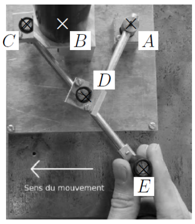
TD 03



Interface maître et esclave d'un robot ⋆⋆

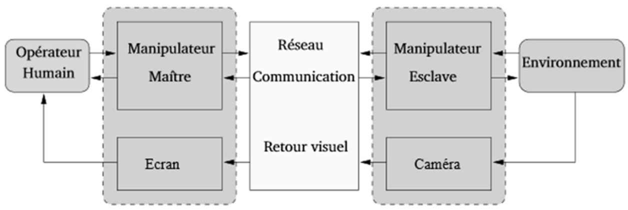
CCP PSI 2015

Savoirs et compétences :

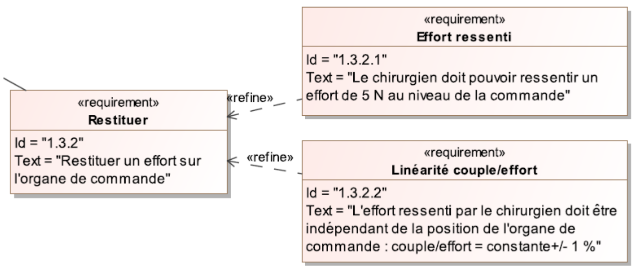
- *Res2.C18* : principe fondamental de la statique ;
- *Res2.C19* : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- *Res2.C20* : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

La téléopération consiste à mettre en relation deux manipulateurs appelés communément maître et esclave. Le manipulateur maître permet au chirurgien de donner sa consigne de déplacement à l'aide d'un levier de commande tandis que l'esclave l'exécute au contact de l'environnement (l'organe à opérer). Les deux sous-systèmes échangent des informations de déplacement et d'effort au travers d'un ou plusieurs canaux de communication. Un retour visuel est également mis en place en parallèle à ce dispositif.

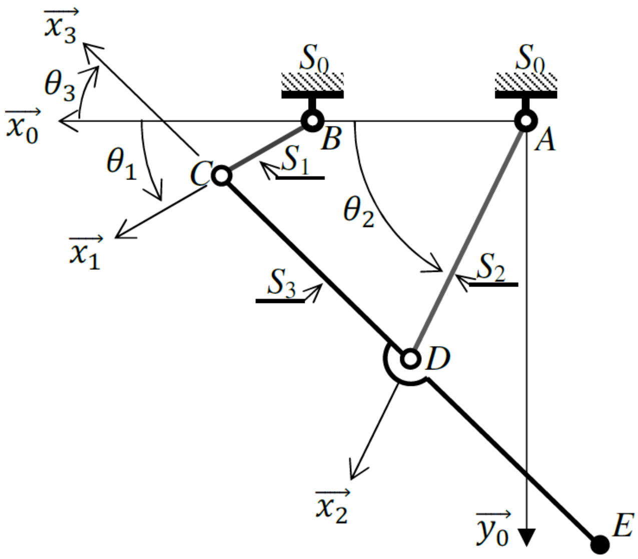


Objectif Vérifier que l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) peut être satisfaite par le mécanisme de HOEKEN.



Modélisation de l'interface maître

Ce mécanisme est constitué de 4 barres reliées par des liaisons pivots.



