

## TD 1

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016



## Savoirs et compétences :

- Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel intégral
- Con.C2 : Correction d'un système asservi

## Mise en situation

Le robot MC<sup>2</sup>E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

**L'axe en translation du MC<sup>2</sup>E est asservi en effort constant pour tirer (ou pousser) la vésicule au fur et à mesure que le chirurgien utilise son bistouri pour détacher la vésicule du foie. Le diagramme des exigences au dos décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC<sup>2</sup>E.**

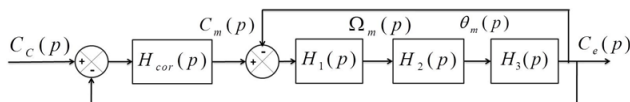
**Objectif** Modéliser et valider l'asservissement en effort.

## Modèle de connaissance de l'asservissement

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$  avec :

- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur ;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera  $\theta_m(p)$ ,  $\Omega_m(p)$ ,  $C_m(p)$  et  $C_e(p)$  les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose  $C_e(t) = K_{C\theta} \theta_m(t)$  où  $K_{C\theta}$  est une constante positive. On a de plus  $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$ . La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$ , couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC<sup>2</sup>E ;
- $C_c(p)$ , couple de consigne ;
- $C_m(p)$ , couple moteur ;
- $H_{cor}(p)$ , fonction de transfert du correcteur.

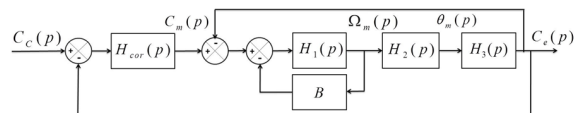
Dans un premier temps, on prendra  $H_{cor}(p) = 1$ .

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Question 2** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

**Question 3** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$  ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.



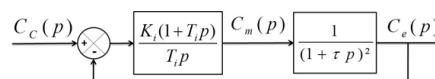
Régulation avec retour tachymétrique

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 4** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus loin (exigences 1.2.2.1 à 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.



## Régulation avec correcteur PI.

**Question 5** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

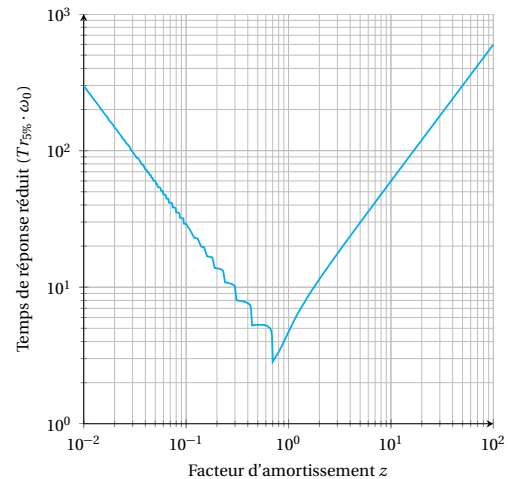
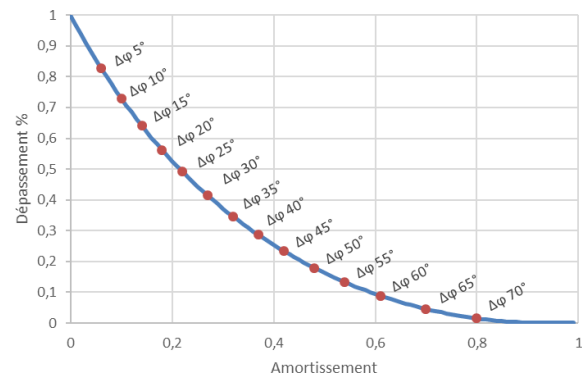
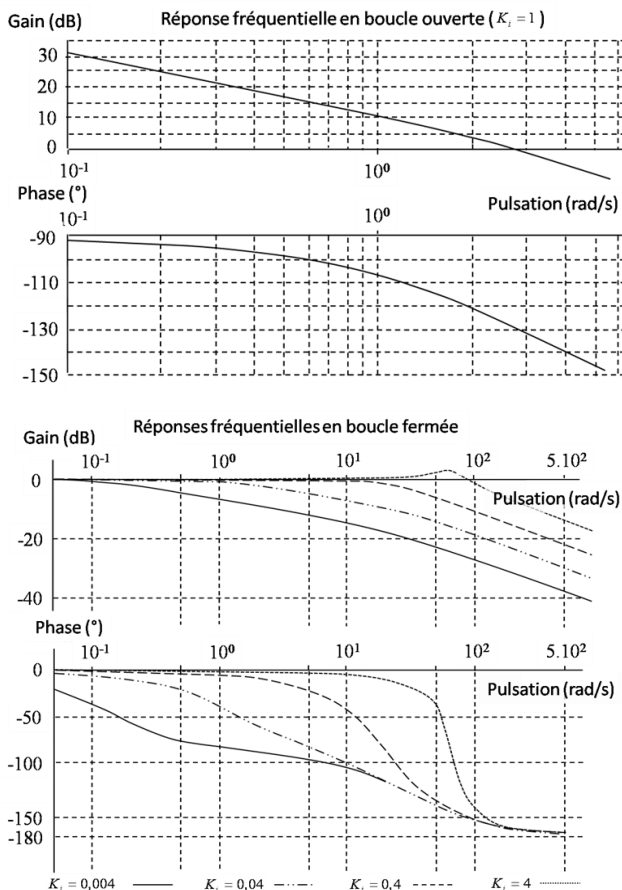
On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme :

$$1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}} p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}$$

**Question 6** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

Les courbes de la réponse fréquentielle en boucle ouverte pour  $K_i = 1$  et les réponses fréquentielles en boucle fermée pour différentes valeurs de  $K_i$  sont données ci-dessous.

**Question 7** En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour  $K_i$  permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.



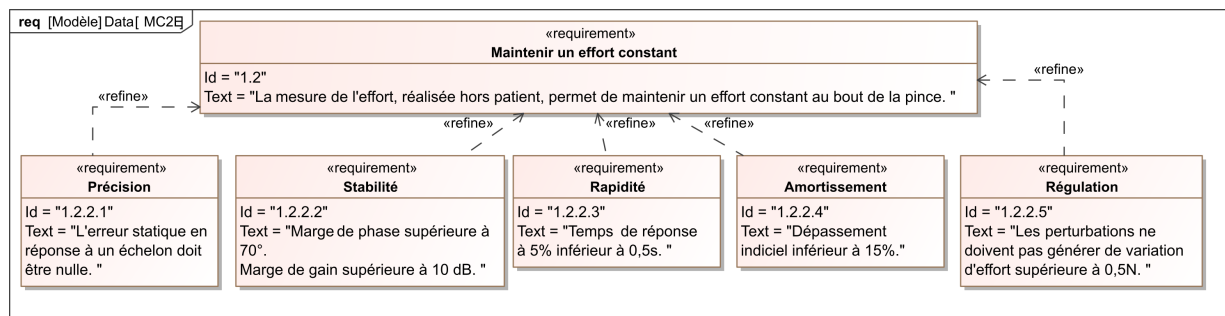
## Retour sur le cahier des charges

**Question 8** Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

| Critère         | Valeur CDCF | Valeur système réglé | Écart |
|-----------------|-------------|----------------------|-------|
| Marges de gain  |             |                      |       |
| Marges de phase |             |                      |       |
| Dépassement     |             |                      |       |
| T5 %            |             |                      |       |
| Erreur statique |             |                      |       |

## Corrigé résumé

- $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$ ,  $H_2(p) = \frac{1}{p}$ ,  $H_3(p) = K_{C\theta}$ .
- $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + 2K_{C\theta}} \cdot$
- Sinus d'amplitude  $C_0/2$  et de pulsation  $\omega_0$ .
- $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$  et  $B = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ .
- Erreur statique nulle.
- $\tau = T_i$ .
- $K_i = 0,4 (< 1,58)$ .
- .



## TD 1



## Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

## Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel intégral
- ☐ Con.C2 : Correction d'un système asservi

## Mise en situation

Le robot MC²E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

L'axe en translation du MC²E est asservi en effort constant pour tirer (ou pousser) la vésicule au fur et à mesure que le chirurgien utilise son bistouri pour détacher la vésicule du foie. Le diagramme des exigences au dos décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC²E.

