

## 1 Modélisation et paramétrage des systèmes mécaniques

**Méthode — Modélisation d'un système mécanique réel.** Pour modéliser un système mécanique réel (en TP par exemple) il faut :

- identifier les classes d'équivalence cinématique, c'est-à-dire tous les ensembles de pièces reliés entre elles par des liaisons encastrement;
- identifier les surfaces de contact entre les classes d'équivalence;
- associer une liaison cinématique aux surfaces de contact;
- tracer les liaisons en utilisant une couleur par classe d'équivalence et respectant leur positionnement relatif;
- relier les liaisons de manière filaire;
- indiquer le bâti, les centres de liaisons et la numérotation des classes d'équivalence.

**Méthode — Paramétrage d'un mécanisme cinématique.** Pour paramétrer un mécanisme, il faut associer un repère à chaque classe d'équivalence, une constante à chaque dimension fixe (pour une même classe d'équivalence) et une variable à chaque degré de mobilité de liaison (entre deux classes d'équivalence).

- si la mobilité est une translation, on définit un paramètre variable entre deux points selon une seule direction (la direction de la translation);
- si la mobilité est une rotation il faut définir l'axe de rotation et l'angle variable en précisant la figure de changement de base.



Par usage, nous associerons une lettre grecque à un paramètre variable et une lettre romane à une dimension fixe. Cela permet de repérer plus facilement quelles sont les variables temporelles lors de calcul de dérivées.

### Définition Graphe de structure – Chaînes

Graphe qui permet d'avoir une vue d'ensemble du mécanisme :

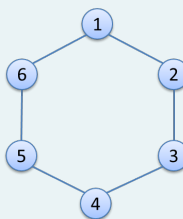
- les classes d'équivalences sont schématisées par des cercles avec un repère (celui défini précédemment);
- les liaisons sont schématisées par des traits qui relient les cercles.

On définit 3 types de chaînes :

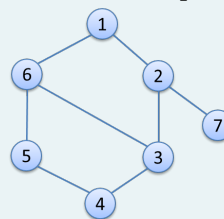
Les chaînes ouvertes



Les chaînes fermées



Les chaînes complexes



## 2 Résolution des lois entrée-sortie

### Méthode Calcul de la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Un système se présentant sous forme d'une chaîne de solide fermée a pour but de transformer un mouvement. On s'intéresse alors pour cela à la relation cinématique liant le mouvement d'entrée du système et le mouvement de sortie. On écrit pour cela une **fermeture de chaîne géométrique**. Pour cela :

1. paramétrer le mécanisme;
2. identifier la grandeur d'entrée et de sortie;
3. à l'aide du théorème de Chasles, exprimer le vecteur nul en fonction des vecteurs liant le centre de chacune des liaisons;
4. projeter la relation vectorielle sur une des bases;

5. combiner les relations pour exprimer la sortie en fonction de l'entrée;
6. dériver si besoin pour avoir le lien entre les vitesses.

**Méthode Méthodes pour manipuler les systèmes équations :**

1. Pour supprimer une longueur  $\lambda$  : on met les deux équations sous la forme  $\lambda =$  et on fait le rapport des deux équations.
2. Pour supprimer l'angle  $\varphi$  : on met une équation sous la forme  $\cos \varphi =$  et la seconde sous la forme  $\sin \varphi =$  et on utilise la relation  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ .
3. Dans d'autres cas, on peut avoir à utiliser l'expression de la tangente.

**Méthode — Autre idée pour calculer la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée.** Dans certains mécanismes, on peut observer que deux vecteurs sont toujours orthogonaux. En utilisant le fait que le produit scalaire entre ces deux vecteurs est nul puis en projetant les vecteurs dans une même base puis en réalisant le calcul, il est possible de déterminer une loi entrée-sortie.

**Définition — Solide Indéformable.** On considère deux points  $A$  et  $B$  d'un solide indéformable noté  $S$ . On note  $t$  le temps.  $\forall A, B \in S, \forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB}(t)^2 = \text{constante}$ .

**Définition — Trajectoire d'un point appartenant à un solide.** Soit un point  $P$  se déplaçant dans un repère  $\mathcal{R}_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ . La trajectoire du point  $P$  est définie par la courbe  $\mathcal{C}(t)$  paramétrée par le temps  $t$ . On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{OP}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = x(t)\vec{i}_0 + y(t)\vec{j}_0 + z(t)\vec{k}_0$$

**Définition — Vitesse d'un point appartenant à un solide.** Soit un solide  $S_0$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ . Soit un solide  $S_1$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ . Le solide  $S_1$  est en mouvement par rapport au solide  $S_0$ . Soit un point  $P$  appartenant au solide  $S_1$ . La vitesse du point  $P$  appartenant au solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_0$  se calcule donc ainsi :  $\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)}(t) = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_0P}(t)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$ .

