LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2016 - 2017

C3 : PERFORMANCES DYNAMIQUES DES SYSTÈMES

DS 3 - Modélisation dynamique et de la commande d'un système(C3)

Corrigé

Q 1 : Déterminer l'expression littérale des rapports de réduction en fonction des données concernant les roues dentées :

1. $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$,
2. $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}$,

$$\boxed{r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{Z_{12}}{Z_{21}}}$$

$$\boxed{r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}} = -\frac{Z_{23}}{Z_{32}}}$$

Q 2 : En déduire les expressions de :

1. $\overrightarrow{\Omega}_{2/0}$,
2. $\overrightarrow{\Omega}_{3/0}$.

en fonction de $\dot{\theta}_1$ et des données concernant les roues dentées

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \omega_{20} \cdot \overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \omega_{10} \cdot \overrightarrow{x_0} = \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{x_0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{2/0} = -\frac{Z_{12}}{Z_{21}} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{x_0}}$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{3/0} = \omega_{30} \cdot \overrightarrow{z_0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{3/0} = -\frac{Z_{23}}{Z_{32}} \cdot \omega_{20} \cdot \overrightarrow{z_0} = \frac{Z_{12} \cdot Z_{23}}{Z_{21} \cdot Z_{32}} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{z_0}}$$

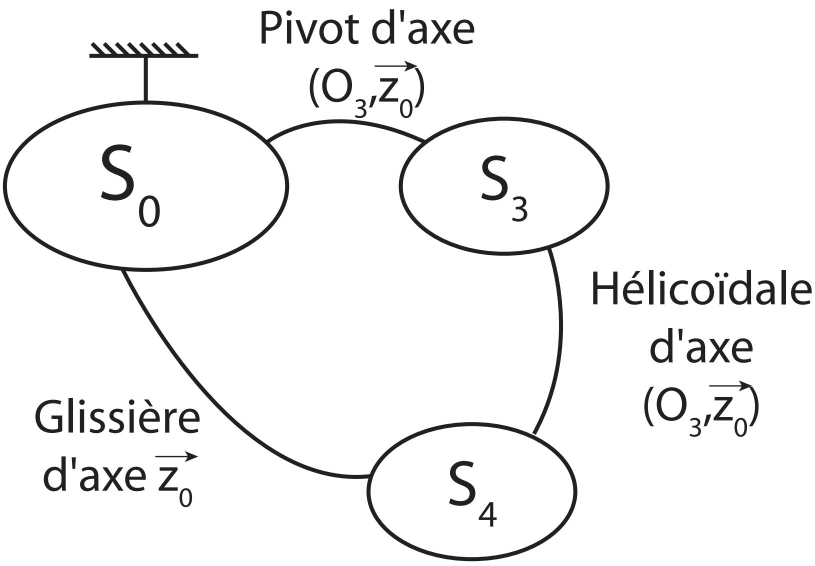
Q 3 : Déterminer numériquement les rapports :

1. $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$,
2. $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}$,

On en déduit :

- $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{Z_{12}}{Z_{21}} = -\frac{15}{75} = -\frac{1}{5}$,
- $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}} = \frac{Z_{23}}{Z_{32}} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$,

Q 4 : Tracer le graph des liaisons du système de transformation de mouvement constitué des solides $0-3-4$.



Q 5 : Écrire les torseurs cinématiques associés à chaque liaison en précisant les lieux d'invariance.

- L_{03} : pivot d'axe $\left(O_3, \overrightarrow{z}_0\right)$:

$$\left\{\mathcal{V}_{(3/0)}\right\} = \underset{\forall P \in \left(O_3, \overrightarrow{z}_0\right)}{} \left\{ \begin{array}{c} \omega_{30} \cdot \overrightarrow{z}_0 \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

