

TD 1



Quille pendulaire ★

Concours Commun Mines Ponts 2014

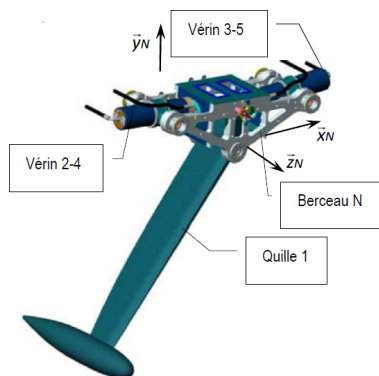
Savoirs et compétences :

- ☐ Con.C2 : Correction d'un système asservi
- ☐ Con.C2.SF1 : Choisir un type de correcteur adapté

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



Modèle volumique 3D

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

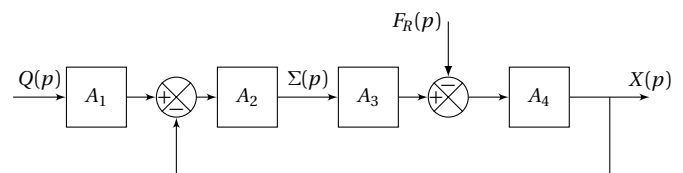
Objectif L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit $q(t)$ proportionnel à sa tension de commande $v(t)$. Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le

déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servovalves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$ (a);
- $M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$ (b).

On a :

- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$: débit d'alimentation du vérin $[\text{m}^3 \text{s}^{-1}]$;
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$: différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$: position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$: composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

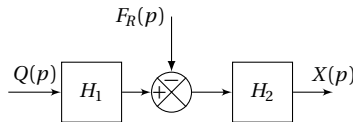
Les constantes sont les suivantes :

- S : section du vérin $[\text{m}^2]$;
- k : raideur mécanique du vérin $[\text{N m}^{-1}]$;
- V : volume d'huile de référence $[\text{m}^3]$;
- B : coefficient de compressibilité de l'huile $[\text{N m}^{-2}]$;
- M : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];

- λ : coefficient de frottement visqueux $[\text{N m}^{-1}\text{s}]$.

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

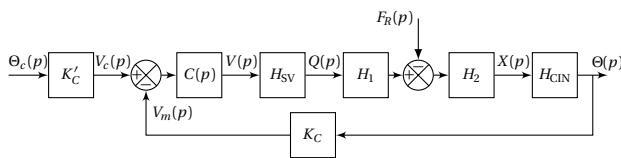
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par $F_R(p)$ ne sera pas prise en compte.



On a :

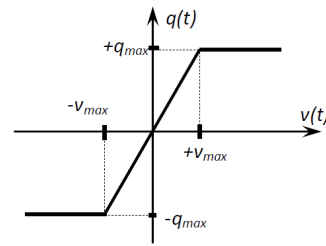
- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$: consigne de position angulaire $[\circ]$;
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$: position angulaire de la quille $[\circ]$;
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$: tension de commande de la servo valve $[\text{V}]$;
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$: tension image de la consigne $[\text{V}]$;
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$: tension image de la position $[\text{V}]$.

On a de plus :

- K_c : gain du capteur angulaire potentiométrique $[\text{V}/\circ]$;
- K'_c : gain du bloc d'adaptation réglé tel que $K'_c = K_c = 1,1 \text{ V}/\circ$;
- $C(p)$: correcteur de position;
- H_{CIN} : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation. $H_{\text{CIN}} = K_\theta [\circ \cdot \text{m}^{-1}]$;
- H_{SV} : fonction de transfert de la servo valve.

Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

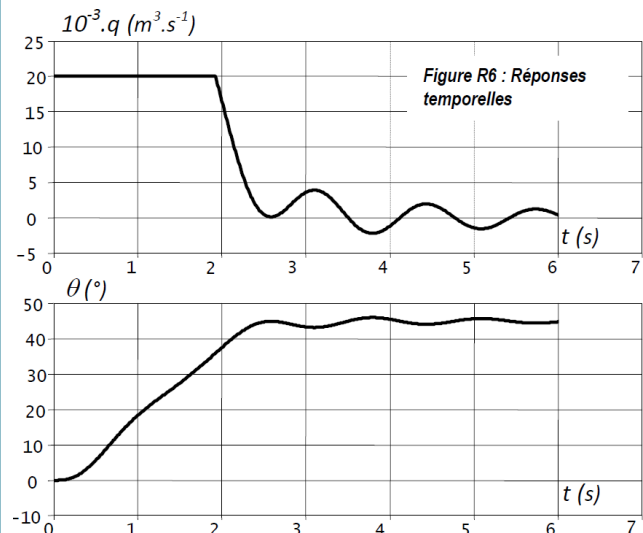
La servovalve présente un fonctionnement non-linéaire provenant d'un phénomène de saturation qui est défini par la courbe de la figure suivante donnant les évolutions du débit $q(t)$ fourni par la servovalve en fonction de sa tension de commande $v(t)$.



