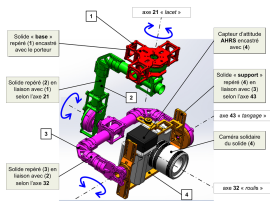


## TD 02



## Stabilisateur actif d'image \*\*

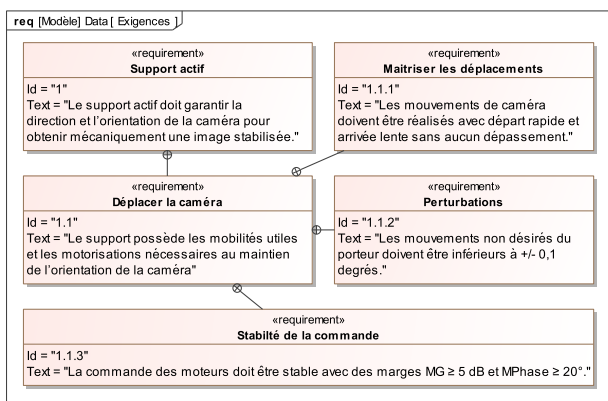
Mines Ponts 2018 – PSI

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C7.SF2 : déterminer les fonctions de transfert ;
- Res2.C5 : stabilité des SLCI : équation caractéristique ;
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase).

## Mise en situation

On s'intéresse à une nacelle active de caméra. Ce système de stabilisation, nommé CAM-GYR, permet de s'assurer que quelque soit l'orientation du porteur (caméraman), l'axe vertical de la caméra et toujours parallèle à la direction de la pesanteur. Le système est équipé de 3 moteurs permettant d'ajuster le roulis, le tangage et le lacet. On s'intéresse ici uniquement à la stabilisation de l'axe de tangage.



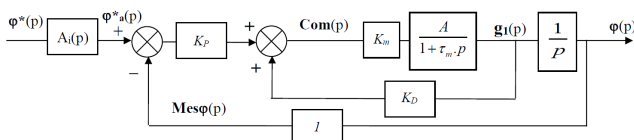
**Objectif** Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

## Travail demandé

On considère un modèle de l'axe de tangage sans perturbation et qui reçoit des consignes assez rapides modélisées par des échelons. L'ensemble {moteur, charge} ne présente pas de réducteur. Il est modélisé par un ensemble en série de deux fonctions de transfert :

- un gain pur de valeur  $K_m$  ;
- une fonction de transfert du premier ordre de gain statique  $A$  et de constante de temps  $\tau_m$ .

Cet ensemble présente comme entrée la commande du moteur  $\text{com}(t)$  et comme sortie la vitesse angulaire de rotation du moteur  $\omega_m(t)$ . Le réglage retenu est tel que  $K_m A = 1$ . **Le retour  $K_D$  agit par un sommateur.** Dans cette étude,  $A_i(p) = 1$ .



## Modèle 1 de l'axe de tangage

**Question 1** Avec  $K_m A = 1$ , calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

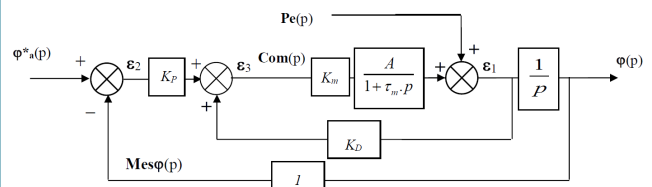
Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas :  $A_1(p) = 1$ .

**Question 2** Quelle est la valeur maximale de  $K_D$  pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

En accord avec les résultats précédents, on fixe  $K_D = 0,5$  et  $\tau_m = 0,2s$ . Dans un premier temps on impose  $K_P = 10s^{-1}$ .

**Question 3** Lorsque  $A_i(p) = 1$ , le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Dans un second temps on se place en mode stabilisation. On s'intéresse toujours au comportement de l'axe de tangage mais sans le filtre passe bas ( $A_1(p) = 1$ ). On considère ici que la consigne est constante donc  $\varphi_a^*(t) = 0$ . Une perturbation  $P_e(p)$  agit au niveau de l'ensemble (moteur, charge) modélisée sur le schéma bloc (Modèle 2). On appelle  $\text{Com}(p)$  la transformée de Laplace de la commande du moteur  $\text{com}(t)$ .



