Cycle 04

Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Chapitre 3 – Application du Principe Fondamental de la Dynamique

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

PSI★ – MP

Activation 2 – Corrigé

Éolienne

Émilien Durif

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide*
- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*

Question 1 *Tracer le graphe de structure de l'éolienne.*

Correction

Question 2 *Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.*

Correction On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ($E=\{1+2+3\}$) en projection sur l'axe $\left(K,\overrightarrow{z_0}\right)$: $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(K,\bar{E}\to E\right)}\cdot\overrightarrow{z}_0=\overrightarrow{\delta\left(K,E/R_0\right)}\cdot\overrightarrow{z}_0 \Leftrightarrow C_m=\left(\overrightarrow{\delta\left(K,1/R_0\right)}+\overrightarrow{\delta\left(K,2/R_0\right)}+\overrightarrow{\delta\left(K,3/R_0\right)}\right)\cdot\overrightarrow{z}_0$.

Question 3 *Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment cinétique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **1**, notée $\overrightarrow{\sigma\left(K,1/0\right)}\cdot\overrightarrow{z_0}$.*

Correction
- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $\left(K,\overrightarrow{z_0}\right)$:
- $\overrightarrow{\sigma\left(K,1/0\right)}\cdot\overrightarrow{z}_0=\left(\overline{\overline{I}}_K(1)\cdot\overrightarrow{\Omega}(1/0)\right)\cdot\overrightarrow{z}_0=\left(\overline{\overline{I}}_K(1)\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z}_0\right)\cdot\overrightarrow{z}_0$
- or on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe $\left(K,\overrightarrow{z}\right)$ soit : $\overline{\overline{I}}_K(1)\cdot\overrightarrow{z}_0\cdot\overrightarrow{z}_0=J$
- Ainsi : $\overrightarrow{\sigma\left(K,1/0\right)}\cdot\overrightarrow{z}_0=J\dot{\alpha}$.

Question 4 *Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)}$ calculé au point K de l'hélice **2** dans son mouvement par rapport à **0**.*

Correction
- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- On connaît l'opérateur d'inertie en G, on calcule donc : $\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}$:$\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}=\overline{\overline{I}}_G(2)\cdot\overrightarrow{\Omega}(2/0)$.
- On calcule $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$: $\overrightarrow{\Omega}(2/0)=\overrightarrow{\Omega}(2/1)+\overrightarrow{\Omega}(1/0)=\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{x}_{1,2}+\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z}_1=\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{x}_{1,2}+\dot{\alpha}\left(\cos\beta\,\overrightarrow{z}_2+\sin\beta\,\overrightarrow{y}_2\right)$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}$: $\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)}\cdot\begin{pmatrix}\dot{\beta}\\\dot{\alpha}\cdot\sin\beta\\\dot{\alpha}\cdot\cos\beta\end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)}=\begin{pmatrix}A\cdot\dot{\beta}\\B\cdot\dot{\alpha}\cdot\sin\beta\\C\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\beta\end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)}$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)}$:
  - $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)}=\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}+\overrightarrow{KG}\wedge\overrightarrow{R_c}(2/0)=\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}+a\cdot\overrightarrow{x}_1\wedge M\cdot\overrightarrow{V}(G\in 2/0)$
  - On calcule $\overrightarrow{V}(G\in 2/0)$: $\overrightarrow{V}(G\in 2/0)=\overrightarrow{V}(K\in 2/0)+\overrightarrow{GK}\wedge\overrightarrow{\Omega}(2/0)=\overrightarrow{0}-a\cdot\overrightarrow{x}_1\wedge\left(\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{x}_{1,2}+\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z}_1\right)$ $=a\cdot\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y}_1$
  - On calcule $a\cdot\overrightarrow{x}_1\wedge M\cdot\overrightarrow{V}(G\in 2/0)$: $a\cdot\overrightarrow{x}_1\wedge M\cdot\overrightarrow{V}(G\in 2/0)=a\cdot\overrightarrow{x}_1\wedge M\left(a\cdot\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y}_1\right)=M\cdot a^2\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z}_1$
  - On en déduit $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)}$: $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)}=\begin{pmatrix}A\cdot\dot{\beta}\\B\cdot\dot{\alpha}\cdot\sin\beta+M\cdot a^2\cdot\dot{\alpha}\sin\beta\\C\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\beta+M\cdot a^2\cdot\dot{\alpha}\cos\beta\end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)}$

