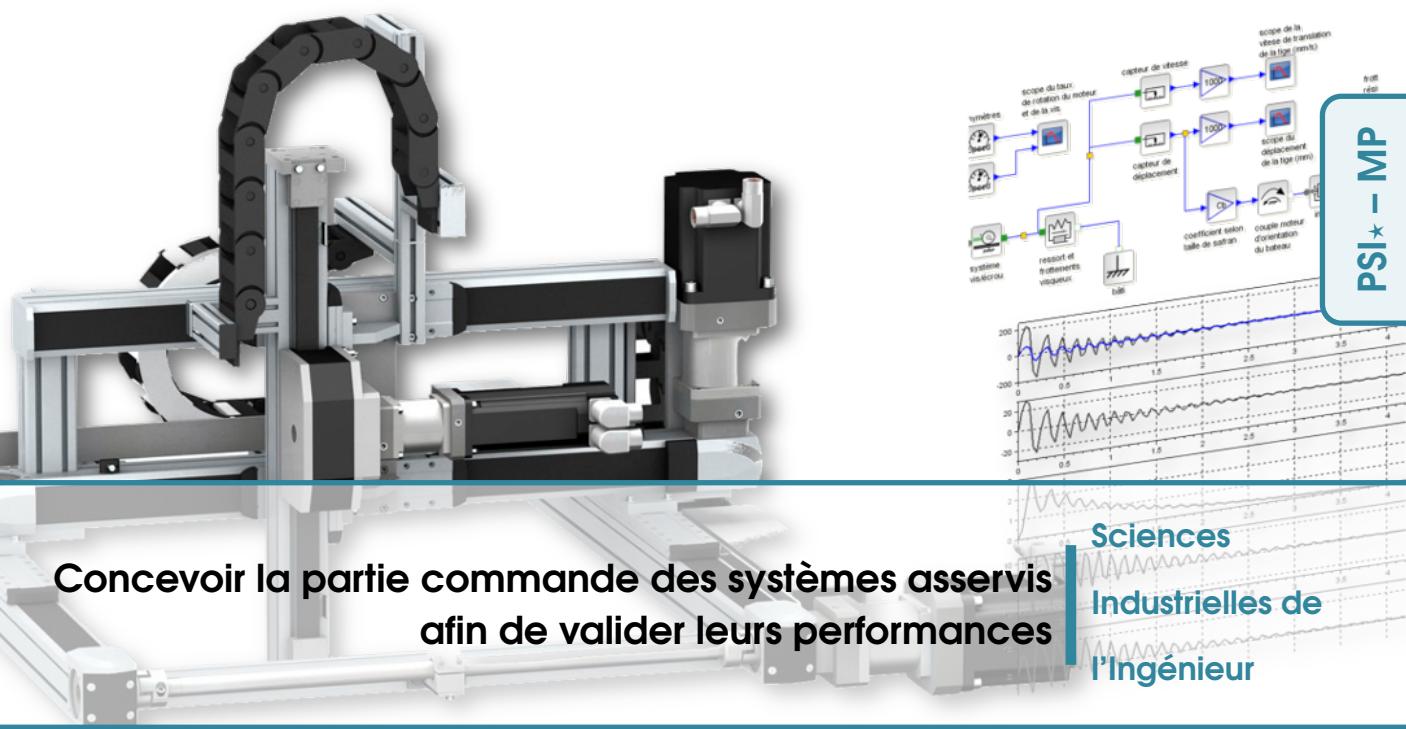


Concevoir la partie commande des systèmes asservis afin de valider leurs performances

Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur



Cours

Chapitre 1 Correction des SLCI

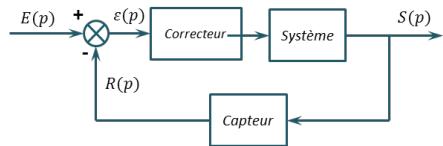
Savoirs et compétences :

- Res1.C4 : correction;
- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase,
- Con.C2 : correction d'un système asservi;
- Con.C2.SF1 : choisir un type de correcteur adapté.

1	Pourquoi corriger un système ?	2
2	Le correcteur proportionnel	3
3	Les correcteurs à action intégrale	4
3.1	Le correcteur intégral pur	4
3.2	Le correcteur proportionnel intégral	4
4	Le correcteur à avance de phase	5
5	Bilan sur l'influence des correcteurs	6

1 Pourquoi corriger un système ?

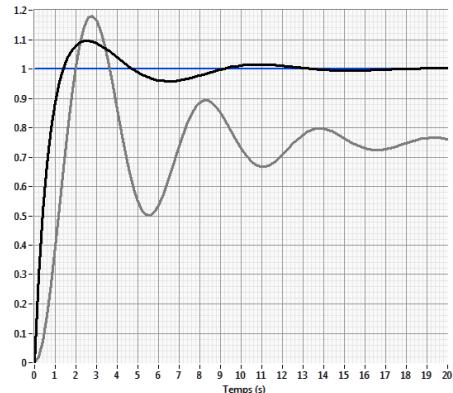
Souvent évoqué en lors de l'étude des systèmes asservis, regardons ce qui se cache derrière le bloc correcteur. On peut le considérer comme la partie intelligente du système car de sa part position dans l'architecture d'un système il reçoit l'image de l'écart entre la cosigne et la sortie du système. En fonction de cet écart, en fonction de ses « capacités » va permettre d'améliorer les performances du système.



Sur la figure ci-contre est tracée en gris la réponse indicielle d'un système non corrigé et en noir la réponse indicielle du système corrigé. On observe que le système corrigé est :

- plus précis;
- plus amorti;
- plus rapide.

L'objectif du correcteur est donc d'améliorer les caractéristiques tout en assurant la stabilité du système.



Résultat

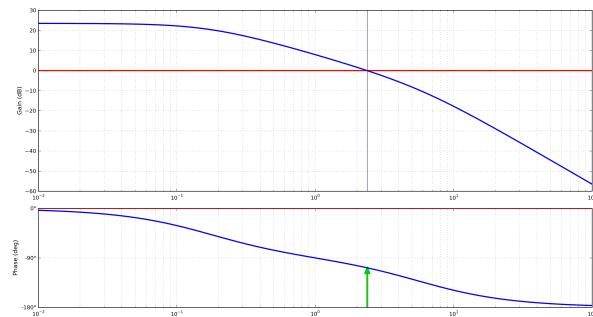
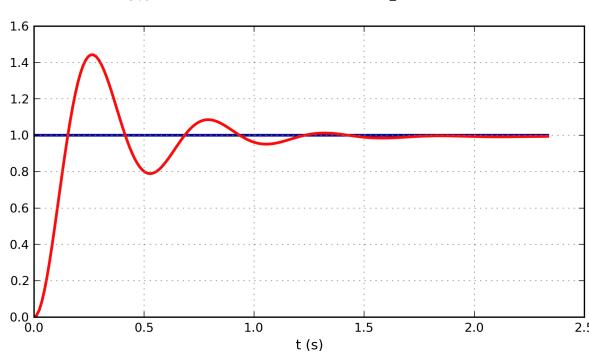
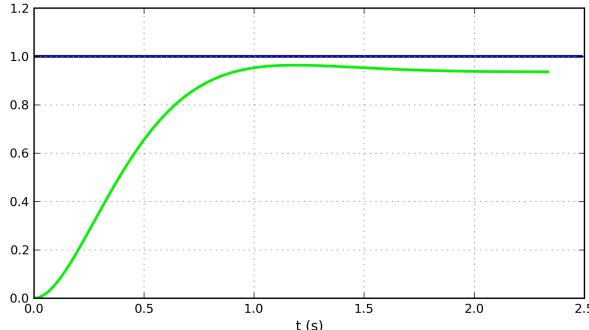
- D'après les résultats sur la stabilité des systèmes asservis :
 - le correcteur doit permettre d'avoir des marges de gains suffisantes.
- D'après les résultats sur la rapidité des systèmes asservis :
 - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain dans le but d'avoir une pulsation de coupure à 0 dB la plus grande possible (pour la FTBO).
- D'après les résultats sur la précision des systèmes asservis :
 - le correcteur doit permettre d'augmenter le gain statique de la boucle ouverte pour assurer une bonne précision du système (et d'éventuellement augmenter la classe).

Au vu de ces conclusions, le choix d'un correcteur se fera dans le domaine fréquentiel en utilisant le diagramme de Bode.

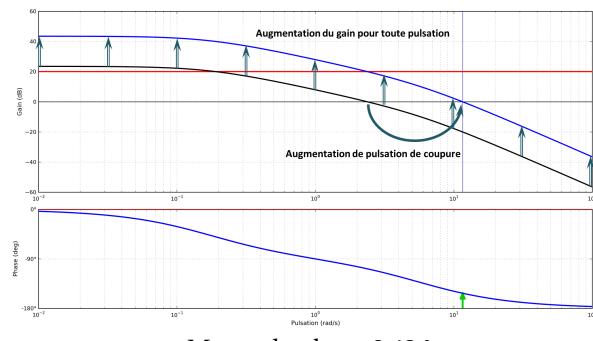
2 Le correcteur proportionnel

Définition Le correcteur proportionnel a pour fonction de transfert $C(p) = K$.

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ($K = 15$, $\xi = 3$, $\omega = 1$).



Marge de phase $71,94^\circ$



Marge de phase $6,43^\circ$

Résultat

On observe qu'une augmentation du gain proportionnel a pour effet :

- d'améliorer la précision;
- d'augmenter la vivacité;
- d'augmenter le temps de réponse (à partir d'un certain seuil);
- de diminuer l'amortissement;
- de diminuer la marge de phase.

Pour un système d'ordre supérieur à 2, l'augmentation du gain provoque une marge de phase négative et donc une instabilité du système.

Méthode

Réglage de la marge de phase :

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche ω_{0dB} tel que $\varphi(\omega_{0dB})$ respecte la marge de phase souhaitée.
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule $G_{dB}(\omega_{0dB})$.
- On cherche K_p tel que $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$

Réglage de la marge de gain :

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche ω_{-180° tel que $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$.
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule $G_{dB}(\omega_{-180^\circ})$.
- On cherche K_p tel qu'on ait la marge de gain souhaitée.

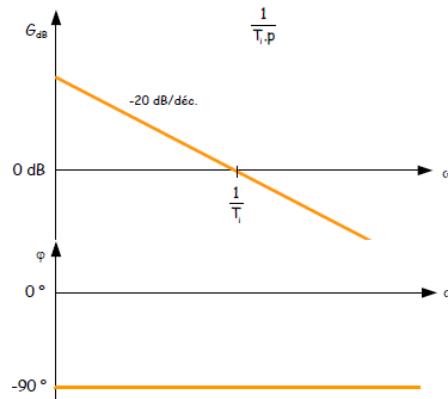
3 Les correcteurs à action intégrale

3.1 Le correcteur intégral pur

Définition

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$.

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante : $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$.



Résultat

Avantages

Ce correcteur améliore la précision lors de la sollicitation par un échelon car il ajoute une intégration dans la boucle ouverte.

Inconvénients

Le déphasage de -90° sur tout le spectre de pulsation entraîne une réduction de la marge de phase ce qui peut déstabiliser le système.

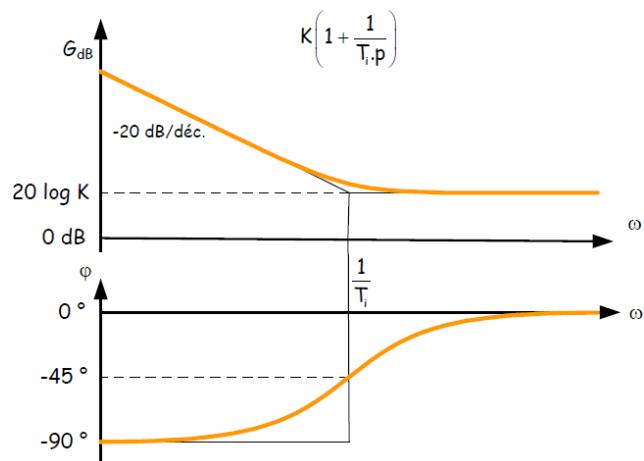
3.2 Le correcteur proportionnel intégral

Définition

Un correcteur intégral pur a pour fonction de transfert $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$.

Dans le domaine temporel on a l'équation de comportement suivante : $u(t) = K \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$.

En développant on obtient $C(p) = K \frac{T_i p + 1}{T_i p}$. Ce correcteur augmente donc la classe de la boucle ouverte et donc la précision. Si $K > 1$ la pulsation de coupure est augmentée, entraînant ainsi une augmentation de la rapidité du système. Enfin, ce correcteur diminue la phase à basse fréquence. Il faut donc faire en sorte que cette chute de phase n'intervienne pas dans la zone de la pulsation de coupure du système.



Résultat

Le correcteur proportionnel intégral :

augmente l'amortissement, augmente la rapidité, augmente la précision.

Méthode

- En utilisant la BO non corrigée, on cherche ω_{0dB} tel que $\varphi(\omega_{0dB})$ respecte la marge de phase souhaitée.
- En utilisant la BO non corrigée, on calcule $G_{dB}(\omega_{0dB})$.
- On cherche K tel que $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$
- La mise en place de l'effet intégral ne doit pas modifier la position de la pulsation de coupure réglée précédemment. Pour cela, il faut donc que $\frac{1}{T_i} \ll \omega_{0dB}$. Usuellement on positionne l'action intégrale une décade avant la pulsation réglée. On a donc $T_i = \frac{10}{\omega_{0dB}}$.

4 Le correcteur à avance de phase

Définition

Un correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert $C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$ avec $a > 1$.

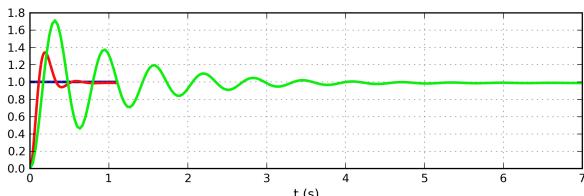
Résultat Ce correcteur permet d'ajouter de la phase pour les pulsations comprises entre $\frac{1}{a\tau}$ et $\frac{1}{\tau}$. On montre que $\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$ et ce pour une pulsation $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$.

R On peut prendre $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$ pour ne pas modifier la valeur du gain à la pulsation où on désire ajouter de la phase.

