

Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur

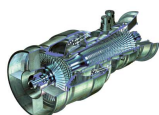
Cours

Chapitre 5

Équilibrage des solides en rotation

Savoirs et compétences :

- ❑ Mod2.C16 : torseur cinétique
- ❑ Mod2.C17 : torseur dynamique
- ❑ Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- ❑ Mod2.C15 : matrice d'inertie
- ❑ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ❑ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement
- ❑ Res1.C2.SF1 : proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison



Turbine à gaz Alstom



Turboréacteur Snecma

1	Introduction	2
1.1	Problématique industrielle	2
1.2	Présentation du support de cours	2
2	Modélisation du problème	3
2.1	Paramétrage du problème	3
2.2	Analyse préliminaire	3
3	Conditions d'équilibrage	5
3.1	Présentation	5
3.2	Équilibrage statique	5
3.3	Équilibrage dynamique	5
3.4	Conditions d'équilibrage	5
3.5	Illustration de l'équilibrage	6
4	Réalisation de l'équilibrage	6
4.1	Présentation de la méthode d'ajout de masses ponctuelles 6	
4.2	Équations de détermination de l'équilibrage	7
4.3	Mise en oeuvre : machine d'équilibrage industriel	7

1 Introduction

1.1 Problématique industrielle

Le mise en rotation de rotor à haute vitesse (à partir de quelques centaines de tours par minute) est une configuration classique rencontrée dans l'industrie. Si un défaut géométrique existe, cela induit une dissymétrie de la répartition de masse qui provoque des effets vibratoires pouvant aller jusqu'à la rupture des éléments de guidage (paliers, roulements à billes).

Afin d'éviter ces problèmes il convient d'équilibrer dynamiquement ces rotors ce qui implique de rendre les actions mécaniques au niveau des guidages en rotation constantes au cours du temps.

1.2 Présentation du support de cours

■ **Exemple — Étude d'une pompe turbo-moléculaire.** On s'intéresse ici à l'étude d'une pompe à vide destinée à la fabrication de composants électroniques capable d'évacuer des gaz en créant un vide de l'ordre 10^{-9} mbar dans une chambre blanche. Les conditions du cahier des charges sont très exigeantes et résumées dans le diagramme des exigences partiel suivant :

