

## TD 01



## Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supélec TSI 2017

Savoirs et compétences :

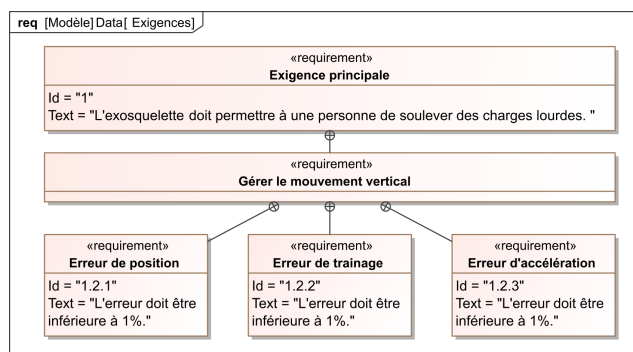
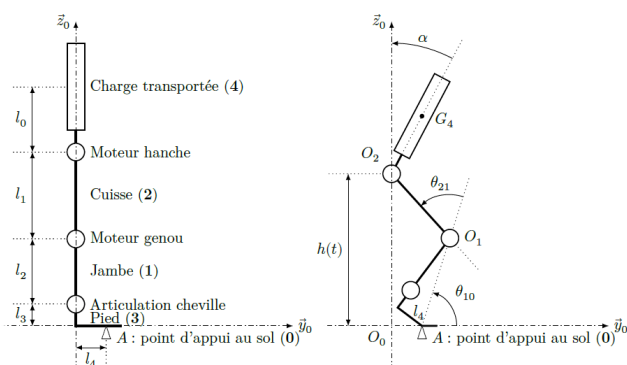
- Mod2.C4 : calcul symbolique;
- Mod2.C7.SF1 : analyser ou établir le schéma-bloc du système;
- Res2.C10 : précision des SLCI : erreur en régime permanent;
- Res2.C10.SF1 : déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon ou en rampe (consigne ou perturbation).

## Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



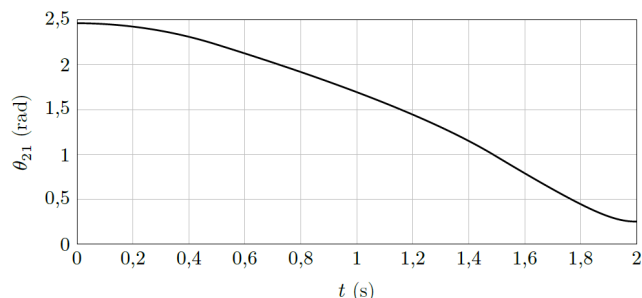
On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.



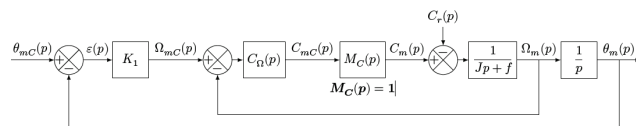
## Gestion du mouvement vertical

**Objectif** Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.



## Notations :

- $\theta_{mC}(p)$  consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_{mC}(t)$  en rad) ;
- $\theta_m(p)$  position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_m(t)$  en rad) ;
- $C_{mC}(p)$  consigne de couple moteur (variable temporelle :  $c_{mC}(t)$  en Nm) ;
- $C_m(p)$  couple moteur (variable temporelle :  $c_m(t)$  en Nm) ;
- $C_r(p)$  couple résistant perturbateur (variable temporelle :  $c_r(t)$  en Nm) ;
- $K_1$  gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en  $s^{-1}$ ) ;

- $\Omega_{mC}(p)$  consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_{mC}(t)$  en  $\text{rad s}^{-1}$ );
- $\Omega_m(p)$  vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_m(t)$  en  $\text{rad s}^{-1}$ );
- $C_\Omega(p)$  correcteur de l'asservissement de vitesse;
- $M_C(p)$  modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles :  $M_C(p) = 1$ ;
- $J$  moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur;
- $f$  coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement.

Le correcteur est de la forme :  $C_\Omega(p) = K_2 \left( \frac{Jp + f}{Jp} \right)$ .

En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que :

- l'écart est défini par la variable  $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ ;
- l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable  $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ .

Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart  $\varepsilon(t)$  est égal à l'erreur  $\mu(t)$ .

