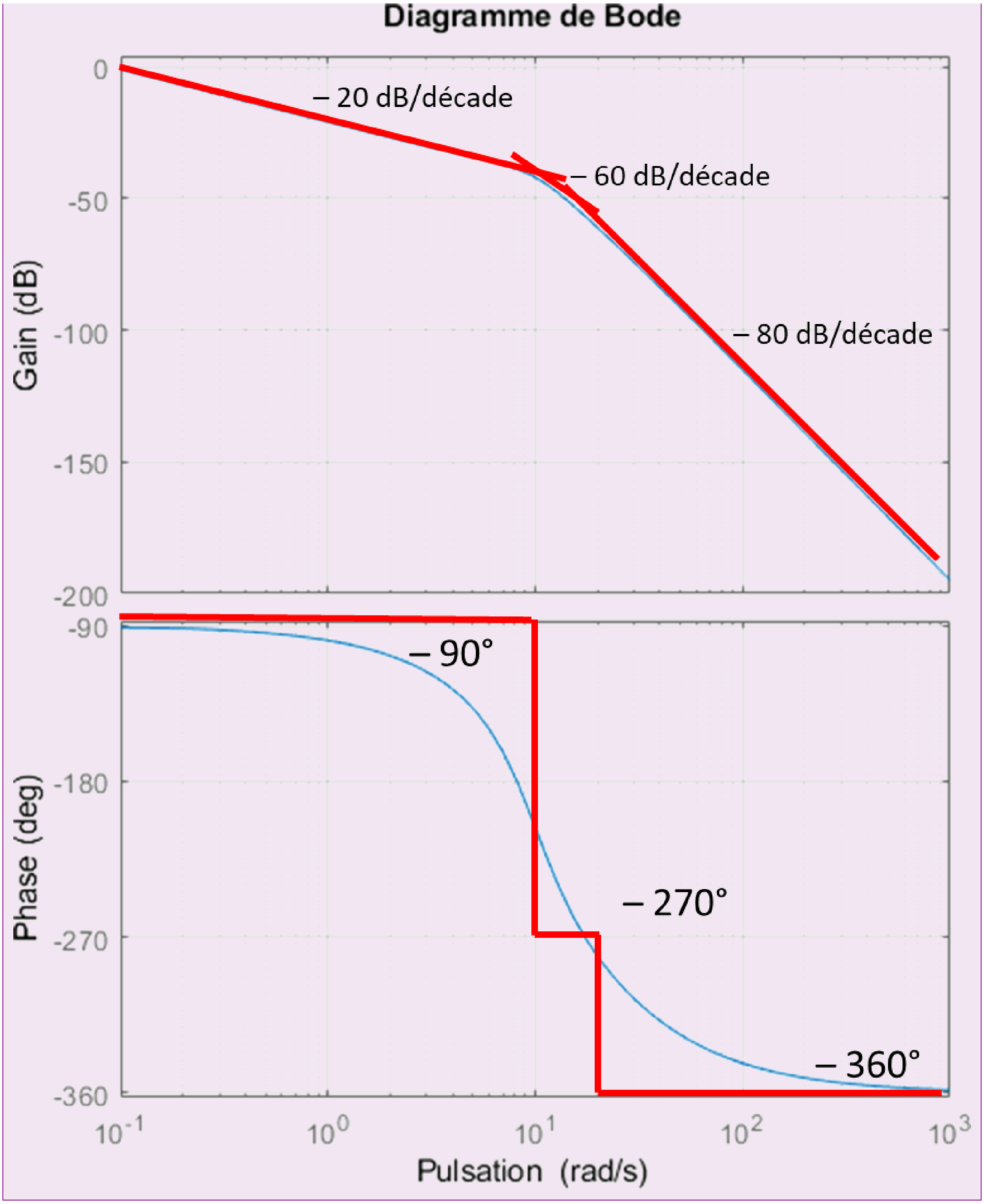
Question 1 *En prenant $C(p) = 1$, compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.*

