

## Application 1 – Corrigé



### Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme \*

Équipe PT La Martinière Monplaisir

#### Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

#### Mise en situation

**Question 1** Exprimer la relation liant la vitesse de rotation  $\omega_{10}$  du vilebrequin (1) et la vitesse du piston (3), notée  $\dot{\lambda} = V_{3/0}$ .

**Correction** On réalise une fermeture géométrique dans le triangle  $ABC$  et on a :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow e \overrightarrow{x_1} + L_2 \overrightarrow{x_2} - \lambda_3 \overrightarrow{y_0} \Leftrightarrow e (\cos \theta_1 \overrightarrow{x_0} + \sin \theta_1 \overrightarrow{y_0}) + L_2 (\cos \theta_2 \overrightarrow{x_0} + \sin \theta_2 \overrightarrow{y_0}) - \lambda_3 \overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0}$ . On a donc : 
$$\begin{cases} e \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 = 0 \\ e \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
  

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \cos \theta_2 = -e \cos \theta_1 \\ L_2 \sin \theta_2 = \lambda_3 - e \sin \theta_1 \end{cases}$$
 Au final,  $L_2^2 = e^2 \cos^2 \theta_1 + (\lambda_3 - e \sin \theta_1)^2 \Leftrightarrow L_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1 = (\lambda_3 - e \sin \theta_1)^2$   

$$\Rightarrow \sqrt{L_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1} = \lambda_3 - e \sin \theta_1 \Rightarrow \lambda_3 = \sqrt{L_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1} + e \sin \theta_1.$$

**Question 2** En considérant que seul le plan  $(H, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z_1})$  est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.

**Correction** On a donc une invariance suivant  $\overrightarrow{y_1}$  et  $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(H; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})}$

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie  $I_A(1)$ ,  $I_{G_2}(2)$  et  $I_{G_3}(3)$  sont diagonales.

**Correction**  $H$  est un point fixe :

$$\begin{aligned} \bullet \{ \sigma(1/0) \} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(1/0)} = m_1 \overrightarrow{V(G_1 \in 1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(H, 1/0)} = I_H(1) \overrightarrow{\Omega(1/0)} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_H \\ \bullet \{ \mathcal{D}(1/0) \} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1 \in 1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(H, 1/0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\delta(H, 1/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_1 \ddot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_H \end{aligned}$$

$G_3$  est le centre de gravité de 3. Le solide 3 est en translation par rapport à 0.

$$\begin{aligned} \bullet \{ \sigma(3/0) \} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(3/0)} = m_3 \overrightarrow{V(G_3 \in 3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3, 3/0)} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3 \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_3} \\ \bullet \{ \mathcal{D}(3/0) \} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(3/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_3, 1/0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_3, 3/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3 \ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_3} \end{aligned}$$

$G_2$  est le centre de gravité de 2.

$$\bullet \{ \sigma(2/0) \} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(2/0)} = m_2 \overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_2, 2/0)} = I_{G_2}(2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (\dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}) \\ C_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\bullet \{ \mathcal{D}(2/0) \} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2, 2/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}) \\ C_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$$

Détail des calculs.

**Calcul de  $\overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)}$ .**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)} &= \overrightarrow{V(G_2 \in 2/3)} + \overrightarrow{V(G_2 \in 3/0)} \\ \overrightarrow{V(G_2 \in 2/3)} &= \overrightarrow{V(C \in 2/3)} + \overrightarrow{G_2 C} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/3)} = \overrightarrow{0} + a_2 \overrightarrow{y_2} \wedge \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} = a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} \quad \overrightarrow{V(G_2 \in 3/0)} = \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)} &= \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}. \end{aligned}$$

**Calcul de  $\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}$ .**

$$\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} = \ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}.$$

**Question 3** Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.

### Correction

- On isole (1).
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison pivot :  $\{ \mathcal{T}(0 \rightarrow 1) \} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_A$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$  (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot :  $\{ \mathcal{T}(2 \rightarrow 1) \} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$  (pas de frottement dans la liaison). Par ailleurs,  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)}) \cdot \overrightarrow{z_0} = (e \overrightarrow{x_1} \wedge (X_{21} \overrightarrow{x_2} + Y_{21} \overrightarrow{y_2})) \cdot \overrightarrow{z_0} = (e X_{21} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} + e Y_{21} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2}) \cdot \overrightarrow{z_0} = e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1)$
  - Couple moteur :  $\{ \mathcal{T}(0_m \rightarrow 1) \} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_A$ .
- On applique le TMD en A en projection suivant  $\overrightarrow{z}$  :

$$e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1) + C_m = C_1 \ddot{\theta}_1$$

- On isole (2).
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison pivot :  $\{ \mathcal{T}(1 \rightarrow 2) \} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$  (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot :  $\{ \mathcal{T}(3 \rightarrow 2) \} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 3)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_C$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$  (pas de frottement dans la liaison).
- On applique le TMD en C en projection sur  $\overrightarrow{z_0}$  :

$$-\overrightarrow{C B} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{\delta(C, 2/0)} \cdot \overrightarrow{z} \iff L_2 \overrightarrow{y_2} \wedge (X_{21} \overrightarrow{x_2} + Y_{21} \overrightarrow{y_2}) \cdot \overrightarrow{z} = (\overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} + \overrightarrow{C G_2} \wedge m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}) \cdot \overrightarrow{z}$$

$$\implies -L_2 X_{21} = C_2 \ddot{\theta}_2 (-a_2 \overrightarrow{y_2} \wedge (m_2 (\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}))) \cdot \overrightarrow{z}$$

$$\implies -L_2 X_{21} = C_2 \ddot{\theta}_2 + a_2 m_2 (\ddot{\lambda}_3 \sin \theta_2 - a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2})$$

- On isole (2+3).
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison glissière :  $\{ \mathcal{T}(0 \rightarrow 3) \} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_A$  avec  $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{y_0} = 0$  (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot :  $\{ \mathcal{T}(1 \rightarrow 2) \} = \left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$  avec  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$  (pas de frottement dans la liaison).

– Force explosion :  $\{\mathcal{T}(0_e \rightarrow 3)\} = \left\{ \frac{F_y \vec{y} + F_z \vec{z}}{C_{exp}} \right\}_C$ .

- On applique le TRD en projection sur  $\vec{y}_0$  :

$$F_y - Y_{21} = m_3 \ddot{\lambda}_3 + (m_2 (\ddot{\lambda}_3 \vec{y}_0 + a_2 \ddot{\theta}_2 \vec{x}_2 + a_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{y}_2)) \cdot \vec{y}_0$$

$$\Leftrightarrow F_y - Y_{21} = m_3 \ddot{\lambda}_3 + (m_2 (\ddot{\lambda}_3 + a_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + a_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2))$$

## Application 1 –

## Corrigé



## Chaîne ouverte – Wheeling moto\*

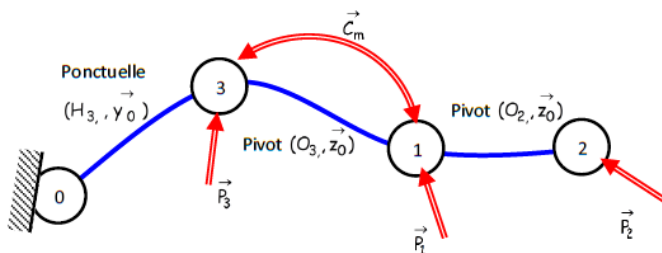
Équipe PT La Martinière Monplaisir

## Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

## Eléments de corrigé

Q1- Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling.  
Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en  $H_3$ .



