

## TD 01



## Drone quadri-rotor

Pole SII Chateaubriand – Joliot Curie

## Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

## Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction  $\vec{z}$ ) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x})$ ) et en tangage (rotation autour de l'axe  $(O, \vec{y})$ ) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ( $\frac{\omega_2}{\omega_4}$  pour le roulis et  $\frac{\omega_1}{\omega_3}$  pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

|                        |                                       |
|------------------------|---------------------------------------|
| Accélération verticale | Vers le haut : 3g                     |
|                        | Vers le bas : 0,5g(en valeur absolue) |
| Précision              | Erreur statique nulle                 |
| Stabilité              | Marge de phase minimale : 35°         |
|                        | Dépassement maximal <5%               |
| Rapidité               | $t_{r,5\%} < 0,6s$                    |

## Objectif

- Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

## Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.



Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

$u$  représente la tension de commande du moteur,  $\omega(t)$  son taux de rotation,  $\tau$  et  $k_v$  des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme  $k_q\omega^2$  provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en  $\omega^2$ , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , fréquence de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  et  $u = u_0 + \delta u$  où  $\delta\omega$  et  $\delta u$  représentent des petites variations de  $\omega$  et  $u$  autour du point de fonctionnement.

**Question 1** Déterminer l'équation stationnaire liant  $\omega_0$  et  $u_0$ .

**Question 2** Montrer que l'équation différentielle liant  $\delta\omega$  et  $\delta u$  est de la forme  $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$ . Exprimer  $A$  et  $B$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

On note  $\Delta\Omega(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta\omega$  et  $\Delta U(p)$  celle de  $\delta u$ .

**Question 3** Calculer la fonction de transfert  $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$  du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques  $K_m$  et  $T_m$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

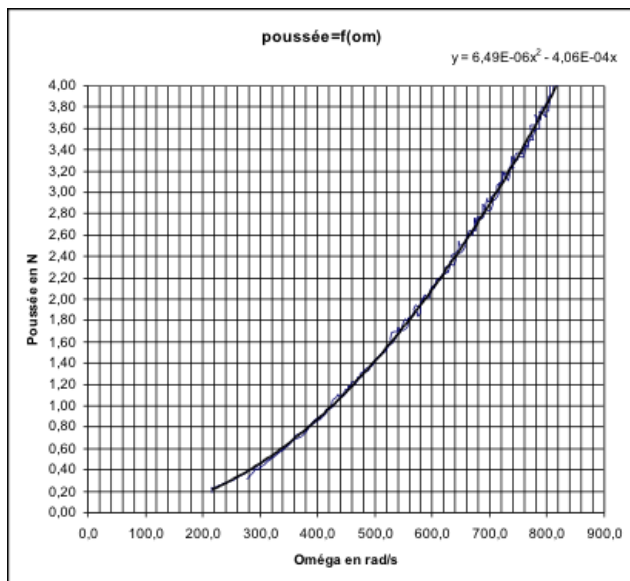
## Recherche du point de fonctionnement

$\omega_0$

Dans le mouvement de déplacement vertical de direction  $\vec{z}$ , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée  $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$ . La masse totale du drone est  $m = 240\text{ g}$ . On prendra  $g = 9,81\text{ ms}^{-2}$ .

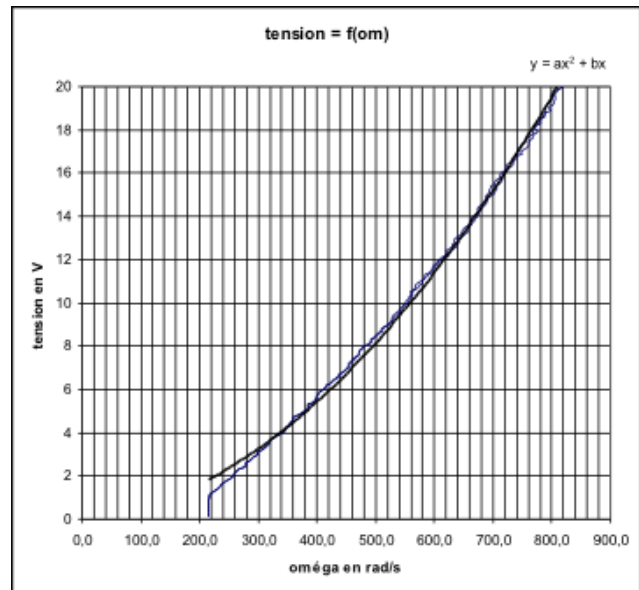
**Question 4** Calculer numériquement la poussée  $F_0$  que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude  $z_0$ .

