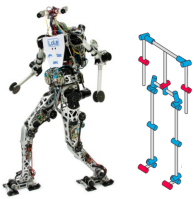


Synthèse 1



Le robot humanoïde Lola

Concours Mines Ponts – PSI 2015

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide*
- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*

Mise en situation

Le développement de robots à forme humaine est en croissance constante depuis quelques dizaines d'années. En robotique, il est difficile d'affirmer que tous les robots remplaçant l'homme dans ses tâches doivent être de forme humaine. Les véhicules autonomes, par exemple, ne sont pas anthropomorphes. Les tâches auxquelles sont destinées les robots définissent leur forme idéale. Si nous souhaitons un jour que les robots remplacent l'homme dans ses tâches ennuyeuses, ils devront s'intégrer au mieux à notre société, à notre environnement et à notre ergonomie.

Les dimensions d'une maison et la hauteur des meubles sont adaptées à notre forme humaine. L'avantage des robots humanoïdes devient alors économique : il n'est pas indispensable de modifier l'environnement quotidien pour les utiliser.

Le robot humanoïde LOLA, développé par l'Université de Munich, est un robot de forme humaine conçu pour un mode de marche rapide. LOLA possède une structure à 25 degrés de liberté lui permettant une flexibilité accrue. Chaque jambe possède 7 degrés de liberté, le haut du corps 8 et la tête 3. Le robot est équipé d'une caméra stéréoscopique haute définition afin de percevoir son environnement, d'une centrale inertielle équipée de 3 gyroscopes et de 3 accéléromètres. Chaque articulation possède un codeur angulaire absolu et chaque pied est muni d'un capteur d'effort 6 axes permettant d'obtenir l'effort de contact avec le sol. Les caractéristiques techniques de LOLA sont données dans le tableau suivant.

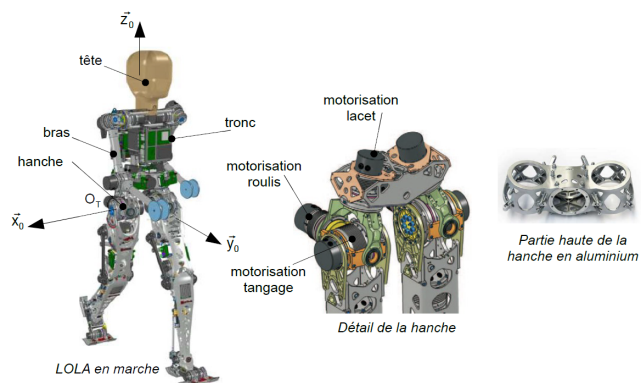
Caractéristiques	Valeurs
Hauteur	180 cm
Masse	55 kg
Nombre de degrés de liberté	25
Vitesse de marche	5 km.h ⁻¹ maxi
Hauteur du centre de gravité	105 cm

Contrôle de la posture de LOLA

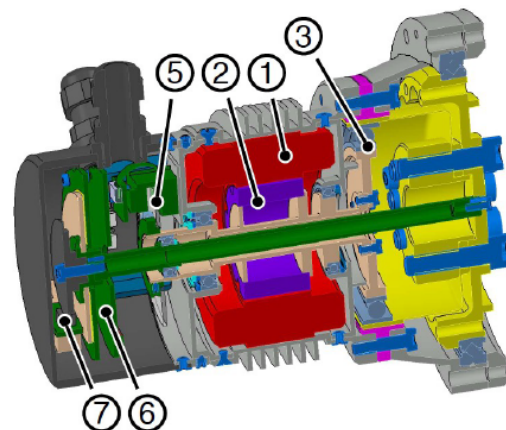
Pour assurer une marche rapide et stable de LOLA, la méthode choisie est le contrôle de la verticalité du tronc du robot (figure 5). Le haut du corps (tronc, bras, tête) sera maintenu vertical en réalisant un asservissement de position angulaire au niveau de l'articulation de la hanche. L'action mécanique de redressement est développée par

l'ensemble de motorisation de tangage autour de l'axe (O_T, \vec{x}_0) . Les performances à vérifier dans cette partie sont définies par les exigences suivantes.

Exigence 1.3 : le robot ne doit pas basculer lors de la marche	
Sous-exigence	Description
Id=1.3.2	La posture du robot est adaptée à la position du ZMP
Id=1.3.2.d	La performance dynamique de chaque axe permet de modifier la posture



La chaîne structurelle permettant de modifier la posture du haut du corps autour de l'axe de tangage est représentée sur la figure 6. Elle est composée d'un moteur électrique (1,2) synchrone à aimants permanents piloté par un variateur électronique, d'un réducteur Harmonic Drive© (3) de rapport de réduction 1/100, d'un codeur incrémental (5) ainsi que d'un codeur angulaire absolu (6+7). Une centrale inertielle équipée d'un accéléromètre, d'un gyroscope et d'une unité de traitement permet d'obtenir en temps réel la valeur de l'angle d'inclinaison du haut du corps par rapport à la verticale.



