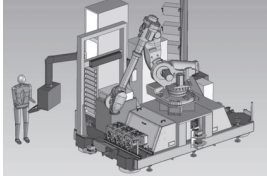


Activation
Corrigé

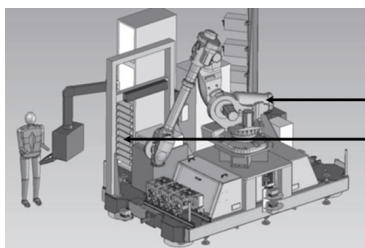
Cellule d'assemblage pour avion Falcon

D'après concours E3A – PSI 2015.

Savoirs et compétences :

Présentation

Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.



Objectif Vérifier que les correcteurs proposés permettent ou non d'obtenir un écart statique nul et un écart en vitesse nul.

Étude du modèle simplifié

Question 1 Donner l'expression de $\varepsilon(p)$.

Correction

On raisonne par superposition :

Si $C_r(p) = 0$:

$$\begin{aligned}
 Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{\frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\
 &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\
 &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}
 \end{aligned}$$

Correction Si $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$:

$$\begin{aligned}
 Y_2(p) &= C_r(p) \frac{\frac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\
 &= C_r(p) \frac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \\
 &= C_r(p) \frac{\frac{(R + Lp) K_M K_r}{K_C}}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M} \\
 \text{On a donc : } Y(p) &= Y_1(p) + Y_2(p).
 \end{aligned}$$

Question 2 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = K_p$. Pouvaient-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 3 On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvaient-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 4 On souhaite déterminer l'erreur en vitesse du système. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvaient-on prévoir le résultat ?

Correction

Question 5 On souhaite déterminer l'erreur pour une entrée en position du système avec une perturbation de type rampe. Calculer l'erreur pour $C(p) = \frac{K_i}{p}$. Pouvaient-on prévoir le résultat ?

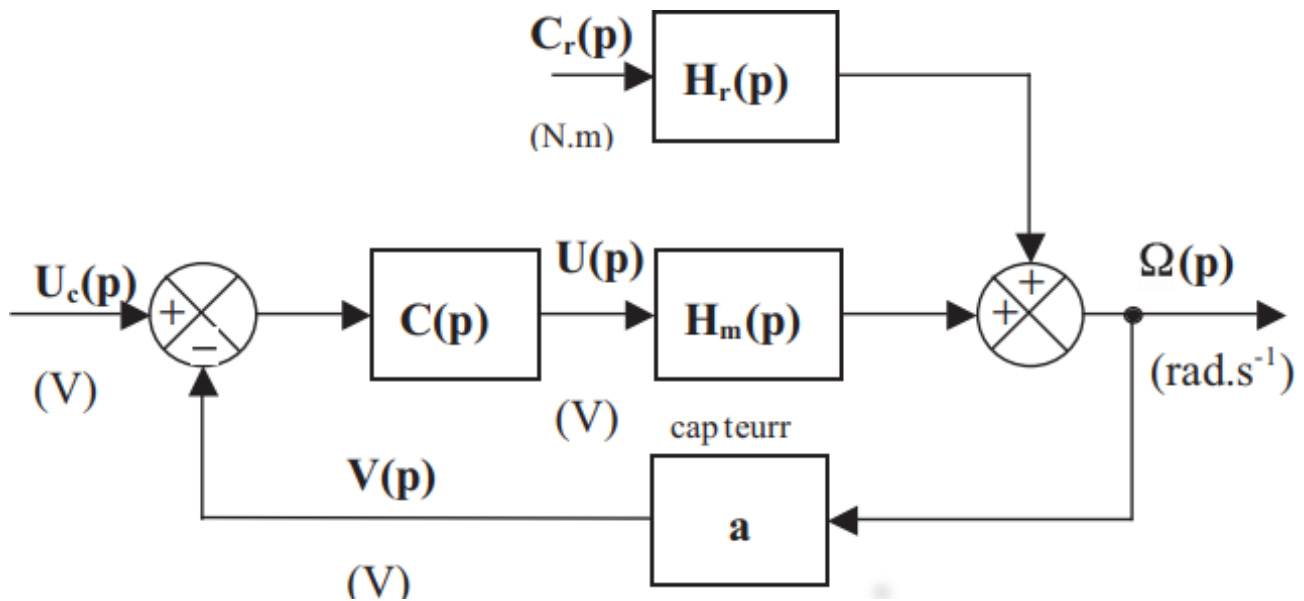
Correction

Application
Corrigé

Application

Savoirs et compétences :

On considère le schéma-blocs suivant.



