Modéliser le comportement cinématique des systèmes mécaniques

Révision 1 – Modélisation cinématique

Définition — Solide Indéformable. On considère deux points A et B d'un solide indéformable noté S. On note t le temps. $\forall A, B \in S, \forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB(t)}^2 = \text{constante}$.

Définition — Trajectoire d'un point appartenant à un solide. Soit un point P se déplaçant dans un repère $\mathscr{R}_0\left(O, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$. La trajectoire du point P est définie par la courbe $\mathscr{C}(t)$ paramétrée par le temps t. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{OP(t)} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_0} = x(t)\overrightarrow{i_0} + y(t)\overrightarrow{j_0} + z(t)\overrightarrow{k_0}$$

Définition — Vitesse d'un point appartenant à un solide. Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathscr{R}_0$ $\left(O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathscr{R}_1$, $\left(O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0. Soit un point P appartenant au solide S_1. La vitesse du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi : $\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)}(t) = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0P(t)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}$.

■ **Exemple** ■

Résultat Lorsque il n'y a pas de degré de liberté de translation dans une liaison, la vitesse au centre de la liaison est nulle. Ainsi :

- si les solides S_1 et S_2 sont en liaison rotule de centre O alors $\overrightarrow{V(O \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$;
- si les solides S_1 et S_2 sont en liaison pivot de d'axe $\left(O, \overrightarrow{u}\right)$ alors $\overrightarrow{V(O \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$;
- si les solides S_1 et S_2 sont en liaison rotule à doigt de centre O alors $\overrightarrow{V(O \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$.

Résultat Dérivation vectorielle

Soient S_0 et S_1 deux solides en mouvements relatifs et $\mathscr{R}_0$ et $\mathscr{R}_1$ les repères orthonormés directs associés. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de l'espace. On note $\overrightarrow{\Omega(\mathscr{R}_1/\mathscr{R}_0)}$ le vecteur instantané de rotation permettant d'exprimer les rotations entre chacune des deux bases. La dérivée d'un vecteur dans une base mobile se calcule donc ainsi :

$$\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(\mathscr{R}_1/\mathscr{R}_0)} \wedge \overrightarrow{v}.$$

Résultat Champ du vecteur vitesse dans un solide – Formule de Varignon – Formule de BABAR

Soient A et B deux points appartenant à un solide S_1 en mouvement par rapport à S_0. Le champ des vecteurs vitesses est donc déterminé ainsi :

$$\overrightarrow{V(\mathbf{B} \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(\mathbf{A} \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{\mathbf{BA}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}_{\overrightarrow{R}}$$

Résultat Composition du vecteur vitesse

Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}_0$ et un solide S_2 par rapport au solide S_1. Pour chacun des points A appartenant au solide S_2, on a :

$$\overrightarrow{V(A \in S_2/\mathscr{R}_0)} = \overrightarrow{V(A \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(A \in S_1/\mathscr{R}_0)}$$

R

- $\overrightarrow{V(A \in S_2/\mathscr{R}_0)}$ est appelé vecteur vitesse absolu ;
- $\overrightarrow{V(A \in S_2/S_1)}$ est appelé vecteur vitesse relatif ;
- $\overrightarrow{V(A \in S_1/\mathscr{R}_0)}$ est appelé vecteur vitesse d'entraînement.

Résultat **Composition du vecteur vitesse**
Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}_0$ et un solide S_2 par rapport au solide S_1. On a :

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathscr{R}_0)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}$$

Définition **Accélération d'un point appartenant à un solide**
Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathscr{R}_0\left(O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathscr{R}_1, \left(O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0.

Soit un point P appartenant au solide S_1. L'accélération du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/S_0)}(t) = \left[\frac{d\left(\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)}(t)\right)}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$$