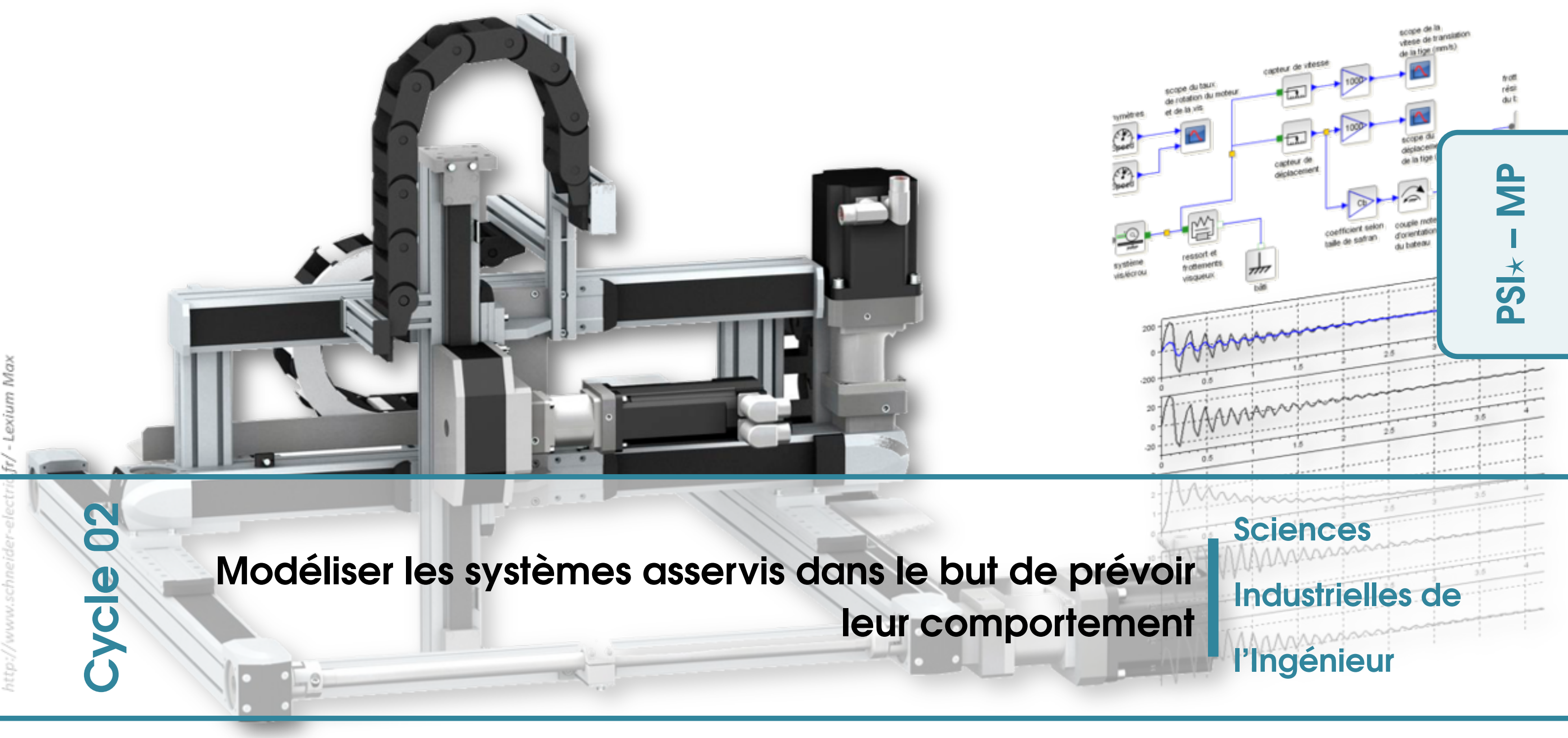


PSI⋆ – MP

Cycle 02

Modéliser les systèmes asservis dans le but de prévoir leur comportement

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Cours

Chapitre 3

Précision des systèmes

Savoirs et compétences :

- *Res2.C10 : précision des SLCI : erreur en régime permanent*
- *Res2.C11 : précision des SLCI : influence de la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte*
- *Res2.C10.SF1 : déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon ou en rampe (consigne ou perturbation)*
- *Res2.C11.SF1 : relier la précision aux caractéristiques fréquentielles*

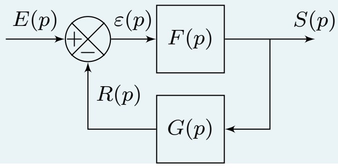
Xavier Pessoles
PSI⋆ – MP

1 Système non perturbé

Définition La précision est l'écart entre la valeur de consigne et la valeur de la sortie. Pour caractériser la précision d'un système, on s'intéresse généralement à l'écart en régime permanent.