On a $H_r(p) = K_r \frac{1 + 0,492p}{1 + 10,34p + 5,1p^2}$ et $K_r = 0,37 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$. $H_m(p) = \frac{0,5}{(1 + 10p)(1 + 0,5p)}$. Le gain du capteur est de $a = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 1 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

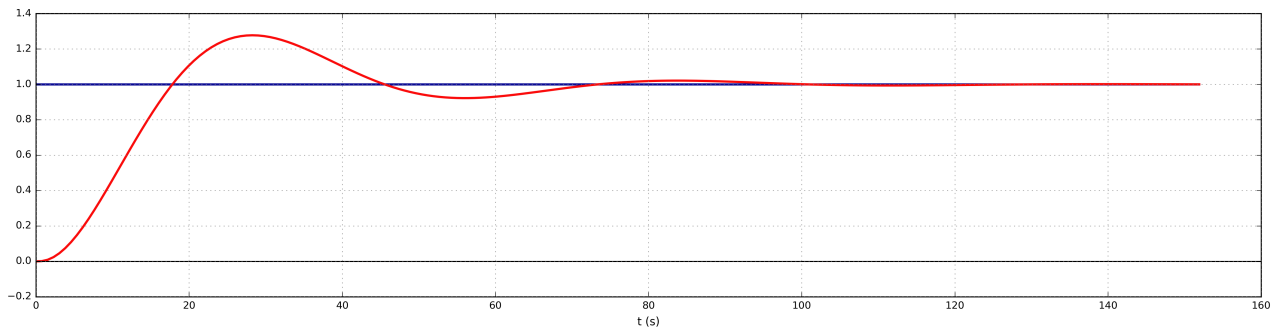
Question 2 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p) = 0$.

Question 3 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.

On considère que $C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p}$ et que $C_r(p)$ est une perturbation de type échelon.

Question 4 Déterminer l'écart statique et l'écart de traînage.



TD 01

Corrigé



Fauteuil dynamique de cinéma

Concours Centrale-Supélec TSI 2015

Savoirs et compétences :

Présentation du système

Mise en situation

Exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération »

Comportement de l'ensemble variateur et moteur du dossier

Objectif

- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de courant.
- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de vitesse.
- Analyser la précision de l'asservissement de position.

Modélisation de l'asservissement de vitesse

NE PAS TRAITER LES QUESTIONS 1 à 3.

Question 1 Exprimer la fonction de transfert de la boucle de vitesse $H_{\Omega}(p) = \Omega(p)/U_{C\Omega}(p)$, lorsque $C_R(p) = 0$. Le résultat sera mis sous une forme canonique.

Correction

$$H_{\Omega}(p) = \frac{k_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right) \frac{K}{K_{rI}} \frac{1}{Jp + f}}{1 + K_{\Omega} k_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right) \frac{K}{K_{rI}} \frac{1}{Jp + f}} = \frac{k_1 (1 + T_1 p) K}{T_1 p K_{rI} (Jp + f) + K_{\Omega} k_1 (1 + T_1 p) K}$$

$$= \frac{\frac{K k_1}{K_{\Omega} k_1 K} (1 + T_1 p)}{\frac{T_1 K_{rI} J}{K_{\Omega} k_1 K} p^2 + \left(\frac{f T_1 K_{rI}}{K_{\Omega} k_1 K} + \frac{K_{\Omega} k_1 T_1 K}{K_{\Omega} k_1 K}\right) p + 1} \quad H_{\Omega}(p) = \frac{\frac{1}{K_{\Omega}} (1 + T_1 p)}{\frac{T_1 K_{rI} J}{K_{\Omega} k_1 K} p^2 + \left(\frac{f K_{rI}}{K_{\Omega} k_1 K} + 1\right) T_1 p + 1}$$

Question 2 T_1 étant égal à J/f , montrer alors que la fonction de transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme $\frac{b}{\tau p + 1}$. Calculer les valeurs numériques des termes b et τ .

