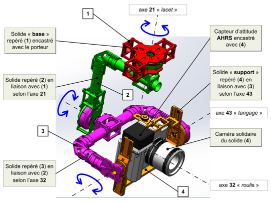
TD 1



Stabilisateur actif d'image ⋆

Mines Ponts 2018 – PSI

Savoirs et compétences :

Mise en situation

Objectif Suite à une sollicitation brève de 0,5 m s^{-2}, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les 0,5°.

Travail demandé

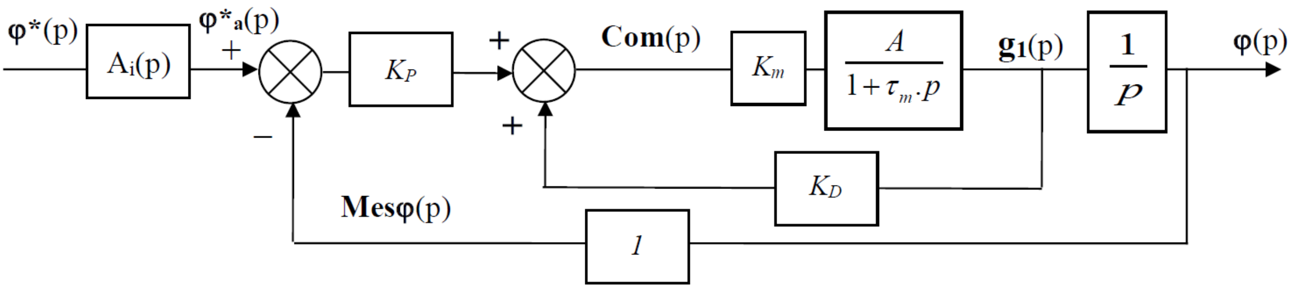
On considère un modèle de l'axe de tangage sans perturbation et qui reçoit des consignes assez rapides modélisées par des échelons. L'ensemble {moteur, charge} ne présente pas de réducteur. Il est modélisé par un ensemble en série de deux fonctions de transfert :

- un gain pur de valeur K_m ;
- une fonction de transfert du premier ordre de gain statique A et de constante de temps τ_m.

Cet ensemble présente comme entrée la commande du moteur com(t) et comme sortie la vitesse angulaire de rotation du moteur $\omega_m(t)$. Le réglage retenu est tel que $K_m A = 1$. **Le retour K_D agit par un sommateur.**

Enfin, lors de mouvement brusque de la caméra, on souhaite arriver progressivement sur la scène finale sans choc ni oscillation mais avec précision. Ainsi, la commande peut être modifiée selon 3 cas de fonctionnements :

- $A_1(p) = 1$: pas de traitement;
- $A_2(p) = \dfrac{1}{\tau_0 p}\left(1 - e^{-\tau_0 p}\right)$: fonction rampe de pente 1 pour rejoindre la valeur finale;
- $A_3(p) = \dfrac{1}{1+\tau_0 p}$: fonction de transfert du premier ordre de constante de temps τ (filtre passe-bas).



Modèle 1 de l'axe de tangage

Question 1 *Avec $K_m A = 1$, calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).*

Correction **Attention au signe du comparateur de la boucle inbriquée!**

On définit la FTBO par $\text{FTBO}(p) = \dfrac{\varepsilon(p)}{\text{Mes}\varphi(p)}$ avec $\varepsilon(p)$ la sortie du premier comparateur.

On a d'une part $G(p) = \dfrac{\dfrac{K_m A}{1+\tau_m p}}{1 - \dfrac{K_m A K_D}{1+\tau_m p}} = \dfrac{K_m A}{1+\tau_m p - K_m A K_D}$. On a alors $\text{FTBO}(p) = \dfrac{K_m A K_P}{p\left(1+\tau_m p - K_m A K_D\right)}$.

Si on définit la FTBF par FTBF(p) $= \dfrac{\varphi(p)}{\varphi^{\star}(p)}$, on a FTBF(p) $= A_i(p)\dfrac{\dfrac{K_m A K_P}{p\left(1+\tau_m p - K_m A K_D\right)}}{1+\dfrac{K_m A K_P}{p\left(1+\tau_m p - K_m A K_D\right)}}$

$= A_i(p)\dfrac{K_m A K_P}{p\left(1+\tau_m p - K_m A K_D\right)+K_m A K_P}$.