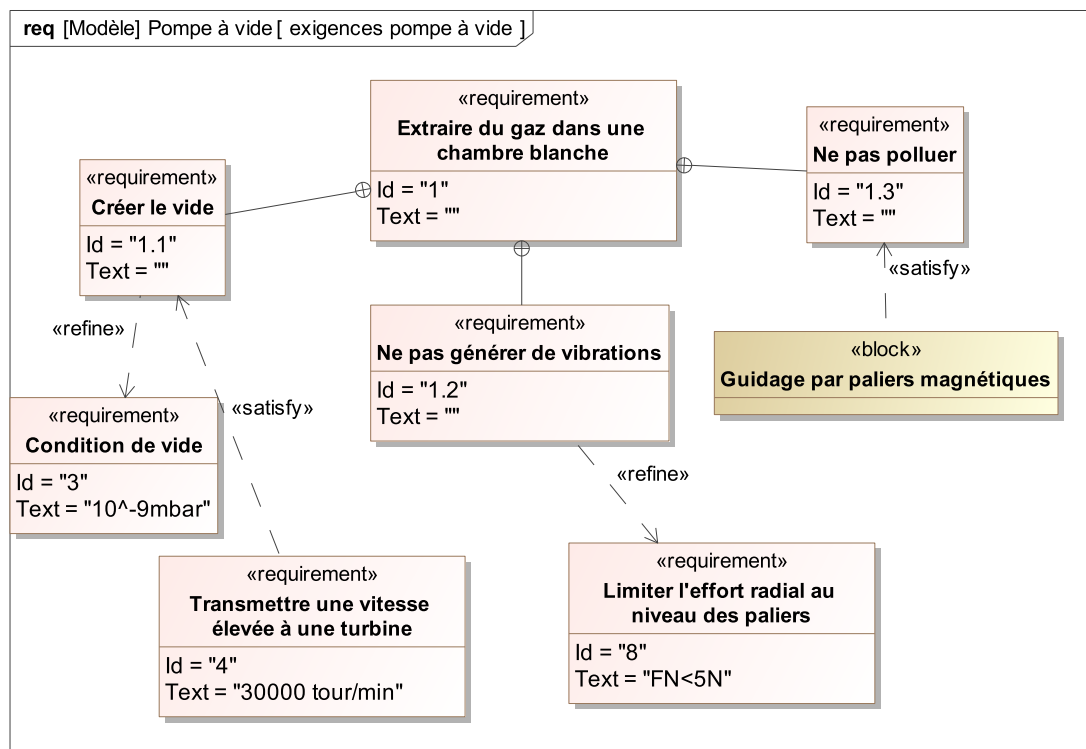
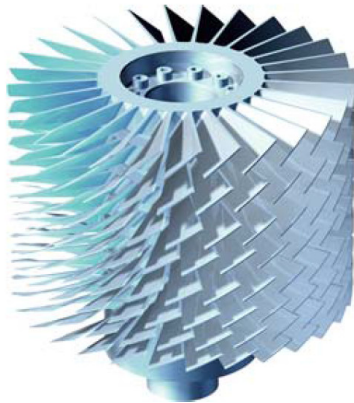
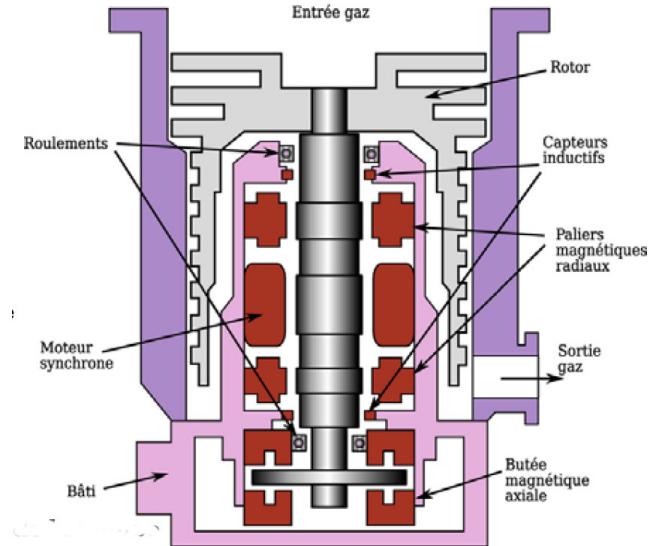


Diagramme des exigences partiel de la pompe à vide



Rotor de la pompe

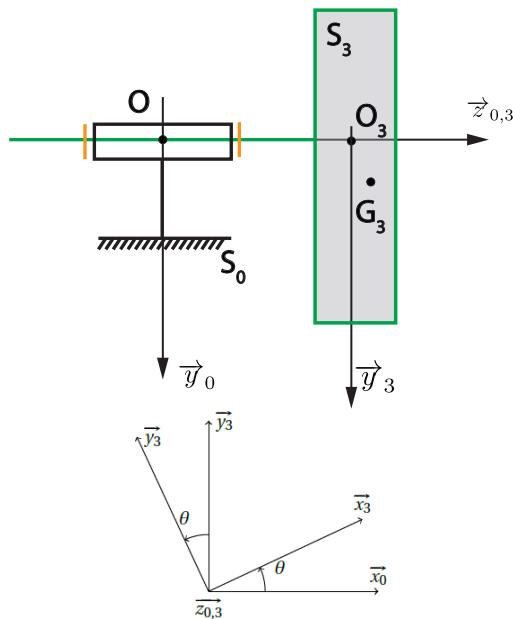


Vue en coupe du guidage par paliers magnétiques de la pompe

2 Modélisation du problème

2.1 Paramétrage du problème

La figure ci-dessous représente le paramétrage d'un rotor S_3 en mouvement par rapport à S_0 .



