1 Notion de stabilité

Définition — Définition intuitive. Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :

- abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre ;
- son régime transitoire finit par disparaître ;
- sa sortie finit par ressembler à l'entrée ;
- sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

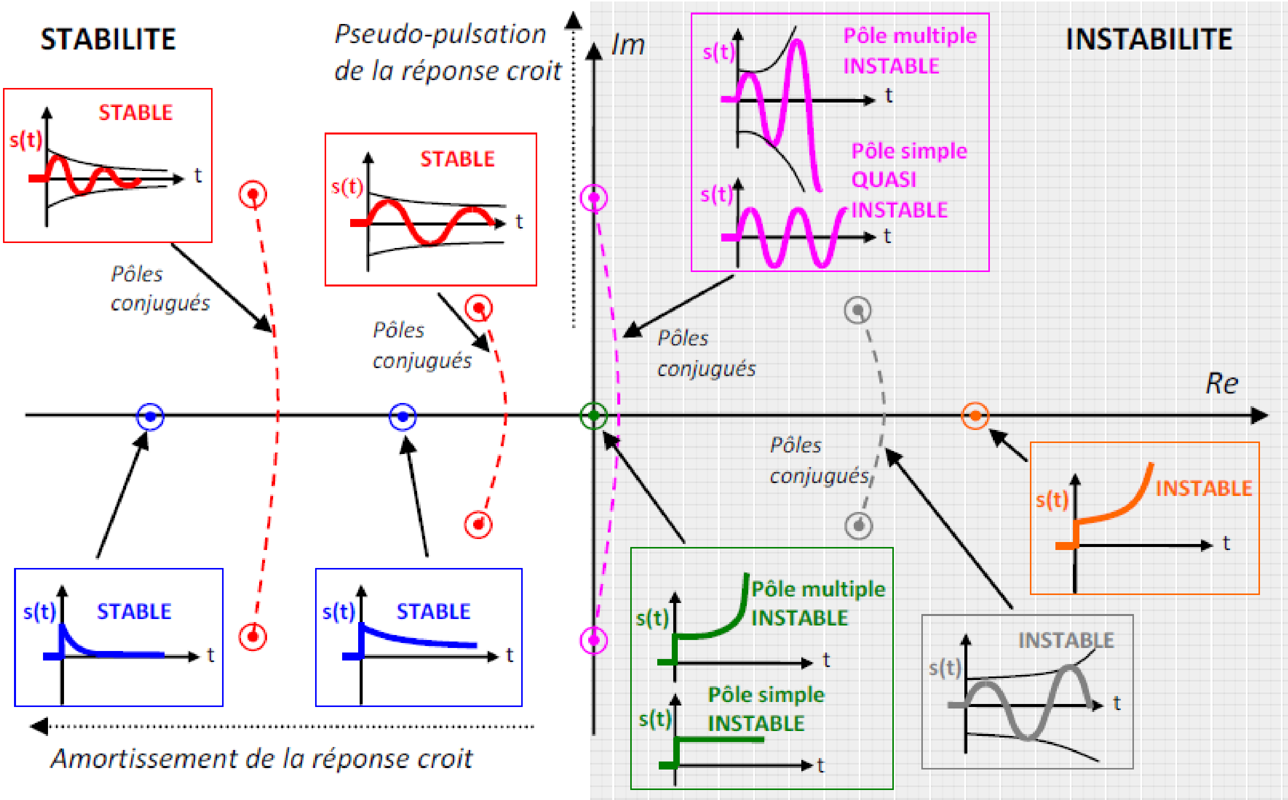
R La stabilité d'un système **est indépendante** de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionnelle (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...

Définition En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro au cours du temps.

En mettant la fonction de transfert d'un système sous la forme : $H(p)=\dfrac{(p+z_m)\cdot(p+z_{m-1})\dots}{(p+p_n)\cdot(p+p_{n-1})\dots}$ avec $p_i, z_i \in \mathbb{C}$,

on peut constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.

On peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicielle associée.



Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système [2].

Définition — À retenir. Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

On peut montrer que :
- **pour les systèmes d'ordre 1 et 2 :** le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe ;
- **pour les systèmes d'ordre 3 :** de la forme $a_0+a_1p+a_2p^2+a_3p^3$ les coefficients doivent être strictement de même signe et $a_2a_1>a_3a_0$.

1.1 Pôles dominants (1)

Les pôles dominants sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires.

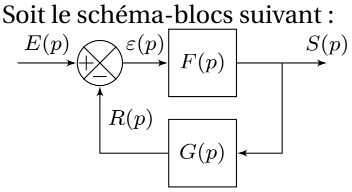
1.2 Caractéristiques dans le lieu de pôles

Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [**ref1**].

2 Marges de stabilité

2.1 Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...

Soit le schéma-blocs suivant :



La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par $H_{BO}(p)=\dfrac{R(p)}{\varepsilon(p)}=F(p)G(p)$.
La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $H_{BF}(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{F(p)}{1+F(p)G(p)}=\dfrac{F(p)}{1+H_{BO}(p)}$.

Définition — Équation caractéristique. Soit $H(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}$ une fonction de transfert. On appelle $D(p)=0$ l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de $D(p)$ correspondent aux pôles de $H(p)$.

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera $1+H_{BO}(p)=0$.

Critère graphique de stabilité : le critère du Revers

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme $1+H_{BO}(p)=0$. Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation $H_{BO}(p)=-1$. Ainsi dans le plan complexe, le point $(-1;0)$ permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain de 1) et une phase de $-180°$.

Résultat Le système en boucle ouverte étant asymptotiquement stable (ou juste stable), le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a** :

$$G_{\text{dB}}\big|_{\omega=\omega(-180°)}<0_{\text{dB}} \quad \text{et} \quad \varphi\big|_{\omega=\omega(0\text{dB})}>-180°.$$

Résultat — Marges. Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considèrera, dans le cas général que le système est stable si :
- la marge de gain est supérieure à 10 dB ;
- la marge de phase est supérieure à 45°.

Définition — Marge de phase. La marge de phase est définie telle que $M_\varphi=180°+\arg\big(\text{FTBO}(j\omega_{co})\big)$ où ω_{co} est la pulsation de coupure pour laquelle $|\text{FTBO}\big(j\omega_{co}\big)|=0\,\text{dB}$.

Définition — Marge de gain. La marge de gain est définie telle que $M_G=-20\log|\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})|$ où $\omega_{\varphi180}$ est la pulsation pour laquelle $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180}))=-180°$.