

TD 3



Machine de rééducation SysReeduc

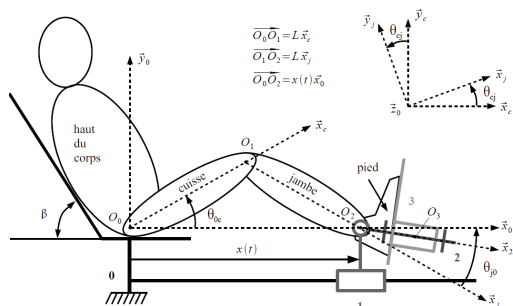
CCP PSI 2013

Savoirs et compétences :

- ❑ Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- ❑ Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CRESTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

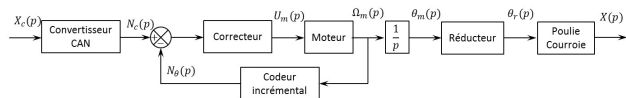


Objectif L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrer le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

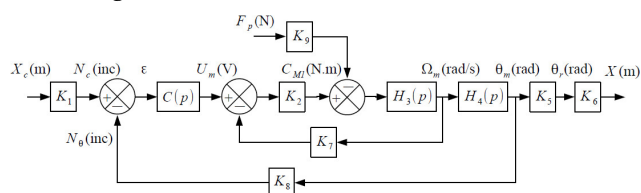
Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2 \text{ s}$
Pulsation au gain unité	50 rad s^{-1}

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



Éléments de modélisation

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$ et $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

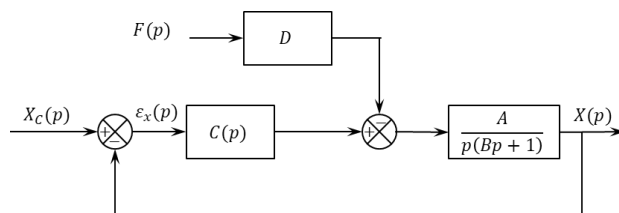
$$(M + m) r \rho_1 \dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1 = \frac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r = 46,1 \text{ mm}$ le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1 , K_2 , $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5 , K_6 , K_7 , K_8 et K_9 .

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A , B et D en fonction des paramètres du système r , ρ_1 , k_t , k_e , R , M , m et K_8 .



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A , B et D , avec $A = 6700 \text{ m/V}$, $B = 0,01 \text{ s}$ et $D = 6 \text{ V/N}$.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 3 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_c .

Question 4 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

Question 5 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

Question 6 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_i .

Question 7 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 8 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Question 9 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

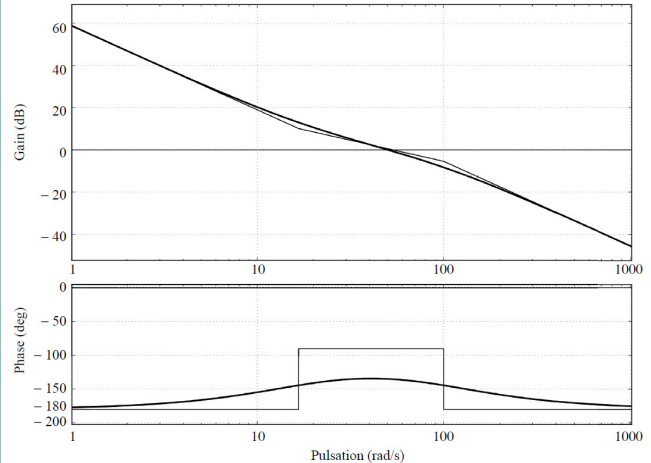
Question 10 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur

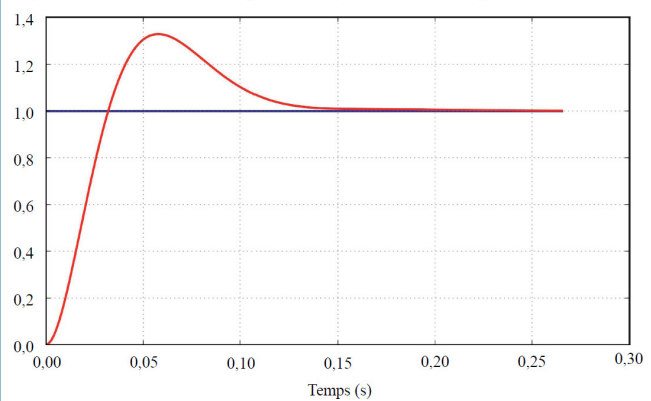
le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 11 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

Diagramme de Bode de la FTBO :



Réponse indicielle unitaire sur le déplacement / $F_p = 0$. Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.