### ■ Exemple ■

**Résultat** Lorsque il n'y a pas de degré de liberté de translation dans une liaison, la vitesse au centre de la liaison est nulle. Ainsi :

- si les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison rotule de centre  $O$  alors  $\overrightarrow{V(O \in S_2/S_1)} = \vec{0}$  ;
- si les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison pivot de d'axe  $(O, \vec{u})$  alors  $\overrightarrow{V(O \in S_2/S_1)} = \vec{0}$  ;
- si les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison rotule à doigt de centre  $O$  alors  $\overrightarrow{V(O \in S_2/S_1)} = \vec{0}$  .

### Résultat Dérivation vectorielle

Soient  $S_0$  et  $S_1$  deux solides en mouvements relatifs et  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  les repères orthonormés directs associés. Soit  $\vec{v}$  un vecteur de l'espace. On note  $\overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$  le vecteur instantané de rotation permettant d'exprimer les rotations entre chacune des deux bases. La dérivée d'un vecteur dans une base mobile se calcule donc ainsi :

$$\left[ \frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \vec{v}.$$

### Résultat Champ du vecteur vitesse dans un solide – Formule de Varignon – Formule de BABAR

Soient  $A$  et  $B$  deux points appartenant à un solide  $S_1$  en mouvement par rapport à  $S_0$ . Le champ des vecteurs vitesses est donc déterminé ainsi :

$$\overrightarrow{V(B \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(A \in S_1/S_0)} + \underbrace{\vec{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}_{\vec{R}}$$

### Résultat Composition du vecteur vitesse

Soit un solide  $S_1$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  et un solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$ . Pour chacun des points  $A$  appartenant au solide  $S_2$ , on a :

$$\overrightarrow{V(A \in S_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V(A \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(A \in S_1/\mathcal{R}_0)}$$

R

- $\overrightarrow{V(A \in S_2/\mathcal{R}_0)}$  est appelé vecteur vitesse absolu;
- $\overrightarrow{V(A \in S_2/S_1)}$  est appelé vecteur vitesse relatif;
- $\overrightarrow{V(A \in S_1/\mathcal{R}_0)}$  est appelé vecteur vitesse d'entraînement.

### Résultat Composition du vecteur vitesse

Soit un solide  $S_1$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  et un solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$ . On a :

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)}$$

### Définition Accélération d'un point appartenant à un solide

Soit un solide  $S_0$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ . Soit un solide  $S_1$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_1 (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ . Le solide  $S_1$  est en mouvement par rapport au solide  $S_0$ .

Soit un point  $P$  appartenant au solide  $S_1$ . L'accélération du point  $P$  appartenant au solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_0$  se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/S_0)}(t) = \left[ \frac{d \left( \overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)}(t) \right)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

## Révisions



## TD – Révisions de cinématique ★

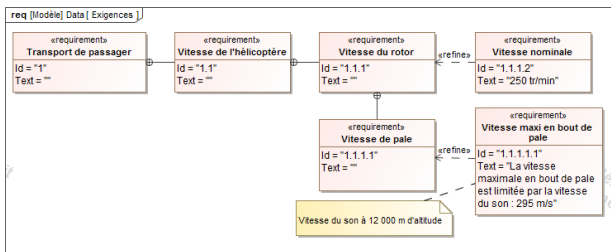
## Savoirs et compétences :

## Pales d'hélicoptères

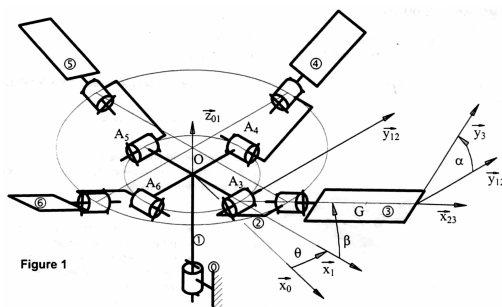
## Mise en situation

L'hélicoptère est un giravion dont la sustentation est assurée par un rotor primaire équipé de pales. Un rotor secondaire (ou rotor de queue, lui aussi équipé de pales) permet à l'hélicoptère de ne pas tourner sur lui-même. Ces rotors sont entraînés par une ou deux turbines suivant les hélicoptères, par l'intermédiaire d'une boîte de vitesse.

En vol, les rotors tournent à une vitesse de rotation fixe. La modification de l'inclinaison des pales permet à elle seule une accélération, un décélération, un changement d'altitude ou de direction de l'hélicoptère.



## Cinématique analytique



Le fuselage de l'hélicoptère est repéré par  $S_0$  et on lui associe le repère  $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  défini de la manière suivante :

- $(O, \vec{z}_0)$  correspond à l'axe de rotation du rotor principal;
- $(O, \vec{x}_0)$  définit l'axe longitudinal de l'appareil et est orienté de l'arrière vers l'avant;
- $(O, \vec{y}_0)$  définit l'axe transversal.

