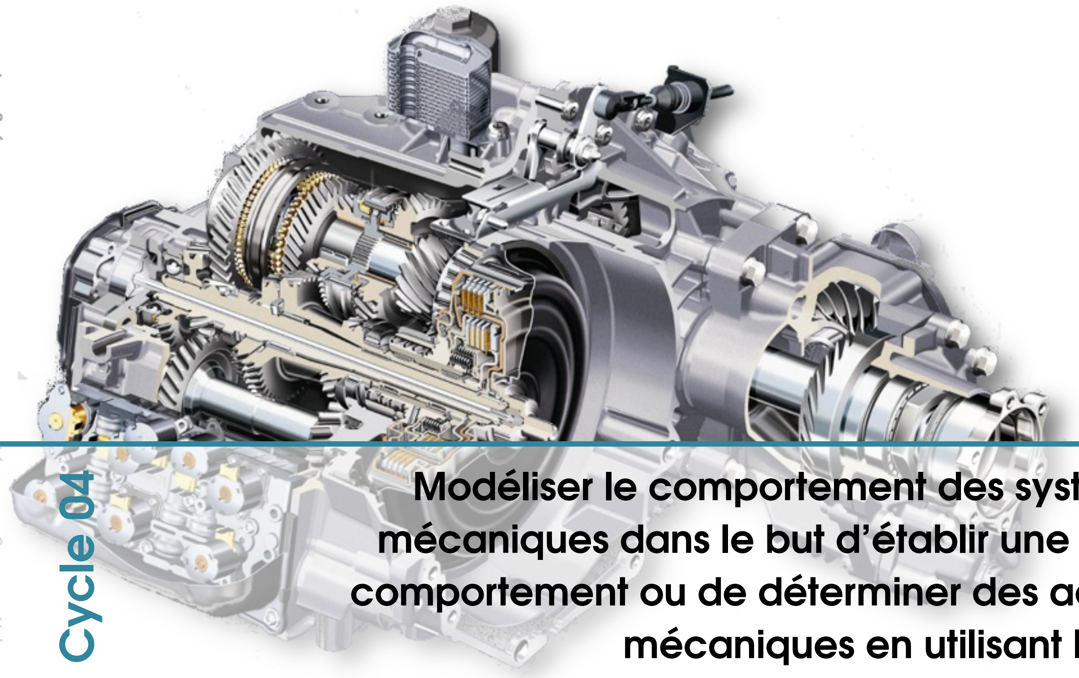


PSI⋆ – MP

Cycle 04

Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

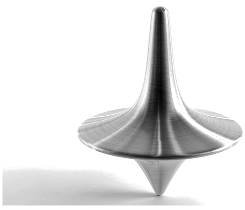
Cours

Chapitre 3

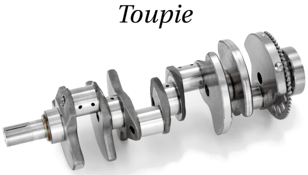
Application du Principe Fondamental de la Dynamique

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C16 : torseur cinétique*
- ❒ *Mod2.C17 : torseur dynamique*
- ❒ *Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide*
- ❒ *Mod2.C15 : matrice d'inertie*
- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*
- ❒ *Res1.C2.SF1 : proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison*



Toupie



Volants d'inertie d'un vilebrequin

Xavier Pessoles
PSI⋆ – MP

1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

Définition — Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique. Soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égale au torseur dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\{\mathscr{D}(E/R_0)\} = \left\{\mathscr{T}\left(\overline{E} \to E\right)\right\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\{\mathscr{D}(E/R_0)\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m\,\overrightarrow{\Gamma(G \in E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)} \end{array}\right\}_A.$$

- On note $\overrightarrow{R_d(S/R_0)}$ la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie G.
- Le **moment dynamique** dépend du point A et se note $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$.

Du Principe Fondamental de la dynamique découle plusieurs **théorèmes généraux**.

1.1 Théorème de la résultante dynamique

Théorème — Théorème de la résultante dynamique. Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\overrightarrow{R\left(\bar{E} \to E\right)} = \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m\,\overrightarrow{\Gamma(G \in E/R_0)}.$$

1.2 Théorème du moment dynamique

Théorème — Théorème du moment dynamique. Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}\left(A, \bar{E} \to E\right)} = \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}.$$

2 Torseur cinétique

2.1 Définition

2.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

Propriété Pour un solide S de masse m dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A \in S/R_0)}.$$

2.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point A **fixe** dans le mouvement de S/R_0, on a : $\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.
- En appliquant cette formule en G**, centre d'inertie** de S, on a : $\overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)} = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.

