Cycle 03

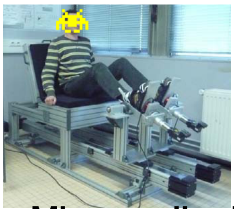
Concevoir la partie commande des systèmes asservis afin de valider leurs performances

Chapitre 1 – Correction des systèmes

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

PSI★ – MP

TD 3



Machine de rééducation SysReeduc

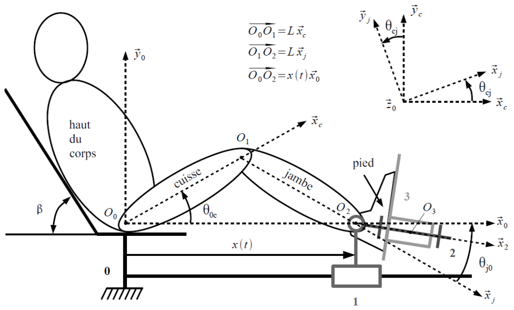
CCP PSI 2013

Savoirs et compétences :

- *Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral*
- *Con.C2 : Correction d'un système asservi*

Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

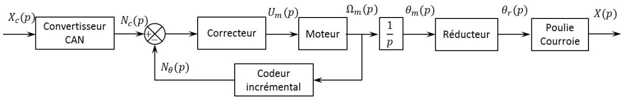


Objectif L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrer le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

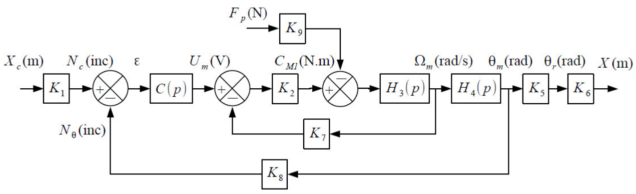
Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0{,}2\,\text{s}$
Pulsation au gain unité	$50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



Éléments de modélisation

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t) = e(t) + R\,i(t)$, $e(t) = k_e\,\omega_m(t)$ et $C_{M1}(t) = k_t\,i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

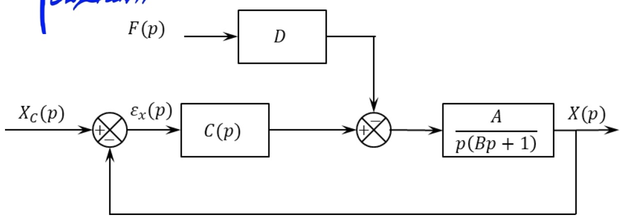
$$(M+m)\,r\,\rho_1\,\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1 = \dfrac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r = 46{,}1$ mm le rayon de la poulie du transmetteur poulie–courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 *À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.*

Question 2 *Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.*



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A, B et D, avec $A = 6700\,\mathrm{m/V}$, $B = 0{,}01\,\mathrm{s}$ et $D = 6\,\mathrm{V/N}$.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 3 *Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c.*

Question 4 *Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?*

Question 5 *Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.*

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i\left(1 + \dfrac{1}{T_i p}\right)$

Question 6 *Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_i.*

Question 7 *Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.*

Question 8 *Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $FTBO(p) = \dfrac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.*

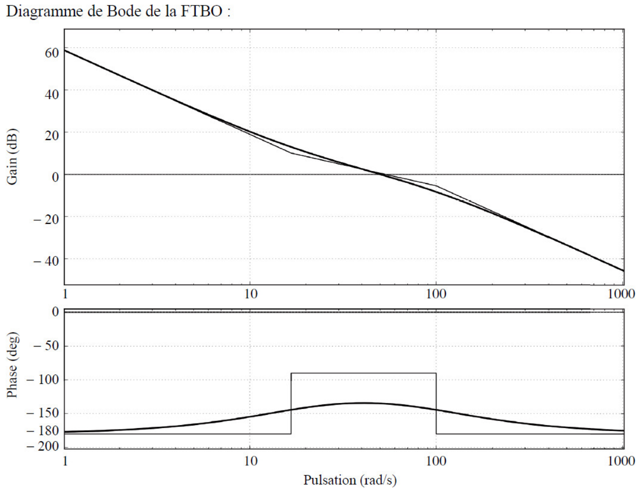
Question 9 *Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).*

Question 10 *Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.*

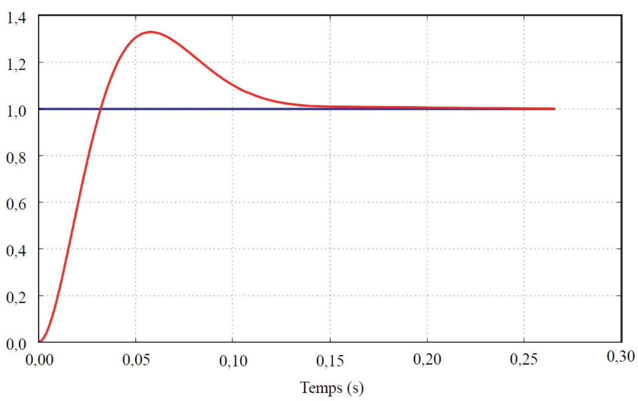
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 11 *Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.*

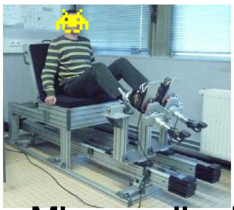
Diagramme de Bode de la FTBO :



Réponse indicielle unitaire sur le déplacement / Fp = 0. Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.



