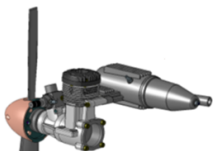


Application 02



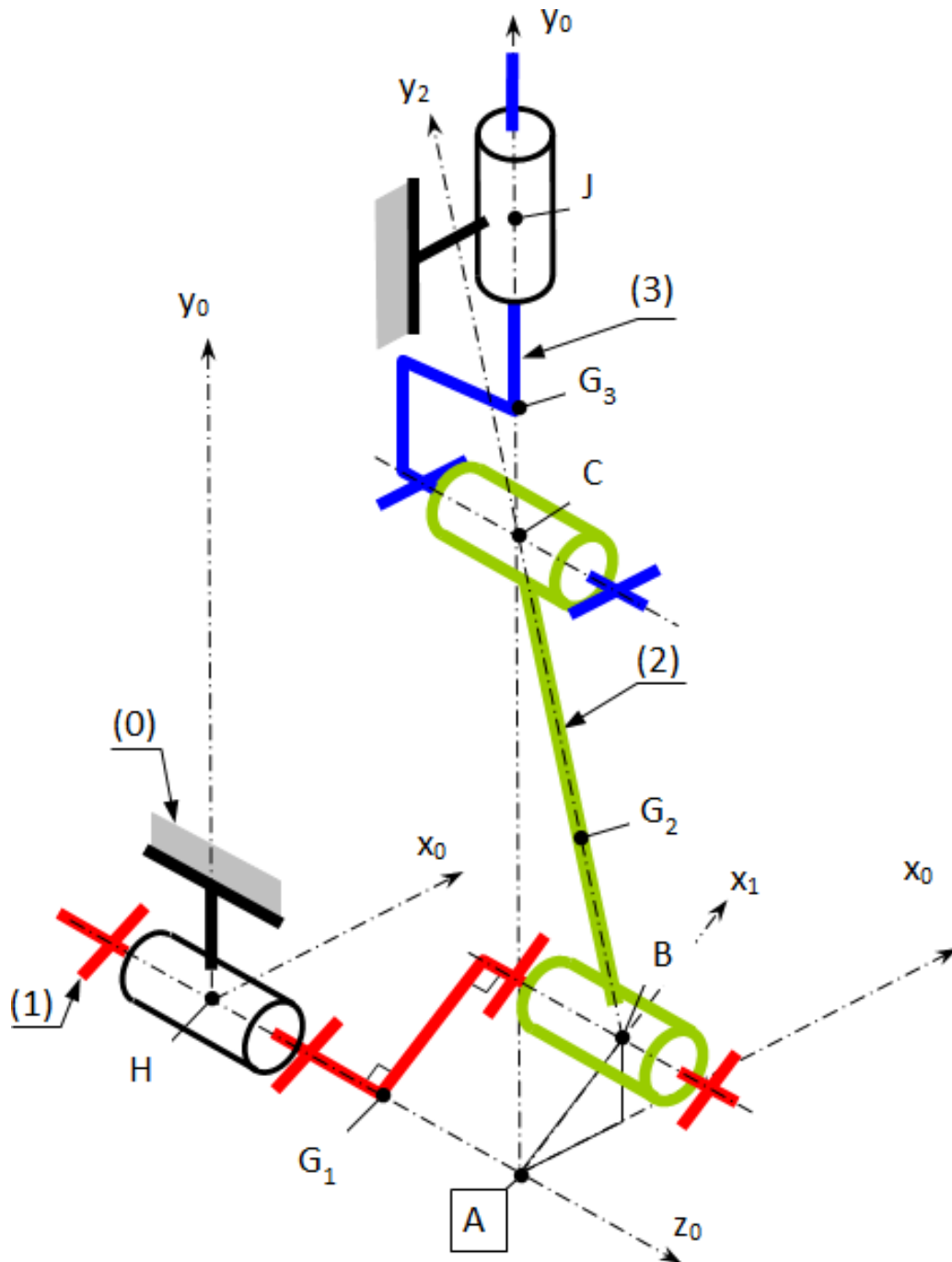
Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme

Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

Mise en situation

Les figures et le schéma ci-dessous représentent un micromoteur à combustion interne de modèle réduit. Du point de vue cinématique, il est basé sur un système bielle manivelle (**2,1**), associé à un piston (**3**), animé d'un mouvement de translation rectiligne alternatif.



On note :

- $\overrightarrow{AB} = e \vec{x}_1$, $\overrightarrow{BC} = L_2 \vec{y}_2$, $\overrightarrow{AC} = \lambda_3 \vec{y}_0$;
- $\overrightarrow{HG_1} = a_1 \vec{x}_1$, $\overrightarrow{BG_2} = a_2 \vec{y}_2$, $\overrightarrow{CG_3} = a_3 \vec{y}_0$;
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$, $(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_2$; $\omega_{10} = \dot{\theta}_1$ et $\omega_{20} = \dot{\theta}_2$.

On note C_m le couple délivré par le moteur et F_e la force exercée sur le piston suite à l'explosion du mélange air-carburant. On néglige les effets de la pesanteur.

Question 1 Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin (1) et la vitesse du piston (3), notée $V_{3/0}$. Déterminer la vitesse et l'accélération du centre d'inertie de la bielle (2) par rapport à (0).

