

TGV Duplex

Eléments de corrigé

Partie I - Etude de la distance d'arrêt.

1.A Etude du contact avec le rail

I.A.1) Dans un premier temps, il est naturel d'imaginer, en cas d'urgence, le blocage des roues. En retenant pour le contact le modèle de Coulomb avec un facteur de frottement noté f de 0,075, en supposant le rail horizontal puis la résistance de l'air négligée, montrer que la distance d'arrêt d'un TGV duplex se déplaçant à la vitesse constante de $300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ par rapport au repère supposé galiléen lié aux rails, ne satisfait pas la prestation attendue.

Isolons le TGV

Il est soumis à :

- Son poids $-Mg\vec{y}_0$
- Les actions du rail sur les 52 roues $\sum_{i=1}^{52} (N_i) \cdot \vec{y}_0 + \sum_{i=1}^{52} (T_i) \cdot \vec{x}_0$

Avec $\|T_i\| = \|N_i\| f$

Le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x}_0 donne :

$$-\sum_i N_i f = M\gamma$$

Le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{y}_0 donne :

$$\sum_i (N_i) = Mg$$

D'où

$$\gamma = -gf$$

Le mouvement est uniformément décéléré donc :

$$x(t) = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t + x_0 \text{ avec :}$$

x_0 position au début du freinage $x_0 = 0$ par convention

t_0 instant de début de freinage $t_0 = 0$ par convention

t_f instant à partir duquel le train est arrêté

$da = x(t_f) - x_0$ distance d'arrêt $da = x(t_f)$

$$v = \gamma t + v_0 \text{ avec } v(t_f) = 0$$

$$\gamma = -\frac{v_0}{t_f}$$

$$da = \frac{v_0^2}{2gf}$$

$$\text{AN } da = \left(\frac{300000}{3600} \right)^2 \frac{1}{2 \times 11 \times 0,075}$$

$da = 4630 \text{ m (g = 10)}$, distance supérieure à celle du critère demandé ($da < 2500 \text{ m}$)

I.A.2) Vérifier si le freinage au point de fonctionnement B, permet la satisfaction de la prestation.

Le calcul est le même avec un facteur de freinage $f = 0,15$

$$\boxed{da = 2315 \text{ m la prestation est satisfaite}}$$

I.A.3) Calculer la décélération γ ($\gamma < 0$), supposée constante, que doit fournir le système de freinage au convoi (freinage au point de fonctionnement B).

$$da = \frac{v_0 t}{2}$$

$$t_f = \frac{2 \cdot da}{v_0}$$

$$\boxed{\gamma = -\frac{v_0^2}{2da}}$$

$$\text{AN } \gamma = -\left(\frac{300000}{3600}\right)^2 \frac{1}{2 \times 2315} = -1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

I.A.4) En déduire la durée de freinage jusqu'à l'arrêt à partir d'une vitesse initiale de $300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (le résultat sera exprimé en unité S.I.).

$$\boxed{t_f = \frac{2da}{v_0}}$$

$$\text{AN : } t_f = \frac{2 \times 2315}{\left(\frac{300000}{3600}\right)} = 55,6 \text{ s}$$

I.B- Etude de la commande pneumatique de freinage

I.B.1.a) La vitesse de propagation d'une variation de pression dans la conduite générale est de l'ordre de $250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La longueur de la rame est de 200 mètres, calculer le temps $\Delta t = t_p - t_d$ entre le début du freinage dans la première voiture, t_p , et le début de freinage dans la dernière voiture, t_d , si la commande de freinage du TGV est purement pneumatique.

$$\boxed{\Delta t = \frac{L_{rame}}{v_{propagation}} = \frac{200}{250} = 0,8 \text{ s}}$$

b) En se plaçant dans un cas le plus défavorable on suppose que le freinage débute lorsque l'information arrive en queue de train. En adoptant l'accélération trouvée en I.A.3 avec $V_0 = 300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ calculer la distance parcourue entre l'instant où l'ordre de freinage est émis et l'instant où le train est à l'arrêt. Vérifier si le cahier de charges est satisfait.

La longueur parcourue avant le début du freinage est :

$$V_0 \cdot \Delta t = \frac{300000 \times 0,8}{3600} = 66,6 \text{ m}$$

La distance totale parcourue est donc de $2315+66,6=2381,6 \text{ m}$
 Le cahier des charges est bien respecté

(Autre solution : reprendre $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ avec $v_0 = 300\,000/3600 \text{ m.s}^{-1}$,
 $t_f = 55,9 \text{ s}$ et $x_0 = 66,6 \text{ m}$)

I.B.2) Recenser les composants nécessaires au bon fonctionnement du dispositif entre la **CG** et le vérin pneumatique double effet qui actionne le dispositif de freinage. Compléter le schéma pneumatique de l'annexe 6 (que vous joindrez obligatoirement avec la copie) qui donne l'organisation structurelle de ces composants.

Les différents constituants sont :

- un réservoir d'air comprimé
- un vérin double effet
- un distributeur 5/2 rappel par ressort commande pneumatique par dépression (et commande électrique) Partie II- Définition de la loi de commande de freinage

II. A Modélisation de la roue en freinage

En précisant les systèmes isolés et les équations issues du principe fondamental de la dynamique utilisées, montrer que l'évolution du glissement relatif ν est décrite par l'équation différentielle :

$$\dot{\nu} = A + B \cdot \nu + C \cdot F_R$$

dans laquelle A , B et C sont des fonctions de F_R , V_T , $f(\nu)$, I , M , r et g .

- A partir de la relation exprimant le glissement relatif on peut écrire $V_T(t) \cdot \nu(t) = V_T(t) - V_R(t)$. En dérivant cette expression on obtient :

$$\dot{V}_T(t) \cdot \nu(t) + V_T(t) \cdot \dot{\nu}(t) = \dot{V}_T(t) - \dot{V}_R(t)$$

- A partir du résultat de la question 1.A.1 on obtient (théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x}_0 et \vec{y}_0 appliqué à l'ensemble du TGV)

$$\dot{V}_T = -gf(v)$$

- En isolant le système {roue + 2 disques} et en appliquant le théorème du moment dynamique au point G_1 en projection sur \bar{z}_1 on obtient :

$$I\ddot{\beta} = C_f - rT_1$$

- D'après les lois de coulomb :

$$\vec{R}(\text{rail} \rightarrow \text{roue}_1) \cdot \vec{V}(I_1, \text{roue}_1 / \text{rail}) < 0$$

et

$$\|\vec{T}_1\| = f(v) \|\vec{N}_1(\text{rail} \rightarrow \text{roue}_1)\|$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système {roue + 2 disques} en projection sur \bar{y}_0 donne :

$$-P - mg + N_1 = 0 \text{ en remarquant que } M + m \approx M \text{ on obtient } -P + N_1 = 0$$

