

TD 03



Vanoise Express

E3A – PSI – 2014

Savoirs et compétences :

Présentation

Noël 2003, le téléphérique Vanoise Express relie enfin les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs, donnant naissance à paradisiski, un domaine skiable de 425 km, le troisième plus grand de France.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	Ecart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M\phi \geq 45^\circ$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1 \text{ rad/s}$

Modélisation du moteur à courant continu

Hypothèses et données :

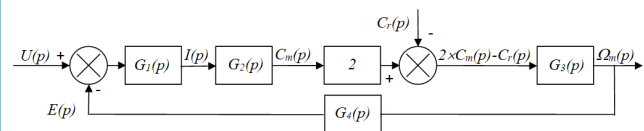
- on suppose les conditions initiales nulles ;
- les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- $L = 0.59 \text{ mH}$ inductance d'un moteur ;
- $R = 0.0386 \Omega$ résistance interne d'un moteur ;
- $f = 6 \text{ N m s/rad}$ coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- $J = 800 \text{ kg m}^2$ moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- $c_m(t) = k_T i(t)$ avec $k_T = 5.67 \text{ Nm/A}$ (constante de couple d'un moteur) ;
- $e(t) = k_E \omega_m(t)$ avec $k_E = 5.77 \text{ Vs/rad}$ (constante électrique d'un moteur) ;
- équations de la dynamique : $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$;
- loi des mailles : $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$.

Notations :

- on notera $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- $u(t)$ tension d'alimentation des moteurs ;
- $i(t)$ intensité traversant un moteur ;
- $e(t)$ force contre électromotrice d'un moteur ;
- $\omega_m(t)$ vitesse de rotation d'un moteur ;
- $c_m(t)$ couple d'un seul moteur ;
- $c_r(t)$ couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du

vent, ramené sur l'axe des moteurs.

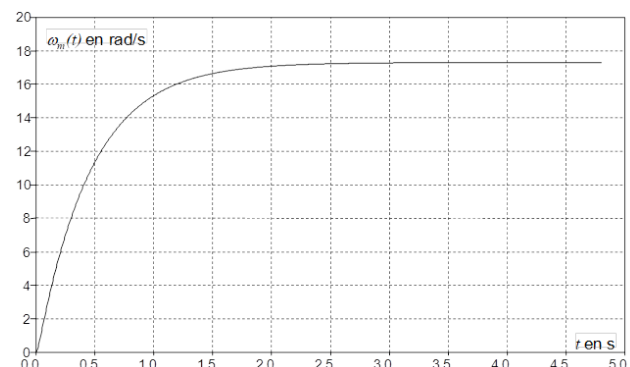
Question 1 Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminez les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.



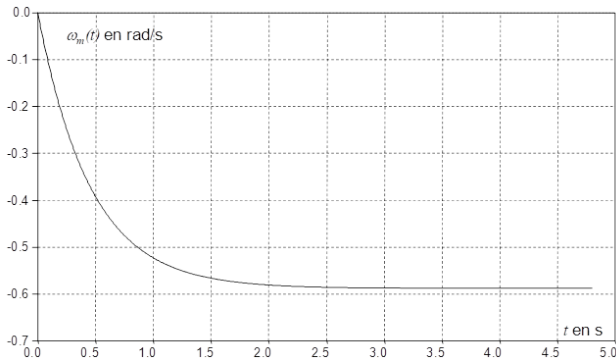
Question 2 $\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$. Exprimer les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

- la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V (le couple de perturbation $c_r(t)$ est nul) ;
- la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m (la tension $u(t)$ est nulle).



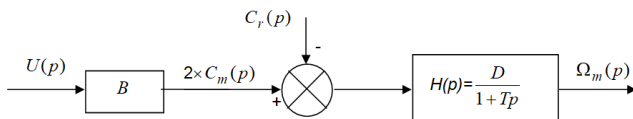
Réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V.



Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m.

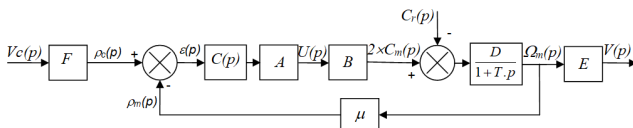
Question 3 Choisissez et justifiez un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminez numériquement les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ont sensiblement le même dénominateur, le schéma bloc ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



Question 4 Donnez la valeur numérique des trois constantes B , D et T .

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

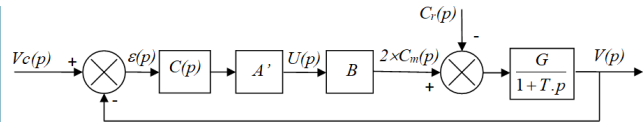


- La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F .
- Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0.716 \text{ Vs/rad}$ transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$.
- Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A , qui alimente les deux moteurs électriques.
- La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain E .

