

Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur

## Modéliser les systèmes asservis dans le but de prévoir leur comportement

### Chapitre 1 Stabilité des systèmes

Savoirs et compétences :

- Mod3.C2 : pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle : principe, justification
- Res2.C4 : stabilité des SLCI : définition entrée bornée – sortie bornée (EB – SB)
- Res2.C5 : stabilité des SLCI : équation caractéristique
- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)



*SoloWheel Orbit.*

<b>1</b>	<b>Notion de stabilité</b>	<b>4</b>
1.1	Représentation graphique (1) . . . . .	4
1.2	Premières définitions . . . . .	4
1.3	Étude des pôles de la fonction de transfert . . . . .	4
1.4	Position des pôles dans le plan complexe . . . . .	5
1.5	Pôles dominants (1) . . . . .	5
1.6	Caractéristiques dans le lieu de pôles . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Marges de stabilité</b>	<b>6</b>
2.1	Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez... . . . . .	6
2.2	Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh . . . . .	6
2.3	Critère graphique de stabilité : le critère du Revers . . . . .	6
2.4	Vers le système réel... . . . . .	7
1		10
2		10
3		10
4		10
5		10
1		11
2		11
3		12
4		12
5		12
1		14
2		14
3		14
4		14
1		16
2		16
3		16
4		17
1		18
2		18
3		18
4		19
5		19
6		19
7		19
8		20
9		20
10		20
11		20
12		20
13		20
14		20
15		20
16		20
1		21
2		21
3		21
4		22
5		22
6		22
7		22
8		23
9		23
10		23
11		23
12		23
13		23
14		23
15		23
16		23
1		24
2		24

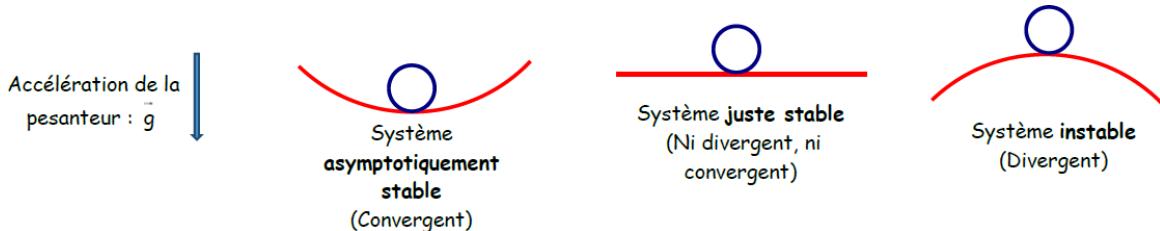


Xavier Pessoles  
PSI★ - MP

# 1 Notion de stabilité

## 1.1 Représentation graphique (1)

Un état d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre par une cause extérieure, finit par retrouver ce même état d'équilibre après disparition de la cause. Illustrons cette définition de façon très intuitive à travers l'exemple suivant : une boule soumise à l'accélération de la pesanteur se déplaçant (avec un peu de dissipation énergétique) sur une surface donnée.



## 1.2 Premières définitions

**Définition — Définition intuitive.** Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :

- abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre;
- son régime transitoire finit par disparaître;
- sa sortie finit par ressembler à l'entrée;
- sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

(R)

La stabilité d'un système **est indépendante** de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionnelle (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...

Pour simplifier les calculs, une première approche pourra être d'utiliser la réponse impulsionnelle.

**Définition** En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro au cours du temps.

## 1.3 Étude des pôles de la fonction de transfert

Dans le cas général la fonction de transfert d'un système peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } n \geq m.$$

Lors du calcul de la réponse temporelle en utilisant la transformée de Laplace inverse (quelle que soit l'entrée), la nature du régime transitoire ne dépend que des pôles  $p_i$  de la fonction de transfert (zéros du dénominateur).

En factorisant le numérateur et le dénominateur de  $H(p)$  on peut alors retrouver une fonction de la forme :

$$H(p) = \frac{(p + z_m) \cdot (p + z_{m-1}) \dots}{(p + p_n) \cdot (p + p_{n-1}) \dots} \quad \text{avec } p_i, z_i \in \mathbb{C}.$$

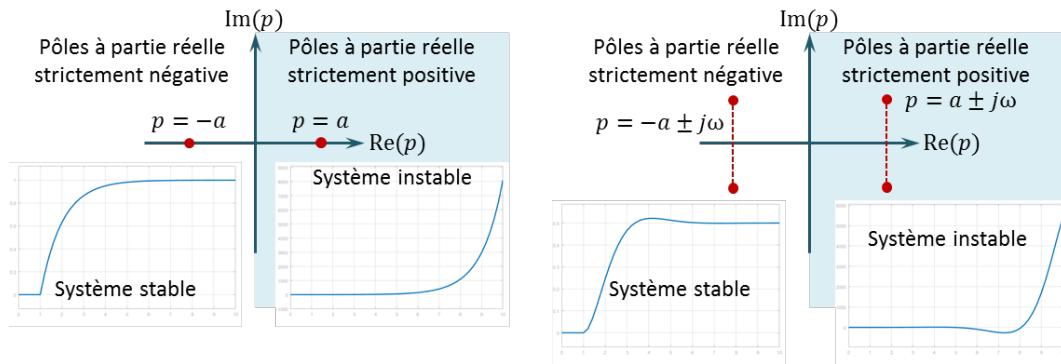
En passant dans le domaine temporel :

- les pôles réels (de type  $p = -a$ ) induisent des modes<sup>1</sup> du type  $e^{-at}$ ;
- les pôles complexes conjugués (de type  $p = -a \pm j\omega$ ) induisent des modes du type  $e^{-at} \sin \omega t$ .

**On peut ainsi constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.**

Ainsi, on peut observer la réponse temporelle des systèmes en fonction du positionnement des pôles dans le plan complexe.

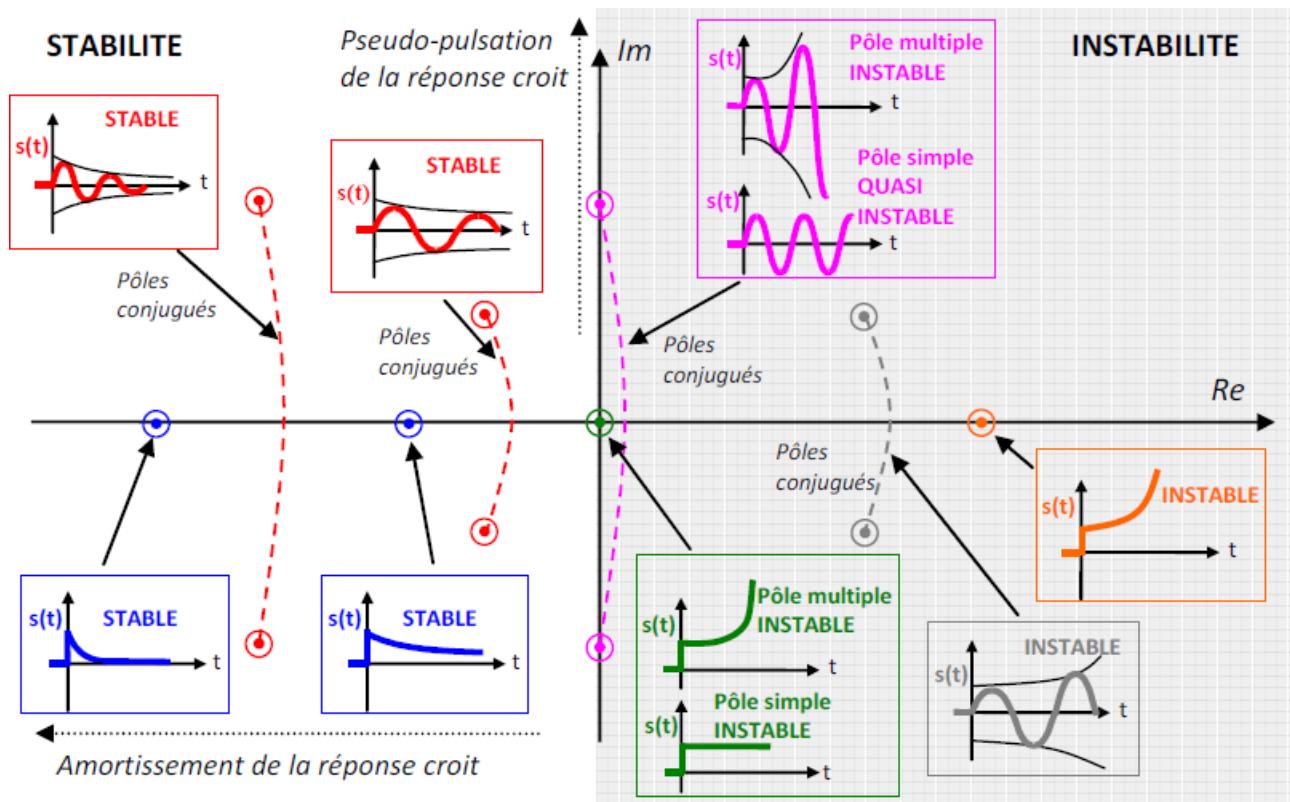
1. mode : fonction temporelle associée à un pôle



Représentation d'un système à pôle simple et à pôles conjugués dans le plan complexe – Réponse indicielle

#### 1.4 Position des pôles dans le plan complexe

Par extension on peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicielle associée.



Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système [2].

**Définition — À retenir.** Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (**en boucle fermée**) sont à partie réelle strictement négative.



On peut montrer que :

- **pour les systèmes d'ordre 1 et 2 :** le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe;
- **pour les systèmes d'ordre 3 :** de la forme  $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3$  les coefficients doivent être strictement de même signe et  $a_2 a_1 > a_3 a_0$ .

#### 1.5 Pôles dominants (1)

Lors de l'étude d'un système, on se contente en général de ne prendre en compte que les pôles les plus influents. Ces pôles sont appelés les pôles dominants. Pour un système asymptotiquement stable, ce sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires, puisque ce sont eux qui induisent des modes qui disparaissent dans le temps le plus lentement.

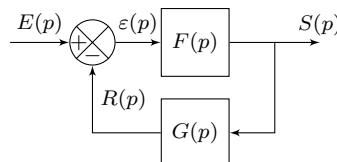
## 1.6 Caractéristiques dans le lieu de pôles

Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [1].

## 2 Marges de stabilité

### 2.1 Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...

Soit le schéma-blocs suivant :



La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par  $H_{BO} = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)G(p)$ .

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :  $H_{BF} = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)G(p)} = \frac{F(p)}{1 + H_{BO}(p)}$ .

**Définition — Équation caractéristique.** Soit  $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  une fonction de transfert. On appelle  $D(p) = 0$  l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de  $D(p)$  correspondent aux pôles de  $H(p)$ .

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera  $1 + H_{BO}(p) = 0$ .

### 2.2 Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh

Pour un système d'ordre supérieur à 3 il devient délicat d'obtenir analytiquement (ou numériquement) les racines du polynôme et ainsi conclure sur la stabilité à partir du signe des parties réelles.

