

Activation Corrigé

Activation

Patrick Dupas, <http://patrick.dupas.chez-alice.fr/>.

Savoirs et compétences :

- ☐ Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- ☐ Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

Question Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 2 – Pôles de la FTBF

Question Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

Question Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

Exercice 4 – Étude de la stabilité

On a $K = 1$, $\tau = 0,1$ et $G = 20$.

Question 1 Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

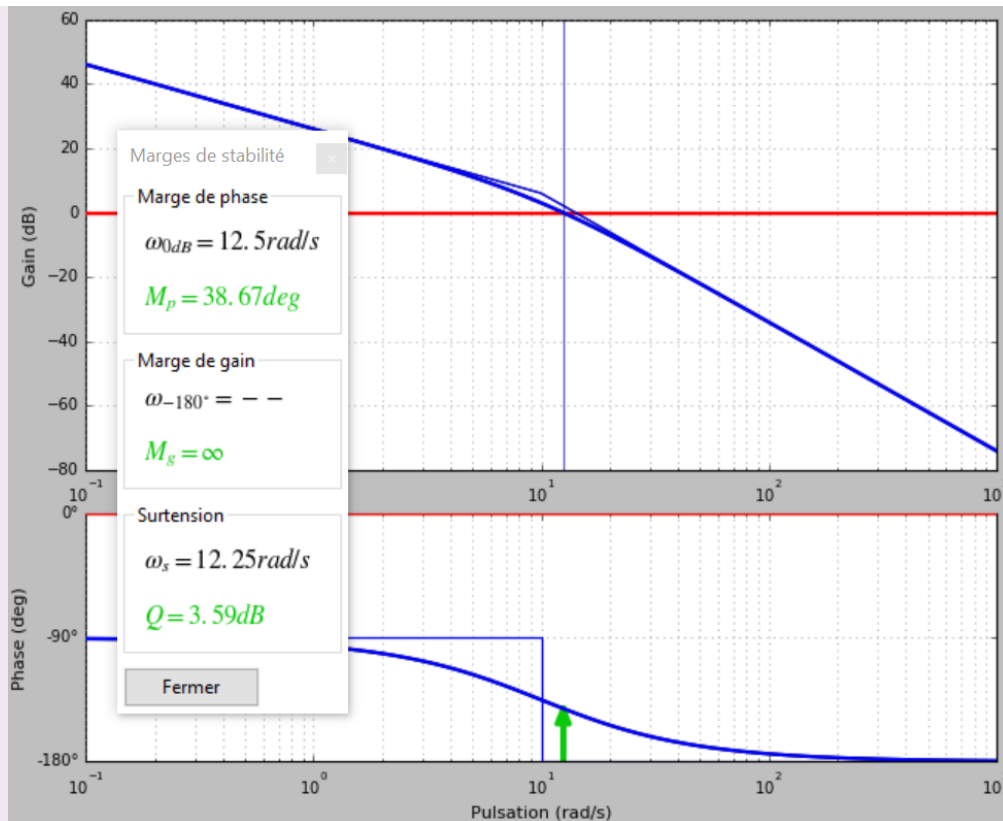
Correction Ici on a $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$.

$$\text{Erreur statique (entrée échelon) : } \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p \left(1 + \frac{1}{(1+0,1p)p} \right)} = 0$$

$$\text{Erreur trainage (entrée rampe) : } \varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2 \left(1 + \frac{1}{(1+0,1p)p} \right)} = 1/20$$

Question 2 Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

Correction



Question 3 Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

Correction

Question 4 Confirmer ces résultats par le calcul.

Correction

La phase ne coupe jamais l'axe des abscisses. Ainsi, La marge de gain n'est pas définie (elle est infinie). Pour déterminer la marge de phase analytiquement :

1. On cherche ω_c tel que $G_{dB}(\omega_c) = 0$;
2. On calcule $\varphi(\omega_c)$;
3. La marge de phase est de $\varphi(\omega_c) - (-180)$.

Cherchons ω_c tel que $G_{dB}(\omega_c) = 0$. On a $FTBO(j\omega) = \frac{20}{(1 + 0,1j\omega)j\omega} = \frac{20}{j\omega - 0,1\omega^2}$. $20\log|FTBO(j\omega)| = 20\log 20 - 20\log \sqrt{\omega^2 + 0,01\omega^4} = 20\log 20 - 20\log \omega \sqrt{1 + 0,01\omega^2}$.
 $G_{dB}(\omega_c) = 0 \Leftrightarrow 20 = \omega_c \sqrt{1 + 0,01\omega_c^2} \Leftrightarrow 400 = \omega_c^2 (1 + 0,01\omega_c^2)$ On pose $x = \omega_c^2$ et on a : $400 = x(1 + 0,01x) \Leftrightarrow x^2 + 100x - 40000 = 0$. On a donc $\Delta = 412,3^2$ et $x_{1,2} = \frac{-100 \pm 412,3}{2}$ on conserve la racine positive et $x_1 = 156,15$ et $\omega_c = 12,5 \text{ rad s}^{-1}$.

