Modéliser le comportement linéaire et non linéaire des systèmes multiphysiques

Révisions 2 – Modéliser les systèmes asservis – Transformée de Laplace

1 Définitions

Définition — Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles.

Une fonction temporelle $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour $t=0^+$:

$$f(0^+)=0 \quad \frac{\mathrm{d}f(0^+)}{\mathrm{d}t}=0 \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(0^+)}{\mathrm{d}t^2}=0\dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

Définition — Transformée de Laplace.
À toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t\leq 0$ (fonction causale), on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=F(p)=\int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

On note $\mathscr{L}\left[f(t)\right]$ la transformée directe et $\mathscr{L}^{-1}\left[F(p)\right]$ la transformée inverse.
De manière générale on note $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=F(p)$, $\mathscr{L}\left[e(t)\right]=E(p)$, $\mathscr{L}\left[s(t)\right]=S(p)$, $\mathscr{L}\left[\omega(t)\right]=\Omega(p)$, $\mathscr{L}\left[\theta(t)\right]=\Theta(p)$ ...

Résultat — Dérivation.

Dans les conditions de Heaviside : $\mathscr{L}\left[\mathbf{\frac{df(t)}{dt}}\right]=\mathbf{pF(p)}$ $\quad \mathscr{L}\left[\mathbf{\frac{d^2f(t)}{dt^2}}\right]=\mathbf{p^2F(p)}$ $\quad \mathscr{L}\left[\mathbf{\frac{d^nf(t)}{dt^n}}\right]=\mathbf{p^nF(p)}$.

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par $\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=pF(p)-f(0^+)$.

Définition — Transformées usuelles.

Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$	Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$\mathbf{F(p)=1}$	Échelon $u(t)=k$	$\mathbf{U(p)=\frac{k}{p}}$
Fonction carrée $f(t)=t^2$	$\mathbf{F(p)=\frac{1}{p^2}}$	Puissances $f(t)=t^n\cdot u(t)$	$F(p)=\frac{n!}{p^{n+1}}$
$f(t)=\sin(\omega_0 t)\cdot u(t)$	$F(p)=\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$	$f(t)=\cos(\omega_0 t)\cdot u(t)$	$F(p)=\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$
$f(t)=e^{-at}\cdot u(t)$	$F(p)=\frac{1}{p+a}$	$f(t)=e^{-at}\sin(\omega_0 t)\cdot u(t)$	$F(p)=\frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^2}$
$f(t)$ est T périodique	$F(p)=\frac{\mathscr{L}\left[f_0(t)\right]}{1-e^{-Tp}}\cdot u(t)$	$f(t)=t^n e^{-at}u(t)$	$F(p)=\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

2 Théorèmes

Théorème — Théorème de la valeur initiale.

$$\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{p\to\infty} pF(p)$$

Théorème — Théorème de la valeur finale.

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} pF(p)$$

Théorème — Théorème du retard.

$$\mathscr{L}\left[f(t-t_0)\right] = e^{-t_0 p} F(p)$$

Théorème — Théorème de l'amortissement.

$$\mathscr{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(p+a)$$