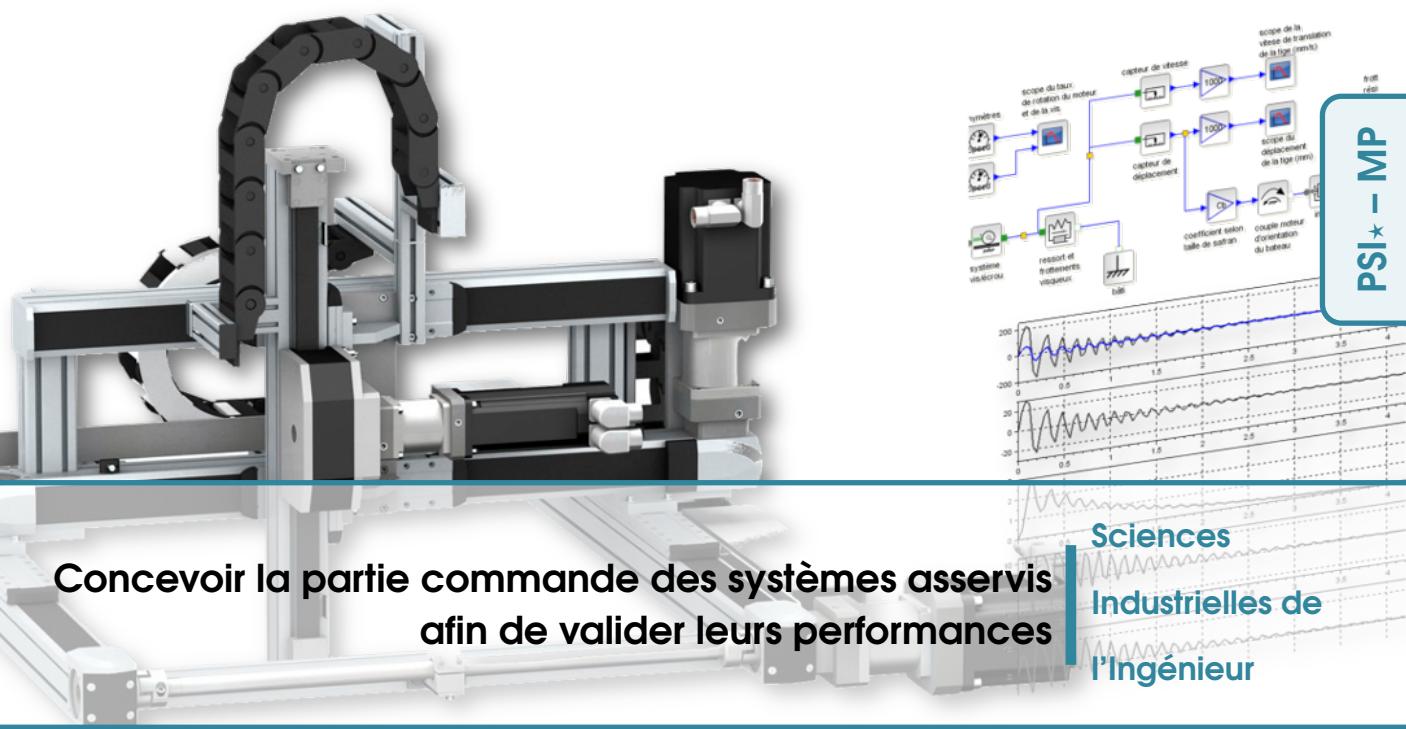


Concevoir la partie commande des systèmes asservis afin de valider leurs performances

Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur



Cours

Chapitre 1 Correction des SLCI

Savoirs et compétences :

- Res1.C4 : correction;
- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase,
- Con.C2 : correction d'un système asservi;
- Con.C2.SF1 : choisir un type de correcteur adapté.

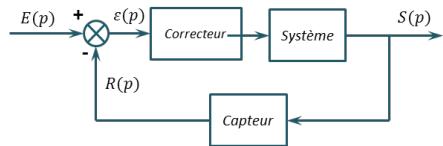
1	Pourquoi corriger un système ?	2
2	Le correcteur proportionnel	3
3	Les correcteurs à action intégrale	4
3.1	Le correcteur intégral pur	4
3.2	Le correcteur proportionnel intégral	4
4	Le correcteur à avance de phase	5
5	Bilan sur l'influence des correcteurs	6

1

72

1 Pourquoi corriger un système ?

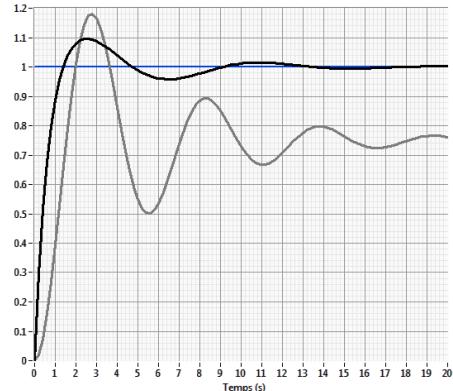
Souvent évoqué en lors de l'étude des systèmes asservis, regardons ce qui se cache derrière le bloc correcteur. On peut le considérer comme la partie intelligente du système car de sa part position dans l'architecture d'un système il reçoit l'image de l'écart entre la cosigne et la sortie du système. En fonction de cet écart, en fonction de ses « capacités » va permettre d'améliorer les performances du système.



Sur la figure ci-contre est tracée en gris la réponse indicielle d'un système non corrigé et en noir la réponse indicielle du système corrigé. On observe que le système corrigé est :

- plus précis;
- plus amorti;
- plus rapide.

L'objectif du correcteur est donc d'améliorer les caractéristiques tout en assurant la stabilité du système.



Résultat

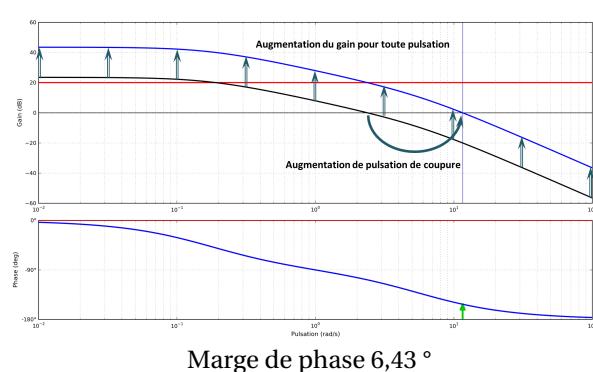
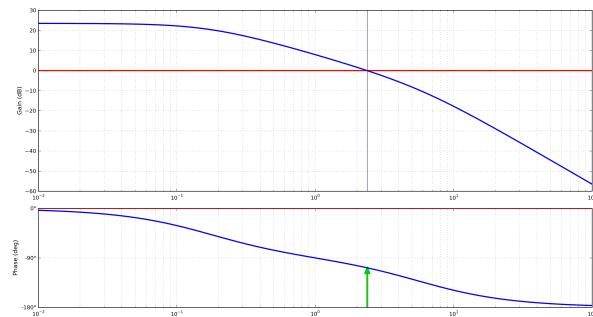
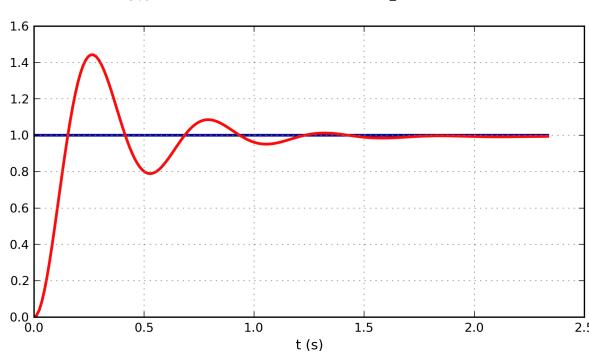
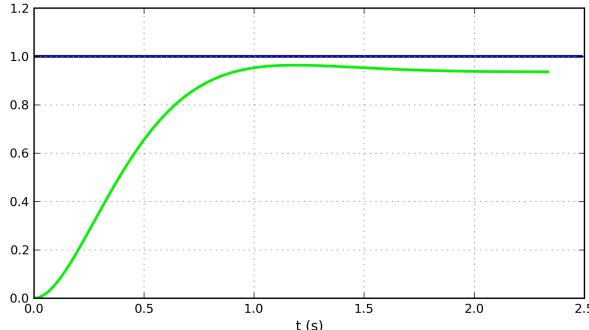
- D'après les résultats sur la stabilité des systèmes asservis :
 - le correcteur doit permettre d'avoir des marges de gains suffisantes.
- D'après les résultats sur la rapidité des systèmes asservis :
 - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain dans le but d'avoir une pulsation de coupure à 0 dB la plus grande possible (pour la FTBO).
- D'après les résultats sur la précision des systèmes asservis :
 - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain statique de la boucle ouverte pour assurer une bonne précision du système (et d'éventuellement augmenter la classe).

Au vu de ces conclusions, le choix d'un correcteur se fera dans le domaine fréquentiel en utilisant le diagramme de Bode.

2 Le correcteur proportionnel

Définition Le correcteur proportionnel a pour fonction de transfert $C(p) = K$.

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ($K = 15$, $\xi = 3$, $\omega = 1$).



Résultat

On observe qu'une augmentation du gain proportionnel a pour effet :

- d'améliorer la précision;
- d'augmenter la vivacité;
- d'augmenter le temps de réponse (à partir d'un certain seuil);
- de diminuer l'amortissement;
- de diminuer la marge de phase.

Pour un système d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain provoque une marge de phase négative et donc une instabilité du système.

Méthode

Réglage de la marge de phase :

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche ω_{0dB} tel que $\varphi(\omega_{0dB})$ respecte la marge de phase souhaitée.
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule $G_{dB}(\omega_{0dB})$.
- On cherche K_p tel que $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$

Réglage de la marge de gain :

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche ω_{-180° tel que $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$.
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule $G_{dB}(\omega_{-180^\circ})$.
- On cherche K_p tel qu'on ait la marge de gain souhaitée.

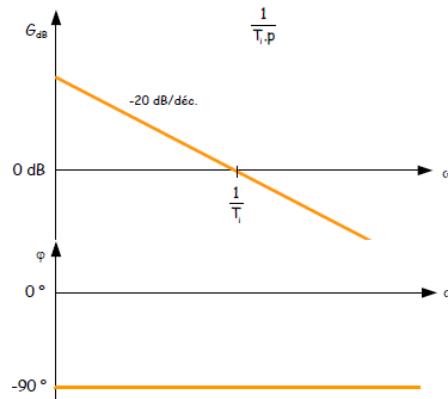
3 Les correcteurs à action intégrale

3.1 Le correcteur intégral pur

Définition

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$.

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante : $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$.



Résultat

Avantages

Ce correcteur améliore la précision lors de la sollicitation par un échelon car il ajoute une intégration dans la boucle ouverte.

Inconvénients

Le déphasage de -90° sur tout le spectre de pulsation entraîne une réduction de la marge de phase ce qui peut déstabiliser le système.

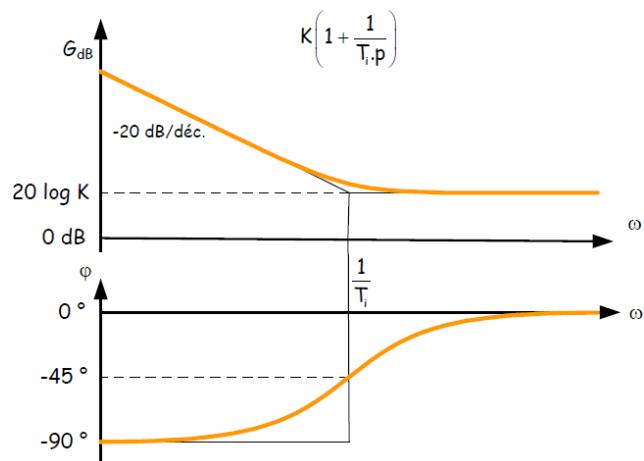
3.2 Le correcteur proportionnel intégral

Définition

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$.

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante : $u(t) = K \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$.

En développant on obtient $C(p) = K \frac{T_i p + 1}{T_i p}$. Ce correcteur augmente donc la classe de la boucle ouverte et donc la précision. Si $K > 1$ la pulsation de coupure est augmentée, entraînant ainsi une augmentation de la rapidité du système. Enfin, ce correcteur diminue la phase à basse fréquence. Il faut donc faire en sorte que cette chute de phase n'intervienne pas dans la zone de la pulsation de coupure du système.



Résultat

Le correcteur proportionnel intégral :

augmente l'amortissement, augmente la rapidité, augmente la précision.

Méthode

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche ω_{0dB} tel que $\varphi(\omega_{0dB})$ respecte la marge de phase souhaitée.
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule $G_{dB}(\omega_{0dB})$.
- On cherche K tel que $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$
- La mise en place de l'effet intégral ne doit pas modifier la position de la pulsation de coupure réglée précédemment. Pour cela, il faut donc que $\frac{1}{T_i} \ll \omega_{0dB}$. Usuellement on positionne l'action intégrale une décade avant la pulsation réglée. On a donc $T_i = \frac{10}{\omega_{0dB}}$.

4 Le correcteur à avance de phase

Définition

Un correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$ avec $a > 1$.

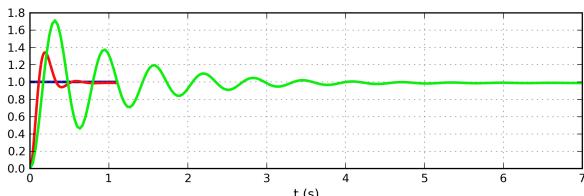
Résultat Ce correcteur permet d'ajouter de la phase pour les pulsations comprises entre $\frac{1}{a\tau}$ et $\frac{1}{\tau}$. On montre que $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$ et ce pour une pulsation $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$.

R On peut prendre $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$ pour ne pas modifier la valeur du gain à la pulsation où on désire ajouter de la phase.

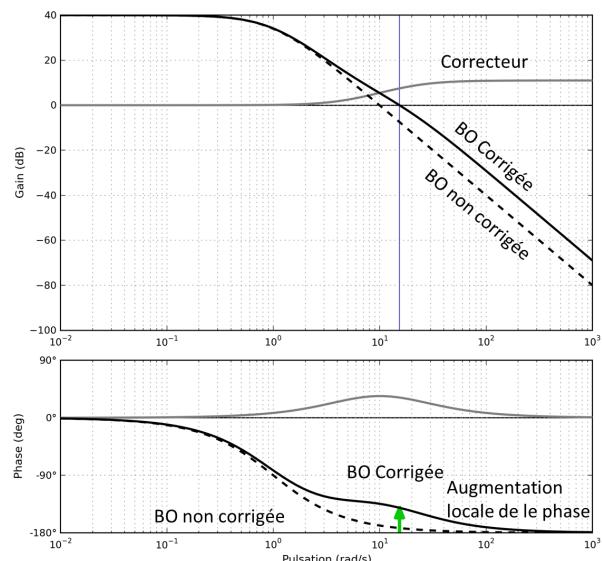
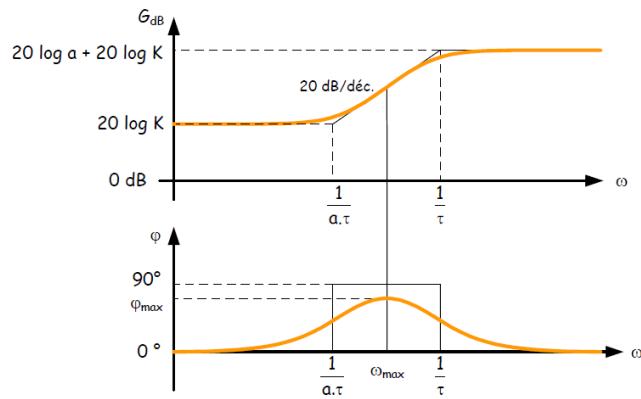
Démonstration Pour déterminer ω_{\max} on pourrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase est maximum en résolvant $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$. On peut aussi remarquer « graphiquement » que ω_{\max} est situé au milieu des deux pulsations de coupures : $\frac{1}{2} \left(\log\left(\frac{1}{\tau}\right) + \log\left(\frac{1}{a\tau}\right) \right) = \log\left(\frac{1}{a\tau^2}\right)^{1/2} = \log\left(\frac{1}{\tau\sqrt{a}}\right)$ et $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$.

D'autre part, il faudrait calculer $\varphi(\omega_{\max})$...

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ($G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$, $a = 3,54$, $T = 0,053$ s).



Ici le correcteur permet une augmentation de la rapidité et un meilleur amortissement.



Méthode • En utilisant la BO non corrigée on cherche ω_{0dB} tel que le gain est nul.

- On calcule $\varphi(\omega_{0dB})$.
- On détermine la phase à ajouter.
- On calcule a .
- On calcule τ .
- On calcule K .

5 Bilan sur l'influence des correcteurs

Correcteur	Situation sans correction	
	\parallel	
	Si K_p augmente	
Proportionnel K_p	Marges	←
	Précision	→
	Rapidité	→
Proportionnel intégral $K_p + \frac{K_i}{p}$	Marges	←
	Précision	→ (Cf: classe)
	Rapidité	←
À avance de phase $K_p \frac{1+a\tau p}{1+\tau p} \quad a > 1$	Marges	→
	Précision	↔
	Rapidité	→

Références

- [1] Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.*
- [2] Florestan Mathurin, *Correction des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.*
- [3] Damien Iceta, David Violeau, Alain Caignot, Xavier Pessoles, Vincent Boyer, François Golanski, *Sciences industrielles de l'ingénieur MP/MP* PSI/PSI* PT/PT*, Méthodes. Exercices. Problèmes. Sujets de concours. Vuibert Prépas.*

Activation 1

Réglage de correcteurs P et PI

Ressources de P. Dupas.

Savoirs et compétences :

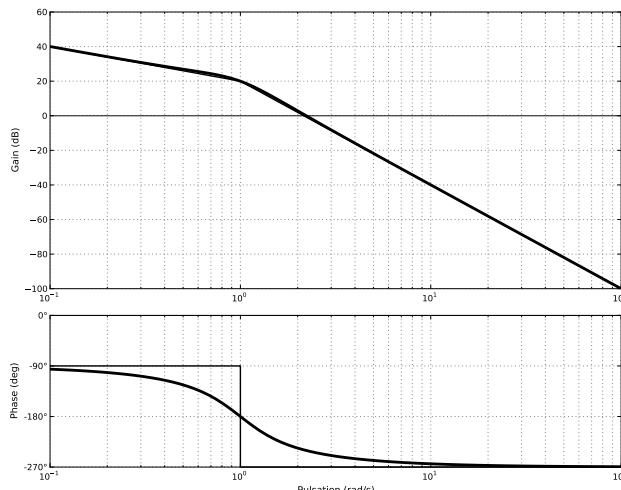
- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.

Correcteur proportionnel

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$ placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de 45° et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



Question 1 Mesurer puis calculer la marge de phase.

Question 2 Mesurer puis calculer la marge de gain.

Question 3 Déterminer K_p pour avoir une marge de phase de 45° . Vérifier la marge de gain.

Question 4 Déterminer K_p pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

1. $M_\varphi = -60^\circ$.
2. $M_G = -20$ dB.
3. $K_p = 0,054$ et $M_G = 5,35$ dB.
4. $K_p = 0,0316$ et $M_\varphi = 70^\circ$.

Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$ placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de 45° en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme $C(p) = K_p \frac{1+\tau p}{\tau p}$.

Question 1 Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.

Question 2 Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de 45° .

Question 3 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

- 1.
2. $C(p) = 15,7 \frac{1+1,018p}{1,018p}$.
- 3.

Activité 1 – Corrigé

Réglage de correcteurs P et PI

Ressources de P. Dupas.

Savoirs et compétences :

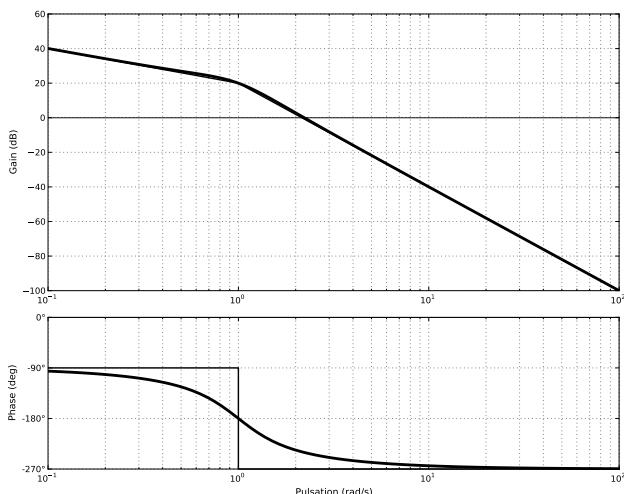
- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.