Paramétrage du problème

- Le référentiel R_0 associé à S_0 est supposé comme étant galiléen.
- Le guidage par paliers magnétiques entre le rotor S_3 et le bâti S_0 est modélisé par une liaison pivot d'axe $(O_3, \vec{z}_{0,3})$ avec bâti S_0 .
- Le paramètre du mouvement de S_3/S_0 est défini par $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$.
- Le rotor S_3 est de masse m_3 , de centre de masse G_3 tel que $\vec{O_3G_3} = b\vec{y}_3 + c\vec{z}_3$.
- Le rotor S_3 , bien qu'ayant une symétrie théorique de révolution est en réalité imparfait. Sa matrice d'inertie en O_3 est donnée par :

$$\bar{I}_{O_3}(S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{R_3}$$

- Un moteur, non représenté, entraîne S_3 avec un couple $C_m \vec{z}_{0,3}$ à vitesse constante ($\omega = \dot{\theta}$).
- L'accélération de la pesanteur est dirigée selon $+\vec{y}_0$ et vaut $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

2.2 Analyse préliminaire

Faire le bilan des actions mécaniques extérieures pour $\{S_3\}$.

- Action du bâti (liaison pivot) :** $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{03} \vec{x}_0 + Y_{03} \vec{y}_0 + Z_{03} \vec{z}_0 \\ L_{03} \vec{x}_0 + M_{03} \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_{\forall P \in (O_3, \vec{z}_{0,3})}$
- Action du moteur :** $\{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow S_3)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{\forall P}$
- Action de la pesanteur :** $\{\mathcal{T}(\text{pesanteur} \rightarrow S_3)\} = \left\{ \begin{matrix} m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_3}$

$$= \left\{ \begin{matrix} m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{O_3G_3} \wedge (m_3 g \vec{y}_0) = (b \vec{y}_3 + c \vec{z}_3) \wedge (m_3 g \vec{y}_0) \end{matrix} \right\}_{O_3} = \left\{ \begin{matrix} m_3 g \vec{y}_0 \\ m_3 g (-b \sin \theta \vec{z}_{0,3} - c \vec{x}_0) \end{matrix} \right\}_{O_3}$$

Déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_3/R_0)\}$ en O_3 .

- Le solide S_3 est en mouvement de rotation autour de l'axe $(O_3, \vec{z}_{0,3})$ fixe par rapport à R_0 .

$$\{\mathcal{D}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_d(S_3/R_0) = m_3 \vec{a}(G_3 \in S_3/R_0) \\ \vec{\delta}(O_3, S_3/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}(O_3, S_3/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_{O_3}$$

- On calcule $\vec{R}_d(S_3/R_0)$: $\vec{R}_d(S_3/R_0) = m_3 \vec{a}(G_3 \in S_3/R_0) = m_3 \left[\frac{d\vec{V}(G_3 \in S_3/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$.
Or, $\vec{V}(G_3 \in S_3/R_0) = \vec{G}_3 \vec{O}_3 \wedge \vec{\Omega}(S_3/R_0) = (-b \vec{y}_3 - c \vec{z}_3) \wedge \dot{\theta} \vec{z}_{0,3} = -b \dot{\theta} \vec{x}_3$.
Donc,

$$\begin{aligned} \vec{R}_d(S_3/R_0) &= -b m_3 \left(\ddot{\theta} \vec{x}_3 + \dot{\theta} \left[\frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_{R_0} \right) = -b m_3 (\ddot{\theta} \vec{x}_3 + \dot{\theta}^2 \vec{y}_3) \\ &= -b m_3 \omega^2 \vec{y}_3 = -b m_3 \omega^2 (-\sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \vec{y}_0) \end{aligned}$$