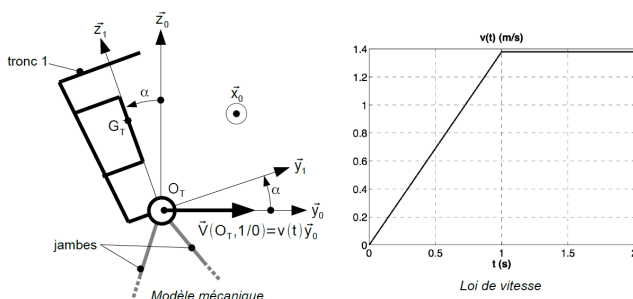
Objectif L'objectif de cette partie est de mettre en place un modèle du maintien vertical du tronc de LOLA et de déterminer une structure de commande permettant d'assurer les performances du cahier des charges de l'exigence 1.3.2.

Les performances dynamiques de l'axe de tangage doivent vérifier les critères suivants :

Sous-exigence 1.3.2.d : la performance dynamique de chaque axe permet de modifier la posture		
Critère	Niveau	Flexibilité
Marge de phase	$M_{\phi} = 50^\circ$	Mini
Erreur statique	0°	$[-0.5^\circ; +0.5^\circ]$
Bande passante à 0 dB en boucle ouverte	$\omega_{bp} = 50 \text{ rad.s}^{-1}$	Mini
Temps de réponse à 5%	0.2 s	Maxi
Dépassement	1°	Maxi

Modèle de connaissance de la dynamique de tangage

Le modèle mécanique utilisé pour mener notre étude est donné sur la figure suivante. L'association des liaisons entre le tronc et les jambes au niveau de la hanche est équivalente, dans le plan sagittal $(O_T, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, à une liaison pivot d'axe (O_T, \vec{x}_0) . Le tronc sera considéré comme un solide admettant le plan $(O_T, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ comme plan de symétrie. Le cahier des charges stipule que LOLA doit pouvoir marcher à la vitesse de 5 km/h. Cette vitesse est atteinte en 1 s lors de la première foulée. La loi de commande en vitesse correspondante est représentée ci-dessous.



Le mouvement de marche est imposé et modélisé par le torseur cinématique en O_T du mouvement du tronc 1 par rapport au sol 0 : $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{d\alpha}{dt} \vec{x}_0 \\ v(t) \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_T}$.

Les caractéristiques d'inertie du tronc 1 de LOLA sont :

- la matrice d'inertie en O_T $I_{O_T}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}$
- position du centre de gravité : $\vec{O_T G_T} = Z_G \vec{z}_1$;
- masse : m_1 ;
- l'accélération de la pesanteur sera prise égale à $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$.

L'axe de sortie du réducteur exerce un couple de redressement sur le tronc 1 modélisé par le torseur couple suivant : $\{\mathcal{T}(\text{hd} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_R \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{O_T}$. L'angle α sera supposé faible pendant le mouvement : ainsi $\cos \alpha \approx 1$ et $\sin \alpha \approx \alpha$.

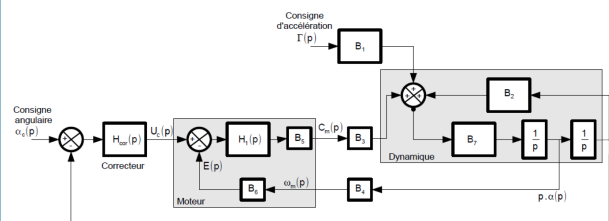
Question 1 Proposer une démarche de résolution afin d'obtenir l'équation différentielle du mouvement reliant α et ses dérivées successives aux données du problème. Effectuer un bilan des actions mécaniques extérieures au système matériel isolé.

Question 2 Développer l'ensemble des calculs pour déterminer l'équation différentielle reliant α et ses dérivées successives aux données du problème.

Le contrôle de l'angle s'effectue par l'intermédiaire du moteur asservi en position, suivi du réducteur Harmonic-Drive© de rapport de réduction $r = \frac{1}{100}$. Le moment d'inertie de l'arbre moteur suivant son axe de rotation est noté J_m , le couple moteur exercé sur l'arbre d'entrée du réducteur est noté C_m . Le réducteur Harmonic-Drive© sera considéré sans masse. La masse de l'arbre moteur est négligeable devant l'ensemble des autres grandeurs inertielles. Une étude dynamique a permis de montrer que : $C_R = \frac{C_m}{r} - \frac{J_m}{r^2} \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2}$. Ainsi, l'équation différentielle du mouvement devient : $J_{eq} \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} - m_1 g Z_G \alpha(t) = m_1 Z_G \frac{dv(t)}{dt} + \frac{C_m(t)}{r}$. J_{eq} est le moment d'inertie équivalent de l'ensemble du tronc ramené sur l'axe moteur.

