NOM : ………………………………………………………….

1 PROTHESE ACTIVE TRANSTIBIALE

Question 1.

Dans le domaine symbolique :

$U_M\ \ p\ - E\ \ p\ = RI\ \ p$

$E\ \ p\ = k_c \Omega_M\ \ p\ \ ;\ C_M\ \ p\ = k_c I\ \ p$

$\dfrac{J_M p + \mu_M}{R_T^{\ 2}} \Delta\alpha'\ \ p\ = \dfrac{C_M\ \ p}{R_T} - C\ \ p$

$H_1(p) = \dfrac{k_c}{R}$ $H_2(p) = \dfrac{1}{R_T}$ $H_3(p) = \dfrac{R_T^{\ 2}}{\mu_M + J_M p}$ $H_6(p) = k_c$

Question 2.

Pour un système du 2nd ordre, la fréquence du système non amorti est donnée pour une phase de -90°. On trouve alors $f_0 \approx$ 10,5 Hz soit $\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0 = 66 \text{ rad/s}}$.

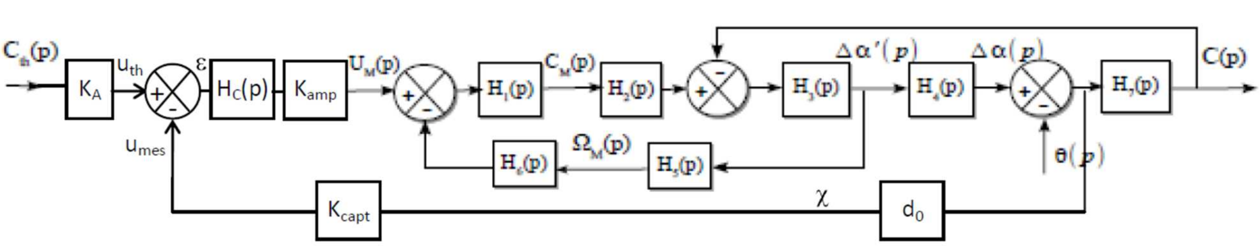
La résonnance lorsqu'elle existe a lieu pour $f_R = f_0\sqrt{1-2\xi_0^{\ 2}}$. Ici, on relève f_R = 10 Hz.

On peut alors en déduire $\xi_0 = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left[1-\left(\dfrac{f_R}{f_0}\right)^2\right]} = 0{,}2$.

On peut aussi utiliser le facteur de résonnance : $m = 20\log\left[\dfrac{1}{2\xi_0\sqrt{1-\xi_0^{\ 2}}}\right]$. Ici, on relève m=8.

Cela donne $\boxed{\xi_0 = 0{,}2}$.

Question 3.



Expression du bloc d'adaptation K_A

Si C_{th} = C, on doit avoir ε = 0.

Cela implique $\boxed{K_A = \dfrac{K_{capt} d_0}{H_7(p)} = \dfrac{K_{capt}}{k_{RS} d_0}}$.

Question 4.

La fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 0.

L'écart statique pour une entrée unitaire est alors donné par $\varepsilon_S = \dfrac{1}{1+K_{BO}}$.