Le calcul de la vitesse de glissement relatif peut être effectué à partir de la relation :

$$\vec{V}(I_1, \text{roue}_1 / R_b) = \vec{V}(G_1, 1_1 / R_b) + \vec{I}_1 \vec{G}_1 \wedge \vec{\Omega}(1 / R_b)$$

Soit : $-V_R \bar{x}_0 = r \dot{\beta} \bar{x}_0$ et en conséquence $V_R = -r \dot{\beta}$. D'où on déduit :

$$\ddot{\beta} = -\frac{\dot{V}_R}{r} = -\frac{\dot{V}_R}{r}$$

$$\dot{V}_R = -\frac{r^2 Mg}{I} f(v) - \frac{r^2}{I} F_R$$

$$V_T(t) \cdot \dot{v}(t) = -gf(v) \left(1 + \frac{r^2 M}{I} \right) + gf(v) \cdot v(t) + \frac{r^2}{I} \cdot F_R(t)$$

D'où :

$$A = -\frac{gf(v)}{V_T} \cdot \left(1 + \frac{r^2 M}{I} \right) \quad B = \frac{gf(v)}{V_T} \quad C = \frac{r^2}{IV_T}$$

Déterminer la force de freinage F_{R0} nécessaire pour assurer le fonctionnement de la roue au point de fonctionnement B.

En régime permanent $\dot{v} = 0$, on déduit alors :

$$F_{R0} = \frac{I}{r^2} \left[gf(v_0) \left(1 + \frac{r^2 M}{I} \right) - gf(v_0) \cdot v_0 \right]$$

A.N. : Pour maintenir le point de fonctionnement en B l'effort nécessaire en régime permanent est $F_{R0} = 12993 \text{ N}$.

II.B Linéarisation et définition d'un modèle de comportement

En vue de linéariser l'équation différentielle il est nécessaire de procéder en deux étapes. Dans un premier temps on cherchera à exprimer les relations entre les différentes grandeurs en régime permanent, dans un deuxième temps on étudiera le régime de petites variations des différentes grandeurs autour du régime permanent.

II.B.1) Exprimer en régime permanent au point de fonctionnement caractérisé par un glissement relatif constant v_0 , une vitesse V_{T0} et une action de freinage F_{R0} .

$$\boxed{-gf(v_0)\left(1 + \frac{r^2 M}{I}\right) + gf(v_0) \cdot v_0 + \frac{r^2}{I} \cdot F_{R0} = 0}$$

II.B.2) On note v_1 , v_T et f_r les variations respectives du glissement, de la vitesse du train et de la force de freinage autour de leurs valeurs respectives en régime permanent v_0 , V_{T0} et F_{R0} , soit $v(t) = v_0 + v_1$, $V_T(t) = V_{T0} + v_T$ et $F_R = F_{R0} + f_R$. Linéariser l'équation différentielle autour du point de fonctionnement $(V_{T0}; v_0; F_{R0})$. En notant $f'(v) = \partial f / \partial v$ exprimer la relation obtenue en fonction de V_{T0} , $f(v_0)$, $f'(v_0)$, I , r , M , F_{R0} et g sous la forme suivante : $v_1(t) + \tau \dot{v}_1(t) = K f_R(t)$

$$(V_{T0} + v_T(t)) \cdot \dot{v}_1(t) = -gf(v_0 + v_1)\left(1 + \frac{r^2 M}{I}\right) + gf(v_0 + v_1) \cdot (v_0 + v_1) + \frac{r^2}{I} \cdot (F_{R0} + f_R(t))$$

Par développement en série de la fonction $f(v_0 + v_1)$ au 1^{er} ordre :

$$f(v_0 + v_1) = f(v_0) + v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(v_0) + \dots$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} V_{T0} \cdot \dot{v}_1(t) + \underbrace{v_T(t) \cdot \dot{v}_1(t)}_{2^{\text{ème}} \text{ ordre}} &= \underbrace{-gf(v_0)\left(1 + \frac{r^2 M}{I}\right) + gf(v_0) \cdot v_0 + \frac{r^2}{I} \cdot F_{R0}}_{=0 \text{ (régime permanent)}} \\ &+ g \left[-\left(1 + \frac{r^2 M}{I}\right) \frac{\partial f}{\partial v}(v_0) + f(v_0) + v_0 \frac{\partial f}{\partial v}(v_0) \right] \cdot v_1 \\ &+ \frac{r^2}{I} \cdot f_R(t) \\ &+ g \frac{\partial f}{\partial v}(v_0) \cdot \underbrace{v_1^2}_{2^{\text{ème}} \text{ ordre}} \end{aligned}$$

Soit au 1^{er} ordre :

$$V_{T0} \cdot \dot{v}_1(t) = g \left[-\left(1 + \frac{r^2 M}{I}\right) \frac{\partial f}{\partial v}(v_0) + f(v_0) + v_0 \frac{\partial f}{\partial v}(v_0) \right] \cdot v_1 + \frac{r^2}{I} \cdot f_R(t)$$

En remarquant que $r^2 M/I \gg 1$ ($r^2 M/I = 20,5$) la relation précédente peut alors être approchée par la forme :

$$V_{T0} \cdot \dot{v}_1(t) = -g \left[\frac{r^2 M}{I} \frac{\partial f}{\partial v}(v_0) - v_0 \frac{\partial f}{\partial v}(v_0) - f(v_0) \right] \cdot v_1 + \frac{r^2}{I} \cdot f_R(t)$$

Soit :

$$V_{T0} \cdot \dot{v}_1(t) + g \left[\frac{r^2 M}{I} f'(v_0) - v_0 f'(v_0) - f(v_0) \right] \cdot v_1 = \frac{r^2}{I} \cdot f_R(t)$$

En utilisant la forme demandée on obtient :

$$\frac{V_{T0}}{g \left[\frac{r^2 M}{I} f'(v_0) - v_0 f'(v_0) - f(v_0) \right]} \cdot \dot{v}_1(t) + v_1 = \frac{r^2}{Ig \left[\frac{r^2 M}{I} f'(v_0) - v_0 f'(v_0) - f(v_0) \right]} \cdot f_R(t)$$

Soit :

$$\tau = \frac{V_{T0}}{g \left[\left(1 + \frac{r^2 M}{I} \right) f'(v_0) - v_0 f'(v_0) - f(v_0) \right]} \approx \frac{V_{T0}}{g \left[\frac{r^2 M}{I} f'(v_0) - v_0 f'(v_0) - f(v_0) \right]}$$

$$K = \frac{r^2}{Ig \left[\left(1 + \frac{r^2 M}{I} \right) f'(v_0) - v_0 f'(v_0) - f(v_0) \right]} \approx \frac{r^2}{Ig \left[\frac{r^2 M}{I} f'(v_0) - v_0 f'(v_0) - f(v_0) \right]}$$

