



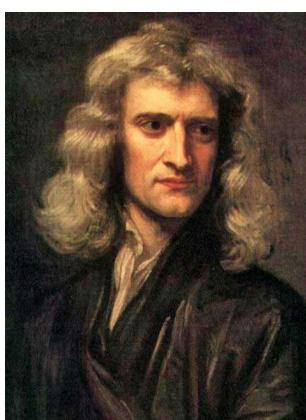
Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur

Chapitre 1 Introduction à la dynamique du solide indéformable

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique;
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.



Isaac Newton – 1643 - 1727.

1	Introduction	2
2	PFD : applications simplifiées	2
3	PFD : cas général	2
3.1	Principe Fondamental de la Dynamique	2
3.2	Équations de mouvement	3
3.3	Théorèmes généraux	3
4	Objectif et Méthodologie	3
4.1	Objectifs	3
4.2	Méthodologie	4
5	Loi de mouvement en trapèze	4
1		62

AREORGANISER : 1 Objectif (type de problemes) 2 CAS GENERAL 3 CAS SIMPLIFIES 4 LOIS DE COMPORTEMETN

1 Introduction

Objectif

L'objectif de ce cycle est triple. L'étude dynamique des systèmes de solide permet de

- déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en tenant compte des masses (et des répartitions de masses) des pièces ou des classes d'équivalence cinématique;
- dimensionner les actionneurs permettant d'actionner un système;
- déterminer les équations de mouvement.

Définition — Référentiel galiléen. Un **référentiel galiléen** se définit à partir d'une repère spatial (orthonormé direct $(O_g; \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$) et d'une base de temps (t) et est animé d'un mouvement de **translation rectiligne uniforme** (à vitesse constante) par rapport à un référentiel absolu fixe ou à un autre référentiel galiléen $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On peut également le définir comme un référentiel « dans lequel le principe fondamental de la dynamique s'applique ».



Dans la pratique, on fera toujours la **supposition qu'un repère est galiléen**. Cela dépendra effectivement des mouvements mis en jeu et des **échelles temporelles et spatiales** considérées. Par exemple :

- pour étudier des mouvements de l'ordre de quelques minutes à l'échelle humaine, le **référentiel terrestre** (origine liée au centre de la terre et les trois axes liés au globe terrestre) est approprié;
- pour étudier les effets météorologiques (ouragans, courants marins), ou les mouvements des satellites, il convient alors de tenir compte de l'inertie de la terre et on pourra choisir le **référentiel géocentrique** (origine liée au centre de la terre et les trois axes dirigés vers trois étoiles très éloignées) comme référentiel galiléen;
- pour étudier le mouvement des planètes, il convient mieux d'utiliser le **référentiel héliocentrique** (origine liée au centre du soleil et les trois axes dirigés vers trois étoiles très éloignées).

Une chronologie galiléenne est obtenue par une horloge précise (Quartz, atomique, ou mouvement des astres). En mécanique classique (ou Newtonienne), les deux repères d'**espace et de temps** sont supposés **indépendants** ce qui n'est pas le cas de la mécanique relativiste.

2 Principe Fondamental de la Dynamique : applications simplifiées

Définition — Solide en translation par rapport à un référentiel galiléen.

Si un ensemble matériel E (de centre d'inertie G) est en mouvement de translation dans un référentiel galiléen (R_g) alors :

- d'après le **théorème de la résultante dynamique** : la résultante des efforts extérieurs est égale au produit de la masse par l'accélération de G par rapport à R_g : $\overrightarrow{m \Gamma(G \in E/R_g)} = \overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)}$;
- d'après le **théorème du moment dynamique** : le moment des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égal au vecteur nul en tout point : $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{0} \forall A$.

Définition — Solide en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen.

Si un ensemble matériel E (de centre d'inertie G) est en mouvement de rotation autour d'un axe Δ (dirigé par \vec{u} unitaire) fixe dans un référentiel galiléen (R_g) alors, d'après le **théorème du moment dynamique** :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} \cdot \vec{u} = J_\Delta(E) \cdot \ddot{\theta} \quad \forall A \in \Delta \text{ avec :}$$

- $J_\Delta(E)$ le moment d'inertie de E par rapport à l'axe Δ (en kg m^2);
- $\ddot{\theta}$, l'accélération angulaire de E par rapport à R_g suivant Δ : $\overrightarrow{\Omega(E/R_g)} \cdot \vec{u}$.

3 Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

3.1 Principe Fondamental de la Dynamique

Définition — Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique.

Dans le cas général, soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0) , alors la somme des actions mécaniques extérieures (**torseur des actions mécaniques extérieures** s'appliquant sur E)

est égale au **torseur dynamique** du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\} = \{\mathcal{D}(E/R_0)\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel la relation est vérifiée. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

(R)

- Les démarches pour le calcul du torseur dynamique seront vues ultérieurement.
- La démarche de calcul du torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur E est la même que celle vu lors de l'utilisation du PFS (ce sont les mêmes torseurs).

3.2 Équations de mouvement

Définition — Équations de mouvement. Une **équation de mouvement** est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure **aucune composante inconnue d'action mécanique**. Il est parfois nécessaire d'écrire plusieurs équations pour trouver par substitution une équation de mouvement. On nomme « **intégrale première du mouvement** » une équation différentielle du premier ordre avec un second membre constant, obtenue par intégration d'une équation de mouvement.

3.3 Théorèmes généraux

Du principe fondamental de la dynamique découlent plusieurs théorèmes généraux.