## Modèle 2 de l'axe de tangage

**Question 4** Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert  $\text{Stab}(p) = \frac{\text{Com}(p)}{P_e(p)}$  qui lie la commande à la perturbation.

**Question 5** Avec le modèle 2 et une entrée  $P_e(p)$  échelon unitaire, déterminer la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la commande :  $\text{com}(t)$ . Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Question 6** Avec le modèle 2 déterminer la FTBO  $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$  de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie  $\text{Pert}(p) = \frac{\varphi(p)}{\text{Pe}(p)}$ .

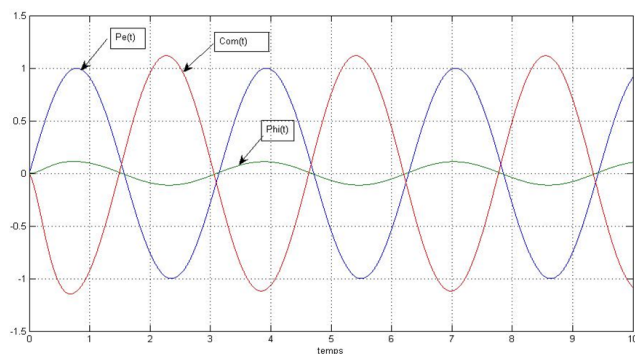
**Question 7** Déterminer la valeur lorsque  $t$  tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Question 8** On désire une marge de gain de  $M_G \geq 5$  dB et une marge de phase  $M_\varphi \geq 20^\circ$  (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de  $K_P$  en utilisant les données ci-dessous.

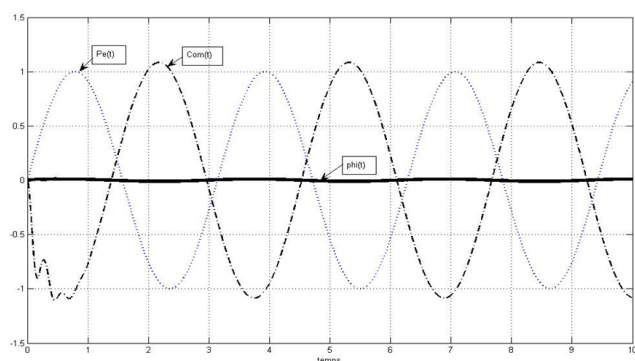
$$\text{On note } F(\omega) = \frac{2}{j\omega(1 + 0,4j\omega)}.$$

| $\omega$ (rad/s)        | 1            | 2,5          | 5            | 7            | 10           |
|-------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\text{Arg}(F(\omega))$ | $-112^\circ$ | $-135^\circ$ | $-153^\circ$ | $-160^\circ$ | $-166^\circ$ |
| $20\log F(\omega) $     | 5,4 dB       | 3 dB         | -1 dB        | -3 dB        | -6,2 dB      |

Le figure suivante présente la réponse temporelle de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale (due par exemple au vent qui crée un balancement de la GYRCAM) (ordonnée en degrés).



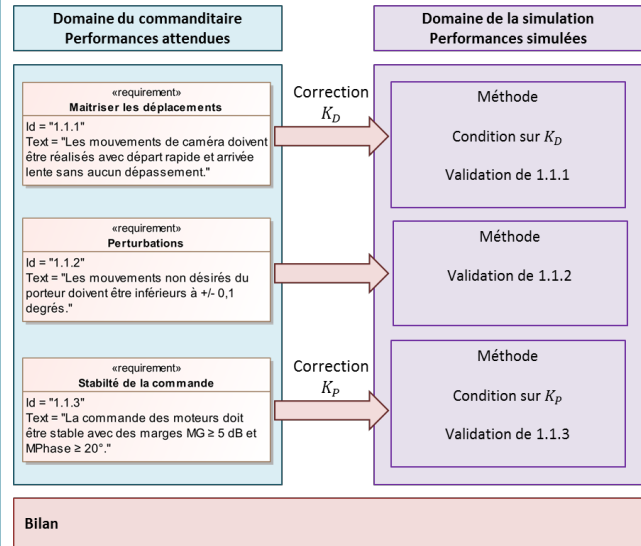
**Question 9** Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de  $\text{Com}(t)$  relativement à  $\text{Pe}(t)$  en utilisant le résultat de la question 5. Afin d'améliorer le comportement, un autre réglage a été effectué (voir figure suivante).