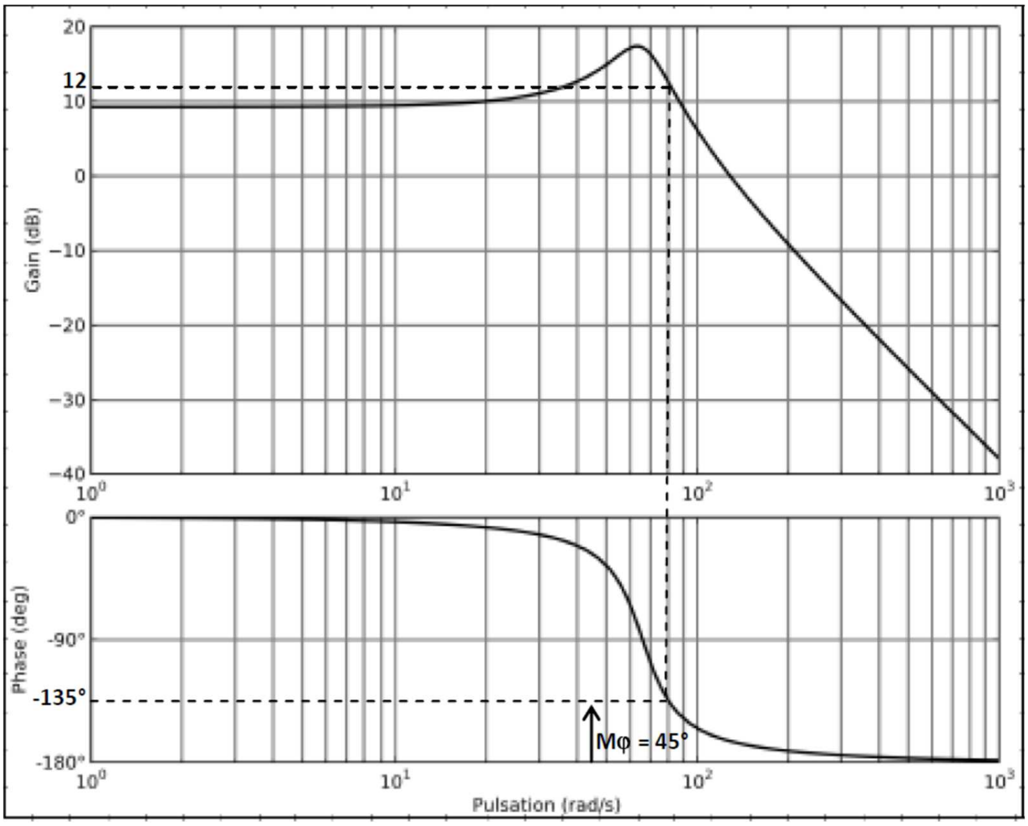
Ici, le gain de la boucle ouverte est $K_{BO} = a_0 K_{cor}$.

On a donc $\varepsilon_S = \dfrac{1}{1+a_0 K_{cor}}$.

Pour un écart relatif de 10 %, cela donne $10\% = \dfrac{1}{1+a_0 K_{cor1}}$.

Soit $K_{cor1} = 3{,}1\ V.N^{-1}.m^{-1}$.

Question 5.



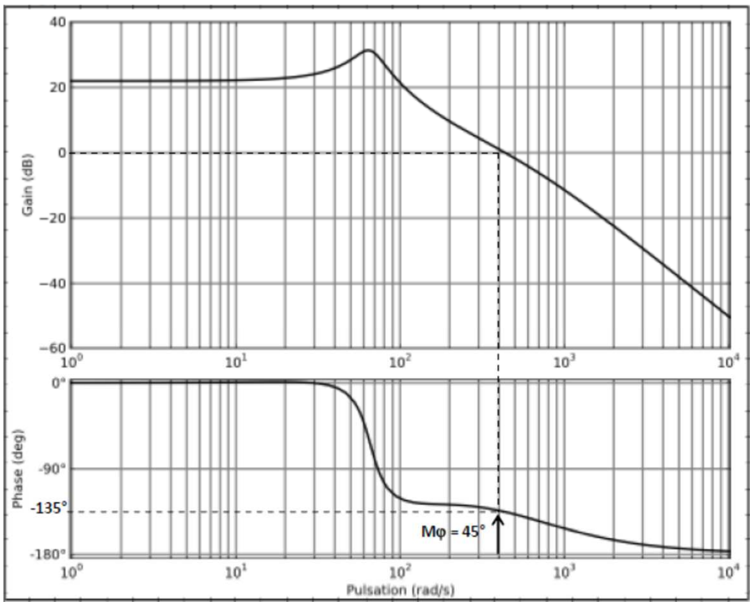
Il faut donc $20\log K_{cor2} = -12$.

Soit $K_{cor2} = 10^{-\frac{12}{20}} = 0{,}25\ V.N^{-1}.m^{-1}$.

