

# E3A MP : Vannes de régulation d'un groupe Turbo-Alternateur de centrale nucléaire

## PARTIE I

**Q1 :**

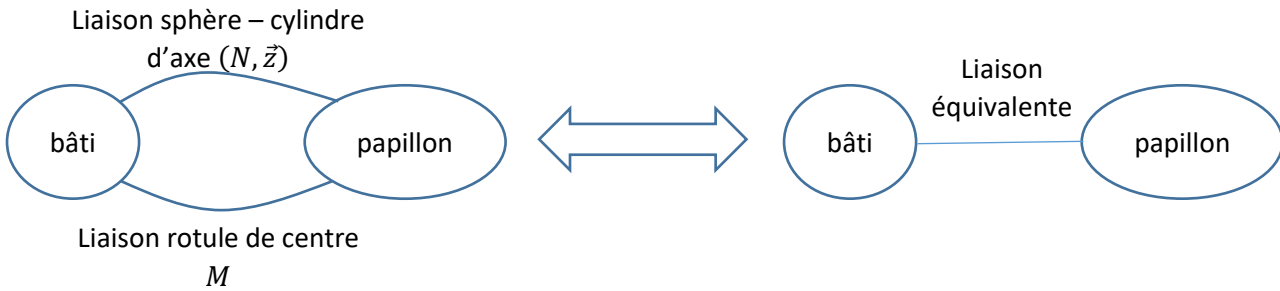
Liaison sphère – cylindre d'axe  $(N, \vec{z})$  :

$$\{\mathcal{V}_{papillonSP/b\hat{a}ti}\}_N = \begin{Bmatrix} \omega_{xN} \cdot \vec{x} + \omega_{yN} \cdot \vec{y} + \omega_{zN} \cdot \vec{z} \\ V_{zN} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \omega_{xN} & 0 \\ \omega_{yN} & 0 \\ \omega_{zN} & V_{zN} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Liaison rotule de centre  $M$  :

$$\{\mathcal{V}_{papillonR/b\hat{a}ti}\}_M = \begin{Bmatrix} \omega_{xM} \cdot \vec{x} + \omega_{yM} \cdot \vec{y} + \omega_{zM} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \omega_{xM} & 0 \\ \omega_{yM} & 0 \\ \omega_{zM} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

**Q2 :**



De façon évidente ces deux liaisons en parallèle sont équivalentes à une liaison pivot d'axe  $(N, \vec{z})$  ou  $(M, \vec{z})$ . Pour le démontrer :

$$\{\mathcal{V}_{papilloneq/b\hat{a}ti}\} = \{\mathcal{V}_{papillonSP/b\hat{a}ti}\} = \{\mathcal{V}_{papillonR/b\hat{a}ti}\}$$

En transportant le torseur cinématique de la liaison rotule du point  $M$  au point  $N$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{papillonR/b\hat{a}ti}^N} &= \overrightarrow{V_{papillonR/b\hat{a}ti}^M} + \overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{papillonR/b\hat{a}ti}} = \vec{0} - n \cdot \vec{z} \wedge (\omega_{xM} \cdot \vec{x} + \omega_{yM} \cdot \vec{y} + \omega_{zM} \cdot \vec{z}) \\ &= -n \cdot \omega_{xM} \cdot \vec{y} + n \cdot \omega_{yM} \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

$$\{\mathcal{V}_{papillonR/b\hat{a}ti}\}_M = \begin{Bmatrix} \omega_{xM} \cdot \vec{x} + \omega_{yM} \cdot \vec{y} + \omega_{zM} \cdot \vec{z} \\ n \cdot \omega_{yM} \cdot \vec{x} - n \cdot \omega_{xM} \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \omega_{xM} & n \cdot \omega_{yM} \\ \omega_{yM} & -n \cdot \omega_{xM} \\ \omega_{zM} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On tire le système d'équations :

$$\begin{cases} \omega_{xeq} = \omega_{xN} = \omega_{xM} \\ \omega_{yeq} = \omega_{yN} = \omega_{yM} \\ \omega_{zeq} = \omega_{zN} = \omega_{zM} \\ V_{xeq} = n \cdot \omega_{yM} = 0 \\ V_{yeq} = -n \cdot \omega_{xM} = 0 \\ V_{zeq} = 0 = V_{zN} \end{cases}$$

On résout rapidement :

