

Colle 01

Four pour traitement thermique

Équipe PT La Martinière

Savoirs et compétences :

Un four électrique destiné au traitement thermique d'objets est constitué d'une enceinte close chauffée par une résistance électrique alimentée par une tension $v(t)$. Dix objets peuvent prendre place simultanément dans le four. Le traitement thermique consiste à maintenir les objets pendant 1 heure à une température de 1200°C (régulée de façon optimale car les objets sont détruits si la température dépasse 1400°C). Entre deux cuissons, un temps de 24 minutes est nécessaire pour procéder au refroidissement du four et à la manutention. Le four est régi par l'équation différentielle : $\frac{d\theta(t)}{dt} + 2000 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = 0,02v(t)$.

Question 1 Calculer la fonction de transfert $G(p)$ du four en boucle ouverte. Quel est le gain statique du four? Que se passerait-il si on alimentait le four en continu et en boucle ouverte?

On décide de réguler la température $\theta(t)$ dans le four en utilisant un capteur de température qui délivre une tension $u(t)$. Le capteur est régi par l'équation différentielle : $u(t) + 2 \frac{du(t)}{dt} = 5 \cdot 10^{-3} \theta(t)$. On introduit également

un gain K dans la chaîne directe.

Question 2 Faire le schéma de la boucle de régulation et calculer sa fonction de transfert en boucle fermée. Rapporter les conditions de stabilité d'un système.

Question 3 On souhaite se placer dans des conditions de stabilité suffisantes en imposant une marge de phase $\Delta\varphi = 45^\circ$. Quelle est dans ces conditions, la valeur du temps de montée en boucle fermée (voir ci-dessous)?

On donne t_m le temps de montée du système en BF et $t_m \simeq \frac{3}{\omega_{co}}$ et ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

On souhaite atteindre une cadence de 100 pièces en 24h, ceci est obtenu pour $K = 11,3$.

Question 4 Pour conserver une marge de phase égale à 60° on introduit un correcteur à avance de phase sous la forme $C(p) = K_a \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$. Déterminer les constantes du correcteur.

soit :
$$H(p) = \frac{0,02K(1+2p)}{p(1+2p)(1+2000p)+10^{-4}K} = \frac{0,02K(1+2p)}{4000p^3+2002p^2+p+10^{-4}K}$$

Les conditions de stabilité en boucle fermée nous sont données par le critère de Routh :

$$\begin{array}{ccc} 4000 & 1 & 0 \\ 2002 & 10^{-4}K & 0 \\ \hline 2002 - 0,4K & 0 & 0 \\ 2002 & & \\ \hline 10^{-4}K & 0 & 0 \end{array}$$

Le système est stable si et seulement si :

$$2002 - 0,4K > 0 \Rightarrow K < 5005$$

d) La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p)B(p) = \frac{10^{-4}K}{p(1+2000p)(1+2p)}$$

Si on impose une marge de phase de 45° , on a :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2000\omega_{c0} - \arctan 2\omega_{c0} = \frac{\pi}{4}$$

En négligeant le dernier terme, on obtient : $\omega_{c0} = \frac{1}{2000} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$

d'où :

$$t_m = \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5 \cdot 10^{-4}} = 6000 \text{ s} = 1 \text{ h } 40 \text{ mn}$$

e) Pour déterminer la valeur du signal de consigne, il convient de calculer la valeur du signal délivré par le capteur lorsque la température atteint 1200°C : en régime permanent, le capteur se comporte comme un gain de $5 \cdot 10^{-3} \text{ V}/^\circ\text{C}$.

Par conséquent :

$$\theta = 1200^\circ\text{C} \Rightarrow u = 6 \text{ V}$$

Comme la chaîne directe comporte un intégrateur, l'erreur statique sera nulle. Le système ne peut donc se stabiliser à 1200°C que si le signal d'entrée est un échelon de hauteur 6 V.

Si le système est réglé pour obtenir une marge de phase de 45° , la réponse du système, en boucle fermée, sera caractérisée par un facteur d'amortissement égal à 0,45. D'après les abaques des réponses indicielles, cela correspond à un dépassement de 20 %. La température maximale atteinte dans le four (temporairement) est donc égale à 1440°C .

Ce dépassement est bien évidemment trop important puisque les objets à cuire ne peuvent être soumis à des températures dépassant 1400°C .

f) Si on souhaite limiter le dépassement à 10 %, nous devons régler le système de sorte qu'il présente une marge de phase de 60° . Cette marge de phase correspond à une pulsation ω_{c0} telle que :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2000\omega_{c0} - \arctan 2\omega_{c0} = \frac{\pi}{3}$$

soit :

$$\arctan 2000\omega_{c0} \approx \frac{\pi}{6} \Rightarrow \omega_{c0} \approx \frac{\tan \pi/6}{2000} = 0,26 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Par conséquent :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} \approx 3 \text{ h } 10 \text{ mn}$$

Dans ces conditions, chaque traitement durera 4 heures et 50 minutes (temps de montée en température ajouté à une heure de cuisson et à 24 minutes de manutention et refroidissement). On ne pourra donc en réaliser que 5 par 24 heures. Le nombre maximum d'objets que l'on pourra traiter par jour est donc limité à 50.