Si on considère des liaisons parfaites, en particulier en  $H_3$  (liaison sans frottement), l'ensemble modélisé en 2D est isostatique et comporte 4 mobilités :

- déplacement suivant  $\vec{x}_0$  du centre d'inertie  $G_1$  du cadre (1) par rapport au sol : paramètre  $\lambda_1$  ;
- position angulaire du cadre (1) par rapport au sol : paramètre  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  ;
- position angulaire de la roue (3) par rapport au sol : paramètre  $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$  ;
- position angulaire de la roue (2) par rapport au sol : paramètre  $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ .

La propriété de roulement sans glissement en  $H_3$  entre la roue (3) et le sol (0) introduit une relation entre les paramètres de position.

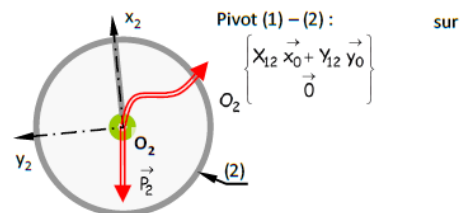
Il y a donc 3 équations du mouvement issues de l'application du principe fondamental de la dynamique.

Q2- En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer le mouvement de l'ensemble :

- élément(s) isolé(s) ;
- théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.

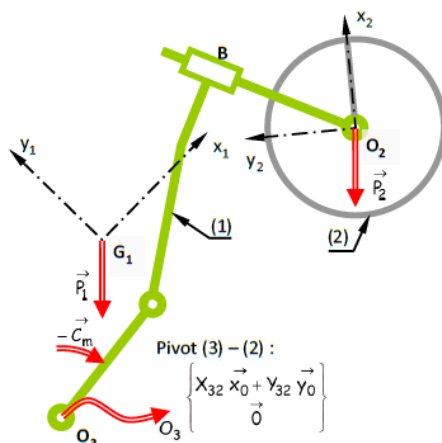
Les trois équations sont obtenues en isolant successivement :

- la roue avant (2) :  
équation du moment dynamique en  $O_2$ , en projection  $\vec{z}_0$ . Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison pivot (1) – (2) ;

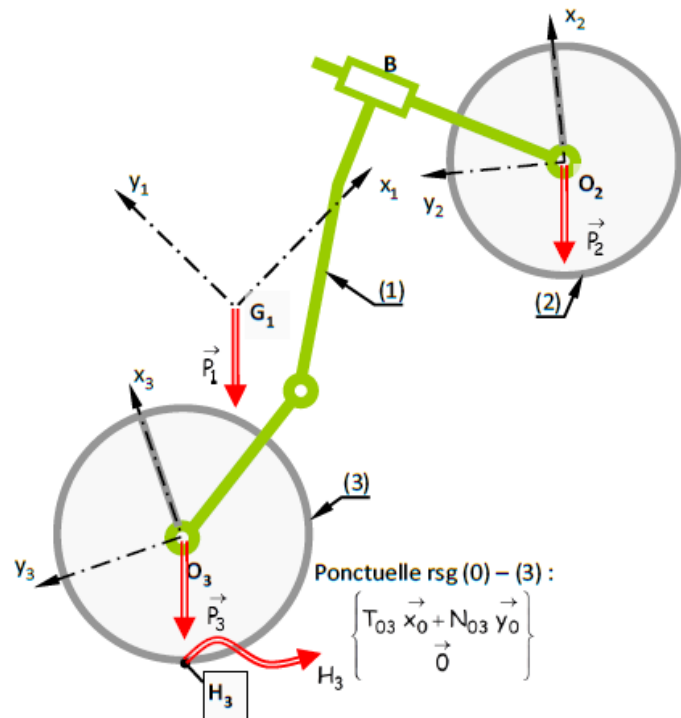


- ensemble {roue avant (2), cadre (1)} :

équation du moment dynamique en  $O_3$ , en projection sur  $\vec{z}_0$ .  
Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison pivot (3) – (1) ;



- ensemble {roue avant (2), cadre (1),  
roue arrière (3)} :  
équation du moment dynamique en  
 $H_3$ , en projection sur  $\vec{z}_0$ .  
Cette équation est la seule à ne faire  
apparaître aucune composante d'effort  
de la liaison ponctuelle avec RsG (0) –  
(3) ;



Q3- Mettre en place les équations  
précédentes.  
Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.

#### EQUATION (1)

Moment cinétique de la roue (2) : il est défini en  $O_2$ , centre d'inertie de la roue (2), point où est supposée définie sa matrice

$$\vec{\sigma}(O_2, 2/0) = \vec{I}(O_2, 2) \otimes \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 = C_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_0$$

$$\text{Moment dynamique : } \vec{\delta}(O_2, 2/0) = \frac{d \vec{\sigma}(O_2, 2/0)}{dt / (0)} = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_0$$

Actions extérieures sur la roue (2) :

- pesanteur : le poids  $\vec{P}_2$  est supposé appliqué en  $O_2$ , donc de moment nul en ce point ;
- la liaison pivot (1) – (2) a un moment nul en  $O_2$ .

$$\text{Soit l'équation (1) : } \boxed{C_2 \ddot{\theta}_2 = 0}$$

#### EQUATION (2)

Moment dynamique de l'ensemble {(1), (2)} : il est défini en  $O_3$ , en faisant la somme des moments dynamiques de (1) et de

$$(2) : \vec{\delta}(O_3, \{1, 2\}/0) = \vec{\delta}(O_3, 1/0) + \vec{\delta}(O_3, 2/0)$$

#### Calcul pour le cadre (1) :

Moment cinétique du cadre (1) : il est défini en  $G_1$ , centre d'inertie du cadre (1), point où est supposée définie sa matrice

$$\vec{\sigma}(G_1, 1/0) = \vec{I}(G_1, 1) \otimes \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 = C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_0$$

$$\text{Moment dynamique : } \vec{\delta}(G_1, 1/0) = \frac{d \vec{\sigma}(G_1, 1/0)}{dt / (0)} = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_0$$

$$\text{Calcul en } O_3 : \vec{\delta}(O_3, 1/0) = \vec{\delta}(G_1, 1/0) + m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) \wedge \vec{G_1 O_3}$$

Calcul de l'accélération  $\vec{\Gamma}(G_1, 1/0)$  : pour ce calcul, il est plus adroit de repérer la position du cadre (1) par rapport au sol (0)

$$\text{en définissant comme paramètre } \lambda_1 : \vec{O O_3} = \lambda_1 \vec{x}_0.$$

Le point O est un point lié au sol, situé à la distance R du plan de contact de la roue avec la chaussée.

$$\vec{OG}_1 = \vec{OO}_3 + \vec{O}_3\vec{G}_1 = \lambda_1 \vec{x}_0 + a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1$$

$$\vec{V}(G_1, 1/0) = \dot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \dot{\theta}_1 (a_1 \vec{y}_1 - b_1 \vec{x}_1)$$

$$\vec{\Gamma}(G_1, 1/0) = \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \ddot{\theta}_1 (a_1 \vec{y}_1 - b_1 \vec{x}_1) - \dot{\theta}_1^2 (a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1)$$

$$\text{Moment dynamique en } O_3 : \quad \vec{\delta}(O_3, 1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_0 + m_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \ddot{\theta}_1 (a_1 \vec{y}_1 - b_1 \vec{x}_1) - \dot{\theta}_1^2 (a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1) \right] \wedge (-a_1 \vec{x}_1 - b_1 \vec{y}_1)$$

$$\vec{\delta}(O_3, 1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_0 - m_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 (a_1 \sin \theta_1 + b_1 \cos \theta_1) - \dot{\theta}_1^2 (a_1^2 + b_1^2) \right] \vec{z}_0$$

#### Calcul pour la roue avant (2) :

$$\vec{\delta}(O_3, 2/0) = \vec{\delta}(O_2, 2/0) + m_2 \vec{\Gamma}(O_2, 2/0) \wedge \vec{O}_2\vec{O}_3$$