Ainsi :

- pour $v(t) > v_{\text{max}}$ et $v(t) < v_{\text{max}}$: $H_{\text{sv}} = K_{\text{sv}}$ $[\text{m}^3\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}]$
- pour $v(t) < -v_{\text{max}}$: $q(t) = -q_{\text{max}}$;
- pour $v(t) > v_{\text{max}}$: $q(t) = +q_{\text{max}}$, $v_{\text{max}} = 10 \text{ V}$.

Le système n'est pas encore corrigé, $C(p) = 1$ et on souhaite simuler le fonctionnement où le navigateur veut déplacer la quille avec une consigne angulaire de position de 45° . Cette demande est modélisée par une consigne $\theta_c(t)$ en échelon, soit : $\theta_c(t) = \theta_0 u(t)$ avec $\theta_0 = 45^\circ$ et $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t > 0$. La figure suivante présente dans ces conditions les évolutions temporelles de deux grandeurs de la boucle d'asservissement, le débit sortant de la servo valve $q(t)$ et la position angulaire de la quille $\theta(t)$.



Sur la figure précédente, la courbe représentative de $q(t)$ présente un palier où $q(t)$ garde une valeur constante.

Question 4 À l'aide de la caractéristique de la servo-valve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de K_{sv} ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

Question 5 Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

Comportement pour une commande de faible amplitude

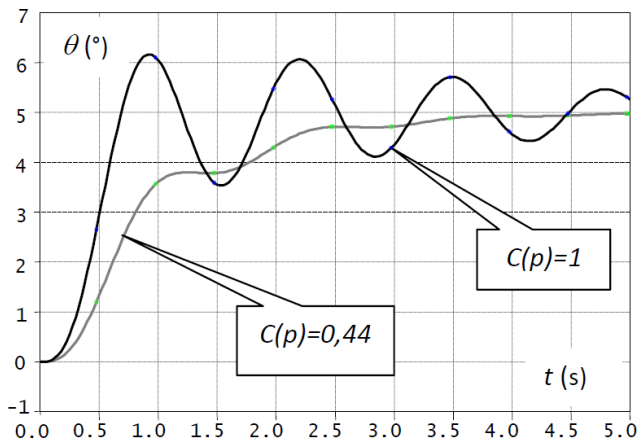
On étudie la réponse du système non corrigé ($C(p) = 1$) à une entrée échelon de 5° d'amplitude avec $F_R = 0$. Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est : $H_{BO}(p) = K_{SV} H_1 H_2 K_\theta K_C$ et $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$.

Question 6 Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension $v(t)$ à l'instant initial $t = 0^+$, $v(0^+)$. Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

Question 7 De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

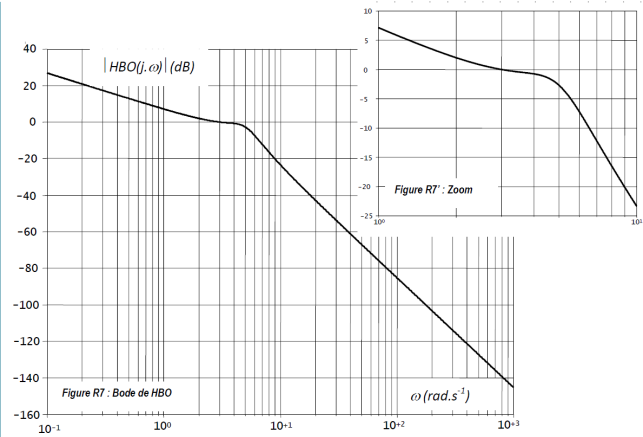
Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de 5° d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- $C(p) = 1$: la courbe présente des dépassements, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée ;
- $C(p) = 0,44$: toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1 ; 2.2.2, 2.3.1).



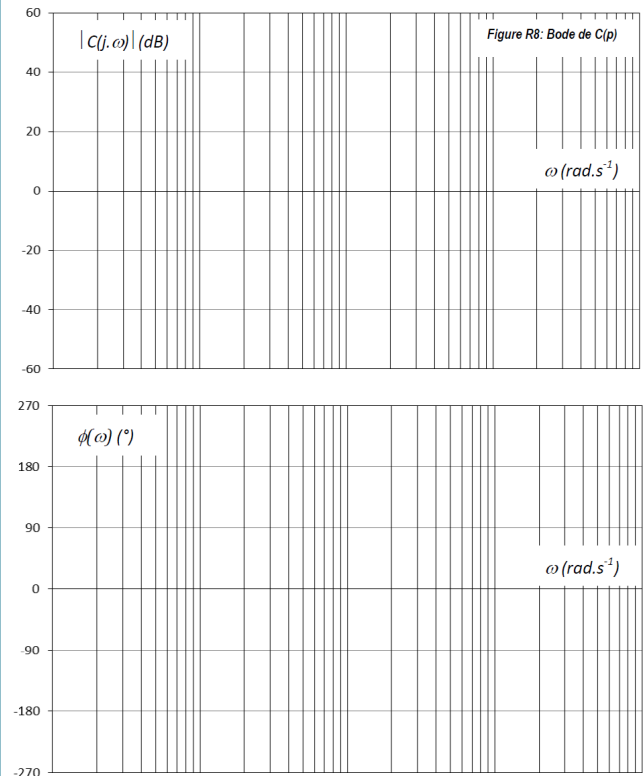
À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation générerait dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

Question 8 Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de $H_{BO}(p)$ en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.



