

Application 1



Micromoteur de modélisme ★

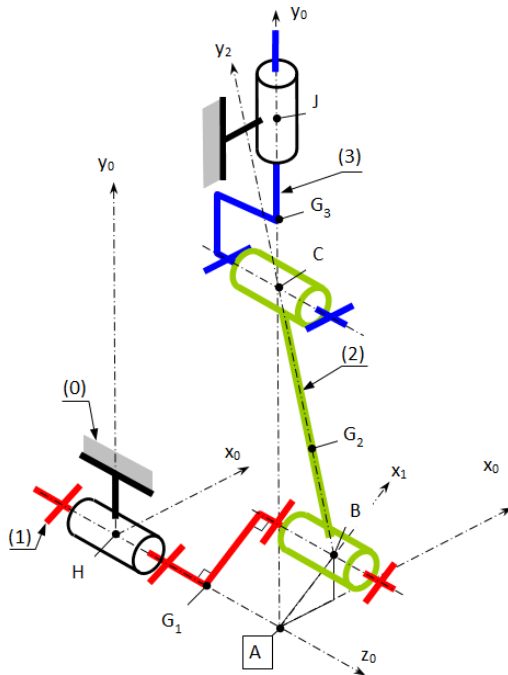
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Mise en situation

Les figures et le schéma ci-dessous représentent un micromoteur à combustion interne de modèle réduit. Du point de vue cinématique, il est basé sur un système bielle manivelle (2,1), associé à un piston (3), animé d'un mouvement de translation rectiligne alternatif.



On note :

- $\overrightarrow{AB} = e \overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BC} = L_2 \overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda_3 \overrightarrow{y_0}$;

- $\overrightarrow{HG_1} = a_1 \overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BG_2} = a_2 \overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{CG_3} = a_3 \overrightarrow{y_0}$;
- $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) = \theta_1$, $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}) = \theta_2$;
- $\omega_{10} = \dot{\theta}_1$ et $\omega_{20} = \dot{\theta}_2$;
- m_1 , m_2 et m_3 les masses des trois pièces mobiles (1), (2) et (3).

On note $C_m \overrightarrow{z_0}$ le couple délivré par le moteur et $F_e \overrightarrow{y_0}$ la force exercée sur le piston suite à l'explosion du mélange air – carburant. On néglige les effets de la pesanteur.

Question 1 Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin (1) et la vitesse du piston (3), notée $\dot{\lambda} = V_{3/0}$.

Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

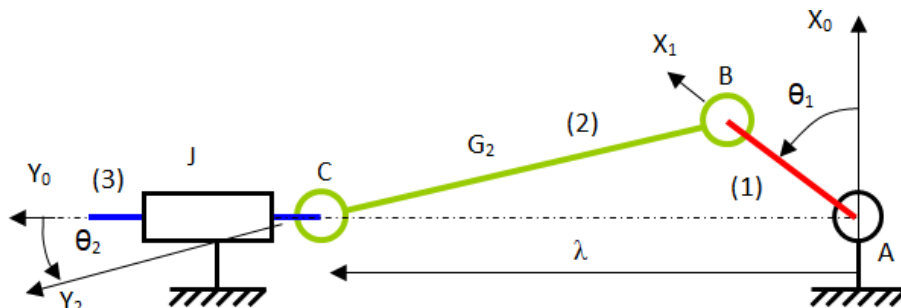
On note $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(H; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})}$ la ma-

trice d'inertie en H de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré (1).

Question 2 En considérant que seul le plan $(H, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z_1})$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie $I_A(1)$, $I_{G_2}(2)$ et $I_{G_3}(3)$ sont diagonales.

Question 3 Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.



Application 2



Chaîne ouverte – Wheeling moto★

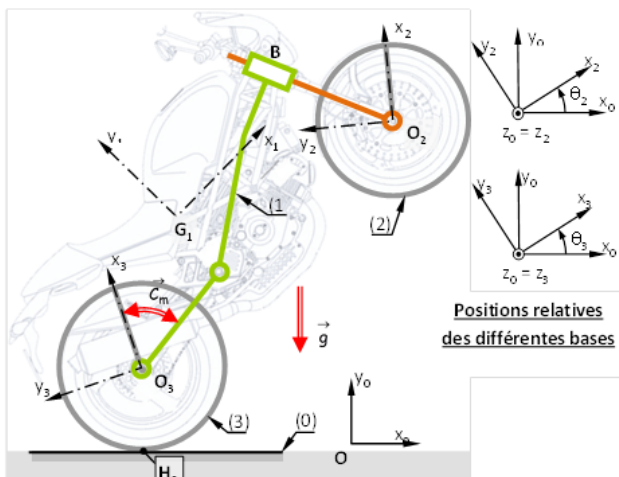
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Modélisation