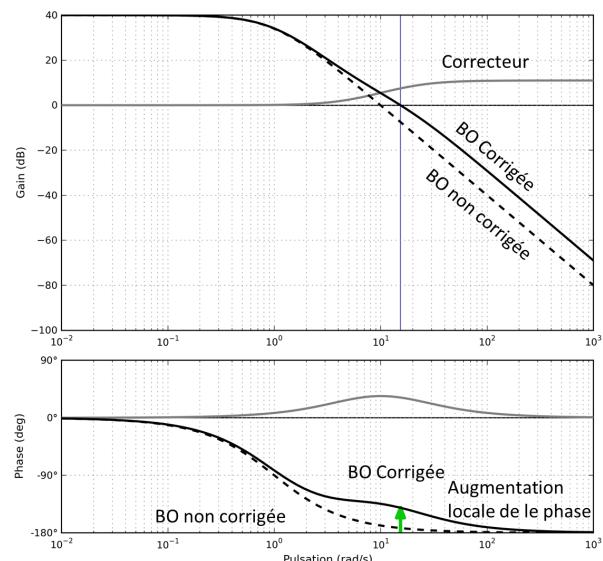
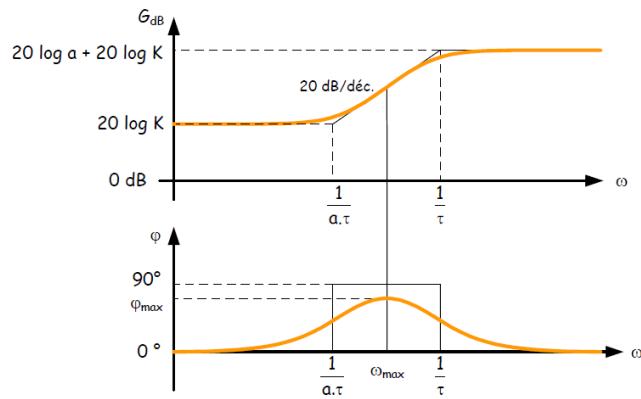
Démonstration Pour déterminer ω_{\max} on pourrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase est maximum en résolvant $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$. On peut aussi remarquer « graphiquement » que ω_{\max} est situé au milieu des deux pulsations de coupures : $\frac{1}{2} \left(\log\left(\frac{1}{\tau}\right) + \log\left(\frac{1}{a\tau}\right) \right) = \log\left(\frac{1}{a\tau^2}\right)^{1/2} = \log\left(\frac{1}{\tau\sqrt{a}}\right)$ et $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$.

D'autre part, il faudrait calculer $\varphi(\omega_{\max})$...

Prenons le cas d'un système du second ordre bouclé ($G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$, $a = 3,54$, $T = 0,053$ s).



Ici le correcteur permet une augmentation de la rapidité et un meilleur amortissement.



Méthode • En utilisant la BO non corrigée on cherche $\omega_{0\text{dB}}$ tel que le gain est nul.

- On calcule $\varphi(\omega_{0\text{dB}})$.
- On détermine la phase à ajouter.
- On calcule a .
- On calcule τ .
- On calcule K .

5 Bilan sur l'influence des correcteurs

Correcteur	Situation sans correction	
	\parallel	
	Si K_p augmente	
Proportionnel K_p	Marges	←
	Précision	→
	Rapidité	→
Proportionnel intégral $K_p + \frac{K_i}{p}$	Marges	←
	Précision	→ (Cf: classe)
	Rapidité	←
À avance de phase $K_p \frac{1+a\tau p}{1+\tau p} \quad a > 1$	Marges	→
	Précision	↔
	Rapidité	→

Références

- [1] Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.*
- [2] Florestan Mathurin, *Correction des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.*
- [3] Damien Iceta, David Violeau, Alain Caignot, Xavier Pessoles, Vincent Boyer, François Golanski, *Sciences industrielles de l'ingénieur MP/MP* PSI/PSI* PT/PT*, Méthodes. Exercices. Problèmes. Sujets de concours. Vuibert Prépas.*

Activation 1

Réglage de correcteurs P et PI

Ressources de P. Dupas.

Savoirs et compétences :

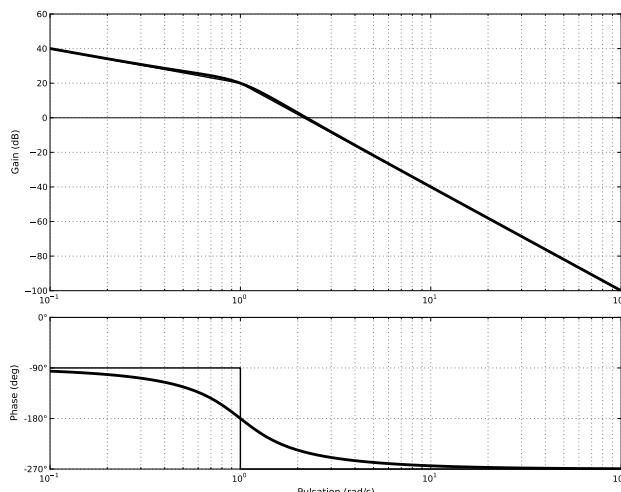
- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.

Correcteur proportionnel

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$ placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger le comportement de ce système par un correcteur proportionnel. On désire une marge de phase de 45° et une marge de gain de 10 dB.

On donne le diagramme de Bode associé à cette fonction de transfert.



Question 1 Mesurer puis calculer la marge de phase.

Question 2 Mesurer puis calculer la marge de gain.

Question 3 Déterminer K_p pour avoir une marge de phase de 45° . Vérifier la marge de gain.

Question 4 Déterminer K_p pour avoir une marge de gain de 10 dB. Vérifier la marge de phase.

1. $M_\varphi = -60^\circ$.
2. $M_G = -20$ dB.
3. $K_p = 0,054$ et $M_G = 5,35$ dB.
4. $K_p = 0,0316$ et $M_\varphi = 70^\circ$.

Correcteur proportionnel intégral

D'après ressources P. Dupas.

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{8}+1\right)}$ placé dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite disposer d'une marge de phase de 45° en utilisant un correcteur proportionnel intégral de la forme $C(p) = K_p \frac{1+\tau p}{\tau p}$.

Question 1 Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.

Question 2 Déterminer les paramètres du correcteur pour avoir une marge de phase de 45° .

Question 3 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

- 1.
2. $C(p) = 15,7 \frac{1+1,018p}{1,018p}$.
- 3.

Activitation 2

Réglage de correcteurs P et AP

Ressources de P. Dupas.

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.

Correcteur proportionnel

Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+0,1p)(1+0,2p)}$ placé dans une boucle à retour unitaire.

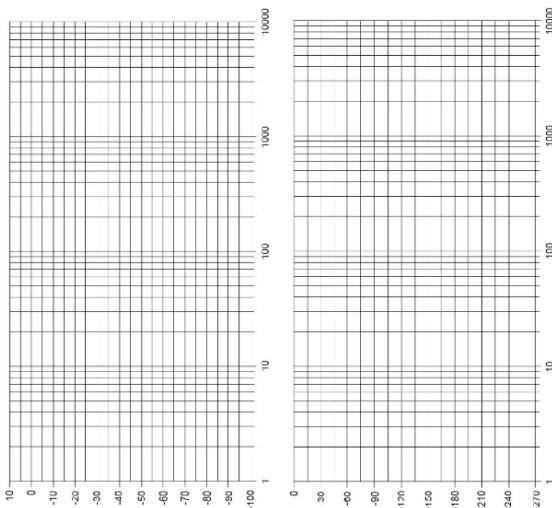
Question 4 Calculer la précision du système ε_S pour une entrée échelon unitaire.

Question 5 Tracer dans le diagramme de Bode la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

Question 6 Déterminer K pour avoir une marge de phase de 45° . Indiquer alors la valeur de la marge de gain. Indiquer la valeur de l'écart statique.

Question 7 Déterminer K pour avoir une marge de gain de 6 dB. Indiquer alors la valeur de l'écart statique.

1. $\varepsilon_S = \frac{1}{2}$.
2. .
3. $\omega_{-135^\circ} = 2,95 \text{ rad/s}$.
4. $\omega_0 \text{dB} = 7,17 \text{ rad/s}$ et $M_G = 38 \text{ dB}$ soit $K_P = 79$.



Correcteur à avance de phase

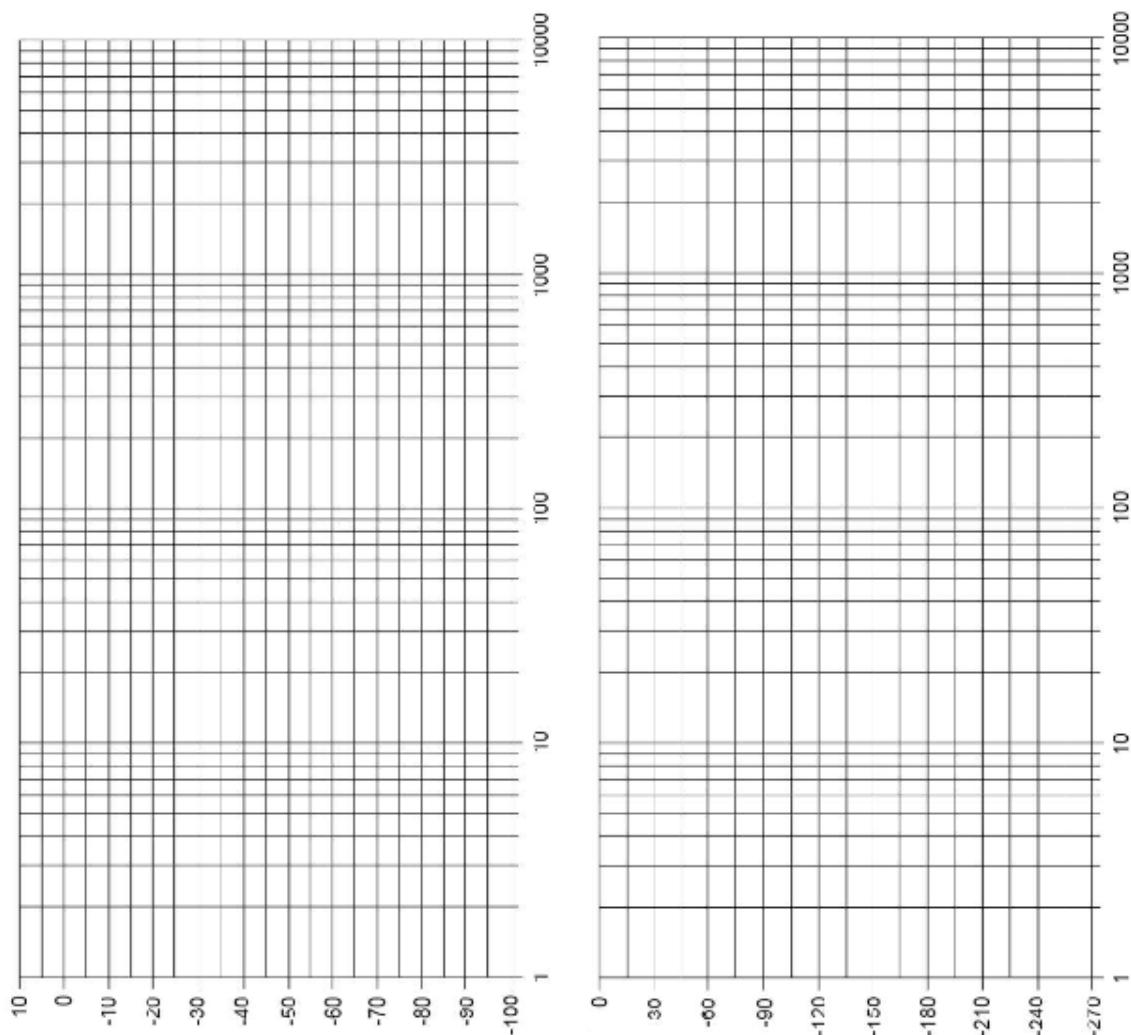
Soit un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$ placé dans une boucle à retour unitaire. On souhaite corriger ce système en utilisant un correcteur à avance de phase de la forme $C(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$.

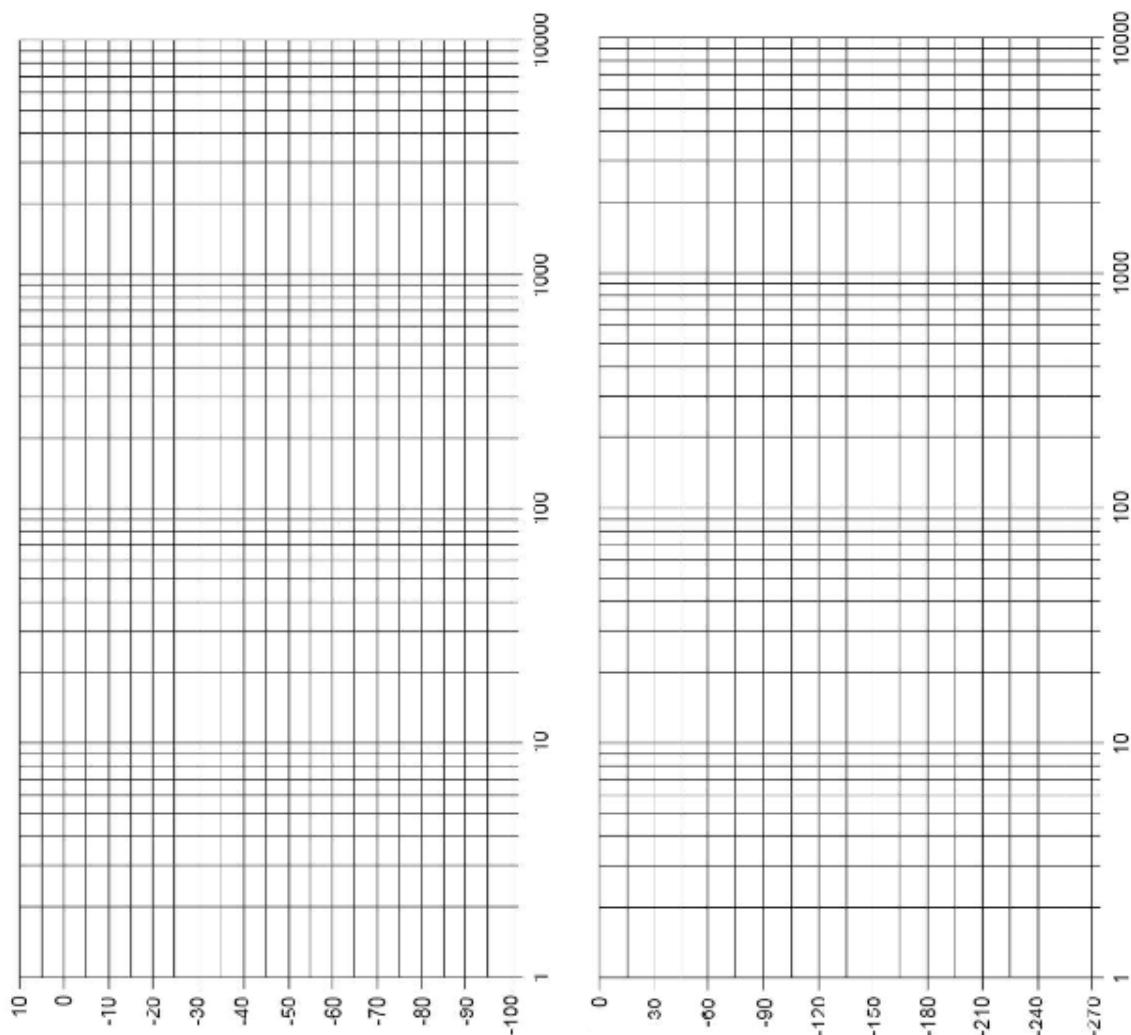
Question 1 Tracer le diagramme de Bode de $G(p)$.