TD 3



Machine de rééducation SysReeduc

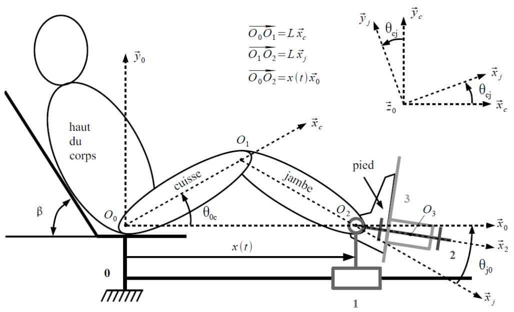
CCP PSI 2013

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral*
- ❒ *Con.C2 : Correction d'un système asservi*

Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

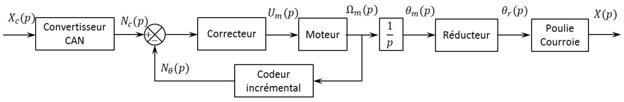


Objectif L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrer le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

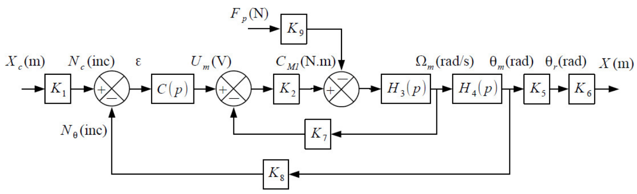
Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0{,}2$ s
Pulsation au gain unité	50 rad s^{-1}

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



Éléments de modélisation

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t)=e(t)+Ri(t)$, $e(t)=k_e\omega_m(t)$ et $C_{M1}(t)=k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

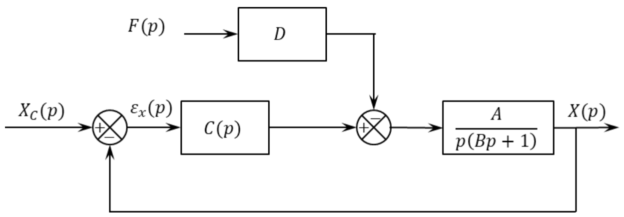
$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t)=\frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r}-F_p(t)$$

avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1=\dfrac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r=46{,}1$ mm le rayon de la poulie du transmetteur poulie–courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 12 *À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.*

Question 13 *Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.*



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A, B et D, avec $A = 6700\,\text{m/V}$, $B = 0{,}01\,\text{s}$ et $D = 6\,\text{V/N}$.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 14 *Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c.*

Question 15 *Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?*

Question 16 *Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.*

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i\left(1 + \dfrac{1}{T_i p}\right)$

Question 17 *Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_i.*

Question 18 *Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.*

Question 19 *Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $FTBO(p) = \dfrac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.*

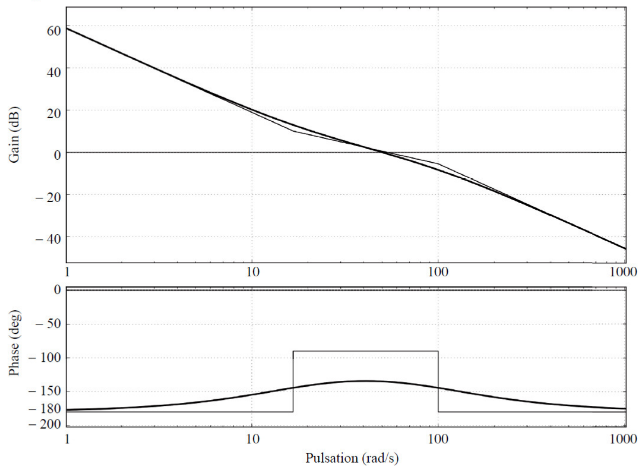
Question 20 *Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).*