Théorème — Théorème de la résultante dynamique. Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre de gravité G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0) , la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 (notée $\overrightarrow{R_d}(E/R_0)$) :

$$\overrightarrow{R}(\bar{E} \rightarrow E) = \overrightarrow{R_d}(E/R_0) = m\overrightarrow{\Gamma}(G \in E/R_0).$$

(R)

On peut alors définir un Newton comme l'effort à mettre en œuvre pour mettre en mouvement 1 kg avec une accélération de 1 m s^{-2} en son centre de gravité G .

Théorème — Théorème du moment dynamique. Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0) , la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A (noté $\overrightarrow{\delta}(A, E/R_0)$) :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(A, \bar{E} \rightarrow E) = \overrightarrow{\delta}(A, E/R_0).$$

Théorème — Théorème des actions mutuelles. Soient (E_1) et (E_2) deux sous-ensembles matériels de (E) , en mouvement par rapport à un référentiel galiléen, et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. Alors :

$$\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = -\{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\}.$$

4 Objectif et Méthodologie

4.1 Objectifs

On distingue deux principaux types de problèmes en dynamique :

- **type 1 :**
 - on connaît : les actionneurs et les inerties,
 - on détermine : les lois de mouvement et les actions mécaniques dans les liaisons;
- **type 2 :**
 - on connaît : les lois de mouvement et inerties,
 - on détermine : les caractéristiques des actionneurs et les actions mécaniques de liaison.

4.2 Méthodologie

La méthodologie de résolution d'un problème de dynamique est très similaire à celle utilisée lors de la détermination des performances statiques des systèmes.

1. On choisit un repère galiléen et on effectue le bilan complet des données d'entrée du problème.
2. On construit un graphe de structure.
3. On isole le solide ou le système de solides considéré.
4. On effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures agissant sur le système isolé.
5. On écrit le PFD.
6. On projette les relations vectorielles sur les axes choisis.
7. On injecte les lois de comportement (ressort, lois de Coulomb, ...).
8. On effectue la résolution.

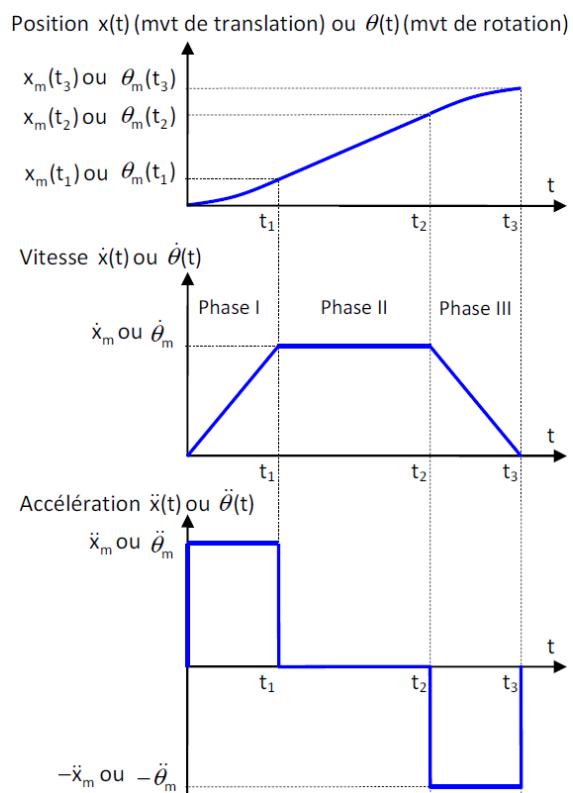
5 Loi de mouvement en trapèze

Une des lois usuellement suivie par un actionneur pour aller d'un point à un autre est une loi de mouvement de vitesse en trapèze. Ce mouvement peut être décomposé en 3 phases :

- phase 1 mouvement uniformément décéléré. L'accélération est donc constante, la vitesse croît de façon linéaire et la position évolue de façon parabolique;
- phase 2 : mouvement uniforme. L'accélération est nulle, la vitesse est constante et la position évolue linéairement;
- phase 3 : mouvement uniformément décéléré. L'accélération est constante et négative, la vitesse décroît linéairement et la position évolue de façon parabolique.

Dans le cas général, il sera souvent inutile d'écrire les équations horaires de chacune des phases. En effet, les questions liées à ces lois de mouvements sont généralement :

- d'identifier le « pire des cas » en terme de vitesse/accélération;
- de déterminer les temps de une ou plusieurs des phases en fonction de la distance à parcourir, la vitesse maximale, l'accélération accélérations maximale;
- de déterminer la hauteur du palier de vitesse;
- de déterminer la distance parcourue.



Résultat Dans les 3 derniers points, il est souvent suffisant de remarquer en utilisant les courbes que :

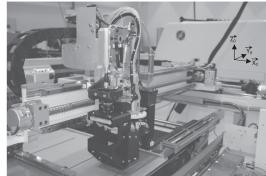
- $t_1 = \frac{\dot{x}_m}{\ddot{x}_m}$;
- en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors de l'accélération est donnée par $\frac{1}{2} t_1 \dot{x}_m$;
- en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors des 3 phases est donnée par $2 \cdot \frac{1}{2} t_1 \dot{x}_m + (t_2 - t_1) \dot{x}_m$.