TD 3



Machine de rééducation SysReeduc

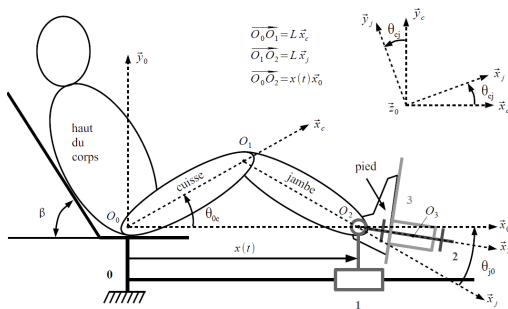
CCP PSI 2013

Savoirs et compétences :

- ❑ Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- ❑ Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CRESTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

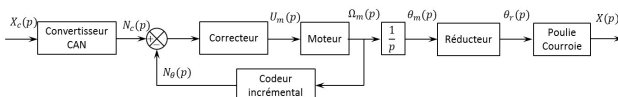


Objectif L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrer le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

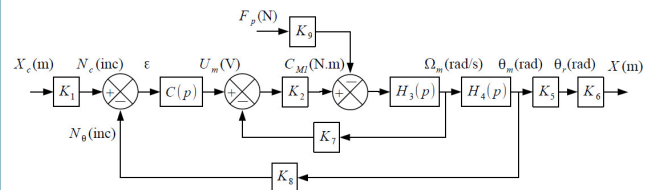
Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2\text{ s}$
Pulsation au gain unité	50 rad s^{-1}

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



Éléments de modélisation

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$ et $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

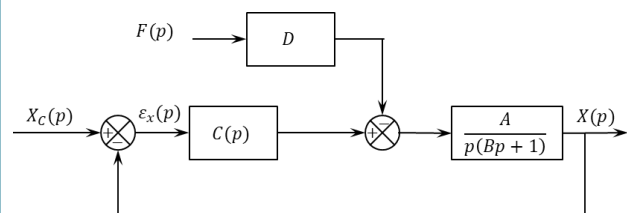
$$(M + m) r \rho_1 \dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1 = \frac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r = 46,1\text{ mm}$ le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1 , K_2 , $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5 , K_6 , K_7 , K_8 et K_9 .

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A , B et D en fonction des paramètres du système r , ρ_1 , k_t , k_e , R , M , m et K_8 .



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A , B et D , avec $A = 6700\text{ m/V}$, $B = 0,01\text{ s}$ et $D = 6\text{ V/N}$.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 3 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_C .

Question 4 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

Question 5 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

Question 6 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_i .

Question 7 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 8 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Question 9 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

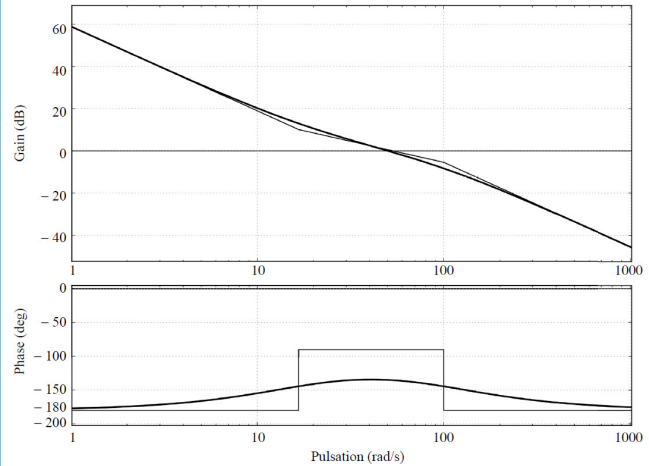
Question 10 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur

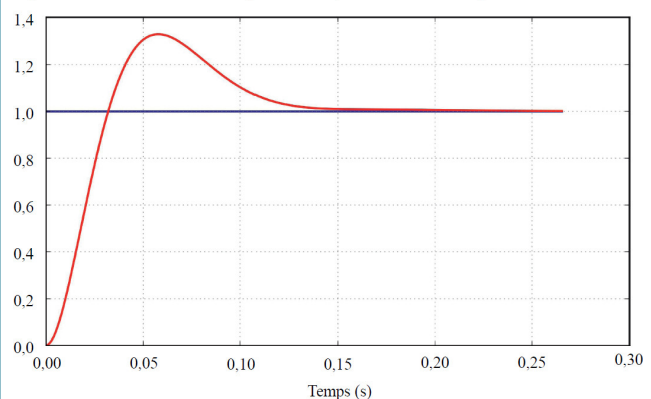
le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 11 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

Diagramme de Bode de la FTBO :



Réponse indicielle unitaire sur le déplacement / $F_p = 0$. Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.



TD 3 – Corrigé



Machine de rééducation SysReeduc

CCP PSI 2013

Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- ☐ Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

Éléments de modélisation

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1 , K_2 , $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5 , K_6 , K_7 , K_8 et K_9 .

Correction

On a :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \frac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M + m)r\rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M + m)r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \frac{1}{(M + m)r^2 \rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \frac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incréments. X_c est la consigne que doit respecter X . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_c - K_8 \theta_m = K_1 X_c - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$. Au final, $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$.

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A , B et D en fonction des paramètres du système r , ρ_1 , k_t , k_e , R , M , m et K_8 .

Correction

$$\text{On montre } A = \frac{K_8}{k_e}, B = \frac{R(m + M)r^2 \rho_1^2}{k_e k_t} \text{ et } D = \frac{r^2 \rho_1^2 R}{K_8 k_t}.$$

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 3 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_c .

Correction

$$\text{On a } \varepsilon_x(p) = X_c(p) - X(p) = X_c(p) - \left((C(p)\varepsilon_x(p) - F(p)D) \frac{A}{p(Bp + 1)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left(1 + \frac{AC(p)}{p(Bp+1)} \right) = X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)}$$

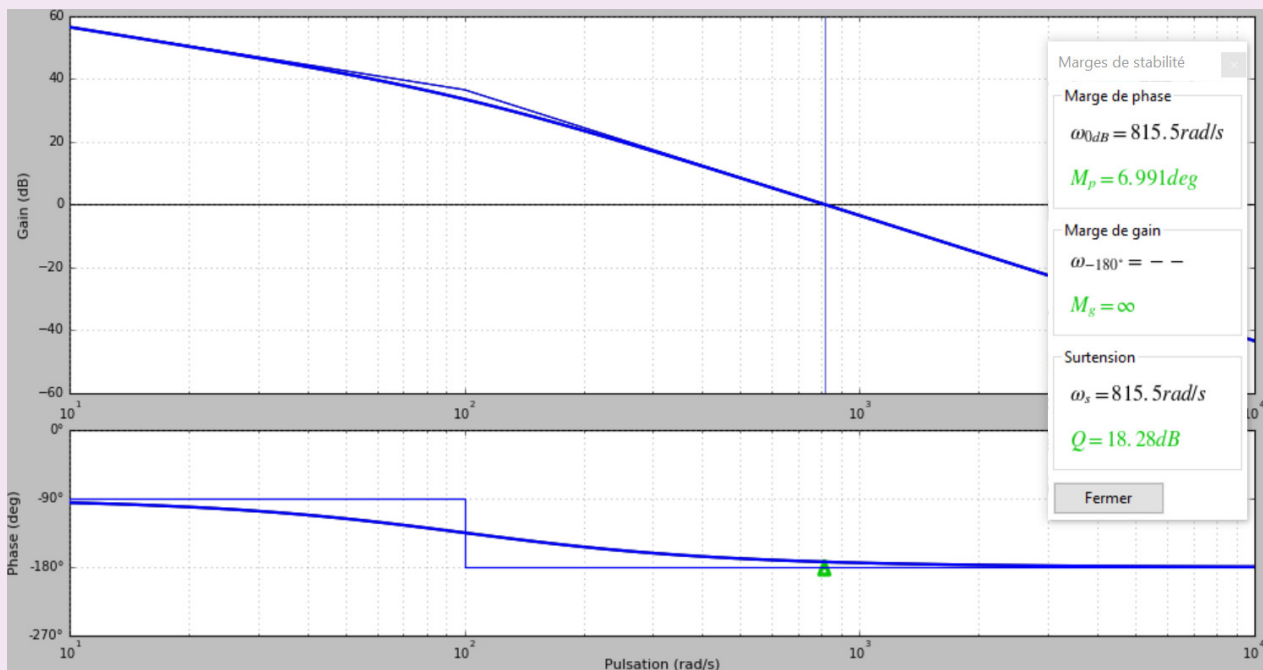
$$\Leftrightarrow \varepsilon_x(p) \left(\frac{p(Bp+1) + AC(p)}{p(Bp+1)} \right) = X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1)} \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AC(p)} X_C(p) + \frac{AF(p)D}{p(Bp+1) + AC(p)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} F(p)$$