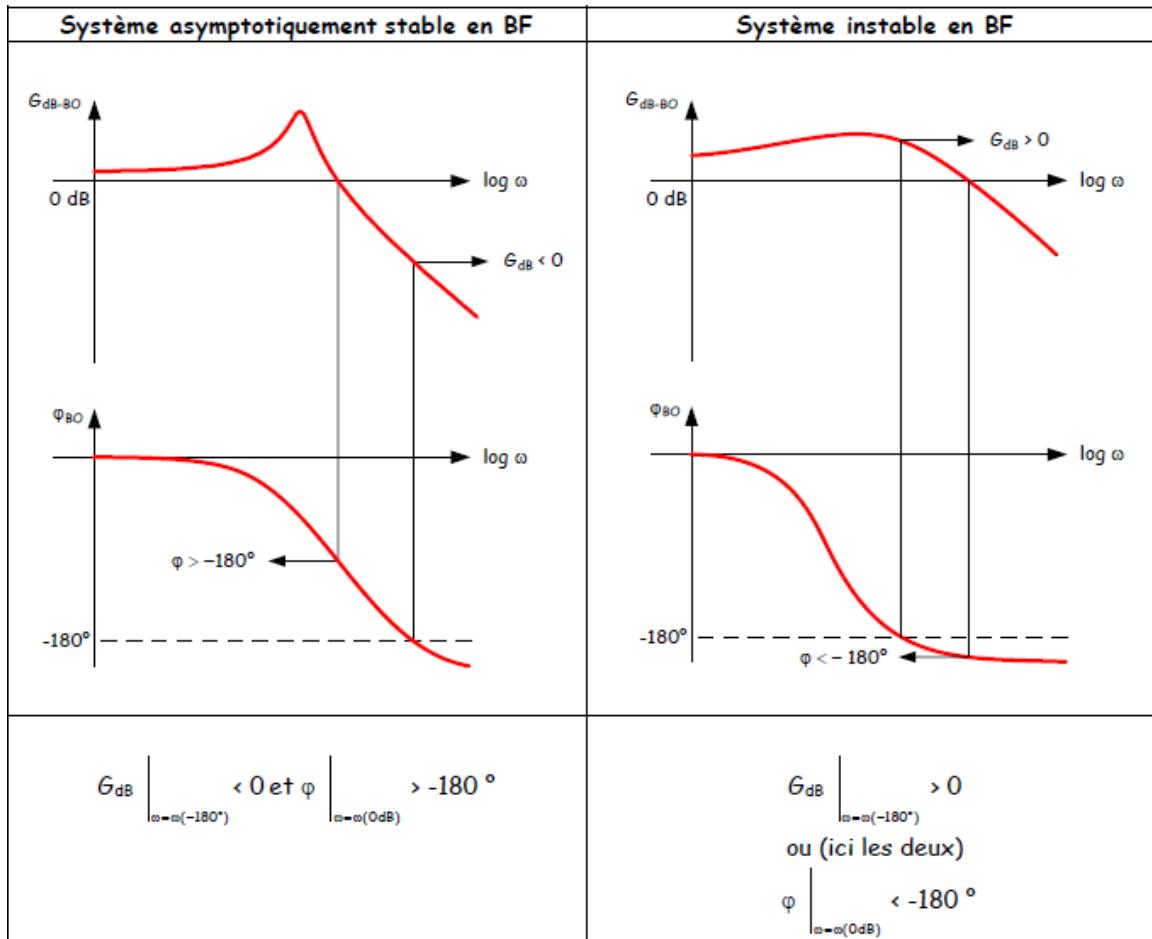
Il existe un critère algébrique permettant de vérifier la stabilité d'un système : il s'agit de critère de Routh. Pour un système bouclé, ce critère utilise le dénominateur de la BF. Ce critère n'étant pas au programme, on pourra rechercher dans la littérature des articles s'y référant si nécessaire.

### 2.3 Critère graphique de stabilité : le critère du Revers

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme  $1 + H_{BO}(p) = 0$ . Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation  $H_{BO}(p) = -1$ . Ainsi dans le plan complexe, le point  $(-1; 0)$  permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain de 1) et une phase de  $-180^\circ$ .

**Résultat** Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a :**

$$G_{dB}|_{\omega=\omega(-180^\circ)} < 0_{dB} \quad \text{et} \quad \varphi|_{\omega=\omega(0dB)} > -180^\circ.$$



## 2.4 Vers le système réel...

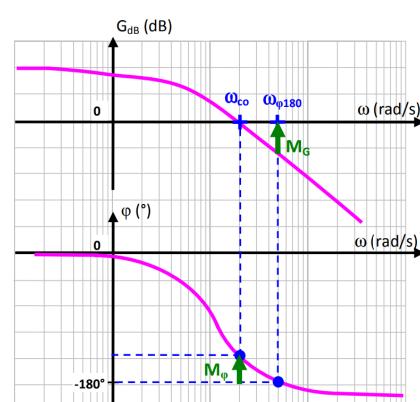
Le résultat donné ci-dessus est un résultat théorique dans le sens où le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système réel aura un écart avec le diagramme de Bode du système modélisé.

**Résultat — Marges.** Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considérera, dans le cas général que le système est stable si :

- la marge de gain est supérieure à 10 dB;
- la marge de phase est supérieure à 45°.

**Définition — Marge de phase.** La marge de phase est définie telle que  $M_\varphi = 180^\circ + \arg(\text{FTBO}(j\omega_{co}))$  où  $\omega_{co}$  est la pulsation de coupure pour laquelle  $|\text{FTBO}(j\omega_{co})| = 0 \text{ dB}$ .

**Définition — Marge de gain.** La marge de gain est définie telle que  $M_G = -20 \log |\text{FTBO}(j\omega_{\varphi 180})|$  où  $\omega_{\varphi 180}$  est la pulsation pour laquelle  $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi 180})) = -180^\circ$ .



La marge de gain permet de tenir compte de variations de gain de la boucle ouverte. De même, la marge de phase permet de tenir compte de variation de phase (retard ou déphasage non modélisés). La nécessité d'avoir recours à des marges de stabilité apparaît notamment lorsque :

- la simplification du modèle amène à considérer uniquement les pôles dominant,
- le modèle ne prend pas en compte la dynamique de certains composants du système;
- le système n'est pas invariant au cours du temps;

- on s'éloigne de la zone de fonctionnement linéaire;
- certaines non linéarités sont ignorées.

## Références

- [1] Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.*
- [2] Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.*

## Activation

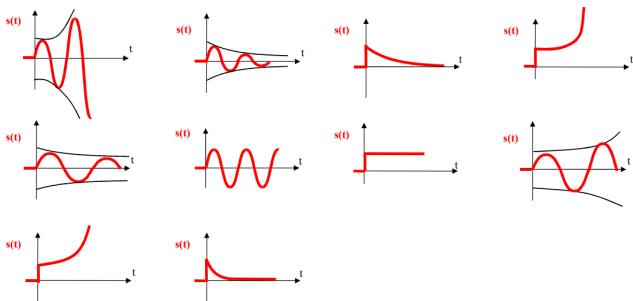
### Activation

Patrick Dupas, <http://patrick.dupas.chez-alice.fr/>.

#### Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

#### Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)



**Question** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

#### Exercice 2 – Pôles de la FTBF

On donne les pôles des FTBF de plusieurs systèmes :

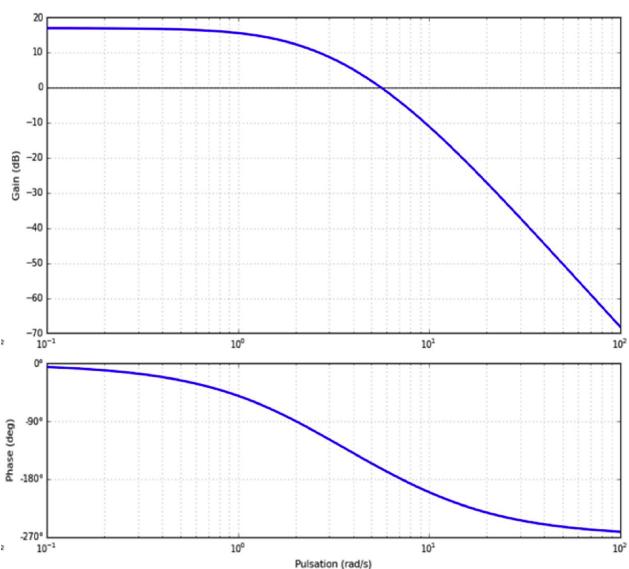
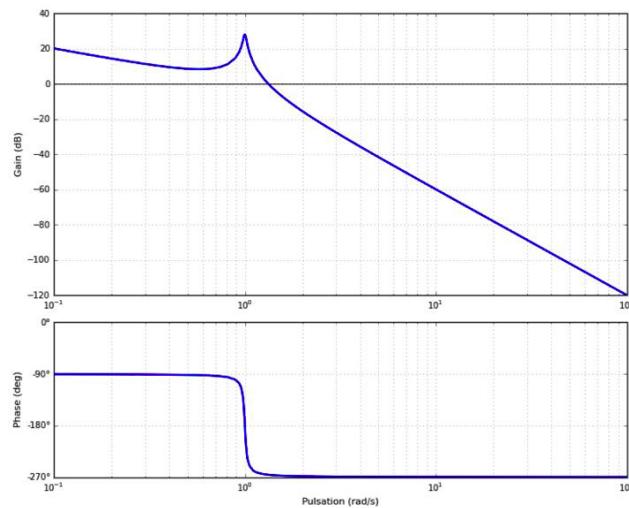
- |                               |                      |
|-------------------------------|----------------------|
| 1. $-1, -2;$                  | 5. $-j, j, -1, 1;$   |
| 2. $-3, -2, 0;$               | 6. $-1, +1;$         |
| 3. $-2 + j, -2 - j, 2j, -2j;$ | 7. $-1 + j, -1 - j;$ |
| 4. $-2 + 3j, -2 - 3j, -2;$    | 8. $2, -1, -3;$      |
|                               | 9. $-6, -4, 7.$      |

**Question** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

#### Exercice 3 – Applications du critère du Revers

**Question** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF

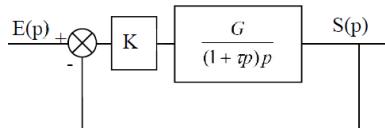
**Question** Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.



#### Exercice 4 – Étude de la stabilité

- Objectif**
- Caractériser la stabilité d'un système à partir de la FTBO.
  - La marge de gain est supérieure à 10 dB et que la marge de phase est supérieure à 45 °.

On donne le schéma bloc suivant :



On a  $K = 1$ ,  $\tau = 0,1$  et  $G = 20$ .