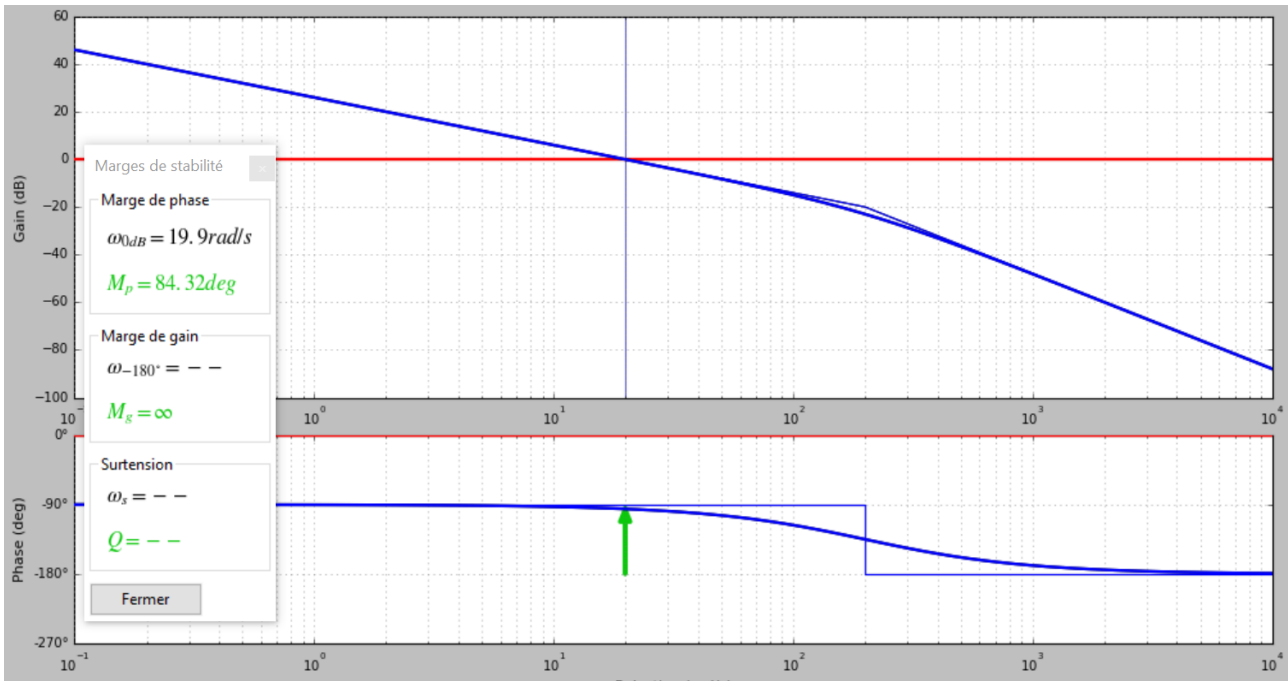
$\varphi(\omega_c) = \arg(20) - 90 - \arg(1 + 0,1j\omega_c) = 0 - 90 - \arctan(0,1\omega_c) = 0 - 90 - 51,34 = -141,34^\circ$.

La marge de phase est donc de $38,66^\circ$.

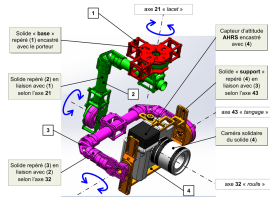
Question 5 Conclure par rapport au cahier des charges.

Correction Le système ne sera pas stable vis-à-vis du cahier des charges.

Pour $\tau = 0,005$



TD 02 – Corrigé



Stabilisateur actif d'image **

Mines Ponts 2018 – PSI

Savoirs et compétences :

- Mod2.C7.SF2 : déterminer les fonctions de transfert;
- Res2.C5 : stabilité des SLCI : équation caractéristique;
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase).

Mise en situation

Objectif Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

Travail demandé

Question 1 Avec $K_m A = 1$, calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

Correction Attention au signe du comparateur de la boucle inbriquée!

On définit la FTBO par $FTBO(p) = \frac{\varepsilon(p)}{\text{Mes}\varphi(p)}$ avec $\varepsilon(p)$ la sortie du premier comparateur.

$$\text{On a d'une part } G(p) = \frac{\frac{K_m A}{1 + \tau_m p}}{1 - \frac{K_m A K_D}{1 + \tau_m p}} = \frac{K_m A}{1 + \tau_m p - K_m A K_D}. \text{ On a alors } FTBO(p) = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}.$$

$$\text{Si on définit la FTBF par } FTBF(p) = \frac{\varphi(p)}{\varphi^*(p)}, \text{ on a } FTBF(p) = A_i(p) \frac{\frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}{1 + \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}$$

$$= A_i(p) \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D) + K_m A K_P}.$$

$$\text{Au final, } FTBO(p) = \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D)} \text{ et } FTBF(p) = A_i(p) \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P}.$$

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas : $A_1(p) = 1$.