Correction

$$\text{On a } H_{\Omega}(p) = \frac{\frac{1}{K_{\Omega}} \left(1 + \frac{J}{f} p\right)}{\frac{\frac{J}{f} K_{rI} J}{K_{\Omega} k_1 K} p^2 + \left(\frac{f K_{rI}}{K_{\Omega} k_1 K} + 1\right) \frac{J}{f} p + 1} = \frac{(f + Jp)}{\frac{K_{rI} J^2}{k_1 K} p^2 + \left(\frac{f K_{rI}}{k_1 K} + K_{\Omega}\right) Jp + f K_{\Omega}}$$

$$= \frac{(f + Jp) k_1 K}{K_{rI} J^2 p^2 + (f K_{rI} + K_{\Omega} k_1 K) Jp + f K_{\Omega} k_1 K}$$

$$\text{On a : } \Delta = (f K_{rI} + K_{\Omega} k_1 K)^2 J^2 - 4 f K_{\Omega} k_1 K K_{rI} J^2 = (f^2 K_{rI}^2 + K_{\Omega}^2 k_1^2 K^2 + 2 f K_{rI} K_{\Omega} k_1 K) J^2 - 4 f K_{\Omega} k_1 K K_{rI} J^2$$

$$= (f^2 K_{rI}^2 + K_{\Omega}^2 k_1^2 K^2 - 2 f K_{rI} K_{\Omega} k_1 K) J^2 = (f K_{rI} - K_{\Omega} k_1 K)^2 J^2$$

On a donc

$$p_{12} = \frac{-(f K_{rI} + K_{\Omega} k_1 K) J \pm (f K_{rI} - K_{\Omega} k_1 K) J}{2 K_{rI} J^2},$$

$$p_1 = \frac{-f J K_{rI} - K_{\Omega} k_1 K J + f J K_{rI} - K_{\Omega} k_1 K J}{2 K_{rI} J^2} = -\frac{K_{\Omega} k_1 K}{K_{rI} J}, p_2 = \frac{-f J K_{rI} - K_{\Omega} k_1 K J - f J K_{rI} + K_{\Omega} k_1 K J}{2 K_{rI} J^2} = -\frac{f}{J}.$$

On a donc

$$H_{\Omega}(p) = \frac{J \left(\frac{f}{J} + p \right) k_1 K}{\left(p + \frac{f}{J} \right) \left(p + \frac{K_{\Omega} k_1 K}{K_{rI} J} \right)} = \frac{J k_1 K}{p + \frac{K_{\Omega} k_1 K}{K_{rI} J}} = \frac{\frac{K_{rI} J^2}{K_{\Omega}}}{\frac{K_{rI} J}{K_{\Omega} k_1 K} p + 1}$$

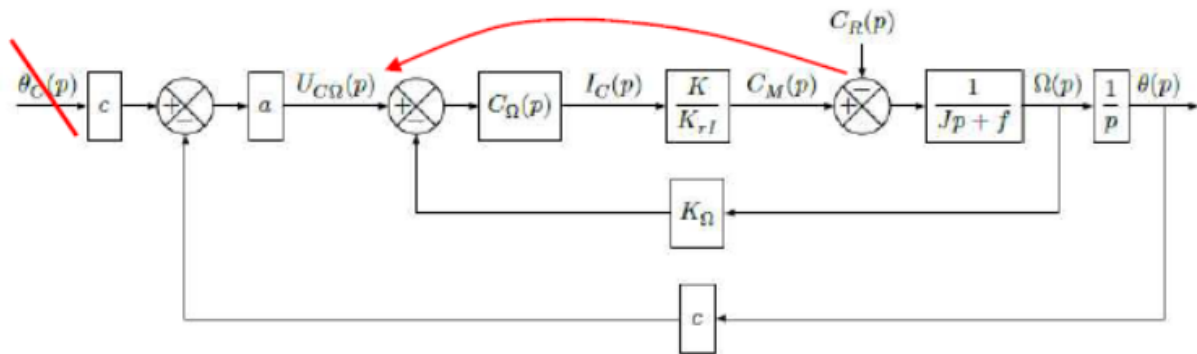
On a donc $b = \frac{K_{rI} J^2}{K_{\Omega}}$ et $\tau = \frac{K_{rI} J}{K_{\Omega} k_1 K}$.