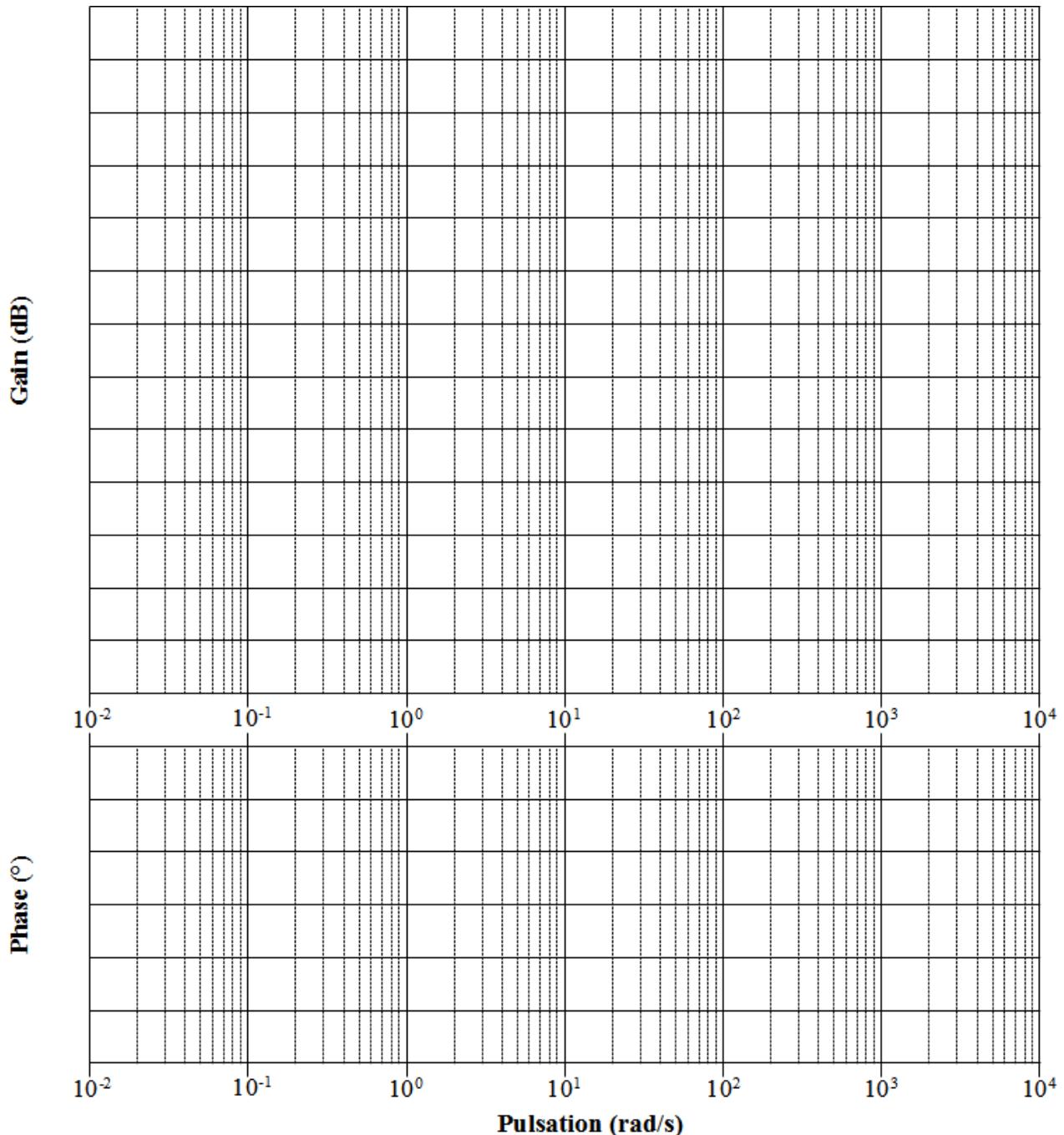
**Question 1** Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

**Question 2** Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

**Question 3** Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

**Question 4** Confirmer ces résultats par le calcul.

**Question 5** Conclure par rapport au cahier des charges.



## Activation Corrigé

### Activation

*Patrick Dupas, <http://patrick.dupas.chez-alice.fr/>.*

#### Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

#### Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

**Question** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

#### Exercice 2 – Pôles de la FTBF

**Question** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

#### Exercice 3 – Applications du critère du Revers

**Question** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

**Question** Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

#### Exercice 4 – Étude de la stabilité

On a  $K = 1$ ,  $\tau = 0,1$  et  $G = 20$ .

**Question 1** Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

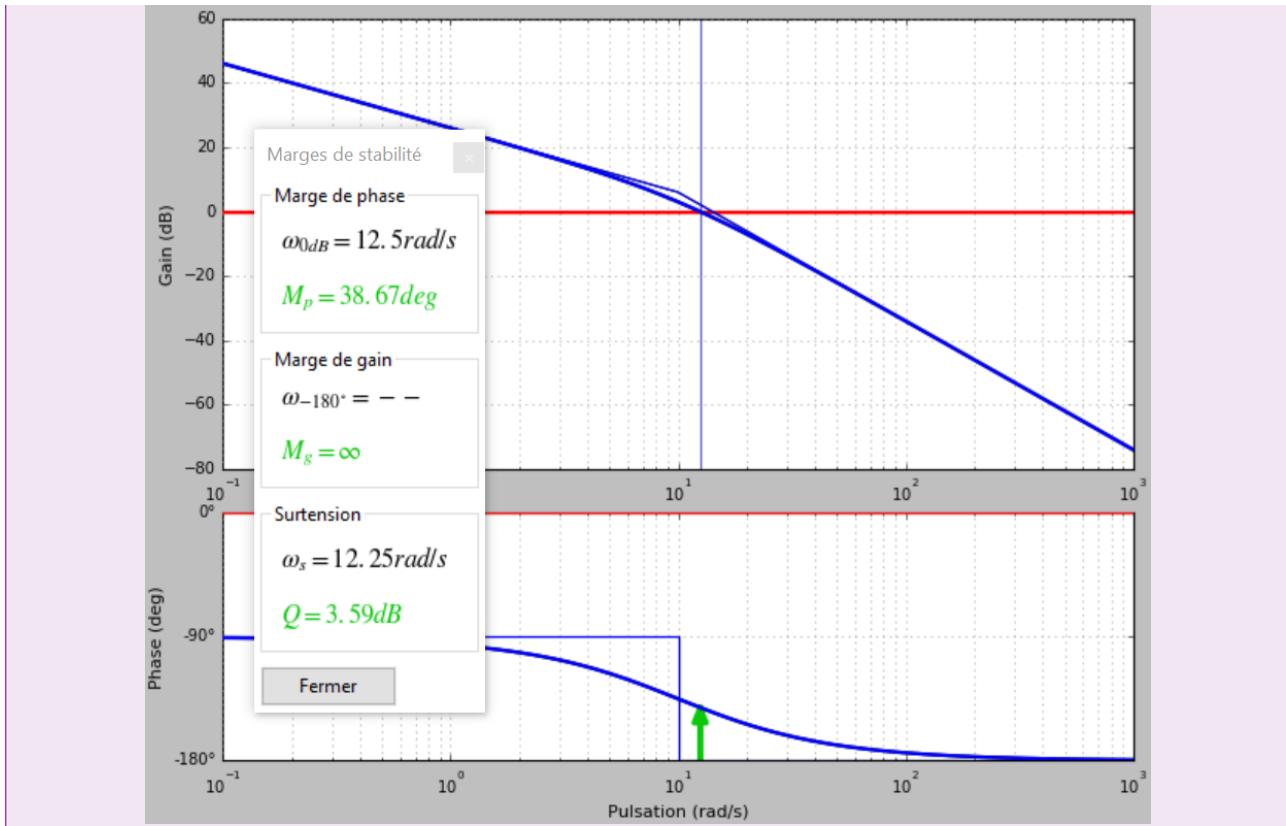
**Correction** Ici on a  $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}$ .

$$\text{Erreur statique (entrée échelon)} : \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = 0$$

$$\text{Erreur trainage (entrée rampe)} : \varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = 1/20$$

**Question 2** Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

**Correction**



**Question 3** Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

#### Correction

**Question 4** Confirmer ces résultats par le calcul.

#### Correction

La phase ne coupe jamais l'axe des abscisses. Ainsi, La marge de gain n'est pas définie (elle est infinie). Pour déterminer la marge de phase analytiquement :

1. On cherche  $\omega_c$  tel que  $G_{dB}(\omega_c) = 0$ ;
2. On calcule  $\varphi(\omega_c)$ ;
3. La marge de phase est de  $\varphi(\omega_c) - (-180^\circ)$ .

Cherchons  $\omega_c$  tel que  $G_{dB}(\omega_c) = 0$ . On a  $FTBO(j\omega) = \frac{20}{(1+0,1j\omega)j\omega} = \frac{20}{j\omega-0,1\omega^2}$ .  $20\log|FTBO(j\omega)| = 20\log 20 - 20\log \sqrt{\omega^2 + 0,01\omega^4} = 20\log 20 - 20\log \omega \sqrt{1+0,01\omega^2}$ .

$G_{dB}(\omega_c) = 0 \Leftrightarrow 20 = \omega_c \sqrt{1+0,01\omega_c^2} \Leftrightarrow 400 = \omega_c^2 (1+0,01\omega_c^2)$  On pose  $x = \omega_c^2$  et on a :  $400 = x(1+0,01x) \Leftrightarrow x^2 + 100x - 40000 = 0$ . On a donc  $\Delta = 412,3^2$  et  $x_{1,2} = \frac{-100 \pm 412,3}{2}$  on conserve la racine positive et  $x_1 = 156,15$  et  $\omega_c = 12,5 \text{ rad s}^{-1}$ .

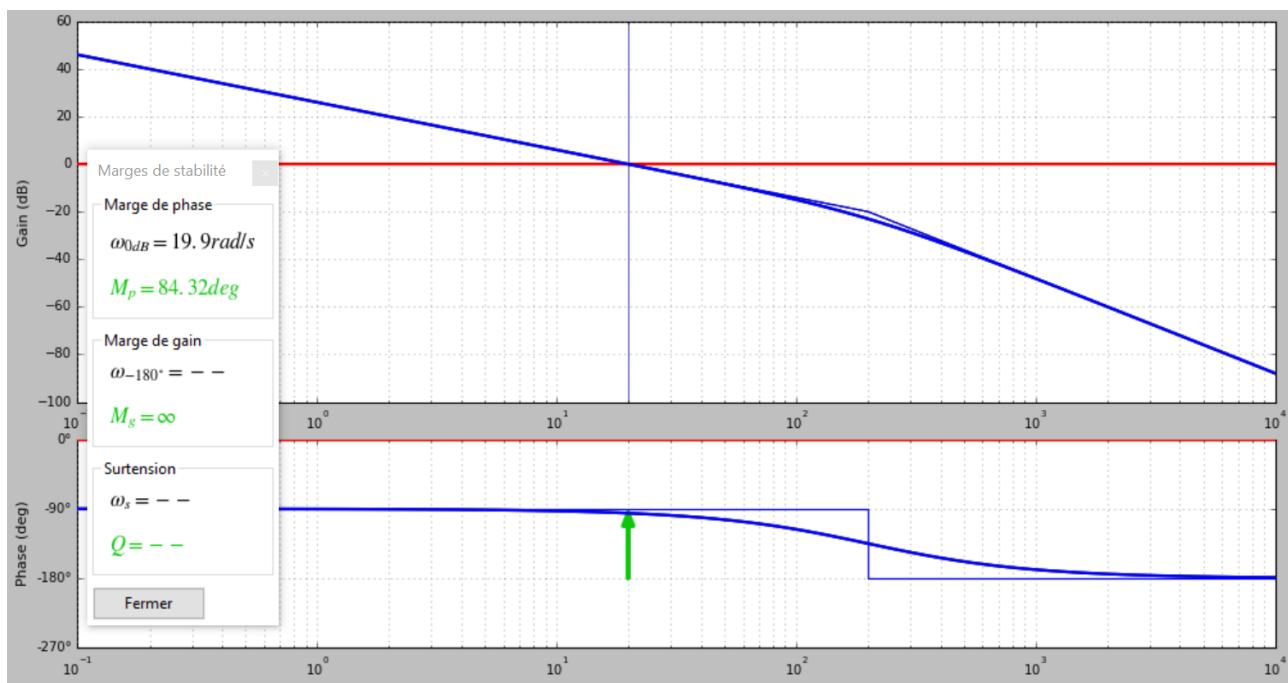
$$\varphi(\omega_c) = \arg(20) - 90 - \arg(1+0,1j\omega_c) = 0 - 90 - \arctan(0,1\omega_c) = 0 - 90 - 51,34 = -141,34^\circ.$$

La marge de phase est donc de  $38,66^\circ$ .

