

**Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement en utilisant les méthodes énergétiques.**

**Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur**

## Cours

### Chapitre 1

### Approche énergétique

#### Savoirs et compétences :

- ❑ Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- ❑ Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.
- ❑ Res1.C3.SF1 : Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre.
- ❑ Mod1.C4.SF1 : Associer les grandeurs physiques aux échanges d'énergie et à la transmission de puissance.
- ❑ Mod1.C5.SF1 : Identifier les pertes d'énergie.
- ❑ Mod1.C6.SF1 : Évaluer le rendement d'une chaîne d'énergie en régime permanent.
- ❑ Mod1.C5.SF2 : Déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement rapport à un autre solide.
- ❑ Mod1.C5.SF3 : Déterminer la puissance des actions mécaniques intérieures à un ensemble de solides.

<b>1</b>	<b>Caractéristiques d'inertie des solides</b>	<b>2</b>
1.1	Détermination de la masse d'un solide . . . . .	2
1.2	Centre d'inertie d'un solide . . . . .	2
1.3	Grandeurs inertielles d'un solide . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Cinétique et dynamique du solide indéformable</b>	<b>3</b>
2.1	Le torseur cinétique . . . . .	3
2.2	Le torseur dynamique . . . . .	3
2.3	Énergie cinétique . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Principe fondamental de la dynamique</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Théorème de l'énergie puissance</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Méthodologie</b>	<b>3</b>

## 1 Caractéristiques d'inertie des solides

L'inertie d'un solide peut se « caractériser » par la résistance ressentie lorsqu'on souhaite mettre un solide en mouvement. Pour un mouvement de translation, la connaissance de la masse permet de déterminer l'effort nécessaire à la mettre en mouvement. Pour un mouvement de rotation, il est nécessaire de connaître la répartition de la masse autour de l'axe de rotation.

### ■ Exemple

- Couple pour faire tourner une hélice bipale, tripale, quadripale.
- Couple pour faire tourner une bille et effort pour faire translater une bille.

### 1.1 Détermination de la masse d'un solide

#### 1.1.1 Définition

##### Définition

On peut définir la masse  $M$  d'un système matériel (solide)  $S$  par :

$$M = \int_S dm = \int_{P \in V} \mu(P) dv$$

avec :

- $\mu(P)$  la masse volumique au point  $P$  ;
- $dv$  un élément volumique de  $S$ .

#### 1.1.2 Principe de conservation de la masse

### 1.2 Centre d'inertie d'un solide

#### 1.2.1 Définition

**Définition — Centre d'inertie d'un solide.** La position du centre d'inertie  $G$  d'un solide  $S$  est définie par

$$\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \overrightarrow{0}.$$

Pour déterminer la position du centre d'inertie d'un solide  $S$ , on passe généralement par l'origine du repère associé à  $S$ . On a alors  $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \int_{P \in S} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) dm = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \int_{P \in S} \overrightarrow{OG} dm = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm \Leftrightarrow M \overrightarrow{OG} = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm$ .

**Méthode** Pour déterminer les coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$  du centre d'inertie  $G$  du solide  $S$  dans la base  $(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ , on a donc :

$$\begin{cases} M x_G = \mu \int_{P \in S} x_P dV \\ M y_G = \mu \int_{P \in S} y_P dV \\ M z_G = \mu \int_{P \in S} z_P dV \end{cases}$$

avec :

- $dV$  : un élément volumique de  $S$  ;
- $\mu$  : la masse volumique supposée constante.

Pour simplifier les calculs, on peut noter que le centre d'inertie appartient au(x) éventuel(s) plan(s) de symétrie du solide.

#### 1.2.2 Centre d'inertie d'un solide constitué de plusieurs solides

Soit un solide composé de  $n$  solides élémentaires dont la position des centres d'inertie  $G_i$  et les masses  $M_i$  sont connues. On note  $M = \sum_{i=1}^n M_i$ . La position du centre d'inertie  $G$  de l'ensemble  $S$  est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n M_i \overrightarrow{OG_i}.$$

- 1.2.3 Théorème de Guldin
  - 1.2.3.1 Centre d'inertie d'une courbe plane
  - 1.2.3.2 Centre d'inertie d'une surface plane
- 1.3 Grandeurs inertielles d'un solide
  - 1.3.1 Matrice d'inertie
  - 1.3.2 Moment d'inertie
  - 1.3.3 Propriétés des matrices d'inertie
  - 1.3.4 Théorème de Huygens
  - 1.3.5 Rotation de la matrice d'inertie
- 2 Cinétique et dynamique du solide indéformable**
  - 2.1 Le torseur cinétique
    - 2.1.1 Définition
    - 2.1.2 Cas particuliers
  - 2.2 Le torseur dynamique
    - 2.2.1 Définition
    - 2.2.2 Cas particuliers
  - 2.3 Énergie cinétique
    - 2.3.1 Définition
    - 2.3.2 Cas du solide indéformable
    - 2.3.3 Cas d'un système de solide
    - 2.3.4 Inertie équivalente
- 3 Principe fondamental de la dynamique**
- 4 Théorème de l'énergie puissance**
- 5 Méthodologie**
- Références**

[1] Émilien Durif, *Approche énergétique des systèmes*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.