- L_{43} : hélicoïdale d'axe $\left(O_3, \overrightarrow{z}_0\right)$:

$$\left\{\mathcal{V}_{(4/3)}\right\} = \underset{\forall P \in \left(O_3, \overrightarrow{z}_0\right)}{} \left\{ \begin{array}{c} \omega_{43} \cdot \overrightarrow{z}_0 \\ \overrightarrow{V}(P \in 4/3) = u_{z43} \cdot \overrightarrow{z}_0 \end{array} \right\}$$

avec $u_{z43} = \frac{p_{34}}{2\pi}\omega_{43}$

- L_{04} : glissière d'axe $\overrightarrow{z}_0$:

$$\left\{\mathcal{V}_{(4/0)}\right\} = \underset{\forall P}{} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V}(P \in 4/0) = u_{z40} \cdot \overrightarrow{z}_0 = V_L \cdot \overrightarrow{z}_0 \end{array} \right\}$$

Q 6 : Écrire la fermeture cinématique.

$$\{\mathscr{V}_{(4/0)}\} = \{\mathscr{V}_{(4/3)}\} + \{\mathscr{V}_{(3/0)}\}$$

Q 7 : En déduire une relation entre la vitesse de levée : $V_L = \overrightarrow{V}(O_4 \in 4/0) \cdot \overrightarrow{z}_0$ **et** $\omega_{30} = \overrightarrow{\Omega}_{3/0} \cdot \overrightarrow{z}_0$

On peut donc écrire la fermeture cinématique en O_3 :

$$_{O_3}\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ V_L \cdot \overrightarrow{z}_0 \end{array}\right\} = {}_{O_3}\left\{\begin{array}{c} \omega_{43} \cdot \overrightarrow{z}_0 \\ u_{z43} \cdot \overrightarrow{z}_0 \end{array}\right\} + {}_{O_3}\left\{\begin{array}{c} \omega_{30} \cdot \overrightarrow{z}_0 \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}$$

On obtient alors un système d'équations :

$$\begin{cases} \omega_{43} + \omega_{30} = 0 \\ V_L = u_{z43} = \frac{p_{34}}{2\pi}\omega_{43} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{V_L = -\frac{p_{34}}{2\pi}\omega_{30}}$$

Q 8 : En déduire les rapports :

1. $r_{34} = \frac{V_L}{\omega_{30}}$,
2. $r_g = \frac{V_L}{\omega_{10}}$.

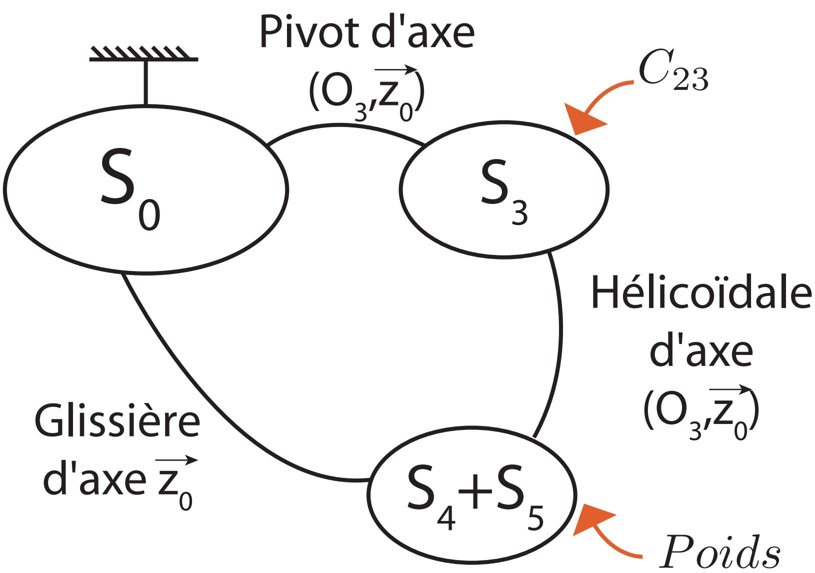
$$r_{34} = \frac{V_L}{\omega_{30}} = -\frac{p_{34}}{2\pi}$$

$$r_g = -\frac{V_L}{\omega_{10}} = \frac{p_{34}}{2\pi}\frac{Z_{12} \cdot Z_{23}}{Z_{21} \cdot Z_{32}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2\pi}\frac{2}{25}$$

Q 9 : Déterminer la vitesse de rotation du moteur souhaitée (à exprimer en tours par minute) pour obtenir une vitesse de levée conforme au cahier des charges.

$$N_{10} = \frac{60}{2\pi}\dot{\theta}_1 = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{V_L}{r_g} = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{V_L \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3}{2} = 150 \cdot 10^3 \cdot V_L = 150 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 = 1500\,tr/min$$

Q 10 : Donner le graphe de structure de l'ensemble $0-3-4-5$.



