Activation

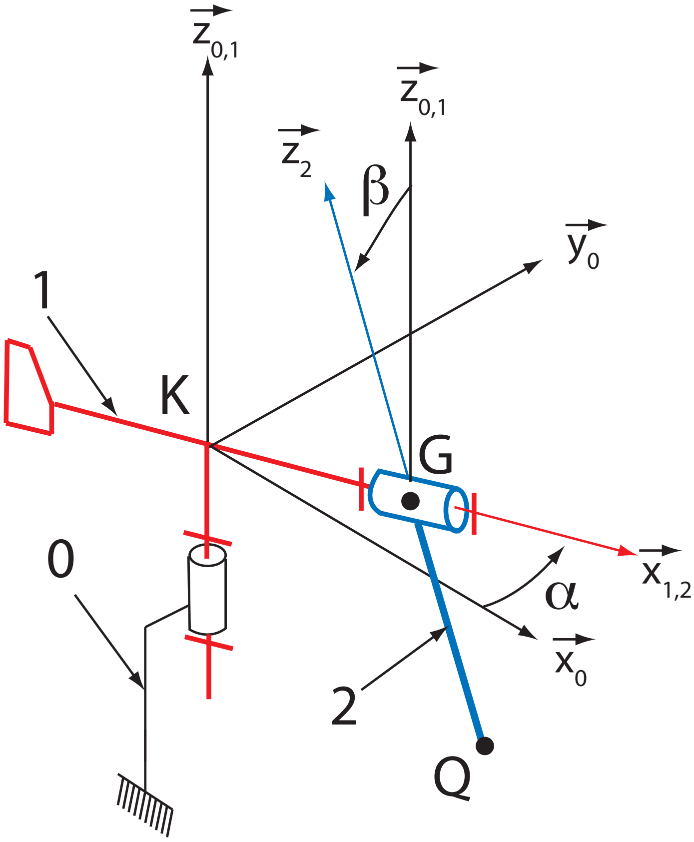
Activation – Éolienne

Emilien Durif

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide*
- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides.On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 pour créer un couple C_m selon la direction $\overrightarrow{z}_0$.

L'éolienne est composée de :

- un support **0**, auquel on associe un repère $R_0 = \left(K; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$;
- une girouette **1** (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $\left(K, \overrightarrow{z_{0,1}}\right)$ avec le support **0**. On lui associe un repère $R_1 = \left(K; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z}_{0,1}\right)$ et on pose $\alpha = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe $\left(K, \overrightarrow{z_1}\right)$: $J = I_{\left(K,\overrightarrow{z_1}\right)}(1)$;
- une hélice **2**, en liaison pivot d'axe $\left(K, \overrightarrow{x_{1,2}}\right)$ avec **1**. On lui associe un repère $R_2 = \left(K; \overrightarrow{x_{1,2}}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ choisi tel que $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1}$ et on pose $\beta = \left(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}\right)$. On note M sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on

pose $\overrightarrow{KG}=a\,\overrightarrow{x}_1$. On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\overline{\overline{I}}_G(2)=\begin{pmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd **3** assimilé à une masse ponctuelle m au point Q. On pose $\overrightarrow{GQ}=-b\overrightarrow{z_2}$.

Question 1 *Tracer le schéma de structure de l'éolienne.*

Correction

Question 2 *Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.*

Correction On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ($E=\{1+2+3\}$) en projection sur l'axe $\left(K,\overrightarrow{z_0}\right)$: $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(K,\bar{E}\rightarrow E\right)}\cdot\overrightarrow{z}_0=\overrightarrow{\delta\left(K,E/R_0\right)}\cdot\overrightarrow{z}_0\Leftrightarrow C_m=\left(\overrightarrow{\delta\left(K,1/R_0\right)}+\overrightarrow{\delta\left(K,2/R_0\right)}+\overrightarrow{\delta\left(K,3/R_0\right)}\right)\cdot\overrightarrow{z}_0$.

