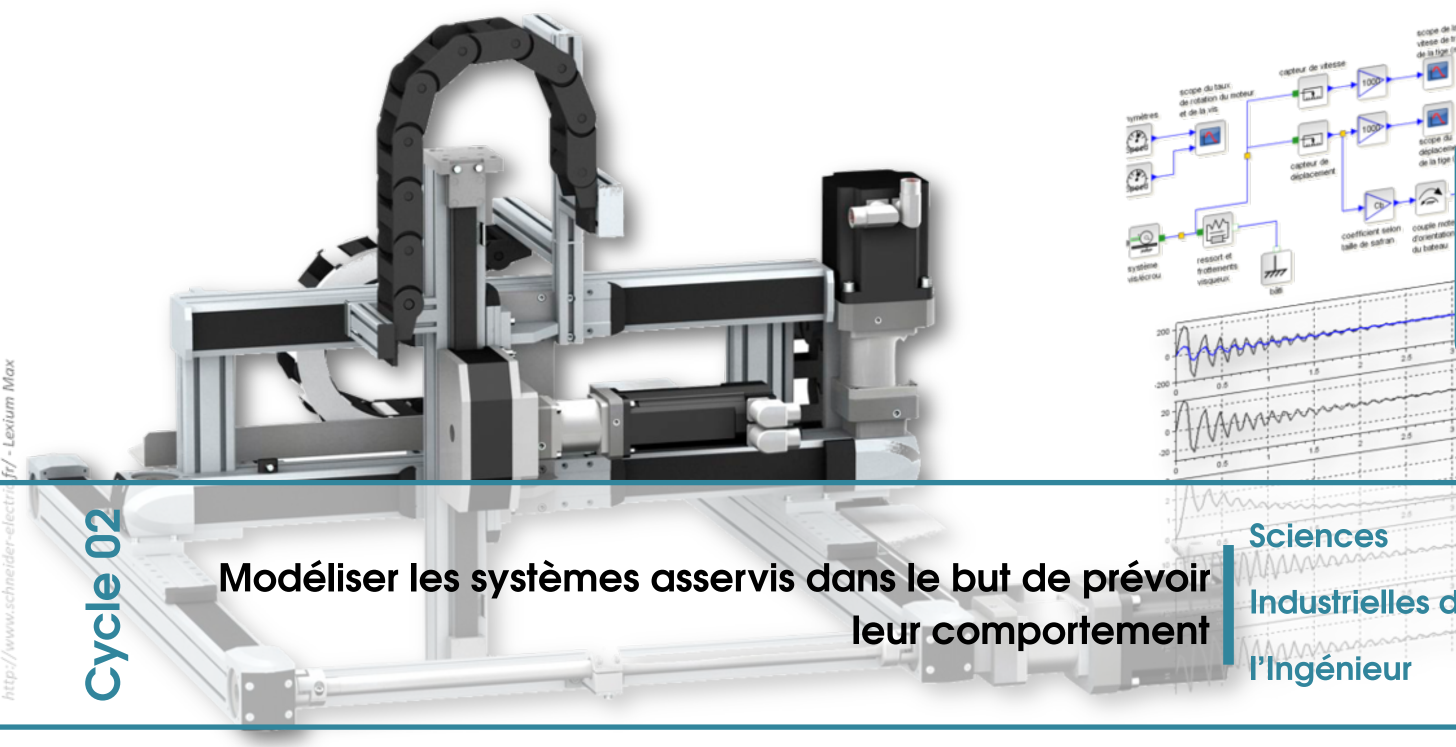


Cycle 02

Modéliser les systèmes asservis dans le but de prévoir leur comportement

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

PSI⋆ – MP

Cours

Chapitre 1
Stabilité des systèmes

Savoirs et compétences :

- *Mod3.C2 : pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle : principe, justification*
- *Res2.C4 : stabilité des SLCI : définition entrée bornée – sortie bornée (EB – SB)*
- *Res2.C5 : stabilité des SLCI : équation caractéristique*
- *Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe*
- *Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)*

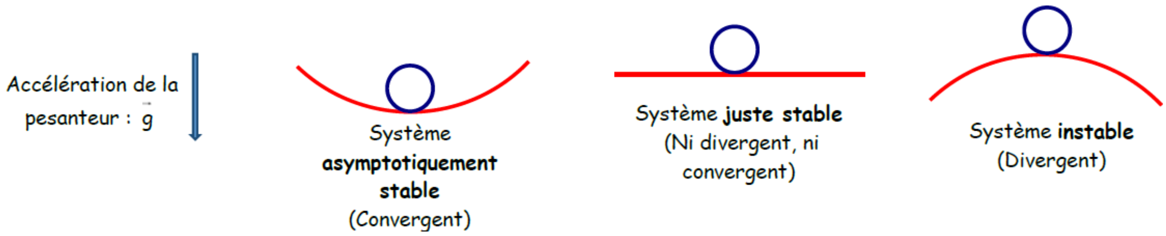
1 Notion de stabilité 2
1.1 Représentation graphique (1) 2
1.2 Premières définitions 2
1.3 Étude des pôles de la fonction de transfert 2
1.4 Position des pôles dans le plan complexe 3
1.5 Pôles dominants (1) 3
1.6 Caractéristiques dans le lieu de pôles 4
2 Marges de stabilité 4
2.1 Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez... 4
2.2 Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh 4
2.3 Critère graphique de stabilité : le critère du Revers 4
2.4 Vers le système réel... 5
1 8
2 8
3 8
4 8
5 8
1 9
2 9
3 10
4 10
5 10
1 12
2 12
3 12
4 12
1 14
2 14
3 14
4 15

SoloWheel Orbit.

1 Notion de stabilité

1.1 Représentation graphique (1)

Un état d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre par une cause extérieure, finit par retrouver ce même état d'équilibre après disparition de la cause. Illustrons cette définition de façon très intuitive à travers l'exemple suivant : une boule soumise à l'accélération de la pesanteur se déplaçant (avec un peu de dissipation énergétique) sur une surface donnée.



1.2 Premières définitions

Définition — Définition intuitive. Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :
- abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre ;
- son régime transitoire finit par disparaître ;
- sa sortie finit par ressembler à l'entrée ;
- sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

R La stabilité d'un système **est indépendante** de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionnelle (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...
Pour simplifier les calculs, une première approche pourra être d'utiliser la réponse impulsionnelle.

Définition En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro au cours du temps.