Correcteur proportionnel

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$ placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de 45° et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



Question 1 Mesurer puis calculer la marge de phase.

Correction

- On cherche ω tel que $G_{\text{dB}}(\omega) = 0 \text{ dB}$: $G_{\text{dB}}(\omega) = -20 \log(10) - 20 \log \omega - 20 \log(\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2})$
On trouve $\omega = 2,21 \text{ rad/s}$ et $M_\varphi = -60^\circ$. Le système est instable.

Question 2 Mesurer puis calculer la marge de gain.

Correction Pour $\varphi = -180^\circ$, on a $\omega = 1 \text{ rad/s}$ et $M_G = -20 \text{ dB}$. Le système est instable.

Question 3 Déterminer K_p pour avoir une marge de phase de 45° . Vérifier la marge de gain.

Correction Pour $\varphi = -135^\circ$ on a $\omega = 0,62 \text{ rad/s}$. On trouve un gain proportionnel de 0,054.

La marge de gain est alors de 5,35 dB ce qui est inférieur aux 10 dB demandés.

Question 4 Déterminer K_p pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

Correction Pour $\varphi = -180^\circ$ on a $\omega = 1 \text{ rad/s}$. On trouve un gain proportionnel de 0,316.

La marge de phase est alors de 70° ($\omega = 0,0333 \text{ rad/s}$).

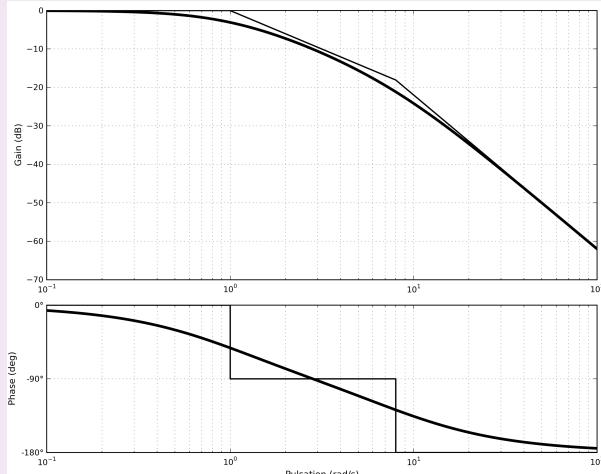
Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$ placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de 45° en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme $C(p) = K_p \frac{1+\tau p}{\tau p}$.

Question 1 Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.

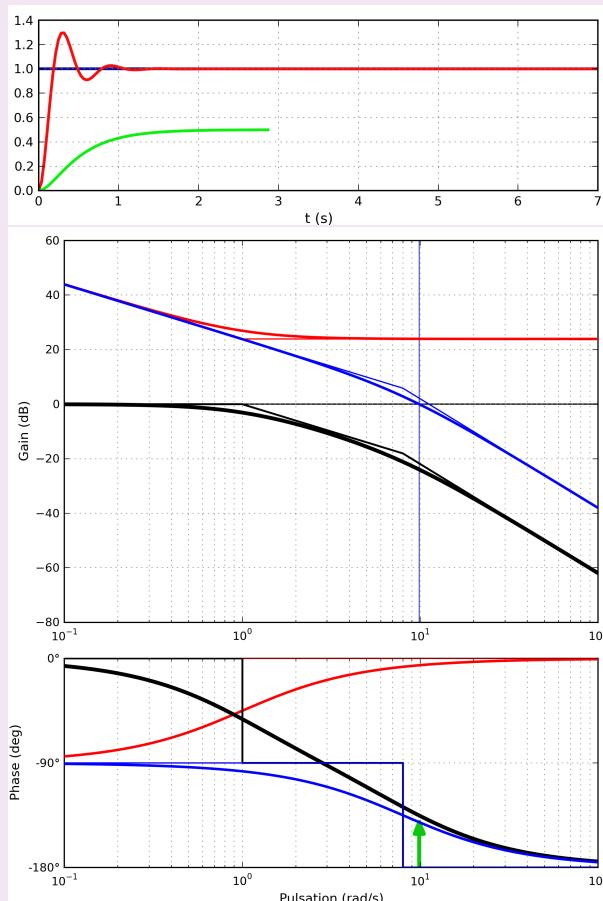
Correction


Question 2 Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de 45° .

Correction

- On résout $\varphi(\omega) = -135^\circ$: $\varphi(\omega) = -\arctan \omega - \arctan \omega/8 \Rightarrow \tan 135^\circ = \frac{\omega + \omega/8}{1 - \omega^2/8} \Leftrightarrow -1 + \omega^2/8 - 9\omega/8 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 9\omega - 8 = 0$. $\Delta = 81 + 32 = 10,63^2$.
 $\omega = \frac{9 \pm 10,63}{2} = 9,82 \text{ rad/s.}$
- Calculons $G_{\text{dB}}(9,82) = -23,9 \text{ dB}$. Il faut donc augmenter le gain de $23,9 \text{ dB}$ soit $K_p = 10^{23,9/20} = 15,7$.
- On choisit τ pour ne pas modifier la marge de phase. Il faut donc que le déphasage de 0° du correcteur ait lieu avant $9,82 \text{ rad/s}$. De manière usuelle on prend $\frac{1}{\tau} = \frac{9,82}{10} = 0,982 \text{ rad/s.}$
- Au final, on a $C(p) = 15,7 \frac{1 + 1,018p}{1,018p}$.

Question 3 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

Correction


Activitation 2

Réglage de correcteurs P et AP

Ressources de P. Dupas.

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.

Correcteur proportionnel

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$ placé dans une boucle à retour unitaire.

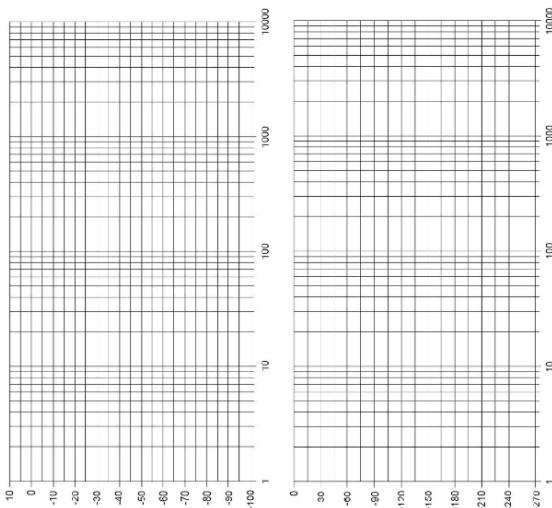
Question 4 Calculer la précision du système ε_S pour une entrée échelon unitaire.

Question 5 Tracer dans le diagramme de Bode la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

Question 6 Déterminer K pour avoir une marge de phase de 45° . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

Question 7 Déterminer K pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

1. $\varepsilon_S = \frac{1}{2}$.
2. .
3. $\omega_{-135^\circ} = 2,95 \text{ rad/s}$.
4. $\omega_0 \text{dB} = 7,17 \text{ rad/s}$ et $M_G = 38 \text{ dB}$ soit $K_P = 79$.



Correcteur à avance de phase

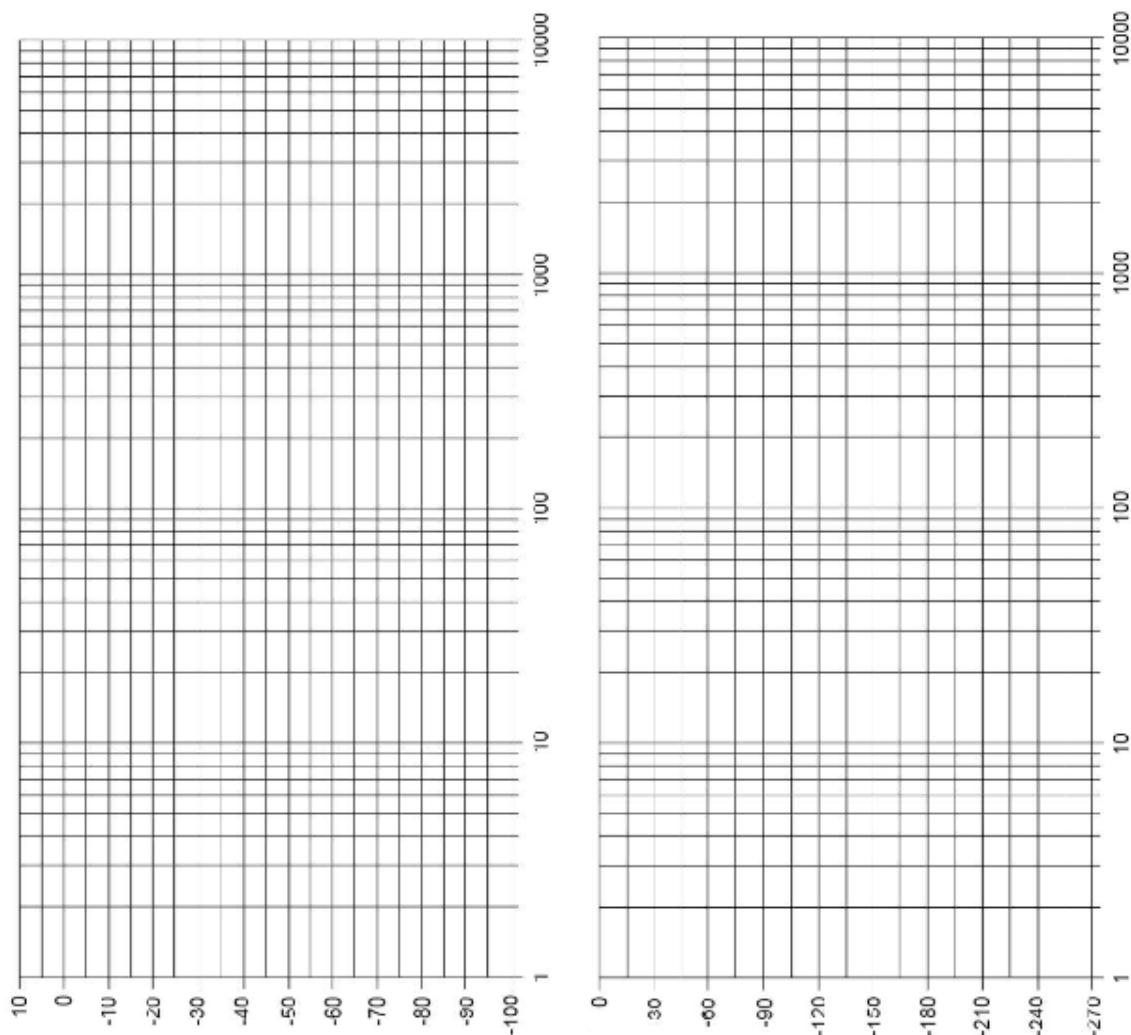
Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$ placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de phase de la forme $C(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$.

Question 1 Tracer le diagramme de Bode de $G(p)$.

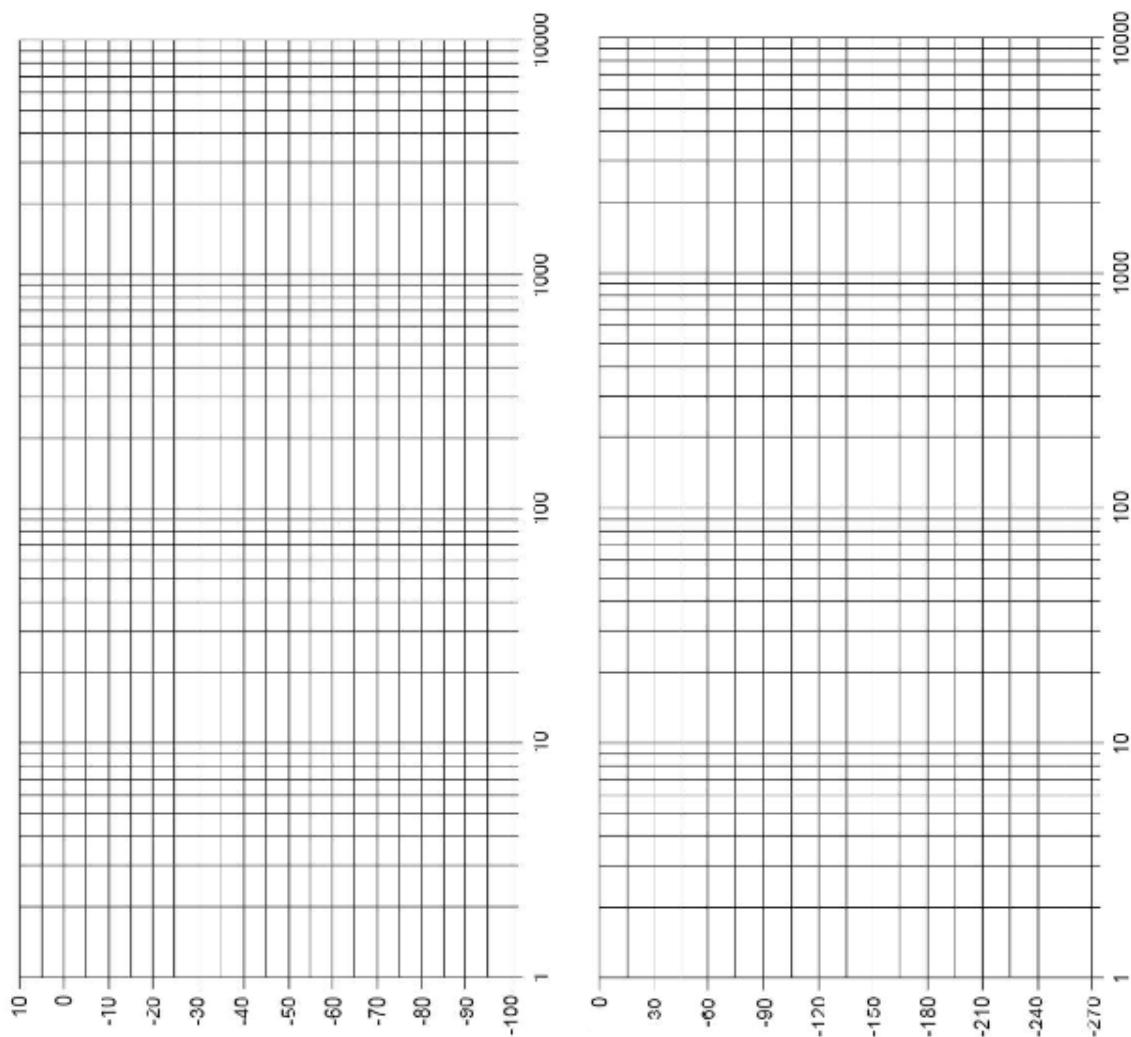
Question 2 Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à 45° .

Question 3 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

- 1.
2. $C(p) = 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}$.
- 3.



Cycle 03



Activité 2 – Corrigé

Réglage de correcteurs P et AP

Ressources de P. Dupas.

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.

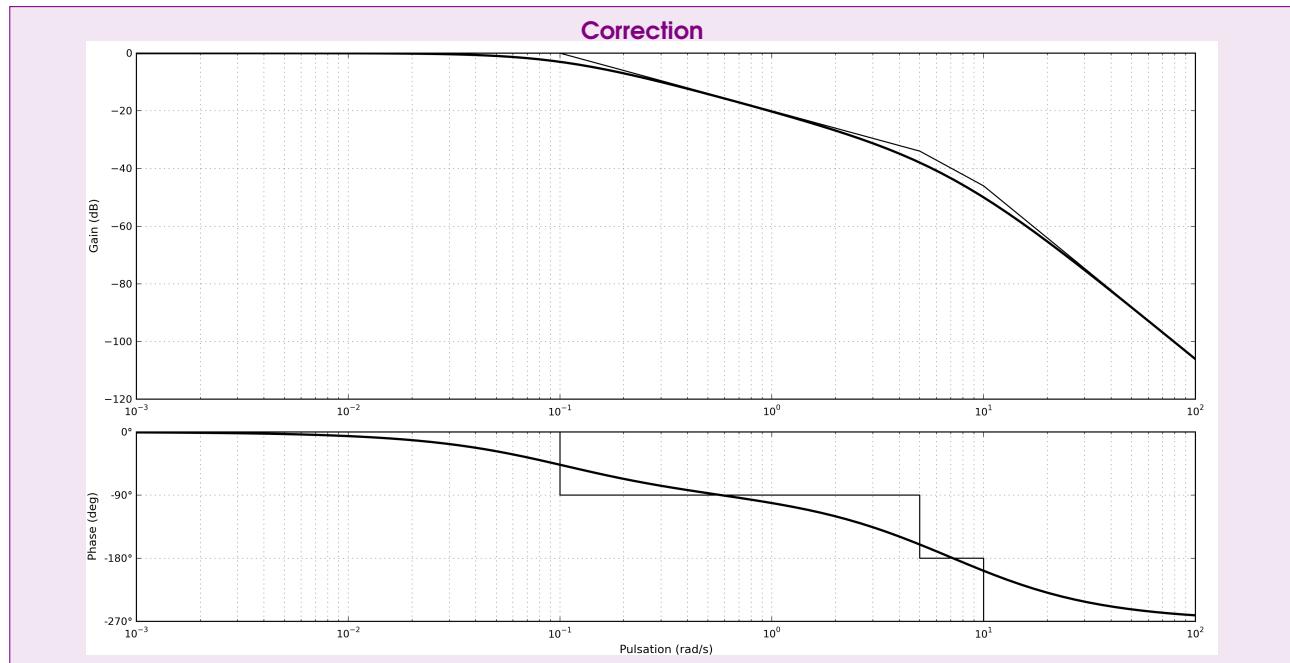
Correcteur proportionnel

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$ placé dans une boucle à retour unitaire.

Question 4 Calculer la précision du système ε_S pour une entrée échelon unitaire.

Correction Le système est de classe 0. L'entrée est de type échelon. $K_{BO} = 1$. L'écart statique est de $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Question 5 Tracer dans le diagramme de Bode la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

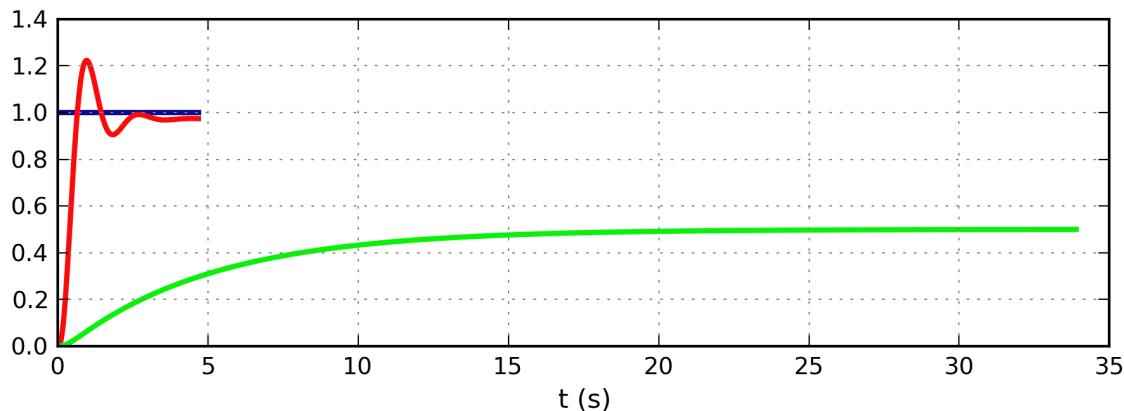


Question 6 Déterminer K pour avoir une marge de phase de 45° . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

Correction

- On résout $\varphi(\omega) = -135^\circ$: $\varphi(\omega) = -\arctan 10\omega - \arctan 0,1\omega - \arctan 0,2\omega$.
 $\varphi(\omega) = -135^\circ \Leftrightarrow \omega = 2,95 \text{ rad s}^{-1}$ (solveur Excel).
- Calculons $G_{dB}(\omega) = -20 \log(\sqrt{1+10^2\omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1+0,1^2\omega^2}) - 20 \log(\sqrt{1+0,2^2\omega^2}) = -31 \text{ dB}$. Il faut donc augmenter le gain de 31 dB soit $K_p = 10^{31/20} = 35,48$.