Autre solution : $b = \frac{1}{K_{\Omega}} = 20\pi = 62,8 \text{ rad s}^{-1} \text{V}^{-1}$ et $\tau = \frac{K_{rI} J}{k_1 K K_{\Omega}} = 2,17 \times 10^{-3} \text{ s}$.

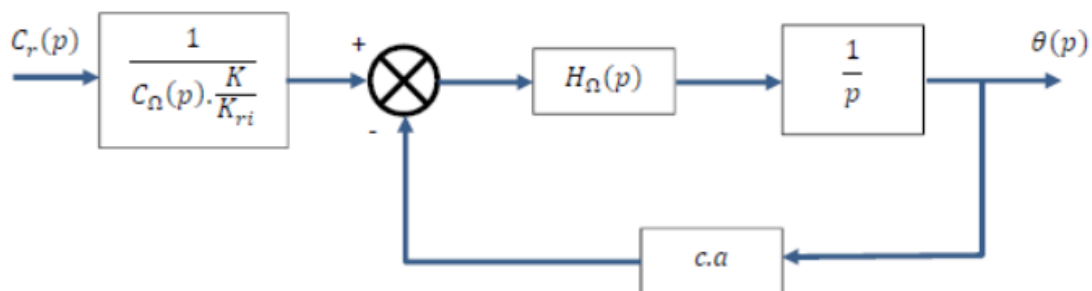
Question 3 En déduire, à l'aide de la figure précédente, $\theta(p)/C_R(p)$ lorsque $\theta_C(p) = 0$. Calculer ensuite la valeur finale de $\theta(t)$ lorsque $c_R(t)$ est un échelon unitaire. Conclure quant à l'action, en régime permanent, du correcteur proportionnel et intégral sur les effets d'une perturbation $c_R(t)$ de type échelon.

Correction

On effectue une transformation de schéma en déplaçant le comparateur de $C_r(p)$



D'où la nouvelle structure de schéma bloc :



$$\frac{\theta(p)}{C_r(p)} = \frac{1}{C_{\Omega}(p) \cdot \frac{K}{K_{ri}}} \cdot \frac{H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}}{1 + c \cdot a \cdot H_{\Omega}(p) \cdot \frac{1}{p}} = \frac{K_{ri} \cdot T_1 \cdot p}{K \cdot k_1 \cdot (1 + T_1 \cdot p)} \cdot \frac{\frac{b}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p}}{1 + \frac{b}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p}}$$

L'application du théorème de la valeur finale pour une entrée de type échelon donne :

$$\theta(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \theta(p) = 0$$

Ce résultat était prévisible car le correcteur PI est placé avant la perturbation.

$$\begin{aligned}\frac{\theta(p)}{C_r(p)} &= \frac{1}{C_{\Omega}(p)} \frac{\frac{b}{1+\tau p} \frac{1}{p}}{\frac{K}{K_{ri}} \frac{1}{1+\tau p} \frac{1}{p}} = \frac{1}{k_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p}\right) \frac{K}{K_{ri}} \frac{1}{1+\tau p} \frac{1}{p}} \\ &= \frac{T_1 K_{ri} p}{k_1 (T_1 p + 1) K} \cdot \frac{b}{p(1+\tau p) + abc} \\ \text{et } \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) &= 1.\end{aligned}$$

Modélisation de la boucle d'asservissement de position

Question 4 Exprimer la fonction de transfert $\theta(p)/\theta_c(p)$. Déterminer ensuite la valeur numérique de a pour avoir un facteur d'amortissement égal à 0,7. Justifier le choix de ce facteur d'amortissement. (Pour ce calcul et les calculs suivants prendre $b = 63 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$, $\tau = 2,2 \text{ ms}$, $c = 40 \text{ rad}^{-1}$.)

