Activation 01

Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Concours Centrale Supelec PSI 2006

Savoirs et compétences :

- ...

Mise en situation

Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

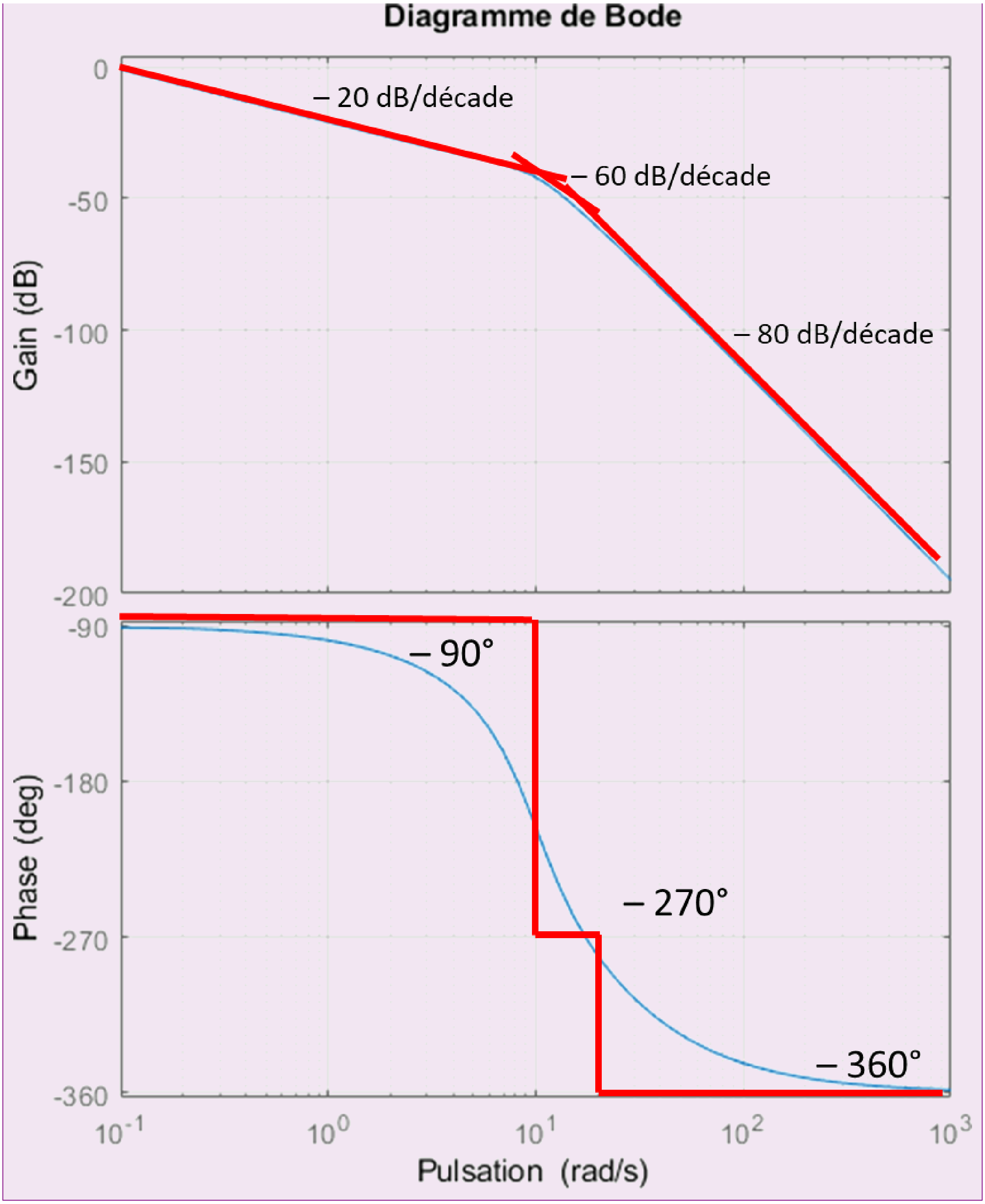
Question 1 *En prenant $C(p)=1$, compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.*