- Solide S_0, repère $\mathscr{R}_0\left(A;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{AB}=L_0\overrightarrow{x_0}$ avec $L_0=50\,\text{mm}$.
- Solide S_1, repère $\mathscr{R}_1\left(B;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{BC}=L_1\overrightarrow{x_1}$ avec $L_1=25\,\text{mm}$, $\theta_1=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)$.
- Solide S_2, repère $\mathscr{R}_2\left(A;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{AD}=L_2\overrightarrow{x_2}$ avec $L_2=62{,}5\,\text{mm}$, $\theta_2=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_2}\right)$.
- Solide S_3, repère $\mathscr{R}_3\left(C;\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DC}=L_2\overrightarrow{x_3}$ avec $\theta_3=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_3}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_3}\right)$.
- On notera $\left\{\mathscr{T}\left(S_i\rightarrow S_j\right)\right\}=\left\{\begin{array}{cc} X_{ij} & L_{ij}\\ Y_{ij} & M_{ij}\\ Z_{ij} & N_{ij}\end{array}\right\}_{P,\mathscr{B}_0}$ l'expression l'expression au point P, en projection dans la base $\mathscr{B}_0$, du torseur de l'action mécanique exercée par le solide S_i sur le solide S_j ; toutes les inconnues seront exprimées dans la base $\mathscr{B}_0$.
- L'action mécanique exercée par le moteur sur S_1 sera modélisée par un couple $C_m(t)\overrightarrow{z_0}$.
- L'action mécanique exercée par l'opérateur sur S_3 sera modélisée par une force $F(t)\overrightarrow{x_0}$ appliquée au point E.
- L'accélération de la pesanteur sera représentée par le vecteur $\overrightarrow{g}=-g\overrightarrow{z_0}$.
- Les inerties des solides en mouvement et les frottements dans les guidages seront négligés.

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse du mécanisme (liaisons et efforts).*

Question 2 **#CCMP** *Proposer une démarche permettant d'exprimer le couple moteur en fonction de l'effort de l'opérateur et des parmètres géométriques.*

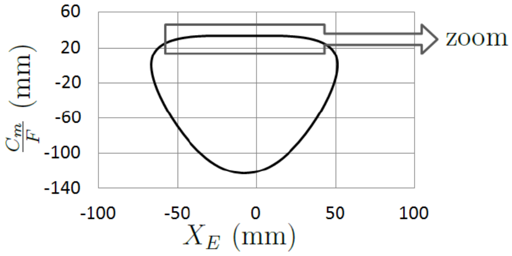
Question 3 **#CCMP** *Mettre en œuvre cette démarche et montrer que*

$$C_m = \frac{L_1 F}{\sin(\theta_2 - \theta_3)}\left(\sin\theta_1 \sin(\theta_2+\theta_3) - 2\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3\right).$$

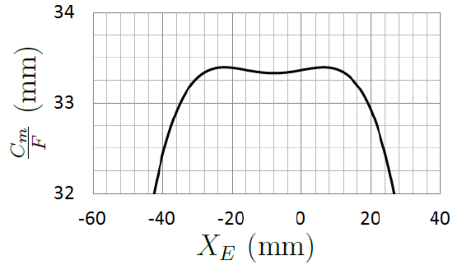
$$C_m = \frac{L_1 F}{\sin(\theta_2 - \theta_3)}\left(\sin\theta_1 \sin(\theta_2+\theta_3) - 2\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3\right).$$

$$C_m = \frac{L_1 F}{\sin(\theta_2 - \theta_3)}\left(\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 - 2\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3\right).$$

Cette relation n'étant pas linéaire, on propose d'analyser les résultats d'une simulation numérique en traçant le couple moteur/effort opérateur en fonction de l'abscisse du point E Q6.



(a) Rapport couple/effort

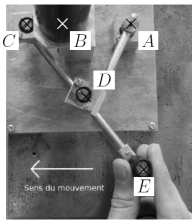


(b) $X_E \in [-60\,\text{mm}, 40\,\text{mm}]$

Question 4 *Retrouver ces graphes en utilsant Python. J'ai pas essayé, mais si eux ont réussi, pourquoi pas vous ? Il faut peut-être utiliser le prmier devoir de vacances.*

Question 5 *Déterminer, à partir de la figure précédente, sur quel intervalle de l'abscisse X_E l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) est satisfaite. Indiquer si cet intervalle est compatible avec les exigences précédemment vérifiées.*