Question 9 Déterminer par calcul la pulsation de résonance ω_r de cette fonction de transfert.

Question 10 Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation ω_r la différence, notée ΔK et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.



Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de $C(p)$ permettant d'abaisser l'amplitude de ΔK à la pulsation ω_r . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert $C(p) = K_{COR} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$ avec $b > 1$. Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation ω^* tel que : $\sin[\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$ et $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$.

L'étude consiste à déterminer les valeurs de T et b .

Question 11 Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour

$K_{COR} = 1$. Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

Question 12 Déterminer alors en fonction de b , l'amplitude $|C(j\omega^*)|_{dB}$ à la pulsation notée ω^* .

Question 13 Pour $K_{COR} = 1$, en faisant correspondre la pulsation de résonance ω_r de H_{BO} à ω^* :

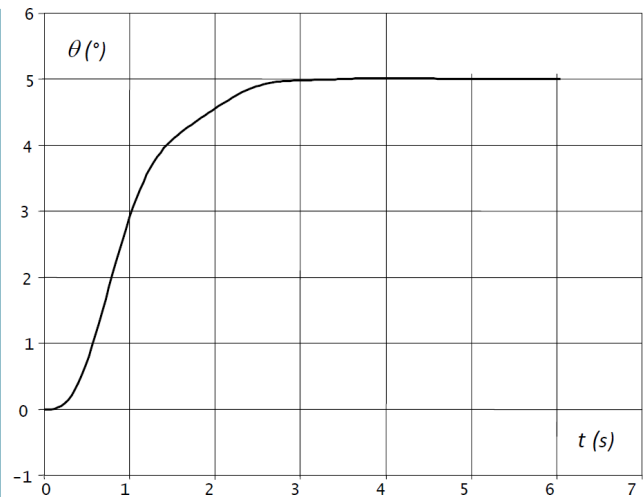
- calculer b pour que « l'excès » de gain ΔK soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de T ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation ω^* .

Validation du cahier des charges

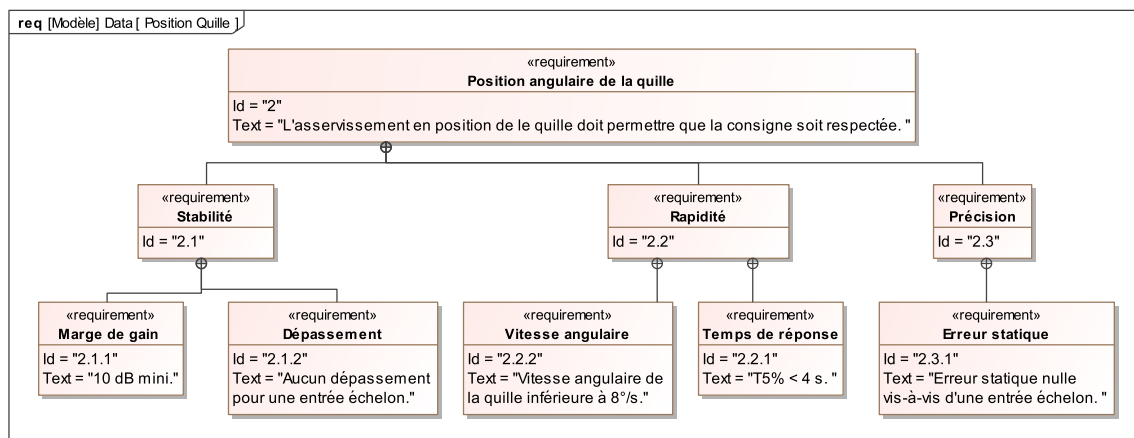
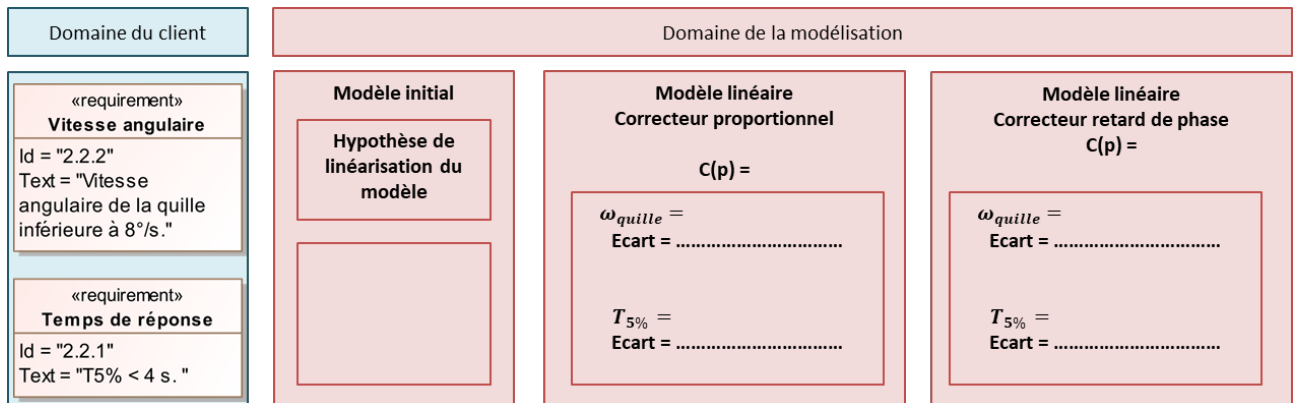
La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain K_{COR} a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

