

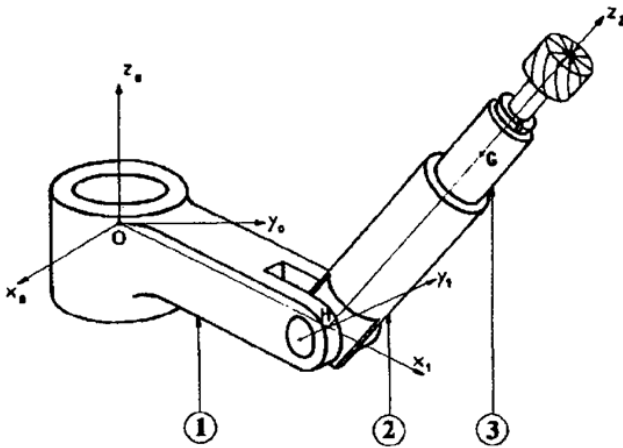
## Colle 01

### Porte-outil d'affûtage

Équipe PT – PT\* La Martinière Monplaisir

#### Savoirs et compétences :

Le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage est composé de trois solides 1, 2 et 3.



Le repère  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , avec  $(O, \vec{z}_0)$  vertical ascendant, est lié au bâti 0 de la machine. Il est supposé galiléen. Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Le repère  $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  est lié au support tournant 1 en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti 0. La position de 1 par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  est repérée par  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .

On note  $I_1$  le moment d'inertie de 1 par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et  $H$  le point tel que  $\vec{OH} = h\vec{x}_1$ .

Le repère  $\mathcal{R}_2 = (H; \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$  est lié au bras pivotant 2 en liaison pivot d'axe  $(H, \vec{y}_1)$  avec 1. La position de 2

est repérée par  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$ .

On note  $m_2$  la masse de (2), de centre d'inertie  $H$  de matrice d'inertie  $I_H(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$ .

Le repère  $\mathcal{R}_3 = (G; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$  est lié au porte-outil (3) (avec l'outil à affûter tenu par le mandrin) en liaison pivot glissant d'axe  $(H, \vec{z}_2)$  avec (2).

La position de (3) est repérée par  $\gamma = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$  et par  $\vec{HG} = \lambda \vec{z}_2$ .

On note  $m_3$  la masse de (3), de centre d'inertie  $G$  de matrice d'inertie  $I_G(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$ .

**Question 1** Justifier la forme de la matrice de la pièce (3).

**Question 2** Calculer  $\overline{V(G \in 3/0)}$ .

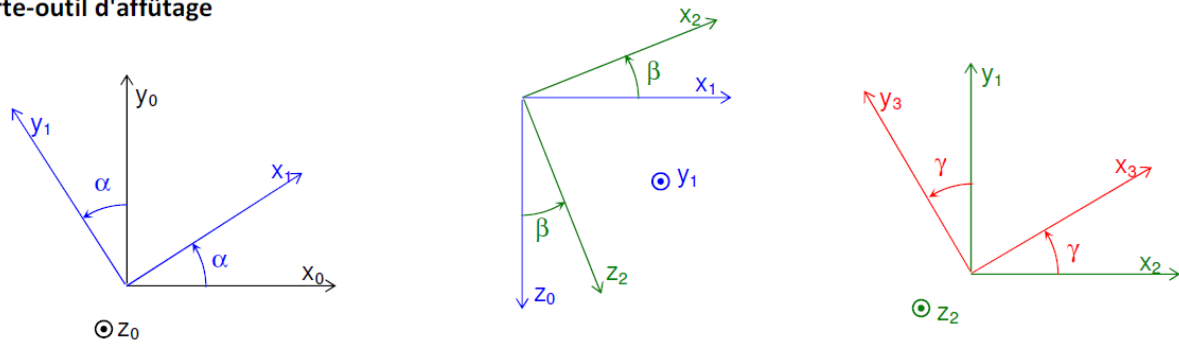
**Question 3** Indiquer la méthode permettant de calculer le torseur dynamique en  $G$  de (3) en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en projection sur  $\vec{z}_2$ .