Correction On a pour $H_1(p)$, $\dfrac{1}{\omega_0^2}=0,01 \Leftrightarrow \omega_0=10$ et $2\dfrac{\xi}{\omega_0}=0,1$ soit $\xi=0,1\times 10/2=0,5$. Les pulsations caractéristiques de la FTBO sont donc $\omega_0=10\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ et $1/0,05=20\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Pour tracer un diagramme de Bode avec un intégrateur, il est nécessaire de définir un point pour définir la « hauteur » du tracé. Pour cela on prend un point pour lequel seul l'intégrateur et les constantes ont de l'effet. Ainsi, pour $\omega=0.1\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, on a $\text{FTBO}(p)\simeq\dfrac{2000\times 45\times 10^{-6}}{p}$. On a donc $20\log 0,09-20\log 0,1\simeq -0.92\,\text{dB}$.

On peut dresser le tableau de variations de la FTBO puis tracer les asymptotes.

	$\omega\to 0$	$\omega=10$	$\omega=20$	$\omega\to\infty$
$\lVert H_1(j\omega)\rVert_{dB}$	$20\log 2000$	$-40\,dB/decade$	$-40\,dB/decade$	
$\lVert H_2(j\omega)\rVert_{dB}$	-$20\,dB/decade$	$-20\,dB/decade$	$-20\,dB/decade$	
$\lVert M(j\omega)\rVert_{dB}$	0	0	$-20\,dB/decade$	
$\boldsymbol{\lVert FTBO(j\omega)\rVert_{dB}}$	**-$\boldsymbol{20\,dB/decade}$**	$\boldsymbol{-60\,dB/decade}$	$\boldsymbol{-80\,dB/decade}$	
$\boldsymbol{Arg(FTBO(j\omega))}$	$\boldsymbol{-90°}$	$\boldsymbol{-270°}$	$\boldsymbol{-360°}$	



Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est : $C(p) = K_r\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)$.

Question 2 *Calculer la valeur que doit prendre l'argument $C(p)$ de afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure ω_c souhaitée.*

Méthode Si on note ω_c on définit la pulsation de coupure telle que $|\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0\,\text{dB}$. On peut alors définir la marge de phase par $M\varphi = \arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180°)$.

Correction La pulsation de coupure souhaitée est $\omega_c \simeq 1\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. On cherche donc K_r et T_i tels que $\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega_c\right)\right] - (-180°) = 60°$.

$$\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega\right)\right] = \arg\left[\underbrace{\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}}_{\to -5.7°\text{ qd }\omega=\omega_c}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+0,05p}}_{\to -2.8°\text{ qd }\omega=\omega_c}\cdot\underbrace{K_r}_{\to 0}\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\cdot\underbrace{\frac{45\cdot 10^{-6}}{p}}_{\to -90°}\right] = \arg\left[\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\right] - 98,5$$

> **R** Ci-dessus, ce sont les **arguments** que l'on évalue lorsque $\omega = \omega_c$. L'argument du produit est égal à la somme des arguments.

$\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega\right)\right] = \arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] - 98,5$.

Pour respecter la marge souhaitée, il est donc nécessaire que $\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega_c\right)\right] - (-180) \geq 60$ Soit $\arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] - 98,5 + 180 \geq 60$ et $\arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] \geq -21.5°$.

Question 3 *Calculer la valeur minimale, T_{imin}, que l'on peut conférer à la constante T_i de l'action intégrale du régulateur.*

Correction On en déduit que pour $\omega = \omega_c = 1$, $\arg\left[\dfrac{T_i p+1}{T_i p}\right] \geq -21.5° \Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) - 90 \geq -21.5° \Leftrightarrow \arctan(T_i\omega) \geq 68.5°$ et donc $\Rightarrow T_i \geq \tan(68,5) = 2.54\,\text{s}$.

> **!** **Attention** : à ce stade, la marge de phase serait de 60°**SI** la pulsation de coupure était de $1\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ ce qui n'est pas encore le cas pour le moemnt.

