

TD 02



Dynamique d'un Segway de première génération *

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier

Savoirs et compétences :

Présentation

Objectif L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Correction On a $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0) = -R_C \dot{\theta} \vec{x}_1$. On a alors $V_L = R_C \dot{\theta}$.

Question 2 Exprimer l'accélération, notée $\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C .

Correction $\overrightarrow{\Gamma}(G_E/\mathcal{R}_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -R_C \ddot{\theta} \vec{x}_1 - R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 = -R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$ ($\dot{\theta}$ est constant).

Question 3 Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A , T_B , N_A , N_B et f traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant $T_A + T_B$ à f et $N_A + N_B$.

Correction La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc, $T_A \leq f N_A$ et $T_B \leq f N_B$. En sommant les inégalités, on a donc $T_A + T_B \leq f(N_A + N_B)$.

Question 4 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{z}_0 .

Correction E étant un ensemble indéformable, on a : $\overrightarrow{R_d}(E/\mathcal{R}_0) = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$ (pas de projection sur \vec{z}_0). On isole E et les roues et on réalise le BAME :

- pesanteur sur E ;
- action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur \vec{z}_{01} , on a donc : $N_A + N_B - m_E g = 0$.

Question 5 Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{y}_1 . En déduire une inéquation donnant la vitesse limite V_L de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.

Correction En appliquant le TRD en projection sur \vec{y}_1 , on a : $-T_A - T_B = -m_E R_C \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C \dot{\theta}^2$. En utilisant les résultats de la question précédente, $m_E R_C \dot{\theta}^2 \leq f m_E g$. En notant $V_L = R_C \dot{\theta}$ la vitesse limite avant dérapage, on a $\frac{V_L^2}{R_C} \leq f g$. On a donc $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$.

Question 6 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction La vitesse limite est donc de 10 m s^{-1} soient 36 km h^{-1} ce qui satisfait le cahier des charges.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

Question 7 Calculer le torseur dynamique du système matériel E en G_E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Exprimer ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Correction Au centre d'inertie de E , on a $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{d\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$. On a $\overrightarrow{\Omega(E/\mathcal{R}_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0$. On a donc, $\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta} \vec{x}_1 - D \dot{\theta} \vec{y}_1 + C \dot{\theta} \vec{z}_{01}$. On a donc $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$.
En conséquence, $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \\ -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_E}$.

Question 8 Calculer $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ le moment dynamique au point B de l'ensemble (E) dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en projection sur \vec{x}_1 .

Correction $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d(B/E)} = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + (h \vec{z}_0 - l \vec{y}_1) \wedge (-m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{y}_1) = -E \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 + D \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + h m_E R_C \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$. $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1 = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.

Question 9 En appliquant le théorème du moment dynamique au point B à l'ensemble E et les roues dans leur mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 , en projection sur \vec{x}_1 , écrire l'équation scalaire qui donne N_A en fonction de $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \vec{x}_1$ et des données du problème.

Correction On a :
• $\overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \vec{z}_{01} = (-l \vec{y}_1 + h \vec{z}_0) \wedge -m_E g \vec{z}_{01} = l m_E g \vec{x}_1$;
• $\overrightarrow{BA} \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l \vec{y}_1 \wedge (-T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1) = -2l N_A \vec{x}_1$.
En appliquant le TMD en B suivant \vec{x}_1 , on a : $l m_E g - 2l N_A = (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2$.
Au final, $N_A = \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l}$.

Question 10 Écrire la condition de non renversement du véhicule.

Correction Pour qu'il y ait non renversement, N_A doit rester positif ou nul.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 11 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.

Correction $N_A \simeq \frac{l m_E g - h m_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0$. Ce qui est positif (pas de basculement).
 $N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{l m_E g - (D + h m_E R_C) \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow l g - h R_C \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow l g - h V_L^2 / R_C \geq 0 \Rightarrow l g \geq h V_L^2 / R_C \Rightarrow \sqrt{\frac{R_C l g}{h}} \geq V_L$
 $\Rightarrow V_L \leq 6.38 \text{ m s}^{-1} = 22.9 \text{ km h}^{-1}$. CDCF Validé.