**Question 4** Calculer le moment dynamique en  $H$  appliqué à l'ensemble {2, 3} en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en projection sur  $\vec{y}_1$ .

**Question 5** Calculer le moment dynamique en  $O$  appliqué à l'ensemble {1, 2, 3} en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  en projection sur  $\vec{z}_0$ .

## Porte-outil d'affûtage

1 –



$$\text{Torseur cinématique de } \mathbf{3} / \mathbf{R}_0: \mathcal{V}(\mathbf{3}/\mathbf{R}_0) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}(\mathbf{3}/\mathbf{R}_0) = \bar{\Omega}(\mathbf{3}/\mathbf{2}) + \bar{\Omega}(\mathbf{2}/\mathbf{1}) + \bar{\Omega}(\mathbf{1}/\mathbf{0}) \\ \bar{V}(G \in \mathbf{3}/\mathbf{R}_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right]_{\mathbf{R}_0} \end{array} \right\}_G$$

$$\overrightarrow{OG} = h \bar{x}_1 + r \bar{z}_2$$

$$\bar{V}(G \in \mathbf{3}/\mathbf{R}_0) = h \dot{\alpha} \bar{y}_1 + \dot{r} \bar{z}_2 + r \left[ \frac{d\bar{z}_2}{dt} \right]_{\mathbf{R}_0} \text{ avec } \left[ \frac{d\bar{z}_2}{dt} \right]_{\mathbf{R}_0} = \bar{\Omega}(\mathbf{R}_2/\mathbf{R}_0) \wedge \bar{z}_2 = (\dot{\beta} \bar{y}_1 + \dot{\alpha} \bar{z}_0) \wedge \bar{z}_2 = \dot{\beta} \bar{x}_2 + \dot{\alpha} \sin \beta \bar{y}_1$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{3}/\mathbf{R}_0) = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \bar{z}_0 + \dot{\beta} \bar{y}_1 + \dot{\gamma} \bar{z}_2 \\ r \dot{\beta} \bar{x}_2 + (h + r \sin \beta) \dot{\alpha} \bar{y}_1 + \dot{r} \bar{z}_2 \end{array} \right\}$$

2 – Accélération de  $G \in \mathbf{3}/\mathbf{R}_0$ :  $\bar{\Gamma}(G \in \mathbf{3}/\mathbf{R}_0) = \left[ \frac{d\bar{V}(G \in \mathbf{3}/\mathbf{R}_0)}{dt} \right]_{\mathbf{R}_0}$

$$= \dot{r} \dot{\beta} \bar{x}_2 + r \ddot{\beta} \bar{x}_2 + \dot{r} \dot{\beta} \left[ \frac{d\bar{x}_2}{dt} \right]_{\mathbf{R}_0} + (\dot{r} \sin \beta + r \dot{\beta} \cos \beta) \dot{\alpha} \bar{y}_1 + (h + r \sin \beta) (\ddot{\alpha} \bar{y}_1 - \dot{\alpha}^2 \bar{x}_1) + \ddot{r} \bar{z}_2 + \dot{r} (\dot{\beta} \bar{x}_2 + \dot{\alpha} \sin \beta \bar{y}_1)$$

$$\text{avec } \left[ \frac{d\bar{x}_2}{dt} \right]_{\mathbf{R}_0} = \bar{\Omega}(\mathbf{R}_2/\mathbf{R}_0) \wedge \bar{x}_2 = (\dot{\beta} \bar{y}_1 + \dot{\alpha} \bar{z}_0) \wedge \bar{x}_2 = -\dot{\beta} \bar{z}_2 + \dot{\alpha} \cos \beta \bar{y}_1$$

$$\bar{\Gamma}(G \in \mathbf{3}/\mathbf{R}_0) = (2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta}) \bar{x}_2 + [2\dot{\alpha}(\dot{r} \sin \beta + r \dot{\beta} \cos \beta) + (h + r \sin \beta) \ddot{\alpha}] \bar{y}_1 - (h + r \sin \beta) \dot{\alpha}^2 \bar{x}_1 + (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2) \bar{z}_2$$