	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Équation de position	$x(t) = \frac{1}{2} \ddot{x}_m t^2$	$x(t) = \dot{x}_m(t)(t - t_1) + x_m(t_1)$	$x(t) = -\frac{1}{2} \ddot{x}_m (t - t_2)^2 + \dot{x}_m(t)(t - t_2) + x_m(t_2)$
Équation de vitesse	$\dot{x}(t) = \ddot{x}_m t$	$\dot{x}(t) = \dot{x}_m$	$\dot{x}(t) = -\dot{x}_m(t - t_2) + \dot{x}_m$
Équation d'accélération	$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_m$	$\ddot{x}(t) = 0$	$\ddot{x}(t) = -\ddot{x}_m$

Références

- [1] Émilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.
- [2] Florestan Mathurin, *Introduction à la dynamique du solide*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Activation 1



Activation – Système de dépose de composants électroniques

Émilien Durif – E3A PSI 2011

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique;
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

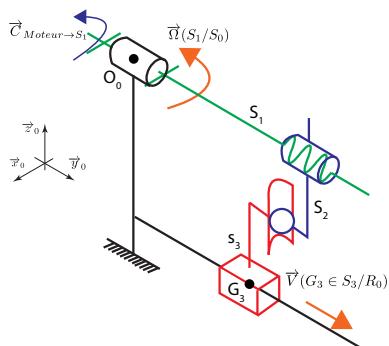
Présentation du système

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée \vec{y}_0) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement.

Hypothèses :

- le référentiel associé au repère $R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est supposé galiléen;
- les solides seront supposés indéformables;
- on notera J_1 le moment d'inertie du solide 1 selon l'axe (O_0, \vec{y}_0) : $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$;
- on note M_3 et G_3 respectivement la masse et le centre d'inertie du solide S_3 ;
- la position de G_3 est définie par $\overrightarrow{O_0 G_3} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0$
- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement).

Le système est modélisé par le schéma cinématique ci-dessous :



On note :

- S_0 : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti;
- S_1 : vis à billes (hélice à droite) de pas $p = 20 \text{ mm}$;
- S_2 : écrou de la vis à billes;
- S_3 : chariot supportant la tête de dépôt (masse M_3).

On donne les caractéristiques du moteur entraînant l'axe et la vis S_1 :

- moment d'inertie du moteur suivant l'axe \vec{y}_0 : $I_m = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$;
- moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe \vec{y}_0 : $I_b = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$.

De plus $\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{y}_0$

Objectif L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- couple transmis à S_1 : $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1}$;
 - vitesse de rotation de S_1 : $\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}$.
- à celles liées à l'effecteur (tête de dépôt S_3) :
- masse : M_3 ;
 - cinématique de S_3 : $\overrightarrow{\Gamma}(G_3 \in S_3/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}$.

Question 1 Réaliser le graphe de structure associé au mécanisme.

Question 2 Proposer une stratégie pour répondre à l'objectif.

Question 3 Déterminer la relation entre l'effort de poussée dans la liaison linéaire annulaire et l'accélération du chariot.

Question 4 Déterminer la relation entre le couple moteur et le couple transmis dans la liaison hélicoïdale.

Question 5 Donner la relation entre le couple transmis par la liaison hélicoïdale et l'effort axial.

Question 6 Déterminer la relation entre l'effort axial dans la liaison hélicoïdale et l'effort de poussée dans la liaison sphère – cylindre.

Question 7 Quel doit être le couple moteur pour déplacer le chariot S_3 ?

Le cahier des charges impose les performances dynamiques suivantes :

- l'accélération minimale de l'axe transversal est de 21 ms^{-2} ;
- la vitesse minimale pour respecter la cadence souhaitée est de 7 ms^{-1} ;
- la course de l'axe est de 2 m.

La loi de commande est une loi en trapèze de vitesse.

Question 8 *Donner les caractéristiques dynamiques que doit respecter le moteur.*

Question 9 *Quel est le temps nécessaire pour parcourir la course de la machine ? Commenter.*

Question 10 *Quel est le couple que doit fournir le moteur pour déplacer le chariot dans le « pire des cas » ?*

Activation 1 –

Corrigé



Activation – Système de dépose de composants électroniques

Émilien Durif – E3A PSI 2011

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique;
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Présentation du système

Objectif L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

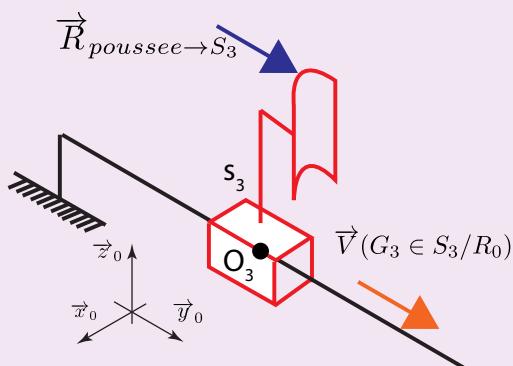
- couple transmis à S_1 : $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1}$;
 - vitesse de rotation de S_1 : $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}$.
- à celles liées à l'effecteur (tête de dépose S_3) :
- masse : M_3 ;
 - cinématique de S_3 : $\vec{\Gamma}(G_3 \in S_3/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}$.

Question 1 Réaliser le graphe de structure associé au mécanisme.

Question 2 Proposer une stratégie pour répondre à l'objectif.

Question 3 Déterminer la relation entre l'effort de poussée dans la liaison linéaire annulaire et l'accélération du chariot.

Correction On connaît la masse M_3 de la tête de dépose et on cherche l'effort ($\vec{R}_{\text{poussée} \rightarrow S_3}$) de poussée que doit fournir l'actionneur pour obtenir l'accélération souhaitée.