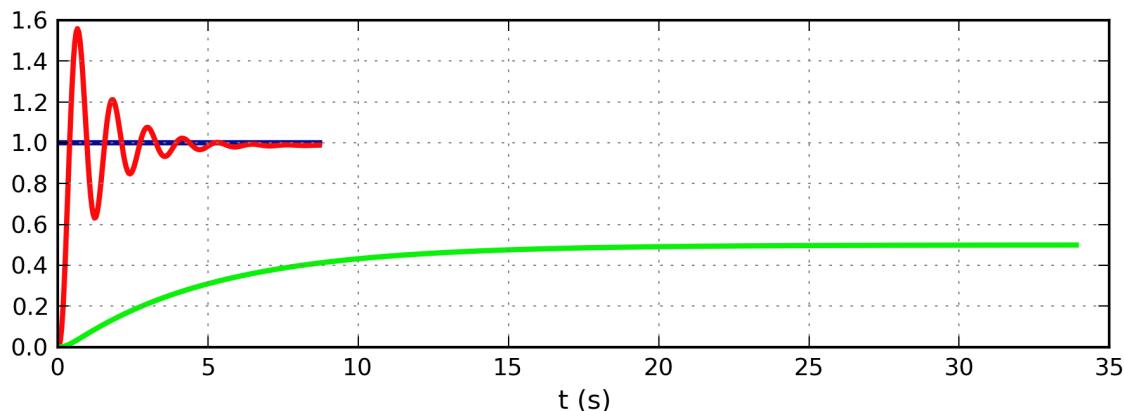
- On a alors un écart statique de $\frac{1}{1+35,48} = 0,027$.
- Pour déterminer la marge de gain, il faut résoudre $\varphi(\omega) = -180^\circ$. On obtient $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$ et $M_G = 12 \text{ dB}$.



Question 7 Déterminer K pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

Correction

- On commence par résoudre $\varphi(\omega) = -180^\circ$. On obtient $\omega = 7,17 \text{ rad/s}$ et $M_G = 44 \text{ dB}$.
- Il faut augmenter le gain de 38 dB soit $20\log K_P = 38 \Rightarrow K_P = 10^{38/20} = 79$.
- On a alors un écart statique de $\frac{1}{1+79} = 0,0125$.
- La marge de phase est alors de 19° .



Correcteur à avance de phase

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$ placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite

corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de phase de la forme $C(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$.

Question 1 Tracer le diagramme de Bode de $G(p)$.

Question 2 Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à 45° .

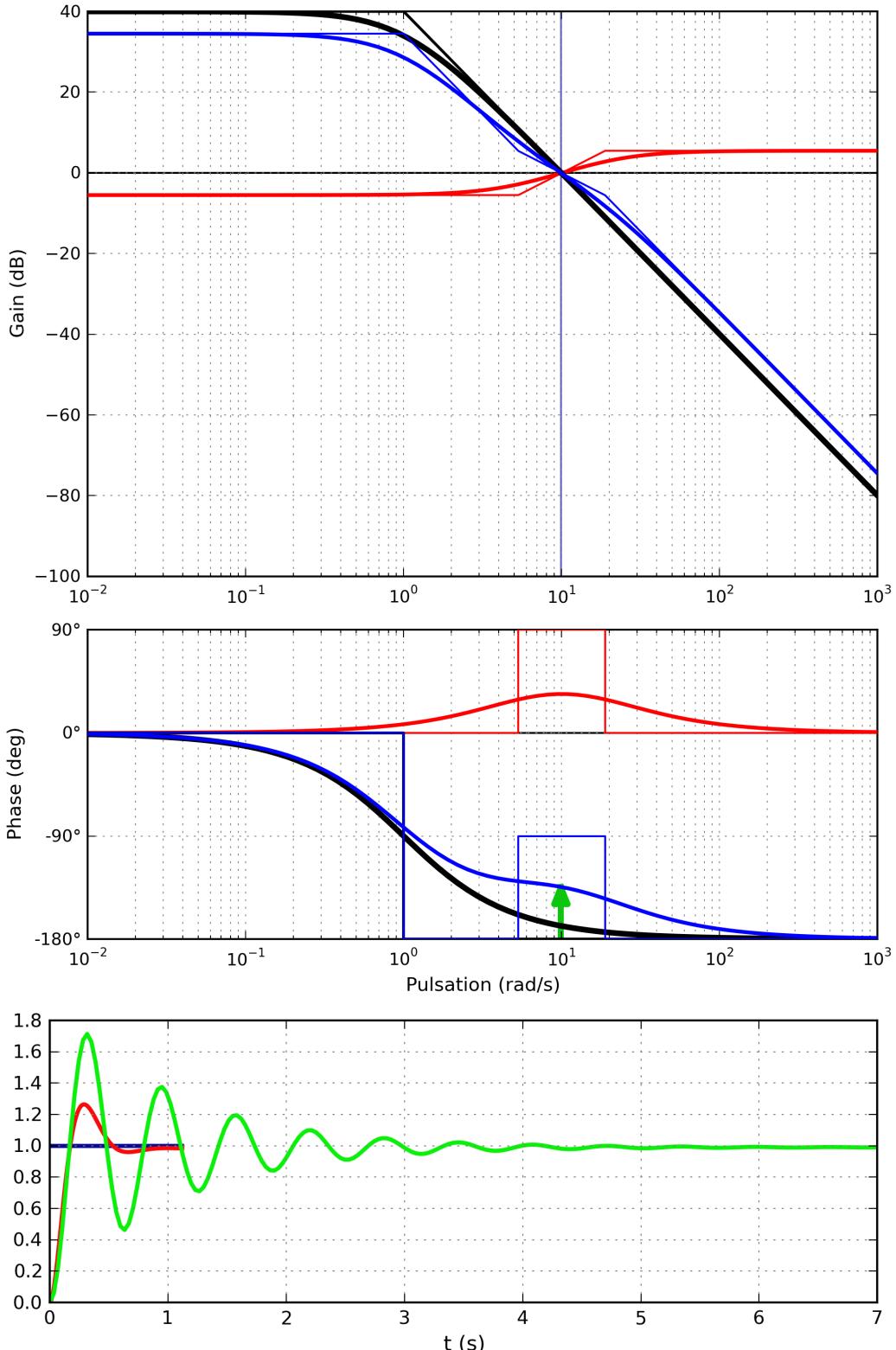
Correction

- $G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log(100) - 20\log(1 + \omega^2)$. $G_{\text{dB}}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \frac{100}{1 + \omega^2} = 1 \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt{99} \Rightarrow \omega = 9,95 \text{ rad/s}$.
- $\varphi(\omega) = -2 \arctan \omega$ et $\varphi(9,95) = -2,94 \text{ rad} = -169^\circ$ soit une marge de phase de 11° ; le correcteur doit donc apporter un complément de phase de 34° .
- $\varphi_{\text{max}} = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \Rightarrow \sin(\varphi_{\text{max}}) = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = -\frac{\sin(\varphi_{\text{max}})+1}{\sin(\varphi_{\text{max}})-1} = 3,54$.

$$\bullet \tau = \frac{1}{9,95\sqrt{3,54}} = 0,053 \text{ s.}$$

Question 3 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

- 1.
2. $C(p) = 0,53 \frac{1+3,54 \cdot p}{1+0,053 \cdot p}$
- 3.



TD 1

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

Le robot MC²E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

L'axe en translation du MC²E est asservi en effort constant pour tirer (ou pousser) la vésicule au fur et à mesure que le chirurgien utilise son bistouri pour détacher la vésicule du foie. Le diagramme des exigences au dos décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC²E.

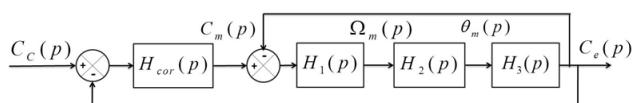
Objectif Modéliser et valider l'asservissement en effort.

Modèle de connaissance de l'asservissement

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$ avec :

- J , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera $\theta_m(p)$, $\Omega_m(p)$, $C_m(p)$ et $C_e(p)$ les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$ où $K_{C\theta}$ est une constante positive. On a de plus $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$. La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$, couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC²E;

- $C_c(p)$, couple de consigne;

- $C_m(p)$, couple moteur;

- $H_{cor}(p)$, fonction de transfert du correcteur.

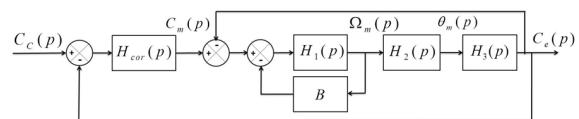
Dans un premier temps, on prendra $H_{cor}(p) = 1$.

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B . On s'intéresse ici à la définition analytique de B . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.



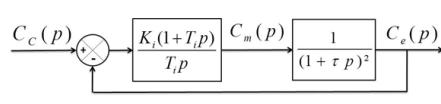
Régulation avec retour tachymétrique

On règle B de telle façon que, pour $H_{cor}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{BO}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$.

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B , en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus loin (exigences 1.2.2.1 à 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.



Régulation avec correcteur PI.

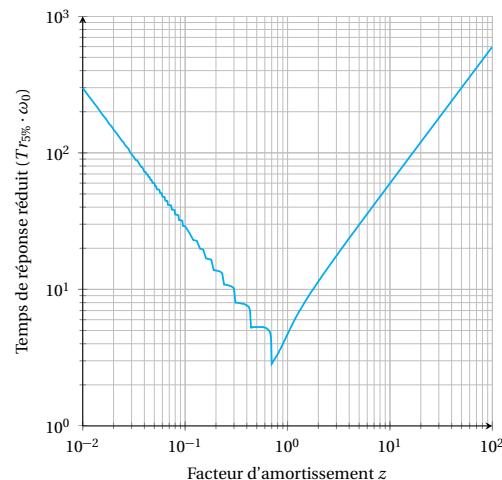
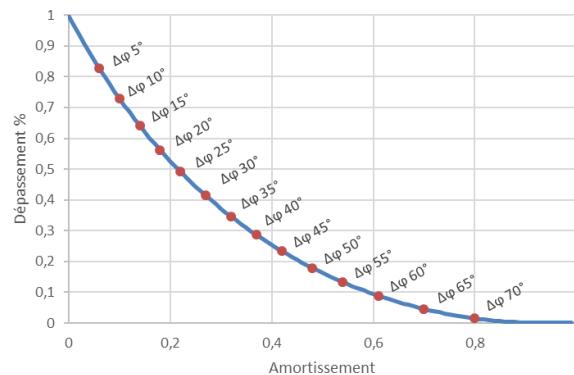
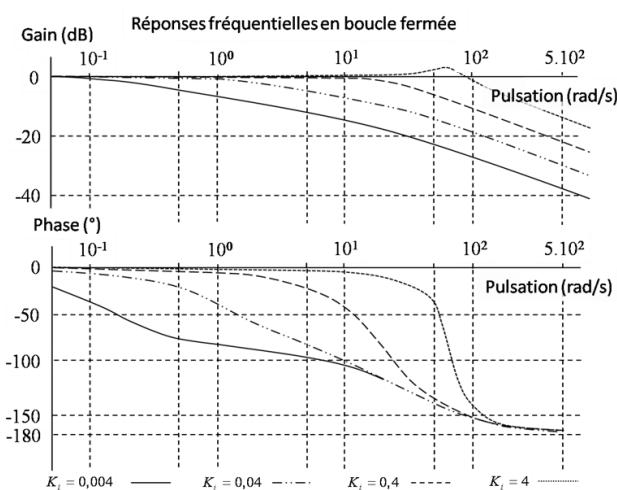
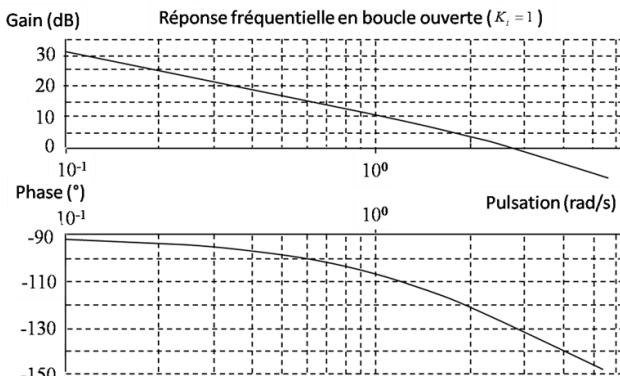
Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0 . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : $\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$.

Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i .

Les courbes de la réponse fréquentielle en boucle ouverte pour $K_i = 1$ et les réponses fréquentielles en boucle fermée pour différentes valeurs de K_i sont données ci-dessous.

Question 7 En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour K_i permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.



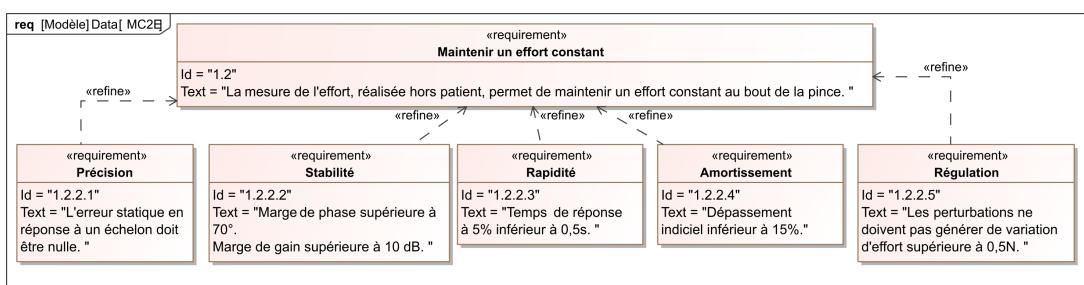
Retour sur le cahier des charges

Question 8 Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{c0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain			
Marges de phase			
Dépassement			
T5 %			
Erreur statique			

Corrigé résumé

- $H_1(p) = \frac{1}{Jp}, H_2(p) = \frac{1}{p}, H_3(p) = K_{C\theta}$ et $B = \frac{K_{C\theta}}{2\sqrt{J K_{C\theta}}}$.
- $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{J p^2 + 2 K_{C\theta}}$.
- Sinus d'amplitude $C_0/2$ et de pulsation ω_0 .
- $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} \text{ et } B = \frac{2\sqrt{J K_{C\theta}}}{K_{C\theta}}$.
- Erreur statique nulle.
- $\tau = T_i$.
- $K_i = 0,4 (< 1,58)$.
- ...



TD 1

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

Le robot MC²E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

L'axe en translation du MC²E est asservi en effort constant pour tirer (ou pousser) la vésicule au fur et à mesure que le chirurgien utilise son bistouri pour détacher la vésicule du foie. Le diagramme des exigences au dos décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC²E.

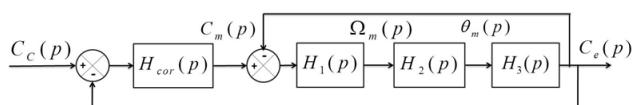
Objectif Modéliser et valider l'asservissement en effort.

Modèle de connaissance de l'asservissement

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$ avec :

- J , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera $\theta_m(p)$, $\Omega_m(p)$, $C_m(p)$ et $C_e(p)$ les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$ où $K_{C\theta}$ est une constante positive. On a de plus $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$. La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$, couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC²E;

- $C_c(p)$, couple de consigne;
- $C_m(p)$, couple moteur;
- $H_{cor}(p)$, fonction de transfert du correcteur.

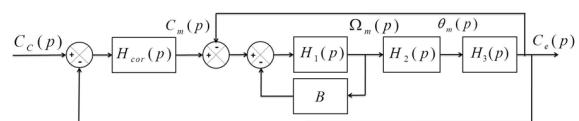
Dans un premier temps, on prendra $H_{cor}(p) = 1$.

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B . On s'intéresse ici à la définition analytique de B . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.



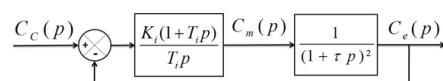
Régulation avec retour tachymétrique

On règle B de telle façon que, pour $H_{cor}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{BO}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$.

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B , en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus loin (exigences 1.2.2.1 à 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.



Régulation avec correcteur PI.

Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0 . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

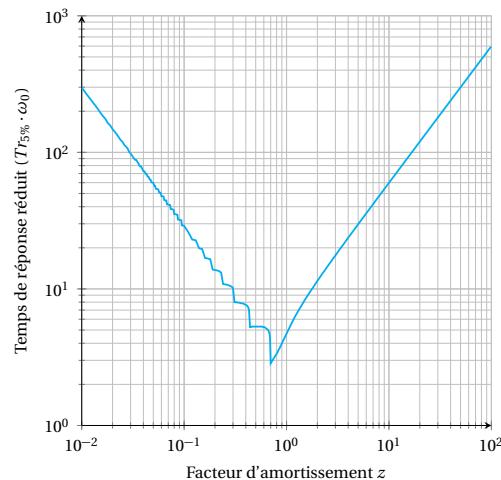
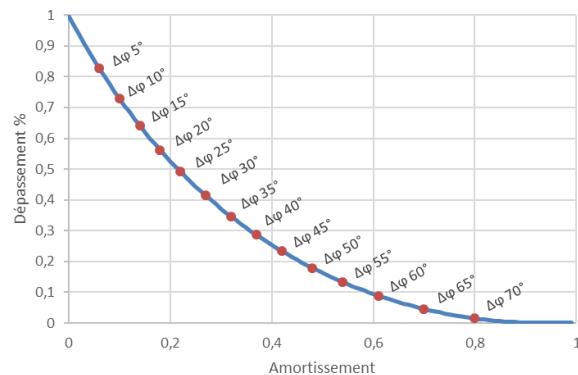
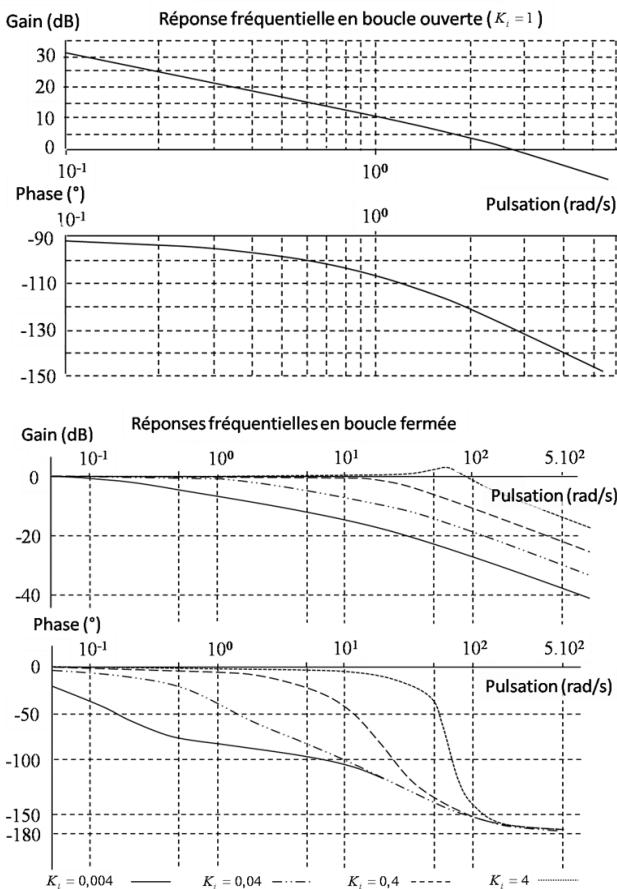
On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme :

$$\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$$

Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i .

Les courbes de la réponse fréquentielle en boucle ouverte pour $K_i = 1$ et les réponses fréquentielles en boucle fermée pour différentes valeurs de K_i sont données ci-dessous.

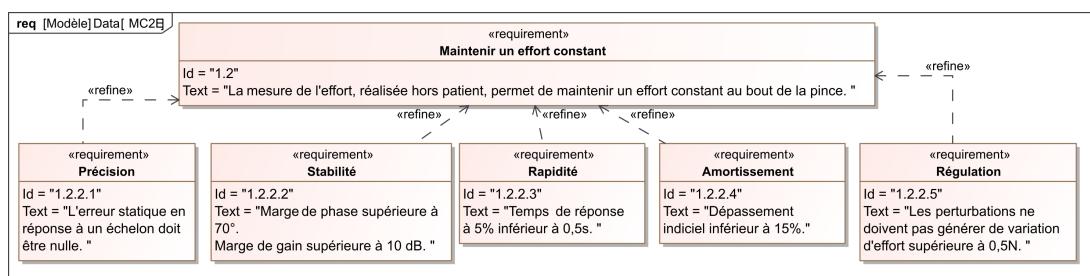
Question 7 En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour K_i permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.



Retour sur le cahier des charges

Question 8 Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{c0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain			
Marges de phase			
Dépassement			
T5 %			
Erreur statique			



TD 1 – Corrigé

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

Modèle de connaissance de l'asservissement

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Correction On a $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$ et donc $H_2(p) = \frac{\theta_m(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{p}$.

De plus $Jp^2\theta_m(p) = C_m(p) - C_e(p) \Leftrightarrow Jp\Omega_m(p) = \Omega_m(p)$ et donc $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_m(p) - C_e(p)} = \frac{1}{Jp}$.

Enfin, $H_3(p) = \frac{C_e(p)}{\theta_m(p)} = K_{C\theta}$.

