Colle 03

Colle 03

Savoirs et compétences :

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système : $G(p)=\dfrac{8}{p^2+5p+6}$.

Question 1 *Tracer les diagrammes de bode de $G(p)$.*

Question 2 *Tracer la marge de gain et la marge de phase.*

On place ce système dans une boucle de régulation en le précédent d'un correcteur proportionnel $C(p)=K$. La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert $B(p)=3$.

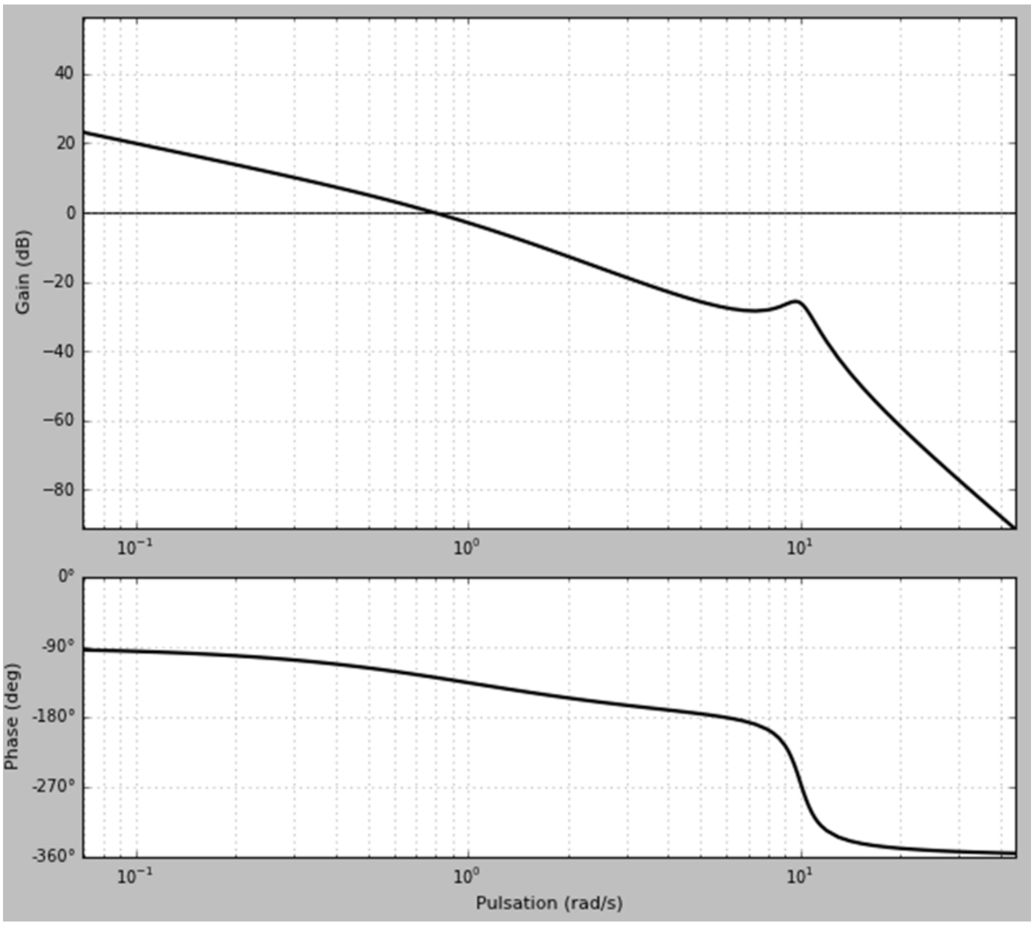
Question 3 *Calculer la valeur de K de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à 45°.*