Question 14 Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

Question 15 Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



- $A_1 = \frac{1}{Sp}$, $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.
- $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$.
- $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$.
- $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$. Pour $t < 1,9 \text{ s}$: BO et $t > 1,9 \text{ s}$: BF.
-
- $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$.
-
-
- $\omega_r \simeq 4,5 \text{ rad s}^{-1}$.
- $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$.
-
- $-10 \log b$.
- $b = 3,02$, $T = 0,127 \text{ s}$, $\phi(\omega^*) \simeq -28,79^\circ$.
- $t_5\% \simeq 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$ et $4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$.



TD 1



Quille pendulaire *

Concours Commun Mines Ponts 2014

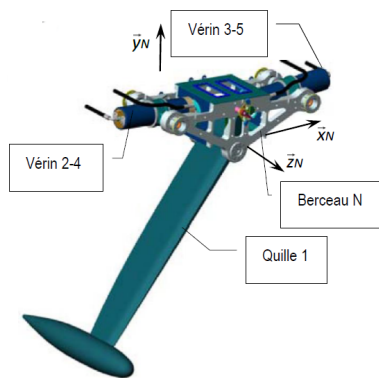
Savoirs et compétences :

- Con.C2 : Correction d'un système asservi
- Con.C2.SF1 : Choisir un type de correcteur adapté

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



Modèle volumique 3D

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

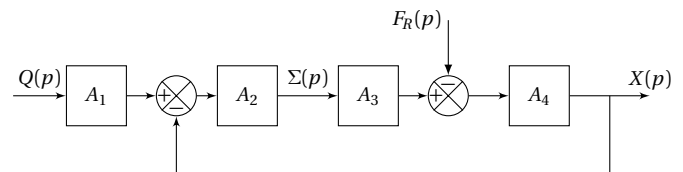
Objectif L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit $q(t)$ proportionnel à sa tension de commande $v(t)$. Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le

déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servovalves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$ (a);
- $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$ (b).

On a :

- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$: débit d'alimentation du vérin $[\text{m}^3\text{s}^{-1}]$;
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$: différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$: position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$: composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

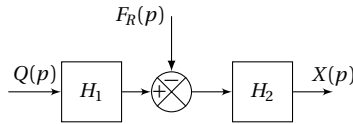
Les constantes sont les suivantes :

- S : section du vérin $[\text{m}^2]$;
- k : raideur mécanique du vérin $[\text{N m}^{-1}]$;
- V : volume d'huile de référence $[\text{m}^3]$;
- B : coefficient de compressibilité de l'huile $[\text{N m}^{-2}]$;
- M : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];

- λ : coefficient de frottement visqueux $[\text{N m}^{-1} \text{s}]$.

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

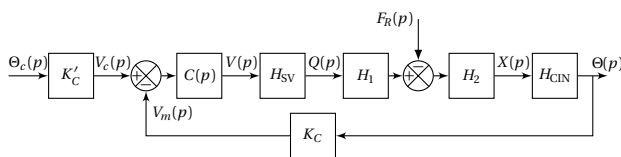
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par $F_R(p)$ ne sera pas prise en compte.



On a :

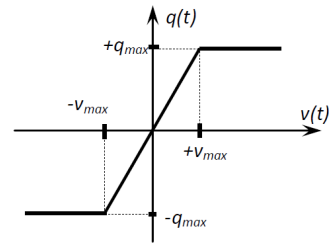
- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$: consigne de position angulaire $[\circ]$;
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$: position angulaire de la quille $[\circ]$;
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$: tension de commande de la servo valve $[\text{V}]$;
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$: tension image de la consigne $[\text{V}]$;
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$: tension image de la position $[\text{V}]$.

On a de plus :

- K_c : gain du capteur angulaire potentiométrique $[\text{V}/\circ]$;
- K_c' : gain du bloc d'adaptation réglé tel que $K_c' = K_c = 1,1 \text{ V}/\circ$;
- $C(p)$: correcteur de position;
- H_{CIN} : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation. $H_{\text{CIN}} = K_\theta [\circ \cdot \text{m}^{-1}]$;
- H_{SV} : fonction de transfert de la servo valve.

Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

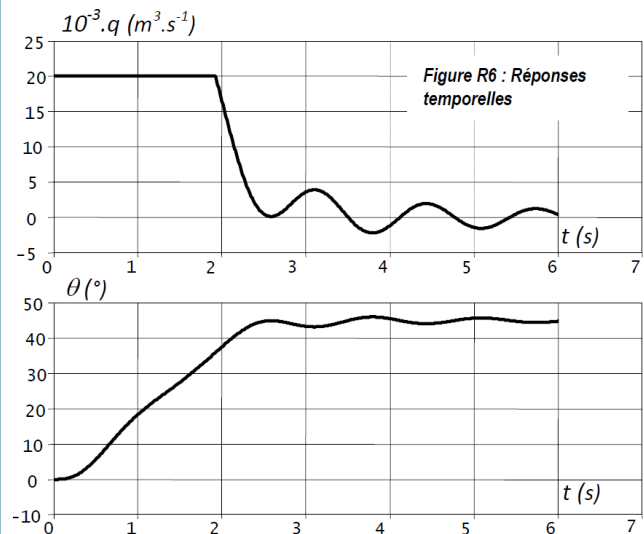
La servovalve présente un fonctionnement non-linéaire provenant d'un phénomène de saturation qui est défini par la courbe de la figure suivante donnant les évolutions du débit $q(t)$ fourni par la servovalve en fonction de sa tension de commande $v(t)$.



Ainsi :

- pour $v(t) > -v_{\text{max}}$ et $v(t) < v_{\text{max}}$: $H_{\text{SV}} = K_{\text{SV}} [\text{m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}]$
- pour $v(t) < -v_{\text{max}}$: $q(t) = -q_{\text{max}}$;
- pour $v(t) > v_{\text{max}}$: $q(t) = +q_{\text{max}}$, $v_{\text{max}} = 10 \text{ V}$.

Le système n'est pas encore corrigé, $C(p) = 1$ et on souhaite simuler le fonctionnement où le navigateur veut déplacer la quille avec une consigne angulaire de position de 45° . Cette demande est modélisée par une consigne $\theta_c(t)$ en échelon, soit : $\theta_c(t) = \theta_0 u(t)$ avec $\theta_0 = 45^\circ$ et $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t > 0$. La figure suivante présente dans ces conditions les évolutions temporelles de deux grandeurs de la boucle d'asservissement, le débit sortant de la servo valve $q(t)$ et la position angulaire de la quille $\theta(t)$.



Sur la figure précédente, la courbe représentative de $q(t)$ présente un palier où $q(t)$ garde une valeur constante.

Question 4 À l'aide de la caractéristique de la servo-valve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de K_{SV} ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

Question 5 Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

Comportement pour une commande de faible amplitude

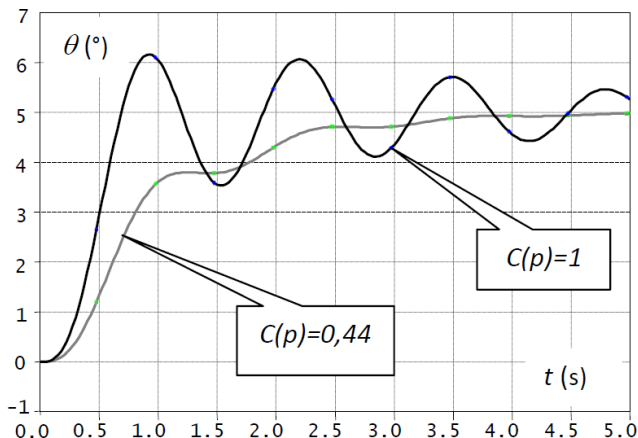
On étudie la réponse du système non corrigé ($C(p) = 1$) à une entrée échelon de 5° d'amplitude avec $F_R = 0$. Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est : $H_{BO}(p) = K_{SV} H_1 H_2 K_\theta K_C$ et $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$.

Question 6 Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension $v(t)$ à l'instant initial $t = 0^+$, $v(0^+)$. Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

Question 7 De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

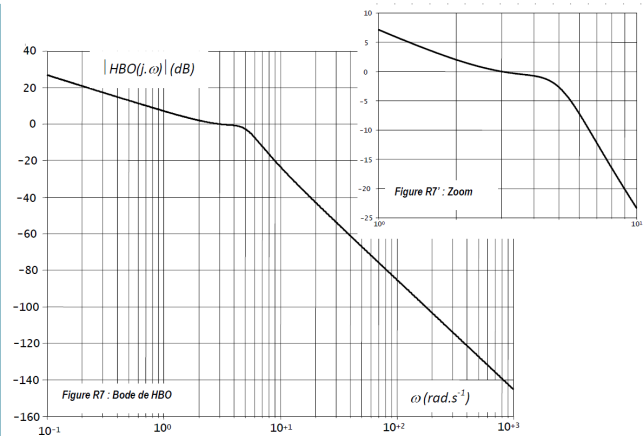
Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de 5° d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- $C(p) = 1$: la courbe présente des dépassements, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée ;
- $C(p) = 0,44$: toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1 ; 2.2.2, 2.3.1).