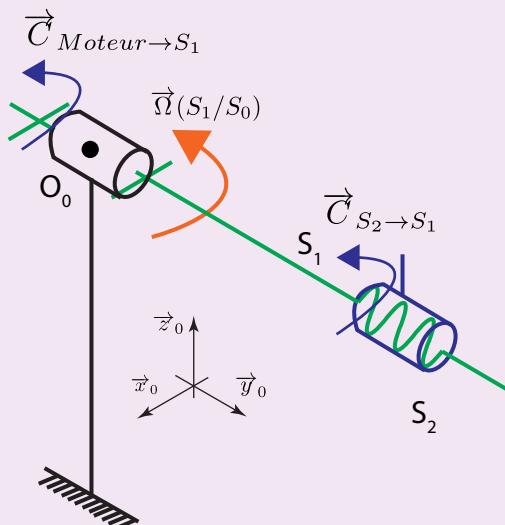


On utilise le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{y}_0 . On obtient : $M_3 \vec{\Gamma}(G_3 \in S_3/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \sum \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow S_3} \cdot \vec{y}_0$.

Au final $M_3 \cdot \ddot{y} = Y_{23}$.

Application numérique : détermination de $R_{\text{poussée} \rightarrow S_3}$ pour obtenir une accélération de 4 m/s^2 : $R_{\text{poussée} \rightarrow S_3} = 20 \times 4 = 80 \text{ N}$.

Question 4 Déterminer la relation entre le couple moteur et le couple transmis dans la liaison hélicoïdale.


Correction
Détermination des caractéristiques maximales :

On se place de la cas le plus limite (Couple maximal, accélération angulaire constante pour atteindre la fréquence de rotation maximale en $t_a = 0,2\text{ s}$) Déterminer le couple résistant maximal que le moteur peut équilibrer dynamiquement ($C_{S_2 \rightarrow S_1}$) :

En appliquant un théorème du moment dynamique à S_1 selon (O_0, \vec{y}_0): $(I_m + I_v) \cdot \ddot{\theta} = C_{\max} + C_{S_2 \rightarrow S_1}$.

$$\text{On obtient alors : } C_{S_2 \rightarrow S_1} = (I_m + I_v) \cdot \ddot{\theta}_{\max} - C_{\max} = (I_m + I_v) \cdot \frac{N_m \times 2 \cdot \pi}{60 \cdot t_a} - C_{\max} = -20 \text{ Nm.}$$

Question 5 Donner la relation entre le couple transmis par la liaison hélicoïdale et l'effort axial.

Correction On a : $M_{12} = Y_{12} \frac{\text{pas}}{2\pi}$.

Question 6 Déterminer la relation entre l'effort axial dans la liaison hélicoïdale et l'effort de poussée dans la liaison sphère – cylindre.

Correction On isole S_2 , soumis aux actions mécaniques de S_3 et S_1 . La masse de S_2 est négligée. On applique le TRD suivant \vec{y}_0 et on a :

$$Y_{32} + Y_{12} = 0 \Leftrightarrow Y_{23} = Y_{12}$$

Question 7 Quel doit être le couple moteur pour déplacer le chariot S_3 ?

Correction On a :

- $M_{12} = Y_{12} \frac{\text{pas}}{2\pi} \Leftrightarrow M_{21} = -Y_{12} \frac{\text{pas}}{2\pi}$;
- $Y_{23} = Y_{12}$;
- $(I_m + I_v) \cdot \ddot{\theta} = C_{\max} + M_{21}$;
- $M_3 \cdot \ddot{y} = Y_{23}$.

$$\text{On a donc } C_{\max} = (I_m + I_v) \cdot \ddot{\theta} + M_3 \ddot{y} \frac{\text{pas}}{2\pi}$$

Le cahier des charges impose les performances dynamiques suivantes :

- l'accélération minimale de l'axe transversal est de 21 ms^{-2} ;
- la vitesse minimale pour respecter la cadence souhaitée est de 7 ms^{-1} ;
- la course de l'axe est de 2 m.

La loi de commande est une loi en trapèze de vitesse.

Question 8 Donner les caractéristiques dynamiques que doit respecter le moteur.

Correction Avec un pas de 20 mm, $\dot{\theta} = \ddot{y} \frac{2\pi}{\text{pas}}$ et $\ddot{\theta} = \ddot{y} \frac{2\pi}{\text{pas}}$.

$$\text{AN : } \dot{\theta} = 7 \cdot 2\pi / 20 \cdot 10^3 = 2200 \text{ rad s}^{-1} = 230 \text{ tr min}^{-1} \text{ et } \ddot{\theta} = 21 \cdot 2\pi / 20 \cdot 10^3 = 6600 \text{ rad s}^{-2}.$$

Question 9 Quel est le temps nécessaire pour parcourir la course de la machine ? Commenter.

Correction

- Temps d'accélération pour atteindre la vitesse maximale : $V_m = a_m T_a \Leftrightarrow T_a = \frac{V_m}{a_m} = 0,33 \text{ s.}$

- Distance parcourue : $\frac{1}{2} T_a V_m = 1,17 \text{ m.}$

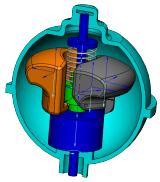
En conséquence, la course de la machine ne permet pas d'atteindre la vitesse maximale.

Temps pour parcourir 1 m : $\frac{1}{2} a_m T_a^2 = 1 \Rightarrow T_a = \frac{2}{21} = 0,309 \text{ s. Temps pour parcourir la course : } 0,62 \text{ m.}$

Question 10 Quel est le couple que doit fournir le moteur pour déplacer le chariot dans le « pire des cas » ?

