

TD

TD – Révisions de cinématique

Xavier Pessoles

Savoirs et compétences :

Pales d'hélicoptères

Mise en situation

Cinématique analytique

Question 1 Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_2)}$.**Correction** On a :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)} = \dot{\alpha} \overrightarrow{x_{23}} \\ \overrightarrow{V(A_3 \in S_3/S_2)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{A_3}$$

$$\text{Par ailleurs, } \overrightarrow{V(G \in S_3/S_2)} = \underbrace{\overrightarrow{V(A_3 \in S_3/S_2)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GA_3} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)} = -a \overrightarrow{x_{23}} \wedge \dot{\alpha} \overrightarrow{x_{23}} = \overrightarrow{0}.$$

Au final,

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)} = \dot{\alpha} \overrightarrow{x_{23}} \\ \overrightarrow{V(G \in S_3/S_2)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$$

Question 2 Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)}$.**Correction** On a :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \dot{\beta} \overrightarrow{y_{12}} \\ \overrightarrow{V(A_3 \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{A_3}$$

$$\text{Par ailleurs, } \overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)} = \underbrace{\overrightarrow{V(A_3 \in S_2/S_1)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GA_3} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = -a \overrightarrow{x_{23}} \wedge \dot{\beta} \overrightarrow{y_{12}} = -a \dot{\beta} \overrightarrow{z_2}$$

Au final,

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \dot{\beta} \overrightarrow{y_{12}} \\ \overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)} = -a \dot{\beta} \overrightarrow{z_2} \end{array} \right\}_G$$

Question 3 Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)}$.**Correction** On a :

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} \\ \overrightarrow{V(O \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

$$\text{Par ailleurs, } \overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)} = \underbrace{\overrightarrow{V(O \in S_1/S_0)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = (-a \overrightarrow{x_{23}} - r \overrightarrow{x_1}) \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} = a \dot{\theta} \cos \beta \overrightarrow{y_{12}} + r \dot{\theta} \overrightarrow{y_{12}}$$

Au final,

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} \\ \overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)} = \dot{\theta} (a \cos \beta + r) \overrightarrow{y_{12}} \end{array} \right\}_G$$

Question 4 Déduire des questions précédentes le torseur $\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\}$ au point G .

Correction Par composition du torseur cinématique on a :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\} = \{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} + \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} + \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

Tous les torseurs ayant déjà été exprimés au même point, on a :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_0)} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} + \dot{\alpha} \overrightarrow{x_{23}} + \dot{\beta} \overrightarrow{y_{12}} \\ V(G \in S_3/S_0) = \dot{\theta} (a \cos \beta + r) \overrightarrow{y_{12}} - a \dot{\beta} \overrightarrow{z_2} \end{array} \right\}_G$$

On pose maintenant $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)} = (a \cdot \cos \beta + r) \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_{12}} - a \dot{\beta} \overrightarrow{z_2}$.

On pose maintenant $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)} = (a \cdot \cos \beta + r) \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_{12}} - a \dot{\beta} \overrightarrow{z_2}$.

Question 5 Exprimer l'accélération $\overrightarrow{\Gamma}(G \in S_3/S_0)$.

Correction Par définition,

$$\overrightarrow{\Gamma}(G \in S_3/S_0) = \left[\frac{\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Il est donc nécessaire de dériver $\overrightarrow{y_{12}}$ et $\overrightarrow{z_2}$:

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_{12}}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{y_{12}}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \overrightarrow{y_{12}} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} \wedge \overrightarrow{y_{12}} = -\dot{\theta} \overrightarrow{x_1}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} \wedge \overrightarrow{z_2} = (\dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} + \dot{\beta} \overrightarrow{y_{12}}) \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta} \sin \beta \overrightarrow{y_1} + \dot{\beta} \overrightarrow{x_2}$$

Au final :

$$\overrightarrow{\Gamma}(G \in S_3/S_0) = -a \dot{\beta} \sin \beta \dot{\theta} \overrightarrow{y_{12}} + (a \cos \beta + r) \ddot{\theta} \overrightarrow{y_{12}} - (a \cos \beta + r) \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1} - a \ddot{\beta} \overrightarrow{z_2} - a \dot{\beta} (\dot{\theta} \sin \beta \overrightarrow{y_1} + \dot{\beta} \overrightarrow{x_2})$$

Question 6 La longueur des pales est, entre autre, limitée par la vitesse du son en bout de pale (Exigence 1.1.1.1.1). Pour $\beta = 0$, calculer la longueur maximale de la pale pour ne pas dépasser la vitesse du son. La vitesse du rotor est de 250 tr min^{-1} .

Correction Lorsque $\beta = 0$ la vitesse en bout de pale est donnée par $L \dot{\theta}$. $\dot{\theta} = 250 \text{ tr/min} = \frac{250 \cdot 2\pi}{60} \text{ rad/s} = 26,18 \text{ rad/s}$ On a donc :

$$L = \frac{295,1}{26,18} = 11,2 \text{ m}$$

Système de coffre motorisé

D'après le concours Centrale – Supélec 2007.