Correction On a pour $H_1(p)$, $\dfrac{1}{\omega_0^2} = 0,01 \Leftrightarrow \omega_0 = 10$ et $2\dfrac{\xi}{\omega_0} = 0,1$ soit $\xi = 0,1 \times 10/2 = 0,5$. Les pulsations caractéristiques de la FTBO sont donc $\omega_0 = 10\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ et $1/0,05 = 20\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Pour tracer un diagramme de Bode avec un intégrateur, il est nécessaire de définir un point pour définir la « hauteur » du tracé. Pour cela on prend un point pour lequel seul l'intégrateur et les constantes ont de l'effet. Ainsi, pour $\omega = 0{,}1\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, on a $\text{FTBO}(p) \simeq \dfrac{2000 \times 45 \times 10^{-6}}{p}$. On a donc $20\log 0,09 - 20\log 0,1 \simeq -0{,}92\,\text{dB}$.

On peut dresser le tableau de variations de la FTBO puis tracer les asymptotes.

	$\omega \to 0$	$\omega = 10$	$\omega = 20$	$\omega \to \infty$
$\|H_1(j\omega)\|_{dB}$	$20\log 2000$	$-40\,dB/decade$	$-40\,dB/decade$	
$\|H_2(j\omega)\|_{dB}$	-20 $dB/decade$	$-20\,dB/decade$	$-20\,dB/decade$	
$\|M(j\omega)\|_{dB}$	0	0	$-20\,dB/decade$	
$\boldsymbol{\|FTBO(j\omega)\|_{dB}}$	**-20 $\boldsymbol{dB/decade}$**	$\boldsymbol{-60\,dB/decade}$	$\boldsymbol{-80\,dB/decade}$	
$\boldsymbol{Arg(FTBO(j\omega))}$	$\boldsymbol{-90°}$	$\boldsymbol{-270°}$	$\boldsymbol{-360°}$	



Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est : $C(p) = K_r\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)$.

Question 2 *Calculer la valeur que doit prendre l'argument de $C(p)$ afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure ω_c souhaitée.*

Méthode Si on note ω_c on définit la pulsation de coupure telle que $|\mathrm{FTBO}(j\omega_c)| = 0\,\mathrm{dB}$. On peut alors définir la marge de phase par $M\varphi = \arg\left[\mathrm{FTBO}(j\omega_c)\right] - (-180°)$.

Correction La pulsation de coupure souhaitée est $\omega_c \simeq 1\,\text{rad s}^{-1}$. On cherche donc K_r et T_i tels que $\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega_c\right)\right] - (-180°) = 60°$.

$$\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega\right)\right] = \arg\left[\underbrace{\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}}_{\to -5,7° \text{ qd } \omega=\omega_c} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+0,05p}}_{\to -2,8° \text{ qd } \omega=\omega_c} \cdot \underbrace{K_r}_{\to 0}\left(1+\frac{1}{T_i p}\right) \cdot \underbrace{\frac{45\cdot 10^{-6}}{p}}_{\to -90°}\right] = \arg\left[\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\right] - 98,5$$

R Ci-dessus, ce sont les **arguments** que l'on évalue lorsque $\omega = \omega_c$. L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

$\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega\right)\right] = \arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] - 98,5$.

Pour respecter la marge souhaitée, il est donc nécessaire que $\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega_c\right)\right] - (-180) \geq 60$ Soit $\arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] - 98,5 + 180 \geq 60$ et $\arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] \geq -21,5°$.

Question 3 *Calculer la valeur minimale, T_{imin}, que l'on peut conférer à la constante T_i de l'action intégrale du régulateur.*

Correction On en déduit que pour $\omega = \omega_c = 1$, $\arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] \geq -21,5° \Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) - 90 \geq -21,5° \Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) \geq 68,5°$ et donc $\Rightarrow T_i \geq \tan(68,5) = 2,54\,\text{s}$.

! **Attention** : à ce stade, la marge de phase serait de 60°**SI** la pulsation de coupure était de $1\,\text{rad s}^{-1}$ ce qui n'est pas encore le cas pour le moemnt.

Question 4 *En adoptant $T_i = T_{imin}$, déterminer alors le gain K_r du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)*

Méthode Il faut chercher K_r tel que $20\log||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0$.

Correction En raisonnant graphiquement à l'aide du diagramme en boucle ouverte non corrigé, on lit que le gain est d'environ −20 dB lorsque $\omega = 1$. La fonction de transfert du correcteur est $C(p) = K_r\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right) = K_r\dfrac{T_i p+1}{T_i p}$.