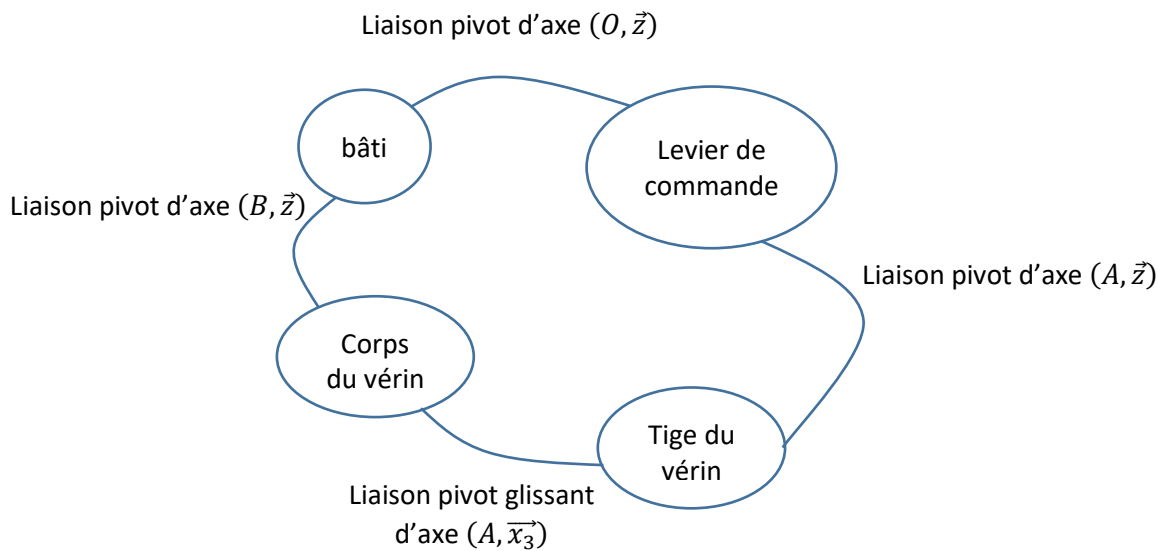
$$\begin{cases} \omega_{xeq} = 0 \\ \omega_{yeq} = 0 \\ \omega_{zeq} = \omega_{zN} = \omega_{zM} \\ V_{xeq} = 0 \\ V_{yeq} = 0 \\ V_{zeq} = 0 \end{cases}$$

Donc le torseur de la liaison équivalente s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{papilloneq/bâti}\}_N = \begin{Bmatrix} \omega_{zeq} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{zeq} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Qui est le torseur d'une liaison pivot d'axe  $(N, \vec{z})$  (Si on transporte le torseur de la liaison sphère cylindre en  $M$ , on trouve une liaison pivot d'axe  $(M, \vec{z})$ ).

Q3 :



On recherche le degré d'hyperstatisme :

Approche cinématique

$$h = m + 6 \cdot \gamma - I_C$$

une seule mobilité (la mobilité utile) :  $m = 1$

Une seule boucle :  $\gamma = 1$

Inconnues cinématiques :  $I_C = 5$

On a donc :

$$h = m + 6 \cdot \gamma - I_C = 1 + 6 - 5 = 2$$

Il faudra donc **2** paramètres géométriques pour définir la configuration du mécanisme.

Remarque : l'analyse de l'hyperstaticité n'est pas au programme. On attendait que le candidat dise que le système ne contient qu'une mobilité, celle de l'entrée sortie. Le modèle ne fait pas apparaître d'autre mouvement entre groupes fonctionnels.

On a :

$$\{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \{\mathcal{V}_{3/0}\} \quad (E)$$

$$\{v_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{3/2} & V_{A,3/2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})}$$

$$\{v_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})}$$

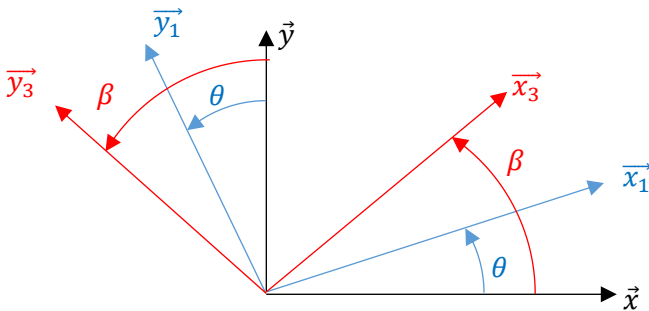
$$\{v_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{1/0} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & -e \cdot \omega_{1/0} \\ 0 & 0 \\ \omega_{1/0} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})}$$

$$\{v_{3/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{3/0} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda(t) \cdot \omega_{3/0} \\ \omega_{3/0} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})}$$

On trouve rapidement en projetant les vitesses de rotation de l'équation (E) sur l'axe  $\vec{x}_3$  :

$$\omega_{2/3} = 0$$

**Q4 :**



La fermeture géométrique donne :

$$\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}$$

$$e \cdot \vec{y}_1 + \lambda \cdot \vec{x}_3 - L \cdot \vec{x} - d \cdot \vec{y} = \vec{0}$$

$$\lambda \cdot \vec{x}_3 = L \cdot \vec{x} + d \cdot \vec{y} - e \cdot \vec{y}_1$$

$$\lambda^2 = L^2 + d^2 + e^2 - 2 \cdot L \cdot e \cdot \vec{x} \cdot \vec{y}_1 - 2 \cdot d \cdot e \cdot \vec{y} \cdot \vec{y}_1$$

$$\lambda^2 = L^2 + d^2 + e^2 + 2 \cdot L \cdot e \cdot \sin \theta - 2 \cdot d \cdot e \cdot \cos \theta$$

$$\lambda = \sqrt{L^2 + d^2 + e^2 + 2 \cdot L \cdot e \cdot \sin \theta - 2 \cdot d \cdot e \cdot \cos \theta}$$