Calcul de l'accélération  $\vec{\Gamma}(O_2, 2/0)$

$$\vec{OO}_2 = \lambda_1 \vec{x}_0 + L_1 \vec{x}_1$$

$$\vec{V}(O_2, 2/0) = \dot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \dot{\theta}_1 L_1 \vec{y}_1$$

$$\vec{\Gamma}(O_2, 2/0) = \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \ddot{\theta}_1 L_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 L_1 \vec{x}_1$$

$$\text{Moment dynamique en } O_3 : \quad \vec{\delta}(O_3, 2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_0 + m_2 \left[ \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \ddot{\theta}_1 L_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 L_1 \vec{x}_1 \right] \wedge -L_1 \vec{x}_1$$

$$\vec{\delta}(O_3, 2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_0 - m_2 L_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 L_1 \right] \vec{z}_0$$

#### Actions extérieures appliquées à l'ensemble {1, 2} :

- pesanteur sur (2) : le poids  $\vec{P}_2$  appliqué en  $O_2$ , de moment en  $O_3$  :

$$\vec{O}_3\vec{O}_2 \wedge -\vec{P}_2 \vec{y}_0 = L_1 \vec{x}_1 \wedge -\vec{P}_2 \vec{y}_0 = -L_1 P_2 \cos \theta_1 \vec{z}_0$$

- pesanteur sur (1) : le poids  $\vec{P}_1$  appliqué en  $G_1$ , de moment en  $O_3$  :

$$\vec{O}_3\vec{G}_1 \wedge -\vec{P}_1 \vec{y}_0 = (a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1) \wedge -\vec{P}_1 \vec{y}_0 = -P_1 (a_1 \cos \theta_1 - b_1 \sin \theta_1) \vec{z}_0$$

- le moteur agit sur le cadre (1) en exerçant un couple de moment  $-C_m \vec{z}_0$
- la liaison pivot (3) - (2) a un moment nul en  $O_3$ .

#### Soit l'équation (2) :

$$C_1 \ddot{\theta}_1 - m_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 (a_1 \sin \theta_1 + b_1 \cos \theta_1) + \ddot{\theta}_1 (a_1^2 + b_1^2) \right] + C_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 L_1 \right] = -L_1 P_2 \cos \theta_1 - P_1 (a_1 \cos \theta_1 - b_1 \sin \theta_1) - C_m$$

#### EQUATION (3)

Moment dynamique de l'ensemble {(1), (2), (3)} : il est défini en  $H_3$ , en faisant la somme des moments dynamiques de (1), de

(2) et de (3) :  $\vec{\delta}(H_3, \{1,2,3\}/0) = \vec{\delta}(H_3, 1/0) + \vec{\delta}(H_3, 2/0) + \vec{\delta}(H_3, 3/0)$

#### Calcul pour le cadre (1) :

$$\text{Moment dynamique en } H_3 : \quad \vec{\delta}(H_3, 1/0) = \vec{\delta}(G_1, 1/0) + m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0) \wedge \vec{G}_1\vec{H}_3$$

$$\vec{\delta}(H_3, 1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_0 + m_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \ddot{\theta}_1 (a_1 \vec{y}_1 - b_1 \vec{x}_1) - \dot{\theta}_1^2 (a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1) \right] \wedge (-R \vec{y}_0 - a_1 \vec{x}_1 - b_1 \vec{y}_1)$$

#### Calcul pour la roue avant (2) :

$$\text{Moment dynamique en } H_3 : \quad \vec{\delta}(H_3, 2/0) = \vec{\delta}(O_2, 2/0) + m_2 \vec{\Gamma}(O_2, 2/0) \wedge \vec{O}_2\vec{H}_3$$

$$\vec{\delta}(H_3, 2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_0 + m_2 L_1 \left[ \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 + \ddot{\theta}_1 L_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 L_1 \vec{x}_1 \right] \wedge (-R \vec{y}_0 - L_1 \vec{x}_1)$$



### Calcul pour la roue arrière (3) :

Moment cinétique de la roue (3) : il est défini en  $O_3$ , centre d'inertie de la roue (3), point où est supposée définie sa matrice d'inertie.

$$\vec{\sigma}(O_3, 3/0) = \bar{I}(O_3, 3) \otimes \dot{\theta}_3 \vec{z}_0 = C_3 \dot{\theta}_3 \vec{z}_0$$

$$\text{Moment dynamique : } \vec{\delta}(O_3, 3/0) = \frac{d \vec{\sigma}(O_3, 3/0)}{dt/(0)} = C_3 \ddot{\theta}_3 \vec{z}_0$$

Moment dynamique en  $H_3$  :  $\vec{\delta}(H_3, 3/0) = \vec{\delta}(O_3, 3/0) + m_3 \vec{r}(O_3, 3/0) \wedge \vec{\Gamma}(O_3, 3/0)$ , avec  $O_3 = G_3$ , centre d'inertie de la roue (3).

Calcul de l'accélération  $\vec{\Gamma}(O_3, 3/0)$

$$\vec{OO}_3 = \lambda_1 \vec{x}_0$$

$$\vec{V}(O_3, 3/0) = \dot{\lambda}_1 \vec{x}_0$$

$$\vec{\Gamma}(O_3, 3/0) = \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0$$

$$\text{En } H_3 : \vec{\delta}(H_3, 3/0) = C_3 \ddot{\theta}_3 \vec{z}_0 + m_3 \ddot{\lambda}_1 \vec{x}_0 \wedge -R \vec{y}_0 = (C_3 \ddot{\theta}_3 - m_3 \ddot{\lambda}_1 R) \vec{z}_0$$

### Actions extérieures appliquées à l'ensemble {1, 2, 3} :

- pesanteur sur (2) : le poids  $\vec{P}_2$  appliqué en  $O_2$ , de moment en  $H_3$  :  $\vec{H}_3 \vec{O}_2 \wedge -P_2 \vec{y}_0 = -L_1 P_2 \cos \theta_1 \vec{z}_0$
- pesanteur sur (1) : le poids  $\vec{P}_1$  appliqué en  $G_1$ , de moment en  $H_3$  :  $\vec{H}_3 \vec{G}_1 \wedge -P_1 \vec{y}_0 = -P_1 (a_1 \cos \theta_1 - b_1 \sin \theta_1) \vec{z}_0$
- pesanteur sur (3) : le poids  $\vec{P}_3$  appliqué en  $O_3$ , a un moment nul en  $H_3$  ;
- le contact ponctuel du sol sur la roue (3) a un moment nul en  $H_3$ .

Nota : le moteur est interne à l'ensemble isolé...

### Soit l'équation (3) :

Il reste à conclure...

Le système d'équations n'est pas intégrable dans le cas général.

Seule l'équation (1) indépendante des deux autres donne un résultat simple :

$$C_2 \ddot{\theta}_2 = 0, \text{ soit } \dot{\theta}_2 = Cte : \text{ la vitesse de rotation de la roue avant est constante...}$$

## Application 2 – Corrigé



### Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant\*

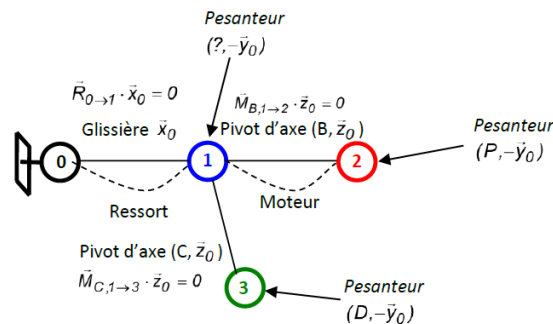
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

#### Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

1. Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant  $x, \dot{x}$ , leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède trois degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver trois équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée :  $\Omega = cte$ . Reste à déterminer  $\theta(t)$  et  $x(t)$ .

On isole  $\Sigma = 1+2+3$ .