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Correction D'une part, $F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp} \frac{1}{p} K_{C\theta}}{1 + \frac{1}{Jp} \frac{1}{p} K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}$.

D'autre part, $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}}{1 + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + 2K_{C\theta}}$.

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Correction Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. Le gain est de $\frac{1}{2}$ et la pulsation est de $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{J}{2K_{C\theta}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K_{C\theta}}{J}}$.

Pour une entrée échelon d'amplitude C_0 , le système répondra par un sinus d'amplitude $\frac{C_0}{2}$ (valeur crête à crête C_0) de pulsation ω_0 .

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B , en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ .**Correction**

D'une part, $F_1(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)B}$.

$$\begin{aligned}
 \text{D'autre part, } H_{\text{BO}}(p) &= \frac{\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)}{1 + \frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+Bp+K_{C\theta}} \\
 &= \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2 + \frac{B}{K_{C\theta}}p + 1}.
 \end{aligned}$$

Enfin, $(1 + \tau p)^2 = 1 + 2\tau p + \tau^2 p^2$. Donc nécessairement $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$ et $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}} \Leftrightarrow B = 2\tau K_{C\theta} = 2\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} K_{C\theta} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$.

Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0 . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Correction La boucle ouverte est de classe 1. L'erreur statique (entrée échelon) est donc nulle ce qui est conforme à l'exigence 1.2.2.1 du cahier des charges.

Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i .

Correction

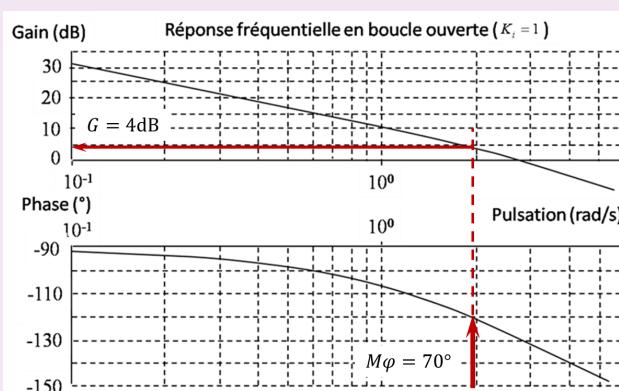
Pour avoir une FTBF d'ordre 2, il faut que la BO soit d'ordre 2. En conséquence, vu la forme de correcteur proposé, on peut envisager que le correcteur compense un pôle du système.

$$\text{Ainsi pour } \tau = T_i, \text{ on a } \frac{C_e(p)}{C_C(p)} = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}}{1 + \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p) + K_i} = \frac{K_i}{\tau^2 p^2 + \tau p + K_i} = \frac{1}{\frac{K_i}{\tau^2} p^2 + \frac{\tau}{K_i} p + 1}.$$

Question 7 En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour K_i permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.

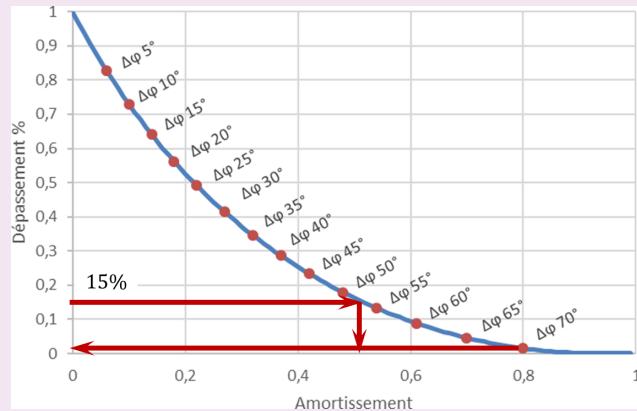
Correction

- Marge de gain 10 dB : la boucle ouverte est d'ordre 2. La phase est donc toujours supérieure à -180° et la marge de gain est infinie. Le critère est respecté.
- Marge de phase supérieure à 70° : il est donc nécessaire que le gain (dB) de la boucle ouverte soit nul lorsque la phase est égale à 120° . D'après la réponse fréquentielle en BO, il faut donc que $20 \log K_i \leq 4 \Rightarrow K_i \leq 10^{\frac{20}{4}} = 1,58$.

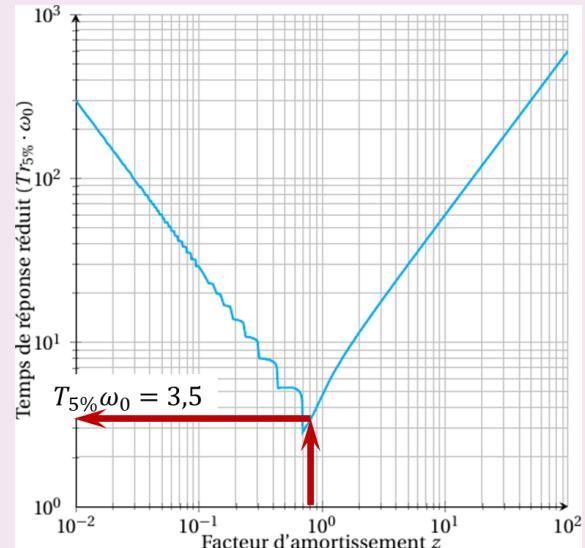
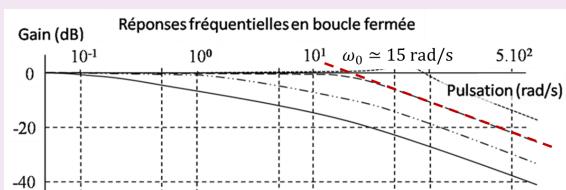


- Dépassement inférieur à 15% : l'abaque ci-dessous montre que pour une marge de phase de 70° , le dépassement sera inférieur à 15%. Ainsi, avec une marge de phase de 70° , le dépassement sera donc d'environ 2% et

le coefficient d'amortissement sera d'environ 0,8.



- Temps de réponse à 5% inférieur à 0,5 s : en utilisant la réponse fréquentielle pour un gain de 0,4 ($< 1,58$) on a $\omega_0 \approx 15 \text{ rad s}^{-1}$. En utilisant l'abaque du temps de réponse réduit, on a $\omega_0 \cdot T_{r5\%} \approx 3,5$; donc $T_{r5\%} \approx \frac{3,5}{15} = 0,23 \text{ s}$.



- D'après le diagramme de Bode en BF, le gain basse fréquence est nul. Le gain de la fonction de transfert est donc unitaire. L'erreur statique est donc nulle.

On propose donc $K_i = 0,4 (< 1,58)$.

Retour sur le cahier des charges

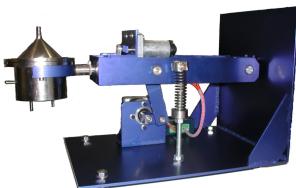
Question 8 Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{c0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Correction

Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain	10 dB	∞	OK
Marges de phase	70°	70°	OK
Dépassement	< 15 %	2%	OK
T5 %	< 0,5s	0,23 s	OK
Erreur statique	Nulle	Nulle	OK

Le cahier des charges est donc respecté. (Réponse indicielle d'un second ordre avec un coefficient d'amortissement de 0,8 et un gain unitaire).

TD 2



Agitateur médical avec chambre de Riccordi

CCP – PSI – 2006

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

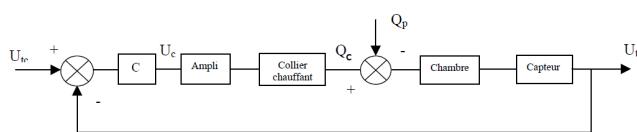
Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- U_{tc} : tension de consigne;
- U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- U_a : tension d'alimentation du collier chauffant;
- q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme.



Expérimentalement, on peut déterminer que $FTBO(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1+5p)(1+100p)}$.

Analyse des performances

On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

Question 9 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

Question 10 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

Question 11 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 12 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.

Question 13 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

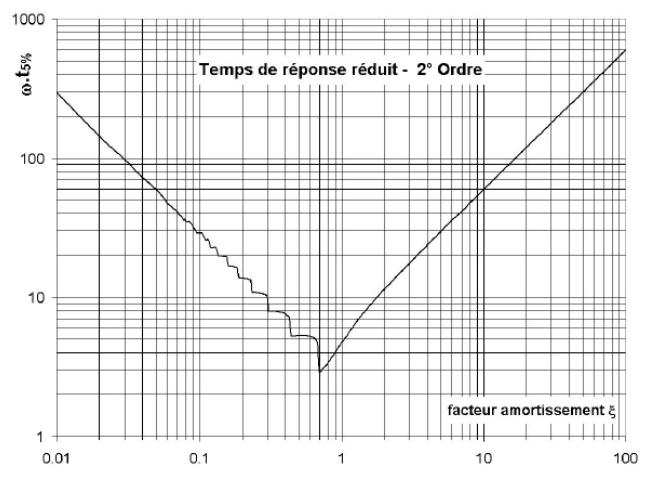
Question 14 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 15 Déterminez alors, la tension en entrée de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

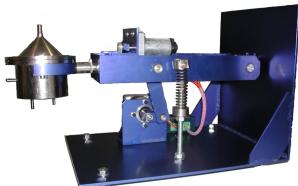
On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$. On souhaite que la montée en température soit de 3 minutes maximum.

Question 16 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponse du système.

Question 17 En déduire le nouvel écart de position.



TD 2



Agitateur médical avec chambre de Riccordi

CCP – PSI – 2006

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

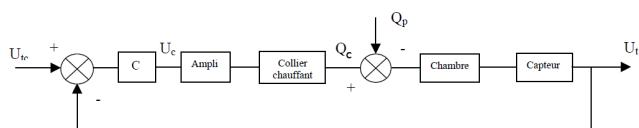
Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- U_{tc} : tension de consigne;
- U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- U_a : tension d'alimentation du collier chauffant;
- q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme.



Expérimentalement, on peut déterminer que $FTBO(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1+5p)(1+100p)}$.

Analyse des performances

On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

Question 18 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

Question 19 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

Question 20 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 21 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.

Question 22 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

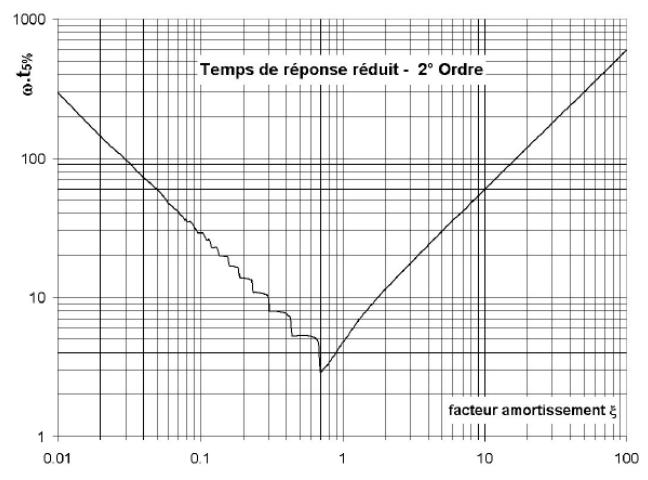
Question 23 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 24 Déterminez alors, la tension en entrée de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

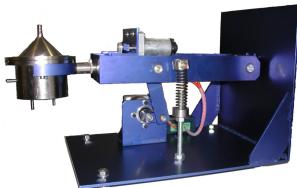
On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$. On souhaite que la montée en température soit de 3 minutes maximum.

Question 25 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponse du système.

Question 26 En déduire le nouvel écart de position.



TD 2 – Corrigé



Agitateur médical avec chambre de Riccordi

CCP – PSI – 2006

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

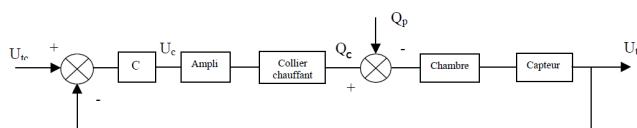
Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- U_{tc} : tension de consigne;
- U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- U_a : tension d'alimentation du collier chauffant;
- q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme.



Expérimentalement, on peut déterminer que $FTBO(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1+5p)(1+100p)}$.

Analyse des performances

On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

Question 27 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

Question 28 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

Question 29 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 30 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.

Question 31 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

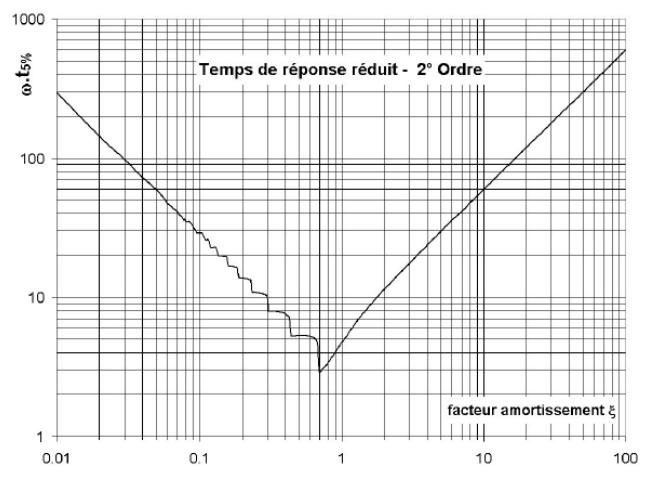
Question 32 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 33 Déterminez alors, la tension en entrée de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$. On souhaite que la montée en température soit de 3 minutes maximum.

Question 34 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponse du système.

Question 35 En déduire le nouvel écart de position.



O20 – Temps de réponse du système régulé

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_r(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\sqrt{3}}{1 + \frac{105}{1,5} \cdot p + \frac{500}{1,5} \cdot p^2}$$

D'où l'on déduit :

- la pulsation propre ω_n telle que : $\omega_n^2 = \frac{1,5}{500} = 30 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \omega_n = 5,5 \cdot 10^2 \text{ rd/s}$

- le facteur d'amortissement ξ tel que : $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = 70 \Rightarrow \xi = 1,92 \approx 2$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 12 \Rightarrow t_{5\%} = 218 \text{ s}$ **Incompatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

O21 – Ecart de position – Ecart de traînage

Fonction de transfert de classe 0 (zéro) $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$

$\varepsilon_p = 0,66$ 66 % **Incompatible** avec le cahier des charges.

O22 – Diagrammes de Bode de la F.T.B.O.

On procède par superposition : $H_{bo}(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) = \frac{0,5}{1 + j \cdot 5\omega} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot 100\omega}$

Pulsations de brisure $\omega_1 = 0,2 \text{ rd/s}$; $\omega_2 = 0,01 \text{ rd/s}$

$$\text{Qd } \omega \rightarrow 0 \quad H_{bo} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -6dB \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$$

$$G = -6dB - 10 \cdot \log(1+25 \cdot \omega^2) - 10 \cdot \log(1+10^4 \cdot \omega^2)$$

$$\varphi = -\arctan(5 \cdot \omega) - \arctan(100 \cdot \omega)$$

ω (rd/s)	0,01	0,1	1
G (dB)	- 9	- 27	- 60
φ ($^\circ$)	- 48	- 115	- 169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Tracé des lieux asymptotiques et réels : Voir le Document Réponse page suivante

O23 – Marges de gain, de phase

Marge de gain : $M_G = \infty$

Marge de phase : $M_\varphi = 180^\circ$

O 24 – Réglage du correcteur Proportionnel assurant la stabilité et optimisant les performances du système

Il faut écarter la solution consistant à régler K afin que le lieu de transfert en B.O. soit tangent au contour fermé à $2,3$ dB, car alors le facteur d'amortissement devient inférieur à 1, (0,4 pour un second ordre et le dépassement est environ de 25%) ce qui entraînera un dépassement lors la montée en température (Non respect du C.d.C.)

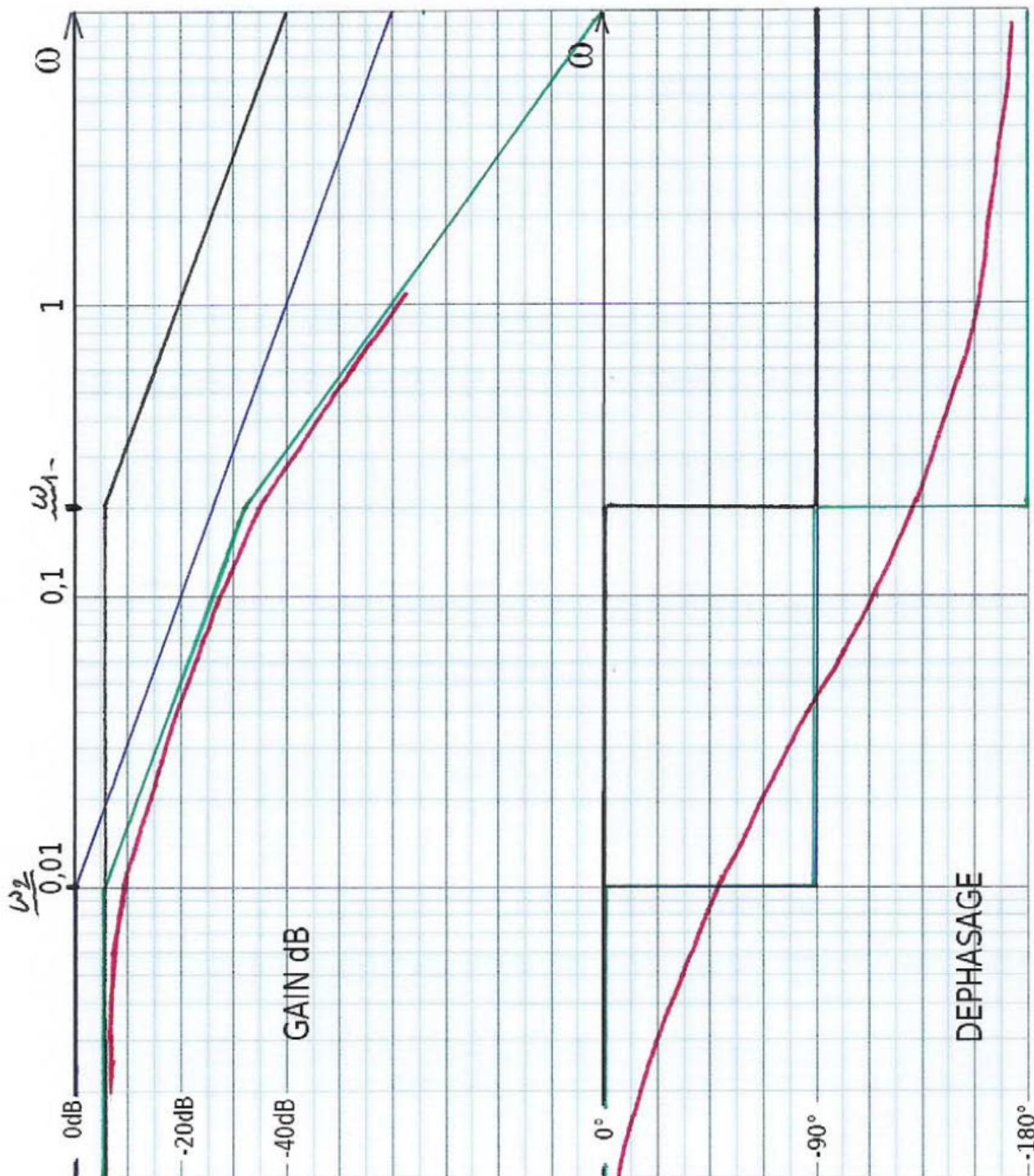
On règle K de telle sorte que $\xi \geq 1$; la réponse indicielle est alors **apériodique critique** ou **apériodique amorti**.

$$H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{1 + 105 \cdot p + 500 \cdot p^2}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} \quad \text{car le retour est unitaire.}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{0,5 \cdot K}{1 + 0,5 \cdot K}}{1 + \frac{105}{1 + 0,5 \cdot K} p + \frac{500}{1 + 0,5 \cdot K} p^2}$$

Question 22 : Tracé de Bode



$$\text{Pulsation propre : } \omega_n = \sqrt{\frac{1+0,5 \cdot K}{500}}$$

$$\begin{aligned} \text{Facteur d'amortissement, il est tel que : } \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} &= \frac{105}{1+0,5 \cdot K} , \\ \Rightarrow \xi &= \frac{105}{2 \cdot \sqrt{500} \cdot \sqrt{1+0,5 \cdot K}} \end{aligned}$$

Condition de **non dépassement** : $\xi \geq 1 \Leftrightarrow K \leq 9,02$

On choisit **K = 9** alors **$\xi \approx 1$** la réponse indicielle est **apériodique critique**.

Par conséquent, sur le diagramme de Black, **on translate** le lieu de transfert en B.O. **dans la direction verticale** de **20 Log 9**, c'est-à-dire d'environ **19 dB**.

