

## TD 03



## Vanoise Express

E3A – PSI – 2014

## Savoirs et compétences :

## Présentation

Noël 2003, le téléphérique Vanoise Express relie enfin les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs, donnant naissance à paradisiski, un domaine skiable de 425 km, le troisième plus grand de France.

Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	Ecart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	Ecart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	Marge de phase	$M_\phi \geq 45^\circ$
	Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1 \text{ rad/s}$

## Modélisation du moteur à courant continu

Hypothèses et données :

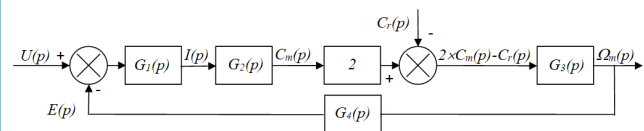
- on suppose les conditions initiales nulles ;
- les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- $L = 0.59 \text{ mH}$  inductance d'un moteur ;
- $R = 0.0386 \Omega$  résistance interne d'un moteur ;
- $f = 6 \text{ N m s/rad}$  coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- $J = 800 \text{ kg m}^2$  moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- $c_m(t) = k_T i(t)$  avec  $k_T = 5.67 \text{ Nm/A}$  (constante de couple d'un moteur) ;
- $e(t) = k_E \omega_m(t)$  avec  $k_E = 5.77 \text{ Vs/rad}$  (constante électrique d'un moteur) ;
- équations de la dynamique :  $2c_m(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t)$  ;
- loi des mailles :  $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ .

Notations :

- on notera  $F(p)$  la transformée de Laplace d'une fonction du temps  $f(t)$  ;
- $u(t)$  tension d'alimentation des moteurs ;
- $i(t)$  intensité traversant un moteur ;
- $e(t)$  force contre électromotrice d'un moteur ;
- $\omega_m(t)$  vitesse de rotation d'un moteur ;
- $c_m(t)$  couple d'un seul moteur ;
- $c_r(t)$  couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du

vent, ramené sur l'axe des moteurs.

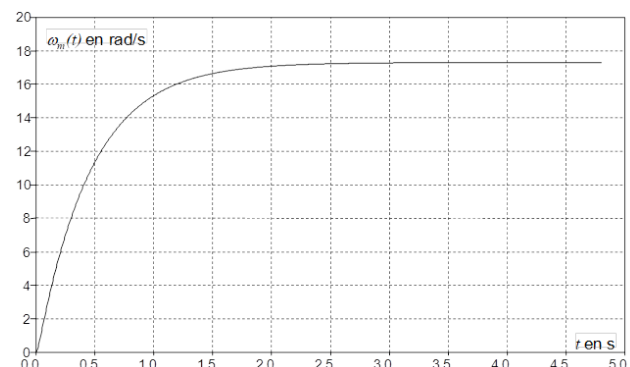
**Question 1** Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminez les fonctions de transfert  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$  écrites dans le domaine de Laplace.



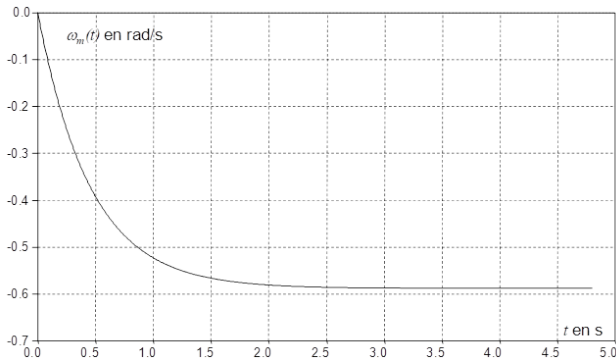
**Question 2**  $\Omega_m(p)$  peut se mettre sous la forme :  $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$ . Exprimer les fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  en fonction de  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$ .

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

- la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V (le couple de perturbation  $c_r(t)$  est nul) ;
- la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m (la tension  $u(t)$  est nulle).



