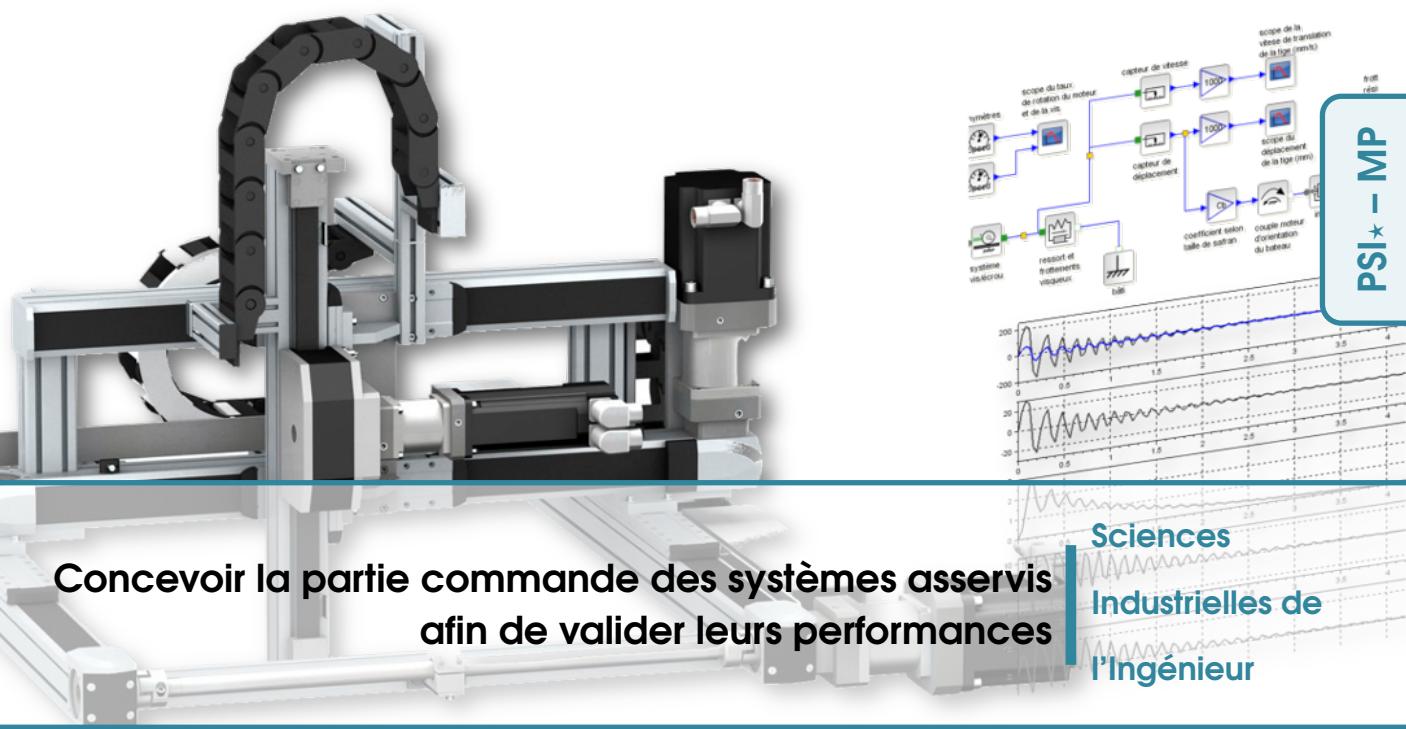


## Concevoir la partie commande des systèmes asservis afin de valider leurs performances

Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur



### Cours

#### Chapitre 1 Correction des SLCI

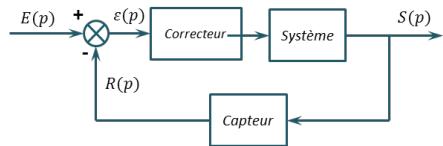
Savoirs et compétences :

- Res1.C4 : correction;
- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase,
- Con.C2 : correction d'un système asservi;
- Con.C2.SF1 : choisir un type de correcteur adapté.

1	Pourquoi corriger un système ?	2
2	Le correcteur proportionnel	3
3	Les correcteurs à action intégrale	4
3.1	Le correcteur intégral pur . . . . .	4
3.2	Le correcteur proportionnel intégral . . . . .	4
4	Le correcteur à avance de phase	5
5	Bilan sur l'influence des correcteurs	6

## 1 Pourquoi corriger un système ?

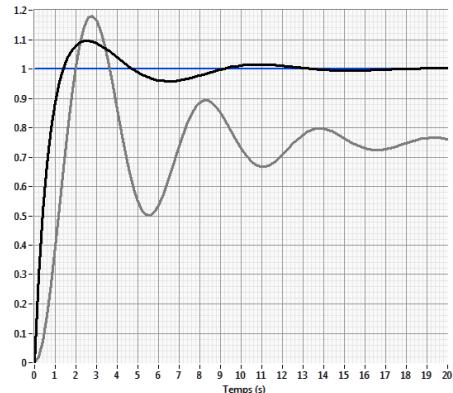
Souvent évoqué en lors de l'étude des systèmes asservis, regardons ce qui se cache derrière le bloc correcteur. On peut le considérer comme la partie intelligente du système car de sa part position dans l'architecture d'un système il reçoit l'image de l'écart entre la cosigne et la sortie du système. En fonction de cet écart, en fonction de ses « capacités » va permettre d'améliorer les performances du système.



Sur la figure ci-contre est tracée en gris la réponse indicielle d'un système non corrigé et en noir la réponse indicielle du système corrigé. On observe que le système corrigé est :

- plus précis;
- plus amorti;
- plus rapide.

L'objectif du correcteur est donc d'améliorer les caractéristiques tout en assurant la stabilité du système.



### Résultat

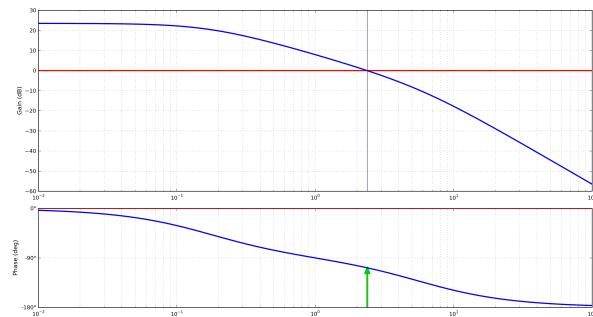
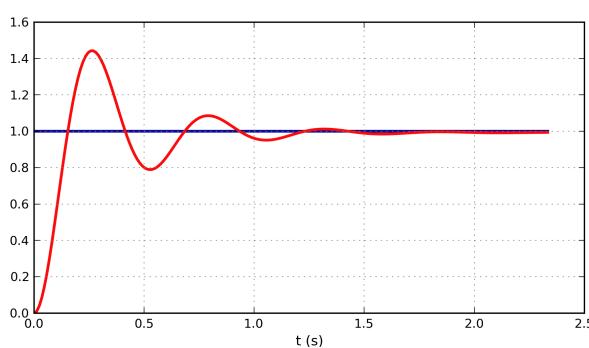
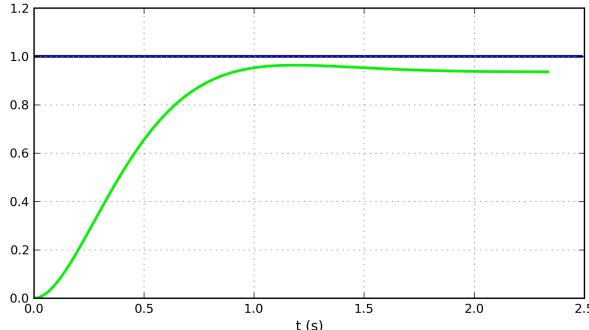
- D'après les résultats sur la stabilité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'avoir des marges de gains suffisantes.
- D'après les résultats sur la rapidité des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain dans le but d'avoir une pulsation de coupure à 0 dB la plus grande possible (pour la FTBO).
- D'après les résultats sur la précision des systèmes asservis :
  - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain statique de la boucle ouverte pour assurer une bonne précision du système (et d'éventuellement augmenter la classe).

Au vu de ces conclusions, le choix d'un correcteur se fera dans le domaine fréquentiel en utilisant le diagramme de Bode.

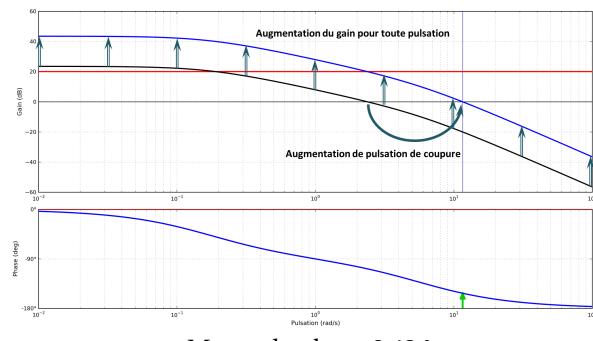
## 2 Le correcteur proportionnel

**Définition** Le correcteur proportionnel a pour fonction de transfert  $C(p) = K$ .

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $K = 15$ ,  $\xi = 3$ ,  $\omega = 1$ ).



Marge de phase 71,94 °



Marge de phase 6,43 °

### Résultat

On observe qu'une augmentation du gain proportionnel a pour effet :

- d'améliorer la précision;
- d'augmenter la vivacité;
- d'augmenter le temps de réponse (à partir d'un certain seuil);
- de diminuer l'amortissement;
- de diminuer la marge de phase.

Pour un système d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain provoque une marge de phase négative et donc une instabilité du système.

### Méthode

#### Réglage de la marge de phase :

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que  $\varphi(\omega_{0dB})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{dB}(\omega_{0dB})$ .
- On cherche  $K_p$  tel que  $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$

#### Réglage de la marge de gain :

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{-180^\circ}$  tel que  $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$ .
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{dB}(\omega_{-180^\circ})$ .
- On cherche  $K_p$  tel qu'on ait la marge de gain souhaitée.

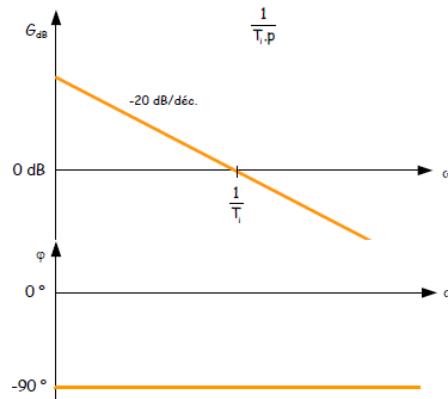
### 3 Les correcteurs à action intégrale

#### 3.1 Le correcteur intégral pur

##### Définition

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$ .



##### Résultat

##### Avantages

Ce correcteur améliore la précision lors de la sollicitation par un échelon car il ajoute une intégration dans la boucle ouverte.

##### Inconvénients

Le déphasage de -90° sur tout le spectre de pulsation entraîne une réduction de la marge de phase ce qui peut déstabiliser le système.