**Question 10** Analyser comparativement ce nouveau tracé.

## Synthèse

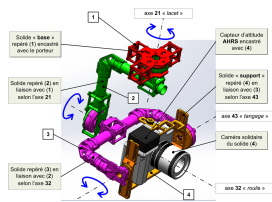
**Question 11** En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.



## Éléments de corrigé

- $\text{FTBO}(p) = \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D)}$  et  $\text{FTBF}(p) = \frac{A_i(p)}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P}$ .
- $K_D < 1$ .
- $\text{Stab}(p) = \frac{(pK_D - K_P)(1 + \tau_m p)}{p(1 + \tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}$ .
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{com}(t) = -1$ .
- $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m AK_P}{p(1 + \tau_m p - K_m AK_D)}$  et  $\text{Pert}(p) = \frac{1 + \tau_m p}{p(1 + \tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m}$ .
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, 1^\circ$ .
- $K_P < 1,41$ .
- .
- .
- .

## Colle



## Stabilisateur actif d'image \*\*

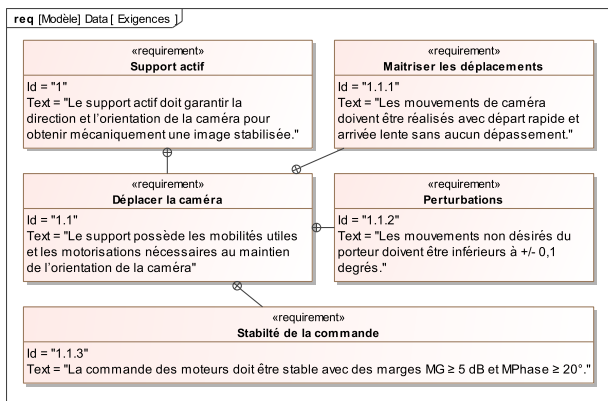
Mines Ponts 2018 – PSI

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C7.SF2 : déterminer les fonctions de transfert;
- Res2.C5 : stabilité des SLCI : équation caractéristique;
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase).

## Mise en situation

On s'intéresse à une nacelle active de caméra. Ce système de stabilisation, nommé CAM-GYR, permet de s'assurer que quelque soit l'orientation du porteur (caméraman), l'axe vertical de la caméra et toujours parallèle à la direction de la pesanteur. Le système est équipé de 3 moteurs permettant d'ajuster le roulis, le tangage et le lacet. On s'intéresse ici uniquement à la stabilisation de l'axe de tangage.



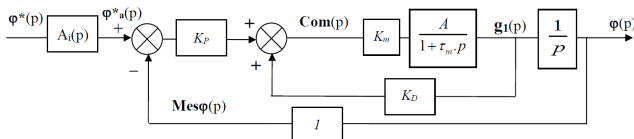
**Objectif** Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

## Travail demandé

On considère un modèle de l'axe de tangage sans perturbation et qui reçoit des consignes assez rapides modélisées par des échelons. L'ensemble {moteur, charge} ne présente pas de réducteur. Il est modélisé par un ensemble en série de deux fonctions de transfert :

- un gain pur de valeur  $K_m$ ;
- une fonction de transfert du premier ordre de gain statique  $A$  et de constante de temps  $\tau_m$ .

Cet ensemble présente comme entrée la commande du moteur  $com(t)$  et comme sortie la vitesse angulaire de rotation du moteur  $\omega_m(t)$ . Le réglage retenu est tel que  $K_m A = 1$ . **Le retour  $K_D$  agit par un sommateur.** Dans cette étude,  $A_i(p) = 1$ .



## Modèle 1 de l'axe de tangage

**Question 1** Avec  $K_m A = 1$ , calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

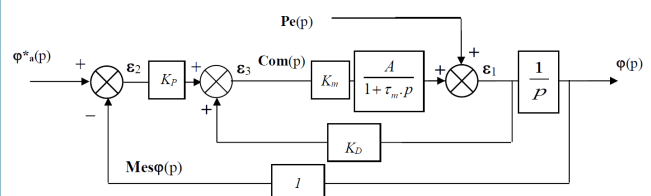
Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas :  $A_1(p) = 1$ .