Le gain dB du correcteur doit donc être de 20 dB lorsque $\omega = 1$: $20\log K_r + 20\log\sqrt{T_i^2\omega^2+1} - 20\log T_i\omega = 20$ $\Leftrightarrow \log K_r + \log\sqrt{T_i^2+1} - \log T_i = 1 \Leftrightarrow \log K_r = 1 - \log\sqrt{T_i^2+1} + \log T_i$.

On a donc $K_r = 9,3$.

Anlaytiquement (à vérifier....) $20\log||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0 \Rightarrow ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 1$.

$$||\text{FTBO}\left(j\omega\right)|| = \left|\left|\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2} \cdot \frac{1}{1+0,05p} \cdot K_r\left(1+\frac{1}{T_i p}\right) \cdot \frac{45\cdot 10^{-6}}{p}\right|\right|$$

$$= \left|\left|\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2} \cdot \frac{1}{1+0,05p} \cdot K_r \frac{1+T_i p}{T_i p}\frac{45\cdot 10^{-6}}{p}\right|\right|$$

$$= \frac{K_r}{T_i\omega^2} 90\cdot 10^{-3}\sqrt{1+T_i^2\omega^2}\left|\left|\frac{1}{1+0,1p+0,01p^2}\frac{1}{1+0,05p}\right|\right| = \frac{K_r}{T_i\omega^2}90\cdot 10^{-3}\frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{\sqrt{1+0,05^2\omega^2}}\frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2\omega^2)^2+0,1^2\omega^2}}$$

$$= \frac{K_r}{T_i}90\cdot 10^{-3}\frac{\sqrt{1+T_i^2}}{\sqrt{1+0,05^2}}\frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2)^2+0,1^2}}$$

Question 5 *Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)*

Méthode Soit ω_φ la pulsation telle que $\varphi\left(\omega_\varphi\right) = -180°$. La marge de gain s'exprime alors par $MG = -20\log||H\left(j\omega_\varphi\right)||$.

Correction **Approche analytique** On résout $\arg\left[\text{FTBO}(j\omega)\right]=-180°$

$$\arg\left[\text{FTBO}(j\omega)\right]=\arg\left[\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}\cdot\frac{1}{1+0,05p}\cdot K_r\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\cdot\frac{45\cdot 10^{-6}}{p}\right]$$

Approche graphique

Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

Question 6 *En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$, justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.*

Correction

Question 7 *Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.*

Correction

- $K_f=1$: lorsque ω tend vers 0, le gain tend vers 0;
- $\omega_0=0,5$: valeur de la pulsation de résonance;
- $\tau_1=\dfrac{1}{0,9}=1{,}11\,\text{s}$;
- $\tau_2=\dfrac{1}{7}=0{,}14\,\text{s}$;
- $\xi<0,7$ (résonance).

Question 8 *En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert $F(p)$ par la forme suivante : $F(p)=\dfrac{v_1(p)}{v_c(p)}=\dfrac{K_f\left(1+\tau_1 p\right)}{\left(1+\tau_2 p\right)^2}$.*

Correction

La pulsation propre ω_0 est relativement loin de la bande passante, en conséquence sa dynamique sera rapide vis-à-vis du zéro et du pôle double (pôles dominants). On adopte donc :

$$\boxed{F(p)=\frac{v_1(p)}{v_c(p)}=\frac{(1+3,3\,p)}{(1+1,66\,p)^2}}$$

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement : $f(t)=\left(\dfrac{\tau_2-\tau_1}{\tau_2^3}t+\dfrac{\tau_1}{\tau_2^2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_2}}u(t)$.

Question 9 *Calculer le temps du 1[er] maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif $v_c(t)=v_{c0}u(t)$ où $u(t)$ désigne l'échelon unité.*

Correction

Calcul du temps du 1^er^ maximum

Le temps du 1er maximum est donné par $f(t_m)=0$, soit pour :

$$\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_2^3}t_m+\frac{\tau_1}{\tau_2^2}=0$$

On obtient donc :

$$\boxed{t_m=\frac{\tau_2\tau_1}{\tau_1-\tau_2}}$$

L'application numérique avec les valeurs adoptées conduit à $t_m=3,3$ s.