O 25 – Eléments de performances, temps de réponse à 5 %, écarts de position et de traînage

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H_{bo2})

La marge de gain est inchangée : **M_G = ∞**

On relève : **M_φ = 90°** **La stabilité est assurée.**

$$\text{Pulsation propre : } \omega_n = \sqrt{\frac{1+0,5 \cdot 9}{500}} = \sqrt{\frac{5,5}{500}} \approx 0,1 \text{ rd/s}$$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » retourne :

$\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5 \Rightarrow \underline{t_{5\%} = 50 \text{ s}}$ **Compatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

$$\text{Fonction de transfert de classe 0 (zéro)} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_p = \frac{1}{1 + G_{FTBO}} \\ \varepsilon_v = \infty \end{cases}$$

$\varepsilon_p = 0,55 \quad 55\%$ **Incompatible** avec le cahier des charges.

O26 – Tension en entrée de l'amplificateur, tension d'alimentation du collier chauffant lorsque l'échelon de tension de consigne U_{tc} est de 5 V

A 17° C correspond $U_c = 0 \text{ V}$, donc $U_t = 0 \text{ V}$.

Si $U_{tc} = 5 \text{ V} \Rightarrow \underline{U_c = 45 \text{ V}}$. ($U_c = K \cdot \varepsilon$)

Alors **U_a = 450 V** Il y aura **saturation de l'ampli** et donc augmentation du temps de réponse.

O 27 – Choix d'un correcteur à action P.I. – Réglage de ce correcteur

$$C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$$

Le réglage du correcteur se fait par **compensation du pôle le plus lent**. Méthode qui consiste à choisir la constante de temps T_i du correcteur égale à la **constante de temps la plus grande** du système à corriger. On réglera le gain K du correcteur afin que la **réponse indicielle ne présente pas de dépassement** (on choisit $\xi = 1$). Le choix de T_i devant satisfaire le C.d.C. (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

La F.T.B.O. s'écrit alors : $H_{bo}(\omega) = \frac{0,5 \cdot K}{T_i \cdot p + 500 \cdot p^2}$

La F.T.B.F. s'écrit alors : $H_{bf}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{0,5 \cdot K} \cdot p + \frac{500}{0,5 \cdot K} \cdot p^2}$

La pulsation propre (non amortie) vaut alors : $\omega_n = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{K}{10}}$

Le facteur d'amortissement vaut alors : $\xi = \frac{T_i}{10 \cdot \sqrt{10 \cdot K}}$

On choisit $\xi = 1$ la réponse indicielle est apériodique critique.

Alors : $K = 10^{-3} \cdot T_i$

On a toujours : $\omega_n \cdot t_{5\%} \approx 5$ puisque $\xi = 1$

Tableau des valeurs de K , ω_n , $t_{5\%}$ en fonction du choix de T_i

T_i	K	ω_n	$t_{5\%}$	Commentaires
5 s	$25 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$ rd/s	1 000 s	A rejeter
100 s	10	0,1 rd/s	50 s	A RETENIR

Tracé du lieu de transfert de la F.T.B.O. dans le plan de Black :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{5}{j \cdot 100\omega \cdot (1 + j \cdot 5\omega)}$$

Gain : $G = -26 \text{ dB} - 20 \cdot \log \omega - 10 \cdot \log(1 + 25 \cdot \omega^2)$

Argument : $\varphi = -90^\circ - \arctan(5\omega)$

ω (rd/s)	0,01	0,1	0,2	1
G (dB)	14	- 7	- 15	- 40
φ ($^\circ$)	- 93	- 117 $^\circ$	- 135	- 169

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Compte tenu de la forme de la F.T.B.O., le lieu de transfert présente deux asymptotes verticales d'équations $\varphi = -90^\circ$ et $\varphi = -180^\circ$.

Voir le Document Réponse à la dernière page (Courbe repérée H_{bo3})

La marge de gain est inchangée : $M_G = \infty$

On relève : $M_\varphi \approx 77^\circ$

La stabilité est assurée.

O 28 – Nouvel écart de position

Le système est de **classe 1** $\Rightarrow \varepsilon_p = 0$

TD 3



Machine de rééducation SysReeduc

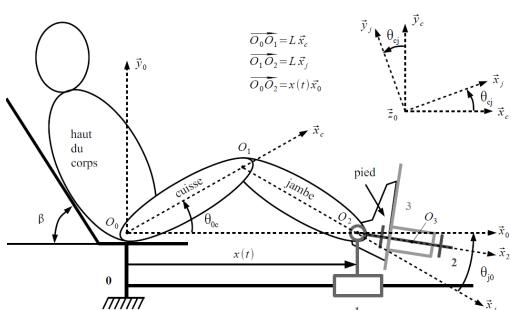
CCP PSI 2013

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

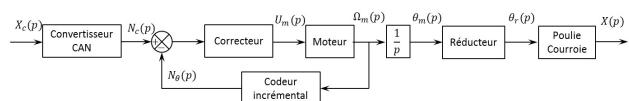


Objectif L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

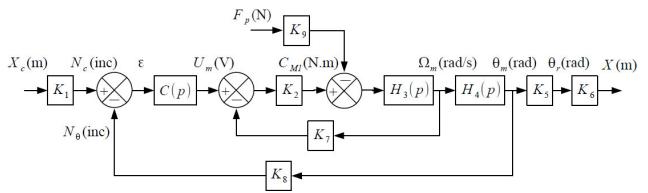
Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2\text{s}$
Pulsation au gain unité	50 rad s ⁻¹

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



Éléments de modélisation

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$ et $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

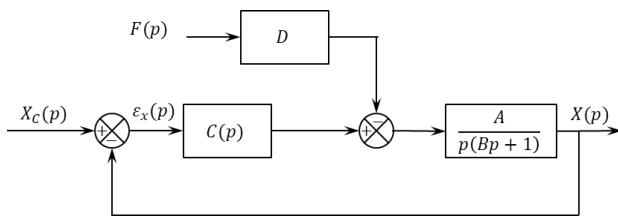
$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1 = \frac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r = 46,1\text{ mm}$ le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 36 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1 , K_2 , $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5 , K_6 , K_7 , K_8 et K_9 .

Question 37 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A , B et D en fonction des paramètres du système r , ρ_1 , k_t , k_e , R , M , m et K_8 .



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A , B et D , avec $A = 6700 \text{ m/V}$, $B = 0,01 \text{ s}$ et $D = 6 \text{ V/N}$.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 38 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_c .

Question 39 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

Question 40 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

Question 41 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_i .

Question 42 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 43 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Question 44 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité

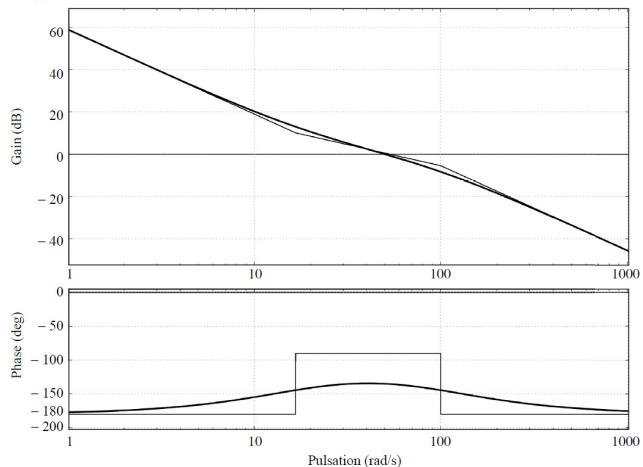
souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Question 45 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

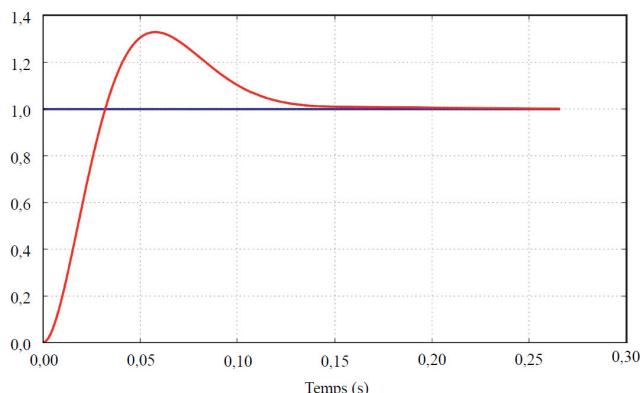
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 46 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

Diagramme de Bode de la FTBO :



Réponse indicelle unitaire sur le déplacement / $F_p = 0$. Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.



TD 3



Machine de rééducation SysReeduc

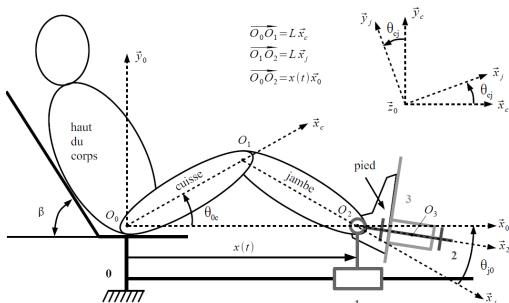
CCP PSI 2013

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

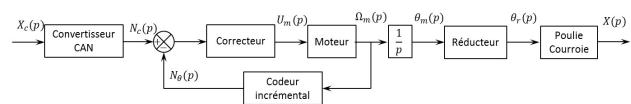


Objectif L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de réeduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

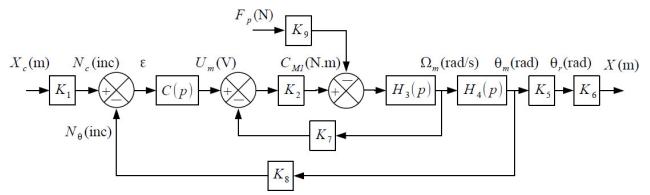
Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2 \text{ s}$
Pulsation au gain unité	50 rad s^{-1}

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



Éléments de modélisation

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t) = e(t) + R i(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$ et $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

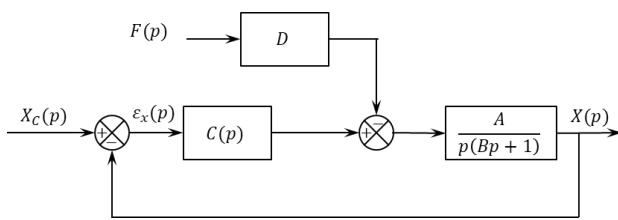
$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1 = \frac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r = 46,1 \text{ mm}$ le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 47 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1 , K_2 , $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5 , K_6 , K_7 , K_8 et K_9 .

Question 48 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r , ρ_1 , k_t , k_e , R , M , m et K_8 .



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A , B et D , avec $A = 6700 \text{ m/V}$, $B = 0,01 \text{ s}$ et $D = 6 \text{ V/N}$.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 49 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_c .

Question 50 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

Question 51 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

Question 52 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_i .

Question 53 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 54 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Question 55 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité

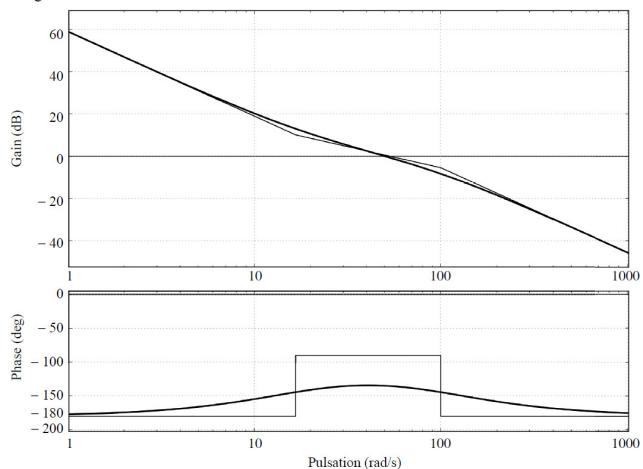
souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Question 56 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

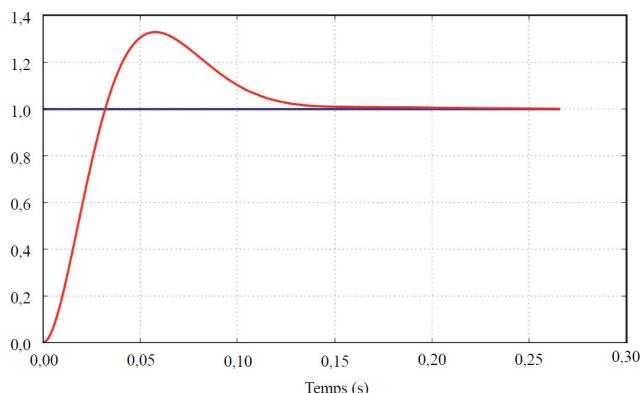
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 57 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

Diagramme de Bode de la FTBO :



Réponse indicelle unitaire sur le déplacement / $F_p = 0$. Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.



TD 3 – Corrigé



Machine de rééducation SysReeduc

CCP PSI 2013

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

Éléments de modélisation

Question 58 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$ et K_9 .

Correction

On a :

- $u_m(t) = e(t) + R i(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + R I(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \frac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M + m) r \rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M + m) r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \frac{1}{(M + m) r^2 \rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \frac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incrément. X_c est la consigne que doit respectée X . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8 \theta_m = K_1 X_C - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$. Au final, $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$.

Question 59 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$ et K_8 .

Correction

On montre $A = \frac{K_8}{k_e}, B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D = \frac{r^2\rho_1^2 R}{K_8 k_t}$.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 60 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c .

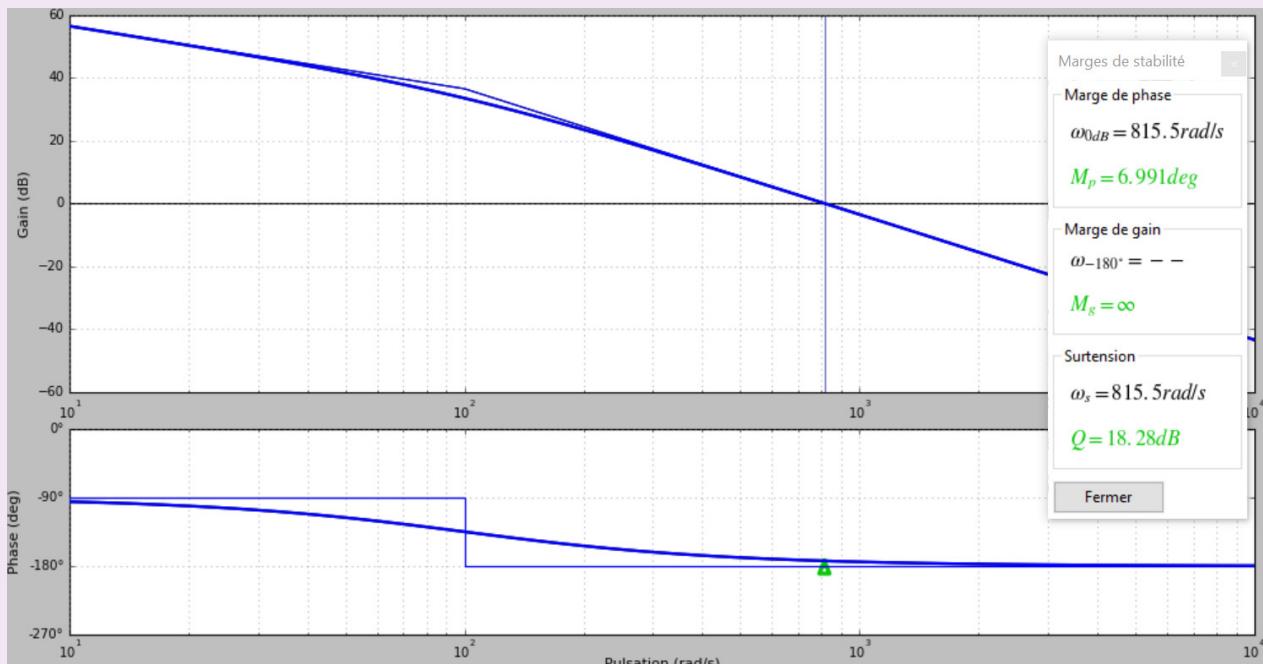
Correction

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \varepsilon_x(p) &= X_C(p) - X(p) = X_C(p) - \left((C(p)\varepsilon_x(p) - F(p)D) \frac{A}{p(Bp+1)} \right) \\
 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) &\left(1 + \frac{AC(p)}{p(Bp+1)} \right) = X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \\
 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) &\left(\frac{p(Bp+1)+AC(p)}{p(Bp+1)} \right) = X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AC(p)} X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)+AC(p)} \\
 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) &= \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_C} X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_C} F(p)
 \end{aligned}$$

Question 61 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

Correction

On a $\text{FTBO}(p) = \frac{A}{p(Bp+1)}$.



La marge de phase n'est pas respectée.

Question 62 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon_x(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_C} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_C} \frac{F_p}{p} \right) \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_C} X_0 + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_C} F_p \\
 &= \frac{D}{K_C} F_p
 \end{aligned}$$

L'écart en position n'est donc pas nul.

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

Question 63 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_i .

Correction

$$\varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)}F(p)$$

Question 64 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1)+AK_i\left(1+\frac{1}{T_ip}\right)} \frac{F_0}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p T_i p (Bp+1)}{p T_i p (Bp+1) + AK_i (T_i p + 1)} X_0 + \frac{AD T_i p}{T_i p p (Bp+1) + AK_i (T_i p + 1)} F_0 = 0. \end{aligned}$$

Question 65 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Correction

$$FTBO(p) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \left(1 + \frac{1}{T_ip} \right) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}.$$

Question 66 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Correction

On souhaite que pour $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$, $\varphi(\omega) = -135^\circ$.

$$\begin{aligned} \arg(FTBO(j\omega)) &= \arg\left(\frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip}\right) = -180 - \arg((Bp+1)) + \arg(1+T_ip) \\ &= -180 - \arctan B\omega + \arctan T_i\omega. \text{ En } \omega = 50 \text{ rad s}^{-1} \text{ on a alors } -180 - \arctan 0,5 + \arctan 50T_i = -135 \Leftrightarrow \\ &\arctan 50T_i = -135 + 180 + \arctan 0,5 = 74. \text{ D'où } T_i = 0,05 \text{ s}. \end{aligned}$$

Question 67 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

Correction

On souhaite que $|FTBO(j\omega)| = 1$ pour $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$.

$$|FTBO(j\omega)| = \left| \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1+T_ip}{T_ip} \right| = AK_i \frac{1}{\omega \sqrt{B^2\omega^2+1}} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{T_i\omega} = \frac{AK_i}{T_i\omega^2} \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega^2}}{\sqrt{B^2\omega^2+1}}.$$

$$\text{On a donc } K_i = \frac{T_i\omega^2\sqrt{B^2\omega^2+1}}{A\sqrt{1+T_i^2\omega^2}} = 0,0077 \text{ Vm}^{-1}.$$

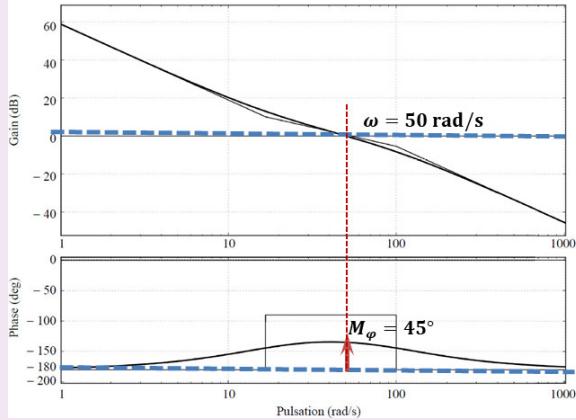
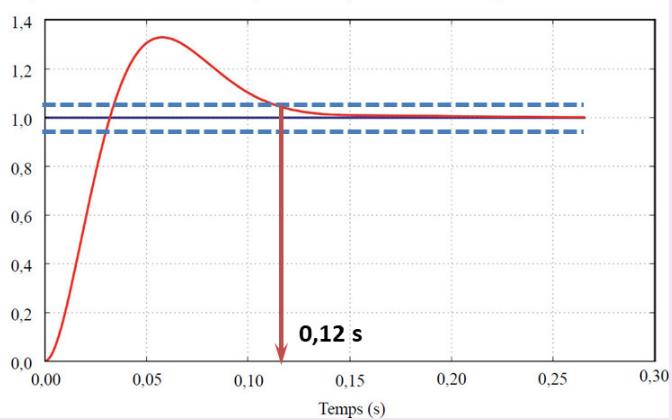
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 68 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

Correction

- Ecart de position : nul \Rightarrow Exigence OK.
- Marge de gain : infine \Rightarrow Exigence OK.
- Marge de phase : $\approx 45^\circ \Rightarrow$ Exigence OK.