Ce rotor est constitué de :

- un moyeu central  $S_1$  associé au repère  $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  qui est entraîné par la boîte de vitesse (non représentée ici) ;
- quatre pales  $S_3, S_4, S_5$  et  $S_6$ . On associe le repère  $\mathcal{R}_3(A_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  à la pale  $S_3$  ;
- quatre pieds de pales identiques reliant les pales au moyeu. On associe le repère  $\mathcal{R}_2(A_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  au pied de pale  $S_2$ .

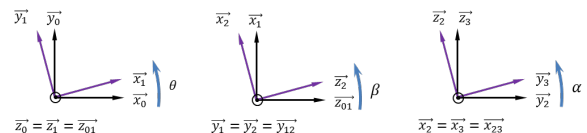
NB : Si les repères  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}_j$  ont un vecteur de base commun (par exemple  $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ ), celui-ci est noté  $\vec{x}_{ij}$ .

Le mouvement de  $S_1/S_0$  est une rotation d'axe  $(O, \vec{z}_0)$ . On pose  $\theta$  l'angle de rotation du rotor :  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ .

Le mouvement de  $S_2/S_1$  est une rotation d'axe  $(A_2, \vec{y}_2)$ . On pose  $\beta$  l'angle de battement :  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ .

Le mouvement de  $S_3/S_2$  est une rotation d'axe  $(A_3, \vec{x}_3)$ . On pose  $\alpha$  l'angle de pas :  $\alpha = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$ .

On pose  $\vec{OA}_3 = r \cdot \vec{x}_1$  et  $\vec{A_3G} = a \cdot \vec{x}_3$  où  $G$  est le centre de gravité de la pale 3 ( $r$  et  $a$  constants). On suppose que tous les solides sont indéformables.



**Question 1** Déterminer le vecteur  $\vec{V}(G \in S_3/S_2)$ .

**Question 2** Déterminer le vecteur  $\vec{V}(G \in S_2/S_1)$ .

**Question 3** Déterminer le vecteur  $\vec{V}(G \in S_1/S_0)$ .

**Question 4** Déduire des questions précédentes le torseur  $\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\}$  au point  $G$ .

On pose maintenant  $\vec{V}(G \in S_3/S_0) = (a \cdot \cos \beta + r) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_{12} - a\dot{\beta} \vec{z}_2$ .

**Question 5** Exprimer l'accélération  $\vec{\Gamma}(G \in S_3/S_0)$ .

**Question 6** La longueur des pales est, entre autre, limitée par la vitesse du son en bout de pale (Exigence 1.1.1.1). Pour  $\beta = 0$ , calculer la longueur maximale de la pale pour ne pas dépasser la vitesse du son. La vitesse du rotor est de  $250 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ .

## Système de coffre motorisé

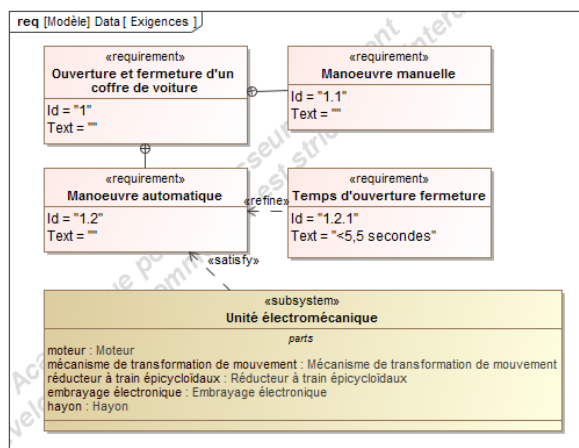
D'après le concours Centrale – Supélec 2007.



Depuis 2005, un coffre motorisé est proposé en option sur l'Audi A6. La motorisation du hayon permet l'ouverture ou la fermeture automatique du coffre. L'ouverture s'effectue soit à l'aide de la télécommande, soit par action sur une touche située à proximité du conducteur, soit par action sur une touche située sur la poignée du hayon. La fermeture s'effectue par action sur une touche située sur la face interne du hayon.