Q 11 : Donner la forme du torseur de l'action mécanique du à la liaison de $3 \to 4$.

$$\left\{\mathcal{T}_{(3\to4)}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} X_{34} & L_{34} \\ Y_{34} & M_{34} \\ Z_{34} & N_{34} \end{array}\right\}_{M\,(\overrightarrow{-},\overrightarrow{-},\overrightarrow{z}_0)}$$

avec $N_{34} = -\frac{p_{34}}{2\pi} Z_{34}$

Q 12 : En isolant l'ensemble $E = \{4+5\}$ et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant $\ddot{z}_4$, M_4, M_5, g et le(s) inconnue(s) de l'action mécanique du solide 3 sur 4.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à E selon $\overrightarrow{z}_0$ donne :

$$(M_4+M_5)\,\overrightarrow{a}(G_{4+5}/R_0)\cdot\overrightarrow{z}_0 = \sum \overrightarrow{R}_{ext\to E}\cdot\overrightarrow{z}_0$$

- $\overrightarrow{a}(G_{4+5}/R_0)\cdot\overrightarrow{z}_0 = \overrightarrow{a}(O_4/R_0)\cdot\overrightarrow{z}_0 = \ddot{z}_4$ car l'ensemble E est en mouvement de translation par rapport à R_0
- $\sum \overrightarrow{R}_{ext\to E}\cdot\overrightarrow{z}_0 = Z_{34} - (M_4+M_5)\cdot g$

On obtient alors, l'équation :

$$\boxed{(M_4+M_5)\,\ddot{z}_4 = Z_{34} - (M_4+M_5)\cdot g}$$

Q 13 : En isolant le solide 1 et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant $\ddot{\theta}_1$, J_1, C_m et C_{21}

Le solide 1 est en mouvement de rotation par rapport à l'axe $(O_1,\overrightarrow{x}_0)$ fixe par rapport à R_0. On peut donc appliquer le TMD par rapport à $(O_1,\overrightarrow{x}_0)$:

$$J_{(O_1,\overrightarrow{x}_0)}(S_1)\cdot\overrightarrow{\Omega}(1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0 = \sum \overrightarrow{M}_{O_1}(ext\to S_1)\cdot\overrightarrow{x}_0.$$

- $J_{(O_1,\overrightarrow{x}_0)}(S_1)\cdot\overrightarrow{\Omega}(1/0)\cdot\overrightarrow{x}_0 = J_1\cdot\ddot{\theta}_1$;
- $\sum \overrightarrow{M}_{O_1}(ext\to S_1)\cdot\overrightarrow{x}_0 = C_m + C_{21}$

On trouve alors :

$$\boxed{J_1\cdot\ddot{\theta}_1 = C_m + C_{21}}$$

Q 14 : En isolant le solide 3 et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant C_{23} à(aux) inconnue(s) de l'action mécanique du solide 3 sur 4.

Le solide 3 est en mouvement de rotation par rapport à l'axe $(O_3,\overrightarrow{z}_0)$ fixe par rapport à R_0. On peut donc appliquer le TMD par rapport à $(O_3,\overrightarrow{z}_0)$:

$$J_{(O_3,\overrightarrow{z}_0)}(S_3)\cdot\overrightarrow{\Omega}(3/0)\cdot\overrightarrow{z}_0 = \sum \overrightarrow{M}_{O_3}(ext\to S_3)\cdot\overrightarrow{z}_0.$$

- $J_{(O_3,\overrightarrow{z}_0)}(S_3)\cdot\overrightarrow{\Omega}(3/0)\cdot\overrightarrow{z}_0 = 0$ car les inerties sont négligeables ;
- $\sum \overrightarrow{M}_{O_3}(ext\to S_3)\cdot\overrightarrow{x}_0 = C_{23} - N_{34}$

On trouve alors :

$$\boxed{0 = C_{23} - N_{34}}$$

Q 15 : Déduire des questions précédentes l'expression de C_m en fonction de $\ddot{z}_4$, M_4, M_5, g, r_g, et J_1.