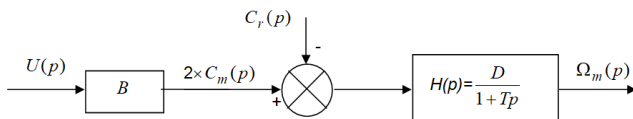
Réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V.



Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m.

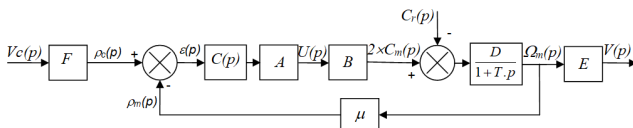
**Question 3** Choisissez et justifiez un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminez numériquement les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  ont sensiblement le même dénominateur, le schéma bloc ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



**Question 4** Donnez la valeur numérique des trois constantes  $B$ ,  $D$  et  $T$ .

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.

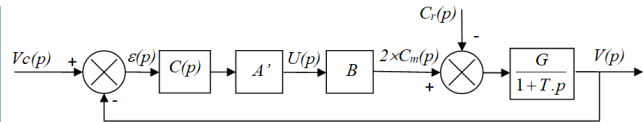


- La consigne de vitesse  $v_c(t)$  est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension  $\rho_c(t)$  avec le gain  $F$ .
- Une génératrice tachymétrique de gain  $\mu = 0.716 \text{ Vs/rad}$  transforme la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  du moteur en une tension  $\rho_m(t)$ .
- Un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  corrige la différence  $\varepsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$  et l'envoie à un amplificateur de gain  $A$ , qui alimente les deux moteurs électriques.
- La vitesse de rotation des moteurs  $\omega_m(t)$  est transformée en vitesse du téléphérique  $v(t)$  avec le gain  $E$ .

**Question 5** Déterminez l'expression du gain  $E$ . Faire une application numérique.

**Question 6** Déterminez l'expression du gain  $F$  pour que  $\varepsilon(t) = 0$  entraîne  $v_c(t) = v(t)$ . Faire une application numérique.

Par transformation du schéma bloc, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients  $E$  et  $F$  calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients  $A'$  et  $G$ . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes :  $A' \cdot B = 3 \cdot 10^4 \text{ sN}$ ;  $G = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m/(sNm)}$  et  $T = 0.47 \text{ s}$ .

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

### Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

**Question 7** Justifiez en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

**Question 8** On suppose  $C_r(p) = 0$ . Calculez en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $V_0$  l'expression de l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12 \text{ m/s}$ . Faire l'application numérique.

On suppose  $V_c(p) = 0$ .

**Question 9** Calculez en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $C_{r0}$  l'expression de l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation en échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$  qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

**Question 10** Faire également une application numérique si  $C_{r0} = 7460 \text{ Nm}$  qui modéliserait la montée vers La Plagne.

**Question 11** Donnez numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$  dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

**Question 12** Existe-t-il une valeur réaliste de  $C_0$  pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié? Justifiez.

### Utilisation d'un correcteur intégral

On choisit maintenant le correcteur  $C(p) = \frac{C_i}{p}$ .

**Question 13** Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée  $FTBO(p)$ . Faire l'application numérique pour  $C_i = 1$ .

**Question 14** Tracez le diagramme asymptotique de Bode de  $FTBO(p)$ . Tracez également l'allure des courbes.

**Question 15** Quelles valeurs numériques de  $C_i$  permettent de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges?

**Question 16** Ces valeurs numériques de  $C_i$  permettent-elles de respecter le critère de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges? Justifiez.

**Question 17** On suppose  $C_r(p)=0$ . Calculez numériquement l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12 \text{ m/s}$ .

**Question 18** On suppose  $V_c(p) = 0$ . Calculez numériquement l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270 \text{ N m}$  qui modéliserait la descente des « Arcs ».

**Question 19** Donnez numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ . Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié? Justifiez.

