TD 02

Quille pendulaire

Concours Commun Mines Ponts 2014

Savoirs et compétences :

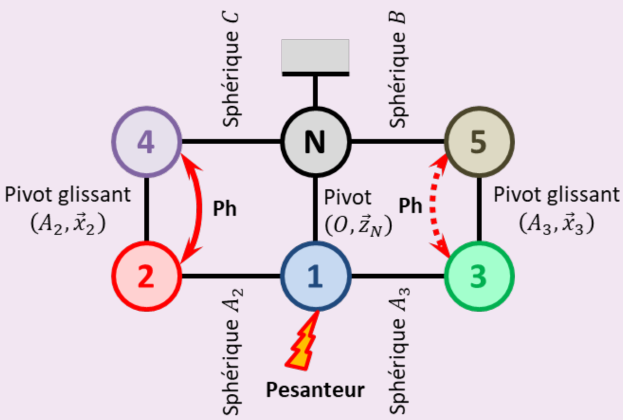
Mise en situation

Objectif L'objectif de cette partie est de valider la solution technologique de réalisation de la liaison pivot entre la quille et la coque.

Travail à réaliser

Question 1 *En isolant le bon système, montrer que l'action de 2 sur 1 en A_2 est représentable par le glisseur dont la forme sera notée :* $\left\{\begin{array}{c} F_{21}\overrightarrow{x}_2 \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{A_2}$ *ou* $\left\{\begin{array}{c} F_{21}\overrightarrow{x}_N \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{A_2}$ *puisque* $\mathscr{B}_N = \mathscr{B}_2$.

Correction Le graphe de structure associé au modèle cinématique est donné dans la figure suivante.



Ph : pression hydraulique

On isole l'ensemble **{4+2}**. Cet ensemble est soumis à 2 glisseurs. D'après le PFS les deux actions mécaniques ont donc même direction (la droite (A_2C), vecteur $\overrightarrow{x}_2 = \overrightarrow{x}_N$), la même norme ($|F_{21}|$)et le sens opposé. On a donc : $\{\mathscr{T}(0 \rightarrow 4)\} + \{\mathscr{T}(1 \rightarrow 2)\} = \{0\} \Leftrightarrow \{\mathscr{T}(0 \rightarrow 4)\} = \{\mathscr{T}(2 \rightarrow 1)\}$ et donc $\{\mathscr{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} F_{21}\overrightarrow{x}_N \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{A_2}$.

Question 2 *Déterminer l'effort F_{21} nécessaire au déplacement de la quille.*

Correction On isole la quille 1.

On réalise le BAME :

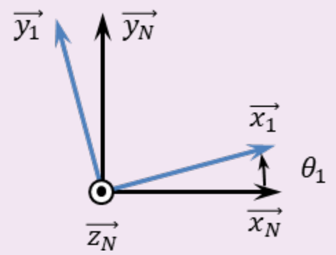
- action de 2 sur 1 : $\{\mathscr{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} F_{21}\overrightarrow{x_N} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{A_2}$;
- action de 3 sur 1 : $\{\mathscr{T}(3 \rightarrow 1)\} = \{0\}$ (pas d'action mécanique dans le vérin) ;
- action de N sur 1 : $\{\mathscr{T}(N \rightarrow 1)\}_{\text{pivot}} = \left\{\begin{array}{c} X_{N1p}\overrightarrow{x_N} + Y_{N1p}\overrightarrow{y_N} + Z_{N1p}\overrightarrow{z_N} \\ L_{N1p}\overrightarrow{x_N} + M_{N1p}\overrightarrow{y_N} \end{array}\right\}_O$;
- action de la pesanteur sur 1 : $\{\mathscr{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} -M_1 g\overrightarrow{y_N} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_1}$.

