

Application 01



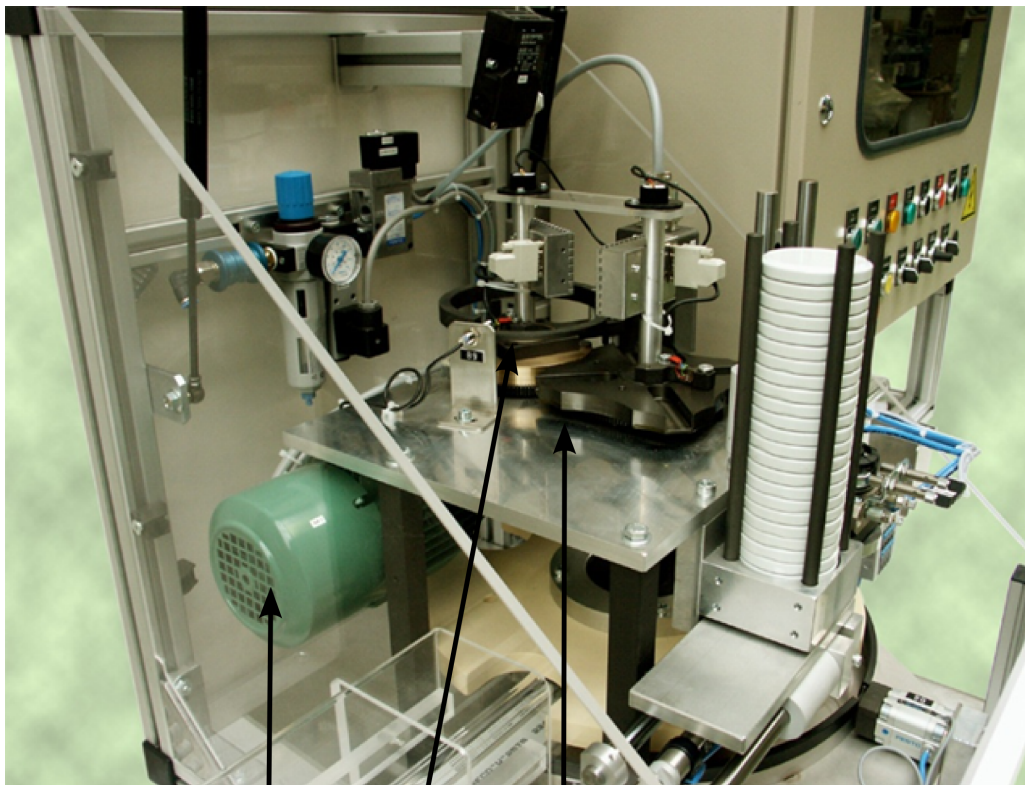
Capsuleuse de bocaux

Xavier Pessoles

*Savoirs et compétences :***Mise en situation**

Le conditionnement de nombreux produits alimentaires est réalisé dans des bocaux en verre fermés par des capsules vissées. La société RAVOUX, spécialisée dans le conditionnement, a créé ce prototype afin d'optimiser ses machines de production. Elle est donc équipée de nombreux capteurs permettant, via un ordinateur, d'optimiser les paramètres de production tels que qualité totale, production maximale, ...

Le système de laboratoire proposé s'insère dans une chaîne de conditionnement de produits alimentaires, entre l'unité de remplissage des bocaux et le poste d'étiquetage. Sa fonction principale est la «fermeture étanche de bocaux préalablement remplis de produits alimentaires»



Motoréducteur

Maneton

Croix de Malte

On s'intéresse ici au système de croix de Malte. Il permet d'obtenir une rotation discontinue à partir d'un mouvement de rotation continue. Ainsi, pendant que la croix de Malte ne tourne pas, le système peut agir sur la matière d'œuvre (flacon).