Correction

$$\text{On a } \frac{\theta(p)}{\theta_c(p)} = c \frac{\frac{ab}{p(\tau p + 1)}}{1 + \frac{abc}{p(\tau p + 1)}} = \frac{abc}{p(\tau p + 1) + abc} = \frac{1}{\frac{\tau}{abc} p^2 + \frac{p}{abc} + 1}.$$

On a $\omega_0 = \sqrt{abc/\tau}$ et $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{abc}$ et $\xi = \frac{1}{2\sqrt{abc\tau}}$. En conséquence, $a = \frac{1}{4bc\tau\xi^2} = 0,092$. (On prend $\xi = 0,7$ car cela correspond au temps de réponse le plus rapide pour un second ordre.)

Analyse de la précision du système

Question 5 Exprimer dans un premier temps $\mu(p)$ en fonction de $\theta_c(p)$, puis déterminer de façon littérale et numérique l'erreur de position μ_p , l'erreur de trainage μ_v et l'erreur en accélération μ_a . Conclure quant à la précision statique du système suite aux différentes consignes $\theta_c(p)$ de type échelon, rampe et accélération.

$$\text{Correction On a } \mu(p) = \frac{\theta_c(p)}{1 + \frac{abc}{p(1+\tau p)}} = \frac{p(1+\tau p)}{p(1+\tau p) + abc} \theta_c(p) = \frac{p(1+\tau p)}{p(1+\tau p) + abc} \theta_c(p).$$

La FTBO est de classe 1 et de gain $K_{BO} = abc$ on a donc :

- pour une entrée échelon, $\mu_p = 0$;
- pour une entrée rampe, $\mu_v = \frac{1}{abc}$;
- pour une entrée accélération, $\mu_a = \infty$.

Validation et optimisation de la performance simulée en accélération du dossier

Objectif Valider la performance simulée en accélération au regard du cahier des charges fonctionnel.

Question 6 Déterminer l'erreur de position μ_p puis l'erreur de trainage μ_v . Conclure sur l'erreur de position au regard du cahier des charges.

Correction

$$\begin{aligned}\text{On a } \varepsilon_{\text{codeur}}(p) &= c\theta_c(p) - c\theta(p) \\ &= c\theta_c(p) - \frac{bc}{p(\tau p + 1)} U_{C\Omega}(p) = c\theta_c(p) - \frac{bc}{p(\tau p + 1)} (\theta_c(p)dp + a\varepsilon_{\text{codeur}}(p)) \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p) \left(1 + \frac{abc}{p(\tau p + 1)}\right) &= \theta_c(p) \left(c - \frac{bcd}{\tau p + 1}\right) \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p) \left(1 + \frac{abc}{p(\tau p + 1)}\right) &= \theta_c(p) c \frac{\tau p + 1 - bd}{\tau p + 1} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p) &= \theta_c(p) c p \frac{\tau p + 1 - bd}{p(\tau p + 1) + abc} \\ \text{On a alors :}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \mu_p &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} c p \frac{\tau p + 1 - b d}{p(\tau p + 1) + a b c} = \lim_{p \rightarrow 0} c p \frac{\tau p + 1 - b d}{p(\tau p + 1) + a b c} = 0; \\ \bullet \mu_v &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2} c p \frac{\tau p + 1 - b d}{p(\tau p + 1) + a b c} = \frac{1 - b d}{a b}. \end{aligned}$$

Question 7 D'après l'erreur de traînage μ_v déterminée à la question précédente, calculer la valeur numérique de d qui permet d'annuler cette erreur de traînage. En prenant en compte la valeur numérique de d et de b , déterminer l'expression de l'erreur en accélération μ_a . Calculer ensuite sa valeur numérique et conclure au regard du cahier des charges.

