Activation Corrigé

Activation

Patrick Dupas, http://patrick.dupas.chez-alice.fr/.

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe*
- ❒ *Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)*

Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

Question *Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.*

Exercice 2 – Pôles de la FTBF

Question *Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.*

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question *On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.*

Question *Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.*

Exercice 4 – Étude de la stabilité

On a $K=1$, $\tau=0,1$ et $G=20$.

Question 1 *Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.*

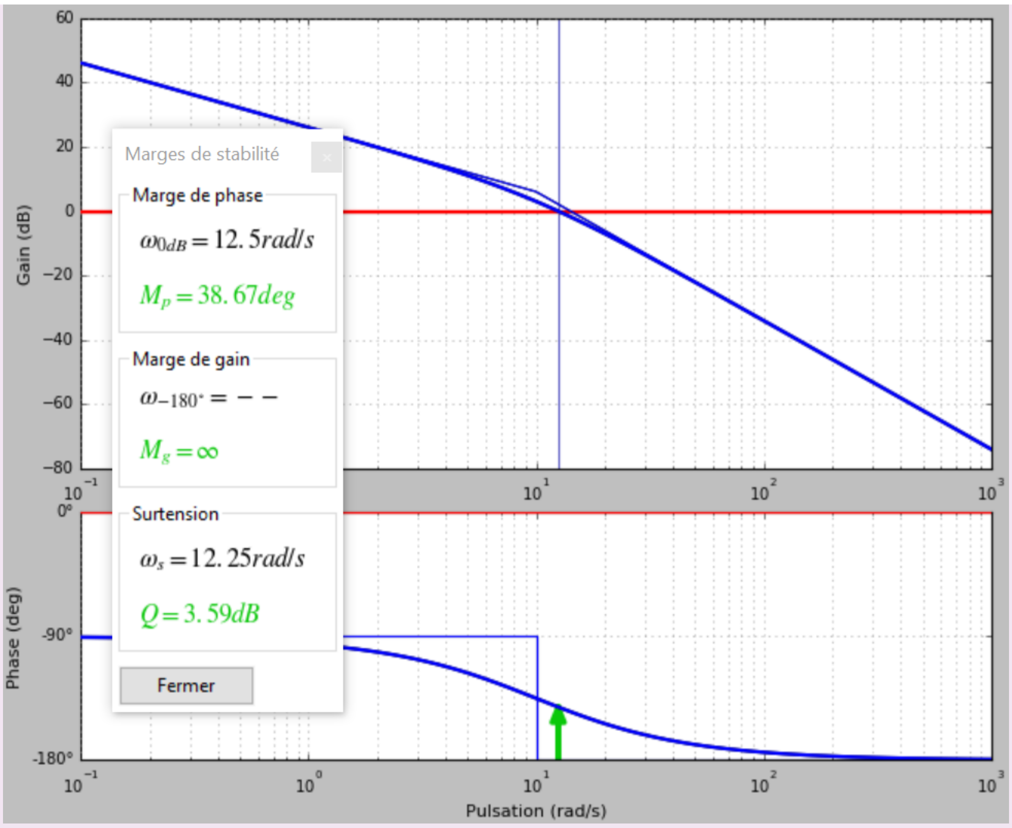
Correction Ici on a $\varepsilon(p)=\dfrac{E(p)}{1+\text{FTBO}(p)}$.

Erreur statique (entrée échelon) : $\varepsilon_s=\lim\limits_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=\lim\limits_{p\to 0}p\varepsilon(p)=\lim\limits_{p\to 0}p\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{1+\dfrac{20}{(1+0,1p)p}}=0$

Erreur trainage (entrée rampe) : $\varepsilon_t=\lim\limits_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=\lim\limits_{p\to 0}p\varepsilon(p)=\lim\limits_{p\to 0}p\dfrac{1}{p^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{20}{(1+0,1p)p}}=1/20$

Question 2 *Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.*

Correction



Question 3 *Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.*

Correction

Question 4 *Confirmer ces résultats par le calcul.*

Correction
La phase ne coupe jamais l'axe des abscisses. Ainsi, La marge de gain n'est pas définie (elle est infinie). Pour déterminer la marge de phase analytiquement :

1. On cherche ω_c tel que $G_{\text{dB}}(\omega_c) = 0$;
2. On calcule $\varphi(\omega_c)$;
3. La marge de phase est de $\varphi(\omega_c) - (-180)$.

Cherchons ω_c tel que $G_{\text{dB}}(\omega_c) = 0$. On a $\text{FTBO}(j\omega) = \dfrac{20}{(1+0,1j\omega)j\omega} = \dfrac{20}{j\omega - 0,1\omega^2}$. $20\log|\text{FTBO}(j\omega)| = 20\log 20 - 20\log\sqrt{\omega^2 + 0,01\omega^4} = 20\log 20 - 20\log\omega\sqrt{1+0,01\omega^2}$.