- On calcule $\vec{\sigma}(O_3, S_3/R_0)$. O_3 est fixe par rapport à R_0 : $\vec{\sigma}(O_3, S_3/R_0) = \vec{I}_{O_3}(S_3) \vec{\Omega}(S_3/R_0) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{R_3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_3} = \dot{\theta} (-E_3 \vec{x}_3 - D_3 \vec{y}_3 + C_3 \vec{z}_3)$
- On calcule $\vec{\delta}(O_3, S_3/R_0)$: O_3 est fixe par rapport à R_0 :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(O_3, S_3/R_0) &= \left[\frac{d\vec{\sigma}(O_3, S_3/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = (-E_3 \cdot \ddot{\theta} + D_3 \dot{\theta}^2) \vec{x}_3 + (-D_3 \cdot \ddot{\theta} - E_3 \dot{\theta}^2) \vec{y}_3 + C_3 \cdot \ddot{\theta} \vec{z}_3 \\ &= D_3 \omega^2 \vec{x}_3 - E_3 \omega^2 \vec{y}_3 \\ &= \omega^2 [(D_3 \cdot \cos \theta + E_3 \cdot \sin \theta) \vec{x}_0 + (D_3 \cdot \sin \theta - E_3 \cdot \cos \theta) \vec{y}_0] \end{aligned}$$

- On en déduit $\{\mathcal{D}(S_3/R_0)\}$ exprimé dans la base $b_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

$$\{\mathcal{D}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -b m_3 \omega^2 (-\sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \vec{y}_0) \\ \omega^2 [(D_3 \cdot \cos \theta + E_3 \cdot \sin \theta) \vec{x}_0 + (D_3 \cdot \sin \theta - E_3 \cdot \cos \theta) \vec{y}_0] \end{array} \right\}_{O_3}$$

Déduire du Principe Fondamental de la Dynamique, les équations de mouvement.

Le Principe Fondamental de la dynamique appliqué à S_3 par rapport au référentiel R_0 donne :

Théorème de la résultante dynamique :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} X_{03} = b m_3 \omega^2 \sin \theta \\ Y_{03} + m_3 g = -b m_3 \omega^2 \cos \theta \\ Z_{03} = 0 \end{array} \right.$$

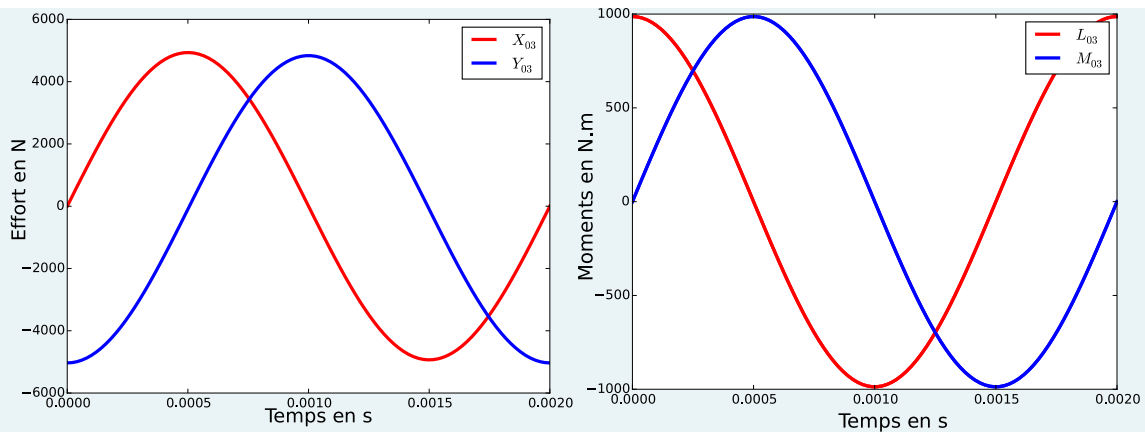
Théorème du moment dynamique en O_0 :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} L_{03} = \omega^2 (D_3 \cdot \cos \theta + E_3 \cdot \sin \theta) + c m_3 g \\ M_{03} = \omega^2 \cdot (D_3 \cdot \sin \theta - E_3 \cdot \cos \theta) \\ C_m - m_3 g b \sin \theta = 0 \end{array} \right.$$

Propriété — Évolution des efforts au niveau des paliers au cours du temps. Lorsque le rotor n'est pas équilibré dynamiquement (comme dans l'exemple précédent), les actions extérieures dans la liaison pivot dépendent de la position angulaire et fluctuent cycliquement.