Diagramme de Bode de la FTBO :


 Réponse indicielle unitaire sur le déplacement / $F_p = 0$. Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.


TD 1



Train d'atterrissement d'hélicoptère ★★

Banque PT – SIA 2014

Savoirs et compétences :

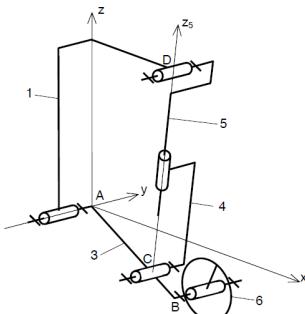
- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur à avance de phase
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

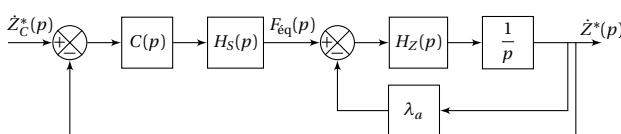
Lors d'atterrissements d'hélicoptères à grande vitesse, les oscillations induites par l'impact au sol du train d'atterrissement principal génèrent des contraintes mécaniques importantes à la liaison du pylône de queue avec la cabine. Les oscillations du pylône de queue de l'appareil ne sont pas négligeables. Lors de ces atterrissages, les vitesses verticales minimales sont de l'ordre de 2 m s^{-1} mais peuvent atteindre des valeurs plus importantes lors d'apportage sur un bateau à cause des mouvements du bateau dus à la houle. La résistance aux crashs correspond à la possibilité de garder opérationnel un appareil qui aurait atterri avec une vitesse d'impact pouvant atteindre 4 m s^{-1} .

Objectif Pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} l'accélération de la queue doit rester inférieure à 3 rad s^{-2} .

On donne une modélisation cinématique du train principal.



La vitesse d'impact lors de l'atterrissement de l'hélicoptère correspond alors à la vitesse de la tige 5 de l'amortisseur par rapport au cylindre 4. Cette vitesse est notée \dot{z}^* . On se propose d'étudier la stabilité vis-à-vis de la seule consigne $\dot{z}_c^*(p)$. On adoptera pour le réglage de la correction le schéma suivant.



On note dans ce schéma :

- $\dot{z}^*(p)$ la transformée de $\dot{z}^*(t) = \dot{z}(t) + V_0$ avec V_0 la vitesse d'impact et $\dot{z}(t)$ la vitesse absolue de la cabine par rapport au sol;
- $F_{eq}(p)$ l'effort équivalent ramené au déplacement de la cabine et fourni par la partie active de l'amortisseur;
- λ_a le coefficient d'amortissement passif équivalent ramené au déplacement de la cabine;
- $H_S(p) = \frac{K_S}{1 + T_S p}$ la fonction de transfert de la partie active de l'amortisseur. On prendra : $K_S = 12 \times 10^4 \text{ N A}^{-1}$ et $T_S = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$;
- $H_Z(p) = \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}$ la fonction de transfert traduisant le comportement dynamique du train.
- $C(p)$ la fonction de transfert du correcteur dont le réglage fait l'objet de cette partie.

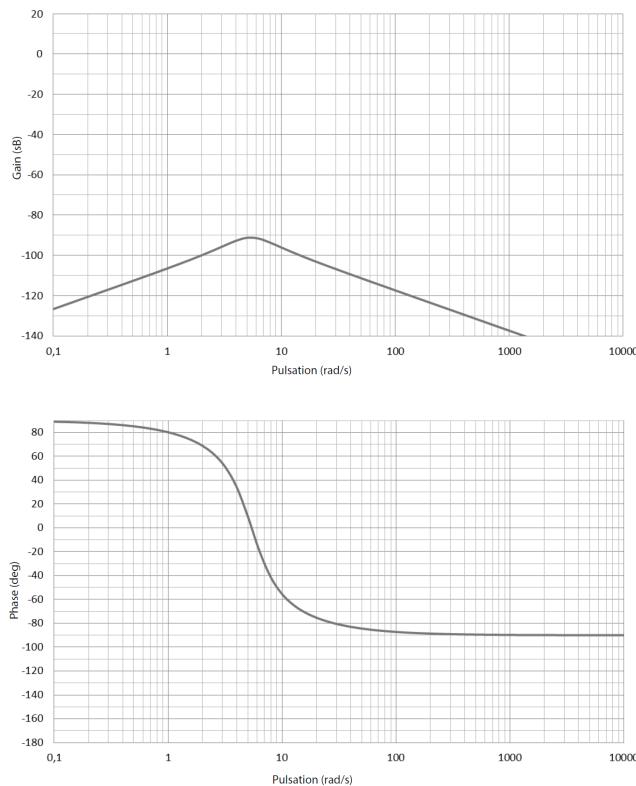
Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

Objectif Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

Question 1 Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert $H_F(p) = \frac{\dot{z}^*(p)}{F_{eq}(p)}$.

Question 2 Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée $H_{BONC}(p)$.

On donne le diagramme de Bode de $H_F(p)$.



Question 3 Justifier la forme de ce diagramme en tracant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de K_z et ω_z . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction $H_{BONC}(p)$. On prendra pour cela $20\log K_S \approx 100$ dB.

Choix et réglage de la correction

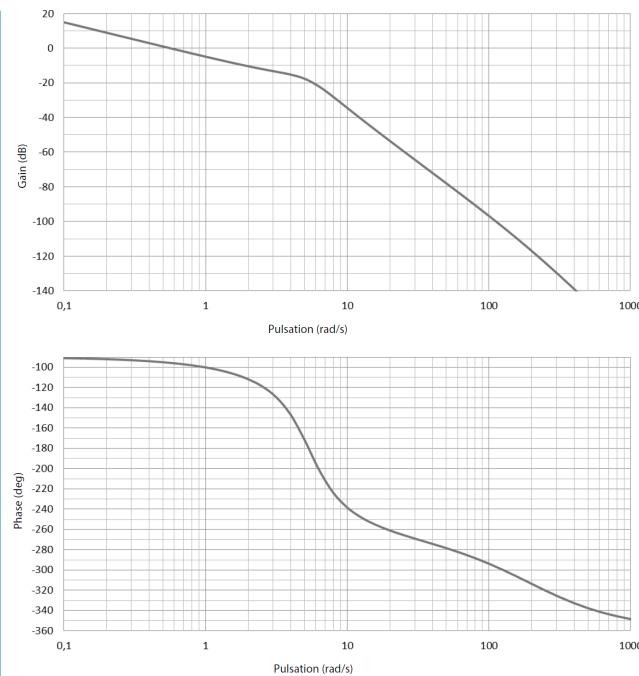
Objectif Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin de satisfaire les exigences, une étude complémentaire non abordée dans ce sujet montre que la boucle d'asservissement doit posséder les performances suivantes :

- erreur statique nulle;
- pulsation de coupure à 0 dB et $\omega_{0dB} = 6 \text{ rad s}^{-1}$;
- marge de phase $M\varphi = 45^\circ$;
- marge de gain $MG > 6$ dB.

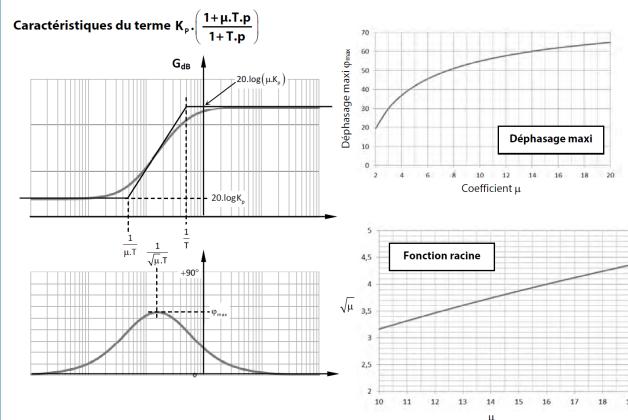
Question 4 Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

On choisit dans un premier temps un correcteur de la forme $C(p) = \frac{K_p}{p^2}$. On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système ainsi corrigé pour $K_p = 1$.



Question 5 Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de K_p garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

On choisit finalement un correcteur de la forme $C(p) = \frac{K_p}{p^2} \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$ avec $\mu > 1$. Les caractéristiques du terme en $K_p \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$ ainsi que des abaques de calcul sont donnés ci-dessous.



Question 6 Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

Question 7 Quelle valeur doit-on donner à μ pour garantir le critère de marge de phase ?

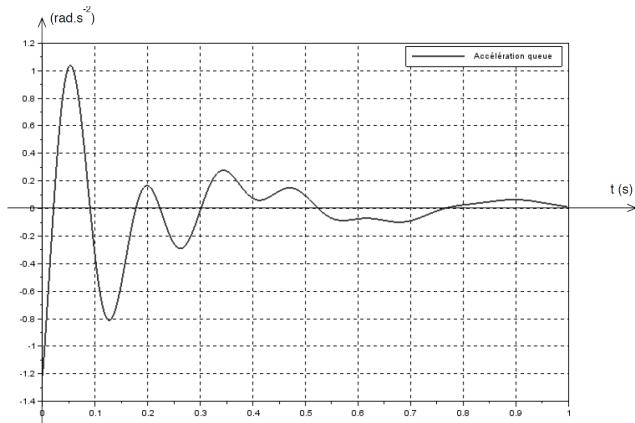
Question 8 En déduire les valeurs de T et de K_p permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

Validation des performances

Objectif Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

On donne le résultat d'une simulation du système complet piloté à l'aide du correcteur précédemment dimensionné pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} .

Question 9 En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.



TD 1



Train d'atterrissement d'hélicoptère ★★

Banque PT – SIA 2014

Savoirs et compétences :

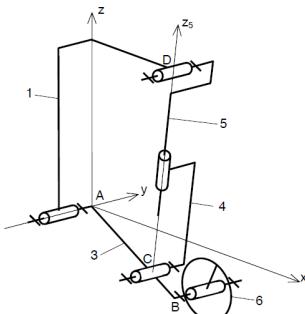
- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur à avance de phase
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

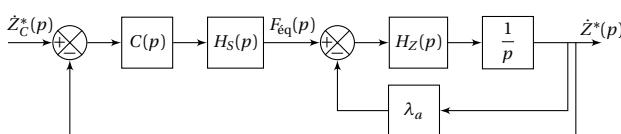
Lors d'atterrissements d'hélicoptères à grande vitesse, les oscillations induites par l'impact au sol du train d'atterrissement principal génèrent des contraintes mécaniques importantes à la liaison du pylône de queue avec la cabine. Les oscillations du pylône de queue de l'appareil ne sont pas négligeables. Lors de ces atterrissages, les vitesses verticales minimales sont de l'ordre de 2 m s^{-1} mais peuvent atteindre des valeurs plus importantes lors d'apportage sur un bateau à cause des mouvements du bateau dus à la houle. La résistance aux crashs correspond à la possibilité de garder opérationnel un appareil qui aurait atterri avec une vitesse d'impact pouvant atteindre 4 m s^{-1} .

Objectif Pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} l'accélération de la queue doit rester inférieure à 3 rad s^{-2} .

On donne une modélisation cinématique du train principal.



La vitesse d'impact lors de l'atterrissement de l'hélicoptère correspond alors à la vitesse de la tige 5 de l'amortisseur par rapport au cylindre 4. Cette vitesse est notée \dot{z}^* . On se propose d'étudier la stabilité vis-à-vis de la seule consigne $\dot{z}_c^*(p)$. On adoptera pour le réglage de la correction le schéma suivant.



On note dans ce schéma :

- $\dot{z}^*(p)$ la transformée de $\dot{z}^*(t) = \dot{z}(t) + V_0$ avec V_0 la vitesse d'impact et $\dot{z}(t)$ la vitesse absolue de la cabine par rapport au sol;
- $F_{eq}(p)$ l'effort équivalent ramené au déplacement de la cabine et fourni par la partie active de l'amortisseur;
- λ_a le coefficient d'amortissement passif équivalent ramené au déplacement de la cabine;
- $H_S(p) = \frac{K_S}{1 + T_S p}$ la fonction de transfert de la partie active de l'amortisseur. On prendra : $K_S = 12 \times 10^4 \text{ N A}^{-1}$ et $T_S = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$;
- $H_Z(p) = \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}$ la fonction de transfert traduisant le comportement dynamique du train.
- $C(p)$ la fonction de transfert du correcteur dont le réglage fait l'objet de cette partie.

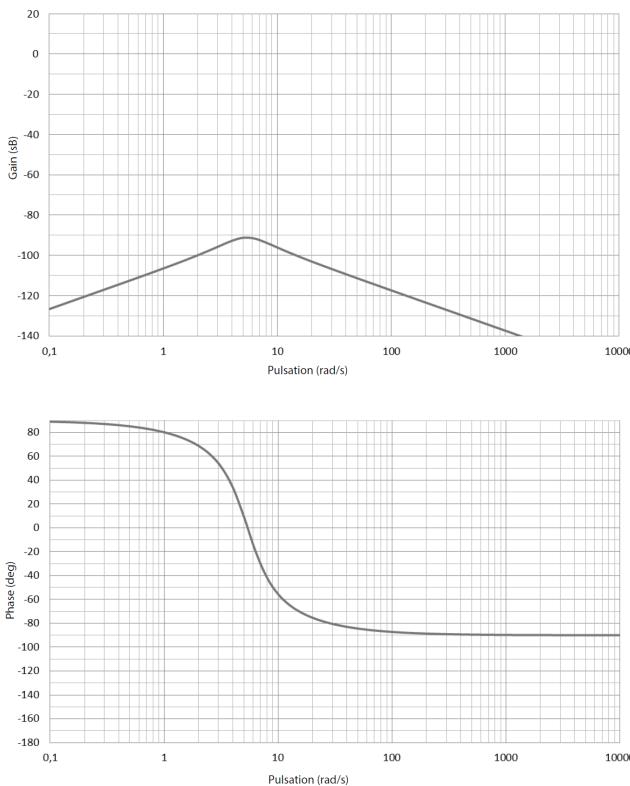
Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

Objectif Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

Question 1 Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert $H_F(p) = \frac{\dot{z}^*(p)}{F_{eq}(p)}$.

Question 2 Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée $H_{BONC}(p)$.

On donne le diagramme de Bode de $H_F(p)$.



Question 3 Justifier la forme de ce diagramme en tracant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de K_z et ω_z . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction $H_{BONC}(p)$. On prendra pour cela $20\log K_S \approx 100$ dB.

Choix et réglage de la correction

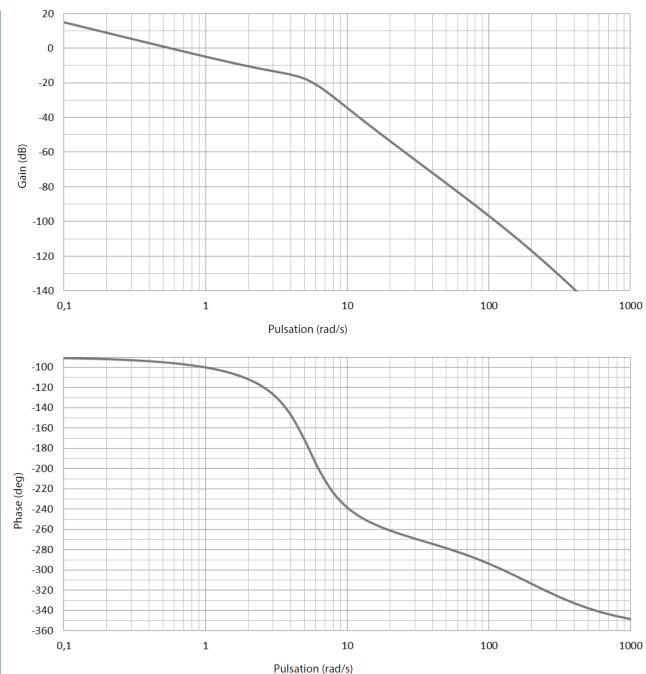
Objectif Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin de satisfaire les exigences, une étude complémentaire non abordée dans ce sujet montre que la boucle d'asservissement doit posséder les performances suivantes :

- erreur statique nulle;
- pulsation de coupure à 0 dB et $\omega_{0dB} = 6 \text{ rad s}^{-1}$;
- marge de phase $M\varphi = 45^\circ$;
- marge de gain $MG > 6$ dB.

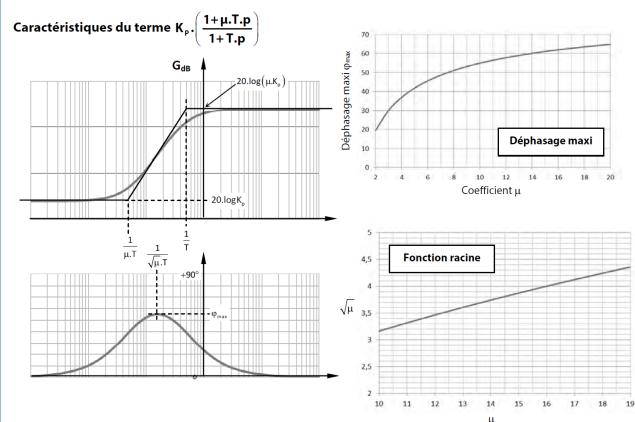
Question 4 Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

On choisit dans un premier temps un correcteur de la forme $C(p) = \frac{K_p}{p^2}$. On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système ainsi corrigé pour $K_p = 1$.



Question 5 Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de K_p garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

On choisit finalement un correcteur de la forme $C(p) = \frac{K_p}{p^2} \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$ avec $\mu > 1$. Les caractéristiques du terme en $K_p \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$ ainsi que des abaques de calcul sont donnés ci-dessous.



Question 6 Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

Question 7 Quelle valeur doit-on donner à μ pour garantir le critère de marge de phase ?

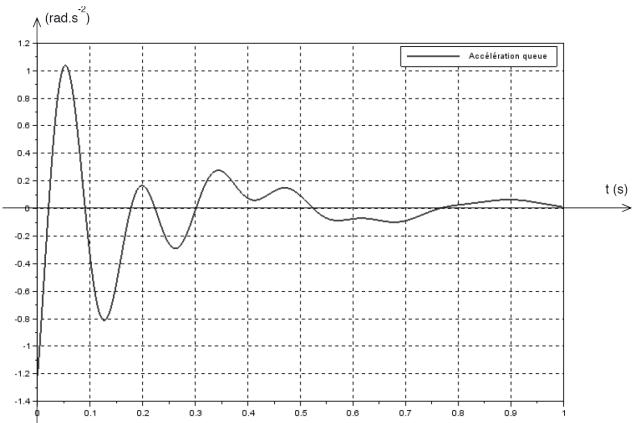
Question 8 En déduire les valeurs de T et de K_p permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

Validation des performances

Objectif Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

On donne le résultat d'une simulation du système complet piloté à l'aide du correcteur précédemment dimensionné pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} .

Question 9 En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.



TD 1 – Corrigé



Train d'atterrissement d'hélicoptère ★★

Banque PT – SIA 2014

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur à avance de phase
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

Objectif Pour une vitesse d'impact de 4 ms^{-1} l'accélération de la queue doit rester inférieure à 3 rad s^{-2} .

Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

Objectif Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

Question 1 Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert $H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{eq}(p)}$.

Correction

$$H_F(p) = \frac{H_Z(p) \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a H_Z(p) \frac{1}{p}} = \frac{\frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}}{1 + \lambda_a \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}} \frac{1}{p}} =$$

$$\frac{\frac{K_Z p^2}{p \left(1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2} \right)} + \lambda_a K_Z p^2}{1 + \left(\frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}.$$

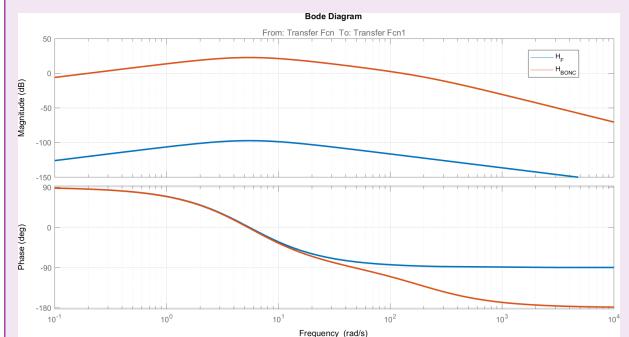
Question 2 Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée $H_{BONC}(p)$.

Correction $H_{BONC}(p) = \frac{K_S p}{1 + \left(\frac{2\xi_Z}{\omega_Z} + \lambda_a K_Z \right) p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}.$

Question 3 Justifier la forme de ce diagramme en tracant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de K_Z et ω_Z . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction $H_{BONC}(p)$. On prendra pour cela $20 \log K_S \approx 100 \text{ dB}$.