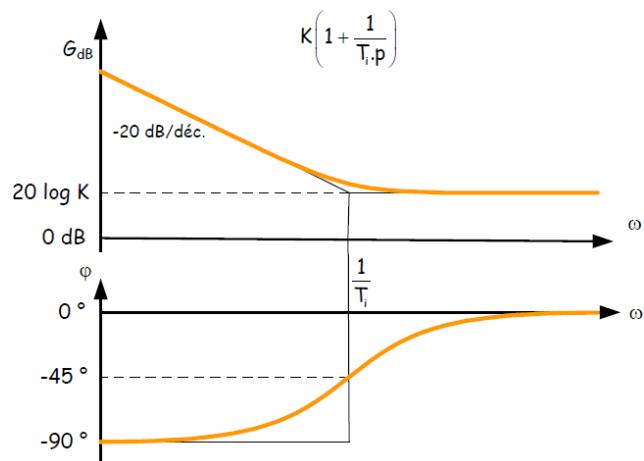
#### 3.2 Le correcteur proportionnel intégral

##### Définition

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante :  $u(t) = K \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$ .

En développant on obtient  $C(p) = K \frac{T_i p + 1}{T_i p}$ . Ce correcteur augmente donc la classe de la boucle ouverte et donc la précision. Si  $K > 1$  la pulsation de coupure est augmentée, entraînant ainsi une augmentation de la rapidité du système. Enfin, ce correcteur diminue la phase à basse fréquence. Il faut donc faire en sorte que cette chute de phase n'intervienne pas dans la zone de la pulsation de coupure du système.



##### Résultat

Le correcteur proportionnel intégral :

**augmente l'amortissement, augmente la rapidité, augmente la précision.**

##### Méthode

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que  $\varphi(\omega_{0dB})$  respecte la marge de phase souhaitée.
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule  $G_{dB}(\omega_{0dB})$ .
- On cherche  $K$  tel que  $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$
- La mise en place de l'effet intégral ne doit pas modifier la position de la pulsation de coupure réglée précédemment. Pour cela, il faut donc que  $\frac{1}{T_i} \ll \omega_{0dB}$ . Usuellement on positionne l'action intégrale une décade avant la pulsation réglée. On a donc  $T_i = \frac{10}{\omega_{0dB}}$ .

## 4 Le correcteur à avance de phase

### Définition

Un correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert  $C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$  avec  $a > 1$ .

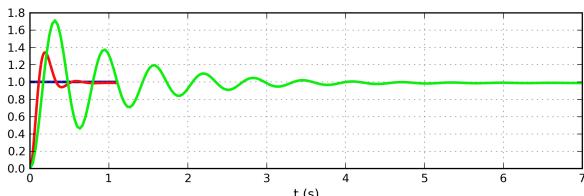
**Résultat** Ce correcteur permet d'ajouter de la phase pour les pulsations comprises entre  $\frac{1}{a\tau}$  et  $\frac{1}{\tau}$ . On montre que  $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$  et ce pour une pulsation  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$ .

**R** On peut prendre  $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$  pour ne pas modifier la valeur du gain à la pulsation où on désire ajouter de la phase.

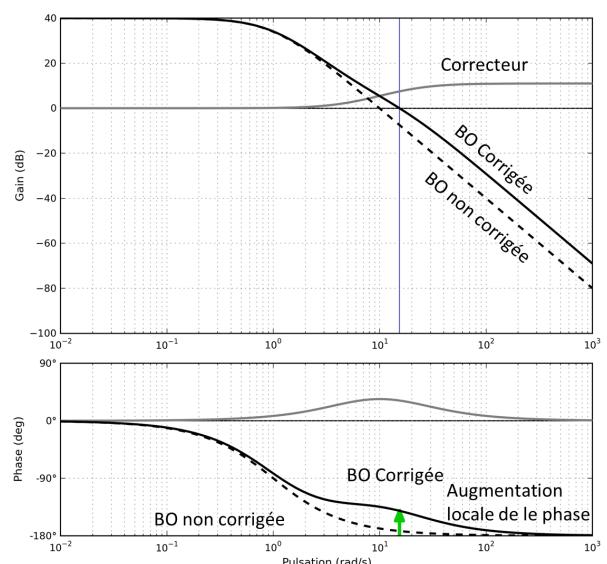
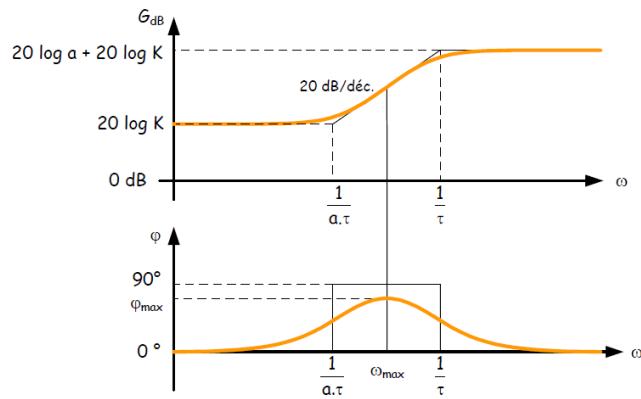
**Démonstration** Pour déterminer  $\omega_{\max}$  on pourrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase est maximum en résolvant  $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$ . On peut aussi remarquer « graphiquement » que  $\omega_{\max}$  est situé au milieu des deux pulsations de coupures :  $\frac{1}{2} \left( \log\left(\frac{1}{\tau}\right) + \log\left(\frac{1}{a\tau}\right) \right) = \log\left(\frac{1}{a\tau^2}\right)^{1/2} = \log\left(\frac{1}{\tau\sqrt{a}}\right)$  et  $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$ .

D'autre part, il faudrait calculer  $\varphi(\omega_{\max})$ ...

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ( $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$ ,  $a = 3,54$ ,  $T = 0,053$  s).



Ici le correcteur permet une augmentation de la rapidité et un meilleur amortissement.



**Méthode** • En utilisant la BO non corrigée on cherche  $\omega_{0dB}$  tel que le gain est nul.

- On calcule  $\varphi(\omega_{0dB})$ .
- On détermine la phase à ajouter.
- On calcule  $a$ .
- On calcule  $\tau$ .
- On calcule  $K$ .

## 5 Bilan sur l'influence des correcteurs

Correcteur	Situation sans correction	
	Si $K_p$ augmente	
Proportionnel $K_p$	Marges	
	Précision	
	Rapidité	
Proportionnel intégral $K_p + \frac{K_i}{p}$	Marges	
	Précision	
	Rapidité	
À avance de phase $K_p \frac{1+a\tau p}{1+\tau p} \quad a > 1$	Marges	
	Précision	
	Rapidité	

## Références

- [1] Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.*
- [2] Florestan Mathurin, *Correction des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.*
- [3] Damien Iceta, David Violeau, Alain Caignot, Xavier Pessoles, Vincent Boyer, François Golanski, *Sciences industrielles de l'ingénieur MP/MP\* PSI/PSI\* PT/PT\*, Méthodes. Exercices. Problèmes. Sujets de concours. Vuibert Prépas.*

## Activtation 1

### Réglage de correcteurs P et PI

Ressources de P. Dupas.

#### Savoirs et compétences :

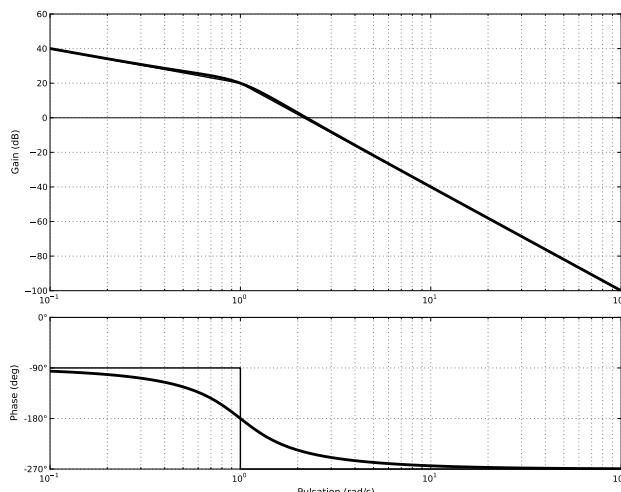
- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.

#### Correcteur proportionnel

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de  $45^\circ$  et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



**Question 1** Mesurer puis calculer la marge de phase.

**Question 2** Mesurer puis calculer la marge de gain.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

1.  $M_\varphi = -60^\circ$ .
2.  $M_G = -20$  dB.
3.  $K_p = 0,054$  et  $M_G = 5,35$  dB.
4.  $K_p = 0,0316$  et  $M_\varphi = 70^\circ$ .

#### Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de  $45^\circ$  en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme  $C(p) = K_p \frac{1 + \tau p}{\tau p}$ .

**Question 1** Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.

**Question 2** Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Question 3** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

- 1.
2.  $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$ .
- 3.

## Activation 1 – Corrigé

### Réglage de correcteurs P et PI

Ressources de P. Dupas.

#### Savoirs et compétences :

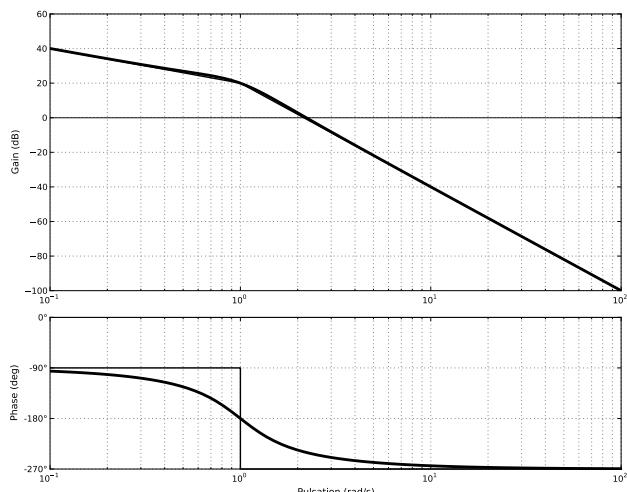
- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.

#### Correcteur proportionnel

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de  $45^\circ$  et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



**Question 1** Mesurer puis calculer la marge de phase.

#### Correction

- On cherche  $\omega$  tel que  $G_{dB}(\omega) = 0$  dB :  $G_{dB}(\omega) = -20\log(10) - 20\log\omega - 20\log(\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2})$

On trouve  $\omega = 2,21$  rad/s et  $M_\varphi = -60^\circ$ . Le système est instable.

**Question 2** Mesurer puis calculer la marge de gain.

**Correction** Pour  $\varphi = -180^\circ$ , on a  $\omega = 1$  rad/s et  $M_G = -20$  dB. Le système est instable.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

**Correction** Pour  $\varphi = -135^\circ$  on a  $\omega = 0,62$  rad/s. On trouve un gain proportionnel de 0,054.

La marge de gain est alors de 5,35 dB ce qui est inférieur aux 10 dB demandés.

**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

**Correction** Pour  $\varphi = -180^\circ$  on a  $\omega = 1$  rad/s. On trouve un gain proportionnel de 0,316.

La marge de phase est alors de  $70^\circ$  ( $\omega = 0,0333$  rad/s).

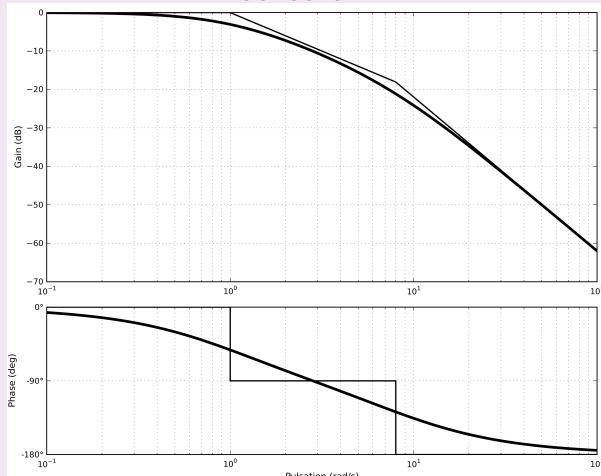
#### Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de  $45^\circ$  en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme  $C(p) = K_p \frac{1+\tau p}{\tau p}$ .