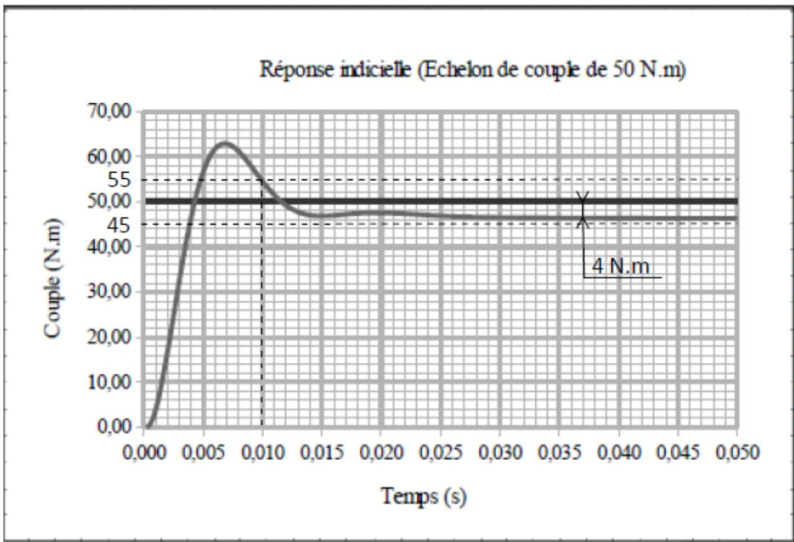
Le correcteur proportionnel ne peut donc pas satisfaire simultanément les critères de précision et de stabilité.

Question 6.

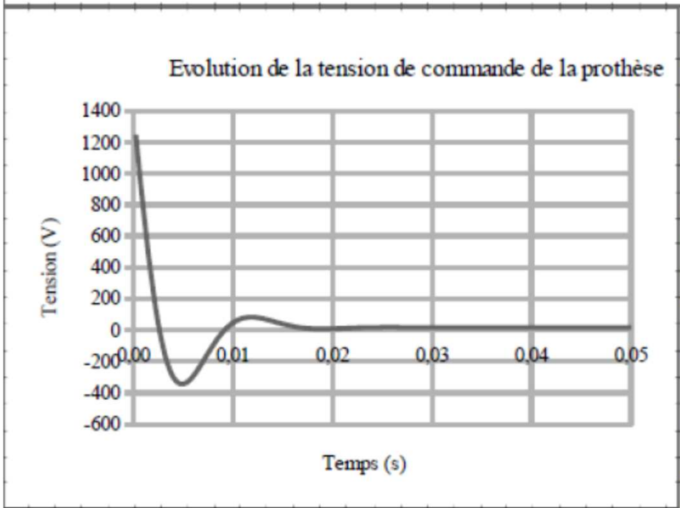
Question 7.



Le critère de stabilité est validé.



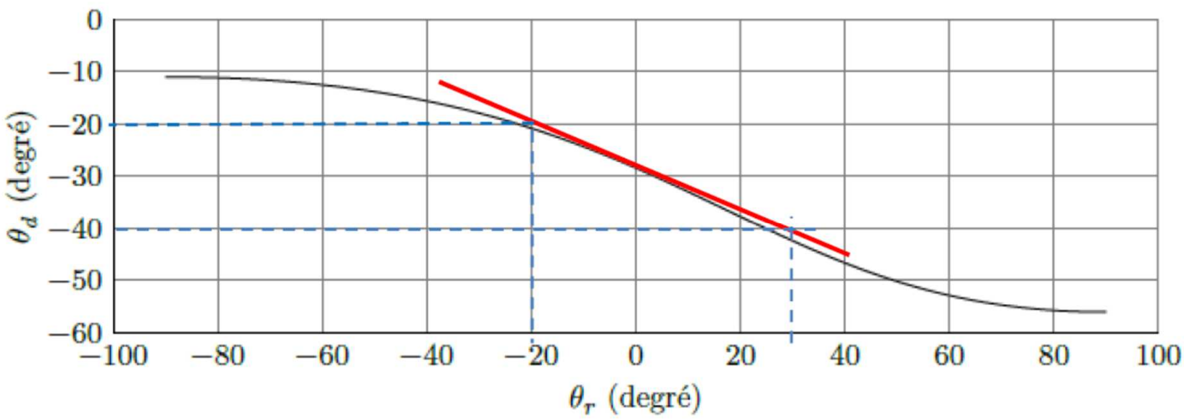
Le temps de réponse est : $tr_{5\%} = 0{,}01\ s < 0{,}1\ s$. Le critère de rapidité est donc validé.
L'écart mesuré est de 4 N.m.
Cela donne un écart relatif de 4/50 = 8 % < 10 %.
Le critère de précision est donc aussi validé.



