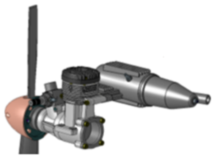
Application 02



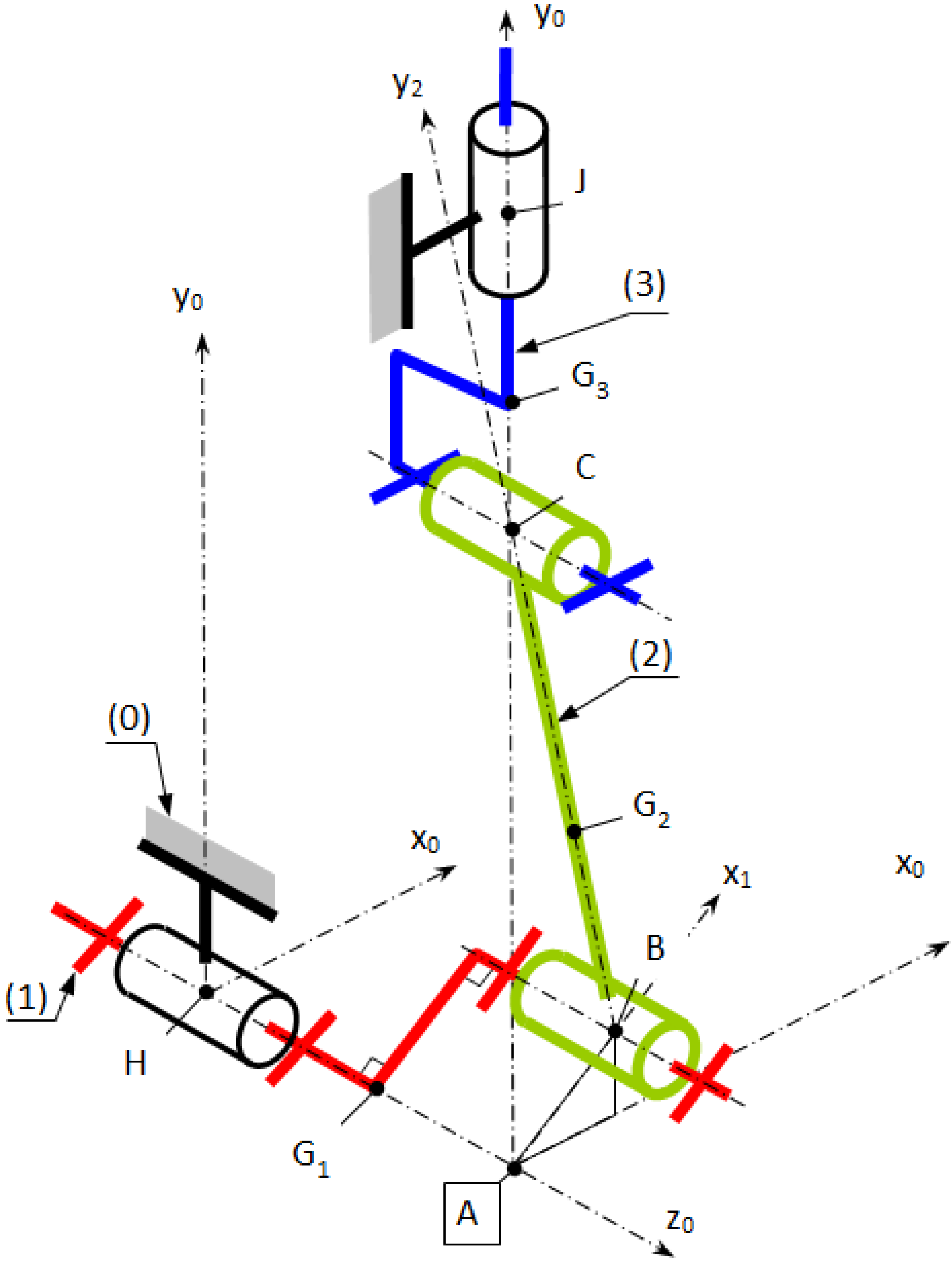
Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme

Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

Mise en situation

Les figures et le schéma ci-dessous représentent un micromoteur à combustion interne de modèle réduit. Du point de vue cinématique, il est basé sur un système bielle manivelle **(2,1)**, associé à un piston **(3)**, animé d'un mouvement de translation rectiligne alternatif.



On note :

- $\overrightarrow{AB}=e\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BC}=L_2\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{AC}=\lambda_3\overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{HG_1}=a_1\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BG_2}=a_2\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{CG_3}=a_3\overrightarrow{y_0}$;
- $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)=\theta_1$, $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)=\theta_2$; $\omega_{10}=\dot{\theta}_1$ et $\omega_{20}=\dot{\theta}_2$.

On note C_m le couple délivré par le moteur et F_e la force exercée sur le piston suite à l'explosion du mélange air - carburant.

Question 1 *Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin **(1)** et la vitesse du piston **(3)**, notée $V_{3/0}$. Déterminer la vitesse et l'accélération du centre d'inertie de la bielle **(2)** par rapport à **(0)**.*

Correction On réalise une fermeture géométrique dans le triangle ABC et on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow e\overrightarrow{x_1}+L_2\overrightarrow{x_2}-\lambda_3\overrightarrow{y_0}\Leftrightarrow e\left(\cos\theta_1\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_1\overrightarrow{y_0}\right)+L_2\left(\cos\theta_2\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_2\overrightarrow{y_0}\right)-\lambda_3\overrightarrow{y_0}=\overrightarrow{0}$. On a donc : $\begin{cases} e\cos\theta_1+L_2\cos\theta_2=0\\ e\sin\theta_1+L_2\sin\theta_2-\lambda_3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_2 \cos\theta_2 = -e\cos\theta_1 \\ L_2 \sin\theta_2 = \lambda_3 - e\sin\theta_1 \end{array} \right.$ Au final, $L_2^2 = e^2\cos^2\theta_1 + (\lambda_3 - e\sin\theta_1)^2 \Leftrightarrow L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1 = (\lambda_3 - e\sin\theta_1)^2$
$\Rightarrow \sqrt{L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1} = \lambda_3 - e\sin\theta_1 \Rightarrow \lambda_3 = \sqrt{L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1} + e\sin\theta_1$.

Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

On note $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$ la matrice d'inertie en H de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré **(1)**.

Question 2 *En considérant que seul le plan $\left(H,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.*

Correction On a donc une invariance suivant $\overrightarrow{y_1}$ et $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$

Question 3 *Reprendre la question précédente en l'appliquant à la bielle **(2)** et au piston **(3)**. Définir la forme de la matrice d'inertie de chacune de ces deux pièces, en précisant en quel point et dans quelle base elle est définie.*

Correction De même $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & -E_2 \\ 0 & B_2 & 0 \\ -E_2 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(G_2;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$ et $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & -E_2 \\ 0 & B_2 & 0 \\ -E_2 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(G_3;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$.

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie sont diagonales.

Question 4 *On note m_1, m_2 et m_3 les masses des trois pièces mobiles **(1)**, **(2)** et **(3)**. Exprimer, pour chacune d'elles : son torseur cinétique et son torseur dynamique.*

Correction H est un point fixe :

- $\{\mathscr{C}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(1/0)} = m_1 \overrightarrow{V(G_1 \in 1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(H,1/0)} = I_H(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_H$
- $\{\mathscr{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1 \in 1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(H,1/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(H,1/0)}}{\mathrm{d}t} \right]_{\mathscr{R}_0} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \ddot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_H$

Question 5 *Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.*

Correction