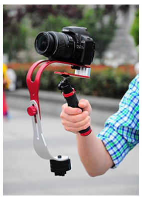
TD 2 – Corrigé



Stabilisateur passif d'image ★

Mines Ponts 2018 – PSI

Savoirs et compétences :***

- ❒ *Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide*
- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*

Mise en situation

Objectif Suite à une sollicitation brève de 0,5 m s^{-2}, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les 0,5°.

Travail demandé

Question 1 *Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans* **(0)** *galiléen s'exprime comme* $Q_1\dfrac{d^2\varphi(t)}{dt^2}+Q_2(t)=Q_3(t)a(t)$.

Correction **(1)** et **(E)** sont en liaison pivot d'axe $\left(O,\overrightarrow{Y_0}\right)$. On va donc réaliser un théorème du moment dynamique appliqué à **(E)** en O en projection sur $\overrightarrow{Y_0}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O,E/0)}$

Méthode 1 – En passant par le calcul de $\overrightarrow{\delta(O,\mathbf{2}/0)}$**,** $\overrightarrow{\delta(O,\mathbf{C}/0)}$ **et** $\overrightarrow{\delta(O,\mathbf{Cp}/0)}$

Le support 2 étant sans masse, on a $\overrightarrow{\delta(O,2/0)}=\overrightarrow{0}$. La caméra et le contrepoids étant considérés comme des masses ponctuelles, on a $\overrightarrow{\delta(G_C,\mathrm{C}/0)}=\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\delta\left(G_{Cp},\mathrm{Cp}/0\right)}=\overrightarrow{0}$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O,\mathbf{C}/0)}$

On a $\overrightarrow{\delta(O,\mathrm{C}/0)}=\overrightarrow{\delta(G_C,\mathrm{C}/0)}+\overrightarrow{OG_C}\wedge M_C\overrightarrow{\Gamma(G_C\in\mathrm{C}/0)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_C\in\mathbf{C}/0)}$

$\overrightarrow{V(G_C\in\mathrm{C}/0)}=\overrightarrow{V(G_C\in\mathrm{C}/1)}+\overrightarrow{V(G_C\in 1/0)}=\overrightarrow{G_CO}\wedge\overrightarrow{\Omega(\mathrm{C}/0)}+v(t)\overrightarrow{X_0}=-L_C\overrightarrow{Z_2}\wedge\dot{\varphi}\overrightarrow{Y_2}+v(t)\overrightarrow{X_0}=L_C\dot{\varphi}\overrightarrow{X_2}+v(t)\overrightarrow{X_0}$.

De plus $\overrightarrow{\Gamma(G_C\in\mathrm{C}/0)}=L_C\ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2}-L_C\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Z_2}+a(t)\overrightarrow{X_0}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta(O,\mathrm{C}/0)}=\overrightarrow{OG_C}\wedge M_C\overrightarrow{\Gamma(G_C\in\mathrm{C}/0)}=L_C\overrightarrow{Z_2}\wedge M_C\left(L_C\ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2}-L_C\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Z_2}+a(t)\overrightarrow{X_0}\right)$

$\overrightarrow{\delta(O,\mathrm{C}/0)}=L_CM_C\left(L_C\ddot{\varphi}\overrightarrow{Y_2}+a(t)\cos\varphi\overrightarrow{Y_0}\right)$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O,\mathbf{Cp}/0)}$

On a $\overrightarrow{\delta(O,\mathrm{Cp}/0)}=\overrightarrow{\delta\left(G_{Cp},\mathrm{Cp}/0\right)}+\overrightarrow{OG_{Cp}}\wedge M_{Cp}\overrightarrow{\Gamma\left(G_{Cp}\in\mathrm{C}/0\right)}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma\left(G_{Cp}\in\mathbf{Cp}/0\right)}$

De même, $\overrightarrow{V\left(G_{Cp}\in\mathrm{Cp}/0\right)}=\overrightarrow{V\left(G_{Cp}\in\mathrm{Cp}/1\right)}+\overrightarrow{V\left(G_{Cp}\in 1/0\right)}=\overrightarrow{G_{Cp}O}\wedge\overrightarrow{\Omega(\mathrm{Cp}/0)}+v(t)\overrightarrow{X_0}=L_{Cp}\overrightarrow{Z_2}\wedge\dot{\varphi}\overrightarrow{Y_2}+v(t)\overrightarrow{X_0}=-L_{Cp}\dot{\varphi}\overrightarrow{X_2}+v(t)\overrightarrow{X_0}$.