Question 21 *Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.*

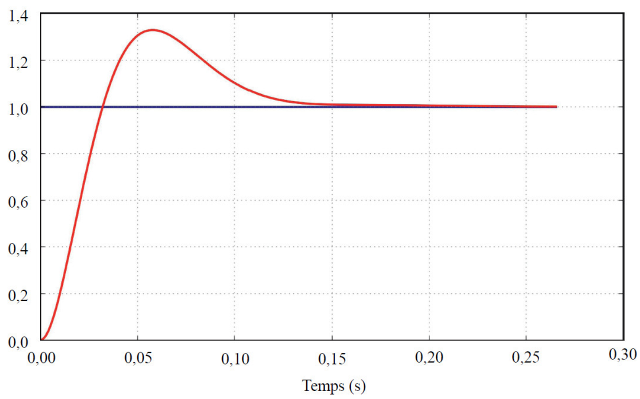
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 22 *Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.*

Diagramme de Bode de la FTBO :



Réponse indicielle unitaire sur le déplacement / Fp = 0. Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.



TD 3 – Corrigé

Machine de rééducation SysReeduc

CCP PSI 2013

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral*
- ❒ *Con.C2 : Correction d'un système asservi*

Mise en situation

Éléments de modélisation

Question 23 *À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.*

Correction

On a :

- $u_m(t)=e(t)+Ri(t) \Rightarrow U_m(p)=E(p)+RI(p)$ et $C_{M1}(p)=k_t I(p)$ donc $K_2=\dfrac{k_t}{R}$;
- $E(p)=k_e\Omega_m(p)$ et donc $K_7=k_e$;
- $(M+m)r\rho_1 p\Omega_m(p)=\dfrac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r}-F_p(p) \Leftrightarrow (M+m)r^2\rho_1^2 p\Omega_m(p)=C_{M1}(p)-\rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9=\rho_1 r$ et $H_3(p)=\dfrac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p)=\dfrac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8=\dfrac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5=\rho_1$ et $K_6=r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incréments. X_c est la consigne que doit respectée X. Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon=0$ et $X=X_c$ soit $\varepsilon=0=K_1X_C-K_8\theta_m=K_1X_C-K_8\dfrac{X}{K_5K_6}$. Au final, $K_1=\dfrac{K_8}{K_5K_6}$.

Question 24 *Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.*

Correction

On montre $A=\dfrac{K_8}{k_e}$, $B=\dfrac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D=\dfrac{r^2\rho_1^2 R}{K_8 k_t}$.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p)=K_c$.

Question 25 *Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c.*

Correction

On a $\varepsilon_x(p) = X_C(p) - X(p) = X_C(p) - \left(\left(C(p)\varepsilon_x(p) - F(p)D\right)\dfrac{A}{p\left(Bp+1\right)}\right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_x(p)\left(1+\dfrac{AC(p)}{p\left(Bp+1\right)}\right) = X_C(p) + \dfrac{AF(p)D}{p\left(Bp+1\right)}$

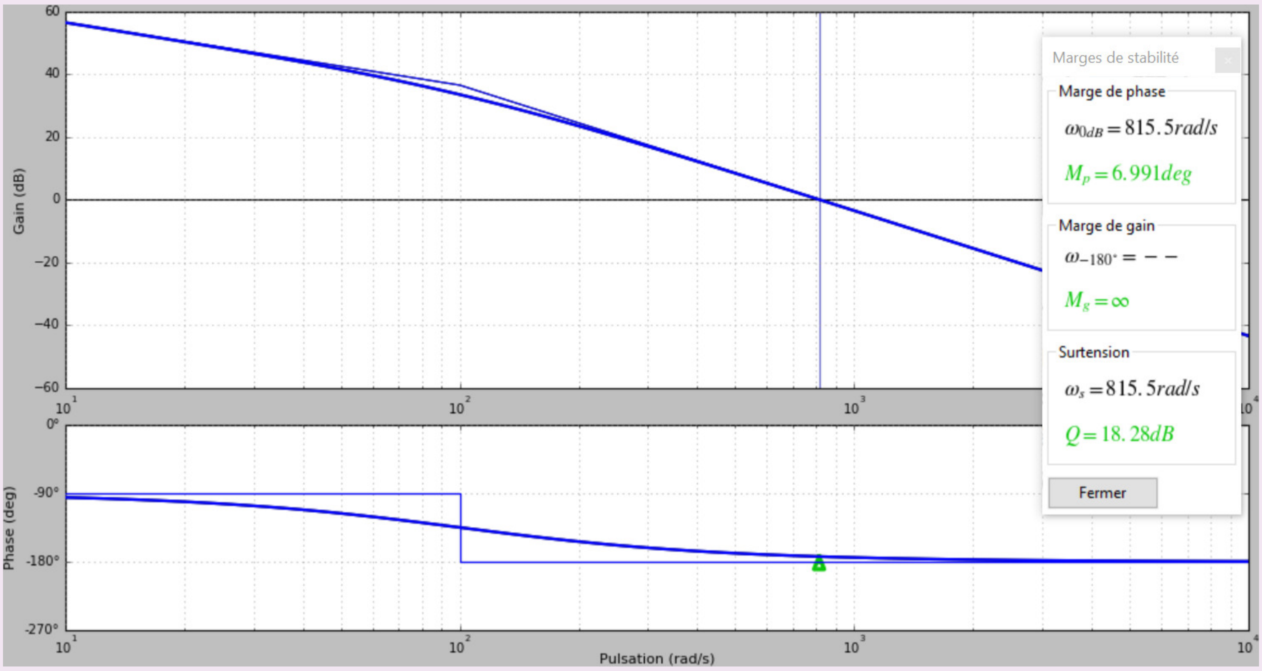
$\Leftrightarrow \varepsilon_x(p)\left(\dfrac{p\left(Bp+1\right)+AC(p)}{p\left(Bp+1\right)}\right) = X_C(p) + \dfrac{AF(p)D}{p\left(Bp+1\right)} \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \dfrac{p\left(Bp+1\right)}{p\left(Bp+1\right)+AC(p)}X_C(p) + \dfrac{AF(p)D}{p\left(Bp+1\right)+AC(p)}$