2.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i. On étudie son mouvement dans le référentiel R_0. On donne la méthodologie de calcul du moment cinétique en un point A sur la figure suivante.

On décompose E en solides élémentaires S_i

$$\{\mathcal{C}(E/R_0)\} = \sum_{Si\in E} \{\mathcal{C}(S_i/R_0)\}$$

Quelle est la nature du mouvement considéré ?

Simple

Mouvement de **rotation** autour d'un axe fixe $(O,\overrightarrow{x})$

$$\left\{\mathscr{C}_{(S_i/R_0)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_c}(S_i/R_0) = m\cdot\overrightarrow{V}(G\in S_i/R_0) \\ \overrightarrow{\sigma_O(S_i/R_0)} = \overline{\overline{I}}_O(S_i)\cdot\overrightarrow{\Omega}(S_i/R_0) \end{array} \right\}_O$$

- Si $G\in(O,\overrightarrow{x})$: équilibrage statique
  - $\overrightarrow{R_c}(S_i/R_0) = \overrightarrow{0}$:

$$\left\{\mathscr{C}_{(S_i/R_0)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overline{\overline{I}}_O(S_i)\cdot\overrightarrow{\Omega}(S_i/R_0) \end{array} \right\}_{\forall P\in(O,\overrightarrow{x})}$$

  - Le torseur est un **torseur couple**
- Si en plus $(O,\overrightarrow{x})$ est axe principal d'inertie : **équilibrage dynamique**

$$\left\{\mathscr{C}_{(S_i/R_0)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ I_{(O,\overrightarrow{x})}(S_i)\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{x} \end{array} \right\}_{\forall P\in(O,\overrightarrow{x})}$$

Complexe

Mouvement de **translation**

$$\left\{\mathscr{C}_{(S_i/R_0)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_c}(S_i/R_0) = m\cdot\overrightarrow{V}(G\in S_i/R_0) \\ \overrightarrow{\sigma_O(S_i/R_0)} = m\cdot\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V}(A\in S_i/R_0) \end{array} \right\}_A$$

Le torseur cinétique est un **glisseur** : au centre de gravité le moment est nul.

$$\left\{\mathscr{C}_{(S_i/R_0)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_c}(S_i/R_0) = m\cdot\overrightarrow{V}(G\in S_i/R_0) \\ \overrightarrow{\sigma_G(S_i/R_0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$$

Où est donnée la matrice d'inertie ?

En A

Ce choix dépend également d'autres données :
A est fixe par rapport à R_0
A est confondu avec G
La matrice est facilement transportable en A

Calcul direct privilégié

$$\overrightarrow{\sigma_A(S_i/R_0)} = m\cdot\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V}_{(A\in S_i/R_0)} + \overline{\overline{I}}_A(S_i)\cdot\overrightarrow{\Omega}(S_i/R_0)$$

En G

La résultante cinétique est connue

Transport privilégié

$$\overrightarrow{\sigma_A(S_i/R_0)} = \overrightarrow{\sigma_G(S_i/R_0)} + \overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{R_c}(S_i/R_0)$$

3 Torseur dynamique

3.1 Définition

Définition Le **torseur dynamique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathscr{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0)\,\mathrm{d}m \\ \overrightarrow{\delta(A,S/R_0)} = \displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Gamma}(P/R_0)\,\mathrm{d}m \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur dynamique, $\overrightarrow{R_d}(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie :
$$\overrightarrow{R_d}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0).$$
- Le moment dynamique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point :
$$\overrightarrow{\delta(B,S/R_0)}=\overrightarrow{\delta(A,S/R_0)}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{R_d}(S/R_0).$$

3.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Propriété — Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques. Pour un solide S de masse M dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

- Relation entre les **résultantes** :
$$\overrightarrow{R_d}(S/R_0)=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{R_c}(S/R_0)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}.$$
- Relation entre les **moments** :
$$\overrightarrow{\delta(A,S/R_0)}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}+\overrightarrow{V(A/R_0)}\wedge\overrightarrow{R_c}(S/R_0).$$

3.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point O **fixe** dans R_0, on a :
$$\overrightarrow{\delta(O,S/R_0)}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}.$$
- En appliquant cette formule en un point G**, centre d'inertie de** S, on a :
$$\overrightarrow{\delta(G,S/R_0)}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}.$$

3.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i. On étudie son mouvement dans le référentiel R_0. On donne l'algorigramme de calcul du moment dynamique en un point A sur la figure ci-dessous.