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à  $\Sigma$  en projection sur  $\vec{x}_0$  doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas :

$$\vec{R}_{d\Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x}_0$$

On isole 3.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 3 au point C et en projection sur  $\vec{z}_0$  doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 3 n'interviennent pas :

$$\vec{\delta}_{C,3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C,3 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$$

Actions mécaniques pour obtenir  $\vec{R}_{(1+2+3) \rightarrow (1+2+3)} \cdot \vec{x}_0$  :

$$\begin{aligned} \{T_{0 \rightarrow 1}\} &= \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{P,0 \rightarrow 1} \end{cases} \text{ avec } \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_0 = 0 & \{T_{0 \rightarrow 1}^{\text{ressort}}\} &= \begin{cases} -kx\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{cases} \\ \{T_{pes \rightarrow 1}\} &= \begin{cases} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} & \{T_{pes \rightarrow 2}\} &= \begin{cases} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} & \{T_{pes \rightarrow 3}\} &= \begin{cases} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} \\ \vec{R}_{(1+2+3) \rightarrow (1+2+3)} \cdot \vec{x}_0 &= -kx \end{aligned}$$



Éléments cinétique et dynamique pour obtenir  $\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0$  :

$$\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = \sum_{i=1}^3 m_i \vec{\Gamma}_{G_i \in i/0} \cdot \vec{x}_0$$

Soit  $\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = m_1 \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} \cdot \vec{x}_0 + m_2 \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} \cdot \vec{x}_0 + m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} \cdot \vec{x}_0$

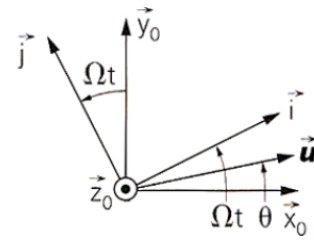
$$\vec{V}_{G_1 \in 1/0} = \dot{\vec{x}}_0 \Rightarrow \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} = \ddot{\vec{x}}_0$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/1} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \vec{G_2 B} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -r\vec{i} \wedge \Omega \vec{z}_0 = r\Omega \vec{j}$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/0} = \vec{V}_{G_2 \in 2/1} + \vec{V}_{G_2 \in 1/0} = r\Omega \vec{j} + \dot{\vec{x}}_0 \Rightarrow \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} = \ddot{\vec{x}}_0 - r\Omega^2 \vec{i} \quad \text{car } \left. \frac{d\vec{j}}{dt} \right|_0 = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{j} = \Omega \vec{z}_0 \wedge \vec{j} = -\Omega \vec{i}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/1} = \vec{V}_{C \in 3/1} + \vec{G_3 C} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} = L\vec{v} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = L\dot{\theta} \vec{u}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{V}_{G_3 \in 3/1} + \vec{V}_{G_3 \in 1/0} = L\dot{\theta} \vec{u} + \dot{\vec{x}}_0 \Rightarrow \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = \ddot{\vec{x}}_0 + L\ddot{\theta} \vec{u} + L\dot{\theta}^2 \vec{v} \quad \text{car } \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_0 = \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \vec{v}$$



Théorème de la résultante dynamique appliqué à  $\Sigma = S1 + S2 + S3$  en projection sur  $\vec{x}_0$  :  $\vec{R}_{d\Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x}_0$

$$-kx = m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - r\Omega^2 \cos(\Omega t)) + m_3 (\ddot{x} + L\ddot{\theta} \cos\theta - L\dot{\theta}^2 \sin\theta)$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} \cos\theta - m_3 L \dot{\theta}^2 \sin\theta = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

Actions mécaniques pour obtenir  $\vec{M}_{C, \vec{3} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$  :

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{cases} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{P, 2 \rightarrow 3} \end{cases} \text{ avec } \vec{M}_{P, 2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \{T_{pes \rightarrow 3}\} = \begin{cases} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{M}_{C, pes \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = \left( \vec{M}_{G_3, pes \rightarrow 3} + \vec{CG_3} \wedge -m_3 g \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = [-L\vec{v} \wedge -m_3 g \vec{y}_0] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 g L \sin\theta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir  $\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0$  :

$$\vec{\delta}_{G_3, 3/0} = \vec{0} \text{ (masse ponctuelle)}$$

$$\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0 = [\vec{\delta}_{G_3, 3/0} + \vec{CG_3} \wedge \vec{R}_{d3/0}] \cdot \vec{z}_0 = [-L\vec{v} \wedge m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0}] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 L [\vec{z}_0 \wedge \vec{v}] \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L \vec{u} \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L [\ddot{x} \cos\theta + L\ddot{\theta}]$$

Théorème du moment dynamique appliqué à  $S3$  au point  $C$  et en projection sur  $\vec{z}_0$  :  $\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C, \vec{3} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$

$$-m_3 g L \sin\theta = m_3 L [\ddot{x} \cos\theta + L\ddot{\theta}] \quad \text{d'où } \boxed{\ddot{x} \cos\theta + L\ddot{\theta} + g \sin\theta = 0}$$

2. Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

En considérant que  $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$  sont des petites variations de position ou de vitesse autour de la position d'équilibre  $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$ ,

et que le développement limité de  $f(x)$  à l'ordre  $n$  en  $a$  est  $f(x+a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}x^n$ , on a :

$$\text{ordre 0:} \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \quad \text{ordre 1:} \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre 2:} \begin{cases} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin \theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre 3:} \begin{cases} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} \end{cases}$$

et  $\dot{\theta}^2 \approx 0$

Donc :  $\boxed{(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta} = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t)}$  et  $\boxed{\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0}$

3. Déterminer le système d'équations permettant de calculer  $A$  et  $B$ .

En posant  $x(t) = A \cos(\Omega t)$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$ , on a :  $\ddot{x}(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t)$  et  $\ddot{\theta}(t) = -B\Omega^2 \cos(\Omega t)$

Les deux équations obtenues précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2 + m_3)A\Omega^2 \cos(\Omega t) + kA \cos(\Omega t) - m_3LB\Omega^2 \cos(\Omega t) = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - LB\Omega^2 \cos(\Omega t) + gB \cos(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{cases} [-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k]A - m_3L\Omega^2 B = m_2r\Omega^2 \\ -A\Omega^2 + (-L\Omega^2 + g)B = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$$

$$B = \frac{m_2r\Omega^4}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$$

4. Indiquer la condition que doit vérifier la longueur  $L$  afin d'assurer  $x(t) = 0$  en régime forcé.

On a  $x(t) = 0$  en régime forcé, si  $A = 0$ .

Ce qui implique que :  $A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$  Soit :  $\boxed{L = \frac{g}{\Omega^2}}$

Dans ce cas  $B = \frac{-m_2r}{m_3L}$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t) = \frac{-m_2r}{m_3L} \cos(\Omega t)$

### Application 3 – Corrigé



#### Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique \*

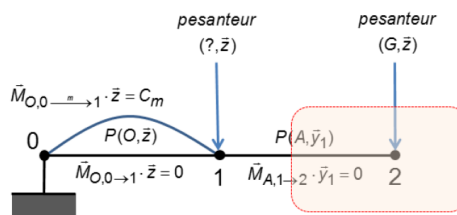
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

##### Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

1. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

Grphe de structure :



Le mécanisme possède deux degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver deux équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée :  $\omega = \text{cte}$ . Reste à déterminer  $\beta(t)$ .

On isole la nacelle 2.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur  $\vec{y}_1$  doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 2 n'interviennent pas :

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = \vec{M}_{A,2 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1$$

Actions mécaniques pour obtenir  $\vec{M}_{A,2 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1$  :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{P,1 \rightarrow 2} \end{cases} \text{ avec } \vec{M}_{P,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1 = 0 \quad \{T_{pes \rightarrow 2}\} = \begin{cases} mg\vec{z} \\ 0 \end{cases}$$

Avec  $\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1 = 0$

$$\vec{M}_{A,pes \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1 = \left( \vec{M}_{G,pes \rightarrow 2} + \vec{AG} \wedge mg\vec{z} \right) \cdot \vec{y}_1 = (b\vec{z}_2 \wedge mg\vec{z}) \cdot \vec{y}_1 = -mgbsin\beta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir :  $\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1$  :

A n'est pas un point fixe dans  $R_0$ . On ne peut donc pas utiliser l'intégration par partie.