Calcul du dépassement

La réponse indicielle peut être obtenue par intégration de la réponse impulsionnelle, le dépassement étant donné par la valeur de la sortie pour $t=t_m$:

$$v(t_m)=\int_0^{t_m} f(t)dt=\int_0^{t_m}(ay(t)+b\dot{y}(t))dt=a\int_0^{t_m} y(t)dt+b\left[y(t)\right]_0^{t_m}$$

Avec $y(t)=te^{-t/\tau_2}$ dont l'intégration peut être effectuée facilement par parties :

$$\int_0^{t_m} te^{-t/\tau_2}=\left[-\tau_2te^{-t/\tau_2}-\tau_2^2e^{-t/\tau_2}\right]_0^{t_m}=-\tau_2t_me^{-t_m/\tau_2}-\tau_2^2e^{-t_m/\tau_2}+\tau_2^2$$

$$\boxed{v(t_m)=\frac{1}{\tau_2^2}\left[-\tau_2t_me^{-t_m/\tau_2}-\tau_2^2e^{-t_m/\tau_2}+\tau_2^2\right]+\frac{\tau_1}{\tau_2^2}t_me^{-t_m/\tau_2}}$$

Pour $t=t_m$ on obtient $v(t_m)=1,13$, soit un dépassement de 13%.

Question 10 *Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.*

Correction

- Le temps du 1er maximum est inférieur à 3,5 s. et le dépassement inférieur à 20% ce qui vérifie le cahier des charges.
- Le régulateur comportant une action intégrale, l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une consigne constante.

Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

Question 11 *Déterminer la fonction de transfert $F_2(p)=\dfrac{v_1(p)}{F_{ext}(p)}$ entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose v_c nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée $||F_2(j\omega)||$, de cette fonction peut être approché par la relation : $||F_2(j\omega)||=\min\left[||H_2(j\omega)||;\dfrac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}\right]$.*

Correction On a directement $F_2(p) = -\dfrac{H_2(p)}{1+H_2(p)M(p)C(p)H_1(p)}$.

On peut alors déterminer le module et on a $||F_2(j\omega)|| = \left|\left|\dfrac{H_2(j\omega)}{1+H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)}\right|\right|$.