Question 2 Corriger ce système de sorte que sa marge de phase soit égale à 45° .

Question 3 Tracer le diagramme de Bode du correcteur et le diagramme de la boucle ouverte corrigée.

- 1.
2. $C(p) = 0,53 \frac{1 + 3,54 \cdot 0,053p}{1 + 0,053p}$.
- 3.





TD 1

Mobilité assistée à l'aide d'une canne robotisée *

Concours CCP – PSI 2018

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel
- Con.C2 : Correction d'un système asservi
- Con.C2.SF1 : Choisir un type de correcteur adapté

Présentation du prototype de canne robotisée étudié

L'objectif de cette canne est de prendre en charge une partie des efforts normaux supportés par une jambe handicapée.

Le prototype de canne robotisée envisagé conserve une forme longiligne, un point d'appui au sol ainsi qu'un encombrement et un poids réduits. La canne robotisée, dont la structure mécanique est présentée en 1, se compose d'un axe linéaire motorisé et d'une roue motorisée située à son extrémité.

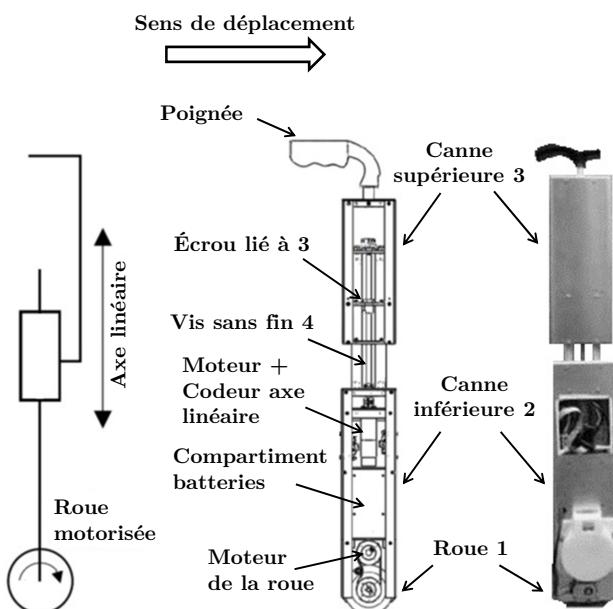
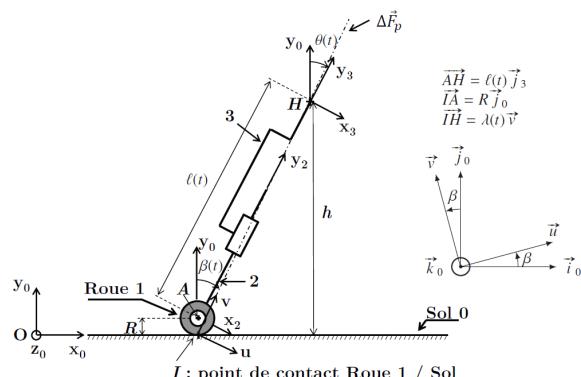


FIGURE 1 – Schéma cinématique et photographie du prototype de canne robotisée

Les deux degrés de mobilité, rendus possibles par cette structure, permettent de suivre la marche d'un sujet et lui offre un point d'appui. L'avantage est d'éviter aux utilisateurs la manipulation de la canne (levée et positionnement) pendant la marche, la roue restant toujours en contact avec le sol.

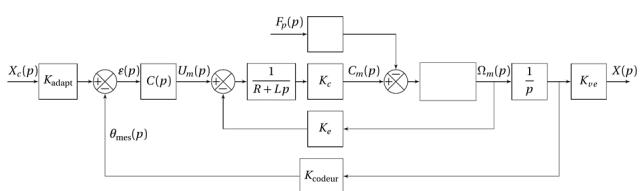
Étude de l'exigence 3.1.6.2 « Commande de l'axe linéaire »

Le maintien d'une hauteur constante lors de la phase d'appui revient finalement à asservir en position le déplacement $x(t)$ de la canne supérieure 3 par rapport à la canne inférieure 2.



Le modèle causal retenu pour l'étude du comportement de l'axe linéaire perturbé est représenté par le schéma-blocs ci-dessous. Dans ce modèle, on note :

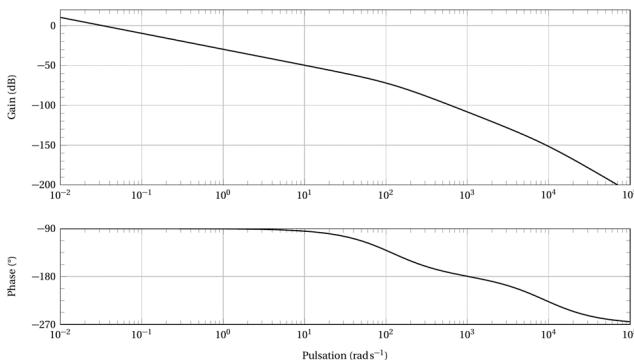
- $X_c(p)$ la transformée de Laplace de la consigne de déplacement $x_c(t)$ en mètre,
- $X(p)$ la transformée de Laplace du déplacement $x(t)$ en mètre,
- $F_p(p)$ la transformée de Laplace de l'effort exercé par le patient sur la canne $F_p(t)$ en N,
- $\Omega_m(p)$ la transformée de Laplace de la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$ en rad/s,
- $C_m(p)$ la transformée de Laplace du couple moteur $C_m(t)$ en N m,
- $C(p)$ la fonction de transfert du bloc correcteur.



Modèle comportemental

Afin de proposer une modélisation simplifiée de la chaîne d'énergie de l'axe linéaire, une simulation du modèle précédent en boucle ouverte, non perturbé, a été réalisée. Le document réponse présente la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte à l'aide du diagramme de Bode (courbe de gain $G_{BO}(\omega)$ et courbe de phase $\varphi_{BO}(\omega)$).

Question 1 À partir du diagramme de Bode, proposer un modèle de comportement du système en boucle ouverte. Soit $H_{BO_1}(p)$ cette fonction de transfert, donner sa forme canonique factorisée. Soient T_1 et T_2 , telles que $T_1 < T_2$, les constantes de temps introduites et K_{BO} le gain de $H_{BO_1}(p)$, préciser les valeurs numériques et unités de T_1 , T_2 et K_{BO} . Vous laisserez apparaître les traits de construction nécessaires à l'identification du modèle sur le document réponse.



Lors d'une marche saine à allure rapide la cadence moyenne est de 113 pas par minute.

Question 2 Déterminer la fréquence moyenne en Hz de la marche saine à allure rapide.

Pour la suite, on considérera que la fréquence maximale de déplacement de l'axe linéaire de la canne (liée au mouvement de la marche) est fixée à $F_{MAX} = 4$ Hz. On propose alors en première approximation une modélisation du comportement du système en boucle ouverte par une fonction de transfert $H_{BO}(p)$ de la forme $H_{BO}(p) = K_{BO}/p$ avec $K_{BO} = 1/30$.

Question 3 Justifier, à l'aide de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte, la validité de cette modélisation approchée.

Correction proportionnelle

Pour la suite, on modélise le comportement du système en boucle ouverte par $H_{BO}(p) = K_{BO}/p$ avec $K_{BO} = 1/30$. On considère un correcteur à action proportionnelle tel que $C(p) = K_{corr} = 1$.

Le schéma-blocs du système non perturbé correspond alors à celui de la figure 2.

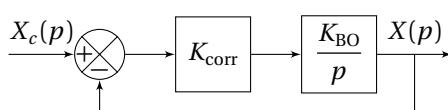


FIGURE 2 – Schéma-bloc simplifié du système non perturbé avec $C(p) = K_{corr}$

Question 4 Déterminer l'expression de $H_{BF}(p) = X(p)/X_c(p)$, la fonction de transfert en boucle fermée de la modélisation de la 2. Déterminer les paramètres caractéristiques de $H_{BF}(p)$ et en déduire les performances de cette modélisation pour $C(p) = K_{corr} = 1$. Conclure vis-à-vis des performances d'asservissement de l'axe linéaire.

On se propose de modifier la valeur de K_{corr} de manière à vérifier l'exigence de rapidité de l'asservissement.

Question 5 Déterminer la valeur numérique à donner à K_{corr} pour assurer le temps de réponse à 5 % lié à l'exigence de rapidité de l'asservissement de l'axe linéaire.

La 3 donne l'évolution de la réponse temporelle $x(t)$ du système réel non perturbé à un échelon en déplacement de valeur finale $X_c = 10$ mm, pour une correction proportionnelle $K_{corr} = 1500$.

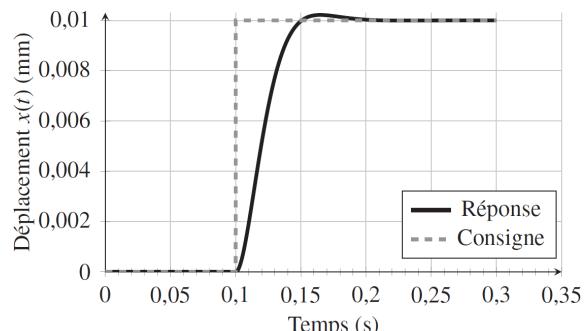


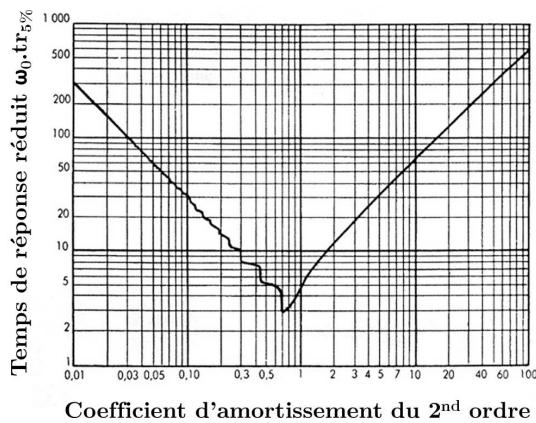
FIGURE 3 – Évolution de la réponse temporelle $x(t)$ du système réel non perturbé à un échelon de valeur $X_c = 10$ mm, pour $K_{corr} = 1500$

Question 6 L'évolution de la réponse du système est-elle cohérente avec le comportement du modèle retenu ? Justifier. Quelle modification faudrait-il apporter au modèle approché pour retrouver cette forme de réponse temporelle ?

Pour la suite, on modélise la fonction de transfert en boucle ouverte du système par $H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}}{p \cdot 1 + \tau_{BO}p}$ avec $K_{BO} = 1/30$ (unité en s^{-1}) et $\tau_{BO} = 9$ ms.

Question 7 Quelle valeur maximale de K_{corr} , notée K_{corr}^{MAX} , permet de vérifier les critères de précision et de dépassement de l'asservissement de l'axe linéaire ?

Question 8 Déterminer la valeur du temps de réponse à 5 %, $t_{r5\%}$ de ce modèle pour $K_{corr} = K_{corr}^{MAX}$ à partir de l'abaque du temps de réponse réduit donné ci-dessous.



La figure 4 donne les évolutions des réponses temporelles $x(t)$ du système réel avec prise en compte de la perturbation (F_p constante et égale à 175 N) à un échelon en déplacement de valeur finale $X_c = 10$ mm, pour une correction proportionnelle $K_{corr} = 1500$ et pour $K = K_{corr}^{\text{MAX}}$.

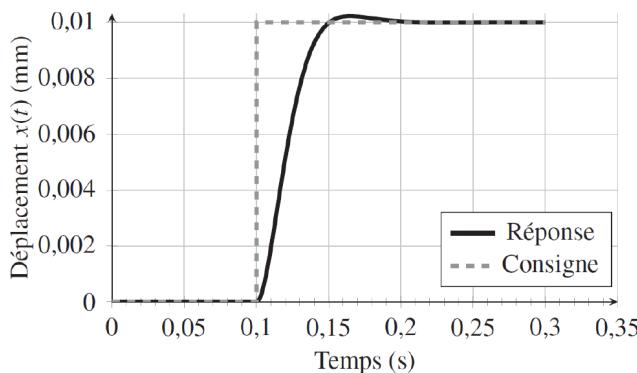


FIGURE 4 – Réponses temporelles $x(t)$ du système réel perturbé à un échelon en déplacement de valeur finale $X_c = 10$ mm, pour une correction proportionnelle $K_{corr} = 1500$ et pour $K = K_{corr}^{\text{MAX}}$

Question 9 Conclure sur les capacités de la correction à action proportionnelle pure vis-à-vis des performances à atteindre.

Correction avec action proportionnelle et intégrale généralisée – correcteur PI généralisé

Le correcteur finalement retenu est un correcteur avec action proportionnelle et intégrale généralisée. La fonction de transfert $C(p)$ prend alors la forme suivante :

$$C(p) = K_{corr} \cdot \frac{1+T_d p}{p} \quad \text{avec } K_{corr} \gg 1 \text{ et } T_d < 1 \text{ s.}$$

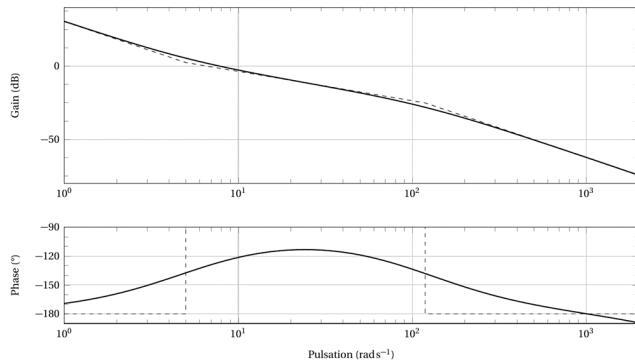
On donne dans le document réponse le diagramme de Bode (courbe de Gain et de Phase) du système en boucle ouverte avec correcteur PI Généralisé pour $K_{corr} = 1000$ et $T_d = 0,2$ s.

