

## Activation 1 – Corrigé

### Réglage de correcteurs P et PI

Ressources de P. Dupas.

#### Savoirs et compétences :

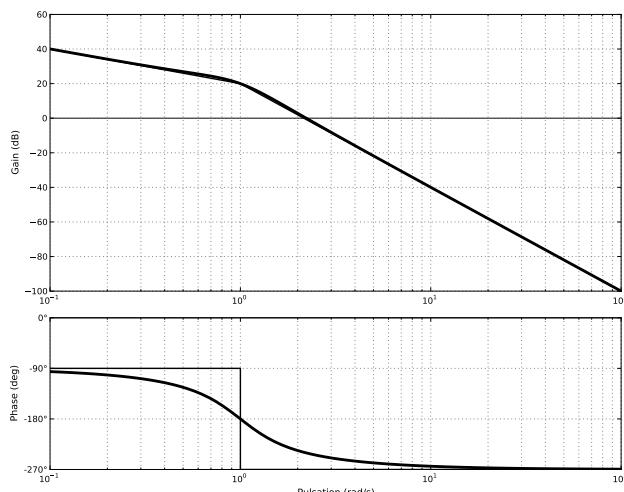
- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.

#### Correcteur proportionnel

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de  $45^\circ$  et une marge de gain de  $10\text{ dB}$ .

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



**Question 1** Mesurer puis calculer la marge de phase.

#### Correction

- On cherche  $\omega$  tel que  $G_{\text{dB}}(\omega) = 0\text{ dB}$  :  $G_{\text{dB}}(\omega) = -20 \log(10) - 20 \log \omega - 20 \log(\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2})$

On trouve  $\omega = 2,21\text{ rad/s}$  et  $M_\varphi = -60^\circ$ . Le système est instable.

**Question 2** Mesurer puis calculer la marge de gain.

**Correction** Pour  $\varphi = -180^\circ$ , on a  $\omega = 1\text{ rad/s}$  et  $M_G = -20\text{ dB}$ . Le système est instable.

**Question 3** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Vérifier la marge de gain.

**Correction** Pour  $\varphi = -135^\circ$  on a  $\omega = 0,62\text{ rad/s}$ . On trouve un gain proportionnel de  $0,054$ .

La marge de gain est alors de  $5,35\text{ dB}$  ce qui est inférieur aux  $10\text{ dB}$  demandés.

**Question 4** Déterminer  $K_p$  pour avoir une marge de gain de  $10\text{ dB}$ . Vérifier la marge de phase.

**Correction** Pour  $\varphi = -180^\circ$  on a  $\omega = 1\text{ rad/s}$ . On trouve un gain proportionnel de  $0,316$ .

La marge de phase est alors de  $70^\circ (\omega = 0,0333\text{ rad/s})$ .

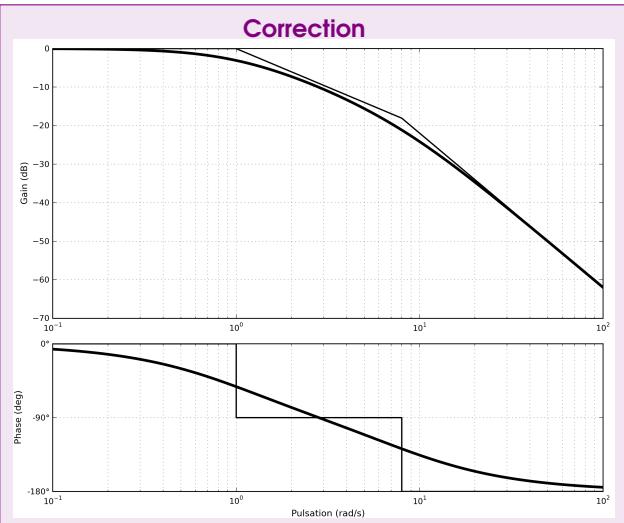
#### Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de  $45^\circ$  en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme  $C(p) = K_p \frac{1+\tau p}{\tau p}$ .

**Question 1** Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.

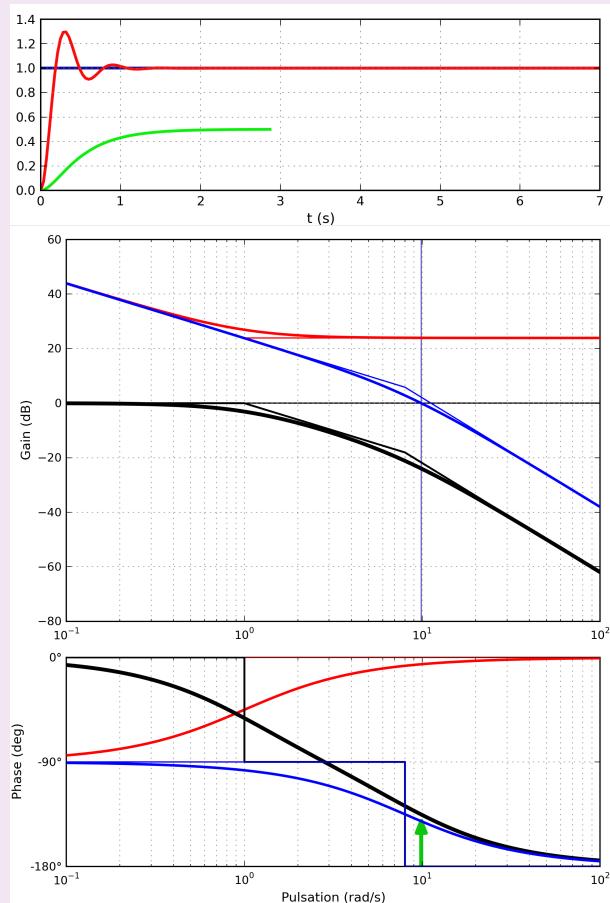


**Question 2** Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

### Correction

- On résout  $\varphi(\omega) = -135^\circ$  :  $\varphi(\omega) = -\arctan \omega - \arctan \omega/8 \Rightarrow \tan 135^\circ = \frac{\omega + \omega/8}{1 - \omega^2/8} \Leftrightarrow -1 + \omega^2/8 - 9\omega/8 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 9\omega - 8 = 0$ .  $\Delta = 81 + 32 = 10,63^2$ .  $\omega = \frac{9 \pm 10,63}{2} = 9,82 \text{ rad/s}$ .
- Calculons  $G_{dB}(9,82) = -23,9 \text{ dB}$ . Il faut donc augmenter le gain de  $23,9 \text{ dB}$  soit  $K_p = 10^{23,9/20} = 15,7$ .
- On choisit  $\tau$  pour ne pas modifier la marge de phase. Il faut donc que le déphasage de  $0^\circ$  du correcteur ait lieu avant  $9,82 \text{ rad/s}$ . De manière usuelle on prend  $\frac{1}{\tau} = \frac{9,82}{10} = 0,982 \text{ rad/s}$ .
- Au final, on a  $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$ .

### Correction



**Question 3** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

## Activation 2 – Corrigé

### Réglage de correcteurs P et AP

Ressources de P. Dupas.

#### Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.

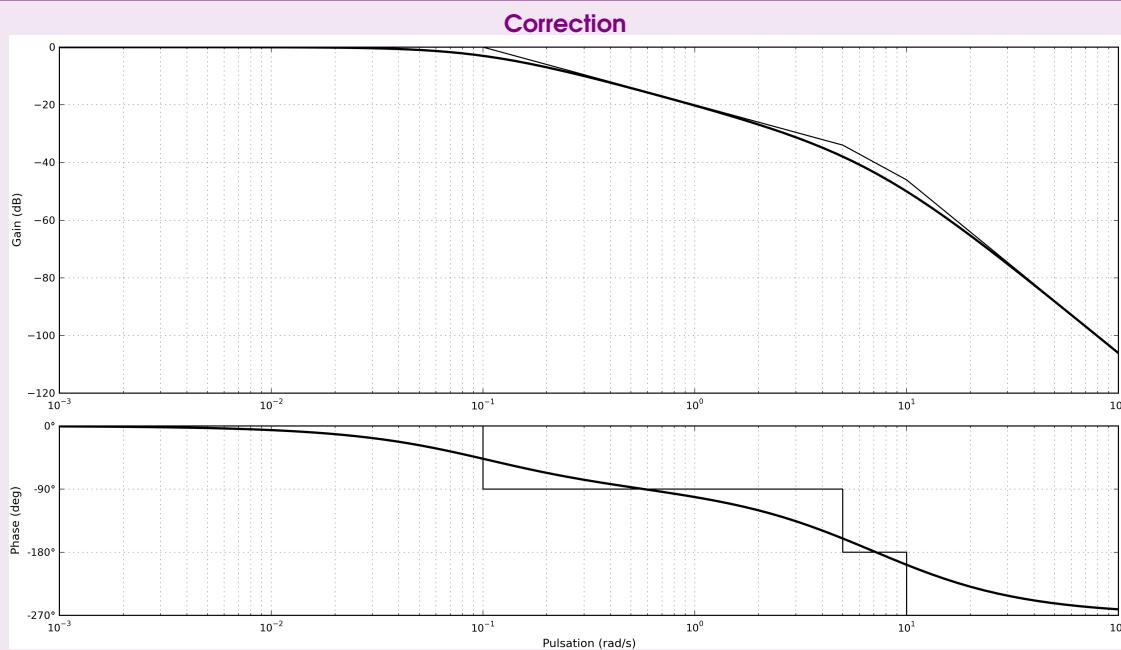
#### Correcteur proportionnel

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

**Question 4** Calculer la précision du système  $\epsilon_S$  pour une entrée échelon unitaire.

**Correction** Le système est de classe 0. L'entrée est de type échelon.  $K_{BO} = 1$ . L'écart statique est de  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ .

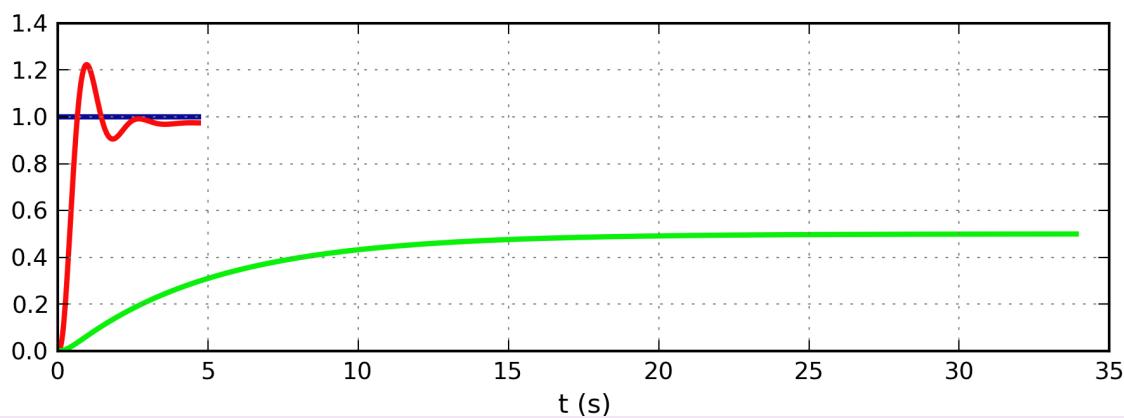
**Question 5** Tracer dans le diagramme de Bode la fonction de transfert en boucle ouverte du système.