Correction

Application 1



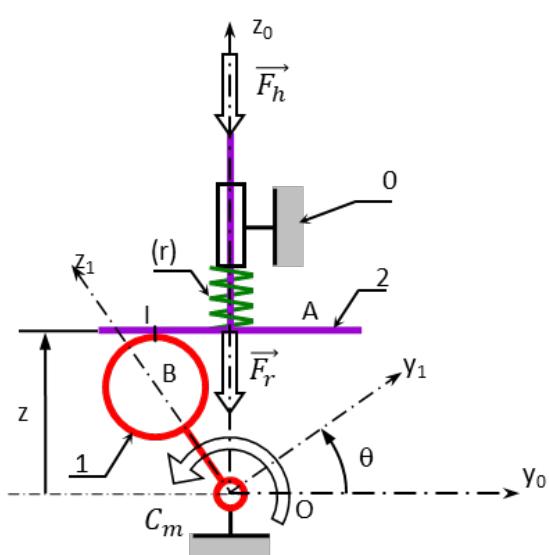
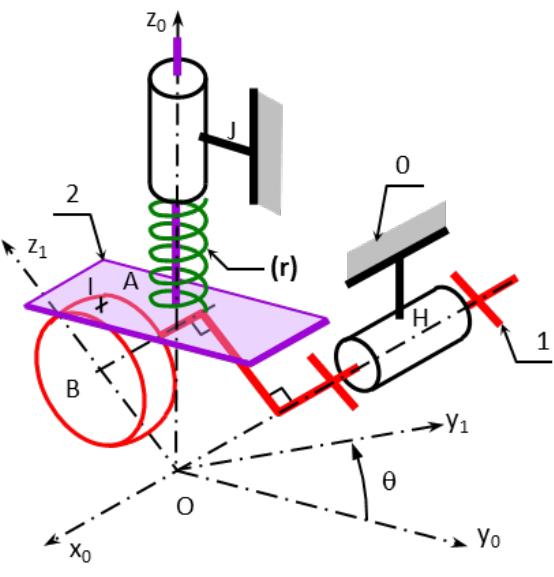
Application – Pompe à plateau

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique;
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.



L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de ro-

tation autour de l'axe (O, \vec{x}_0) horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

Paramétrage

Le repère $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

- $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$;
- $\vec{OB} = e \vec{z}_1$;
- $\vec{BI} = R \vec{z}_0$;
- $\vec{OA} = z \vec{z}_0$.

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe (O, \vec{x}_0). Le piston (2) possède une masse m_2 . Le ressort (r), de raideur k , est toujours comprimé. Pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, l'effort de compression est égal à $\vec{F}_r = -F_r \vec{z}_0$. Un moteur exerce un couple connu de moment $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$ sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe (O, \vec{z}_0) et de résultante $\vec{F}_h = -F_h \vec{z}_0$.

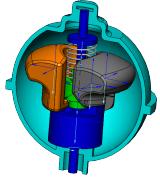
Question 1 En utilisant une fermeture géométrique ou la méthode de votre choix, déterminer la exprimer z en fonction de θ et de constantes du problème. Déterminer alors $\overrightarrow{V(A \in 2/0)}$ et $\overrightarrow{\Gamma(A \in 2/0)}$.

Question 2 Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre θ en utilisant le PFD.

Question 3 Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

Question 4 En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

Application 1 – Corrigé



Application – Pompe à plateau

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique;
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Fermeture géométrique.

On a : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$.

En projection sur \vec{z}_0 : $e \cos \theta + R = z$. Par dérivation successive, on a : $-e \dot{\theta} \sin \theta = \dot{z}$ et $-e \ddot{\theta} \sin \theta - e \dot{\theta}^2 \cos \theta = \ddot{z}$.

On isole le solide (1).

On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{x}_0 + Y_{01} \vec{y}_0 + Z_{01} \vec{z}_0 \\ M_{01} \vec{y}_0 + N_{01} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \vec{y}_0 + Z_{01} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{21} \vec{y}_0 + Z_{21} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$. On a $Z_{21} < 0$, $Y_{21} > 0$ et à la limite du glissement, $Y_{21} = -f Z_{21}$.

$$\mathcal{M}(O, 2 \rightarrow 1) = \mathcal{M}(I, 2 \rightarrow 1) + \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = (e \vec{z}_1 + R \vec{z}_0) \wedge (Y_{21} \vec{y}_0 + Z_{21} \vec{z}_0) = -e Y_{21} \cos \theta \vec{x}_0 - e Z_{21} \sin \theta \vec{x}_0 - R Y_{21} \vec{x}_0 = -((e \cos \theta + R) Y_{21} + e Z_{21} \sin \theta) \vec{x}_0.$$
- Couple moteur : $\{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{array} \right\}_O$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O, 1/0)} \cdot \vec{x}_0$.

O est un point fixe et I_1 moment d'inertie par rapport à (O, \vec{x}_0) on a donc : $\overrightarrow{\delta(O, 1/0)} \cdot \vec{x}_0 = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O, 1/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \vec{x}_0 =$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O, 1/0)} \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{dI_O(1) \overrightarrow{\Omega(1/0)} \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{dI_1 \dot{\theta} \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = I_1 \ddot{\theta}.$$

Application du théorème du moment dynamique en projection sur \vec{x}_0 .

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e Z_{21} \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On isole le solide (2).

On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot glissant : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{02} \vec{y}_0 \\ L_{02} \vec{x}_0 \end{array} \right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -Y_{21} \vec{y}_0 - Z_{21} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$.
- Ressort : $\{\mathcal{T}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_0 - k z \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$.
- Pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$.
- Fluide : $\{\mathcal{T}(\text{Fluide} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_h \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$.