Question 2 Quelle est la valeur maximale de K_D pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

Correction Pour que le système soit stable, tous les coefficients du dénominateur $D(p)$ de la FTBF doivent être de même signe (ainsi toutes les racines sont à partie réelle négative). On a $D(p) = p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P = \tau_m p^2 p + (1 - K_D)p + K_P$ et donc nécessairement, $1 - K_D > 0$ et $K_D < 1$.

Question 3 Lorsque $A_i(p) = 1$, le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements »?

Correction On a : $FTBF(p) = \frac{K_P}{p + \tau_m p^2 - K_D p + K_P} = \frac{K_P}{\frac{\tau_m}{K_P} p^2 + p \frac{1 - K_D}{K_P} + 1}.$

$$\text{On a alors } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}} \text{ et } \xi = \frac{1 - K_D}{K_P} \frac{\sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}}}{2} = \frac{1 - K_D}{2\sqrt{K_P \tau_m}} = \frac{0,5}{2\sqrt{2}} < 1. \text{ Il y a donc du dépassement. L'exigence}$$

n'est pas vérifiée.

Question 4 Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert $Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)}$ qui lie la commande à la perturbation.

Correction On a $\varepsilon_2(p) = -Mes(\varphi(p)) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p)\frac{1}{p}$. Par ailleurs, $\varepsilon_1(p) = Pe(p) + \varepsilon_3(p)\frac{AK_m}{1+\tau_m p}$. Enfin, $\varepsilon_3(p) = K_P \varepsilon_2(p) + K_D \varepsilon_1(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p) \left(K_D - \frac{K_P}{p} \right) \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}}$.

On a donc $\varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}} = Pe(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \left(\frac{p}{pK_D - K_P} - \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right) = Pe(p)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \frac{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}{(pK_D - K_P)(1+\tau_m p)} = Pe(p).$

On a donc $Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)} = \frac{(pK_D - K_P)(1+\tau_m p)}{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}.$

Question 5 Avec le modèle 2 et une entrée $Pe(p)$ échelon unitaire, déterminer la limite quand t tend vers l'infini de la commande : $com(t)$. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Correction On a $\lim_{t \rightarrow \infty} com(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p Com(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p Stab(p) Pe(p)$

$= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{(pK_D - K_P)(1+\tau_m p)}{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-K_P}{AK_m K_P} = -1$ si $AK_m = 1$.

Ainsi, pour une perturbation angulaire dans un autre sens, le système commande les moteurs avec une consigne dans le sens opposé.

Question 6 Avec le modèle 2 déterminer la FTBO $\frac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$ de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie $Pert(p) = \frac{\varphi(p)}{Pe(p)}$.

Correction On a $\frac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m AK_P}{p(1+\tau_m p - K_m AK_D)}$ (c'est la même que pour le premier modèle).

On a vu que $\varepsilon_2(p) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p)\frac{1}{p}$, $\varepsilon_1(p) = Pe(p) + \varepsilon_3(p)\frac{AK_m}{1+\tau_m p}$ et $\varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p) \left(K_D - \frac{K_P}{p} \right)$.

En conséquences, $\varepsilon_1(p) = Pe(p) + \varepsilon_3(p)\frac{AK_m}{1+\tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = Pe(p) + \varepsilon_1(p) \left(K_D - \frac{K_P}{p} \right) \frac{AK_m}{1+\tau_m p}$

$\Leftrightarrow \varepsilon_1(p) \left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D \right) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right) = Pe(p) \Leftrightarrow p \varphi(p) \left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D \right) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right) = Pe(p)$

et donc $Pert(p) = \frac{1}{p \left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D \right) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right)} = \frac{1}{p \left(1 + \frac{K_P - pK_D}{p} \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right)} = \frac{1+\tau_m p}{p(1+\tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m}.$

Question 7 Déterminer la valeur lorsque t tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Correction On a $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Phi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p Pert(p) Pe(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1+\tau_m p}{p(1+\tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m}$

$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{K_P AK_m} = \frac{1}{K_P} = 0, 1^\circ.$

Le système n'est pas précis s'il y a une perturbation échelon.

Question 8 On désire une marge de gain de $M_G \geq 5$ dB et une marge de phase $M_\varphi \geq 20^\circ$ (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de K_P en utilisant les données ci-dessous.

Correction Pour une marge de phase de 20° , la phase doit être de -160° lorsque le gain est nul. Or en -160° le gain est de -3 dB. Pour respecter la marge de phase, il faut donc déterminer K_P tel que $20 \log K_P = 3$ soit $K_P < 10^{\frac{3}{20}} \simeq 1,41$.

Le système étant d'ordre 2, la marge de gain sera forcément infinie.

Question 9 Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de $Com(t)$ relativement à $Pe(t)$ en utilisant le résultat de la question 5.

Correction La commande s'oppose à la perturbation (comme évoqué question 5). Le stabilisateur a au final un mouvement sinusoïdal dont les valeurs maximales et minimales sont voisines de $0,1^\circ$ et $-0,1^\circ$.

Question 10 Analyser comparativement ce nouveau tracé.

Correction Dans ce cas, les mouvements du porteur sont inférieurs à $0,1$ degrés (en valeur absolue).

Synthèse

Question 11 En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.

Correction