**Question 2** Quelle est la valeur maximale de  $K_D$  pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

En accord avec les résultats précédents, on fixe  $K_D = 0,5$  et  $\tau_m = 0,2s$ . Dans un premier temps on impose  $K_P = 10s^{-1}$ .

**Question 3** Lorsque  $A_i(p) = 1$ , le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements »?

Dans un second temps on se place en mode stabilisation. On s'intéresse toujours au comportement de l'axe de tangage mais sans le filtre passe bas ( $A_1(p) = 1$ ). On considère ici que la consigne est constante donc  $\varphi_a^*(t) = 0$ . Une perturbation  $Pe(p)$  agit au niveau de l'ensemble (moteur, charge) modélisée sur le schéma bloc (Modèle 2). On appelle  $Com(p)$  la transformée de Laplace de la commande du moteur  $com(t)$ .



## Modèle 2 de l'axe de tangage

**Question 4** Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert  $Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)}$  qui lie la commande à la perturbation.

**Question 5** Avec le modèle 2 et une entrée  $Pe(p)$  échelon unitaire, déterminer la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la commande :  $com(t)$ . Quel sens physique donner à ce résultat?

**Question 6** Avec le modèle 2 déterminer la FTBO  $\frac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$  de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie  $Per(p) = \frac{\varphi(p)}{Pe(p)}$ .

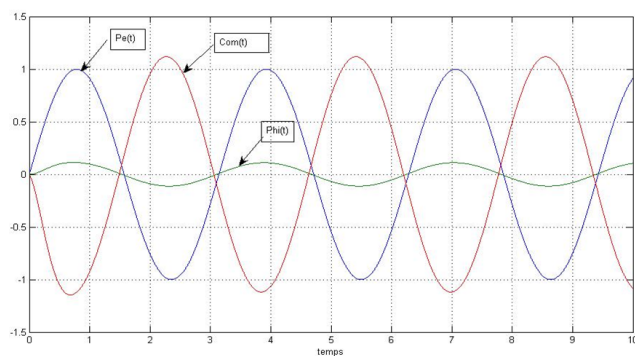
**Question 7** Déterminer la valeur lorsque  $t$  tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Question 8** On désire une marge de gain de  $M_G \geq 5$  dB et une marge de phase  $M_\varphi \geq 20^\circ$  (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de  $K_P$  en utilisant les données ci-dessous.

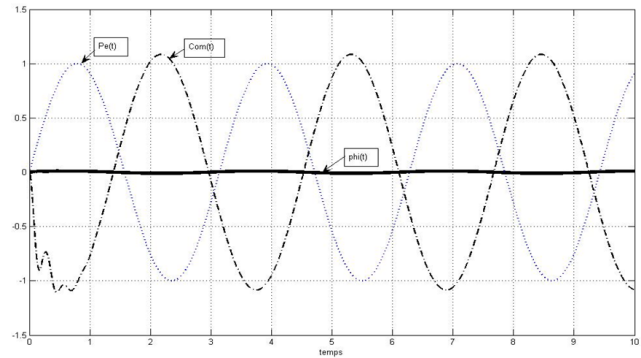
$$\text{On note } F(\omega) = \frac{2}{j\omega(1+0,4j\omega)}.$$

| $\omega$ (rad/s)        | 1            | 2,5          | 5            | 7            | 10           |
|-------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\text{Arg}(F(\omega))$ | $-112^\circ$ | $-135^\circ$ | $-153^\circ$ | $-160^\circ$ | $-166^\circ$ |
| $20\log F(\omega) $     | 5,4 dB       | 3 dB         | -1 dB        | -3 dB        | -6,2 dB      |

Le figure suivante présente la réponse temporelle de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale (due par exemple au vent qui crée un balancement de la GYRCAM) (ordonnée en degrés).



