Colle 02

Disque non équilibré

Équipe PT – PT⋆ La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

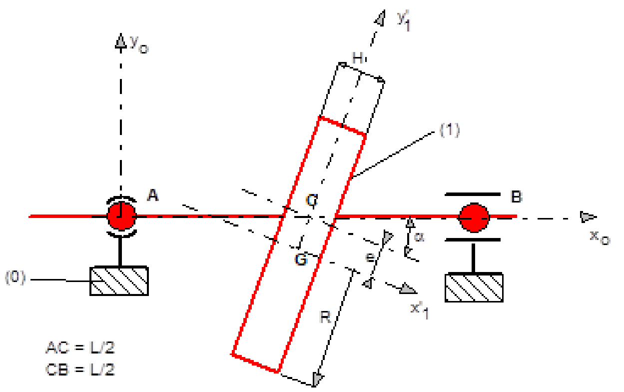
Soit le rotor **(1)** défini ci-dessous. Il est constitué d'un arbre de masse négligeable en liaison pivot par rapport à un bâti **(0)**. Sur cet arbre est monté, en liaison complète, un disque de masse M, de rayon R et d'épaisseur H. Le repère $\mathscr{R}'_1 = \left(G; \overrightarrow{x'_1}, \overrightarrow{y'_1}, \overrightarrow{z'_1}\right)$ est attaché à ce solide.

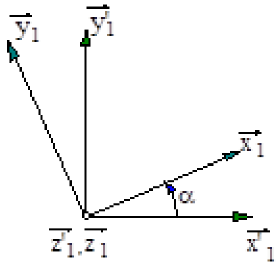
La base $\mathscr{B}'_1 = \left(\overrightarrow{x'_1}, \overrightarrow{y'_1}, \overrightarrow{z'_1}\right)$ se déduit de $\mathscr{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ par une rotation d'angle α autour de $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z'_1}$.

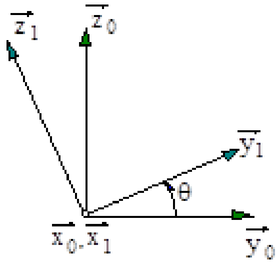
La base $\mathscr{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ se déduit de $\mathscr{B}_0 = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ par une rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0}$.

Le montage de ce disque présente deux défauts :

- un défaut de perpendicularité caractérisé par l'angle α ;
- un défaut d'excentricité représenté par la cote e.







Question 1 *Déterminer la forme de la matrice d'inertie dy cylindre en C dans la base $\mathscr{B}'_1$.*

Question 2 *Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de* **(1)** *dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$.*

Question 3 *Appliquer le PFD pour déterminer les inconnues de liaison.*

CORRIGE

Q1- Déterminer l'expression littérale de la matrice d'inertie de (1) au point C dans la base B'_1. Dans ce qui suit garder la matrice sous la forme générique (A, B, C, ...)

Matrice d'inertie de (1) dans la base B'1

On sait que : $\tilde{\tilde{I}}(G,1) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} \end{bmatrix}_{B'_1}$

Transfert au point C : $\overrightarrow{CG} = -e\ \vec{y'}_1$

$$\tilde{\tilde{I}}(C,1) = \tilde{\tilde{I}}(G,1) + m \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}_{B'_1}$$

Ainsi : $\tilde{\tilde{I}}(C,1) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{2}+e^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2+12e^2) \end{bmatrix}_{B'_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1}$

Q2- Déterminer les éléments de réduction en C du torseur cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{C\ (1/R_0)\} = \left\{ \begin{matrix} m\ \vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}\ (C,1/R_0) \end{matrix} \right\}_C$$

Résultante cinétique : $m\ \vec{V}(G/R_0) = -\ m\ e\ \dot{\theta}\ \cos\alpha\ \vec{z}_1$

Moment cinétique : $\vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\ c\alpha \\ \dot{\theta}\ s\alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{B'_1} = \dot{\theta}\ (A\ c\alpha\ \vec{x'}_1 + B\ s\alpha\ \vec{y'}_1)$