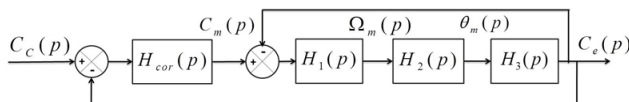
**Objectif** Modéliser et valider l'asservissement en effort.

## Modèle de connaissance de l'asservissement

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$  avec :

- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera  $\theta_m(p)$ ,  $\Omega_m(p)$ ,  $C_m(p)$  et  $C_e(p)$  les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose  $C_e(t) = K_{C\theta} \theta_m(t)$  où  $K_{C\theta}$  est une constante positive. On a de plus  $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$ . La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$ , couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC²E;
- $C_c(p)$ , couple de consigne;
- $C_m(p)$ , couple moteur;
- $H_{cor}(p)$ , fonction de transfert du correcteur.

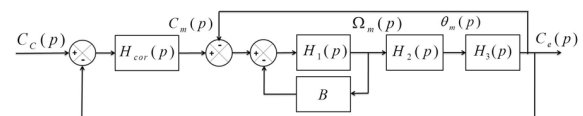
Dans un premier temps, on prendra  $H_{cor}(p) = 1$ .

**Question 9** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Question 10** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

**Question 11** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$  ? Conclure.

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain  $B$ . On s'intéresse ici à la définition analytique de  $B$ . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.



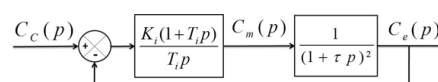
Régulation avec retour tachymétrique

On règle  $B$  de telle façon que, pour  $H_{cor}(p) = 1$ , la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $H_{BO}(p)$ , puisse être mise sous la forme suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$ .

**Question 12** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

Les exigences du cahier des charges sont données plus loin (exigences 1.2.2.1 à 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain  $K_i$  et de constante de temps  $T_i$ . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.



### Régulation avec correcteur PI.

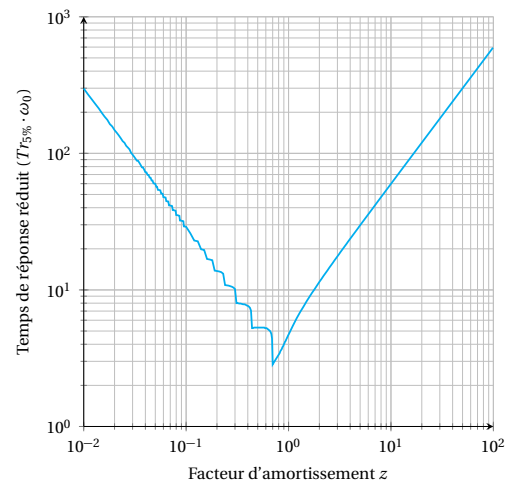
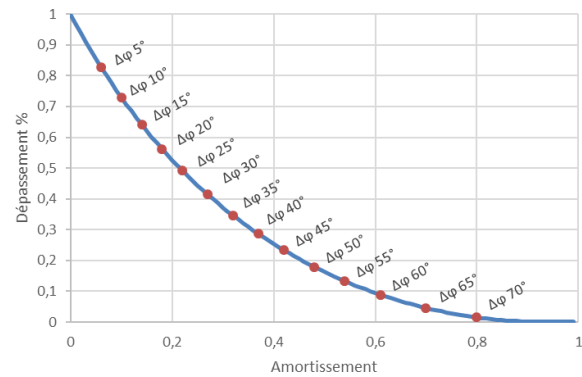
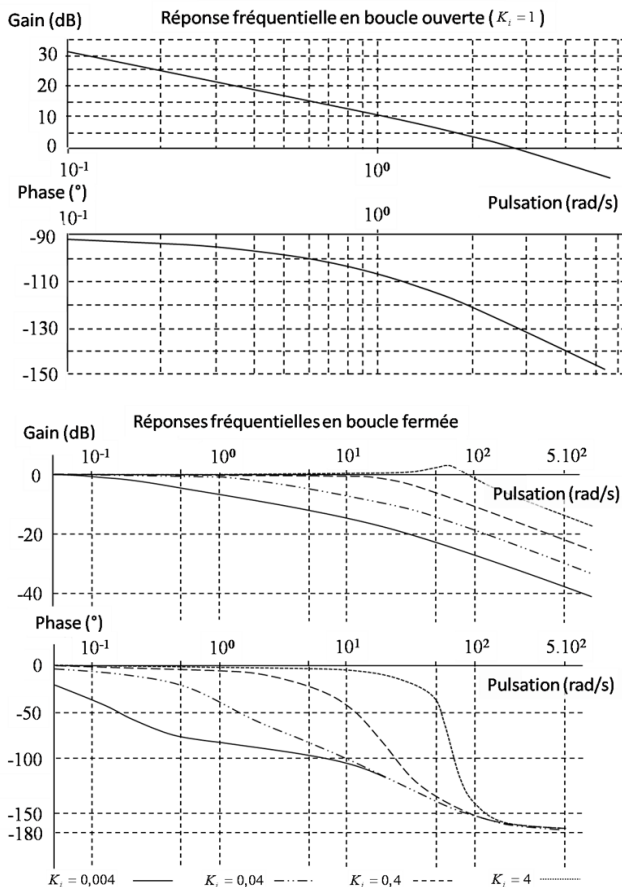
**Question 13** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme :  $\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$ .