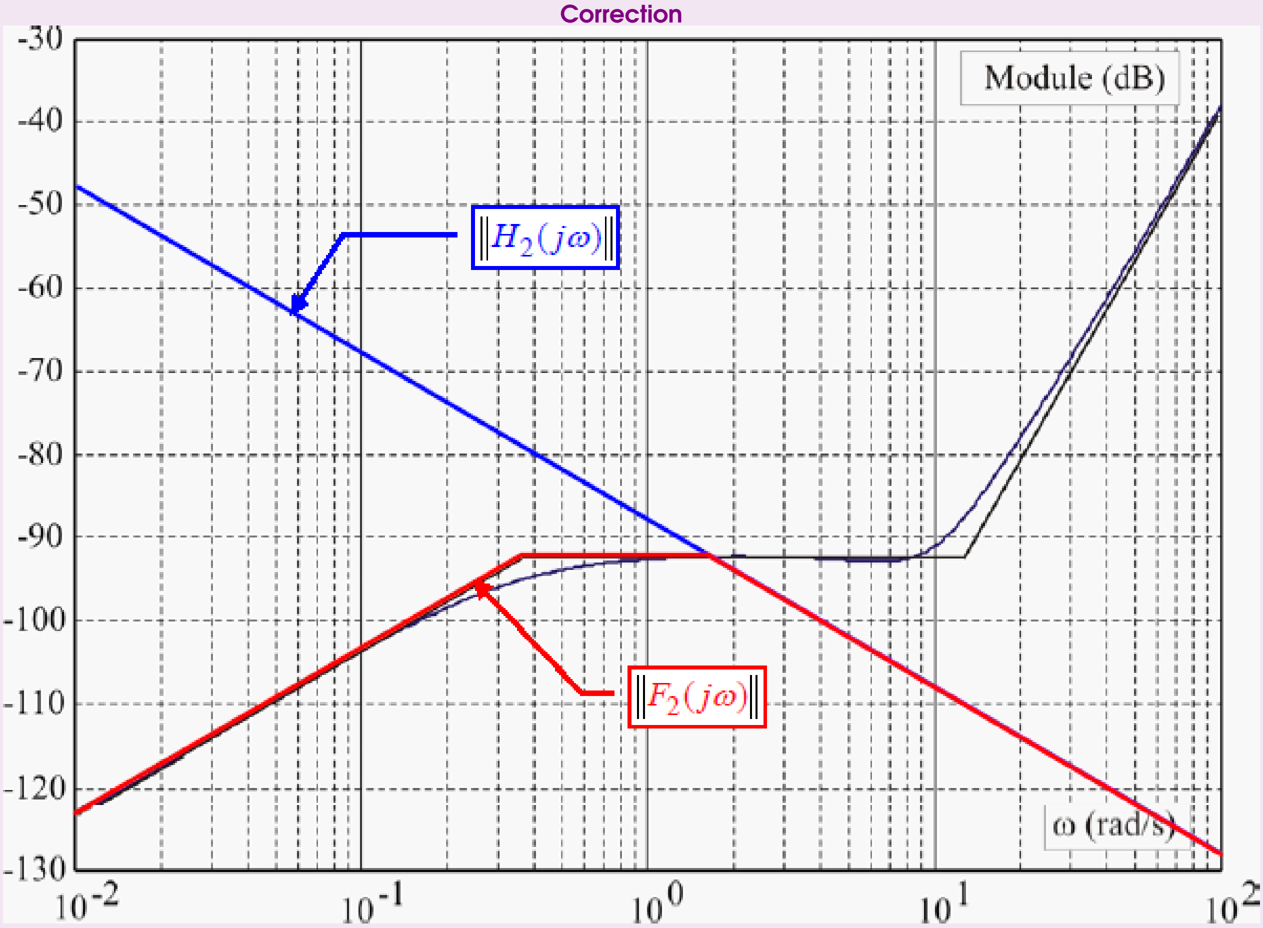
Dans ces conditions :

- si $\left|\left|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\right|\right| >> 1$ alors $||F_2(j\omega)|| \simeq \left|\left|\dfrac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)}\right|\right| \simeq \left|\left|\dfrac{1}{M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)}\right|\right|$;
- si $\left|\left|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\right|\right| << 1$ alors $||F_2(j\omega)|| \simeq \left|\left|H_2(j\omega)\right|\right|$.

On peut en conclure que $||F_2(j\omega)|| = \min\left[||H_2(j\omega)||; \dfrac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}\right]$.