**Question 5** Conclure par rapport au cahier des charges.

**Correction** Le système ne sera pas stable vis-à-vis du cahier des charges.

Pour  $\tau = 0,005$



## Application

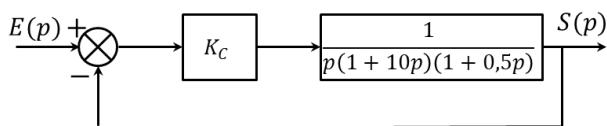
### Application

Xavier Pessoles

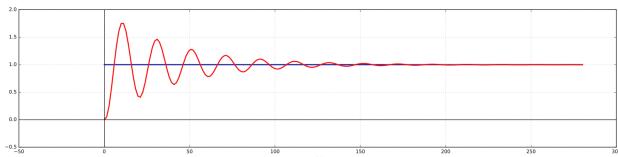
#### Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

On considère le schéma-blocs suivant.



On donne ci-dessous la réponse indicielle pour  $K_C = 1$ .

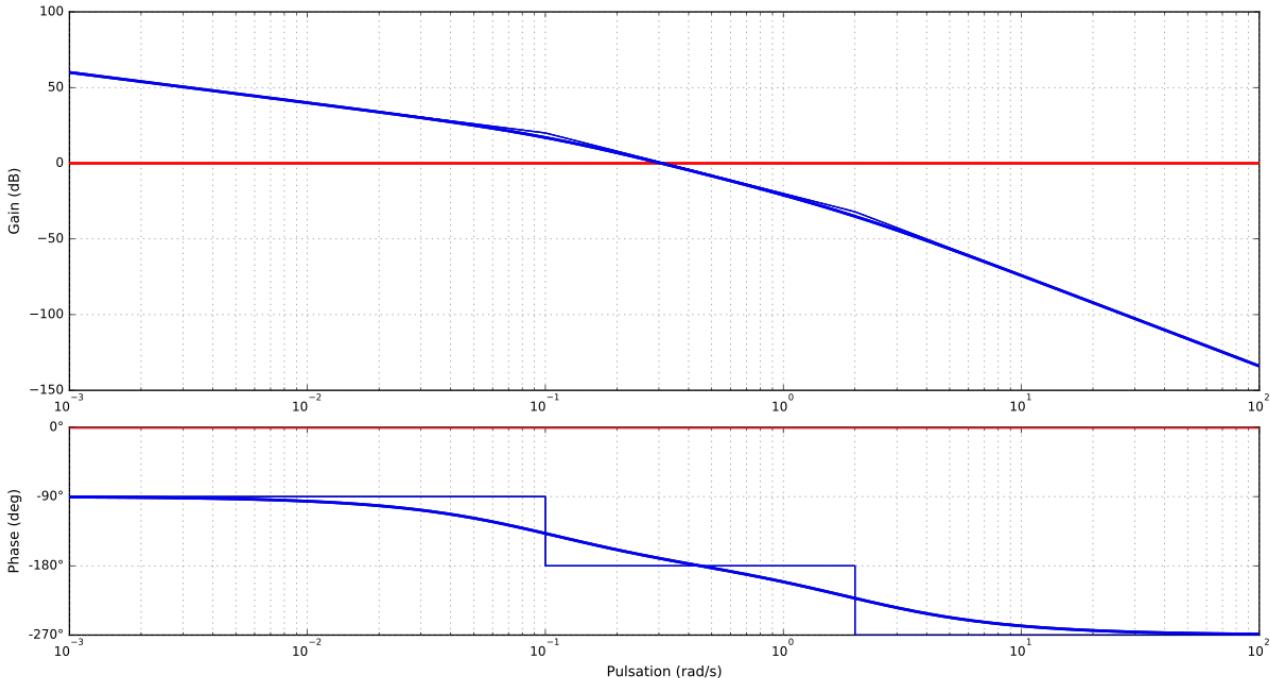


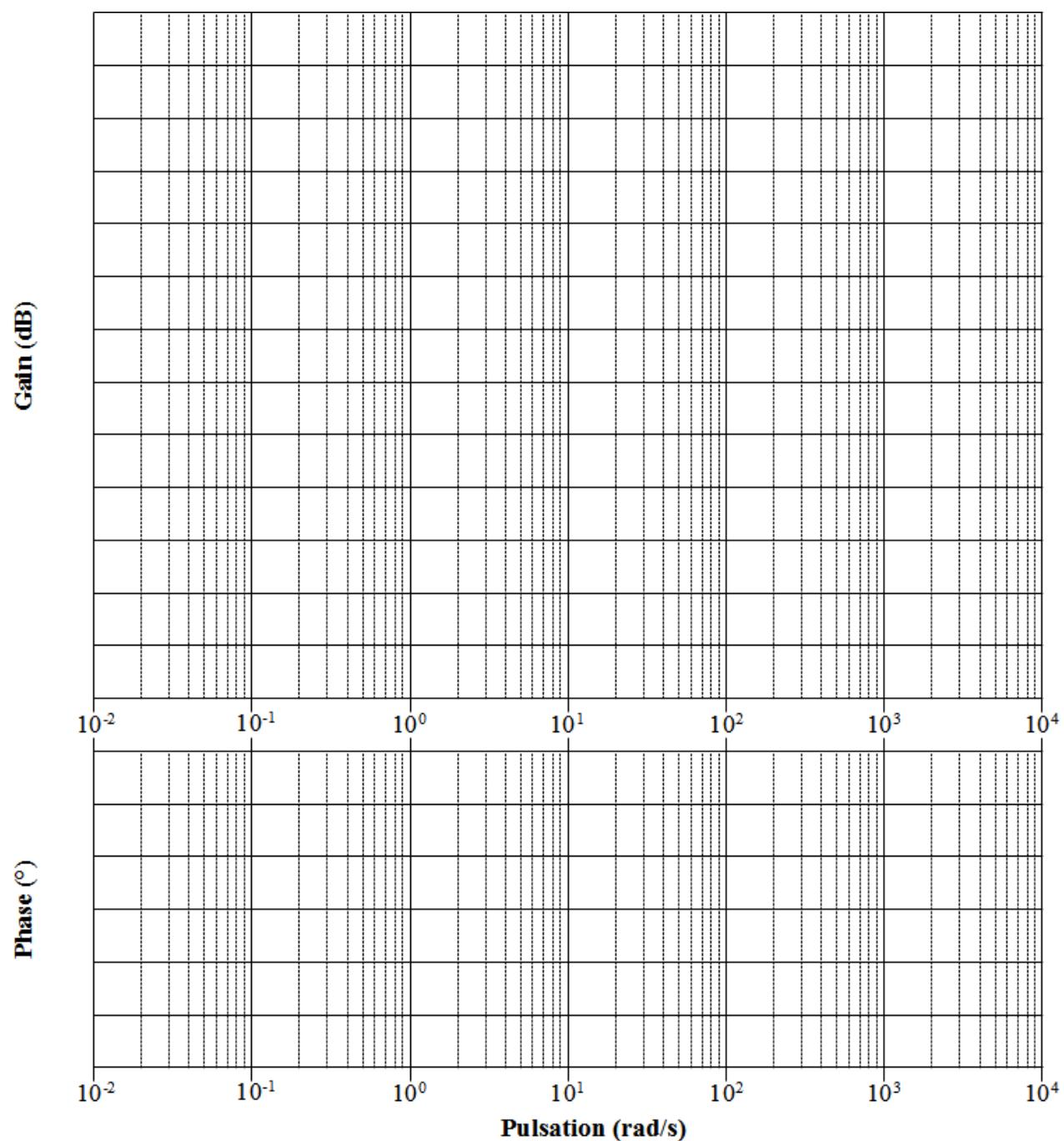
**Question 1** Justifier l'allure du diagramme du diagramme de Bode donné ci-dessous pour  $K_C = 1$ .

**Question 2** Donner graphiquement les marges de phase et de gain pour  $K_C = 1$ .

**Question 3** Donner analytiquement les marges de phase et de gain pour  $K_C = 1$  (méthode).

**Question 4** Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et 40°. Déterminer la plus grande valeur de  $K_C$  permettant de vérifier ce cahier des charges





## Application Corrigé

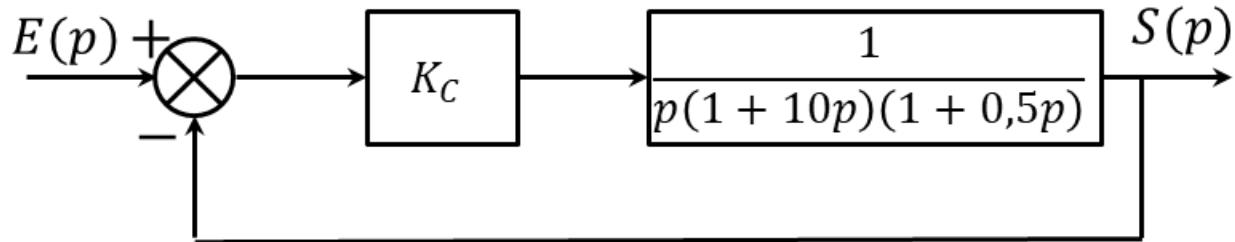
### Application

Xavier Pessoles

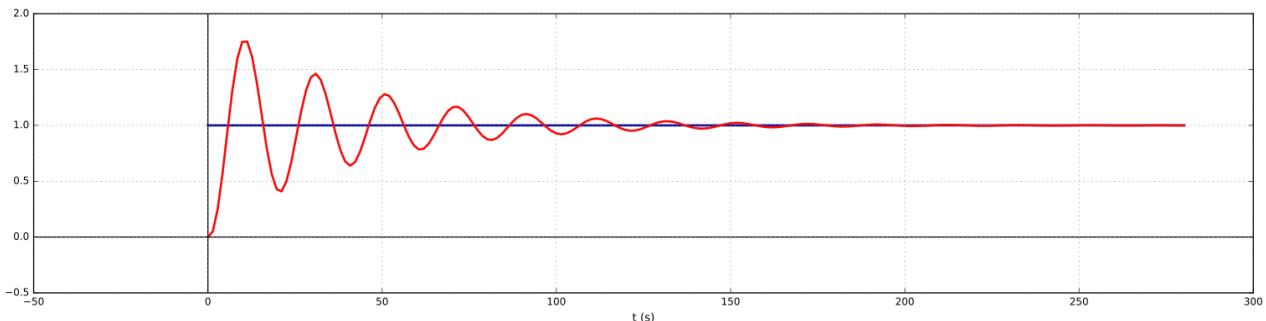
#### Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

On considère le schéma-blocs suivant.