Question 4 *En adoptant $T_i = T_{imin}$, déterminer alors le gain K_r du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)*

Méthode Il faut chercher K_r tel que $20\log||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0$.

Correction En raisonnant graphiquement à l'aide du diagramme en boucle ouverte non corrigé, on lit que le gain est d'environ -20 dB lorsque $\omega = 1$. La fonction de transfert du correcteur est $C(p) = K_r\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right) = K_r\dfrac{T_i p+1}{T_i p}$.

Le gain dB du correcteur doit donc être de 20 dB lorsque $\omega = 1$: $20\log K_r + 20\log\sqrt{T_i^2\omega^2+1} - 20\log T_i\omega = 20 \Leftrightarrow \log K_r + \log\sqrt{T_i^2+1} - \log T_i = 1 \Leftrightarrow \log K_r = 1 - \log\sqrt{T_i^2+1} + \log T_i$.

On a donc $K_r = 9,3$.

Anlaytiquement (à vérifier....) $20\log||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 0 \Rightarrow ||\text{FTBO}(j\omega_c)|| = 1$.

$$||\text{FTBO}\left(j\omega\right)|| = \left|\left|\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}\cdot\frac{1}{1+0,05p}\cdot K_r\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\cdot\frac{45\cdot 10^{-6}}{p}\right|\right|$$

$$= \left|\left|\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}\cdot\frac{1}{1+0,05p}\cdot K_r\frac{1+T_i p}{T_i p}\frac{45\cdot 10^{-6}}{p}\right|\right|$$

$$= \frac{K_r}{T_i\omega^2}90\cdot 10^{-3}\sqrt{1+T_i^2\omega^2}\left|\left|\frac{1}{1+0,1p+0,01p^2}\,\frac{1}{1+0,05p}\right|\right| = \frac{K_r}{T_i\omega^2}90\cdot 10^{-3}\frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{\sqrt{1+0,05^2\omega^2}}\frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2\omega^2)^2+0,1^2\omega^2}}$$

$$= \frac{K_r}{T_i}90\cdot 10^{-3}\frac{\sqrt{1+T_i^2}}{\sqrt{1+0,05^2}}\frac{1}{\sqrt{(1-0,01^2)^2+0,1^2}}$$

Question 5 *Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question précédente, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)*

Méthode Soit ω_φ la pulsation telle que $\varphi\left(\omega_\varphi\right) = -180°$. La marge de gain s'exprime alors par $MG = -20\log\left\|H\left(j\omega_\varphi\right)\right\|$.

Correction **Approche analytique** On résout $\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega\right)\right] = -180°$

$$\arg\left[\text{FTBO}\left(j\omega\right)\right] = \arg\left[\frac{2000}{1+0,1p+0,01p^2}\cdot\frac{1}{1+0,05p}\cdot K_r\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\cdot\frac{45\cdot 10^{-6}}{p}\right]$$

Approche graphique

Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

Question 6 *En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$, justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.*

Correction

Question 7 *Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.*

Correction

- $K_f = 1$: lorsque ω tend vers 0, le gain tend vers 0 ;
- $\omega_0 = 0,5$: valeur de la pulsation de résonance ;
- $\tau_1 = \dfrac{1}{0,9} = 1.11\,\text{s}$;
- $\tau_2 = \dfrac{1}{7} = 0.14\,\text{s}$;
- $\xi < 0,7$ (résonance).

Question 8 *En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert $F(p)$ par la forme suivante : $F(p) = \dfrac{v_1(p)}{v_c(p)} = \dfrac{K_f\left(1+\tau_1 p\right)}{\left(1+\tau_2 p\right)^2}$.*

Correction

La pulsation propre ω_0 est relativement loin de la bande passante, en conséquence sa dynamique sera rapide vis-à-vis du zéro et du pôle double (pôles dominants). On adopte donc :

$$\boxed{F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{(1+3,3\,p)}{(1+1,66\,p)^2}}$$

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement : $f(t) = \left(\dfrac{\tau_2-\tau_1}{\tau_2^3}t + \dfrac{\tau_1}{\tau_2^2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_2}}u(t)$.

