TD 1 – Corrigé

Orthèse d'épaule

Concours Centrale Supelec PSI 2010

Savoirs et compétences :***

- ❒ *Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide*
- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*

Question 1

$$\boxed{\left\{D_{AB/R0}\right\}=\left\{D_{2/0}\right\}=\left\{\begin{matrix} m_2\vec{a}(G_2,2/0) \\ \vec{\delta}_{G2}(2/0)\end{matrix}\right\}_{G2}}$$

$$\vec{V}(G_2,2/0)=l_1\dot{\gamma}\vec{x}_{11}+\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)\vec{x}_2$$

$$\vec{a}(G_2,2/0)=l_1\ddot{\gamma}\vec{x}_1-l_1\dot{\gamma}^2\vec{z}_1+\lambda_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\vec{x}_2-\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2\vec{z}_2$$

$$\boxed{m_2\vec{a}(G_2,2/0)=m_2\left|\begin{matrix} l_1\ddot{\gamma}+\lambda_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\cos\delta-\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2\sin\delta \\ 0 \\ -l_1\dot{\gamma}^2-\lambda_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\sin\delta-\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2\cos\delta\end{matrix}\right.}_{R1}$$

$$\vec{\sigma}_{G2}(2/0)=\left[I_{G2}(2)\right]\vec{\Omega}(2/0)=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2\end{bmatrix}_{R2\ R2}.\left|\begin{matrix}0 \\ \dot{\gamma}+\dot{\delta}= \\ 0\end{matrix}\right._{R2ouR1}\left|\begin{matrix}0 \\ B_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right) \\ 0\end{matrix}\right.$$

$$\boxed{\vec{\delta}_{G2}(2/0)=\left(\frac{d\vec{\sigma}_{G2}(2/0)}{dt}\right)_0=B_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\vec{y}_1}$$

Question 2

- On isole l'ensemble {bras (1) + Avant-Bras (2)}.
- BAME :

$\left\{T(b\hat{a}ti\rightarrow 1)\right\}=\left\{\begin{matrix}X_1\vec{x}_1+Y_1\vec{y}_1+Z_1\vec{z}_1 \\ L_1\vec{x}_1+M_1\vec{y}_1+N_1\vec{z}_1\end{matrix}\right\}_O$ avec $M_1=0$ si liaison pivot parfaite ;

$\left\{T(actionneur1\rightarrow 1)\right\}=\left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ C_1(t)\vec{y}\end{matrix}\right\}_O$;

$\left\{T(force\rightarrow 2)\right\}=\left\{\begin{matrix}X_F\vec{x}+Z_F\vec{z} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_B$;

$\left\{T(pesanteur\rightarrow 1)\right\}=\left\{\begin{matrix}m_1g\vec{z} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{G1}$;

$\left\{T(pesanteur\rightarrow 2)\right\}=\left\{\begin{matrix}m_2g\vec{z} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{G2}$;

- On écrit le Théorème du moment dynamique en 0 selon la direction $\vec{y}$:

$$C_1(t)+0+\left(\overrightarrow{OB}\wedge\left(X_F\vec{x}+Z_F\vec{z}\right)+\overrightarrow{OG_1}\wedge m_1g\vec{z}+\overrightarrow{OG_2}\wedge m_2g\vec{z}\right)\vec{y}=\vec{\delta}_O(1/0).\vec{y}+\vec{\delta}_O(2/0).\vec{y}$$

Question 3

Compléments au corrigé : Détails du calcul (**non demandé**) :

$\overrightarrow{OB}=l_1\vec{z}_1+l_2\vec{z}_2$; $\overrightarrow{OG_1}=\lambda_1\vec{z}_1$; $\overrightarrow{OG_2}=l_1\vec{z}_1+\lambda_2\vec{z}_2$