On décompose E en solides élémentaires S_i

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \sum_{S_i \in E} \{\mathcal{D}(S_i/R_0)\}$$

Quelle est la nature du mouvement considéré ?

Simple

Mouvement de **rotation** autour d'un axe fixe $(O, \overrightarrow{x})$

$$\left\{\mathscr{D}_{(S_i/R_0)}\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S_i/R_0) = m \cdot \overrightarrow{a}(G \in S_i/R_0) \\ \overrightarrow{\delta_O}(S_i/R_0) = \left[\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_O}(S_i/R_0)}{dt}\right]_{R_0} \end{array} \right\}_O$$

- Si $G \in (O, \overrightarrow{x})$: équilibrage statique
  - $\overrightarrow{R_d}(S_i/R_0) = \overrightarrow{0}$:

$$\left\{\mathscr{D}_{(S_i/R_0)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \left[\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_G}(S_i/R_0)}{dt}\right]_{R_0} \end{array} \right\}_{\forall P \in (O, \overrightarrow{x})}$$

  - Le torseur est un **torseur couple**
- Si en plus $(O, \overrightarrow{x})$ est axe principal d'inertie : **équilibrage dynamique**

$$\left\{\mathscr{D}_{(S_i/R_0)}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ I_{(O,\overrightarrow{x})}(S_i) \cdot \ddot{\theta} \cdot \overrightarrow{x} \end{array} \right\}_{\forall P \in (O, \overrightarrow{x})}$$

Complexe

Mouvement de **translation**

$$\left\{\mathscr{D}_{(S_i/R_0)}\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S_i/R_0) = m \cdot \overrightarrow{a}(G \in S_i/R_0) \\ \overrightarrow{\delta_A}(S_i/R_0) = m \cdot \overrightarrow{V}(A/R_0) \wedge \overrightarrow{V}(G \in S_i/R_0) \end{array} \right\}_A$$

Le torseur dynamique est un **glisseur** : au centre de gravité le moment est nul.

$$\left\{\mathscr{D}_{(S_i/R_0)}\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S_i/R_0) = m \cdot \overrightarrow{a}(G \in S_i/R_0) \\ \overrightarrow{\delta_G}(S_i/R_0) = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$$

Où est donnée la matrice d'inertie ?

En A

En G

Ce choix dépend également d'autres données :
A est fixe par rapport à R_0
A est confondu avec G
La matrice est facilement transportable en A

La résultante dynamique est connue

Calcul direct privilégié

$$\overrightarrow{\delta_A(S_i/R_0)} = m \cdot \overrightarrow{V}(A/R_0) \wedge \overrightarrow{V}_{(G \in S_i/R_0)} + \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}_A(S_i/R_0)}{dt}\right]_{R_0}$$

Transport privilégié

$$\overrightarrow{\delta_A(S_i/R_0)} = \overrightarrow{\delta_G(S_i/R_0)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_d}(S_i/R_0)$$

Références

[1] Emilien Durif, *Cinétique des solides, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.*

[2] Florestan Mathurin, *Cinétique, Lycée Bellevue, Toulouse*, `http://florestan.mathurin.free.fr/`.

Point considéré	Point quelconque A	Centre de gravité G	Point fixe dans $\mathscr{R}_0$ A
Torseur cinétique$\{\mathscr{C}(S/R_0)\}$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{V}(G/R_0)\\ \overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)}=I_A(S)\cdot\overrightarrow{\Omega(S/R_0)}+m\,\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V(A\in S/R_0)}\end{array}\right\}_A$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{V}(G/R_0)\\ \overrightarrow{\sigma(G,S/R_0)}=I_G(S)\cdot\overrightarrow{\Omega(S/R_0)}\end{array}\right\}_G$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{V}(G/R_0)\\ \overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)}=I_A(S)\cdot\overrightarrow{\Omega(S/R_0)}\end{array}\right\}_A$
Torseur dynamique $\{\mathscr{D}(S/R_0)\}$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0)\\ \overrightarrow{\delta(A,S/R_0)}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}+\overrightarrow{V(A/R_0)}\wedge\overrightarrow{R_c}(S/R_0)\end{array}\right\}_A$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0)\\ \overrightarrow{\delta(G,S/R_0)}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}\end{array}\right\}_G$	$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d}(S/R_0)=m\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R_0)\\ \overrightarrow{\delta(A,S/R_0)}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(A,S/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}\end{array}\right\}_A$