Calcul de $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{z}_0$.

$$\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{z_0} = m_2 \ddot{z}$$

Application du théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

$$-F_h - Z_{21} - F_0 - kz - m_2 g = m_2 \ddot{z}.$$

Bilan :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e (-F_h - F_0 - kz - m_2 g - m_2 \ddot{z}) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On a alors :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} - e (F_h + F_0 + k(e \cos \theta + R) + m_2 g - e m_2 (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

Bilan sans frottement :

$$C_m + e (F_h + F_0 + k(e \cos \theta + R) + m_2 g - e m_2 \sin \theta (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) = I_1 \ddot{\theta}.$$

TD1



Véhicule TIM

Florestan Mathurin

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique;
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

L'éco-marathon SHELL est une compétition relative à la consommation énergétique des moyens de propulsion automobile. Les concurrents doivent concevoir et piloter leur véhicule sur une distance fixée avec une vitesse minimale imposée. Les candidats sont ensuite classés en fonction de la consommation de leur véhicule, exprimée en « kilomètre par litre » de carburant. L'étude sur ce sujet, issue d'un projet élaboré par l'équipe T.I.M. de l'INSA Toulouse, a pour objet de quantifier les effets résistants et dissipatifs que sont la résistance au roulement et les actions aérodynamiques sur les performances de leur véhicule. Les effets inertIELS étant plutôt quantifiés numériquement au niveau de la conception assistée par ordinateur du véhicule.

Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

Le principe est présenté sur la figure 1. On place 2 roues lestées sur un dispositif inclinable. On considère ensuite que l'angle d'inclinaison minimum de la pente, où il y a début du mouvement des roues, est représentatif de la résistance au roulement. L'ensemble des 2 roues lestées peut être assimilé au solide 1 représenté sur la figure 1, de masse m , de rayon R et de centre de masse G .

L'accélération de la pesanteur \vec{g} tel que $\vec{g} = -g \vec{z}_0$.

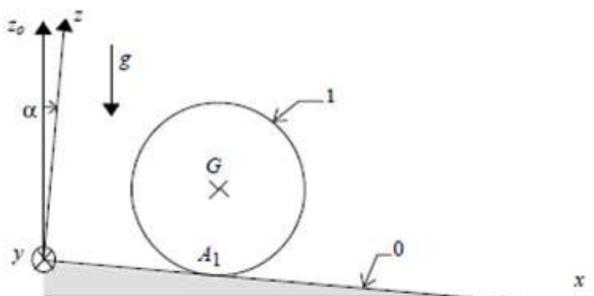


Figure 1

L'action de contact entre l'ensemble des roues 1 et le plan 0, incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, est modélisé comme un contact ponctuel avec frottement où l'on tient compte de la résistance au roulement.

Cette action de contact peut s'écrire : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \begin{cases} -T_{01} \vec{x} + N_{01} \vec{z} \\ -C_r \vec{y} \end{cases} \}_{A_1}$ où C_r représente le couple de résistance au roulement qui s'oppose au roulement tel que : $|C_r| = r |N_{01}|$ à la limite de l'équilibre et $|C_r| < r |N_{01}|$ à l'équilibre.

Question 1 Écrire le principe fondamental de la statique appliquée au solide 1 réduit au point G en projection sur la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Question 2 Déterminer l'expression analytique de l'angle α_{lim} à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

Pour une masse du solide 1 $m = 50 \text{ kg}$ et pour un rayon $R = 0,25 \text{ m}$ le roulement se produit à partir d'un angle α_{lim} tel que $\tan \alpha_{lim} = 0,008$.

Question 3 Déterminer le coefficient de résistance au roulement r .

Question 4 Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en A_1 si le coefficient de frottement au contact vaut $f = 0,5$.

Modélisation du véhicule

L'objectif est d'établir un modèle analytique du véhicule, lors d'une phase de roulement sans glissement sur une ligne droite inclinée d'un angle α , en l'absence de vent. En adoptant des conditions particulières d'essai, il sera possible d'identifier précisément, grâce à ce modèle, les actions aérodynamiques.

L'accélération de la pesanteur \vec{g} telle que $\vec{g} = -g \vec{z}_0$. Le modèle est donné figure suivante. On considère que le véhicule se déplace sur une pente inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le véhicule est constitué :

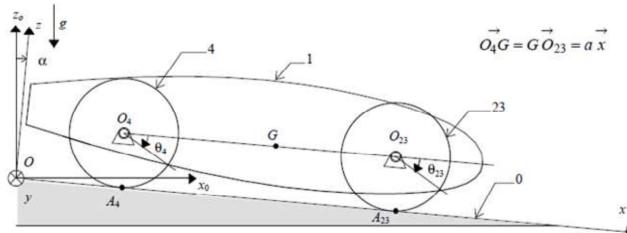
- d'un châssis avec son pilote : solide 1 de centre d'inertie G , de masse M en translation par rapport au repère galiléen R avec $\vec{OG} = x \vec{x} + R \vec{z}$;
- de deux roues avant : solide 23 de centre d'inertie O_{23} , de masse $2m$, de rayon R , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe (O_{23}, \vec{y}) sera noté $2I$. Le solide 23 est en liaison pivot sans frottement par

rapport au châssis 1 d'axe (O_{23} , \vec{y}) caractérisé par le paramètre θ_{23} ;

- d'une roue arrière motrice : solide 4 de centre d'inertie O_4 , de masse m , de rayon R , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe (O_4 , \vec{y}) sera noté I . Le solide 4 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe (O_4 , \vec{y}) caractérisé par le paramètre θ_4 ;
- un moteur d'entraînement du véhicule dont le corps est solidaire du châssis 1 exerce sur la roue 4 un couple moteur noté $C_m \vec{y}$.

Les roues sont en contact ponctuel avec frottement avec le sol 0. Afin de tenir compte de la résistance au roulement du pneu sur le sol, les actions de contact peuvent être modélisées en dynamique par : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow i)\} = \begin{cases} -T_{0i} \vec{x} + N_{0i} \vec{z} \\ -N_{0i} r \vec{y} \end{cases}_{A_i}$ avec $i = 4$ ou 23 .