Correction On a $\mu_v = \frac{1 - b d}{a b c}$. En conséquences, $\mu_v = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{1 - b d}{a b} \Leftrightarrow d = \frac{1}{b}$.

$$\mu_a = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^3} c p \frac{\tau p + 1 - b d}{p(\tau p + 1) + a b c} = \frac{\tau}{a b}.$$

Question 8 Conclure quant au respect du cahier des charges vis-à-vis des accélérations produites par le dossier du siège dynamique de cinéma.

Correction

Exigence fonctionnelle « incliner le spectateur suivant l'axe de tangage et de roulis »

Objectif Valider le choix de conception pour la réalisation de la commande simultanée des deux moteurs de l'assise du siège.

Question 9 En réutilisant éventuellement les calculs effectués aux questions 6 et 7 et en tenant compte des différences de réglage de retour vitesse et des différences d'inertie entre les deux motorisations, exprimer la valeur finale de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ lorsque la consigne $\theta_C(t)$ est respectivement égale à $u(t)$, $t \cdot u(t)$ puis $\frac{t^2}{2} u(t)$, $u(t)$ étant la fonction échelon unité.

Correction En raisonnant graphiquement, on a $\theta_1(p) - \theta_2(p) = \varepsilon_{\text{codeur 1}}(p) - \varepsilon_{\text{codeur 2}}(p)$; donc :

$$\begin{aligned} \bullet \mu_p &= \mu_{p1} - \mu_{p2} = 0; \\ \bullet \mu_v &= \mu_{v1} - \mu_{v2} = \frac{1 - b_1 d}{a b_1} - \frac{1 - b_2 d}{a b_2}; \\ \bullet \mu_a &= \mu_{a1} - \mu_{a2} = \infty. \end{aligned}$$

La figure ?? représente le résultat d'une simulation de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ pour une consigne $\theta_C(t) = \frac{t^2}{2} U(t)$

Question 10 Conclure quant à l'erreur en accélération lors de la commande simultanée.

Correction

TD 02



Segway

Editions Vuibert.

Savoirs et compétences :

Analyser le besoin et la structure du système

Le Segway® est un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En terme de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La conduite du Segway® se fait par inclinaison du corps vers l'avant ou vers l'arrière, afin d'accélérer ou freiner le mouvement. Les virages à droite et à gauche sont, quant à eux, commandés par l'inclinaison du guidon.

La spécificité de ce véhicule est d'avoir deux roues qui ont le même axe de rotation, avec son centre de gravité situé au-dessus de l'axe commun des roues, si bien qu'on se demande comment rester à l'équilibre une fois monté sur la plate-forme. Tout comme le cerveau permet à l'homme de tenir debout sans tomber grâce à l'oreille interne, le système comporte un dispositif d'asservissement d'inclinaison, maintenant la plate-forme du véhicule à l'horizontale ou encore la barre d'appui, supposée orthogonale à cette plate-forme, à la verticale.

Cahier des charges

Les exigences attendues pour le Segway® sont listées sur le diagramme de la figure suivante.

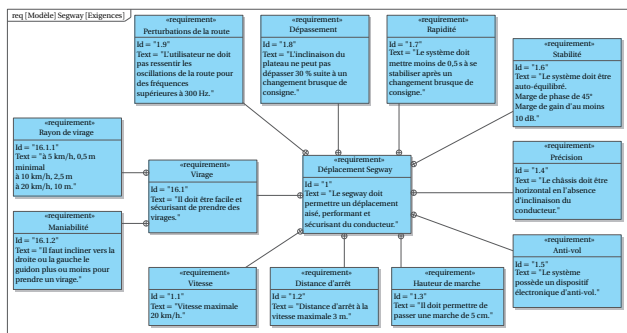


Diagramme des exigences du Segway®.

Le diagramme BDD de la figure ci-après montre les constituants du Segway®.

Objectif La difficulté essentielle de ce système est d'être capable de maintenir le chariot stable tout en ayant de bonnes performances. L'objectif du travail proposé est de vérifier qu'un asservissement correctement réglé permet de respecter les critères de stabilité, précision et rapidité définis dans le diagramme des exigences.