Question 5 Déterminez l'expression du gain E . Faire une application numérique.

Question 6 Déterminez l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t) = 0$ entraîne $v_c(t) = v(t)$. Faire une application numérique.

Par transformation du schéma bloc, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients E et F calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients A' et G . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes : $A' \cdot B = 3 \cdot 10^{-4} \text{ sN}$; $G = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m/(sNm)}$ et $T = 0.47 \text{ s}$.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

Question 7 Justifiez en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

Question 8 On suppose $C_r(p) = 0$. Calculez en fonction de C_0 , A' , B , G et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12 \text{ m/s}$. Faire l'application numérique.

On suppose $V_c(p) = 0$.

Question 9 Calculez en fonction de C_0 , A' , B , G et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation en échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$ qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

Question 10 Faire également une application numérique si $C_{r0} = 7460 \text{ Nm}$ qui modéliserait la montée vers La Plagne.

Question 11 Donnez numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

Question 12 Existe-t-il une valeur réaliste de C_0 pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié? Justifiez.

Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur $C(p) = \frac{C_i}{p}$.

Question 13 Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée $FTBO(p)$. Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.

Question 14 Tracez le diagramme asymptotique de Bode de $FTBO(p)$. Tracez également l'allure des courbes.

Question 15 Quelles valeurs numériques de C_i permettent de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges?

Question 16 Ces valeurs numériques de C_i permettent-elles de respecter le critère de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges? Justifiez.

Question 17 On suppose $C_r(p)=0$. Calculez numériquement l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12 \text{ m/s}$.

Question 18 On suppose $V_c(p) = 0$. Calculez numériquement l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270 \text{ N m}$ qui modéliserait la descente des « Arcs ».

Question 19 Donnez numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$. Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié? Justifiez.

On suppose $C_r(p)=0$.

Question 20 Calculez l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations »? Justifiez.

Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$, produit de la fonction $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a > 1$ (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1+Tp)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans $C_a(p)$ (c'est-à-dire pour $C_a(p)=1$).

Question 21 Montrez que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?

La fonction $C_a(p)$ va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

Question 22 Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rad/s pour obtenir une phase de -135° ?

Question 23 Tracez en fonction de a , τ et K les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a>1$. Précisez clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Précisez de même les pulsations des points particuliers.

Question 24 La phase maximum φ_{\max} ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$. Calculez numériquement a pour obtenir la remontée de

phase déterminée sur le diagramme de Bode à la question 30.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

Question 25 Donnez l'expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

Question 26 En déduire la valeur numérique de τ pour que φ_{\max} soit ajoutée à la pulsation 1 rad/s .

Question 27 Calculez numériquement la valeur à donner à K pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges? Précisez la démarche utilisée.

Question 28 Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés? Justifiez.

Question 29 Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges? Justifiez.

Éléments de correction

- $G_1(p) = \frac{1}{R+Lp}$, $G_2(p) = k_T$, $G_3(p) = \frac{1}{f+Jp}$, $G_4(p) = k_E$.
- $F_1(p) = \frac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1+2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ et $F_2(p) = \frac{G_3(p)}{1+2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$.
- $F_1(p) = \frac{0,1725}{1+0,47p}$ et $F_2(p) = \frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{1+0,47p}$.
- $B = 297,4 \text{ N m V}^{-1}$, $D = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1} \text{ Nm}$ et $T = 0,47 \text{ s}$.
- $E = \frac{D}{2} k = 0,1 \text{ m}$.
- $F = \frac{\mu}{E} = 7,16 \text{ V s m}^{-1}$.
- FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
- FTBO de classe 0 $\varepsilon'_S = \frac{V_0}{1+C_0A'BG} = 4,286 \text{ m s}^{-1}$.
- $\varepsilon''_S = \frac{C_{r0}G}{1+C_0A'BG} = -0,156 \text{ m s}^{-1}$.
- $\varepsilon''_S = 0,160 \text{ m s}^{-1}$.
- $\varepsilon'_S = 4,13 \text{ m s}^{-1}$, $\varepsilon'_S = 4,46 \text{ m s}^{-1}$.
- C_0 infini
- FTBO(p) = $\frac{1,8}{p(1+0,47p)}$
-
- $\omega_{0\text{dB}} \leq 2,13 \text{ rad s}^{-1}$ et $C_i \leq 1,67$.
-
- FTBO de classe 1 $\varepsilon'_S = 0$.
- Intégrateur en amont de la perturbation $\varepsilon''_S = 0$.
- CDC OK.
- $\varepsilon_v = \frac{1}{C_iA'BG}$
- Marge négative, système instable.
- 70° de phase à ajouter.
-
- $a = 32,16$
- $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
- $\tau = 0,176 \text{ s}$
- $K = 0,109$
-
-

Diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \frac{A'.B.G}{p^2.(1+T.p)}$