II.B.3) En analysant les données numériques fournies et la caractéristique du facteur de freinage $\mu = f(v)$ représentée sur la figure 4, justifier que l'équation différentielle peut être approchée par l'équation suivante, à l'exception du voisinage de quelques points que vous préciserez :

$$v_1(t) + \frac{I \cdot V_{T0}}{r^2 M g f'(v_0)} \dot{v}_1(t) = \frac{1}{M g f'(v_0)} f_R(t)$$

Les valeurs numériques montrent d'une part que :

$$\frac{r^2 M}{I} = 20,5 \gg v_0 (<1)$$

et d'autre part qu'en dehors des points correspondant à des extrema de la fonction $f(v)$ (soit pour des points tels que $\partial f / \partial v \neq 0$) :

$$\frac{r^2 M}{I} f'(v_0) = 20,5 f'(v_0) \gg f(v_0) (<0,15)$$

En conséquence la relation précédente peut être approchée sous la forme suivante :

$$V_{T0} \cdot \dot{v}_1(t) = -g \frac{r^2 M}{I} \frac{\partial f}{\partial v}(v_0) \cdot v_1 + \frac{r^2}{I} \cdot f_R(t)$$

On peut remarquer que l'approximation effectuée n'est pas tout à fait exacte sur les extrema de la courbe $f(v)$, soit autour du voisinage des points A, B et du minimum entre ces deux points.

Nota : la vérification de la validité du modèle retenu, même au voisinage des points mentionnés, a été supprimée du sujet initial (intéressant mais sujet déjà long).

Il vient immédiatement :

$$v_1 + \frac{I \cdot V_{T0}}{r^2 g M f'(v_0)} \cdot \dot{v}_1(t) = \frac{1}{g M f'(v_0)} \cdot f_R(t)$$

II.C Analyse du comportement de la roue en cours de freinage

II.C.1) Etablir la fonction de transfert entre le glissement relatif et la force de freinage : $v_1(p)/F_R(p)$.

$$v_1(p) \left(1 + \frac{I \cdot V_{T0}}{r^2 g M f'(v_0)} p \right) = \frac{1}{g M f'(v_0)} \cdot F_R(p)$$

On en déduit la fonction de transfert :

$$\frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{1}{g M f'(v_0)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{I \cdot V_{T0}}{r^2 g M f'(v_0)} p} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

avec :

$$K = \frac{1}{g M f'(v_0)} \quad \tau = \frac{I \cdot V_{T0}}{r^2 g M f'(v_0)}$$

On a donc :

$$\frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{1}{g M f'(v_0)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{I \cdot V_{T0}}{r^2 g M f'(v_0)} p} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

II.C.2) Sans effectuer de calcul numérique, mais en justifiant soigneusement votre réponse, étudier la stabilité de la roue au freinage dans les différentes zones de fonctionnement de la caractéristique $\mu = f(v)$ donnée sur la figure 9 : $[0 ; v_A]$, $[v_A ; v_B]$ et $[v_B ; v_C]$.

La fonction de transfert précédent permet de conclure à la stabilité de la roue si $\tau > 0$. Avec le modèle retenu cette condition se réduit encore à $f'(v_0) > 0$.

En conséquence :

- Dans la zone de glissement relatif $[0; \nu_A[$ la pente locale étant toujours positive la roue en freinage est stable
- Dans l'intervalle de glissement compris dans $]\nu_A; \nu_B]$ il existe deux zones pour lesquelles le comportement de la roue est différent, pour $f'(\nu_0) < 0$ (première partie de l'intervalle) la roue est instable et pour $f'(\nu_0) > 0$ (deuxième partie de l'intervalle) la roue en freinage est stable
- Dans la zone de glissement relatif $]\nu_B; \nu_C]$ comme la pente locale est toujours négative la roue en freinage est caractérisée par un comportement instable.

II.C.3) Quelle pourrait être la conséquence d'imposer directement la force F_{R0} déterminée préalablement pour assurer un facteur de freinage μ_0 . Proposer une solution permettant d'apporter une solution à ce problème

Le comportement de la roue présentant un caractère instable dans certains points de fonctionnement, imposer directement une force de freinage sans bouclage sur le glissement peut conduire à une divergence du glissement et éventuellement au blocage de la roue (point C).

La solution permettant de résoudre ce problème est de mettre en place une chaîne de régulation du glissement.

III- Etude de la chaîne de puissance

III.A Détermination des actions mécaniques

III.A.1) Calculer le moment maximum de l'action du rail sur l'axe (G_1, \vec{z}) de la roue (lorsque le point de fonctionnement se situe au point B de la caractéristique de la figure 4).

$$|M| = \mu_B r M g$$

$$|M| = 0,152 \times 0,45 \times \left(\frac{424000}{52} \right) \times 10 = 5609 \text{ Nm}$$

III.A.2) En déduire le moment de l'action des garnitures sur un disque par rapport à l'axe de la roue (G_1, \vec{z}) .

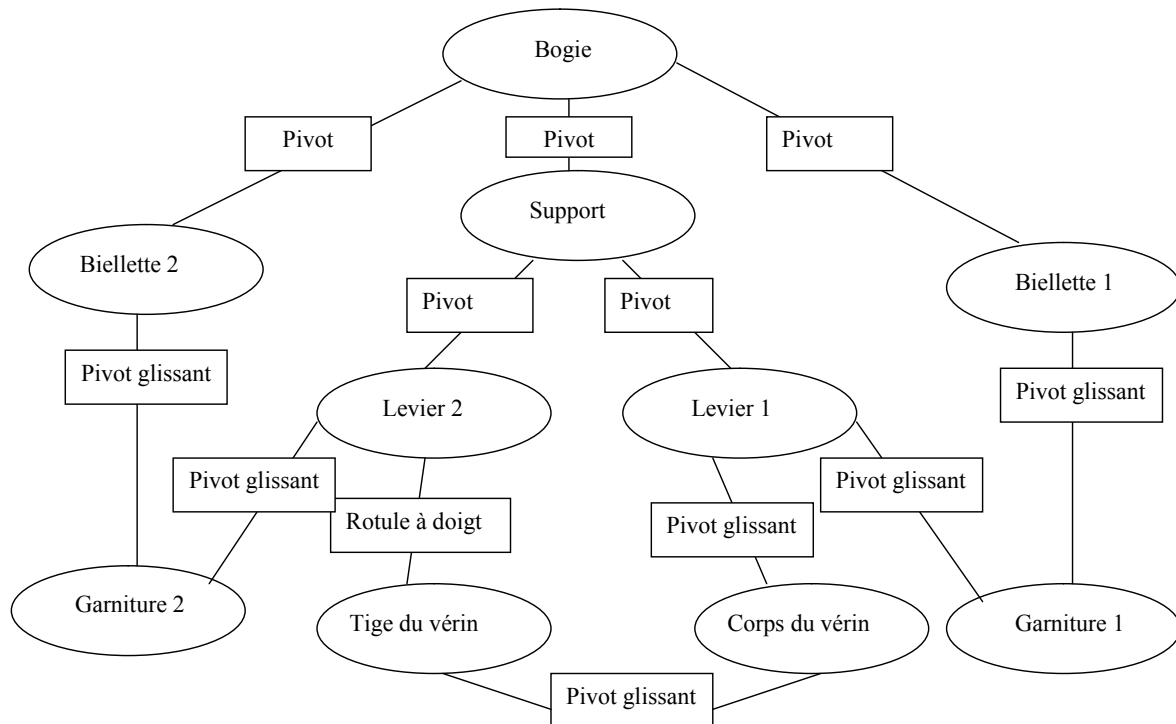
Il y a deux disques par roue, donc chaque disque devra fournir un couple de 2804 Nm (avec $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)