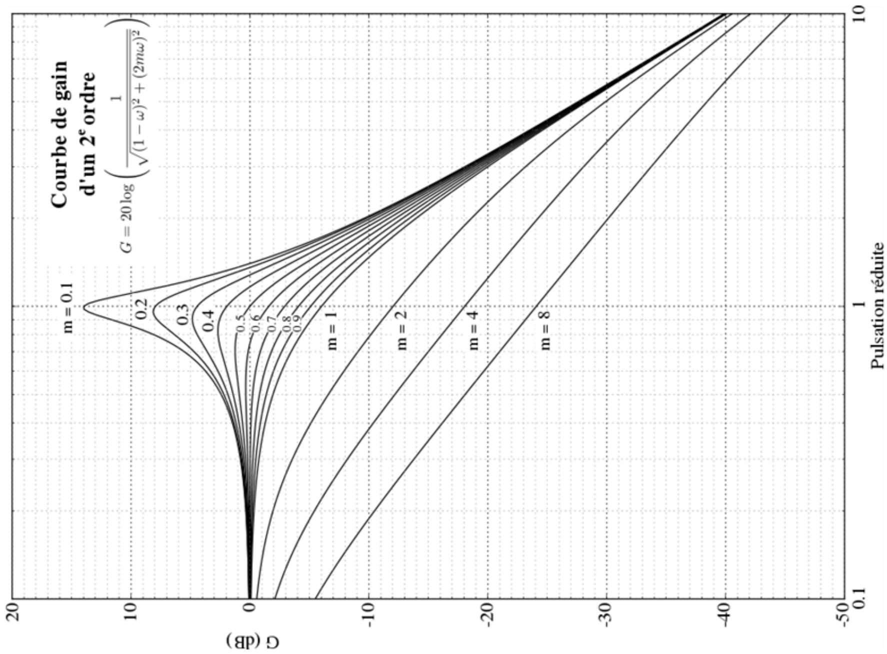
Question 4 *Calculer la valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.*

On change le correcteur proportionnel, par un correcteur intégral de fonction de transfert $C(p)=\dfrac{Ki}{p}$.

Question 5 *Calculer la nouvelle valeur de l'écart statique en réponse à un échelon puis en réponse à une rampe.*

Question 6 *Identifier la fonction de transfert à partir des diagrammes de bode.*





Cycle 02

8.5 La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$G(p) = KA(p)B(p) = \frac{24K}{p^2+5p+6} = \frac{24K}{(p+2)(p+3)}.$$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45 °, on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan\frac{\omega_{c0}}{2} - \arctan\frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

soit :
$$\arctan\frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan\frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{3\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expression :

$$\tan\left[\arctan\frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan\frac{\omega_{c0}}{3}\right] = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$$

d'où :
$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{6}}{1-\frac{\omega_{c0}^2}{6}} = -1 \quad\Rightarrow\quad \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 6 = 0$$

Résolvons cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49$

La seule solution positive est : $\omega_{c0} = \dfrac{5+\sqrt{9}}{2} = 6$ rad/s

Par définition :
$$G(\omega_{c0}) = \frac{24K}{\sqrt{4+\omega_{c0}^2}\sqrt{9+\omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :
$$K = \frac{\sqrt{4+\omega_{c0}^2}\sqrt{9+\omega_{c0}^2}}{24} = 1{,}77$$

Dans un second temps, on exige de surcroît que le système présente en boucle fermée une erreur de position inférieure à 0,2. Calculons l'erreur de position obtenue avec le réglage $K = 1{,}77$.

On a :
$$H(p) = \frac{KA(p)}{1+KA(p)B(p)} = \frac{8K}{p^2+5p+6+24K}$$

d'où :
$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}\,[1-H(p)] = \left[1-\frac{8K}{6+24K}\right] = 71\ \%$$

Pour régler l'erreur de position sur 20 %, une première idée consiste à chercher à augmenter le gain K. On peut alors s'attendre à une chute de la marge de stabilité que l'on corrigera ensuite au moyen d'un correcteur à avance de phase.

Toutefois :
$$\varepsilon_p = \left[1-\frac{8K}{6+24K}\right] = 20\ \% \quad\Rightarrow\quad 0{,}48 + 11{,}2K = 0$$

Aucune valeur positive de K ne permet donc d'obtenir la précision voulue. Il est donc nécessaire d'introduire un correcteur intégral dans la chaîne directe, seul moyen de garantir une erreur de position inférieure à 20 %. La nouvelle boucle de régulation est présentée sur la figure 8.12.

Est-il possible de régler K de manière à obtenir à présent une marge de phase de 45° ? Telle est la question à laquelle il nous faut maintenant répondre.

$$\varepsilon = E - 3\,S \quad \text{et } S = \frac{8K}{(p+2)(p+3)}\,\varepsilon$$

La réponse ci-dessus est fausse

$$\varepsilon = \frac{(p+2)(p+3)}{(p+2)(p+3)+24K}\,E \quad \text{avec } E = \frac{1}{p}$$

$$\lim_{p \to \infty} p\ \varepsilon(p) = \frac{6}{6+24K} = 0{,}123 \text{ car } K=1{,}77$$