La poussée  $F$  varie avec  $\omega^2$ . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant  $F$  à la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s.



**Question 5** Déterminer la fréquence de rotation  $\omega_0$  des moteurs en vol stationnaire.

Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande  $u$  et la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s en régime permanent lorsque  $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$ . La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme  $y = ax^2 + bx$ . On donne la constante de temps du moteur :  $\tau = 125\text{ ms}$ .

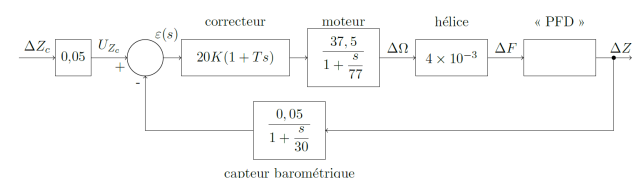


**Question 6** Déterminer l'expression des coefficients  $k_p$  et  $k_q$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\tau$ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$  du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant :  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$ .

## Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , par le schéma-bloc suivant :



Le gain du capteur barométrique est de  $0,05\text{ V m}^{-1}$ . On pose  $z = z_0 + \Delta z(p)$ , la transformée de Laplace de  $\delta Z$ ,  $F = F_0 + \delta F$  représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

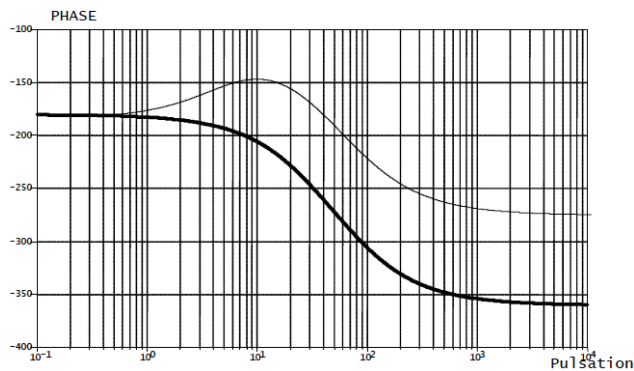
Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire :

$$m\ddot{z} = 4F - mg.$$

**Question 7** Déterminer la fonction de transfert  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$  à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté  $K_{BO} = 2,5K$ . La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée ci-dessous, en gras avec

un correcteur proportionnel ( $T = 0$ ) et en trait fin avec le correcteur retenu ( $K = 1$  et  $T = 0,2$ s).



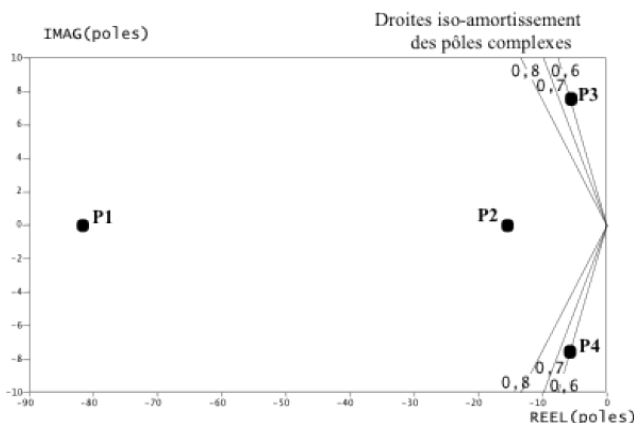
**Question 8** Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur  $T = 0,2$ s et  $K = 1$ . Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000  $\text{rad s}^{-1}$ , le gain sera compris entre  $-120$  dB et 10 dB.

**Question 9** Justifier que pour  $K = 1$ , on a  $\omega = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$ . En déduire graphiquement la marge de phase pour  $K = 1$ . Commenter.

**Question 10** Procéder au réglage du gain  $K$  du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

**Question 11** Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

La figure suivante représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain  $K$  précédemment déterminée.