Question 10 Représenter sur le document réponse les marges de Gain M_G et de Phase M_ϕ du système corrigé.

Avec cette correction, le système est précis mais les valeurs des marges de gain et de phase sont telles que le système n'est pas assez rapide. Il est donc nécessaire d'augmenter la valeur de K_{corr} , tout en conservant $T_d = 0,2$ s,

de manière à augmenter la bande passante du système et ainsi se rapprocher des valeurs limites de marge de Gain et de Phase autorisées.

Question 11 En déduire la valeur maximale à donner au gain K_{corr} , en conservant $T_d = 0,2$ s, afin de respecter les performances en stabilité de l'asservissement de l'axe linéaire tout en augmentant au maximum la bande passante du système.



Les figures 5 donnent la réponse temporelle à un échelon de consigne $X_c = 10$ mm du système simulé, perturbé et corrigé du déplacement $x(t)$ (en mm) ainsi que l'évolution de l'intensité simulée (en Ampères) circulant au sein du moteur.

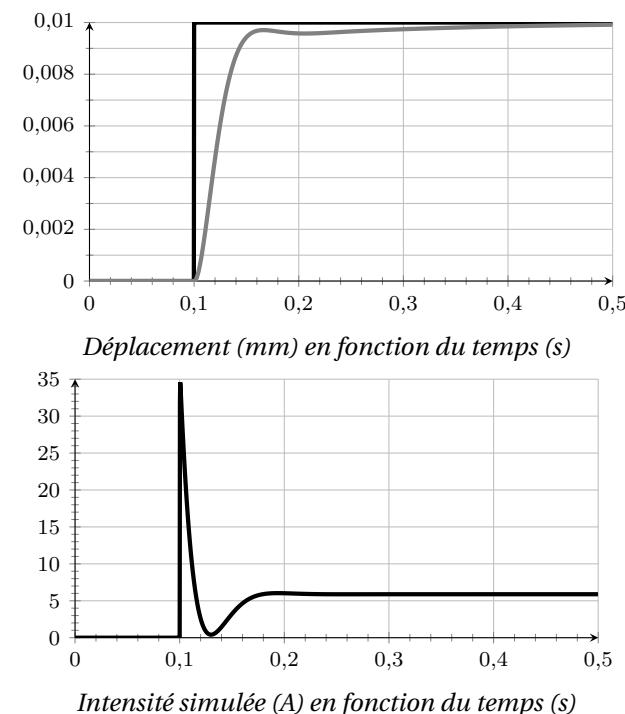


FIGURE 5 – Réponses temporelles à un échelon d'amplitude $X_c = 10$ mm du système simulé, perturbé et corrigé

Question 12 Conclure sur les performances du système perturbé vis-à-vis des exigences de l'asservissement de l'axe linéaire. Commenter l'évolution de l'intensité simulée avec les caractéristiques de la carte de commande du moteur.

Synthèse – Étude de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche »

L'objectif de cette synthèse est de vérifier que les paramètres d'asservissement mis finalement en place sur la commande de l'axe linéaire et sur la commande de la roue permettent d'atteindre les performances de l'exigence 3.1 « Assistance de la marche ».

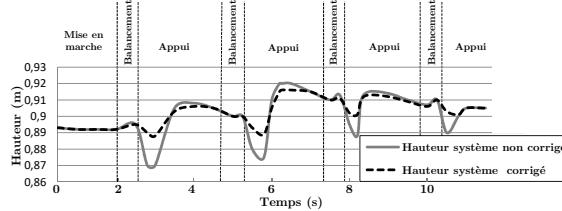


FIGURE 6 – Hauteur de la main au cours de la marche pour $V = 0,22 \text{ m/s}$

La figure 6 donne les évolutions de la hauteur de main mesurées lors d'une marche assistée avec le prototype de canne à la vitesse $V = 0,22 \text{ m/s}$.

La courbe grise en trait continu correspond au cas où l'axe linéaire est sans correction ($C(p) = 1$).

La courbe noire en trait pointillé correspond au cas où l'axe linéaire est corrigé (correction PI généralisée avec paramètres optimisés).

Il est à remarquer que lors de cet essai, le patient avait pour consigne de conserver sa main immobile lors du déplacement. Cette condition est difficilement vérifiable en pratique car le patient ne peut pas vraiment se concentrer sur la position de sa main pendant la marche.

Question 13 Conclure sur l'influence de la correction de l'axe linéaire sur le respect de l'exigence de maintien de la hauteur de main.

Les figures 7 et 8 donnent pour $V = 0,22 \text{ m/s}$ (allure normale), respectivement pour $V = 0,29 \text{ m/s}$ (allure rapide), le suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol et le suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle θ_g) par la canne (angle θ).

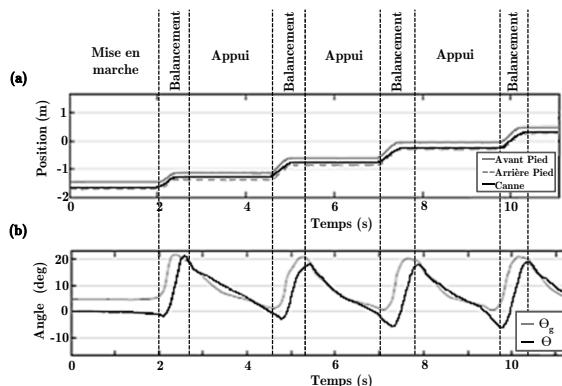


FIGURE 7 – $V = 0,22 \text{ m/s}$, allure normale – (a) : suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol – (b) : suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle θ_g) par la canne (angle θ)

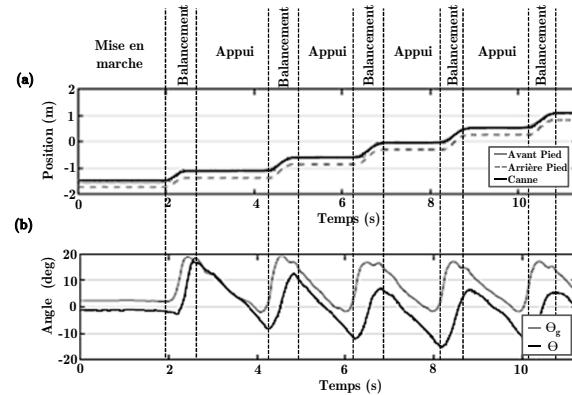
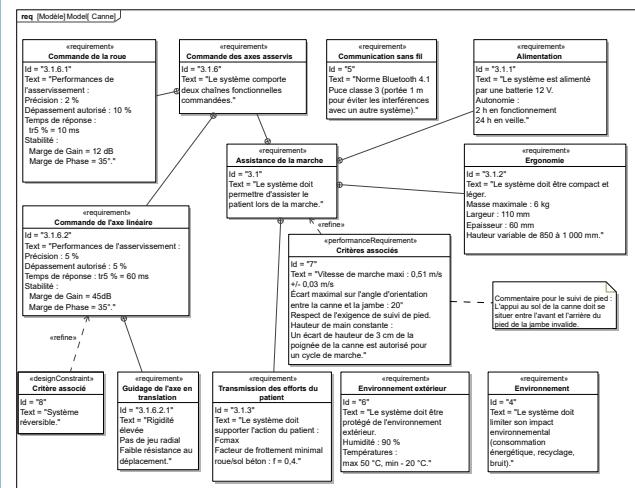


FIGURE 8 – $V = 0,29 \text{ m/s}$, allure rapide – (a) : suivi du pied de la jambe gauche par la canne observé au niveau du sol – (b) : suivi de l'orientation de la cuisse gauche (angle θ_g) par la canne (angle θ)

Question 14 Conclure sur le réglage des paramètres d'asservissement mis en place vis-à-vis des performances liées à la synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.

Annexes – Diagramme partiel des exigences



TD 2

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

Le robot MC²E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

L'axe en translation du MC²E est asservi en effort constant pour tirer (ou pousser) la vésicule au fur et à mesure que le chirurgien utilise son bistouri pour détacher la vésicule du foie. Le diagramme des exigences au dos décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC²E.

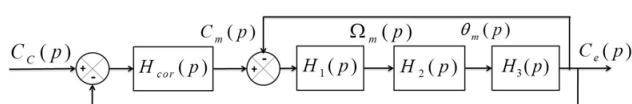
Objectif Modéliser et valider l'asservissement en effort.

Modèle de connaissance de l'asservissement

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$ avec :

- J , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera $\theta_m(p)$, $\Omega_m(p)$, $C_m(p)$ et $C_e(p)$ les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose $C_e(t) = K_{C\theta}\theta_m(t)$ où $K_{C\theta}$ est une constante positive. On a de plus $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$. La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$, couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC²E;

- $C_c(p)$, couple de consigne;
- $C_m(p)$, couple moteur;
- $H_{cor}(p)$, fonction de transfert du correcteur.

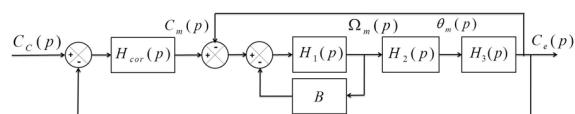
Dans un premier temps, on prendra $H_{cor}(p) = 1$.

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B . On s'intéresse ici à la définition analytique de B . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.



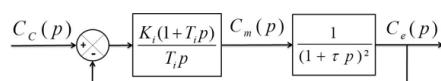
Régulation avec retour tachymétrique

On règle B de telle façon que, pour $H_{cor}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{BO}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$.

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B , en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus loin (exigences 1.2.2.1 à 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.



Régulation avec correcteur PI.

Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0 . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

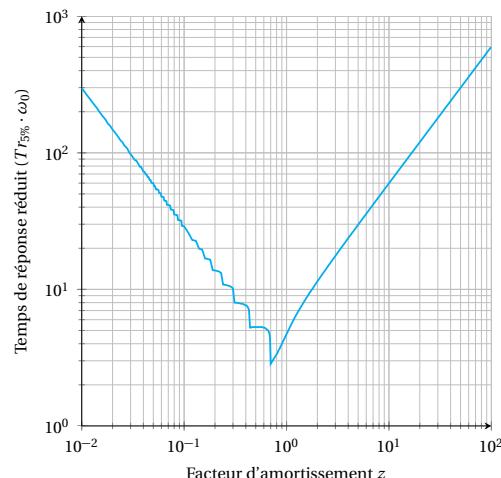
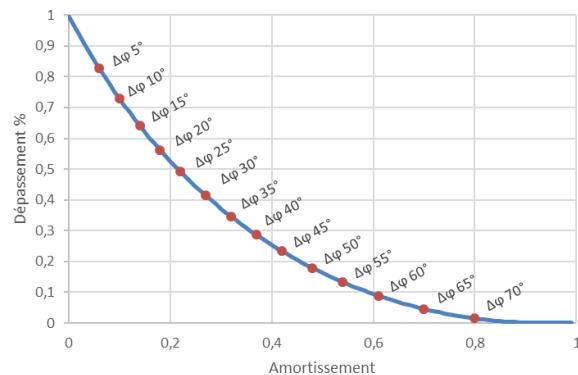
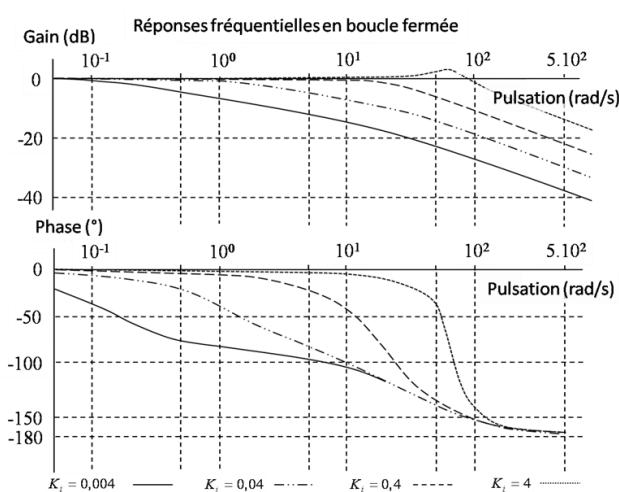
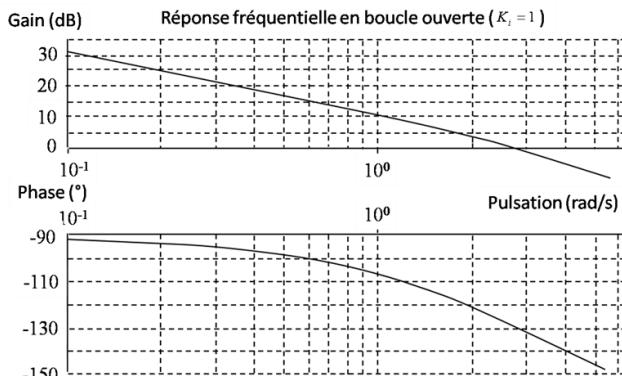
On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : $\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$.

$$\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$$

Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i .

Les courbes de la réponse fréquentielle en boucle ouverte pour $K_i = 1$ et les réponses fréquentielles en boucle fermée pour différentes valeurs de K_i sont données ci-dessous.

Question 7 En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour K_i permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.



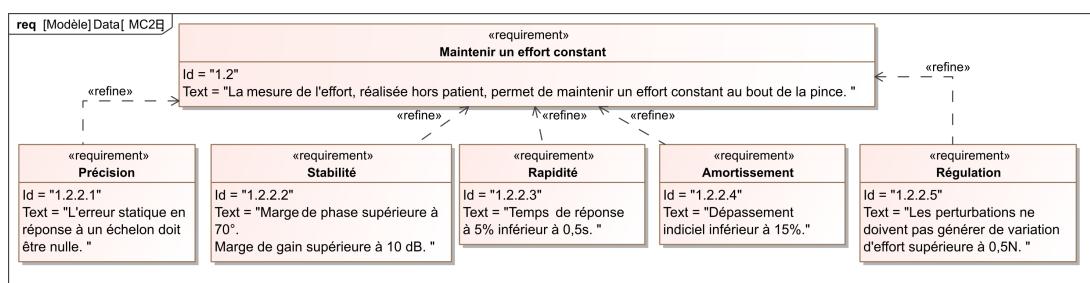
Retour sur le cahier des charges

Question 8 Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{c0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

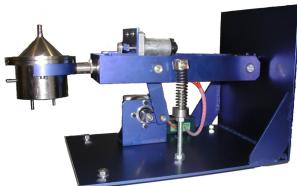
Critère	Valeur CDCF	Valeur système réglé	Écart
Marges de gain			
Marges de phase			
Dépassement			
T5 %			
Erreur statique			

Corrigé résumé

- $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$, $H_2(p) = \frac{1}{p}$, $H_3(p) = K_{C\theta}$.
- $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + 2K_{C\theta}}$.
- Sinus d'amplitude $C_0/2$ et de pulsation ω_0 .
- $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} \text{ et } B = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$.
- Erreur statique nulle.
- $\tau = T_i$.
- $K_i = 0,4 (< 1,58)$.
- ...