1.3 Étude des pôles de la fonction de transfert

Dans le cas général la fonction de transfert d'un système peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } n \geq m.$$

Lors du calcul de la réponse temporelle en utilisant la transformée de Laplace inverse (quelle que soit l'entrée), la nature du régime transitoire ne dépend que des pôles $p_i$de la fonction de transfert (zéros du dénominateur).

En factorisant le numérateur et le dénominateur de $H(p)$ on peut alors retrouver une fonction de la forme :

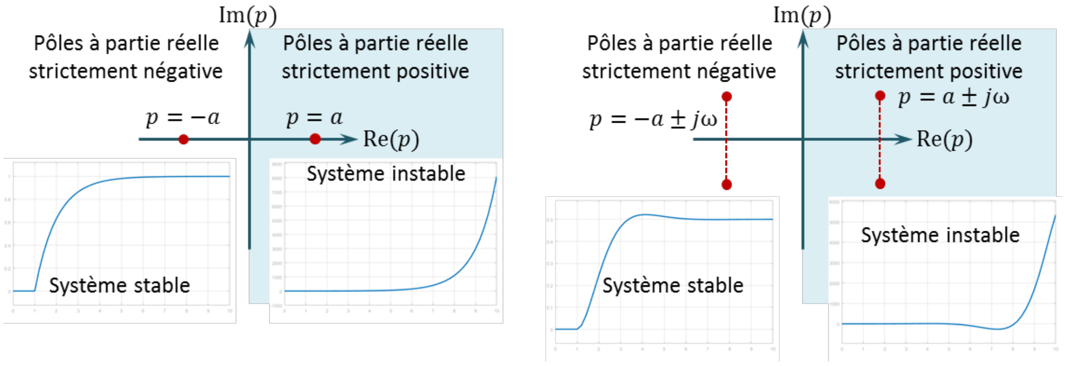
$$H(p) = \frac{(p+z_m)\cdot(p+z_{m-1})...}{(p+p_n)\cdot(p+p_{n-1})...} \quad \text{avec } p_i, z_i \in \mathbb{C}.$$

En passant dans le domaine temporel :
- les pôles réels (de type $p = -a$) induisent des modes [1] du type e^{-at} ;
- les pôles complexes conjugués (de type $p = -a \pm j\omega$) induisent des modes du type $e^{-at} \sin \omega t$.

On peut ainsi constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.

Ainsi, on peut observer la réponse temporelle des systèmes en fonction du positionnement des pôles dans le plan complexe.

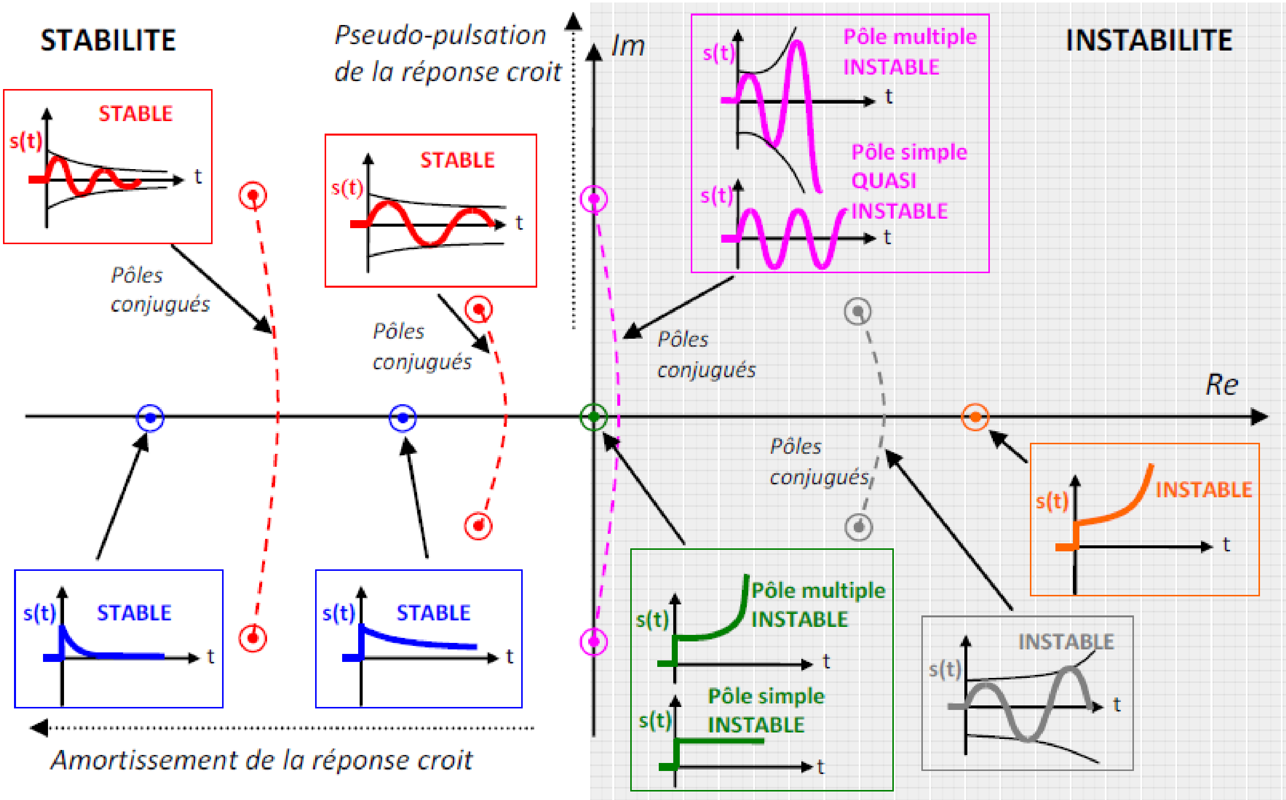
1. mode : fonction temporelle associée à un pôle



Représentation d'un système à pôle simple et à pôles conjugués dans le plan complexe – Réponse indicielle

1.4 Position des pôles dans le plan complexe

Par extension on peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicielle associée.



Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système [2].

Définition — À retenir. Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (**en boucle fermée**) sont à partie réelle strictement négative.

R On peut montrer que :

- **pour les systèmes d'ordre 1 et 2 :** le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe;
- **pour les systèmes d'ordre 3 :** de la forme $a_0+a_1p+a_2p^2+a_3p^3$ les coefficients doivent être strictement de même signe et $a_2a_1>a_3a_0$.