$\Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \dfrac{p\left(Bp+1\right)}{p\left(Bp+1\right)+AK_C}X_C(p) + \dfrac{AD}{p\left(Bp+1\right)+AK_C}F(p)$

Question 26 *Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié ?*

Correction

On a $\text{FTBO}(p) = \dfrac{A}{p\left(Bp+1\right)}$.



La marge de phase n'est pas respectée.

Question 27 *Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.*

Correction

On a : $\varepsilon_x = \lim_{p\to 0} p\varepsilon_x(p) = \lim_{p\to 0} p\left(\dfrac{p\left(Bp+1\right)}{p\left(Bp+1\right)+AK_C}\dfrac{X_0}{p} + \dfrac{AD}{p\left(Bp+1\right)+AK_C}\dfrac{F_p}{p}\right)$

$= \lim_{p\to 0} \dfrac{p\left(Bp+1\right)}{p\left(Bp+1\right)+AK_C}X_0 + \dfrac{AD}{p\left(Bp+1\right)+AK_C}F_p$

$= \dfrac{D}{K_C}F_p$

L'écart en position n'est donc pas nul.

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)$

Question 28 *Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_i.*

Correction

$$\varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)}X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)}F(p)$$

Question 29 *Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.*

Correction

$$\varepsilon_x = \lim_{p\to 0} p\left(\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)}\frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)}\frac{F_0}{p}\right)$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{pT_i p(Bp+1)}{pT_i p(Bp+1)+AK_i(T_i p+1)}X_0 + \frac{ADT_i p}{T_i p p(Bp+1)+AK_i(T_i p+1)}F_0 = 0.$$

Question 30 *Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $\text{FTBO}(p) = \dfrac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.*

Correction

$\text{FTBO}(p) = \dfrac{A}{p(Bp+1)}K_i\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right) = \dfrac{A}{p(Bp+1)}K_i\dfrac{1+T_i p}{T_i p}$.

Question 31 *Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).*

Correction

On souhaite que pour $\omega = 50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, $\varphi(\omega) = -135°$.

$$\arg(\text{FTBO}(j\omega)) = \arg\left(\frac{A}{p(Bp+1)}K_i\frac{1+T_i p}{T_i p}\right) = -180 - \arg((Bp+1)) + \arg(1+T_i p)$$

$= -180 - \arctan B\omega + \arctan T_i\omega$ En $\omega = 50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ on a alors $-180 - \arctan 0{,}5 + \arctan 50T_i = -135 \Leftrightarrow \arctan 50T_i = -135+180+\arctan 0{,}5 = 74$. D'où $T_i = 0{,}05\,\text{s}$.

Question 32 *Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.*

Correction

On souhaite que $|\text{FTBO}(j\omega)| = 1$ pour $\omega = 50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

$$|\text{FTBO}(j\omega)| = \left|\frac{A}{p(Bp+1)}K_i\frac{1+T_i p}{T_i p}\right| = AK_i\frac{1}{\omega\sqrt{B^2\omega^2+1}}\frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{T_i\omega} = \frac{AK_i}{T_i\omega^2}\frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{\sqrt{B^2\omega^2+1}}.$$

On a donc $K_i = \dfrac{T_i\omega^2\sqrt{B^2\omega^2+1}}{A\sqrt{1+T_i^2\omega^2}} = 0{,}0077\,\text{V}\,\text{m}^{-1}$.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 33 *Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.*

Correction

- Ecart de position : nul ⇒ Exigence OK.
- Marge de gain : infine ⇒ Exigence OK.
- Marge de phase : ≃ 45° ⇒ Exigence OK.