

## Activation

## Activation

Patrick Dupas, <http://patrick.dupas.chez-alice.fr/>.

## Savoirs et compétences :

## Identification de la FTBF

**Objectif** Identifier les caractéristiques de la FTBF d'un système à partir d'une réponse temporelle et fréquentielle. Caractériser la stabilité du système.

Un système a fait l'objet d'essais temporel et harmoniques.

**Question 1** En utilisant la réponse temporelle, identifier la fonction de transfert du système

## Correction

Le premier dépassement a une valeur de 30,4%. On a  $D\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \ln D = -\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \left(\sqrt{1-\xi^2}\right) = -\frac{\pi\xi}{\ln D}$   
 $\Rightarrow 1 - \xi^2 = \frac{\pi^2 \xi^2}{(\ln D)^2} \Rightarrow 1 = \xi^2 \left(1 + \frac{\pi^2}{(\ln D)^2}\right) \Rightarrow \xi^2 = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{(\ln D)^2}} \Rightarrow \xi = 0,35$ .

La pseudo-période est de 0.475 s. On a  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p \sqrt{1-\xi^2}}$  et  $\omega_0 = 14.15 \text{ rad s}^{-1}$ .

On a donc  $K = 1$ ,  $\xi = 0,35$  et  $\omega_0 = 14.15 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 2** En utilisant la réponse fréquentielle, identifier à nouveau la fonction de transfert du système.

## Correction

On observe une réponse harmonique constituée d'une asymptote horizontale quand  $\omega$  tend vers 0 et d'une asymptote de pente -40dB/decade. Il en résulte qu'on peut modéliser le système par un second ordre.

Lorsque  $\omega$  tend vers 0, le gain est nul; donc  $K = 1$ .

L'intersection des asymptotes a lieu pour  $\omega_0 = 14.14 \text{ rad s}^{-1}$ .

À la résonance, on mesure un gain de  $20 \log A_{\max} = 3.59 \text{ dB} \Rightarrow A_{\max} = 1,51$ . On a donc  $A_{\max} = \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}$

$\Leftrightarrow 2\xi \sqrt{1-\xi^2} A_{\max} = 1 \Rightarrow 4\xi^2 (1-\xi^2) A_{\max}^2 = 1 \Rightarrow 4\xi^2 A_{\max}^2 - 4\xi^4 A_{\max}^2 - 1 = 0 \Rightarrow \xi^4 - \xi^2 + \frac{1}{4A_{\max}^2} = 0$ . En posant  $\xi^2 = X$ ,

$X^2 - X + \frac{1}{4A_{\max}^2} = 0$ . On a alors  $\Delta = 1 - \frac{1}{A_{\max}^2}$  et  $X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \simeq \frac{1 \pm 0,75}{2}$ . On a donc  $X_1 = 0,125$ ,  $X_2 = 0,875$  et  $\xi_1 = 0,35$ ,  $\xi_2 = 0,94$ . Étant donné qu'il existe une résonance, on prend  $\xi = 0,35$ .

On a donc  $K = 1$ ,  $\xi = 0,35$  et  $\omega_0 = 14.15 \text{ rad s}^{-1}$  et  $F(p) = \frac{1}{1 + 0,05p + 0,005p^2}$ .

**Question 3** Conclure.

## Correction

On retrouve les mêmes coefficients.

**Question 4** Caractériser la stabilité à partir des éléments de la FTBF

**Correction**

On a un système du second ordre. Le système est stable.

**Étude de la stabilité**

**Question 5** Justifier la forme du schéma-blocs retenu pour modéliser la FTBO qui sera notée  $H(p)$ .

**Correction**

$$\text{On a } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{KG}{(1+\tau p)p}}{1 + \frac{KG}{(1+\tau p)p}} = \frac{1}{\frac{\tau}{KG}p^2 + \frac{p}{KG} + 1}.$$

Ainsi,  $H(p)$  est un système du second ordre avec un gain unitaire, comme la fonction identifiée dans les premières questions.

On considère le correcteur proportionnel  $K = 1$ .

**Question 6** Déterminer les valeurs de  $G$  et de  $\tau$  et en déduire  $H(p)$ .

**Correction**

$$\text{On a : } \frac{1}{\frac{\tau}{G}p^2 + \frac{p}{G} + 1} = \frac{1}{1 + 0,05p + 0,005p^2}. \text{ En conséquences, } G = 20 \text{ et } \tau/20 = 0,005 \Rightarrow \tau = 0,1 \text{ s et } FTBO(p) = \frac{20}{(1 + 0,1p)p}.$$