Question 9 *Calculer le temps du 1er maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif $v_c(t) = v_{c0}u(t)$ où $u(t)$ désigne l'échelon unité.*

Correction

Calcul du temps du 1er maximum

Le temps du 1er maximum est donné par $f(t_m)=0$, soit pour :

$$\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_2^3}t_m+\frac{\tau_1}{\tau_2^2}=0$$

On obtient donc :

$$\boxed{t_m=\frac{\tau_2\tau_1}{\tau_1-\tau_2}}$$

L'application numérique avec les valeurs adoptées conduit à $t_m=3{,}3$ s.

Calcul du dépassement

La réponse indicielle peut être obtenue par intégration de la réponse impulsionnelle, le dépassement étant donné par la valeur de la sortie pour $t=t_m$:

$$v(t_m)=\int_0^{t_m} f(t)dt=\int_0^{t_m}(ay(t)+b\dot{y}(t))dt=a\int_0^{t_m} y(t)dt+b\left[y(t)\right]_0^{t_m}$$

Avec $y(t)=te^{-t/\tau_2}$ dont l'intégration peut être effectuée facilement par parties :

$$\int_0^{t_m} te^{-t/\tau_2}=\left[-\tau_2te^{-t/\tau_2}-\tau_2^2e^{-t/\tau_2}\right]_0^{t_m}=-\tau_2t_me^{-t_m/\tau_2}-\tau_2^2e^{-t_m/\tau_2}+\tau_2^2$$

$$\boxed{v(t_m)=\frac{1}{\tau_2^2}\left[-\tau_2t_me^{-t_m/\tau_2}-\tau_2^2e^{-t_m/\tau_2}+\tau_2^2\right]+\frac{\tau_1}{\tau_2^2}t_me^{-t_m/\tau_2}}$$

Pour $t=t_m$ on obtient $v(t_m)=1{,}13$, soit un dépassement de 13%.

Question 10 *Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.*

Correction

- Le temps du 1er maximum est inférieur à 3,5 s. et le dépassement inférieur à 20% ce qui vérifie le cahier des charges.
- Le régulateur comportant une action intégrale, l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une consigne constante.

Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

Question 11 *Déterminer la fonction de transfert $F_2(p)=\dfrac{\nu_1(p)}{F_{ext}(p)}$ entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose ν_c nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée $||F_2(j\omega)||$, de cette fonction* *peut être approché par la relation :* $||F_2(j\omega)|| = \min\left[||H_2(j\omega)||; \dfrac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}\right]$.

Correction On a directement $F_2(p) = -\dfrac{H_2(p)}{1+H_2(p)M(p)C(p)H_1(p)}$.

On peut alors déterminer le module et on a $||F_2(j\omega)|| = \left|\left|\dfrac{H_2(j\omega)}{1+H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)}\right|\right|$.