**Question 6** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

**Correction**

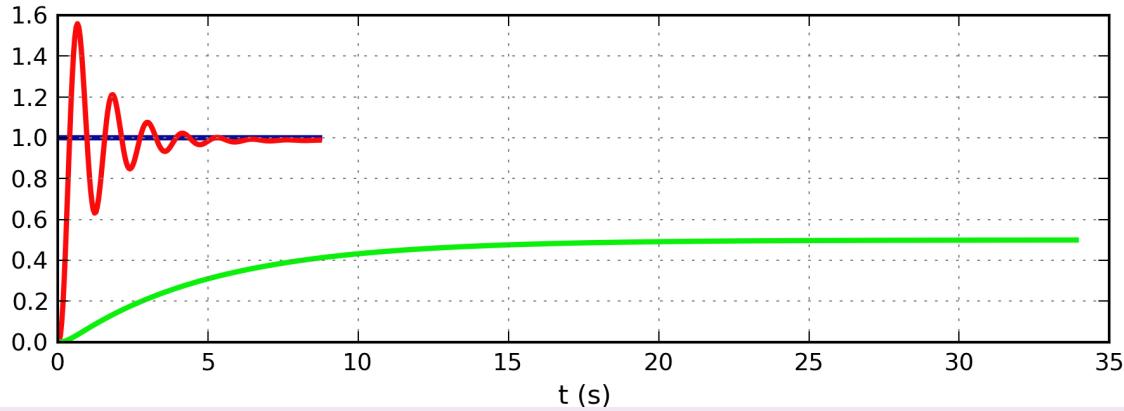
- On résout  $\varphi(\omega) = -135^\circ$  :  $\varphi(\omega) = -\arctan 10\omega - \arctan 0,1\omega - \arctan 0,2\omega$ .  
 $\varphi(\omega) = -135^\circ \Leftrightarrow \omega = 2,95 \text{ rad s}^{-1}$  (solveur Excel).
- Calculons  $G_{dB}(\omega) = -20 \log(\sqrt{1+10^2\omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1+0,1^2\omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1+0,2^2\omega^2}) = -31 \text{ dB}$ . Il faut donc augmenter le gain de 31 dB soit  $K_p = 10^{31/20} = 35,48$ .
- On a alors un écart statique de  $\frac{1}{1+35,48} = 0,027$ .
- Pour déterminer la marge de gain, il faut résoudre  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ . On obtient  $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 12 \text{ dB}$ .



**Question 7** Déterminer  $K$  pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

**Correction**

- On commence par résoudre  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ . On obtient  $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$  et  $M_G = 44 \text{ dB}$ .
- Il faut augmenter le gain de 38 dB soit  $20 \log K_P = 38 \Rightarrow K_P = 10^{38/20} = 79$ .
- On a alors un écart statique de  $\frac{1}{1+79} = 0,0125$ .
- La marge de phase est alors de  $19^\circ$ .



**Correcteur à avance de phase**

Soit un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$  placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de phase de la forme  $C(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$ .

**Question 1** Tracer le diagramme de Bode de  $G(p)$ .

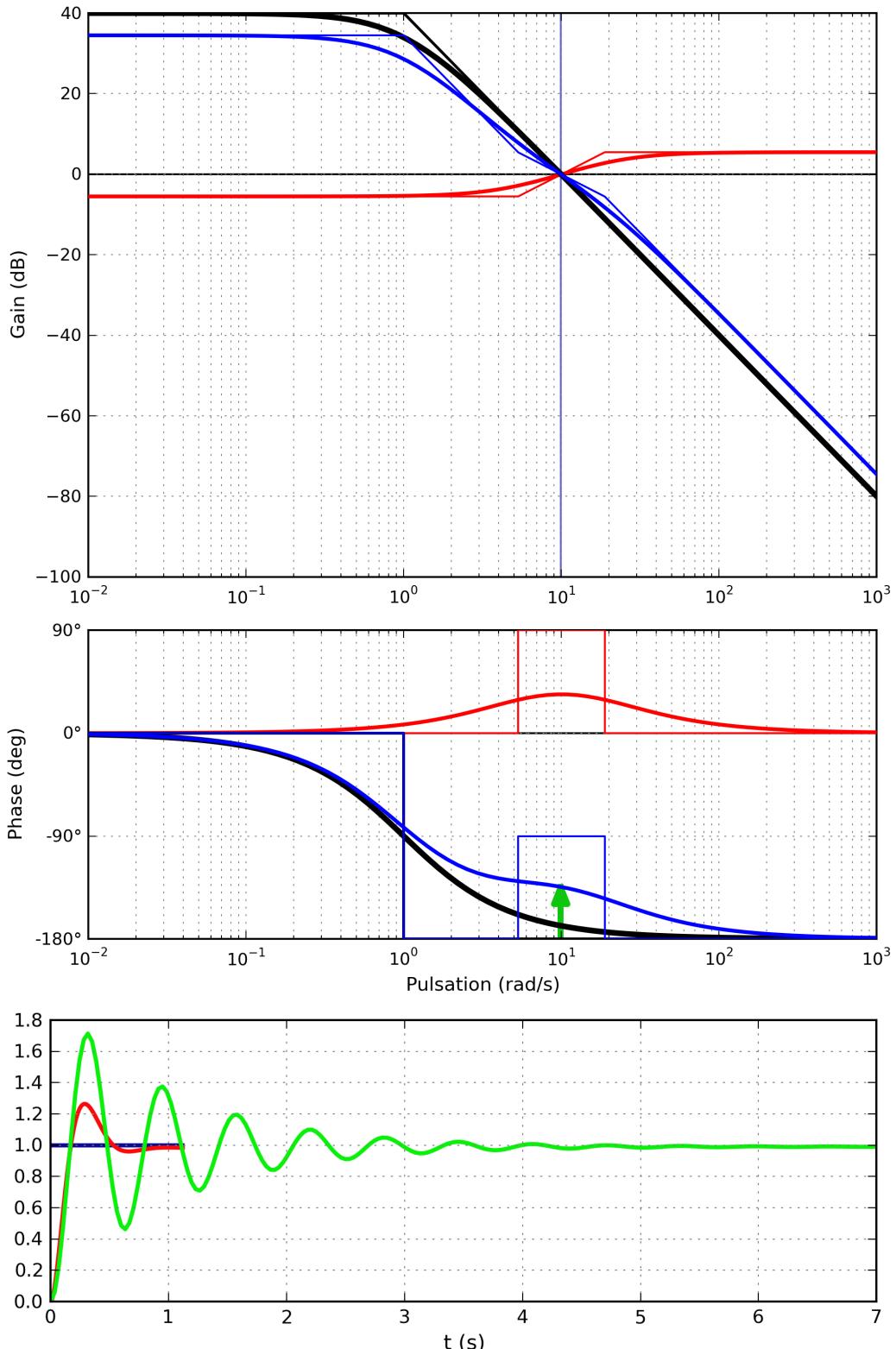
**Question 2** Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ .

**Correction**

- $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(100) - 20 \log(1 + \omega^2)$ .  $G_{\text{dB}}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \frac{100}{1 + \omega^2} = 1 \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt{99} \Rightarrow \omega = 9,95 \text{ rad/s}$ .
- $\varphi(\omega) = -2 \arctan \omega$  et  $\varphi(9,95) = -2,94 \text{ rad} = -169^\circ$  soit une marge de phase de  $11^\circ$ ; le correcteur doit donc apporter un complément de phase de  $34^\circ$ .
- $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \Rightarrow \sin(\varphi_{\max}) = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = -\frac{\sin(\varphi_{\max})+1}{\sin(\varphi_{\max})-1} = 3,54$ .
- $\tau = \frac{1}{9,95 \sqrt{3,54}} = 0,053 \text{ s}$ .

**Question 3** Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

- 1.
2.  $C(p) = 0,53 \frac{1+3,54 \cdot p}{1+0,03 \cdot p^2}$
- 3.



## TD 1

## Mobilité assistée à l'aide d'une canne robotisée \*

Concours CCP – PSI 2018

## Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel
- Con.C2 : Correction d'un système asservi
- Con.C2.SF1 : Choisir un type de correcteur adapté

## Présentation du prototype de canne robotisée étudié

L'objectif de cette canne est de prendre en charge une partie des efforts normaux supportés par une jambe handicapée.

Le prototype de canne robotisée envisagé conserve une forme longiligne, un point d'appui au sol ainsi qu'un encombrement et un poids réduits. La canne robotisée, dont la structure mécanique est présentée en 1, se compose d'un axe linéaire motorisé et d'une roue motorisée située à son extrémité.

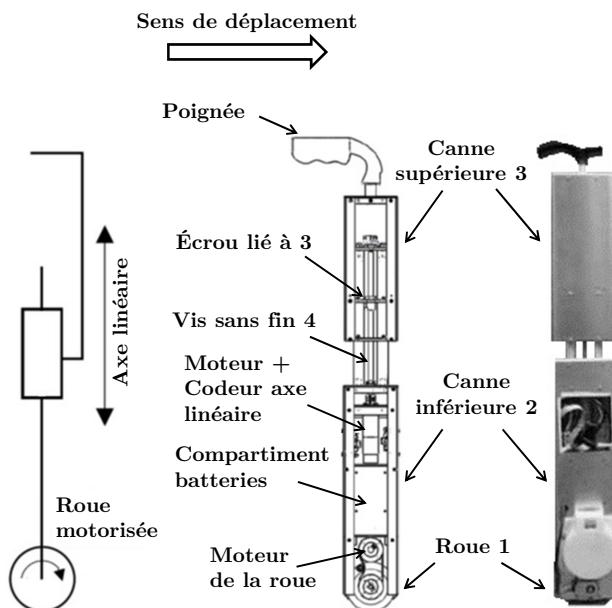


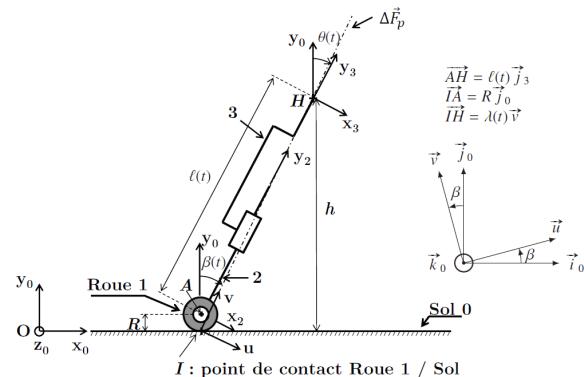
FIGURE 1 – Schéma cinématique et photographie du prototype de canne robotisée

Les deux degrés de mobilité, rendus possibles par cette structure, permettent de suivre la marche d'un sujet et lui offre un point d'appui. L'avantage est d'éviter aux utilisateurs la manipulation de la canne (levée et positionnement) pendant la marche, la roue restant toujours en contact avec le sol.