**Question 7** Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

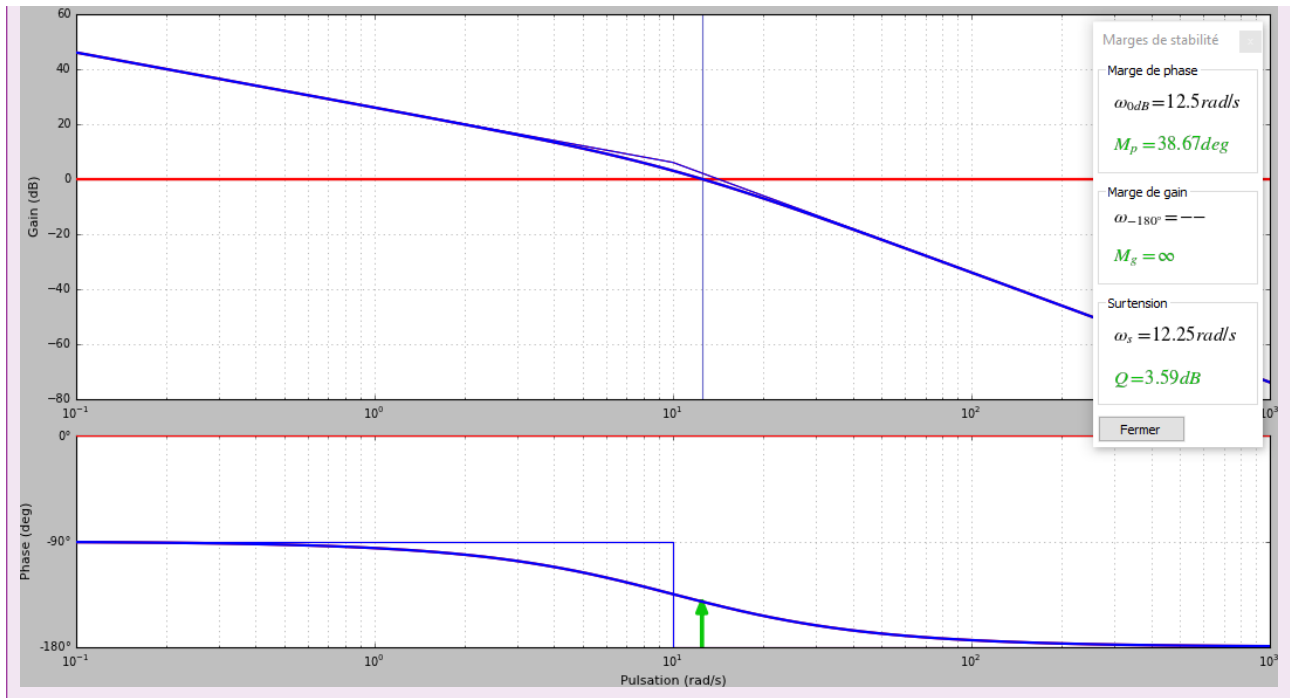
**Correction** Ici on a  $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}$ .

$$\text{Erreur statique (entrée échelon) : } \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = 0$$

$$\text{Erreur trainate (entrée rampe) : } \varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = 0$$

**Question 8** Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

**Correction**



**Question 9** Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

**Correction**

**Question 10** Confirmer ces résultats par le calcul.

**Correction**

La phase ne coupe jamais l'axe des abscisses. Ainsi, La marge de gain n'est pas définie (elle est infinie). Pour déterminer la marge de phase analytiquement :

1. On cherche  $\omega_c$  tel que  $G_{dB}(\omega_c) = 0$ ;
2. On calcule  $\varphi(\omega_c)$ ;
3. La marge de phase est de  $\varphi(\omega_c) - (-180)$ .

Cherchons  $\omega_c$  tel que  $G_{dB}(\omega_c) = 0$ . On a  $FTBO(j\omega) = \frac{20}{(1 + 0,1j\omega)j\omega} = \frac{20}{j\omega - 0,1\omega^2}$ .  $20\log|FTBO(j\omega)| = 20\log 20 - 20\log \sqrt{\omega^2 + 0,01\omega^4} = 20\log 20 - 20\log \omega \sqrt{1 + 0,01\omega^2}$ .

$G_{dB}(\omega_c) = 0 \Leftrightarrow 20 = \omega_c \sqrt{1 + 0,01\omega_c^2} \Leftrightarrow 400 = \omega_c^2 (1 + 0,01\omega_c^2)$  On pose  $x = \omega_c^2$  et on a :  $400 = x(1 + 0,01x) \Leftrightarrow x^2 + 100x - 40000 = 0$ . On a donc  $\Delta = 412,3^2$  et  $x_{1,2} = \frac{-100 \pm 412,3}{2}$  on conserve la racine positive et  $x_1 = 156,15$  et  $\omega_c = 12,5 \text{ rad/s}^{-1}$ .

$\varphi(\omega_c) = \arg(20) - 90 - \arg(1 + 0,1j\omega_c) = 0 - 90 - \arctan(0,1\omega_c) = 0 - 90 - 51,34 = -141,34^\circ$ .

La marge de phase est donc de  $38,66^\circ$ .

**Question 11** Conclure par rapport au cahier des charges.

**Correction** Le système ne sera pas stable vis-à-vis du cahier des charges.

**Choix d'un gain**

**Objectif** Déterminer le gain permettant de satisfaire le cahier des charges.

**Question 12** Déterminer graphiquement la valeur du correcteur  $K$  à placer ans la chaîne directe, afin de respecter les critères de stabilité du cahier des charges.

**Question 13** Déterminer analytiquement la valeur du correcteur  $K$  à placer ans la chaîne directe, afin de respecter les critères de stabilité du cahier des charges.

**Correction** On a une phase de  $-135^\circ$  pour  $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Il faut donc déterminer  $K$  tel que le gain soit nul en  $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ .  
 $20 \log 20 - 20 \log 10 \sqrt{1 + 0,01 \cdot 10^2} = 20 \log 20 - 20 \log 10 \sqrt{2} = 3 \text{ dB}$ . Il faut donc diminuer le gain de 3 dB.  
 On cherche donc  $K$  tel que  $20 \log K = -3$  et il faut prendre  $K = 0,7$ .

**Question 14** Quel sera alors le 1<sup>er</sup> dépassement pour la réponse indicielle du système?

**Correction** Dépassement de 23%.