Modèle du contrôle actif de la position verticale

On note $\Gamma(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. Les conditions de Heaviside sont vérifiées. Le schéma-blocs du contrôle de la position angulaire du tronc de LOLA est représenté sur la figure suivante. La consigne angulaire est nulle afin de garder le tronc du robot vertical : $\alpha_c(t) = 0$. Les transformées de Laplace des fonctions seront notées en majuscules et le paramètre de Laplace sera noté p .



Le comportement du moteur sera considéré comme celui d'un moteur à courant continu dont les équations de comportement sont les suivantes : $u_c(t) = e(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R i(t)$; $e(t) = k_e \omega_m(t)$ et $C_m(t) = k_c i(t)$.

Question 3 Indiquer les fonctions de transfert des blocs $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ et B_7 ainsi que l'expression de la fonction de transfert $H_1(p)$.

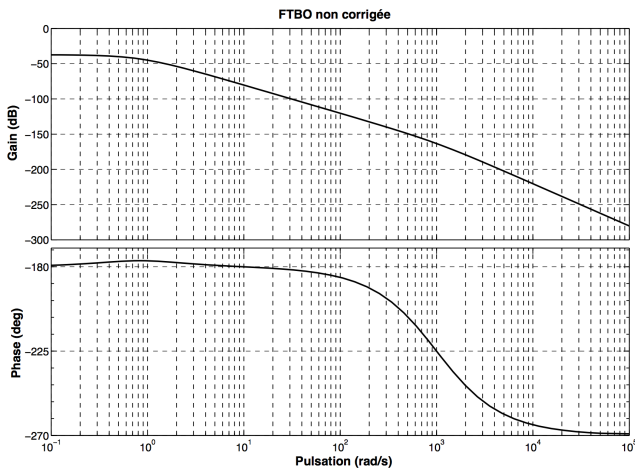
Afin d'analyser la stabilité de cet asservissement, nous cherchons à déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système non-corrigé : $F(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$ en supposant la perturbation nulle.

Question 4 Déterminer la fonction de transfert de la boucle dynamique $H_{dyn}(p) = \frac{\alpha(p)}{C_m(p)}$ en supposant la per-

turbation nulle.

Question 5 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée de l'asservissement $F(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$. Indiquer son ordre, sa classe et donner son gain statique K en fonction des données.

Une simulation numérique permet de montrer que $F(p)$ est de la forme $\frac{K}{(1 + \tau_1 p)(-1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$. Les diagrammes de Bode de cette fonction de transfert sont donnés ci-dessous.



Question 6 En analysant les diagrammes de Bode, déterminer les valeurs de τ_1 , τ_2 et K . Justifier en complétant les diagrammes avec les diagrammes asymptotiques de gain et de phase.

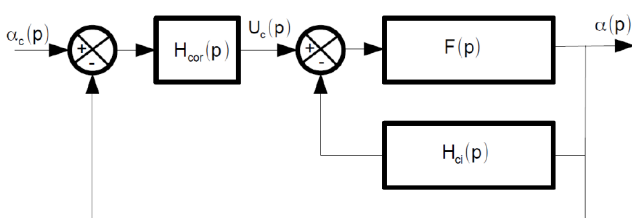
Pour la suite de l'étude, nous simplifierons $F(p)$ sous la forme suivante : $\frac{K}{(1 + \tau_1 p)(-1 + \tau_1 p)}$.

Question 7 Justifier le choix de cette simplification.

Question 8 Expliquer pourquoi le critère du revers ne peut pas être appliqué pour étudier la stabilité en boucle fermée.

Afin de résoudre ce problème, il est décidé d'asservir la chaîne directe en position et en vitesse. Pour cela, la centrale inertielle permet de mesurer l'angle de tangage $\alpha(t)$ ainsi que la vitesse angulaire $\frac{d\alpha(t)}{dt}$.

L'asservissement ainsi réalisé est présenté sous la forme du schéma-blocs de la figure suivante. $U_c(p)$ est la tension de commande en sortie du correcteur. La fonction de transfert de la centrale inertielle sera prise égale à $H_{ci}(p) = K_i(p + 1)$.



Question 9 Déterminer deux conditions sur K_1 pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée $\frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$ soit stable. En déduire la valeur minimale de K_1 .

