

Modéliser les systèmes asservis dans le but de prévoir leur comportement

Chapitre 1 – Stabilité des systèmes

Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur

TD 01



Drone quadri-rotor

Pole III Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- ☐ Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- ☐ Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction \vec{z}) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe (O, \vec{x})) et en tangage (rotation autour de l'axe (O, \vec{y})) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ($\frac{\omega_2}{\omega_4}$ pour le roulis et $\frac{\omega_1}{\omega_3}$ pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

Accélération verticale	Vers le haut : 3g Vers le bas : 0,5g (en valeur absolue)
Précision	Erreur statique nulle
Stabilité	Marge de phase minimale : 35° Dépassement maximal < 5%
Rapidité	$t_r 5\% < 0,6$ s

- Objectif**
- Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
 - Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.



Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

u représente la tension de commande du moteur, $\omega(t)$ son taux de rotation, τ et k_v des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme $k_q\omega^2$ provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en ω^2 , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement ω_0 , fréquence de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ et $u = u_0 + \delta u$ où $\delta\omega$ et δu représentent des petites variations de ω et u autour du point de fonctionnement.

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0 .

Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta\omega$ et δu est de la forme $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 . On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu .

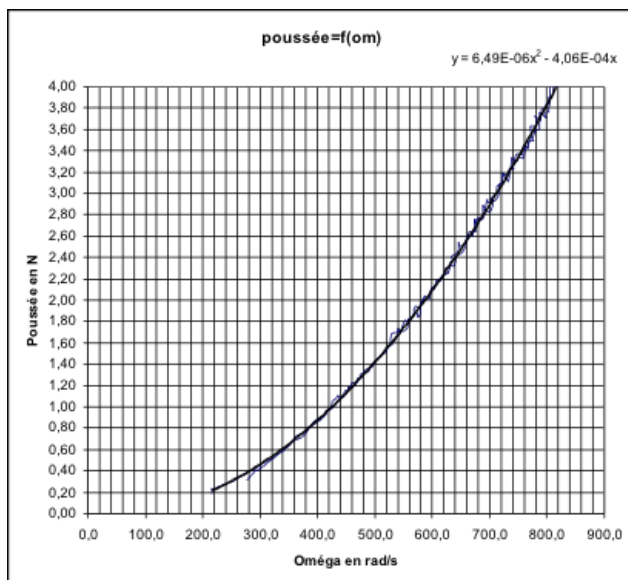
Question 3 Calculer la fonction de transfert $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Recherche du point de fonctionnement

ω_0

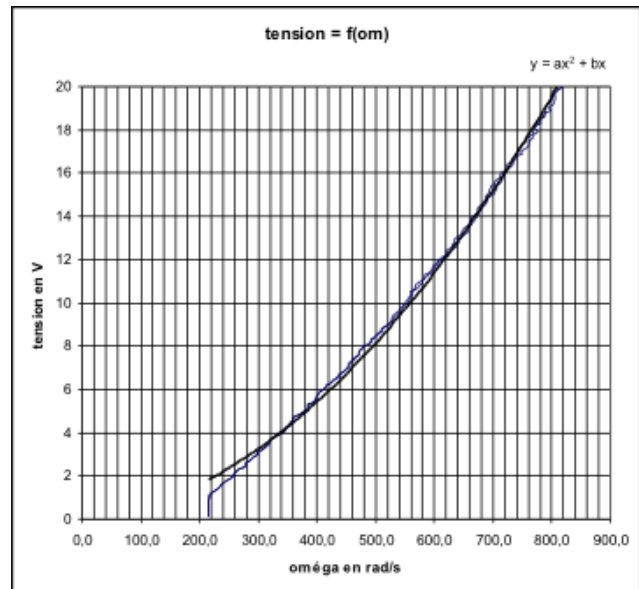
Dans le mouvement de déplacement vertical de direction \vec{z} , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$. La masse totale du drone est $m = 240\text{ g}$. On prendra $g = 9,81\text{ m s}^{-2}$.

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 . La poussée F varie avec ω^2 . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant F à la fréquence de rotation ω en rad/s.



Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande u et la fréquence de rotation ω en rad/s en régime permanent lorsque $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$. La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme $y = ax^2 + bx$. On donne la constante de temps du moteur : $\tau = 125\text{ ms}$.