**Hypothèse(s)** Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude  $C_r(p) = 0$ .

**Question 1** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

**Question 2** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

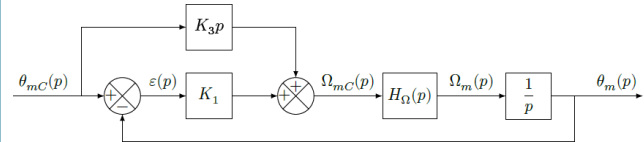
**Question 3** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

**Méthode** On peut définir l'erreur de position  $\varepsilon_p$  par  $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$  avec  $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$  (entrée échelon).

**Question 4** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Question 5** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec  $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$  et  $T = 33 \text{ ms}$ .



**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant d'annuler cette erreur.

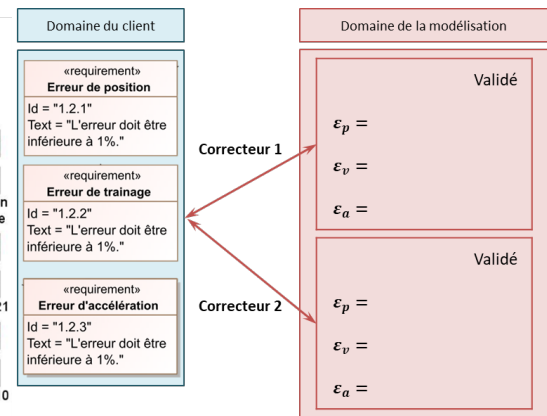
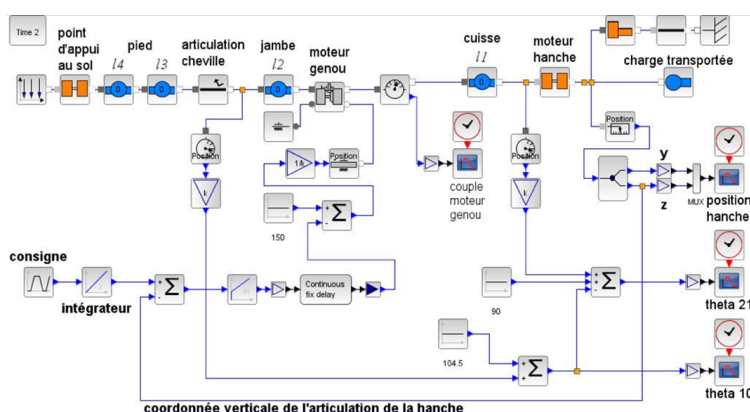
**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Synthèse

**Question 9** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.

Éléments de corrigé :

1. Asservissement en position.
2.  $H_\Omega(p) = 1 / \left( \frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1 \right)$ .
3.  $\varepsilon(p) = (\theta_{mC}(p)) / \left( 1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \right)$
4.  $\varepsilon(p) = 0$ ,  $\varepsilon_v = \frac{1}{K_1}$  et  $K_1 > 100$ .
5.  $\varepsilon_a = \infty$ .
6.  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) (p(1 + Tp - K_3)) / (p(1 + Tp) + K_1)$ .
7.  $\varepsilon_v = \frac{1 - K_3}{K_1}$ ,  $K_3 = 1$ .
8.  $\varepsilon_a = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$ . Le cahier des charges est donc validé.



## Colle



## Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supélec TSI 2017

Savoirs et compétences :

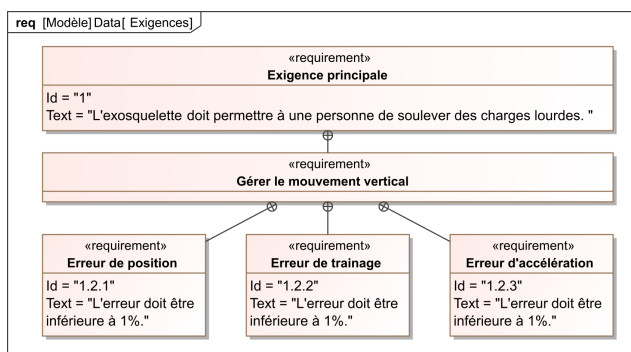
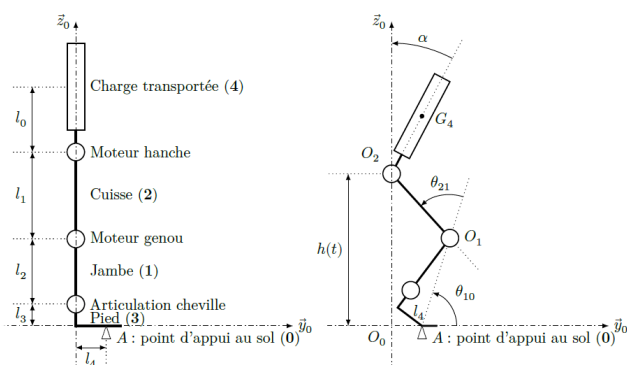
- Mod2.C4 : calcul symbolique;
- Mod2.C7.SF1 : analyser ou établir le schéma-bloc du système;
- Res2.C10 : précision des SLCI : erreur en régime permanent;
- Res2.C10.SF1 : déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon ou en rampe (consigne ou perturbation).

## Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



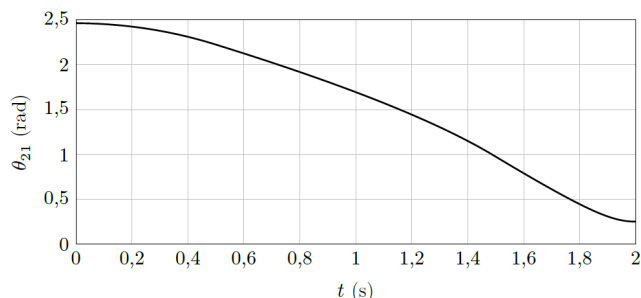
On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.



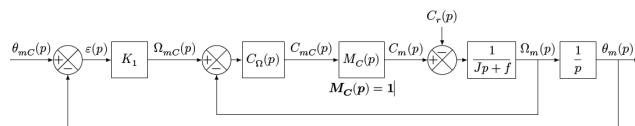
## Gestion du mouvement vertical

**Objectif** Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.



## Notations :

- $\theta_{mC}(p)$  consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_{mC}(t)$  en rad) ;
- $\theta_m(p)$  position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_m(t)$  en rad) ;
- $C_{mC}(p)$  consigne de couple moteur (variable temporelle :  $c_{mC}(t)$  en Nm) ;
- $C_m(p)$  couple moteur (variable temporelle :  $c_m(t)$  en Nm) ;
- $C_r(p)$  couple résistant perturbateur (variable temporelle :  $c_r(t)$  en Nm) ;
- $K_1$  gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en  $s^{-1}$ ) ;

- $\Omega_{mC}(p)$  consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_{mC}(t)$  en  $\text{rad s}^{-1}$ );
- $\Omega_m(p)$  vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_m(t)$  en  $\text{rad s}^{-1}$ );
- $C_\Omega(p)$  correcteur de l'asservissement de vitesse;
- $M_C(p)$  modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles :  $M_C(p) = 1$ ;
- $J$  moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur;
- $f$  coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement.

Le correcteur est de la forme :  $C_\Omega(p) = K_2 \left( \frac{Jp + f}{Jp} \right)$ .

En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que :

- l'écart est défini par la variable  $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ ;
- l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable  $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ .

Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart  $\varepsilon(t)$  est égal à l'erreur  $\mu(t)$ .

**Hypothèse(s)** Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude  $C_r(p) = 0$ .

**Question 10** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

**Question 11** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

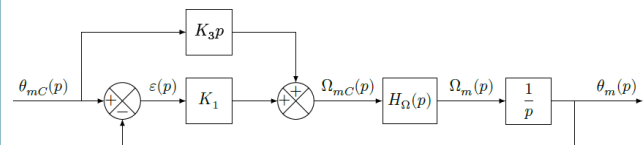
**Question 12** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

**Méthode** On peut définir l'erreur de position  $\varepsilon_p$  par  $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$  avec  $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$  (entrée échelon).

**Question 13** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Question 14** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec  $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$  et  $T = 33$  ms.



**Question 15** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

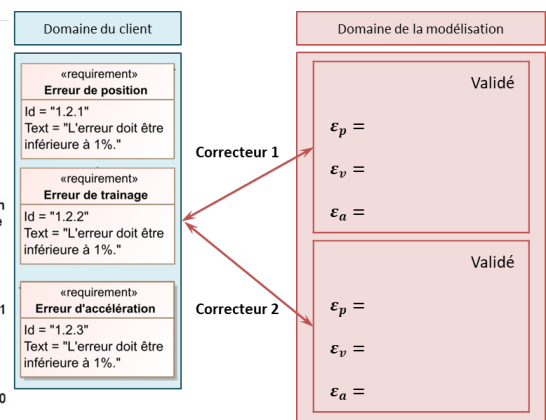
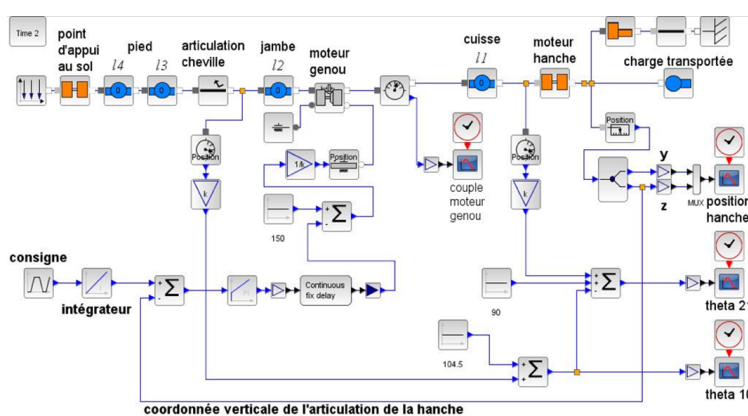
Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 16** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