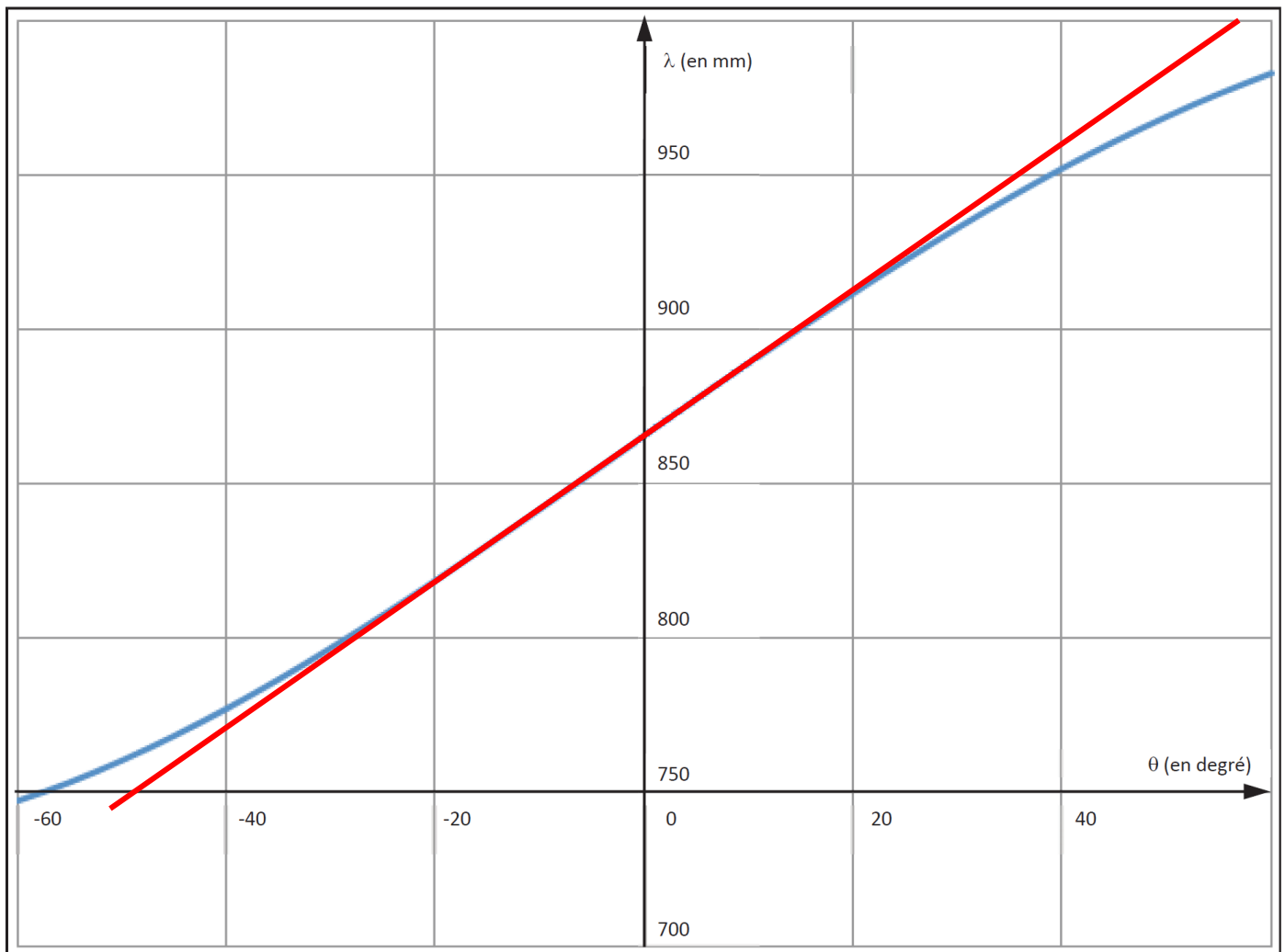
**Q5 :**

Pour  $\theta = +\frac{\pi}{4}$ , on trouve :  $\lambda = 960,8 \text{ mm}$

Pour  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ , on trouve :  $\lambda = 768,8 \text{ mm}$

Donc la course utile :  $\Delta\lambda = 192 \text{ mm}$

Q6 :



On trace une droite autour de la position centrée  $\theta = 0$  et on détermine son coefficient directeur :

Pour  $\theta = 20^\circ = 0,35 \text{ rad}$ , on a :  $\Delta\lambda = 45 \text{ mm}$

Pour  $\theta = -20^\circ = -0,35 \text{ rad}$ , on a :  $\Delta\lambda = -45 \text{ mm}$