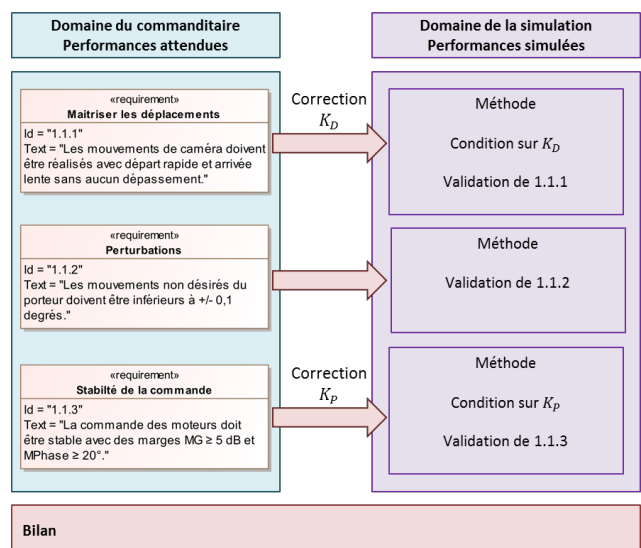
**Question 9** Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de  $Com(t)$  relativement à  $Pe(t)$  en utilisant le résultat de la question 5. Afin d'améliorer le comportement, un autre réglage a été effectué (voir figure suivante).



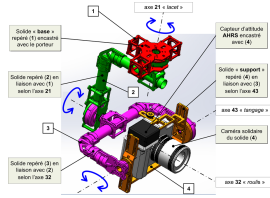
**Question 10** Analyser comparativement ce nouveau tracé.

## Synthèse

**Question 11** En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.



## TD 02 – Corrigé



## Stabilisateur actif d'image \*\*

Mines Ponts 2018 – PSI

## Savoirs et compétences :

- ☐ Mod2.C7.SF2 : déterminer les fonctions de transfert;
- ☐ Res2.C5 : stabilité des SLCI : équation caractéristique;
- ☐ Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase).

## Mise en situation

**Objectif** Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

## Travail demandé

**Question 1** Avec  $K_m A = 1$ , calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

**Correction** Attention au signe du comparateur de la boucle inbriquée!

On définit la FTBO par  $FTBO(p) = \frac{\varepsilon(p)}{\text{Mes}\varphi(p)}$  avec  $\varepsilon(p)$  la sortie du premier comparateur.

$$\text{On a d'une part } G(p) = \frac{\frac{K_m A}{1 + \tau_m p}}{1 - \frac{K_m A K_D}{1 + \tau_m p}} = \frac{K_m A}{1 + \tau_m p - K_m A K_D}. \text{ On a alors } FTBO(p) = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}.$$

$$\text{Si on définit la FTBF par } FTBF(p) = \frac{\varphi(p)}{\varphi^*(p)}, \text{ on a } FTBF(p) = A_i(p) \frac{\frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}{1 + \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}$$

$$= A_i(p) \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D) + K_m A K_P}.$$

$$\text{Au final, } FTBO(p) = \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D)} \text{ et } FTBF(p) = A_i(p) \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P}.$$

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas :  $A_1(p) = 1$ .

**Question 2** Quelle est la valeur maximale de  $K_D$  pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

**Correction** Pour que le système soit stable, tous les coefficients du dénominateur  $D(p)$  de la FTBF doivent être de même signe (ainsi toutes les racines sont à partie réelle négative). On a  $D(p) = p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P = \tau_m p^2 p + (1 - K_D)p + K_P$  et donc nécessairement,  $1 - K_D > 0$  et  $K_D < 1$ .

**Question 3** Lorsque  $A_i(p) = 1$ , le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

**Correction** On a :  $FTBF(p) = \frac{K_P}{p + \tau_m p^2 - K_D p + K_P} = \frac{K_P}{\frac{\tau_m}{K_P} p^2 + p \frac{1 - K_D}{K_P} + 1}.$

$$\text{On a alors } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}} \text{ et } \xi = \frac{1 - K_D}{K_P} \frac{\sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}}}{2} = \frac{1 - K_D}{2\sqrt{K_P \tau_m}} = \frac{0,5}{2\sqrt{2}} < 1. \text{ Il y a donc du dépassement. L'exigence}$$



n'est pas vérifiée.

**Question 4** Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert  $Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)}$  qui lie la commande à la perturbation.