$G_{\text{dB}}(\omega_c) = 0 \Longleftrightarrow 20 = \omega_c\sqrt{1+0,01\omega_c^2} \Longleftrightarrow 400 = \omega_c^2\left(1+0,01\omega_c^2\right)$ On pose $x = \omega_c^2$ et on a : $400 = x(1+0,01x) \Longleftrightarrow x^2 + 100x - 40000 = 0$. On a donc $\Delta = 412,3^2$ et $x_{1,2} = \dfrac{-100 \pm 412,3}{2}$ on conserve la racine positive et $x_1 = 156,15$ et $\omega_c = 12,5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

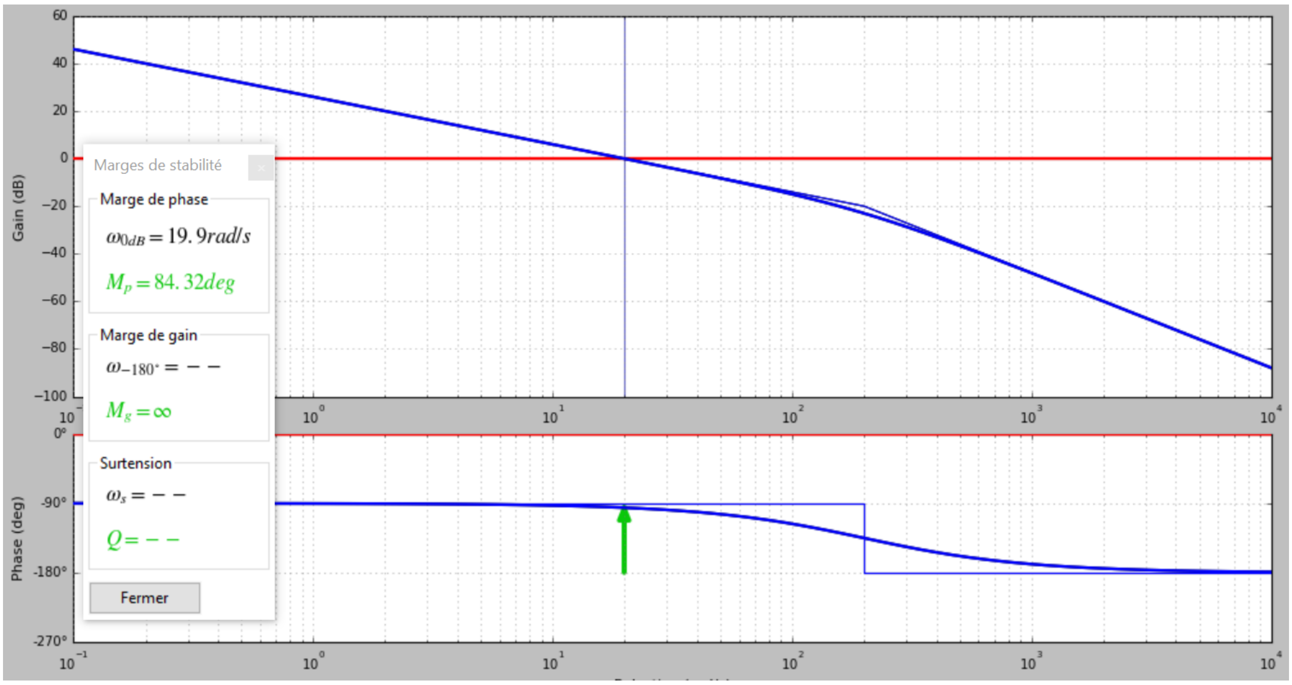
$\varphi(\omega_c) = \arg(20) - 90 - \arg\left(1+0,1j\omega_c\right) = 0 - 90 - \arctan(0,1\omega_c) = 0 - 90 - 51,34 = -141,34°$.

La marge de phase est donc de 38,66°.

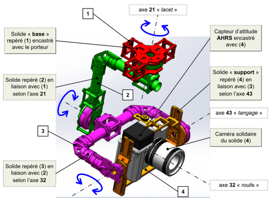
Question 5 *Conclure par rapport au cahier des charges.*

Correction Le système ne sera pas stable vis-à-vis du cahier des charges.