**Question 1** Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.

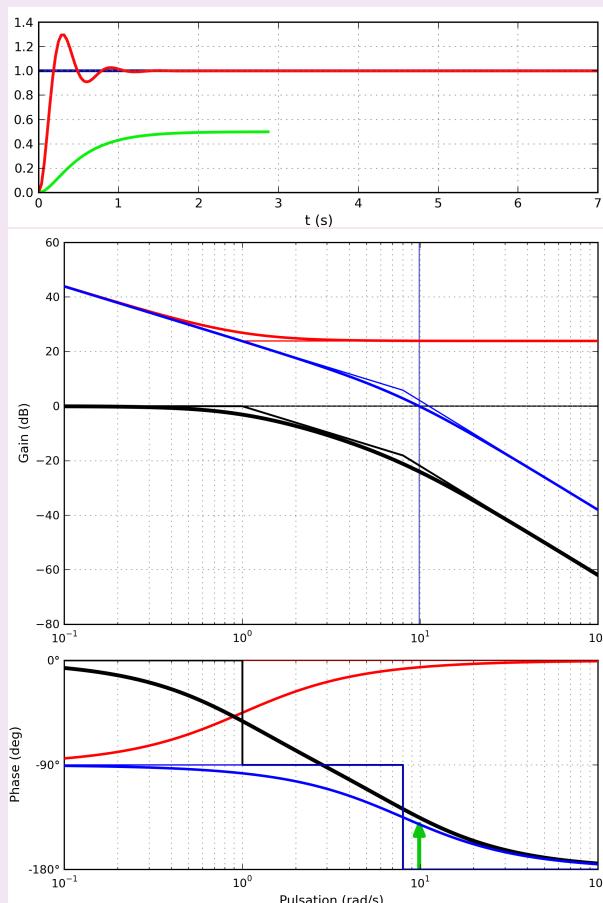
**Correction**


**Question 2** Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

**Correction**

- On résout  $\varphi(\omega) = -135^\circ$  :  $\varphi(\omega) = -\arctan \omega - \arctan \omega/8 \Rightarrow \tan 135^\circ = \frac{\omega + \omega/8}{1 - \omega^2/8} \Leftrightarrow -1 + \omega^2/8 - 9\omega/8 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 9\omega - 8 = 0$ .  $\Delta = 81 + 32 = 10,63^2$ .  $\omega = \frac{9 \pm 10,63}{2} = 9,82 \text{ rad/s}$ .
- Calculons  $G_{\text{dB}}(9,82) = -23,9 \text{ dB}$ . Il faut donc augmenter le gain de  $23,9 \text{ dB}$  soit  $K_p = 10^{23,9/20} = 15,7$ .
- On choisit  $\tau$  pour ne pas modifier la marge de phase. Il faut donc que le déphasage de  $0^\circ$  du correcteur ait lieu avant  $9,82 \text{ rad/s}$ . De manière usuelle on prend  $\frac{1}{\tau} = \frac{9,82}{10} = 0,982 \text{ rad/s}$ .
- Au final, on a  $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$ .

**Question 3** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

**Correction**


## Activtation 2

### Réglage de correcteurs P et AP

Ressources de P. Dupas.

#### Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.

#### Correcteur proportionnel

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

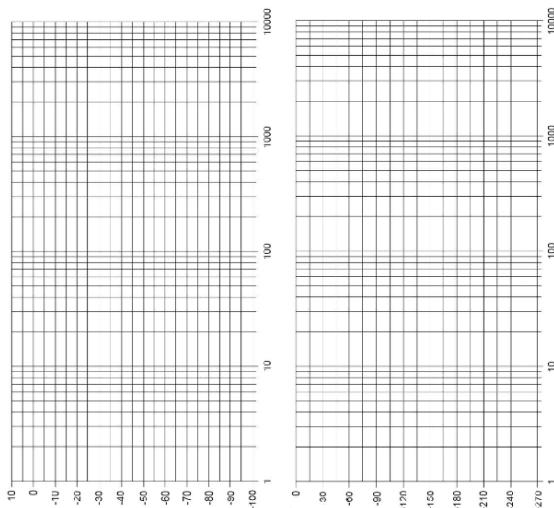
**Question 4** Calculer la précision du système  $\varepsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

**Question 5** Tracer dans le diagramme de Bode la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

**Question 6** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

**Question 7** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

1.  $\varepsilon_S = \frac{1}{2}$ .
2. .
3.  $\omega_{-135^\circ} = 2,95 \text{ rad/s}$ .
4.  $\omega_0 \text{dB} = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 38 \text{ dB}$  soit  $K_P = 79$ .



#### Correcteur à avance de phase

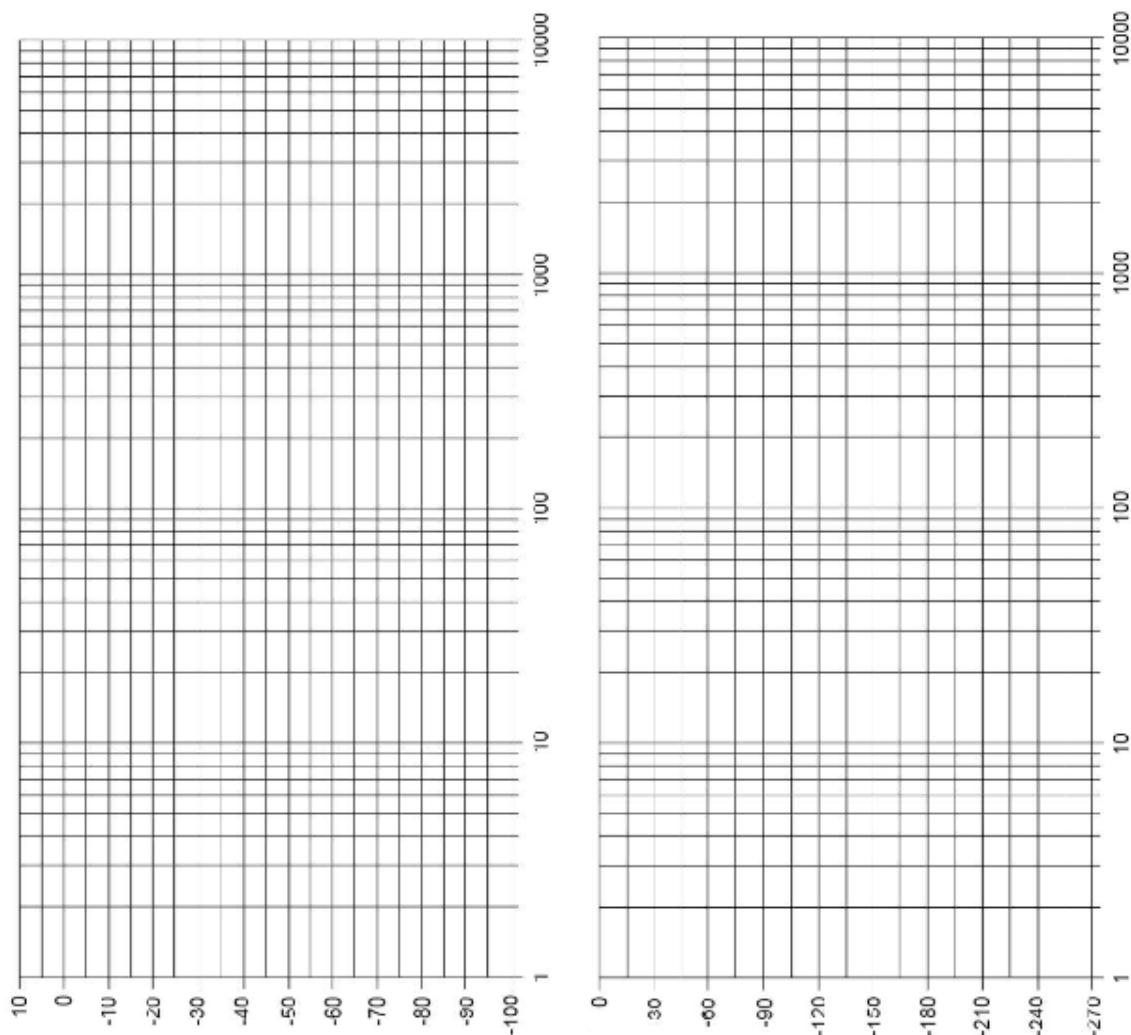
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de phase de la forme  $C(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ .

**Question 1** Tracer le diagramme de Bode de  $G(p)$ .

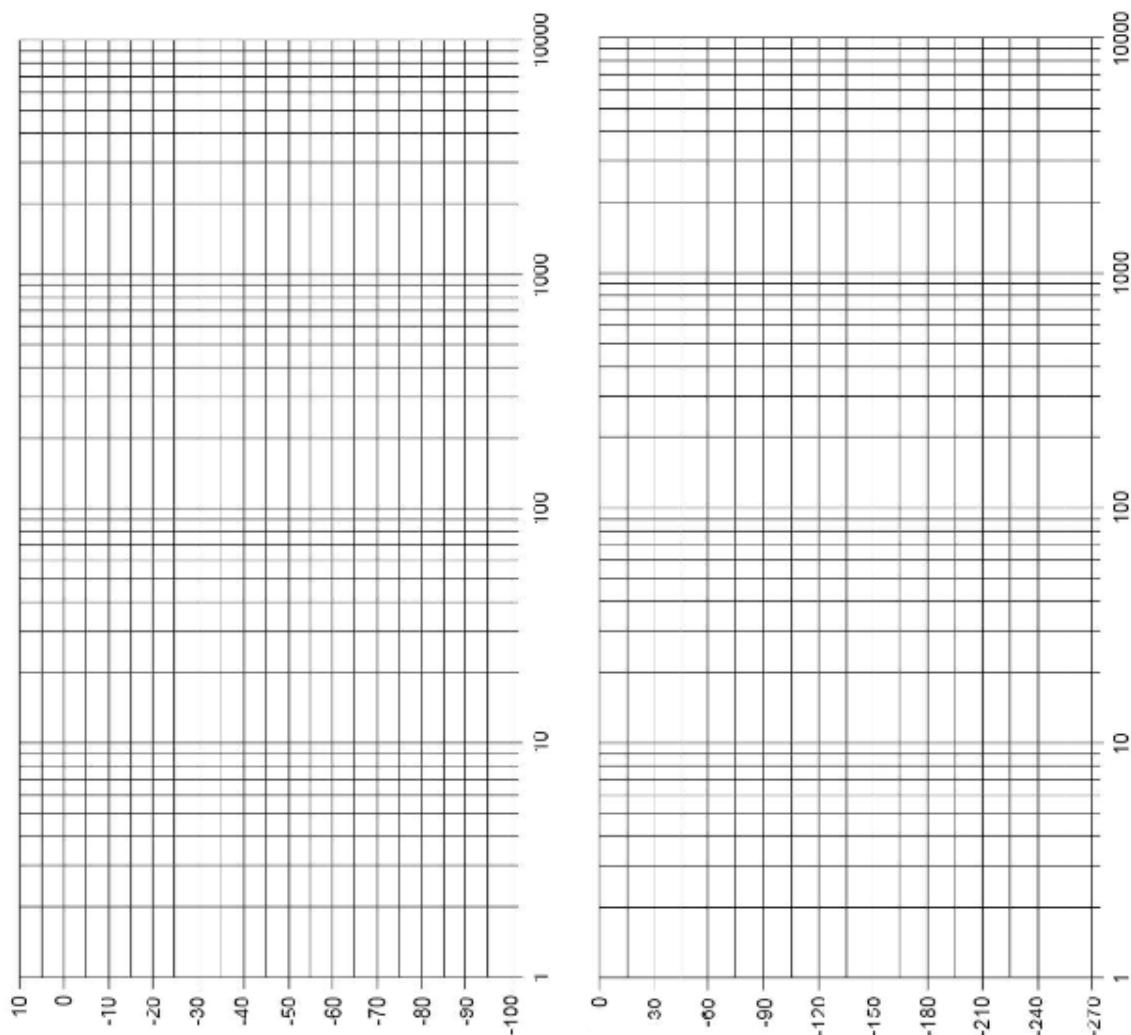
**Question 2** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

**Question 3** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

- 1.
2.  $C(p) = 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}$ .
- 3.