3 – Pour déterminer  $\mathbf{F}_{23}$  et  $\mathbf{C}_{23}$ , faisons le bilan des actions mécaniques extérieures sur le solide 3:

$$\text{Liaison pivot glissant d'axe } (G, \bar{z}_2) \text{ entre } \mathbf{2} \text{ et } \mathbf{3}: \mathcal{J}(\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{3}) = \left\{ \begin{array}{l} X_{23} \bar{x}_2 + Y_{23} \bar{y}_1 \\ L_{23} \bar{x}_2 + M_{23} \bar{y}_1 \end{array} \right\}_G$$

$$\text{Action de l'actionneur } M_{23}: \mathcal{J}(M_{23} \rightarrow \mathbf{3}) = \left\{ \begin{array}{l} F_{23} \bar{z}_2 \\ C_{23} \bar{z}_2 \end{array} \right\}_H$$

$$\text{Action de la pesanteur: } \mathcal{J}(\text{pesanteur} \rightarrow \mathbf{3}) = \left\{ \begin{array}{l} -m_3 g \bar{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

Pour déterminer  $\mathbf{F}_{23}$ , il faut appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide 3 en mouvement par rapport à  $\mathbf{R}_0$  en projection sur  $\bar{z}_2$ :

$$\begin{aligned} m_3 \bar{\Gamma}(G \in 3/R_0) \cdot \bar{z}_2 &= F_{23} - m_3 g \bar{z}_0 \cdot \bar{z}_2 \\ m_3(- (h + r \sin \beta) \dot{\alpha}^2 \bar{x}_1 \cdot \bar{z}_2 + (\ddot{r} - r \dot{\beta}^2) ) &= F_{23} - m_3 g \cos \beta \end{aligned}$$

$$F_{23} = m_3(\ddot{r} - r \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2 (h + r \sin \beta) \sin \beta + g \cos \beta)$$

Pour déterminer  $C_{23}$ , il faut appliquer le théorème du moment dynamique au solide **3**, en mouvement par rapport à  $R_0$ , en G (la matrice d'inertie de **3** est donnée en G) en projection sur  $\bar{z}_2$  :

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_G(3/R_0) \cdot \bar{z}_2 &= C_{23} + \overrightarrow{GH} \wedge F_{23} \bar{z}_2 = C_{23} - r \bar{z}_2 \wedge F_{23} \bar{z}_2 = C_{23} \\ \bar{\delta}_G(3/R_0) \cdot \bar{z}_2 &= \left[ \frac{d\bar{\sigma}_G(3/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \cdot \bar{z}_2 = \frac{d[\bar{\sigma}_G(3/R_0) \cdot \bar{z}_2]}{dt} - \bar{\sigma}_G(3/R_0) \cdot \left[ \frac{d\bar{z}_2}{dt} \right]_{R_0} \\ \bar{\sigma}_G(3/R_0) &= \mathcal{J}_G(3) \bar{\Omega}(3/R_0) \quad \text{avec} \quad \bar{\Omega}(3/R_0) = \dot{\alpha} \bar{z}_0 + \dot{\beta} \bar{y}_1 + \dot{\gamma} \bar{z}_2 \end{aligned}$$

La matrice d'inertie du solide **3** est donnée sur le repère  $R_3$  mais l'axe (G,  $\bar{z}_2$ ) étant de révolution (voir l'allure de la matrice), elle est identique sur le repère  $R_2$ . Il est plus simple d'exprimer  $\bar{\Omega}(3/R_0)$  sur  $R_2$  que sur  $R_3$  :