#### Étude de l'exigence 3.1.6.2 « Commande de l'axe linéaire »

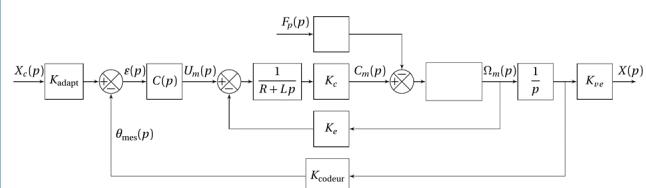
Le maintien d'une hauteur constante lors de la phase d'appui revient finalement à asservir en position le dé-

placement  $x(t)$  de la canne supérieure 3 par rapport à la canne inférieure 2.



Le modèle causal retenu pour l'étude du comportement de l'axe linéaire perturbé est représenté par le schéma-blocs ci-dessous. Dans ce modèle, on note :

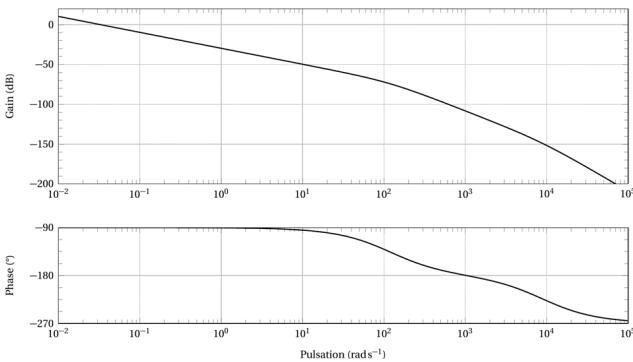
- $X_c(p)$  la transformée de Laplace de la consigne de déplacement  $x_c(t)$  en mètre,
- $X(p)$  la transformée de Laplace du déplacement  $x(t)$  en mètre,
- $F_p(p)$  la transformée de Laplace de l'effort exercé par le patient sur la canne  $F_p(t)$  en N,
- $\Omega_m(p)$  la transformée de Laplace de la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m(t)$  en rad/s,
- $C_m(p)$  la transformée de Laplace du couple moteur  $C_m(t)$  en N m,
- $C(p)$  la fonction de transfert du bloc correcteur.



#### Modèle comportemental

Afin de proposer une modélisation simplifiée de la chaîne d'énergie de l'axe linéaire, une simulation du modèle précédent en boucle ouverte, non perturbé, a été réalisée. Le document réponse présente la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte à l'aide du diagramme de Bode (courbe de gain  $G_{BO}(\omega)$  et courbe de phase  $\varphi_{BO}(\omega)$ ).

**Question 1** À partir du diagramme de Bode, proposer un modèle de comportement du système en boucle ouverte. Soit  $H_{BO\_1}(p)$  cette fonction de transfert, donner sa forme canonique factorisée. Soient  $T_1$  et  $T_2$ , telles que  $T_1 < T_2$ , les constantes de temps introduites et  $K_{BO}$  le gain de  $H_{BO\_1}(p)$ , préciser les valeurs numériques et unités de  $T_1$ ,  $T_2$  et  $K_{BO}$ . Vous laisserez apparaître les traits de construction nécessaires à l'identification du modèle sur le document réponse.



Lors d'une marche saine à allure rapide la cadence moyenne est de 113 pas par minute.

**Question 2** Déterminer la fréquence moyenne en Hz de la marche saine à allure rapide.

Pour la suite, on considérera que la fréquence maximale de déplacement de l'axe linéaire de la canne (liée au mouvement de la marche) est fixée à  $F_{MAX} = 4$  Hz. On propose alors en première approximation une modélisation du comportement du système en boucle ouverte par une fonction de transfert  $H_{BO}(p)$  de la forme  $H_{BO}(p) = K_{BO}/p$  avec  $K_{BO} = 1/30$ .

**Question 3** Justifier, à l'aide de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte, la validité de cette modélisation approchée.

### Correction proportionnelle

Pour la suite, on modélise le comportement du système en boucle ouverte par  $H_{BO}(p) = K_{BO}/p$  avec  $K_{BO} = 1/30$ . On considère un correcteur à action proportionnelle tel que  $C(p) = K_{corr} = 1$ .

Le schéma-blocs du système non perturbé correspond alors à celui de la figure 2.

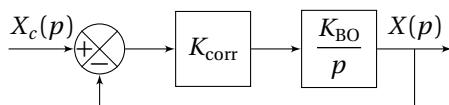


FIGURE 2 – Schéma-bloc simplifié du système non perturbé avec  $C(p) = K_{corr}$

**Question 4** Déterminer l'expression de  $H_{BF}(p) = X(p)/X_c(p)$ , la fonction de transfert en boucle fermée de la modélisation de la 2. Déterminer les paramètres caractéristiques de  $H_{BF}(p)$  et en déduire les performances de cette modélisation pour  $C(p) = K_{corr} = 1$ . Conclure vis-à-vis des performances d'asservissement de l'axe linéaire.

On se propose de modifier la valeur de  $K_{corr}$  de manière à vérifier l'exigence de rapidité de l'asservissement.

**Question 5** Déterminer la valeur numérique à donner à  $K_{corr}$  pour assurer le temps de réponse à 5 % lié à l'exigence de rapidité de l'asservissement de l'axe linéaire.

La 3 donne l'évolution de la réponse temporelle  $x(t)$  du système réel non perturbé à un échelon en déplacement de valeur finale  $X_c = 10$  mm, pour une correction proportionnelle  $K_{corr} = 1500$ .

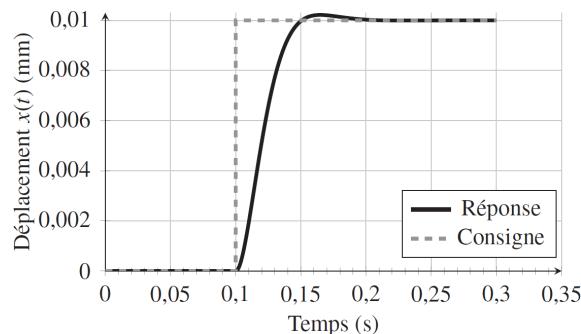


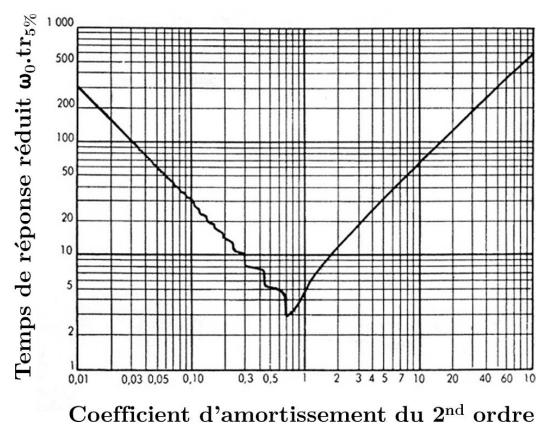
FIGURE 3 – Évolution de la réponse temporelle  $x(t)$  du système réel non perturbé à un échelon de valeur  $X_c = 10$  mm, pour  $K_{corr} = 1500$

**Question 6** L'évolution de la réponse du système est-elle cohérente avec le comportement du modèle retenu? Justifier. Quelle modification faudrait-il apporter au modèle approché pour retrouver cette forme de réponse temporelle?

Pour la suite, on modélise la fonction de transfert en boucle ouverte du système par  $H_{BO}(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K_{BO}}{1+\tau_{BO}p}$  avec  $K_{BO} = 1/30$  (unité en  $s^{-1}$ ) et  $\tau_{BO} = 9$  ms.

**Question 7** Quelle valeur maximale de  $K_{corr}$ , notée  $K_{corr}^{MAX}$ , permet de vérifier les critères de précision et de dépassement de l'asservissement de l'axe linéaire?

**Question 8** Déterminer la valeur du temps de réponse à 5 %,  $t_{r5\%}$ , de ce modèle pour  $K_{corr} = K_{corr}^{MAX}$  à partir de l'abaque du temps de réponse réduit donné ci-dessous.



La figure 4 donne les évolutions des réponses temporales  $x(t)$  du système réel avec prise en compte de la perturbation ( $F_p$  constante et égale à 175 N) à un échelon en déplacement de valeur finale  $X_c = 10$  mm, pour une correction proportionnelle  $K_{corr} = 1500$  et pour  $K = K_{corr}^{MAX}$ .

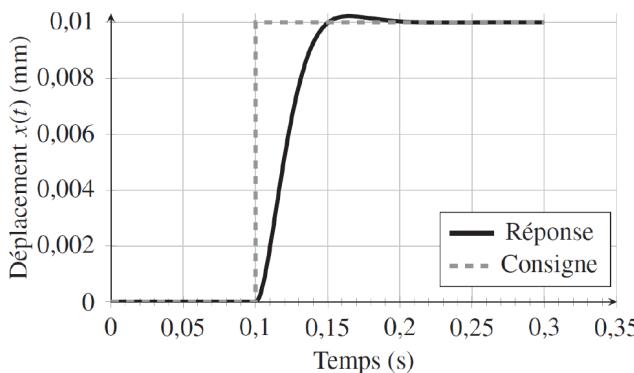


FIGURE 4 – Réponses temporelles  $x(t)$  du système réel perturbé à un échelon en déplacement de valeur finale  $X_c = 10 \text{ mm}$ , pour une correction proportionnelle  $K_{\text{corr}} = 1500$  et pour  $K = K_{\text{corr}}^{\text{MAX}}$

**Question 9** Conclure sur les capacités de la correction à action proportionnelle pure vis-à-vis des performances à atteindre.

#### Correction avec action proportionnelle et intégrale généralisée – correcteur PI généralisé

Le correcteur finalement retenu est un correcteur avec action proportionnelle et intégrale généralisée. La fonction de transfert  $C(p)$  prend alors la forme suivante :

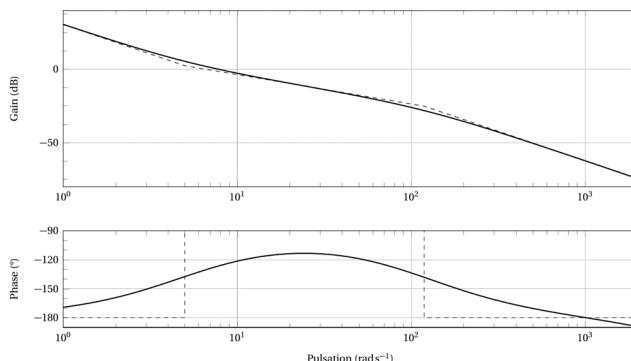
$$C(p) = K_{\text{corr}} \cdot \frac{1+T_d p}{p} \text{ avec } K_{\text{corr}} > 1 \text{ et } T_d < 1 \text{ s.}$$

On donne dans le document réponse le diagramme de Bode (courbe de Gain et de Phase) du système en boucle ouverte avec correcteur PI Généralisé pour  $K_{\text{corr}} = 1000$  et  $T_d = 0,2 \text{ s}$ .