Or : $\vec{x'}_1 = c\alpha\ \vec{x}_1 - s\alpha\ \vec{y}_1$ et $\vec{y'}_1 = c\alpha\ \vec{y}_1 + s\alpha\ \vec{x}_1$

$$\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = \dot{\theta}\ \{\,(A\,c^2\alpha + B s^2\alpha)\,\vec{x}_1 + (B-A)\ s\alpha\ c\alpha\ \vec{y}_1\} = \dot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1)$$

$$\boxed{\{C\,(1/R_0)\} = {}_C\left\{\begin{array}{l} m\,\overrightarrow{V}\,(G/R_0) = -\,m\,e\,\dot{\theta}\ \cos\alpha\ \vec{z}_1 \\ \vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = \dot{\theta}\ \{\,(A\,c^2\alpha + B s^2\alpha)\,\vec{x}_1 + (B-A)\ s\alpha\ c\alpha\ \vec{y}_1\} = \dot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1) \end{array}\right\}}$$

Q3- Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{D\,(1/R_0)\} = {}_C\left\{\begin{array}{l} M\,\overrightarrow{\Gamma}\,(G/R_0) \\ \vec{\delta}\,(C,1/R_0) \end{array}\right\}$$

Résultante dynamique : $M\,\overrightarrow{\Gamma}\,(G/R_0) = -\,m\,e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\ \vec{y}_1)$

Moment dynamique : C est un point fixe, donc : $\vec{\delta}\,(C,1/R_0) = \dfrac{d\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0)}{dt/R_0}$

$$\vec{\delta}\,(C,1/R_0) = \frac{d\,\{\dot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1)\}}{dt/R_0} = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z}_1$$

Car $\dfrac{d\ \vec{y}_1}{dt/R_0} = \dfrac{d\ \vec{y}_1}{dt/R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{y}_1 = \dot{\theta}\ \vec{x}_1\wedge\vec{y}_1 = \dot{\theta}\ \vec{z}_1$

$$\boxed{\{D\,(1/R_0)\} = {}_C\left\{\begin{array}{l} M\,\overrightarrow{\Gamma}\,(G/R_0) = -\,m\,e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\ \vec{y}_1) \\ \vec{\delta}\,(C,1/R_0) = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z}_1 \end{array}\right\}}$$

Calculons :

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{\delta}\,(C,1/R_0) + \overrightarrow{AC}\wedge m\vec{\Gamma}(G,1/R_0)$$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z}_1 + \overrightarrow{AC}\wedge(-\,m\,e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\ \vec{y}_1)$$

Or : $\overrightarrow{AC} = \dfrac{L}{2}\ \vec{x}_1$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x}_1 + B'\vec{y}_1) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z}_1 + m\,e\ \cos\alpha\ \frac{L}{2}\ (\ddot{\theta}\ \vec{y}_1 + \dot{\theta}^2\ \vec{z}_1)$$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{x}_1(A'\ddot{\theta}) + \vec{y}_1\ (B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\ )\ddot{\theta}\ + \vec{z}_1(B' + m\,e\ \frac{L}{2}\cos\alpha)\ \dot{\theta}^2$$

Cycle 04

$$\left\{D\,(1/R_0)\right\} = \begin{Bmatrix} M\,\overrightarrow{\Gamma}\,(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\ \ (\ddot{\theta}\ \vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\ \vec{y}_1) \\ \vec{\delta}\ (A,1/R_0) = \vec{x}_1(A'\ddot{\theta}) + \ \vec{y}_1\ \left(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\ \right)\ddot{\theta}\ +\ \vec{z}_1\left(B' + m\,e\ \frac{L}{2}\cos\alpha\right)\ \dot{\theta}^2 \end{Bmatrix}_A$$