TD 03



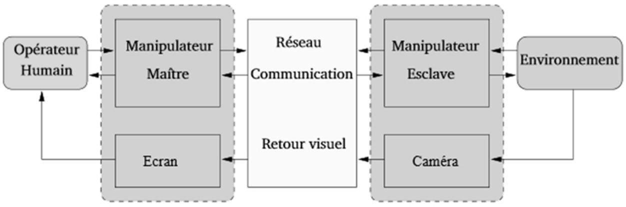
Interface maître et esclave d'un robot ★

CCP PSI 2015

Savoirs et compétences :
- *Res2.C18* : principe fondamental de la statique ;
- *Res2.C19* : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- *Res2.C20* : théorème des actions réciproques.

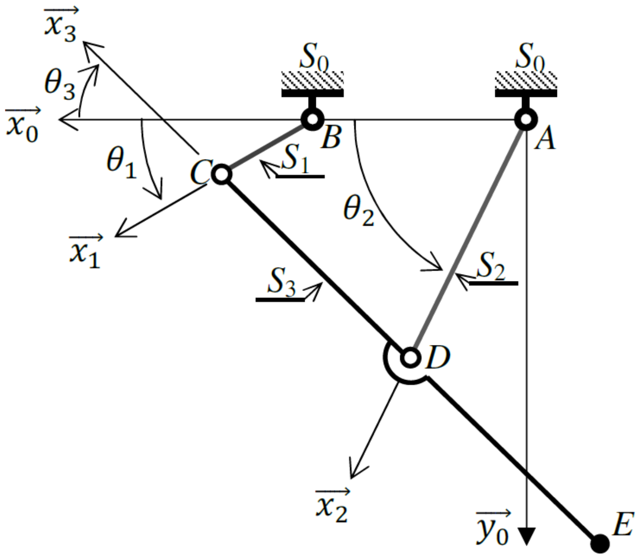
Mise en situation

La téléopération consiste à mettre en relation deux manipulateurs appelés communément maître et esclave. Le manipulateur maître permet au chirurgien de donner sa consigne de déplacement à l'aide d'un levier de commande tandis que l'esclave l'exécute au contact de l'environnement (l'organe à opérer). Les deux sous-systèmes échangent des informations de déplacement et d'effort au travers d'un ou plusieurs canaux de communication. Un retour visuel est également mis en place en parallèle à ce dispositif.

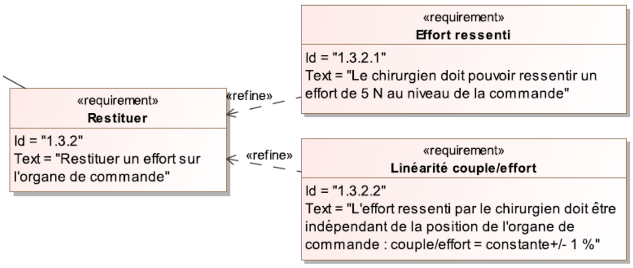


Modélisation de l'interface maître

Ce mécanisme est constitué de 4 barres reliées par des liaisons pivots.



Objectif Vérifier que l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) peut être satisfaite par le mécanisme de HOEKEN.



