Colle 02

Colle 2

Équipe PT La Martinière

Savoirs et compétences :

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire : $G(p) = \dfrac{K}{(10p+1)^2(p+1)}$

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

- marge de phase : $\Delta\varphi \geq 45°$;
- dépassement $D\% < 10\%$;
- écart statique $\varepsilon_S < 0,08$;
- temps de montée $t_m < 8\,\text{s}$.

Question 1 *Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_S < 0,08$?*

On note t_m le temps de montée du système en BF et $t_m \simeq \dfrac{3}{\omega_{\text{co}}}$ et ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

Question 2 *Quelle est la condition sur K pour obtenir $t_m < 8\,\text{s}$?*

Question 3 *Quel choix faire pour la valeur de K ?*

Question 4 *Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions.*

Expérimentalement, on constate que $z_{\text{BF}} \simeq \dfrac{\Delta\varphi^o}{100}$ et on rappelle que $D\% = e^{\dfrac{-\pi z_{BF}}{\sqrt{1-z_{BF}^2}}}$.

Question 5 *Que vaut alors le dépassement $D\%$?*

Question 6 *À partir de la relation précédente, déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.*

Avec la valeur de $K = 16,1$, on introduit, en amont de $G(p)$, dans la chaîne directe, un correcteur $C(p) = K_a \dfrac{1+aTp}{1+Tp}$ à avance de phase destiné à corriger le dépassement et la marge de phase, sans altérer ni la rapidité, ni la précision qui correspondent au cahier des charges.

Question 7 *Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase permettant d'obtenir une marge de phase de 60°.*

CORRECTION

Q1- Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_S < 0{,}08$?

Comme la FTBO est : $G(p) = \dfrac{K}{(10\,p+1)^2\,(p+1)}$, et que le retour est unitaire, la FTBF s'écrit :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{(10\,p+1)^2\,(p+1)+K}$$

Par définition l'écart statique s'écrit : $\varepsilon_S = \lim_{p\to 0^+} \{\ 1 - H(p)\ \} = 1 - \dfrac{K}{1+K} = \dfrac{1}{1+K}$

Pour avoir $\varepsilon_S < 0{,}08$ il faut avoir : $\dfrac{1}{1+K} < 0{,}08$ Soit $\boxed{K > 11{,}5}$

Q2- Quelle est la condition sur K pour obtenir tm < 8s ?

Pour avoir tm < 8 s et en considérant la relation approchée $t_m = \dfrac{3}{\omega_{C0}}$ < 8 s soit $\omega_{C0} > 0{,}375$ s

Le gain K qui correspond à cette pulsation de coupure à 0 dB est tel que :

$$G(j\omega_{c0}) = \frac{K}{(1+100\,\omega_{c0}^2)\,\sqrt{1+\omega_{c0}^2}} = 1$$

Soit $\boxed{K = 16{,}1}$

Q3- Déterminer la plus petite valeur de K, permettant d'obtenir à la fois $\varepsilon S < 0{,}08$ et

D'après Q1, pour avoir $\varepsilon_S < 0{,}08$ il faut **K > 11,5**
D'après Q2, pour avoir obtenir tm < 8s il faut **K > 16,1**

La plus petite valeur qui permet de satisfaire aux deux conditions ci-dessus est **K > 16,1**

Q4- Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions. Que vaut alors le dépassement?

La marge de phase obtenue pour cette valeur de K est :

$$\Delta\varphi = \pi - 2\arctan 10\omega_{C0} - \arctan 10\omega_{C0} = 0{,}16 \text{ rad} = 9°$$

La valeur du dépassement en boucle fermée se détermine par les relations :

$$\Delta\varphi° \ \rightarrow\ z_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi°}{100} \ \rightarrow\ D\% = \exp\left(-\pi\frac{z_{BF}}{\sqrt{1-z^2}}\right)$$

Soit $\Delta\varphi° = 9° \ \rightarrow\ z_{BF} \approx \dfrac{\Delta\varphi°}{100} = 0{,}09 \ \rightarrow\ D\% = \exp\left(-\pi\dfrac{0{,}09}{\sqrt{1-0{,}09^2}}\right)$ = 73%

$$\boxed{\Delta\varphi° = 9° \quad \text{et} \quad D\% = 74}$$

Ces deux valeurs ne sont pas conformes au cahier des charges

Q5- Déterminer la marge de phase qui correspond à un dépassement de 10%.

$$D\% = \exp\left(-\pi\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right) = 0{,}1$$

$$-\pi\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \ln 0{,}1 = -2.3 \qquad \pi^2\frac{z^2}{1-z^2} = 5.3 \qquad z^2 = \frac{5{,}3}{5{,}3+\pi^2}$$

Soit z_{BF} = 0,6   Ainsi : $\Delta\varphi° \approx 100\, z_{BF} = 60°$

Par ailleurs la marge de phase $\Delta\varphi \geq 45°$

Ces deux conditions imposent $\boxed{\Delta\varphi \geq 60°}$

Q6- Déterminer alors la fonction de transfert de ce correcteur à avance de phase

Le correcteur à avance de phase $C(p) = \dfrac{1 + aT\,p}{1 + T\,p}$ introduit a pour mission de remonter la marge de phase à 60°.

Il faut donc obtenir une remontée de phase de 60- 9 = 51° à la pulsation ω_{C0} = 0,375 rad/s

On $\omega_{c0} = \omega_{max} = \dfrac{1}{T\sqrt{a}}$ = 0,375 rad/s et $\varphi_{max} = \arcsin\dfrac{a-1}{a+1}$ = 51°

Cette dernière condition conduit à : a = 8

La première à T = 0,94 s

$$Ka = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Cycle 02