**La matrice d'inertie est donnée en un point A qui n'est pas le centre de gravité !!!**

2 possibilités :

Méthode 1 : utiliser les définitions de  $\vec{\sigma}_{A,2/0}$  et  $\vec{\delta}_{A,2/0}$  :

$$\vec{\sigma}_{A,2/0} = I_A(2) \cdot \vec{\Omega}_{2/0} + m\vec{AG} \wedge \vec{V}_{A \in 2/0} \quad \text{et} \quad \vec{\delta}_{A,2/0} = \left. \frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt} \right|_0 + m\vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G \in 2/0}$$

Méthode 2 : utiliser Huygens pour obtenir la matrice au point G, puis utiliser la méthode classique en déterminant  $\vec{\sigma}_{G,2/0}$  puis

$\vec{\delta}_{G,2/0}$  puis  $\vec{\delta}_{A,2/0}$ .

Nous allons utiliser la méthode 1.

$$\vec{V}_{A/0} = \vec{V}_{A \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 1/0} = \cancel{\vec{V}_{O \in 1/0}} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -a\vec{x}_1 \wedge \dot{\alpha}\vec{z}_1 = a\dot{\alpha}\vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_{A,2/0} = \vec{I}_A(2) \cdot \vec{\Omega}_{2/0} + m\vec{AG} \wedge \vec{V}_{A \in 2/0} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{b2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{b1} + mb\vec{z}_2 \wedge a\dot{\alpha}\vec{y}_1$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{b2} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix}_{b2} - mba\dot{\alpha}\vec{x}_2 \\ &= -A\dot{\alpha}\sin\beta\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\vec{y}_2 + C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2 - mba\dot{\alpha}\vec{x}_2 \\ &= -(A\dot{\alpha}\sin\beta + mba\dot{\alpha})\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\vec{y}_2 + C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2 \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = \frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt} \bigg|_0 \cdot \vec{y}_1 + (m\vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G \in 2/0}) \cdot \vec{y}_1$$

Avec :  $(m\vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G \in 2/0}) \cdot \vec{y}_1 = 0$  car  $\vec{V}_{A/0} // \vec{y}_1$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt} \bigg|_0 \cdot \vec{y}_1 = \frac{d(\vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1)}{dt} - \vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \frac{d\vec{y}_1}{dt} \bigg|_0$$

$$\text{et } \frac{d\vec{y}_1}{dt} \bigg|_0 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\alpha}\vec{z} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha}\vec{x}_1$$

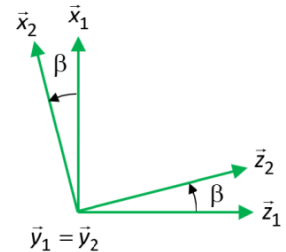
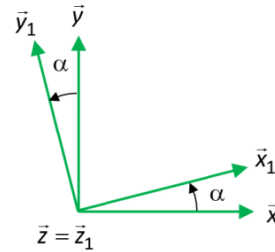
Donc

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = \frac{d(B\dot{\beta})}{dt} - [-(A\dot{\alpha}\sin\beta + mba\dot{\alpha})\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\vec{y}_2 + C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2] \cdot [-\dot{\alpha}\vec{x}_1]$$

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = B\ddot{\beta} + \dot{\alpha}[-(A\dot{\alpha}\sin\beta + mba\dot{\alpha})\cos\beta + C\dot{\alpha}\cos\beta\sin\beta]$$

$$\text{car } \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 = \cos\beta \text{ et } \vec{z}_2 \cdot \vec{x}_1 = \sin\beta$$

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = B\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \cos\beta [\sin\beta(C - A) - mba]$$

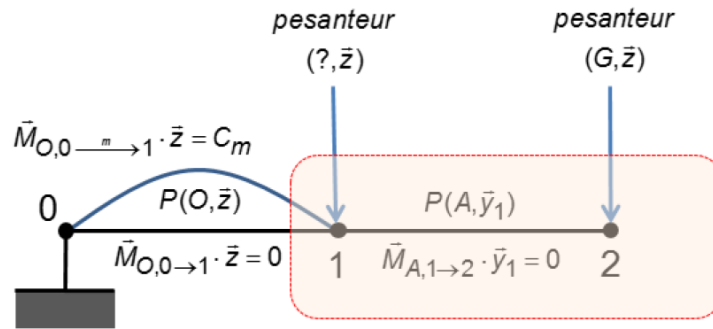


Théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur  $\vec{y}_1$  :  $\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = \vec{M}_{A,2 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1$

$$-mgbsin\beta = B\ddot{\beta} + \omega^2 \cos\beta [\sin\beta(C - A) - mba] \quad (1)$$

2. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

Graphe de structure :



On isole l'ensemble  $E = \text{bras 1} + \text{nacelle 2}$ .

Le théorème du moment dynamique appliqué à  $E$  au point  $O$  et en projection sur  $\vec{z}$  doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas.

$$\vec{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z} = \vec{M}_{O,\vec{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z}$$

Actions mécaniques pour obtenir  $\vec{M}_{O,\vec{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z}$  :

$$\begin{aligned} \{T_{0 \rightarrow 1}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{P,0 \rightarrow 1} \end{array} \right\} \text{ avec } \vec{M}_{P,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = 0 & \{T_{0 \rightarrow m \rightarrow 1}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{M}_{P,0 \rightarrow m \rightarrow 1} \end{array} \right\} \text{ avec } \vec{M}_{P,0 \rightarrow m \rightarrow 1} \cdot \vec{z} = C_m \\ \{T_{pes \rightarrow 1}\} &= \left\{ \begin{array}{l} m_1 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} & \{T_{pes \rightarrow 2}\} &= \left\{ \begin{array}{l} mg \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \vec{M}_{O,pes \rightarrow i} \cdot \vec{z} = \left( \vec{M}_{G,pes \rightarrow i} + \vec{OG}_i \wedge m_i g \vec{z} \right) \cdot \vec{z} = 0$$

$$\vec{M}_{O,\vec{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z} = \vec{M}_{O,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O,0 \rightarrow m \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O,pes \rightarrow 1} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{O,pes \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = C_m$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir  $\vec{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z}$  :

$O$  est un point fixe dans  $R_0$ . On peut donc utiliser l'intégration par partie.

$$\vec{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z} = \frac{d(\vec{\sigma}_{O,E/0} \cdot \vec{z})}{dt} - \vec{\sigma}_{O,E/0} \cdot \frac{d\vec{z}}{dt} \Big|_0 = \frac{d(\vec{\sigma}_{O,E/0} \cdot \vec{z})}{dt}$$

$$\vec{\sigma}_{O,1/0} \cdot \vec{z} = \left( \vec{I}_O(1) \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \right) \cdot \vec{z} = I \dot{\alpha} \quad \text{donc} \quad \frac{d(\vec{\sigma}_{O,1/0} \cdot \vec{z})}{dt} = 0 \quad (\text{car } \dot{\alpha} = \omega = \text{cte})$$

$$\vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z} = \left( \vec{\sigma}_{A,2/0} + \vec{OA} \wedge m \vec{V}_{G \in 2/0} \right) \cdot \vec{z} = \vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \vec{z} + \left( \vec{OA} \wedge m \vec{V}_{G \in 2/0} \right) \cdot \vec{z}$$

$$\vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \vec{z} = \left[ -(A\dot{\alpha} \sin \beta + mba\dot{\alpha})\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\vec{y}_2 + C\dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2 \right] \cdot \vec{z}$$

