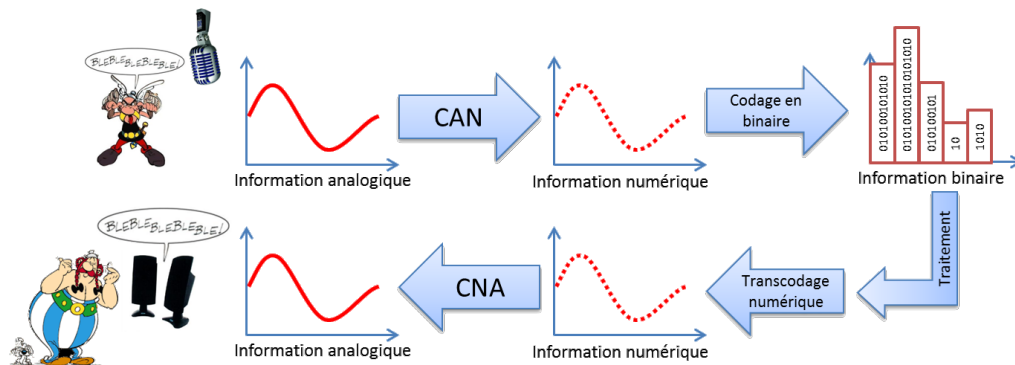


1 Définitions

Définition — Informations analogiques et numériques.

- Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
- Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).

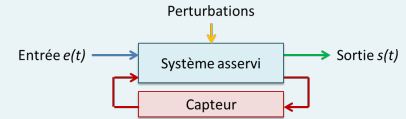


Définition — Systèmes automatiques ou asservis.

Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

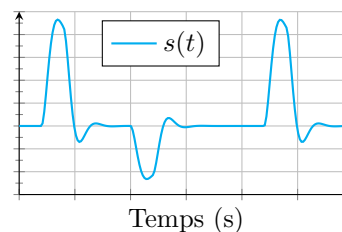
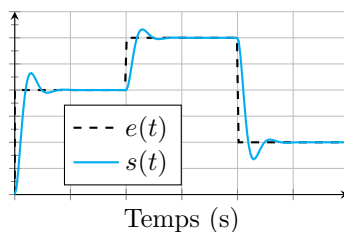
- la loi de consigne $e(t)$ est une grandeur de commande qui est modifiable;
- la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie $s(t)$ est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger de la qualité de la tâche accomplie.



Définition — Systèmes suiveurs et régulateurs.

- Pour un système suiveur la consigne $e(t)$ fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
- Pour un système régulateur la consigne $e(t)$ est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.



2 Performance des systèmes – Critères graphiques

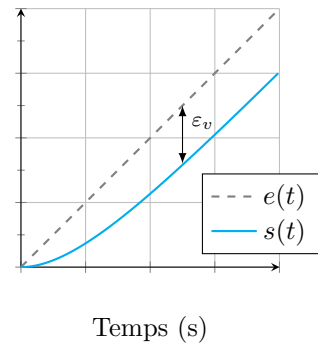
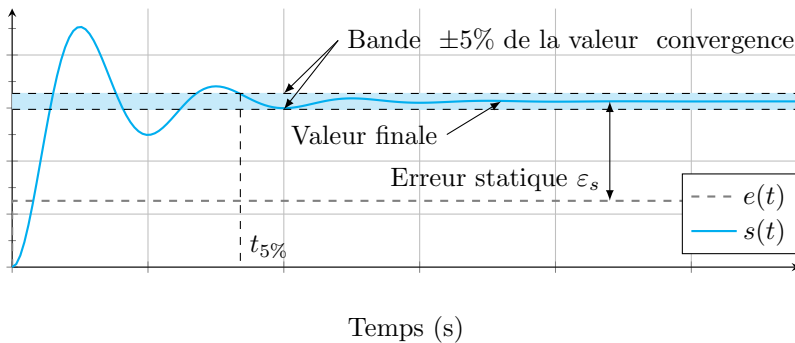
Définition — Précision en position – Écart statique ε_s . Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique ε_s comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse $s(t)$ en régime permanent.

Définition — Précision en vitesse – Écart dynamique ε_v . Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

Définition — Rapidité. La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

Méthode — Détermination du temps de réponse à $n\%$. (En pratique $n = 5$).

1. Tracer sur le même graphique la consigne $e(t)$ et la réponse du système $s(t)$.
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de $s(t)$.
3. Tracer la bande correspondant à une variation de $\pm n\%$ de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle $s(t)$ coupe la bande et n'en sort plus.



Définition — Stabilité. La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

1 Définitions

Définition — Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles.

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour $t = 0^+$:

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2 f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

Définition — Transformée de Laplace.

À toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t \leq 0$ (fonction causale), on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

On note $\mathcal{L}[f(t)]$ la transformée directe et $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ la transformée inverse.

De manière générale on note $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$, $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$, $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$, $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p) \dots$

Résultat — Dérivation.

Dans les conditions de Heaviside : $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 F(p)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n F(p)$.

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$.

Définition — Transformées usuelles.

Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$	Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
Fonction linéaire $f(t) = t$	$F(p) = \frac{1}{p^2}$	Puissances $f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$		

2 Théorèmes

Théorème — Théorème de la valeur initiale.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p)$$

Théorème — Théorème du retard.

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

Théorème — Théorème de la valeur finale.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$$

Théorème — Théorème de l'amortissement.

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

1 Définitions

Définition — Fonction de transfert – Transmittance.

Soit un système linéaire continu linéaire invariant dont on note le signal d'entrée e et le signal de sortie s , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction H telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

Définition — Classe, ordre, pôles et zéros.

$H(p)$ est une fonction rationnelle en p . En factorisant le numérateur et le dénominateur, $H(p)$ peut s'écrire sous cette forme :

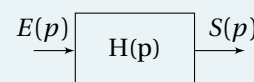
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

- Les z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Les p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- **Le degré de $D(p)$ est appelé ordre n du système ($n \geq m$ pour les systèmes physiques).**
- L'équation $D(p) = 0$ est appelée équation caractéristique.
- Le facteur constant K est appelé gain du système.
- S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre α de $D(p)$, un terme p^α apparaît au dénominateur. **α est la classe (ou type) de la fonction de transfert.** Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

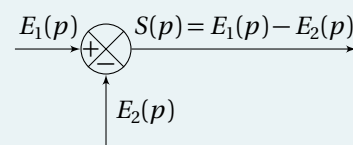
Définition — Modélisation d'un bloc.

Soit un système d'entrée $E(p)$, de sortie $S(p)$, caractérisé par une fonction de transfert $H(p)$. Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$

**Définition — Modélisation d'un comparateur.**

Soit l'équation $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$. Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.

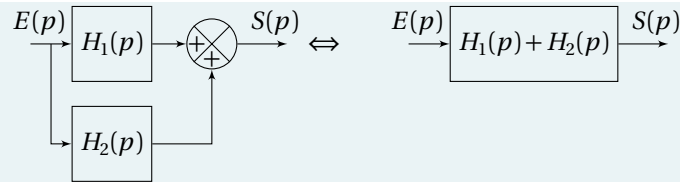


2 Algèbre de blocs

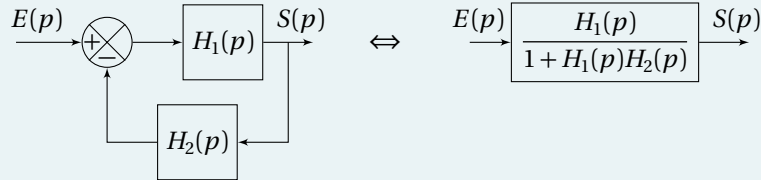


Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsque on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.

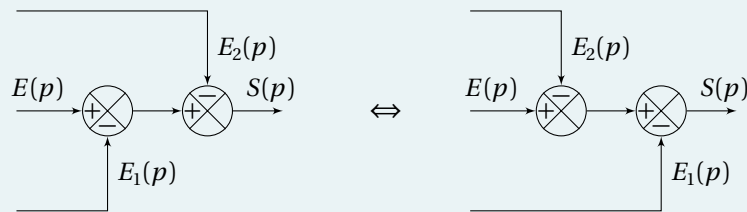
Résultat — Blocs en série.**Résultat — Blocs en parallèle.**



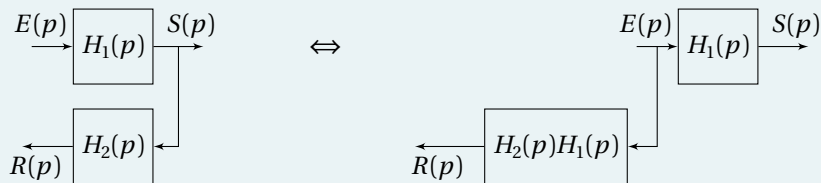
Résultat — Réduction de boucle – À MAÎTRISER PARFAITEMENT.



Résultat — Comparateurs en série.



Résultat — Point de prélèvement.

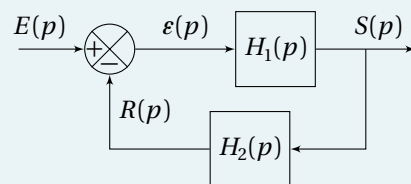


3 Fonctions usuelles

Définition — Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF.

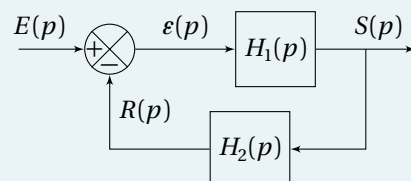
Formule de Black

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$



Définition — Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO.

$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$



Définition — Théorème de superposition.

Soit un système d'entrées E_1 et E_2 et de sortie S . On note $H_1 = \frac{S}{E_1}$ lorsque E_2 est nulle et $H_2 = \frac{S}{E_2}$ lorsque E_1 est nulle. En superposant, on a alors : $S = H_1 E_1 + H_2 E_2$.