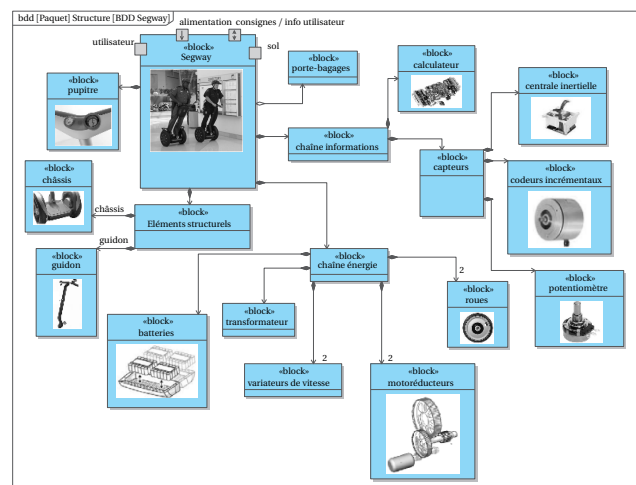


Diagramme de définition des blocs du Segway®.

Modéliser le système

On donne le schéma-blocs proche de l'architecture retenue pour le système.

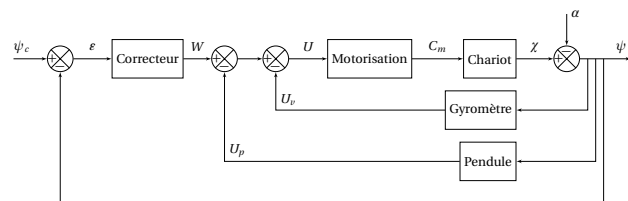


Schéma-blocs fonctionnel du Segway®.

Les équations (simplifiées) caractérisant les différents sous-systèmes sont les suivantes :

- ensemble amplificateur et motoréducteur : $C_m(t) = K_m u(t)$ avec $K_m = 2 \text{ NmV}^{-1}$;
- ensemble chariot + conducteur : $a \frac{d^2 \chi(t)}{dt^2} = b C_m(t) + c \chi(t)$ (avec a , b et c constantes positives) ;

- gyromètre : $u_v(t) = k_v \frac{d\chi(t)}{dt}$;
- pendule : $u_p(t) = k_p \chi(t)$.

Question 1 Déterminer, à l'aide des équations de chaque constituant, les fonctions de transfert de chaque bloc du schéma-blocs.

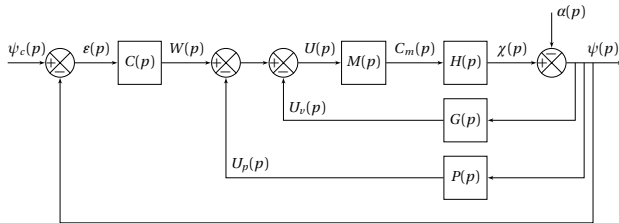


Schéma-blocs du Segway®.

Question 2 Mettre la fonction de transfert du chariot $H(p)$ sous la forme canonique $H(p) = \frac{K_1}{p^2 - \omega_1^2}$. On prendra pour la suite $K_1 = 0,12 \text{ rad N m}^{-1}$ et $\omega_1 = 4,1 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 3 Justifier que le chariot seul est un système instable.

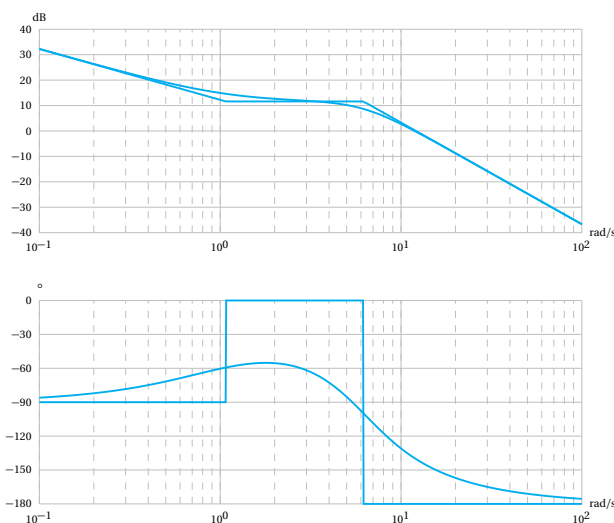
Paramétrer la FTBO

On prend $F(p) = \frac{0,12}{1+0,23p+0,026p^2}$ et $K_C = 5,47$ (permettant de garantir la marge de -135°).