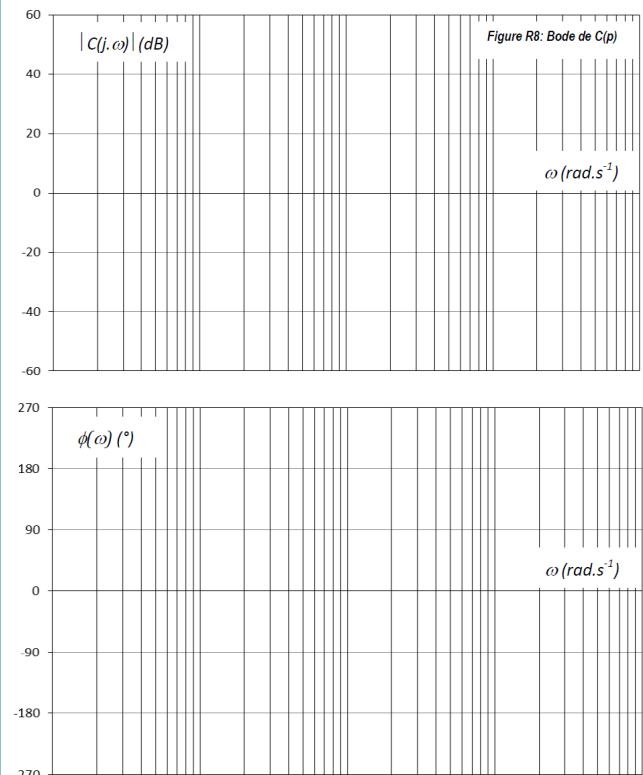
À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation générerait dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

Question 8 Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de $H_{BO}(p)$ en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.



Question 9 Déterminer par calcul la pulsation de résonance ω_r de cette fonction de transfert.

Question 10 Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation ω_r la différence, notée ΔK et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.



Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de $C(p)$ permettant d'abaisser l'amplitude de ΔK à la pulsation ω_r . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert $C(p) = K_{COR} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$ avec $b > 1$. Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation ω^* tel que : $\sin[\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$ et $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$.

L'étude consiste à déterminer les valeurs de T et b .

Question 11 Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour

$K_{COR} = 1$. Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

Question 12 Déterminer alors en fonction de b , l'amplitude $|C(j\omega^*)|_{dB}$ à la pulsation notée ω^* .

Question 13 Pour $K_{COR} = 1$, en faisant correspondre la pulsation de résonance ω_r de H_{BO} à ω^* :

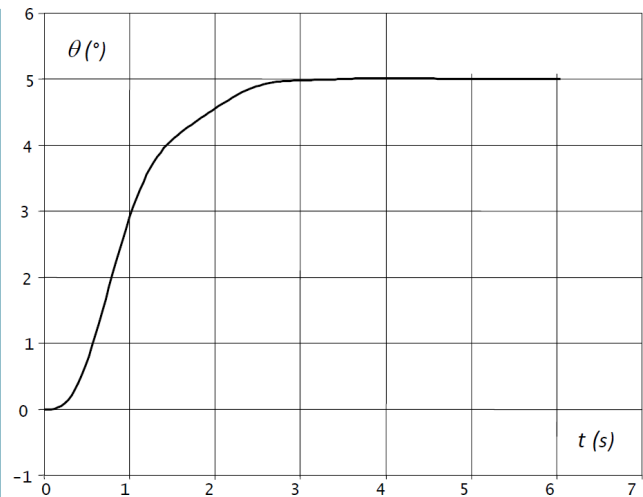
- calculer b pour que « l'excès » de gain ΔK soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de T ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation ω^* .

Validation du cahier des charges

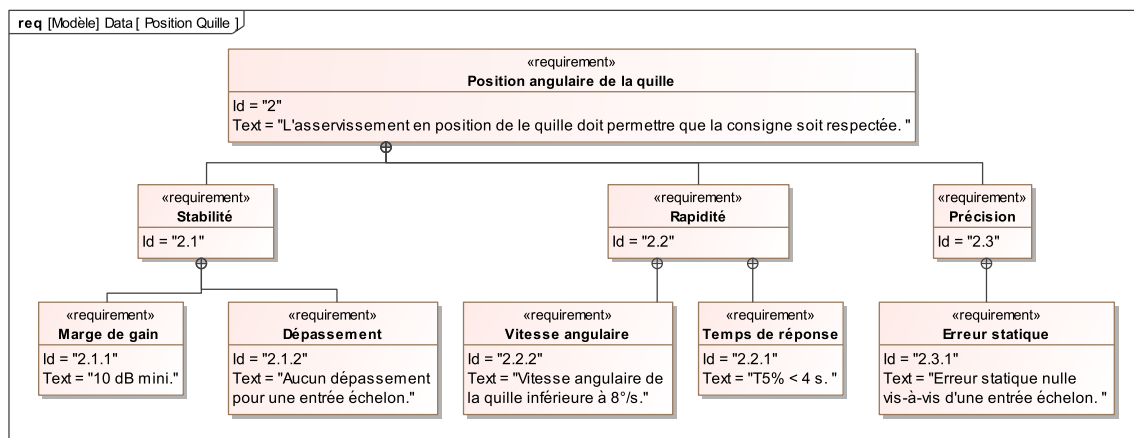
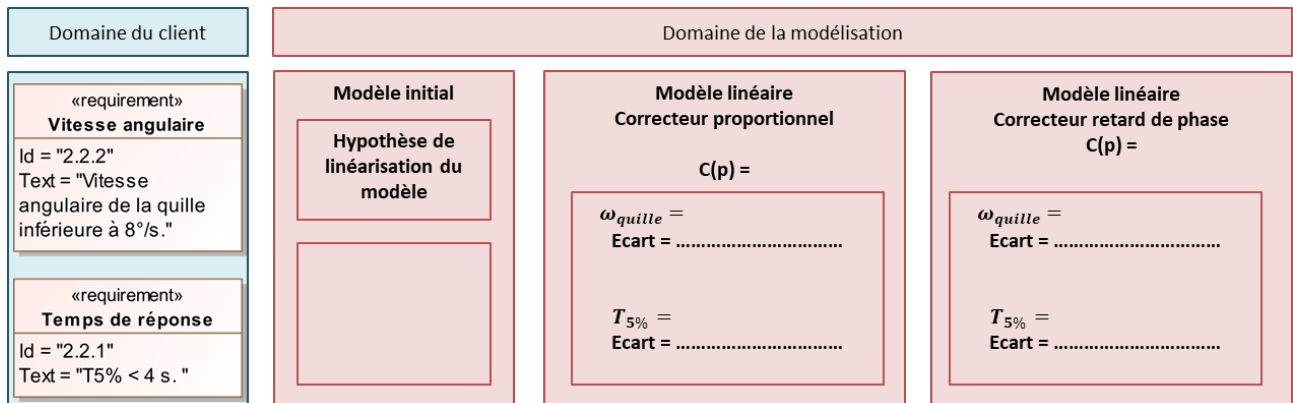
La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain K_{COR} a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

Question 14 Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

Question 15 Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.



1. $A_1 = \frac{1}{Sp}$, $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.
2. $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$.
3. $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$.
4. $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$. Pour $t < 1,9 \text{ s}$: BO et $t > 1,9 \text{ s}$: BF.
- 5.
6. $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$.
- 7.
- 8.
9. $\omega_r \simeq 4,5 \text{ rad s}^{-1}$.
10. $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$.
- 11.
12. $-10 \log b$.
13. $b = 3,02$, $T = 0,127 \text{ s}$, $\phi(\omega^*) \simeq -28,79^\circ$.
14. $t_5\% \simeq 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$ et $4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$.



TD 1 – Corrigé



Quille pendulaire ★

Concours Commun Mines Ponts 2014

Savoirs et compétences :

- ☐ Con.C2 : Correction d'un système asservi
- ☐ Con.C2.SF1 : Choisir un type de correcteur adapté

Mise en situation

Objectif L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

Modélisation du vérin

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

Correction D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace : $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$ et $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$.

En utilisant le schéma-blocs, on a $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$.

Par ailleurs $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$. On a donc $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$ soit $A_1 =$

$$\frac{2B}{Vp} \frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}.$$

On a aussi $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$. Par ailleurs, $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$. On a donc : $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ et $A_3 = S$.

Au final, $A_1 = \frac{1}{Sp}$, $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

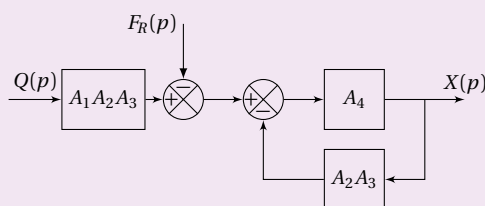
Correction Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes On a $X(p) = (H_1Q(p) - F_R(p))H_2(p)$.

Par ailleurs, on a vu que $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p))$ et $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p))$.

On a donc $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2(A_1Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p))$. On a donc $H_1(p) = A_1A_2A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$.

Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs Revient à utiliser la méthode précédente.

Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$$A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S \text{ et } A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}.$$

$$\text{En faisant le calcul on obtient : } H_1(p) = \frac{2BS}{pV} \text{ et } H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}.$$

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Correction Dans ce cas, $\frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}.$

Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

Question 4 À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

- justifier ce palier et donner la valeur numérique de K_{SV} ;
- indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

Correction En début de simulation, il y a une saturation du débit à $20 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. La tension de commande en régime saturé étant de 10 V, on a $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$.

Jusqu'à 1,9 seconde, le retour n'a aucune influence sur la commande. On est donc en BO. Au delà, la régulation entre en jeu. On est donc en BF.

Question 5 Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

Correction

Exigences	Niveau	Simulation	Validation
Stabilité :			
C11 : Marge de gain	10 dB	–	–
C12 : Dépassement vis-à-vis d'une entrée en échelon	Aucun	Dépassement faible	NON
Rapidité :			
C21 : Temps de réponse à 5 %	4 s maxi	$\approx 2,5 \text{ s}$	OUI
C22 : Vitesse angulaire de rotation de la quille	$8^\circ/\text{s}$ maxi	$\approx 20^\circ \text{ s}^{-1}$	NON
Précision			
C3 : Erreur statique vis-à-vis d'une entrée en échelon	Nulle	Difficile à mesurer	–

Comportement pour une commande de faible amplitude

Question 6 Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension $v(t)$ à l'instant initial $t = 0^+$, $v(0^+)$. Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

Correction En BO, on va avoir $v(0^+) = 5 \cdot K'_C = 5,5 \text{ V}$.
 $v(0^+) < 10 \text{ V}$. On est ici en BO. La tension ne peut donc pas dépasser la tension de saturation.

Question 7 De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

Correction Pour de telles tension, on est donc en régime **linéaire**.

Question 8 Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de $H_{BO}(p)$ en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

Correction On a : $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$. En conséquences, $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,04$ et $\omega_0 = 5 \text{ rad s}^{-1}$ et $\frac{2\xi}{\omega_0} = 0,12 \Leftrightarrow$

$\xi = 0,3$.

On a donc une asymptote de -20 dB/decade pour $\omega < 5 \text{ rad s}^{-1}$ et -60 dB/decade pour $\omega > 5 \text{ rad s}^{-1}$.

De plus, pour $\omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$, on a $20 \log \frac{2,2}{5} = -7,1 \text{ dB}$.

Question 9 Déterminer par calcul la pulsation de résonance ω_r de cette fonction de transfert.

Correction On a $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = 5 \times \sqrt{1 - 2 \times 0,3^2} \simeq 4,5 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 10 Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation ω_r la différence, notée ΔK et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Correction L'amplitude de résonance ne dépend que du système du second ordre. On a alors (résultat de cours sur le second ordre) : $\Delta K = 20 \log \left(\frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \right) = 20 \log \left(\frac{1}{2 \times 0,3 \sqrt{1 - 0,3^2}} \right) = 4,8 \text{ dB}$.

Question 11 Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour $K_{COR} = 1$. Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

Correction On a $b > 1$ donc $T < bT$ et $\frac{1}{T} > \frac{1}{bT}$.

Pour $\omega < \frac{1}{bT}$ on a donc un gain de pente nulle et un déphasage nul.

Pour $\frac{1}{bT} < \omega < \frac{1}{T}$ on a donc un gain de pente -20 dB/decade et un déphasage de -180° .

Pour $\omega > \frac{1}{T}$ on a donc un gain de pente 0 dB/decade et un déphasage de 0° .

Question 12 Déterminer alors en fonction de b , l'amplitude $|C(j\omega^*)|_{dB}$ à la pulsation notée ω^* .

Correction $|C(j\omega^*)|_{dB} = 10 \log \frac{1 + T^2 \frac{1}{T^2 b}}{1 + b^2 T^2 \frac{1}{T^2 b}} = 10 \log \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + b} = 10 \log \frac{1}{b} \frac{1 + b}{1 + b} = -10 \log b$.

Question 13 Pour $K_{COR} = 1$, en faisant correspondre la pulsation de résonance ω_r de H_{BO} à ω^* :

- calculer b pour que « l'excès » de gain ΔK soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de T ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation ω^* .

Correction D'une part, on veut que $|C(j\omega^*)|_{dB} = -4,8$ soit $10 \log b = 4,8$ et $b = 3,02$. D'autre part, $\omega^* = \omega_r$ et $T = \frac{1}{\omega_r \sqrt{b}} = 0,127 \text{ s}$.

Par ailleurs, on a donc $\phi(\omega^*) = \arcsin \left(\frac{1 - b}{1 + b} \right) = \arcsin \left(\frac{1 - 3,02}{1 + 3,02} \right) \simeq -28,79^\circ$.

Validation du cahier des charges

Question 14 Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

Correction En regardant où la courbe a la pente la plus importante, on a approximativement $2/0,5 \simeq 4^\circ/\text{s}$.
 $t_5 \% \simeq 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$ $4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$.
CDCF validé.

Question 15 Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

Correction

Domaine du client	Domaine de la modélisation		
<p>«requirement» Vitesse angulaire</p> <p>Id = "2.2.2" Text = "Vitesse angulaire de la quille inférieure à 8°/s."</p>	<p>Modèle initial</p> <p>Hypothèse de linéarisation du modèle</p> <p>Pour être dans des conditions où le modèle et linéaire, la consigne doit être inférieure à 5°.</p>	<p>Modèle linéaire Correcteur proportionnel $C(p) = 0,44$</p> <p>$\omega_{quille} = 20^\circ / s$ Ecart = +12 °/s ✗</p> <p>$T_{5\%} = 2,5 s$ Ecart = - 1,5 s. ✓</p>	<p>Modèle linéaire Correcteur retard de phase $C(p) = K_{COR} \frac{1 + 0,127 p}{1 + 3 \times 0,127 p}$</p> <p>$\omega_{quille} = 4^\circ / s$ Ecart = 4°/s OK</p> <p>$T_{5\%} = 2,3 s$ Ecart = - 1,7 s OK</p>
<p>«requirement» Temps de réponse</p> <p>Id = "2.2.1" Text = "T5% < 4 s. "</p>			