TD 3



Agitateur médical avec chambre de Riccordi

CCP – PSI – 2006

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

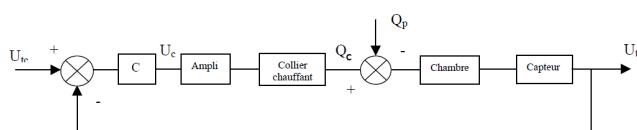
Présentation

Afin d'isoler des cellules issues du pancréas, il est nécessaire de les baigner dans un mélange d'enzymes tout en agitant la solution dans un milieu contrôlé en température. On utilise pour cela un agitateur médical avec chambre de Riccordi.

La maîtrise de la température joue un rôle crucial, l'objectif de notre étude est de réduire les temps de réaction et d'augmenter la précision en température du système de chauffage. Nous utilisons pour chauffer la solution circulant dans la chambre, un collier chauffant situé sur le pourtour de la chambre, alimenté en tension par une unité comprenant un correcteur et un amplificateur.

On note :

- U_{tc} : tension de consigne;
- U_t : tension à l'image de la température (capteur de température mesurant la température dans la chambre);
- U_a : tension d'alimentation du collier chauffant;
- q_c : énergie calorifique fournie par le collier chauffant;
- q_p : énergie calorifique perdue ou reçue par la chambre (en dehors du collier chauffant) perte par convection, par circulation de l'enzyme.



Expérimentalement, on peut déterminer que $FTBO(p) = \frac{U_t(p)}{U_c(p)} = \frac{0,5}{(1+5p)(1+100p)}$.

Analyse des performances

On considère ici que $C(p) = 1$. On donne l'abaque des temps de réponse réduit plus bas.

Question 1 Déterminer le temps de réponse à 5% du système régulé.

Question 2 Déterminer l'écart en position et l'écart en traînage.

Question 3 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 4 Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

Mise en œuvre de corrections P et PI

On envisage une première correction en utilisant un correcteur proportionnel de la forme $C(p) = K$.

Question 5 Déterminer le gain K de manière à obtenir le système le plus rapide sans aucun dépassement.

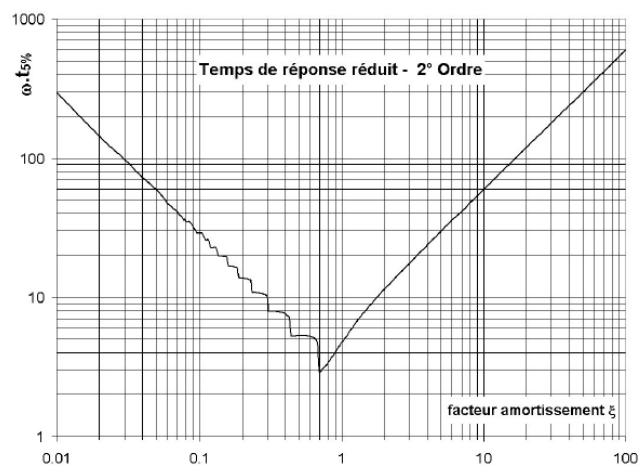
Question 6 En déduire le temps de réponse à 5%, l'écart en position et l'écart de traînage.

Question 7 Déterminez alors, la tension en entrée de l'amplificateur, si on envoie un échelon de tension de consigne U_{tc} de 5V. Le gain de l'amplificateur étant de 10, critiquez vos résultats.

On souhaite maintenant corriger le système avec en utilisant une action proportionnelle intégrale $C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$. On souhaite que la montée en température soit de 3 minutes maximum.

Question 8 Déterminer les gain K et T_i permettant d'assurer le non dépassement de la consigne ainsi que le temps de réponse du système.

Question 9 En déduire le nouvel écart de position.



TD 4



Machine de rééducation SysReeduc

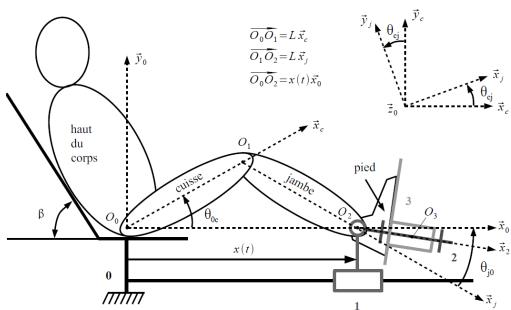
CCP PSI 2013

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

La machine de rééducation SYS-REEDUC est issue d'un projet régional entre différents laboratoires de recherche : le CReSTIC (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de Reims et le CRITT-MDTS (Centre Régional d'Innovation et de Transfert de Technologie) de Charleville-Mézières. L'objectif de ce projet était de réaliser un système capable d'évaluer et d'aider à la rééducation des membres inférieurs.

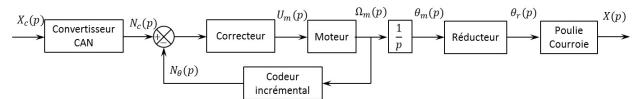


Objectif L'objectif de cette partie est de modéliser l'asservissement du système, puis de paramétrier le correcteur pour répondre aux exigences.

Pour permettre au kinésithérapeute de rééduquer les membres inférieurs du patient, on doit respecter les exigences suivantes :

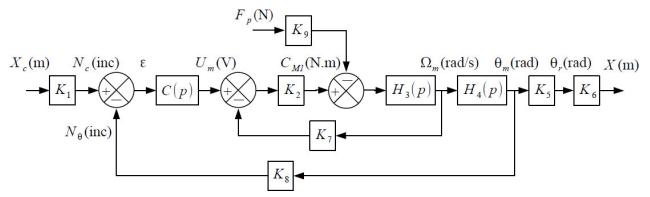
Critère	Niveau
Angle de rotation de la cuisse	De 0 à 150°
Effort du patient	Jusqu'à 20 N
Écart de position	Nul
Marge de gain	7 dB mini
Marge de phase	45°
Rapidité	$t_{5\%} < 0,2\text{s}$
Pulsation au gain unité	50 rad s ⁻¹

La structure du schéma-blocs permettant l'asservissement du déplacement longitudinal du « chariot » (support mobile) est donnée dans la figure suivante.



Éléments de modélisation

On propose alors une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e \omega_m(t)$ et $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

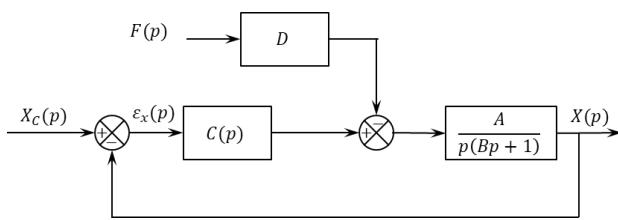
$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1 = \frac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r = 46,1\text{ mm}$ le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1 , K_2 , $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5 , K_6 , K_7 , K_8 et K_9 .

Question 2 Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A , B et D en fonction des paramètres du système r , ρ_1 , k_t , k_e , R , M , m et K_8 .



Pour la suite du sujet on gardera les constantes A , B et D , avec $A = 6700 \text{ m/V}$, $B = 0,01 \text{ s}$ et $D = 6 \text{ V/N}$.

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Question 3 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_c .

Question 4 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO du système pour $K_C = 1$ et donner les marges. Le cahier des charges est-il vérifié?

Question 5 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction proportionnelle intégrale

On suppose maintenant que $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

Question 6 Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A , B , D et K_i .

Question 7 Déterminer l'écart de position ε_x en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Question 8 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système $FTBO(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon_x(p)}$ en supposant que $F_p = 0$.

Question 9 Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité

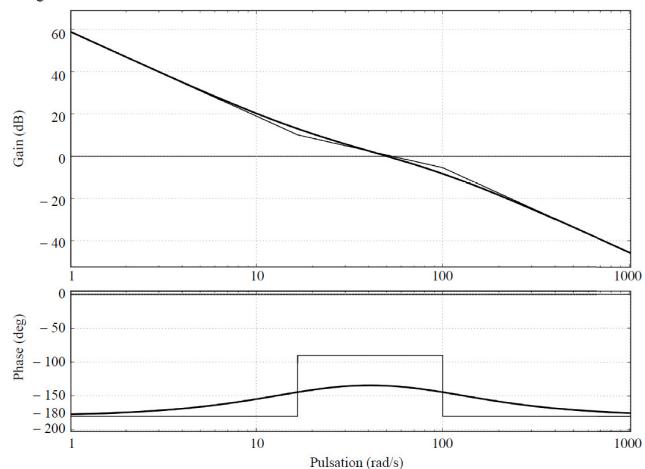
souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

Question 10 Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

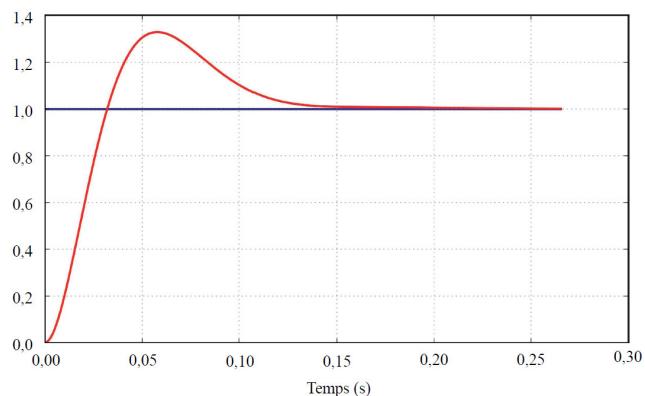
On donne sur le document réponse la réponse temporelle du système à une entrée de type échelon unitaire sur le déplacement ($F_p = 0$) ainsi que le diagramme de Bode de la FTBO.

Question 11 Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.

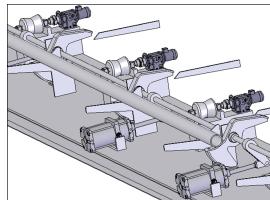
Diagramme de Bode de la FTBO :



Réponse indicelle unitaire sur le déplacement / $F_p = 0$. Unité en mètre pour l'axe des ordonnées.



TD 5



Banc d'épreuve hydraulique

CCP – PSI – 2010

Savoirs et compétences :

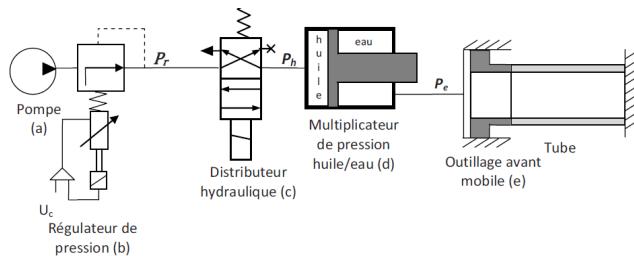
- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Présentation

Vallourec & Mannesmann Tubes (V&M Tubes), entreprise du groupe Vallourec, est le leader mondial dans la production de tubes en acier sans soudure laminés à chaud.

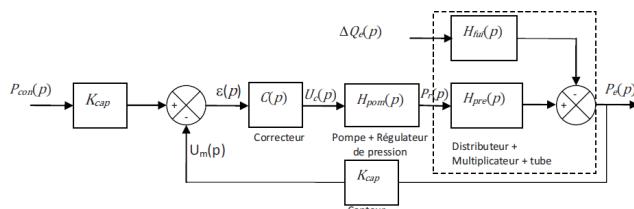
Afin de valider la caractéristique de tenue en pression des tubes, ceux-ci sont soumis à une pression hydraulique donnée durant un temps spécifié. Ces paramètres dépendent de la taille des tubes et de leur future utilisation.

Un schéma hydraulique simplifié est donné figure suivante :



Mise en place d'un asservissement de pression.

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. L'objectif est ici de proposer un réglage du correcteur pour répondre aux critères du cahier des charges. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression. Le schéma-blocs de l'asservissement est défini ci-dessous.



- $P_{con}(p)$: pression de consigne d'eau dans le tube (Pa) ;
- $P_e(p)$: pression d'eau dans le tube (Pa) ;
- $U_c(p)$: tension de commande du régulateur de pression (V) ;
- $P_r(p)$: pression d'huile régulée (Pa) ;

- $\Delta Q_e(p)$: débit de fuite (m^3/s) ;

- $U_m(p)$: tension de mesure du capteur (V).

Hypothèses :

- quels que soient les résultats précédents, l'ensemble de mise sous pression {tube + distributeur + multiplicateur de pression} est défini par les transmittances suivantes : $H_{pre}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$ et $H_{fui}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$ avec $K_m = 3,24$; $K_f = 2,55 \cdot 10^{10} \text{ Pa}/(m^3/s)$; $T_1 = 10 \text{ s}$;
- l'ensemble {pompe+régulateur de pression} est modélisé par la fonction de transfert : $H_{pom}(p) = \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p}$ avec $K_{pom} = 1,234 \cdot 10^7 \text{ Pa/V}$; $T_2 = 5 \text{ s}$;
- le capteur est modélisé par un gain pur : $K_{cap} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ V/Pa}$.

La pression de consigne est de $P_{con} = 800 \text{ bars}$ et les débits de fuite sont estimés à $\Delta Q_e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$.

On rappelle que le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant :

Stabilité :	marge de phase de 60° marge de gain de 12 dB
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40 \text{ s}$
Précision :	erreur statique < 5% soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\varepsilon_{con} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\varepsilon_{pert} < 40 \text{ bars}$
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation : $t_e \omega_{0dB} = 3$ où ω_{0dB} désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et t_e le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$, temps du 1^{er}maximum si le dépassement est supérieur à 5% ;
- $t_e = t_R$, temps de réponse à 5% si le dépassement est nul ou inférieur à 5%.

Correction proportionnelle

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel : $C(p) = K_p$.

Question 1 Transformer le schéma-blocs pour se ramener à un système à retour unitaire.

Question 2 Déterminer, en fonction de K_p , ϵ_{con} définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne P_{con} de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

Question 3 Proposer un réglage de K_p pour limiter ϵ_{con} à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

Question 4 Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de K_p ϵ_{pert} définie comme l'erreur statique pour une perturbation ΔQ_e de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

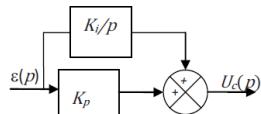
Question 5 Proposer un réglage de K_p pour limiter ϵ_{pert} à la valeur spécifiée au cahier des charges.

Question 6 Proposer un réglage de K_p pour vérifier le critère d'amortissement.