**Question 14** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

Les courbes de la réponse fréquentielle en boucle ouverte pour  $K_i = 1$  et les réponses fréquentielles en boucle fermée pour différentes valeurs de  $K_i$  sont données ci-dessous.

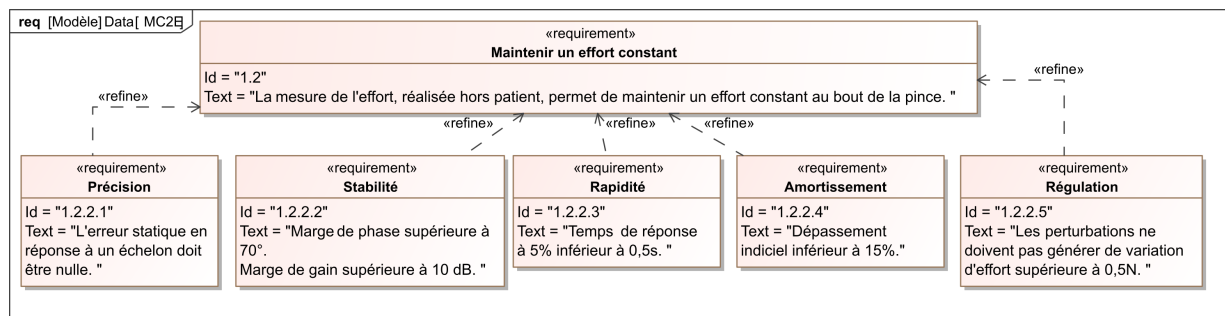
**Question 15** En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour  $K_i$  permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.



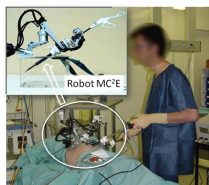
### Retour sur le cahier des charges

**Question 16** Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

| Critère         | Valeur CDCF | Valeur système réglé | Écart |
|-----------------|-------------|----------------------|-------|
| Marges de gain  |             |                      |       |
| Marges de phase |             |                      |       |
| Dépassement     |             |                      |       |
| T5 %            |             |                      |       |
| Erreur statique |             |                      |       |



## TD 1 – Corrigé



### Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

#### Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C4.SF1 : Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel intégral
- ☐ Con.C2 : Correction d'un système asservi

### Mise en situation

#### Modèle de connaissance de l'asservissement

**Question 17** Déterminer les expressions des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$ .

**Correction** On a  $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$  et donc  $H_2(p) = \frac{\theta_m(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{p}$ .

De plus  $Jp^2\theta_m(p) = C_m(p) - C_e(p) \Leftrightarrow Jp\Omega_m(p) = \Omega_m(p)$  et donc  $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_m(p) - C_e(p)} = \frac{1}{Jp}$ .

Enfin,  $H_3(p) = \frac{C_e(p)}{\theta_m(p)} = K_{C\theta}$ .

**Question 18** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  de l'asservissement d'effort.

**Correction** D'une part,  $F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp} \frac{1}{p} K_{C\theta}}{1 + \frac{1}{Jp} \frac{1}{p} K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}$ .