Question 4 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

Correction

On a $FTBO(p) = \frac{A}{p(Bp+1)}$.



La marge de phase n'est pas respectée.

Question 5 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

$$\text{On a : } \varepsilon_x = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_x(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} \frac{F_p}{p} \right)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_C} X_0 + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_C} F_p$$

$$= \frac{D}{K_C} F_p$$

L'écart en position n'est donc pas nul.

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

Question 6 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_i .

Correction

$$\varepsilon_x(p) = \frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)} X_C(p) + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)} F(p)$$

Question 7 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{p(Bp+1)}{p(Bp+1) + AK_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)} \frac{X_0}{p} + \frac{AD}{p(Bp+1) + AK_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)} \frac{F_0}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p T_i p (Bp+1)}{p T_i p (Bp+1) + AK_i (T_i p + 1)} X_0 + \frac{AD T_i p}{T_i p p (Bp+1) + AK_i (T_i p + 1)} F_0 = 0. \end{aligned}$$

Question 8 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Correction

$$FTBO(p) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p}.$$

Question 9 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Correction

On souhaite que pour $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$, $\varphi(\omega) = -135^\circ$.

$$\arg(FTBO(j\omega)) = \arg\left(\frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p}\right) = -180 - \arg((Bp+1)) + \arg(1 + T_i p)$$

$= -180 - \arctan B\omega + \arctan T_i \omega$ En $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$ on a alors $-180 - \arctan 0,5 + \arctan 50 T_i = -135 \Leftrightarrow \arctan 50 T_i = -135 + 180 + \arctan 0,5 = 74$. D'où $T_i = 0,05 \text{ s}$.

Question 10 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

Correction

On souhaite que $|FTBO(j\omega)| = 1$ pour $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$.

$$|FTBO(j\omega)| = \left| \frac{A}{p(Bp+1)} K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p} \right| = AK_i \frac{1}{\omega \sqrt{B^2 \omega^2 + 1}} \frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{T_i \omega} = \frac{AK_i}{T_i \omega^2} \frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}}{\sqrt{B^2 \omega^2 + 1}}.$$

$$\text{On a donc } K_i = \frac{T_i \omega^2 \sqrt{B^2 \omega^2 + 1}}{A \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2}} = 0,0077 \text{ Vm}^{-1}.$$

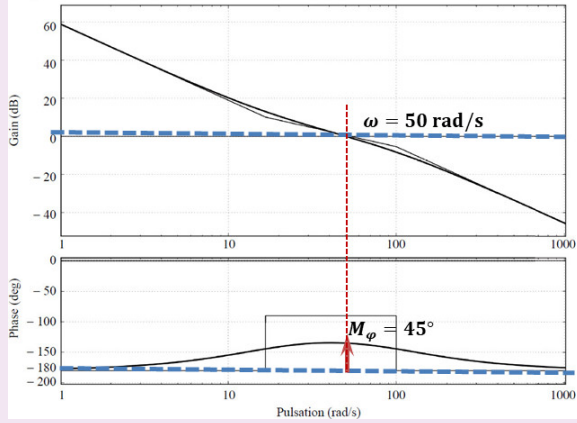
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 11 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

Correction

- Ecart de position : nul \Rightarrow Exigence OK.
- Marge de gain : infinie \Rightarrow Exigence OK.
- Marge de phase : $\approx 45^\circ \Rightarrow$ Exigence OK.

Diagramme de Bode de la FTBO :



Réponse indicielle unitaire sur le déplacement / $F_p = 0$. Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.