- Solide S_0, repère $\mathcal{R}_0\left(A;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{AB}=L_0\overrightarrow{x_0}$ avec $L_0=50\,\text{mm}$.
- Solide S_1, repère $\mathcal{R}_1\left(B;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{BC}=L_1\overrightarrow{x_1}$ avec $L_1=25\,\text{mm}$, $\theta_1=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)$.
- Solide S_2, repère $\mathcal{R}_2\left(A;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{AD}=L_2\overrightarrow{x_2}$ avec $L_2=62{,}5\,\text{mm}$, $\theta_2=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_2}\right)$.
- Solide S_3, repère $\mathcal{R}_3\left(C;\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DC}=L_2\overrightarrow{x_3}$ avec $\theta_3=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_3}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_3}\right)$.
- On notera $\left\{\mathcal{T}\left(S_i\rightarrow S_j\right)\right\}=\left\{\begin{array}{cc} X_{ij} & L_{ij}\\ Y_{ij} & M_{ij}\\ Z_{ij} & N_{ij}\end{array}\right\}_{P,\mathcal{B}_0}$ l'expression l'expression au point P, en projection dans la base $\mathcal{B}_0$, du torseur de l'action mécanique exercée par le solide S_i sur le solide S_j ; toutes les inconnues seront exprimées dans la base $\mathcal{B}_0$.
- L'action mécanique exercée par le moteur sur S_1 sera modélisée par un couple $C_m(t)\overrightarrow{z_0}$.
- L'action mécanique exercée par l'opérateur sur S_3 sera modélisée par une force $F(t)\overrightarrow{x_0}$ appliquée au point E.
- L'accélération de la pesanteur sera représentée par le vecteur $\overrightarrow{g}=-g\overrightarrow{z_0}$.
- Les inerties des solides en mouvement et les frottements dans les guidages seront négligés.

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse du mécanisme (liaisons et efforts).*

Question 2 **#CCINP** *Déterminer les équations algébriques issues du développement des 4 relations suivantes :*

- *théorème du moment statique en B appliqué à l'équilibre de S_1, en projection sur $\overrightarrow{z_0}$;*
- *théorème du moment statique en A appliqué à l'équilibre de S_2, en projection sur $\overrightarrow{z_0}$;*
- *théorème du moment statique en D appliqué à l'équilibre de S_3, en projection sur $\overrightarrow{z_0}$;*
- *théorème de la résultante statique appliqué à l'équilibre de S_3, en projection sur $\overrightarrow{y_2}$.*

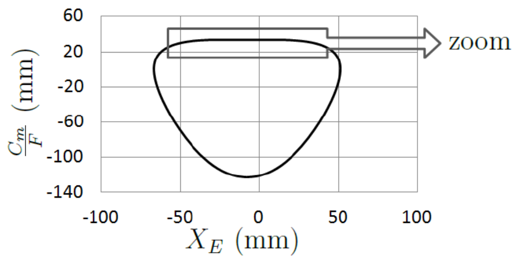
Montrer que

$$C_m = \frac{L_1 F}{\sin(\theta_2-\theta_3)}\left(\sin\theta_1 \sin(\theta_2+\theta_3) - 2\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3\right).$$

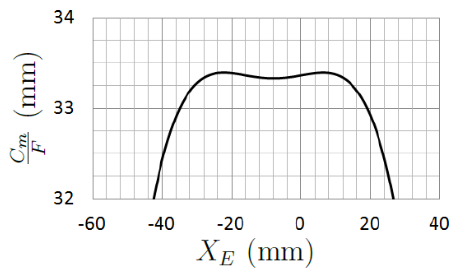
$$C_m = \frac{L_1 F}{\sin(\theta_2-\theta_3)}\left(\sin\theta_1 \sin(\theta_2+\theta_3) - 2\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3\right).$$

$$C_m = \frac{L_1 F}{\sin(\theta_2-\theta_3)}\left(\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 - 2\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3\right).$$

Cette relation n'étant pas linéaire, on propose d'analyser les résultats d'une simulation numérique en traçant le couple moteur/effort opérateur en fonction de l'abscisse du point E Q6.



(a) Rapport couple/effort

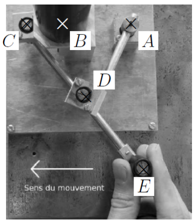


(b) $X_E \in [-60\,\text{mm}, 40\,\text{mm}]$

Question 3 *Retrouver ces graphes en utilisant Python. J'ai pas essayé, mais si eux ont réussi, pourquoi pas vous ? Il faut peut-être utiliser le prmier devoir de vacances.*

Question 4 *Déterminer, à partir de la figure précédente, sur quel intervalle de l'abscisse X_E l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) est satisfaite. Indiquer si cet intervalle est compatible avec les exigences précédemment vérifiées.*