Soit :  $\theta = K_\theta \cdot \Delta\lambda$

Donc :  $K_\theta = 7,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{mm}^{-1}$

Q7 :

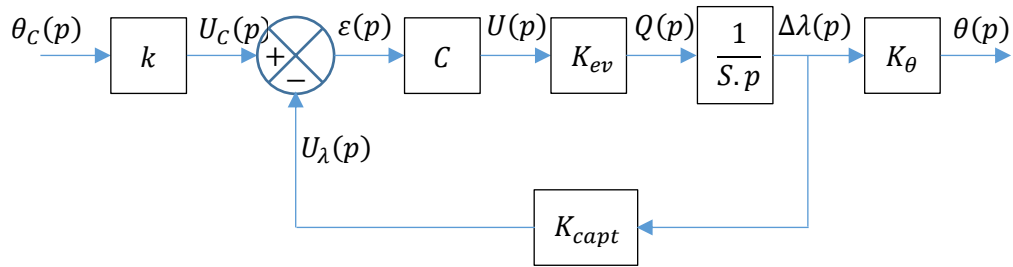
On a :  $q(t) = S \cdot \frac{d\Delta\lambda}{dt}$  donc :  $Q(p) = S \cdot p \cdot \Delta\lambda(p)$

Q8 :

$$K_{capt} = \frac{u_\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{24}{200}$$

$$K_{capt} = 0,12 \text{ V} \cdot \text{mm}^{-1} = 120 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

**Q9 :**



**Q10 :**

$$H(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_c(p)} = k \cdot K_\theta \cdot \frac{\frac{C \cdot K_{ev}}{S \cdot p}}{1 + \frac{C \cdot K_{ev} \cdot K_{capt}}{S \cdot p}}$$

$$H(p) = \frac{\frac{k \cdot K_\theta}{K_{capt}}}{1 + \frac{S}{C \cdot K_{ev} \cdot K_{capt}} \cdot p}$$

**Q11 :**

$H(p)$  est un 1<sup>er</sup> ordre de la forme :

$$\frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Avec :

$$K = \frac{k \cdot K_\theta}{K_{capt}}$$

$$\tau = \frac{S}{C \cdot K_{ev} \cdot K_{capt}}$$

**Q12 :**

On veut :  $K = 1$  soit :  $k = \frac{K_{capt}}{K_\theta}$

**Q13 :**

Si on a un gain statique = 1 (en BF) alors l'écart statique sera nul pour une entrée en échelon. On vérifie alors le critère de précision du diagramme des exigences.

**Q14 :**

On veut un temps à 5% inférieur à 2s. Soit :

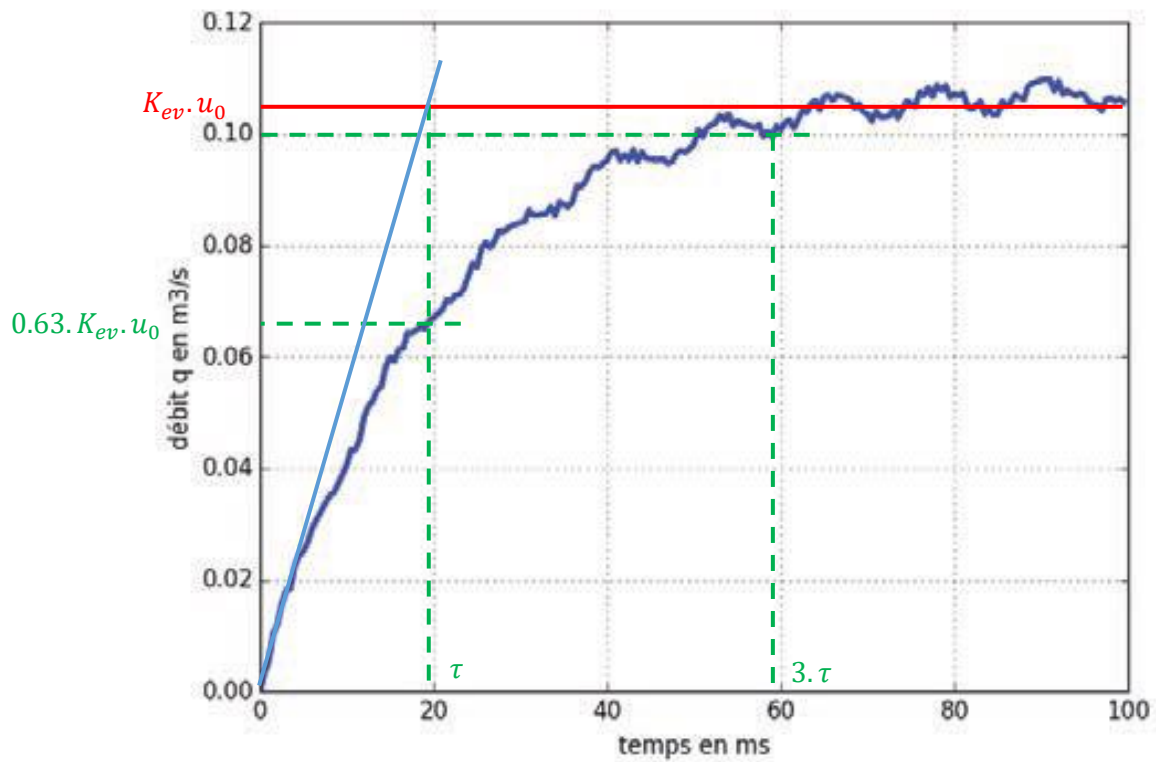
$$t_{5\%} = 3 \cdot \tau < 2 \text{ s}$$