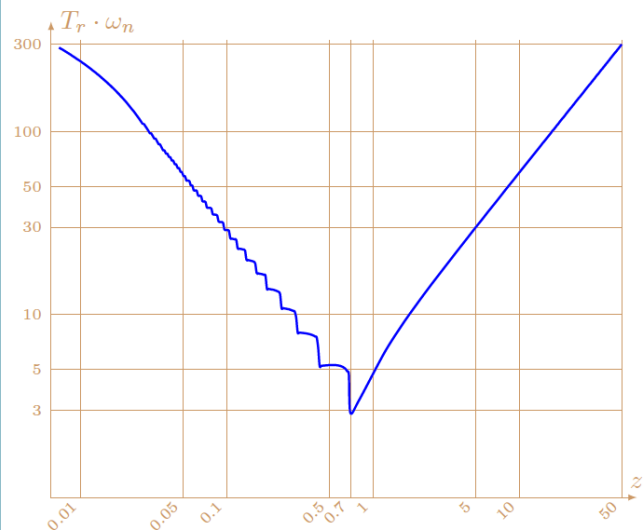
**Question 12** Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

**Question 13** À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

**Question 14** En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

**Question 15** Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre  $\omega_n$  et de coefficient d'amortissement  $\xi < 1$ . En déduire une estimation de la pulsation propre  $\omega_n$  de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

**Question 16** Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.



Pour éventuellement vous aider...

- $-\frac{1}{\tau} \omega_0 - k_q \omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau} u_0 = 0$ ;
- $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q \omega_0$  et  $B = \frac{k_v}{\tau}$ .
- $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q \omega_0}$  et  $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q \omega_0}$ .
- $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6 \text{ N}$
- $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}$
- $k_v = \frac{1}{b}$  (rad/s/V) et  $k_b = \frac{a}{b\tau}$
- $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2} \cdot H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1 + Tp}{\left(1 + \frac{p}{77}\right)\left(1 + \frac{p}{30}\right)}$
- 
- 
- $K = 17,9$ .
- La FTBO est de classe 2, l'erreur de position est donc nulle.
- $p_2 = -15$ ,  $p_3 = -5 + 8j$ ,  $p_4 = -5 - 8j$ .
- $\xi = 0,6$
- 
- $p = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ .  $\omega_n \approx 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
- $t_{5\%} \approx 0,61 \text{ s}$ .

## TD 01

## Corrigé



## Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction  $\vec{z}$ ) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x})$ ) et en tangage (rotation autour de l'axe  $(O, \vec{y})$ ) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ( $\frac{\omega_2}{\omega_4}$  pour le roulis et  $\frac{\omega_1}{\omega_3}$  pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

|                        |                                       |
|------------------------|---------------------------------------|
| Accélération verticale | Vers le haut : 3g                     |
|                        | Vers le bas : 0,5g(en valeur absolue) |
| Précision              | Erreur statique nulle                 |
| Stabilité              | Marge de phase minimale : 35°         |
|                        | Dépassement maximal <5%               |
| Rapidité               | $t_{r,5\%} < 0,6s$                    |

## Objectif

- Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

## Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.

## Drone quadri-rotor

Pole SII Chateaubriand – Joliot Curie

## Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)



Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

$u$  représente la tension de commande du moteur,  $\omega(t)$  son taux de rotation,  $\tau$  et  $k_v$  des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme  $k_q\omega^2$  provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en  $\omega^2$ , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , fréquence de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  et  $u = u_0 + \delta u$  où  $\delta\omega$  et  $\delta u$  représentent des petites variations de  $\omega$  et  $u$  autour du point de fonctionnement.

**Question 17** Déterminer l'équation stationnaire liant  $\omega_0$  et  $u_0$ .

**Question 18** Montrer que l'équation différentielle liant  $\delta\omega$  et  $\delta u$  est de la forme  $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$ . Exprimer  $A$  et  $B$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

On note  $\Delta\Omega(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta\omega$  et  $\Delta U(p)$  celle de  $\delta u$ .