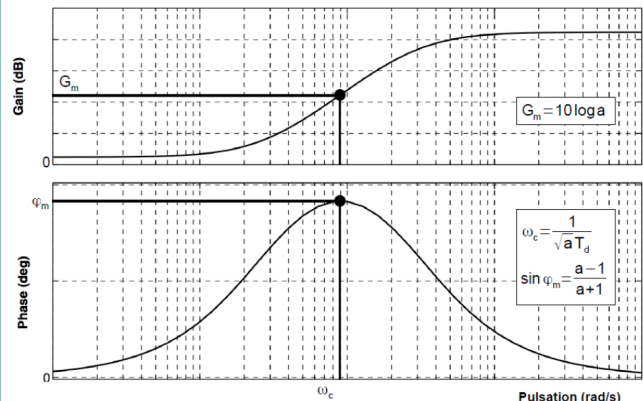
Question 10 Déterminer K_1 pour que la fonction de transfert $\frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$ ait un facteur d'amortissement $\xi = 1,7$. Vérifier que cette valeur est compatible avec les conditions obtenues précédemment. En déduire les valeurs de la pulsation propre ω_0 et du gain statique de la boucle ouverte K_{BO} .

Quels que soient les résultats trouvés précédemment, nous utiliserons les expressions suivantes pour la suite de l'étude : $\frac{\alpha(p)}{U_c(p)} = \frac{K_{BO}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $K_{BO} = 1,1 \cdot 10^{-3}$,

$\xi = 1,7$ et $\omega_0 = 3 \text{ rad s}^{-1}$. Pour répondre au cahier des charges, il est décidé d'implanter un correcteur de fonction de transfert suivante : $H_{cor}(p) = K_p \frac{1 + aT_d p}{1 + T_d p}$ avec $a > 1$.

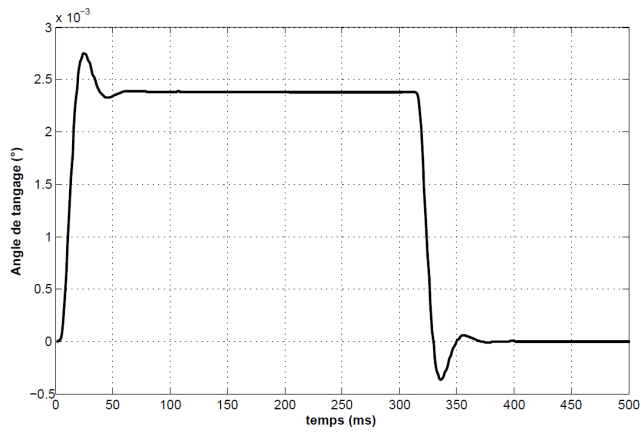
Question 11 Nommer ce correcteur.

Les diagrammes de Bode de gain et de phase (pour $K_p = 1$) de ce correcteur sont fournis ci-dessous. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer ω_c en $\omega_{BP} = 50 \text{ rad s}^{-1}$, définissant ainsi la bande passante.



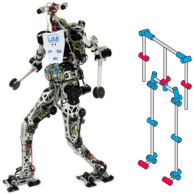
Question 12 Déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d .

Question 13 Déterminer le gain K_p pour que le critère de bande passante du cahier des charges soit bien vérifié. La stabilité du tronc étant assurée, nous devons maintenant analyser les performances en précision et rapidité de l'asservissement de position angulaire. La consigne est nulle, ainsi seule la perturbation va écartier le tronc du robot de sa posture verticale. Cette perturbation provient du mouvement de marche souhaité c'est à dire de l'accélération subie $\Gamma(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. Avec les réglages du correcteur, une simulation numérique a permis de tracer la réponse temporelle du système pour une perturbation $\Gamma(t)$ respectant la loi de vitesse présentée précédemment. Cette réponse est tracée sur la figure suivante.



Question 14 Justifier l'allure de la réponse temporelle. Déterminer graphiquement sur le document réponse le temps de réponse à 5%, le dépassement maximal et l'erreur statique. Conclure sur la capacité du correcteur à vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

Synthèse 1 – Corrigé



Le robot humanoïde Lola

Concours Mines Ponts – PSI 2015

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

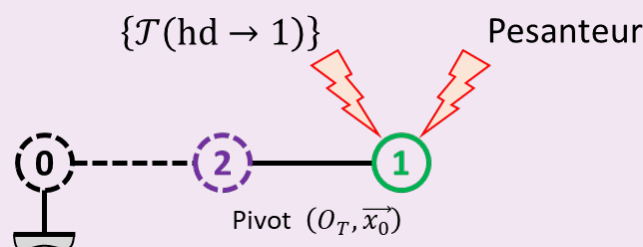
Mise en situation

Objectif L'objectif de cette partie est de mettre en place un modèle du maintien vertical du tronc de LOLA et de déterminer une structure de commande permettant d'assurer les performances du cahier des charges de l'exigence 1.3.2.

