Application 2 – Corrigé

Conducteur virtuel pour véhicule automobile

Centrale Supelec PSI 2014

Savoirs et compétences :

- ❐ *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- ❐ *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- ❐ *Mod2.C15 : matrice d'inertie*

Objectif L'objet de cette partie est de déterminer un modèle mécanique du véhicule en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au véhicule . L'idée est d'utiliser un modèle mécanique relativement simple, associé à une commande très robuste.

Modélisation du comportement dynamique du véhicule

Question 1 *Déterminer les composantes dans le repère $\mathcal{R}_L$ du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma\left(O,VH/\mathcal{R}_g\right)}$ au point O, du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_g$, en fonction de $\dot\psi$, α, h, V et des caractéristiques inertielles.*

Correction La matrice d'inertie étant donnée en G, commençons par calculer $\overrightarrow{\sigma\left(G,\mathrm{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = I_G(\mathrm{VH})\overrightarrow{\Omega\left(\mathrm{VH}/\mathcal{R}_g\right)}$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \dot\psi\overrightarrow{Z_g} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} = \begin{pmatrix} -E\dot\psi \\ 0 \\ C\dot\psi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}.$$

Il faut alors déplacer le moment cinétique. On aura pour cela besoin de $\overrightarrow{V\left(G\in\mathrm{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = \overrightarrow{V\left(O\in\mathrm{VH}/\mathcal{R}_g\right)} + \overrightarrow{GO}\wedge\overrightarrow{\Omega\left(\mathrm{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = V\overrightarrow{U} - h\overrightarrow{Z_g}\wedge\dot\psi\overrightarrow{Z_g} = V\overrightarrow{U}$.

Au final, $\overrightarrow{\sigma\left(O,\mathrm{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = \overrightarrow{\sigma\left(G,\mathrm{VH}/\mathcal{R}_g\right)} + \overrightarrow{OG}\wedge MV\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -E\dot\psi \\ 0 \\ C\dot\psi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + h\overrightarrow{Z_g}\wedge MV\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -E\dot\psi \\ 0 \\ C\dot\psi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV\overrightarrow{V}$

$$= \begin{pmatrix} -E\dot\psi \\ 0 \\ C\dot\psi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L} + hMV\left(\cos\alpha\overrightarrow{Y_L} - \sin\alpha\overrightarrow{X_L}\right) = \begin{pmatrix} -E\dot\psi - hMV\sin\alpha \\ hMV\cos\alpha \\ C\dot\psi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}.$$

– Je note $\overrightarrow{V}$ le vecteur tel que $\left(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V},\overrightarrow{Z_L}\right)$ est une base. –

Question 2 *Déterminer les composantes dans le repère $\mathcal{R}_L$ du moment dynamique $\overrightarrow{\delta\left(O,VH/\mathcal{R}_g\right)}$ au point O, du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_g$, en fonction de $\dot\psi$, $\ddot\psi$, $\dot\alpha$, α, h, V et des caractéristiques inertielles.*

Correction

On a en un point quelconque $\overrightarrow{\delta\left(O,\mathrm{VH}/\mathcal{R}_g\right)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma\left(O,\mathrm{VH}/\mathcal{R}_g\right)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{V\left(O\in\mathrm{VH}/\mathcal{R}_g\right)}\wedge M\overrightarrow{V\left(G\in\mathrm{VH}/\mathcal{R}_g\right)}$.

D'une part, $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{X_L}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_g} = \dot\psi\overrightarrow{Y_L}$ et $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{Y_L}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_g} = -\dot\psi\overrightarrow{X_L}$. On a donc $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma\left(O,\mathrm{VH}/\mathcal{R}_g\right)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_g}$

$$= \begin{pmatrix} -E\ddot\psi - \dot\alpha hMV\cos\alpha - \dot\psi\left(hMV\cos\alpha\right) \\ -\dot\alpha hMV\sin\alpha + \dot\psi\left(-E\dot\psi - hMV\sin\alpha\right) \\ C\ddot\psi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}.$$

D'autre part, $\overrightarrow{V\left(O\in \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)}\wedge M\overrightarrow{V\left(G\in \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)}=V\overrightarrow{U}\wedge MV\overrightarrow{U}=\overrightarrow{0}$.

Au final, $\overrightarrow{\delta\left(O,\text{VH}/\mathcal{R}_g\right)}=\begin{pmatrix}-E\ddot{\psi}-\left(\dot{\alpha}+\dot{\psi}\left(hMV\cos\alpha\right)\right.\\ -E\dot{\psi}^2-\left(\dot{\alpha}+\dot{\psi}\right)hMV\sin\alpha\\ C\ddot{\psi}\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$.

Question 3 *On note $\overrightarrow{\Gamma\left(G/\mathcal{R}_g\right)}$ le vecteur accélération de appartenant à (VH) dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_G$. Déterminer $\overrightarrow{\Gamma\left(G/\mathcal{R}_g\right)}\cdot\overrightarrow{Y_L}$ en fonction de $\dot{\psi}$, $\dot{\alpha}$, α, V. Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha=0$, $\psi=0$ et $\beta=0$.*

Correction On a vu que $\overrightarrow{V\left(G\in \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)}=V\overrightarrow{U}$, donc $\overrightarrow{\Gamma\left(G\in \text{VH}/\mathcal{R}_g\right)}=V\left(\dot{\psi}+\dot{\alpha}\right)\overrightarrow{V}=V\left(\dot{\psi}+\dot{\alpha}\right)\left(\cos\alpha\overrightarrow{Y_L}-\sin\alpha\overrightarrow{X_L}\right)$.
On a donc $\overrightarrow{\Gamma\left(G/\mathcal{R}_g\right)}\cdot\overrightarrow{Y_L}=V\left(\dot{\psi}+\dot{\alpha}\right)\cos\alpha$. En linéarisant cette relation, on a $\overrightarrow{\Gamma\left(G/\mathcal{R}_g\right)}\cdot\overrightarrow{Y_L}=V\left(\dot{\psi}+\dot{\alpha}\right)$.