Attention à bien s'assurer que, lors d'une mesure expérimentale par exemple, les grandeurs de consigne et de sortie sont bien de la même unité (et qualifient bien la même grandeur physique).

Pour un système non perturbé dont le schéma-blocs est celui donné ci-contre, on caractérise l'écart en régime permanent par :



$$\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon_{\text{permanent}} = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p)$$

Définition Un système est précis pour une entre lorsque $\varepsilon_{\text{permanent}} = 0$.

Définition ˜

Le nom de l'écart dépend de l'entrée avec lequel le système est sollicité :

- écart statique : système sollicité par une entrée échelon – $e(t) = E_0$ et $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$;
- écart dynamique (en vitesse ou en poursuite) : système sollicité par une rampe – $e(t) = Vt$ et $E(p) = \dfrac{V}{p^2}$;
- écart en accélération : système sollicité par une parabole – $e(t) = At^2$ et $E(p) = \dfrac{A}{p^2}$.

Petit développement ...

Calculons l'écart statique pour le système précédent. On a : $\varepsilon(p) = E(p) - R(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon(p)F(p)G(p) \Longleftrightarrow \varepsilon(p)\left(1 + F(p)G(p)\right) = E(p) \Longleftrightarrow \varepsilon(p) = \dfrac{E(p)}{1 + F(p)G(p)}$.

Résultat

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Poursuivons ...

On a $FTBO(p) = \dfrac{K_{BO}\left(1 + a_1 p + ... + a_m p^m\right)}{p^\alpha \left(1 + b_1 p + ... + b_n p^n\right)}$ avec $m < n$.

FTBO de classe nulle

- Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{E_0}{p} \dfrac{1}{1 + FTBO(p)} = \dfrac{E_0}{1 + K_{BO}}$.
- Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{V}{p^2} \dfrac{1}{1 + FTBO(p)} = +\infty$.
- Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{A}{p^3} \dfrac{1}{1 + FTBO(p)} = +\infty$.

FTBO de classe 1

- Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{E_0}{p} \dfrac{1}{1 + \dfrac{K_{BO}\left(1 + a_1 p + ... + a_m p^m\right)}{p\left(1 + b_1 p + ... + b_n p^n\right)}} = 0$.
- Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{V}{p^2} \dfrac{1}{1 + \dfrac{K_{BO}\left(1 + a_1 p + ... + a_m p^m\right)}{p\left(1 + b_1 p + ... + b_n p^n\right)}} = \dfrac{V}{K_{BO}}$.
- Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{A}{p^3} \dfrac{1}{1 + \dfrac{K_{BO}\left(1 + a_1 p + ... + a_m p^m\right)}{p\left(1 + b_1 p + ... + b_n p^n\right)}} = +\infty$.

FTBO de classe 2

- Pour une entrée échelon : $\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim\limits_{p\to 0} p \dfrac{E_0}{p} \dfrac{1}{1 + \dfrac{K_{BO}\left(1 + a_1 p + ... + a_m p^m\right)}{p^2\left(1 + b_1 p + ... + b_n p^n\right)}} = 0$.

- Pour une entrée de type rampe : $\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{V}{p^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{K_{BO}\left(1+a_1p+\ldots+a_mp^m\right)}{p^2\left(1+b_1p+\ldots+b_np^n\right)}} = 0.$
- Pour une entrée de type parabole : $\varepsilon_{\text{permanent}} = \lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{A}{p^3}\dfrac{1}{1+\dfrac{K_{BO}\left(1+a_1p+\ldots+a_mp^m\right)}{p^2\left(1+b_1p+\ldots+b_np^n\right)}} = \dfrac{A}{K_{BO}}.$

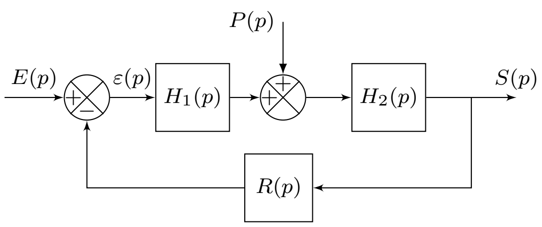
Résultat

Classe	Consigne échelon $e(t)=E_0$ $E(p)=\dfrac{E_0}{p}$	Consigne en rampe $e(t)=Vt$ $E(p)=\dfrac{V}{p^2}$	Consigne parabolique $e(t)=At^2$ $E(p)=\dfrac{A}{p^3}$
0	$\varepsilon_S=\dfrac{E_0}{1+K_{BO}}$	$\varepsilon_V=+\infty$	$\varepsilon_A=+\infty$
1	$\varepsilon_S=0$	$\varepsilon_V=\dfrac{V}{K_{BO}}$	$\varepsilon_A=+\infty$
2	$\varepsilon_S=0$	$\varepsilon_V=0$	$\varepsilon_A=\dfrac{A}{K_{BO}}$

R L'écart statique est nul si la boucle ouverte comprend au moins une intégration. À défaut, l'augmentation du gain statique de la boucle ouverte provoque une amélioration de la précision.

2 Système perturbé

Soit le schéma-blocs suivant :



L'écart est caractérisé par le soustracteur principal, c'est-à-dire celui situé le plus à gauche du schéma-blocs.

Par lecture directe, on a : $\varepsilon(p) = E(p) - R(p)S(p) = E(p) - R(p)\left(H_2(p)\left(P(p)+\varepsilon(p)H_1(p)\right)\right) \Longleftrightarrow \varepsilon(p) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) - R(p)H_1(p)H_2(p)\varepsilon(p) \Longleftrightarrow \varepsilon(p)\left(1+R(p)H_1(p)H_2(p)\right) = E(p) - R(p)H_2(p)P(p) \Longleftrightarrow \varepsilon(p) = \dfrac{E(p)}{1+R(p)H_1(p)H_2(p)} - \dfrac{R(p)H_2(p)}{1+R(p)H_1(p)H_2(p)}P(p).$

On a donc : $\varepsilon(p) = \underbrace{\dfrac{1}{1+\text{FTBO}(p)}E(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la consigne}} - \underbrace{\dfrac{R(p)H_2(p)}{1+\text{FTBO}(p)}P(p)}_{\text{Écart vis-à-vis de la perturbation}}.$

Notons $H_1(p) = \dfrac{K_1}{p_1^{\alpha}}\dfrac{N_1(p)}{D_1(p)}$ (avec $N_1(0)=1$ et $D_1(0)=1$) et $H_2(p) = \dfrac{K_2}{p_2^{\alpha}}\dfrac{N_2(p)}{D_2(p)}$ (avec $N_2(0)=1$ et $D_2(0)=1$).

Par ailleurs $H_{\text{bo}}(p) = H_1(p)H_2(p)R(p) = \dfrac{H_{\text{bo}}}{p^{\alpha}}\dfrac{N(p)}{D(p)}$.

On peut calculer l'écart vis-à-vis de la perturbation : $\varepsilon_{\text{perturbation}} = \lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{K_2p^{\alpha_1+1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2}+K_1K_2}P(p).$

Cas	Classe du système	Perturbation en échelon $P(p)=\dfrac{P_0}{p}$
1	$\alpha_1 \geq 1$	$\varepsilon_{\text{perturbation}} = 0$
2	$\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$	$\varepsilon_{\text{perturbation}} = \dfrac{K_2}{1+K_1K_2}P_0$
3	$\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 \geq 1$	$\varepsilon_{\text{perturbation}} = \dfrac{P_0}{K_1}$

Résultat Il faut au moins un intégrateur en amont d'une perturbation constante pour annuler l'écart vis-à-vis de cette perturbation. Un intégrateur placé en aval n'a aucune influence.

Quand ce n'est pas le cas, un gain K_1 important en amont de la perturbation réduit toujours l'écart vis-à-vis de cette perturbation.

Références

[1] Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.*

[2] Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse,* `http://florestan.mathurin.free.fr/`.