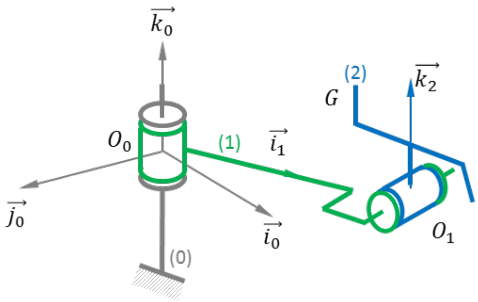
Application 01

Centrifugeuse humaine

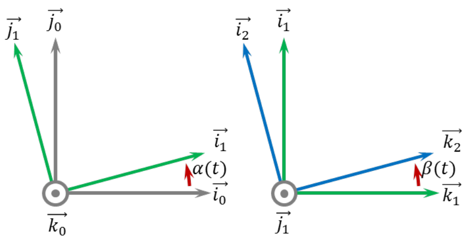
Xavier Pessoles

Savoirs et compétences :

Afin d'analyser les effets de l'accélération sur le corps humaine, le CNRS / MEDES a développé une centrifugeuse humaine. On donne ci-dessous la modélisation cinématique de la centrifugeuse.



Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci dessous :



Les paramètres constants du système sont les suivants :

- $\overrightarrow{O_0O_1} = a\,\overrightarrow{i_1}$;
- $\overrightarrow{O_1G} = b\,\overrightarrow{i_2} + c\,\overrightarrow{k_2}$.

Trajectographie

Question 1 *Donner la trajectoire du point G dans le repère $\mathcal{R}_0$.*

Correction La trajectoire du point G dans le repère $\mathcal{R}_0$ est donnée par le vecteur :

$$\overrightarrow{O_0G}(t) = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1G} = a\,\overrightarrow{i_1} + b\,\overrightarrow{i_2} + c\,\overrightarrow{k_2}$$

Il faut alors projeter les vecteurs dans $\mathcal{R}_0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_0G}(t) &= a\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right)+b\left(\cos\beta(t)\overrightarrow{i_1}-\sin\beta(t)\overrightarrow{k_1}\right)+c\left(\cos\beta(t)\overrightarrow{k_1}+\sin\beta(t)\overrightarrow{i_1}\right)\\
&= a\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right)+b\left(\cos\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right)-\sin\beta(t)\overrightarrow{k_0}\right)\\
&\quad +c\left(\cos\beta(t)\overrightarrow{k_0}+\sin\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right)\right)\\
&= \begin{bmatrix} a\cos\alpha(t)+b\cos\beta(t)\cos\alpha(t)+c\sin\beta(t)\cos\alpha(t)\\ a\sin\alpha(t)+b\cos\beta(t)\sin\alpha(t)+c\sin\beta(t)\sin\alpha(t)\\ -b\sin\beta(t)+c\cos\beta(t)\end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}
\end{aligned}$$

On a ainsi l'équation paramétrique de la position du point G.

Cinématique

Question 2 *Calculer* $\overrightarrow{V(G\in S_2/S_0)}$.

Accélération

Question 3 *Calculer* $\overrightarrow{\Gamma(G\in S_2/S_0)}$.

Correction **Méthode 1 – PAS RECOMMANDE** Par définition,

$$\overrightarrow{V(O_1\in S_1/S_0)}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0O_1}(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}=\left[\frac{\mathrm{d}\left(a\,\overrightarrow{i_1}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}=a\left[\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0} &= \left[\frac{\mathrm{d}\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}=\left[\frac{\mathrm{d}\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}+\left[\frac{\mathrm{d}\sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}\\
&= \frac{\mathrm{d}\cos\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i_0}+\cos\alpha(t)\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}+\frac{\mathrm{d}\sin\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i_0}+\sin(t)\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{j_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}\\
&= -\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\overrightarrow{i_0}+\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\overrightarrow{j_0}=\dot{\alpha}(t)\overrightarrow{j_1}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{V(O_1\in S_1/S_0)}=\begin{bmatrix}-a\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\\ a\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\\ 0\end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}=\begin{bmatrix}0\\ a\dot{\alpha}(t)\\ 0\end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