**Question 19** Calculer la fonction de transfert  $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$  du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques  $K_m$  et  $T_m$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

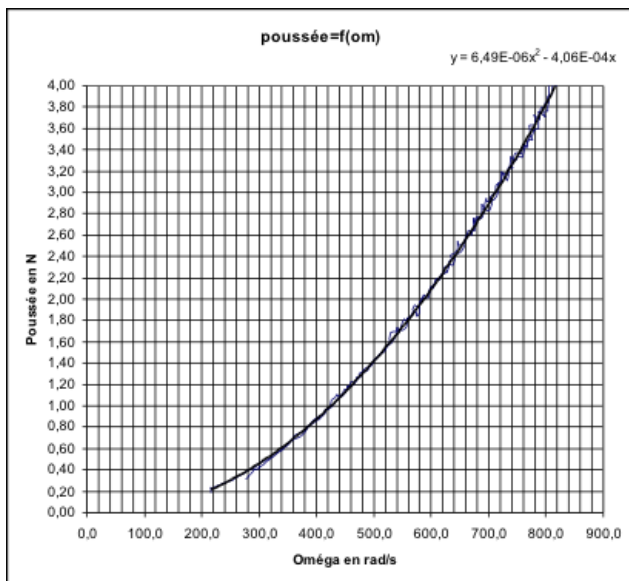
## Recherche du point de fonctionnement

$\omega_0$

Dans le mouvement de déplacement vertical de direction  $\vec{z}$ , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée  $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$ . La masse totale du drone est  $m = 240\text{ g}$ . On prendra  $g = 9,81\text{ ms}^{-2}$ .

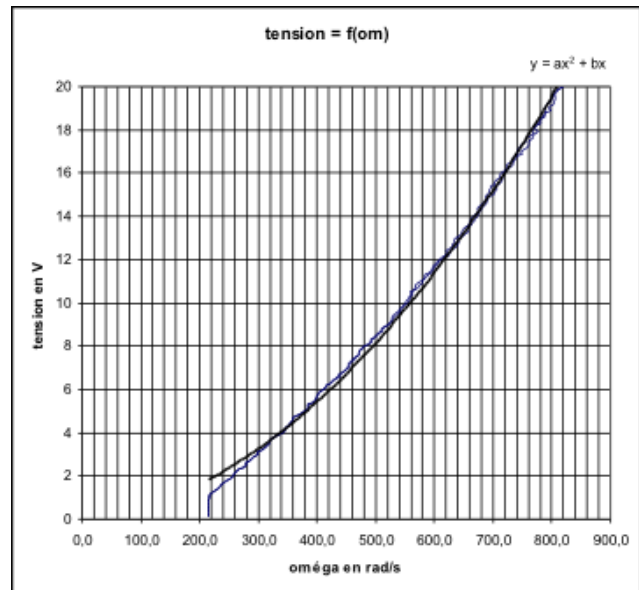
**Question 20** Calculer numériquement la poussée  $F_0$  que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude  $z_0$ .

La poussée  $F$  varie avec  $\omega^2$ . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant  $F$  à la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s.



**Question 21** Déterminer la fréquence de rotation  $\omega_0$  des moteurs en vol stationnaire.

Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande  $u$  et la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s en régime permanent lorsque  $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$ . La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme  $y = ax^2 + bx$ . On donne la constante de temps du moteur :  $\tau = 125\text{ ms}$ .

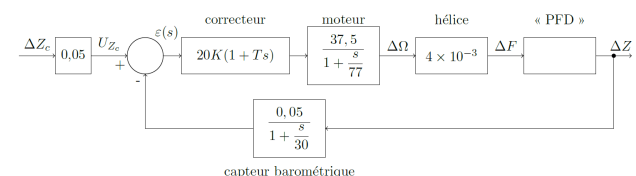


**Question 22** Déterminer l'expression des coefficients  $k_p$  et  $k_q$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\tau$ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$  du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant :  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$ .

## Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , par le schéma-bloc suivant :



Le gain du capteur barométrique est de  $0,05\text{ V m}^{-1}$ . On pose  $z = z_0 + \Delta z(p)$ , la transformée de Laplace de  $\delta Z$ ,  $F = F_0 + \delta F$  représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire :

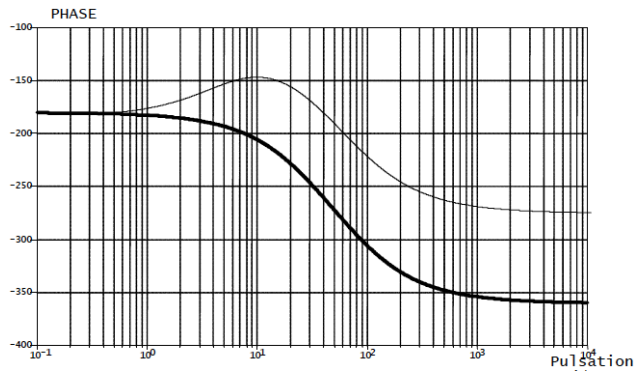
$$m\ddot{z} = 4F - mg.$$

**Question 23** Déterminer la fonction de transfert  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$  à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté  $K_{BO} = 2,5K$ . La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée ci-dessous, en gras avec



un correcteur proportionnel ( $T = 0$ ) et en trait fin avec le correcteur retenu ( $K = 1$  et  $T = 0,2$ s).