Question 7 À partir des résultats des questions précédentes, conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

Correction proportionnelle intégrale

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma-blocs ci-dessous :



Question 8 Déterminer la fonction de transfert $C(p)$ de ce correcteur.

Question 9 Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients K_i et K_p .

Question 10 Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité? Justifier.

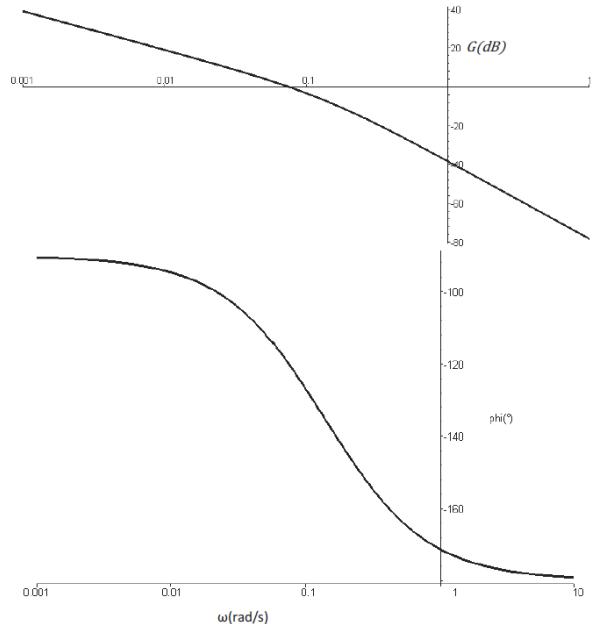
Question 11 Quelle valeur faut-il donner à ω_{0dB} pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges?

Question 12 Déterminer alors le rapport $T = K_p/K_i$ pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

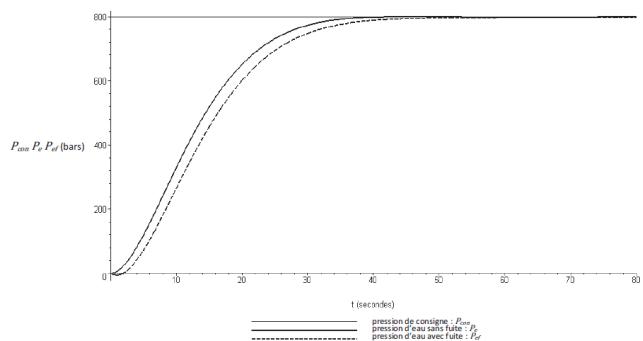
Question 13 En déduire les valeurs de K_p et de K_i qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

Bilan

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment.



On donne ensuite sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.



Question 14 La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges? Justifier.

TD 6

Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie

Emilien Durif

Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

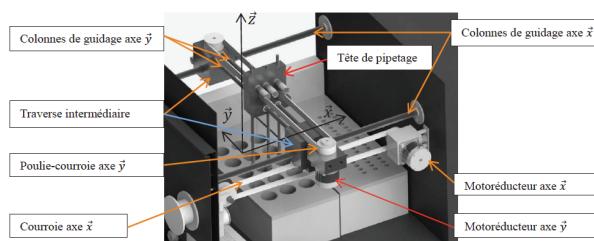
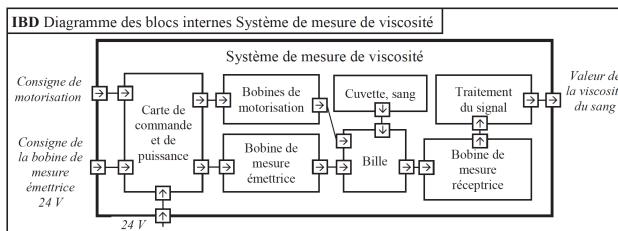
Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni, est guidée en translation suivant \vec{y} par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant \vec{x} par rapport au bâti.

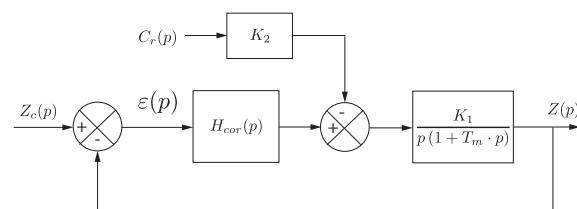
Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe \vec{z}) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crêmaillère.



Réglage de l'asservissement

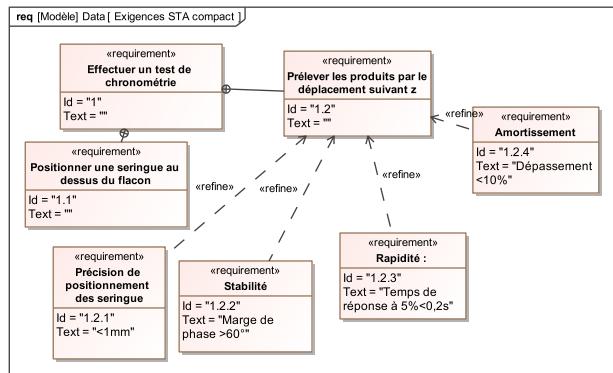
La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous dans lequel $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} \text{ N}^{-1}$, $K_1 = 856 \text{ s}^{-1}$, $T_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

Le couple résistant C_r est constant et vaut $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$.



On suppose le correcteur proportionnel : $H_{cor}(p) = K_p$.

Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partiel.



Question 1 Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{bo}(p) = \left(\frac{Z(p)}{\varepsilon(p)}\right)_{C_r(p)=0}$ ainsi que la fonction de transfert $H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)}\right)_{Z_c=0}$.

Question 2 Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude Z_{c0} dans l'hypothèse d'une perturbation nulle (C_{r0}). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante C_{r0} , dans le cas d'une consigne de position nulle ($Z_c = 0$). En déduire la valeur de K_p pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

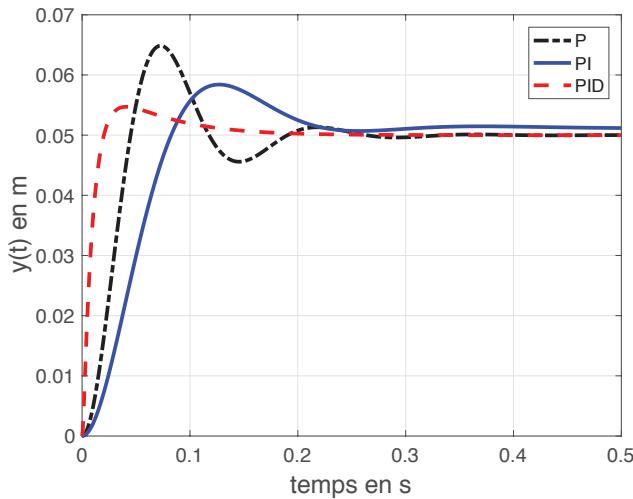
Question 3 Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de $H_{bo}(p)$ pour K_p déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert : $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$ avec $K_p = 1$ et $T_i = 1$ s.

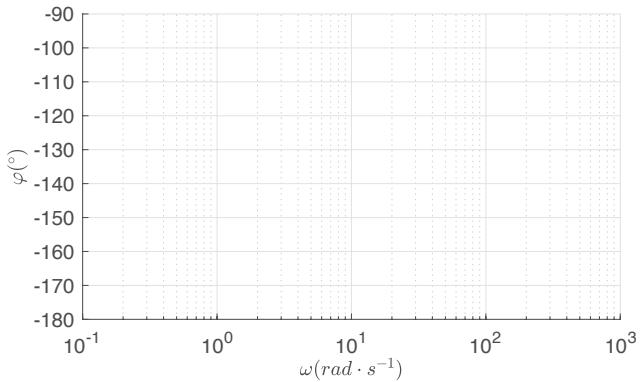
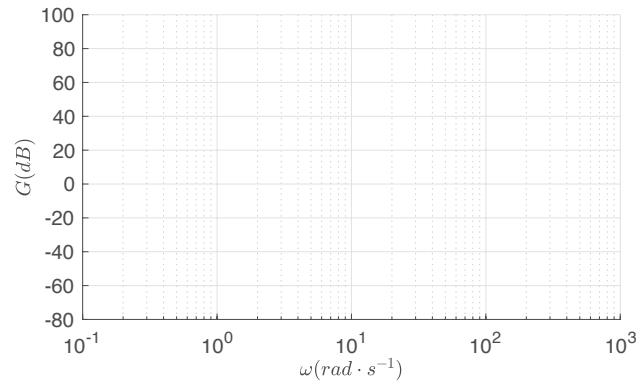
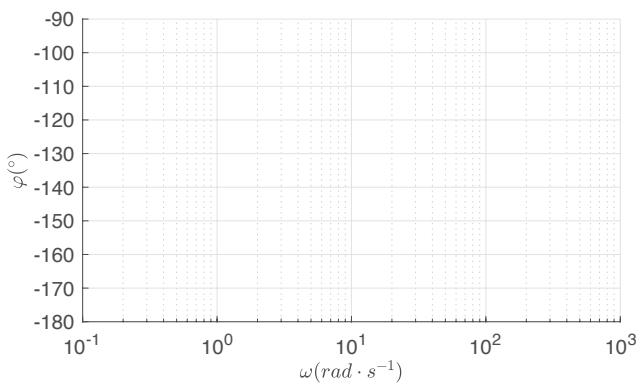
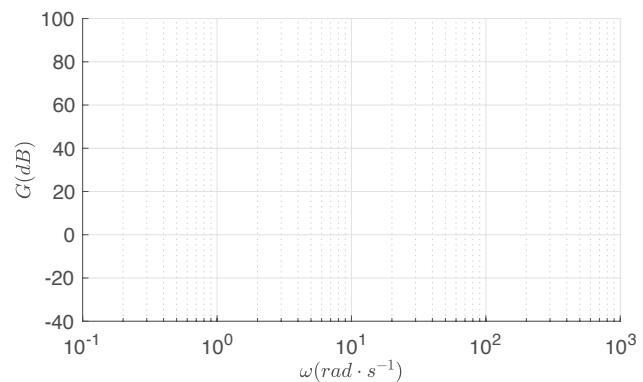
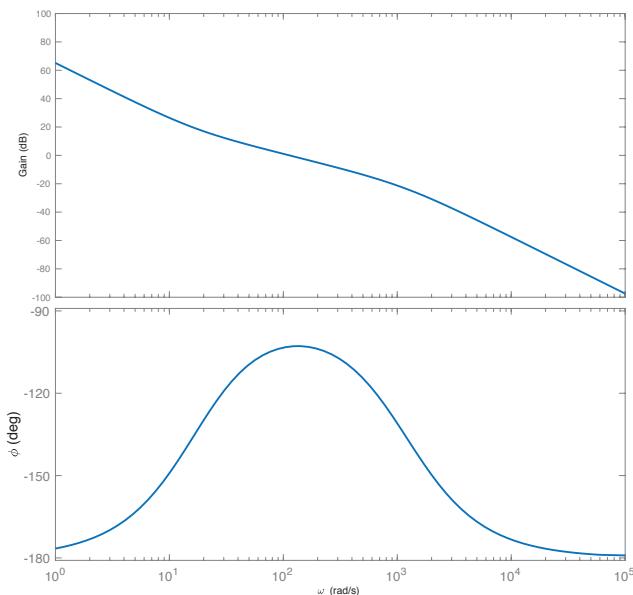
Question 4 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec $K_p = 1$ et $T_i = 1$ s.

Question 5 On souhaite une marge de phase d'au moins 60° . Proposer un réglage de K_p pour satisfaire au cahier des charges.

Question 6 La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.



Question 7 Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé.



Question 1

$$H_{bo}(p) = \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} = H_{cor}(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p)} = \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)} \text{ et } Z(p) = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p \varepsilon(p) - K_2 C_r(p)] = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p (-Z(p)) - K_2 C_r(p)] \\ \Leftrightarrow Z(p)(1 + \frac{K_1 K_1}{p(1+T_m p)}) = -\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)} C_r(p) \Leftrightarrow H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{C_r(p)}\right)_{Zc=0} = -\frac{\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)}}{1 + \frac{K_1 K_1}{p(1+T_m p)}} = -\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p) + K_p K_1} = -\frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}}.$$

Question 2

L'erreur statique par rapport à une entrée échelon, la perturbation étant nulle, est égale à 0, car il y a une intégration dans la chaîne directe

Dans le cas d'une perturbation constante égale à C_{ro} , d'après la question précédente on peut écrire : $Z(p) = -\frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} C_r(p) = -\frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} \frac{C_{ro}}{p}$.

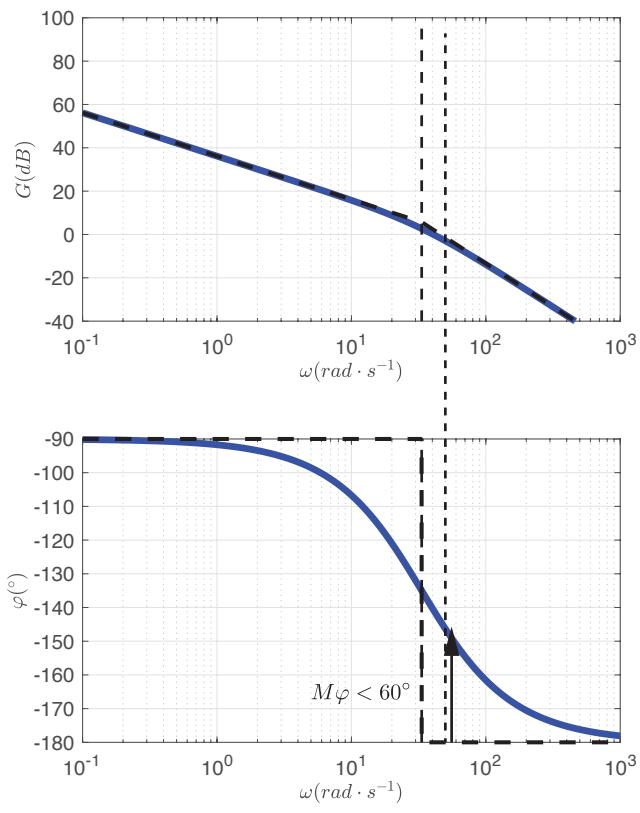
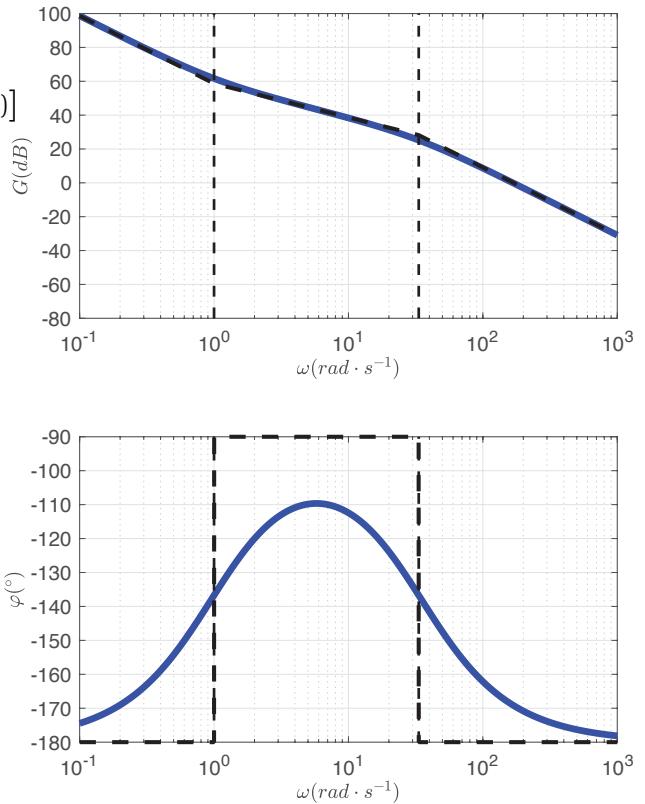
En utilisant la propriété du gain statique, on en déduit $z_\infty = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p}$, l'erreur vaut donc $\varepsilon = -z_\infty = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p}$.