1.5 Pôles dominants (1)

Lors de l'étude d'un système, on se contente en général de ne prendre en compte que les pôles les plus influents. Ces pôles sont appelés les pôles dominants. Pour un système asymptotiquement stable, ce sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires, puisque ce sont eux qui induisent des modes qui disparaissent dans le temps le plus lentement.

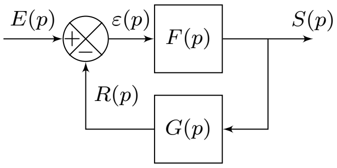
1.6 Caractéristiques dans le lieu de pôles

Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [**1**].

2 Marges de stabilité

2.1 Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...

Soit le schéma-blocs suivant :



La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par $H_{BO} = \dfrac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)G(p)$.

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $H_{BF} = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{F(p)}{1+F(p)G(p)} = \dfrac{F(p)}{1+H_{BO}(p)}$.

Définition — Équation caractéristique. Soit $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ une fonction de transfert. On appelle $D(p) = 0$ l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de $D(p)$ correspondent aux pôles de $H(p)$.

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera $1 + H_{BO}(p) = 0$**.**

2.2 Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh

Pour un système d'ordre supérieur à 3 il devient délicat d'obtenir analytiquement (ou numériquement) les racines du polynôme et ainsi conclure sur la stabilité à partir du signe des parties réelles.

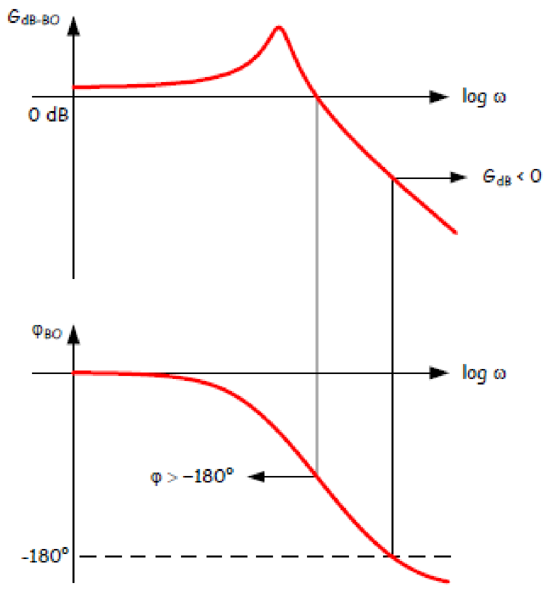
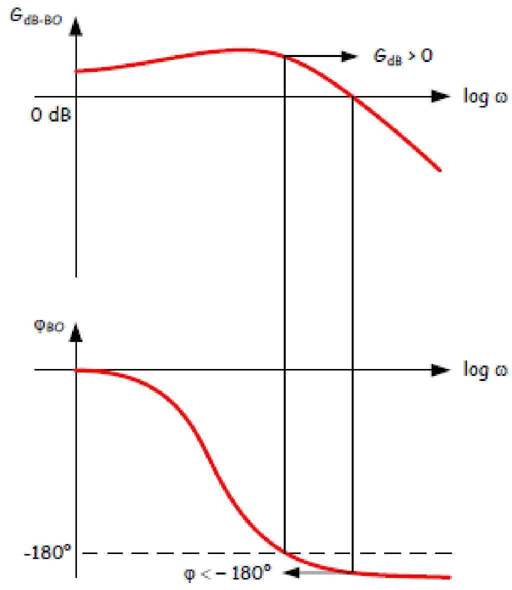
Il existe un critère algébrique permettant de vérifier la stabilité d'un système : il s'agit de critère de Routh. Pour un système bouclé, ce critère utilise le dénominateur de la BF. Ce critère n'étant pas au programme, on pourra rechercher dans la littérature des articles s'y référant si nécessaire.

2.3 Critère graphique de stabilité : le critère du Revers

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme $1 + H_{BO}(p) = 0$. Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation $H_{BO}(p) = -1$. Ainsi dans le plan complexe, le point $(-1;0)$ permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain de 1) et une phase de $-180°$.

Résultat Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a** :

$$G_{\mathrm{dB}}\big|_{\omega=\omega(-180°)} < 0_{\mathrm{dB}} \quad \text{et} \quad \varphi\big|_{\omega=\omega(0\mathrm{dB})} > -180°.$$

Système asymptotiquement stable en BF	Système instable en BF
	
$G_{dB}\big\|_{\omega=\omega(-180°)} < 0$ et $\varphi\big\|_{\omega=\omega(0dB)} > -180°$	$G_{dB}\big\|_{\omega=\omega(-180°)} > 0$ ou (ici les deux) $\varphi\big\|_{\omega=\omega(0dB)} < -180°$

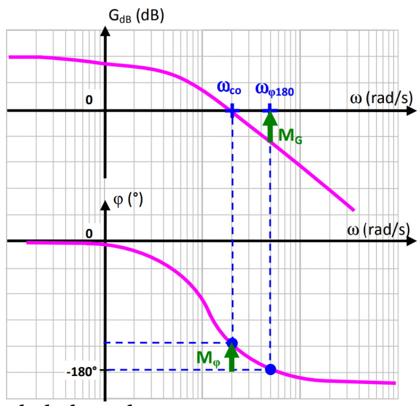
2.4 Vers le système réel...

Le résultat donné ci-dessus est un résultat théorique dans le sens ou le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système réel aura un écart avec le diagramme de Bode du système modélisé.

Résultat — Marges. Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considèrera, dans le cas général que le système est stable si :
- la marge de gain est supérieure à 10 dB ;
- la marge de phase est supérieure à 45°.

Définition — Marge de phase. La marge de phase est définie telle que $M_\varphi = 180° + \arg\left(\text{FTBO}(j\omega_{co})\right)$ où ω_{co} est la pulsation de coupure pour laquelle $\left|\text{FTBO}\left(j\omega_{co}\right)\right| = 0\,\text{dB}$.

Définition — Marge de gain. La marge de gain est définie telle que $M_G = -20\log\left|\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})\right|$ où $\omega_{\varphi180}$ est la pulsation pour laquelle $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi180})) = -180°$.