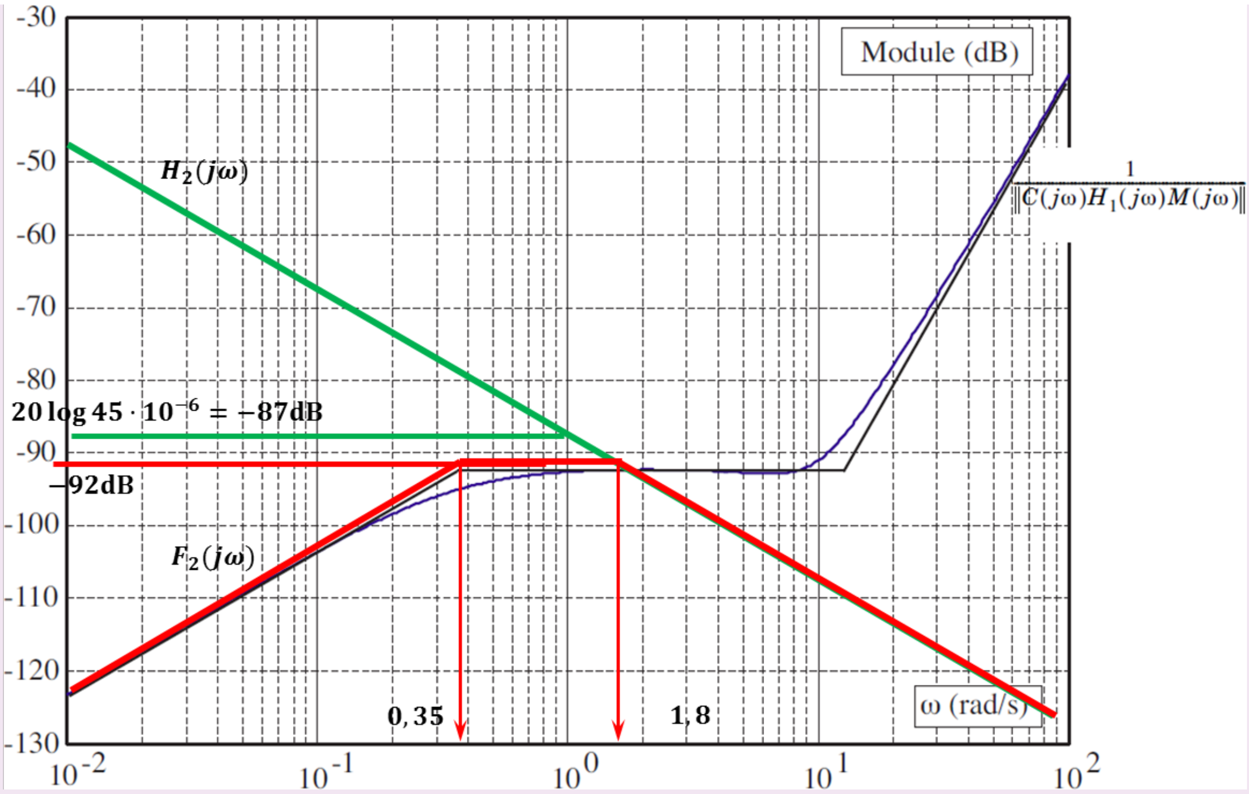
Question 12 *La figure suivante comporte le tracé de la fonction* $\dfrac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}$. *Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction* $||H_2(j\omega)||$.

Correction



Question 13 *En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction* $||F_2(j\omega)||$. *En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert* $F_2(p)$ *entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.*

Correction



En analysant les brisures de F_2, on peut proposer la fonction de transfert suivante : $F_2 = -\dfrac{Kp}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ avec $\tau_1 = \dfrac{1}{0,35} \simeq 2{,}9\,\text{s}$, $\tau_2 = \dfrac{1}{1,8} \simeq 0{,}6\,\text{s}$. Avec cette proposition, en basse fréquence, seul le dérivateur existe, ona donc $20\log K\omega = 20\log 0{,}01 K = -123$ soit $K = 100 \times 10^{-123/20} \simeq 7\cdot 10^{-5}$.

Au final, $F_2 = -\dfrac{7\cdot 10^{-5} p}{(1+2{,}9p)(1+0{,}6p)}$.

Question 14 *Préciser les pôles de la fonction $F_2(p)$ déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme : $F_2(p) = \dfrac{K_2 p}{1+Tp}$.*

Correction

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux pôles :

$$\begin{cases} p_1 = -0,35 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

Le pôle p_2 étant caractérisé par une dynamique relativement rapide par rapport à celle de p_1, on va pouvoir le négliger pour l'étude de la réponse temporelle. Soit la fonction approchée :