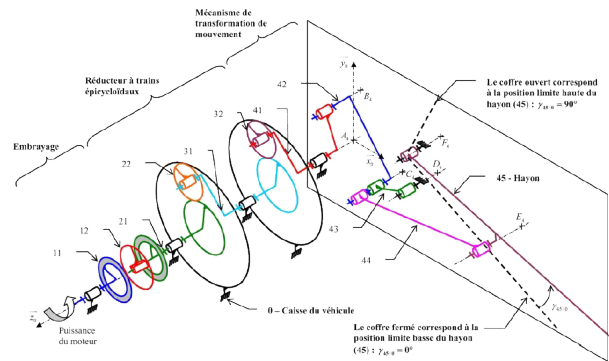
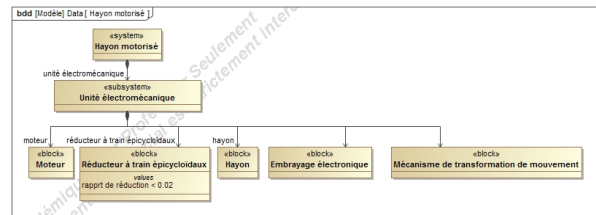
- Objectif**
- Vérifier le rapport de réduction du train épicycloïdal.
  - Déterminer la loi Entrée – Sortie du système 4 barres.

L'utilisateur a la possibilité de programmer l'angle d'ouverture du hayon pour éviter par exemple qu'il ne heurte le plafond du garage. L'utilisateur conserve naturellement la possibilité de manœuvrer manuellement le hayon. Ce système dispose également de détecteurs d'obstacles. En position fermée, le système doit assurer le blocage du hayon avec la caisse du véhicule.



La chaîne d'énergie du système est constituée :

- d'un moteur à courant continu;
- d'un embrayage électromagnétique;
- d'un double train épicycloïdal
- d'un mécanisme de transformation de mouvement de type 4 barres;
- de l'effecteur à savoir le hayon 45 du coffre.



### Étude du train épicycloïdal

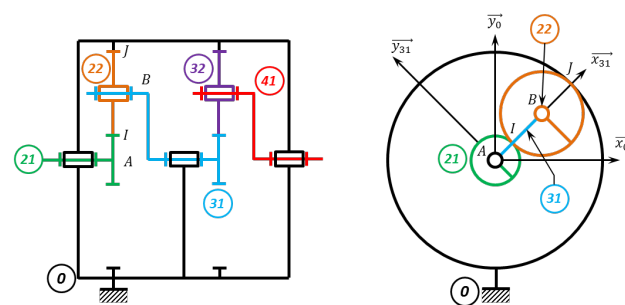
On donne le schéma cinématique du double train épicycloïdal.

Le premier train est constitué :

- du planétaire **21**. On note  $\overrightarrow{\Omega}(21/0) = \omega(21/0)\vec{z}_0$  et  $\|\vec{IA}\| = R_{21}$ ;
- du satellite **22**. On note  $\overrightarrow{\Omega}(22/31) = \omega(22/31)\vec{z}_0$  et  $\|\vec{IB}\| = R_{22}$ ;
- du porte-satellite **31**. On note  $\overrightarrow{\Omega}(31/0) = \omega(31/0)\vec{z}_0$ ;
- de la couronne **0**. On note  $\|\vec{AJ}\| = R_0$ ;

Le second train est constitué :

- du planétaire **21**;
- du satellite **32**;
- du porte-satellite **41**;
- de la couronne **0**.

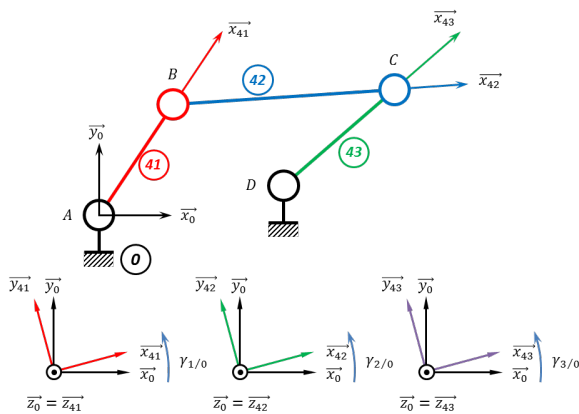


**Question 7** Déterminer le rapport de réduction  $\frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)}$ .

**Question 8** Déterminer le rapport de réduction  $\frac{\omega(41/0)}{\omega(31/0)}$ .

**Question 9** En déduire le rapport de réduction du double train épicycloïdal. Puis faire l'application numérique. On donne  $Z_{21} = 13$  et  $Z_{22} = 81$ . Le rapport de réduction est-il compatible avec celui du diagramme de blocs ?

## Étude du mécanisme de transformation de mouvement



On donne :

- $\overrightarrow{AB} = L_1 \overrightarrow{x_{41}}$ ;
- $\overrightarrow{BC} = L_2 \overrightarrow{x_{42}}$ ;
- $\overrightarrow{DC} = L_3 \overrightarrow{x_{43}}$ ;
- $\overrightarrow{AD} = a \overrightarrow{x_0} + b \overrightarrow{y_0}$ .

**Question 10** Établir une relation géométrique entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$ . Cette relation pourra faire intervenir les différents paramètres constants ( $a$ ,  $b$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ). On ne devra pas voir apparaître  $\gamma_2$ .