La marge de gain permet compte de tenir compte de variations de gain de la boucle ouverte.
De même, la marge de phase permet de tenir compte de variation de phase (retard ou déphasage non modélisés).
La nécessité d'avoir recours à des marges de stabilité apparaît notamment lorsque :
- la simplification du modèle amène à considérer uniquement les pôles dominant,
- le modèle ne prend pas en compte la dynamique de certains composants du système ;
- le système n'est pas invariant au cours du temps ;

- on s'éloigne de la zone de fonctionnement linéaire ;
- certaines non linéarités sont ignorées.

Références

[1] Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.*

[2] Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse,* `http://florestan.mathurin.free.fr/`.

Cycle 02

Modéliser les systèmes asservis dans le but de prévoir leur comportement

Chapitre 1 – Stabilité des systèmes

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

PSI★ – MP

Activation

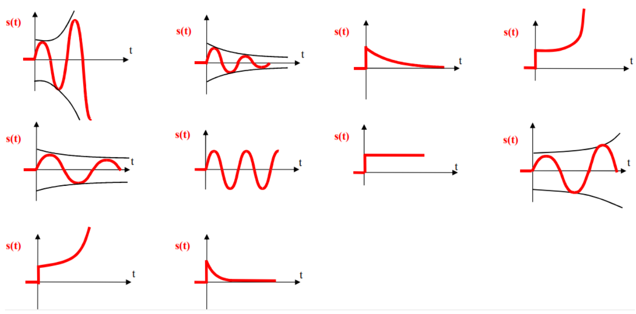
Activation

Patrick Dupas, http://patrick.dupas.chez-alice.fr/.

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe*
- ❒ *Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)*

Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)



Question *Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.*

Exercice 2 – Pôles de la FTBF

On donne les pôles des FTBF de plusieurs systèmes :

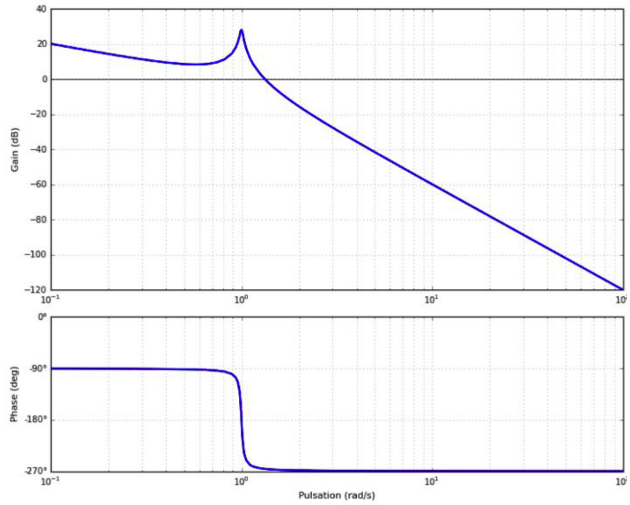
1. $-1, -2$;
2. $-3, -2, 0$;
3. $-2+j, -2-j, 2j, -2j$;
4. $-2+3j, -2-3j, -2$;
5. $-j, j, -1, 1$;
6. $-1, +1$;
7. $-1+j, -1-j$;
8. $2, -1, -3$;
9. $-6, -4, 7$.

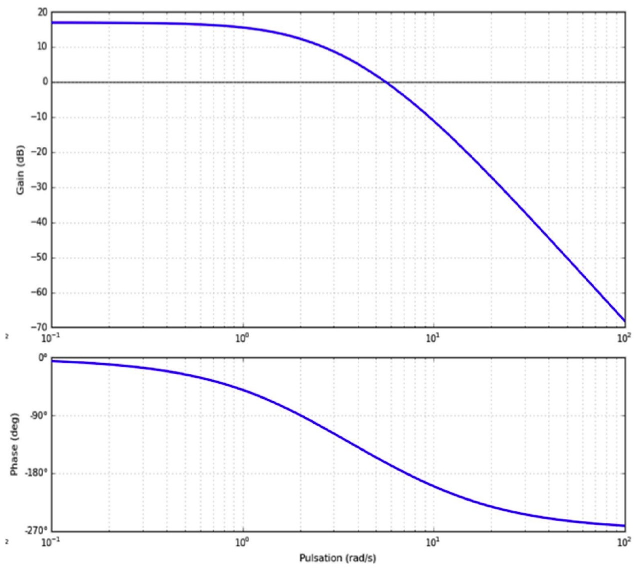
Question *Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.*

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question *On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.*

Question *Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.*

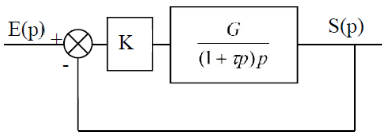




Exercice 4 – Étude de la stabilité

Objectif
- Caractériser la stabilité d'un système à partir de la FTBO.
- La marge de gain est supérieure à 10 dB et que la marge de phase est supérieure à 45 °.

On donne le schéma bloc suivant :



On a $K=1$, $\tau=0,1$ et $G=20$.