La tension de commande durant la phase transitoire de début de consigne atteint des valeurs trop importantes, plus de 1200 V.
Il conviendrait d'interposer entre l'amplificateur et le moteur un dispositif de saturation pour ne pas dépasser $u_{max} = 16$ V.
La stabilité et la précision n'en serait pas affectées.
Reste le temps de réponse qui augmentera alors forcément. Il y a un peu de marge avant d'atteindre 0,1 s mais il n'est pas évident que ce soit suffisant.

Question 8.

2. Linéarisation de la loi entrée-sortie



Le coefficient directeur donne la valeur de $K_c = \frac{-20}{50} = -\frac{2}{5}$

Question 9.

Codeur : 250 points par tour => $c = \frac{N_{codeur}}{\theta} = \frac{250}{2.\pi} = 39.8\, rad^{-1}$

Tachy : 5V pour 3000tr/min => $K_\Omega = \frac{U_\Omega}{\Omega} = \frac{5}{\frac{3000.2.\pi}{60}} = \frac{1}{20.\pi} = 1{,}6.10^{-2}\ V/rad.s^{-1}$

Question 10.

Q 4. Détermination de la valeur finale de la vitesse de rotation pour les modèles initial et simplifié.

Modèle initial : $H_I(p) = \frac{\Omega(p)}{I_C(p)}$ avec $I_C(p) = \frac{1}{p}$

Théorème de la valeur finale :

$$\Omega(\infty) = \lim_{p\to 0} p\,.\,\Omega(p) = \frac{K.k_2.h}{k_2.h.k_{ri}.f} = \frac{K}{k_{ri}.f}$$

Modèle simplifié : $H_I(p) = \frac{\Omega(p)}{I_C(p)} = \frac{K}{k_{ri}}.\frac{1}{J.p+f}$ avec $I_C(p) = \frac{1}{p}$

Théorème de la valeur finale :

$$\Omega(\infty) = \lim_{p\to 0} p\,.\,\Omega(p) = \frac{K}{k_{ri}.f}$$

Question 11.

$$H_\Omega(p)=\frac{FTChaine\ directe}{1+FTBO}=\frac{C_\Omega(p).\frac{K}{K_{ri}}.\frac{1}{Jp+f}}{1+K_\Omega.C_\Omega(p).\frac{K}{K_{ri}}.\frac{1}{Jp+f}}$$

En remplaçant $C_\Omega(p)$ par son expression, il vient après calculs :

$$\boxed{H_\Omega(p)=\frac{\frac{1}{K_\Omega}}{1+\frac{K_{ri}.f}{k_1.K.K_\Omega}.T_1.p.\frac{\frac{J}{f}p+1}{T_1.p+1}}=\frac{\frac{1}{K_\Omega}(1+T_1.p)}{1+\left(1+\frac{K_{ri}.f}{k_1.K.K_\Omega}\right).T_1.p+\frac{K_{ri}.J.T_1}{k_1.K.K_\Omega}.p^2}}$$

Question 12.

On donne $T_1=\frac{J}{f}$, en remplaçant dans l'expression trouvée précédemment on obtient :

$$\boxed{H_\Omega(p)=\frac{\frac{1}{K_\Omega}}{1+\frac{K_{ri}}{k_1.K.K_\Omega}.J.p.}}$$