D'autre part,  $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}}{1 + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + K_{C\theta}}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + 2K_{C\theta}}$ .

**Question 19** Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$  ? Conclure.

**Correction** Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. Le gain est de  $\frac{1}{2}$  et la pulsation est de  $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{J}{2K_{C\theta}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K_{C\theta}}{J}}$ .

Pour une entrée échelon d'amplitude  $C_0$ , le système répondra par un sinus d'amplitude  $\frac{C_0}{2}$  (valeur crête à crête  $C_0$ ) de pulsation  $\omega_0$ .

**Question 20** Donner l'expression analytique du gain  $B$ , en fonction de  $J$  et  $K_{C\theta}$ , permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps  $\tau$ .

#### Correction

D'une part,  $F_1(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)B}$ .



$$\begin{aligned} \text{D'autre part, } H_{BO}(p) &= \frac{\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)}{1+\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B} H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+Bp+K_{C\theta}} \\ &= \frac{1}{\frac{J}{K_{C\theta}}p^2+\frac{B}{K_{C\theta}}p+1}. \end{aligned}$$

Enfin,  $(1+\tau p)^2 = 1+2\tau p+\tau^2 p^2$ . Donc nécessairement  $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$  et  $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}} \Leftrightarrow B = 2\tau K_{C\theta} = 2\sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} K_{C\theta} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ .

**Question 21** Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude  $C_0$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Correction** La boucle ouverte est de classe 1. L'erreur statique (entrée échelon) est donc nulle ce qui est conforme à l'exigence 1.2.2.1 du cahier des charges.

**Question 22** Proposer une expression simple pour la constante de temps  $T_i$ .

**Correction**

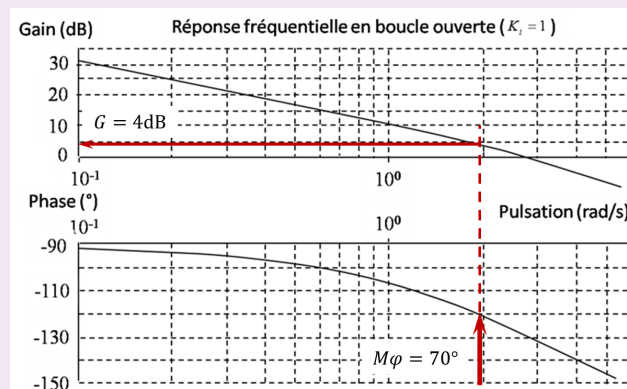
Pour avoir une FTBF d'ordre 2, il faut que la BO soit d'ordre 2. En conséquence, vu la forme de correcteur proposé, on peut envisager que le correcteur compense un pôle du système.

$$\text{Ainsi pour } \tau = T_i, \text{ on a } \frac{C_e(p)}{C_C(p)} = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}}{1+\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)+K_i} = \frac{K_i}{\tau^2 p^2 + \tau p + K_i} = \frac{1}{\frac{\tau^2}{K_i} p^2 + \frac{\tau}{K_i} p + 1}.$$

**Question 23** En s'appuyant sur les diagrammes ci-dessous, proposer un choix de réglage pour  $K_i$  permettant (si possible) de vérifier toutes les performances.

**Correction**

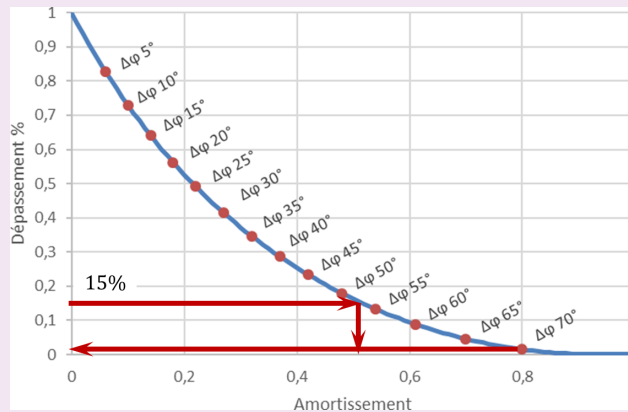
- Marge de gain 10 dB : la boucle ouverte est d'ordre 2. La phase est donc toujours supérieure à  $-180^\circ$  et la marge de gain est infinie. Le critère est respecté.
- Marge de phase supérieure à  $70^\circ$  : il est donc nécessaire que le gain (dB) de la boucle ouverte soit nul lorsque la phase est égale à  $120^\circ$ . D'après la réponse fréquentielle en BO, il faut donc que  $20 \log K_i \leq 4 \Rightarrow K_i \leq 10^{\frac{4}{20}} = 1,58$ .



