Colle 03

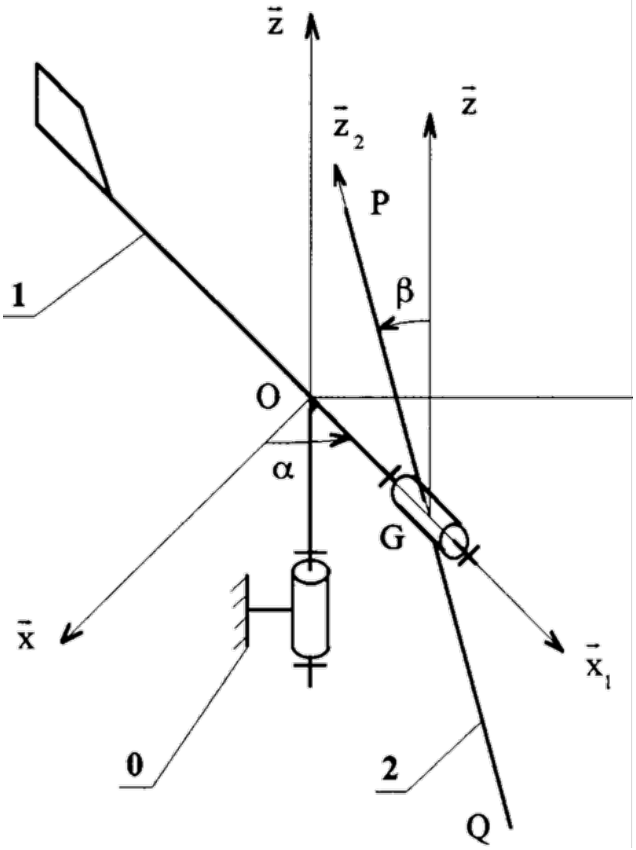
Eolienne

Équipe PT – PT⋆ La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

Soit $\mathcal{R}_0 = \left(O;\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ un repère lié au support **(0)** d'une éolienne. La girouette **(1)** est en liaison pivot d'axe $\left(O,\overrightarrow{z}\right)$ avec le support **(0)**. Soit $\mathcal{R}_1 = \left(O;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z}\right)$ un repère lié à la girouette **(1)**. On pose $\alpha = \left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y},\overrightarrow{y_1}\right)$.

L'hélice **(2)**, de centre d'inertie G, de masse M, est en liaison pivot d'axe $\left(G,\overrightarrow{x_1}\right)$ avec la girouette **(1)** avec $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_1}$. Soit $\mathcal{R}_2 = \left(G;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)$ un repère lié à l'hélice **(2)**. On donne $\overrightarrow{GP} = b\overrightarrow{z_2}$, $\beta = \left(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2}\right) = \left(\overrightarrow{z},\overrightarrow{z_2}\right)$. et $I_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$ ainsi que $I_G(2) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1\\ -F_1 & B_1 & -D_1\\ -E_1 & -D_1 & C_1\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$. Un balourd **(3)** (modélisant un déséquilibre de l'hélice en rotation), fixe par rapport à **(2)**, est représenté par une masse ponctuelle m en P.



Question 1 *Déterminer la projection sur l'axe $\overrightarrow{z}$ du moment cinétique en O de la girouette **(1)** dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}$.*

Question 2 *Justifier l'allure de la matrice d'inertie de **(2)**.*

Question 3 *Déterminer les torseurs cinétiques en O de l'hélice **(1)** et du balourd **(3)** dans leur mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}$.*

Question 4 *Déterminer la projection sur l'axe $\overrightarrow{z}$ du moment dynamique en O de l'hélice **(2)** dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}$.*

Question 5 *Déterminer la projection sur l'axe $\overrightarrow{x_1}$ du moment dynamique en O du balourd **(3)** dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}$.*

CORRIGE

Q1- Déterminer l'expression littérale de la matrice d'inertie de (1) au point C dans la base B'_1. Dans ce qui suit garder la matrice sous la forme générique (A, B, C, ...)

