# Application 1 – Corrigé

## Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme ⋆

*Équipe PT La Martinière Monplaisir*

***Savoirs et compétences :***

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

### Mise en situation

**Question 1** *Exprimer la relation liant la vitesse de rotation $\omega_{10}$ du vilebrequin **(1)** et la vitesse du piston **(3)**, notée $\dot{\lambda} = V_{3/0}$.*

**Correction** On réalise une fermeture géométrique dans le triangle $ABC$ et on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow e\,\overrightarrow{x_1}+L_2\overrightarrow{x_2}-\lambda_3\overrightarrow{y_0} \Leftrightarrow e\left(\cos\theta_1\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_1\overrightarrow{y_0}\right)+L_2\left(\cos\theta_2\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_2\overrightarrow{y_0}\right)-\lambda_3\overrightarrow{y_0}=\overrightarrow{0}$. On a donc : $\left\{\begin{array}{l} e\cos\theta_1+L_2\cos\theta_2=0 \\ e\sin\theta_1+L_2\sin\theta_2-\lambda_3=0\end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} L_2\cos\theta_2=-e\cos\theta_1 \\ L_2\sin\theta_2=\lambda_3-e\sin\theta_1\end{array}\right.$ Au final, $L_2^2=e^2\cos^2\theta_1+(\lambda_3-e\sin\theta_1)^2 \Leftrightarrow L_2^2-e^2\cos^2\theta_1=(\lambda_3-e\sin\theta_1)^2$
$\Rightarrow \sqrt{L_2^2-e^2\cos^2\theta_1}=\lambda_3-e\sin\theta_1 \Rightarrow \lambda_3=\sqrt{L_2^2-e^2\cos^2\theta_1}+e\sin\theta_1$.

Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

On note $I_H(1)=\begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1\end{pmatrix}_{(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$ la matrice d'inertie en $H$ de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré **(1)**.

**Question 2** *En considérant que seul le plan $\left(H,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.*

**Correction** On a donc une invariance suivant $\overrightarrow{y_1}$ et $I_H(1)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1\end{pmatrix}_{(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie $I_A(1)$, $I_{G_2}(2)$ et $I_{G_3}(3)$ sont diagonales.

**Correction** $H$ est un point fixe :

- $\{\sigma(1/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c(1/0)}=m_1\overrightarrow{V(G_1\in 1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(H,1/0)}=I_H(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)}\end{array}\right\}_H=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0} \\ C_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}\end{array}\right\}_H$
- $\{\mathscr{D}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d(1/0)}=m_1\overrightarrow{\Gamma(G_1\in 1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(H,1/0)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\delta(H,1/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}\end{array}\right\}_H=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0} \\ C_1\ddot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}\end{array}\right\}_H$

$G_3$ est le centre de gravité de 3. Le solide 3 est en translation par rapport à 0.

- $\{\sigma(3/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c(3/0)}=m_3\overrightarrow{V(G_3\in 3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)}\end{array}\right\}_{G_3}=\left\{\begin{array}{c}m_3\dot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G_3}$

- $\{\mathscr{D}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(3/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_3,1/0)} = \left[ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)}}{\mathrm{d}t} \right]_{\mathscr{R}_0} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3 \ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_3}$

$G_2$ est le centre de gravité de 2.

- $\{\sigma(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(2/0)} = m_2 \overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)} = I_{G_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2\left(\dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}\right) \\ C_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$
- $\{\mathscr{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_2,2/0)} = \left[ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)}}{\mathrm{d}t} \right]_{\mathscr{R}_0} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2\left(\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}\right) \\ C_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$

Détail des calculs.

**Calcul de $\overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)}$.**

$\overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)} = \overrightarrow{V(G_2 \in 2/3)} + \overrightarrow{V(G_2 \in 3/0)}$

$\overrightarrow{V(G_2 \in 2/3)} = \overrightarrow{V(C \in 2/3)} + \overrightarrow{G_2C} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/3)} = \overrightarrow{0} + a_2 \overrightarrow{y_2} \wedge \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} = a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}$ $\quad \overrightarrow{V(G_2 \in 3/0)} = \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0}$

$\overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)} = \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}$.

**Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}$.**

$\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} = \ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}$.

**Question 3** *Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.*

**Correction**

- On isole **(1)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(0 \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \to 1)} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(A,0 \to 1)} \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,0 \to 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(2 \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2 \to 1)} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(B,2 \to 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2 \to 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison). Par ailleurs, $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,2 \to 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B,2 \to 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} + \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R(2 \to 1)}\right) \overrightarrow{z_0} = \left(e \overrightarrow{x_1} \wedge \left(X_{21} \overrightarrow{x_2} + Y_{21} \overrightarrow{y_2}\right)\right) \overrightarrow{z_0}$ $= \left(e X_{21} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} + e Y_{21} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2}\right) \overrightarrow{z_0} = e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1)$
  - Couple moteur : $\{\mathscr{T}(0_m \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_A$.
- On applique le TMD en $A$ en projection suivant $\overrightarrow{z}$ :

$$e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1) + C_m = C_1 \ddot{\theta}_1$$

- On isole **(2)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(1 \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \to 1)} \\ -\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2 \to 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2 \to 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(3 \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \to 3)} \\ -\overrightarrow{\mathscr{M}(C,2 \to 3)} \end{array} \right\}_C$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(C,2 \to 3)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
- On applique le TMD en $C$ en projection sur $\overrightarrow{z_0}$ :

$$-\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R(2 \to 1)} \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{\delta(C,2/0)} \cdot \overrightarrow{z} \Longleftrightarrow L_2 \overrightarrow{y_2} \wedge \left(X_{21} \overrightarrow{x_2} + Y_{21} \overrightarrow{y_2}\right) \cdot \overrightarrow{z} = \left(\overrightarrow{\delta(G_2,2/0)} + \overrightarrow{CG_2} \wedge m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}\right) \cdot \overrightarrow{z}$$

$$\Longrightarrow -L_2 X_{21} = C_2 \ddot{\theta}_2 \left(-a_2 \overrightarrow{y_2} \wedge \left(m_2 \left(\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}\right)\right)\right) \cdot \overrightarrow{z}$$

$$\Longrightarrow -L_2 X_{21} = C_2 \ddot{\theta}_2 + a_2 m_2 \left(\ddot{\lambda}_3 \sin\theta_2 - a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2}\right)$$

- On isole **(2+3)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison glissière : $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 3)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(0\rightarrow 3)}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(A,0\rightarrow 3)}\end{array}\right\}_A$ avec $\overrightarrow{R(0\rightarrow 3)}\cdot\overrightarrow{y_0}=0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c}-\overrightarrow{R(2\rightarrow 1)}\\ -\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2\rightarrow 1)}\end{array}\right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0}=0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Force explosion : $\{\mathscr{T}(0_e\rightarrow 3)\}=\left\{\begin{array}{c}F_y\overrightarrow{y}+F_z\overrightarrow{z}\\ \overrightarrow{C_{exp}}\end{array}\right\}_C$.
- On applique le TRD en projection sur $\overrightarrow{y_0}$ :

$$F_y-Y_{21}=m_3\ddot{\lambda}_3+\left(m_2\left(\ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0}+a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}+a_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}\right)\right)\cdot\overrightarrow{y_0}$$

$$\Longleftrightarrow F_y-Y_{21}=m_3\ddot{\lambda}_3+\left(m_2\left(\ddot{\lambda}_3+a_2\ddot{\theta}_2\sin\theta_2+a_2\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2\right)\right)$$