III.B Etude du mécanisme de la chaîne de puissance

a)

Déterminer le degré d'hyperstaticité du dispositif de freinage entier (biellettes + leviers + support + châssis (ou bogie) + garnitures + vérin) avant le contact avec le disque.

Graphe de structure du mécanisme :



Analyse cinématique

$N = 10$ solides

$L = 12$ liaisons

Nombre de cycles : $\square = 12 - 10 + 1 = 3$

$m_c = 2$ mobilités (2 rotations autour de $O\vec{x}$) ?

Pas de mobilité interne.

Inconnues cinématiques :

5 pivots ($N_c = 5 \times 1 = 5$)

6 pivots glissants ($N_c = 6 \times 2 = 12$)

1 rotule à doigt ($N_c = 2$)

donc $N_c = 19$

Le degré d'hyperstatisme est donc de

$$h = m + 6\square - N_c$$

$$h = 2 + 18 - 19 = 1$$

Analyse statique

Inconnues statiques :

5 pivots ($N_s = 5 \times 5 = 25$)

6 pivots glissants ($N_s = 6 \times 4 = 24$)

1 rotule à doigt ($N_s = 4$)

donc $N_s = 53$

$$h = -6(n - 1) + N_s + m_c$$

$$h = -54 + 53 + 2 = 1$$

b) Donner les conséquences de ce résultat pour le mécanisme. Donner les conditions géométriques que devra respecter le mécanisme pour fonctionner.

Pour fonctionner correctement le mécanisme devra satisfaire à une contrainte géométrique, les axes des deux liaisons pivots en C1 et C2 devront être parallèles.

III.C Dimensionnement de l'actionneur

III.C.1) Donner l'expression du couple de freinage C_f sur chaque disque en fonction de : f_2 , p , ρ , α , R_1 et R_2 .

$$dN = pds = p \cdot \rho \cdot d\theta \cdot d\rho \text{ avec } dN \text{ effort normal}$$

$$dT = f_2 \cdot dN = f_2 \cdot p \cdot \rho \cdot d\theta \cdot d\rho \text{ avec } dT \text{ effort tangent}$$

$$dC = \rho \cdot dT = \rho \cdot f_2 \cdot p \cdot \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$$

$$C = f_2 p \rho \int_{R_1}^{R_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$$

$$C = f_2 \cdot p \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \text{ par face de disque}$$

d'où

$$C = f_2 \cdot p \cdot \rho \cdot \alpha \cdot (R_2^2 - R_1^2) \text{ pour un disque}$$

III.C.2) En déduire l'expression de la force F qui devra être appliquée sur la garniture pour obtenir C_f en fonction de : p , ρ , α , R_1 et R_2 .

$$F = \int_{R_1}^{R_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \cdot \rho \cdot d\theta \cdot d\rho = p \cdot \rho \cdot \alpha \cdot (R_2 - R_1)$$

III.C.3) Donner la valeur de F_1 et F_2 que devra produire de chaque garniture sur le disque de frein.

$$p\rho = 1,163 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-1}, \alpha = 50^\circ$$

$$F_1 = F_2 = 1,163 \times 10^5 \times 50 \times \frac{\pi}{180} \times \left(\frac{610 - 310}{2} \right) \times 10^{-3} = 15223,6 \text{ N}$$

III.C.4) L'action de contact en B2 de la garniture 2 sur le levier 2 est égale à $-\vec{F}_2$.

Calculer la force que devra fournir chaque vérin et vérifier que le cahier des charges est bien respecté.

$$\text{Une équation de moment suivant } C_2 \vec{x} \text{ donne directement } C_2 B_2 \times F_2 = C_2 D_2 \times F_v$$

$$F_v = F_2 \text{ car le bras de levier est le même}$$

Le vérin est donc bien apte à respecter le cahier des charges (< 29 kN)

III.C.5) Sans effectuer de calcul, indiquer quelle est l'utilité des biellettes 1 et 2.

Les biellettes 1 et 2 servent à s'opposer à l'effort disque / garniture suivant \vec{x} et soulagent ainsi les liaisons pivot en C_1 et C_2 . Elles servent aussi à encaisser le poids de la garniture.

III.C.6) Il existe sur le TGV d'autres dispositifs de freinage. Indiquer au moins deux autres principes de dissipation de l'énergie pouvant être utilisés, en précisant le principe physique utilisé.

Le frein rhéostatique qui consiste à faire fonctionner les moteurs en générateurs, et à charger le générateur en lui faisant fournir de l'énergie à un récepteur (réseau ou résistances)

- **Frein à courants de Foucault, en utilisant les courants induit sur un disque ou sur le rail**

IV - Dispositif d'antienrayage

IV.A Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

IV.A.1) En utilisant la relation donnée à la question II.B.3 (ou en II.C.1), préciser la fonction de transfert $H_2(p)$ autour du point de fonctionnement B, sous forme numérique.