L'étude proposée concerne l'étude dynamique d'une moto dans une phase de wheeling. Il s'agit d'une figure acrobatique consistant à soulever la roue avant, et de ne garder que l'appui sous la roue arrière. La moto est supposée se déplacer en ligne droite, sur une route horizontale, et l'étude menée est cinématiquement plane. Le modèle d'étude est sur la figure ci-dessous.



- $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère supposé galiléen, où \vec{x}_0 est dirigé suivant la vitesse de la moto et \vec{y}_0 suivant la verticale ascendante;
- $\mathcal{R}_1 = (G_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère lié à l'ensemble considéré indéformable {cadre + bras arrière + fourche avant + pilote}. On note $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- $\mathcal{R}_2 = (O_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est un repère lié à la roue avant (2), de rayon R et de centre O_2 tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$. On note $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$;
- $\mathcal{R}_3 = (O_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est un repère lié à la roue arrière (3), de rayon R et de centre O_3 tel que $\vec{z}_3 = \vec{z}_0$.

On note $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$. Les contacts entre les roues (2) et (3) et le sol (0) sont modélisés par des liaisons ponctuelles en H_2 et H_3 .

On note :

- $\vec{O}O_3 = \lambda \vec{x}_0 + R \vec{y}_0$;
- $\vec{O}_3O_2 = L_1 \vec{x}_1$;
- $\vec{O}_3G_1 = a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1$;
- $\vec{H}_3O_3 = R \vec{y}_0$;
- $\vec{H}_2O_2 = R \vec{y}_0$;
- $G_2 = O_2$ et $G_3 = O_3$.

On note G_i le centre d'inertie, m_i la masse et C_i le moment d'inertie par rapport à l'axe de la pièce (i).

Étude dynamique

La transmission exerce sur la roue arrière un couple moteur $\vec{C}_m = C_m \vec{z}_0$. On suppose que l'adhérence roue/sol est suffisante pour assurer le roulement sans glissement de la roue (3) au contact en H avec le sol. La situation initiale est définie au moment où la roue avant quitte le contact avec le sol, avec $\theta_1 = 0$ (après $\neq 0$).

Question 1 Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling. Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en H_3 .

Question 2 En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer le mouvement de l'ensemble, en précisant :

- élément(s) isolé(s);
- théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.

Question 3 Mettre en place les équations précédentes. Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.

Application 3



Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant*

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

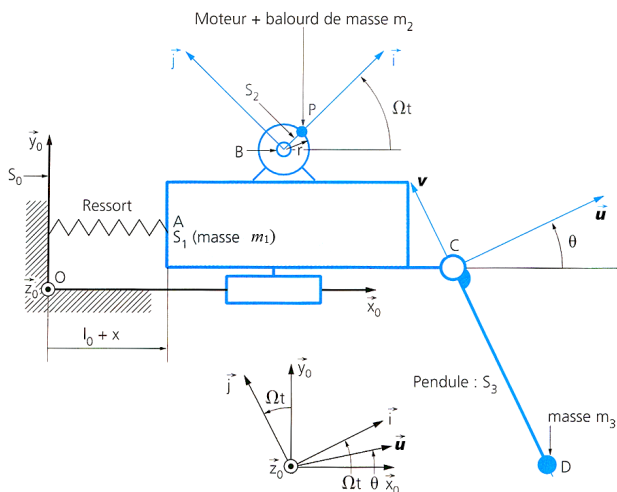
Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide S_1 , de masse m_1 en liaison glissière parfaite avec un support S_0 , fixe par rapport à un repère \mathcal{R}_0 supposé galiléen.

Le solide S_1 est rappelé par un ressort de longueur libre l_0 et de raideur k . Une masse ponctuelle m_2 excentrée, placée en P , tourne sur un rayon r et est entraînée à vitesse constante Ω . Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur S_2 .

Un pendule simple de longueur L , porte à son extrémité D une masse concentrée m_3 , l'ensemble constitue le solide S_3 , en liaison pivot parfaite d'axe (C, \vec{z}_0) avec S_1 .

Les masses autres que m_1 , m_2 et m_3 sont négligées.