On donne ci-dessous les évolutions des composantes de l'action mécanique dans la liaison pivot pour une rotation du rotor 3 :

- opérateur d'inertie : $E_3 = 0$ et $D_3 = 10^{-4} \text{ kg m}^2$;
- masse et centre de masse : $m_3 = 10 \text{ kg}$, $c = 0 \text{ mm}$ et $b = 0.05 \text{ mm}$;
- rotation de 3/0 : $\omega = 30\,000 \text{ tour/min}$.



Il apparaît des variations d'efforts de l'ordre de 10 kN et de moment de 2 kNm sur des périodes très brèves (2 ms) ce qui constitue une source importante de vibrations pour la structure. Ces valeurs sont très supérieures à celles exigées par le cahier des charges puisqu'on ne tolère au maximum que 5 N.

3 Conditions d'équilibrage

3.1 Présentation

Définition — Équilibrage d'un solide en rotation. Pour éviter les vibrations, il faut rendre l'action mécanique extérieure s'exerçant sur un solide en rotation la plus constante possible. Il faut donc qu'elle soit indépendante de la vitesse de rotation (ω).

- On en tire les conditions de l'**équilibrage statique** en vérifiant cette définition sur les équations dynamiques de mouvement en **résultante**.
- On en tire les conditions de l'**équilibrage dynamique** en vérifiant cette définition sur les équations dynamiques de mouvement en **moment**.

3.2 Équilibrage statique

■ **Exemple — Mise en œuvre de l'équilibrage statique du rotor S_3 .** Déterminer les conditions d'équilibrage statique.

Les équations en résultantes impliquent que le paramètre b doit être nul. Cela revient à dire que le centre d'inertie G_3 soit sur l'axe de rotation $(O_3, \vec{z}_{0,3})$ de S_3 par rapport à S_0 .

3.3 Équilibrage dynamique

■ **Exemple — Mise en œuvre de l'équilibrage dynamique du rotor S_3 .** Déterminer les conditions d'équilibrage dynamique.

Les équations en moment impliquent que $D_3 = E_3 = 0$. Cela revient à dire que l'axe $(O_0, \vec{z}_{0,3})$ soit axe principal d'inertie du solide S_3 .

3.4 Conditions d'équilibrage

Définition — Condition d'équilibrage d'un solide en rotation. Un solide équilibré doit vérifier les deux conditions suivantes :

- son centre d'inertie se situe sur son axe de rotation ;
- son axe de rotation est axe principal d'inertie : les produits d'inertie sont nul selon cet axe.