En combinant les équations précédentes, on en déduit,

$$(M_4+M_5)\,\ddot{z}_4 = -\frac{2\pi}{p_{34}}N_{34} - (M_4+M_5)\cdot g$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(M_4+M_5)\,\ddot{z}_4 = -\frac{2\pi}{p_{34}}C_{23} - (M_4+M_5)\cdot g$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(M_4+M_5)\,\ddot{z}_4 = \frac{2\pi}{p_{34}}\frac{p_{34}}{r_g\cdot 2\cdot\pi}\cdot C_{21} - (M_4+M_5)\cdot g$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(M_4+M_5)\,\ddot{z}_4 = \frac{J_1\cdot\ddot{\theta}_1 - C_m}{r_g} - (M_4+M_5)\cdot g$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(M_4+M_5)\,\ddot{z}_4 = \frac{-J_1\cdot\frac{\ddot{z}_4}{r_g} - C_m}{r_g} - (M_4+M_5)\cdot g$$

On trouve au final :

$$\boxed{C_m = -r_g\,(M_4+M_5)\cdot\left(g+\ddot{z}_4\right) - J_1\frac{\ddot{z}_4}{r_g}}$$

Q 16 : On souhaite piloter le moteur avec un trapèze en vitesse. Donner les caractéristiques du trapèze en fonction des données du cahier des charges.

- $t_a = 0,5\,s$;
- $\omega_{10}^{max} = \frac{\dot{z}_4^{max}}{rg} = \frac{1e-2}{6,36\times10^{-5}} = 157,23 rad/s$
- Le déplacement maximal permet d'obtenir t_f :

$$\Delta z = \int_{t=0}^{tf}\dot{z}_4\cdot dt = \int_{t=0}^{tf} r_g\omega_{10}\cdot dt = r_g\left(t_f - t_a\right)\omega_{10}^{max} = \left(t_f - t_a\right)\dot{z}_4^{max}$$

On obtient alors :

$$\boxed{t_f = t_a + \frac{\Delta z}{\dot{z}_4^{max}}}$$

L'application numérique donne : $t_f = 170,5s$

Q 17 : Pour chaque phase du trapèze, donner l'expression du couple moteur C_m ainsi que les applications numériques associées.

- Phase 1 $t \in [0; t_a]$:

$$\ddot{z}_4 = \frac{\dot{z}_4^{max}}{t_a} = \frac{10mm/s}{0,5s} = 2\times10^{-2}m\cdot s^{-2}$$

$$C_m - 7,07N\cdot m$$

- Phase 2 $t \in \left[t_a; t_f - t_a\right]$:

$$\ddot{z}_4 = 0$$

$$C_m = -3,76N\cdot m$$

- Phase 3 $t \in \left[t_f - t_a; t_f\right]$:

$$\ddot{z}_4 = -\frac{\dot{z}_4^{max}}{t_a} = -\frac{10mm/s}{0,5s} = -2\times10^{-2}m\cdot s^{-2}$$

$$C_m = -7,05N\cdot m$$

Q 18 : Déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{V_s(p)}{U_m(p)}$ et la mettre sous forme canonique.

