

Activation 2



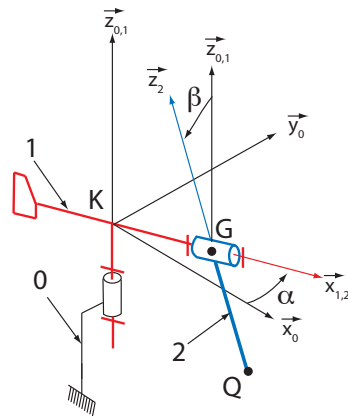
Éolienne

Émilien Durif

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides. On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 pour créer un couple C_m selon la direction \vec{z}_0 .

L'éolienne est composée de :

- un support **0**, auquel on associe un repère $R_0 = (K; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- une girouette **1** (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ avec le support **0**. On lui associe un repère $R_1 = (K; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}_1) : $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$;
- une hélice **2**, en liaison pivot d'axe $(K, \vec{x}_{1,2})$ avec **1**. On lui associe un repère $R_2 = (K; \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ choisi tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. On note M sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\vec{KG} = a \vec{x}_1$. On donne la

matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\bar{I}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd **3** assimilé à une masse ponctuelle m au point Q . On pose $\vec{GQ} = -b \vec{z}_2$.

Question 1 Tracer le schéma de structure de l'éolienne.

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Question 3 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment cinétique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **1**, notée $\sigma(K, 1/0) \cdot \vec{z}_0$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\sigma(K, 2/0)$ calculé au point K de l'hélice **2** dans son mouvement par rapport à **0**.

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\sigma(K, 3/0)$.

Question 6 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **0**, notée $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}(K, 1/0)$.

Question 7 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}(K, 2/0)$.

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de **3/0** selon \vec{z}_0 : $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}(K, 3/0)$.

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice **2** ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre **0** et **1**) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Activation 2

Corrigé



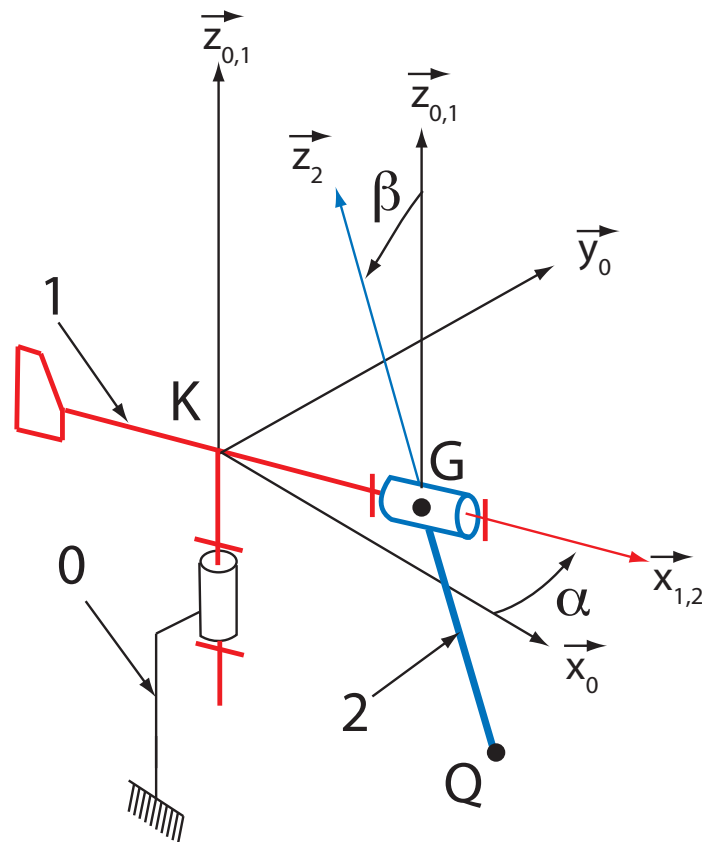
Éolienne

Émilien Durif

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides. On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 pour créer un couple C_m selon la direction \vec{z}_0 .

L'éolienne est composée de :

- un support **0**, auquel on associe un repère $R_0 = (K; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- une girouette **1** (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ avec le support **0**. On lui associe un repère $R_1 = (K; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}_1) : $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$;
- une hélice **2**, en liaison pivot d'axe $(K, \vec{x}_{1,2})$ avec **1**. On lui associe un repère $R_2 = (K; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ choisi tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. On note M sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\vec{KG} = a \vec{x}_1$. On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\bar{I}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd 3 assimilé à une masse ponctuelle m au point Q . On pose $\overrightarrow{GQ} = -b \overrightarrow{z_2}$.

Question 1 Tracer le schéma de structure de l'éolienne.