Cycle 03



## Activation 2 – Corrigé

### Réglage de correcteurs P et AP

Ressources de P. Dupas.

#### Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.

#### Correcteur proportionnel

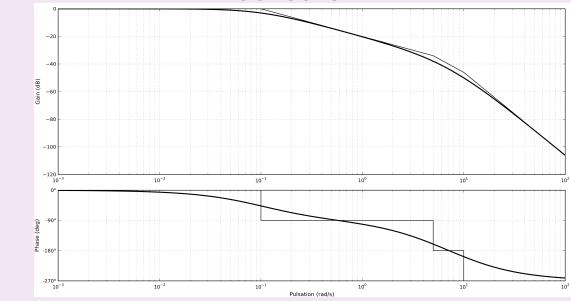
Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

**Question 4** Calculer la précision du système  $\epsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

**Correction** Le système est de classe 0. L'entrée est de type échelon.  $K_{BO} = 1$ . L'écart statique est de  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ .

**Question 5** Tracer dans le diagramme de Bode la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

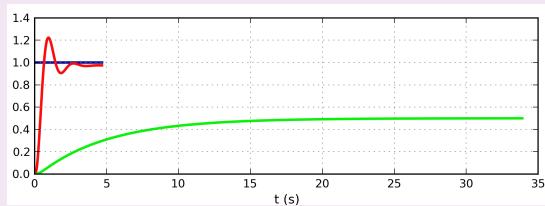
#### Correction



**Question 6** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de 45°. Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

#### Correction

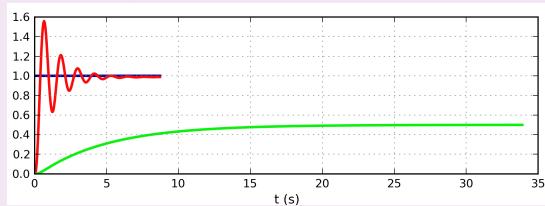
- On résout  $\varphi(\omega) = -135^\circ$  :  $\varphi(\omega) = -\arctan 10\omega - \arctan 0,1\omega - \arctan 0,2\omega$ .  
 $\varphi(\omega) = -135^\circ \Leftrightarrow \omega = 2,95 \text{ rad/s}$  (solveur Excel).
- Calculons  $G_{dB}(\omega) = -20\log(\sqrt{1+10^2\omega^2}) - 20\log(\sqrt{1+0,1^2\omega^2}) - 20\log(\sqrt{1+0,2^2\omega^2}) = -31 \text{ dB}$ . Il faut donc augmenter le gain de 31 dB soit  $K_P = 10^{31/20} = 35,48$ .
- On a alors un écart statique de  $\frac{1}{1+35,48} = 0,027$ .
- Pour déterminer la marge de gain, il faut résoudre  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ . On obtient  $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 12 \text{ dB}$ .



**Question 7** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

#### Correction

- On commence par résoudre  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ . On obtient  $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 44 \text{ dB}$ .
- Il faut augmenter le gain de 38 dB soit  $20\log K_P = 38 \Rightarrow K_P = 10^{38/20} = 79$ .
- On a alors un écart statique de  $\frac{1}{1+79} = 0,0125$ .
- La marge de phase est alors de 19°.



### Correcteur à avance de phase

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de phase de la forme  $C(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ .

**Question 1** Tracer le diagramme de Bode de  $G(p)$ .

**Question 2** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

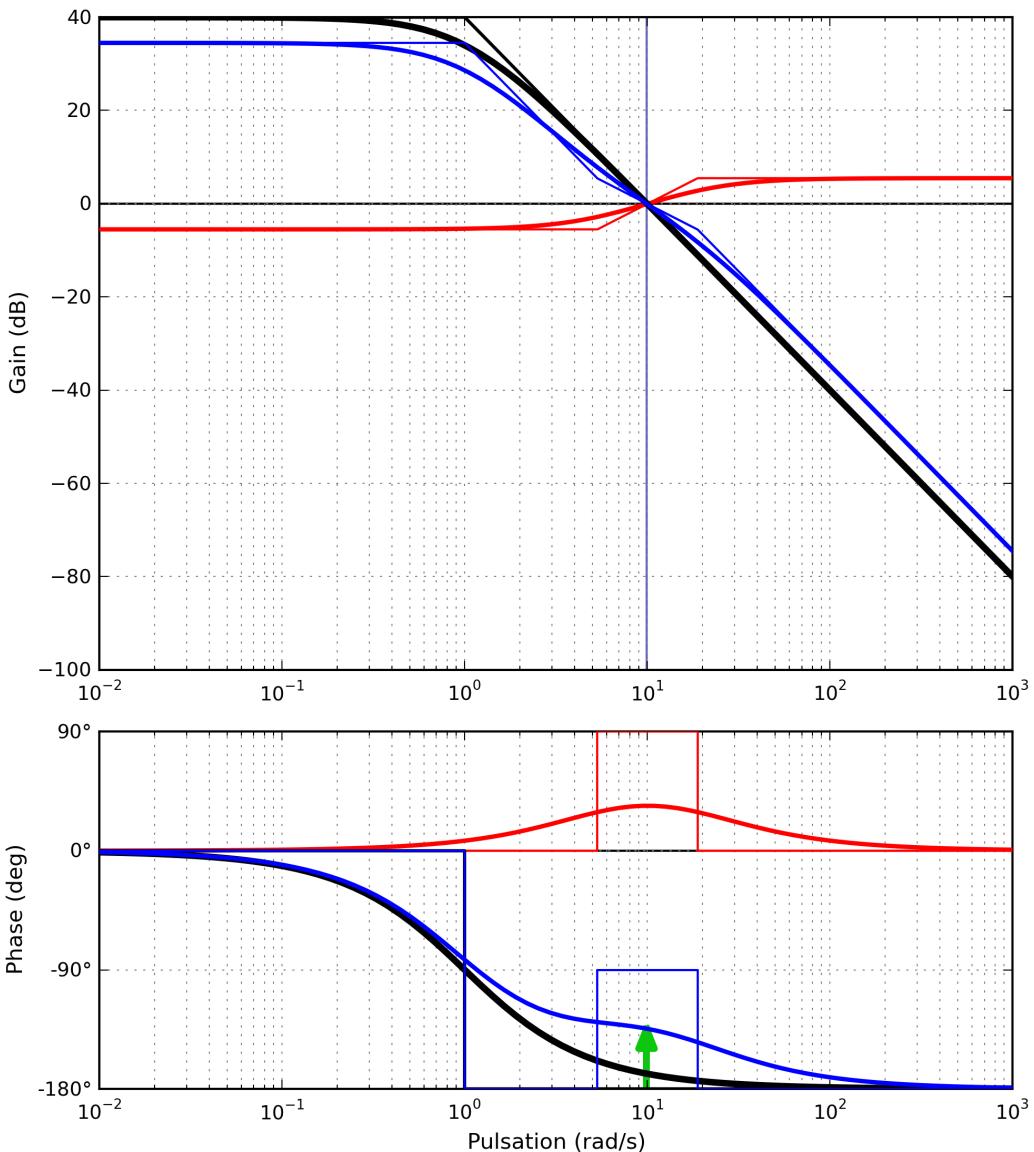
#### Correction

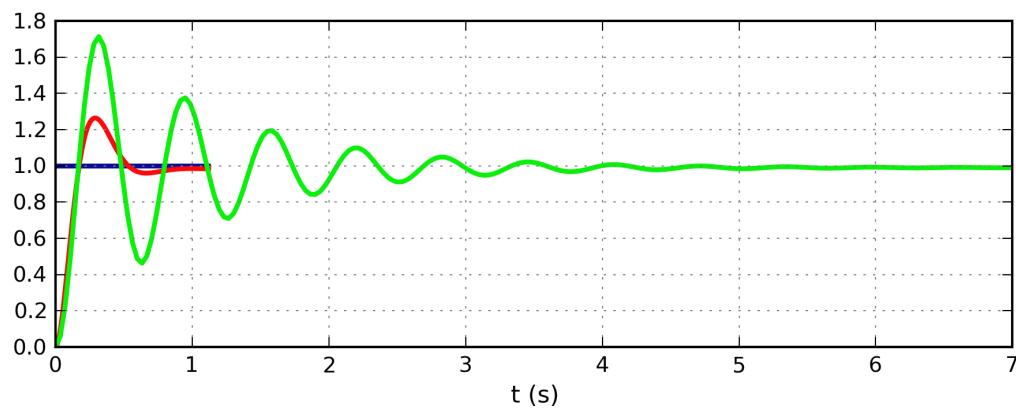
- $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(100) - 20 \log(1 + \omega^2)$ .  $G_{\text{dB}}(\omega) =$

- $0 \Leftrightarrow \frac{100}{1 + \omega^2} = 1 \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt{99} \Rightarrow \omega = 9,95 \text{ rad/s.}$   
 •  $\varphi(\omega) = -2 \arctan \omega$  et  $\varphi(9,95) = -2,94 \text{ rad} = -169^\circ$  soit une marge de phase de  $11^\circ$ ; le correcteur doit donc apporter un complément de phase de  $34^\circ$ .  
 •  $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \Rightarrow \sin(\varphi_{\max}) = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = -\frac{\sin(\varphi_{\max})+1}{\sin(\varphi_{\max})-1} = 3,54.$   
 •  $\tau = \frac{1}{9,95\sqrt{3,54}} = 0,053 \text{ s.}$

**Question 3** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

- 1.
2.  $C(p) = 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}$ .
- 3.





## TD 1



## Mise en situation

Le robot MC<sup>2</sup>E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

**L'axe en translation du MC<sup>2</sup>E est asservi en effort constant pour tirer (ou pousser) la vésicule au fur et à mesure que le chirurgien utilise son bistouri pour détacher la vésicule du foie. Le diagramme des exigences au dos décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC<sup>2</sup>E.**

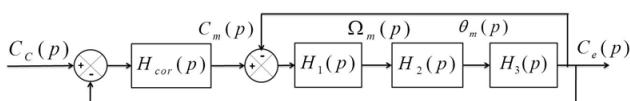
**Objectif** Modéliser et valider l'asservissement en effort.