Question 5 *Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma\left(K,3/0\right)}$*

Correction

- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi $\overrightarrow{\sigma(Q,3/0)} = \overrightarrow{0}$.
- $\overrightarrow{\sigma(K,3/0)} = \overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$:
  - On calcule $\overrightarrow{KQ}$: $\overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a \cdot \overrightarrow{x}_1 - b \cdot \overrightarrow{z}_2$
  - On calcule $\overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$: $\overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = \overrightarrow{V}(Q \in 3/2) + \overrightarrow{V}(Q \in 2/1) + \overrightarrow{V}(Q \in 1/0) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{V}(G \in 2/1) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{V}(G \in 1/0) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \overrightarrow{0} + b \cdot \overrightarrow{z}_2 \wedge \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 + b \cdot \overrightarrow{z}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 = b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin\beta \cdot \overrightarrow{x}_{1,2}$
  - On calcule $\overrightarrow{KQ} \wedge m\overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$:
    $\overrightarrow{KQ} \wedge m\overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = m \cdot \left[a \cdot \overrightarrow{x}_1 - b \cdot \overrightarrow{z}_2\right] \wedge \left[b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin\beta \cdot \overrightarrow{x}_{1,2}\right]$
    $= m\left[a \cdot b \cdot \overrightarrow{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin\beta \cdot \overrightarrow{y}_2\right]$
- $\overrightarrow{\sigma(K,3/0)} = m\left[a \cdot b \cdot \dot{\beta}\overrightarrow{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin\beta \cdot \overrightarrow{y}_2\right]$

Question 6 *Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z}_0$ du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support **0**, notée $\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,1/0)}$.*

Correction

$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,1/0)} = \overrightarrow{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K,1/0)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,1/0)}}{dt}\right]_{R_0} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

Question 7 *Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z}_0$ du moment dynamique $\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)}$.*

Correction

$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)} = \overrightarrow{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,2/0)}}{dt}\right]_{R_0}$$

Or, $\overrightarrow{z}_{0,1} = \cos\beta \cdot \overrightarrow{z}_2 + \sin\beta \cdot \overrightarrow{y}_2$,

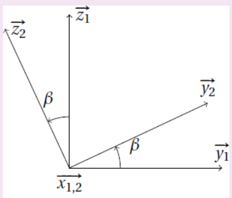
$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin\beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos\beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$$
$$= \dot{\alpha}\left[B \cdot \sin^2\beta + C \cdot \cos^2\beta + M \cdot a^2\right]$$

d'où,

$$\boxed{\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)} = \ddot{\alpha}\left[B \cdot \sin^2\beta + C \cdot \cos^2\beta + M \cdot a^2\right] + 2 \cdot \dot{\alpha}\dot{\beta} \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta\,[B - C].}$$

Question 8 *Déterminer la projection du moment dynamique de $3/0$ selon $\overrightarrow{z}_0$: $\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,3/0)}$.*

Correction



$$\overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{z}_2 = \cos\beta$$
$$\overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{z}_1 = 1$$
$$\overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{x}_0 = 0$$
$$\overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{x}_1 = 0$$
$$\overrightarrow{z}_1 \cdot \overrightarrow{y}_2 = \sin\beta$$

On trouve alors :
$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,3/0)} = m\frac{\mathrm{d}\left[a \cdot b \cdot \dot{\beta}\cos\beta + a^2 \cdot \dot{\alpha} + b^2 \cdot \dot{\alpha}\sin^2\beta\right]}{\mathrm{d}t}$
$= m\left[a \cdot b \cdot \left(\ddot{\beta}\cos\beta - \dot{\beta}^2\sin\beta\right) + a^2\ddot{\alpha} + b^2 \cdot \left(\ddot{\alpha}\sin^2\beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta\right)\right]$

Question 9 *Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice* **2** *($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre* **0** *et* **1***) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.*

Correction Le théorème du moment dynamique autour de l'axe $\left(K,\overrightarrow{z_{0,1}}\right)$ donne : $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin\beta$.

Cycle 04