**Question 10** Représenter sur le document réponse les marges de Gain  $M_G$  et de Phase  $M_\phi$  du système corrigé.

Avec cette correction, le système est précis mais les valeurs des marges de gain et de phase sont telles que le système n'est pas assez rapide. Il est donc nécessaire d'augmenter la valeur de  $K_{\text{corr}}$ , tout en conservant  $T_d = 0,2 \text{ s}$ , de manière à augmenter la bande passante du système et ainsi se rapprocher des valeurs limites de marge de Gain et de Phase autorisées.

**Question 11** En déduire la valeur maximale à donner au gain  $K_{\text{corr}}$ , en conservant  $T_d = 0,2 \text{ s}$ , afin de respecter les performances en stabilité de l'asservissement de l'axe linéaire tout en augmentant au maximum la bande passante du système.



Les figures 5 donnent la réponse temporelle à un échelon de consigne  $X_c = 10 \text{ mm}$  du système simulé, perturbé et corrigé du déplacement  $x(t)$  (en mm) ainsi que l'évolution de l'intensité simulée (en Ampères) circulant au sein du moteur.

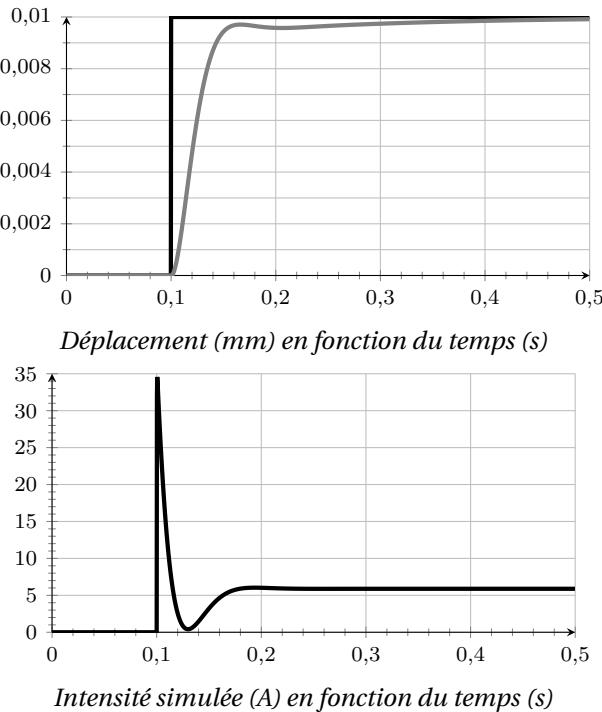


FIGURE 5 – Réponses temporelles à un échelon d'amplitude  $X_c = 10 \text{ mm}$  du système simulé, perturbé et corrigé

**Question 12** Conclure sur les performances du système perturbé vis-à-vis des exigences de l'asservissement de l'axe linéaire. Commenter l'évolution de l'intensité simulée avec les caractéristiques de la carte de commande du moteur.

#### Synthèse – Étude de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche »

L'objectif de cette synthèse est de vérifier que les paramètres d'asservissement mis finalement en place sur la commande de l'axe linéaire et sur la commande de la roue permettent d'atteindre les performances de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche ».

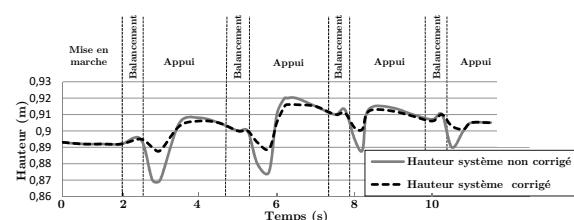


FIGURE 6 – Hauteur de la main au cours de la marche pour  $V = 0,22 \text{ m/s}$

La 6 donne les évolutions de la hauteur de main mesurées lors d'une marche assistée avec le prototype de canne à la vitesse  $V = 0,22 \text{ m/s}$ .

La courbe grise en trait continu correspond au cas où l'axe linéaire est sans correction ( $C(p) = 1$ ).

La courbe noire en trait pointillé correspond au cas où l'axe linéaire est corrigé (correction PI généralisée avec paramètres optimisés).

Il est à remarquer que lors de cet essai, le patient avait pour consigne de conserver sa main immobile lors du déplacement. Cette condition est difficilement vérifiable en pratique car le patient ne peut pas vraiment se concentrer sur la position de sa main pendant la marche.

**Question 13** Conclure sur l'influence de la correction de l'axe linéaire sur le respect de l'exigence de maintien de la hauteur de main.

Les figures 7 et 8 donnent pour  $V = 0,22 \text{ m/s}$  (allure normale), respectivement pour  $V = 0,29 \text{ m/s}$  (allure rapide), le suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol et le suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle  $\theta_g$ ) par la canne (angle  $\theta$ ).

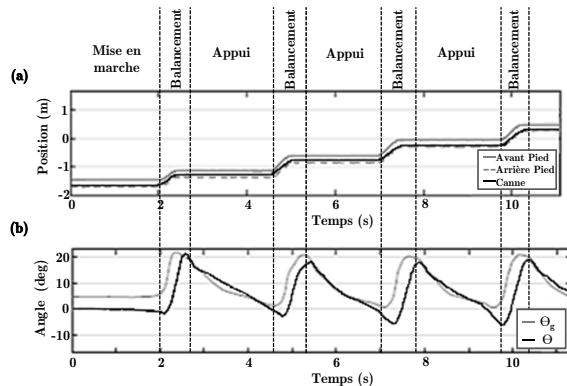


FIGURE 7 –  $V = 0,22 \text{ m/s}$ , allure normale – (a) : suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol – (b) : suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle  $\theta_g$ ) par la canne (angle  $\theta$ )

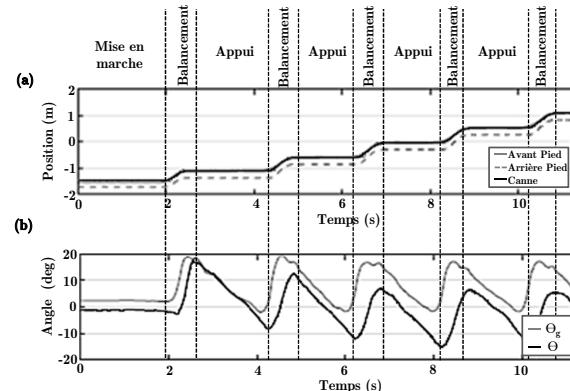
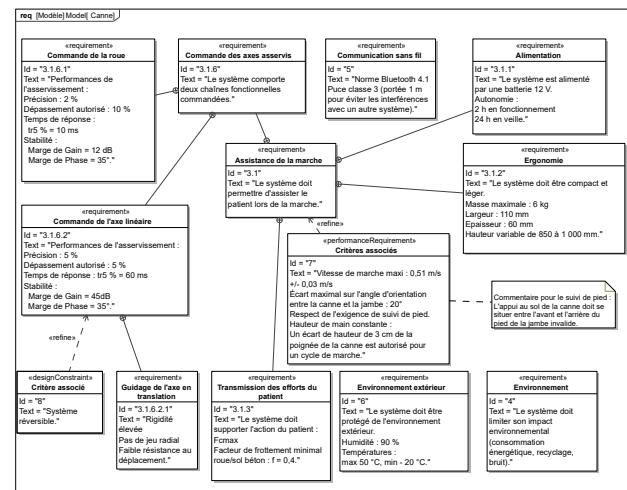


FIGURE 8 –  $V = 0,29 \text{ m/s}$ , allure rapide – (a) : suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol – (b) : suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle  $\theta_g$ ) par la canne (angle  $\theta$ )

**Question 14** Conclure sur le réglage des paramètres d'asservissement mis en place vis-à-vis des performances liées à la synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.

**Annexes – Diagramme partiel des exigences**



## TD 2 – Corrigé

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

## Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

## Mise en situation

## Modèle de connaissance de l'asservissement

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Correction** On a  $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$  et donc  $H_2(p) = \frac{\theta_m(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{p}$ .

De plus  $Jp^2\theta_m(p) = C_m(p) - C_e(p) \Leftrightarrow Jp\Omega_m(p) = \Omega_m(p)$  et donc  $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_m(p) - C_e(p)} = \frac{1}{Jp}$ .

Enfin,  $H_3(p) = \frac{C_e(p)}{\theta_m(p)} = K_{C\theta}$ .

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

**Correction** D'une part,  $F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp} \frac{1}{p} K_{C\theta}}{1 + \frac{1}{Jp} \frac{1}{p} K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}$ .

D'autre part,  $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}}{1 + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + 2K_{C\theta}}$ .

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ ? Conclure.

**Correction** Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. Le gain est de  $\frac{1}{2}$  et la pulsation est de  $\frac{1}{\omega_0} = \frac{J}{2K_{C\theta}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K_{C\theta}}{J}}$ .

Pour une entrée échelon d'amplitude  $C_0$ , le système répondra par un sinus d'amplitude  $\frac{C_0}{2}$  (valeur crête à crête  $C_0$ ) de pulsation  $\omega_0$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .**Correction**

D'une part,  $F_1(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)B}$ .

D'autre part,  $H_{BO}(p) = \frac{\frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)}{1 + \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)B + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1 + \frac{B}{Jp} + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + Bp + K_{C\theta}}$

$$= \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2 + \frac{B}{K_{C\theta}}p + 1}.$$

Enfin,  $(1 + \tau p)^2 = 1 + 2\tau p + \tau^2 p^2$ . Donc nécessairement  $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$  et  $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}} \Leftrightarrow B = 2\tau K_{C\theta} = 2\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} K_{C\theta} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ .

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Correction** La boucle ouverte est de classe 1. L'erreur statique (entrée échelon) est donc nulle ce qui est conforme à l'exigence 1.2.2.1 du cahier des charges.

