

Colle 02

Colle 02

Savoirs et compétences :

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p) = \frac{10}{(p+1)(p+4)}$.

Question 1 Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.

Question 2 Tracer la marge de gain et la marge de phase.

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

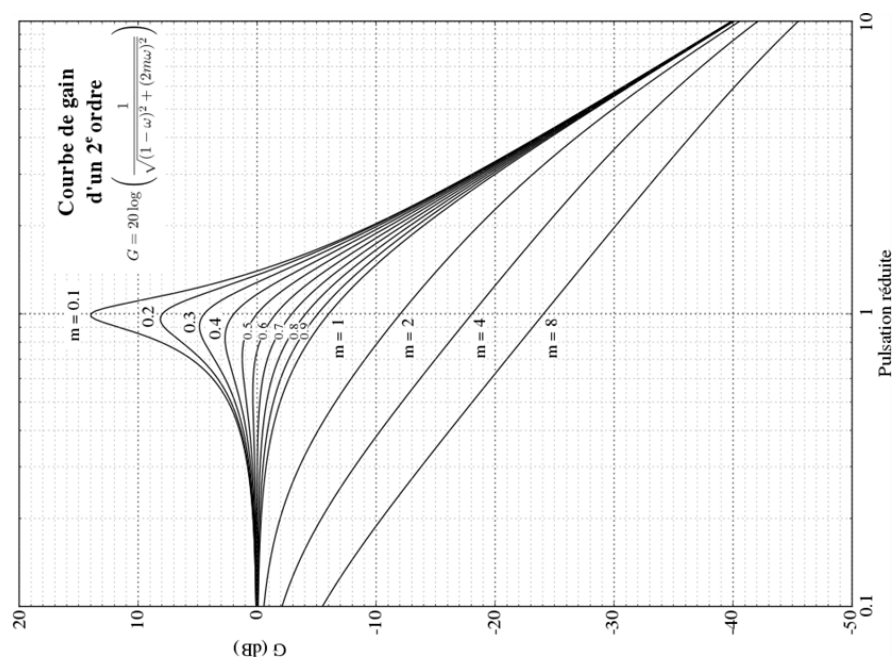
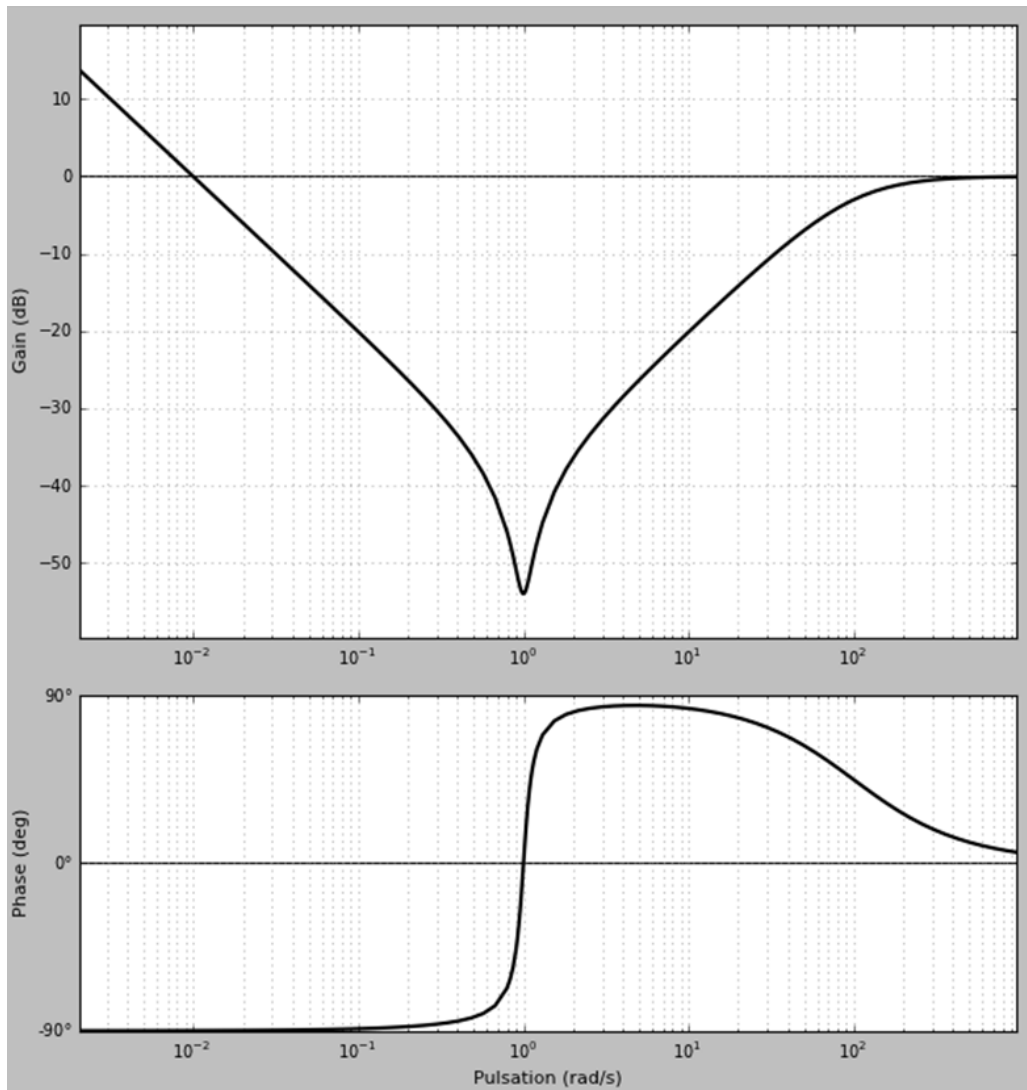
Question 3 Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45° .

Question 4 Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p) = \frac{Ki}{p}$.

Question 5 Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.

Question 6 Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.



8.2 La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

soit :

$$KG(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45° , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

soit :

$$\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expressions :

$$\tan \left[\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} \right] = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

d'où :

$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{4}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{4}} = -1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 4 = 0$$

Réolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16 = 41$$

La seule solution positive est :

$$\omega_{c0} = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} = 5,7 \text{ rad/s}$$

Par définition :

$$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 40,3$$

Le gain K étant réglé sur cette valeur, on a bien une marge de phase de 45° et un temps de montée en boucle fermée que l'on peut estimer en utilisant la relation approchée suivante :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5,7} = 0,53 \text{ s}$$

Si on souhaite régler le temps de montée sur 0,2 s, on doit avoir :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow \omega_{c0} \approx \frac{3}{0,2} = 15 \text{ rad/s}$$

Pour obtenir une telle pulsation de coupure à 0 dB, il faut changer la valeur de K :

Par définition :

$$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 233,4$$

La marge de phase a bien évidemment changé :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = 0,326 \text{ rad} = 18,7^\circ$$

Ce résultat montre bien qu'en cherchant à augmenter la rapidité d'un système par une correction proportionnelle, on dégrade sa stabilité.