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}(3/R_0) &= \dot{\alpha} (\cos \beta \bar{z}_2 - \sin \beta \bar{x}_2) + \dot{\beta} \bar{y}_1 + \dot{\gamma} \bar{z}_2 = -\dot{\alpha} \sin \beta \bar{x}_2 + \dot{\beta} \bar{y}_1 + (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \bar{z}_2 \\ \bar{\sigma}_G(3/R_0) \cdot \bar{z}_2 &= \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \bar{z}_2 = [-D \dot{\alpha} \sin \beta \bar{x}_2 + D \dot{\beta} \bar{y}_1 + E (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \bar{z}_2] \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

soit  $\bar{\sigma}_G(3/R_0) \cdot \bar{z}_2 = E (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta)$

$$\bar{\sigma}_G(3/R_0) \cdot \left[ \frac{d\bar{z}_2}{dt} \right]_{R_0} = (-D \dot{\alpha} \sin \beta \bar{x}_2 + D \dot{\beta} \bar{y}_1 + E (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \bar{z}_2) (\dot{\beta} \bar{x}_2 + \dot{\alpha} \sin \beta \bar{y}_1) = 0$$

d'où  $C_{23} = \frac{d[E (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta)]}{dt}$

$$C_{23} = E (\ddot{\gamma} + \ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta)$$

**Pour déterminer  $C_{12}$** , le bilan des actions mécaniques extérieures sur le solide **2** fait intervenir les actions de **3** sur **2** et celles de **1** sur **2**.

La liaison entre **1** et **2** étant une liaison pivot d'axe (H,  $\bar{y}_1$ ), la seule équation ne faisant pas intervenir d'inconnues de cette liaison est la projection du théorème du moment dynamique sur l'axe (H,  $\bar{y}_1$ ) mais celle-ci va faire intervenir les inconnues de la liaison **3/2**. Il faut donc isoler l'ensemble **{2, 3}**.

Bilan des actions mécaniques extérieures sur l'ensemble **{2, 3}**:

Liaison pivot d'axe (H,  $\bar{y}_1$ ) entre **1** et **2**:  $\mathcal{J}(1 \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} X_{12} \bar{x}_1 + Y_{12} \bar{y}_1 + Z_{12} \bar{z}_0 \\ L_{12} \bar{x}_1 + N_{12} \bar{z}_0 \end{Bmatrix}_G$

Action du moteur  $M_{12}$ :  $\mathcal{J}(M_{12} \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{12} \bar{y}_1 \end{Bmatrix}_H$

Action de la pesanteur:  $\mathcal{J}(\text{pesanteur} \rightarrow 2+3) = \begin{Bmatrix} -m_3 g \bar{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G + \begin{Bmatrix} -m_2 g \bar{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_H$

Théorème du moment dynamique en H appliqué à l'ensemble **{2, 3}** en mouvement par rapport à  $R_0$  en projection sur  $\bar{y}_1$ :

$$\bar{\delta}_H(2/R_0) \cdot \bar{y}_1 + \bar{\delta}_H(3/R_0) \cdot \bar{y}_1 = C_{12} + (\overrightarrow{HG} \wedge -m_3 g \bar{z}_0) \cdot \bar{y}_1 = C_{12} - (r \bar{z}_2 \wedge m_3 g \bar{z}_0) \cdot \bar{y}_1 = C_{12} + r m_3 g \sin \beta$$

$$* \bar{\delta}_H(2/R_0) \cdot \bar{y}_1 = \left[ \frac{d\bar{\sigma}_H(2/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \cdot \bar{y}_1 = \frac{d[\bar{\sigma}_H(2/R_0) \cdot \bar{y}_1]}{dt} - \bar{\sigma}_H(2/R_0) \cdot \left[ \frac{d\bar{y}_1}{dt} \right]_{R_0} \text{ avec } \left[ \frac{d\bar{y}_1}{dt} \right]_{R_0} = -\dot{\alpha} \bar{x}_1$$

$$\bar{\sigma}_H(2/R_0) = \mathcal{J}_H(2) \bar{\Omega}(2/R_0) \quad \text{avec } \bar{\Omega}(2/R_0) = \dot{\alpha} \bar{z}_0 + \dot{\beta} \bar{y}_1 = \dot{\alpha} (\cos \beta \bar{z}_2 - \sin \beta \bar{x}_2) + \dot{\beta} \bar{y}_1$$

$$\bar{\sigma}_H(2/R_0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix} = -A \dot{\alpha} \sin \beta \bar{x}_2 + B \dot{\beta} \bar{y}_1 + C \dot{\alpha} \cos \beta \bar{z}_2$$