## Modèle de connaissance de l'asservissement

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$  avec :

- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera  $\theta_m(p)$ ,  $\Omega_m(p)$ ,  $C_m(p)$  et  $C_e(p)$  les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose  $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$  où  $K_{C\theta}$  est une constante positive. On a de plus  $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$ . La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

## Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

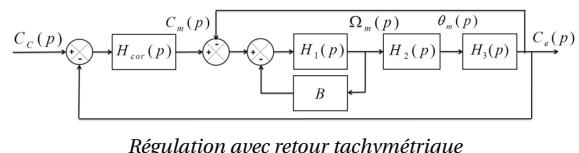
- $C_e(p)$ , couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC<sup>2</sup>E;
  - $C_c(p)$ , couple de consigne;
  - $C_m(p)$ , couple moteur;
  - $H_{cor}(p)$ , fonction de transfert du correcteur.
- Dans un premier temps, on prendra  $H_{cor}(p) = 1$ .

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.



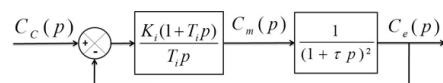
Régulation avec retour tachymétrique

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus loin (exigences 1.2.2.1 à 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.



## Régulation avec correcteur PI.

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

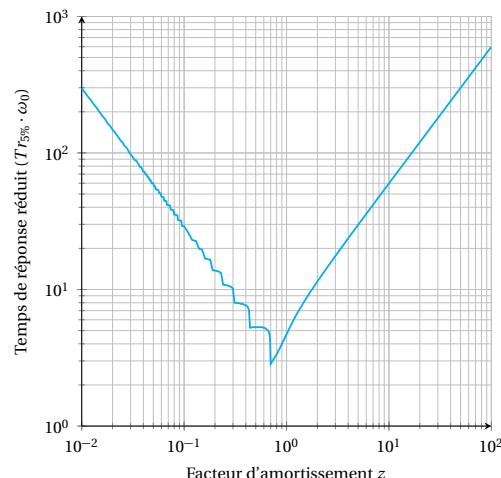
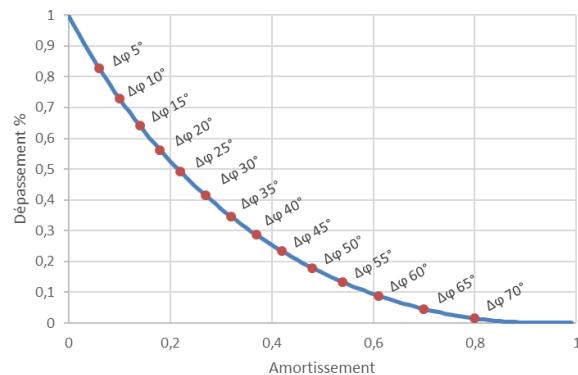
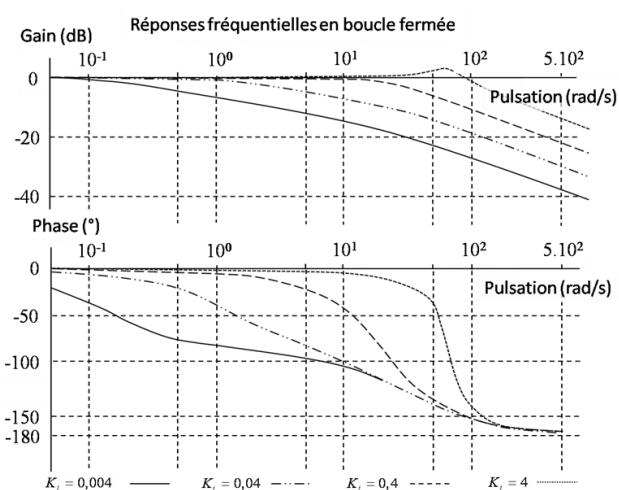
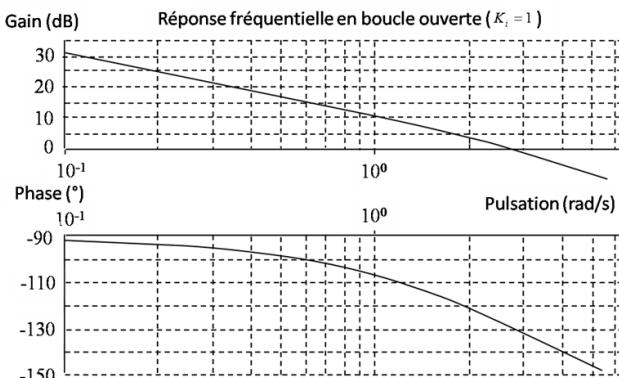
On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme :

$$1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}} p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

Les courbes de la réponse fréquentielle en boucle ouverte pour  $K_i = 1$  et les réponses fréquentielles en boucle fermée pour différentes valeurs de  $K_i$  sont données ci-dessous.

**Question 7** En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour  $K_i$  permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.



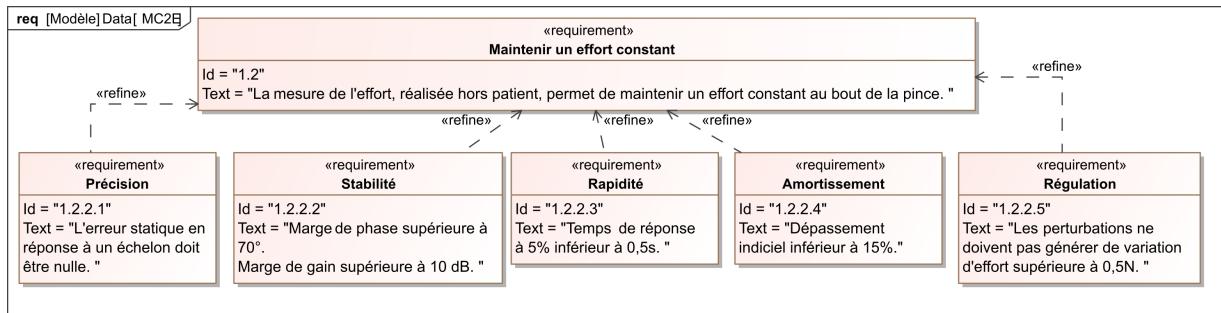
### Retour sur le cahier des charges

**Question 8** Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain			
Marges de phase			
Dépassement			
T5 %			
Erreur statique			

### Corrigé résumé

1.  $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$ ,  $H_2(p) = \frac{1}{p}$ ,  $H_3(p) = K_C \theta$ .
2.  $H_{BF}(p) = \frac{K_C \theta}{Jp^2 + 2K_C \theta}$ .
3. Sinus d'amplitude  $C_0/2$  et de pulsation  $\omega_0$ .
4.  $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_C \theta}}$  et  $B = 2\sqrt{J K_C \theta}$ .
5. Erreur statique nulle.
6.  $\tau = T_i$ .
7.  $K_i = 0,4 (< 1,58)$ .
8. .



## TD 1



## Mise en situation

Le robot MC<sup>2</sup>E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

**L'axe en translation du MC<sup>2</sup>E est asservi en effort constant pour tirer (ou pousser) la vésicule au fur et à mesure que le chirurgien utilise son bistouri pour détacher la vésicule du foie. Le diagramme des exigences au dos décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC<sup>2</sup>E.**

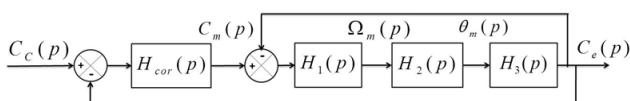
**Objectif** Modéliser et valider l'asservissement en effort.

## Modèle de connaissance de l'asservissement

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$  avec :

- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera  $\theta_m(p)$ ,  $\Omega_m(p)$ ,  $C_m(p)$  et  $C_e(p)$  les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose  $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$  où  $K_{C\theta}$  est une constante positive. On a de plus  $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$ . La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

## Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

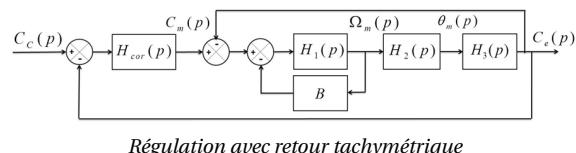
•  $C_e(p)$ , couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC<sup>2</sup>E;  
 •  $C_c(p)$ , couple de consigne;  
 •  $C_m(p)$ , couple moteur;  
 •  $H_{cor}(p)$ , fonction de transfert du correcteur.  
 Dans un premier temps, on prendra  $H_{cor}(p) = 1$ .

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.



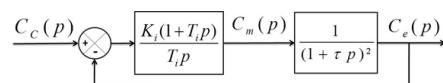
Régulation avec retour tachymétrique

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus loin (exigences 1.2.2.1 à 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.



Régulation avec correcteur PI.

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

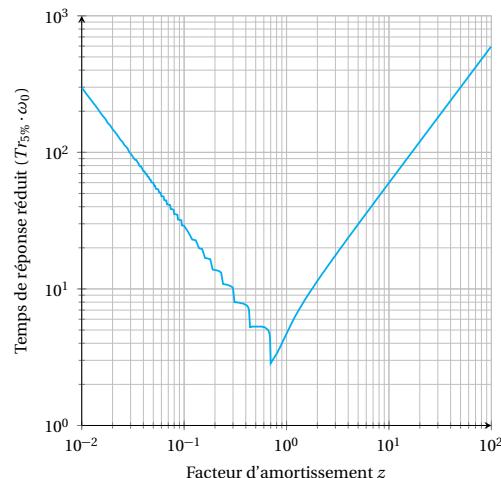
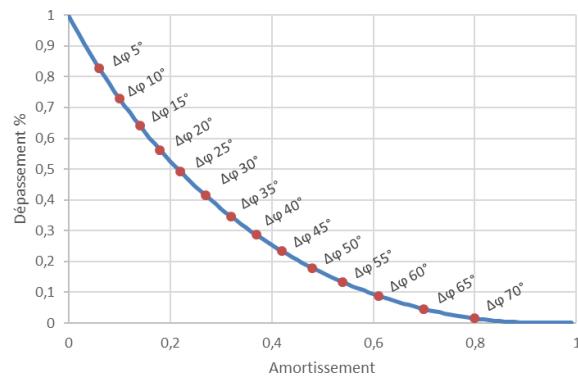
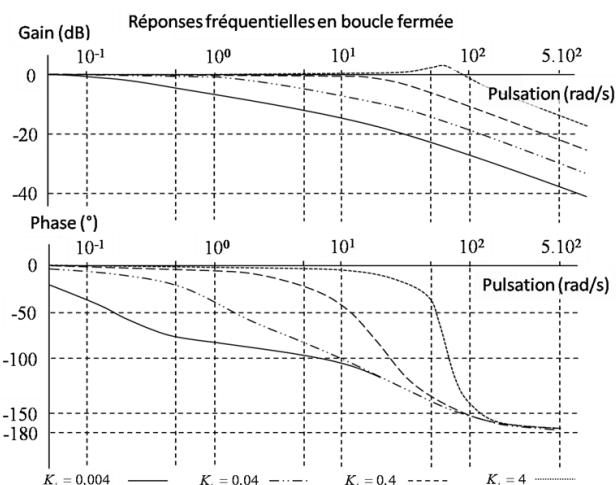
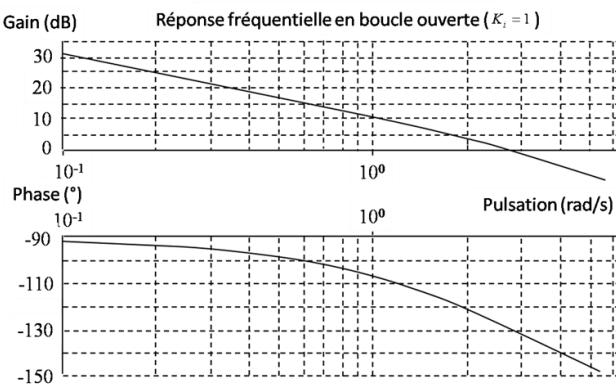
On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme :

$$1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}} p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

Les courbes de la réponse fréquentielle en boucle ouverte pour  $K_i = 1$  et les réponses fréquentielles en boucle fermée pour différentes valeurs de  $K_i$  sont données ci-dessous.