$\vec{\delta}_O(2/0)=\vec{\delta}_{G2}(2/0)+\overrightarrow{OG_2}\wedge m_2\vec{a}(G_2,2/0)$

$$\vec{\delta}_O(2/0).\vec{y}=B_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)+\left(\begin{vmatrix}\lambda_2\sin\delta\\0\\l_1+\lambda_2\cos\delta\end{vmatrix}_{R1}\wedge m_2\begin{vmatrix}l_1\ddot{\gamma}+\lambda_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\cos\delta-\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2\sin\delta\\0\\-l_1\dot{\gamma}^2-\lambda_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\sin\delta-\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2\cos\delta\end{vmatrix}_{R1}\right).\vec{y}$$

$$\ddot{\gamma}\left(B_2+m_2l_1^{\,2}+2m_2l_1\lambda_2\cos\delta+m_2\lambda_2^{\,2}\right)+\ddot{\delta}\left(B_2+m_2l_1\lambda_2\cos\delta+m_2\lambda_2^{\,2}\right)-m_2l_1\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2+m_2l_1\lambda_2\dot{\gamma}^2$$

$\vec{\delta}_O(1/0)=\vec{\delta}_{G1}(1/0)+\overrightarrow{OG_1}\wedge m_1\vec{a}(G_1,2/0)$

$$\vec{\delta}_O(1/0).\vec{y}=B_1\ddot{\gamma}+\left(\begin{vmatrix}0\\0\\l_1\end{vmatrix}_{R1}\wedge m_1\begin{vmatrix}l_1\ddot{\gamma}\\0\\-l_1\dot{\gamma}^2\end{vmatrix}_{R1}\right).\vec{y}=\ddot{\gamma}\left(B_1+m_1l_1^{\,2}\right)$$

Soit :

$$C_1(t)+l_1X_F\cos\gamma-l_1Z_F\sin\gamma+l_2X_F\cos(\gamma+\delta)-l_2Z_F\sin(\gamma+\delta)-\lambda_1m_1g\sin\gamma-l_1m_2g\sin\gamma-\lambda_2m_2g\sin(\gamma+\delta)=$$
$$\ddot{\gamma}\left(B_1+m_1l_1^{\,2}\right)+\ddot{\gamma}\left(B_2+m_2l_1^{\,2}+2m_2l_1\lambda_2\cos\delta+m_2\lambda_2^{\,2}\right)+\ddot{\delta}\left(B_2+m_2l_1\lambda_2\cos\delta+m_2\lambda_2^{\,2}\right)-m_2l_1\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2+m_2l_1\lambda_2\dot{\gamma}^2$$

Question 4

- On isole l'Avant-Bras (2)}.
- BAME :

$\{T(1\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{matrix}X_2\vec{x}_1+Y_2\vec{y}_1+Z_2\vec{z}_1\\L_2\vec{x}_1+M_2\vec{y}_1+N_2\vec{z}_1\end{matrix}\right\}_A$ avec $M_2=0$ si liaison pivot parfaite ;

$\{T(actionneur2\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\C_2(t)\vec{y}\end{matrix}\right\}_A$;

$\{T(force\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{matrix}X_F\vec{x}+Z_F\vec{z}\\\vec{0}\end{matrix}\right\}_B$;

$\{T(pesanteur\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{matrix}m_2g\vec{z}\\\vec{0}\end{matrix}\right\}_{G2}$;

- On écrit le Théorème du moment dynamique en A selon la direction $\vec{y}$:

$C_2(t)+0+\left(\overrightarrow{AB}\wedge\left(X_F\vec{x}+Z_F\vec{z}\right)+\overrightarrow{AG_2}\wedge m_2g\vec{z}\right).\vec{y}=\vec{\delta}_2(2/0).\vec{y}$

- Détails du calcul :