$$\text{d'où } \bar{\delta}_H(2/R_0) \cdot \bar{y}_1 = \frac{d(B\dot{\beta})}{dt} - A \dot{\alpha} \sin \beta \bar{x}_2 \cdot \dot{\alpha} \bar{x}_1 + C \dot{\alpha} \cos \beta \bar{z}_2 \cdot \dot{\alpha} \bar{x}_1 = B\ddot{\beta} + (C - A) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta$$

$$\begin{aligned} * \bar{\delta}_H(3/R_0) \cdot \bar{y}_1 &= \left[ \frac{d\bar{\sigma}_G(3/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \cdot \bar{y}_1 + [\overrightarrow{HG} \wedge m_3 \bar{\Gamma}(G \in 3/R_0)] \cdot \bar{y}_1 \\ &= \frac{d[\bar{\sigma}_G(3/R_0) \cdot \bar{y}_1]}{dt} - \bar{\sigma}_G(3/R_0) \cdot \left[ \frac{d\bar{y}_1}{dt} \right]_{R_0} + [r \bar{z}_2 \wedge m_3 \bar{\Gamma}(G \in 3/R_0)] \cdot \bar{y}_1 \\ &= \frac{d(D\dot{\beta})}{dt} - D \dot{\alpha}^2 \sin \beta \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 + E \dot{\alpha} (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \bar{z}_2 \cdot \bar{x}_1 + r m_3 (\bar{y}_1 \wedge \bar{z}_2) \cdot \bar{\Gamma}(G \in 3/R_0) \\ &= D\ddot{\beta} - D \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + E \dot{\alpha} (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \sin \beta + r m_3 [2 \dot{r} \dot{\beta} + r \ddot{\beta} - (h + r \sin \beta) \dot{\alpha}^2 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } C_{12} &= -r m_3 g \sin \beta + B\ddot{\beta} + (C - A) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta \\ &\quad + D\ddot{\beta} - D \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + E \dot{\alpha} (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \sin \beta + r m_3 [2 \dot{r} \dot{\beta} + r \ddot{\beta} - (h + r \sin \beta) \dot{\alpha}^2 \cos \beta] \end{aligned}$$

$$C_{12} = \ddot{\beta}(B + D + m_3 r^2) + \dot{\alpha}^2 [(C - A - D + E + m_3 r^2) \sin \beta - h r m_3] \cos \beta + E \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \beta + r m_3 (2 \dot{r} \dot{\beta} - g \sin \beta)$$

Pour déterminer  $C_{01}$ , faisons le bilan des actions mécaniques extérieures à l'ensemble **{1, 2, 3}**:

$$\text{Liaison pivot d'axe (O, } \bar{z}_0) \text{ entre } \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{1}: \mathcal{J}(0 \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix} X_{01} \bar{x}_0 + Y_{01} \bar{y}_0 + Z_{01} \bar{z}_0 \\ L_{01} \bar{x}_0 + M_{01} \bar{y}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Action du moteur } M_{01}: \mathcal{J}(M_{01} \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix} \bar{0} \\ C_{01} \bar{z}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Action de la pesanteur: } \mathcal{J}(\text{pesanteur} \rightarrow 1+2+3) = \begin{Bmatrix} -m_3 g \bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_G + \begin{Bmatrix} -m_2 g \bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_H + \begin{Bmatrix} -m_1 g \bar{z}_0 \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_O$$

Théorème du moment dynamique en O appliqué à l'ensemble **{1, 2, 3}** en mouvement par rapport à  $R_0$  en projection sur  $\bar{z}_0$ :

