Cycle 03

Concevoir la partie commande des systèmes asservis afin de valider leurs performances

Chapitre 1 – Correction des SLCI

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

PSI★ – MP

TD 03

Vanoise Express

E3A – PSI – 2014

Savoirs et compétences :

Présentation

Noël 2003, le téléphérique Vanoise Express relie enfin les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs, donnant naissance à paradiski, un domaine skiable de 425 km, le troisième plus grand de France.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	**Ecart statique** en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M\varphi \geq 45°$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1\,rd/s$

Modélisation du moteur à courant continu

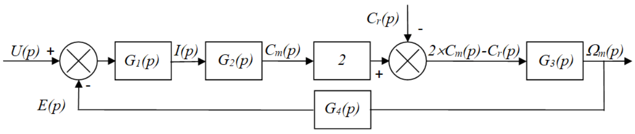
Hypothèses et données :

- on suppose les conditions initiales nulles ;
- les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- $L = 0.59\,\text{mH}$ inductance d'un moteur ;
- $R = 0.0386\,\Omega$ résistance interne d'un moteur ;
- $f = 6\,\text{N m s/rad}$ coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- $J = 800\,\text{kg m}^2$ moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- $c_m(t) = k_T i(t)$ avec $k_T = 5.67\,\text{Nm/A}$ (constante de couple d'un moteur) ;
- $e(t) = k_E \omega_m(t)$ avec $k_T = 5.77\,\text{Vs/rad}$ (constante électrique d'un moteur)
- équations de la dynamique : $2c_m(t) - c_r(t) = K\omega_m(t) + f\omega_m(t)$.

Notations :

- on notera $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$;
- $u(t)$ tension d'alimentation des moteurs ;
- $i(t)$ intensité traversant un moteur ;
- $e(t)$ force contre électromotrice d'un moteur ;
- $\omega_m(t)$ vitesse de rotation d'un moteur ;
- $c_m(t)$ couple d'un seul moteur ;
- $c_r(t)$ couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

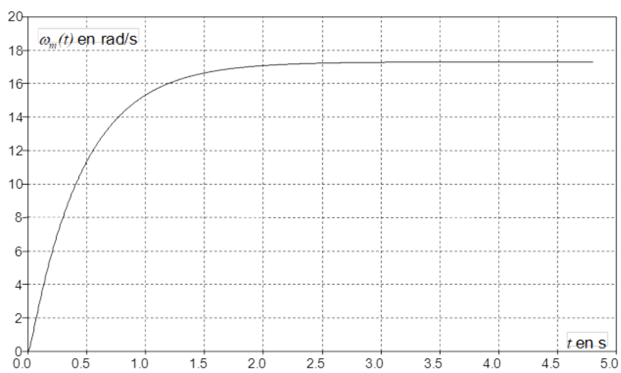
Question 1 *Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminez les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.*



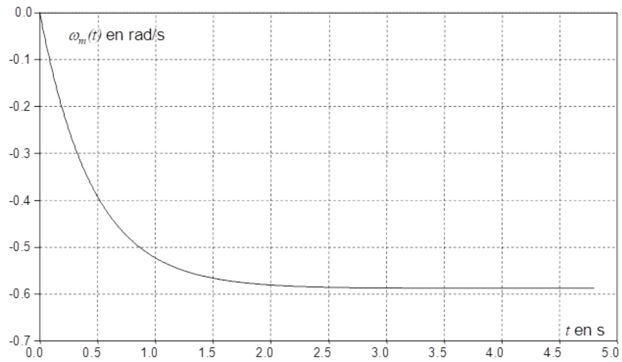
Question 2 *$\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$. Exprimer les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.*

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

1. la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V (le couple de perturbation $c_r(t)$ est nul) ;
2. la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m (la tension $u(t)$ est nulle).



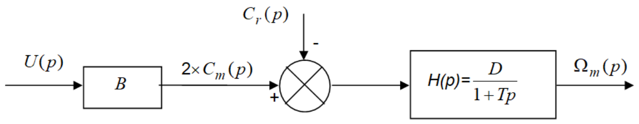
Réponse en vitesse à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude 100 V.



Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation $c_r(t)$ d'amplitude 1000 N m.

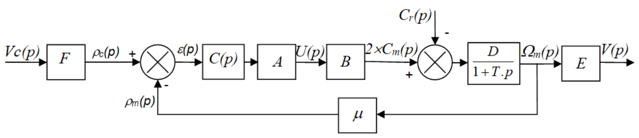
Question 3 *Choisissez et justifiez un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminez numériquement les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ par identification.*

En faisant l'approximation que les deux fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ont sensiblement le même dénominateur, le schéma bloc ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



Question 4 *Donnez la valeur numérique des trois constantes B, D et T.*

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

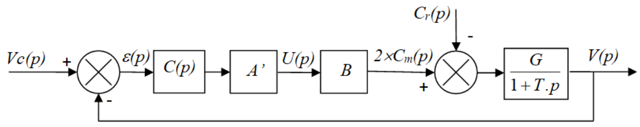


- La consigne de vitesse $v_c(t)$ est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension $\rho_c(t)$ avec le gain F.
- Une génératrice tachymétrique de gain $\mu = 0.716\,\text{V s/rad}$ transforme la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ du moteur en une tension $\rho_m(t)$.
- Un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ corrige la différence $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$ et l'envoie à un amplificateur de gain A, qui alimente les deux moteurs électriques.
- La vitesse de rotation des moteurs $\omega_m(t)$ est transformée en vitesse du téléphérique $v(t)$ avec le gain E.