La fonction de transfert retenue précédemment est :

$$\frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{1}{gMf'(v_0)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{I \cdot V_{T0}}{r^2 gMf'(v_0)} p} = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \left\{ \begin{array}{l} K = \frac{1}{gMf'(v_0)} \\ \tau = \frac{I \cdot V_{T0}}{r^2 gMf'(v_0)} \end{array} \right.$$

Au point de fonctionnement B $f'(v_0) = 0$, on en déduit immédiatement :

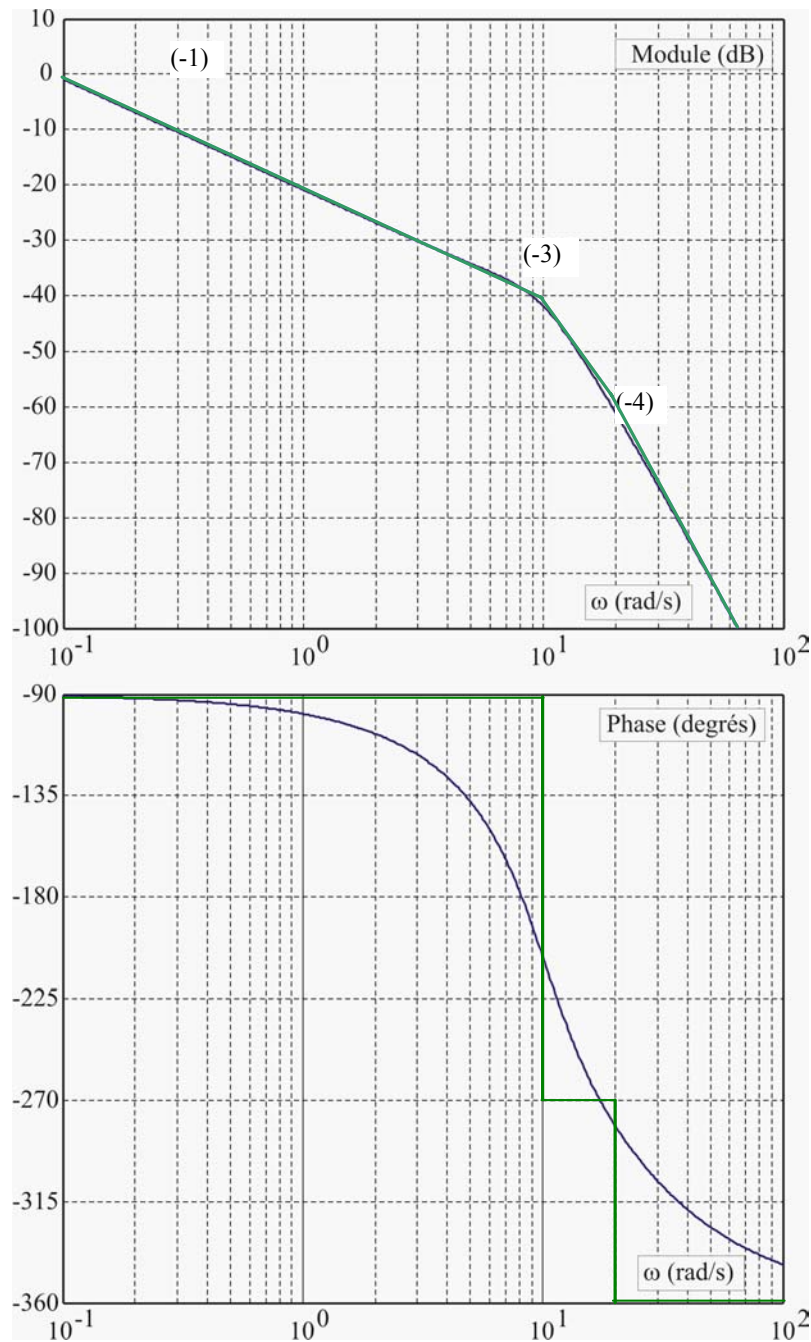
$$H_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{r^2 / (I \cdot V_{T0})}{p} = \frac{1}{22222p} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}$$

IV.A.2) En prenant $C(p) = 1$, compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni en annexe 3 en justifiant le tracé sur la copie.

Avec $C(p) = 1$ et pour une vitesse $V_{T0} = 200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ la fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$T_{BO}(p) = H_1(p)H_2(p)M(p) = \frac{0,09}{p(1 + 0,1p + 0,01p^2)(1 + 0,05p)}$$

On peut noter que la fonction du 2^{ème} ordre correspondant à l'actionneur est caractérisée par une pulsation propre $\omega_0 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et un coefficient d'amortissement $\xi = 0,5$. La représentation dans le plan de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée est donnée sur la figure suivante.



IV.B Synthèse du régulateur

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

IV.B.1) Déterminer la valeur que doit prendre l'argument de $C(p)$ afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure ω_c souhaitée.

En $\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, la fonction de transfert en boucle ouvert présente une phase d'environ -100° , pour assurer la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées, l'argument de $C(j\omega_c)$ doit être en conséquence supérieur à -20° .

$$\arg[C(j\omega_c)] \geq -20^\circ$$

IV.B.2) Calculer la valeur minimale $T_{i\min}$ qu'on peut conférer à la constante T_i de l'action intégrale du régulateur.

$$\arg[C(j\omega)] = -90^\circ + \arctan(T_i\omega)$$

Soit pour la pulsation de coupure souhaitée :

$$-90^\circ + \arctan(T_i\omega_c) \geq -20^\circ \Rightarrow T_i \geq \frac{1}{\omega_c} \tan 70^\circ = 2,75$$

Pour la suite on prendra donc

$$T_i = 2,75 \text{ s}$$

IV.B.3) En adoptant $T_i = T_{i\min}$, déterminer alors le gain K_r du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées

En $\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée présente un gain de -21 dB , comme $1/T_i = 0,36 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \approx \omega_c$, le gain du correcteur doit vérifier :

$$20 \cdot \log K \approx -\|H(j\omega_c)\| = 21 \text{ dB}$$

où $\|H(j\omega)\|$ est le module de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigé. Soit :

$$K = 11$$

IV.B.4) Le système étant bouclé par le régulateur dimensionné à la question E2, déterminer la marge de gain. Conclure sur les marges de stabilité obtenues. .

Le passage à -180° de la réponse fréquentielle en boucle ouverte non corrigée est relativement loin de la pulsation de brisure du régulateur. En conséquence le passage à -180° de la boucle ouverte corrigée intervient pour une pulsation proche de celle de la boucle ouverte non corrigée soit pour $\omega = 0,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Par lecture directe sur le diagramme de Bode on obtient :

$$\Delta G = 39 - 20 \cdot \log K = 18 \text{ dB}$$

Une marge de phase de 60° et une marge de gain de $\Delta G = 18 \text{ dB}$ sont des valeurs confortables, au dessus des valeurs minimales usuelles.