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

**Correction**

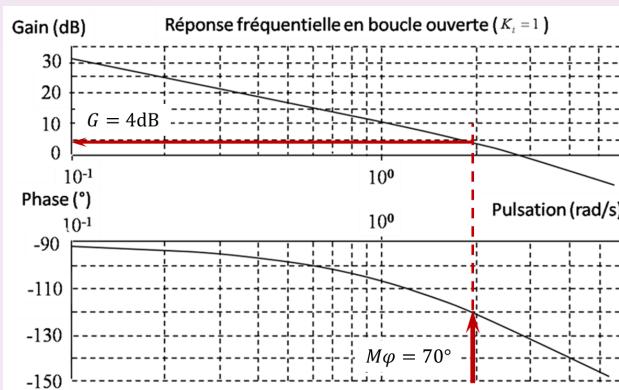
Pour avoir une FTBF d'ordre 2, il faut que la BO soit d'ordre 2. En conséquence, vu la forme de correcteur proposé, on peut envisager que le correcteur compense un pôle du système.

$$\text{Ainsi pour } \tau = T_i, \text{ on a } \frac{C_e(p)}{C_C(p)} = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}}{1 + \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p) + K_i} = \frac{K_i}{\tau^2 p^2 + \tau p + K_i} = \frac{1}{\frac{K_i}{\tau^2} p^2 + \frac{\tau}{K_i} p + 1}.$$

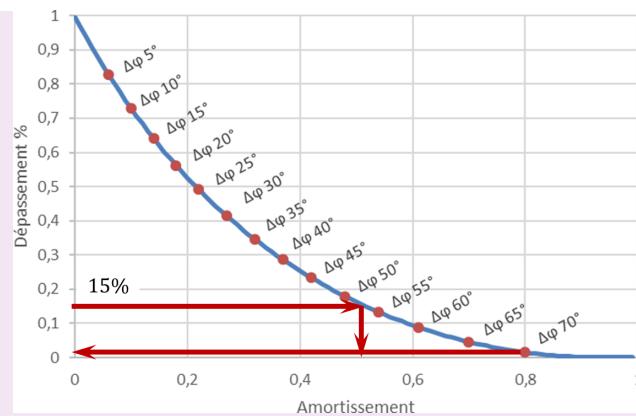
**Question 7** En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour  $K_i$  permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.

**Correction**

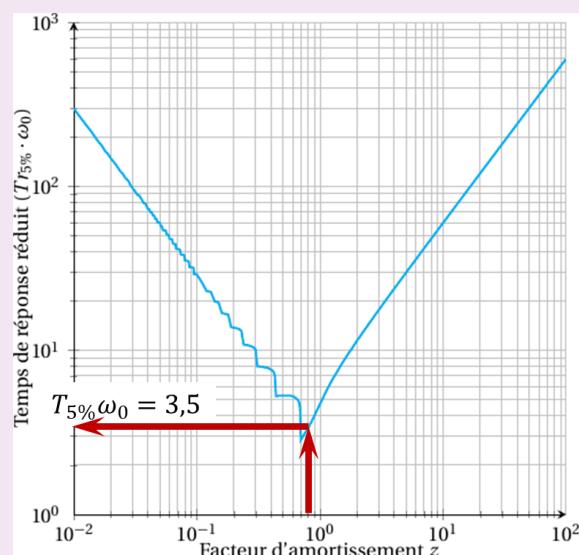
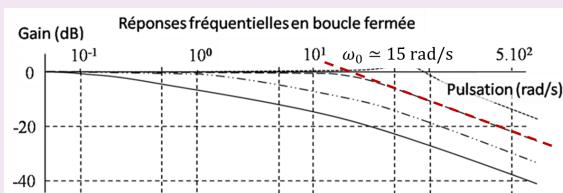
- Marge de gain 10 dB : la boucle ouverte est d'ordre 2. La phase est donc toujours supérieure à  $-180^\circ$  et la marge de gain est infinie. Le critère est respecté.
- Marge de phase supérieure à  $70^\circ$  : il est donc nécessaire que le gain (dB) de la boucle ouverte soit nul lorsque la phase est égale à  $120^\circ$ . D'après la réponse fréquentielle en BO, il faut donc que  $20 \log K_i \leq 4 \Rightarrow K_i \leq 10^{\frac{4}{20}} = 1,58$ .



- Dépassement inférieur à 15% : l'abaque ci-dessous montre que pour une marge de phase de  $70^\circ$ , le dépassement sera inférieur à 15%. Ainsi, avec une marge de phase de  $70^\circ$ , le dépassement sera donc d'environ 2% et le coefficient d'amortissement sera d'environ 0,8.



- Temps de réponse à 5% inférieur à 0,5 s : en utilisant la réponse fréquentielle pour un gain de 0,4 ( $< 1,58$ ) on a  $\omega_0 \simeq 15 \text{ rad s}^{-1}$ . En utilisant l'abaque du temps de réponse réduit, on a  $\omega_0 \cdot T_{r5\%} \simeq 3,5$ ; donc  $T_{r5\%} \simeq \frac{3,5}{15} = 0,23 \text{ s}$ .



- D'après le diagramme de Bode en BF, le gain basse fréquence est nul. Le gain de la fonction de transfert est donc unitaire. L'erreur statique est donc nulle.  
**On propose donc  $K_i = 0,4 (< 1,58)$ .**

## Retour sur le cahier des charges

**Question 8** Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

### Correction

Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain	10 dB	$\infty$	OK
Marges de phase	70°	70°	OK
Dépassement	< 15 %	2%	OK
T5 %	< 0,5 s	0,23 s	OK
Erreur statique	Nulle	Nulle	OK

Le cahier des charges est donc respecté. (Réponse indicielle d'un second ordre avec un coefficient d'amortissement de 0,8 et un gain unitaire).

## TD 3 – Corrigé



## Agitateur médical avec chambre de Riccordi

CCP – PSI – 2006

## Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

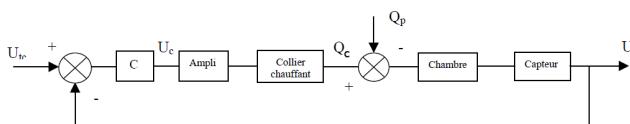
## Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- $U_{tc}$  : tension de consigne;
- $U_t$  : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- $U_a$  : tension d'alimentation du collier chauffant;
- $q_c$  : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- $q_p$  : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme.



Expérimentalement, on peut déterminer que  $FTBO(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1+5p)(1+100p)}$ .

## Analyse des performances

On considère ici que  $C(p) = 1$ . On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

**Question 1** Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

**Question 2** Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

**Question 3** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 4** Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

## Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme  $C(p) = K$ .

**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

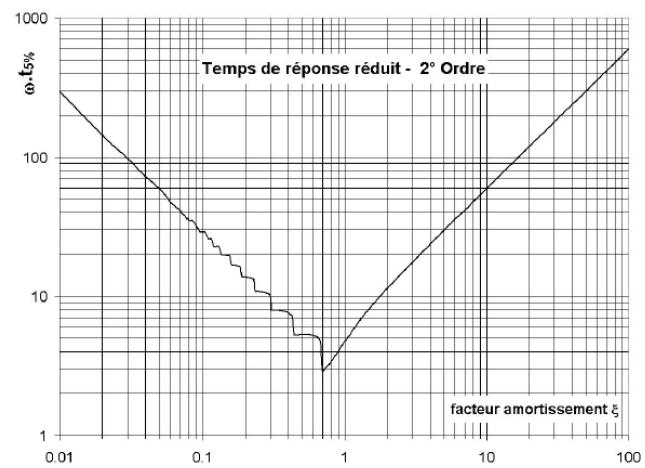
**Question 6** En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

**Question 7** Déterminez alors, la tension en entrée de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne  $U_{tc}$  de 5V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale  $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$ . On souhaite que la montée en température soit de 3 minutes maximum.

**Question 8** Déterminer les gain  $K$  et  $T_i$  permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponses du système.

**Question 9** En déduire le nouvel écart de position.



## O20 – Temps de réponse du système régulé

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{re}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)}$$

car le retour est unitaire.

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{105}{1,5} \cdot p + \frac{500}{1,5} \cdot p^2}$$

D'où l'on déduit :

- la pulsation propre  $\omega_n$  telle que :  $\omega_n^2 = \frac{1,5}{500} = 30 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \omega_n = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ rd/s}$

- le facteur d'amortissement  $\xi$  tel que :  $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = 70 \Rightarrow \xi = 1,92 \approx 2$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 12 \Rightarrow t_{5\%} = 218 \text{ s}$  **Incompatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

## O21 – Ecart de position – Ecart de traînage

Fonction de transfert de classe 0 (zéro)  $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$

$\varepsilon_p = 0,66$    66 % **Incompatible** avec le cahier des charges.

## O22 – Diagrammes de Bode de la F.T.B.O.

On procède par superposition :  $H_{bo}(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) = \frac{0,5}{1 + j \cdot 5\omega} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot 100\omega}$

Pulsations de brisure  $\omega_1 = 0,2 \text{ rd/s}$  ;  $\omega_2 = 0,01 \text{ rd/s}$

$$\text{Qd } \omega \rightarrow 0 \quad H_{bo} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -6dB \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$$

$$G = -6dB - 10 \cdot \log(1+25 \cdot \omega^2) - 10 \cdot \log(1+10^4 \cdot \omega^2)$$

$$\varphi = -\arctan(5 \cdot \omega) - \arctan(100 \cdot \omega)$$

$\omega$ (rd/s)	0,01	0,1	1
G (dB)	-9	-27	-60
$\varphi$ ( $^\circ$ )	-48	-115	-169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Tracé des lieux asymptotiques et réels : Voir le Document Réponse page suivante

### O23 – Marges de gain, de phase

Marge de gain :  $M_G = \infty$

Marge de phase :  $M_\varphi = 180^\circ$

### O 24 – Réglage du correcteur Proportionnel assurant la stabilité et optimisant les performances du système

Il faut écarter la solution consistant à régler  $K$  afin que le lieu de transfert en B.O. soit tangent au contour fermé à  $2,3$  dB, car alors le facteur d'amortissement devient inférieur à 1, (0,4 pour un second ordre et le dépassement est environ de 25%) ce qui entraînera un dépassement lors la montée en température (Non respect du C.d.C.)