Q4- Déterminer l'énergie cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

C étant fixe dans R_0 : $2\,T(S/R_0) = \ \vec{\Omega}(S/R_0).\,[\bar{\bar{I}}(C,S)\ \vec{\Omega}(S/R_0)]$

$$2\,T(S/R_0) = \ \vec{\Omega}(S/R_0)\ .\ \vec{\sigma}(C,S/R_0)$$

$$2\,T(S/R_0) = \ \vec{\Omega}(S/R_0)\ .\ \vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \ \dot{\theta}\,\vec{x}_1\,.\ \dot{\theta}(A'\,\vec{x}_1 + B'\,\vec{y}_1)$$

$$2\,T(S/R_0) = \ \vec{\Omega}(S/R_0)\ .\ \vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \ A'\ \ \dot{\theta}^2 = (A\ c^2\alpha + Bs^2\alpha)\,\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{2\,T(S/R_0) = \ A'\ \ \dot{\theta}^2 = (A\ c^2\alpha + Bs^2\alpha)\,\dot{\theta}^2}$$

Q5- Les liaisons en A et B sont supposées parfaites. Le rotor tourne à vitesse constante $\dot{\theta}$ = ω. Déterminer les actions de liaison en A et B et le couple moteur nécessaire C_m pour obtenir ce mouvement

On isole 1 et on lui applique le PFD : $\left\{D\,(1/R_0)\right\} = \left\{\bar{1} \rightarrow 1\right\}$

Or : $\left\{D\,(1/R_0)\right\} = \left\{A \rightarrow 1\right\} + \left\{B \rightarrow 1\right\} + \left\{\text{Poids} \rightarrow 1\right\} + \left\{\text{Cm}\right\}$

$$\left\{\bar{1} \rightarrow 1\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} + {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} + {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} + \begin{Bmatrix} 0 & Cm \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$$

On réduit tout en A dans la base B_0 :

LA en B : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R} = L\,\vec{x}_0 \wedge (X_B\,\vec{x}_0 + Y_B\,\vec{y}_0 + Z_B\,\vec{z}_0) = L(Y_B\,\vec{z}_0 - Z_B\,\vec{y}_0)$

Pesanteur : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{R} = (\frac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y'}_1) \wedge\ -\,mg\ \ \vec{y}_0 = -mg\frac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\ \ \vec{y'}_1 \wedge \vec{y}_0$

Or : $\vec{y'}_1 = c\alpha\ \ \vec{y}_1 + s\alpha\ \ \vec{x}_0$ et $\vec{y}_1 = c\theta\ \ \vec{y}_0 + s\theta\ \ \vec{z}_0$

$$\vec{y'}_1 = c\alpha\ (c\theta\ \ \vec{y}_0 + s\theta\ \ \vec{z}_0) + s\alpha\ \ \vec{x}_0 = s\alpha\ \ \vec{x}_0 + c\alpha\ c\theta\ \ \vec{y}_0 + c\alpha\ s\theta\ \ \vec{z}_0$$

$$\vec{y'}_1 \wedge \vec{y}_0 = (s\alpha\ \ \vec{x}_0 + c\alpha\ c\theta\ \ \vec{y}_0 + c\alpha\ s\theta\ \ \vec{z}_0) \wedge \vec{y}_0 = s\alpha\ \ \vec{z}_0 - c\alpha\ s\theta\ \ \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{R} = (\frac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y'}_1) \wedge\ -\,mg\ \ \vec{y}_0 = -mg\frac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\ (s\alpha\ \ \vec{z}_0 - c\alpha\ s\theta\ \ \vec{x}_0)$$

$$\overrightarrow{M_A} = - e\, m\, g\;\; c\alpha\, s\theta\;\; \vec{x}_0 + mg\,(e\, s\alpha - \frac{L}{2})\,\vec{z}_0$$

Résultante dynamique

$$M\,\overrightarrow{\Gamma}\,(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\;\;(\ddot{\theta}\;\;\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\;\;\vec{y}_1)$$