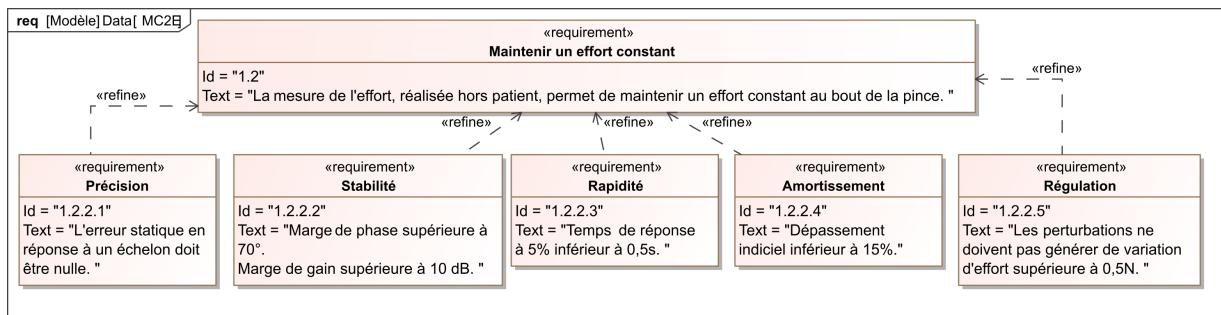
**Question 7** En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour  $K_i$  permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.



### Retour sur le cahier des charges

**Question 8** Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain			
Marges de phase			
Dépassement			
T5 %			
Erreur statique			



## TD 1 – Corrigé



### Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

#### Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

#### Mise en situation

##### Modèle de connaissance de l'asservissement

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Correction** On a  $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$  et donc  $H_2(p) = \frac{\theta_m(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{p}$ .

De plus  $Jp^2\theta_m(p) = C_m(p) - C_e(p) \Leftrightarrow Jp\Omega_m(p) = \Omega_m(p)$  et donc  $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_m(p) - C_e(p)} = \frac{1}{Jp}$ .

Enfin,  $H_3(p) = \frac{C_e(p)}{\theta_m(p)} = K_{C\theta}$ .

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

**Correction** D'une part,  $F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp} \frac{1}{p} K_{C\theta}}{1 + \frac{1}{Jp} \frac{1}{p} K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}$ .

D'autre part,  $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}}{1 + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + 2K_{C\theta}}$ .

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

**Correction** Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. Le gain est de  $\frac{1}{2}$  et la pulsation est de  $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{J}{2K_{C\theta}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K_{C\theta}}{J}}$ .

Pour une entrée échelon d'amplitude  $C_0$ , le système répondra par un sinus d'amplitude  $\frac{C_0}{2}$  (valeur crête à crête  $C_0$ ) de pulsation  $\omega_0$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

#### Correction

D'une part,  $F_1(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)B}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{D'autre part, } H_{\text{BO}}(p) &= \frac{\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)}{1 + \frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+Bp+K_{C\theta}} \\
 &= \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2 + \frac{B}{K_{C\theta}}p + 1}.
 \end{aligned}$$

Enfin,  $(1 + \tau p)^2 = 1 + 2\tau p + \tau^2 p^2$ . Donc nécessairement  $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$  et  $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}} \Leftrightarrow B = 2\tau K_{C\theta} = 2\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} K_{C\theta} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ .

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Correction** La boucle ouverte est de classe 1. L'erreur statique (entrée échelon) est donc nulle ce qui est conforme à l'exigence 1.2.2.1 du cahier des charges.

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

**Correction**

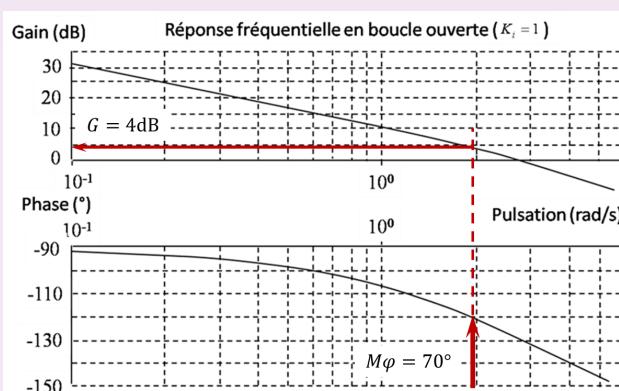
Pour avoir une FTBF d'ordre 2, il faut que la BO soit d'ordre 2. En conséquence, vu la forme de correcteur proposé, on peut envisager que le correcteur compense un pôle du système.

$$\text{Ainsi pour } \tau = T_i, \text{ on a } \frac{C_e(p)}{C_C(p)} = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}}{1 + \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p) + K_i} = \frac{K_i}{\tau^2 p^2 + \tau p + K_i} = \frac{1}{\frac{K_i}{\tau^2} p^2 + \frac{\tau}{K_i} p + 1}.$$

**Question 7** En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour  $K_i$  permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.

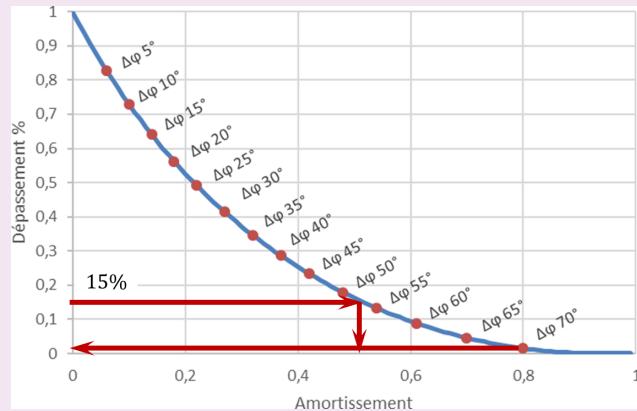
**Correction**

- Marge de gain 10 dB : la boucle ouverte est d'ordre 2. La phase est donc toujours supérieure à  $-180^\circ$  et la marge de gain est infinie. Le critère est respecté.
- Marge de phase supérieure à  $70^\circ$  : il est donc nécessaire que le gain (dB) de la boucle ouverte soit nul lorsque la phase est égale à  $120^\circ$ . D'après la réponse fréquentielle en BO, il faut donc que  $20 \log K_i \leq 4 \Rightarrow K_i \leq 10^{\frac{20}{4}} = 1,58$ .

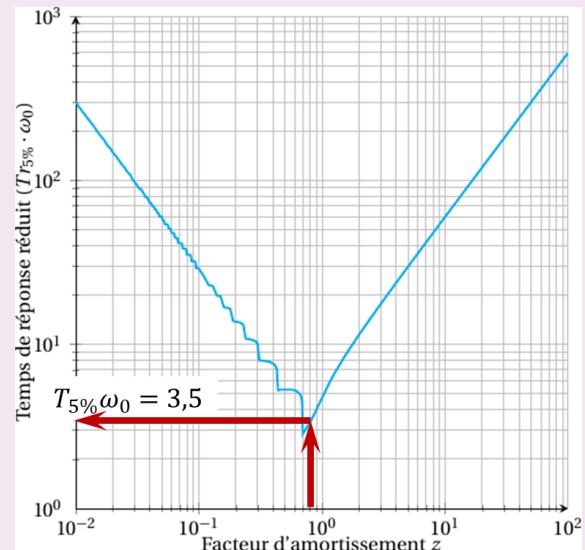
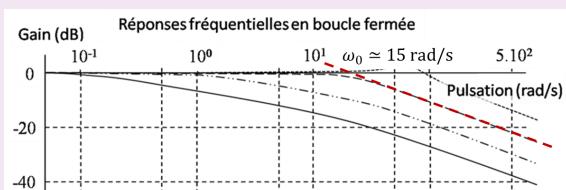


- Dépassement inférieur à 15% : l'abaque ci-dessous montre que pour une marge de phase de  $70^\circ$ , le dépassement sera inférieur à 15%. Ainsi, avec une marge de phase de  $70^\circ$ , le dépassement sera donc d'environ 2% et

le coefficient d'amortissement sera d'environ 0,8.



- Temps de réponse à 5% inférieur à 0,5 s : en utilisant la réponse fréquentielle pour un gain de 0,4 ( $< 1,58$ ) on a  $\omega_0 \approx 15 \text{ rad s}^{-1}$ . En utilisant l'abaque du temps de réponse réduit, on a  $\omega_0 \cdot T_{r5\%} \approx 3,5$ ; donc  $T_{r5\%} \approx \frac{3,5}{15} = 0,23 \text{ s}$ .



- D'après le diagramme de Bode en BF, le gain basse fréquence est nul. Le gain de la fonction de transfert est donc unitaire. L'erreur statique est donc nulle.

On propose donc  $K_i = 0,4 (< 1,58)$ .

## Retour sur le cahier des charges

**Question 8** Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

### Correction

Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain	10 dB	$\infty$	OK
Marges de phase	70°	70°	OK
Dépassement	< 15 %	2%	OK
T5 %	< 0,5s	0,23 s	OK
Erreur statique	Nulle	Nulle	OK

Le cahier des charges est donc respecté. (Réponse indicielle d'un second ordre avec un coefficient d'amortissement de 0,8 et un gain unitaire).

## TD 1



## Train d'atterrissement d'hélicoptère \*\*

Banque PT – SIA 2014

## Savoirs et compétences :

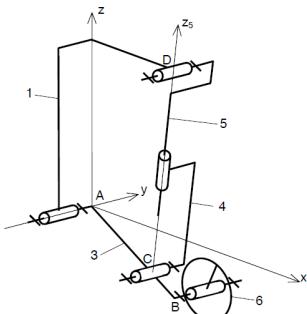
- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur à avance de phase
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

## Mise en situation

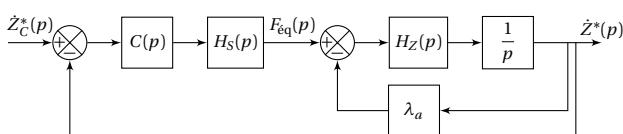
Lors d'atterrissements d'hélicoptères à grande vitesse, les oscillations induites par l'impact au sol du train d'atterrissement principal génèrent des contraintes mécaniques importantes à la liaison du pylône de queue avec la cabine. Les oscillations du pylône de queue de l'appareil ne sont pas négligeables. Lors de ces atterrissages, les vitesses verticales minimales sont de l'ordre de  $2 \text{ m s}^{-1}$  mais peuvent atteindre des valeurs plus importantes lors d'apportage sur un bateau à cause des mouvements du bateau dus à la houle. La résistance aux crashs correspond à la possibilité de garder opérationnel un appareil qui aurait atterri avec une vitesse d'impact pouvant atteindre  $4 \text{ m s}^{-1}$ .

**Objectif** Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération de la queue doit rester inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

On donne une modélisation cinématique du train principal.



La vitesse d'impact lors de l'atterrissement de l'hélicoptère correspond alors à la vitesse de la tige 5 de l'amortisseur par rapport au cylindre 4. Cette vitesse est notée  $\dot{z}^*$ . On se propose d'étudier la stabilité vis-à-vis de la seule consigne  $\dot{z}_c^*(p)$ . On adoptera pour le réglage de la correction le schéma suivant.