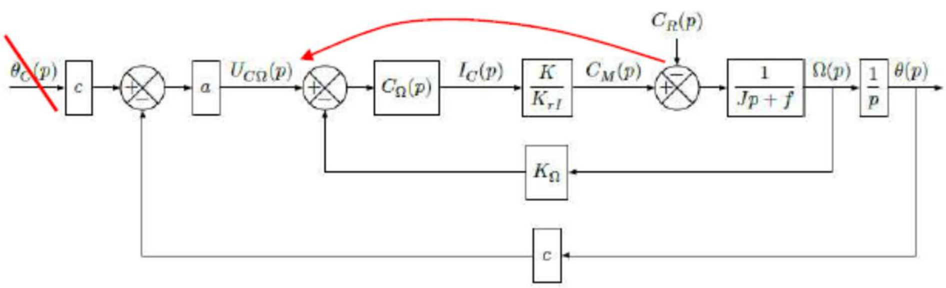
Donc par identification on trouve :

$$b=\frac{1}{K_\Omega}=20.\pi=62{,}8\ rad.s^{-1}/V$$

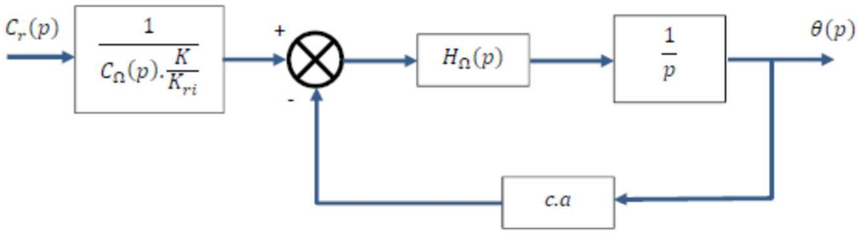
$$\tau=\frac{K_{ri}}{k_1.K.K_\Omega}.J=2{,}17.10^{-3}s$$

Question 13.

On effectue une transformation de schéma en déplaçant le comparateur de $C_r(p)$



D'où la nouvelle structure de schéma bloc :



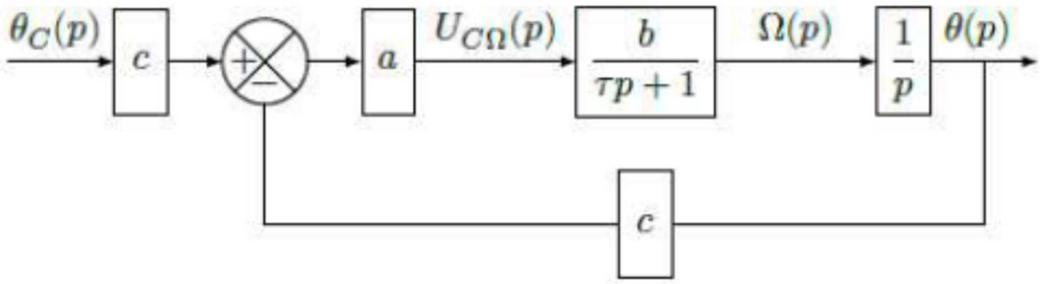
$$\frac{\theta(p)}{C_r(p)}=\frac{1}{C_\Omega(p).\frac{K}{K_{ri}}}.\frac{H_\Omega(p).\frac{1}{p}}{1+c.a.H_\Omega(p).\frac{1}{p}}=\frac{K_{ri}.T_1.p}{K.k_1.(1+T_1.p)}.\frac{\frac{b}{1+\tau p}.\frac{1}{p}}{1+\frac{b}{1+\tau p}.\frac{1}{p}}$$

L'application du théorème de la valeur finale pour une entrée de type échelon donne :

$$\theta(\infty)=\lim_{p\to 0}p.\theta(p)=0$$

Ce résultat était prévisible car le correcteur PI est placé avant la perturbation.

Question 14.



Calcul de la fonction de transfert $\frac{\theta(p)}{\theta_C(p)}$

$$\frac{\theta(p)}{\theta_C(p)} = c.\frac{\frac{a.b}{1+\tau p}.\frac{1}{p}}{1+\frac{a.b.c}{1+\tau p}.\frac{1}{p}} = \frac{a.b.c}{(1+\tau p)p + a.b.c} = \frac{1}{1+\frac{1}{a.b.c}p+\frac{\tau}{a.b.c}p^2}$$

On peut exprimer le coefficient d'amortissement ζ à partir des paramètres a, b, c et τ.

