Application 1

Micromoteur de modélisme ⋆

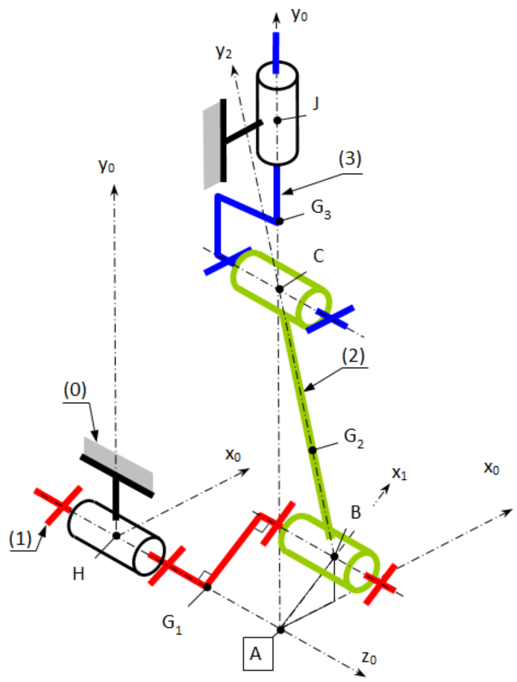
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Mise en situation

Les figures et le schéma ci-dessous représentent un micromoteur à combustion interne de modèle réduit. Du point de vue cinématique, il est basé sur un système bielle manivelle **(2,1)**, associé à un piston **(3)**, animé d'un mouvement de translation rectiligne alternatif.



On note :

- $\overrightarrow{AB} = e\,\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BC} = L_2\,\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda_3\,\overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{HG_1} = a_1\,\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BG_2} = a_2\,\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{CG_3} = a_3\,\overrightarrow{y_0}$;
- $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right) = \theta_1$, $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_2}\right) = \theta_2$; $\omega_{10} = \dot{\theta}_1$ et $\omega_{20} = \dot{\theta}_2$;
- m_1, m_2 et m_3 les masses des trois pièces mobiles **(1)**, **(2)** et **(3)**.

On note $C_m\,\overrightarrow{z_0}$ le couple délivré par le moteur et $F_e\,\overrightarrow{y_0}$ la force exercée sur le piston suite à l'explosion du mélange air – carburant. On néglige les effets de la pesanteur.

Question 1 *Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin **(1)** et la vitesse du piston **(3)**, notée $\dot{\lambda} = V_{3/0}$.*

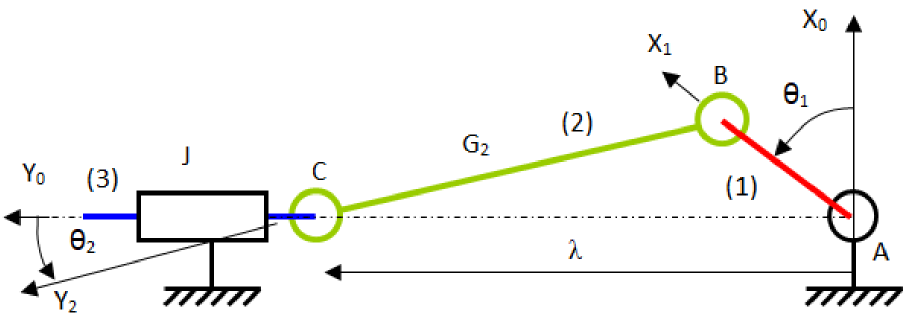
Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

On note $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$ la matrice d'inertie en H de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré **(1)**.

Question 2 *En considérant que seul le plan $\left(H,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.*

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie $I_A(1)$, $I_{G_2}(2)$ et $I_{G_3}(3)$ sont diagonales.