Objectif Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

Question 1 Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x , θ et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$ en supposant que x , θ , \dot{x} , $\dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

Question 2 Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme $x(t) = A \cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$.

Question 3 Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B .

Question 4 Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t) = 0$ en régime forcé.

Éléments de correction

1. $(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta}\cos\theta - m_3L\dot{\theta}^2\sin\theta = m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)$ et $\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$.
2. $(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta} = m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)$ et $\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0$.
3. $A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$ et $B = \frac{m_2r\Omega^2}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$.
4. $L = \frac{g}{\Omega^2}$.

Application 4



Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique *

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

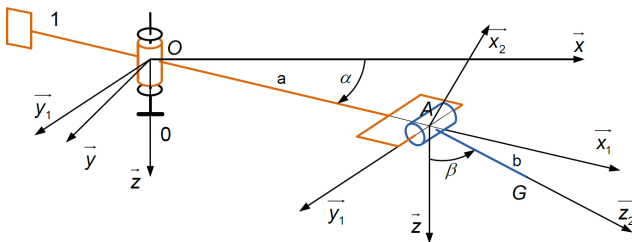
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Présentation

La géotechnique correspond aux activités liées aux applications de la mécanique des sols, de la mécanique des roches et de la géologie. À partir d'essais en laboratoire et in situ, la géotechnique fournit aux constructeurs de bâtiments et d'ouvrages les données indispensables pour le génie civil en ce qui concerne leur stabilité en fonction des sols. Aujourd'hui la modélisation physique d'ouvrage géotechnique en centrifugeuse est une approche expérimentale répandue. La centrifugation des modèles réduits permet de reproduire des états de contraintes dans les matériaux semblables à ceux régnant dans l'ouvrage grandeur nature. Le laboratoire central des Ponts et Chaussées (LCPC) de Nantes possède une centrifugeuse géotechnique dont les principales caractéristiques sont données ci-après :

- distance de l'axe à la plate-forme nacelle : 5,5 m ;
- longueur du bras : 6,8 m ;
- accélération maximale : 200 g ;
- temps de montée à 200 g : 360 s.

On propose le modèle cinématique suivant :



Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti 0 de la centrifugeuse. L'axe (O, \vec{z}) est dirigé suivant la verticale descendante. On désigne par $\vec{g} = g \vec{z}$ le vecteur accélération de la pesanteur.

Le bras 1 est en liaison pivot sans frottement d'axe (O, \vec{z}) avec le bâti 0. Soit $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère

lié au bras 1. On pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$, avec $\alpha = \omega t$, où ω est une constante positive.

La nacelle 2 est en liaison pivot sans frottement d'axe (A, \vec{y}_1) avec le bras 1, telle que $\vec{OA} = a \vec{x}_1$ (a est une constante positive). Soit $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ un repère lié à la nacelle 2. On pose $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$.

On note :

- bras 1 : moment d'inertie I par rapport à l'axe (O, \vec{z}) ;
- nacelle 2 : centre d'inertie G , tel que $\vec{AG} = b \vec{z}_2$ (b est une constante positive), masse m , matrice

$$\text{d'inertie } I_A(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

Un moteur, fixé sur la bâti 0, exerce sur le bras 1 une action mécanique représentée par le couple $C_m \vec{z}$. Le bras 1 tourne à la vitesse constante ω par rapport au bâti 0.

Objectif Déterminer les équations du mouvement de la centrifugeuse, ainsi que le couple moteur à fournir au cours du mouvement.

Question 1 Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

Question 2 Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

On suppose que la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, et que $m b a \gg A \simeq C$.

Question 3 Déterminer les expressions de l'angle β et du couple moteur C_m ?

Application 5



Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs *

Centrale Supélec PSI 2013

Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Modélisation dynamique du comportement de la charge

Objectif Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

En vue d'élaborer une commande automatisée du déchargement des conteneurs, une bonne compréhension de la dynamique du système est nécessaire. Cette partie vise à établir les équations du mouvement du conteneur. La charge peut alors balancer selon le modèle présenté ci-après. Dans cette étude, la vitesse de vent nulle. On fait l'hypothèse que le conteneur est suspendu à un seul câble indéformable, en liaison pivot à ses extrémités. Les liaisons entre les solides 0, 1, 2 et 3 sont supposées parfaites. Le portique support du chariot est noté 0, le chariot 1, le câble 2 et l'ensemble {spreader + conteneur} 3.