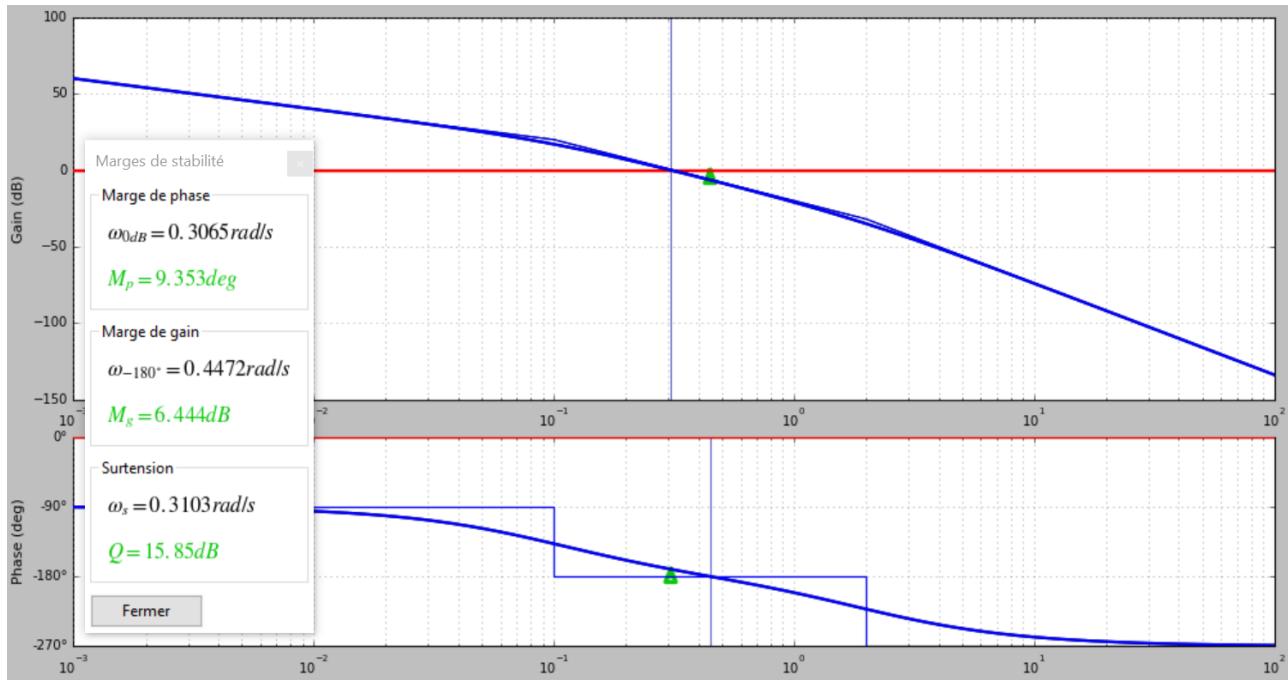
On donne ci-dessous la réponse indicielle pour  $K_C = 1$ .



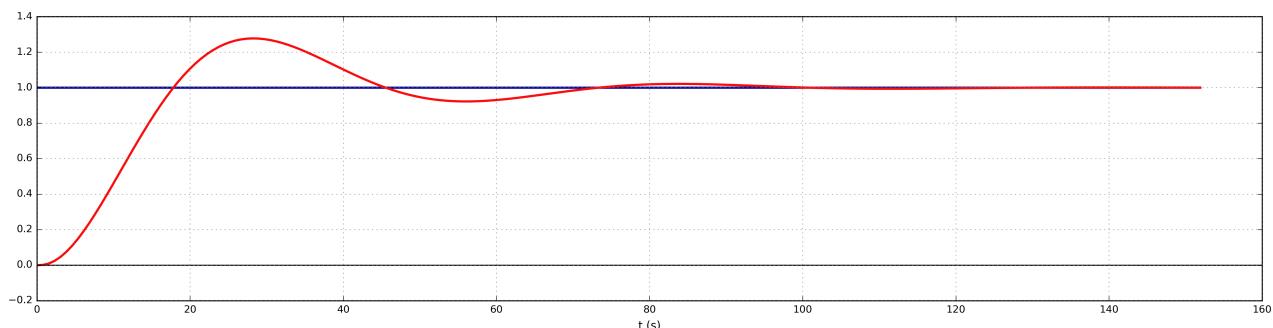
**Question 1** Justifier l'allure du diagramme du diagramme de Bode donné ci-dessous pour  $K_C = 1$ .

**Question 2** Donner graphiquement les marges de phase et de gain pour  $K_C = 1$ .

**Question 3** Donner analytiquement les marges de phase et de gain pour  $K_C = 1$  (méthode).



**Question 4** Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et  $40^\circ$ . Déterminer la plus grande valeur de  $K_C$  permettant de vérifier ce cahier des charges



## TD 01



## Drone quadri-rotor

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

## Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

## Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction  $\vec{z}'$ ) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x}')$ ) et en tangage (rotation autour de l'axe  $(O, \vec{y}')$ ) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ( $\frac{\omega_2}{\omega_4}$  pour le roulis et  $\frac{\omega_1}{\omega_3}$  pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

Accélération verticale	Vers le haut : 3g
	Vers le bas : 0,5g(en valeur absolue)
Precision	Erreur statique nulle
Stabilité	Marge de phase minimale : 35°
Rapidité	$t_{r,5\%} < 0,6$ s

**Objectif**

- Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.



Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

$u$  représente la tension de commande du moteur,  $\omega(t)$  son taux de rotation,  $\tau$  et  $k_v$  des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme  $k_q\omega^2$  provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en  $\omega^2$ , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , fréquence de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  et  $u = u_0 + \delta u$  où  $\delta\omega$  et  $\delta u$  représentent des petites variations de  $\omega$  et  $u$  autour du point de fonctionnement.

**Question 1** Déterminer l'équation stationnaire liant  $\omega_0$  et  $u_0$ .

**Question 2** Montrer que l'équation différentielle liant  $\delta\omega$  et  $\delta u$  est de la forme  $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$ . Exprimer  $A$  et  $B$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

On note  $\Delta\Omega(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta\omega$  et  $\Delta U(p)$  celle de  $\delta u$ .

**Question 3** Calculer la fonction de transfert  $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$  du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques  $K_m$  et  $T_m$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

## Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.

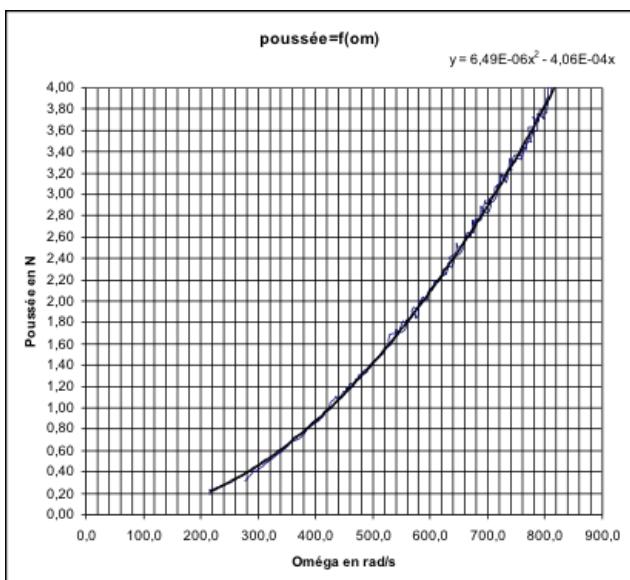
## Recherche du point de fonctionnement

$\omega_0$

Dans le mouvement de déplacement vertical de direction  $\vec{z}$ , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée  $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$ . La masse totale du drone est  $m = 240\text{g}$ . On prendra  $g = 9,81\text{m s}^{-2}$ .

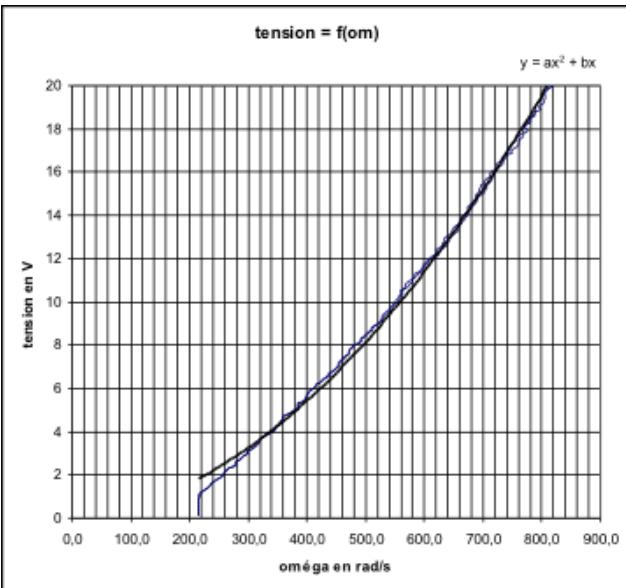
**Question 4** Calculer numériquement la poussée  $F_0$  que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude  $z_0$ .

La poussée  $F$  varie avec  $\omega^2$ . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant  $F$  à la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s.



**Question 5** Déterminer la fréquence de rotation  $\omega_0$  des moteurs en vol stationnaire.

Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande  $u$  et la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s en régime permanent lorsque  $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$ . La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme  $y = ax^2 + bx$ . On donne la constante de temps du moteur :  $\tau = 125\text{ms}$ .

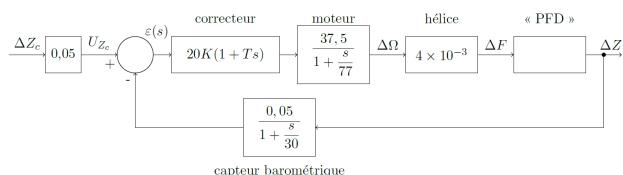


**Question 6** Déterminer l'expression des coefficients  $k_v$  et  $k_q$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\tau$ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$  du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant :  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$ .

## Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , par le schéma-bloc suivant :



Le gain du capteur barométrique est de  $0,05\text{V m}^{-1}$ . On pose  $z = z_0 + \Delta z(p)$ , la transformée de Laplace de  $\delta Z$ ,  $F = F_0 + \delta F$  représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

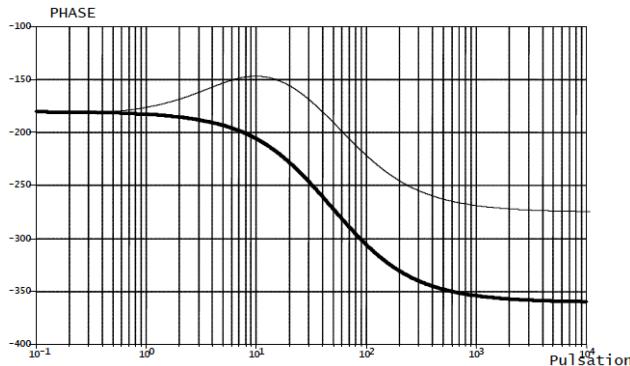
Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire :

$$m\ddot{Z} = 4F - mg.$$

**Question 7** Déterminer la fonction de transfert  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$  à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté  $K_{BO} = 2,5K$ . La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée ci-dessous, en gras avec

un correcteur proportionnel ( $T = 0$ ) et en trait fin avec le correcteur retenu ( $K = 1$  et  $T = 0,2\text{s}$ ).