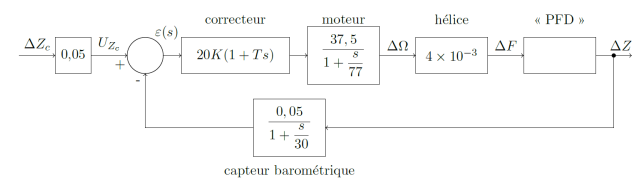


Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a , b et τ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$.

Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement ω_0 , par le schéma-bloc suivant :



Le gain du capteur barométrique est de $0,05\text{ V m}^{-1}$. On pose $z = z_0 + \Delta z(p)$, la transformée de Laplace de δZ , $F = F_0 + \delta F$ représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

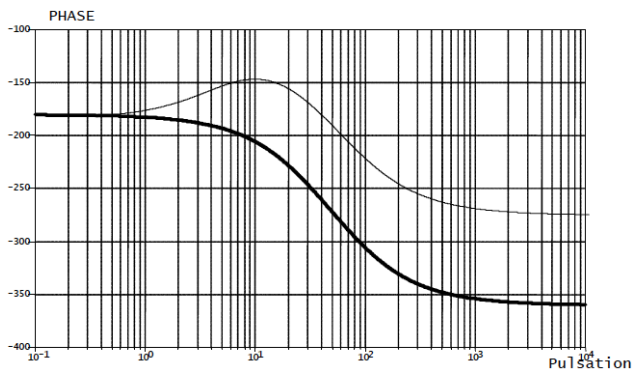
Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire :

$$m\ddot{z} = 4F - mg.$$

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté $K_{BO} = 2,5K$. La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en

boucle ouverte est représentée ci-dessous, en gras avec un correcteur proportionnel ($T = 0$) et en trait fin avec le correcteur retenu ($K = 1$ et $T = 0,2$ s).



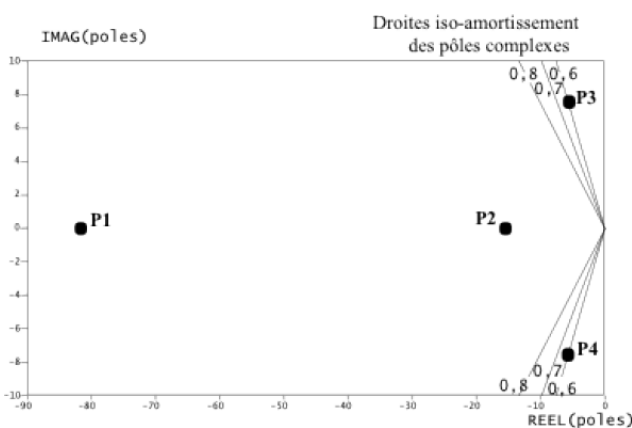
Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0,2$ s et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad s^{-1} , le gain sera compris entre -120 dB et 10 dB.

Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

La figure suivante représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain K précédemment déterminée.



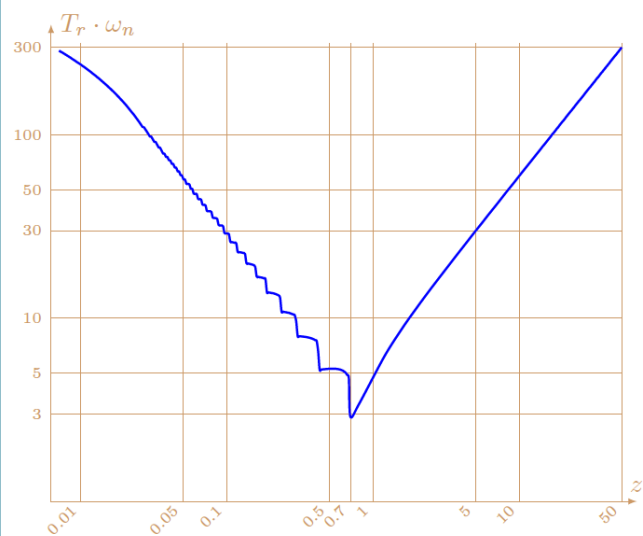
Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.



Pour éventuellement vous aider...