$$\frac{S}{C \cdot K_{ev} \cdot K_{capt}} < \frac{2}{3}$$

$$C > \frac{3.S}{2.K_{ev}.K_{capt}}$$

$$C > 0,0125$$

Q15 :



La tangente à l'origine semble non nulle : on peut donc logiquement penser qu'on a un premier ordre. Soit :

$$H_{ev}(p) = \frac{Q(p)}{U(p)} = \frac{K_{ev}}{1 + \tau_{ev} \cdot p}$$

Par identification graphique, on trouve :

$$K_{ev} \cdot u_0 = 0.105$$

Donc :  $K_{ev} = 0,0105 \text{ m}^3 \cdot (\text{s} \cdot \text{V})^{-1}$

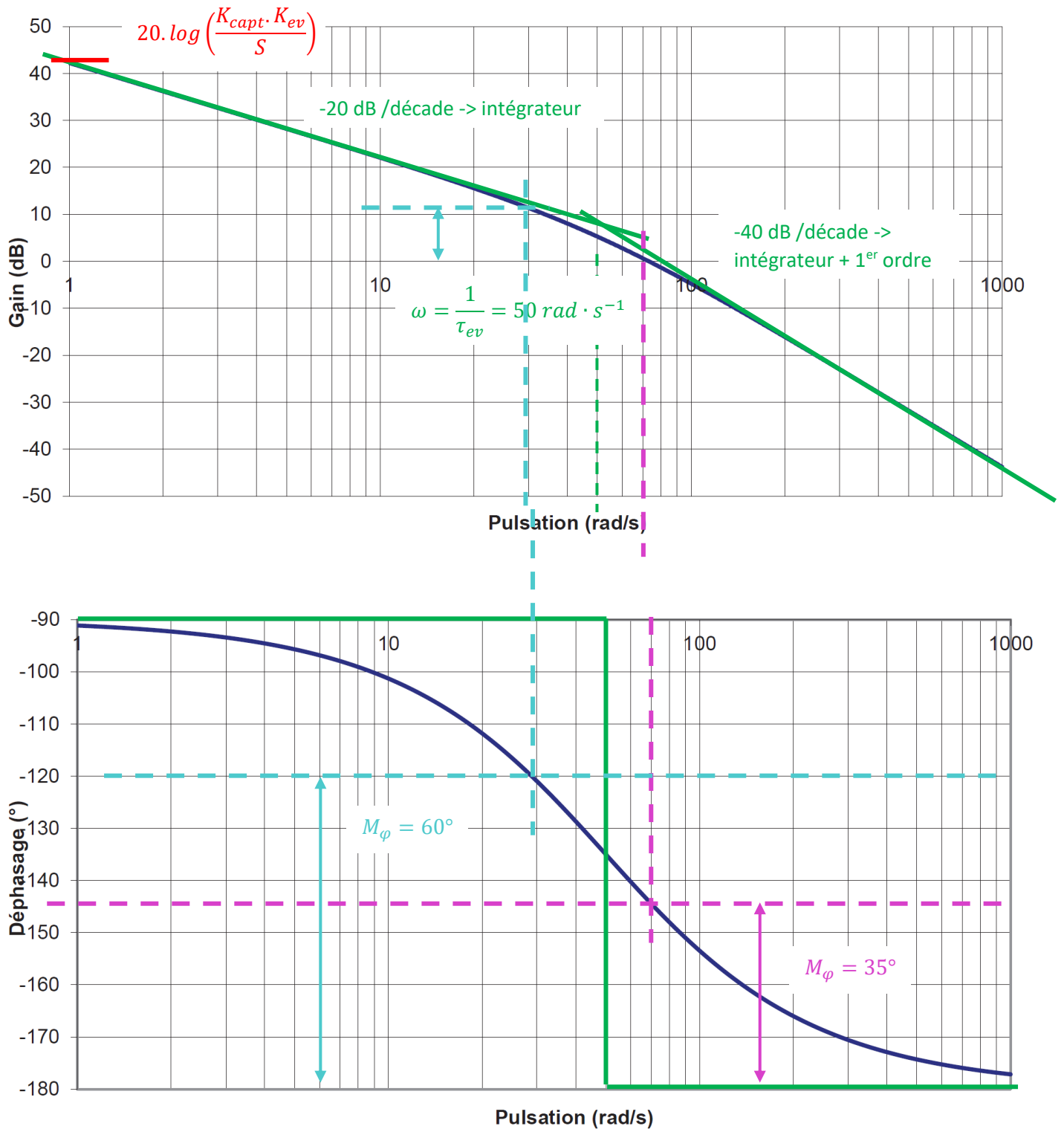
Et :  $3 \cdot \tau = 60 \text{ ms}$   $\tau = 20 \text{ ms}$