Correction

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Correction On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ($E = \{1 + 2 + 3\}$) en projection sur l'axe $(K, \overrightarrow{z_0})$: $\overrightarrow{\mathcal{M}}(K, \overrightarrow{E} \rightarrow \overrightarrow{E}) \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\delta}(K, E/R_0) \cdot \overrightarrow{z_0} \Leftrightarrow C_m = \left(\overrightarrow{\delta}(K, 1/R_0) + \overrightarrow{\delta}(K, 2/R_0) + \overrightarrow{\delta}(K, 3/R_0) \right) \cdot \overrightarrow{z_0}$.

Question 3 Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment cinétique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée $\sigma(K, 1/0) \cdot \overrightarrow{z_0}$.

Correction

- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $(K, \overrightarrow{z_0})$:
- $\sigma(K, 1/0) \cdot \overrightarrow{z_0} = \left(\overrightarrow{I}_K(1) \cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0) \right) \cdot \overrightarrow{z_0} = \left(\overrightarrow{I}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_0} \right) \cdot \overrightarrow{z_0}$
- or on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe $(K, \overrightarrow{z_0})$ soit: $\overrightarrow{I}_K(1) \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{z_0} = J$
- Ainsi: $\sigma(K, 1/0) \cdot \overrightarrow{z_0} = J \dot{\alpha}$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\sigma(K, 2/0)$ calculé au point K de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

Correction

- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- On connaît l'opérateur d'inertie en G , on calcule donc: $\overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) : \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) = \overrightarrow{I}_G(2) \cdot \overrightarrow{\Omega}(2/0)$.
- On calcule $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$: $\overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} (\cos \beta \overrightarrow{z_2} + \sin \beta \overrightarrow{y_2})$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma}(G, 2/0)$: $\overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})}$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0)$:
 - $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) = \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{R_c}(2/0) = \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) + a \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge M \cdot \overrightarrow{V}(G \in 2/0)$
 - On calcule $\overrightarrow{V}(G \in 2/0)$: $\overrightarrow{V}(G \in 2/0) = \overrightarrow{V}(K \in 2/0) + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{0} - a \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge (\dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1}) = a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1}$
 - On calcule $a \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge M \cdot \overrightarrow{V}(G \in 2/0)$: $a \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge M \cdot \overrightarrow{V}(G \in 2/0) = a \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge M (a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1}) = M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1}$
 - On en déduit $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0)$: $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})}$

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\sigma(K, 3/0)$

Correction

- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi $\overrightarrow{\sigma}(Q, 3/0) = \overrightarrow{0}$.
- $\overrightarrow{\sigma}(K, 3/0) = \overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$:
 - On calcule \overrightarrow{KQ} : $\overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a \cdot \overrightarrow{x_1} - b \cdot \overrightarrow{z_2}$
 - On calcule $\overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$: $\overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = \overrightarrow{V}(Q \in 3/2) + \overrightarrow{V}(Q \in 2/1) + \overrightarrow{V}(Q \in 1/0) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{V}(G \in 2/1) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{V}(G \in 1/0) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \overrightarrow{0} + b \cdot \overrightarrow{z_2} \wedge \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x_2} + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} + b \cdot \overrightarrow{z_2} \wedge \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} = b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y_2} + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \overrightarrow{x}_{1,2}$
 - On calcule $\overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$:

$$\overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = m \cdot [a \cdot \overrightarrow{x_1} - b \cdot \overrightarrow{z_2}] \wedge [b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y_2} + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \overrightarrow{x}_{1,2}]$$

$$= m [a \cdot b \cdot \overrightarrow{z_2} + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x_2} + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \overrightarrow{x_1} + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \overrightarrow{y_2}]$$
- $\overrightarrow{\sigma}(K, 3/0) = m [a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{z_2} + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x_2} + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \overrightarrow{x_1} + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \overrightarrow{y_2}]$

Question 6 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)}$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

Question 7 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0}$$

$$\text{Or, } \vec{z}_{0,1} = \cos \beta \cdot \vec{z}_2 + \sin \beta \cdot \vec{y}_2,$$

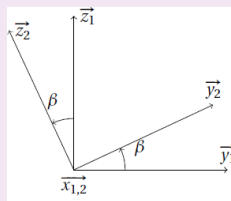
$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} &= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \\ &= \dot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] \end{aligned}$$

d'où,

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] + 2 \cdot \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta [B - C].$$

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon $\vec{z}_0 : \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$.

Correction



$$\begin{aligned} \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_2 &= \cos \beta \\ \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_1 &= 1 \\ \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_0 &= 0 \\ \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_1 &= 0 \\ \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 &= \sin \beta \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} &= m \frac{d[a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cos \beta + a^2 \cdot \dot{\alpha} + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin^2 \beta]}{dt} \\ &= m [a \cdot b \cdot (\dot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 \cdot (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)] \end{aligned}$$

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Correction Le théorème du moment dynamique autour de l'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ donne : $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta$.