Pour $\tau = 0,005$


Gain (dB)
Phase (deg)
Marges de stabilité
Marge de phase
$\omega_{0dB} = 19.9 rad/s$
$M_p = 84.32 deg$
Marge de gain
$\omega_{-180°} = --$
$M_g = \infty$
Surtension
$\omega_s = --$
$Q = --$
Fermer

TD 02 – Corrigé



Stabilisateur actif d'image ⋆⋆

Mines Ponts 2018 – PSI

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C7.SF2 : déterminer les fonctions de transfert;*
- ❒ *Res2.C5 : stabilité des SLCI : équation caractéristique;*
- ❒ *Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase).*

Mise en situation

Objectif Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

Travail demandé

Question 1 *Avec $K_m A = 1$, calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).*

Correction **Attention au signe du comparateur de la boucle inbriquée!**

On définit la FTBO par $\text{FTBO}(p) = \dfrac{\varepsilon(p)}{\text{Mes}\varphi(p)}$ avec $\varepsilon(p)$ la sortie du premier comparateur.

On a d'une part $G(p) = \dfrac{\dfrac{K_m A}{1+\tau_m p}}{1-\dfrac{K_m A K_D}{1+\tau_m p}} = \dfrac{K_m A}{1+\tau_m p - K_m A K_D}$. On a alors $\text{FTBO}(p) = \dfrac{K_m A K_P}{p\left(1+\tau_m p - K_m A K_D\right)}$.

Si on définit la FTBF par $\text{FTBF(p)} = \dfrac{\varphi(p)}{\varphi^\star(p)}$, on a $\text{FTBF(p)} = A_i(p)\dfrac{\dfrac{K_m A K_P}{p\left(1+\tau_m p - K_m A K_D\right)}}{1+\dfrac{K_m A K_P}{p\left(1+\tau_m p - K_m A K_D\right)}}$

$= A_i(p)\dfrac{K_m A K_P}{p\left(1+\tau_m p - K_m A K_D\right)+K_m A K_P}$.

Au final, $\text{FTBO}(p) = \dfrac{K_P}{p\left(1+\tau_m p - K_D\right)}$ et $\text{FTBF}(p) = A_i(p)\dfrac{K_P}{p\left(1+\tau_m p - K_D\right)+K_P}$.

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas : $A_1(p) = 1$.

Question 2 *Quelle est la valeur maximale de K_D pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).*

Correction Pour que le système soit stable, tous les coefficients du dénominateur $D(p)$ de la FTBF doivent être de même signe (ainsi toutes les racines sont à partie réelle négative). On a $D(p) = p\left(1+\tau_m p - K_D\right)+K_P = \tau_m p^2 p + (1-K_D)p + K_P$ et donc nécessairement, $1-K_D > 0$ et $K_D < 1$.

Question 3 *Lorsque $A_i(p) = 1$, le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?*

Correction On a : $\text{FTBF}(p) = \dfrac{K_P}{p+\tau_m p^2 - K_D p + K_P} = \dfrac{K_P}{\dfrac{\tau_m}{K_p}p^2 + p\dfrac{1-K_D}{K_P}+1}$.

On a alors $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_P}{\tau_m}}$ et $\xi = \dfrac{\dfrac{1-K_D}{K_P}}{\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{K_P}{\tau_m}}}}$ ... $= \dfrac{1-K_D}{2\sqrt{K_P\tau_m}} = \dfrac{0,5}{2\sqrt{2}} < 1$. Il y a donc du dépassement. L'exigence n'est pas vérifiée.

Question 4 *Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert* $Stab(p)=\dfrac{Com(p)}{Pe(p)}$ *qui lie la commande à la perturbation.*

Correction On a $\varepsilon_2(p)=-\mathrm{Mes}\left(\varphi(p)\right)=-\varphi(p)=-\varepsilon_1(p)\dfrac{1}{p}$. Par ailleurs, $\varepsilon_1(p)=\mathrm{Pe}(p)+\varepsilon_3(p)\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}$. Enfin, $\varepsilon_3(p)=K_P\varepsilon_2(p)+K_D\varepsilon_1(p)\Leftrightarrow \varepsilon_3(p)=\varepsilon_1(p)\left(K_D-\dfrac{K_P}{p}\right)\Leftrightarrow \varepsilon_1(p)=\varepsilon_3(p)\dfrac{1}{K_D-\dfrac{K_P}{p}}$.

On a donc $\varepsilon_3(p)\dfrac{1}{K_D-\dfrac{K_P}{p}}=\mathrm{Pe}(p)+\varepsilon_3(p)\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}\Leftrightarrow \varepsilon_3(p)\left(\dfrac{p}{pK_D-K_P}-\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}\right)=\mathrm{Pe}(p)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_3(p)\dfrac{p\left(1+\tau_m p\right)-AK_m\left(pK_D-K_P\right)}{\left(pK_D-K_P\right)\left(1+\tau_m p\right)}=\mathrm{Pe}(p)$.