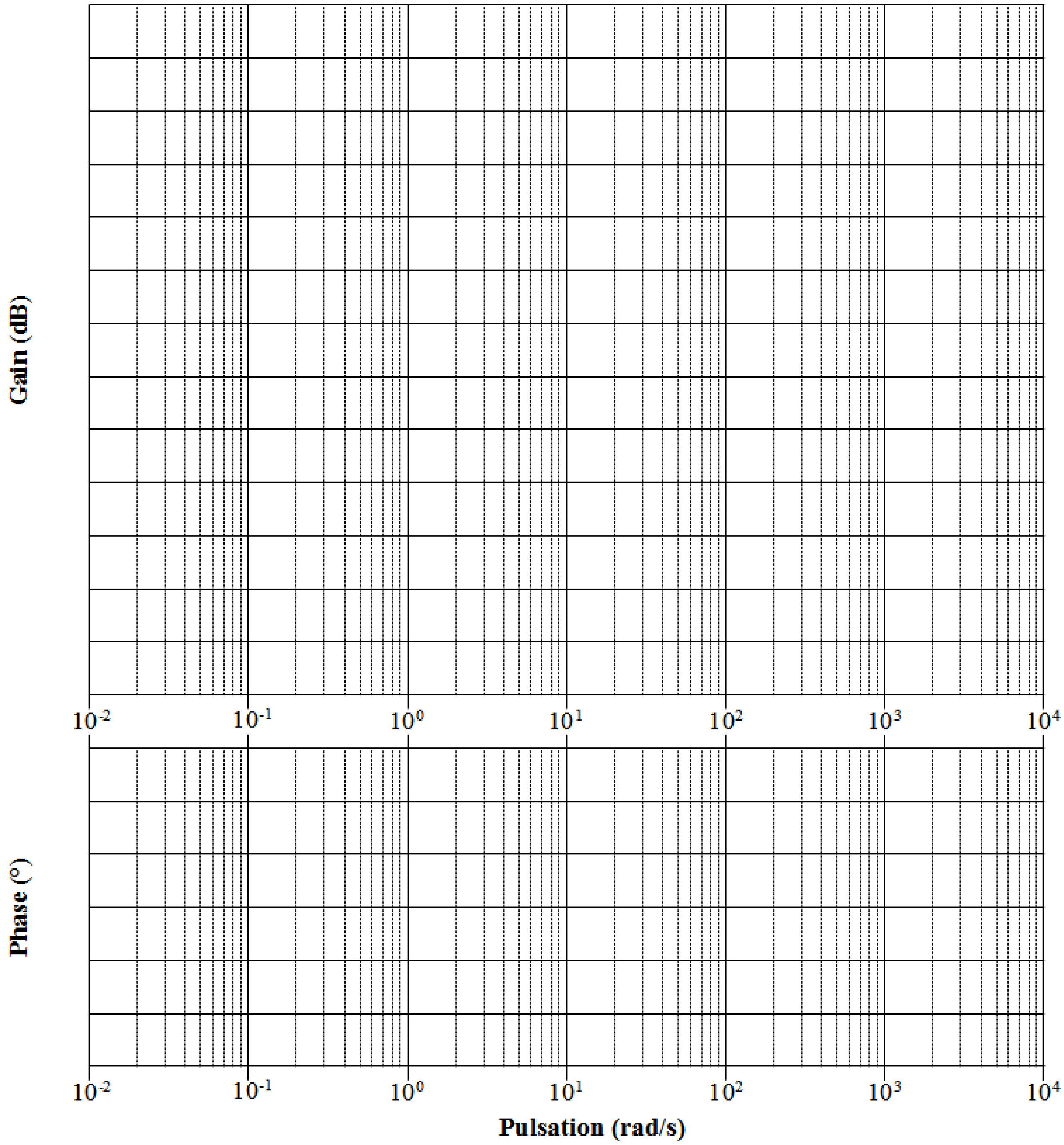
Question 1 *Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.*

Question 2 *Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.*

Question 3 *Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.*

Question 4 *Confirmer ces résultats par le calcul.*

Question 5 *Conclure par rapport au cahier des charges.*



Activation Corrigé

Activation

Patrick Dupas, http://patrick.dupas.chez-alice.fr/.

Savoirs et compétences :

- *Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe*
- *Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)*

Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

Question *Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.*

Exercice 2 – Pôles de la FTBF

Question *Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.*

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question *On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.*

Question *Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.*

Exercice 4 – Étude de la stabilité

On a $K=1$, $\tau=0,1$ et $G=20$.

Question 1 *Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.*

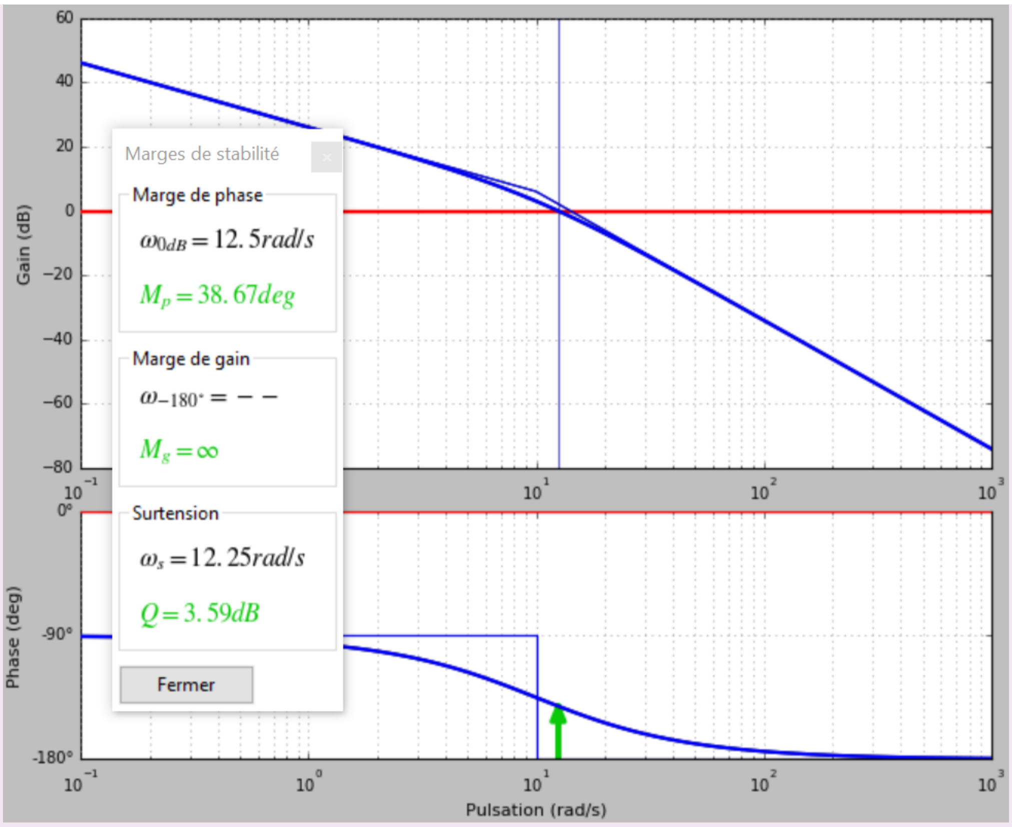
Correction Ici on a $\varepsilon(p)=\dfrac{E(p)}{1+FTBO(p)}$.

Erreur statique (entrée échelon) : $\varepsilon_s = \lim\limits_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=\lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p)=\lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{1+\dfrac{20}{(1+0,1p)p}}=0$

Erreur trainage (entrée rampe) : $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=\lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p)=\lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{p^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{20}{(1+0,1p)p}}=1/20$

Question 2 *Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.*

Correction



Question 3 *Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.*

Correction

Question 4 *Confirmer ces résultats par le calcul.*

Correction
La phase ne coupe jamais l'axe des abscisses. Ainsi, La marge de gain n'est pas définie (elle est infinie). Pour déterminer la marge de phase analytiquement :

1. On cherche ω_c tel que $G_{\text{dB}}(\omega_c)=0$;
2. On calcule $\varphi(\omega_c)$;
3. La marge de phase est de $\varphi(\omega_c)-(-180)$.