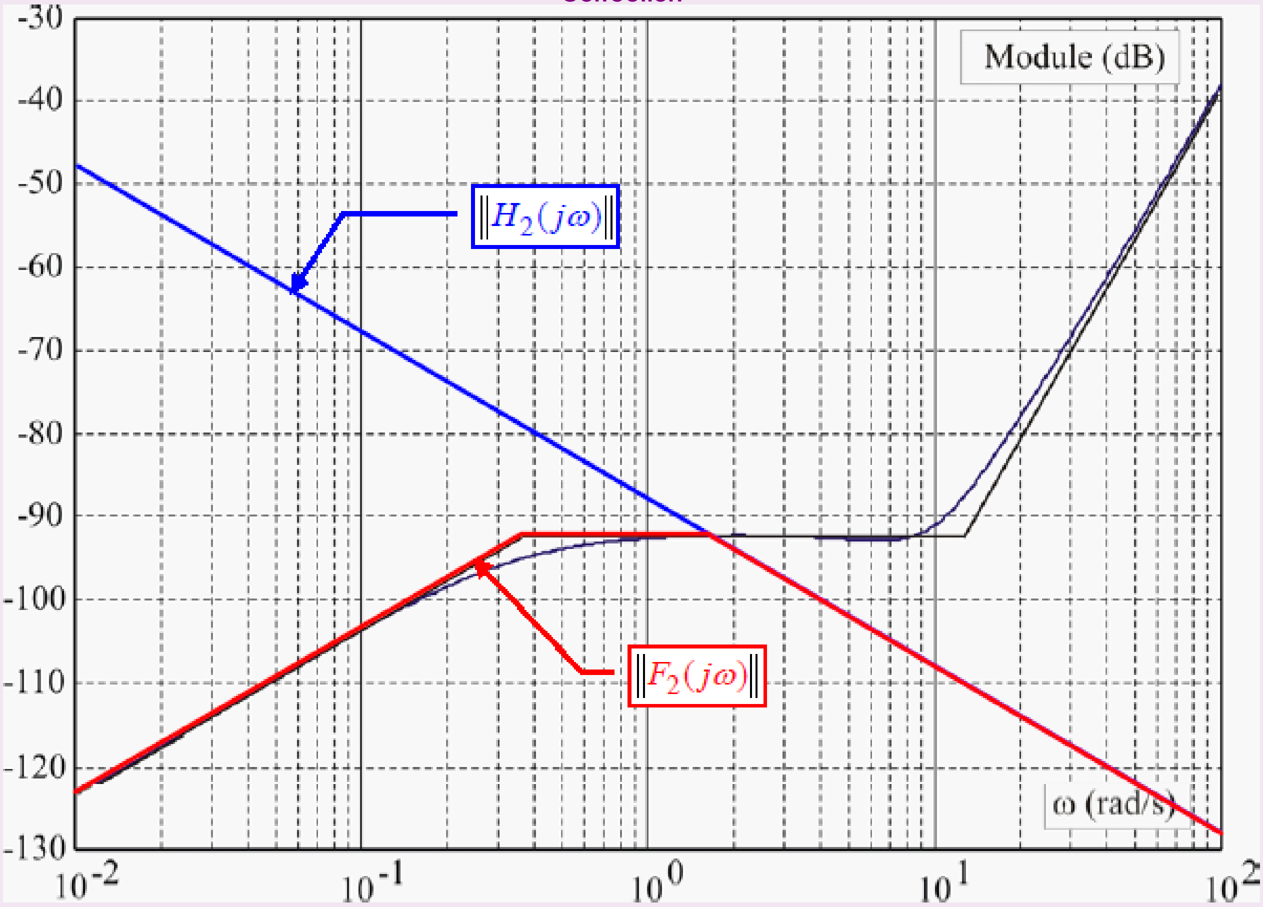
Dans ces conditions :

- si $\left|\left|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\right|\right| >> 1$ alors $||F_2(j\omega)|| \simeq \left|\left|\dfrac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)}\right|\right| \simeq \left|\left|\dfrac{1}{M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)}\right|\right|$;
- si $\left|\left|H_2(j\omega)M(j\omega)C(j\omega)H_1(j\omega)\right|\right| << 1$ alors $||F_2(j\omega)|| \simeq \left|\left|H_2(j\omega)\right|\right|$.

On peut en conclure que $||F_2(j\omega)|| = \min\left[||H_2(j\omega)||; \dfrac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}\right]$.