- $-\frac{1}{\tau} \omega_0 - k_q \omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau} u_0 = 0$;
- $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q \omega_0$ et $B = \frac{k_v}{\tau}$.
- $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q \omega_0}$ et $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q \omega_0}$.
- $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6 \text{ N}$
- $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}$
- $k_v = \frac{1}{b}$ (rad/s/V) et $k_b = \frac{a}{b\tau}$
- $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2} \cdot H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \cdot \frac{1 + Tp}{\left(1 + \frac{p}{77}\right)\left(1 + \frac{p}{30}\right)}$
-
-
- $K = 17,9$.
- La FTBO est de classe 2, l'erreur de position est donc nulle.
- $p_2 = -15$, $p_3 = -5 + 8j$, $p_4 = -5 + 8j$.
- $\xi = 0,6$
-
- $p = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$. $\omega_n \approx 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
- $t_{5\%} \approx 0,61 \text{ s}$.

TD 01 – Corrigé



Drone quadri-rotor

Pole SII Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction \vec{z}) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe (O, \vec{x})) et en tangage (rotation autour de l'axe (O, \vec{y})) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ($\frac{\omega_2}{\omega_4}$ pour le roulis et $\frac{\omega_1}{\omega_3}$ pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

Accélération verticale	Vers le haut : 3g Vers le bas : 0,5g (en valeur absolue)
Précision	Erreur statique nulle
Stabilité	Marge de phase minimale : 35° Dépassement maximal < 5%
Rapidité	$t_{r5\%} < 0,6$ s

Objectif

- Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.



Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

u représente la tension de commande du moteur, $\omega(t)$ son taux de rotation, τ et k_v des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme $k_q\omega^2$ provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en ω^2 , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement ω_0 , fréquence de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ et $u = u_0 + \delta u$ où $\delta\omega$ et δu représentent des petites variations de ω et u autour du point de fonctionnement.

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0 .

Correction En vol stationnaire, dans les conditions idéales, la vitesse de rotation des hélices est constante ; donc $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$. De plus, il n'y a pas de variation de la vitesse de rotation des hélices et donc pas de variation de la tension d'alimentation. En conséquence, $\delta u = 0$ et $\delta\omega = 0$.

On a donc $\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u$. En notant ω_0 et u_0 les vitesses en tensions à l'état stationnaire, on a $\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0$.

Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta \omega$ et δu est de la forme $\frac{d\delta \omega(t)}{dt} = -A\delta \omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Correction On utilise le changement de variable proposé autour d'un point de fonctionnement et on a :

$$\begin{aligned}\frac{d\omega(t)}{dt} &= -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u \\ \Rightarrow \frac{d(\omega_0 + \delta\omega)}{dt} &= -\frac{1}{\tau}(\omega_0 + \delta\omega) - k_q(\omega_0 + \delta\omega)^2 + \frac{k_v}{\tau}(u_0 + \delta u) \\ \Rightarrow \frac{d(\delta\omega)}{dt} &= -\frac{1}{\tau}\omega_0 - \frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q\omega_0^2 - k_q(\delta\omega)^2 - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}u_0 + \frac{k_v}{\tau}\delta u \\ \text{Or } \frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 &= \frac{k_v}{\tau}u_0 \text{ (question précédente);} \\ \text{donc : } \frac{d(\delta\omega)}{dt} &= -\frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q(\delta\omega)^2 - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u \\ \text{En négligeant les termes d'ordre 2, on a donc :} \\ \frac{d(\delta\omega)}{dt} &= -\frac{1}{\tau}\delta\omega - k_q2\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u \\ \text{Au final, } A &= \frac{1}{\tau} + k_q2\omega_0 \text{ et } B = \frac{k_v}{\tau}.\end{aligned}$$

On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta\omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu .

Question 3 Calculer la fonction de transfert $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Correction En utilisant la transformée de Laplace, on obtient $p\Delta\Omega(s) = -A\Delta\Omega(s) + B\Delta U(s)$ et donc $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)} = \frac{B}{p+A} = \frac{B/A}{p/A+1}$. En conséquence, $K_m = \frac{B}{A} = \frac{\frac{k_v}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + k_q2\omega_0} = \frac{k_v}{1 + \tau k_q2\omega_0} \cdot \tau_m = \frac{\tau}{1 + \tau k_q2\omega_0}$