Question 3 *Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.*



Application 1 – Corrigé

Micromoteur de modélisme ⋆

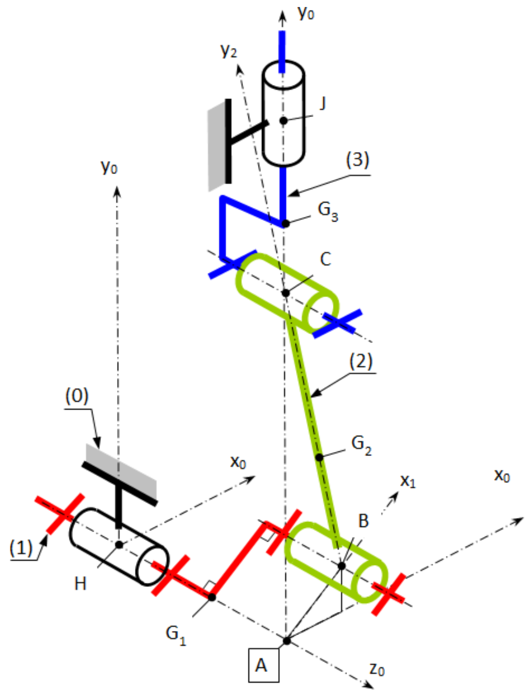
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Mise en situation

Les figures et le schéma ci-dessous représentent un micromoteur à combustion interne de modèle réduit. Du point de vue cinématique, il est basé sur un système bielle manivelle **(2,1)**, associé à un piston **(3)**, animé d'un mouvement de translation rectiligne alternatif.



On note :

- $\overrightarrow{AB} = e\,\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BC} = L_2\,\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda_3\,\overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{HG_1} = a_1\,\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BG_2} = a_2\,\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{CG_3} = a_3\,\overrightarrow{y_0}$;
- $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right) = \theta_1$, $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_2}\right) = \theta_2$; $\omega_{10} = \dot{\theta}_1$ et $\omega_{20} = \dot{\theta}_2$;
- m_1, m_2 et m_3 les masses des trois pièces mobiles **(1)**, **(2)** et **(3)**.

On note $C_m\,\overrightarrow{z_0}$ le couple délivré par le moteur et $F_e\,\overrightarrow{y_0}$ la force exercée sur le piston suite à l'explosion du mélange air – carburant. On néglige les effets de la pesanteur.

Question 1 *Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin **(1)** et la vitesse du piston **(3)**, notée $\dot{\lambda} = V_{3/0}$.*

Correction On réalise une fermeture géométrique dans le triangle ABC et on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow e\,\overrightarrow{x_1} + L_2\,\overrightarrow{x_2} - \lambda_3\,\overrightarrow{y_0} \Leftrightarrow e\left(\cos\theta_1\,\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_1\,\overrightarrow{y_0}\right) + L_2\left(\cos\theta_2\,\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_2\,\overrightarrow{y_0}\right) - \lambda_3\,\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0}$. On a donc : $\left\{\begin{array}{l} e\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 = 0 \\ e\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2 - \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_2 \cos\theta_2 = -e\cos\theta_1 \\ L_2 \sin\theta_2 = \lambda_3 - e\sin\theta_1 \end{array} \right.$ Au final, $L_2^2 = e^2\cos^2\theta_1 + (\lambda_3 - e\sin\theta_1)^2 \Leftrightarrow L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1 = (\lambda_3 - e\sin\theta_1)^2$

$\Rightarrow \sqrt{L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1} = \lambda_3 - e\sin\theta_1 \Rightarrow \lambda_3 = \sqrt{L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1} + e\sin\theta_1$.

Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

On note $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$ la matrice d'inertie en H de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré **(1)**.

Question 2 *En considérant que seul le plan $(H,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{z_1})$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.*

Correction On a donc une invariance suivant $\overrightarrow{y_1}$ et $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie $I_A(1)$, $I_{G_2}(2)$ et $I_{G_3}(3)$ sont diagonales.

Correction H est un point fixe :

- $\{\sigma(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(1/0)} = m_1\overrightarrow{V(G_1\in 1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(H,1/0)} = I_H(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_H$
- $\{\mathscr{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1\overrightarrow{\Gamma(G_1\in 1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(H,1/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\delta(H,1/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_1\ddot{\theta}_1\overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_H$

G_3 est le centre de gravité de 3. Le solide 3 est en translation par rapport à 0.

- $\{\sigma(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(3/0)} = m_3\overrightarrow{V(G_3\in 3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{c} m_3\dot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_3}$
- $\{\mathscr{D}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(3/0)} = m_1\overrightarrow{\Gamma(G_3\in 3/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_3,1/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{c} m_3\ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_3}$

G_2 est le centre de gravité de 2.

- $\{\sigma(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(2/0)} = m_2\overrightarrow{V(G_2\in 2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)} = I_{G_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2\left(\dot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} + a_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}\right) \\ C_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$
- $\{\mathscr{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2\in 2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_2,2/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2\left(\ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} + a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{x_2} + a_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}\right) \\ C_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$

Détail des calculs.