Au final, FTBO$(p) = \dfrac{K_P}{p\left(1+\tau_m p - K_D\right)}$ et FTBF$(p) = A_i(p)\dfrac{K_P}{p\left(1+\tau_m p - K_D\right)+K_P}$.

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas : $A_1(p)=1$.

Question 2 *Quelle est la valeur maximale de K_D pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).*

Correction Pour que le système soit stable, tous les coefficients du dénominateur $D(p)$ de la FTBF doivent être de même signe (ainsi toutes les racines sont à partie réelle négative). On a $D(p) = p\left(1+\tau_m p - K_D\right)+K_P = \tau_m p^2 p + (1-K_D)p + K_P$ et donc nécessairement, $1-K_D > 0$ et $K_D < 1$.

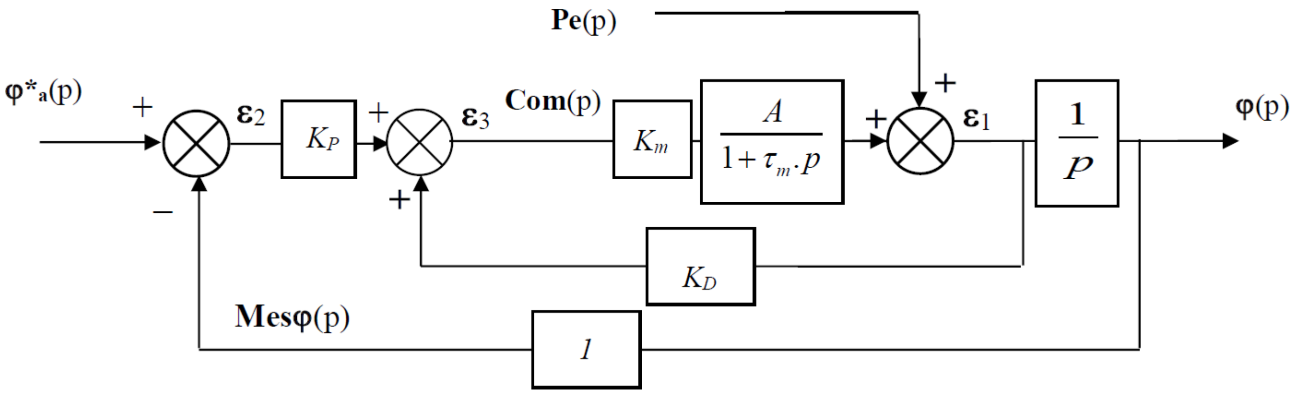
En accord avec les résultats précédents, on fixe $K_D = 0,5$ et $\tau_m = 0,2\,\text{s}$. Dans un premier temps on impose $K_P = 10\,\text{s}^{-1}$.

Question 3 *Lorsque $A_i(p)=1$, le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.12 « Maîtriser les déplacements » : « les mouvements de caméra doivent être réalisés avec départ rapide et arrivée lente sans aucun dépassement ».*

Correction On a : FTBF$(p) = \dfrac{K_P}{p+\tau_m p^2 - K_D p + K_P} = \dfrac{K_P}{\dfrac{\tau_m}{K_p}p^2 + p\dfrac{1-K_D}{K_P}+1}$.

On a alors $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_P}{\tau_m}}$ et $\xi = \dfrac{\dfrac{1-K_D}{K_P}\sqrt{\dfrac{K_P}{\tau_m}}}{2} = \dfrac{1-K_D}{2\sqrt{K_P \tau_m}} = \dfrac{0,5}{2\sqrt{2}} < 1$. Il y a donc du dépassement. L'exigence n'est pas vérifiée.

Dans un second temps on se place en mode stabilisation. On s'intéresse toujours au comportement de l'axe de tangage mais sans le filtre passe bas ($A_1(p)=1$). On considère ici que la consigne est constante donc $\varphi_a^*(t)=0$. Une perturbation Pe(p) agit au niveau de l'ensemble (moteur, charge) modélisée sur le schéma bloc (Modèle 2). On appelle Com(p) la transformée de Laplace de la commande du moteur com(t).



Modèle 2 de l'axe de tangage

Question 4 *Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert qui lie la commande du Stab$(p) = \dfrac{Com(p)}{Pe(p)}$ qui lie à la perturbation.*

Correction On a $\varepsilon_2(p) = -\text{Mes}\left(\varphi(p)\right) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p)\dfrac{1}{p}$. Par ailleurs, $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p)+\varepsilon_3(p)\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}$. Enfin,

$\varepsilon_3(p)=K_P\varepsilon_2(p)+K_D\varepsilon_1(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p)=\varepsilon_1(p)\left(K_D-\dfrac{K_P}{p}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_1(p)=\varepsilon_3(p)\dfrac{1}{K_D-\dfrac{K_P}{p}}$.