Q16 :

$$H(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_c(p)} = k \cdot K_\theta \cdot \frac{\frac{C}{S \cdot p} \cdot \frac{K_{ev}}{1 + \tau_{ev} \cdot p}}{1 + \frac{C \cdot K_{capt}}{S \cdot p} \cdot \frac{K_{ev}}{1 + \tau_{ev} \cdot p}}$$

$$H(p) = \frac{\frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S}}{p \cdot (1 + \tau_{ev} \cdot p)} \approx \frac{130}{p \cdot (1 + 0,2 \cdot p)}$$

## Diagramme de Bode



**Q17 :**

La marge de phase  $M_\varphi = 35^\circ$  est positive et la marge de gain  $M_G = \infty$ . Le système est donc stable.

**Q18 :**

On veut une marge de phase  $M_\varphi = 60^\circ$ .

Graphiquement, on trouve une pulsation  $\omega = 30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , il faut donc « baisser » le gain d'environ 12 dB. Soit

$$20 \cdot \log \left( \frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S} \right) = 11,5$$

$$\frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S} = 10^{0,575} = 3,76$$

$$C = 0,3$$

Par le calcul, on cherche la pulsation pour laquelle  $\text{Arg}(H(p)) = -120^\circ$

$$\text{Arg}(H(j \cdot \omega_\varphi)) = \text{Arg} \left( \frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S \cdot j \cdot \omega_\varphi} \right) - \text{Arg}(1 + \tau_{ev} \cdot j \cdot \omega_\varphi) = -90 - \tan^{-1}(\tau_{ev} \cdot \omega_\varphi) = -120^\circ$$

$$\tan^{-1}(\tau_{ev} \cdot \omega_\varphi) = 30^\circ$$

$$\omega_\varphi = \frac{1}{\tau_{ev} \cdot \sqrt{3}} = 28,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Puis on cherche le gain à cette pulsation  $\omega_\varphi$  :

$$\begin{aligned} 20 \cdot \log |H(j \cdot \omega_\varphi)| &= 20 \cdot \log \left| \frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S \cdot j \cdot \omega_\varphi} \right| + 20 \cdot \log \left| \frac{1}{1 + \tau_{ev} \cdot j \cdot \omega_\varphi} \right| \\ &= 20 \cdot \log \left( \frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S \cdot \omega_\varphi} \right) - 20 \cdot \log \sqrt{1 + \tau_{ev}^2 \cdot \omega_\varphi^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S \cdot \omega_\varphi} = \sqrt{1 + \tau_{ev}^2 \cdot \omega_\varphi^2}$$

$$C = \frac{S \cdot \omega_\varphi}{K_{capt} \cdot K_{ev}} \cdot \sqrt{1 + \tau_{ev}^2 \cdot \omega_\varphi^2}$$

$$C = 0,26$$

Ce gain  $C$  permettra de respecter les exigences de stabilité.

**Q19 :**

$$H(p) = \frac{1}{1 + 3 \cdot 10^{-2} \cdot p + 6 \cdot 10^{-4} \cdot p^2} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2}$$

Donc :