IV.C Vérification du cahier des charges

IV.C.1) Calcul de la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement

$$F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

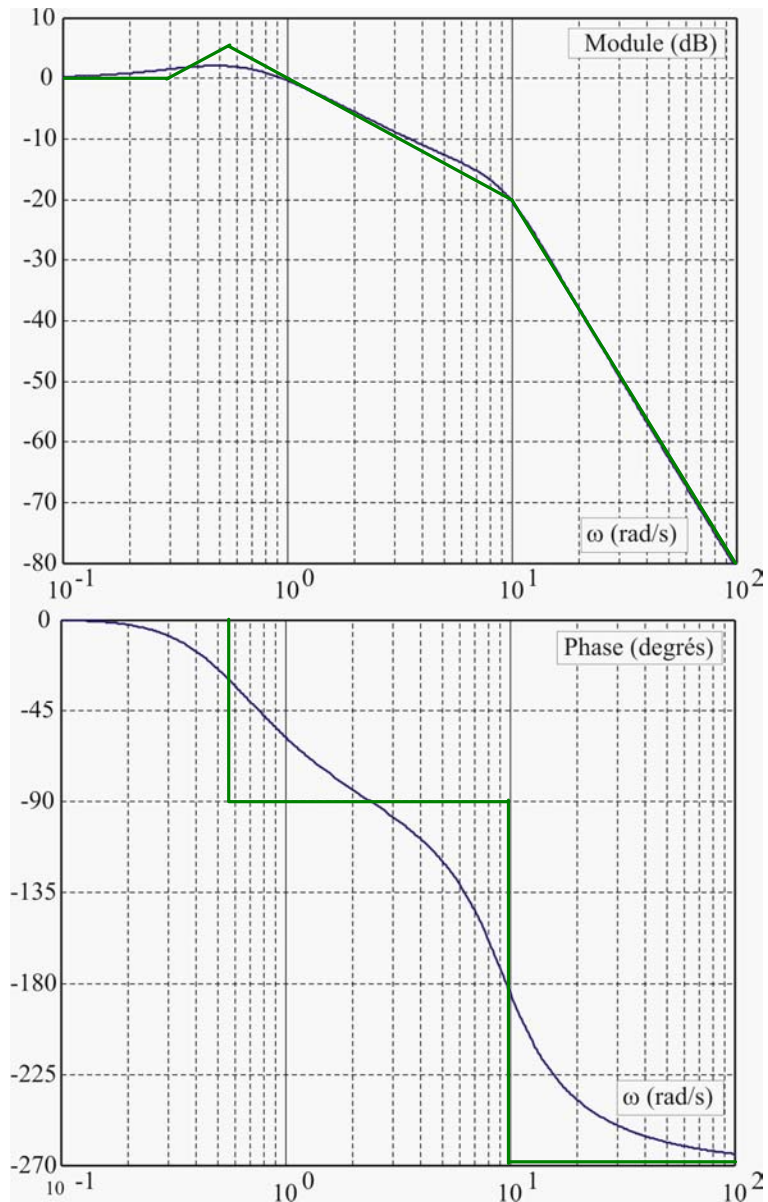
On supposera sans aucune justification que $\omega_0 > 1/\tau_2$.

a) En examinant les diagrammes de Bode fournis en annexe 4 de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p) = v_1(p)/v_c(p)$, justifier qualitativement la fonction de transfert adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracée asymptotique. Une tolérance sera admise pour les brisures, mais il est demandé d'assurer une très bonne concordance pour les comportements en haute fréquence et en basse fréquence.

b)

- En très basse fréquence la phase est de 0° , caractéristique d'une pente (0), confirmée par ailleurs par le diagramme de module
- En haute fréquence la phase est de -270° , caractéristique d'une pente (-3) (ou -60 dB/décade)
- On peut remarquer par ailleurs en moyenne fréquence une évolution de la phase de 0° vers -90° , cependant cette évolution ne peut être due à une constante de temps unique car le diagramme de module présente une augmentation locale du gain ; ces évolutions, gain et phase, peuvent être donc dues à la présence d'un zéro et d'un pôle du 2^{ème} ordre placés à proximité l'un de l'autre.

Ces remarques conduisent ainsi à la fonction de transfert $F(p)$ donnée dans le sujet.



- c) Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

Au regard du diagramme asymptotique on peut par exemple adopter :

$$\begin{cases} K_f = 1 \\ \tau_1 = 1/0,3 \\ \tau_2 = 1/0,6 \\ \omega_0 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ \xi < 0,7 \end{cases}$$

Le terme du 2^{ème} ordre laisse penser qu'il y a une résonance, en conséquence $\xi < 0,7$.

c) En justifiant votre réponse, montrer qu'on peut approcher la fonction de transfert $F(p)$ par la forme suivante :

$$F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$$

La pulsation propre ω_0 est relativement loin de la bande passante, en conséquence sa dynamique sera rapide vis-à-vis du zéro et du pôle double (pôles dominants). On adopte donc :

$$F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{(1 + 3,3 p)}{(1 + 1,66 p)^2}$$

IV.C.2) Calcul de la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement

a) En utilisant la relation¹ montrer que l'évolution temporelle de la réponse impulsionnelle $f(t)$ peut être exprimée par la relation suivante où $y(t)$ est une fonction que vous préciserez, a et b deux constantes que vous exprimerez en fonction de K_f , τ_1 et τ_2 .

$$f(t) = ay(t) + b\dot{y}(t)$$

La réponse impulsionnelle est donnée directement par la transformée de Laplace inverse de $F(p)$

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = L^{-1}\left[\frac{(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{(1 + \tau_2 p)^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{\tau_1 p}{(1 + \tau_2 p)^2}\right]$$

En utilisant la relation donnée et la propriété de l'opérateur dérivation on déduit :

$$f(t) = \frac{t}{\tau_2^2} e^{-t/\tau_2} + \tau_1 \frac{d}{dt} \left[\frac{t}{\tau_2^2} e^{-t/\tau_2} \right]$$

Soit :

$$y(t) = \frac{t}{\tau_2^2} e^{-t/\tau_2} \quad a = 1 \quad b = \tau_1$$

Ou encore :

$$y(t) = t e^{-t/\tau_2} \quad a = \frac{1}{\tau_2^2} \quad b = \frac{\tau_1}{\tau_2^2}$$

Finalement :

¹ $L^{-1} \left[t^n e^{-at} \Gamma(t) \right] = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

$$f(t) = \left[\frac{t}{\tau_2^2} e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \frac{d}{dt} \left[t e^{-t/\tau_2} \right] \right] Y(t) = \left[\frac{t}{\tau_2^2} e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} e^{-t/\tau_2} - \frac{\tau_1}{\tau_2^3} t e^{-t/\tau_2} \right] Y(t)$$

$$f(t) = \left[\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right] e^{-t/\tau_2} Y(t)$$

- b)** A partir de cette réponse, calculer le temps du 1^{er} maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement $v_c(t) = v_{c0} Y(t)$ où $Y(t)$ désigne l'échelon unité.