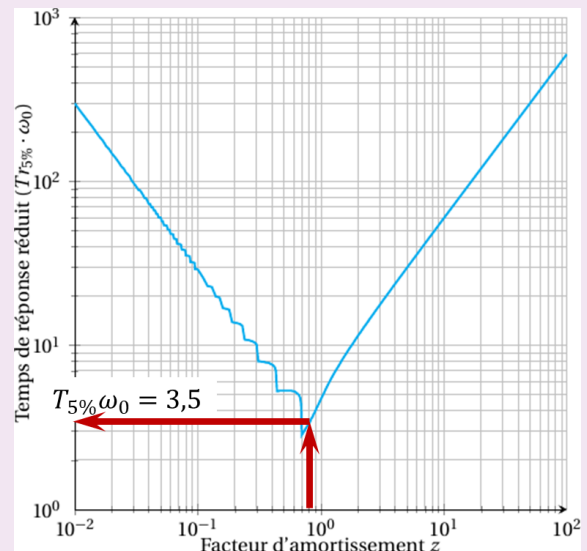
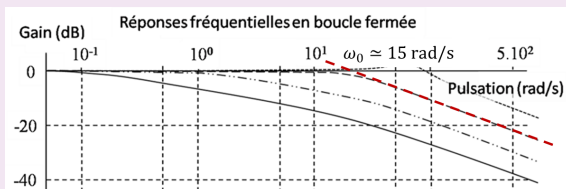
- Dépassement inférieur à 15% : l'abaque ci-dessous montre que pour une marge de phase de  $70^\circ$ , le dépassement sera inférieur à 15%. Ainsi, avec une marge de phase de  $70^\circ$ , le dépassement sera donc d'environ 2% et



le coefficient d'amortissement sera d'environ 0,8.



- Temps de réponse à 5% inférieur à 0,5 s : en utilisant la réponse fréquentielle pour un gain de 0,4 ( $< 1,58$ ) on a  $\omega_0 \simeq 15 \text{ rad s}^{-1}$ . En utilisant l'abaque du temps de réponse réduit, on a  $\omega_0 \cdot T_{r5\%} \simeq 3,5$ ; donc  $T_{r5\%} \simeq \frac{3,5}{15} = 0,23 \text{ s}$ .



- D'après le diagramme de Bode en BF, le gain basse fréquence est nul. Le gain de la fonction de transfert est donc unitaire. L'erreur statique est donc nulle.

On propose donc  $K_i = 0,4 (< 1,58)$ .

## Retour sur le cahier des charges

**Question 24** Remplir le tableau et conclure sur la validation des critères de performance. Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon  $C_{c0}$  en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

### Correction

| Critère         | Valeur CDCF       | Valeur système réglé | Écart |
|-----------------|-------------------|----------------------|-------|
| Marges de gain  | 10 dB             | $\infty$             | OK    |
| Marges de phase | 70°               | 70°                  | OK    |
| Dépassement     | $< 15\%$          | 2%                   | OK    |
| T5 %            | $< 0,5 \text{ s}$ | 0,23 s               | OK    |
| Erreur statique | Nulle             | Nulle                | OK    |

Le cahier des charges est donc respecté. (Réponse indicielle d'un second ordre avec un coefficient d'amortissement de 0,8 et un gain unitaire).

### Corrigé résumé

1.  $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$ ,  $H_2(p) = \frac{1}{p}$ ,  $H_3(p) = K_{C\theta}$ .
2.  $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2 + 2K_{C\theta}}$ .
3. Sinus d'amplitude  $C_0/2$  et de pulsation  $\omega_0$ .
4.  $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$  et  $B = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ .
5. Erreur statique nulle.
6.  $\tau = T_i$ .
7.  $K_i = 0,4 (< 1,58)$ .
8. .