De plus $\overrightarrow{\Gamma\left(G_{Cp}\in\mathrm{Cp}/0\right)}=-L_{Cp}\ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2}+L_{Cp}\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Z_2}+a(t)\overrightarrow{X_0}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta(O,\mathrm{Cp}/0)}=\overrightarrow{OG_{Cp}}\wedge M_{Cp}\overrightarrow{\Gamma\left(G_{Cp}\in\mathrm{Cp}/0\right)}=-L_{Cp}\overrightarrow{Z_2}\wedge M_{Cp}\left(-L_{Cp}\ddot{\varphi}\overrightarrow{X_2}+L_{Cp}\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Z_2}+a(t)\overrightarrow{X_0}\right)$

$\overrightarrow{\delta(O,\mathrm{C}/0)}=-L_{Cp}M_{Cp}\left(-L_{Cp}\ddot{\varphi}\overrightarrow{Y_2}+a(t)\cos\varphi\overrightarrow{Y_0}\right)$

On a donc $\overrightarrow{\delta(O,E/0)}\cdot\overrightarrow{Y_0}=M_{Cp}L_{Cp}^2\ddot{\varphi}-M_{Cp}L_{Cp}a(t)\cos\varphi+M_CL_C^2\ddot{\varphi}+M_CL_Ca(t)\cos\varphi$

Méthode 2 – En passant par le calcul de $I_O(E)$

On a $I_O(C)=M_C\begin{pmatrix} L_C^2 & 0 & 0\\ 0 & L_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2}$ et $I_O(Cp)=M_{Cp}\begin{pmatrix} L_{Cp}^2 & 0 & 0\\ 0 & L_{Cp}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2}$ et donc

$I_O(E)=\begin{pmatrix} M_{Cp}L_{Cp}^2+M_CL_C^2 & 0 & 0\\ 0 & M_{Cp}L_{Cp}^2+M_CL_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2}$.

O est un point quelconque ; donc $\overrightarrow{\delta(O,E/0)}\cdot\overrightarrow{Y_0}=$

$\overrightarrow{\delta(O,E/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O,E/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} + \overrightarrow{V(O/R_0)}\wedge\overrightarrow{R_c}(E/R_0)$ et $\overrightarrow{\sigma(O,E/R_0)} = I_O(E)\cdot\overrightarrow{\Omega(E/R_0)} + M\ \overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{V(O\in E/R_0)}$.

De plus, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{M_CL_C-M_{Cp}L_{Cp}}{M_C+M_{Cp}}\overrightarrow{Z_2}$, $\overrightarrow{V(O\in E/R_0)} = v(t)\overrightarrow{X_0}$ et $\overrightarrow{V(G\in E/R_0)} = v(t)\overrightarrow{X_0} + \dfrac{M_CL_C-M_{Cp}L_{Cp}}{M_C+M_{Cp}}\dot\varphi\overrightarrow{X_2}$.

On a donc, $\overrightarrow{\sigma(O,S/R_0)} = \dot\varphi\left(M_{Cp}L_{Cp}^2+M_CL_C^2\right)\overrightarrow{Y_2} + \left(M_C+M_{Cp}\right)\dfrac{M_CL_C-M_{Cp}L_{Cp}}{M_C+M_{Cp}}\overrightarrow{Z_2}\wedge v(t)\overrightarrow{X_0} = \dot\varphi\left(M_{Cp}L_{Cp}^2+M_CL_C^2\right)\overrightarrow{Y_2}+\left(M_CL_C-M_{Cp}L_{Cp}\right)v(t)\cos\varphi\overrightarrow{Y_0}$.