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_O(1/R_0) \cdot \bar{z}_0 + \bar{\delta}_O(2/R_0) \cdot \bar{z}_0 + \bar{\delta}_O(3/R_0) \cdot \bar{z}_0 &= C_{01} + (\overrightarrow{OG} \wedge -m_3 g \bar{z}_0 + \overrightarrow{OH} \wedge -m_2 g \bar{z}_0) \cdot \bar{z}_0 = C_{01} \\ &= \frac{d[\bar{\sigma}_O(1/R_0) \cdot \bar{z}_0 + \bar{\sigma}_O(2/R_0) \cdot \bar{z}_0 + \bar{\sigma}_O(3/R_0) \cdot \bar{z}_0]}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \vec{\sigma}_O(1/R_0) \cdot \vec{z}_0 &= I_1 \dot{\alpha} \text{ car } \mathbf{1/0} = \text{rotation autour de l'axe } (O, \vec{z}_0) \text{ fixe dans } R_0 \\
 * \vec{\sigma}_O(2/R_0) \cdot \vec{z}_0 &= \vec{\sigma}_H(2/R_0) \cdot \vec{z}_0 + [\vec{OH} \wedge m_2 \vec{V}(H \in 2/R_0)] \cdot \vec{z}_0 \\
 &= -A \dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_2 \cdot \vec{z}_0 + B \dot{\beta} \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_0 + C \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2 \cdot \vec{z}_0 + (h \vec{x}_1 \wedge m_2 h \dot{\alpha} \vec{y}_1) \cdot \vec{z}_0 \\
 &= A \dot{\alpha} \sin^2 \beta + C \dot{\alpha} \cos^2 \beta + m_2 h^2 \dot{\alpha} \\
 * \vec{\sigma}_O(3/R_0) \cdot \vec{z}_0 &= \vec{\sigma}_G(3/R_0) \cdot \vec{z}_0 + [\vec{OG} \wedge m_3 \vec{V}(G \in 3/R_0)] \cdot \vec{z}_0 \\
 \vec{\sigma}_G(3/R_0) \cdot \vec{z}_0 &= -D \dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_2 \cdot \vec{z}_0 + D \dot{\beta} \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_0 + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \vec{z}_2 \cdot \vec{z}_0 \\
 &= D \dot{\alpha} \sin^2 \beta + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \cos \beta \\
 [\vec{OG} \wedge m_3 \vec{V}(G \in 3/R_0)] \cdot \vec{z}_0 &= m_3[(h \vec{x}_1 + r \vec{z}_2) \wedge (r \dot{\beta} \vec{x}_2 + (h + r \sin \beta) \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \dot{r} \vec{z}_2)] \cdot \vec{z}_0 \\
 &= m_3[\vec{z}_0 \wedge (h \vec{x}_1 + r \vec{z}_2)] \cdot [r \dot{\beta} \vec{x}_2 + (h + r \sin \beta) \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \dot{r} \vec{z}_2] \\
 &= m_3(h + r \sin \beta) \vec{y}_1 \cdot [r \dot{\beta} \vec{x}_2 + (h + r \sin \beta) \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \dot{r} \vec{z}_2] \\
 &= m_3(h + r \sin \beta) \vec{y}_1 \cdot [r \dot{\beta} \vec{x}_2 + (h + r \sin \beta) \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \dot{r} \vec{z}_2] \\
 &= m_3(h + r \sin \beta)^2 \dot{\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } C_{01} = \frac{d}{dt} [I_1 \dot{\alpha} + A \dot{\alpha} \sin^2 \beta + C \dot{\alpha} \cos^2 \beta + m_2 h^2 \dot{\alpha} + D \dot{\alpha} \sin^2 \beta + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \cos \beta m_3 (h + r \sin \beta)^2 \dot{\alpha}]$$

$$C_{01} = \frac{d}{dt} [(I_1 + (A + D) \sin^2 \beta + (C + E) \cos^2 \beta + m_2 h^2 + m_3 (h + r \sin \beta)^2) \dot{\alpha} + E \dot{\gamma} \cos \beta]$$