TD 03



Interface maître et esclave d'un robot ⋆⋆

CCP PSI 2015

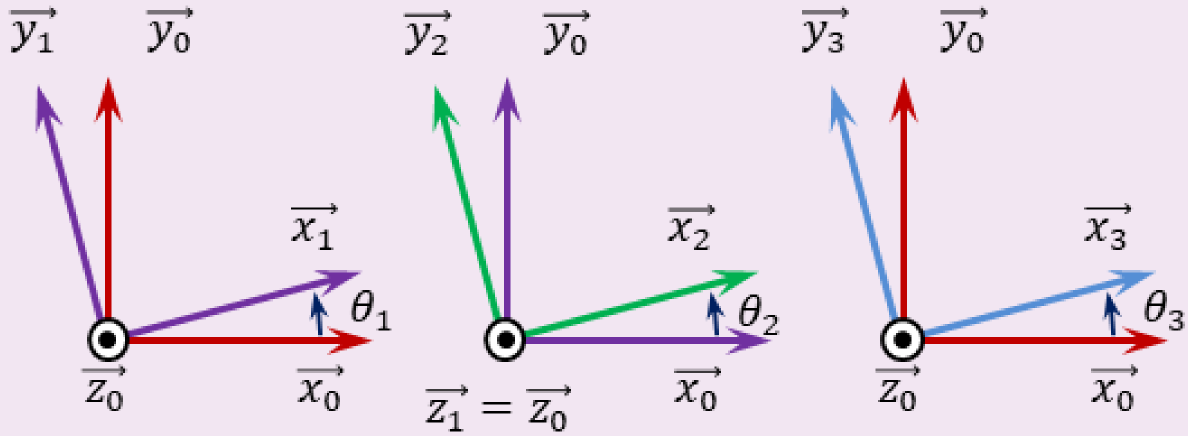
Savoirs et compétences :
- *Res2.C18* : principe fondamental de la statique ;
- *Res2.C19* : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- *Res2.C20* : théorème des actions réciproques.

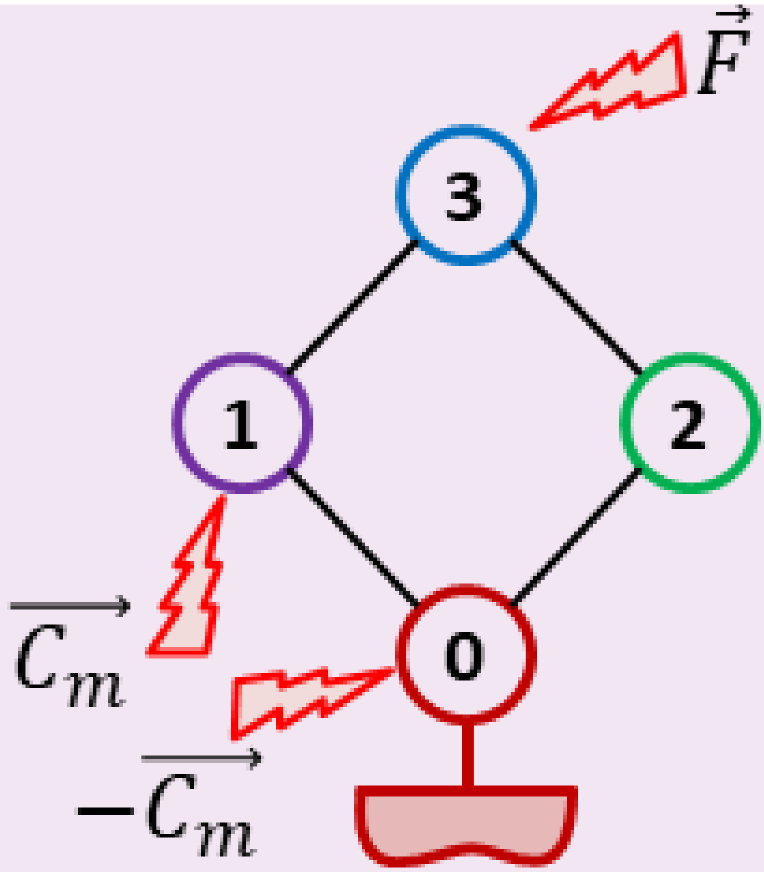
Mise en situation

Modélisation de l'interface maître

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse du mécanisme (liaisons et efforts).*