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\tau.a.b.c}} = 0{,}7$$

Compte tenu des valeurs numériques fournies, on obtient $a = 9{,}2.10^{-2}\ V$

Cette valeur du coefficient d'amortissement permet d'avoir le meilleur temps de réponse à 5% si on accepte le dépassement transitoire.

Question 15.

Question 16.

9. Expression de l'écart de position

$$\mu(p) = \theta_c(p) - \theta(p) = \big(1 - H_\theta(p)\big).\theta_c(p)$$

En posant $H_\theta(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1+H_{BO}(p)}$ avec $H_{BO}(p) = \frac{abc}{p(1+\tau p)}$

Ecart pour une consigne de type échelon :

$$\mu_p(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\mu(p) = 0$$

Ecart pour une consigne de type rampe :

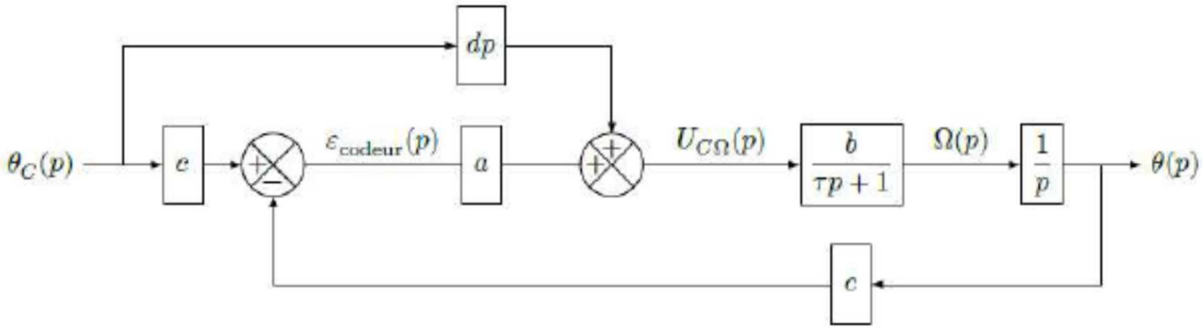
$$\mu_v(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\mu(p) = \frac{1}{abc} = 4{,}31.10^{-3} rad$$

Ecart pour une consigne de type accélération :

$$\mu_a(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\mu(p) = \infty$$

Question 17.

12. Expression de l'erreur



On note l'erreur en position $(t) = \theta_C(t) - \theta(t)$.

D'où en intégrant le bloc *c* dans la chaine directe :

$$\mu(p) = \theta_C(p) - \theta(p) = \theta_C(p) - \left(c.a.\frac{b}{\tau p + 1}.\frac{1}{p}.\mu(p) + dp.\frac{b}{\tau p + 1}.\frac{1}{p}.\theta_C(p) \right)$$

$$\mu(p).\left(1 + \frac{abc}{(\tau p + 1)p}\right) = \theta_C(p).\left(1 - \frac{db}{\tau p + 1}\right)$$

$$\mu(p) = \frac{(\tau p + 1 - db).p}{(\tau p + 1)p + abc}.\theta_C(p)$$

On en déduit les erreurs de position et de vitesse :

Erreur pour une consigne de type échelon : $\theta_C(p) = \frac{1}{p}$

$$\mu_p(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\mu(p) = 0$$

Erreur pour une consigne de type rampe : $\theta_C(p) = \frac{1}{p^2}$

$$\mu_v(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\mu(p) = \frac{1 - db}{abc}$$

L'erreur de position est donc compatible avec le cahier des charge car inférieure à 1%

Question 18.