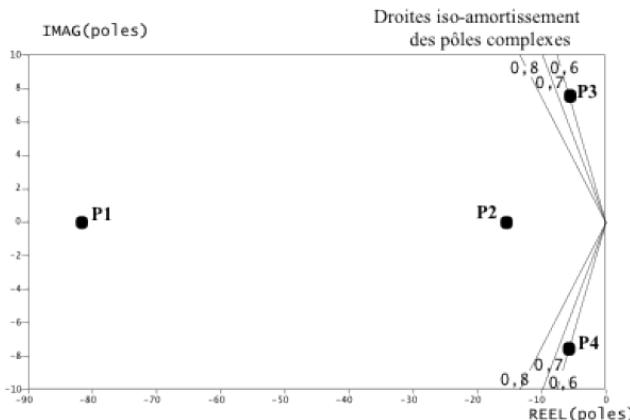
**Question 8** Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur  $T = 0,2\text{s}$  et  $K = 1$ . Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre  $1$  et  $1000 \text{ rad s}^{-1}$ , le gain sera compris entre  $-120 \text{ dB}$  et  $10 \text{ dB}$ .

**Question 9** Justifier que pour  $K = 1$ , on a  $\omega = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$ . En déduire graphiquement la marge de phase pour  $K = 1$ . Commenter.

**Question 10** Procéder au réglage du gain  $K$  du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

**Question 11** Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

La figure suivante représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain  $K$  précédemment déterminée.



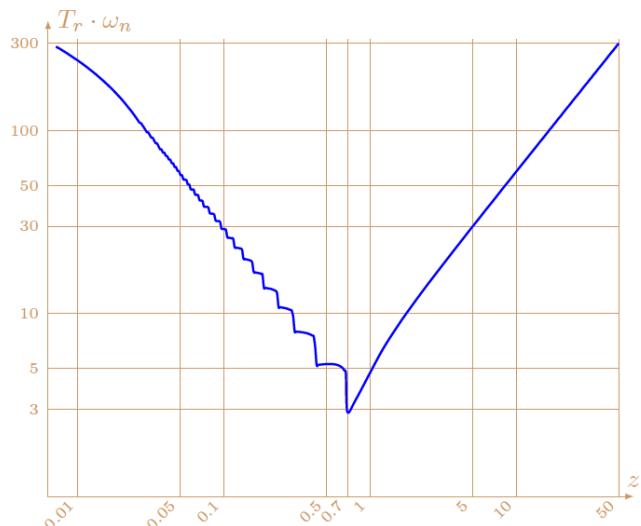
**Question 12** Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

**Question 13** À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

**Question 14** En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

**Question 15** Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre  $\omega_n$  et de coefficient d'amortissement  $\xi < 1$ . En déduire une estimation de la pulsation propre  $\omega_n$  de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

**Question 16** Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.



Pour éventuellement vous aider....

1.  $-\frac{1}{\tau}\omega_0 - k_q\omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau}u_0 = 0$ ;
2.  $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q\omega_0$  et  $B = \frac{k_v}{\tau}$ .
3.  $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q\omega_0}$  et  $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q\omega_0}$ .
4.  $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6\text{N}$
5.  $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}$
6.  $k_v = \frac{1}{b} (\text{rad/s/V})$  et  $k_b = \frac{a}{b\tau}$
7.  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2}, H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1 + Tp}{\left(1 + \frac{p}{77}\right)\left(1 + \frac{p}{30}\right)}$
- 8.
- 9.
10.  $K = 17,9$ .
11. La FTBO est de classe 2, l'erreur de position est donc nulle.
12.  $p_2 = -15, p_3 = -5 + 8j, p_4 = -5 - 8j$ .
13.  $\xi = 0,6$
- 14.
15.  $p = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}, \omega_n \approx 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
16.  $t_{5\%} \approx 0,61 \text{ s}$ .

## TD 01

## Corrigé



## Présentation

Cet hélicoptère quadri-rotor à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des microdrones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un engin de faible coût, robuste et facile à miniaturiser. Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant la direction  $\vec{z}'$ ) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de l'axe ( $O, \vec{x}'$ )) et en tangage (rotation autour de l'axe ( $O, \vec{y}'$ )) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe ( $\frac{\omega_2}{\omega_4}$  pour le roulis et  $\frac{\omega_1}{\omega_3}$  pour le tangage). Un extrait du cahier des charges en phase de décollage est donné ci-dessous.

Accélération verticale	Vers le haut : 3g
	Vers le bas : 0,5g(en valeur absolue)
Precision	Erreur statique nulle
Stabilité	Marge de phase minimale : 35°
Rapidité	$t_{r,5\%} < 0,6$ s

- Objectif**
- Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
  - Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

## Drone quadri-rotor

Pôle SII Chateaubriand – Joliot Curie

## Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)



Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'équation globale modélisant le moteur et sa commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u.$$

$u$  représente la tension de commande du moteur,  $\omega(t)$  son taux de rotation,  $\tau$  et  $k_v$  des constantes caractéristiques de l'ensemble moteur-hélice. Le terme  $k_q\omega^2$  provient du couple de frottement aérodynamique de l'air sur l'hélice tournant à grande vitesse.

L'équation du modèle du moteur fait apparaître un terme non linéaire en  $\omega^2$ , qui nécessite de linéariser donc l'équation autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , fréquence de rotation du moteur qui permet de maintenir le mini-drone en équilibre en vol stationnaire.

On pose  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  et  $u = u_0 + \delta u$  où  $\delta\omega$  et  $\delta u$  représentent des petites variations de  $\omega$  et  $u$  autour du point de fonctionnement.

**Question 1** Déterminer l'équation stationnaire liant  $\omega_0$  et  $u_0$ .

**Question 2** Montrer que l'équation différentielle liant  $\delta\omega$  et  $\delta u$  est de la forme  $\frac{d\delta\omega(t)}{dt} = -A\delta\omega(t) + B\delta u$ . Exprimer  $A$  et  $B$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

On note  $\Delta\Omega(p)$  la transformée de Laplace de  $\delta\omega$  et  $\Delta U(p)$  celle de  $\delta u$ .

**Question 3** Calculer la fonction de transfert  $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$  du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques  $K_m$  et  $T_m$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $k_v$ ,  $k_q$  et  $\omega_0$ .

## Linéarisation du modèle de moteur

Les moteurs choisis sont des moteurs synchrones sans balais à 14 pôles de type Hacker A20-54 entraînant directement l'hélice, sans réduction.

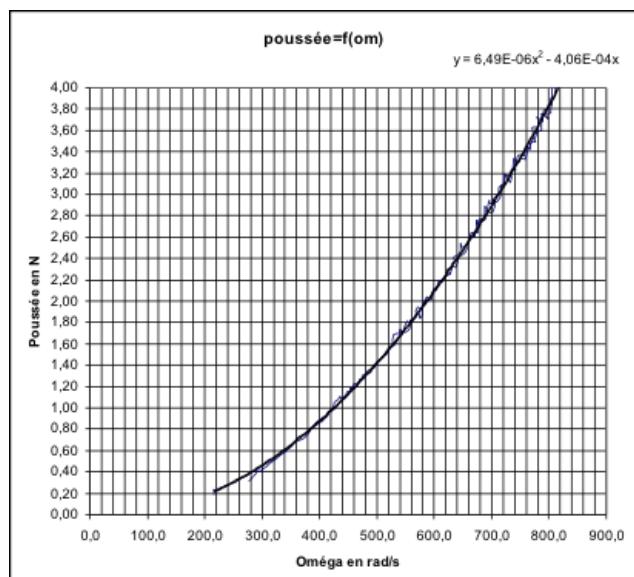
## Recherche du point de fonctionnement

$\omega_0$

Dans le mouvement de déplacement vertical de direction  $\vec{z}$ , les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée  $F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$ . La masse totale du drone est  $m = 240\text{g}$ . On prendra  $g = 9,81\text{m s}^{-2}$ .

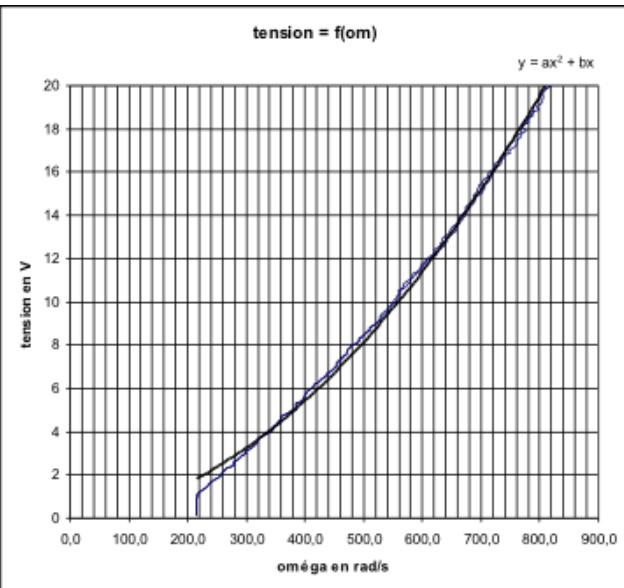
**Question 4** Calculer numériquement la poussée  $F_0$  que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude  $z_0$ .

La poussée  $F$  varie avec  $\omega^2$ . Des mesures réalisées sur un seul groupe moteur-hélice ont permis de tracer la courbe liant  $F$  à la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s.



**Question 5** Déterminer la fréquence de rotation  $\omega_0$  des moteurs en vol stationnaire.

Des essais ont également permis de tracer la courbe liant la tension de commande  $u$  et la fréquence de rotation  $\omega$  en rad/s en régime permanent lorsque  $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$ . La courbe de tendance associée aux résultats de ces essais est de la forme  $y = ax^2 + bx$ . On donne la constante de temps du moteur :  $\tau = 125\text{ms}$ .

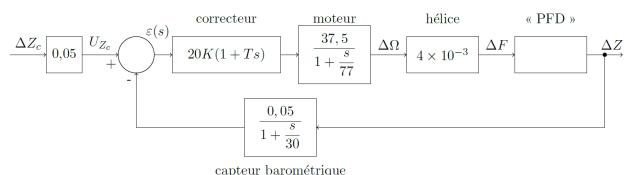


**Question 6** Déterminer l'expression des coefficients  $k_v$  et  $k_q$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\tau$ . Préciser leur unité.

On peut ainsi déduire le modèle  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$  du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant :  $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$ .