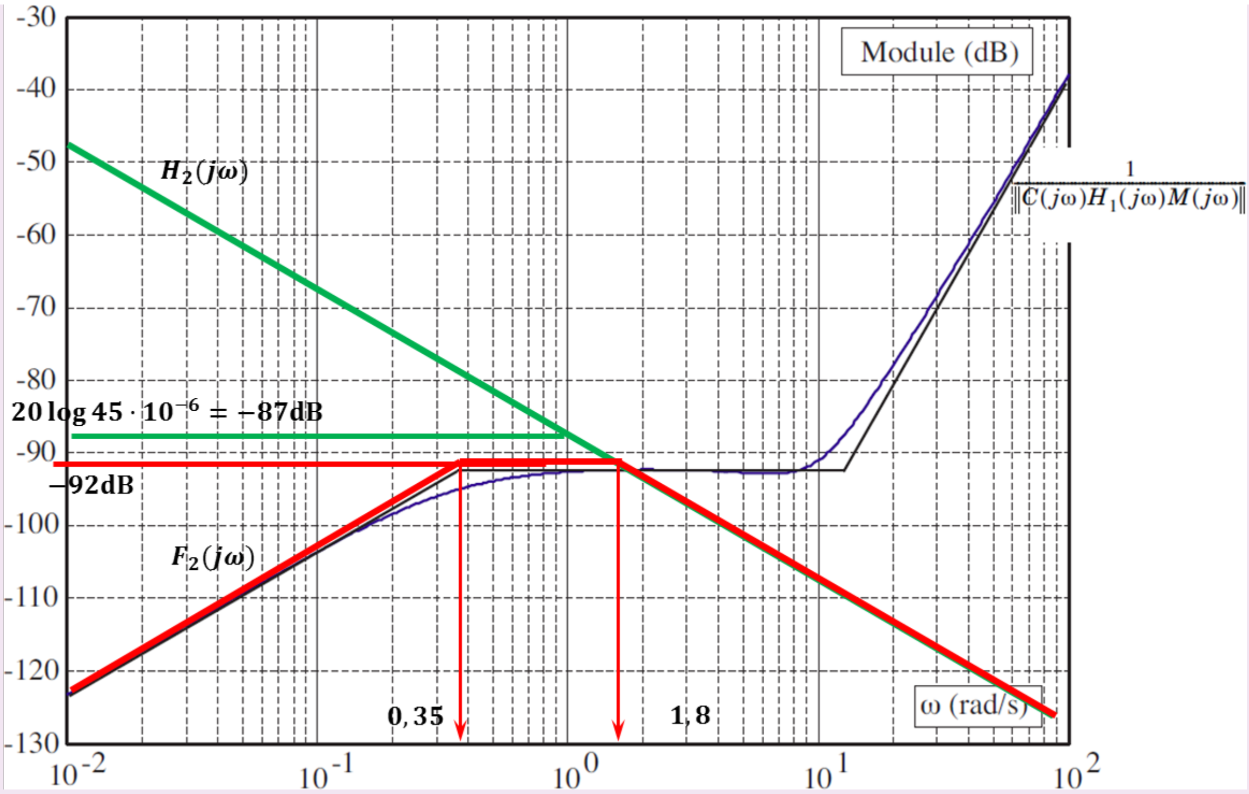
Question 12 *La figure suivante comporte le tracé de la fonction* $\dfrac{1}{||C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)||}$. *Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction* $||H_2(j\omega)||$.

Correction



Question 13 *En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction* $||F_2(j\omega)||$. *En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert* $F_2(p)$ *entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.*

Correction



En analysant les brisures de F_2, on peut proposer la fonction de transfert suivante : $F_2 = -\dfrac{Kp}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ avec $\tau_1 = \dfrac{1}{0,35} \simeq 2.9\,\text{s}$, $\tau_2 = \dfrac{1}{1,8} \simeq 0.6\,\text{s}$. Avec cette proposition, en basse fréquence, seul le dérivateur existe, ona donc $20\log K\omega = 20\log 0,01K = -123$ soit $K = 100 \times 10^{-123/20} \simeq 7\cdot 10^{-5}$.

Au final, $F_2 = -\dfrac{7\cdot 10^{-5}p}{(1+2,9p)(1+0,6p)}$.

Question 14 *Préciser les pôles de la fonction $F_2(p)$ déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme : $F_2(p) = \dfrac{K_2 p}{1+Tp}$.*

Correction

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux pôles :

$$\begin{cases} p_1 = -0,35 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

Le pôle p_2 étant caractérisé par une dynamique relativement rapide par rapport à celle de p_1, on va pouvoir le négliger pour l'étude de la réponse temporelle. Soit la fonction approchée :

$$\boxed{F_2(p) = -\dfrac{\dfrac{p}{12100}}{(1+2,8p)}}$$

Question 15 *En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif $v_1(t)$ en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice $F_{ext} = F_0 u(t)$, où $u(t)$ représente l'échelon unité et avec $F_0 = 2000\,\text{N}$.*