$$\begin{aligned} &= -(A\dot{\alpha} \sin \beta + mba\dot{\alpha})(-\sin \beta) + C\dot{\alpha} \cos^2 \beta & \text{car } \vec{x}_2 \cdot \vec{z} = -\sin \beta \text{ et } \vec{z}_2 \cdot \vec{z} = \cos \beta \\ &= \omega \left( A \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + mba \sin \beta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{OA} \wedge m\vec{V}_{G \in 2/0}) \cdot \vec{z} &= \left[ a\vec{x}_1 \wedge m(\vec{V}_{A \in 2/0} + \vec{GA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}) \right] \cdot \vec{z} \\
 &= \left\{ a\vec{x}_1 \wedge m \left[ a\dot{\alpha}\vec{y}_1 - b\dot{z}_2 \wedge (\dot{\alpha}\vec{z} + \dot{\beta}\vec{y}_1) \right] \right\} \cdot \vec{z} \\
 &= \left\{ a\vec{x}_1 \wedge m \left[ \dot{\alpha}(a + b\sin\beta)\vec{y}_1 + b\dot{\beta}\vec{x}_2 \right] \right\} \cdot \vec{z} \\
 &= m a \dot{\alpha} (a + b\sin\beta) \\
 &= m a \omega (a + b\sin\beta)
 \end{aligned}$$

Ainsi  $\vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z} = \omega (A \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + 2mb \sin \beta + ma^2)$

$$\vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z} = \omega (A \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + 2mb \sin \beta + ma^2)$$

$$\frac{d(\vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z})}{dt} = \omega (2\dot{\beta} A \sin \beta \cos \beta - 2C \dot{\beta} \cos \beta \sin \beta + 2mb \dot{\beta} \cos \beta)$$

$$\frac{d(\vec{\sigma}_{O,2/0} \cdot \vec{z})}{dt} = 2\omega \dot{\beta} \cos \beta [\sin \beta (A - C) + mba]$$

Théorème du moment dynamique appliqué à  $E$  au point  $O$  et en projection sur  $\vec{z}$  :  $\vec{\delta}_{O,E/0} \cdot \vec{z} = \vec{M}_{O,\vec{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z}$

$$C_m = 2\omega \dot{\beta} \cos \beta [\sin \beta (A - C) + mba] \quad (2)$$

3. Déterminer les expressions de l'angle  $\beta$  et du couple moteur  $C_m$  ?

On suppose que  $mba \gg A \approx C$

De plus lorsque la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, on a :  $\beta = cte \Rightarrow \dot{\beta} = \ddot{\beta} = 0$

Ainsi, les deux équations déterminées aux questions 1 et 2 
$$\begin{cases} -mgb \sin \beta = B\ddot{\beta} + \omega^2 \cos \beta [\sin \beta (C - A) - mba] & (1) \\ C_m = 2\omega \dot{\beta} \cos \beta [\sin \beta (A - C) + mba] & (2) \end{cases}$$
 deviennent :

$$(1) \Rightarrow -mgb \sin \beta = -\omega^2 \cos \beta mba \Rightarrow \tan \beta = \frac{\omega^2 a}{g} \Rightarrow \beta = \arctan \left( \frac{\omega^2 a}{g} \right)$$

(2)  $\Rightarrow C_m = 0$  ce qui est normal, car la liaison 1/0 est parfaite, donc à vitesse constante de 1/0, il n'y a pas besoin de couple moteur (qui sert à accélérer ou freiner).

## Application 4 – Corrigé



### Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs \*\*\*

Centrale Supélec PSI 2013

#### Savoirs et compétences :

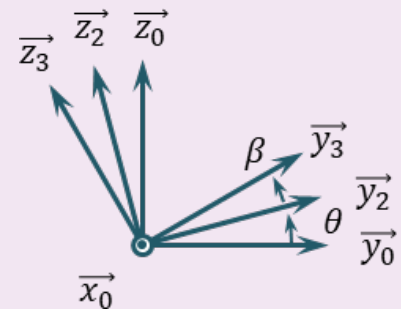
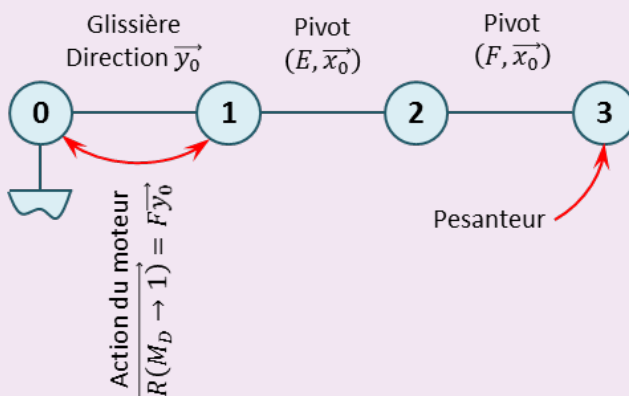
- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

### Modélisation dynamique du comportement de la charge

**Objectif** Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

**Question 1** Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?

#### Correction



Le système a trois mobilités :

- la translation de la liaison glissière de longueur  $y_{ch}(t)$  (degré de liberté motorisé) ;
- la rotation du câble d'angle  $\theta(t)$  (degré de liberté non motorisé) ;
- la rotation du conteneur d'angle  $\beta(t)$  (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.

**Question 2** Déterminer littéralement, au point  $G_3$ , la vitesse  $\overrightarrow{V}(G_3 \in 3/0)$  puis le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(3/0)\}$  de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ .

**Correction** 
$$\overrightarrow{V}(G_3 \in 3/0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG_3}) \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d}{dt} (y_{ch}(t) \overrightarrow{y_0} - \ell_2 \overrightarrow{z_2} - h_3 \overrightarrow{z_3}) \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

On a :

- $\left[ \frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega}(2/0) \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta} \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta} \overrightarrow{y_2} ;$
- $\left[ \frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_3} + \overrightarrow{\Omega}(3/0) \wedge \overrightarrow{z_3} = (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_3} = -(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_3} ;$



$$\bullet \left[ \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \vec{z}_2;$$

$$\bullet \left[ \frac{d\vec{y}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{z}_3.$$

$$\overrightarrow{V(G_3 \in 3/0)} = \dot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \dot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{y}_3.$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} = \ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3.$$

$$\text{Par ailleurs, } G_3 \text{ étant le centre d'inertie, de 3, on a } \overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} = \left[ \frac{d\sigma(G_3, 3/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{dA_3(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} =$$

$$A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0.$$

$$\text{On a donc, } \{\mathcal{D}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_3(\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \\ A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{G_3}$$

**Question 3** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$ , sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

**Correction** D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant  $\vec{z}_2$ , on peut donc suggérer de réaliser le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur  $\vec{y}_2$ .

Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3;
- action de 2 sur 3.

$$\text{On a donc : } -M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_2 = \left( M_3(\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{y}_2$$

$$\Leftrightarrow -M_3 g \sin \theta = M_3(\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$$

Résolution faisant intervenir  $F$  – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc (1+2+3) et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{y}_0$ .