Calcul du temps du 1^{er} maximum

Le temps du 1^{er} maximum est donné par $f(t_m) = 0$, soit pour :

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t_m + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} = 0$$

On obtient donc :

$$t_m = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$$

L'application numérique avec les valeurs adoptées conduit à $t_m = 3,3$ s.

Calcul du dépassement

La réponse indicielle peut être obtenue par intégration de la réponse impulsionnelle, le dépassement étant donné par la valeur de la sortie pour $t = t_m$:

$$v(t_m) = \int_0^{t_m} f(t) dt = \int_0^{t_m} (a y(t) + b \dot{y}(t)) dt = a \int_0^{t_m} y(t) dt + b [y(t)]_0^{t_m}$$

Avec $y(t) = t e^{-t/\tau_2}$ dont l'intégration peut être effectuée facilement par parties :

$$\int_0^{t_m} t e^{-t/\tau_2} dt = \left[-\tau_2 t e^{-t/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t/\tau_2} \right]_0^{t_m} = -\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2$$

$$v(t_m) = \frac{1}{\tau_2^2} \left[-\tau_2 t_m e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2^2 \right] + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} t_m e^{-t_m/\tau_2}$$

Pour $t = t_m$ on obtient $v(t_m) = 1,13$, soit un dépassement de 13%.

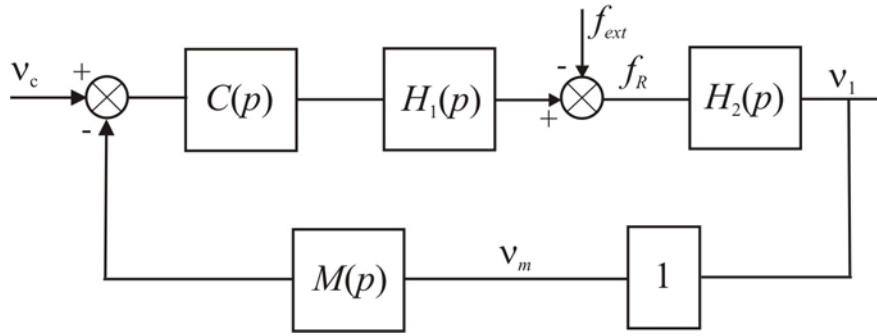
- c)** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

- Le temps du 1^{er} maximum est inférieur à 3,5 s. et le dépassement inférieur à 20% ce qui vérifie le cahier des charges.
- Le régulateur comportant une action intégrale, l'erreur statique est nulle vis-à-vis d'une consigne constante.

IV.D Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

IV.D.1) Déterminer la fonction de transfert $F_2(p) = v_1(p)/F_{ext}(p)$ entre le glissement et la force de perturbation que vous explicitez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation. En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée $\|F_2(j\omega)\|$, de cette fonction peut être approché par la relation:

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left[\|H_2(j\omega)\| \quad ; \quad \left\| \frac{1}{R(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)} \right\| \right]$$



La fonction de transfert entre la sortie et la force de perturbation est :

$$F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{ext}(p)} = - \frac{H_2(p)}{1 + C(p)H_1(p)H_2(p)M(p)}$$

$$\begin{aligned} \|F_2(j\omega)\| &= \left\| \frac{H_2(j\omega)}{1 + C(j\omega)H_1(j\omega)H_2(j\omega)M(j\omega)} \right\| \\ &\approx \begin{cases} \left\| \frac{1}{C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)} \right\| & \text{si } \|C(j\omega)H_1(j\omega)H_2(j\omega)M(j\omega)\| \gg 1 \\ \|H_2(j\omega)\| & \text{si } \|C(j\omega)H_1(j\omega)H_2(j\omega)M(j\omega)\| \ll 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette relation peut encore être formulée suivant les conditions exprimées par l'expression suivante :

$$\|F_2(j\omega)\| \approx \begin{cases} \left\| \frac{1}{C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)} \right\| & \text{si } \|H_2(j\omega)\| \gg \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \\ \|H_2(j\omega)\| & \text{si } \|H_2(j\omega)\| \ll \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \end{cases}$$

Au regard des deux lignes de la relation précédente on peut conclure que :

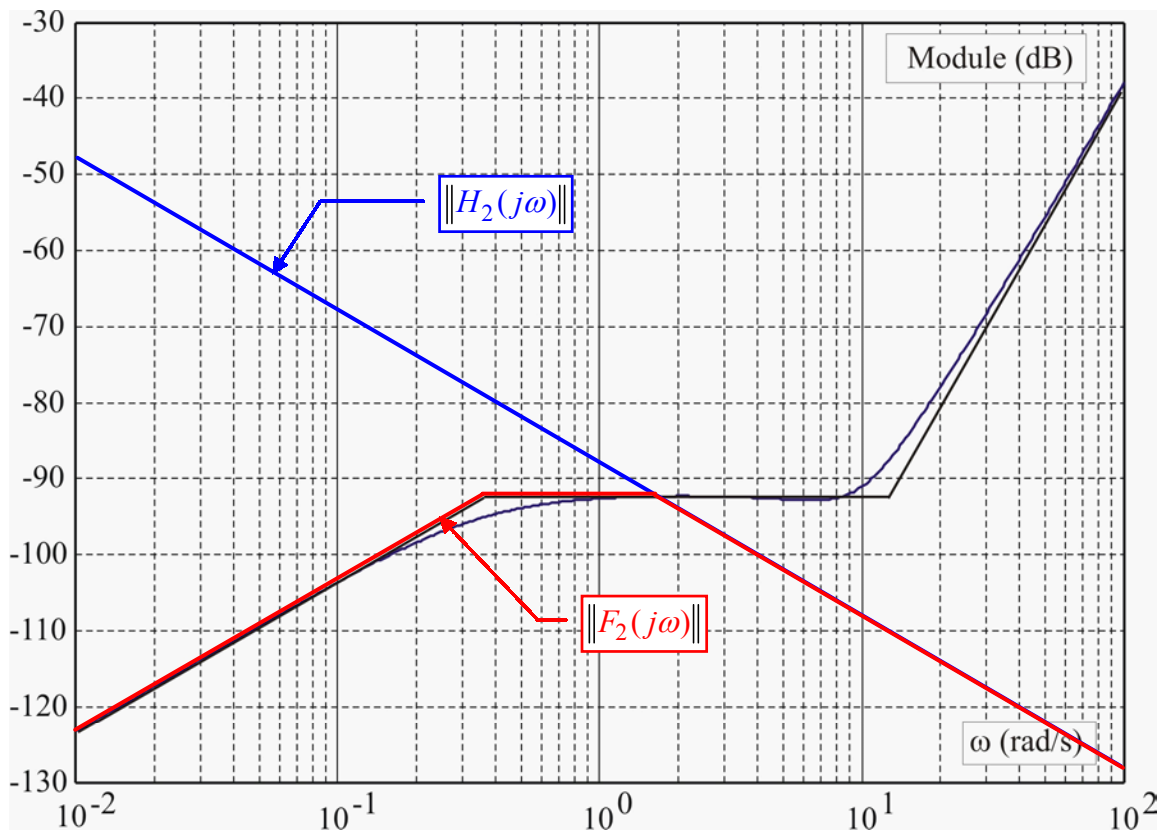
$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left[\|H_2(j\omega)\| ; \left\| \frac{1}{C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)} \right\| \right]$$