Pour répondre à l'exigence de précision, on doit avoir $\varepsilon = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p} < 1 \text{ mm}$.

$$\text{On en déduit } \varepsilon = \frac{K_2 C_{ro}}{K_p} < 10^{-3} \text{ m} \\ \Leftrightarrow K_p > \frac{K_2 C_{ro}}{10^{-3}} \Leftrightarrow K_p > \frac{2,78 \cdot 10^{-2} \cdot 2,3 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} \Leftrightarrow K_p > 0,075.$$

Question 3

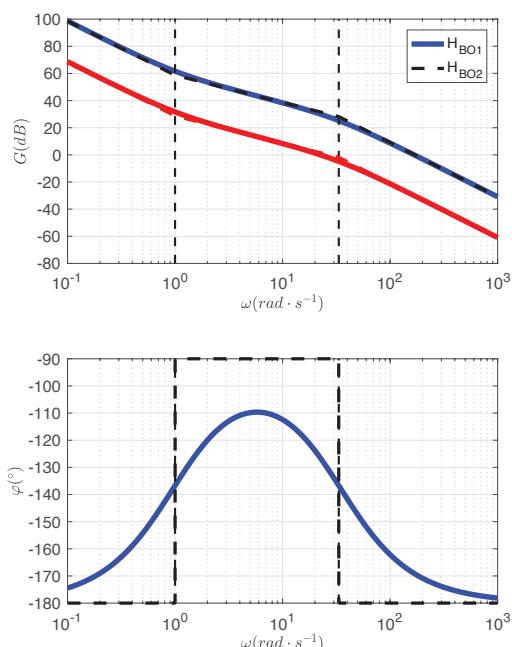
Avec $K_p = 0,075$, on obtient une marge de phase de $35^\circ < 60^\circ$, le critère de stabilité n'est donc pas vérifié.


Question 4

Question 5

On note qu'en la pulsation donnant une phase à -120° , le gain en décibel est à peu près égal à -30 dB . On règle donc K_p tel que :

$$K_p = 10^{-30/20} = 0,032.$$

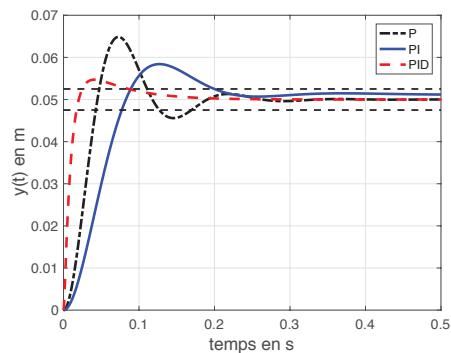
On obtient alors le deuxième tracé.


Question 6

- La valeur en régime permanent vaut 50mm pour les trois réponses, l'erreur statique est nulle le critère de précision est respecté pour les trois réglages.
- Temps de réponse à 5% et dépassement :

Type de correcteur	P	PI	PID
$t_{r5\%}$	0,17s	0,2s	0,08
Dépassement	29,72%	16,8%	9,4%

- Seul le PID vérifie le critère sur le premier dépassement car $D_{1\%} = 9,4\% < 10\%$. Le critère d'amortissement est donc respecté.



Question 7

On trouve une marge de phase supérieure à 60° et une bande passante à $0dB$ égale à 100rad/s supérieure aux réglages précédents ce qui donne une réponse plus rapide et plus stable.

TD 7



Train d'atterrissement d'hélicoptère ★★

Banque PT – SIA 2014

Savoirs et compétences :

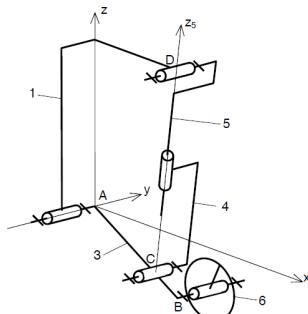
- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur à avance de phase
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

Mise en situation

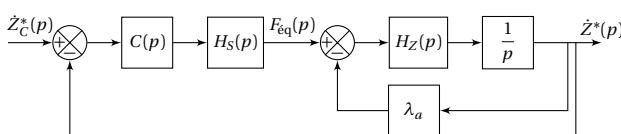
Lors d'atterrissements d'hélicoptères à grande vitesse, les oscillations induites par l'impact au sol du train d'atterrissement principal génèrent des contraintes mécaniques importantes à la liaison du pylône de queue avec la cabine. Les oscillations du pylône de queue de l'appareil ne sont pas négligeables. Lors de ces atterrissages, les vitesses verticales minimales sont de l'ordre de 2 m s^{-1} mais peuvent atteindre des valeurs plus importantes lors d'apportage sur un bateau à cause des mouvements du bateau dus à la houle. La résistance aux crashs correspond à la possibilité de garder opérationnel un appareil qui aurait atterri avec une vitesse d'impact pouvant atteindre 4 m s^{-1} .

Objectif Pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} l'accélération de la queue doit rester inférieure à 3 rad s^{-2} .

On donne une modélisation cinématique du train principal.



La vitesse d'impact lors de l'atterrissement de l'hélicoptère correspond alors à la vitesse de la tige 5 de l'amortisseur par rapport au cylindre 4. Cette vitesse est notée \dot{z}^* . On se propose d'étudier la stabilité vis-à-vis de la seule consigne $\dot{z}_c^*(p)$. On adoptera pour le réglage de la correction le schéma suivant.



On note dans ce schéma :

- $\dot{z}^*(p)$ la transformée de $\dot{z}^*(t) = \dot{z}(t) + V_0$ avec V_0 la vitesse d'impact et $\dot{z}(t)$ la vitesse absolue de la cabine par rapport au sol;
- $F_{eq}(p)$ l'effort équivalent ramené au déplacement de la cabine et fourni par la partie active de l'amortisseur;
- λ_a le coefficient d'amortissement passif équivalent ramené au déplacement de la cabine;
- $H_S(p) = \frac{K_S}{1 + T_S p}$ la fonction de transfert de la partie active de l'amortisseur. On prendra : $K_S = 12 \times 10^4 \text{ N A}^{-1}$ et $T_S = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$;
- $H_Z(p) = \frac{K_Z p^2}{1 + \frac{2\xi_Z}{\omega_Z} p + \frac{p^2}{\omega_Z^2}}$ la fonction de transfert traduisant le comportement dynamique du train.
- $C(p)$ la fonction de transfert du correcteur dont le réglage fait l'objet de cette partie.

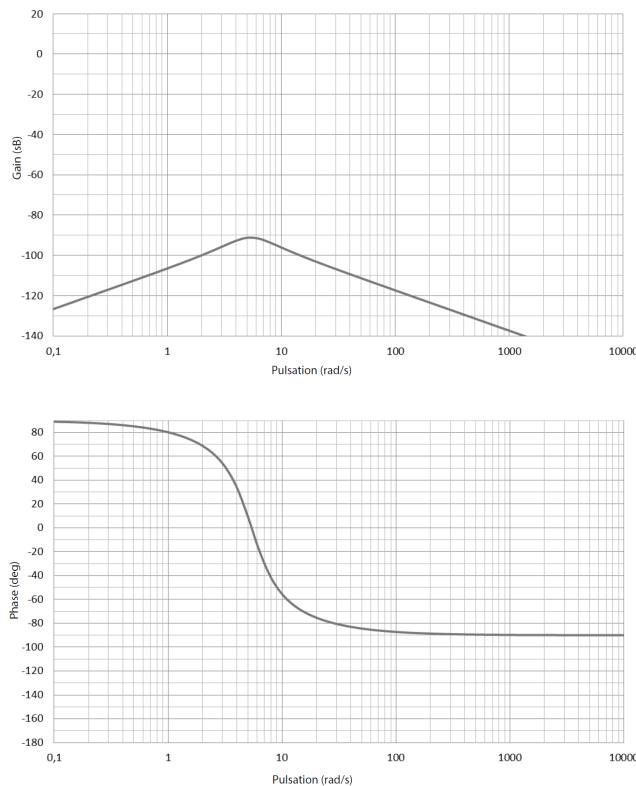
Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

Objectif Il s'agit dans un premier temps d'analyser la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la chaîne de commande semi-active.

Question 1 Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert $H_F(p) = \frac{\dot{z}^*(p)}{F_{eq}(p)}$.

Question 2 Déterminer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée $H_{BONC}(p)$.

On donne le diagramme de Bode de $H_F(p)$.



Question 3 Justifier la forme de ce diagramme en tracant les asymptotes et en indiquant comment retrouver sur le tracé les valeurs de K_z et ω_z . Tracer en rouge les diagrammes de la fonction $H_{BONC}(p)$. On prendra pour cela $20\log K_S \simeq 100$ dB.

Choix et réglage de la correction

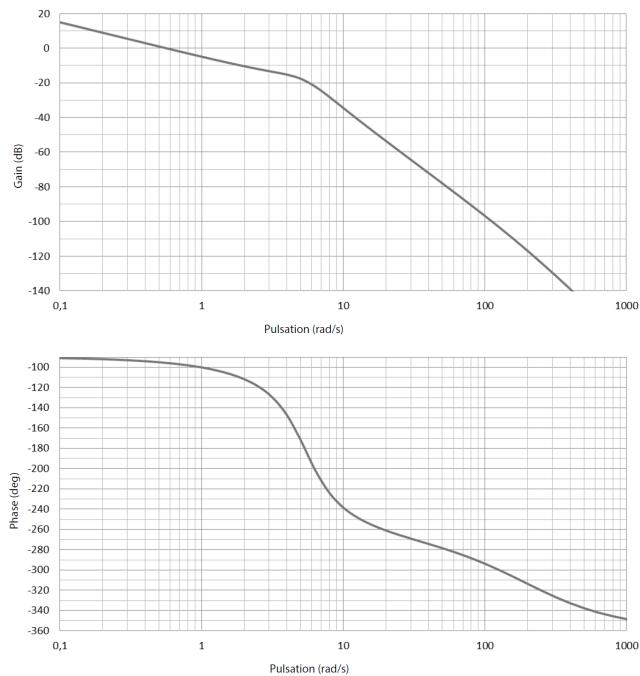
Objectif Il s'agit à présent de définir la structure du correcteur et de proposer un réglage permettant de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin de satisfaire les exigences, une étude complémentaire non abordée dans ce sujet montre que la boucle d'asservissement doit posséder les performances suivantes :

- erreur statique nulle;
- pulsation de coupure à 0 dB et $\omega_{0dB} = 6 \text{ rad s}^{-1}$;
- marge de phase $M\varphi = 45^\circ$;
- marge de gain $MG > 6$ dB.

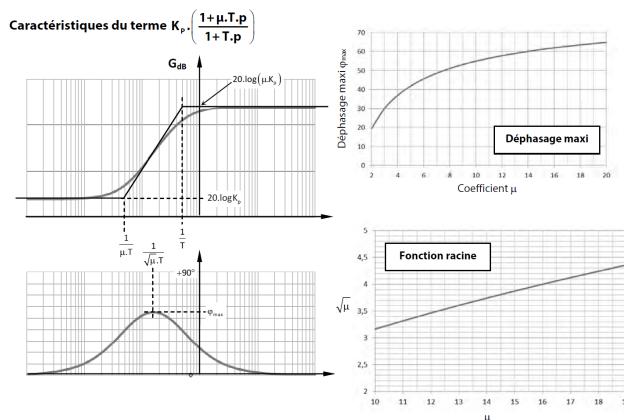
Question 4 Quelle doit être la classe minimale du correcteur afin de garantir le critère de précision ?

On choisit dans un premier temps un correcteur de la forme $C(p) = \frac{K_p}{p^2}$. On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système ainsi corrigé pour $K_p = 1$.



Question 5 Évaluer les marges de stabilité pour ce réglage. Déterminer la valeur de K_p garantissant le critère de pulsation de coupure à 0 dB. Ce correcteur peut-il permettre de répondre aux critères de performances énoncés en début de partie ? Justifier la réponse

On choisit finalement un correcteur de la forme $C(p) = \frac{K_p}{p^2} \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$ avec $\mu > 1$. Les caractéristiques du terme en $K_p \frac{1 + \mu T p}{1 + T p}$ ainsi que des abaques de calcul sont donnés ci-dessous.



Question 6 Comment se nomme l'action de correction obtenue avec ce terme ?

Question 7 Quelle valeur doit-on donner à μ pour garantir le critère de marge de phase ?

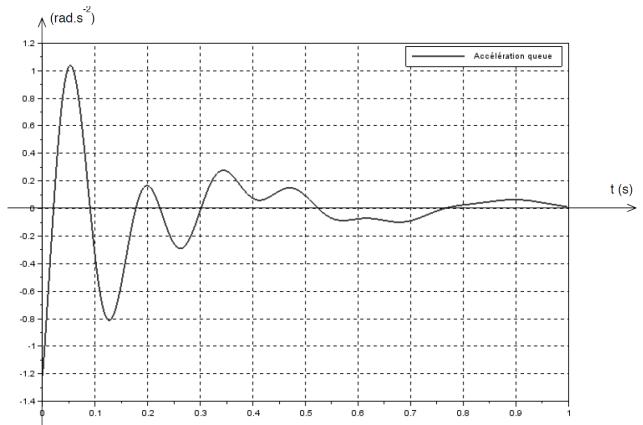
Question 8 En déduire les valeurs de T et de K_p permettant d'assurer les critères de stabilité et de bande passante énoncés au début de partie. Le critère de précision est-il validé ?