Question 5 *Déterminez l'expression du gain E. Faire une application numérique.*

Question 6 *Déterminez l'expression du gain F pour que $\varepsilon(t) = 0$ entraîne $v_c(t) = v(t)$. Faire une application numérique.*

Par transformation du schéma bloc, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients E et F calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients A' et G. Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes : $A' \cdot B = 3 \cdot 10^{-4}$ sN ; $G = 6 \cdot 10^{-5}$ m/(sNm) et $T = 0.47$ s.

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

Utilisation d'un correcteur proportionnel

$C(p) = C_0 = 1$.

Question 7 *Justifiez en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.*

Question 8 *On suppose $C_r(p) = 0$. Calculez en fonction de C_0, A', B, G et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12$ m/s. Faire l'application numérique.*

On suppose $V_c(p) = 0$.

Question 9 *Calculez en fonction de C_0, A', B, G et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation en échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270$ Nm qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.*

Question 10 *Faire également une application numérique si $C_{r0} = 7460$ Nm qui modéliserait la montée vers La Plagne.*

Question 11 *Donnez numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.*

Question 12 *Existe-t-il une valeur réaliste de C_0 pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifiez.*

Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur $C(p) = \dfrac{C_i}{p}$.

Question 13 *Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée FTBO(p). Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.*

Question 14 *Tracez le diagramme asymptotique de Bode de FTBO(p). Tracez également l'allure des courbes.*

Question 15 *Quelles valeurs numériques de C_i permettent de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?*

Question 16 *Ces valeurs numériques de C_i permettent-elles de respecter le critère de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifiez.*

Question 17 *On suppose Cr(p)=0. Calculez numériquement l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude $V_0 = 12\,\text{m/s}$.*

Question 18 *On suppose $V_c(p) = 0$. Calculez numériquement l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation échelon d'amplitude $C_{r0} = -7270\,\text{N}\,\text{m}$ qui modéliserait la descente des « Arcs ».*

Question 19 *Donnez numériquement l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$. Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié ? Justifiez.*

On suppose $C_r(p) = 0$.

Question 20 *Calculez l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifiez.*

Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur $C(p) = C_a(p)\dfrac{1}{p^2}$, produit de la fonction $C_a(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec $a > 1$ (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \dfrac{A'BG}{p^2\left(1+Tp\right)}$, qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans $C_a(p)$ (c'est-à-dire pour $C_a(p) = 1$).

Question 21 *Montrez que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?*

La fonction $C_a(p)$ va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

Question 22 *Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation* $1\,\text{rad/s}$ *pour obtenir une phase de* $-135\,°$ *?*

Question 23 *Tracez en fonction de a, τ et K les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K\dfrac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ avec a>1. Précisez clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Précisez de même les pulsations des points particuliers.*

Question 24 *La phase maximum φ_{max} ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin\varphi_{max} = \dfrac{a-1}{a+1}$. Calculez numériquement a pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode à la question 30.*

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

Question 25 *Donnez l'expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.*

Question 26 *En déduire la valeur numérique de τ pour que φ_{max} soit ajoutée à la pulsation* $1\,\text{rad/s}$.

Question 27 *Calculez numériquement la valeur à donner à K pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Précisez la démarche utilisée.*

Question 28 *Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifiez.*

Question 29 *Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifiez.*

Éléments de correction

1. $G_1(p) = \dfrac{1}{R+Lp}$, $G_2(p) = k_T$, $G_3(p) = \dfrac{1}{f+Jp}$, $G_1(p) = k_E$.
2. $F_1(p) = \dfrac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1+2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ et $F_2(p) = \dfrac{G_3(p)}{1+2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$.
3. $F_1(p) = \dfrac{0,1725}{1+0,47p}$ et $F_2(p) = \dfrac{5,8\cdot 10^{-4}}{1+0,47p}$.
4. $B = 297.4\,\text{N}\,\text{m}\,\text{V}^{-1}$, $D = 5,8.10^{-4}\,\text{rad.s}^{-1}\text{Nm}$ et $T = 0.47\,\text{s}$.
5. $E = \dfrac{D}{2}k = 0.1\,\text{m}$.
6. $F = \dfrac{\mu}{E} = 7.16\,\text{V}\,\text{s}\,\text{m}^{-1}$
7. FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
8. FTBO de classe 0 $\varepsilon'_S = \dfrac{V_0}{1+C_0A'BG} = 4.286\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.
9. $\varepsilon''_S = \dfrac{C_{r0}G}{1+C_0A'BG} = -0.156\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.
10. $\varepsilon''_S = 0.160\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.
11. $\varepsilon'_S = 4.13\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$, $\varepsilon'_S = 4.46\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.
12. C_0 infini
13. $\text{FTBO}(p) = \dfrac{1,8}{p\left(1+0,47p\right)}$
14.
15. $\omega_{0\,\text{dB}} \leq 2.13\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ et $C_i \leq 1,67$.
16.
17. FTBO de classe 1 $\varepsilon'_S = 0$.
18. Intégrateur en amont de la perturbation $\varepsilon''_S = 0$.
19. CDCF OK.
20. $\varepsilon_v = \dfrac{1}{C_iA'BG}$
21. Marge négative, système instable.
22. 70° de phase à ajouter.
23.
24. $a = 32,16$
25. $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
26. $\tau = 0.176\,\text{s}$
27. $K = 0,109$
28.
29.

Diagramme de Bode de la fonction $H(p) = \dfrac{A'.B.G}{p^2.(1+T.p)}$