Modèle de connaissance de la dynamique de tangage

Question 1 Proposer une démarche de résolution afin d'obtenir l'équation différentielle du mouvement reliant α et ses dérivées successives aux données du problème. Effectuer un bilan des actions mécaniques extérieures au système matériel isolé.

Correction



Pour ne pas faire apparaître des inconnues de liaisons, on va isoler 1 et réaliser un TMD en projection sur (O_T, \vec{x}_0) .

Bilan des actions mécaniques extérieures à 1 :

- action de la pesanteur;
- $\{\mathcal{T}(\text{hd} \rightarrow 1)\}$;
- action des jambes sur 1.

Question 2 Développer l'ensemble des calculs pour déterminer l'équation différentielle reliant α et ses dérivées successives aux données du problème.

Correction

Déplacement du torseur de pesanteur On a : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -g m_1 \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_T} = \left\{ \begin{array}{c} -g m_1 \vec{z}_0 \\ Z_G \vec{z}_1 \wedge -g m_1 \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_T} =$

$$\left\{ \begin{array}{c} -g m_1 \vec{z}_0 \\ Z_G g m_1 \sin \alpha \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{O_T}.$$

Calcul du moment dynamique – Formule point quelconque

- Calcul de $\overline{V}(G_T \in 1/0) = \overline{V}(O_T \in 1/0) + \vec{G}_T O_T \wedge \dot{\alpha} \vec{x}_0 = v(t) \vec{y}_0 - Z_G \vec{z}_1 \wedge \dot{\alpha} \vec{x}_0 = v(t) \vec{y}_0 - Z_G \dot{\alpha} \vec{y}_1$.
- Calcul de $\overline{\Gamma}(G_T \in 1/0) = \dot{v}(t) \vec{y}_0 - Z_G \ddot{\alpha} \vec{y}_1 - Z_G \dot{\alpha}^2 \vec{z}_1$.
- La matrice d'inertie est donnée en O_T , point quelconque.
- Commençons par calculer le moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma}(1,0/O_T) = I_{O_T}(1)\overrightarrow{\Omega}(1/0) + m_1 \overrightarrow{O_T G} \wedge \overrightarrow{V}(O_T \in 1/0) = A_1 \dot{\alpha}_1 \overrightarrow{x_1} + m_1 Z_G \overrightarrow{z_1} \wedge v(t) \overrightarrow{y_0} = A_1 \dot{\alpha}_1 \overrightarrow{x_1} - m_1 Z_G v(t) \cos \alpha \overrightarrow{x_0}$$

- Calcul du moment dynamique : $\overrightarrow{\delta}(1,0/O_T) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(1,0/O_T)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + m_1 \overrightarrow{V}(O_T \in 1/0) \wedge \overrightarrow{V}(G \in 1/0) = A_1 \ddot{\alpha}_1 \overrightarrow{x_1} - m_1 Z_G \dot{v}(t) \cos \alpha \overrightarrow{x_0} + m_1 Z_G v(t) \dot{\alpha} \sin \alpha \overrightarrow{x_0} + m_1 v(t) \overrightarrow{y_0} \wedge (v(t) \overrightarrow{y_0} - Z_G \dot{\alpha} \overrightarrow{y_1})$
 $= A_1 \ddot{\alpha}_1 \overrightarrow{x_1} - m_1 Z_G \dot{v}(t) \cos \alpha \overrightarrow{x_0} + m_1 Z_G v(t) \dot{\alpha} \sin \alpha \overrightarrow{x_0} - Z_G \dot{\alpha} m_1 v(t) \sin \alpha \overrightarrow{x_0} = A_1 \ddot{\alpha}_1 \overrightarrow{x_1} - m_1 Z_G \dot{v}(t) \cos \alpha \overrightarrow{x_0}$

Calcul du moment dynamique – Utilisation de Huygens

- Déplacement de la matrice d'inertie : $\overrightarrow{O_T G_T} = Z_G \overrightarrow{z_1}$. On a $I_{O_T}(1) = I_{G_T}(1) + m_1 \begin{pmatrix} Z_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & Z_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{B_1}$. On a donc

$$I_G(1) = I_{O_T}(1) - m_1 \begin{pmatrix} Z_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & Z_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} A_1 - m_1 Z_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - m_1 Z_G^2 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}$$