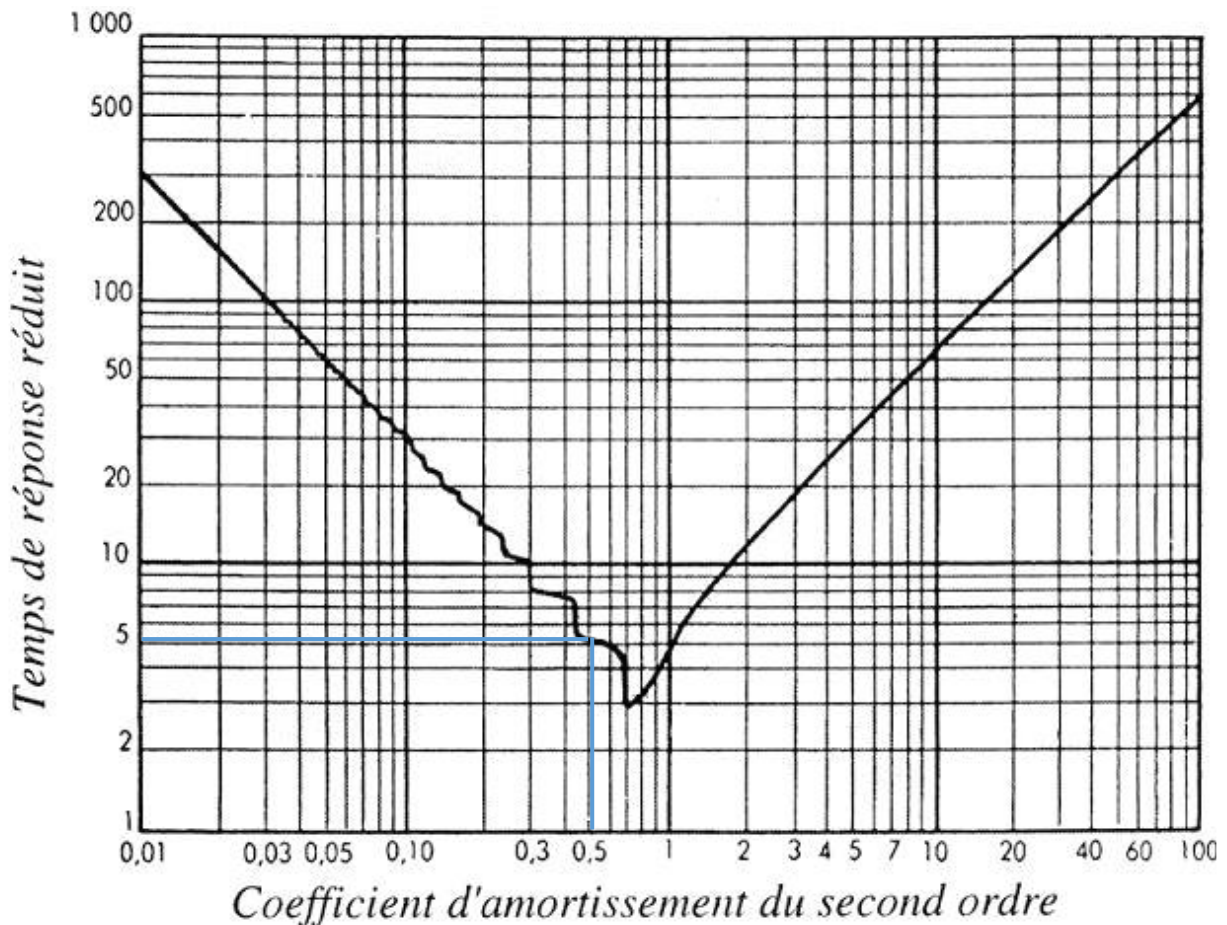
$$K = 1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{6 \cdot 10^{-4}}} = 40,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\xi = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot \omega_0}{2} = 0,612$$



Q20 :



On trouve en lisant l'abaque :

$$t_{r5\%} \cdot \omega_0 = 5,1$$

Donc :

$$t_{r5\%} = 0,125 \text{ s}$$

Ce temps est largement inférieur aux exigences de 2 s.

## PARTIE II

Q22 :

En isolant le vérin (2 + 3), ce solide est soumis à deux actions mécaniques : elles sont donc de même intensité, de sens opposé et de même direction, et ont même droites support (**AB**).

Les deux glisseurs sont directement opposés.

Q23 :

On isole (1) :

Les actions mécaniques appliquées en négligeant la pesanteur et celle du fluide de la canalisation :

Couple de maintien :  $\overrightarrow{C_{\text{maintien} \rightarrow 1}} = -C_{\text{maintien} \rightarrow 1} \cdot \vec{z}$   $C_{\text{maintien} \rightarrow 1} = 11800 \text{ N} \cdot \text{m}$

Tige du vérin au point A :  $\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} = -F_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{x}$   $F_{2 \rightarrow 1} > 0$

Bâti au point O

Butée :  $\overrightarrow{C_{\text{butée} \rightarrow 1}} = C_{\text{butée} \rightarrow 1} \cdot \vec{z}$   $C_{\text{butée} \rightarrow 1} < 0$

**Q24 :**

En appliquant le théorème du moment du Principe Fondamental de la Statique au solide (1) au point  $O$  projeté sur l'axe  $\vec{z}$ , à la limite du décollement ( $C_{butée \rightarrow 1} = 0$ ), on trouve rapidement :

$$F_{2 \rightarrow 1 \text{ ferm}} \cdot e \cdot \sin \frac{\pi}{4} - C_{\text{maintien} \rightarrow 1} = 0$$

$$F_{2 \rightarrow 1 \text{ ferm}} = \frac{\sqrt{2}}{e} \cdot C_{\text{maintien} \rightarrow 1}$$