Correction





Question 2 **#CCMP** *Proposer une démarche permettant d'exprimer le couple moteur en fonction de l'effort de l'opérateur et des parmètres géométriques.*

Correction

- On commence par isoler le solide S_2 soumis à deux forces. D'après le PFS, on a donc $\{\mathcal{T}(0\rightarrow 2)\} = -\{\mathcal{T}(3\rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{23}\overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$.
- Le solide S_1 est en rotation d'axe $\left(B,\overrightarrow{z_0}\right)$. On réalise un TMS en B.
- On isole S_3.Pour ne pas introduire les inconnues de liaison en D, on réalise un TMS en D.

Question 3 **#CCMP** *Mettre en œuvre cette démarche et montrer que*

$$C_m = \frac{L_1 F}{\sin(\theta_2-\theta_3)}\left(\sin\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3)-2\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right).$$

Correction

Après avoir isolé S_2, on a vu que $\{\mathcal{T}(2\rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{23}\overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$.

On isole S_1.
On réalise le BAME.

- Action de la liaison pivot.
- Action du couple moteur.
- Action de S_3 sur S_1 : $\{\mathcal{T}(0\rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{31}\overrightarrow{x_0}+Y_{31}\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_C$.

On applique le TMS en B en projection sur $\overrightarrow{z_0}$ et on a :

$C_m + \overrightarrow{BC}\wedge\left(X_{31}\overrightarrow{x_0}+Y_{31}\overrightarrow{y_0}\right)\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$

$\Leftrightarrow C_m + L_1\overrightarrow{x_1}\wedge\left(X_{31}\overrightarrow{x_0}+Y_{31}\overrightarrow{y_0}\right)\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$

$\Leftrightarrow C_m + L_1\left(-X_{31}\sin\theta_1+Y_{31}\cos\theta_1\right) = 0$

On isole S_3.
On réalise le BAME.

- Action de la liaison pivot en C (1 sur 3).
- Action de la liaison pivot en D (2 sur 3).
- Action de l'opérateur en E.

On applique le TMS en B en projection sur $\overrightarrow{z_0}$ et on a :
$\overrightarrow{DC} \wedge -\left(X_{31}\overrightarrow{x_0} + Y_{31}\overrightarrow{y_0}\right) + \left(\overrightarrow{DE} \wedge F(t)\overrightarrow{x_0}\right) \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$
$\Leftrightarrow \left(L_2\overrightarrow{x_3} \wedge -\left(X_{31}\overrightarrow{x_0} + Y_{31}\overrightarrow{y_0}\right)\right) \cdot \overrightarrow{z_0} - \left(L_2\overrightarrow{x_3} \wedge F(t)\overrightarrow{x_0}\right) \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$
$\Leftrightarrow L_2\left(X_{31}\sin\theta_3 - Y_{31}\cos\theta_3\right) + L_2 F(t)\sin\theta_3 = 0$