Validation des performances

Objectif Il s'agit dans cette dernière partie de vérifier les performances globales de la boucle d'asservissement.

On donne le résultat d'une simulation du système complet piloté à l'aide du correcteur précédemment dimensionné pour une vitesse d'impact de 4 m s^{-1} .

Question 9 En analysant cette courbe, conclure quant à la validité du cahier des charges.



TD 8



Quille pendulaire *

Concours Commun Mines Ponts 2014

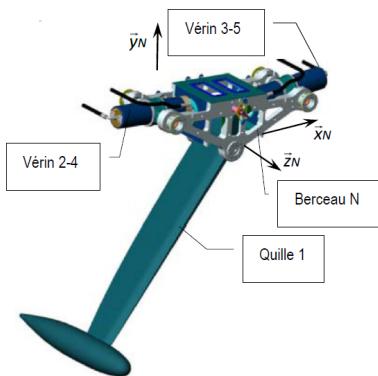
Savoirs et compétences :

- Con.C2 : Correction d'un système asservi
- Con.C2.SF1 : Choisir un type de correcteur adapté

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



Modèle volumique 3D

Afin de garantir sa répétabilité, la mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné en fin de sujet.

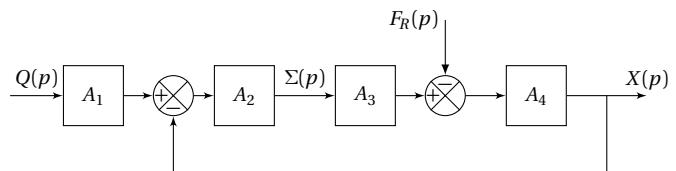
Objectif L'objectif de proposer un correcteur permettant de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

Modélisation du vérin

La quille est manoeuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servo valve de débit. Ce composant délivre un débit $q(t)$ proportionnel à sa tension de commande $v(t)$. Lors d'une manoeuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté

en pression via sa servo valve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servovalves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen. On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$ (a);
- $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$ (b).

On a :

- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$: débit d'alimentation du vérin [$m^3 s^{-1}$];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$: différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$: position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$: composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

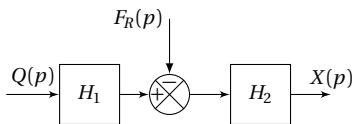
Les constantes sont les suivantes :

- S : section du vérin [m^2];
- k : raideur mécanique du vérin [$N m^{-1}$];
- V : volume d'huile de référence [m^3];

- B : coefficient de compressibilité de l'huile [N m^{-2}];
- M : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];
- λ : coefficient de frottement visqueux [$\text{N m}^{-1}\text{s}$].

Question 1 Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.

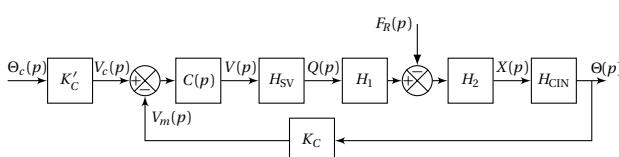
Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



Question 2 Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

Question 3 Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par $F_R(p)$ ne sera pas prise en compte.



On a :

- $\mathcal{L}(\theta_c(t)) = \Theta_c(p)$: consigne de position angulaire [$^{\circ}$];
- $\mathcal{L}(\theta(t)) = \Theta(p)$: position angulaire de la quille [$^{\circ}$];
- $\mathcal{L}(v(t)) = V(p)$: tension de commande de la servo valve [V];
- $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(p)$: tension image de la consigne [V];
- $\mathcal{L}(v_m(t)) = V_m(p)$: tension image de la position [V].

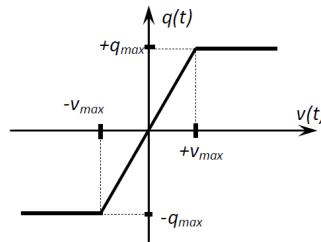
On a de plus :

- K_c : gain du capteur angulaire potentiométrique [V/ $^{\circ}$];
- K'_c : gain du bloc d'adaptation réglé tel que $K'_c = K_c = 1,1 \text{ V}/^{\circ}$;
- $C(p)$: correcteur de position;
- H_{CIN} : fonction de transfert de la chaîne de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation. $H_{\text{CIN}} = K_\theta [^{\circ} \cdot \text{m}^{-1}]$;
- H_{SV} : fonction de transfert de la servo valve.

Modélisation de la servo valve : comportement pour une commande de grande amplitude

La servovalve présente un fonctionnement non-linéaire provenant d'un phénomène de saturation qui

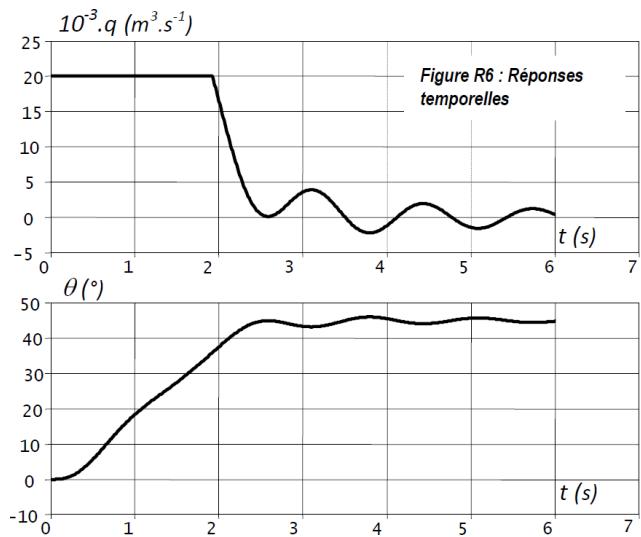
est défini par la courbe de la figure suivante donnant les évolutions du débit $q(t)$ fourni par la servovalve en fonction de sa tension de commande $v(t)$.



Ainsi :

- pour $v(t) > +v_{\max}$ et $v(t) < -v_{\max}$: $H_{\text{SV}} = K_{\text{SV}} [\text{m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}]$
- pour $v(t) < -v_{\max}$: $q(t) = -q_{\max}$;
- pour $v(t) > +v_{\max}$: $q(t) = +q_{\max}$, $v_{\max} = 10 \text{ V}$.

Le système n'est pas encore corrigé, $C(p) = 1$ et on souhaite simuler le fonctionnement où le navigateur veut déplacer la quille avec une consigne angulaire de position de 45° . Cette demande est modélisée par une consigne $\theta_c(t)$ en échelon, soit : $\theta_c(t) = \theta_0 u(t)$ avec $\theta_0 = 45^{\circ}$ et $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t > 0$. La figure suivante présente dans ces conditions les évolutions temporelles de deux grandeurs de la boucle d'asservissement, le débit sortant de la servo valve $q(t)$ et la position angulaire de la quille $\theta(t)$.



Sur la figure précédente, la courbe représentative de $q(t)$ présente un palier où $q(t)$ garde une valeur constante.

Question 4 À l'aide de la caractéristique de la servovalve :

1. justifier ce palier et donner la valeur numérique de K_{SV} ;
2. indiquer sur la figure l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

Question 5 Montrer, en précisant la ou les exigences mises en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté au niveau des critères « vérifiables ».

Comportement pour une commande de faible amplitude

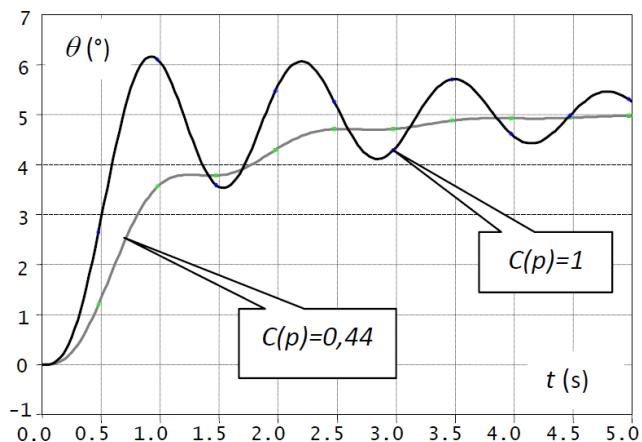
On étudie la réponse du système non corrigé ($C(p) = 1$) à une entrée échelon de 5° d'amplitude avec $F_R = 0$. Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure précédente est : $H_{BO}(p) = K_{SV}H_1H_2K_\theta K_C$ et $H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p(1 + 0,12p + 0,04p^2)}$.

Question 6 Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension $v(t)$ à l'instant initial $t = 0^+$, $v(0^+)$. Expliquer succinctement que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.

Question 7 De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

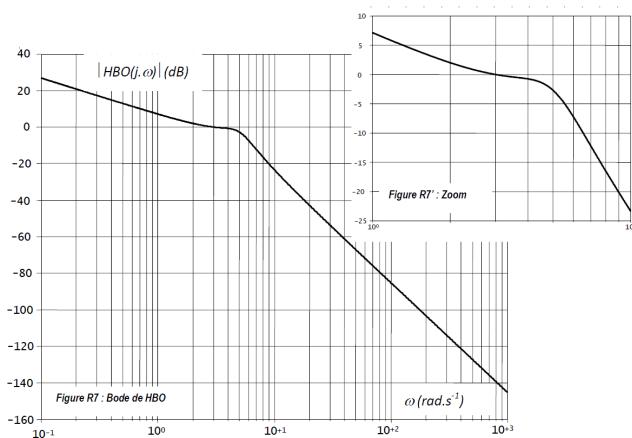
Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de 5° d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure suivante, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

- $C(p) = 1$: la courbe présente des dépassements, l'exigence 2.1.2 n'est pas validée;
- $C(p) = 0,44$: toutes les exigences du domaine temporel sont vérifiées (2.1.2, 2.2.1; 2.2.2, 2.3.1).



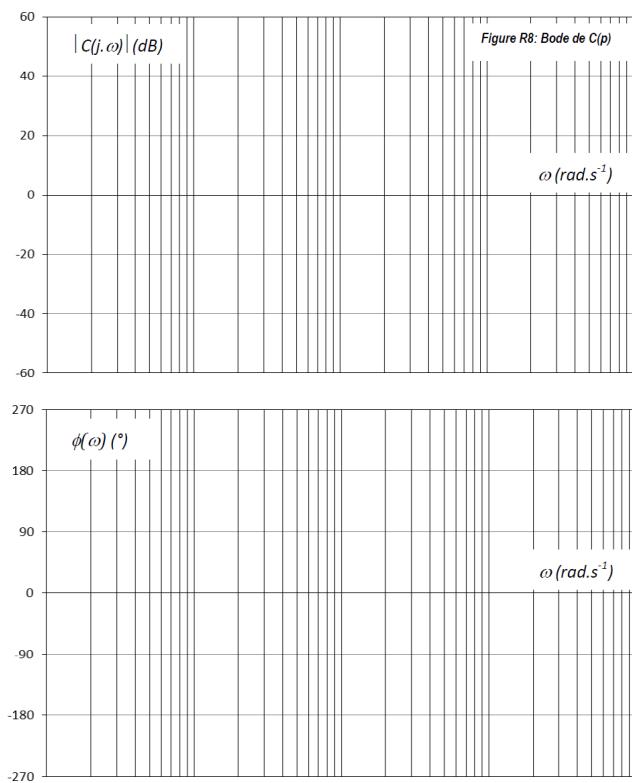
À l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation généreraient dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

Question 8 Tracer sur les figures suivantes les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de $H_{BO}(p)$ en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.



Question 9 Déterminer par calcul la pulsation de résonance ω_r de cette fonction de transfert.

Question 10 Évaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation ω_r la différence, notée ΔK et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.



Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de $C(p)$ permettant d'abaisser l'amplitude de ΔK à la pulsation ω_r . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert $C(p) = K_{COR} \frac{1 + Tp}{1 + bTp}$ avec $b > 1$. Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation ω^* tel que : $\sin[\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b}$ et $\omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}$.

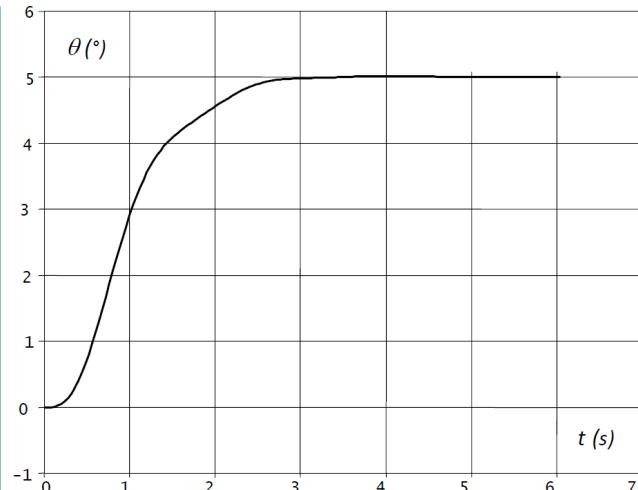
L'étude consiste à déterminer les valeurs de T et b .

Question 11 Tracer sur la figure précédente, l'allure des diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour $K_{COR} = 1$. Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.

Question 12 Déterminer alors en fonction de b , l'amplitude $|C(j\omega^*)|_{dB}$ à la pulsation notée ω^* .

Question 13 Pour $K_{COR} = 1$, en faisant correspondre la pulsation de résonance ω_r de H_{BO} à ω^* :

- calculer b pour que « l'excès » de gain ΔK soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de T ;
- calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation ω^* .



Validation du cahier des charges

La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur la figure suivante. Le gain K_{COR} a été déterminé de façon à satisfaire les exigences 2.1.1 et 2.1.2.

Question 14 Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur. Validez les exigences 2.2.1 et 2.2.2 en laissant vos constructions apparentes.

Question 15 Conclure en utilisant le diagramme ci-dessous.

1. $A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S$ et $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.
2. $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$ et $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$.
3. $\frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda p V + kV + 2BS^2)}$.
4. $K_{SV} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$. Pour $t < 1,9 \text{ s}$: BO et $t > 1,9 \text{ s}$: BF.
- 5.
6. $v(0^+) = 5,5 \text{ V}$.
- 7.
- 8.
9. $\omega_r \approx 4,5 \text{ rad s}^{-1}$.
10. $\Delta K = 4,8 \text{ dB}$.
- 11.
12. $-10 \log b$.
13. $b = 3,02, T = 0,127 \text{ s}, \phi(\omega^*) \approx -28,79^\circ$.
14. $t_5 \% \approx 2,3 \text{ s} < 4 \text{ s} 4^\circ/\text{s} < 8^\circ/\text{s}$.