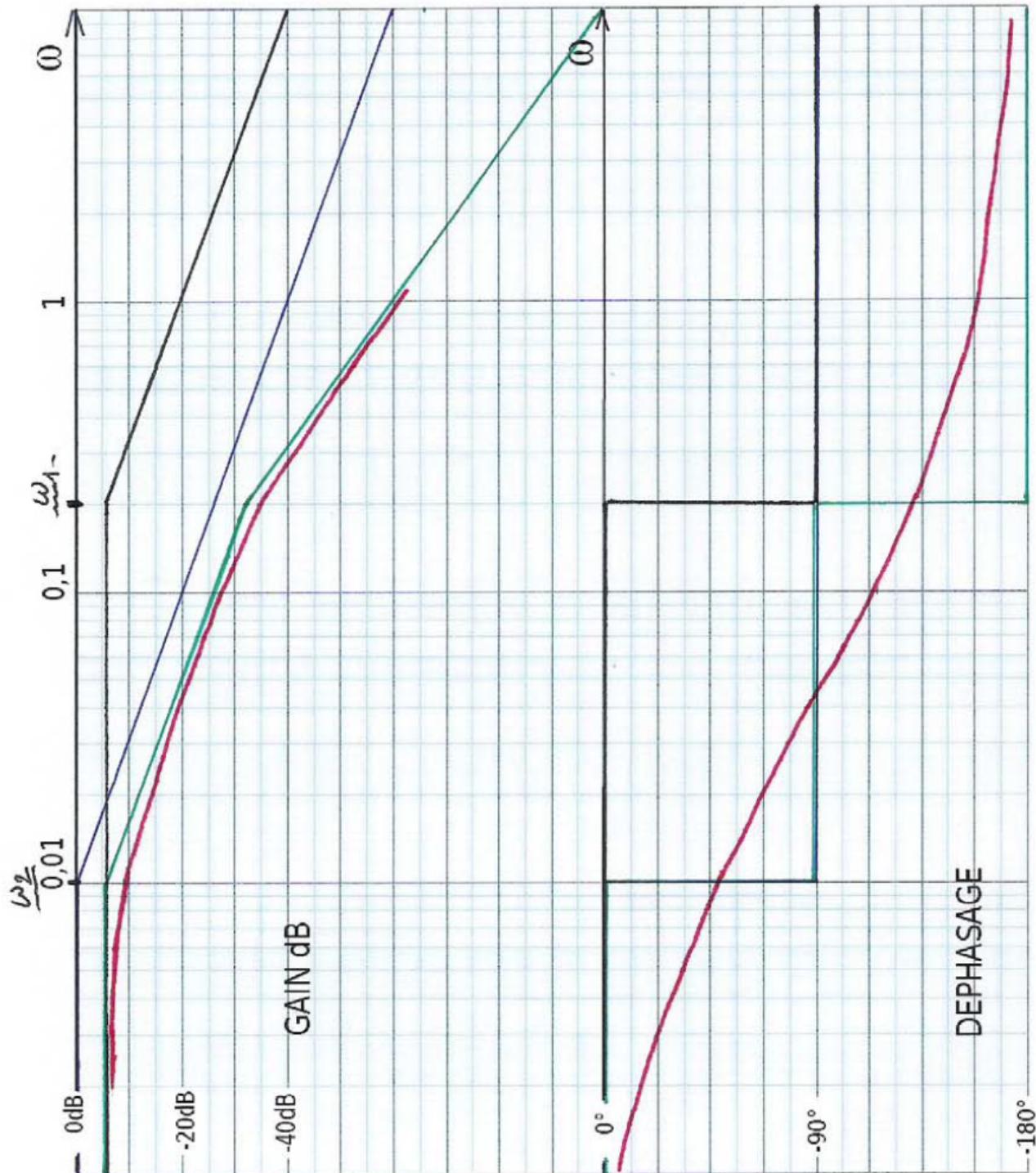
On règle  $K$  de telle sorte que  $\xi \geq 1$ ; la réponse indicielle est alors **apériodique critique** ou **apériodique amorti**.

$$H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{1 + 105 \cdot p + 500 \cdot p^2}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{0,5 \cdot K}{1 + 0,5 \cdot K}}{1 + \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K} p + \frac{500}{1 + 0,5 \cdot K} p^2}$$

**Question 22 :** Tracé de Bode



Pulsation propre :  $\omega_n = \sqrt{\frac{1+0,5 \cdot K}{500}}$

Facteur d'amortissement, il est tel que :  $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = \frac{105}{1+0,5 \cdot K}$  ,

$$\Rightarrow \xi = \frac{105}{2 \cdot \sqrt{500} \cdot \sqrt{1+0,5 \cdot K}}$$

Condition de **non dépassement** :  $\xi \geq 1 \Leftrightarrow K \leq 9,02$

On choisit **K=9** alors  **$\xi \approx 1$**  la réponse indicielle est **apériodique critique**.

Par conséquent, sur le diagramme de Black, **on translate** le lieu de transfert en B.O. **dans la direction verticale** de **20 Log 9**, c'est-à-dire d'environ **19 dB**.

### O 25 – Eléments de performances, temps de réponse à 5 %, écarts de position et de traînage

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H<sub>bo2</sub>)

La marge de gain est inchangée : **M<sub>G</sub> = ∞**

On relève : **M<sub>φ</sub> = 90°**

**La stabilité est assurée.**

Pulsation propre :  $\omega_n = \sqrt{\frac{1+0,5 \cdot 9}{500}} = \sqrt{\frac{5,5}{500}} \approx 0,1 \text{ rd/s}$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5 \Rightarrow t_{5\%} = 50 \text{ s}$  **Compatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

Fonction de transfert de classe 0 (zéro)  $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$

**$\varepsilon_p = 0,55$**  **55 %** **Incompatible** avec le cahier des charges.

### O26 – Tension en entrée de l'amplificateur, tension d'alimentation du collier chauffant lorsque l'échelon de tension de consigne U<sub>tc</sub> est de 5 V

A 17° C correspond  $U_c = 0 \text{ V}$ , donc  $U_t = 0 \text{ V}$ .

Si  $U_{tc} = 5 \text{ V} \Rightarrow U_c = 45 \text{ V}$ . ( $U_c = K \cdot \varepsilon$ )

Alors **U<sub>a</sub> = 450 V** Il y aura **saturation de l'ampli** et donc augmentation du temps de réponse.

## O 27 – Choix d'un correcteur à action P.I. – Réglage de ce correcteur

$$C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$$

Le réglage du correcteur se fait par **compensation du pôle le plus lent**. Méthode qui consiste à choisir la constante de temps  $T_i$  du correcteur égale à la **constante de temps la plus grande** du système à corriger. On réglera le gain  $K$  du correcteur afin que la **réponse indicielle ne présente pas de dépassement** (on choisit  $\xi = 1$ ). Le choix de  $T_i$  devant satisfaire le C.d.C. (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

La F.T.B.O. s'écrit alors :  $H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{T_i \cdot p + 500 \cdot p^2}$

La F.T.B.F. s'écrit alors :  $H_{bf}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{0,5 \cdot K} \cdot p + \frac{500}{0,5 \cdot K} \cdot p^2}$

La pulsation propre (non amortie) vaut alors :  $\omega_n = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{K}{10}}$

Le facteur d'amortissement vaut alors :  $\xi = \frac{T_i}{10 \cdot \sqrt{10 \cdot K}}$

On choisit  $\xi = 1$  la réponse indicielle est apériodique critique.

Alors :  $K = 10^{-3} \cdot T_i$

On a toujours :  $\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5$  puisque  $\xi = 1$

Tableau des valeurs de  $K$ ,  $\omega_n$ ,  $t_{5\%}$  en fonction du choix de  $T_i$

$T_i$	$K$	$\omega_n$	$t_{5\%}$	Commentaires
5 s	$25 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$ rd/s	1 000 s	A rejeter
<b>100 s</b>	10	0,1 rd/s	<b>50 s</b>	<b>A RETENIR</b>

Tracé du lieu de transfert de la F.T.B.O. dans le plan de Black :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{5}{j \cdot 100 \omega \cdot (1 + j \cdot 5\omega)}$$

Gain :  $G = -26 \text{ dB} - 20 \cdot \log \omega - 10 \cdot \log(1 + 25 \cdot \omega^2)$

Argument :  $\varphi = -90^\circ - \arctan(5\omega)$

$\omega$ (rd/s)	0,01	0,1	0,2	1
G (dB)	14	- 7	- 15	- 40
$\varphi$ ( $^\circ$ )	- 93	- 117 $^\circ$	- 135	- 169

### Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Compte tenu de la forme de la F.T.B.O., le lieu de transfert présente deux asymptotes verticales d'équations  $\varphi = -90^\circ$  et  $\varphi = -180^\circ$ .

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H<sub>b03</sub>)

La marge de gain est inchangée :  $M_G = \infty$

On relève :  $M_\varphi \approx 77^\circ$

**La stabilité est assurée.**

### O 28 – Nouvel écart de position

Le système est de classe 1  $\Rightarrow$   $\varepsilon_p = 0$

## TD 4 – Corrigé



## Machine de rééducation SysReeduc

CCP PSI 2013

## Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

## Mise en situation

## Éléments de modélisation

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$  et  $K_9$ .

## Correction

On a :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$  et  $C_{M1}(p) = k_t I(p)$  donc  $K_2 = \frac{k_t}{R}$  ;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$  et donc  $K_7 = k_e$  ;
- $(M+m)r\rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M+m)r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$  et donc  $K_9 = \rho_1 r$  et  $H_3(p) = \frac{1}{(M+m)r^2 \rho_1^2 p}$  ;
- $H_4(p)$  permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et  $H_4(p) = \frac{1}{p}$  ;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit  $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$  ;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement  $K_5 = \rho_1$  et  $K_6 = r$  (à convertir en mètres) ;
- enfin,  $K_1$  convertit des mètres en incrément.  $X_c$  est la consigne que doit respectée  $X$ . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc  $\varepsilon = 0$  et  $X = X_c$  soit  $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8 \theta_m = K_1 X_C - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$ . Au final,  $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera  $A, B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$  et  $K_8$ .

## Correction

On montre  $A = \frac{K_8}{k_e}, B = \frac{R(m+M)r^2 \rho_1^2}{k_e k_t}$  et  $D = \frac{r^2 \rho_1^2 R}{K_8 k_t}$ .

## Correction proportionnelle

On suppose que  $C(p) = K_c$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A, B, D$  et  $K_c$ .