Question 3 *Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment cinétique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **1**, notée $\overrightarrow{\sigma\left(K,1/0\right)}\cdot\overrightarrow{z_0}$.*

Correction
- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $\left(K,\overrightarrow{z_0}\right)$:
- $\overrightarrow{\sigma\left(K,1/0\right)}\cdot\overrightarrow{z}_0=\left(\overline{\overline{I}}_K(1)\cdot\overrightarrow{\Omega}(1/0)\right)\cdot\overrightarrow{z}_0=\left(\overline{\overline{I}}_K(1)\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z}_0\right)\cdot\overrightarrow{z}_0$
- or on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe $\left(K,\overrightarrow{z}\right)$ soit : $\overline{\overline{I}}_K(1)\cdot\overrightarrow{z}_0\cdot\overrightarrow{z}_0=J$
- Ainsi : $\overrightarrow{\sigma\left(K,1/0\right)}\cdot\overrightarrow{z}_0=J\dot{\alpha}$.

Question 4 *Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)}$ calculé au point K de l'hélice **2** dans son mouvement par rapport à **0**.*

Correction
- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- On connaît l'opérateur d'inertie en G, on calcule donc : $\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}$: $\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}=\overline{\overline{I}}_G(2)\cdot\overrightarrow{\Omega}(2/0)$.
- On calcule $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$: $\overrightarrow{\Omega}(2/0)=\overrightarrow{\Omega}(2/1)+\overrightarrow{\Omega}(1/0)=\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{x}_{1,2}+\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z}_1=\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{x}_{1,2}+\dot{\alpha}\left(\cos\beta\,\overrightarrow{z}_2+\sin\beta\,\overrightarrow{y}_2\right)$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}$: $\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}=\begin{pmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}\cdot\begin{pmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{\alpha}\cdot\sin\beta\\ \dot{\alpha}\cdot\cos\beta\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}=\begin{pmatrix}A\cdot\dot{\beta}\\ B\cdot\dot{\alpha}\cdot\sin\beta\\ C\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\beta\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)}$:
  - $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)}=\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}+\overrightarrow{KG}\wedge\overrightarrow{R_c}(2/0)=\overrightarrow{\sigma\left(G,2/0\right)}+a\cdot\overrightarrow{x}_1\wedge M\cdot\overrightarrow{V}(G\in 2/0)$
  - On calcule $\overrightarrow{V}(G\in 2/0)$: $\overrightarrow{V}(G\in 2/0)=\overrightarrow{V}(K\in 2/0)+\overrightarrow{GK}\wedge\overrightarrow{\Omega}(2/0)=\overrightarrow{0}-a\cdot\overrightarrow{x}_1\wedge\left(\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{x}_{1,2}+\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z}_1\right)$ $=a\cdot\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y}_1$
  - On calcule $a\cdot\overrightarrow{x}_1\wedge M\cdot\overrightarrow{V}(G\in 2/0)$: $a\cdot\overrightarrow{x}_1\wedge M\cdot\overrightarrow{V}(G\in 2/0)=a\cdot\overrightarrow{x}_1\wedge M\left(a\cdot\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y}_1\right)=M\cdot a^2\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z}_1$
  - On en déduit $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)}$: $\overrightarrow{\sigma\left(K,2/0\right)}=\begin{pmatrix}A\cdot\dot{\beta}\\ B\cdot\dot{\alpha}\cdot\sin\beta+M\cdot a^2\cdot\dot{\alpha}\sin\beta\\ C\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos\beta+M\cdot a^2\cdot\dot{\alpha}\cos\beta\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$

Question 5 *Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma\left(K,3/0\right)}$*

Correction
- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi $\overrightarrow{\sigma\left(Q,3/0\right)}=\overrightarrow{0}$.
- $\overrightarrow{\sigma\left(K,3/0\right)}=\overrightarrow{KQ}\wedge m\cdot\overrightarrow{V}(Q\in 3/0)$:
  - On calcule $\overrightarrow{KQ}$: $\overrightarrow{KQ}=\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GQ}=a\cdot\overrightarrow{x}_1-b\cdot\overrightarrow{z}_2$
  - On calcule $\overrightarrow{V}(Q\in 3/0)$: $\overrightarrow{V}(Q\in 3/0)=\overrightarrow{V}(Q\in 3/2)+\overrightarrow{V}(Q\in 2/1)+\overrightarrow{V}(Q\in 1/0)=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{V}(G\in 2/1)+\overrightarrow{QG}\wedge\overrightarrow{\Omega}(2/1)+\overrightarrow{V}(G\in 1/0)+\overrightarrow{QG}\wedge\overrightarrow{\Omega}(1/0)=\overrightarrow{0}+b\cdot\overrightarrow{z}_2\wedge\dot{\beta}\cdot\overrightarrow{x}_2+a\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y}_1+b\cdot\overrightarrow{z}_2\wedge\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z}_1=$