**Q25 :**

En isolant la tige (2), et en appliquant le théorème de la résultante du Principe Fondamental de la Statique à cette tige projeté sur  $\vec{x}$ , on trouve rapidement :

$$F_{2 \rightarrow 1 \text{ ferm}} = k_r \cdot (l_0 - L_{\text{ferm}})$$

$$l_0 = \frac{F_{2 \rightarrow 1 \text{ ferm}}}{k_r} + L_{\text{ferm}}$$

$$l_0 = \frac{C_{\text{maintien} \rightarrow 1} \cdot \sqrt{2}}{e \cdot k_r} + L_{\text{ferm}}$$

$$l_0 = 991 \text{ mm}$$

**Q26 :**

On a :

$$F_{r2ouv} = k_r \cdot (l_0 - (L_{\text{ferm}} - \Delta\lambda))$$

$$F_{r2ouv} = F_{2 \rightarrow 1 \text{ ferm}} + k_r \cdot \Delta\lambda$$

$$F_{r2ouv} = 172.10^3 \text{ N}$$

**Q27 :**

En isolant le papillon (1), en appliquant le théorème du moment au point  $O$  projeté sur l'axe  $\vec{z}$ , et en reprenant les mêmes hypothèses (poids et action du fluide négligés), on trouve que  $F_{2 \rightarrow 1} = -F_{1 \rightarrow 2} = 0$ .

En isolant la tige (2), et en appliquant le théorème de la résultante du Principe Fondamental de la Statique à cette tige projeté sur  $\vec{x}$ , on trouve rapidement :

$$F_{r2ouv} = P_{\text{alim}} \cdot S_{\text{vérin}}$$

On calcule alors :

$$P_{\text{alim}} \cdot S_{\text{vérin}} = 200.10^5 \times \frac{\pi}{4} \cdot ((125.10^{-3})^2 - (53.10^{-3})^2) = 201.10^3 \text{ N}$$

Le maintien en position ouverte est donc validé :

**Q28 :**

Les deux pièces en mouvement sont le papillon (1) et la tige (2). Donc :

$$T(E/R) = T(1/R) + T(2/R)$$

Le mouvement du papillon (1) est un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{z})$ , donc :

$$T(1/R) = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Le mouvement de la tige (2) est un mouvement de translation supposé rectiligne le long de l'axe  $\vec{x}$ , donc :

$$T(2/R) = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2$$

$$T(E/R) = \frac{1}{2} \cdot \left[ I_1 \cdot \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + m_2 \cdot \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \right]$$

**Q29 :**

D'après la partie I, on a  $\theta(t) = K_\theta \cdot \Delta\lambda(t)$

$$\frac{d\theta}{dt} = K_\theta \cdot \frac{d\lambda}{dt}$$

$$T(E/R) = \frac{1}{2} \cdot \left[ I_1 \cdot \left( K_\theta \cdot \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + m_2 \cdot \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot (I_1 \cdot K_\theta^2 + m_2) \cdot \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot M_{eq} \cdot \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot M_{eq} \cdot \dot{x}^2$$

$$M_{eq} = M = I_1 \cdot K_\theta^2 + m_2$$

**Q30 :**

D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse  $M$ , on trouve :

$$k \cdot (l_0 - x) - \mu \cdot \dot{x} = M \cdot \ddot{x}$$

**Q31 :**

On pose :  $x = X_1$  et  $\dot{x} = \dot{X}_1 = X_2$

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = \frac{k}{M} \cdot (l_0 - X_1) - \mu \cdot X_2 \end{cases}$$

On a donc, en posant :  $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$   $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\mu \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{M} \cdot l_0 \end{bmatrix}$

$$\dot{X} = A \cdot X + B$$

On peut donc appliquer la méthode d'Euler à cette équation, en posant  $h = \Delta t$  le pas :

$$X_{n+1} = h \cdot (A \cdot X_n + B) + X_n$$

En Scilab

$$t=t+h$$

$$x=h*Xp(k)+X(k)$$

$$xp = -h * (Kr/M * X(k) + Mu * Xp(k) + Kr * L0) + Xp(k)$$

En Python

$$t = t + h$$

$$x = h * Xp(k) + X(k)$$

$$xp = -h * (Kr/M * X(k) + Mu * Xp(k) + Kr * L0) + Xp(k)$$

**Q32 :**

A la lecture des courbes, on a :

	Temps de fermeture	Vitesse d'impact
Sans ralentisseur	0,23 s	$1,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Les exigences attendues sont

- un temps de fermeture inférieur à 0,4 s : la solution convient.
- Une vitesse d'impact inférieure à  $0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  : le ralentisseur est donc nécessaire.

**Q33 :**

En Scilab :

```
function [F_R]=Effort_ralentisseur(x, xp)
    if x<X_R
        F_R=0
    else
        F_R=k_R*(L0-x)-mu_R*xp
    end
endfunction
```

En Python :

```
def Effort_ralentisseur(x, xp) ;
    if x<X_R :
        F_R=0
    Else:
        F_R=k_R*(L0-x)-mu_R*xp
    return F_R
```

**Q34 :**

	Temps de fermeture	Vitesse d'impact
Avec ralentisseur	0,24 s	$0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Les exigences attendues sont :

- un temps de fermeture inférieur à 0,4 s : la solution convient.
- Une vitesse d'impact inférieure à  $0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  : le ralentisseur est donc nécessaire.