**Question 17** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Synthèse

**Question 18** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.





## TD 01 – Corrigé



## Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supélec TSI 2017

Savoirs et compétences :

- Mod2.C4 : calcul symbolique ;
- Mod2.C7.SF1 : analyser ou établir le schéma-bloc du système ;
- Res2.C10 : précision des SLCI : erreur en régime permanent ;
- Res2.C10.SF1 : déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon ou en rampe (consigne ou perturbation).

## Mise en situation

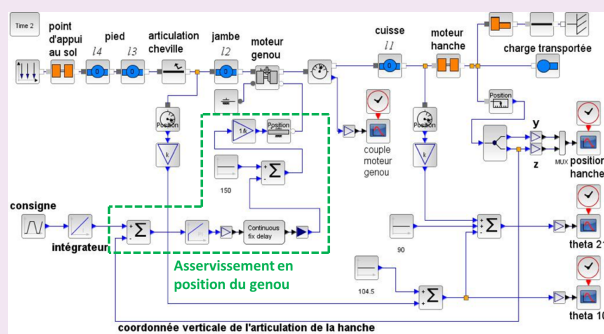
## Gestion du mouvement vertical

**Objectif** Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

**Question 19** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

## Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



**Question 20** Exprimer  $H_{\Omega}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

**Correction** En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a :  $H_{\Omega}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} =$

$$\frac{C_{\Omega}(p)M_C(p) \frac{1}{Jp+f}}{1 + C_{\Omega}(p)M_C(p) \frac{1}{Jp+f}}. \text{ En conséquences : } H_{\Omega}(p) = \frac{C_{\Omega}K_2}{Jp + C_{\Omega}K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{C_{\Omega}K_2} + 1}.$$

**Question 21** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_{\Omega}(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

**Correction** D'une part,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$ . D'autre part,  $\theta_m(p) = H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p)$ . Par suite,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p) \left( 1 + H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p} \right) = \theta_{mC}(p)$ . En conséquences,  $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p}}$ .

**Question 22** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Correction** On a :

$$\begin{aligned} \bullet \varepsilon_p &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{C_{\Omega}K_2} + 1} \frac{K_1}{p}} = 0 \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1);} \\ \bullet \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{C_{\Omega}K_2} + 1} \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{Jp}{C_{\Omega}K_2} + 1} K_1} = \frac{1}{K_1} \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et de gain } K_1 \text{ en BO).} \end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut  $\frac{1}{K_1} < 0,01$  et  $K_1 > 100$ .

**Question 23** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

**Correction** En raisonnant de même, on a :  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{\varepsilon}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \frac{1}{1 + H_{\Omega}(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3} =$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} \frac{K_1}{p^2}} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{p}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} K_1} = \infty$$

(ce qui était prévisible pour un système de classe 1).

Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

**Question 24** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

**Correction** En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$ ;
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)$ ;
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp}$ .

$$\text{On a donc : } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp} = \theta_{mC}(p) - \left( K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p) \right) \frac{1}{p(1 + Tp)} = \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1 + Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \varepsilon(p).$$

$$\text{On a alors } \varepsilon(p) \left( 1 + \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \right) = \theta_{mC}(p) \left( 1 - \frac{K_3}{1 + Tp} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1 + Tp) + K_1}{p(1 + Tp)} = \theta_{mC}(p) \frac{1 + Tp - K_3}{1 + Tp}$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1}.$$

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 25** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

**Correction**  $\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} = \frac{1 - K_3}{K_1}.$

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir  $K_3 = 1$ .

**Question 26** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

On a :

**Correction**  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 + Tp - K_3)}{p(1 + Tp) + K_1} \frac{1}{p}.$  En prenant  $K_3 = 1$  et  $K_1 = 100$ , on obtient :  $\varepsilon_a = \frac{T}{p(1 + Tp) + 100} = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$ . L'erreur est donc de  $33 \times 10^{-5}$ . Le cahier des charges est donc validé.

## Synthèse

**Question 27** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.