$\overrightarrow{AB}=l_2\vec{z}_2$; $\overrightarrow{AG_2}=\lambda_2\vec{z}_2$

$\vec{\delta}_A(2/0)=\vec{\delta}_{G2}(2/0)+\overrightarrow{AG_2}\wedge m_2\vec{a}(G_2,2/0)$

avec $\vec{a}(G_2,2/0)=l_1\ddot{\gamma}\vec{x}_1-l_1\dot{\gamma}^2\vec{z}_1+\lambda_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\vec{x}_2-\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2\vec{z}_2$

$$\vec{\delta}_A(2/0).\vec{y}=B_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)+\left(\begin{vmatrix}0\\0\\\lambda_2\end{vmatrix}_{R2}\wedge m_2\begin{vmatrix}l_1\ddot{\gamma}\cos\delta+l_1\dot{\gamma}^2\sin\delta+\lambda_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\\0\\l_1\ddot{\gamma}\sin\delta-l_1\dot{\gamma}^2\cos\delta-\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2\end{vmatrix}_{R1}\right).\vec{y}$$

$$=B_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)+m_2\lambda_2\left(l_1\ddot{\gamma}\cos\delta+l_1\dot{\gamma}^2\sin\delta+\lambda_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\right)$$

Soit :
$$\boxed{\begin{matrix}C_2(t)+l_2X_F\cos(\gamma+\delta)-l_2Z_F\sin(\gamma+\delta)-\lambda_2m_2g\sin(\gamma+\delta)=\\\ddot{\gamma}\left(B_2+m_2l_1\lambda_2\cos\delta+m_2\lambda_2^{\,2}\right)+\ddot{\delta}\left(B_2+m_2\lambda_2^{\,2}\right)+m_2\lambda_2l_1\dot{\gamma}^2\sin\delta\end{matrix}}$$

Question 5

Les expressions des couples moteur déterminées aux questions 27 et 28 peuvent s'écrire sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q\begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_1 l_1{}^2 + m_2 l_1{}^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos\delta + m_2 \lambda_2{}^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos\delta + m_2 \lambda_2{}^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos\delta + m_2 \lambda_2{}^2 & B_2 + m_2 \lambda_2{}^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 g \sin\gamma + l_1 m_2 g \sin\gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma+\delta) \\ \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin\delta & -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin\delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin\delta & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 \lambda_2 (2\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin\delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin\delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin\delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin\delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin\delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos\gamma - l_2 \cos(\gamma+\delta) & l_1 \sin\gamma + l_2 \sin(\gamma+\delta) \\ -l_2 \cos(\gamma+\delta) & l_2 \sin(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas **statique** (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données ($C_1(t)$, $C_2(t)$, X_F, Z_F) sont indépendantes du temps.

Question 6

Les expressions des couples moteur déterminées aux questions 27 et 28 peuvent s'écrire sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q\begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_1 l_1{}^2 + m_2 l_1{}^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos\delta + m_2 \lambda_2{}^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos\delta + m_2 \lambda_2{}^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos\delta + m_2 \lambda_2{}^2 & B_2 + m_2 \lambda_2{}^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 g \sin\gamma + l_1 m_2 g \sin\gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma+\delta) \\ \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin\delta & -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin\delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin\delta & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 \lambda_2 (2\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin\delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin\delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin\delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin\delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin\delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos\gamma - l_2 \cos(\gamma+\delta) & l_1 \sin\gamma + l_2 \sin(\gamma+\delta) \\ -l_2 \cos(\gamma+\delta) & l_2 \sin(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas **statique** (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données ($C_1(t)$, $C_2(t)$, X_F, Z_F) sont indépendantes du temps.

Question 7

Hypothèses :

- $\ddot{\gamma} = \ddot{\delta} = 0$ et $\dot{\gamma} = \dot{\delta} = 0$ (statique)
- $\gamma = \pi/2$ et $\delta = 0$ (configuration la plus défavorable)

$C_{1,statmax} = (l_1 + l_2)Z_F + C_{1,pesmax}$ et $C_{2,statmax} = l_2 Z_F + C_{2,pesmax}$

Le couple statique maximal est limité à $C_{1,statmax} = 50$ N.m soit :

$$Z_{F,max} = \frac{C_{1,statmax} - C_{1,pesmax}}{l_1 + l_2} = \frac{50 - 2{,}55}{0{,}35 + 0{,}27} \text{ soit } \boxed{Z_{F,max} = 76{,}5 N}$$

Le cahier des charges est respecté (effort de manipulation maximal du patient 50 N.m)