Caractériser les performances du système complet

Afin d'assurer l'asservissement, la régulation d'inclinaison du Segway® délivre une consigne ψ_c nulle. Cette régulation est satisfaisante si, quelle que soit l'inclinaison α du conducteur, la sortie ψ converge vers ψ_c , de valeur nulle ici. Le paramètre α peut donc être considéré comme une perturbation.

Question 4 Déterminer la fonction de transfert $H_r(p) = \frac{\psi(p)}{\alpha(p)}$.



Diagrammes de Bode de la FTBO corrigée.

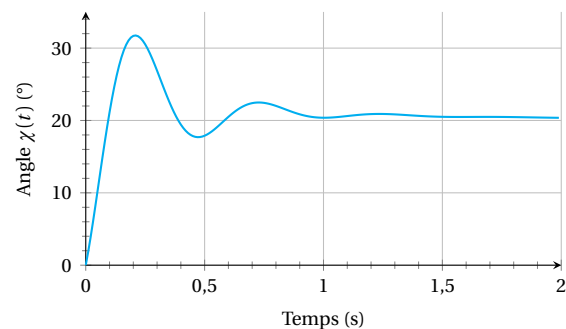
Question 5 Calculer l'inclinaison ψ du châssis en régime permanent, lorsque la perturbation α est un échelon d'amplitude $\alpha_0 = 20^\circ$ pour le correcteur K_c défini précédemment. Le cahier des charges est-il satisfait ?

Question 6 On utilise alors un correcteur proportionnel intégral de la forme $C(p) = K_i \frac{1+T_i p}{T_i p}$ (le réglage d'un tel correcteur sera vu dans un chapitre ultérieur) avec $K_i = 31,7$ et $T_i = 0,93 \text{ s}$. Justifier que ce correcteur améliore la robustesse ainsi que la précision.

Les diagrammes de Bode de la nouvelle FTBO sont donnés sur la figure suivante.

Question 7 Vérifier que la stabilité est toujours respectée avec ce réglage de correcteur.

Retour sur le cahier des charges



Réponse temporelle $\chi(t)$ pour une entrée en échelon $\alpha = 20^\circ$.

La courbe précédente correspond à l'évolution de l'angle $\chi(t)$ au cours du temps pour une consigne en échelon $\alpha = 20^\circ$ pour le correcteur retenu. Vérifier que les critères de stabilité, rapidité, précision et dépassement du cahier des charges sont respectés.

Éléments de correction

- $H_\Omega(p) = \frac{\frac{1}{K_\Omega} (1 + T_1 p)}{\frac{T_1 K_{r1} J}{K_\Omega k_1 K} p^2 + \left(\frac{f K_{r1}}{K_\Omega k_1 K} + 1 \right) T_1 p + 1}$.
- $b = \frac{1}{K_\Omega} = 20\pi = 62,8 \text{ rad s}^{-1} \text{V}^{-1}$ et $\tau = \frac{K_{r1} J}{k_1 K K_\Omega} = 2,17 \times 10^{-3} \text{ s}$.
- $\frac{T_1 K_{ri} p}{k_1 (T_1 p + 1) K} \cdot \frac{b}{p(1 + \tau p) + b}$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 1$.
- $a = \frac{1}{4b c \tau \xi^2} = 0,092$.
- $\mu(p) = \frac{p(1 + \tau p)}{p(1 + \tau p) + a b c} \theta_c(p)$, $\mu_p = 0$, $\mu_v = \frac{1}{a b c}$ et $\mu_a = \infty$.
- $\mu_p = 0$ et $\mu_v = \frac{1 - b d}{a b}$.
- ...
- ...
- ...
- ...