Recherche du point de fonctionnement ω_0

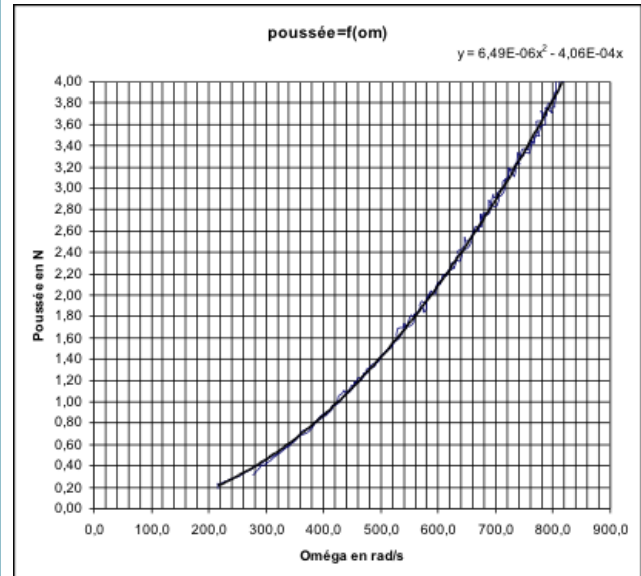
Dans le mouvement de déplacement vertical de direction \vec{z} , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$. La masse totale du drone est $m = 240\text{g}$. On prendra $g = 9,81\text{ms}^{-2}$.

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 .

Correction Le poids du drone est de $0,240 \times 9,81 = 2,3544\text{N}$. Chaque moteur doit donc exercer $\frac{2,3544}{4} = 0,59\text{N}$.

La poussée F varie avec ω^2 . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe

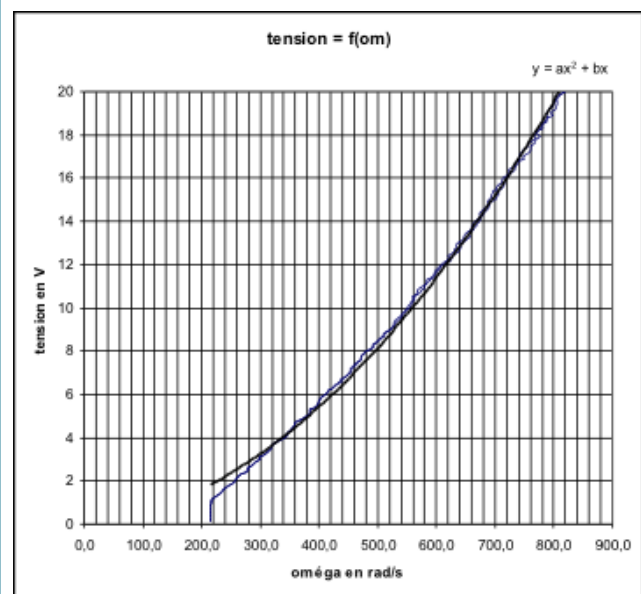
liant F à la fréquence de rotation ω en rad/s.



Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

Correction En lisant le graphe, on obtient $\omega_0 = 340\text{rad s}^{-1}$.

Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande u et la fréquence de rotation ω en rad/s en régime permanent lorsque $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$. La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme $y = ax^2 + bx$. On donne la constante de temps du moteur : $\tau = 125\text{ms}$.



Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a , b et τ . Préciser leur unité.

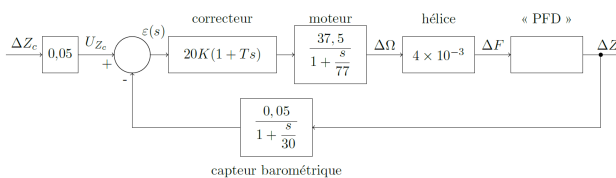
Correction Lorsque $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$, on a $u = a\omega^2 + b\omega_0$.
Par ailleurs en régime stationnaire, on a $\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 =$

$$\frac{k_v}{\tau} u_0.$$

On peut ainsi déduire le modèle $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$.

Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement ω_0 , par le schéma-bloc suivant :



Le gain du capteur barométrique est de $0,05 \text{ V m}^{-1}$. On pose $z = z_0 + \Delta z(p)$, la transformée de Laplace de δZ , $F = F_0 + \delta F$ représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

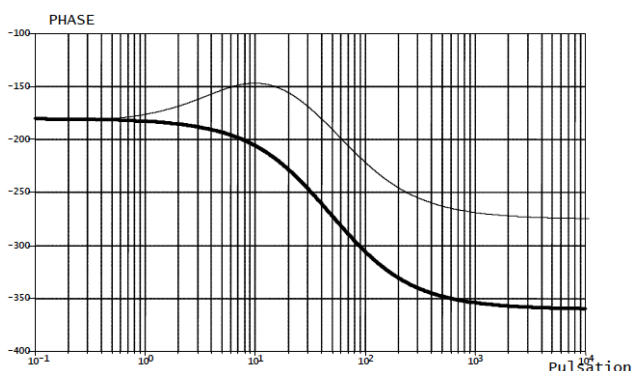
Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire :

$$m\ddot{z} = 4F - mg.$$

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Correction

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté $K_{BO} = 2,5K$. La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée ci-dessous, en gras avec un correcteur proportionnel ($T = 0$) et en trait fin avec le correcteur retenu ($K = 1$ et $T = 0,2\text{s}$).



Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0,2\text{s}$ et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad s^{-1} , le gain sera compris entre -120 dB et 10 dB .

Correction

Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

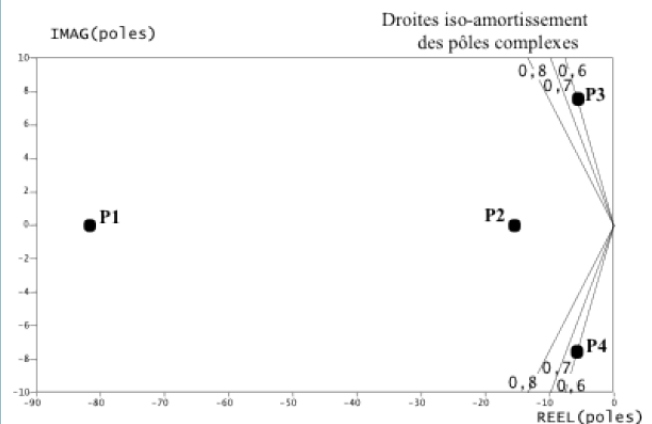
Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Correction

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

Correction

La figure suivante représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain K précédemment déterminée.



Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

Correction

Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Correction

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

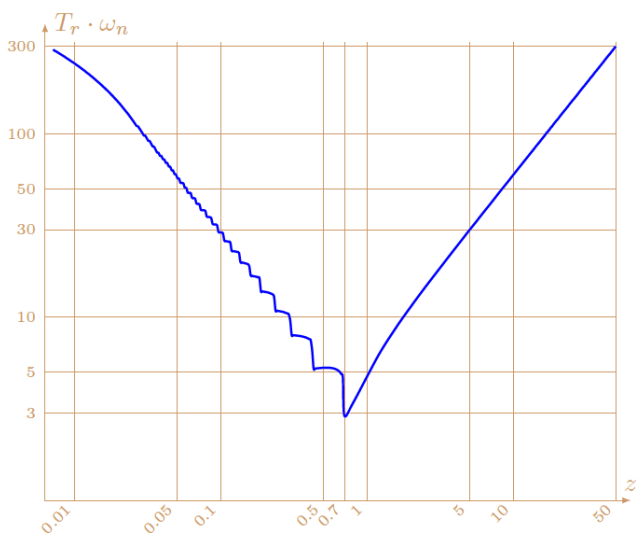
Correction

Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

Correction

Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Correction



Pour éventuellement vous aider...

1. $-\frac{1}{\tau}\omega_0 - k_q\omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau}u_0 = 0$;
2. $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q\omega_0$ et $B = \frac{k_v}{\tau}$.
3. $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q\omega_0}$ et $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q\omega_0}$.
4. $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6\text{N}$
5. $\omega_0 = 340\text{rad s}^{-1}$
6. $k_v = \frac{1}{b}$ (rad/s/V) et $k_b = \frac{a}{b\tau}$
7. $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2} \cdot H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1 + Tp}{\left(1 + \frac{p}{77}\right)\left(1 + \frac{p}{30}\right)}$
- 8.
- 9.
10. $K = 17,9$.
11. La FTBO est de classe 2, l'erreur de position est donc nulle.
12. $p_2 = -15$, $p_3 = -5 + 8j$, $p_4 = -5 + 8j$.
13. $\xi = 0,6$
- 14.
15. $p = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$. $\omega_n \simeq 8,33\text{rad s}^{-1}$
16. $t_{5\%} \simeq 0,61\text{s}$.