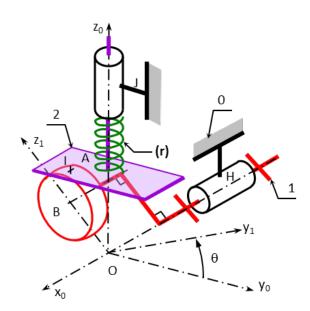
# **Application 2**

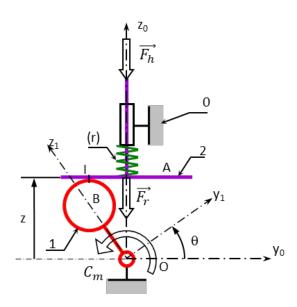
## Application – Pompe à plateau

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.





L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \overrightarrow{x_0})$  horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \overrightarrow{z_0})$  avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

### **Paramétrage**

Le repère  $(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$  lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère  $(O; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overleftarrow{z_1})$  est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus:

- $(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_1}) = \theta$ ;
- $\overrightarrow{OB} = e \overrightarrow{z_1}$ ;  $\overrightarrow{BI} = R \overrightarrow{z_0}$ ;  $\overrightarrow{OA} = z \overrightarrow{z_0}$ .

1

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie  $I_1$  par rapport à l'axe  $(O, \overrightarrow{x_0})$ . Le piston (2) possède une masse  $m_2$ . Le ressort (**r**), de raideur k, est toujours comprimé. Pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , l'effort de compression est égal à

 $\overrightarrow{F_0} = -\overrightarrow{F_0} \, \overrightarrow{z_0}$ . Un moteur exerce un couple connu de moment  $\overrightarrow{C_m} = C_m \overrightarrow{x_0}$  sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe  $(O, \overrightarrow{z_0})$  et de résultante  $\overrightarrow{F_h} = -F_h \overrightarrow{z_0}$ .

Question 1 Déterminer la loi entrée-sortie du mécanisme (z (altitude du point A) en fonction de  $\theta$ ). Dériver la relation deux fois pour avoir une relation entre l'accélération angulaire et l'accélération linéaire.

Question 2 Après avoir isolé le solide 1, appliquer le théorème du moment dynamique en O en projection sur

**Question** 3 Après avoir isolé le solide 2, appliquer le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\overrightarrow{z_0}$ .

4 Déterminer l'équation différentielle du mouvement, relative au paramètre  $\theta$  (relation liant  $\theta$ , ses dérivées et les différentes actions mécaniques extérieures).

**Question** 5 En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.



#### Fermeture géométrique.

On a:  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$ .

En projection sur  $\overrightarrow{z_0}$ :  $e\cos\theta + R = z$ . Par dérivation successive, on  $a: -e\dot{\theta}\sin\theta = \dot{z}$  et  $-e\ddot{\theta}\sin\theta - e\dot{\theta}^2\cos\theta = \ddot{z}$ . **On isole le solide (1).** 

On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot:  $\{\mathcal{T}(0 \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01}\overrightarrow{x_0} + Y_{01}\overrightarrow{y_0} + Z_{01}\overrightarrow{z_0} \\ M_{01}\overrightarrow{y_0} + N_{01}\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} Y_{01}\overrightarrow{y_0} + Z_{01}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O.$
- Liaison ponctuelle :  $\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} Y_{21} \overrightarrow{y_0} + Z_{21} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_I$ . On a  $Z_{21} < 0$ ,  $Y_{21} > 0$  et à la limite du glissement,  $Y_{21} = \frac{-fZ_{21}}{\mathcal{M}(0,2 \to 1)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(I,2 \to 1)} + \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{R(2 \to 1)} = \left(e\overrightarrow{z_1} + R\overrightarrow{z_0}\right) \wedge \left(Y_{21} \overrightarrow{y_0} + Z_{21} \overrightarrow{z_0}\right) = -eY_{21} \cos\theta \overrightarrow{x_0} eZ_{21} \sin\theta \overrightarrow{x_0} RY_{21} \overrightarrow{x_0} = -((e\cos\theta + R)Y_{21} + eZ_{21}\sin\theta)\overrightarrow{x_0}$ .
- Couple moteur:  $\{\mathscr{T}(\text{Moteur} \to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{x_0} \end{array}\right\}_{Q}$ .

Calcul de  $\overrightarrow{\delta}(O, 1/0) \cdot \overrightarrow{x_0}$ .

O est un point fixe et  $I_1$  moment d'inertie par rapport à  $(O, \overrightarrow{x_0})$  on a donc :  $\overline{\delta(O, 1/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = \begin{bmatrix} d\overline{\sigma(O, 1/0)} \\ dt \end{bmatrix}$   $\overrightarrow{x_0} = \begin{bmatrix} d\overline{\sigma(O, 1/0)} \\ dt \end{bmatrix}$ 

$$\left[\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}\sigma(O,1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}I_O(1)}\overrightarrow{\Omega(1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}I_1}\dot{\theta}\overrightarrow{x_0}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = I_1\ddot{\theta}.$$

Application du théorème du moment dynamique en projection sur  $\overrightarrow{x_0}$ .

$$C_m - ((e\cos\theta + R)Y_{21} + eZ_{21}\sin\theta) = I_1\ddot{\theta}.$$

#### On isole le solide (2).

On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot glissant :  $\{\mathcal{T}(0 \to 2)\} = \begin{cases} Y_{02} \overrightarrow{y_0} \\ L_{02} \overrightarrow{x_0} \end{cases}_{0}$
- Liaison ponctuelle:  $\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = -\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} -Y_{21}\overrightarrow{y_0} Z_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_I$ .
- Ressort:  $\{\mathcal{T}(\text{Ressort} \to 2)\} = \left\{\begin{array}{c} -F_0 kz\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A$ .
- Pesanteur :  $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \to 2)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_2 g \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A$
- Fluide:  $\{\mathcal{T}(\text{Fluide} \to 2)\} = \left\{\begin{array}{c} -F_h \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A$ .

Calcul de  $\overline{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}$ .

$$\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{z_0} = m_2 \ddot{z}$$

Application du théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\overrightarrow{z_0}$ .

$$-F_h - Z_{21} - F_0 - kz - m_2 g = m_2 \ddot{z}.$$

Bilan:

$$C_m - ((e\cos\theta + R)Y_{21} + e(-F_h - F_0 - kz - m_2g - m_2\ddot{z})\sin\theta) = I_1\ddot{\theta}.$$

On a alors:

$$C_m - \left( (e\cos\theta + R) Y_{21} - e\left(F_h + F_0 + k(e\cos\theta + R) + m_2 g - e m_2\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \right) \sin\theta \right) = I_1 \ddot{\theta}.$$

Bilan sans frottement:

$$C_m + e\left(F_h + F_0 + k\left(e\cos\theta + R\right) + m_2g - e\,m_2\sin\theta\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\right) = I_1\ddot{\theta}.$$