$b \cdot \dot\beta \cdot \overrightarrow{y}_2 + a \cdot \dot\alpha \cdot \overrightarrow{y}_1 - b \cdot \dot\alpha \sin\beta \cdot \overrightarrow{x}_{1,2}$

– On calcule $\overrightarrow{KQ} \wedge m\overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$:
$\overrightarrow{KQ} \wedge m\overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = m \cdot \left[a \cdot \overrightarrow{x}_1 - b \cdot \overrightarrow{z}_2\right] \wedge \left[b \cdot \dot\beta \cdot \overrightarrow{y}_2 + a \cdot \dot\alpha \cdot \overrightarrow{y}_1 - b \cdot \dot\alpha \sin\beta \cdot \overrightarrow{x}_{1,2}\right]$
$= m\left[a \cdot b \cdot \overrightarrow{z}_2 + a^2 \cdot \dot\alpha \cdot \overrightarrow{z}_1 + b^2 \cdot \dot\beta \cdot \overrightarrow{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot\alpha \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{x}_1 + b^2 \cdot \dot\alpha \sin\beta \cdot \overrightarrow{y}_2\right]$

- $\overrightarrow{\sigma(K,3/0)} = m\left[a \cdot b \cdot \dot\beta \overrightarrow{z}_2 + a^2 \cdot \dot\alpha \cdot \overrightarrow{z}_1 + b^2 \cdot \dot\beta \cdot \overrightarrow{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot\alpha \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{x}_1 + b^2 \cdot \dot\alpha \sin\beta \cdot \overrightarrow{y}_2\right]$

Question 6 *Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z}_0$ du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support **0**, notée $\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,1/0)}$.*

Correction

$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,1/0)} = \overrightarrow{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K,1/0)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,1/0)}}{dt}\right]_{R_0} = J \cdot \ddot\alpha$$

Question 7 *Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z}_0$ du moment dynamique $\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)}$.*

Correction

$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)} = \overrightarrow{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,2/0)}}{dt}\right]_{R_0}$$

Or, $\overrightarrow{z}_{0,1} = \cos\beta \cdot \overrightarrow{z}_2 + \sin\beta \cdot \overrightarrow{y}_2$,

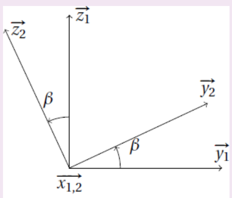
$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot\beta \\ B \cdot \dot\alpha \cdot \sin\beta + M \cdot a^2 \cdot \dot\alpha \sin\beta \\ C \cdot \dot\alpha \cdot \cos\beta + M \cdot a^2 \cdot \dot\alpha \cos\beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$$
$$= \dot\alpha\left[B \cdot \sin^2\beta + C \cdot \cos^2\beta + M \cdot a^2\right]$$

d'où,

$$\boxed{\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)} = \ddot\alpha\left[B \cdot \sin^2\beta + C \cdot \cos^2\beta + M \cdot a^2\right] + 2 \cdot \dot\alpha\dot\beta \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta\,[B - C].}$$

Question 8 *Déterminer la projection du moment dynamique de $3/0$ selon $\overrightarrow{z}_0$: $\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,3/0)}$.*

Correction



$$\overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{z}_2 = \cos\beta$$
$$\overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{z}_1 = 1$$
$$\overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{x}_0 = 0$$
$$\overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{x}_1 = 0$$
$$\overrightarrow{z}_1 \cdot \overrightarrow{y}_2 = \sin\beta$$

On trouve alors :
$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,3/0)} = m\frac{\mathrm{d}\left[a \cdot b \cdot \dot\beta \cos\beta + a^2 \cdot \dot\alpha + b^2 \cdot \dot\alpha \sin^2\beta\right]}{\mathrm{d}t}$
$= m\left[a \cdot b \cdot \left(\ddot\beta \cos\beta - \dot\beta^2 \sin\beta\right) + a^2\ddot\alpha + b^2 \cdot \left(\ddot\alpha \sin^2\beta + 2\dot\alpha\dot\beta \sin\beta \cos\beta\right)\right]$

Question 9 *Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice **2** ($\dot\beta$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expriment du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre **0** et **1**) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.*

Correction Le théorème du moment dynamique autour de l'axe $\left(K, \overrightarrow{z_{0,1}}\right)$ donne : $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin\beta$.