Correction H_F est un second ordre dérivé de coefficient d'amortissement ξ_F et de pulsation propre ω_Z . Ne pouvant pas calculer ξ_F , l'allure du diagramme de Bode suggère que $\xi_F < 1$ car il y a une seule rupture de pente à $\omega_Z = 5,5 \text{ rad s}^{-1}$.

Pour $\omega < \omega_Z$ l'asymptote du second ordre à un gain de 0dB. Seul le déivateur est influent. En conséquence, pour $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$, on a donc $|K_Z p|_{\text{dB}} = 20 \log K_Z = -106$. On a donc $K_Z = 5 \times 10^{-6}$.



Choix et réglage de la correction

Objectif Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Question 4 Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

Correction Pour que l'erreur statique soit nulle, il faut que la classe de la FTBO soit de 1. La classe de la FTBO non corrigée étant de «-1», il faut donc que le correcteur soit de classe 2 pour que le critère de précision soit garanti.

Question 5 Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de K_p garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

Correction La marge de gain est de 18 dB et la marge de phase est de 95°.

Pour avoir une pulsation de coupure à 0 dB de 6 rad s^{-1} , il faut relever le gain de 20 dB soit $K_p = 10$. Dans ces conditions, la marge de phase est de -15° et la marge de gain est -2 dB .

En conséquences, le système est précis (écart nul) et la pulsation de coupure du cahier des charges est respectée. Les marges ne sont plus satisfaites.

Question 6 Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

Correction L'action de correction obtenue est de l'avance de phase.

Question 7 Quelle valeur doit-on donner à μ pour garantir le critère de marge de phase ?

Correction Cas 1 : on conserve $K_p = 10$. Le correcteur doit ajouter 60° de phase pour $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$. Il faut donc $\mu = 14$.

Cas 2 : on reprend $K_p = 1$. Dans ce cas, on souhaite que lorsque $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$, φ soit égal à 45° . Il faut donc ajouter 65° de phase à cette pulsation. Dans ces conditions, $\mu = 20$.

Le critère de précision reste validé car il y a toujours les deux intégrateurs dans le correcteur.

Question 8 En déduire les valeurs de T et de K_p permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante

énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

Correction Dans le cas 1 : $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{14}} = 0,045 \text{ s}$. Le gain K_p déjà déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Il faut donc que le gain du correcteur à avance de phase soit nul à la pulsation de coupure à $\omega_{0\text{dB}}$.

Il faut donc que $\frac{1}{2}(20\log(\mu K'_p) + 20\log K'_p) = 0 \Rightarrow \log(\mu K'^2_p) = 0 \Rightarrow \mu K'^2_p = 1 \Rightarrow K'_p = \sqrt{1/\mu} = 0,267$.

Dans le cas 2 : $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\mu}} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6\sqrt{20}} = 0,037 \text{ s}$.

Actuellement, le gain est de -20 dB pour $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$. Il faut donc augmenter le gain de 20 dB pour la pulsation $\frac{1}{T\sqrt{\mu}}$. Ceci revient donc à résoudre $20\log K_p + \frac{1}{2}(20\log \mu K_p - 20\log K_p) = 20 \Rightarrow \log K_p + \log \sqrt{\mu} = 1 \Rightarrow K_p \sqrt{\mu} = 10 \Rightarrow K_p = 10/\sqrt{20} = 2,6$.

Remarque : dans le cas 1 le gain du correcteur est $K_p \times K'_p = 2,6$. Dans le cas 2 $K_p = 2,6$.

Validation des performances

Objectif Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

Question 9 En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.

Correction Pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} l'accélération reste bien inférieure à 3 rad s^{-2} .

TD 1



Quille pendulaire *

Concours Commun Mines Ponts 2014

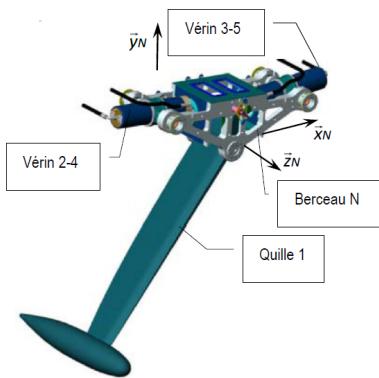
Savoirs et compétences :

- Con.C2 : Correction d'un système asservi
- Con.C2.SF1 : Choisir un type de correcteur adapté

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



Modèle volumique 3D

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

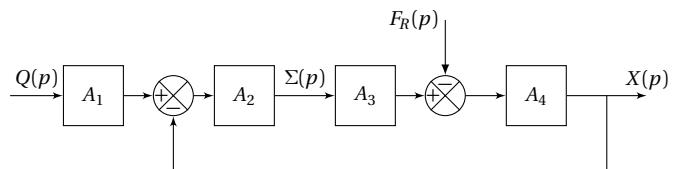
Objectif L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servo valve de débit. Ce composant délivre un débit $q(t)$ proportionnel à sa tension de commande $v(t)$. Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté

en pression via sa servo valve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servovalves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$ (a);
- $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$ (b).

On a :

- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$: débit d'alimentation du vérin [$m^3 s^{-1}$];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$: différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$: position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$: composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

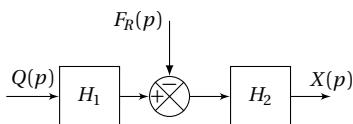
Les constantes sont les suivantes :

- S : section du vérin [m^2];
- k : raideur mécanique du vérin [$N m^{-1}$];
- V : volume d'huile de référence [m^3];

- B : coefficient de compressibilité de l'huile [N m^{-2}];
- M : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];
- λ : coefficient de frottement visqueux [$\text{N m}^{-1}\text{s}$].

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

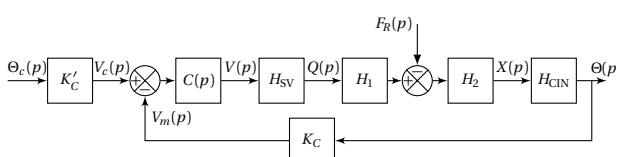
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par $F_R(p)$ ne sera pas prise en compte.



On a :

- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$: consigne de position angulaire [$^\circ$];
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$: position angulaire de la quille [$^\circ$];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$: tension de commande de la servo valve [V];
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$: tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$: tension image de la position [V].

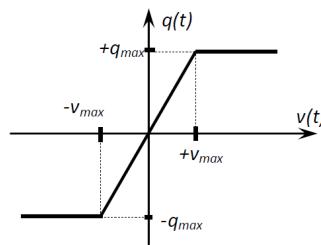
On a de plus :

- K_c : gain du capteur angulaire potentiométrique [V/ $^\circ$];
- K'_c : gain du bloc d'adaptation réglé tel que $K'_c = K_c = 1,1 \text{ V}/^\circ$;
- $C(p)$: correcteur de position;
- H_{CIN} : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation. $H_{\text{CIN}} = K_\theta [^\circ \cdot \text{m}^{-1}]$;
- H_{SV} : fonction de transfert de la servo valve.

Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

La servovalve présente un fonctionnement non-linéaire provenant d'un phénomène de saturation qui

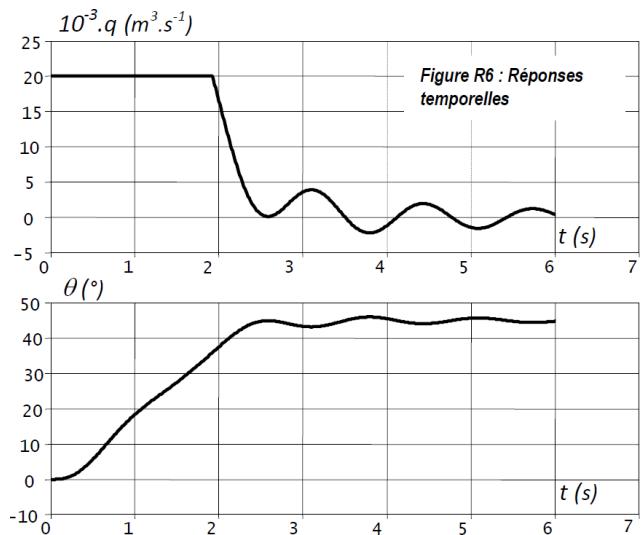
est défini par la courbe de la figure suivante donnant les évolutions du débit $q(t)$ fourni par la servovalve en fonction de sa tension de commande $v(t)$.



Ainsi :

- pour $v(t) > -v_{\max}$ et $v(t) < v_{\max}$: $H_{\text{SV}} = K_{\text{SV}} [\text{m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}]$
- pour $v(t) < -v_{\max}$: $q(t) = -q_{\max}$;
- pour $v(t) > v_{\max}$: $q(t) = +q_{\max}$, $v_{\max} = 10 \text{ V}$.

Le système n'est pas encore corrigé, $C(p) = 1$ et on souhaite simuler le fonctionnement où le navigateur veut déplacer la quille avec une consigne angulaire de position de 45° . Cette demande est modélisée par une consigne $\theta_c(t)$ en échelon, soit : $\theta_c(t) = \theta_0 u(t)$ avec $\theta_0 = 45^\circ$ et $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t > 0$. La figure suivante présente dans ces conditions les évolutions temporelles de deux grandeurs de la boucle d'asservissement, le débit sortant de la servo valve $q(t)$ et la position angulaire de la quille $\theta(t)$.



Sur la figure précédente, la courbe représentative de $q(t)$ présente un palier où $q(t)$ garde une valeur constante.

Question 4 À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de K_{SV} ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

Question 5 Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

Comportement pour une commande de faible amplitude

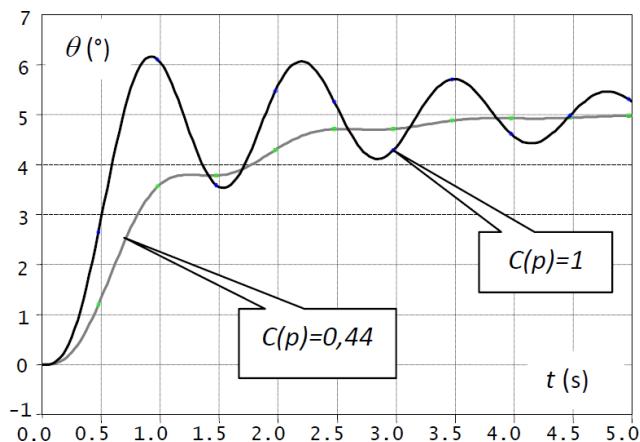
On étudie la réponse du système non corrigé ($C(p) = 1$) à une entrée échelon de 5° d'amplitude avec $F_R = 0$. Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est : $H_{BO}(p) = K_{SV}H_1H_2K_\theta K_C$ et $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$.

Question 6 Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension $v(t)$ à l'instant initial $t = 0^+$, $v(0^+)$. Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

Question 7 De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

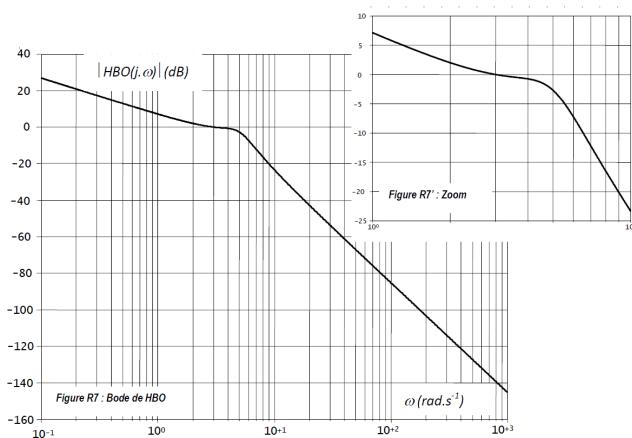
Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de 5° d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- $C(p) = 1$: la courbe présente des dépassements, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée;
- $C(p) = 0,44$: toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).



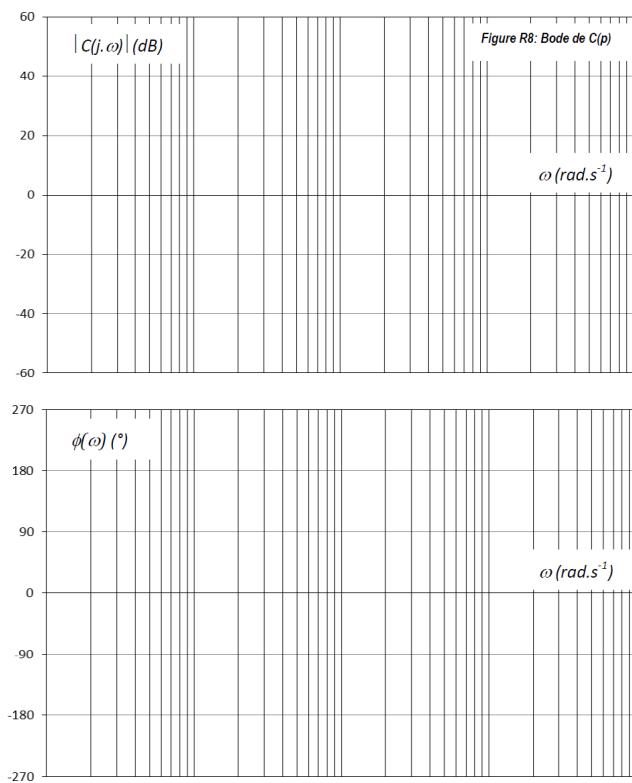
À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation généreraient dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

Question 8 Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de $H_{BO}(p)$ en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.



Question 9 Déterminer par calcul la pulsation de résonance ω_r de cette fonction de transfert.

Question 10 Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation ω_r la différence, notée ΔK et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.



Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de $C(p)$ permettant d'abaisser l'amplitude de ΔK à la pulsation ω_r . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert $C(p) = K_{COR} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$ avec $b > 1$. Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation ω^* tel que : $\sin[\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$ et $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$.

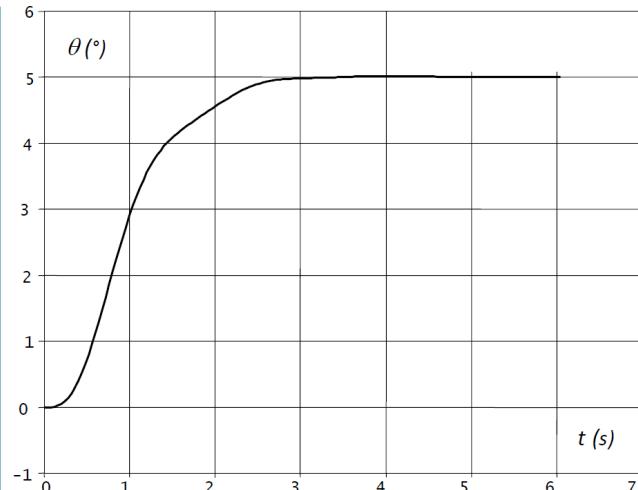
L'étude consiste à déterminer les valeurs de T et b .

Question 11 Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour $K_{COR} = 1$. Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

Question 12 Déterminer alors en fonction de b , l'amplitude $|C(j\omega^*)|_{dB}$ à la pulsation notée ω^* .

Question 13 Pour $K_{COR} = 1$, en faisant correspondre la pulsation de résonance ω_r de H_{BO} à ω^* :

- calculer b pour que « l'excès » de gain ΔK soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de T ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation ω^* .



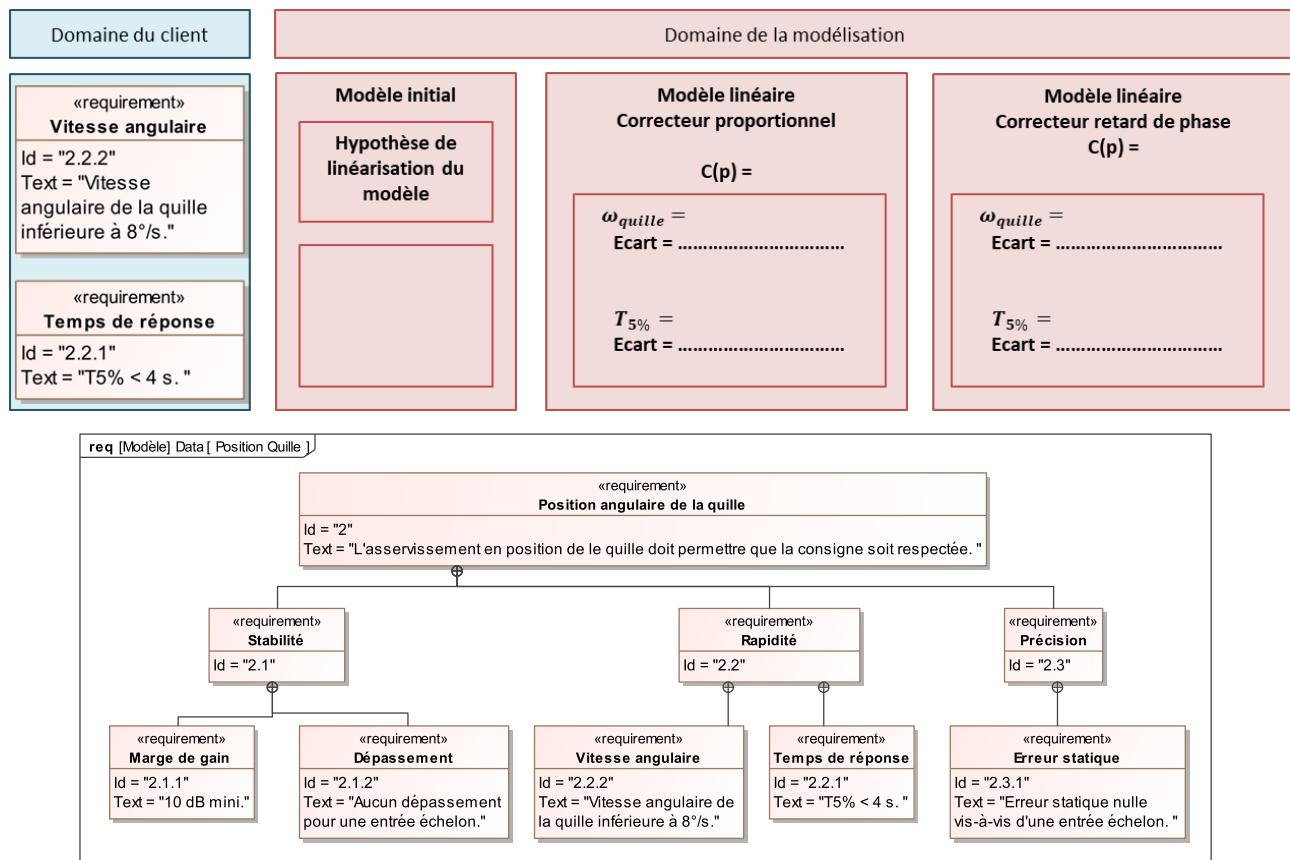
Validation du cahier des charges

La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain K_{COR} a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

Question 14 Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

Question 15 Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

1. $A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.
2. $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$.
3. $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda p V + kV + 2BS^2)}$.
4. $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$. Pour $t < 1,9 \text{ s}$: BO et $t > 1,9 \text{ s}$: BF.
- 5.
6. $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$.
- 7.
- 8.
9. $\omega_r \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}$.
10. $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$.
- 11.
12. $-10 \log b$.
13. $b = 3,02, T = 0,127 \text{ s}, \phi(\omega^*) \approx -28,79^\circ$.
14. $t_5 \% \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s} 4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$.



TD 1



Quille pendulaire *

Concours Commun Mines Ponts 2014

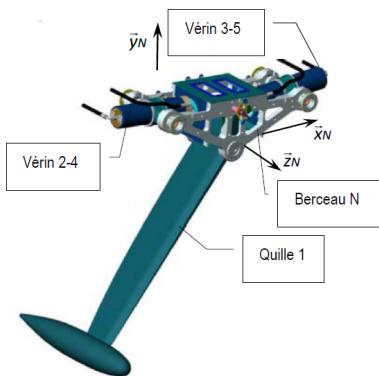
Savoirs et compétences :

- Con.C2 : Correction d'un système asservi
- Con.C2.SF1 : Choisir un type de correcteur adapté

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



Modèle volumique 3D

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

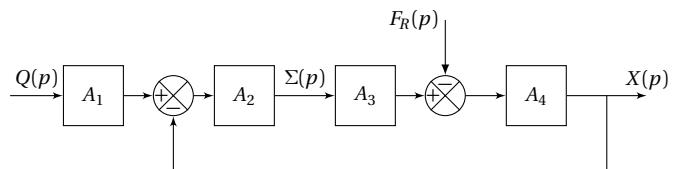
Objectif L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servo valve de débit. Ce composant délivre un débit $q(t)$ proportionnel à sa tension de commande $v(t)$. Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté

en pression via sa servo valve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servovalves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$ (a);
- $M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$ (b).