3.5 Illustration de l'équilibrage

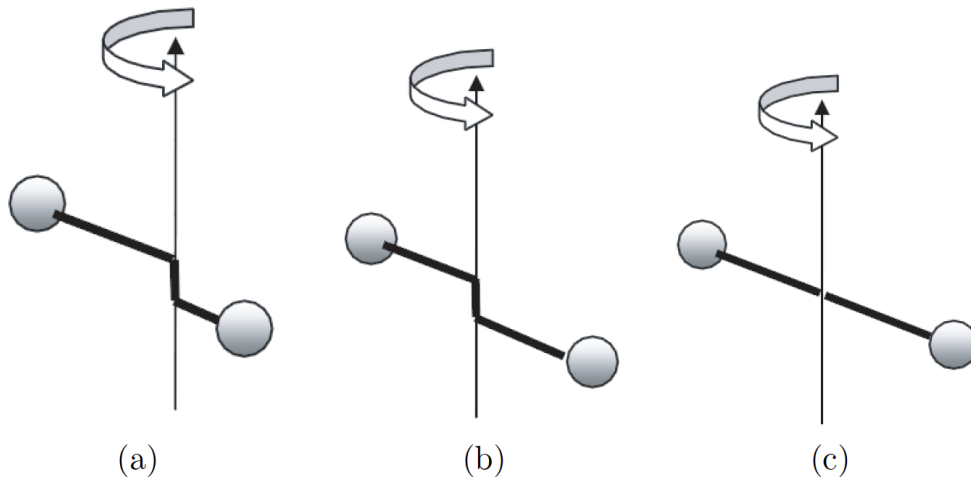


Illustration avec deux masses ponctuelles

- (a) : Les 2 masses ne sont pas à la même distance de l'axe de rotation : on n'a ni équilibrage statique ni équilibrage dynamique.
- (b) : Les deux masses sont à la même distance de l'axe : on a réalisé l'équilibrage statique.
- (c) : Les deux masses sont en face l'une de l'autre : on a réalisé l'équilibrage dynamique.

4 Réalisation de l'équilibrage

4.1 Présentation de la méthode d'ajout de masses ponctuelles

On utilise alors deux masses d'équilibrage ponctuelles m_1 et m_2 localisées sur la jante (rayon r) sur sa partie avant (masse m_1) et sur sa partie arrière (masse m_2) par les angles Φ_1 et Φ_2 . On définit alors leur position par :

- $\vec{O_3G_1} = r \vec{x}_1 + h \vec{z}_3$
- $\vec{O_3G_2} = r \vec{x}_2 - h \vec{z}_3$

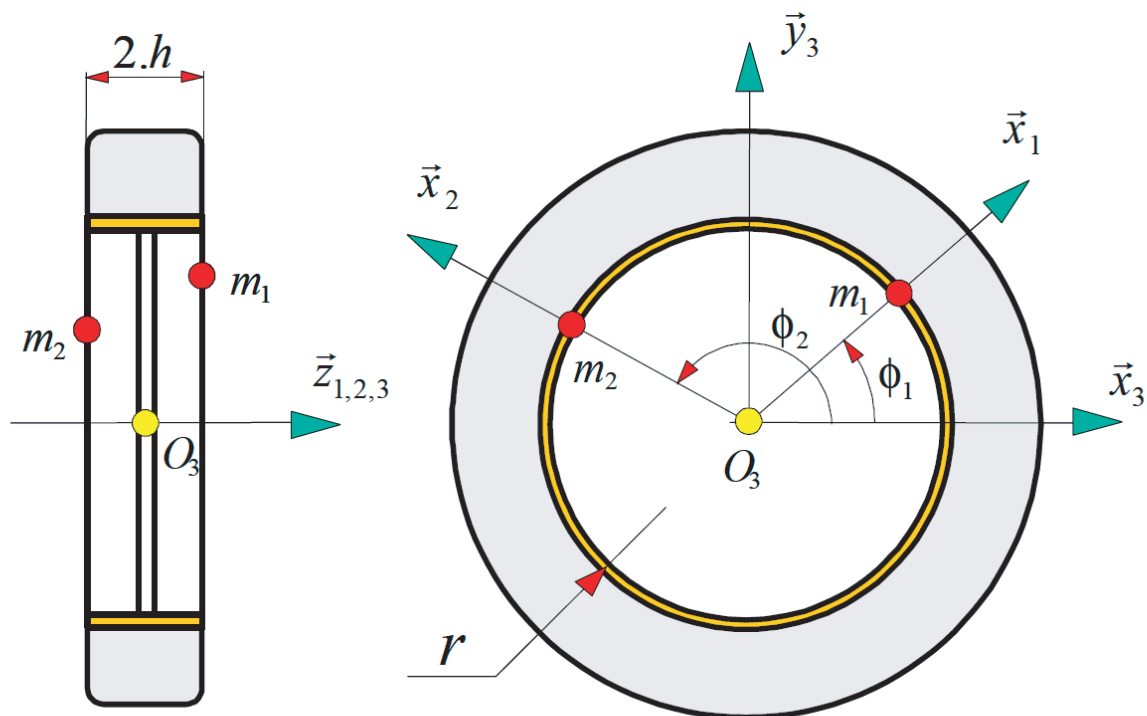


FIGURE 1 – Définition du problème avec la présence de masses d'équilibrage

On considère dorénavant l'ensemble cinématiquement lié $E = \{1 + 2 + 3\}$:

- Soit G son centre d'inertie ;
- $\bar{I}_{O_3}(E)$ sont opérateur d'inertie en O_3 : $\bar{I}_{O_3}(E) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_3}$.