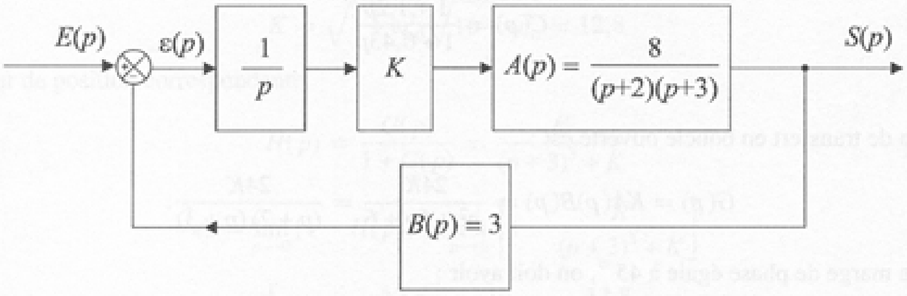


Figure 8.12 Boucle de régulation avec correction intégrale.

On a maintenant : $$G(p) = \frac{24K}{p\,(p+2)\,(p+3)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45 °, on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega_{c0}}{2} - \arctan\frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

soit : $$\arctan\frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan\frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expression :

$$\tan\left[\arctan\frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan\frac{\omega_{c0}}{3}\right] = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

d'où : $$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{6}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{6}} = 1 \quad\Rightarrow\quad \omega_{c0}^2 + 5\omega_{c0} - 6 = 0$$

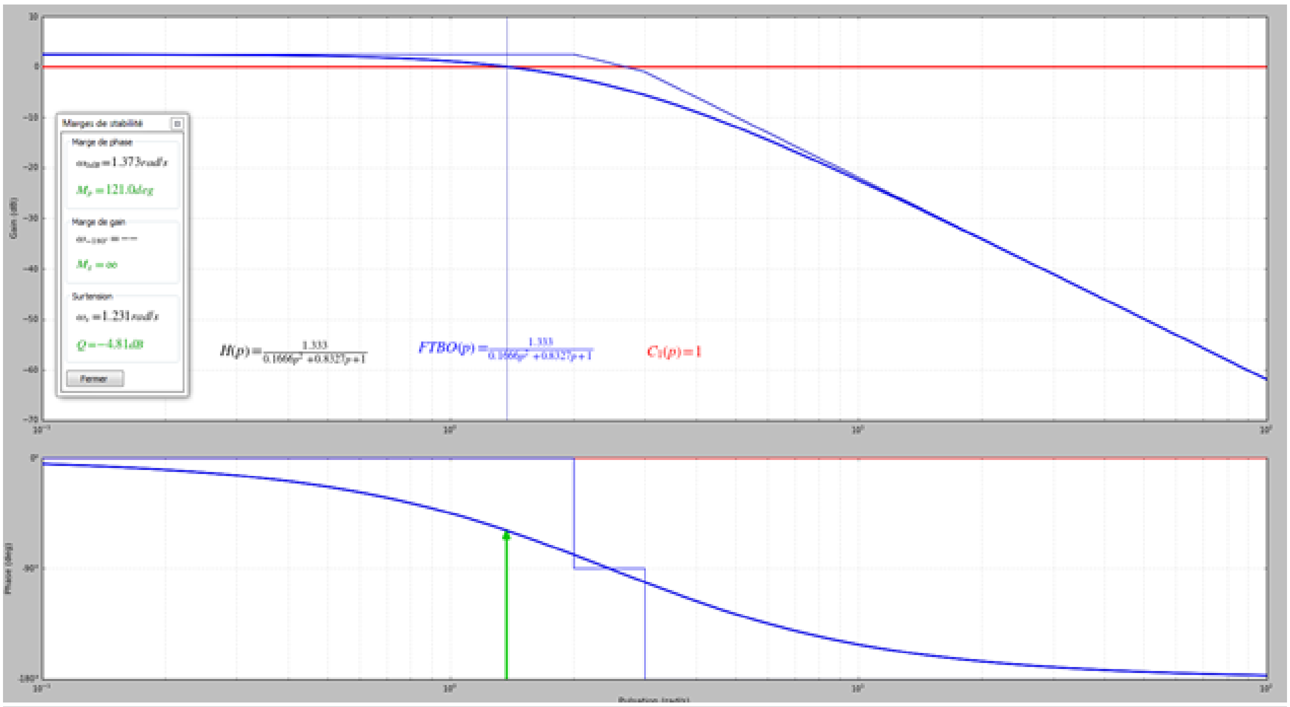
La seule solution positive est évidente : $\omega_{c0} = 1$ rad/s