La quille étant en pivot d'axe $\left(O, \overrightarrow{z_N}\right)$ par rapport à **0**, réalisons le théorème du moment statique en O en projection sur $\overrightarrow{z_N}$:

$\left(\overrightarrow{OA_2}\wedge F_{21}\overrightarrow{x_N}+\overrightarrow{OG_1}\wedge -M_1 g\overrightarrow{y_N}\right)\overrightarrow{z_N}=0$
$\Leftrightarrow \left(\left(R\overrightarrow{y_1}-d\overrightarrow{z_N}\right)\wedge F_{21}\overrightarrow{x_N}+L_1\overrightarrow{y_1}\wedge M_1 g\overrightarrow{y_N}\right)\overrightarrow{z_N}=0$
$\Leftrightarrow -F_{21}\overrightarrow{y_N}\left(R\overrightarrow{y_1}-d\overrightarrow{z_N}\right)+L_1 M_1 g\left(\overrightarrow{x_N}\cdot\overrightarrow{y_1}\right)=0$
$\Leftrightarrow -RF_{21}\cos\theta_1+L_1M_1 g\sin\theta_1=0$
$\Leftrightarrow F_{21}=\dfrac{L_1}{R}M_1 g\tan\theta_1.$

Question 3 *Exprimer, en fonction de d, g, M_1, et F_{21}, par ses éléments de réduction en O, dans la base $\left(\overrightarrow{x_N},\overrightarrow{y_N},\overrightarrow{z_N}\right)$, le torseur d'action mécanique de N sur 1, $\{\mathscr{T}(N\rightarrow 1)\}_{pivot}$.*

Correction



En conservant le même isolement et le même bilan des actions mécaniques, on réalise le PFS en O et on a :

$$\left\{\begin{array}{l} F_21\overrightarrow{x_N}+X_{N1p}\overrightarrow{x_N}+Y_{N1p}\overrightarrow{y_N}+Z_{N1p}\overrightarrow{z_N}-M_1 g\overrightarrow{y_N}=\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{OA_2}\wedge F_{21}\overrightarrow{x_N}+\overrightarrow{OG_1}\wedge -M_1 g\overrightarrow{y_N}+L_{N1p}\overrightarrow{x_N}+M_{N1p}\overrightarrow{y_N}=\overrightarrow{0}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} F_{21}\overrightarrow{x_N}+X_{N1p}\overrightarrow{x_N}+Y_{N1p}\overrightarrow{y_N}+Z_{N1p}\overrightarrow{z_N}-M_1 g\overrightarrow{y_N}=\overrightarrow{0}\\ F_{21}\left(R\overrightarrow{y_1}\wedge\overrightarrow{x_N}-d\overrightarrow{z_N}\wedge\overrightarrow{x_N}\right)-L_1M_1 g\sin\theta\overrightarrow{z_N}+L_{N1p}\overrightarrow{x_N}+M_{N1p}\overrightarrow{y_N}=\overrightarrow{0}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} F_{21}\overrightarrow{x_N}+X_{N1p}\overrightarrow{x_N}+Y_{N1p}\overrightarrow{y_N}+Z_{N1p}\overrightarrow{z_N}-M_1 g\overrightarrow{y_N}=\overrightarrow{0}\\ F_{21}\left(-R\cos\theta_1\overrightarrow{z_N}-d\overrightarrow{y_N}\right)-L_1M_1 g\sin\theta\overrightarrow{z_N}+L_{N1p}\overrightarrow{x_N}+M_{N1p}\overrightarrow{y_N}=\overrightarrow{0}\end{array}\right.$$

On a :

$$\left\{\begin{array}{l} F_{21}+X_{N1p}=0\\ Y_{N1p}-M_1 g=0\\ Z_{N1p}=0\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l} L_{N1p}=0\\ -dF_{21}+M_{N1p}=0\\ -F_{21}R\cos\theta_1-L_1M_1 g\sin\theta=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} X_{N1p}=-F_{21}\\ Y_{N1p}=M_1 g\\ Z_{N1p}=0\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l} L_{N1p}=0\\ M_{N1p}=dF_{21}\\ 0=0\end{array}\right.$$

Question 4 *Écrire la relation liant les torseurs d'action mécanique $\{\mathscr{T}(N\rightarrow 1)\}_{sphère-cylindre}$, $\{\mathscr{T}(N\rightarrow 1)\}_{sphérique}$ et $\{\mathscr{T}(N\rightarrow 1)\}_{pivot}$. En déduire, par ses éléments de réduction en O_1, dans la base $\mathscr{B}_N=\left(\overrightarrow{x_N},\overrightarrow{y_N},\overrightarrow{z_N}\right)$, en fonction de d, g, M_1, et F_{21}, le torseur d'action mécanique de N sur 1 en O_1, $\{\mathscr{T}(N\rightarrow 1)\}_{sphère-cylindre}$.*

Correction

On a $\{\mathscr{T}(N\rightarrow 1)\}_{\text{sphère-cylindre}}+\{\mathscr{T}(N\rightarrow 1)\}_{\text{sphérique}}=\{\mathscr{T}(N\rightarrow 1)\}_{\text{pivot}}$.