Cherchons ω_c tel que $G_{\text{dB}}(\omega_c)=0$. On a $FTBO(j\omega)=\dfrac{20}{(1+0,1j\omega)j\omega}=\dfrac{20}{j\omega-0,1\omega^2}$. $20\log|FTBO(j\omega)|=20\log 20-20\log\sqrt{\omega^2+0,01\omega^4}=20\log 20-20\log\omega\sqrt{1+0,01\omega^2}$.

$G_{\text{dB}}(\omega_c)=0 \Leftrightarrow 20=\omega_c\sqrt{1+0,01\omega_c^2} \Leftrightarrow 400=\omega_c^2\left(1+0,01\omega_c^2\right)$ On pose $x=\omega_c^2$ et on a : $400=x(1+0,01x)\Leftrightarrow x^2+100x-40000=0$. On a donc $\Delta=412,3^2$ et $x_{1,2}=\dfrac{-100\pm 412,3}{2}$ on conserve la racine positive et $x_1=156,15$ et $\omega_c=12,5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

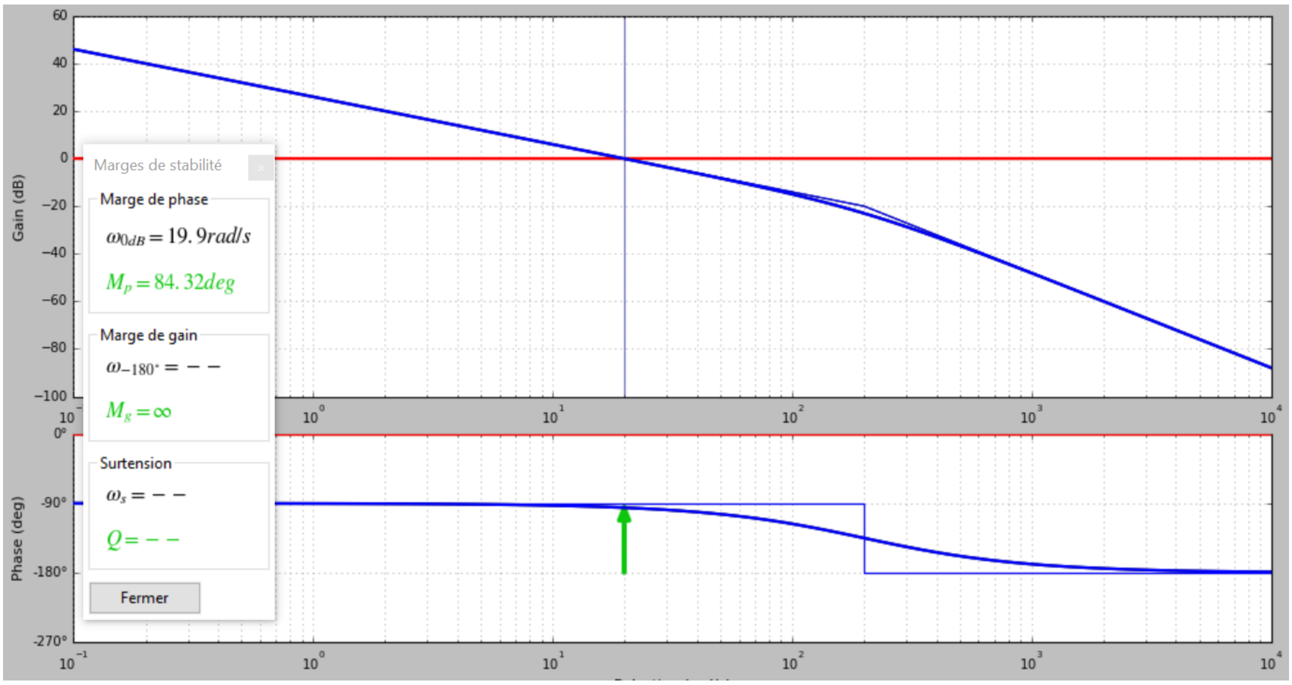
$\varphi(\omega_c)=\arg(20)-90-\arg\left(1+0,1j\omega_c\right)=0-90-\arctan(0,1\omega_c)=0-90-51,34=-141,34°$.

La marge de phase est donc de 38,66°.

Question 5 *Conclure par rapport au cahier des charges.*

Correction Le système ne sera pas stable vis-à-vis du cahier des charges.

Pour $\tau=0,005$


Marges de stabilité
Marge de phase
$\omega_{0dB} = 19.9 rad/s$
$M_p = 84.32 deg$
Marge de gain
$\omega_{-180^\circ} = --$
$M_g = \infty$
Surtension
$\omega_s = --$
$Q = --$
Fermer
Gain (dB)
Phase (deg)

Application

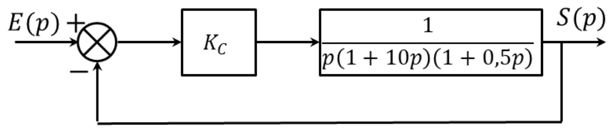
Application

Xavier Pessoles

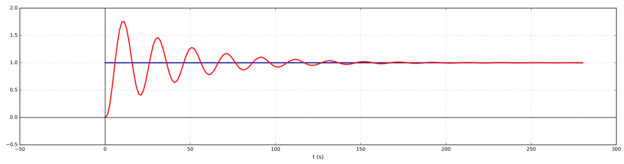
Savoirs et compétences :

- ❒ *Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe*
- ❒ *Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)*

On considère le schéma-blocs suivant.



On donne ci-dessous la réponse indicielle pour $K_C = 1$.