## Vérification des performances

L'asservissement vertical du drone peut être représenté après linéarisation des différentes fonctions de transfert autour du point de fonctionnement  $\omega_0$ , par le schéma-bloc suivant :



Le gain du capteur barométrique est de  $0,05\text{V m}^{-1}$ . On pose  $z = z_0 + \Delta z(p)$ , la transformée de Laplace de  $\delta Z$ ,  $F = F_0 + \delta F$  représente la poussée d'un seul moteur et on utilise l'équation linéarisée avec conditions initiales nulles.

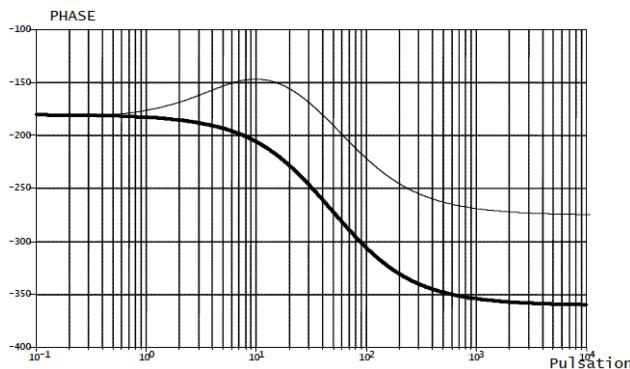
Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe vertical, permet d'écrire :

$$m\ddot{z} = 4F - mg.$$

**Question 7** Déterminer la fonction de transfert  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$  à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans la suite, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte sera noté  $K_{BO} = 2,5K$ . La courbe de phase du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée ci-dessous, en gras avec

un correcteur proportionnel ( $T = 0$ ) et en trait fin avec le correcteur retenu ( $K = 1$  et  $T = 0,2\text{s}$ ).



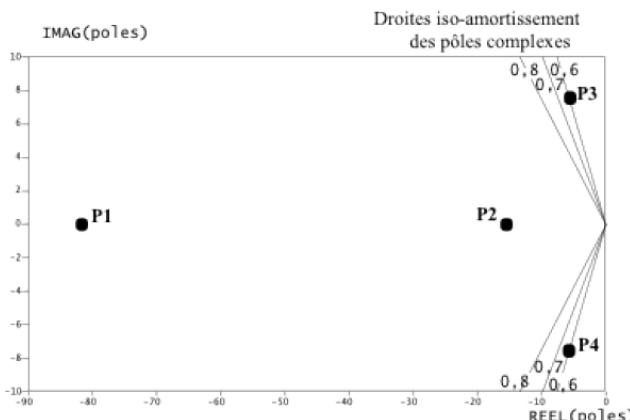
**Question 8** Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur  $T = 0,2\text{s}$  et  $K = 1$ . Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et  $1000 \text{ rad s}^{-1}$ , le gain sera compris entre  $-120 \text{ dB}$  et  $10 \text{ dB}$ .

**Question 9** Justifier que pour  $K = 1$ , on a  $\omega = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$ . En déduire graphiquement la marge de phase pour  $K = 1$ . Commenter.

**Question 10** Procéder au réglage du gain  $K$  du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

**Question 11** Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

La figure suivante représente la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe, pour la valeur du gain  $K$  précédemment déterminée.



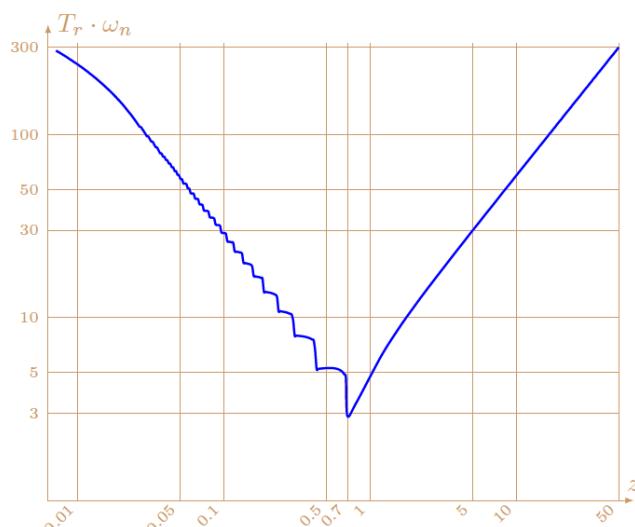
**Question 12** Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

**Question 13** À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

**Question 14** En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

**Question 15** Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre  $\omega_n$  et de coefficient d'amortissement  $\xi < 1$ . En déduire une estimation de la pulsation propre  $\omega_n$  de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

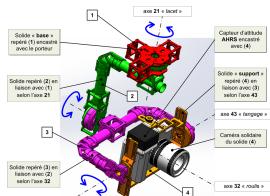
**Question 16** Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.



Pour éventuellement vous aider....

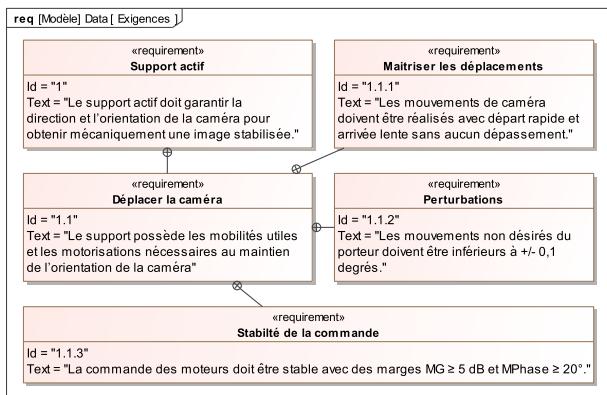
1.  $-\frac{1}{\tau}\omega_0 - k_q\omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau}u_0 = 0$ ;
2.  $A = \frac{1}{\tau} + 2k_q\omega_0$  et  $B = \frac{k_v}{\tau}$ .
3.  $K_m = \frac{k_v}{1 + 2\tau k_q\omega_0}$  et  $T_m = \frac{\tau}{1 + 2\tau k_q\omega_0}$ .
4.  $F_0 = \frac{mg}{4} = 0,6\text{N}$
5.  $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}$
6.  $k_v = \frac{1}{b} (\text{rad/s/V})$  et  $k_b = \frac{a}{b\tau}$
7.  $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2}, H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1 + Tp}{\left(1 + \frac{p}{77}\right)\left(1 + \frac{p}{30}\right)}$
- 8.
- 9.
10.  $K = 17,9$ .
11. La FTBO est de classe 2, l'erreur de position est donc nulle.
12.  $p_2 = -15, p_3 = -5 + 8j, p_4 = -5 - 8j$ .
13.  $\xi = 0,6$
- 14.
15.  $p = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}, \omega_n \approx 8,33 \text{ rad s}^{-1}$
16.  $t_{5\%} \approx 0,61 \text{ s}$ .

## TD 02



## Mise en situation

On s'intéresse à une nacelle active de caméra. Ce système de stabilisation, nommé CAM-GYR, permet de s'assurer que quelque soit l'orientation du porteur (caméraman), l'axe vertical de la caméra et toujours parallèle à la direction de la pesanteur. Le système est équipé de 3 moteurs permettant d'ajuster le roulis, le tangage et le lacet. On s'intéresse ici uniquement à la stabilisation de l'axe de tangage.



**Objectif** Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

## Travail demandé

On considère un modèle de l'axe de tangage sans perturbation et qui reçoit des consignes assez rapides modélisées par des échelons. L'ensemble {moteur, charge} ne présente pas de réducteur. Il est modélisé par un ensemble en série de deux fonctions de transfert :

- un gain pur de valeur  $K_m$  ;
- une fonction de transfert du premier ordre de gain statique  $A$  et de constante de temps  $\tau_m$ .

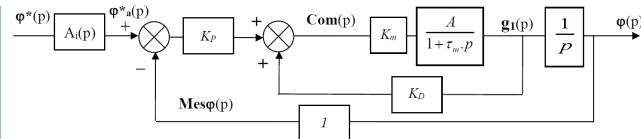
Cet ensemble présente comme entrée la commande du moteur  $com(t)$  et comme sortie la vitesse angulaire de rotation du moteur  $\omega_m(t)$ . Le réglage retenu est tel que  $K_m A = 1$ . **Le retour  $K_D$  agit par un sommateur.** Dans cette étude,  $A_i(p) = 1$ .

## Stabilisateur actif d'image \*\*

Mines Ponts 2018 – PSI

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C7.SF2 : déterminer les fonctions de transfert;
- Res2.C5 : stabilité des SLCI : équation caractéristique;
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase).



Modèle 1 de l'axe de tangage

**Question 1** Avec  $K_m A = 1$ , calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

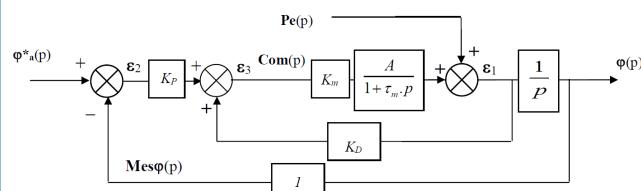
Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas :  $A_1(p) = 1$ .

**Question 2** Quelle est la valeur maximale de  $K_D$  pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqués.

En accord avec les résultats précédents, on fixe  $K_D = 0,5$  et  $\tau_m = 0,2\text{s}$ . Dans un premier temps on impose  $K_P = 10\text{s}^{-1}$ .

**Question 3** Lorsque  $A_i(p) = 1$ , le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Dans un second temps on se place en mode stabilisation. On s'intéresse toujours au comportement de l'axe de tangage mais sans le filtre passe bas ( $A_1(p) = 1$ ). On considère ici que la consigne est constante donc  $\varphi_a^*(t) = 0$ . Une perturbation  $Pe(p)$  agit au niveau de l'ensemble (moteur, charge) modélisée sur le schéma bloc (Modèle 2). On appelle  $Com(p)$  la transformée de Laplace de la commande du moteur  $com(t)$ .



Modèle 2 de l'axe de tangage

**Question 4** Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert  $Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)}$  qui lie la commande à la perturbation.

**Question 5** Avec le modèle 2 et une entrée  $Pe(p)$  échelon unitaire, déterminer la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la commande :  $com(t)$ . Quel sens physique donner à ce résultat?

**Question 6** Avec le modèle 2 déterminer la FTBO  $\frac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$  de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie  $Pert(p) = \frac{\varphi(p)}{Pe(p)}$ .

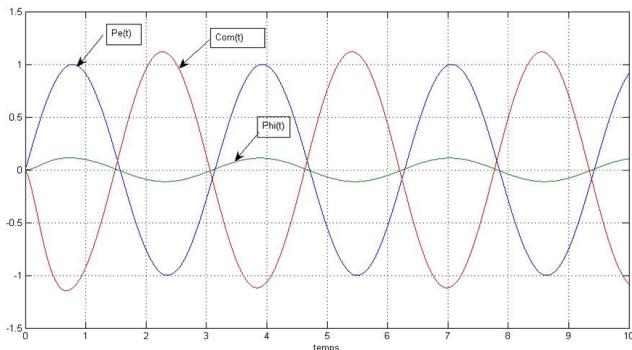
**Question 7** Déterminer la valeur lorsque  $t$  tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat?