$\vec{y}_1 = c\theta\;\;\vec{y}_0 + s\theta\;\;\vec{z}_0$ et $\vec{z}_1 = c\theta\;\;\vec{z}_0 - s\theta\;\;\vec{y}_0$

$$M\,\overrightarrow{\Gamma}\,(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\;\;\{\ddot{\theta}\;\;(c\theta\;\;\vec{z}_0 - s\theta\;\;\vec{y}_0) - \dot{\theta}^2\,(c\theta\;\;\vec{y}_0 + s\theta\;\;\vec{z}_0)\}$$

$$\boxed{M\,\overrightarrow{\Gamma}\,(G/R_0) = m\,e\,\cos\alpha\;\;\{\;\vec{y}_0(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta)\;-\;\vec{z}_0(\ddot{\theta}\;\;c\theta - \dot{\theta}^2\,s\theta)\}}$$

Moment dynamique :

$$\vec{\delta}\;(A,1/R_0) = \vec{x}_0(A'\ddot{\theta}) + \;\vec{y}_1\;\;(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\;)\ddot{\theta}\;\;+\;\;\vec{z}_1(B' + m\,e\;\frac{L}{2}\cos\alpha)\;\;\dot{\theta}^2$$

$\vec{y}_1 = c\theta\;\;\vec{y}_0 + s\theta\;\;\vec{z}_0$ et $\vec{z}_1 = c\theta\;\;\vec{z}_0 - s\theta\;\;\vec{y}_0$

$$\vec{\delta}\;(A,1/R_0) = \vec{x}_0(A'\ddot{\theta}) + \;(c\theta\;\;\vec{y}_0 + s\theta\;\;\vec{z}_0)\;(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\;)\ddot{\theta}\;\;+\;\;(c\theta\;\;\vec{z}_0 - s\theta\;\;\vec{y}_0)(B' + m\,e\;\frac{L}{2}\cos\alpha)\;\;\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\delta}\;(A,1/R_0) = {} & \vec{x}_0(A'\ddot{\theta})\\ & +\;(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\;)(\ddot{\theta}\;\;c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\;\;\vec{y}_0\\ & +\;(B' + m\,e\;\frac{L}{2}\cos\alpha)\;(c\theta\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\;\;s\theta)\,\vec{z}_0\end{aligned}}$$

En définitive : $\{\bar{1} \rightarrow 1\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc} X_A & Cm - e\,m\,g\;c\alpha\;s\theta \\ Y_A + Y_B - mg & -L\;Z_B \\ Z_A + Z_B & LY_B\;+mg\;(e\;s\alpha - \dfrac{L}{2}) \end{array}\right\}_{B_0}$

$$\{D(1/R_0)\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & A'\ddot{\theta} \\ m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) & (B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\,)(\ddot{\theta}\,c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta) \\ m\,e\,\cos\alpha\,(-\ddot{\theta}\,c\theta + \dot{\theta}^2\,s\theta) & (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\,s\theta) \end{matrix} \right\}_{B_0}^{A}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &X_A = 0 \\ &Y_A + Y_B - mg = m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) \\ &Z_A + Z_B = m\,e\,\cos\alpha\,(-\ddot{\theta}\,c\theta + \dot{\theta}^2\,s\theta) \\ &Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta = A'\ddot{\theta} \\ &Z_B = -\frac{1}{L}\{(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\,)(\ddot{\theta}\,c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\} \\ &Y_B = \frac{1}{L}\{m\,g\,(\frac{L}{2} - e\,s\alpha) + (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\,s\theta)\} \end{aligned}}$$

Si $\dot{\theta} = \omega = cste$

$$\boxed{\begin{aligned} &X_A = 0 \\ &Y_A + Y_B - mg = m\,e\,\cos\alpha\,\omega^2\,c\theta \\ &Z_A + Z_B = m\,e\,\cos\alpha\,\omega^2\,s\theta \\ &Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta = 0 \\ &Z_B = -\frac{1}{L}(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\,)\,\omega^2\,s\theta \\ &Y_B = \frac{1}{L}\{\,m\,g\,(\frac{L}{2} - e\,s\alpha) + (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\omega^2\,c\theta\} \end{aligned}}$$

ZA et ZB sont non nulles. Si tout était équilibré elles seraient nulles
Le mouvement est imposé. La recherche des composantes de liaisons donne lieu à des équations algébriques