Lors de la rotation de la croix de Malte, la capsuleuse déplace deux flacons. Afin d'accroître la productivité, il faut diminuer la durée de cette phase. Cependant, si la croix de Malte tourne trop vite, les flacons basculent ce

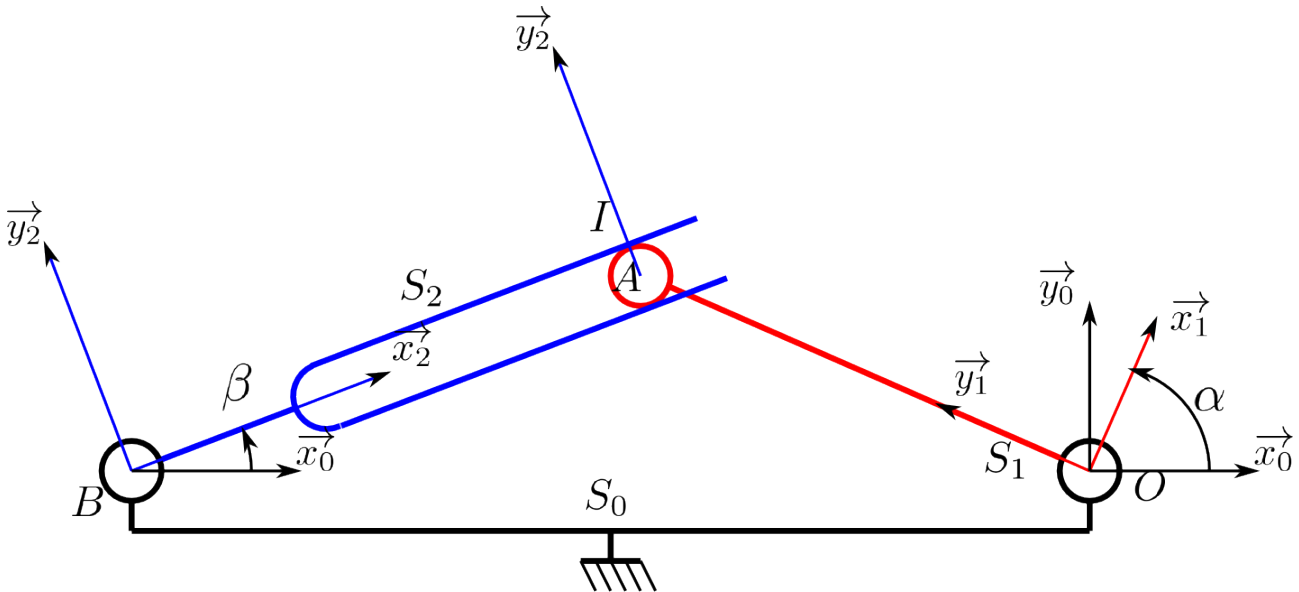
qui entraîne un mauvais fonctionnement du système. Ainsi, on désire que la **vitesse de la croix soit inférieure à 50 tours/minute**.

Modélisation sans galet

Afin de modéliser le système à croix de malte, on propose le schéma cinématique ci-contre.

On note :

- $\mathcal{R} = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au bâti S_0 . On note $\vec{OB} = -L\vec{x}_0$ avec $L = 145$ mm ;
- $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère lié à l'arbre S_1 . On pose $\vec{OA} = R\vec{y}_1$ avec $R = 141$ mm et $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. L'arbre S_1 est lié au motoréducteur de la capsuleuse. On a : $\dot{\alpha} = 10$ tr/min ;
- $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère lié à l'arbre S_2 . On pose $\vec{BA} = \lambda(t)\vec{x}_2$, $\vec{AI} = r\vec{y}_2$ et $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$;



Question 1 Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

Correction

Question 2 Établir la loi entrée/sortie du système.

Correction On a :

$$\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0} \Leftrightarrow R\vec{y}_1 - \lambda(t)\vec{x}_2 + L\vec{x}_0 = \vec{0}$$

En projetant sur \vec{x}_0 et \vec{y}_0 on a :

$$\begin{cases} -R \sin \alpha(t) - \lambda(t) \cos \beta(t) + L = 0 \\ R \cos \alpha(t) - \lambda(t) \sin \beta(t) = 0 \end{cases}$$

Suivant le cas, on peut donc avoir α en fonction de β ou λ en fonction de α ou β :

$$\tan \beta = \frac{R \cos \alpha}{L - R \sin \alpha}$$

$$\lambda(t)^2 = R^2 + L^2 - 2RL \sin \alpha$$

Question 3 Donner une méthode permettant de valider la cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

Correction On peut calculer :

$$\dot{\beta} = \frac{R^2 \dot{\alpha} - LR \dot{\alpha} \sin \alpha}{L^2 - 2RL \sin \alpha + R^2}$$

Le tracé Excel permet de valider que la vitesse de rotation de la croix de Malte reste inférieure à 50 tours par minute.

Question 4 Donner l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$.