La formule de Black permet d'obtenir :

$$H_1(p) = r_g \cdot \frac{\frac{K_m}{(R+L\cdot p)\cdot(f_v+J\cdot p)}}{1+\frac{K_m\cdot K_e}{(R+L\cdot p)\cdot(f_v+J\cdot p)}}$$

Sous forme canonique :

$$H_1(p) = \frac{\frac{r_g\cdot K_m}{R\cdot f_v+K_m\cdot K_e}}{1+\frac{(R\cdot J+L\cdot f_v)}{R\cdot f_v+K_m\cdot K_e}\cdot p+\frac{L\cdot J}{R\cdot f_v+K_m\cdot K_e}\cdot p^2}$$

Q 19 : Déterminer l'expression de la valeur finale de la vitesse Vs en réponse à un échelon $U_m(p)$ d'amplitude U_0.
Soit $V_{s\infty 1}$ la valeur finale de V_s pour le système non perturbé. On a :

$$V_{s\infty 1} = \left(p\cdot\frac{U_0}{p}\cdot H_1(p)\right) = \frac{r_g\cdot K_m\cdot U_0}{R\cdot f_v+K_m\cdot K_e}$$

Q 20 : En déduire la valeur de U_0 pour obtenir une vitesse $V_s = 10mm/s$.
On a donc $U_0 = \frac{V_{s\infty 1}\cdot(R\cdot f_v+K_m\cdot K_e)}{r_g\cdot K_m} = 223,8\ V$.
Q 21 : Déterminer la fonction de transfert $H_2(p) = \frac{V_s(p)}{C_r(p)}$ et la mettre sous forme canonique.
On a :

$$H_2(p) = -r_g\cdot\frac{\frac{1}{(f_v+J\cdot p)}}{1+\frac{K_m\cdot K_e}{(f_v+J\cdot p)\cdot(R+L\cdot p)}}$$

Soit, sous forme canonique :

$$H_2(p) = \frac{-\frac{r_g\cdot R\cdot\left(1+\frac{L}{R}\cdot p\right)}{(R\cdot f_v+K_m\cdot K_e)}}{1+\frac{(R\cdot J+L\cdot f_v)}{R\cdot f_v+K_m\cdot K_e}\cdot p+\frac{L\cdot J}{R\cdot f_v+K_m\cdot K_e}\cdot p^2}$$

Q 22 : Déterminer l'expression de la valeur finale de la vitesse V_s en réponse à un échelon $C_r(t)$ d'amplitude C_{r0}.
Soit $V_{s\infty 2}$ la valeur finale de V_s pour le système soumis à la seule perturbation. On a :

$$V_{s\infty 2} = \left(p\cdot\frac{C_{r0}}{p}\cdot H_2(p)\right) = -\frac{r_g\cdot R\cdot C_{r0}}{(R\cdot f_v+K_m\cdot K_e)}$$

Q 23 : Effectuer l'application numérique pour $C_{r0} = 12Nm$.
On obtient alors $V_{s\infty 2} = -1,15\cdot 10^{-3}\ m/s$
Q 24 : Déterminer la valeur de l'amplitude de l'échelon $U_m(p)$, noté U_1, afin de compenser l'effet de la perturbation $C_r(t)$.
Pour compenser la perte de vitesse $V_{s\infty 2}$, on doit appliquer une tension supplémentaire Δ_{U_m}. La question concernant la partie où $C_r(p) = 0$ permet d'écrire :

$$\Delta_{U_0} = -\frac{V_{s\infty 2}\cdot(R\cdot f_v+K_m\cdot K_e)}{r_g\cdot K_m}$$

D'où $U_1 = U_0+\Delta_{U_0} = \frac{(V_{s\infty 1}-V_{s\infty 2})\cdot(R\cdot f_v+K_m\cdot K_e)}{r_g\cdot K_m}$
Q 25 : Effectuer l'application numérique.
Donc $U_1 = 249,5\ V$.
Q 26 : Justifier qu'un correcteur proportionnel-intégral $K_i\left(1+\frac{1}{T_i\cdot p}\right)$ permettrait d'avoir un système précis, en boucle fermée.
Un correcteur proportionnel-intégral augmente la classe du système, qui passe à 1. L'erreur statique est donc nulle, sous réserve de stabilité. Ce correcteur, placé en amont de la perturbation, annule également l'effet de celle-ci.