On a :

- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$: débit d'alimentation du vérin [$m^3 s^{-1}$];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$: différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$: position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$: composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

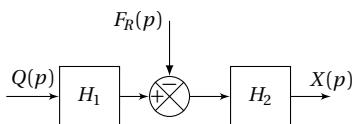
Les constantes sont les suivantes :

- S : section du vérin [m^2];
- k : raideur mécanique du vérin [$N m^{-1}$];
- V : volume d'huile de référence [m^3];

- B : coefficient de compressibilité de l'huile [N m^{-2}];
- M : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];
- λ : coefficient de frottement visqueux [$\text{N m}^{-1}\text{s}$].

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

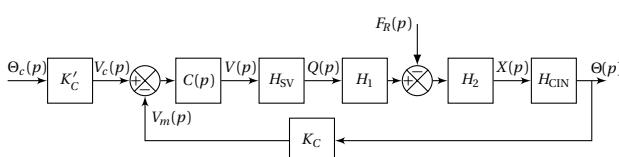
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par $F_R(p)$ ne sera pas prise en compte.



On a :

- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$: consigne de position angulaire [$^{\circ}$];
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$: position angulaire de la quille [$^{\circ}$];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$: tension de commande de la servo valve [V];
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$: tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$: tension image de la position [V].

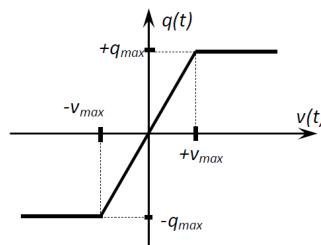
On a de plus :

- K_c : gain du capteur angulaire potentiométrique [V/ $^{\circ}$];
- K'_c : gain du bloc d'adaptation réglé tel que $K'_c = K_c = 1,1 \text{ V}/^{\circ}$;
- $C(p)$: correcteur de position;
- H_{CIN} : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation. $H_{\text{CIN}} = K_\theta [^{\circ} \cdot \text{m}^{-1}]$;
- H_{SV} : fonction de transfert de la servo valve.

Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

La servovalve présente un fonctionnement non-linéaire provenant d'un phénomène de saturation qui

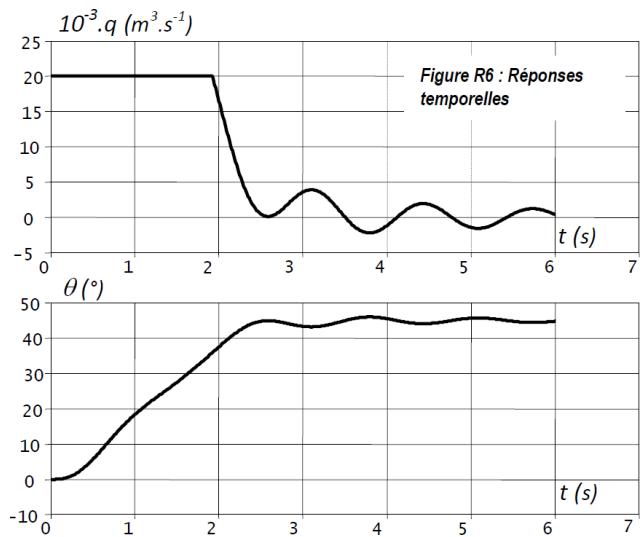
est défini par la courbe de la figure suivante donnant les évolutions du débit $q(t)$ fourni par la servovalve en fonction de sa tension de commande $v(t)$.



Ainsi :

- pour $v(t) > +v_{\max}$ et $v(t) < -v_{\max}$: $H_{\text{SV}} = K_{\text{SV}} [\text{m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}]$
- pour $v(t) < -v_{\max}$: $q(t) = -q_{\max}$;
- pour $v(t) > +v_{\max}$: $q(t) = +q_{\max}$, $v_{\max} = 10 \text{ V}$.

Le système n'est pas encore corrigé, $C(p) = 1$ et on souhaite simuler le fonctionnement où le navigateur veut déplacer la quille avec une consigne angulaire de position de 45° . Cette demande est modélisée par une consigne $\theta_c(t)$ en échelon, soit : $\theta_c(t) = \theta_0 u(t)$ avec $\theta_0 = 45^{\circ}$ et $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t > 0$. La figure suivante présente dans ces conditions les évolutions temporelles de deux grandeurs de la boucle d'asservissement, le débit sortant de la servo valve $q(t)$ et la position angulaire de la quille $\theta(t)$.



Sur la figure précédente, la courbe représentative de $q(t)$ présente un palier où $q(t)$ garde une valeur constante.

Question 4 À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de K_{SV} ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

Question 5 Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

Comportement pour une commande de faible amplitude

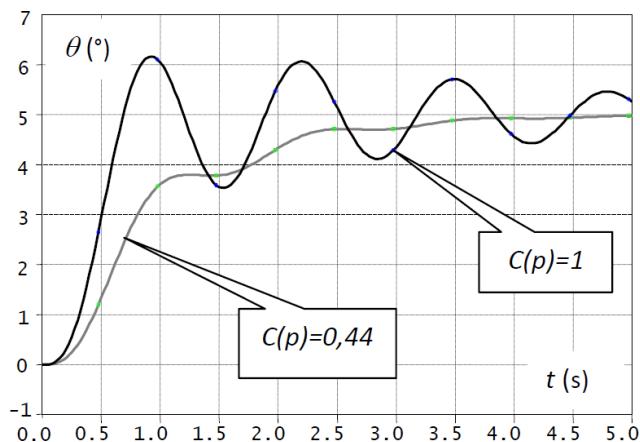
On étudie la réponse du système non corrigé ($C(p) = 1$) à une entrée échelon de 5° d'amplitude avec $F_R = 0$. Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est : $H_{BO}(p) = K_{SV}H_1H_2K_\theta K_C$ et $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$.

Question 6 Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension $v(t)$ à l'instant initial $t = 0^+$, $v(0^+)$. Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

Question 7 De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

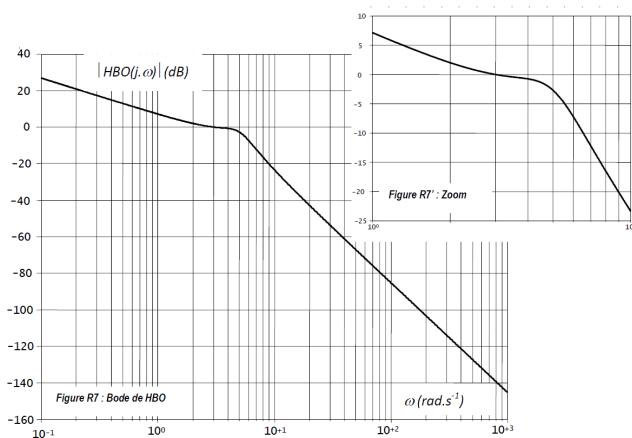
Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de 5° d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- $C(p) = 1$: la courbe présente des dépassements, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée;
- $C(p) = 0,44$: toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).



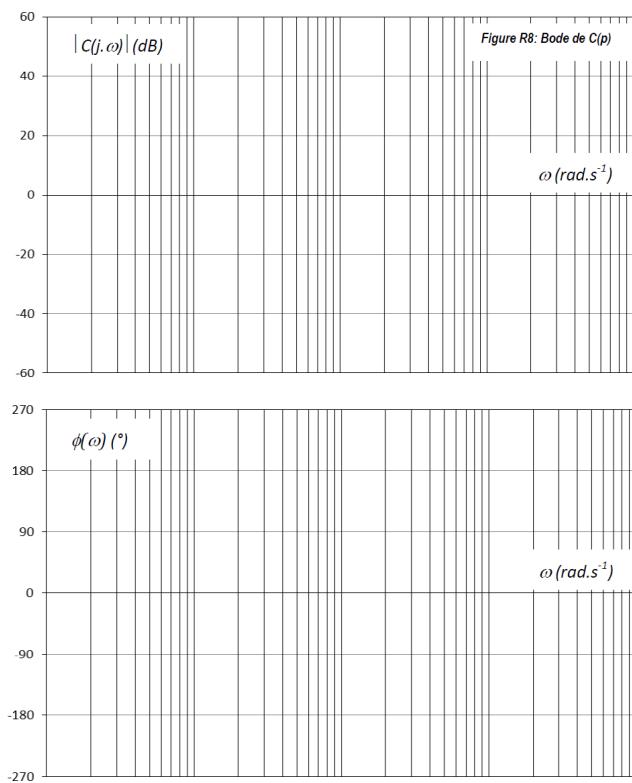
À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation généreraient dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

Question 8 Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de $H_{BO}(p)$ en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.



Question 9 Déterminer par calcul la pulsation de résonance ω_r de cette fonction de transfert.

Question 10 Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation ω_r la différence, notée ΔK et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.



Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de $C(p)$ permettant d'abaisser l'amplitude de ΔK à la pulsation ω_r . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert $C(p) = K_{COR} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$ avec $b > 1$. Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation ω^* tel que : $\sin[\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$ et $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$.

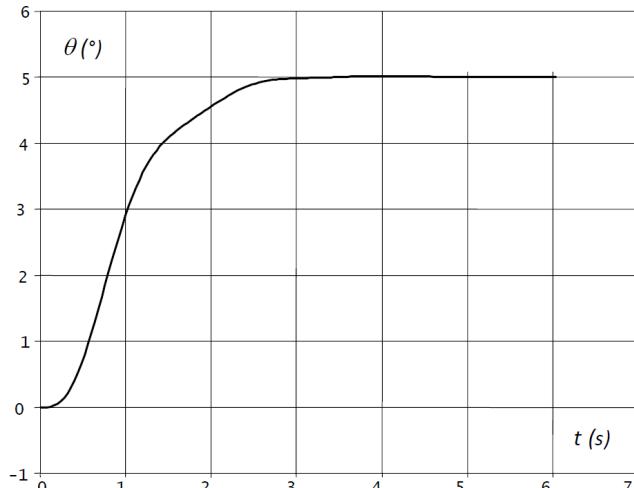
L'étude consiste à déterminer les valeurs de T et b .

Question 11 Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour $K_{COR} = 1$. Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

Question 12 Déterminer alors en fonction de b , l'amplitude $|C(j\omega^*)|_{dB}$ à la pulsation notée ω^* .

Question 13 Pour $K_{COR} = 1$, en faisant correspondre la pulsation de résonance ω_r de H_{BO} à ω^* :

- calculer b pour que « l'excès » de gain ΔK soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de T ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation ω^* .



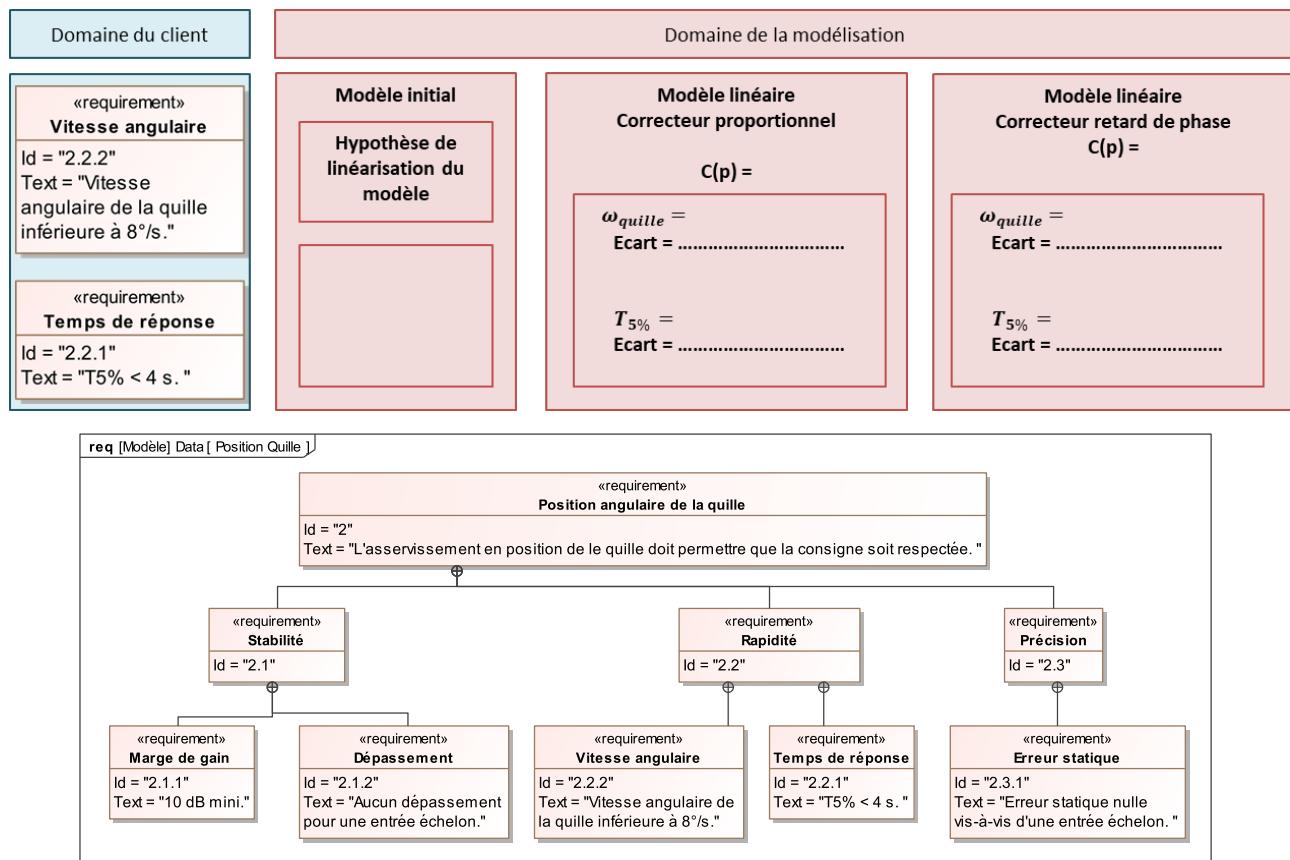
Validation du cahier des charges

La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain K_{COR} a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

Question 14 Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

Question 15 Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

1. $A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.
2. $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$.
3. $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda p V + kV + 2BS^2)}$.
4. $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$. Pour $t < 1,9 \text{ s}$: BO et $t > 1,9 \text{ s}$: BF.
- 5.
6. $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$.
- 7.
- 8.
9. $\omega_r \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}$.
10. $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$.
- 11.
12. $-10 \log b$.
13. $b = 3,02, T = 0,127 \text{ s}, \phi(\omega^*) \approx -28,79^\circ$.
14. $t_5\% \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$ $4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$.



TD 1 – Corrigé



Quille pendulaire *

Concours Commun Mines Ponts 2014

Savoirs et compétences :

- Con.C2 : Correction d'un système asservi
- Con.C2.SF1 : Choisir un type de correcteur adapté

Mise en situation

Objectif L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

Modélisation du vérin

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

Correction D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace : $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$ et $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$.
 En utilisant le schéma-blocs, on a $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$.
 Par ailleurs $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}p} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$. On a donc $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$ soit $A_1 = \frac{2B}{Vp}\frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}$.
 On a aussi $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$. Par ailleurs, $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$. On a donc : $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ et $A_3 = S$.
 Au final, $A_1 = \frac{1}{Sp}$, $A_2 = \frac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

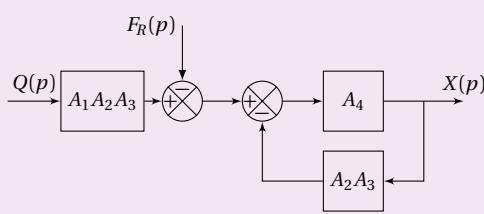
Correction Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes On a $X(p) = (H_1Q(p) - F_R(p))H_2(p)$.

Par ailleurs, on a vu que $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p))$ et $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p))$.

On a donc $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2(A_1Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p))$. On a donc $H_1(p) = A_1A_2A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$.

Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs Revient à utiliser la méthode précédente.

Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$$A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S \text{ et } A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}.$$

$$\text{En faisant le calcul on obtient : } H_1(p) = \frac{2BS}{pV} \text{ et } H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}.$$

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Correction Dans ce cas, $\frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}$.

Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

Question 4 À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de K_{SV} ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

Correction En début de simulation, il y a une saturation du débit à $20 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$. La tension de commande en régime saturé étant de 10 V, on a $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}$.

Jusqu'à 1,9 seconde, le retour n'a aucune influence sur la commande. On est donc en BO. Au delà, la régulation entre en jeu. On est donc en BF.

Question 5 Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

Correction

Exigences	Niveau	Simulation	Validation
Stabilité : C11 : Marge de gain C12 : Dépassement vis-à-vis d'une entrée en échelon	10 dB Aucun	– Dépassement faible	– NON
Rapidité : C21 : Temps de réponse à 5 % C22 : Vitesse angulaire de rotation de la quille	4 s maxi $8^\circ/\text{s}$ maxi	$\simeq 2,5 \text{ s}$ $\simeq 20^\circ \text{s}^{-1}$	OUI NON
Précision C3 : Erreur statique vis-à-vis d'une entrée en échelon	Nulle	Difficile à mesurer	–

Comportement pour une commande de faible amplitude

Question 6 Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension $v(t)$ à l'instant initial $t = 0^+$, $v(0^+)$. Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

Correction En BO, on va avoir $v(0^+) = 5 \cdot K'_C = 5,5 \text{ V}$.
 $v(0^+) < 10 \text{ V}$. On est ici en BO. La tension ne peut donc pas dépasser la tension de saturation.

Question 7 De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

Correction Pour de telles tension, on est donc en régime linéaire.

Question 8 Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de $H_{BO}(p)$ en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.

Correction On a : $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$. En conséquences, $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,04$ et $\omega_0 = 5 \text{ rad s}^{-1}$ et $\frac{2\xi}{\omega_0} = 0,12 \Leftrightarrow \xi = 0,3$.

On a donc une asymptote de -20 dB/decade pour $\omega < 5 \text{ rad s}^{-1}$ et -60 dB/decade pour $\omega > 5 \text{ rad s}^{-1}$.

De plus, pour $\omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$, on a $20 \log \frac{2,2}{5} = -7,1 \text{ dB}$.

Question 9 Déterminer par calcul la pulsation de résonance ω_r de cette fonction de transfert.

Correction On a $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = 5 \times \sqrt{1 - 2 \times 0,3^2} \simeq 4,5 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 10 Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation ω_r la différence, notée ΔK et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.

Correction L'amplitude de résonance ne dépend que du système du second ordre. On a alors (résultat de cours sur le second ordre) : $\Delta K = 20 \log \left(\frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \right) = 20 \log \left(\frac{1}{2 \times 0,3 \sqrt{1 - 0,3^2}} \right) = 4,8 \text{ dB}$.

Question 11 Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour $K_{COR} = 1$. Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

Correction On a $b > 1$ donc $T < bT$ et $\frac{1}{T} > \frac{1}{bT}$.

Pour $\omega < \frac{1}{bT}$ on a donc un gain de pente nulle et un déphasage nul.

Pour $\frac{1}{bT} < \omega < \frac{1}{T}$ on a donc un gain de pente -20 dB/decade et un déphasage de -180° .

Pour $\omega > \frac{1}{T}$ on a donc un gain de pente 0 dB/decade et un déphasage de 0° .

Question 12 Déterminer alors en fonction de b , l'amplitude $|C(j\omega^*)|_{dB}$ à la pulsation notée ω^* .

$$\text{Correction} \quad |C(j\omega^*)|_{dB} = 10 \log \frac{1 + T^2 \frac{1}{T^2 b}}{1 + b^2 T^2 \frac{1}{T^2 b}} = 10 \log \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + b} = 10 \log \frac{1}{b} \frac{1 + b}{1 + b} = -10 \log b.$$

Question 13 Pour $K_{COR}=1$, en faisant correspondre la pulsation de résonance ω_r de H_{BO} à ω^* :

- calculer b pour que « l'excès » de gain ΔK soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de T ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation ω^* .

Correction D'une part, on veut que $|C(j\omega^*)|_{dB} = -4,8$ soit $10 \log b = 4,8$ et $b = 3,02$. D'autre part, $\omega^* = \omega_r$ et $T = \frac{1}{\omega_r \sqrt{b}} = 0,127 \text{ s}$.

Par ailleurs, on a donc $\phi(\omega^*) = \arcsin \left(\frac{1-b}{1+b} \right) = \arcsin \left(\frac{1-3,02}{1+3,02} \right) \simeq -28,79^\circ$.

Validation du cahier des charges

Question 14 Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

Correction En regardant où la courbe a la pente la plus importante, on a approximativement $2/0,5 \simeq 4^\circ/\text{s}$.
 $t_5 \% \simeq 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s}$ $4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$.
 CDCF validé.

Question 15 Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

Correction