L'ensemble du véhicule dont la carrosserie est soumis lors de son mouvement à un effort de traînée aérodynamique qui peut être modélisé par le torseur $\begin{cases} -\frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 \vec{x} \\ 0 \end{cases}_{O_{23}}$ avec ρ masse volumique du véhicule, S surface alaire, C_x coefficient de traînée du véhicule, \dot{x} vitesse relative du véhicule par rapport à l'air ambiant.



Question 5 Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point A_{23} et A_4 .

Question 6 En isolant l'ensemble $E = 1+2+3+4$, écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x} et \vec{z} .

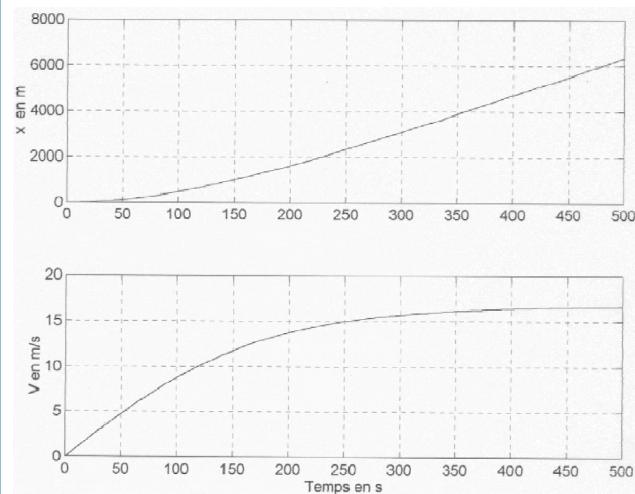
Question 7 Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en O_{23} et O_4 en projection sur \vec{y} .

Question 8 Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur C_m vaut : $C_m = (M+3m)g \cos \alpha r + \left[\frac{3I}{R} + R(M+3m) \right] \ddot{x} - R(M+3m)g \sin \alpha + \frac{1}{2} R \rho S C_x \dot{x}^2$.

Question 9 Identifier dans l'expression de C_m les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

Question 10 Déterminer l'expression du couple moteur C_m quand le véhicule a une vitesse constante V sur une piste horizontale.

On réalise un essai du véhicule sur terrain horizontal, le moteur du véhicule délivrant un couple C_m constant. Les données véhicules sont : $M = 70\text{kg}$, $m = 1\text{kg}$, $r = 2.10^{-3}\text{m}$, $R = 0.25\text{m}$, $C_x = 3,245\text{mN}$, $g = 10\text{ms}^{-2}$. L'acquisition des paramètres vitesse véhicule et distance parcourue sont visualisés par les graphes ci-dessous.



Question 11 Déterminer dans les conditions d'essais le produit $\frac{1}{2} \rho S C_x$ caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

Question 12 Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de 5 km h^{-1} (on négligera le couple de résistance au roulement).

1. $-T_{01} + mg \sin \alpha = 0; N_{01} - mg \cos \alpha = 0; C_r = RT_{01}$.
2. $\tan \alpha_{\lim} = \frac{R}{r}$.
3. $r = 0,002\text{m}$.
4. Pour $\alpha_{\lim} < f$ il y a donc roulement sans glissement.
5. $\dot{x} = R\dot{\theta}_{23}$ et $\ddot{x} = R\ddot{\theta}_4$.
6. $(M+3m)g \sin \alpha - \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M+3m)\ddot{x}$ et $-(M+3m)g \cos \alpha + N_{04} + N_{023} = 0$.
7. $-rN_{023} + RT_{023} = 2I\ddot{\theta}_{23}$ et $-rN_{04} + RT_{04} + C_m = I\ddot{\theta}_4$.
- 8.
- 9.
- 10.
11. $\frac{1}{2} \rho S C_x = 0,025\text{ kg m}^{-1}$.
12. $\alpha = 1^\circ$.

TD 1 – Corrigé



Véhicule TIM

Florestan Mathurin

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique;
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

Question 1 Écrire le principe fondamental de la statique appliquée au solide 1 réduit au point G en projection sur la base (\vec{x} , \vec{y} , \vec{z}).

Correction

- On isole le solide 1.
- Le solide est soumis à l'action de pesanteur et à l'action du sol.
- On applique le PFS :
 - TRS : $-T_{01}\vec{x} + N_{01}\vec{z} = -mg\vec{z}_0 = -mg(\cos\alpha\vec{z} - \sin\alpha\vec{x})$;
 - TMS en G en projection sur \vec{y} : $-C_r + RT_{01} = 0$.
- On résout :
 - $-T_{01} + mg \sin\alpha = 0$;
 - $N_{01} - mg \cos\alpha = 0$;
 - $C_r = RT_{01}$.

Question 2 Déterminer l'expression analytique de l'angle α_{\lim} à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

Correction À la limite du roulement, on a $C_r = rN_{01} \Leftrightarrow RT_{01} = rN_{01} \Leftrightarrow Rmg \sin\alpha_{\lim} = rmg \cos\alpha_{\lim}$ et $\tan\alpha_{\lim} = \frac{r}{R}$.

Pour une masse du solide 1 $m = 50\text{ kg}$ et pour un rayon $R = 0,25\text{ m}$ le roulement se produit à partir d'un angle α_{\lim} tel que $\tan\alpha_{\lim} = 0,008$.

Question 3 Déterminer le coefficient de résistance au roulement r .

Correction $r = 0,002\text{ m}$.

Question 4 Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en A_1 si le coefficient de frottement au contact vaut $f = 0,5$.

Correction À la limite du glissement, on a $T_{01} = fN_{01}$ et $\frac{T_{01}}{N_{01}} = \tan\alpha$. Pour $\alpha_{\lim} < f$ il y a donc roulement sans glissement.