1 Systèmes d'ordre 1

Définition Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

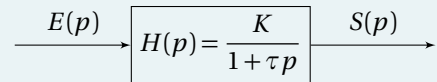
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On note :

- τ la constante de temps en secondes ($\tau > 0$);
- K le gain statique du système ($K > 0$).



Résultat — Réponse à un échelon d'un système du premier ordre.

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude E_0 . Lorsque $E_0 = 1$ ($1/p$ dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

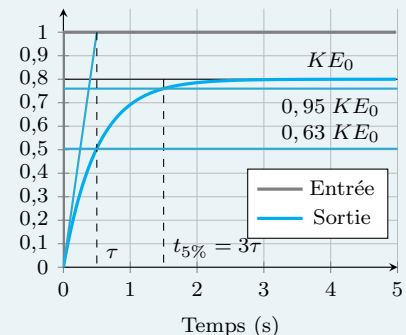
Analytiquement, on montre que $s(t) = K E_0 u(t) (1 - e^{-t/\tau})$.

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- le gain à partir de l'asymptote $K E_0$;
- la constante de temps à partir de $t_{5\%}$ ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- valeur finale $s_\infty = K E_0$;
- pente à l'origine **non nulle**;
- $t_{5\%} = 3\tau$;
- pour $t = \tau$, $s(\tau) = 0,63 s_\infty$.



Résultat — Réponse à un échelon d'un système du premier ordre.

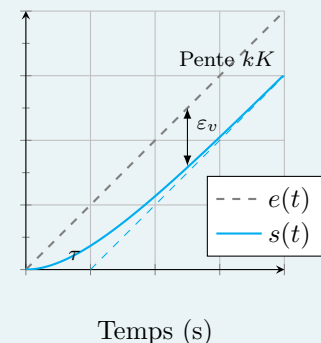
On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie s lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente k :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que $s(t) = K k (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}) u(t)$.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- pente de l'asymptote $K k$;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses : $t = \tau$;
- $\varepsilon_v = k K \tau$.



2 Systèmes d'ordre 2

Définition Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

$E(p) \rightarrow \boxed{\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} \rightarrow S(p)$

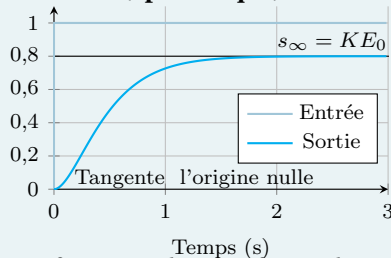
On note :

- K est appelé le gain statique du système (rapport des unités de S et de E) ;
- ξ (lire *xi*) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité) ;
- ω_0 pulsation propre du système (rad/s ou s^{-1}).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

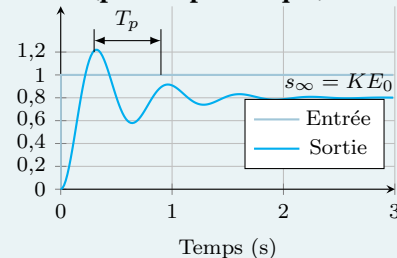
Résultat

$\xi \geq 1$: système non oscillant et amorti
(apériodique)



- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.

$\xi < 1$: système oscillant et amorti
(pseudo périodique)



- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$.
- La valeur du premier dépassement vaut : $D_1 = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$.

Résultat

- Pour $\xi = 0$ le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude KE_0 ($2KE_0$ crête à crête).
- Pour $\xi \simeq 0,69$ le système du second ordre le temps à un de réponse à 5% le plus petit **avec dépassement** et $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \simeq 3$.
- Pour $\xi = 1$ on obtient le système du second ordre plus rapide **sans dépassement**.

1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ et on note :

- A : l'amplitude de la sinusoïde ;
- ω : la pulsation en rad/s ;
- φ : la phase à l'origine en rad.

On a par ailleurs :

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$: la période de la sinusoïde en s ;
- $f = \frac{1}{T}$: fréquence de la sinusoïde en Hz.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

Définition Soit $H(p)$ une fonction de transfert. On pose $p = j\omega$ et on note :

- $H_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$ le gain décibel de la fonction de transfert ;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$.

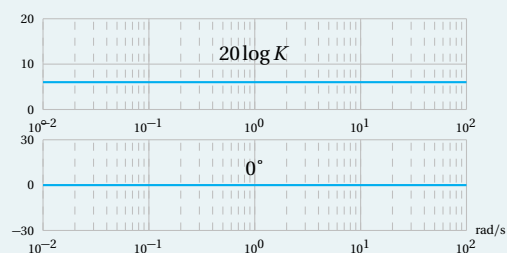
Propriété On note $H(p) = G_1(p)G_2(p)$. On a :

- $H_{dB}(\omega) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega)$;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G_{1dB}(\omega)) + \text{Arg}(G_{2dB}(\omega))$.

2 Gain

Résultat — Diagramme de Bode d'un gain pur.

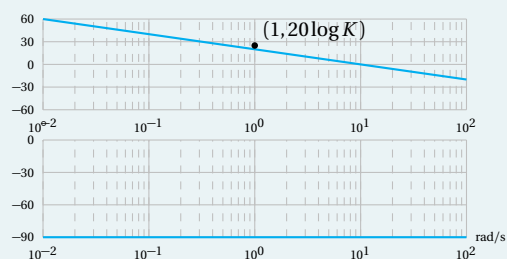
- Fonction de transfert : $H(p) = K$.
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$.
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée 0° .



3 Intégrateur

Résultat — Diagramme de Bode d'un intégrateur.

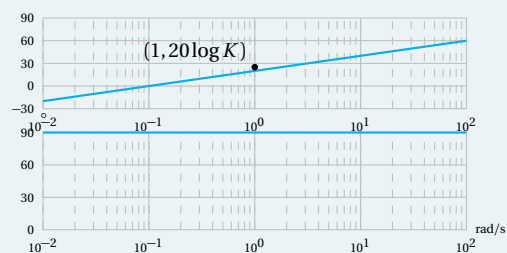
- Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{p}$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente -20dB/decade passant par le point $(1, 20 \log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée -90° .



4 Dérivateur

Résultat — Diagramme de Bode d'un dérivateur.

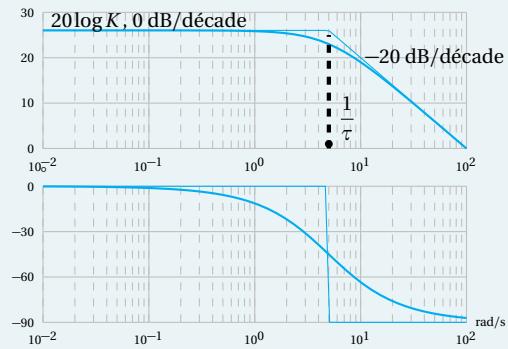
- Fonction de transfert : $H(p) = Kp$.
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente 20dB/decade passant par le point $(1, 20 \log K)$.
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée $+90^\circ$.



5 Systèmes d'ordre 1

Résultat — Diagramme de Bode d'un système du premier ordre.

- Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$.
- Diagramme de gain asymptotique :
 - pour $\omega < \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$;
 - pour $\omega > \frac{1}{\tau}$: droite de pente -20 dB/decade .
- Diagramme de phase asymptotique :
 - pour $\omega < \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée 0° ;
 - pour $\omega > \frac{1}{\tau}$: droite horizontale d'ordonnée -90° .



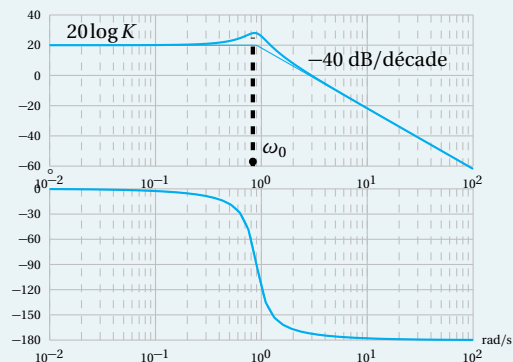
6 Systèmes d'ordre 2

Résultat — Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre.

- Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$.

Cas où $\xi < 1$.

- Diagramme de gain asymptotique :
 - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée $20 \log K$;
 - pour $\omega > \omega_0$: droite de pente -40 dB/decade .
- Diagramme de phase asymptotique :
 - pour $\omega < \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée 0° ;
 - pour $\omega > \omega_0$: droite horizontale d'ordonnée -180° .



Dans le cas où $\xi > 1$, le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$. On se ramène alors au tracé du produit de deux premier ordre.

Résultat Phénomène de résonance

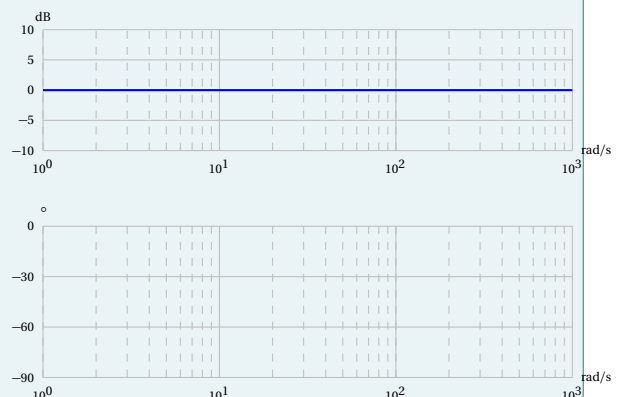
Le phénomène de résonance s'observe lorsque $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$. La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

À la résonance, l'amplitude maximale est de $A_{\max} = \frac{K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$. (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit $20 \log A_{\max}$ lorsque $\omega = \omega_r$.)

7 Retard

Résultat — Diagramme de Bode d'un retard pur.

- Fonction de transfert : $H(p) = e^{-Tp}$.
- Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- Diagramme de phase asymptotique : $\arg(H(p)) = -\tau \omega$
... à tracer.



8 Tracé du diagramme de Bode

Méthode

Méthode 1 : sommation dans le diagramme de Bode

1. décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus);
2. tracer chacune des fonctions de transfert;
3. sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

Méthode 2 : tableau de variation

1. décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus);
2. réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes;
3. sommer les pentes;
4. tracer le diagramme de Bode.