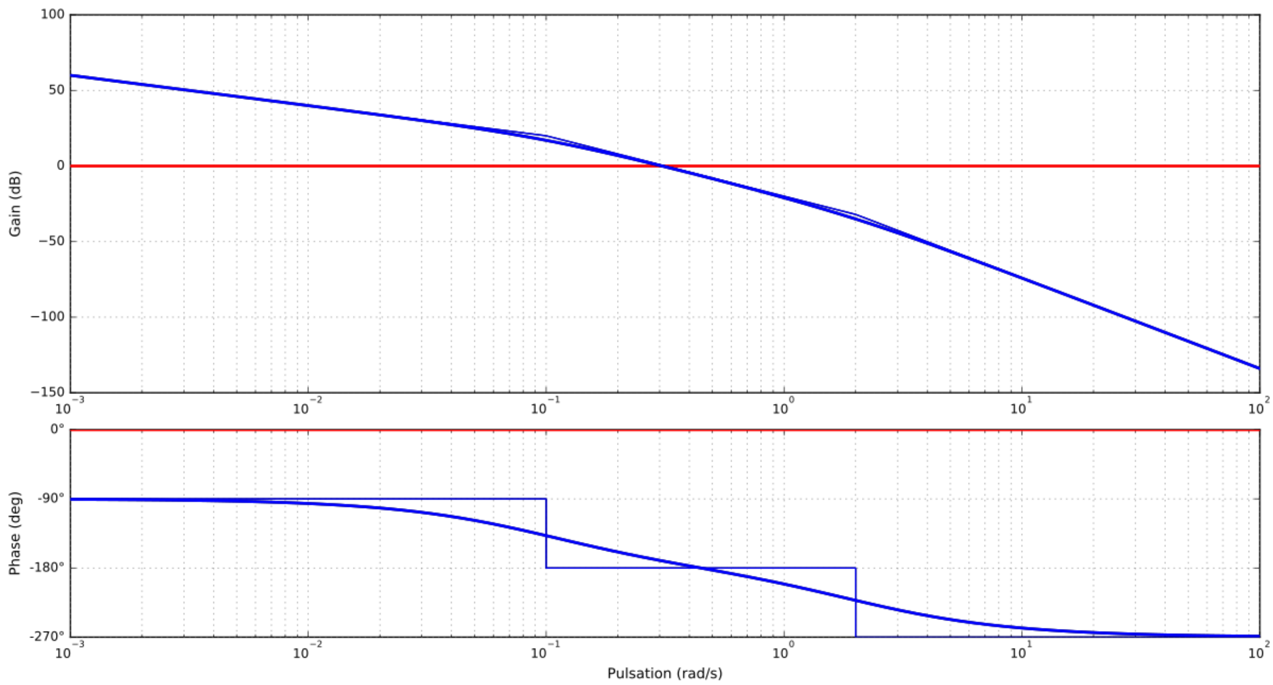


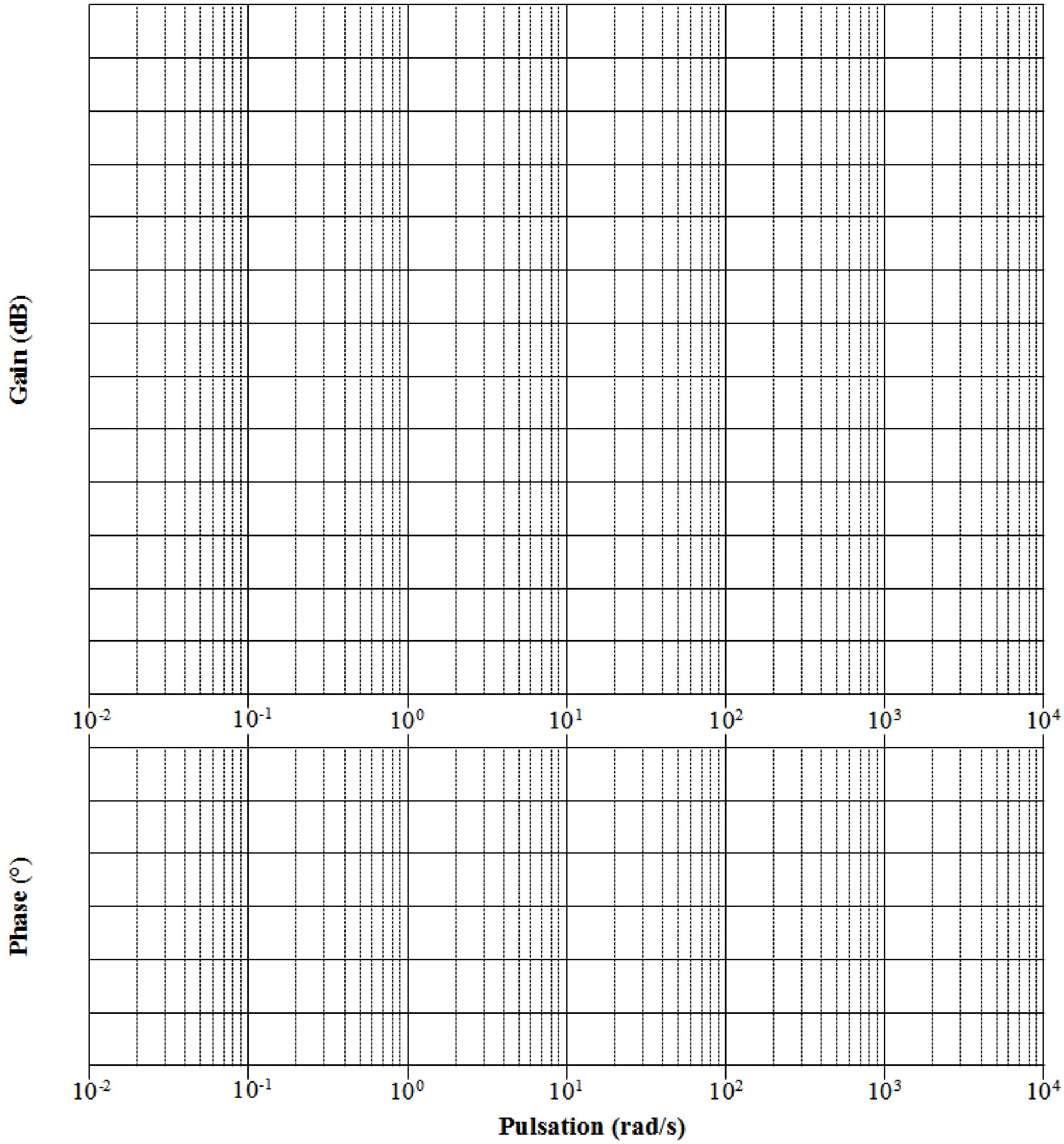
Question 1 *Justifier l'allure du diagramme du diagramme de Bode donné ci-dessous pour $K_C = 1$.*

Question 2 *Donner graphiquement les marges de phase et de gain pour $K_C = 1$.*

Question 3 *Donner analytiquement les marges de phase et de gain pour $K_C = 1$ (méthode).*