On note dans ce schéma :

- $\dot{z}^*(p)$  la transformée de  $\dot{z}^*(t) = \dot{z}(t) + V_0$  avec  $V_0$  la vitesse d'impact et  $\dot{z}(t)$  la vitesse absolue de la cabine par rapport au sol;
- $F_{eq}(p)$  l'effort équivalent ramené au déplacement de la cabine et fourni par la partie active de l'amortisseur;
- $\lambda_a$  le coefficient d'amortissement passif équivalent ramené au déplacement de la cabine;
- $H_S(p) = \frac{K_S}{1 + T_S p}$  la fonction de transfert de la partie active de l'amortisseur. On prendra :  $K_S = 12 \times 10^4 \text{ N A}^{-1}$  et  $T_S = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$ ;
- $H_Z(p) = \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}$  la fonction de transfert traduisant le comportement dynamique du train.
- $C(p)$  la fonction de transfert du correcteur dont le réglage fait l'objet de cette partie.

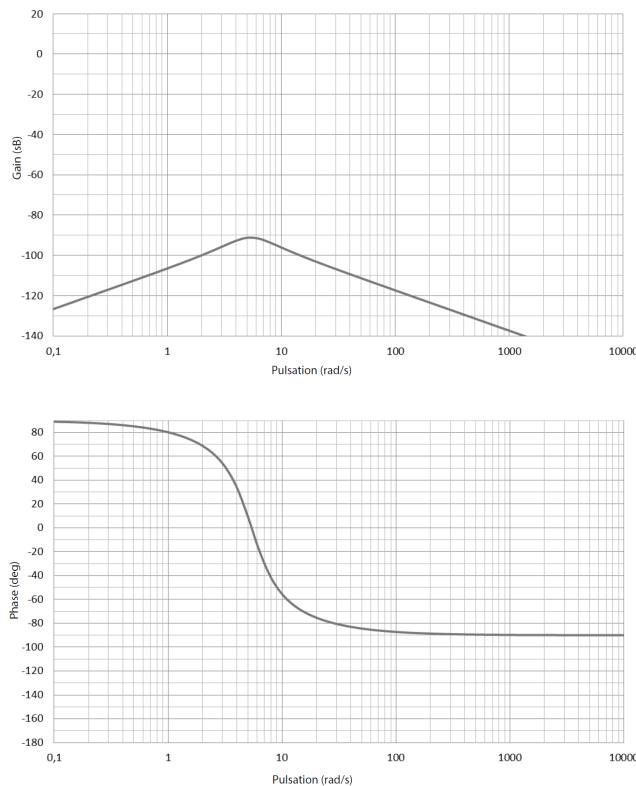
## Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

**Objectif** Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

**Question 1** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_F(p) = \frac{\dot{z}^*(p)}{F_{eq}(p)}$ .

**Question 2** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée  $H_{BONC}(p)$ .

On donne le diagramme de Bode de  $H_F(p)$ .



**Question 3** Justifier la forme de ce diagramme en tracant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de  $K_z$  et  $\omega_z$ . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction  $H_{BONC}(p)$ . On prendra pour cela  $20\log K_S \approx 100$  dB.

### Choix et réglage de la correction

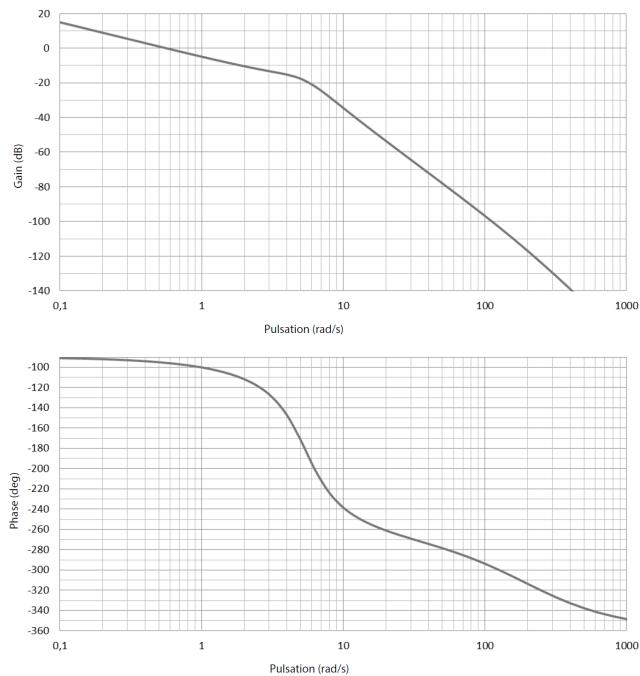
**Objectif** Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin de satisfaire les exigences, une étude complémentaire non abordée dans ce sujet montre que la boucle d'asservissement doit posséder les performances suivantes :

- erreur statique nulle;
- pulsation de coupure à 0 dB et  $\omega_{0dB} = 6 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- marge de phase  $M\varphi = 45^\circ$ ;
- marge de gain  $MG > 6$  dB.

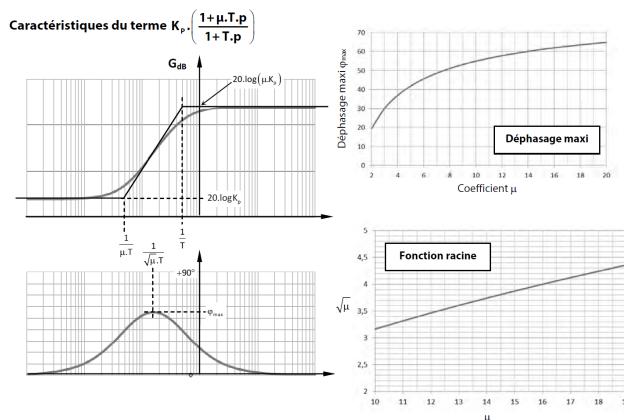
**Question 4** Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

On choisit dans un premier temps un correcteur de la forme  $C(p) = \frac{K_p}{p^2}$ . On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système ainsi corrigé pour  $K_p = 1$ .



**Question 5** Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de  $K_p$  garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

On choisit finalement un correcteur de la forme  $C(p) = \frac{K_p}{p^2} \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$  avec  $\mu > 1$ . Les caractéristiques du terme en  $K_p \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$  ainsi que des abaques de calcul sont donnés ci-dessous.



**Question 6** Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

**Question 7** Quelle valeur doit-on donner à  $\mu$  pour garantir le critère de marge de phase ?

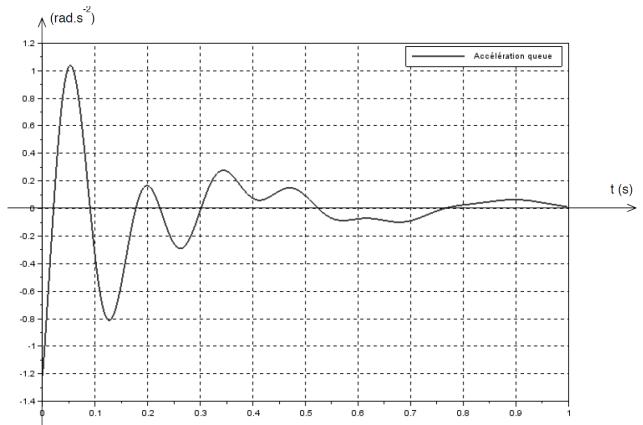
**Question 8** En déduire les valeurs de  $T$  et de  $K_p$  permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

### Validation des performances

**Objectif** Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

On donne le résultat d'une simulation du système complet piloté à l'aide du correcteur précédemment dimensionné pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$ .

**Question 9** En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.



## TD 1



## Train d'atterrissement d'hélicoptère \*\*

Banque PT – SIA 2014

## Savoirs et compétences :

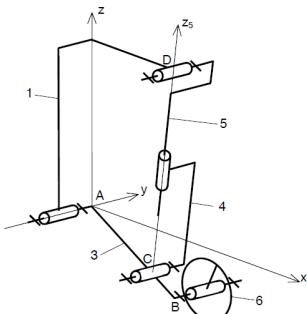
- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur à avance de phase
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

## Mise en situation

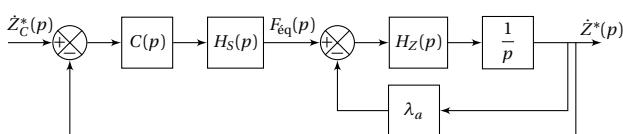
Lors d'atterrissements d'hélicoptères à grande vitesse, les oscillations induites par l'impact au sol du train d'atterrissement principal génèrent des contraintes mécaniques importantes à la liaison du pylône de queue avec la cabine. Les oscillations du pylône de queue de l'appareil ne sont pas négligeables. Lors de ces atterrissages, les vitesses verticales minimales sont de l'ordre de  $2 \text{ m s}^{-1}$  mais peuvent atteindre des valeurs plus importantes lors d'apportage sur un bateau à cause des mouvements du bateau dus à la houle. La résistance aux crashs correspond à la possibilité de garder opérationnel un appareil qui aurait atterri avec une vitesse d'impact pouvant atteindre  $4 \text{ m s}^{-1}$ .

**Objectif** Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération de la queue doit rester inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

On donne une modélisation cinématique du train principal.



La vitesse d'impact lors de l'atterrissement de l'hélicoptère correspond alors à la vitesse de la tige 5 de l'amortisseur par rapport au cylindre 4. Cette vitesse est notée  $\dot{z}^*$ . On se propose d'étudier la stabilité vis-à-vis de la seule consigne  $\dot{z}_c^*(p)$ . On adoptera pour le réglage de la correction le schéma suivant.



On note dans ce schéma :

- $\dot{z}^*(p)$  la transformée de  $\dot{z}^*(t) = \dot{z}(t) + V_0$  avec  $V_0$  la vitesse d'impact et  $\dot{z}(t)$  la vitesse absolue de la cabine par rapport au sol;
- $F_{eq}(p)$  l'effort équivalent ramené au déplacement de la cabine et fourni par la partie active de l'amortisseur;
- $\lambda_a$  le coefficient d'amortissement passif équivalent ramené au déplacement de la cabine;
- $H_S(p) = \frac{K_S}{1 + T_S p}$  la fonction de transfert de la partie active de l'amortisseur. On prendra :  $K_S = 12 \times 10^4 \text{ N A}^{-1}$  et  $T_S = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$ ;
- $H_Z(p) = \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}$  la fonction de transfert traduisant le comportement dynamique du train.
- $C(p)$  la fonction de transfert du correcteur dont le réglage fait l'objet de cette partie.