Application 01

Application

Savoirs et compétences :

□ ...

Modélisation par schéma-blocs

Méthode Dans le cas où vous ne savez pas comment démarrer, vous pouvez suivre la méthode suivante.

1. Identifier la grandeur physique d'entrée et la grandeur physique de sortie.
2. Lorsqu'une équation lie deux grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation.
3. Lorsqu'une équation lie trois grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation en utilisant un comparateur.
4. Relier les blocs en commençant par l'entrée. Inverser les blocs si nécessaire.

Modélisation du moteur à courant continu

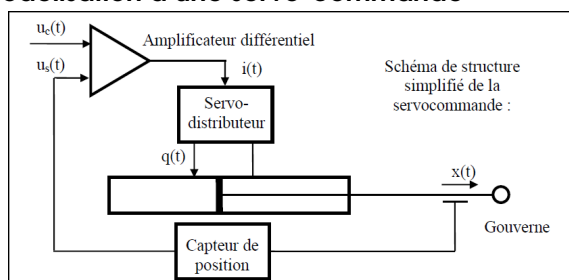
On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$;
- $e(t) = K \omega(t)$;
- $c(t) = Ki(t)$;
- $c(t) - c_r(t) - f \omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$.

Question 1 Réaliser le schéma-blocs.

Question 2 Exprimer $\Omega(p)$ sous la forme $\Omega(p) = F_1(p)U(p) + F_2(p)C_r(p)$. Les fonctions de transfert F_1 F_2 seront exprimées sous forme canonique. Les constantes du système du second ordre seront explicitées.

Modélisation d'une servo-commande



Les différentes équations temporelles qui modélisent le fonctionnement d'une servocommande sont :

- un amplificateur différentiel défini par : $u_c(t) = \frac{i(t)}{K_a} + u_s(t)$;

- débit dans le vérin dans le cas d'une hypothèse de fluide incompressible $q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt}$;
- capteur de position : $u_s(t) = K_c \cdot x(t)$;
- le servo-distributeur est un composant de la chaîne de commande conçu pour fournir un débit hydraulique $q(t)$ proportionnel au courant de commande $i(t)$. (Attention, valable uniquement en régime permanent.) Le constructeur fournit sa fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1 + Tp}$$

où K_d est le gain du servo-distributeur et T sa constante de temps.

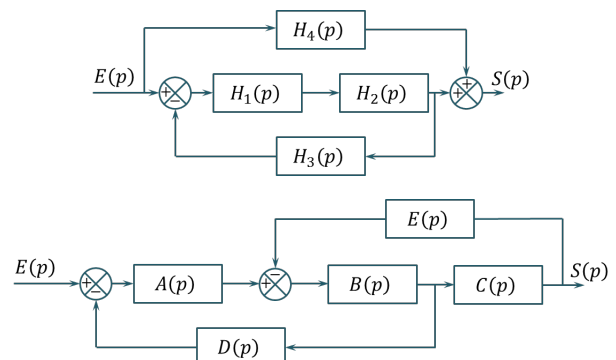
Question 1 Réaliser le schéma-blocs.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

Réduction de schéma-blocs

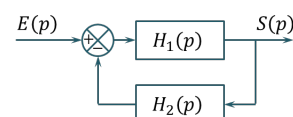
D'après ressources de V. Reydellet.

Question Réduire les schéma-blocs suivants.

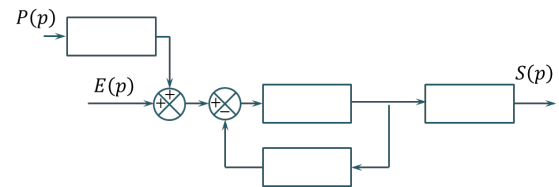
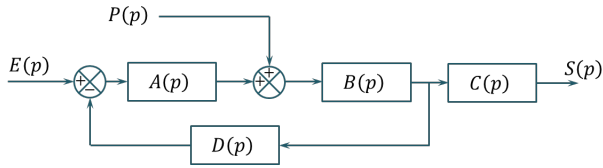


Transformation de schéma-blocs

Question Transformer le schéma-bloc suivant pour obtenir un schéma-blocs à retour unitaire.



Question Modifier le schéma-blocs suivant pour obtenir la forme proposée. Déterminer ensuite l'expression de $S(p)$ en fonction de $E(p)$ et $P(p)$.



Application 01 –
Corrigé

Application

Savoirs et compétences :

□ ...

Mise en situation

Airbus Helicopters commercialise des hélicoptères civils et militaires. Le déplacement des hélicoptères est assuré par un rotor principal permettant la sustentation et la translation de l'appareil. Un rotor arrière permet de compenser le couple de réaction engendré par le rotor principal et de contrôler les mouvements de lacet de l'appareil (figure 1). La puissance est délivrée par deux turboréacteurs (certains hélicoptères ne sont équipés que d'un turboréacteur). Ces turboréacteurs entraînent en rotation une boîte de transmission principale (BTP) qui elle-même entraîne d'une part le rotor principal et d'autre part le rotor arrière, par l'intermédiaire d'un arbre de transmission et d'une boîte de transmission arrière (BTA). La BTP assure aussi l'entraînement d'une série d'accessoires permettant le fonctionnement de l'appareil (alternateur, pompe hydraulique ...). Pour chaque association hélicoptère - turboréacteur, un banc d'essai permet de vérifier que la BTP répond au cahier des charges. La figure 2 présente la structure du banc d'essai.

Objectif Valider Req 1.1.1.

«requirement» Précision de la régulation
Id = "1.1.1" Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul."

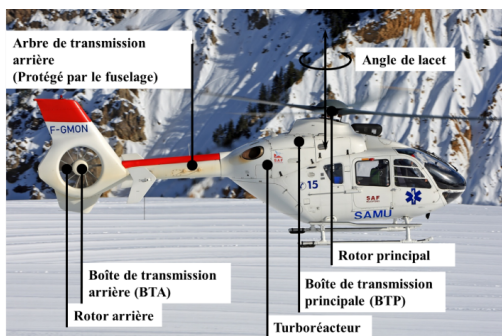


Figure 1 – Hélicoptère.

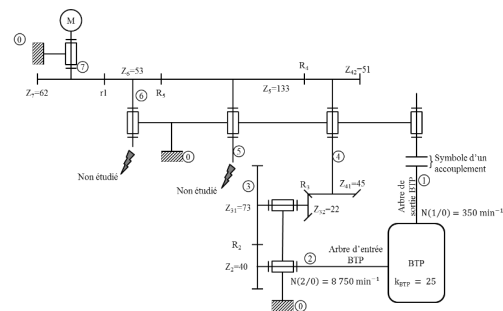


Figure 2 – Structure du banc d'essai.

Le moteur à courant continu

Le banc d'essai est équipé d'un dispositif permettant de générer un couple résistant sur le rotor de sortie de la BTP. Cela permet de simuler les actions aérodynamiques sur les pales. Il faut donc évaluer l'impact de ce couple sur la vitesse du moteur. La modélisation adoptée pour le moteur à courant continu est celle de la figure 3.

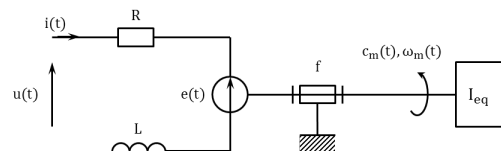


Figure 3 – Schéma équivalent du moteur à courant continu.

On note :

- $u(t)$: la tension appliquée aux bornes de l'induit ;
- $i(t)$: le courant absorbé par l'induit ;
- $e(t)$: la force contre-électromotrice ;
- R : la résistance de l'induit ;
- L : l'inductance de l'induit ;
- $\omega_m(t)$: la vitesse de rotation de l'arbre moteur ;
- $c_m(t)$: le couple moteur ;
- $c_r(t)$: le couple résistant sur l'arbre moteur dû à la génération d'un couple résistant en sortie de BTP ;
- f : le coefficient de frottement, qui génère un couple résistant proportionnel à $\omega_m(t)$;
- I_{eq} : l'inertie équivalente du banc d'essai ramené à l'arbre moteur ;
- K_c : la constante de couple définie telle que $c_m(t) = K_c i(t)$ (équation 1) ;
- K_e : la constante de force contre-électromotrice définie telle que $e(t) = K_e \omega_m(t)$ (équation 2).

Hypothèses :

- le comportement de chacun des composants sera considéré comme linéaire, continu et invariant ;
- les conditions de Heaviside sont considérées comme vérifiées ;
- on note p la variable de Laplace. La transformée de Laplace d'une fonction temporelle $f(t)$ sera notée $F(p)$ (la transformée de $\omega(t)$ sera notée $\Omega(p)$).

Modélisation de l'asservissement en vitesse

Hypothèses :

- on néglige l'inductance du moteur à courant continu ainsi que l'effet du coefficient de frottement ;
- on fait l'hypothèse que $K_c = K_e = K$;
- pour simplifier l'étude, la boucle de courant n'a pas été modélisée.

Le schéma bloc de l'asservissement en vitesse du moteur à courant continu est donné sur la figure 10.

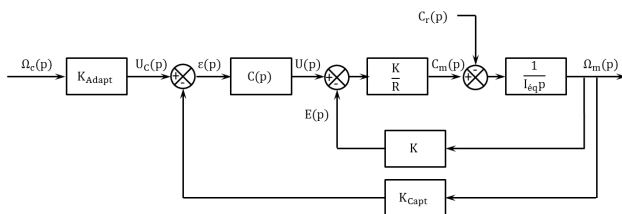


Figure 10 – Régulation en vitesse du banc d'essai.

Question 1 Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour ? Comment déterminer la valeur du gain K_{Adapt} ?

Hypothèse 1 : on considère que $C_r(p) = 0$ et $\Omega_c(p) \neq 0$.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$ puis la fonction de transfert en boucle fermée $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_c(p))$. On considère que $C(p) = K_p$, K_p étant constant. Mettre $H_1(p)$ sous la forme $K_1/(1 + \tau_1 p)$ où on explicitera les valeurs de K_1 et τ_1 .

Hypothèse 2 : on considère que $\Omega_c(p) = 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

Question 3 Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

Question 4 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$. On considère que $C(p) = K_p$, K_p étant constant. Mettre $H_2(p)$ sous la forme $-K_2/(1 + \tau_2 p)$ où on explicitera les valeurs de K_2 et τ_2 .

Hypothèse 3 : on considère maintenant que $\Omega_c(p) \neq 0$ et que $C_r(p) \neq 0$.

Question 5 En utilisant le théorème de superposition, exprimer $\Omega_m(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $\Omega_c(p)$ et $C_r(p)$.

À une fréquence de rotation de 350 min^{-1} en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de 1928 min^{-1} soit environ 202 rad/s . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à 990 Nm . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude 202 rad/s et à un couple résistant de 990 Nm .

Question 6 Après avoir exprimé la consigne $\Omega_c(p)$ puis le couple résistant $C_r(p)$, calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Question 7 Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain K_I de la forme $C(p) = K_I/p$?

Question 8 En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?



On verra ultérieurement qu'un correcteur intégral pur ne permet pas forcément de garantir la stabilité d'un système.

Partie supplémentaire

Question 9 Tracer le diagramme de Bode de $C(p) \cdot F(p)$ avec $F(p) = 118/(1 + 0,5p)$ du système lorsque :

- $C(p) = 1$;
- $C(p) = 20$;
- $C(p) = 30/p$.

Application 01

Application

Savoirs et compétences :

□ ...

Modélisation par schéma-blocs

Méthode Dans le cas où vous ne savez pas comment démarrer, vous pouvez suivre la méthode suivante.

1. Identifier la grandeur physique d'entrée et la grandeur physique de sortie.
2. Lorsqu'une équation lie deux grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation.
3. Lorsqu'une équation lie trois grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation en utilisant un comparateur.
4. Relier les blocs en commençant par l'entrée. Inverser les blocs si nécessaire.

Modélisation du moteur à courant continu

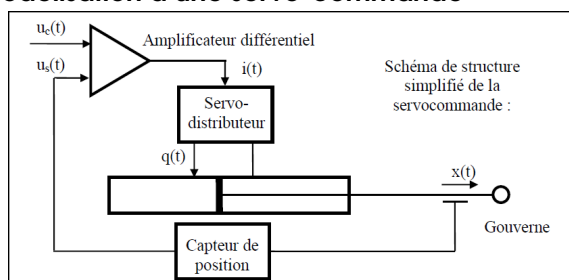
On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$;
- $e(t) = K \omega(t)$;
- $c(t) = Ki(t)$;
- $c(t) - c_r(t) - f \omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$.

Question 1 Réaliser le schéma-blocs.

Question 2 Exprimer $\Omega(p)$ sous la forme $\Omega(p) = F_1(p)U(p) + F_2(p)C_r(p)$. Les fonctions de transfert F_1 F_2 seront exprimées sous forme canonique. Les constantes du système du second ordre seront explicitées.

Modélisation d'une servo-commande



Les différentes équations temporelles qui modélisent le fonctionnement d'une servocommande sont :

- un amplificateur différentiel défini par : $u_c(t) = \frac{i(t)}{K_a} + u_s(t)$;

- débit dans le vérin dans le cas d'une hypothèse de fluide incompressible $q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt}$;
- capteur de position : $u_s(t) = K_c \cdot x(t)$;
- le servo-distributeur est un composant de la chaîne de commande conçu pour fournir un débit hydraulique $q(t)$ proportionnel au courant de commande $i(t)$. (Attention, valable uniquement en régime permanent.) Le constructeur fournit sa fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1 + Tp}$$

où K_d est le gain du servo-distributeur et T sa constante de temps.

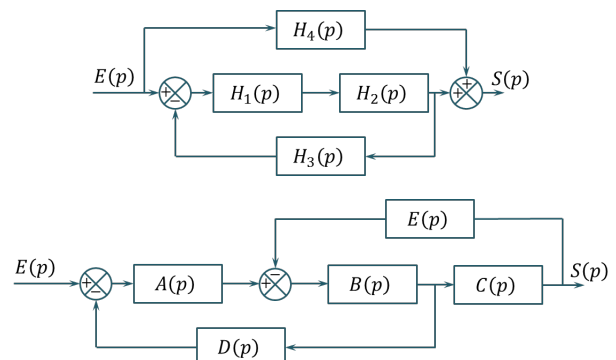
Question 1 Réaliser le schéma-blocs.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

Réduction de schéma-blocs

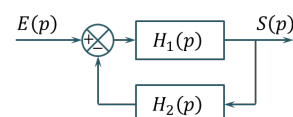
D'après ressources de V. Reydellet.

Question Réduire les schéma-blocs suivants.

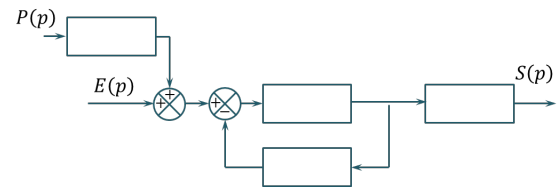
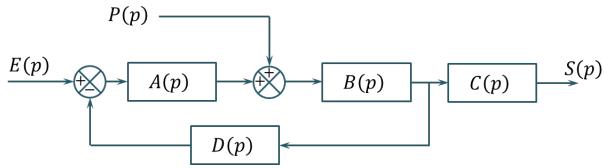


Transformation de schéma-blocs

Question Transformer le schéma-bloc suivant pour obtenir un schéma-blocs à retour unitaire.



Question Modifier le schéma-blocs suivant pour obtenir la forme proposée. Déterminer ensuite l'expression de $S(p)$ en fonction de $E(p)$ et $P(p)$.



Application 01 –
Corrigé

Application

Savoirs et compétences :

□ ...

Modélisation par schéma-blocs

Méthode Dans le cas où vous ne savez pas comment démarrer, vous pouvez suivre la méthode suivante.

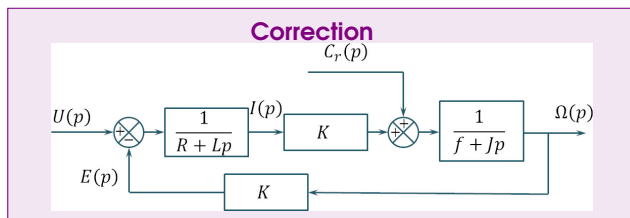
1. Identifier la grandeur physique d'entrée et la grandeur physique de sortie.
2. Lorsqu'une équation lie deux grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation.
3. Lorsqu'une équation lie trois grandeurs physiques, réaliser le schéma-blocs associé à l'équation en utilisant un comparateur.
4. Relier les blocs en commençant par l'entrée. Inverser les blocs si nécessaire.

Modélisation du moteur à courant continu

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$;
- $e(t) = K\omega(t)$;
- $c(t) = Ki(t)$;
- $c(t) - c_r(t) - f\omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$.

Question 3 Réaliser le schéma-blocs.



Question 4 Exprimer $\Omega(p)$ sous la forme $\Omega(p) = F_1(p)U(p) + F_2(p)C_r(p)$. Les fonctions de transfert F_1 F_2 seront exprimées sous forme canonique. Les constantes du système du second ordre seront explicitées.

Correction Par superposition, on a : $\Omega_1(p)/U(p) = \frac{K \frac{1}{R+Lp} \frac{1}{Jp+f}}{1 + K^2 \frac{1}{R+Lp} \frac{1}{Jp+f}} = \frac{K}{(Jp+f)(Lp+R) + K^2}$.

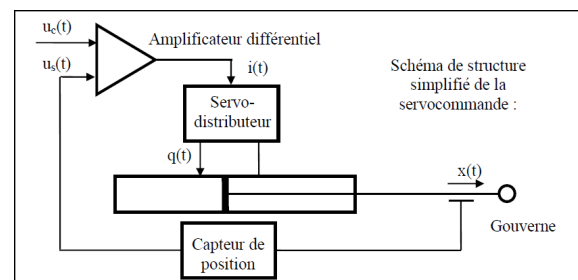
Par ailleurs, $\Omega_2(p)/C_r(p) = \frac{\frac{1}{Jp+f}}{1 + K^2 \frac{1}{R+Lp} \frac{1}{Jp+f}} = \frac{Lp+R}{(Jp+f)(Lp+R) + K^2}$.

Au final, $\Omega(p) = \frac{K}{(Jp+f)(Lp+R) + K^2} U(p) + \frac{Lp+R}{(Jp+f)(Lp+R) + K^2} C_r(p)$.

On peut alors mettre F_1 sous forme canonique :

$$K_0 = \frac{K}{fR + K^2} \quad \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{RJ + Lf}{fR + K^2} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{LJ}{fR + K^2}.$$

Modélisation d'une servo-commande



Les différentes équations temporelles qui modélisent le fonctionnement d'une servocommande sont :

- un amplificateur différentiel défini par : $u_c(t) = \frac{di(t)}{K_a} + u_s(t)$;
- débit dans le vérin dans le cas d'une hypothèse de fluide incompressible $q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt}$;
- capteur de position : $u_s(t) = K_c \cdot x(t)$;
- le servo-distributeur est un composant de la chaîne de commande conçu pour fournir un débit hydraulique $q(t)$ proportionnel au courant de commande $i(t)$. (Attention, valable uniquement en régime permanent.) Le constructeur fournit sa fonction de

transfert :

$$F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1 + Tp}$$

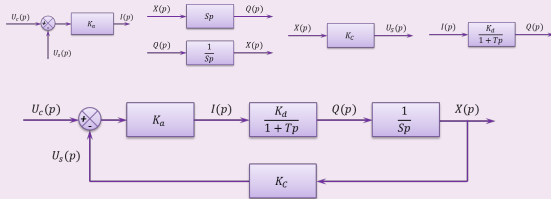
où K_d est le gain du servo-distributeur et T sa constante de temps.