On suppose  $C_r(p)=0$ .

**Question 20** Calculez l'expression de l'écart de traînage  $\varepsilon_v$  engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations »? Justifiez.

### Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur  $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$ , produit de la fonction  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a > 1$  (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1+Tp)}$ , qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans  $C_a(p)$  (c'est-à-dire pour  $C_a(p)=1$ ).

**Question 21** Montrez que le système n'est pas stable sans la fonction  $C_a(p)$ ?

La fonction  $C_a(p)$  va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

**Question 22** Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation  $1 \text{ rad/s}$  pour obtenir une phase de  $-135^\circ$ ?

**Question 23** Tracez en fonction de  $a$ ,  $\tau$  et  $K$  les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur  $C_a(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$  avec  $a>1$ . Précisez clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Précisez de même les pulsations des points particuliers.

**Question 24** La phase maximum  $\varphi_{\max}$  ajoutée par  $C_a(p)$  peut être calculée par la formule :  $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$ . Calculez numériquement  $a$  pour obtenir la remontée de

phase déterminée sur le diagramme de Bode précédemment.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

**Question 25** Donnez l'expression en fonction de  $a$  et  $\tau$  de la pulsation  $\omega$  pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

**Question 26** En déduire la valeur numérique de  $\tau$  pour que  $\varphi_{\max}$  soit ajoutée à la pulsation  $1 \text{ rad/s}$ .

**Question 27** Calculez numériquement la valeur à donner à  $K$  pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges? Précisez la démarche utilisée.

**Question 28** Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés? Justifiez.

**Question 29** Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges? Justifiez.

### Éléments de correction

- $G_1(p) = \frac{1}{R+Lp}$ ,  $G_2(p) = k_T$ ,  $G_3(p) = \frac{1}{f+Jp}$ ,  $G_4(p) = k_E$ .
- $F_1(p) = \frac{2G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1+2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$  et  $F_2(p) = \frac{G_3(p)}{1+2G_1(p)G_2(p)G_3(p)G_4(p)}$ .
- $F_1(p) = \frac{0,1725}{1+0,47p}$  et  $F_2(p) = \frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{1+0,47p}$ .
- $B = 297,4 \text{ N m V}^{-1}$ ,  $D = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1} \text{ Nm}$  et  $T = 0,47 \text{ s}$ .
- $E = \frac{D}{2} k = 0,1 \text{ m}$ .
- $F = \frac{\mu}{E} = 7,16 \text{ V s m}^{-1}$ .
- FTBO d'ordre 1 bouclé. Le système est stable.
- FTBO de classe 0  $\varepsilon'_S = \frac{V_0}{1+C_0A'BG} = 4,286 \text{ m s}^{-1}$ .
- $\varepsilon''_S = \frac{C_{r0}G}{1+C_0A'BG} = -0,156 \text{ m s}^{-1}$ .
- $\varepsilon''_S = 0,160 \text{ m s}^{-1}$ .
- $\varepsilon'_S = 4,13 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\varepsilon'_S = 4,46 \text{ m s}^{-1}$ .
- $C_0$  infini
- FTBO( $p$ ) =  $\frac{1,8}{p(1+0,47p)}$
- 
- $\omega_{0\text{dB}} \leq 2,13 \text{ rad s}^{-1}$  et  $C_i \leq 1,67$ .
- 
- FTBO de classe 1  $\varepsilon'_S = 0$ .
- Intégrateur en amont de la perturbation  $\varepsilon''_S = 0$ .
- CDC OK.
- $\varepsilon_v = \frac{1}{C_iA'BG}$
- Marge négative, système instable.
- $70^\circ$  de phase à ajouter.
- 
- $a = 32,16$
- $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau a \tau}}$
- $\tau = 0,176 \text{ s}$
- $K = 0,109$
- 
-

Diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{A'.B.G}{p^2.(1+T.p)}$