À ce stade, il manque une équation pour éliminer X_{31} ou Y_{31}. Il faut donc une équation de la résultante. Pour ne pas faire apparaître F_{23}, on peut isoler S_3 et réaliser un théorème de la résultante statique suivant $\overrightarrow{y_2}$:
$\left(-\left(X_{31}\overrightarrow{x_0} + Y_{31}\overrightarrow{y_0}\right) + F_{23}\overrightarrow{x_2} + F(t)\overrightarrow{x_0}\right) \cdot \overrightarrow{y_2} = 0$
$\Leftrightarrow -\left(-X_{31}\sin\theta_2 + Y_{31}\cos\theta_2\right) - F(t)\sin\theta_2 = 0$
$\Leftrightarrow X_{31}\sin\theta_2 - Y_{31}\cos\theta_2 - F(t)\sin\theta_2 = 0.$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} C_m + L_1\left(-X_{31}\sin\theta_1 + Y_{31}\cos\theta_1\right) = 0 \\ L_2\left(X_{31}\sin\theta_3 - Y_{31}\cos\theta_3\right) + L_2F(t)\sin\theta_3 = 0 \\ X_{31}\sin\theta_2 - Y_{31}\cos\theta_2 - F(t)\sin\theta_2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_m + L_1\left(-X_{31}\sin\theta_1 + Y_{31}\cos\theta_1\right) = 0 \\ X_{31}\sin\theta_3 - Y_{31}\cos\theta_3 + F(t)\sin\theta_3 = 0 \\ X_{31} = \dfrac{Y_{31}\cos\theta_2 + F(t)\sin\theta_2}{\sin\theta_2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_m + L_1\left(-X_{31}\sin\theta_1 + Y_{31}\cos\theta_1\right) = 0 \\ Y_{31}\cos\theta_2\sin\theta_3 + F(t)\sin\theta_2\sin\theta_3 - Y_{31}\cos\theta_3\sin\theta_2 + F(t)\sin\theta_3\sin\theta_2 = 0 \\ X_{31} = \dfrac{Y_{31}\cos\theta_2 + F(t)\sin\theta_2}{\sin\theta_2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_m + L_1\left(-X_{31}\sin\theta_1 + Y_{31}\cos\theta_1\right) = 0 \\ Y_{31} = -2F(t)\dfrac{\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ X_{31} = \dfrac{Y_{31}\cos\theta_2 + F(t)\sin\theta_2}{\sin\theta_2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_m + L_1\left(-X_{31}\sin\theta_1 + Y_{31}\cos\theta_1\right) = 0 \\ Y_{31} = -2F(t)\dfrac{\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ X_{31} = \dfrac{Y_{31}\cos\theta_2 + F(t)\sin\theta_2}{\sin\theta_2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_m + L_1\left(-X_{31}\sin\theta_1 + Y_{31}\cos\theta_1\right) = 0 \\ Y_{31} = -2F(t)\dfrac{\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ X_{31} = -2F(t)\dfrac{\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin(\theta_3 - \theta_2)}\dfrac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2} + F(t) = F(t)\left(-2\dfrac{\cos\theta_2\sin\theta_3}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} + 1\right) \end{array}\right.$$

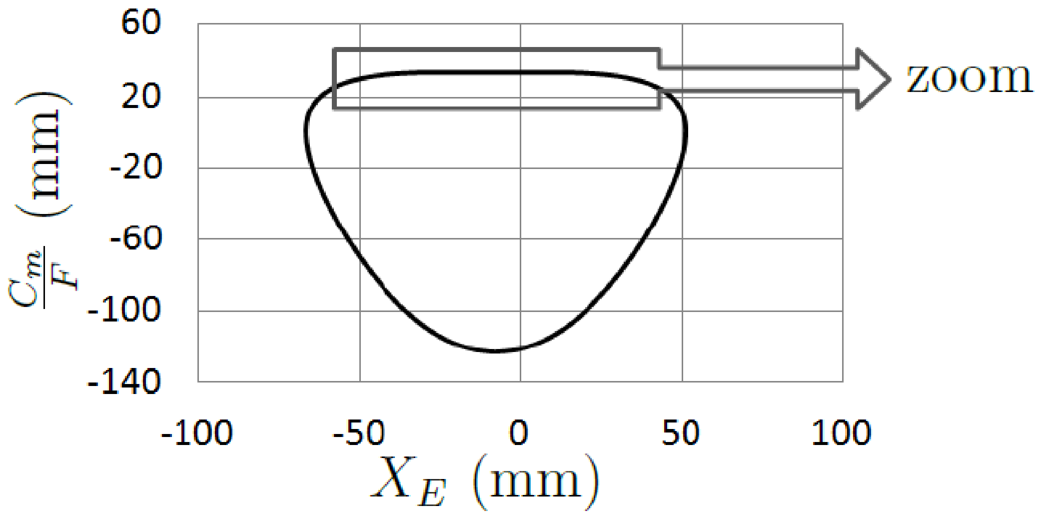
On a donc $C_m = L_1X_{31}\sin\theta_1 - L_1Y_{31}\cos\theta_1 = -2F(t)\dfrac{\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin(\theta_3 - \theta_2)}L_1\sin\theta_1 + 2F(t)\dfrac{\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin(\theta_3 - \theta_2)}L_1\cos\theta_1$
$= 2F(t)L_1\dfrac{\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sin(\theta_3 - \theta_2)}\left(-\sin\theta_1 + \cos\theta_1\right)$