Paramétrage

- Le repère $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au portique fixe; il est supposé galiléen avec \vec{z}_0 l'axe vertical ascendant.
- La position du chariot telle que $\vec{OE} = y_{ch}(t) \vec{y}_0$ est notée $y_{ch}(t)$; l'angle (\vec{z}_0, \vec{z}_2) d'inclinaison du câble $\theta(t)$ et l'angle (\vec{z}_2, \vec{z}_3) d'inclinaison du conteneur par rapport au câble $\beta(t)$.

Données

- $\mathcal{R}_1 = (E; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère lié au chariot de levage 1.
- $\mathcal{R}_2 = (E; \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ repère lié au câble 2; $\ell_2 = 50$ m la longueur EF du câble; la masse est négligée.
- $\mathcal{R}_3 = (F; \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ repère lié à l'ensemble {spreader + conteneur}; $m_3 = 50$ tonnes la masse du solide 3; G_3 le centre de gravité du solide 3, tel que $\vec{G_3F} = h_3 \vec{z}_3$ où $h_3 = 2,5$ m; la matrice d'inertie du solide 3 s'écrit $I_3(G_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}$ où $(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

$$A_3 = 52 \times 10^3 \text{ kgm}^2$$

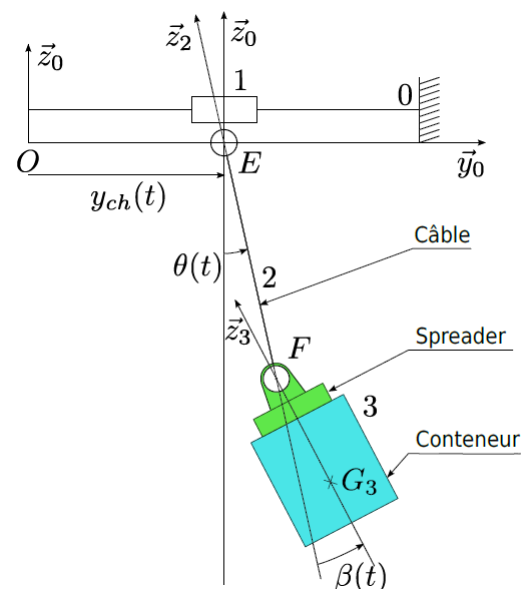
$$B_3 = 600 \times 10^3 \text{ kgm}^2$$

$$C_3 = 600 \times 10^3 \text{ kgm}^2$$

- la motorisation M_D du mouvement de direction exerce, par l'intermédiaire de câbles, des actions

mécaniques sur (1) qui se réduisent à un glisseur de la forme $\vec{R}(M_D \rightarrow 1) = F \vec{y}_0$;

- l'action mécanique du câble sur le spreader est notée $\vec{R}(2 \rightarrow 3) = F_{23} \vec{z}_2$.



Question 1 Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?

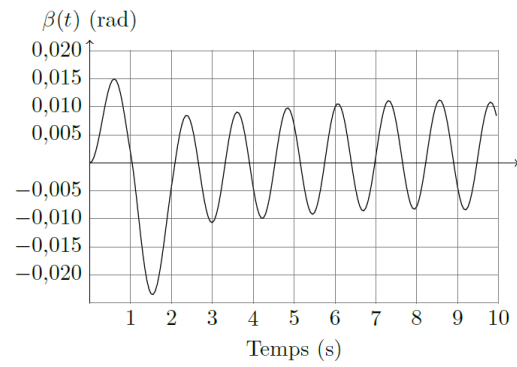
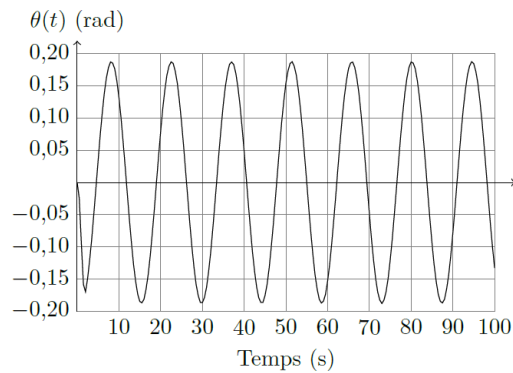
Question 2 Déterminer littéralement, au point G_3 , la vitesse $\vec{V}(G_3 \in 3/0)$ puis le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_0 .

Question 3 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

Question 4 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

Question 5 En supposant que θ , β , $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10 m.



Question 6 Proposer une simplification de la modélisation précédente.