TD 01

Corrigé

Fauteuil dynamique de cinéma

Concours Centrale-Supélec TSI 2015

Savoirs et compétences :

Présentation du système

Mise en situation

Exigence fonctionnelle « amplifier la sensation d'accélération »

Comportement de l'ensemble variateur et moteur du dosseret

Objectif

- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de courant.
- Établir un modèle simplifié de l'asservissement de vitesse.
- Analyser la précision de l'asservissement de position.

Modélisation de l'asservissement de vitesse

Question 1 *Exprimer la fonction de transfert de la boucle de vitesse $H_\Omega(p) = \Omega(p)/U_{C\Omega}(p)$, lorsque $C_R(p) = 0$. Le résultat sera mis sous une forme canonique.*

Correction

$$H_\Omega(p) = \dfrac{k_1\left(1+\dfrac{1}{T_1 p}\right)\dfrac{K}{K_{rI}}\dfrac{1}{Jp+f}}{1+K_\Omega k_1\left(1+\dfrac{1}{T_1 p}\right)\dfrac{K}{K_{rI}}\dfrac{1}{Jp+f}} = \dfrac{k_1\left(1+T_1 p\right)K}{T_1 p K_{rI}\left(Jp+f\right)+K_\Omega k_1\left(1+T_1 p\right)K}$$

$$= \dfrac{\dfrac{K k_1}{K_\Omega k_1 K}\left(1+T_1 p\right)}{\dfrac{T_1 K_{rI} J}{K_\Omega k_1 K}p^2+\left(\dfrac{f T_1 K_{rI}}{K_\Omega k_1 K}+\dfrac{K_\Omega k_1 T_1 K}{K_\Omega k_1 K}\right)p+1} \quad H_\Omega(p) = \dfrac{\dfrac{1}{K_\Omega}\left(1+T_1 p\right)}{\dfrac{T_1 K_{rI} J}{K_\Omega k_1 K}p^2+\left(\dfrac{f K_{rI}}{K_\Omega k_1 K}+1\right)T_1 p+1}$$

Question 2 *T_1 étant égal à J/f, montrer alors que la fonction de transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme $\dfrac{b}{\tau p+1}$. Calculer les valeurs numériques des termes* b *et* τ.

Correction

On a $H_\Omega(p) = \dfrac{\dfrac{1}{K_\Omega}\left(1+\dfrac{J}{f}p\right)}{\dfrac{\dfrac{J}{f}K_{rI}J}{K_\Omega k_1 K}p^2+\left(\dfrac{f K_{rI}}{K_\Omega k_1 K}+1\right)\dfrac{J}{f}p+1} = \dfrac{\left(f+Jp\right)}{\dfrac{K_{rI}J^2}{k_1 K}p^2+\left(\dfrac{f K_{rI}}{k_1 K}+K_\Omega\right)Jp+f K_\Omega}$

$= \dfrac{\left(f+Jp\right)k_1 K}{K_{rI}J^2p^2+\left(f K_{rI}+K_\Omega k_1 K\right)Jp+f K_\Omega k_1 K}$

On a : $\Delta = \left(f K_{rI}+K_\Omega k_1 K\right)^2 J^2 - 4 f K_\Omega k_1 K K_{rI} J^2 = \left(f^2 K_{rI}^2 + K_\Omega^2 k_1^2 K^2 + 2 f K_{rI} K_\Omega k_1 K\right)J^2 - 4 f K_\Omega k_1 K K_{rI} J^2$

$= \left(f^2 K_{rI}^2 + K_\Omega^2 k_1^2 K^2 - 2 f K_{rI} K_\Omega k_1 K\right)J^2 = \left(f K_{rI} - K_\Omega k_1 K\right)^2 J^2$

On a donc

$p_{12} = \dfrac{-\left(f K_{rI}+K_\Omega k_1 K\right)J \pm \left(f K_{rI}-K_\Omega k_1 K\right)J}{2K_{rI}J^2}$,

$p_1 = \frac{-fJK_{rI} - K_\Omega k_1 K J + fJK_{rI} - K_\Omega k_1 K J}{2K_{rI}J^2} = -\frac{K_\Omega k_1 K}{K_{rI}J}$, $p_2 = \frac{-fJK_{rI} - K_\Omega k_1 K J - fJK_{rI} + K_\Omega k_1 K J}{2K_{rI}J^2} = -\frac{f}{J}$.

On a donc

$$H_\Omega(p) = \frac{J\left(\frac{f}{J}+p\right)k_1K}{\left(p+\frac{f}{J}\right)\left(p+\frac{K_\Omega k_1 K}{K_{rI}J}\right)} = \frac{Jk_1K}{p+\frac{K_\Omega k_1 K}{K_{rI}J}} = \frac{\frac{K_{rI}J^2}{K_\Omega}}{\frac{K_{rI}J}{K_\Omega k_1 K}p+1}$$

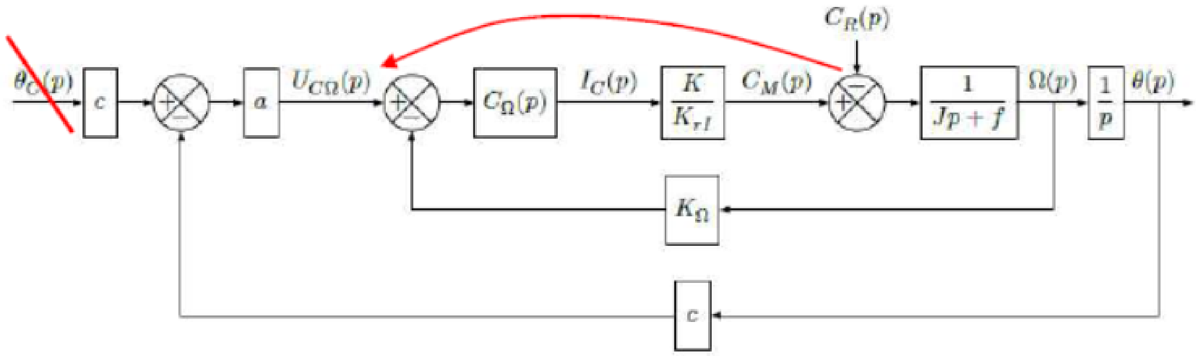
On a donc $b = \frac{K_{rI}J^2}{K_\Omega}$ et $\tau = \frac{K_{rI}J}{K_\Omega k_1 K}$.

Autre solution : $b = \frac{1}{K_\Omega} = 20\pi = 62{,}8\,\text{rad}\,\text{s–1V}^{-1}$ et $\tau = \frac{K_{ri}J}{k_1 K K_\Omega} = 2{,}17\times 10^{-3}\,\text{s}$.

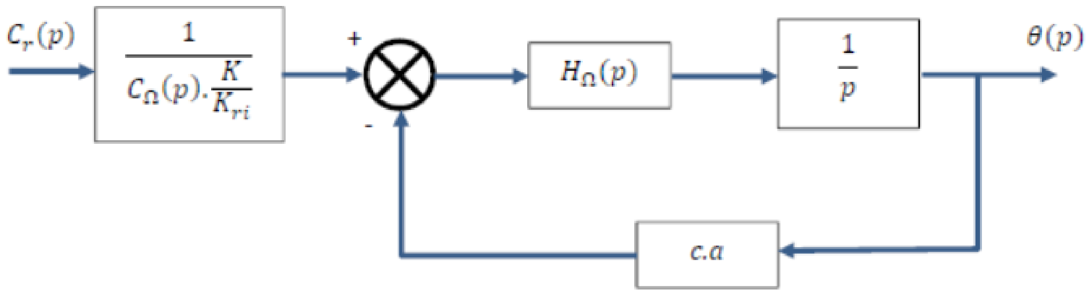
Question 3 *En déduire, à l'aide de la figure précédente, $\theta(p)/C_R(p)$ lorsque $\theta_C(p) = 0$. Calculer ensuite la valeur finale de $\theta(t)$ lorsque $c_R(t)$ est un échelon unitaire. Conclure quant à l'action, en régime permanent, du correcteur proportionnel et intégral sur les effets d'une perturbation $c_R(t)$ de type échelon.*

Correction

On effectue une transformation de schéma en déplaçant le comparateur de $C_r(p)$



D'où la nouvelle structure de schéma bloc :



$$\frac{\theta(p)}{C_r(p)} = \frac{1}{C_\Omega(p).\frac{K}{K_{ri}}}\cdot\frac{H_\Omega(p).\frac{1}{p}}{1+c.a.H_\Omega(p).\frac{1}{p}} = \frac{K_{ri}.T_1.p}{K.k_1.(1+T_1.p)}\cdot\frac{\frac{b}{1+\tau p}\cdot\frac{1}{p}}{1+\frac{b}{1+\tau p}\cdot\frac{1}{p}}$$

L'application du théorème de la valeur finale pour une entrée de type échelon donne :

$$\theta(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\theta(p) = 0$$

Ce résultat était prévisible car le correcteur PI est placé avant la perturbation.

$$\frac{\theta(p)}{C_r(p)} = \frac{1}{C_\Omega(p)\frac{K}{K_{ri}}}\frac{\frac{b}{1+\tau p}\frac{1}{p}}{1+\frac{abc}{1+\tau p}\frac{1}{p}} = \frac{1}{k_1\left(1+\frac{1}{T_1 p}\right)\frac{K}{K_{ri}}}\frac{\frac{b}{1+\tau p}\frac{1}{p}}{1+\frac{abc}{1+\tau p}\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{T_1 K_{ri} p}{k_1 (T_1 p+1) K} \cdot \frac{b}{p(1+\tau p)+abc}$$
et $\lim\limits_{t\to\infty} \theta(t) = 1$.

Modélisation de la boucle d'asservissement de position

Question 4 *Exprimer la fonction de transfert $\theta(p)/\theta_C(p)$. Déterminer ensuite la valeur numérique de a pour avoir un facteur d'amortissement égal à 0,7. Justifier le choix de ce facteur d'amortissement. (Pour ce calcul et les calculs suivants prendre $b = 63\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{V}^{-1}$, $\tau = 2{,}2\,\text{ms}$, $c = 40\,\text{rad}^{-1}$.)*

Correction

On a $\dfrac{\theta(p)}{\theta_C(p)} = c\dfrac{\dfrac{ab}{p(\tau p+1)}}{1+\dfrac{abc}{p(\tau p+1)}} = \dfrac{abc}{p(\tau p+1)+abc} = \dfrac{1}{\dfrac{\tau}{abc}p^2+\dfrac{p}{abc}+1}$.

On a $\omega_0 = \sqrt{abc/\tau}$ et $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = \dfrac{1}{abc}$ et $\xi = \dfrac{1}{2\sqrt{abc\tau}}$. En conséquence, $a = \dfrac{1}{4bc\tau\xi^2} = 0{,}092$. (On prend $\xi = 0{,}7$ car cela correspond au temps de réponse le plus rapide pour un second ordre.)

Analyse de la précision du système

Question 5 *Exprimer dans un premier temps $\mu(p)$ en fonction de $\theta_C(p)$, puis déterminer de façon littérale et numérique l'erreur de position μ_p, l'erreur de trainage μ_v et l'erreur en accélération μ_a. Conclure quant à la précision statique du système suite aux différentes consignes $\theta_C(p)$ de type échelon, rampe et accélération.*

Correction On a $\mu(p) = \dfrac{\theta_c(p)}{1+\dfrac{abc}{p(1+\tau p)}} = \dfrac{p(1+\tau p)}{p(1+\tau p)+abc}\theta_c(p) = \dfrac{p(1+\tau p)}{p(1+\tau p)+abc}\theta_c(p)$.

La FTBO est de classe 1 et de gain $K_{BO} = abc$ on a donc :

- pour une entrée échelon, $\mu_p = 0$;
- pour une entrée rampe, $\mu_v = \dfrac{1}{abc}$;
- pour une entrée accélération, $\mu_a = \infty$.

Validation et optimisation de la performance simulée en accélération du dosseret

Objectif Valider la performance simulée en accélération au regard du cahier des charges fonctionnel.

Question 6 *Déterminer l'erreur de position μ_p puis l'erreur de traînage μ_v. Conclure sur l'erreur de position au regard du cahier des charges.*

Correction

On a $\varepsilon_{\text{codeur}}(p) = c\theta_c(p) - c\theta(p)$

$= c\theta_c(p) - \dfrac{bc}{p(\tau p+1)} U_{C\Omega}(p) = c\theta_c(p) - \dfrac{bc}{p(\tau p+1)}\left(\theta_C(p)dp + a\varepsilon_{\text{codeur}}(p)\right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p)\left(1+\dfrac{abc}{p(\tau p+1)}\right) = \theta_C(p)\left(c - \dfrac{bcd}{\tau p+1}\right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p)\left(1+\dfrac{abc}{p(\tau p+1)}\right) = \theta_C(p)c\dfrac{\tau p+1-bd}{\tau p+1}$

$\Leftrightarrow \varepsilon_{\text{codeur}}(p) = \theta_C(p)cp\dfrac{\tau p+1-bd}{p(\tau p+1)+abc}$

On a alors :

- $\mu_p = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{p}cp\dfrac{\tau p+1-bd}{p(\tau p+1)+abc} = \lim\limits_{p\to 0} cp\dfrac{\tau p+1-bd}{p(\tau p+1)+abc} = 0$;
- $\mu_v = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{p^2}cp\dfrac{\tau p+1-bd}{p(\tau p+1)+abc} = \dfrac{1-bd}{ab}$.

Question 7 *D'après l'erreur de traînage μ_v déterminée à la question précédente, calculer la valeur numérique de d qui permet d'annuler cette erreur de traînage. En prenant en compte la valeur numérique de d et de b, déterminer l'expression de l'erreur en accélération μ_a. Calculer ensuite sa valeur numérique et conclure au regard du cahier des charges.*

Correction On a $\mu_v = \dfrac{1-bd}{abc}$. En conséquences, $\mu_v = 0 \Leftrightarrow 0 = \dfrac{1-bd}{ab} \Leftrightarrow d = \dfrac{1}{b}$.

$$\mu_a = \lim_{p\to 0} p \frac{1}{p^3} cp \frac{\tau p + 1 - bd}{p(\tau p + 1) + abc} = \frac{\tau}{ab}.$$

Question 8 *Conclure quant au respect du cahier des charges vis-à-vis des accélérations produites par le dosseret du siège dynamique de cinéma.*

Correction

Exigence fonctionnelle « incliner le spectateur suivant l'axe de tangage et de roulis »

Objectif Valider le choix de conception pour la réalisation de la commande simultanée des deux moteurs de l'assise du siège.

Question 9 *En réutilisant éventuellement les calculs effectués aux questions 6 et 7 et en tenant compte des différences de réglage de retour vitesse et des différences d'inertie entre les deux motorisations, exprimer la valeur finale de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ lorsque la consigne $\theta_C(t)$ est respectivement égale à $u(t)$, $t \cdot u(t)$ puis $\frac{t^2}{2} u(t)$, $u(t)$ étant la fonction échelon unité.*

Correction En raisonnant graphiquement, on a $\theta_1(p) - \theta_2(p) = \varepsilon_{\text{codeur } 1}(p) - \varepsilon_{\text{codeur } 2}(p)$; donc :

- $\mu_p = \mu_{p1} - \mu_{p2} = 0$;
- $\mu_v = \mu_{v1} - \mu_{v2} = \dfrac{1-b_1 d}{ab_1} - \dfrac{1-b_2 d}{ab_2}$;
- $\mu_a = \mu_{a1} - \mu_{a2} = \infty$.

La figure **??** représente le résultat d'une simulation de $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ pour une consigne $\theta_C\ (t) = \frac{t^2}{2} U(t)$

Question 10 *Conclure quant à l'erreur en accélération lors de la commande simultanée.*

Correction