$$C_m = \frac{L_1F}{\sin(\theta_2 - \theta_3)}\left(\sin\theta_1\sin(\theta_2 + \theta_3) - 2\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right).$$

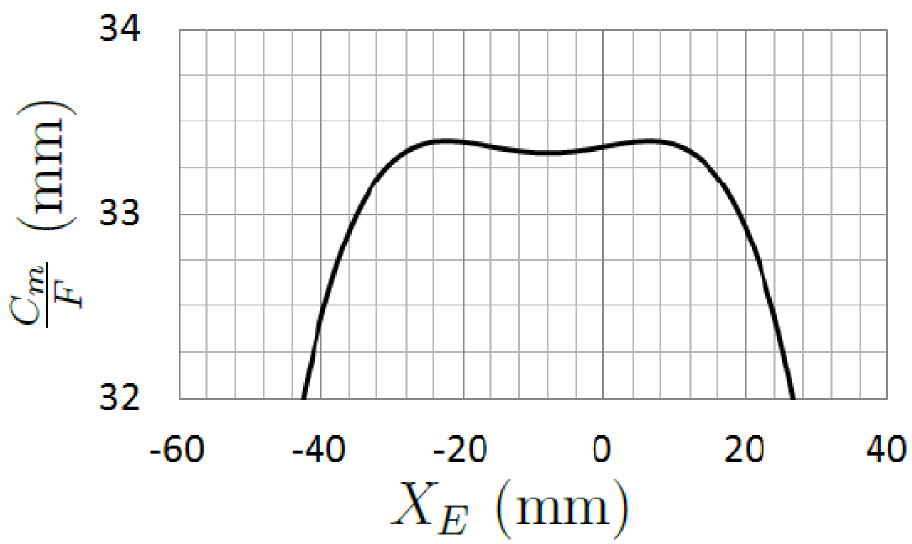
$$C_m = \frac{L_1F}{\sin(\theta_2 - \theta_3)}\left(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 + \sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 - 2\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right).$$

Cette relation n'étant pas linéaire, on propose d'analyser les résultats d'une simulation numérique en traçant le couple moteur/effort opérateur en fonction de l'abscisse du point E Q6.

Rév – Stat



(a) Rapport couple/effort



(b) $X_E \in [-60\,\text{mm}, 40\,\text{mm}]$

Question 4 *Retrouver ces graphes en utilsant Python. J'ai pas essayé, mais si eux ont réussi, pourquoi pas vous ? Il faut peut-être utiliser le prmier devoir de vacances.*

Correction

Question 5 *Déterminer, à partir de la figure précédente, sur quel intervalle de l'abscisse X_E l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) est satisfaite. Indiquer si cet intervalle est compatible avec les exigences précédemment vérifiées.*

Correction