$\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O,E/R_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = \ddot\varphi\left(M_{Cp}L_{Cp}^2+M_CL_C^2\right)\overrightarrow{Y_2}+\left(M_CL_C-M_{Cp}L_{Cp}\right)\left(a(t)\cos\varphi-v(t)\dot\varphi\sin\varphi\right)\overrightarrow{Y_0}$.

$\overrightarrow{V(O/R_0)}\wedge\overrightarrow{R_c}(E/R_0) = v(t)\overrightarrow{X_0}\wedge\left(M_C+M_{Cp}\right)\left(v(t)\overrightarrow{X_0}+\dfrac{M_CL_C-M_{Cp}L_{Cp}}{M_C+M_{Cp}}\dot\varphi\overrightarrow{X_2}\right) = \left(M_C+M_{Cp}\right)\left(\dfrac{M_CL_C-M_{Cp}L_{Cp}}{M_C+M_{Cp}}\dot\varphi v(t)\sin\varphi\right)\overrightarrow{Y_2} = \left(M_CL_C-M_{Cp}L_{Cp}\right)\dot\varphi v(t)\sin\varphi\overrightarrow{Y_2}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta(O,E/R_0)} = \ddot\varphi\left(M_{Cp}L_{Cp}^2+M_CL_C^2\right)\overrightarrow{Y_2}+\left(M_CL_C-M_{Cp}L_{Cp}\right)a(t)\cos\varphi\overrightarrow{Y_0}$

Bilan des actions mécaniques en O agissant sur E

- Liaison pivot $\{\mathscr{T}(1\rightarrow E)\}$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(O,1\rightarrow E)}\cdot\overrightarrow{Y_2}=0$.
- $\{\mathscr{T}(\text{pes}\rightarrow C)\}$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(O,\text{pes}\rightarrow C)}\cdot\overrightarrow{Y_2}=\left(\overrightarrow{OG_C}\wedge-M_Cg\overrightarrow{Z_0}\right)\overrightarrow{Y_2}=\left(L_C\overrightarrow{Z_2}\wedge-M_Cg\overrightarrow{Z_0}\right)\overrightarrow{Y_2}=L_CM_Cg\sin\varphi\overrightarrow{Y_2}$.
- $\{\mathscr{T}(\text{pes}\rightarrow Cp)\}$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(O,\text{pes}\rightarrow Cp)}\cdot\overrightarrow{Y_2}=\left(-L_{Cp}\overrightarrow{Z_2}\wedge-M_{Cp}g\overrightarrow{Z_0}\right)\overrightarrow{Y_2}=-L_{Cp}M_{Cp}g\sin\varphi\overrightarrow{Y_2}$.

Théorème du moment dynamique en O en projection sur $\overrightarrow{Y_2}$

$\ddot\varphi\left(M_{Cp}L_{Cp}^2+M_CL_C^2\right)+\left(M_CL_C-M_{Cp}L_{Cp}\right)a(t)\cos\varphi = L_CM_Cg\sin\varphi-L_{Cp}M_{Cp}g\sin\varphi$.

$\Leftrightarrow\ddot\varphi\left(M_{Cp}L_{Cp}^2+M_CL_C^2\right)+\left(L_{Cp}M_{Cp}-L_CM_C\right)g\sin\varphi=-\left(M_CL_C-M_{Cp}L_{Cp}\right)a(t)\cos\varphi$.

On a donc : $Q_1=M_{Cp}L_{Cp}^2+M_CL_C^2$, $Q_2(t)=\left(L_{Cp}M_{Cp}-L_CM_C\right)g\sin\varphi$, $Q_3(t)=\left(M_{Cp}L_{Cp}-M_CL_C\right)\cos\varphi$.