## Correction

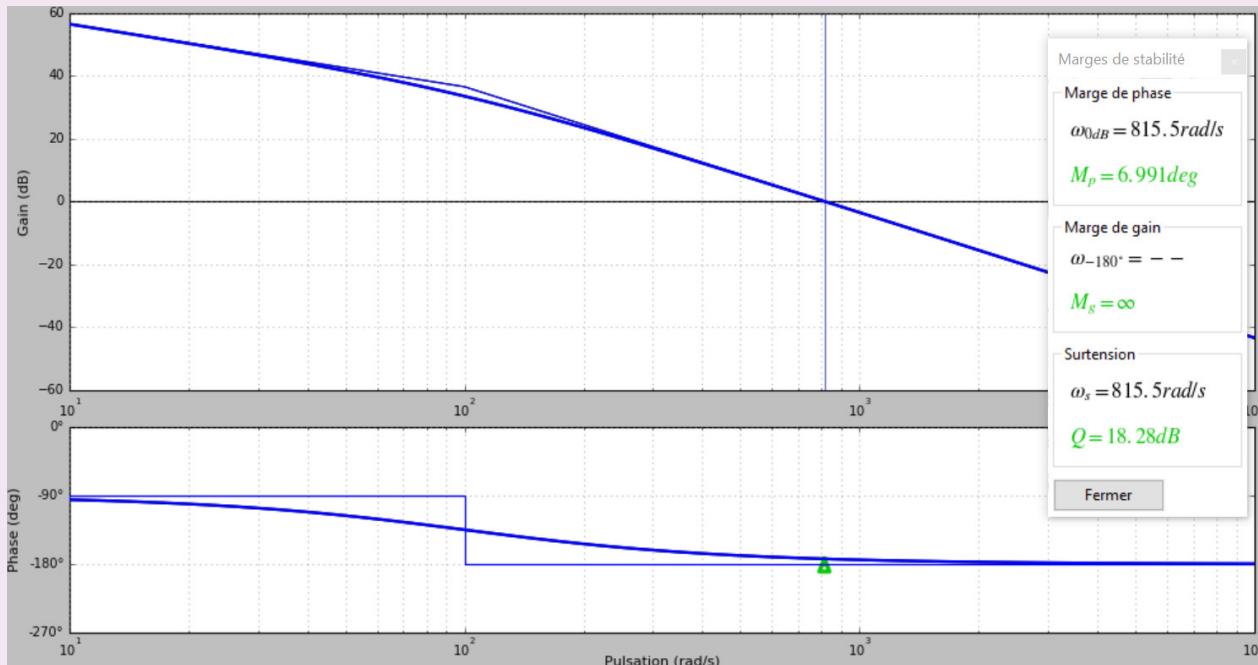
On a  $\varepsilon_x(p) = X_C(p) - X(p) = X_C(p) - \left( (C(p)\varepsilon_x(p) - F(p)D) \frac{A}{p(Bp+1)} \right)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left( 1 + \frac{AC(p)}{p(Bp+1)} \right) = X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left( \frac{p(Bp+1) + AC(p)}{p(Bp+1)} \right) = X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AC(p)} X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1) + AC(p)} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} F(p) \end{aligned}$$

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour  $K_C = 1$  et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

#### Correction

On a  $\text{FTBO}(p) = \frac{A}{p(Bp+1)}$ .



La marge de phase n'est pas respectée.

**Question 5** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

#### Correction

$$\begin{aligned} \text{On a : } \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_x(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} \frac{F_p}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} X_0 + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} F_p \\ &= \frac{D}{K_C} F_p \end{aligned}$$

L'écart en position n'est donc pas nul.

#### Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que  $C(p) = K_i \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon_x$  en fonction des deux entrées  $F_p$  et  $X_c$  et des constantes  $A, B, D$  et  $K_i$ .

**Correction**

$$\varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}F(p)$$

**Question 7** Déterminer l'écart de position  $\varepsilon_x$  en réponse à deux échelons d'intensité  $F_0$  pour la force du patient et  $X_0$  pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

**Correction**

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{F_0}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p T_i p (Bp+1)}{p T_i p (Bp+1) + AK_i (T_i p + 1)} X_0 + \frac{AD T_i p}{T_i p p (Bp+1) + AK_i (T_i p + 1)} F_0 = 0. \end{aligned}$$

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système  $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$  en supposant que  $F_p = 0$ .

**Correction**

$$FTBO(p) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \left(1 + \frac{1}{T_ip}\right) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}.$$

**Question 9** Déterminer la valeur  $T_i$  permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

**Correction**

On souhaite que pour  $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\varphi(\omega) = -135^\circ$ .

$$\begin{aligned} \arg(FTBO(j\omega)) &= \arg\left(\frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}\right) = -180 - \arg((Bp+1)) + \arg(1+T_ip) \\ &= -180 - \arctan B\omega + \arctan T_i\omega \quad \text{En } \omega = 50 \text{ rad s}^{-1} \text{ on a alors } -180 - \arctan 0,5 + \arctan 50T_i = -135 \Leftrightarrow \\ &\arctan 50T_i = -135 + 180 + \arctan 0,5 = 74. \text{ D'où } T_i = 0,05 \text{ s.} \end{aligned}$$

**Question 10** Déterminer  $K_i$  permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

**Correction**

On souhaite que  $|FTBO(j\omega)| = 1$  pour  $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$ .

$$|FTBO(j\omega)| = \left| \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip} \right| = AK_i \frac{1}{\omega \sqrt{B^2\omega^2+1}} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{T_i\omega} = \frac{AK_i}{T_i\omega^2} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{\sqrt{B^2\omega^2+1}}.$$

$$\text{On a donc } K_i = \frac{T_i\omega^2 \sqrt{B^2\omega^2+1}}{A\sqrt{1+T_i^2\omega^2}} = 0,0077 \text{ Vm}^{-1}.$$

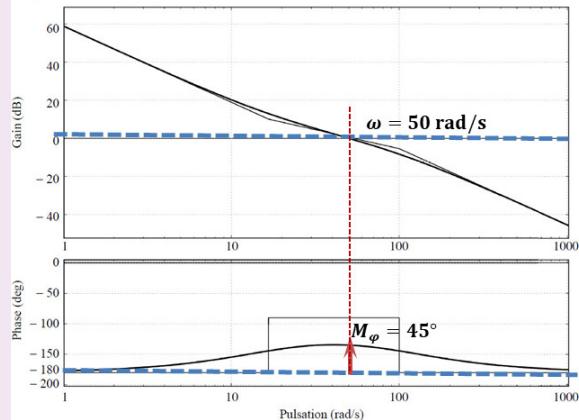
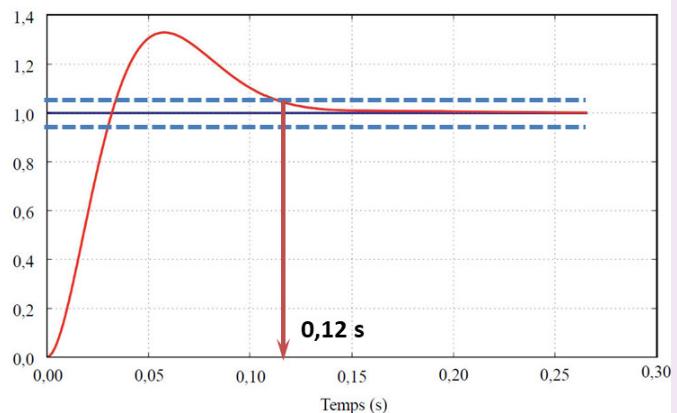
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ( $F_p = 0$ ) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

**Question 11** Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

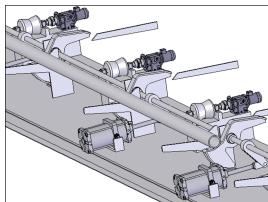
**Correction**

- Ecart de position : nul  $\Rightarrow$  Exigence OK.
- Marge de gain : infine  $\Rightarrow$  Exigence OK.
- Marge de phase :  $\simeq 45^\circ \Rightarrow$  Exigence OK.

Diagramme de Bode de la FTBO :


 Réponse indicielle unitaire sur le déplacement /  $F_p = 0$ . Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.


## TD 5 – Corrigé



## Banc d'épreuve hydraulique

CCP – PSI – 2010

## Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

## Présentation

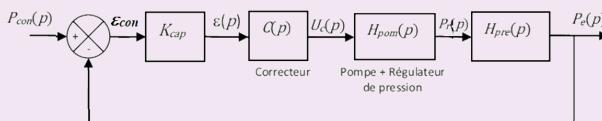
## Mise en place d'un asservissement de pression.

## Correction proportionnelle

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

**Question 1** Transformer le schéma-blocs pour se ramener à un système à retour unitaire.

## Correction



**Question 2** Déterminer, en fonction de  $K_p$ ,  $\epsilon_{con}$  définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne  $P_{con}$  de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

**Correction** Dans ce cas, le système est de classe 0. L'erreur statique est donc de  $\epsilon_{con} = \frac{P_{con}}{1 + K_{cap} K_p K_m K_{pom}}$ .

**Question 3** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\epsilon_{con}$  à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

**Correction** Pour que l'erreur soit inférieure à 5% :  

$$\frac{P_{con}}{1 + K_{cap} K_p K_m K_{pom}} < 0,05 P_{con}$$

$$\Leftrightarrow 1 < 0,05 (1 + K_{cap} K_p K_m K_{pom})$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,95}{0,05 K_{cap} K_m K_{pom}} < K_p. \text{ On a donc } K_p > 19.$$

**Question 4** Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de  $K_p$   $\epsilon_{pert}$  définie comme l'erreur statique pour une perturbation  $\Delta Q_e$  de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

**Correction** Dans ce cas, on a toujours un système dont la BO est de classe 1 et :  $\epsilon_{pert} = \frac{\Delta Q_e K_f}{1 + K_{cap} K_p K_m K_{pom}}$ .

**Question 5** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\epsilon_{pert}$  à la valeur spécifiée au cahier des charges.

**Correction** Pour  $\Delta Q_e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$  on souhaite  $\epsilon_{pert} < 40 \text{ bars}$ . En conséquence,  $\frac{\Delta Q_e K_f}{1 + K_{cap} K_p K_m K_{pom}} < 40 \Leftrightarrow \frac{\Delta Q_e K_f - 40}{40 K_{cap} K_m K_{pom}} < K_p$ . On a donc  $K_p > 2,19$ .

**Question 6** Proposer un réglage de  $K_p$  pour vérifier le critère d'amortissement.

**Correction** Pour avoir aucun dépassement, il est nécessaire que, si la FTBF du système est d'ordre 2, on ait  $\xi \geq 1$ . (Si la FTBF est d'ordre 1, il n'y aura pas de dépassement, si la FTBF est d'ordre supérieur à 2 il n'y a pas de résultat connu.)

On a donc, avec un débit de fuite nul,  $\frac{P_e(p)}{P_{con}(p)} =$

$$\frac{K_{cap} K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p}}{1 + K_{cap} K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p}} = \frac{K_{cap} K_p K_{pom} K_m}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) + K_{cap} K_p K_{pom} K_m} = \frac{K_{cap} K_p K_{pom} K_m}{(T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2 + 1 + K_{cap} K_p K_{pom} K_m}.$$

On a alors :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + K_{cap} K_p K_{pom} K_m}{T_1 T_2}}$  et

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2 (1 + K_{cap} K_p K_{pom} K_m)}}.$$

En conséquence,  $\xi > 1 \Leftrightarrow \frac{(T_1 + T_2)^2 - 4 T_1 T_2}{4 T_1 T_2 K_{cap} K_{pom} K_m} > K_p$  et donc  $K_p < 0,125$ .

**Question 7** À partir des résultats des questions précédentes, conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

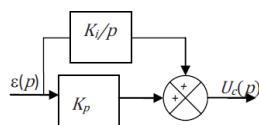
**Correction** On a donc :

- $K_p > 19$ ;
- $K_p > 2,19$ ;
- $K_p < 0,125$ .

Les 3 conditions sont incompatibles. Un autre correcteur doit être envisagé.