Question 4 *Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et 40°. Déterminer la plus grande valeur de K_C permettant de vérifier ce cahier des charges*




Gain (dB)
Phase (°)
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
Pulsation (rad/s)

Application Corrigé

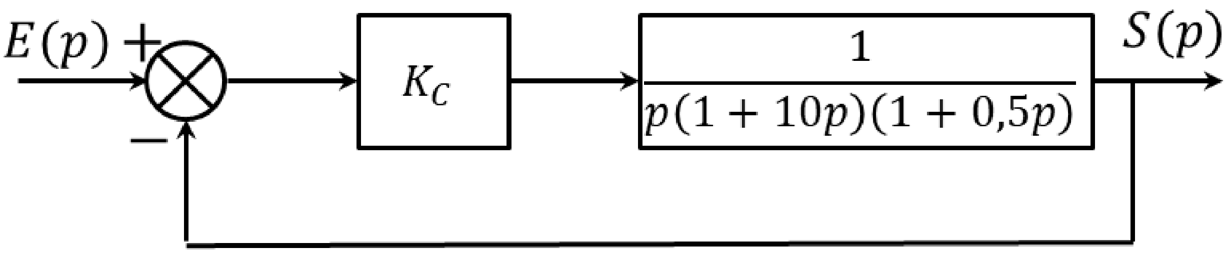
Application

Xavier Pessoles

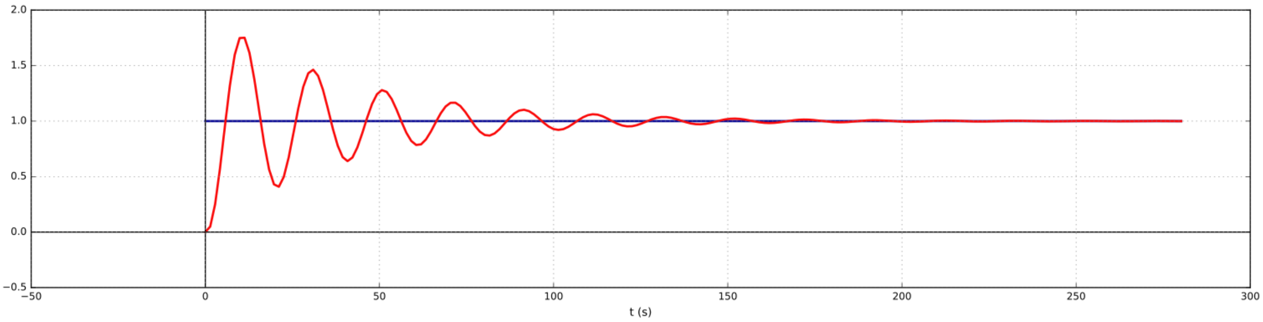
Savoirs et compétences :

- *Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe*
- *Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)*

On considère le schéma-blocs suivant.



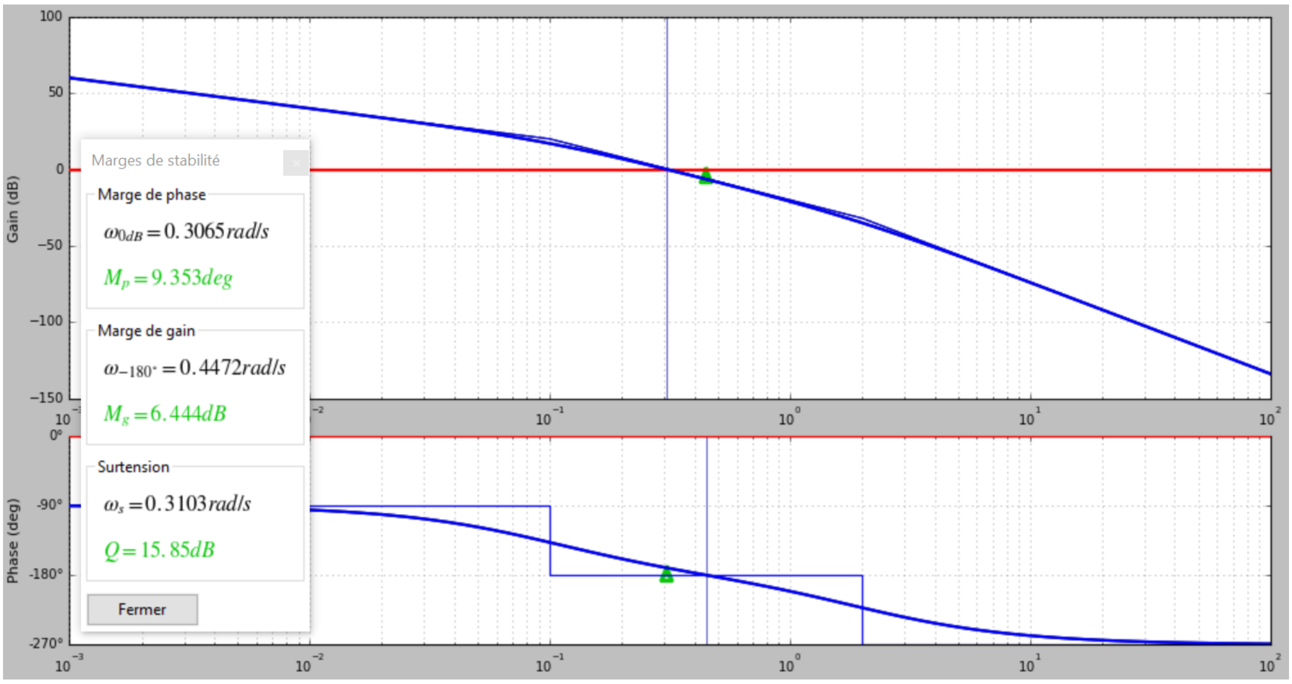
On donne ci-dessous la réponse indicielle pour $K_C = 1$.



Question 1 *Justifier l'allure du diagramme du diagramme de Bode donné ci-dessous pour* $K_C = 1$.

Question 2 *Donner graphiquement les marges de phase et de gain pour* $K_C = 1$.

Question 3 *Donner analytiquement les marges de phase et de gain pour* $K_C = 1$ *(méthode).*



Question 4 *Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de* 12 dB *et 40°. Déterminer la plus grande valeur de K_C permettant de vérifier ce cahier des charges*