Question 2 *Établir sous forme canonique la fonction de transfert $H(p)=\dfrac{\Phi(p)}{A(p)}$. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de m_c, m_{cp}, L_c, L_{cp} et g.*

Correction Dans les conditions précédentes, on a $Q_1=M_{Cp}L_{Cp}^2+M_CL_C^2$, $Q_2(t)=\left(L_{Cp}M_{Cp}-L_CM_C\right)g\varphi$ et $Q_3(t)=\left(M_{Cp}L_{Cp}-M_CL_C\right)$.

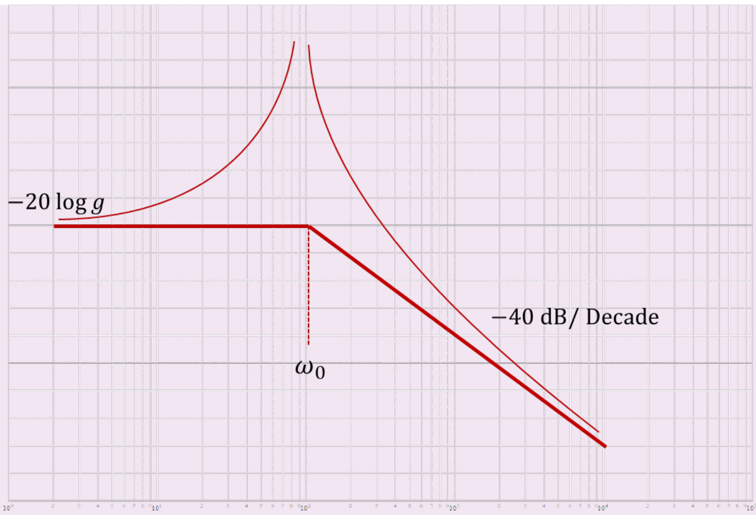
L'équation de comportement devient donc $Q_1\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2}+\left(L_{Cp}M_{Cp}-L_CM_C\right)g\varphi=Q_3a(t)$

$\Rightarrow Q_1p^2\Phi(p)+\left(L_{Cp}M_{Cp}-L_CM_C\right)g\Phi(p)=Q_3A(p)$ et $H(p)=\dfrac{Q_3}{Q_1p^2+\left(L_{Cp}M_{Cp}-L_CM_C\right)g}$.

On a donc $\omega_0^2=\dfrac{\left(L_{Cp}M_{Cp}-L_CM_C\right)g}{Q_1}=\dfrac{\left(L_{Cp}M_{Cp}-L_CM_C\right)g}{M_{Cp}L_{Cp}^2+M_CL_C^2}$. Le gain K vaut $\dfrac{M_{Cp}L_{Cp}-M_CL_C}{\left(L_{Cp}M_{Cp}-L_CM_C\right)g}=\dfrac{1}{g}$.

Question 3 *Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain $G_{dB}=f(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$. Placer les caractéristiques remarquables.*

Correction



Question 4 *Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que $\omega_0 = 0,1\omega_a$. Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple (m_{cp}, L_{cp}). En utilisant le comportement asymptotique en gain de G_{dB}, estimer numériquement l'amplitude $\Delta\varphi$ (en degrés) des oscillations de **(E)** selon l'axe $(O, \overrightarrow{y_0})$.*

Correction On a $\omega_a = 10\omega_0$. Une décade après ω_0, $G_{\text{dB}} = -20\log 10 - 40 = -60\,\text{dB}$. Une atténuation de -60 dB correspond à un gain de $10^{-\frac{60}{20}} = 0,001$. L'amplitude des oscillations sera donc de $0,001 a_0 = 5 \times 10^{-4}$ rad soit $0,03°$.

Retour sur le cahier des charges

Question 5 *Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.*

Correction On a $0,03° < 0,5°$. Le cahier des charges est vérifié au voisinage de $10\omega_0$.

Eléments de corrigé

1. $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2$, $Q_2(t) = \left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g \sin\varphi$, $Q_3(t) = \left(M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C\right)\cos\varphi$.
2. $\omega_0^2 = \dfrac{\left(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C\right) g}{M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}$.
3. .
4. $0,03°$.
5. .