Matrice d'inertie de (1) dans la base B'1

On sait que : $\overset{\approx}{I}(G,1) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} \end{bmatrix}_{B'_1}$

Transfert au point C : $\overrightarrow{CG} = -e\ \overrightarrow{y'_1}$

$$\overset{\approx}{I}(C,1) = \overset{\approx}{I}(G,1) + m \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}_{B'_1}$$

Ainsi : $\overset{\approx}{I}(C,1) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{2}+e^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2+12e^2) \end{bmatrix}_{B'_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1}$

Q2- Déterminer les éléments de réduction en C du torseur cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{C\ (1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m\ \overrightarrow{V}(G/R_0) \\ \overrightarrow{\sigma}(C,1/R_0) \end{array} \right\}_C$$

Résultante cinétique : $m\ \overrightarrow{V}(G/R_0) = -\,m\,e\,\dot{\theta}\ \cos\alpha\ \overrightarrow{z_1}$

Moment cinétique : $\overrightarrow{\sigma}(C,1/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\ c\alpha \\ \dot{\theta}\ s\alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{B'_1} = \dot{\theta}\ (A\ c\alpha\ \overrightarrow{x'_1} + B\ s\alpha\ \overrightarrow{y'_1})$

Or : $\overrightarrow{x'_1} = c\alpha\ \overrightarrow{x_1} - s\alpha\ \overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{y'_1} = c\alpha\ \overrightarrow{y_1} + s\alpha\ \overrightarrow{x_1}$

$$\vec{\sigma}(C,1/R_0) = \dot{\theta}\,\{(A\,c^2\alpha + B s^2\alpha)\,\vec{x_1} + (B-A)\,s\alpha\,c\alpha\,\vec{y_1}\} = \dot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1})$$

$$\boxed{\{C(1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{l} m\,\vec{V}(G/R_0) = -\,m\,e\,\dot{\theta}\,\cos\alpha\,\vec{z_1} \\ \vec{\sigma}(C,1/R_0) = \dot{\theta}\,\{(A\,c^2\alpha + B s^2\alpha)\,\vec{x_1} + (B-A)\,s\alpha\,c\alpha\,\vec{y_1}\} = \dot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) \end{array}\right\}_C}$$

Q3- Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{D(1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{l} M\,\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}(C,1/R_0) \end{array}\right\}_C$$

Résultante dynamique : $M\,\vec{\Gamma}(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,\vec{z_1} - \dot{\theta}^2\,\vec{y_1})$

Moment dynamique : C est un point fixe, donc : $\vec{\delta}(C,1/R_0) = \dfrac{d\vec{\sigma}(C,1/R_0)}{dt/R_0}$

$$\vec{\delta}(C,1/R_0) = \frac{d\,\{\dot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1})\}}{dt/R_0} = \ddot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1}$$

Car $\dfrac{d\,\vec{y_1}}{dt/R_0} = \dfrac{d\,\vec{y_1}}{dt/R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{y_1} = \dot{\theta}\,\vec{x_1}\wedge\vec{y_1} = \dot{\theta}\,\vec{z_1}$

$$\boxed{\{D(1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{l} M\,\vec{\Gamma}(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,\vec{z_1} - \dot{\theta}^2\,\vec{y_1}) \\ \vec{\delta}(C,1/R_0) = \ddot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1} \end{array}\right\}_C}$$

Calculons :

$$\vec{\delta}(A,1/R_0) = \vec{\delta}(C,1/R_0) + \vec{AC}\wedge m\vec{\Gamma}(G,1/R_0)$$

$$\vec{\delta}(A,1/R_0) = \ddot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1} + \vec{AC}\wedge(-\,m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,\vec{z_1} - \dot{\theta}^2\,\vec{y_1})$$

Or : $\vec{AC} = \dfrac{L}{2}\,\vec{x_1}$

$$\vec{\delta}(A,1/R_0) = \ddot{\theta}\,(A'\vec{x_1} + B'\vec{y_1}) + B'\dot{\theta}^2\,\vec{z_1} + m\,e\,\cos\alpha\,\frac{L}{2}\,(\ddot{\theta}\,\vec{y_1} + \dot{\theta}^2\,\vec{z_1})$$

$$\vec{\delta}(A,1/R_0) = \vec{x_1}(A'\ddot{\theta}) + \vec{y_1}\,(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\,)\ddot{\theta} + \vec{z_1}(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\dot{\theta}^2$$