**Question 8** On désire une marge de gain de  $M_G \geq 5$  dB et une marge de phase  $M\varphi \geq 20^\circ$  (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de  $K_P$  en utilisant les données ci-dessous.

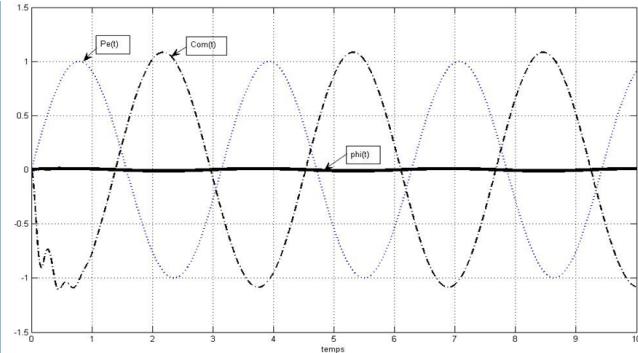
$$\text{On note } F(\omega) = \frac{2}{j\omega(1+0,4j\omega)}.$$

$\omega$ (rad/s)	1	2,5	5	7	10
$\text{Arg}(F(\omega))$	-112°	-135°	-153°	-160°	-166°
$20\log F(\omega) $	5,4 dB	3 dB	-1 dB	-3 dB	-6,2 dB

Le figure suivante présente la réponse temporelle de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale (due par exemple au vent qui crée un balancement de la GYRCAM) (ordonnée en degrés).



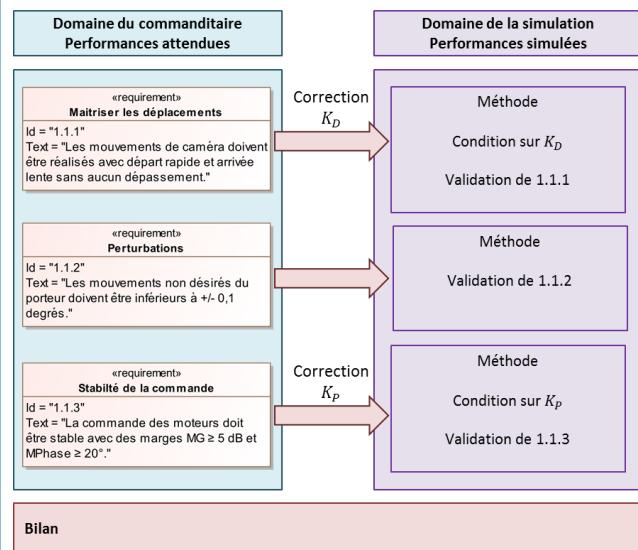
**Question 9** Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de  $Com(t)$  relativement à  $Pe(t)$  en utilisant le résultat de la question 5. Afin d'améliorer le comportement, un autre réglage a été effectué (voir figure suivante).



**Question 10** Analyser comparativement ce nouveau tracé.

### Synthèse

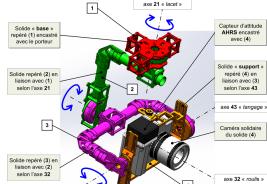
**Question 11** En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.



Éléments de corrigé
1. $\text{FTBO}(p) = \frac{K_P}{p(1+\tau_m p - K_D)} \text{ et } \text{FTBF}(p) = \frac{K_P}{A_i(p) \frac{p(1+\tau_m p - K_D) + K_P}{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}}.$
2. $K_D < 1.$
3.
4. $\text{Stab}(p) = \frac{(pK_D - K_P)(1+\tau_m p)}{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}.$
5. $\lim_{t \rightarrow \infty} com(t) = -1.$
6. $\frac{Mes\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m AK_P}{p(1+\tau_m p - K_m AK_D)} \text{ et } \text{Pert}(p) = \frac{1+\tau_m p}{p(1+\tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m}.$
7. $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0,1^\circ.$
8. $K_P < 1,41.$
9.
10.

## TD 02

## Corrigé



## Mise en situation

**Objectif** Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

## Travail demandé

**Question 1** Avec  $K_m A = 1$ , calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

**Correction** Attention au signe du comparateur de la boucle imbriquée!

On définit la FTBO par  $\text{FTBO}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{\text{Mes}\varphi(p)}$  avec  $\varepsilon(p)$  la sortie du premier comparateur.

$$\text{On a d'une part } G(p) = \frac{\frac{K_m A}{1 + \tau_m p}}{1 - \frac{K_m A K_D}{1 + \tau_m p}} = \frac{K_m A}{1 + \tau_m p - K_m A K_D}. \text{ On a alors } \text{FTBO}(p) = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Si on définit la FTBF par } \text{FTBF}(p) &= \frac{\varphi(p)}{\varphi^*(p)}, \text{ on a } \text{FTBF}(p) = A_i(p) \frac{\frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}{1 + \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}} \\ &= A_i(p) \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D) + K_m A K_P}. \end{aligned}$$

$$\text{Au final, } \text{FTBO}(p) = \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D)} \text{ et } \text{FTBF}(p) = A_i(p) \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P}.$$

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas :  $A_1(p) = 1$ .

**Question 2** Quelle est la valeur maximale de  $K_D$  pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable ? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

**Correction** Pour que le système soit stable, tous les coefficients du dénominateur  $D(p)$  de la FTBF doivent être de même signe (ainsi toutes les racines sont à partie réelle négative). On a  $D(p) = p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P = \tau_m p^2 p + (1 - K_D)p + K_P$  et donc nécessairement,  $1 - K_D > 0$  et  $K_D < 1$ .

**Question 3** Lorsque  $A_i(p) = 1$ , le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

**Correction** On a :  $\text{FTBF}(p) = \frac{K_P}{p + \tau_m p^2 - K_D p + K_P} = \frac{K_P}{\frac{\tau_m}{K_P} p^2 + p \frac{1 - K_D}{K_P} + 1}$ .

On a alors  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_p}{\tau_m}}$  et  $\xi = \frac{1-K_D}{K_p} \sqrt{\frac{K_p}{\tau_m}} = \frac{1-K_D}{2\sqrt{K_p\tau_m}} = \frac{0,5}{2\sqrt{2}} < 1$ . Il y a donc du dépassement. L'exigence n'est pas vérifiée.

**Question 4** Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert  $Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)}$  qui lie la commande à la perturbation.

**Correction** On a  $\varepsilon_2(p) = -\text{Mes}(\varphi(p)) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p)\frac{1}{p}$ . Par ailleurs,  $\varepsilon_1(p) = Pe(p) + \varepsilon_3(p)\frac{AK_m}{1+\tau_m p}$ . Enfin,  $\varepsilon_3(p) = K_p \varepsilon_2(p) + K_D \varepsilon_1(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_p}{p}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = \varepsilon_3(p)\frac{1}{K_D - \frac{K_p}{p}}$ .

$$\begin{aligned} \text{On a donc } \varepsilon_3(p)\frac{1}{K_D - \frac{K_p}{p}} &= Pe(p) + \varepsilon_3(p)\frac{AK_m}{1+\tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_3(p)\left(\frac{p}{pK_D - K_p} - \frac{AK_m}{1+\tau_m p}\right) = Pe(p) \\ &\Leftrightarrow \varepsilon_3(p)\frac{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_p)}{(pK_D - K_p)(1+\tau_m p)} = Pe(p). \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)} = \frac{(pK_D - K_p)(1+\tau_m p)}{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_p)}.$$

**Question 5** Avec le modèle 2 et une entrée  $Pe(p)$  échelon unitaire, déterminer la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la commande :  $com(t)$ . Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Correction** On a  $\lim_{t \rightarrow \infty} com(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p Com(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p Stab(p) Pe(p)$   
 $= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{(pK_D - K_p)(1+\tau_m p)}{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-K_p}{AK_m K_p} = -1$  si  $AK_m = 1$ .

Ainsi, pour une perturbation angulaire dans un autre sens, le système commande les moteurs avec une consigne dans le sens opposé.

**Question 6** Avec le modèle 2 déterminer la FTBO  $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$  de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie  $Pert(p) = \frac{\varphi(p)}{Pe(p)}$ .

**Correction** On a  $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m AK_p}{p(1+\tau_m p - K_m AK_D)}$  (c'est la même que pour le premier modèle).  
 On a vu que  $\varepsilon_2(p) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p)\frac{1}{p}$ ,  $\varepsilon_1(p) = Pe(p) + \varepsilon_3(p)\frac{AK_m}{1+\tau_m p}$  et  $\varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_p}{p}\right)$ .  
 En conséquences,  $\varepsilon_1(p) = Pe(p) + \varepsilon_3(p)\frac{AK_m}{1+\tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = Pe(p) + \varepsilon_1(p)\left(K_D - \frac{K_p}{p}\right)\frac{AK_m}{1+\tau_m p}$   
 $\Leftrightarrow \varepsilon_1(p)\left(1 + \left(\frac{K_p}{p} - K_D\right)\frac{AK_m}{1+\tau_m p}\right) = Pe(p) \Leftrightarrow p\varphi(p)\left(1 + \left(\frac{K_p}{p} - K_D\right)\frac{AK_m}{1+\tau_m p}\right) = Pe(p)$   
 et donc  $Pert(p) = \frac{1}{p\left(1 + \left(\frac{K_p}{p} - K_D\right)\frac{AK_m}{1+\tau_m p}\right)} = \frac{1}{p\left(1 + \frac{K_p - pK_D}{p}\frac{AK_m}{1+\tau_m p}\right)} = \frac{1+\tau_m p}{p(1+\tau_m p) + (K_p - pK_D)AK_m}$ .

**Question 7** Déterminer la valeur lorsque  $t$  tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Correction** On a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\Phi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p Pert(p) Pe(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1+\tau_m p}{p(1+\tau_m p) + (K_p - pK_D)AK_m}$   
 $= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{K_p AK_m} = \frac{1}{K_p} = 0,1^\circ$ .  
 Le système n'est pas précis s'il y a une perturbation échelon.

**Question 8** On désire une marge de gain de  $M_G \geq 5 \text{ dB}$  et une marge de phase  $M\varphi \geq 20^\circ$  (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de  $K_p$  en utilisant les données ci-dessous.

**Correction** Pour une marge de phase de  $20^\circ$ , la phase doit être de  $-160^\circ$  lorsque le gain est nul. Or en  $-160^\circ$  le gain est de  $-3 \text{ dB}$ . Pour respecter la marge de phase, il faut donc déterminer  $K_p$  tel que  $20\log K_p = 3$  soit  $K_p < 10^{\frac{3}{20}} \simeq 1,41$ .

Le système étant d'ordre 2, la marge de gain sera forcément infinie.

**Question 9** Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de  $Com(t)$  relativement à  $Pe(t)$  en utilisant le résultat de la question 5.

**Correction** La commande s'oppose à la perturbation (comme évoqué question 5). Le stabilisateur a au final un mouvement sinusoïdal dont les valeurs maximales et minimales sont voisines de  $0,1^\circ$  et  $-0,1^\circ$ .

**Question 10** Analyser comparativement ce nouveau tracé.

**Correction** Dans ce cas, les mouvements du porteur sont inférieurs à  $0,1$  degrés (en valeur absolue).

## Synthèse

**Question 11** En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.

### Correction

