

Colle 03

Exercice d'application

Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$.

Question 1 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 2 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$. La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert $B(p) = 3$.

Question 3 Tracer le schéma-blocs.

Question 4 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

Question 5 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = Ki/p$.

Question 6 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

8.5 La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$G(p) = KA(p)B(p) = \frac{24K}{p^2 + 5p + 6} = \frac{24K}{(p+2)(p+3)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45° , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \frac{\omega_{c0}}{2} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

soit :

$$\arctan \frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{3\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expression :

$$\tan \left[\arctan \frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} \right] = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

d'où :

$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{6}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{6}} = -1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 6 = 0$$

Réolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49$$

La seule solution positive est :

$$\omega_{c0} = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = 6 \text{ rad/s}$$

Par définition :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{24K}{\sqrt{4 + \omega_{c0}^2} \sqrt{9 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \frac{\sqrt{4 + \omega_{c0}^2} \sqrt{9 + \omega_{c0}^2}}{24} = 1,77$$

Dans un second temps, on exige de surcroît que le système présente en boucle fermée une erreur de position inférieure à 0,2. Calculons l'erreur de position obtenue avec le réglage $K = 1,77$.

On a :

$$H(p) = \frac{KA(p)}{1 + KA(p)B(p)} = \frac{8K}{p^2 + 5p + 6 + 24K}$$

d'où :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = \left[1 - \frac{8K}{6 + 24K} \right] = 71 \%$$

Pour régler l'erreur de position sur 20 %, une première idée consiste à chercher à augmenter le gain K . On peut alors s'attendre à une chute de la marge de stabilité que l'on corrigera ensuite au moyen d'un correcteur à avance de phase.

Toutefois :

$$\varepsilon_p = \left[1 - \frac{8K}{6 + 24K} \right] = 20 \% \Rightarrow 0,48 + 11,2K = 0$$

Aucune valeur positive de K ne permet donc d'obtenir la précision voulue. Il est donc nécessaire d'introduire un correcteur intégral dans la chaîne directe, seul moyen de garantir une erreur de position inférieure à 20 %. La nouvelle boucle de régulation est présentée sur la figure 8.12.

Est-il possible de régler K de manière à obtenir à présent une marge de phase de 45° ? Telle est la question à laquelle il nous faut maintenant répondre.

$$\varepsilon = 0,123$$

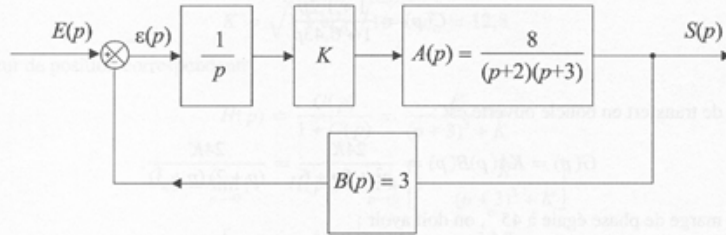


Figure 8.12 Boucle de régulation avec correction intégrale.

On a maintenant :

$$G(p) = \frac{24K}{p(p+2)(p+3)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45° , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{2} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

soit :

$$\arctan \frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expression :

$$\tan \left[\arctan \frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} \right] = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{6}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{6}} = 1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 + 5\omega_{c0} - 6 = 0$$

La seule solution positive est évidente :

$$\omega_{c0} = 1 \text{ rad/s}$$

Par définition :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{24K}{\omega_{c0}\sqrt{4+\omega_{c0}^2}\sqrt{9+\omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \frac{\omega_{c0}\sqrt{4+\omega_{c0}^2}\sqrt{9+\omega_{c0}^2}}{24} = 0,3$$

Pour conclure, le correcteur qui permet d'obtenir à la fois une marge de phase de 45° et une erreur de position inférieure à 20 % (elle est même nulle) est :

$$C(p) = \frac{0,3}{p}$$