Question 1 Réaliser le schéma-blocs.

Question 2 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

Correction On a :

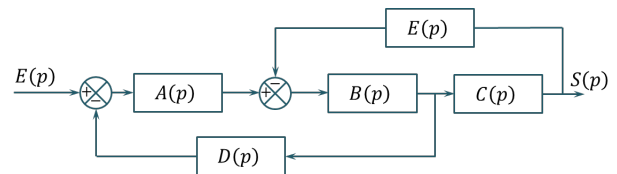
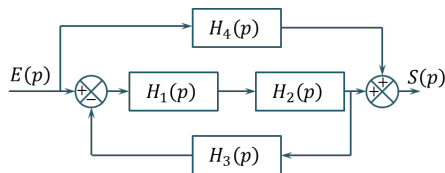
- $U_c(p) = \frac{1}{K_a} I(p) + U_s(p)$
- $Q(p) = SpX(p)$
- $U_s(p) = K_C \cdot X(p)$
- $F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1 + Tp}$



Réduction de schéma-blocs

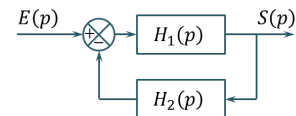
D'après ressources de V. Reydellet.

Question Réduire les schéma-blocs suivants.

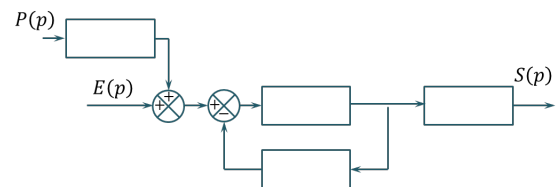
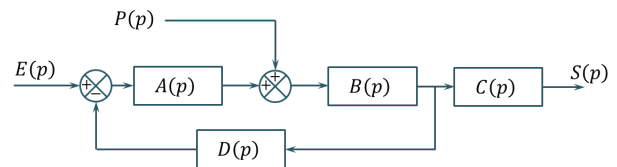


Transformation de schéma-blocs

Question Transformer le schéma-bloc suivant pour obtenir un schéma-blocs à retour unitaire.



Question Modifier le schéma-blocs suivant pour obtenir la forme proposée. Déterminer ensuite l'expression de $S(p)$ en fonction de $E(p)$ et $P(p)$.



TD 01



Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supélec TSI 2017

Savoirs et compétences :

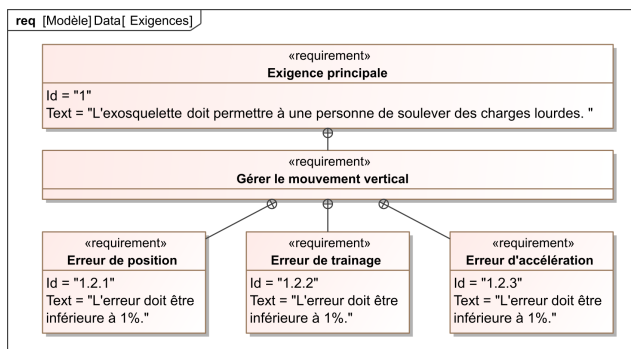
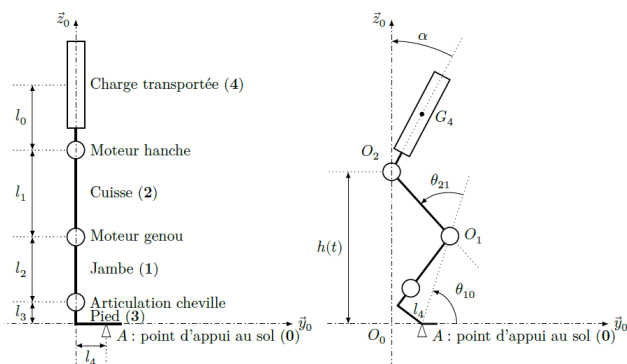
- Mod2.C4 : calcul symbolique ;
- Mod2.C7.SF1 : analyser ou établir le schéma-bloc du système ;
- Res2.C10 : précision des SLCI : erreur en régime permanent ;
- Res2.C10.SF1 : déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon ou en rampe (consigne ou perturbation).

Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



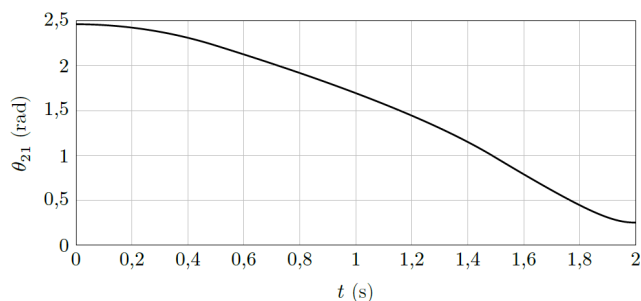
On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.



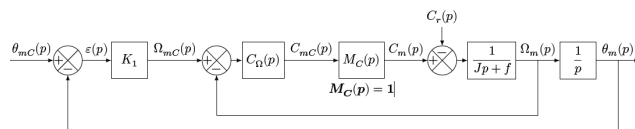
Gestion du mouvement vertical

Objectif Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.



Notations :

- $\theta_{mc}(p)$ consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_{mc}(t)$ en rad) ;
- $\theta_m(p)$ position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_m(t)$ en rad) ;
- $C_{mc}(p)$ consigne de couple moteur (variable temporelle : $c_{mc}(t)$ en Nm) ;
- $C_m(p)$ couple moteur (variable temporelle : $c_m(t)$ en Nm) ;
- $C_r(p)$ couple résistant perturbateur (variable temporelle : $c_r(t)$ en Nm) ;
- K_1 gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en s^{-1}) ;

- $\Omega_{mC}(p)$ consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_{mC}(t)$ en rad s^{-1});
- $\Omega_m(p)$ vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_m(t)$ en rad s^{-1});
- $C_\Omega(p)$ correcteur de l'asservissement de vitesse;
- $M_C(p)$ modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles : $M_C(p) = 1$;
- J moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur;
- f coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement.

Le correcteur est de la forme : $C_\Omega(p) = K_2 \left(\frac{Jp + f}{Jp} \right)$.

En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que :

- l'écart est défini par la variable $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$;
- l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$.

Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart $\varepsilon(t)$ est égal à l'erreur $\mu(t)$.

Hypothèse(s) Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Question 2 Exprimer $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

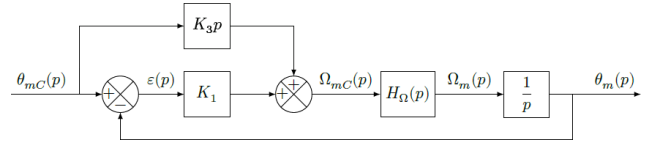
Question 3 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p .

Méthode On peut définir l'erreur de position ε_p par $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$ avec $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$ (entrée échelon).

Question 4 Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Question 5 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$ et $T = 33 \text{ ms}$.



Question 6 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

Question 7 Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

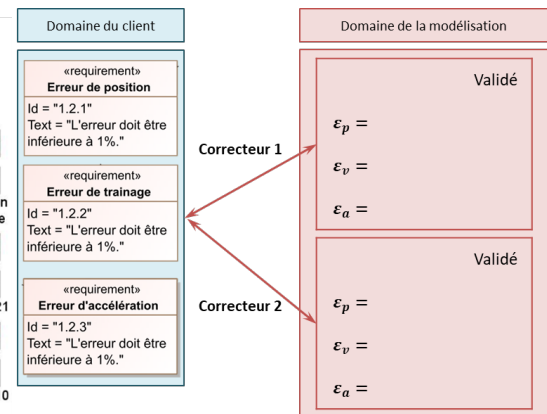
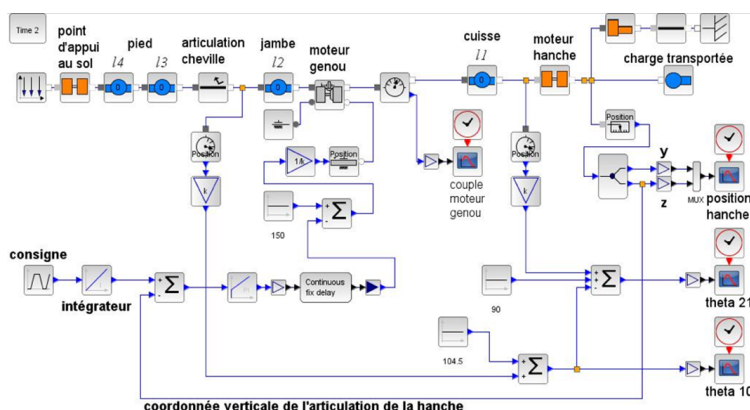
Question 8 Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Synthèse

Question 9 En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.

Eléments de corrigé :

1. Asservissement en position.
2. $H_\Omega(p) = 1 / \left(\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1 \right)$.
3. $\varepsilon(p) = (\theta_{mC}(p)) / \left(1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \right)$
4. $\varepsilon(p) = 0$, $\varepsilon_v = \frac{1}{K_1}$ et $K_1 > 100$.
5. $\varepsilon_a = \infty$.
6. $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) (p(1 + Tp - K_3)) / (p(1 + Tp) + K_1)$.
7. $\varepsilon_v = \frac{1 - K_3}{K_1}$, $K_3 = 1$.
8. $\varepsilon_a = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$. Le cahier des charges est donc validé.



TD 01 – Corrigé



Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supélec TSI 2017

Savoirs et compétences :

- Mod2.C4 : calcul symbolique ;
- Mod2.C7.SF1 : analyser ou établir le schéma-bloc du système ;
- Res2.C10 : précision des SLCI : erreur en régime permanent ;
- Res2.C10.SF1 : déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon ou en rampe (consigne ou perturbation).

Mise en situation

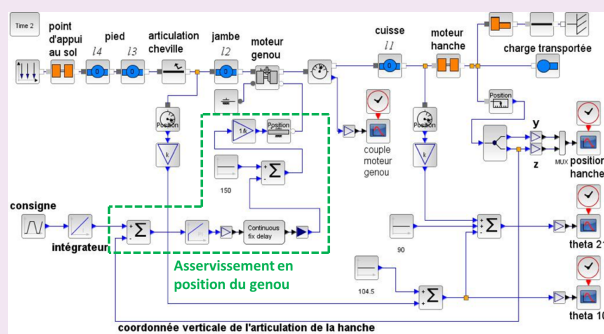
Gestion du mouvement vertical

Objectif Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Question 10 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



Question 11 Exprimer $H_{\Omega}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

Correction En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a : $H_{\Omega}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} =$

$$\frac{C_{\Omega}(p)M_C(p) \frac{1}{Jp+f}}{1 + C_{\Omega}(p)M_C(p) \frac{1}{Jp+f}}. \text{ En conséquences : } H_{\Omega}(p) = \frac{C_{\Omega}K_2}{Jp + C_{\Omega}K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{C_{\Omega}K_2} + 1}.$$

Question 12 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_{\Omega}(p)$, K_1 et p .

Correction D'une part, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$. D'autre part, $\theta_m(p) = H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p)$. Par suite, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p) \left(1 + H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p} \right) = \theta_{mC}(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p}}$.

Question 13 Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Correction On a :

$$\begin{aligned} \bullet \varepsilon_p &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{C_{\Omega}K_2} + 1} \frac{K_1}{p}} = 0 \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1);} \\ \bullet \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \dot{\varepsilon}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{C_{\Omega}K_2} + 1} \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{Jp}{C_{\Omega}K_2} + 1} K_1} = \frac{1}{K_1} \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et de gain } K_1 \text{ en BO).} \end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut $\frac{1}{K_1} < 0,01$ et $K_1 > 100$.

Question 14 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction En raisonnant de même, on a : $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{\varepsilon}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \frac{1}{1 + H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3} =$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} \frac{K_1}{p^2}} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{p}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} K_1} = \infty$$

(ce qui était prévisible pour un système de classe 1).

Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

Question 15 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

Correction En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$;
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)$;
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp}$.

$$\text{On a donc : } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp} = \theta_{mC}(p) - \left(K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p) \right) \frac{1}{p(1 + Tp)} = \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1 + Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \varepsilon(p).$$

$$\text{On a alors } \varepsilon(p) \left(1 + \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \right) = \theta_{mC}(p) \left(1 - \frac{K_3}{1 + Tp} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1 + Tp) + K_1}{p(1 + Tp)} = \theta_{mC}(p) \frac{1 + Tp - K_3}{1 + Tp}$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1}.$$

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

Question 16 Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

Correction $\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} = \frac{1 - K_3}{K_1}.$

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir $K_3 = 1$.

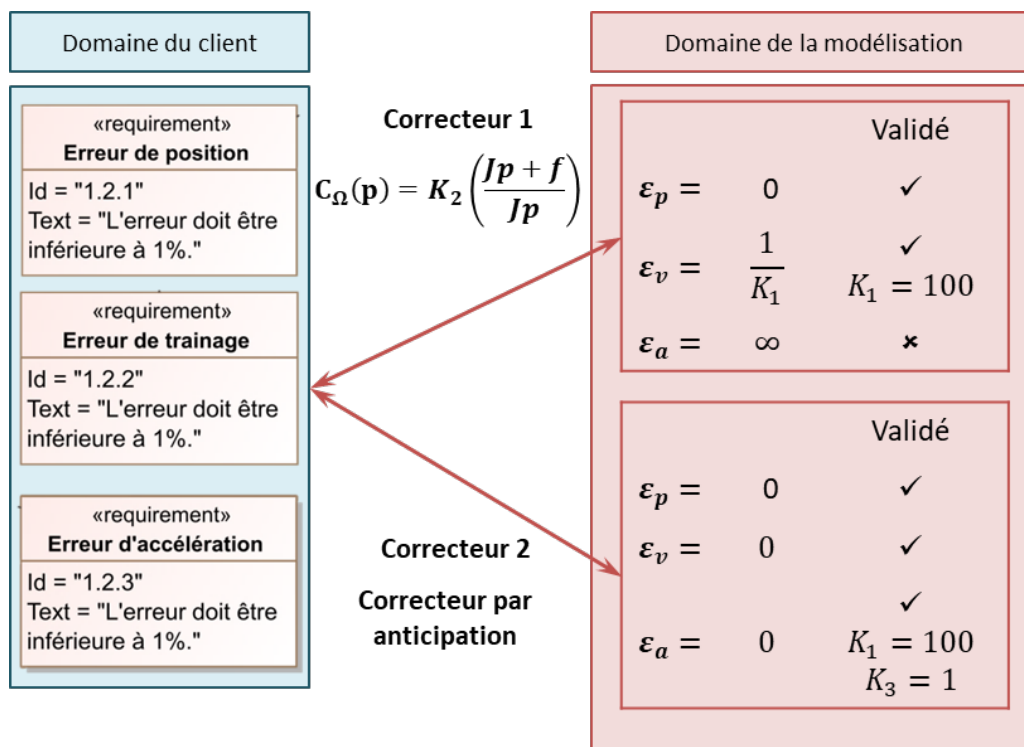
Question 17 Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

On a :

Correction $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p}.$ En prenant $K_3 = 1$ et $K_1 = 100$, on obtient : $\varepsilon_a = \frac{T}{p(1 + Tp) + 100} = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$. L'erreur est donc de 33×10^{-5} . Le cahier des charges est donc validé.

Synthèse

Question 18 En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.



Application

Applications

D'après Sébastien Grange

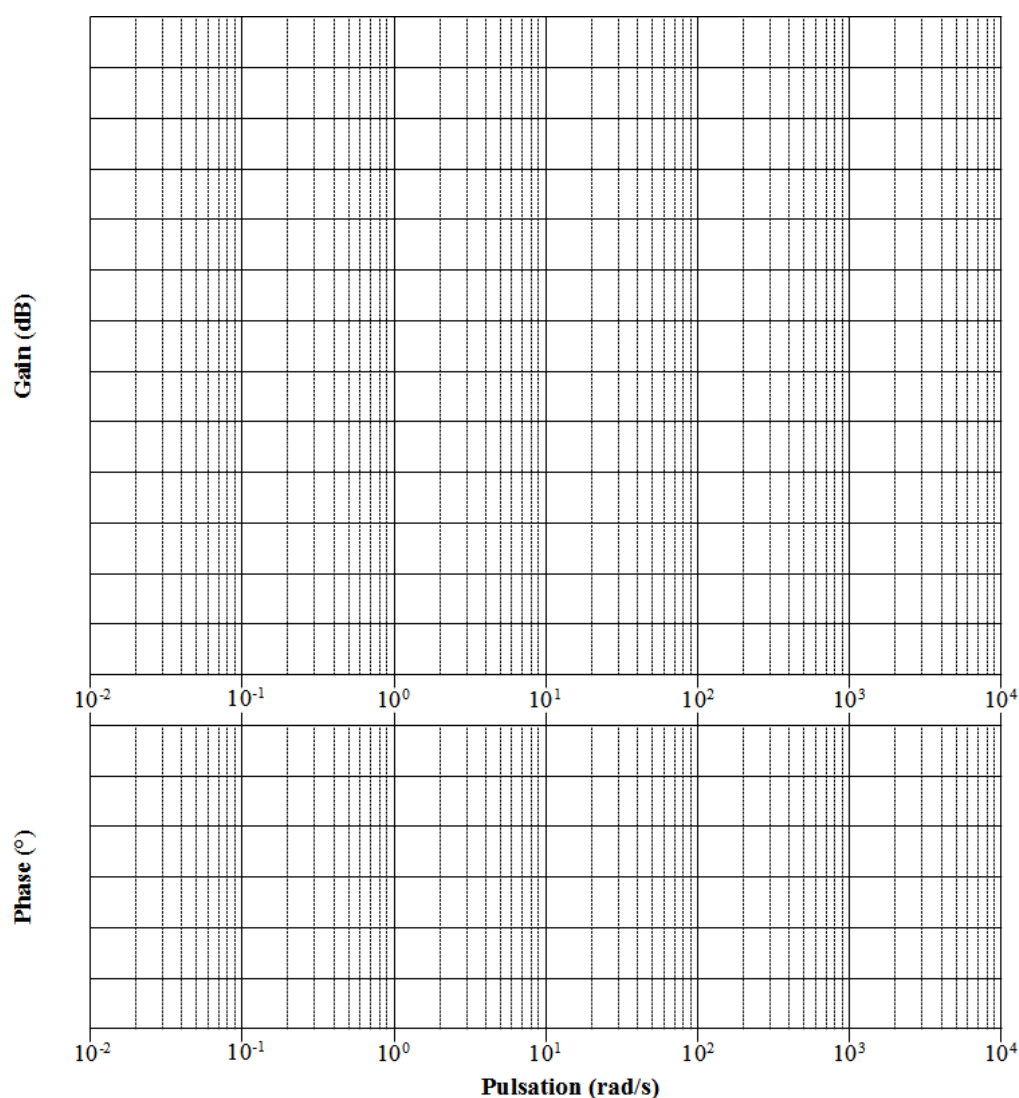
Savoirs et compétences :

□ ...

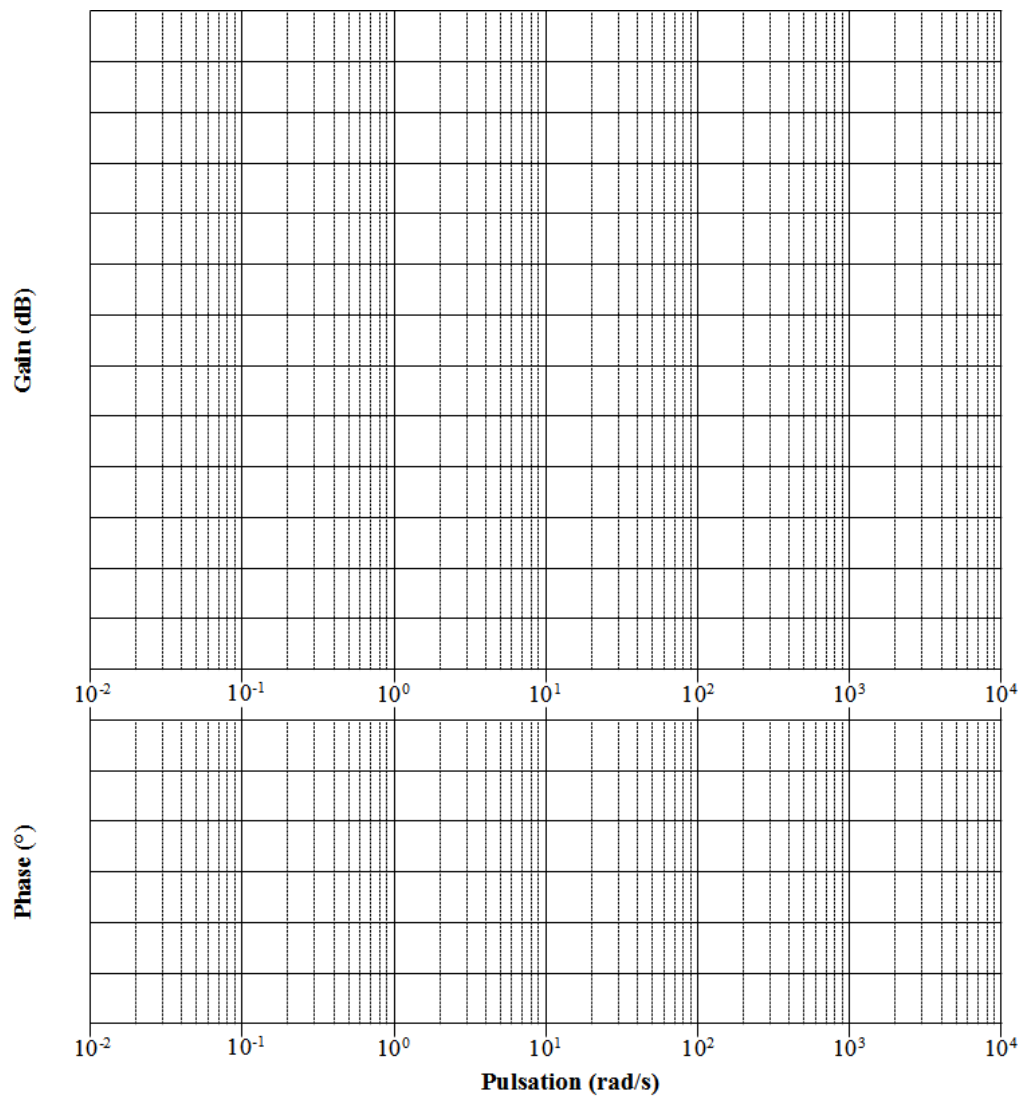
Diagramme de Bode

Question 1 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

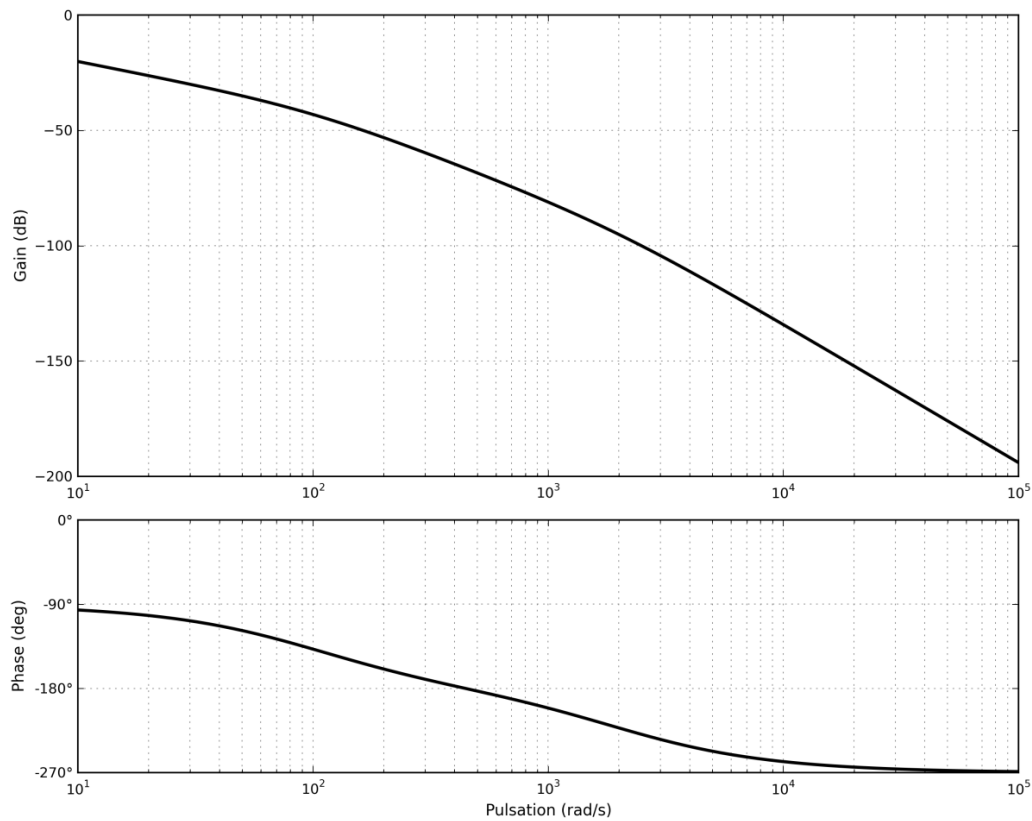
$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

**Question 2** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

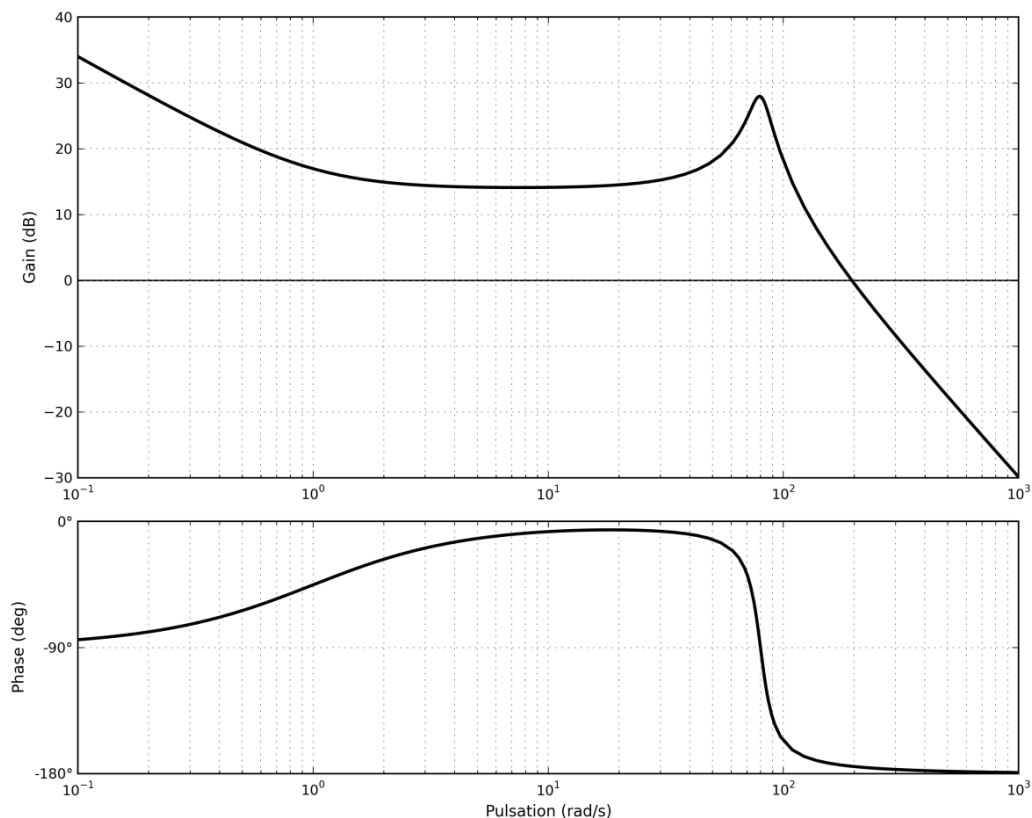


Question 3 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme : $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$. Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de $H(p)$.



Question 4 On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale : $e(t) = 3 \sin 300t$. Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

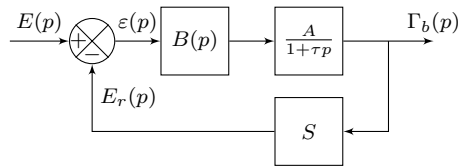
Question 5 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a : $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}$.



Question 6 Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité S est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.



On a $A = 100 \text{ gms}^{-2} \text{V}^{-1}$, $\tau = 0,2 \text{ s}$ et $S = 10 \cdot 10^{-3} / \text{gV} / (\text{m/s}^2)$ où g est l'accélération de pesanteur. $E(p)$ est la transformée de Laplace de $e(t)$ la tension de consigne de cet asservissement et $\Gamma_b(p)$ la transformée de l'accélération $\gamma b(t)$.

B(p) = 1

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude E_0 égale à $0,2 \text{ V}$.

Question 1 Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g . Quelle doit être la tension de consigne?

Question 2 La tension de consigne prend la forme suivante : $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$ avec $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$. Déterminer $\omega b(t)$ en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

Deuxième étude : $B(p) = \frac{1}{p}$.

Question 3 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude $0,2 \text{ V}$.

Question 4 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.

Application –
Corrigé

Applications

D'après Sébastien Grange

Savoirs et compétences :

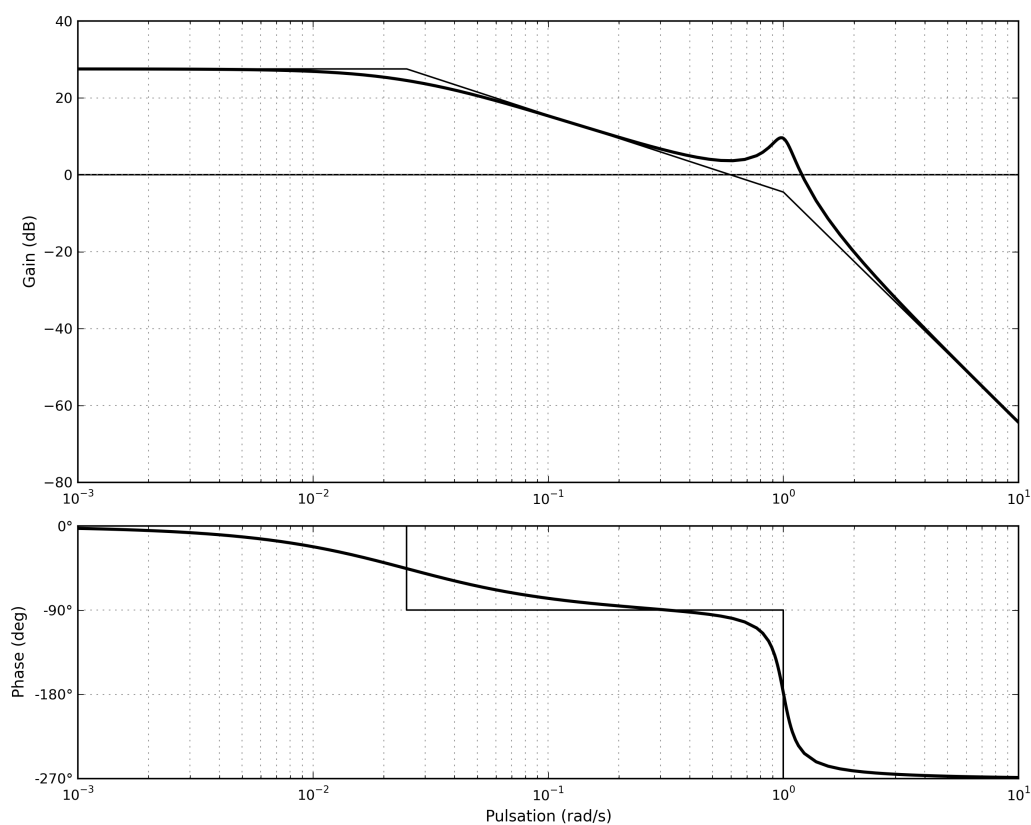
□ ...

Diagramme de Bode

Question 5 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

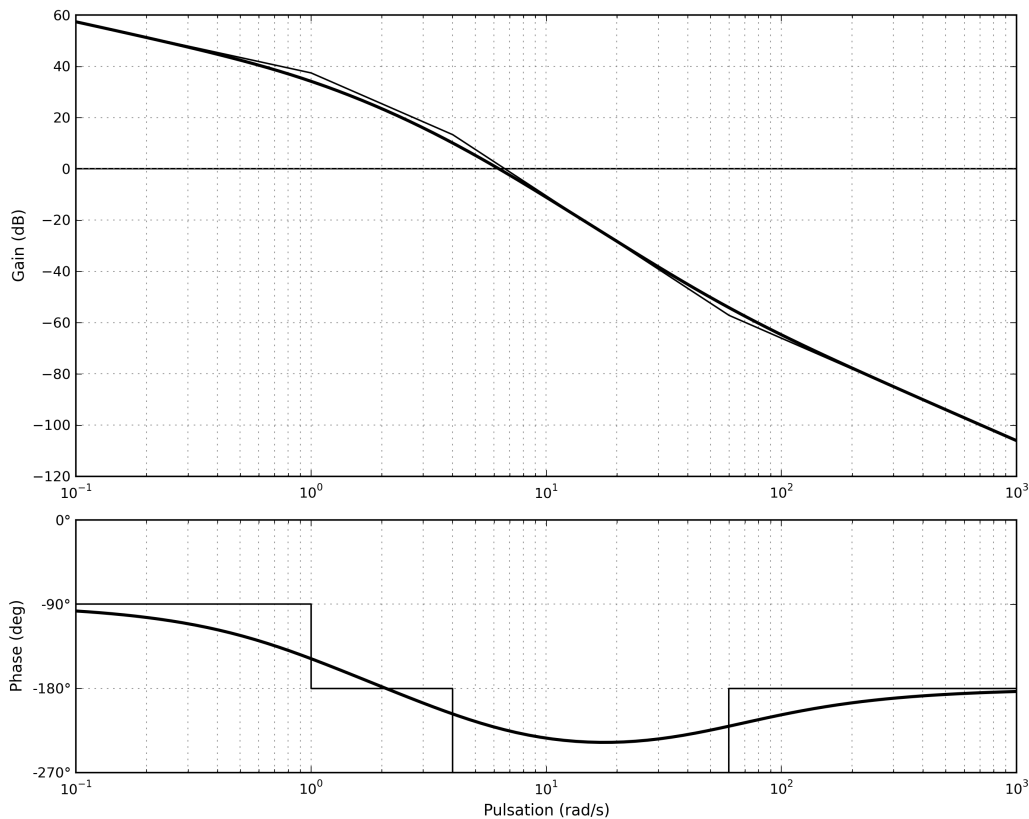
Correction $H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)} = \frac{24}{(1 + 40p) \left(1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1} p + \frac{p^2}{1^2} \right)}$

**Question 6** Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

Correction

$$H(p) = \frac{5(p+60)}{p(p^2+5p+4)} = \frac{75(1+0,0167p)}{p(1+(2 \cdot 1,25)/2p + p^2/2^2)} = \frac{75(1+0,0167p)}{p(1+p)(1+0,25p)}$$



Question 7 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme : $H(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$. Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de $H(p)$.

Correction D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. De plus la phase diminue dans un premier temps de 90 degrés puis encore de 90 degrés ce qui justifie les 2 1^{er} ordres.

Pour identifier les constantes de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un premier ordre passe par -45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut $\frac{1}{\tau}$. Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc les pulsations de coupure lorsque la phase vaut -135 degrés puis -225 degrés. On a : $1/T_1 \approx 100$ et $1/T_2 \approx 2000$ donc $T_1 = 0,01$ s et $T_2 = 0,0005$ s.

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici $\omega = 0,1$ rad/s. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1^{er} ordre valent environ $20 \log K$ et celui de l'intégrateur $20 \log(1/\omega)$. On a donc pour $\omega = 0,1$ rad/s : $20 \log(K/0,1) \approx -20$ $K \approx 1$

$$\text{On a donc : } H(p) = \frac{1}{p(1+0,01p)(1+0,0005p)}.$$

Le pôle dominant est le pôle qui met le plus de temps à converger, c'est-à-dire celui qui a la constante de temps la plus grande, on a donc : $H(p) \approx \frac{1}{p(1+0,01p)}$.

Question 8 On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale : $e(t) = 3 \sin 300t$. Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

Correction On sait que la sortie sera également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais déphasée et d'amplitude différente : $s(t) = S_0 \sin(300t + \varphi)$.

Le diagramme de Bode nous donne le rapport de l'amplitude entre la sortie et l'entrée (courbe de gain) et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (courbe de phase).

$$G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) = 20 \log(S_0/E_0) = 20 \log(S_0/3).$$

On peut lire que : $G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) \approx -60$ dB et donc $S_0 \approx 3 \cdot 10^{-3}$. D'après la courbe de phase, on peut lire : $\varphi(\omega = 300 \text{ rad/s}) = -175$ degrés On a donc : $s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(300t - 3,05)$. L'angle est à mettre en radians.

Question 9 Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a : $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.

Correction D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. Ensuite la phase augmente dans un premier temps de 90 degrés, ce qui signifie la présence d'un « 1er ordre » en numérateur. Puis la phase diminue de 180 degrés et le gain résonne ce qui justifie la présence d'un 2ème ordre avec un coefficient d'amortissement plus petit que $1/\sqrt{2}$.

$$H(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p(1 + 2\xi/\omega_0 p + p^2/(\omega_0^2))}$$

Pour identifier la constante de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un « premier ordre » au numérateur passe par 45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut $1/\tau$. Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -45 degrés. On a : $1/T \simeq 1$ et $T = 1$ s.

Pour identifier la pulsation de coupure, on va utiliser le fait que la phase d'un 2ème ordre passe par -90 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut ω_0 . Ici, il y a un intégrateur et un « 1er ordre » au numérateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -90 degrés. On a : $\omega_0 \simeq 80$ rad/s.

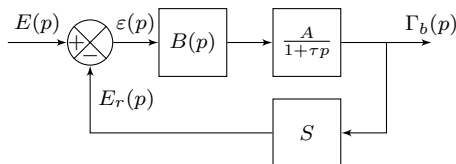
Pour identifier le coefficient d'amortissement, on va utiliser la résonance. On a : $20 \log(1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})) \simeq 13$ et $\xi \simeq 0,11$.

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici $\omega = 0,1$ rad/s. Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1er ordre et du 2ème ordre valent environ $20 \log K$ et celui de l'intégrateur $20 \log(1/\omega)$. On a donc pour $\omega = 0,1$ rad/s : $20 \log(K/0.1) \simeq 33$ et $K \simeq 4.5$

Question 10 Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité S est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.



On a $A = 100 \text{ gms}^{-2} \text{V}^{-1}$, $\tau = 0,2$ s et $S = 10 \cdot 10^{-3} \text{ gV}/(\text{m/s}^2)$ où g est l'accélération de pesanteur. $E(p)$ est la transformée de Laplace de $e(t)$ la tension de consigne de cet asservissement et $\Gamma_b(p)$ la transformée de l'accélération $\gamma b(t)$.

B(p) = 1

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude E_0 égale à 0,2 V.

Question 1 Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

Question 2 La tension de consigne prend la forme suivante : $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$ avec $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$. Déterminer $\omega b(t)$ en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

Deuxième étude : $B(p) = \frac{1}{p}$.

Question 3 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

Question 4 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.