Correction On réalise une fermeture géométrique dans le triangle ABC et on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow e \vec{x}_1 + L_2 \vec{x}_2 - \lambda_3 \vec{y}_0 \Leftrightarrow e (\cos \theta_1 \vec{x}_0 + \sin \theta_1 \vec{y}_0) + L_2 (\cos \theta_2 \vec{x}_0 + \sin \theta_2 \vec{y}_0) - \lambda_3 \vec{y}_0 = \vec{0}$. On a donc :

$$\begin{cases} e \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 = 0 \\ e \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \cos \theta_2 = -e \cos \theta_1 \\ L_2 \sin \theta_2 = \lambda_3 - e \sin \theta_1 \end{cases} \quad \text{Au final, } L_2^2 = e^2 \cos^2 \theta_1 + (\lambda_3 - e \sin \theta_1)^2 \Leftrightarrow L_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1 = (\lambda_3 - e \sin \theta_1)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{L_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1} = \lambda_3 - e \sin \theta_1 \Rightarrow \lambda_3 = \sqrt{L_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1} + e \sin \theta_1.$$

Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

On note $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(H; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$ la matrice d'inertie en H de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré

(1).

Question 2 En considérant que seul le plan $(H, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.

Correction On a donc une invariance suivant \vec{y}_1 et $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(H; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

Question 3 Reprendre la question précédente en l'appliquant à la bielle (2) et au piston (3). Définir la forme de la matrice d'inertie de chacune de ces deux pièces, en précisant en quel point et dans quelle base elle est définie.

Correction De même $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & -E_2 \\ 0 & B_2 & 0 \\ -E_2 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(G_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$ et $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & -E_2 \\ 0 & B_2 & 0 \\ -E_2 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(G_3; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$.

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie sont diagonales.

Question 4 On note m_1 , m_2 et m_3 les masses des trois pièces mobiles (1), (2) et (3). Exprimer, pour chacune d'elles : son tenseur cinétique et son tenseur dynamique.

Correction H est un point fixe :

$$\begin{aligned} \bullet \{ \mathcal{C}(1/0) \} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(1/0)} = m_1 \overrightarrow{V(G_1 \in 1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(H, 1/0)} = I_H(1) \overrightarrow{\Omega(1/0)} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_H \\ \bullet \{ \mathcal{D}(1/0) \} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1 \in 1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(H, 1/0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\delta(H, 1/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_H \end{aligned}$$

G_3 est le centre de gravité de 3. Le solide 3 est en translation par rapport à 0.

$$\begin{aligned} \bullet \{ \mathcal{C}(3/0) \} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(3/0)} = m_3 \overrightarrow{V(G_3 \in 3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3 \dot{\lambda}_3 \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3} \\ \bullet \{ \mathcal{D}(3/0) \} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(3/0)} = m_3 \overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_3, 1/0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_3, 3/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3 \ddot{\lambda}_3 \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3} \end{aligned}$$

G_2 est le centre de gravité de 2.

$$\begin{aligned} \bullet \{ \mathcal{C}(2/0) \} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(2/0)} = m_2 \overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_2, 2/0)} = I_{G_2}(2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (\dot{\lambda}_3 \vec{y}_0 + a_2 \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \\ C_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{G_2} \\ \bullet \{ \mathcal{D}(2/0) \} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2, 2/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (\ddot{\lambda}_3 \vec{y}_0 + a_2 \ddot{\theta}_2 \vec{x}_2 + a_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{y}_2) \\ C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{G_2} \end{aligned}$$

Détail des calculs.

Calcul de $\overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)} &= \overrightarrow{V(G_2 \in 2/3)} + \overrightarrow{V(G_2 \in 3/0)} \\ \overrightarrow{V(G_2 \in 2/3)} &= \overrightarrow{V(C \in 2/3)} + \overrightarrow{G_2 C} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/3)} = \vec{0} + a_2 \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 = a_2 \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 \quad \overrightarrow{V(G_2 \in 3/0)} = \dot{\lambda}_3 \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)} = \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}.$$

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} = \ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}.$$

Question 5 Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.

Correction

- On isole (1).

- Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).

- Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison). Par ailleurs, $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)}) \cdot \overrightarrow{z_0} = (e \overrightarrow{x_1} \wedge (X_{21} \overrightarrow{x_2} + Y_{21} \overrightarrow{y_2})) \cdot \overrightarrow{z_0} = (e X_{21} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} + e Y_{21} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2}) \cdot \overrightarrow{z_0} = e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1)$

- Couple moteur : $\{\mathcal{T}(0_m \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_A$.

- On applique le TMD en A en projection suivant $\overrightarrow{z'}$:

$$e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1) + C_m = C_1 \ddot{\theta}_1$$

- On isole (2).

- Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).

- Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 3)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_C$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).

- On applique le TMD en C en projection sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$-\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z'} = \overrightarrow{\delta(C, 2/0)} \cdot \overrightarrow{z'} \iff L_2 \overrightarrow{y_2} \wedge (X_{21} \overrightarrow{x_2} + Y_{21} \overrightarrow{y_2}) \cdot \overrightarrow{z'} = (\overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} + \overrightarrow{CG_2} \wedge m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}) \cdot \overrightarrow{z'}$$

$$\implies -L_2 X_{21} = C_2 \ddot{\theta}_2 (-a_2 \overrightarrow{y_2} \wedge (m_2 (\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}))) \cdot \overrightarrow{z'}$$

$$\implies -L_2 X_{21} = C_2 \ddot{\theta}_2 + a_2 m_2 (\ddot{\lambda}_3 \sin \theta_2 - a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2})$$

- On isole (2+3).

- Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Liaison glissière : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{y_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).

- Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).

- Force explosion : $\{\mathcal{T}(0_e \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_y \overrightarrow{y} + F_z \overrightarrow{z} \\ C_{exp} \end{array} \right\}_C$.

- On applique le TRD en projection sur $\overrightarrow{y_0}$:

$$F_y - Y_{21} = m_3 \ddot{\lambda}_3 + (m_2 (\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2})) \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$\iff F_y - Y_{21} = m_3 \ddot{\lambda}_3 + (m_2 (\ddot{\lambda}_3 + a_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + a_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2))$$