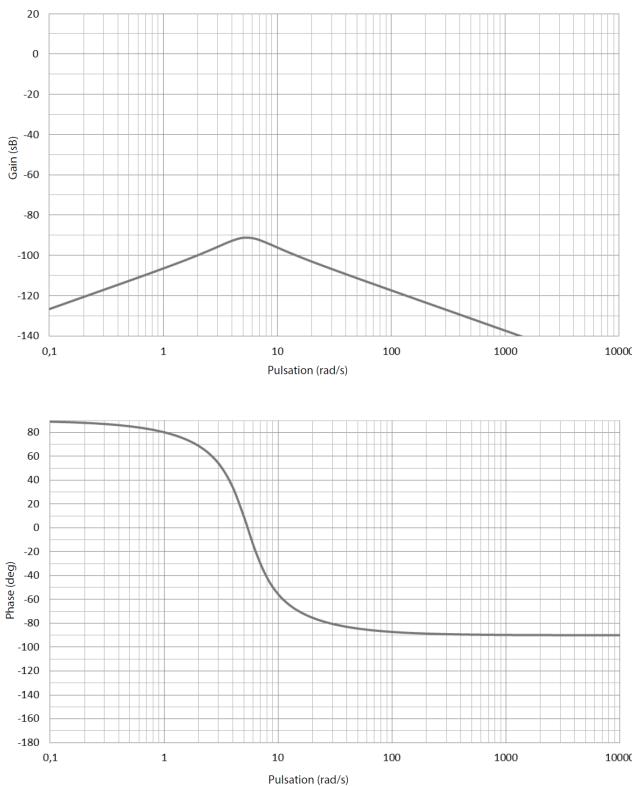
## Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

**Objectif** Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

**Question 1** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_F(p) = \frac{\dot{z}^*(p)}{F_{eq}(p)}$ .

**Question 2** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée  $H_{BONC}(p)$ .

On donne le diagramme de Bode de  $H_F(p)$ .



**Question 3** Justifier la forme de ce diagramme en tracant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de  $K_z$  et  $\omega_z$ . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction  $H_{BONC}(p)$ . On prendra pour cela  $20\log K_S \simeq 100$  dB.

### Choix et réglage de la correction

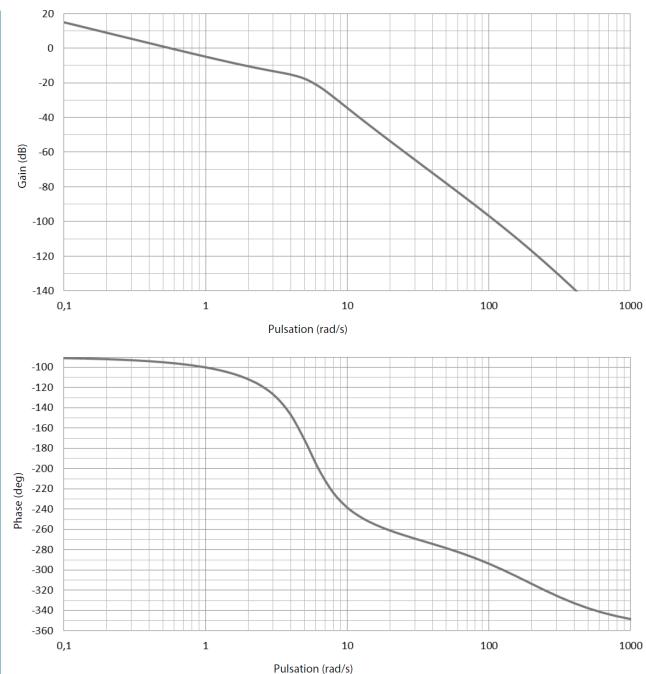
**Objectif** Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin de satisfaire les exigences, une étude complémentaire non abordée dans ce sujet montre que la boucle d'asservissement doit posséder les performances suivantes :

- erreur statique nulle;
- pulsation de coupure à 0 dB et  $\omega_{0dB} = 6 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- marge de phase  $M\varphi = 45^\circ$ ;
- marge de gain  $MG > 6$  dB.

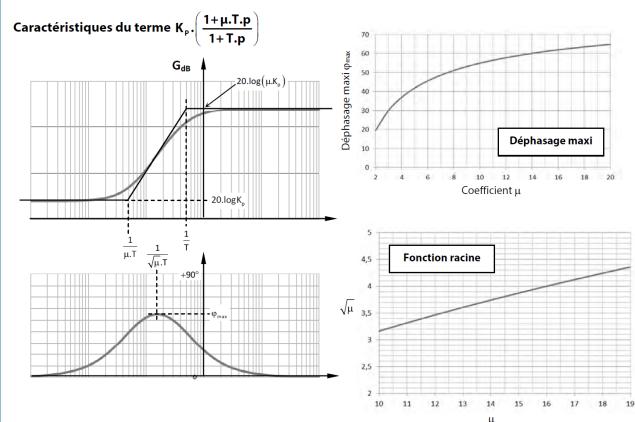
**Question 4** Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

On choisit dans un premier temps un correcteur de la forme  $C(p) = \frac{K_p}{p^2}$ . On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système ainsi corrigé pour  $K_p = 1$ .



**Question 5** Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de  $K_p$  garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

On choisit finalement un correcteur de la forme  $C(p) = \frac{K_p}{p^2} \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$  avec  $\mu > 1$ . Les caractéristiques du terme en  $K_p \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$  ainsi que des abaques de calcul sont donnés ci-dessous.



**Question 6** Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

**Question 7** Quelle valeur doit-on donner à  $\mu$  pour garantir le critère de marge de phase ?

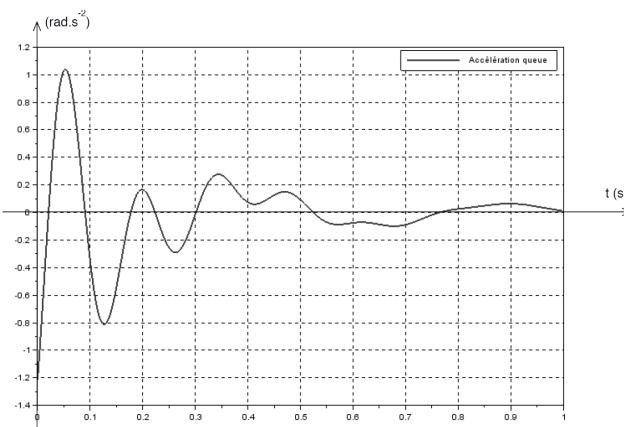
**Question 8** En déduire les valeurs de  $T$  et de  $K_p$  permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

### Validation des performances

**Objectif** Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

On donne le résultat d'une simulation du système complet piloté à l'aide du correcteur précédemment dimensionné pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$ .

**Question 9** En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.



## TD 1 – Corrigé



## Mise en situation

**Objectif** Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération de la queue doit rester inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

## Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

**Objectif** Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

**Question 1** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{eq}(p)}$ .

## Correction

$$H_F(p) = \frac{H_Z(p) \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a H_Z(p) \frac{1}{p}} = \frac{\frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}} =$$

$$\frac{\frac{K_Z p^2}{p \left(1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}\right)} + \lambda_a K_Z p^2}{1 + \left(\frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z\right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}.$$

**Question 2** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée  $H_{BONC}(p)$ .

**Correction**  $H_{BONC}(p) = \frac{K_S p}{1 + \left(\frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z\right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}.$

## Train d'atterrissement d'hélicoptère \*

Banque PT – SIA 2014

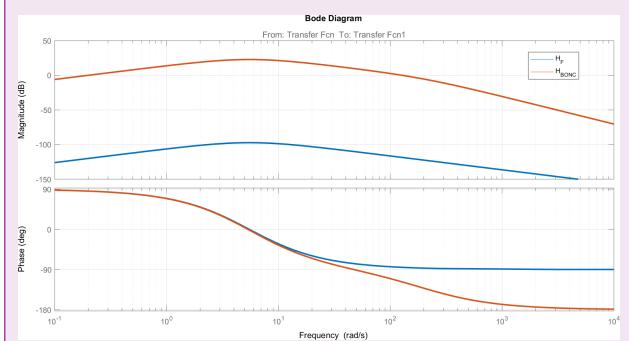
## Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur à avance de phase
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

**Question 3** Justifier la forme de ce diagramme en tracant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de  $K_Z$  et  $\omega_Z$ . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction  $H_{BONC}(p)$ . On prendra pour cela  $20 \log K_S \approx 100 \text{ dB}$ .

**Correction**  $H_F$  est un second ordre dérivé de coefficient d'amortissement  $\xi_F$  et de pulsation propre  $\omega_Z$ . Ne pouvant pas calculer  $\xi_F$ , l'allure du diagramme de Bode suggère que  $\xi_F < 1$  car il y a une seule rupture de pente à  $\omega_Z = 5,5 \text{ rad s}^{-1}$ .

Pour  $\omega < \omega_Z$  l'asymptote du second ordre à un gain de 0dB. Seul le déivateur est influent. En conséquence, pour  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ , on a donc  $|K_Z p|_{\text{dB}} = 20 \log K_Z = -106$ . On a donc  $K_Z = 5 \times 10^{-6}$ .



## Choix et réglage de la correction

**Objectif** Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

**Question 4** Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

**Correction** Pour que l'erreur statique soit nulle, il faut que la classe de la FTBO soit de 1. La classe de la FTBO non corrigée étant de «-1», il faut donc que le correcteur soit de classe 2 pour que le critère de précision soit garanti.

**Question 5** Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de  $K_p$  garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

**Correction** La marge de gain est de 18 dB et la marge de phase est de 95°.

Pour avoir une pulsation de coupure à 0 dB de  $6 \text{ rad s}^{-1}$ , il faut relever le gain de 20 dB soit  $K_p = 10$ . Dans ces conditions, la marge de phase est de  $-15^\circ$  et la marge de gain est  $-2 \text{ dB}$ .

En conséquences, le système est précis (écart nul) et la pulsation de coupure du cahier des charges est respectée. Les marges ne sont plus satisfaites.

**Question 6** Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

**Correction** L'action de correction obtenue est de l'avance de phase.

**Question 7** Quelle valeur doit-on donner à  $\mu$  pour garantir le critère de marge de phase ?

**Correction Cas 1 : on conserve**  $K_p = 10$ . Le correcteur doit ajouter  $60^\circ$  de phase pour  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ . Il faut donc  $\mu = 14$ .

**Cas 2 : on reprend**  $K_p = 1$ . Dans ce cas, on souhaite que lorsque  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\varphi$  soit égal à  $45^\circ$ . Il faut donc ajouter  $65^\circ$  de phase à cette pulsation. Dans ces conditions,  $\mu = 20$ .

Le critère de précision reste validé car il y a toujours les deux intégrateurs dans le correcteur.

**Question 8** En déduire les valeurs de  $T$  et de  $K_p$  permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante

énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

**Correction Dans le cas 1 :**  $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{14}} = 0,045 \text{ s}$ . Le gain  $K_p$  déjà déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Il faut donc que le gain du correcteur à avance de phase soit nul à la pulsation de coupure à  $\omega_{0\text{dB}}$ .

Il faut donc que  $\frac{1}{2}(20\log(\mu K'_p) + 20\log K'_p) = 0 \Rightarrow \log(\mu K'^2_p) = 0 \Rightarrow \mu K'^2_p = 1 \Rightarrow K'_p = \sqrt{1/\mu} = 0,267$ .

**Dans le cas 2 :**  $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{20}} = 0,037 \text{ s}$ .

Actuellement, le gain est de  $-20 \text{ dB}$  pour  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ . Il faut donc augmenter le gain de 20 dB pour la pulsation  $\frac{1}{T\sqrt{\mu}}$ . Ceci revient donc à résoudre  $20\log K_p + \frac{1}{2}(20\log \mu K_p - 20\log K_p) = 20 \Rightarrow \log K_p + \log \sqrt{\mu} = 1 \Rightarrow K_p \sqrt{\mu} = 10 \Rightarrow K_p = 10/\sqrt{20} = 2,6$ .

**Remarque :** dans le cas 1 le gain du correcteur est  $K_p \times K'_p = 2,6$ . Dans le cas 2  $K_p = 2,6$ .

## Validation des performances

**Objectif** Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

**Question 9** En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.

**Correction** Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération reste bien inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .