

Colle 02

Four pour traitement thermique

Équipe PT La Martinière

Savoirs et compétences :

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire : $G(p) = \frac{K}{(10p+1)^2(p+1)}$

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

- marge de phase : $\Delta\varphi \geq 45^\circ$;
- dépassement $D\% < 10\%$;
- écart statique $\varepsilon_S < 0,08$;
- temps de montée $t_m < 8\text{ s}$.

Question 1 Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_S < 0,08$?

On note t_m le temps de montée du système en BF et $t_m \simeq \frac{3}{\omega_{co}}$ et ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 2 Quelle est la condition sur K pour obtenir $t_m < 8\text{ s}$?

Question 3 Quel choix faire pour la valeur de K ?

Question 4 Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions.

Expérimentalement, on constate que $z_{BF} \simeq \frac{\Delta\varphi^o}{100}$ et on

rappelle que $D\% = e^{\frac{-\pi z_{BF}}{\sqrt{1-z_{BF}^2}}}$.

Question 5 Que vaut alors le dépassement $D\%$?

Question 6 À partir de la relation précédente, déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.

Avec la valeur de $K = 16,1$, on introduit, en amont de $G(p)$, dans la chaîne directe, un correcteur $C(p) = K_a \frac{1+aTp}{1+Tp}$ à avance de phase destiné à corriger le dépassement et la marge de phase, sans altérer ni la rapidité, ni la précision qui correspondent au cahier des charges.

Question 7 Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase permettant d'obtenir une marge de phase de 60° .

CORRECTION

Q1- Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_s < 0,08$?

Comme la FTBO est : $G(p) = \frac{K}{(10p+1)^2(p+1)}$, et que le retour est unitaire, la FTBF s'écrit :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{(10p+1)^2(p+1)+K}$$

Par définition l'écart statique s'écrit : $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0^+} \{1 - H(p)\} = 1 - \frac{K}{1+K} = \frac{1}{1+K}$

Pour avoir $\varepsilon_s < 0,08$ il faut avoir : $\frac{1}{1+K} < 0,08$ Soit **K > 11,5**

Q2- Quelle est la condition sur K pour obtenir $t_m < 8s$?

Pour avoir $t_m < 8s$ et en considérant la relation approchée $t_m = \frac{3}{\omega_{co}} < 8s$ soit $\omega_{co} > 0,375s$

Le gain K qui correspond à cette pulsation de coupure à 0 dB est tel que :

$$G(j\omega_{co}) = \frac{K}{(1+100\omega_{co}^2)\sqrt{1+\omega_{co}^2}} = 1$$

Soit **K = 16,1**

Q3- Déterminer la plus petite valeur de K, permettant d'obtenir à la fois $\varepsilon_s < 0,08$ et

D'après Q1, pour avoir $\varepsilon_s < 0,08$ il faut **K > 11,5**

D'après Q2, pour avoir obtenir $t_m < 8s$ il faut **K > 16,1**

La plus petite valeur qui permet de satisfaire aux deux conditions ci-dessus est **K > 16,1**

Q4- Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions. Que vaut alors le dépassement ?

La marge de phase obtenue pour cette valeur de K est :

$$\Delta\varphi = \pi - 2 \arctan 10\omega_{co} - \arctan 10\omega_{co} = 0,16 \text{ rad} = 9^\circ$$

La valeur du dépassement en boucle fermée se détermine par les relations :

$$\Delta\varphi^\circ \rightarrow z_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi^\circ}{100} \rightarrow D\% = \exp\left(-\pi \frac{z_{BF}}{\sqrt{1-z^2}}\right)$$

$$\text{Soit } \Delta\varphi^\circ = 9^\circ \rightarrow z_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi^\circ}{100} = 0,09 \rightarrow D\% = \exp\left(-\pi \frac{0,09}{\sqrt{1-0,09^2}}\right) = 73\%$$

$$\boxed{\Delta\varphi^\circ = 9^\circ \text{ et } D\% = 74}$$

Ces deux valeurs ne sont pas conformes au cahier des charges

Q5- Déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.

$$D\% = \exp\left(-\pi \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right) = 0,1$$

$$-\pi \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \ln 0,1 = -2,3 \quad \pi^2 \frac{z^2}{1-z^2} = 5,3 \quad z^2 = \frac{5,3}{5,3+\pi^2}$$

Soit $z_{BF} = 0,6$ Ainsi : $\Delta\varphi^\circ \approx 100 \quad z_{BF} = 60^\circ$

Par ailleurs la marge de phase $\Delta\varphi \geq 45^\circ$

Ces deux conditions imposent $\Delta\varphi \geq 60^\circ$

Q6- Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase

Le correcteur à avance de phase $C(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$ introduit a pour mission de remonter la marge de phase à 60° .

Il faut donc obtenir une remontée de phase de $60 - 9 = 51^\circ$ à la pulsation $\omega_{c0} = 0,375 \text{ rad/s}$

$$\text{On } \omega_{c0} = \omega_{\max} = \frac{1}{T\sqrt{a}} = 0,375 \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad \varphi_{\max} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} = 51^\circ$$

Cette dernière condition conduit à : $a = 8$

La première à $T = 0,94 \text{ s}$

$$Ka = \frac{1}{\sqrt{a}}$$