### Correction proportionnelle intégrale

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma-blocs ci-dessous :



**Correction** On désire une marge de phase de  $60^\circ$ . Il faut donc que  $\varphi(\omega_{0\text{dB}}) = -120^\circ$ . On a  $FTBO(p) = \frac{K_i}{p} \left(1 + \frac{K_p}{K_i} p\right) K_{\text{cap}} \frac{K_m}{1 + T_1 p} \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p}$ . Et donc :  $\varphi(\omega) = -90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}\omega\right) - \arctan(T_1\omega) - \arctan(T_2\omega)$  en  $\omega_{0\text{dB}}$  on a :  $\varphi(0,075) = -90 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) - 57 = -147 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right)$ . On cherche donc  $\frac{K_p}{K_i}$  tel que  $-147 + \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) = -120 \Rightarrow \arctan\left(\frac{K_p}{K_i}0,075\right) = 27 \Rightarrow \frac{K_p}{K_i}0,075 = 0,51 \Rightarrow \frac{K_p}{K_i} = 6,79$ . Ainsi pour avoir une marge de phase supérieure à  $60^\circ$ , on doit avoir  $T = \frac{K_p}{K_i} > 6,79$ .

**Question 8** Déterminer la fonction de transfert  $C(p)$  de ce correcteur.

**Correction** On a  $C(p) = \frac{K_i}{p} + K_p = \frac{K_i + K_p p}{p} = \frac{K_i}{p} \left(1 + \frac{K_p}{K_i} p\right)$ .

**Question 9** Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients  $K_i$  et  $K_p$ .

**Correction**

**Question 10** Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité? Justifier.

**Correction** L'intégrateur va permettre d'annuler l'erreur (du à la consigne et à la perturbation). De plus, suivant le positionnement du correcteur, le déphasage de  $-90^\circ$  présent en basse fréquence peut déstabiliser le système.

**Question 11** Quelle valeur faut-il donner à  $\omega_{0\text{dB}}$  pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges?

**Correction** On souhaite que  $t_e < 40\text{s} \Leftrightarrow \frac{3}{\omega_{0\text{dB}}} < 40 \Leftrightarrow \frac{3}{40} < \omega_{0\text{dB}}$  et donc  $\omega_{0\text{dB}} > 0,075\text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 12** Déterminer alors le rapport  $T = K_p/K_i$  pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

**Question 13** En déduire les valeurs de  $K_p$  et de  $K_i$  qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

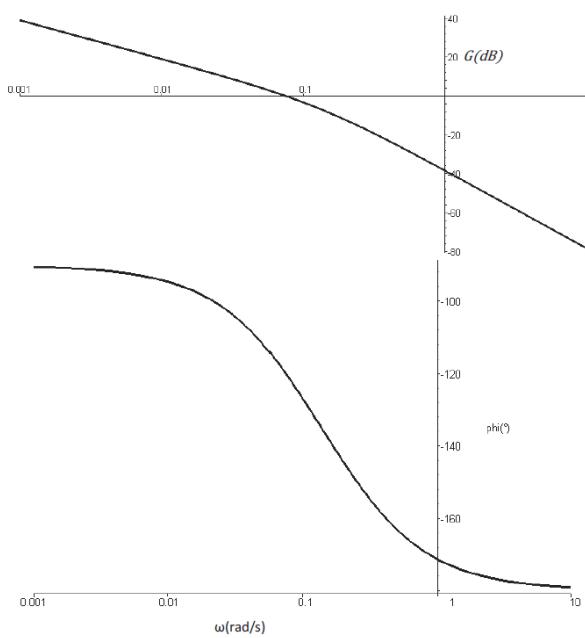
**Correction** On souhaite que le gain soit nul lorsque  $\omega_{0\text{dB}} = 0,075\text{ rad s}^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{On a } G_{\text{dB}}(\omega) &= 20 \log \left( \sqrt{1 + \frac{K_p^2}{K_i^2} \omega^2} \right) + \\ &20 \log K_i + 20 \log(K_{\text{cap}} K_{\text{pom}} K_m) - 20 \log \omega + \\ &20 \log \left( \sqrt{1 + \frac{K_p^2}{K_i^2} \omega^2} \right) - 20 \log(\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}) - \\ &20 \log(\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}). \end{aligned}$$

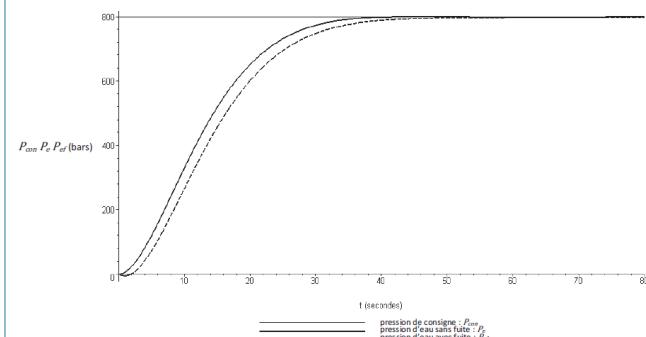
$$G_{\text{dB}}(\omega_{0\text{dB}}) = 0 \Rightarrow K_i = 0,089 \text{ et } K_p = 0,615.$$

### Bilan

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment.



On donne ensuite sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.



**Question 14** La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges? Justifier.

**Correction**

## TD 1 – Corrigé



## Avance de Phase – Train d'atterrissement d'hélicoptère \*\*

Banque PT – SIA 2014

## Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur à avance de phase
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

## Mise en situation

**Objectif** Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ m s}^{-1}$  l'accélération de la queue doit rester inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .

## Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

**Objectif** Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

**Question 1** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{eq}(p)}$ .

## Correction

$$H_F(p) = \frac{H_Z(p) \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a H_Z(p) \frac{1}{p}} = \frac{\frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{\frac{K_Z p^2}{p \left( 1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2} \right) + \lambda_a K_Z p^2}}{\frac{K_Z p}{1 + \left( \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}}.$$

**Question 2** Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée  $H_{BONC}(p)$ .

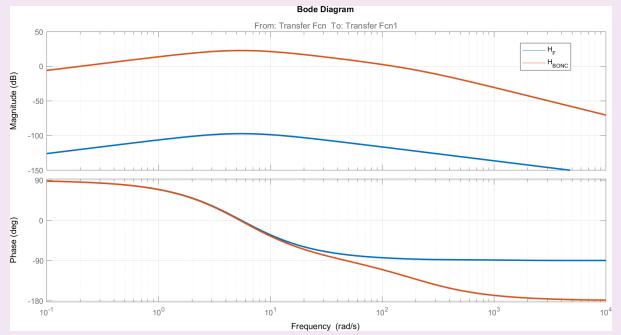
**Correction**  $H_{BONC}(p) = \frac{K_Z p}{1 + \left( \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \cdot \frac{K_S}{1 + T_S p}.$

**Question 3** Justifier la forme de ce diagramme en traçant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de  $K_z$  et  $\omega_z$ . Tracer en rouge les dia-

grammes de la fonction  $H_{BONC}(p)$ . On prendra pour cela  $20 \log K_S \simeq 100 \text{ dB}$ .

**Correction**  $H_F$  est un second ordre dérivé de coefficient d'amortissement  $\xi_F$  et de pulsation propre  $\omega_Z$ . Ne pouvant pas calculer  $\xi_F$ , l'allure du diagramme de Bode suggère que  $\xi_F < 1$  car il y a une seule rupture de pente à  $\omega_Z = 5,5 \text{ rad s}^{-1}$ .

Pour  $\omega < \omega_Z <$  l'asymptote du second ordre à un gain de 0 dB. Seul le déivateur est influent. En conséquence, pour  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ , on a donc  $|K_Z p|_{\text{dB}} = 20 \log K_Z = -106$ . On a donc  $K_Z = 5 \times 10^{-6}$ .



## Choix et réglage de la correction

**Objectif** Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

**Question 4** Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

**Correction** Pour que l'erreur statique soit nulle, il faut que la classe de la FTBO soit de 1. La classe de la FTBO non corrigée étant de «-1», il faut donc que le correcteur soit de classe 2 pour que le critère de précision soit garanti.

**Question 5** Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de  $K_p$  garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

**Correction** La marge de gain est de 18 dB et la marge de phase est de 95°.

Pour avoir une pulsation de coupure à 0 dB de  $6 \text{ rad s}^{-1}$ , il faut relever le gain de 20 dB soit  $K_p = 10$ . Dans ces conditions, la marge de phase est de  $-15^\circ$  et la marge de gain est  $-2 \text{ dB}$ .

En conséquences, le système est précis (écart nul) et la pulsation de coupure du cahier des charges est respectée. Les marges ne sont plus satisfaites.

**Question 6** Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

**Correction** L'action de correction obtenue est de l'avance de phase.

**Question 7** Quelle valeur doit-on donner à  $\mu$  pour garantir le critère de marge de phase ?

**Correction Cas 1 : on conserve**  $K_p = 10$ . Le correcteur doit ajouter  $60^\circ$  de phase pour  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ . Il faut donc  $\mu = 14$ .

**Cas 2 : on reprend**  $K_p = 1$ . Dans ce cas, on souhaite que lorsque  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\varphi$  soit égal à  $45^\circ$ . Il faut donc ajouter  $65^\circ$  de phase à cette pulsation. Dans ces conditions,  $\mu = 20$ .

Le critère de précision reste validé car il y a toujours les deux intégrateurs dans le correcteur.

**Question 8** En déduire les valeurs de  $T$  et de  $K_p$  permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

**Correction Dans le cas 1 :**  $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{14}} = 0,045 \text{ s}$ . Le gain  $K_p$  déjà déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Il faut donc que le gain du correcteur à avance de phase soit nul à la pulsation de coupure à  $\omega_{0 \text{ dB}}$ .

Il faut donc que  $\frac{1}{2}(20\log(\mu K'_p) + 20\log K'_p) = 0 \Rightarrow \log(\mu K'^2_p) = 0 \Rightarrow \mu K'^2_p = 1 \Rightarrow K'_p = \sqrt{1/\mu} = 0,267$ .

**Dans le cas 2 :**  $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{20}} = 0,037 \text{ s}$ .

Actuellement, le gain est de  $-20 \text{ dB}$  pour  $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$ . Il faut donc augmenter le gain de  $20 \text{ dB}$  pour la pulsation  $\frac{1}{T\sqrt{\mu}}$ . Ceci revient donc à résoudre  $20\log K_p + \frac{1}{2}(20\log \mu K_p - 20\log K_p) = 20 \Rightarrow \log K_p + \log \sqrt{\mu} = 1 \Rightarrow K_p \sqrt{\mu} = 10 \Rightarrow K_p = 10/\sqrt{20} = 2,6$ .

**Remarque :** dans le cas 1 le gain du correcteur est  $K_p \times K'_p = 2,6$ . Dans le cas 2  $K_p = 2,6$ .

### Validation des performances

**Objectif** Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

**Question 9** En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.

**Correction** Pour une vitesse d'impact de  $4 \text{ ms}^{-1}$  l'accélération reste bien inférieure à  $3 \text{ rad s}^{-2}$ .