Modélisation du véhicule

Question 5 Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point A_{23} et A_4 .

Correction En A_{23} , on a : $\overrightarrow{V(A_{23} \in 23/0)} = \vec{0}$. On a alors $\overrightarrow{V(A_{23} \in 23/1)} = \overrightarrow{V(A_{23} \in 23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23} \in 1/0)}$ et $\vec{0} = \overrightarrow{V(O_{23} \in 23/1)} + \overrightarrow{A_{23} O_{23}} \wedge \vec{\Omega}(23/1) + \overrightarrow{V(A_{23} \in 1/0)} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} + R \vec{z} \wedge \dot{\theta}_{23} \vec{y} + \dot{x} \vec{x} \Rightarrow 0 = -R \dot{\theta}_{23} + \dot{x}$.
De même en A_4 , $0 = -R \dot{\theta}_4 + \dot{x}$.

Question 6 En isolant l'ensemble $E = 1 + 2 + 3 + 4$, écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x} et \vec{z} .

Correction

- On isole E .

- BAME :

- Pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{Pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{l} -(M+3m)g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_E} = \left\{ \begin{array}{l} -(M+3m)g(\cos \alpha \vec{z} - \sin \alpha \vec{x}) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_E}$.
- Résistance au roulement : $\{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_i = \left\{ \begin{array}{l} -T_{0i} \vec{x} + N_{0i} \vec{z} \\ -C_r \vec{y} \end{array} \right\}_{A_i}$.
- Traînée : $\{\mathcal{T}(\text{Trainee} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_{23}}$.

- La résultante dynamique est donnée par $(M+3m) \overrightarrow{\Gamma(G \in E/0)} = (M+3m) \ddot{x} \vec{x}$.
- On applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x} et \vec{z} :
 - $(M+3m)g \sin \alpha - \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M+3m) \ddot{x}$
 - $(M+3m)g \cos \alpha + N_{04} + N_{023} = 0$

Question 7 Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en O_{23} et O_4 en projection sur \vec{y} .

Correction

- On isole 23.

- BAME :

- 23 est soumis à la pesanteur;
- action de la pivot sans frottement avec le solide 1;
- résistance au roulement : $\{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_{23} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{023} \vec{x} + N_{023} \vec{z} \\ -N_{023} r \vec{y} \end{array} \right\}_{A_{23}} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{023} \vec{x} + N_{023} \vec{z} \\ (-r N_{023} + R T_{023}) \vec{y} \end{array} \right\}_{O_{23}}$.

- Le moment dynamique de O_{23} centre d'inertie des roues en projection sur \vec{y}_0 s'écrit $\overrightarrow{\delta(O_{23}, 23/0)} \vec{y}_0 = 2I \ddot{\theta}_{23}$.
- TMD en O_{23} en projection sur \vec{y}_0 s'écrit donc $-r N_{023} + R T_{023} = 2I \ddot{\theta}_{23}$.

De même pour la roue 4 en ajoutant la sollicitation du couple moteur : $-r N_{04} + R T_{04} + C_m = I \ddot{\theta}_4$.

Question 8 Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur C_m vaut :

$$C_m = (M+3m)g \cos \alpha r + \left[\frac{3I}{R} + R(M+3m) \right] \ddot{x} - R(M+3m)g \sin \alpha + \frac{1}{2} R \rho S C_x \dot{x}^2.$$

Correction On a : $C_m = I \ddot{\theta}_4 + r N_{04} - R T_{04} = \frac{I}{R} \ddot{x} + r N_{04} - R T_{04} = \frac{I}{R} \ddot{x} - r N_{023} + r(M+3m)g \cos \alpha - R T_{04} = \frac{I}{R} \ddot{x} - R T_{023} + 2I \ddot{\theta}_{23} + r(M+3m)g \cos \alpha - R T_{04} = \frac{I}{R} \ddot{x} + \frac{2I}{R} \ddot{x} + r(M+3m)g \cos \alpha - R \left((M+3m)g \sin \alpha - \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 - (M+3m) \ddot{x} \right)$.
 $C_m = r(M+3m)g \cos \alpha + \left(\frac{3I}{R} + R(M+3m) \right) \ddot{x} + \left(-R(M+3m)g \sin \alpha + R \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 \right)$.

CQFD.

Question 9 Identifier dans l'expression de C_m les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

Correction

$$C_m = \underbrace{(M+3m)gr \cos \alpha}_{\text{Résistance au roulement}} - \underbrace{(M+3m)gR \sin \alpha}_{\text{Couple pour monter la pente}} + \underbrace{\left(\frac{3I}{R} + R(M+3m)\right)\ddot{x}}_{\text{Couple pour vaincre les effets d'inertie}} + \underbrace{R\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

Question 10 Déterminer l'expression du couple moteur C_m quand le véhicule a une vitesse constante V sur une piste horizontale.

Correction À vitesse constante sur du plat, on a :

$$C_m = \underbrace{(M+3m)gr}_{\text{Résistance au roulement}} + \underbrace{R\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

Question 11 Déterminer dans les conditions d'essais le produit $\frac{1}{2}\rho SC_x$ caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

Correction La vitesse constante atteinte sur les graphes est de 17 m s^{-1} . Par ailleurs $\frac{1}{2}\rho SC_x = \frac{C_m - (M+3m)gr}{R\dot{x}^2} = \frac{3,245 - (70 + 3 \cdot 1) \cdot 10 \cdot 0,002}{0,25 \cdot 17^2} = 0,025 \text{ kg m}^{-1}$.

Question 12 Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de 5 km h^{-1} (on négligera le couple de résistance au roulement).

Correction