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action du moteur sur 1.

$$\text{On applique le TRD sur } \vec{y}_0 : F = \overrightarrow{R_d(1+2+3/0)} \cdot \vec{y}_0 = \underbrace{\overrightarrow{R_d(1/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} + \overrightarrow{R_d(3/0)} \cdot \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow F = \left( M_3(\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{y}_0$$

$$\Leftrightarrow F = M_3(\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} \cos \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos(\beta + \theta) - \ell_2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin(\beta + \theta))$$

**Question 4** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$  et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

**Correction** Le TRD appliqué à 3 en projection suivant  $\vec{z}_2$  se traduit par :

$$F - M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2 = \left( M_3(\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{z}_2$$

$$\Leftrightarrow F - M_3 g \cos \theta = M_3(-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta).$$

Le TMD appliqué à 3 au point  $F$  en projection suivant  $\vec{x}_0$  se traduit par :

$$\overrightarrow{FG_3} \wedge (-M_3 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = \left( \overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} + \overrightarrow{FG_3} \wedge \overrightarrow{R_d(3/0)} \right) \cdot \vec{x}_0$$

$$\Leftrightarrow -h_3 \vec{z}_3 \wedge (-M_3 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$$

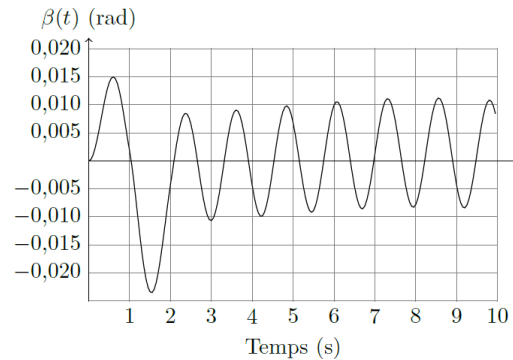
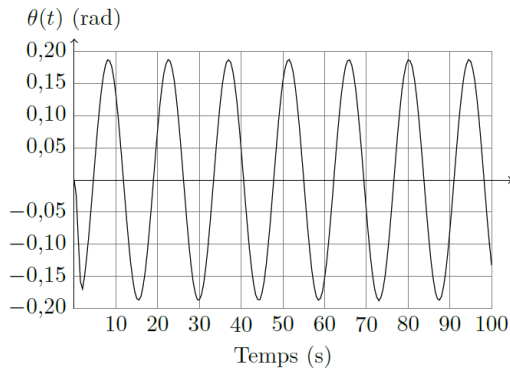
$$\Leftrightarrow -M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}).$$

**Question 5** En supposant que  $\theta$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, linéariser les équations précédentes.

**Correction**

- On a  $-M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$ . En linéarisant, on obtient  $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \beta)$ . En considérant que  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, on a :  $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}))$ .
- On a :  $F - M_3 g \cos \theta = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta)$ . En linéarisant, on obtient :  $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2)$ . En considérant que  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, on a :  $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta)$ .
- On a :  $M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$ . En linéarisant, on obtient  $M_3 g h_3 (\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$ .

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en  $y_{ch}(t)$  de 10 m.



**Question 6** Proposer une simplification de la modélisation précédente.

**Correction** L'amplitude des oscillations de  $\beta$  est 10 fois inférieure aux oscillations de  $\theta$ . En conséquences, on pourrait poser  $\beta = 0$  et :

- $-g \theta = \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 \ddot{\theta}$  ;
- $F - M_3 g = -M_3 \ddot{y}_{ch}(t) \theta$  ;
- $M_3 g h_3 \theta = A_3 \ddot{\theta}$ .

## TD 1 – Corrigé



### Dynamique du véhicule – Segway de première génération\*\*\*

*Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier*

#### Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

### Présentation

**Objectif** L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

### Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

**Question 1** Exprimer la vitesse, notée  $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$ , du point  $G_E$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $R_C$ . Exprimer la vitesse linéaire  $V_L$  du véhicule en fonction de  $R_C$  et  $\dot{\theta}$ .

**Correction** On a  $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0) = -R_C \dot{\theta} \vec{x}_1$ . On a alors  $V_L = R_C \dot{\theta}$ .

**Correction**  $\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C \ddot{\theta} \vec{x}_1 - R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 = -R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$  ( $\dot{\theta}$  est constant).

**Correction** La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc,  $T_A \leq f N_A$  et  $T_B \leq f N_B$ . En sommant les inégalités, on a donc  $T_A + T_B \leq f(N_A + N_B)$ .

**Correction**  $E$  étant un ensemble indéformable, on a :  $\overrightarrow{R_d}(E/\mathcal{R}_0) = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$  (pas de projection sur  $\vec{z}_0$ ). On isole  $E$  et les roues et on réalise le BAME :

- pesanteur sur  $E$  ;
- action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur  $\vec{z}_{01}$ , on a donc :  $N_A + N_B - m_E g = 0$ .

**Correction** En appliquant le TRD en projection sur  $\vec{y}_1$ , on a :  $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$ . En utilisant les résultats de la question précédente,  $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$ . En notant  $V_L = R_C \dot{\theta}$  la vitesse limite avant dérapage, on a  $\frac{V_L^2}{R_C} \leq f g$ . On a donc  $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$ .

**Correction** La vitesse limite est donc de  $10 \text{ m s}^{-1}$  soient  $36 \text{ km h}^{-1}$  ce qui satisfait le cahier des charges.

**Question 2** Exprimer la vitesse limite pour laquelle il n'y a pas de dérapage. Vérifier alors que l'exigence 1.1 est vérifiée.

### Étude du renversement en virage du véhicule Segway

**Correction** Au centre d'inertie de  $E$ , on a  $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$ . On a  $\overrightarrow{\Omega(E/\mathcal{R}_0)} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_0}$ . On a donc,  $\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta} \overrightarrow{x_1} - D \dot{\theta} \overrightarrow{y_1} + C \dot{\theta} \overrightarrow{z_0}$ . On a donc  $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1} + D \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1}$ .  
En conséquence,  $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1} \\ -E \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1} + D \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_{G_E}$ .

**Correction**  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d(B/E)} = -E \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1} + D \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1} + (h \overrightarrow{z_0} - l \overrightarrow{y_1}) \wedge (-m_E R_C \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1}) = -E \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1} + D \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1} + h m_E R_C \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1}$ .  $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \overrightarrow{x_1} = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$ .

**Correction** On a :  

- $\overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \overrightarrow{z_0} = (-l \overrightarrow{y_1} + h \overrightarrow{z_0}) \wedge -m_E g \overrightarrow{z_0} = l m_E g \overrightarrow{x_1}$  ;
- $\overrightarrow{BA} \wedge (-T_A \overrightarrow{y_1} + N_A \overrightarrow{z_1}) = -2l \overrightarrow{y_1} \wedge (-T_A \overrightarrow{y_1} + N_A \overrightarrow{z_1}) = -2l N_A \overrightarrow{x_1}$ .

 En appliquant le TMD en  $B$  suivant  $\overrightarrow{x_1}$ , on a :  $l m_E g - 2l N_A = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$ .  
 Au final,  $N_A = \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}$ .

**Correction** Pour qu'il y ait non renversement,  $N_A$  doit rester positif ou nul.

**Question 3** Exprimer la vitesse limite pour laquelle il n'y a pas de basculement du Segway.  
 On néglige  $I_{G_E}(E)$  pour simplifier l'application numérique.

**Question 4** Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

**Correction**  $N_A \simeq \frac{l m_E g - h m_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0$ . Ce qui est positif (pas de basculement).  
 $N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow l g - h R_C \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow l g - h V_L^2 / R_C \geq 0 \Rightarrow l g \geq h V_L^2 / R_C \Rightarrow \sqrt{\frac{R_C l g}{h}} \geq V_L$   
 $\Rightarrow V_L \leq 6,38 \text{ m s}^{-1} = 22,9 \text{ km h}^{-1}$ . CDCF Validé.

## TD 3 – Corrigé



### Dynamique du véhicule – Chariot élévateur à bateaux\*\*\*

X – ENS – PSI – 2012

#### Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

#### Présentation

#### Étude de la position du centre de gravité

**Objectif** L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req C206 : la position du centre de gravité de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$  doit être situé à un tiers de l'empattement par rapport à l'axe des roues arrière ».