Dans les deux cas, $\overrightarrow{O_0O_1}(t)$ est dérivé par rapport $\mathcal{R}_0$ mais il s'exprime différemment dans $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$:

- $\overrightarrow{V(O_1\in S_1/S_0)}=-a\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\overrightarrow{i_0}+a\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\overrightarrow{j_0}$: ici la base de **projection** et de **dérivation** est la base $\mathcal{B}_0$;
- $\overrightarrow{V(O_1\in S_1/S_0)}=a\dot{\alpha}(t)\overrightarrow{j_1}$: ici la base de dérivation est la base $\mathcal{B}_0$ et la base de projection est $\mathcal{B}_1$.

Méthode 2 – Utilisation de la dérivation vectorielle.
Calcul de $\overrightarrow{V(O_1\in S_1/S_0)}$.
On rappelle que :

$$\overrightarrow{V(O_1\in S_1/S_0)}=a\left[\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

Le calcul de $\left[\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}$ peut donc être réalisé ainsi :

$$\left[\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{i_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_1}}_{\overrightarrow{0}}+\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}\wedge\overrightarrow{i_1}=\dot{\alpha}\,\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{i_1}=\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{V(O_1\in S_1/S_0)}=a\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}$$

Méthode 3 – Calcul de $\overrightarrow{V(O_1\in S_1/S_0)}$.
S_1 et S_0 sont en liaison pivot de centre O_0, on a donc : $\overrightarrow{V(O_0\in S_1/S_0)}=\overrightarrow{0}$.
En conséquence,

$$\overrightarrow{V(O_1\in S_1/S_0)}=\overrightarrow{V(O_0\in S_1/S_0)}+\overrightarrow{O_1O_0}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=\overrightarrow{0}-a\,\overrightarrow{i_1}\wedge\left(\dot{\alpha}\,\overrightarrow{k_0}\right)=a\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}$$

Correction Calcul de $\overrightarrow{V(G\in S_2/S_0)}$.
On a :

$$\overrightarrow{V(G\in S_2/S_0)}=\overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}+\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}$$

Calculons $\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}$:

$$\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}=\overrightarrow{V(O_1\in S_1/S_0)}+\overrightarrow{GO_1}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=a\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}-\left(b\,\overrightarrow{i_2}+c\,\overrightarrow{k_2}\right)\wedge\left(\dot{\alpha}\,\overrightarrow{k_0}\right)$$

$$\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}=a\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}+b\dot{\alpha}\sin(\beta+\pi/2)\,\overrightarrow{j_1}+c\dot{\alpha}\sin\beta\,\overrightarrow{j_1}=\dot{\alpha}\left(a+b\cos\beta+c\sin\beta\right)\overrightarrow{j_1}$$

Par ailleurs calculons $\overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}$:

$$\overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}=\overrightarrow{V(O_1\in S_2/S_1)}+\overrightarrow{GO_1}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}=-\left(b\,\overrightarrow{i_2}+c\,\overrightarrow{k_2}\right)\wedge\left(\dot{\beta}\,\overrightarrow{j_1}\right)=-\dot{\beta}\left(b\,\overrightarrow{k_2}-c\,\overrightarrow{i_2}\right)$$

Au final,

$$\overrightarrow{V(G\in S_2/S_0)}=\dot{\alpha}\left(a+b\cos\beta+c\sin\beta\right)\overrightarrow{j_1}-\dot{\beta}\left(b\,\overrightarrow{k_2}-c\,\overrightarrow{i_2}\right)$$

Il est aussi possible de calculer $\overrightarrow{V(G\in S_2/S_0)}$ ainsi :

$$\overrightarrow{V(G\in S_2/S_0)}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0G}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}$$