- Calcul du moment cinétique : $\overrightarrow{\sigma}(G_T, 1/0) = I_{G_T}(1)\overrightarrow{\Omega}(1/0) = (A_1 - m_1 Z_G^2) \dot{\alpha} \overrightarrow{x_1}$.
- Calcul du moment dynamique : $\overrightarrow{\delta}(G_T, 1/0) = (A_1 - m_1 Z_G^2) \ddot{\alpha} \overrightarrow{x_1}$.
- Déplacement du moment dynamique $\overrightarrow{\delta}(O_T, 1/0) = \overrightarrow{\delta}(G_T, 1/0) + \overrightarrow{O_T G_T} \wedge m_1 \overrightarrow{\Gamma}(G_T \in 1/0)$
 $= \overrightarrow{\delta}(G_T, 1/0) + m_1 \overrightarrow{O_T G_T} \wedge (\dot{v}(t) \overrightarrow{y_0} - Z_G \ddot{\alpha} \overrightarrow{y_1} - Z_G \dot{\alpha}^2 \overrightarrow{z_1}) = \overrightarrow{\delta}(G_T, 1/0) + m_1 Z_G \overrightarrow{z_1} \wedge (\dot{v}(t) \overrightarrow{y_0} - Z_G \ddot{\alpha} \overrightarrow{y_1} - Z_G \dot{\alpha}^2 \overrightarrow{z_1})$
 $= \overrightarrow{\delta}(G_T, 1/0) + m_1 Z_G (-\cos \alpha \dot{v}(t) \overrightarrow{x_0} + Z_G \ddot{\alpha} \overrightarrow{x_1})$
 $= (A_1 - m_1 Z_G^2) \ddot{\alpha} \overrightarrow{x_1} + m_1 Z_G (-\cos \alpha \dot{v}(t) \overrightarrow{x_0} + Z_G \ddot{\alpha} \overrightarrow{x_1}) = A_1 \ddot{\alpha} \overrightarrow{x_1} - m_1 Z_G \cos \alpha \dot{v}(t) \overrightarrow{x_0}$

Théorème du moment dynamique en O_T suivant $\overrightarrow{x_0}$

$$A_1 \ddot{\alpha}(t) - Z_G m_1 \dot{v}(t) \cos \alpha = Z_G g m_1 \sin \alpha + C_R$$

Modèle du contrôle actif de la position verticale

Question 3 Indiquer les fonctions de transfert des blocs $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ et B_7 ainsi que l'expression de la fonction de transfert $H_1(p)$.

Correction $B_6 = k_e, H_1(p) = \frac{1}{Lp + R}, B_5 = k_c$.

On a de plus, $J_{eq} p^2 A(p) - m_1 g Z_G A(p) = m_1 Z_G p V(p) + \frac{C_m(p)}{r}$.

On a donc $B_3 = \frac{1}{r}, p V(p) = \Gamma(p)$ et $B_1 = m_1 Z_G, B_2 = m_1 g Z_G$ et $B_7 = \frac{1}{J_{eq}}$.

Enfin, $B_4 = \frac{1}{r}$.

Question 4 Déterminer la fonction de transfert de la boucle dynamique $H_{dyn}(p) = \frac{\alpha(p)}{C_m(p)}$ en supposant la perturbation nulle.

Correction En déplaçant le point de prélèvement allant vers B_2 vers la gauche, B_2 est remplacé par B_2/p . On réduit

$$\text{donc la boucle (avec un + sur le retour) : } H_{dyn}(p) = \frac{\frac{B_7}{p} \frac{B_3}{p}}{1 - \frac{B_2 B_7}{p^2}} = \frac{\frac{B_7}{p} \frac{B_3}{p}}{1 - \frac{B_2 B_7}{p^2}} = \frac{B_3 B_7}{p^2 - B_2 B_7} = \frac{\frac{1}{r} \frac{1}{J_{eq}}}{p^2 - m_1 g Z_G \frac{1}{J_{eq}}}$$

$$= \frac{1}{r J_{eq} p^2 - m_1 g Z_G r}.$$

Question 5 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée de l'asservissement $F(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$. Indiquer son ordre, sa classe et donner son gain statique K en fonction des données.