**Question 1** Déterminer l'expression de  $x_{G_C}$  afin de valider l'exigence req C206.

**Correction** On a  $\vec{OG} = \frac{m_T}{m_T + m_1 + m_C} \vec{OG_T} + \frac{m_1}{m_T + m_1 + m_C} \vec{OG_1} + \frac{m_C}{m_T + m_1 + m_C} \vec{OG_C}$ . On souhaite que  $\vec{OG} = \vec{0}$ . On a donc  $0 = \frac{m_T}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_T} + \frac{m_1}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_1} + \frac{m_C}{m_T + m_1 + m_C} x_{G_C}$  et donc :  $x_{G_C} = -\frac{m_T}{m_C} x_{G_T} - \frac{m_1}{m_C} x_{G_1}$ .

Pour toute la suite de l'étude, les points  $G$  et  $O$  sont supposés confondus et la masse totale de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$  est notée  $M$ .

#### Étude du basculement frontal

**Question 2** Écrire les équations issues de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble  $\{\Sigma, B\}$ . Le théorème du moment dynamique sera appliqué au point  $I_4$ .

**Correction** On isole  $\{\Sigma, B\}$ .

On fait le BAME.

- Poids du bateau :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow B)\} = \left\{ \begin{matrix} -m_B g \vec{z} \\ 0 \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} -m_B g \vec{z} \\ m_B g \vec{y} \left( x_{G_B} - \frac{2L}{3} \right) + E m_B g \vec{x} \end{matrix} \right\}_{I_4}$ .
- Poids de  $\Sigma$  :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow \Sigma)\} = \left\{ \begin{matrix} -M g \vec{z} \\ 0 \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} -M g \vec{z} \\ -\frac{2M g L}{3} \vec{y} + E M g \vec{x} \end{matrix} \right\}_{I_4}$ .
- Action du sol sur chaque roue :
  - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_1)\} = \left\{ \begin{matrix} -T_1 \vec{x} + N_1 \vec{z} \\ L N_1 \vec{y} \end{matrix} \right\}_{I_4}$  ;
  - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_2)\} = \left\{ \begin{matrix} -T_1 \vec{x} + N_1 \vec{z} \\ -2E N_2 \vec{x} + L N_2 \vec{y} - 2E T_2 \vec{z} \end{matrix} \right\}_{I_4}$  ;
  - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_3)\} = \left\{ \begin{matrix} -T_3 \vec{x} + N_3 \vec{z} \\ -2E N_3 \vec{x} - 2E T_3 \vec{z} \end{matrix} \right\}_{I_4}$  ;
  - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_4)\} = \left\{ \begin{matrix} -T_4 \vec{x} + N_4 \vec{z} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{I_4}$ .

**Calcul du  $\{\mathcal{D}(\{\Sigma, B\}/0)\}$ .**

$$\{\mathcal{D}(\{\Sigma, B\}/0)\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_d(\{\Sigma, B\}/0)} \\ \overrightarrow{\delta(I_4, \{\Sigma, B\}/0)} \end{matrix} \right\}_{I_4}.$$

On a  $\overrightarrow{R_d(\{\Sigma, B\}/0)} = -(M + m_B) \text{dec}_x \vec{x}_1$ .

Par ailleurs, on a  $\overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma, B\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G, \Sigma/0)} + \overrightarrow{\delta(G, B/0)}$ . Le bateau étant en translation par rapport au bâti, on

a donc :

- $\overrightarrow{\delta}(G, \{\Sigma\}/0) = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{\delta}(I_4, \{\Sigma\}/0) = \overrightarrow{\delta}(G, \{\Sigma\}/0) + \overrightarrow{I_4 G} \wedge \overrightarrow{R_d}(\{\Sigma\}/0) = \left(-2\frac{L}{3}\vec{x}_1 - E\vec{y}_1 + h\vec{z}_1\right) \wedge -M\text{dec}_x \vec{x}_1 = -M\text{dec}_x (E\vec{z}_1 + h\vec{y}_1)$ ;
- $\overrightarrow{\delta}(G_B, \{B\}/0) = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{\delta}(I_4, \{B\}/0) = \overrightarrow{\delta}(G_B, \{B\}/0) + \overrightarrow{I_4 G_B} \wedge \overrightarrow{R_d}(\{B\}/0) = \left((-x_{G_B} + 2\frac{L}{3})\vec{x}_1 + E\vec{y}_1 + (z_{G_B} + h)\vec{z}_1\right) \wedge -m_B\text{dec}_x \vec{x}_1 = m_B\text{dec}_x (E\vec{z}_1 - (z_{G_B} + h)\vec{y}_1)$ ;
- au final,  $\overrightarrow{\delta}(I_4, \{\Sigma, B\}/0) = m_B\text{dec}_x (E\vec{z}_1 - (z_{G_B} + h)\vec{y}_1) - M\text{dec}_x (E\vec{z}_1 + h\vec{y}_1)$ .

**On applique le PFD.**

- Théorème de la résultante dynamique :
  - suivant  $\vec{x}_1$  :  $-(M + m_B)\text{dec}_x = -\sum_{i=1}^4 T_i$ ;
  - suivant  $\vec{y}_1$  :  $0 = 0$ ;
  - suivant  $\vec{z}_1$  :  $0 = \sum_{i=1}^4 N_i - (M + m_B)g$ .
- Théorème du moment dynamique :
  - suivant  $\vec{x}_1$  :  $0 = E m_B g + E M g - 2 E N_2 - 2 E N_3$ ;
  - suivant  $\vec{y}_1$  :  $-m_B\text{dec}_x (z_{G_B} + h) - M\text{dec}_x h = L(N_1 + N_2) + m_B g \left(x_{G_B} - 2\frac{L}{3}\right) - \frac{M g 2L}{3}$ ;
  - suivant  $\vec{z}_1$  :  $m_B\text{dec}_x E - M\text{dec}_x E = -2 E T_2 - 2 E T_3$ .

**Question 3** Donner les hypothèses qui peuvent être faites afin de réduire le nombre d'inconnues du problème.

**Correction** La mise en équation précédente permet d'exprimer 8 inconnues ( $N_i$  et  $T_i$  pour  $i$  allant de 1 à 4).

En faisant l'hypothèse que le plan  $(G_1, \vec{z}_1, \vec{x}_1)$  est plan de symétrie, on peut considérer que  $N_4 = N_3$ ,  $T_4 = T_3$ ,  $N_1 = N_2$ ,  $T_1 = T_2$ . Il reste donc 4 inconnues.

De plus, à la limite du basculement frontal, les roues arrières se décolleraient. Il resterait donc les inconnues  $N_3$  et  $T_3$ .

On considère que le basculement a lieu lorsque les roues arrière perdent le contact avec le sol.

**Question 4** Déterminer alors l'expression de  $\text{dec}_x$ .

**Correction** Le basculement frontal du véhicule peut se traduire par un théorème du moment dynamique appliqué en  $I_4$  en projection sur  $\vec{y}_1$ . On utilise les conditions précédentes. On a donc :

$$-m_B\text{dec}_x (z_{G_B} + h) - M\text{dec}_x h = m_B g \left(x_{G_B} - 2\frac{L}{3}\right) - \frac{M g 2L}{3} \text{ soit } \text{dec}_x = \frac{m_B g \left(x_{G_B} - 2\frac{L}{3}\right) - \frac{M g 2L}{3}}{-m_B (z_{G_B} + h) - M h}$$

$$\Leftrightarrow \text{dec}_x = -g \frac{m_B (3x_{G_B} - 2L) - M 2L}{3m_B (z_{G_B} + h) + 3M h}$$

Le facteur d'adhérence entre le pneu et la route est noté  $f$ .

**Question 5** Donner les expressions de  $N_4$  et  $T_4$  et expliquer qualitativement comment vérifier que le basculement a lieu avant le glissement afin de justifier l'hypothèse faite en début d'étude.

**Correction**

### Étude du basculement latéral

**Question 6** Quel théorème doit-on utiliser afin d'obtenir directement l'équation permettant de déterminer l'expression de  $V$  qui provoque le basculement latéral?

**Correction**

**Question 7** En déduire l'expression de  $V$  qui provoque le basculement latéral.

**Correction**