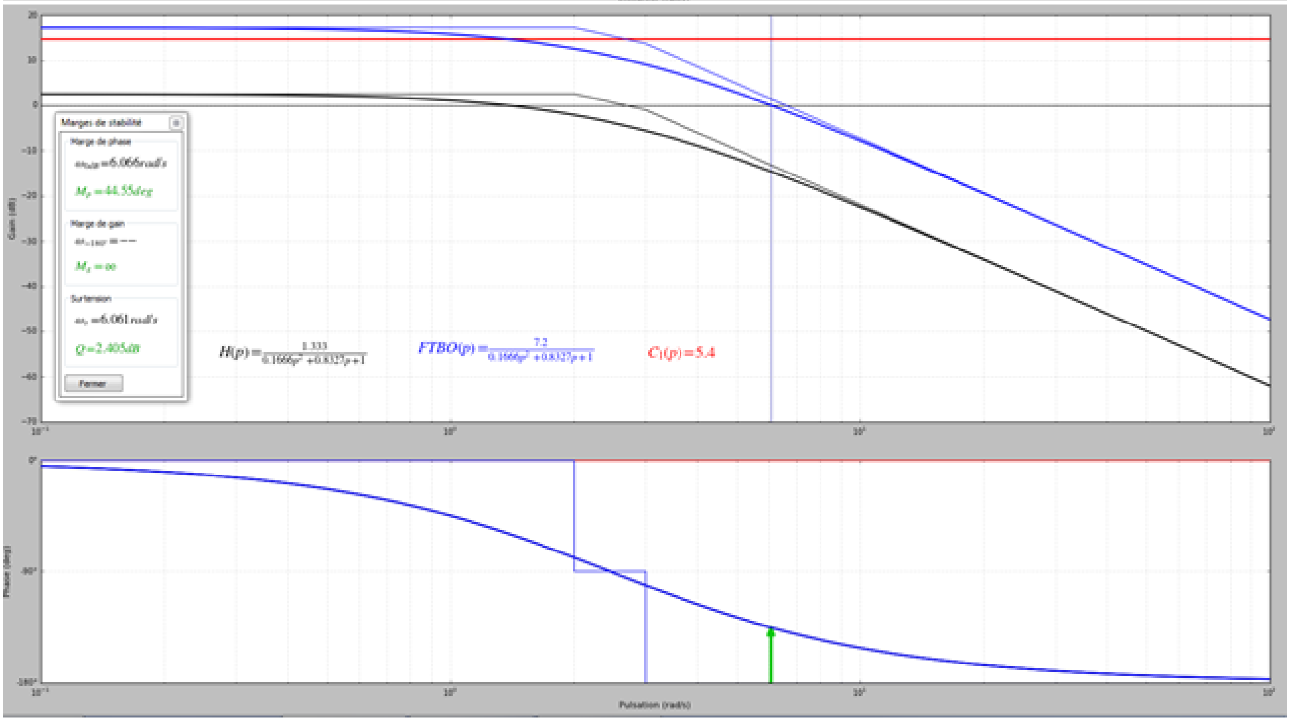
Par définition : $$G(\omega_{c0}) = \frac{24K}{\omega_{c0}\sqrt{4+\omega_{c0}^2}\sqrt{9+\omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent : $$K = \frac{\omega_{c0}\sqrt{4+\omega_{c0}^2}\sqrt{9+\omega_{c0}^2}}{24} = 0{,}3$$

Pour conclure, le correcteur qui permet d'obtenir à la fois une marge de phase de 45° et une erreur de position inférieure à 20 % (elle est même nulle) est :

$$C(p) = \frac{0{,}3}{p}$$


Marges de stabilité
Marge de phase
$\omega_{0dB} = 1.373 rad/s$
$M_\varphi = 121.0 deg$
Marge de gain
$M_G = \infty$
Surtension
$\omega_r = 1.231 rad/s$
$Q = -4.81 dB$
Fermer
$H(p) = \frac{1.333}{0.1666p^2 + 0.8327p + 1}$
$FTBO(p) = \frac{1.333}{0.1666p^2 + 0.8327p + 1}$
$C_1(p) = 1$
Gain (dB)
Phase (deg)
Pulsation (rad/s)


Marges de stabilité
Marge de phase
$\omega_{0dB} = 6.066 rad/s$
$M_\varphi = 44.55 deg$
Marge de gain
$M_G = \infty$
Surtension
$\omega_r = 6.061 rad/s$
$Q = 2.405 dB$
Fermer
$H(p) = \frac{1.333}{0.1666p^2 + 0.8327p + 1}$
$FTBO(p) = \frac{7.2}{0.1666p^2 + 0.8327p + 1}$
$C_1(p) = 5.4$
Gain (dB)
Phase (deg)
Pulsation (rad/s)