Correction On réduit alors le bouclage sur le moteur : $F_2(p) = \frac{H_1 B_5 B_3 F(p)}{1 + H_1 B_5 B_3 F(p) B_4 B_6}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Au final, } H_{\text{dyn}}(p) &= F_2(p) \frac{1}{p} = \frac{H_1 B_5 B_3 F(p)}{1 + H_1 B_5 B_3 F(p) B_4 B_6} \cdot \frac{1}{p} = \frac{H_1 B_5 B_3 \frac{B_7 p}{p^2 - B_2 B_7}}{1 + H_1 B_5 B_3 \frac{B_7 p}{p^2 - B_2 B_7} B_4 B_6} \cdot \frac{1}{p} \\
 &= \frac{H_1 B_5 B_3 B_7 p}{(p^2 - B_2 B_7) + H_1 B_5 B_3 B_7 p B_4 B_6} \cdot \frac{1}{p} \\
 &= \frac{\frac{1}{Lp + R} k_c \frac{1}{r} \frac{1}{J_{\text{eq}}} p}{\left(p^2 - m_1 g Z_G \frac{1}{J_{\text{eq}}} \right) + \frac{1}{Lp + R} k_c \frac{1}{r} \frac{1}{J_{\text{eq}}} p \frac{1}{r} k_e} \cdot \frac{1}{p} \\
 &= \frac{k_c}{r J_{\text{eq}} (Lp + R) \left(p^2 - m_1 g Z_G \frac{1}{J_{\text{eq}}} \right) + k_c p \frac{1}{r} k_e} \\
 &= \frac{r J_{\text{eq}} \left(Lp^3 + Rp^2 - Lp m_1 g Z_G \frac{1}{J_{\text{eq}}} - R m_1 g Z_G \frac{1}{J_{\text{eq}}} \right) + k_c p \frac{1}{r} k_e}{k_c r} \\
 &= \frac{r^2 J_{\text{eq}} Lp^3 + r^2 J_{\text{eq}} Rp^2 - r^2 Lp m_1 g Z_G - r R m_1 g Z_G + k_c p k_e}{k_c r} \\
 &= \frac{r^2 J_{\text{eq}} Lp^3 + r^2 J_{\text{eq}} Rp^2 + p(-r^2 L m_1 g Z_G + k_c k_e) - r R m_1 g Z_G}{k_c} \\
 &= \frac{R m_1 g Z_G}{\frac{r J_{\text{eq}} L}{R m_1 g Z_G} p^3 + \frac{r J_{\text{eq}}}{m_1 g Z_G} p^2 + p \frac{-r^2 L m_1 g Z_G + k_c k_e}{r R m_1 g Z_G} - 1} \\
 \text{Fonction de transfert d'ordre 3, de classe 0 et de gain } K &= -\frac{k_c}{R m_1 g Z_G}.
 \end{aligned}$$

Erreur éventuelle avec des r qui se baladent.

Question 6 En analysant les diagrammes de Bode, déterminer les valeurs de τ_1 , τ_2 et K . Justifier en complétant les diagrammes avec les diagrammes asymptotiques de gain et de phase.

Correction On a $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}$
 $= 20 \log K - 20 \log(1 + \tau_1^2 \omega^2) - 20 \log \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}$.
 De plus $\varphi(\omega) = \arg K - \arg(1 + \tau_1 p) - \arg(-1 + \tau_1 p) - \arg(1 + \tau_2 p)$
 $= -\arctan(\tau_1 \omega) - \pi - \arctan(\tau_1 \omega) - \arctan(\tau_2 \omega)$
 $= -\pi - 2 \arctan(\tau_1 \omega) - \arctan(\tau_2 \omega)$.
 On a donc $\tau_1 = \frac{1}{\omega_1} = 1 \text{ s}$ et $\tau_2 = \frac{1}{\omega_2} = 1 \times 10^{-3} \text{ s}$.
 De plus, $20 \log K = -40$ et $K = 0,01 \text{ rad V}^{-1}$.

Question 7 Justifier le choix de cette simplification.

Correction Les pôles de la fonction de transfert sont $\frac{-1}{\tau_1} = -1$, $\frac{1}{\tau_1} = 1$ et $\frac{-1}{\tau_2} = -1000$. Les poles dominants sont ceux les plus proches de l'axe des imaginaires. -1 et 1 sont donc les pôles dominants. Cela justifie donc la forme proposée (le pôle -1000 est négligé).

Question 8 Expliquer pourquoi le critère du revers ne peut pas être appliqué pour étudier la stabilité en boucle fermée.

Correction Pour que le critère du revers, les pôles doivent être à partie réelle négative ou nulle.

Question 9 Déterminer deux conditions sur K_1 pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée $\frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$ soit stable. En déduire la valeur minimale de K_1 .

Correction La fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée est donnée par : $\frac{F(p)}{1 + F(p)H_{ci}(p)}$

$$= \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(-1 + \tau_1 p)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(-1 + \tau_1 p) + K K_1 (p + 1)} = \frac{K}{-1 - \tau_1 p + \tau_1 p + \tau_1^2 p^2 + K K_1 p + K K_1}$$

$$= \frac{K}{-1 + K K_1 + K K_1 p + \tau_1^2 p^2}. \text{ Il faut donc que } K K_1 - 1 > 0 \text{ soit } K_1 > \frac{1}{K} \text{ soit } K_1 > 100 \text{ V rad}^{-1}.$$

Question 10 Déterminer K_1 pour que la fonction de transfert $\frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$ ait un facteur d'amortissement $\xi = 1,7$. Vérifier que cette valeur est compatible avec les conditions obtenues précédemment. En déduire les valeurs de la pulsation propre ω_0 et du gain statique de la boucle ouverte K_{BO} .