$$\boxed{F_2(p) = -\frac{\frac{p}{12100}}{(1+2,8p)}}$$

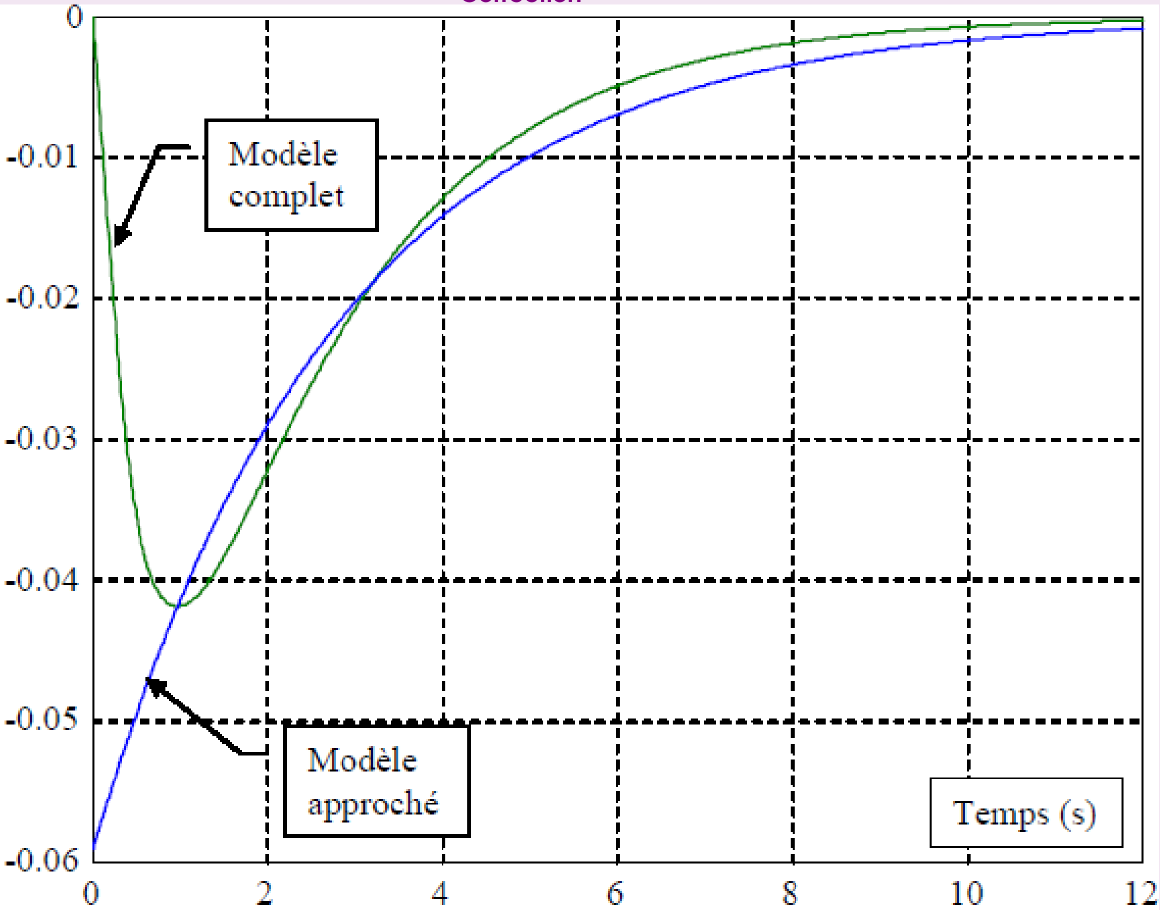
Question 15 *En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif $v_1(t)$ en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice $F_{ext} = F_0 u(t)$, où $u(t)$ représente l'échelon unité et avec $F_0 = 2000\,\text{N}$.*

Correction

La réponse à un échelon de perturbation est donnée sur la figure suivante, c'est la réponse typique d'une fonction du 1er ordre en partant d'une condition non nulle ($\nu_1 = 0,05$) avec une entrée nulle. Le temps de réponse est alors de $t_r = 3T = 8,4$ s.

Question 16 *Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif $\nu_1(t)$ en précisant la valeur initiale $\nu_1(0)$. En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse t_r à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale $\nu_1(0)$ (valeurs à considérer en valeur absolue).*

Correction



Calcul exact du temps de réponse

$$\nu_1(t_r) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t_r/T} = -0,05 \cdot \frac{K_2}{T} F_0 \quad \Rightarrow \quad t_r = T \cdot \ln(1/0,05) = 3T$$

Retour sur le cahier des charges

Question 17 *Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.*

- Le temps de réponse de 8,4 s. est inférieur au temps de réponse de 9 s. demandé. En conséquence on peut conclure que le cahier des charges est satisfait au regard de cette contrainte.

- Le régulateur comportant une action intégrale (donc avant le point d'entrée de la perturbation) l'erreur statique est nulle comme montré sur la réponse temporelle.

Correction

1. ...
2. $\arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] \geq -21{,}5\,°$.
3. $T_i \geq \tan(68,5) = 2{,}54\,\mathrm{s}$.
4. ***
5. ***
6. ***
7. ***
8. ***
9. ***
10. ***