On a donc $\mathrm{Stab}(p)=\dfrac{\mathrm{Com}(p)}{\mathrm{Pe}(p)}=\dfrac{\left(pK_D-K_P\right)\left(1+\tau_m p\right)}{p\left(1+\tau_m p\right)-AK_m\left(pK_D-K_P\right)}$.

Question 5 *Avec le modèle 2 et une entrée $Pe(p)$ échelon unitaire, déterminer la limite quand t tend vers l'infini de la commande : $com(t)$. Quel sens physique donner à ce résultat ?*

Correction On a $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{com}(t)=\lim\limits_{p\to 0}p\mathrm{Com}(p)=\lim\limits_{p\to 0}p\mathrm{Stab}(p)\mathrm{Pe}(p)$

$=\lim\limits_{p\to 0}p\dfrac{1}{p}\dfrac{\left(pK_D-K_P\right)\left(1+\tau_m p\right)}{p\left(1+\tau_m p\right)-AK_m\left(pK_D-K_P\right)}=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{-K_P}{AK_mK_P}=-1$ si $AK_m=1$.

Ainsi, pour une perturbation angulaire dans un autre sens, le système commande les moteurs avec une consigne dans le sens opposé.

Question 6 *Avec le modèle 2 déterminer la FTBO* $\dfrac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$ *de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie* $Pert(p)=\dfrac{\varphi(p)}{Pe(p)}$.

Correction On a $\dfrac{\mathrm{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}=\dfrac{K_mAK_P}{p\left(1+\tau_m p-K_mAK_D\right)}$ (c'est la même que pour le premier modèle).

On a vu que $\varepsilon_2(p)=-\varphi(p)=-\varepsilon_1(p)\dfrac{1}{p}$, $\varepsilon_1(p)=\mathrm{Pe}(p)+\varepsilon_3(p)\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}$ et $\varepsilon_3(p)=\varepsilon_1(p)\left(K_D-\dfrac{K_P}{p}\right)$.

En conséquences, $\varepsilon_1(p)=\mathrm{Pe}(p)+\varepsilon_3(p)\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}\Longleftrightarrow \varepsilon_1(p)=\mathrm{Pe}(p)+\varepsilon_1(p)\left(K_D-\dfrac{K_P}{p}\right)\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}$

$\Leftrightarrow \varepsilon_1(p)\left(1+\left(\dfrac{K_P}{p}-K_D\right)\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}\right)=\mathrm{Pe}(p)\Leftrightarrow p\varphi(p)\left(1+\left(\dfrac{K_P}{p}-K_D\right)\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}\right)=\mathrm{Pe}(p)$

et donc $\mathrm{Pert}(p)=\dfrac{1}{p\left(1+\left(\dfrac{K_P}{p}-K_D\right)\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}\right)}=\dfrac{1}{p\left(1+\dfrac{K_P-pK_D}{p}\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}\right)}=\dfrac{1+\tau_m p}{p\left(1+\tau_m p\right)+\left(K_P-pK_D\right)AK_m}$.

Question 7 *Déterminer la valeur lorsque t tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?*

Correction On a $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\lim\limits_{p\to 0}p\Phi(p)=\lim\limits_{p\to 0}p\mathrm{Pert}(p)\mathrm{Pe}(p)=\lim\limits_{p\to 0}p\dfrac{1}{p}\dfrac{1+\tau_m p}{p\left(1+\tau_m p\right)+\left(K_P-pK_D\right)AK_m}$

$=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{1}{K_PAK_m}=\dfrac{1}{K_P}=0,1°$.

Le système n'est pas précis s'il y a une perturbation échelon.

Question 8 *On désire une marge de gain de $M_G\geq 5\,\mathrm{dB}$ et une marge de phase $M\varphi\geq 20°$ (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de K_P en utilisant les données ci-dessous.*

Correction Pour une marge de de phase de 20°, la phase doit être de −160° lorsque le gain est nul. Or en −160° le gain est de −3 dB. Pour respecter la marge de phase, il faut donc déterminer K_P tel que $20\log K_P = 3$ soit $K_P < 10^{\frac{3}{20}} \simeq 1,41$.

Le système étant d'ordre 2, la marge de gain sera forcément infinie.

Question 9 *Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de Com(t) relativement à Pe(t) en utilisant le résultat de la question 5.*

Correction La commande s'oppose à la perturbation (comme évoqué question 5). Le stabilisateur a au final un mouvement sinusoïdal dont les valeurs maximales et minimales sont voisines de 0,1°et $-0,1°$.

Question 10 *Analyser comparativement ce nouveau tracé.*

Correction Dans ce cas, les mouvements du porteur sont inférieurs à 0,1 degres (en valeur absolue).

Synthèse

Question 11 *En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.*

Correction