Correction

En mettant la fonction précédente sous forme canonique, on a donc $\frac{K}{K K_1 - 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K K_1}{K K_1 - 1} p + \frac{\tau_1^2}{K K_1 - 1} p^2}$.

On a $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\tau_1^2}{K K_1 - 1} \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{K K_1 - 1}{\tau_1^2}$.

De plus, $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{K K_1}{K K_1 - 1} \Leftrightarrow 2\xi(K K_1 - 1) = K K_1 \omega_0 \Leftrightarrow 2\xi(K K_1 - 1) = K K_1 \sqrt{K K_1 - 1}$.

$\Rightarrow 4\xi^2(K K_1 - 1)^2 = K^2 K_1^2(K K_1 - 1) \Leftrightarrow 4\xi^2(K K_1 - 1)^2 - K^2 K_1^2(K K_1 - 1) = 0 \Leftrightarrow 4\xi^2(K K_1 - 1) - K^2 K_1^2 = 0$

Question 11 Nommer ce correcteur.

Correction Il s'agit d'un correcteur proportionnel et à avance de phase.

Question 12 Déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d .

Correction

D'après le cahier des charges, on souhaite que la bande passante à 0 dB en boucle ouverte soit de 50 rad s^{-1} et la marge de phase doit être de 50° .

Calculons la phase pour le système non corrigé.

Pour calculer la phase, il faut faire attention, au domaine de définition de l'arctan. Il y a plusieurs façons de s'y prendre... On peut par exemple calculer les deux constantes de temps du système (vu que $\xi > 1$). On peut aussi constater que pour un second ordre où $\xi > 1$, la phase est comprise entre 0 et -90° lorsque la pulsation est inférieure à 3 rad s^{-1} et la phase est comprise entre -90 et -180° lorsque la pulsation est supérieure à 3 rad s^{-1} .

Ici on souhaite calculer la marge pour une pulsation de 50 rad s^{-1} . On aura donc une phase comprise entre -90 et -180° . Le calcul de l'arctan se fera donc avec un décalage de -180° .

$$\varphi(\omega) = -180 - \arctan\left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) = -168^\circ.$$

La marge de phase est donc de $-168 - (-180) = 12^\circ$. Le correcteur doit donc apporter 38° .

On a $\sin \varphi_m = \frac{a-1}{a+1} \Leftrightarrow a \sin \varphi_m + \sin \varphi_m = a - 1 \Leftrightarrow a \sin \varphi_m + \sin \varphi_m - a + 1 = 0$

$\Leftrightarrow a(\sin \varphi_m - 1) + \sin \varphi_m + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sin \varphi_m + 1}{1 - \sin \varphi_m} = 4,28$.

Par suite, $T_d = \frac{1}{\omega_c \sqrt{a}} \simeq 9,7 \times 10^{-3} \text{ s}$.

Question 13 Déterminer le gain K_p pour que le critère de bande passante du cahier des charges soit bien vérifié.

Correction On doit choisir K_p pour que le gain soit nul lorsque $\omega_c = 50 \text{ rad s}^{-1}$.

$$\text{La gain non corrigé est de } G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log K_{BO} - 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\omega\xi}{\omega_0}\right)^2} \right) = -108 \text{ dB.}$$

Le gain apporté par l'avance de phase est de $10 \log a = 6,31 \text{ dB}$. Le gain proportionnel doit donc apporter $-108 + 6 = 102 \text{ dB}$. On cherche donc $20 \log K_p = 102$ soit $K_p = 10^{102/20} = 125892 \text{ SI}$

Question 14 Justifier l'allure de la réponse temporelle. Déterminer graphiquement sur le document réponse le temps de réponse à 5%, le dépassement maximal et l'erreur statique. Conclure sur la capacité du correcteur à vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

Correction Le système est perturbé « en accélération ». On souhaite minimiser l'influence de cette perturbation sur l'angle de tangage (souhaité nul). On mesure :

- temps de réponse à 5% : $40 \text{ ms} < 0,2 \text{ s}$: CDCF OK;
- écart statique : $\simeq 2,4 \times 10^3^\circ < 0,5^\circ$: CDCF OK;
- dépassement $\simeq 0,8 \times 10^3^\circ < 1^\circ$: CDCF OK.