IV.D.2) Calcul de la fonction de transfert $F_2(p)$

- a) L'annexe 5 comporte le tracé de la fonction $1/\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|$, tracer directement sur cet annexe (à joindre obligatoirement avec la copie) le digramme asymptotique de la fonction $\|H_2(j\omega)\|$.

b)

$$H_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{r^2/(I \cdot V_{T0})}{p} = \frac{1}{22222p}$$



- c) En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction $\|F_2(j\omega)\|$. En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner la fonction de transfert $F_2(p) = v_1(p)/F_{ext}(p)$ entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

Les pôles et les zéros sont donnés directement par les brisures du diagramme asymptotique, en conséquence au regard du module de la fonction de transfert en boucle fermée, on peut écrire directement :

$$F_2(p) = \frac{\nu_1(p)}{F_{ext}(p)} = -\frac{Kp}{(1+\tau_2p)(1+\tau_3p)} = -\frac{\frac{p}{12100}}{(1+2,8p)(1+0,5p)}$$

IV.D.3) Calcul de l'évolution du glissement en réponse à une variation de l'adhérence.

- a) Préciser les pôles de la fonction $F_2(p)$ déterminée à la question F-2-b et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :
- b) $F_2(p) = \frac{K_2p}{(1+Tp)}$

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux pôles :

$$\begin{cases} p_1 = -0,35 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

Le pôle p_2 étant caractérisé par une dynamique relativement rapide par rapport à celle de p_1 , on va pouvoir le négliger pour l'étude de la réponse temporelle. Soit la fonction approchée :

$$F_2(p) = -\frac{\frac{p}{12100}}{(1+2,8p)}$$

- c) En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif $\nu_1(t)$ en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice $F_{ext} = F_0 \Upsilon(t)$ avec $F_0 = 2000$ N.

En réponse à un échelon de perturbation d'amplitude F_0 on obtient :

$$\nu_1(p) = -\frac{K_2}{(1+Tp)} F_0$$

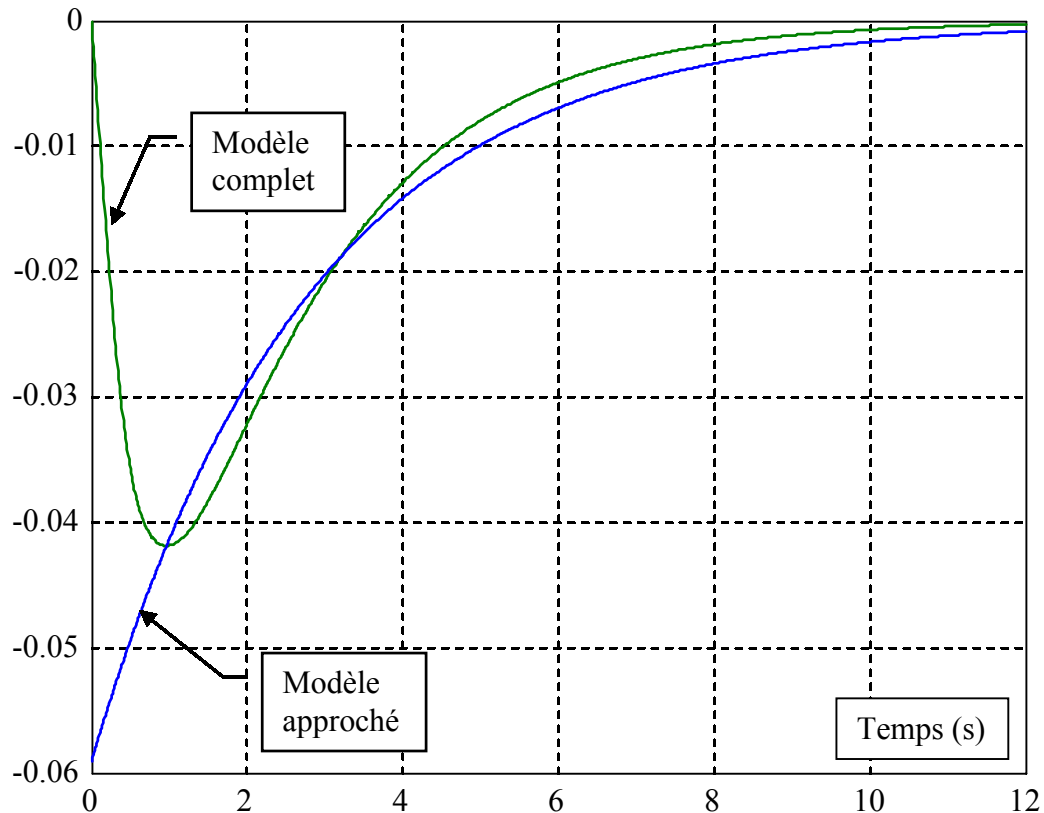
Soit :

$$\nu_1(t) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t/T} \Upsilon(t) = -0,05 e^{-t/T} \Upsilon(t)$$

- d) Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif $\nu_1(t)$ en précisant la valeur initiale $\nu_1(0)$. En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse t_r à partir duquel le glissement reste en dessous de 5% de la valeur initiale $\nu_1(0)$.

e)

La réponse à un échelon de perturbation est donnée sur la figure suivante, c'est la réponse typique d'une fonction du 1^{er} ordre en partant d'une condition non nulle ($\nu_1 = 0,05$) avec une entrée nulle. Le temps de réponse est alors de $t_r = 3T = 8,4$ s.



Calcul exact du temps de réponse

$$v_1(t_r) = -\frac{K_2}{T} F_0 e^{-t_r/T} = -0,05 \cdot \frac{K_2}{T} F_0 \Rightarrow t_r = T \cdot \ln(1/0,05) = 3T$$

f) Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

g)

- Le temps de réponse de 8,4 s. est inférieur au temps de réponse de 9 s. demandé. En conséquence on peut conclure que le cahier des charges est satisfait au regard de cette contrainte.
- Le régulateur comportant une action intégrale (donc avant le point d'entrée de la perturbation) l'erreur statique est nulle comme montré sur la réponse temporelle.