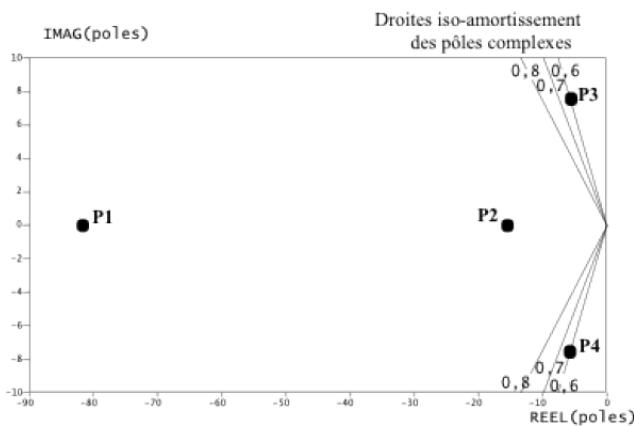
**Question 24** Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur  $T = 0,2$ s et  $K = 1$ . Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000  $\text{rad s}^{-1}$ , le gain sera compris entre  $-120$  dB et 10 dB.

**Question 25** Justifier que pour  $K = 1$ , on a  $\omega = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$ . En déduire graphiquement la marge de phase pour  $K = 1$ . Commenter.

**Question 26** Procéder au réglage du gain  $K$  du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

**Question 27** Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

La figure suivante représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain  $K$  précédemment déterminée.



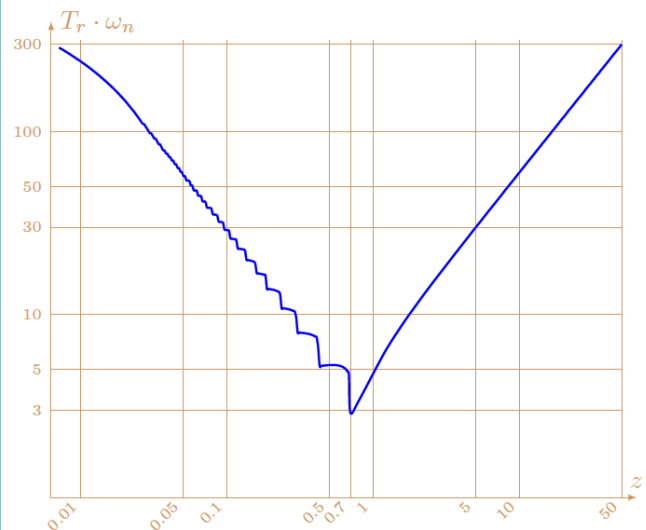
**Question 28** Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

**Question 29** À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

**Question 30** En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

**Question 31** Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre  $\omega_n$  et de coefficient d'amortissement  $\xi < 1$ . En déduire une estimation de la pulsation propre  $\omega_n$  de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

**Question 32** Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.



Pour éventuellement vous aider...

- $-\frac{1}{\tau} \omega_0 - k_q \omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau} u_0 = 0$ ;
- $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q \omega_0$  et  $B = \frac{k_v}{\tau}$ .
- $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q \omega_0}$  et  $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q \omega_0}$ .
- $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6 \text{ N}$
- $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}$
- $k_v = \frac{1}{b}$  (rad/s/V) et  $k_b = \frac{a}{b\tau}$
- $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2} \cdot H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1 + Tp}{\left(1 + \frac{p}{77}\right)\left(1 + \frac{p}{30}\right)}$
- 
- 
- $K = 17,9$ .
- La FTBO est de classe 2, l'erreur de position est donc nulle.
- $p_2 = -15$ ,  $p_3 = -5 + 8j$ ,  $p_4 = -5 - 8j$ .
- $\xi = 0,6$
- 
- $p = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ .  $\omega_n \approx 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
- $t_{5\%} \approx 0,61 \text{ s}$ .