Calcul de $\overrightarrow{V(G_2\in 2/0)}$.

$\overrightarrow{V(G_2\in 2/0)} = \overrightarrow{V(G_2\in 2/3)} + \overrightarrow{V(G_2\in 3/0)}$

$\overrightarrow{V(G_2\in 2/3)} = \overrightarrow{V(C\in 2/3)} + \overrightarrow{G_2C}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/3)} = \overrightarrow{0} + a_2\overrightarrow{y_2}\wedge\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_0} = a_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}$ $\quad\overrightarrow{V(G_2\in 3/0)} = \dot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0}$

$\overrightarrow{V(G_2\in 2/0)} = \dot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} + a_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_2\in 2/0)}$.

$\overrightarrow{\Gamma(G_2\in 2/0)} = \ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0} + a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{x_2} + a_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}$.

Question 3 *Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.*

Correction

- On isole **(1)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(0\rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(A,0\rightarrow 1)} \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,0\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(2\rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(B,2\rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison). Par ailleurs, $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B,2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0} + \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R(2\rightarrow 1)}\right)\overrightarrow{z_0} = \left(e\,\overrightarrow{x_1}\wedge\left(X_{21}\overrightarrow{x_2}+Y_{21}\overrightarrow{y_2}\right)\right)\overrightarrow{z_0}$ $= \left(e\,X_{21}\overrightarrow{x_1}\wedge\overrightarrow{x_2}+e\,Y_{21}\overrightarrow{x_1}\wedge\overrightarrow{y_2}\right)\overrightarrow{z_0} = e\,X_{21}\sin(\theta_2-\theta_1)+e\,Y_{21}\cos(\theta_2-\theta_1)$
  - Couple moteur : $\{\mathscr{T}(0_m\rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_A$.
- On applique le TMD en A en projection suivant $\overrightarrow{z}$:

$$e\,X_{21}\sin(\theta_2-\theta_1)+e\,Y_{21}\cos(\theta_2-\theta_1)+C_m = C_1\ddot{\theta}_1$$

- On isole **(2)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(2\rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2\rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(3\rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(2\rightarrow 3)} \\ -\overrightarrow{\mathscr{M}(C,2\rightarrow 3)} \end{array} \right\}_C$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(C,2\rightarrow 3)}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
- On applique le TMD en C en projection sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$-\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{R(2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z} = \overrightarrow{\delta(C,2/0)}\cdot\overrightarrow{z} \Longleftrightarrow L_2\overrightarrow{y_2}\wedge\left(X_{21}\overrightarrow{x_2}+Y_{21}\overrightarrow{y_2}\right)\cdot\overrightarrow{z} = \left(\overrightarrow{\delta(G_2,2/0)}+\overrightarrow{CG_2}\wedge m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2\in 2/0)}\right)\cdot\overrightarrow{z}$$

$$\Longrightarrow -L_2X_{21} = C_2\ddot{\theta}_2\left(-a_2\overrightarrow{y_2}\wedge\left(m_2\left(\ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0}+a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}+a_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}\right)\right)\right)\cdot\overrightarrow{z}$$
$$\Longrightarrow -L_2X_{21} = C_2\ddot{\theta}_2+a_2m_2\left(\ddot{\lambda}_3\sin\theta_2-a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{z_2}\right)$$

- On isole **(2+3)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison glissière : $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(0\rightarrow 3)} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(A,0\rightarrow 3)} \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{R(0\rightarrow 3)}\cdot\overrightarrow{y_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(2\rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2\rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Force explosion : $\{\mathscr{T}(0_e\rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_y\overrightarrow{y}+F_z\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{C_{exp}} \end{array} \right\}_C$.
- On applique le TRD en projection sur $\overrightarrow{y_0}$:

$$F_y-Y_{21} = m_3\ddot{\lambda}_3+\left(m_2\left(\ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0}+a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}+a_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}\right)\right)\cdot\overrightarrow{y_0}$$

$$\Longleftrightarrow F_y-Y_{21} = m_3\ddot{\lambda}_3+\left(m_2\left(\ddot{\lambda}_3+a_2\ddot{\theta}_2\sin\theta_2+a_2\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2\right)\right)$$