■ **Exemple — Détermination de l'équilibrage statique.** Traduire la relation donnée par l'équilibrage statique.

- La condition d'équilibrage statique implique : $\vec{O_3G} \vec{x_3} = 0$ et $\vec{O_3G} \vec{y_3} = 0$.
- La formule du barycentre donne : $\vec{O_3G} = \frac{m_1 \vec{O_3G_1} + m_2 \vec{O_3G_2} + m_3 \vec{O_3G_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$.
- On peut exprimer $\vec{O_3G_1}$ et $\vec{O_3G_2}$ dans la base $b_3 = (\vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_{0,3}})$:

$$\vec{O_3G_1} = r \cos \Phi_1 \vec{x_3} + r \sin \Phi_1 \vec{x_3} + h \vec{z_{0,3}} \quad \vec{O_3G_2} = r \cos \Phi_2 \vec{x_3} + r \sin \Phi_2 \vec{x_3} - h \vec{z_{0,3}}$$

- $\vec{O_3G} \vec{x_3} = 0$ donne : $r(m_1 \cos \Phi_1 + m_2 \cos \Phi_1) = 0$.
- $\vec{O_3G} \vec{y_3} = 0$ donne : $m_3 b + r(m_1 \sin \Phi_1 + m_2 \sin \Phi_1) = 0$.

Traduire la relation donnée par l'équilibrage dynamique.

- L'opérateur d'inertie de E en O_3 doit avoir la direction $(O_3, \vec{z_{0,3}})$ comme principale d'inertie d'où $D = E = 0$.
- On obtient alors une relation avec l'expression de D : $D = D_3 + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = D_3 + m_1 r \sin \Phi_1 h - m_2 r \sin \Phi_2 h$.
- On obtient alors une relation avec l'expression de E : $E = E_3 + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = E_3 + m_1 r \cos \Phi_1 h - m_2 r \cos \Phi_2 h$.

4.2 Équations de détermination de l'équilibrage

Définition — Équations de détermination de l'équilibrage. En notant,

- x_i, y_i et z_i (i allant de 1 à 2) les coordonnées des deux masselottes dans le repère $(O; \vec{x_s}, \vec{y_s}, \vec{z_s})$ lié à un solide S ,
- r_s la distance entre le centre d'inertie de S par rapport à $(O, \vec{z_s})$,
- D_s, E_s et E_s les produits d'inertie du solide S dans la base $b_s = (\vec{x_s}, \vec{y_s}, \vec{z_s})$

L'écriture des condition d'équilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe $(O, \vec{z_s})$ donne :

Centre d'inertie G sur l'axe de rotation	Axe de rotation $(O, \vec{z_s})$ axe principal d'inertie du solide S
$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$	$D = D_s + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2$
$m_3 r_s + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$	$E = E_s + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2$

4.3 Mise en oeuvre : machine d'équilibrage industriel

Propriété — Mise en œuvre de l'équilibrage dynamique.

D'après l'étude précédente, on obtient 4 équations avec 8 inconnues ($m_1, m_2, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2$ et z_2). Il faut donc imposer 4 variables. Généralement pour des raisons pratiques comme dans l'exemple précédent, on impose z_1 et z_2 puis on impose une relation entre x_1 et y_1 puis entre x_2 et y_2 cela revient à fixer une distance entre les masses additionnelles et l'axe de rotation. Dans la pratique on utilise une équilibreuse qui mesure les efforts au niveau des paliers et qui en déduit les variables citées précédemment pour obtenir les conditions d'équilibrage.