Étude du train épicycloïdal

Question 7 Déterminer le rapport de réduction $\frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)}$.

Correction On bloque le porte-satellite 31 et on libère le bâti. On a $\frac{\omega(0/31)}{\omega(21/31)} = -\frac{Z_{21}}{Z_0}$.

On cherche $\frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)}$; donc $\frac{\omega(31/0)}{\omega(21/31)} = \frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0) + \omega(0/31)} = \frac{Z_{21}}{Z_0} \Leftrightarrow \omega(31/0) = \frac{Z_{21}}{Z_0} \omega(21/0) - \frac{Z_{21}}{Z_0} \omega(31/0)$

$$\Leftrightarrow \omega(31/0) \left(1 + \frac{Z_{21}}{Z_0} \right) = \frac{Z_{21}}{Z_0} \omega(21/0) \Leftrightarrow \frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)} = \frac{\frac{Z_{21}}{Z_0}}{1 + \frac{Z_{21}}{Z_0}} = \frac{Z_{21}}{Z_0 + Z_{21}}$$

Question 8 Déterminer le rapport de réduction $\frac{\omega(41/0)}{\omega(31/0)}$.

Correction Par analogie, $\frac{\omega(41/0)}{\omega(31/0)} = \frac{Z_{31}}{Z_0 + Z_{31}}$

Question 9 En déduire le rapport de réduction du double train épicycloïdal. Puis faire l'application numérique. On donne $Z_{21} = 13$ et $Z_{22} = 81$. Le rapport de réduction est-il compatible avec celui du diagramme de blocs ?

Correction Le rapport de réduction du réducteur s'exprime par : $\frac{Z_{21}}{Z_0 + Z_{21}} \frac{Z_{31}}{Z_0 + Z_{31}}$. Si les deux trains ont les mêmes caractéristiques, on a $\left(\frac{Z_{21}}{Z_0 + Z_{21}} \right)^2$. En exprimant les conditions de fonctionnement, on a : $R_{21} + 2R_{22} = R_0 \Leftrightarrow Z_{21} + 2Z_{22} = Z_0$.
On a : alors

$$\left(\frac{Z_{21}}{2Z_{21} + 2Z_{22}} \right)^2 = 0,0047$$

Étude du mécanisme de transformation de mouvement

Question 10 Établir une relation géométrique entre γ_1 et γ_3 . Cette relation pourra faire intervenir les différents paramètres constants (a , b , L_1 , L_2 , L_3). On ne devra pas voir apparaître γ_2 .

Correction En écrivant la fermeture de chaîne géométrique, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow L_1 \overrightarrow{x_{41}} + L_2 \overrightarrow{x_{42}} - L_3 \overrightarrow{x_{43}} - a \overrightarrow{x_0} - b \overrightarrow{y_0} &= \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow L_1 (\cos \gamma_1 \overrightarrow{x_0} + \sin \gamma_1 \overrightarrow{y_0}) + L_2 (\cos \gamma_2 \overrightarrow{x_0} + \sin \gamma_2 \overrightarrow{y_0}) - L_3 (\cos \gamma_3 \overrightarrow{x_0} + \sin \gamma_3 \overrightarrow{y_0}) - a \overrightarrow{x_0} - b \overrightarrow{y_0} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

En projetant respectivement cette expression sur $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$, on a :

$$\begin{cases} L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos \gamma_2 - L_3 \cos \gamma_3 - a = 0 \\ L_1 \sin \gamma_1 + L_2 \sin \gamma_2 - L_3 \sin \gamma_3 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \cos \gamma_2 = L_3 \cos \gamma_3 - L_1 \cos \gamma_1 + a \\ L_2 \sin \gamma_2 = L_3 \sin \gamma_3 - L_1 \sin \gamma_1 + b \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} L_2^2 &= (L_3 \cos \gamma_3 - L_1 \cos \gamma_1 + a)^2 + (L_3 \sin \gamma_3 - L_1 \sin \gamma_1 + b)^2 \\ L_2^2 &= L_3^2 \cos^2 \gamma_3 + L_1^2 \cos^2 \gamma_1 + a^2 \\ &\quad - 2L_3 L_1 \cos \gamma_3 \cos \gamma_1 + 2b L_3 \cos \gamma_3 - 2b L_1 \cos \gamma_1 \\ &\quad + L_3^2 \sin^2 \gamma_3 + L_1^2 \sin^2 \gamma_1 + b^2 \\ &\quad - 2L_3 L_1 \sin \gamma_3 \sin \gamma_1 + 2b L_3 \sin \gamma_3 - 2b L_1 \sin \gamma_1 \\ &= L_3^2 + L_1^2 + a^2 + b^2 - 2L_3 L_1 (\cos \gamma_3 \cos \gamma_1 + \sin \gamma_3 \sin \gamma_1) \\ &\quad + 2b L_3 (\cos \gamma_3 + \sin \gamma_3) - 2b L_1 (\cos \gamma_1 + \sin \gamma_1) \end{aligned}$$