On a donc $\varepsilon_3(p)\dfrac{1}{K_D-\dfrac{K_P}{p}}=\text{Pe}(p)+\varepsilon_3(p)\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_3(p)\left(\dfrac{p}{pK_D-K_P}-\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}\right)=\text{Pe}(p)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_3(p)\dfrac{p\left(1+\tau_m p\right)-AK_m\left(pK_D-K_P\right)}{\left(pK_D-K_P\right)\left(1+\tau_m p\right)}=\text{Pe}(p)$.

On a donc $\text{Stab}(p)=\dfrac{\text{Com}(p)}{\text{Pe}(p)}=\dfrac{\left(pK_D-K_P\right)\left(1+\tau_m p\right)}{p\left(1+\tau_m p\right)-AK_m\left(pK_D-K_P\right)}$.

Question 5 *Avec le modèle 2 et une entrée $Pe(p)$ échelon unitaire, déterminer la limite quand t tend vers l'infini de la commande : $com(t)$. Quel sens physique donner à ce résultat ?*

Correction On a $\lim\limits_{t\to\infty}\text{com}(t)=\lim\limits_{p\to 0}p\text{Com}(p)=\lim\limits_{p\to 0}p\text{Stab}(p)\text{Pe}(p)=\lim\limits_{p\to 0}p\text{Stab}(p)\text{Pe}(p)$

$=\lim\limits_{p\to 0}p\dfrac{1}{p}\dfrac{\left(pK_D-K_P\right)\left(1+\tau_m p\right)}{p\left(1+\tau_m p\right)-AK_m\left(pK_D-K_P\right)}=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{-K_P}{AK_mK_P}=-1$ si $AK_m=1$.

Ainsi, pour une perturbation angulaire dans un autre sens, le système commande les moteurs avec une consigne dans le sens opposé.

Question 6 *Avec le modèle 2 déterminer la FTBO $\dfrac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$ de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie $Pert(p)=\dfrac{\varphi(p)}{Pe(p)}$.*

Correction On a $\dfrac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}=\dfrac{K_mAK_P}{p\left(1+\tau_m p-K_mAK_D\right)}$ (c'est la même que pour le premier modèle).

On a vu que $\varepsilon_2(p)=-\text{Mes}\left(\varphi(p)\right)=-\varphi(p)=-\varepsilon_1(p)\dfrac{1}{p}$. Par ailleurs, $\varepsilon_1(p)=\text{Pe}(p)+\varepsilon_3(p)\dfrac{AK_m}{1+\tau_m p}$. Enfin, $\varepsilon_3(p)=K_P\varepsilon_2(p)+K_D\varepsilon_1(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p)=\varepsilon_1(p)\left(K_D-\dfrac{K_P}{p}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_1(p)=\varepsilon_3(p)\dfrac{1}{K_D-\dfrac{K_P}{p}}$.

Question 7 *Déterminer la valeur lorsque t tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?*

Correction

Question 8 *On désire une marge de gain de $M_G \geq 5\,\text{dB}$ et une marge de phase $M\varphi \geq 20°$ (OU 40 ?) (exigence 1.14 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de K_P en utilisant les données ci-dessous.*

ω(rad/s)	1	2,5	5	7	10
$Arg\left(\dfrac{1}{j.\omega}.\dfrac{2}{(1+0.4.j.\omega)}\right)$	-112°	-135°	-153°	-160°	-166°
$20.\log\left\|\dfrac{1}{j.\omega}.\dfrac{2}{(1+0.4.j.\omega)}\right\|$	5,4 dB	3 dB	-1 dB	-3 dB	-6.2 dB

Correction

Le document réponse présente la réponse temporelle de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale (due par exemple au vent qui crée un balancement de la GYRCAM).

Question 9 *Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.13 « Perturbations » du DOCUMENT D5-a et justifier le tracé de Com(t) relativement à Pe(t) en utilisant le résultat de la question 28****.*

Correction

Afin d'améliorer le comportement, un autre réglage a été effectué, ce qui donne sur le document réponse un nouveau tracé.

Question 10 *Analyser comparativement ce nouveau tracé. Quel(s) réglage(s) ont été fait(s) ? Quelle est l'amélioration principale obtenue ?*

Correction

Éléments de corrigé

1. .
2. .