On veut

$$\mu_v(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\mu(p) = \frac{1 - db}{abc} = 0$$

D'où : $d = \frac{1}{b} = 0.016$

Calcul de l'erreur en accélération

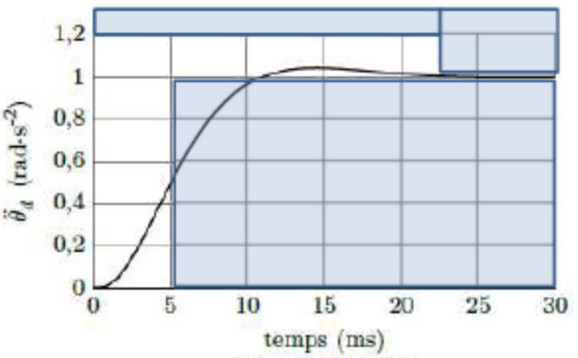
Erreur pour une consigne de type accélération : $\theta_C(p) = \frac{1}{p^3}$

$$\mu_a(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\mu(p) = \lim_{p\to 0} p.\frac{(\tau p + 1 - db).p}{(\tau p + 1)p + abc}.\frac{1}{p^3}$$

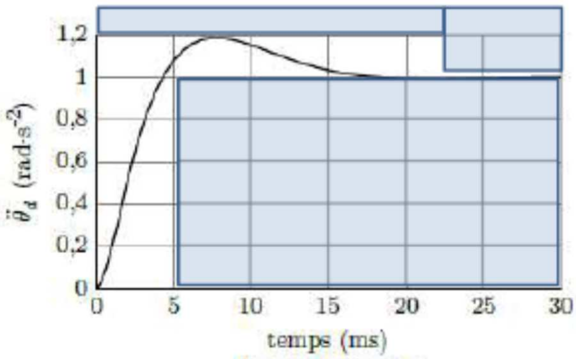
En prenant le résultat issu de la question précédente, on a $1 - db = 0$, donc :

$$\mu_a(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\frac{\tau p.p}{(\tau p + 1)p + abc}.\frac{1}{p^3} = \frac{\tau}{abc} = 9{,}5.10^{-6} rad$$

Question 19.



Sans anticipation



Avec anticipation

Si on place les gabarits de la réponse attendue à partir des données du cahier des charges, on remarque que seule la réponse avec anticipation est conforme aux exigences.

Question 20.

Q 20. D'après les résultats de la Q12, on a pour un axe :

$$\mu(p) = \frac{(\tau p + 1 - db).p}{(\tau p + 1)p + abc}.\theta_C(p)$$

- Pour une entrée de type échelon, l'erreur en position est nulle donc :

$\theta_1 = \theta_2 = \theta_C$ d'où $\theta_1(\infty) - \theta_2(\infty) = 0\,rad$

- Pour une entrée de type rampe, l'erreur est donnée par :

$$\mu_v(\infty) = \lim_{p\to 0} p.\mu(p) = \frac{1-db}{abc} = \theta_c(\infty) - \theta(\infty)$$
$$\mu_{v1}(\infty) = \theta_c(\infty) - \theta_1(\infty)$$
$$\mu_{v2}(\infty) = \theta_c(\infty) - \theta_2(\infty)$$

On en déduit donc que :

$$\theta_1(\infty) - \theta_2(\infty) = \mu_{v2}(\infty) - \mu_{v1}(\infty) = \frac{1-db_2}{ab_2c} - \frac{1-db_1}{ab_1c} = \frac{b_1-b_2}{ab_1b_2c} = 4{,}4.\,10^{-4}\,rad$$

- Pour une entrée de type accélération

$$\frac{\theta_i(p)}{\theta_c(p)} = (d.p + a.c).\frac{b_i}{(T_ip+1).p + a.b_i.c}$$

D'où : $\theta_1(p) - \theta_2(p) = (d.p + a.c).\left(\frac{b_1}{(T_1p+1).p+a.b_1.c} - \frac{b_2}{(T_2p+1).p+a.b_2.c}\right).\theta_c(p)$

L'application du théorème de la valeur finale donne :

$$\theta_1(\infty) - \theta_2(\infty) = \lim_{p\to 0} p.(d.p + a.c).\left(\frac{b_1}{(T_1p+1).p + a.b_1.c} - \frac{b_2}{(T_2p+1).p + a.b_2.c}\right).\frac{1}{p^3} = +\infty$$

Question 21.

I. L'écart statique en accélération vaut au plus $10^{-5}rad$ pour une consigne de 1 rad donc <1% de l'exigence du cahier des charges sur la plage de temps d'utilisation (0-30ms)