Nota: si on applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble **{1, 2, 3}**, on va trouver une relation liant  $C_{01}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{23}$  et  $F_{23}$ . En effet:

$$P(M_{01} \rightarrow 1/R_0) + P(0 \rightarrow 1/R_0) + P(\text{pesanteur} \rightarrow 1+2+3/R_0) + \sum P_{\text{int}} = \frac{d}{dt} T(1+2+3/R_0)$$

$$\text{avec } P(M_{01} \rightarrow 1/R_0) = C_{01} \dot{\alpha}$$

$$P(0 \rightarrow 1/R_0) = 0 \text{ (liaison parfaite)}$$

$$P(\text{pesanteur} \rightarrow 1/R_0) = 0 \text{ car le centre de gravité } O \text{ de } \mathbf{1} \text{ est fixe dans } R_0$$

$$P(\text{pesanteur} \rightarrow 2/R_0) = 0 \text{ car la vitesse du centre de gravité } H \text{ de } \mathbf{2} \text{ est perpendiculaire au poids}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{pesanteur} \rightarrow 3/R_0) &= -m_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{V}(G \in 3/R_0) = -m_3 g \vec{z}_0 \cdot [r \dot{\beta} \vec{x}_2 + (h + r \sin \beta) \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \dot{r} \vec{z}_2] \\
 &= m_3 g (r \dot{\beta} \sin \beta - \dot{r} \cos \beta)
 \end{aligned}$$

$$\sum P_{\text{int}} = P_i(1,2) + P_i(2,3)$$

$$= [\mathcal{J}(1 \rightarrow 2) + \mathcal{J}(M_{12} \rightarrow 2)] \otimes \mathcal{V}(2/1) + [\mathcal{J}(2 \rightarrow 3) + \mathcal{J}(M_{23} \rightarrow 3)] \otimes \mathcal{V}(3/2)$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_{12} \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_H \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_H + \left\{ \begin{matrix} F_{23} \vec{z}_2 \\ C_{23} \vec{z}_2 \end{matrix} \right\}_H \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\gamma} \vec{z}_2 \\ \dot{r} \vec{z}_2 \end{matrix} \right\}_H = C_{12} \dot{\beta} + C_{23} \dot{\gamma} + F_{23} \dot{r}$$

$$T(1/R_0) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\alpha}^2$$

$$\begin{aligned}
 T(2/R_0) &= \frac{1}{2} m_2 \vec{V}^2(H \in 2/R_0) + \frac{1}{2} \bar{\Omega}(2/R_0) \cdot \vec{\sigma}_H(2/R_0) \\
 &= \frac{1}{2} m_2 h^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (\dot{\alpha} \vec{z}_0 + \dot{\beta} \vec{y}_1) \cdot (-A \dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_2 + B \dot{\beta} \vec{y}_1 + C \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2) \\
 &= \frac{1}{2} m_2 h^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (A \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + C \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + B \dot{\beta}^2)
 \end{aligned}$$

$$T(3/R_0) = \frac{1}{2} m_3 \vec{V}^2(G \in 3/R_0) + \frac{1}{2} \bar{\Omega}(3/R_0) \cdot \vec{\sigma}_G(3/R_0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} m_3 [r \dot{\beta} \bar{x}_2 + (h + r \sin \beta) \dot{\alpha} \bar{y}_1 + \dot{r} \bar{z}_2]^2 \\
 &+ \frac{1}{2} [-\dot{\alpha} \sin \beta \bar{x}_2 + \dot{\beta} \bar{y}_1 + (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \bar{z}_2] [-D \dot{\alpha} \sin \beta \bar{x}_2 + D \dot{\beta} \bar{y}_1 + E (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \bar{z}_2] \\
 &= \frac{1}{2} m_3 [r^2 \dot{\beta}^2 + (h + r \sin \beta)^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{r}^2] + \frac{1}{2} [D (\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) + E (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta)^2]
 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ [I_1 + m_2 h^2 + (A + D) \sin^2 \beta + (C + E) \cos^2 \beta + m_3 (h + r \sin \beta)^2] \dot{\alpha}^2 \right\} \\
 &+ [B + D + m_3 r^2] \dot{\beta}^2 + m_3 \dot{r}^2 + E \dot{\gamma}^2 + 2E \dot{\gamma} \dot{\alpha} \cos \beta \\
 &= C_{01} \dot{\alpha} + C_{12} \dot{\beta} + C_{23} \dot{\gamma} + F_{23} \dot{r} + m_3 g (r \dot{\beta} \sin \beta - \dot{r} \cos \beta)
 \end{aligned}$$