**Correction** On a  $\varepsilon_2(p) = -Mes(\varphi(p)) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p)\frac{1}{p}$ . Par ailleurs,  $\varepsilon_1(p) = Pe(p) + \varepsilon_3(p)\frac{AK_m}{1+\tau_m p}$ . Enfin,  $\varepsilon_3(p) = K_P \varepsilon_2(p) + K_D \varepsilon_1(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p) \left( K_D - \frac{K_P}{p} \right) \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}}$ .

On a donc  $\varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}} = Pe(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \left( \frac{p}{pK_D - K_P} - \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right) = Pe(p)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \frac{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}{(pK_D - K_P)(1+\tau_m p)} = Pe(p)$ .

On a donc  $Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)} = \frac{(pK_D - K_P)(1+\tau_m p)}{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}$ .

**Question 5** Avec le modèle 2 et une entrée  $Pe(p)$  échelon unitaire, déterminer la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la commande :  $com(t)$ . Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Correction** On a  $\lim_{t \rightarrow \infty} com(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p Com(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p Stab(p) Pe(p)$

$= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{(pK_D - K_P)(1+\tau_m p)}{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-K_P}{AK_m K_P} = -1$  si  $AK_m = 1$ .

Ainsi, pour une perturbation angulaire dans un autre sens, le système commande les moteurs avec une consigne dans le sens opposé.

**Question 6** Avec le modèle 2 déterminer la FTBO  $\frac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$  de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie  $Pert(p) = \frac{\varphi(p)}{Pe(p)}$ .

**Correction** On a  $\frac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m AK_P}{p(1+\tau_m p - K_m AK_D)}$  (c'est la même que pour le premier modèle).

On a vu que  $\varepsilon_2(p) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p)\frac{1}{p}$ ,  $\varepsilon_1(p) = Pe(p) + \varepsilon_3(p)\frac{AK_m}{1+\tau_m p}$  et  $\varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p) \left( K_D - \frac{K_P}{p} \right)$ .

En conséquences,  $\varepsilon_1(p) = Pe(p) + \varepsilon_3(p)\frac{AK_m}{1+\tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = Pe(p) + \varepsilon_1(p) \left( K_D - \frac{K_P}{p} \right) \frac{AK_m}{1+\tau_m p}$

$\Leftrightarrow \varepsilon_1(p) \left( 1 + \left( \frac{K_P}{p} - K_D \right) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right) = Pe(p) \Leftrightarrow p \varphi(p) \left( 1 + \left( \frac{K_P}{p} - K_D \right) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right) = Pe(p)$

et donc  $Pert(p) = \frac{1}{p \left( 1 + \left( \frac{K_P}{p} - K_D \right) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right)} = \frac{1}{p \left( 1 + \frac{K_P - pK_D}{p} \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right)} = \frac{1+\tau_m p}{p(1+\tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m}$ .

**Question 7** Déterminer la valeur lorsque  $t$  tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Correction** On a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Phi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p Pert(p) Pe(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1+\tau_m p}{p(1+\tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m}$

$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{K_P AK_m} = \frac{1}{K_P} = 0, 1^\circ$ .

Le système n'est pas précis s'il y a une perturbation échelon.

**Question 8** On désire une marge de gain de  $M_G \geq 5$  dB et une marge de phase  $M_\varphi \geq 20^\circ$  (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de  $K_P$  en utilisant les données ci-dessous.

**Correction** Pour une marge de phase de  $20^\circ$ , la phase doit être de  $-160^\circ$  lorsque le gain est nul. Or en  $-160^\circ$  le gain est de  $-3$  dB. Pour respecter la marge de phase, il faut donc déterminer  $K_P$  tel que  $20 \log K_P = 3$  soit  $K_P < 10^{\frac{3}{20}} \simeq 1,41$ .

Le système étant d'ordre 2, la marge de gain sera forcément infinie.

**Question 9** Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de  $Com(t)$  relativement à  $Pe(t)$  en utilisant le résultat de la question 5.

**Correction** La commande s'oppose à la perturbation (comme évoqué question 5). Le stabilisateur a au final un mouvement sinusoïdal dont les valeurs maximales et minimales sont voisines de  $0,1^\circ$  et  $-0,1^\circ$ .

**Question 10** Analyser comparativement ce nouveau tracé.

**Correction** Dans ce cas, les mouvements du porteur sont inférieurs à  $0,1$  degrés (en valeur absolue).

## Synthèse

**Question 11** En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.

### Correction