Correction

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(O, S_1/S_0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = \vec{IO} \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_I \\ \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} &= (-R \vec{y}_1 - r \vec{y}_2) \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 = -R \dot{\alpha} \vec{x}_1 - r \dot{\alpha} \vec{x}_2 \\ \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = -R \dot{\alpha} \vec{x}_1 - r \dot{\alpha} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I \end{aligned}$$

Question 5 Donner l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$.

Correction

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(B, S_2/S_0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} = \vec{IB} \wedge \dot{\beta} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_I \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} &= (-\lambda(t) \vec{x}_2 - r \vec{y}_2) \wedge \dot{\beta} \vec{z}_0 = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r \dot{\beta} \vec{x}_2 \\ \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r \dot{\beta} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I \end{aligned}$$

Question 6 En déduire l'expression de $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$ dans la base \mathcal{R}_2 . On donne $\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2$.

Correction D'après la composition du torseur cinématique on a :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} + \{\mathcal{V}(S_0/S_1)\} \iff \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} - \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

On a donc :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} - \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} - \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r \dot{\beta} \vec{x}_2 + R \dot{\alpha} \vec{x}_1 + r \dot{\alpha} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I$$

$$\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2$$

D'où :

$$\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r \dot{\beta} \vec{x}_2 + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + R \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2 + r \dot{\alpha} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha} \\ \lambda(t) \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

Question 7 D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide S_1 par rapport à S_2 ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.

Correction Nécessairement, la vitesse de glissement appartient au plan tangent au contact. On a donc :

$$\begin{cases} -r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha} = \dot{\lambda} \\ \lambda(t) \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) = 0 \end{cases}$$

Question 8 $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} \cdot \vec{x}_2$ est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse ? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse ? Si oui, comment ? Si non, proposez une modification du

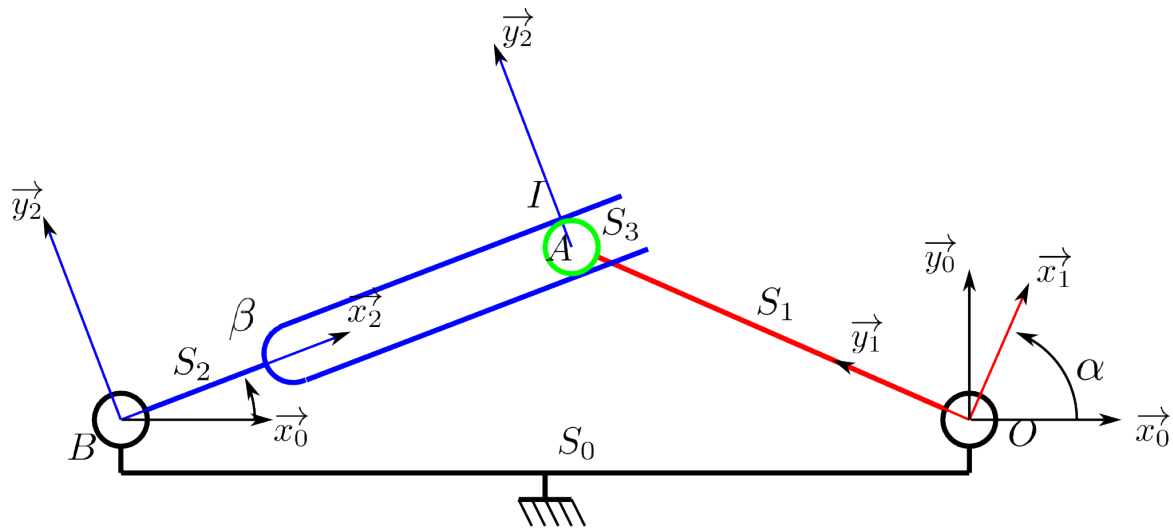
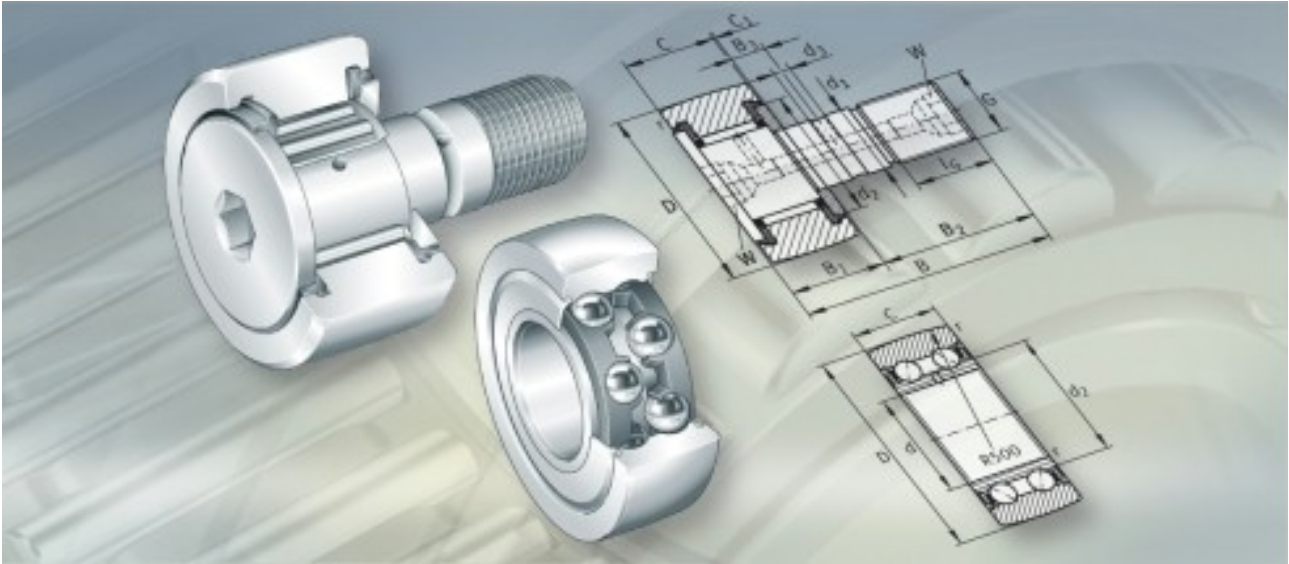
système permettant la prise en compte de ce problème.

Correction Cette vitesse de glissement provoque le frottement du doigt sur la croix de Malte. Ce frottement entraînant de l'usure, la capsuleuse de bouchons est équipée d'un galet.

Modélisation avec galet

On considère maintenant l'existence d'un galet S_3 en bout de de l'arbre S_1 . On fait l'hypothèse que le galet roule sans glisser dans le S_2 . S_3 et S_1 sont en liaison pivot d'axe \vec{z}_0 et de centre A .

Le galet a un diamètre extérieur de 16 mm. D'après la documentation constructeur, la vitesse de rotation du galet ne doit pas dépasser les 5000 tr/min.



Question 9 Quelle est la modification sur le paramétrage du système?

Correction Un angle γ correspondant à la rotation du galet sur lui même apparaît.

Question 10 Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement** sans glissement?

Correction La vitesse est nulle entre le galet et la croix de Malte est nulle au point I :

$$\vec{V}(I, S_3/S_2) = \vec{0}$$

Question 11 Calculer la vitesse de rotation du galet $\dot{\gamma}$ en commençant par exprimer $\vec{V}(I, S_3/S_2)$? Indice : décomposer $\vec{V}(I, S_3/S_2)$ en fonction des mouvements connus.

Correction Malgré l'introduction d'un nouveau composant, la position du point I reste inchangée.
Il faut identifier le torseur $\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\}$. Pour cela, la composition des vitesses donne :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \{\mathcal{V}(S_3/S_1)\} + \{\mathcal{V}(S_1/S_2)\}$$

Au point I on connaît déjà $\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\}$.
Calculons $\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\}$:

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_1)} = \dot{\gamma} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(A, S_3/S_1)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_1)} = \dot{\gamma} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_3/S_1)} = \vec{IA} \wedge \dot{\gamma} \vec{z}_0 = -r \vec{y}_2 \wedge \dot{\gamma} \vec{z}_0 = -r \dot{\gamma} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} &= \overrightarrow{V(I, S_3/S_1)} + \overrightarrow{V(I, S_1/S_2)} \\ \overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} &= -r \dot{\gamma} \vec{x}_2 + (-r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha}) \vec{x}_2 - (\lambda(t) \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)) \vec{y}_2 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} = \begin{bmatrix} -r \dot{\gamma} + (-r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha}) \\ -(\lambda(t) \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

D'après l'hypothèse de roulement sans glissement, on a :

$$\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} = \vec{0} \Rightarrow \dot{\gamma} = -\frac{-r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha}}{r}$$

Question 12 Valider le choix du galet.

Correction

$$\dot{\gamma} = -\frac{-r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha}}{r}$$