En conséquences : $\{\mathscr{T}(N\rightarrow 1)\}_{\text{sphère-cylindre}}=\left\{\begin{array}{c} X_{N1sc}\overrightarrow{x_N}+Y_{N1sc}\overrightarrow{y_N}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{O_1}=\left\{\begin{array}{c} X_{N1sc}\overrightarrow{x_N}+Y_{N1sc}\overrightarrow{y_N}\\ -eX_{N1sc}\overrightarrow{y_N}+eY_{N1sc}\overrightarrow{x_N}\end{array}\right\}_{O}$

et $\{\mathscr{T}(N\rightarrow 1)\}_{\text{sphérique}}=\left\{\begin{array}{c} X_{N1s}\overrightarrow{x_N}+Y_{N1s}\overrightarrow{y_N}+Z_{N1s}\overrightarrow{z_N}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{O_2}=\left\{\begin{array}{c} X_{N1s}\overrightarrow{x_N}+Y_{N1s}\overrightarrow{y_N}+Z_{N1s}\overrightarrow{z_N}\\ eX_{N1s}\overrightarrow{y_N}-eY_{N1s}\overrightarrow{x_N}\end{array}\right\}_{O}.$

Au final, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} X_{N1p}=X_{N1sc}+X_{N1s} \\ Y_{N1p}=Y_{N1sc}+Y_{N1s} \\ Z_{N1p}=Z_{N1s} \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l} L_{N1p}=eY_{N1sc}-eY_{N1s} \\ M_{N1p}=-eX_{N1sc}-eY_{N1s} \\ 0=0 \end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{l} X_{N1p}=X_{N1sc}+X_{N1s} \\ Y_{N1p}=Y_{N1sc}+Y_{N1s} \\ Z_{N1p}=Z_{N1s} \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l} L_{N1p}=eY_{N1sc}-eY_{N1s} \\ M_{N1p}=-eX_{N1sc}-eY_{N1s} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -F_{21}=X_{N1sc}+X_{N1s} \\ M_1g=Y_{N1sc}+Y_{N1s} \\ 0=Z_{N1s} \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l} 0=eY_{N1sc}-eY_{N1s} \\ dF_{21}=-eX_{N1sc}-eY_{N1s} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -F_{21}=X_{N1sc}+X_{N1s} \\ M_1g=2Y_{N1sc} \\ Z_{N1s}=0 \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l} Y_{N1sc}=Y_{N1s} \\ dF_{21}=-eX_{N1sc}-eY_{N1sc} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X_{N1sc}=-\dfrac{d}{e}F_{21}-\dfrac{M_1g}{2} \\ Y_{N1sc}=\dfrac{M_1g}{2} \end{array}\right. .$$

Retour sur le cahier des charges

Question 5 *Dans ces conditions, calculer la valeur de l'effort radial (perpendiculaire à l'axe géométrique du coussinet) qui sollicite ce coussinet en O_1. Valider ensuite l'usage de ce coussinet de nylon.*

Correction On a $F=\sqrt{X_{N1sc}^2+Y_{N1sc}^2}=\sqrt{\left(-\dfrac{d}{e}F_{21}-\dfrac{M_1g}{2}\right)^2+\left(\dfrac{M_1g}{2}\right)^2}$

$$=\sqrt{\left(-\frac{200}{350}200000-\frac{41000}{2}\right)^2+\left(\frac{41000}{2}\right)^2}=136\,336\,\mathrm{N}.$$

Et donc, $p_{21}=\dfrac{136336}{80\cdot 50}\simeq 34\,\mathrm{MPa}<p_{\mathrm{adm}}$.