Question 4 *En admettant que l'angle de dérive de la roue avant s'écrit : $\delta_{12}\simeq\alpha-\beta+\dfrac{\ell_1}{V}\dot{\psi}$ et celui de la roue arrière $\delta_{34}\simeq\alpha-\dfrac{\ell_2}{V}\dot{\psi}$, en déduire l'expression de $\overrightarrow{R\left(\overline{VH}\rightarrow VH\right)}\cdot\overrightarrow{Y_L}$. Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha=0$, $\psi=0$ et $\beta=0$.*

Correction On a $Y_{12}=-2D\delta_{12}$ et $Y_{34}=-2D\delta_{34}$. En conséquence, $Y_{12}=-2D\left(\alpha-\beta+\dfrac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right)$ et $Y_{34}=-2D\left(\alpha-\dfrac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$.
Au final, $\overrightarrow{R\left(\overline{\text{VH}}\rightarrow \text{VH}\right)}\cdot\overrightarrow{Y_L}=-2D\left(\alpha-\beta+\dfrac{\ell_1}{V}\dot{\psi}\right)-2D\left(\alpha-\dfrac{\ell_2}{V}\dot{\psi}\right)=-2D\left(2\alpha-\beta+\dfrac{\ell_1-\ell_2}{V}\dot{\psi}\right)$.

Question 5 *Montrer que l'on obtient le système d'équations différentielles suivant en indiquant clairement (point, vecteur unitaire, résultante ou moment, ...) à quelle équation scalaire issue du PFD correspond chaque relation :*

$$\left\{\begin{array}{l}\left(MV+\dfrac{2D\left(\ell_1-\ell_2\right)}{V}\right)\dot{\psi}+MV\dot{\alpha}+4D\alpha=2D\beta\\ C\ddot{\psi}+\dfrac{2D\left(\ell_1^2+\ell_2^2\right)}{V}\dot{\psi}+2D\left(\ell_1-\ell_2\right)\alpha=2D\ell_1\beta\end{array}\right..$$

Avec les valeurs numériques : $\ell_1=1\,\text{m}$, $\ell_2=1{,}5\,\text{m}$, $D=21\,000\,\text{N}\,\text{rad}^{-1}$, $C=3100\,\text{kg}\,\text{m}^2$, $M=1500\,\text{kg}$, $V=15\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$, on obtient le système d'équations différentielles suivant, permettant de décrire l'évolution du véhicule (données en unités S.I.) :

$$\left\{\begin{array}{l}211\dot{\psi}(t)+225\dot{\alpha}(t)+840\alpha(t)=420\beta(t)\\ 31\ddot{\psi}(t)+91\dot{\psi}(t)-210\alpha(t)=420\beta(t)\end{array}\right..$$

Correction La première équation correspond au théorème de la résultante dynamique appliqué à VH en projection sur $\overrightarrow{Y_L}$.
La seconde équation correspond au théorème du moment dynamique appliqué à VH en O projection sur $\overrightarrow{Z_L}$.

Question 6 *En supposant que les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression numérique de la fonction de transfert $H_2(p)$ entre l'angle de lacet $\psi(p)$ et l'angle de braquage $\beta(p)$ de la roue avant : $H_2(p)=\dfrac{\psi(p)}{\beta(p)}$. Discuter de la stabilité de ce modèle.*

Correction Dans le domaine de Laplace, on a

$$\left\{\begin{array}{l}211p\psi(p)+225p\alpha(p)+840\alpha(p)=420\beta(p)\\ 31p^2\psi(p)+91p\psi(p)-210\alpha(p)=420\beta(p)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(225p+840\right)\alpha(p)=420\beta(p)-211p\psi(p)\\ \left(31p^2+91p\right)\psi(p)-210\alpha(p)=420\beta(p)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha(p)=\dfrac{420\beta(p)-211p\psi(p)}{225p+840}\\ \left(31p^2+91p\right)\psi(p)-210\dfrac{420\beta(p)-211p\psi(p)}{225p+840}=420\beta(p)\end{array}\right.$$

$$\left(31p^2+91p+\frac{210\times 211p}{225p+840}\right)\psi(p)-210\frac{420\beta(p)}{225p+840}=420\beta(p)$$
$$\Rightarrow\left(31p^2+91p+\frac{210\times 211p}{225p+840}\right)\psi(p)+\left(\frac{-210\times 420}{225p+840}-420\right)\beta(p)=0$$
$$\Rightarrow H_2(p)=\frac{\dfrac{210\times 420}{225p+840}+420}{31p^2+91p+\dfrac{210\times 211p}{225p+840}}=\frac{210\times 420+420(225p+840)}{(225p+840)(31p^2+91p)+210\times 211p}$$
$$=\frac{210\times 420+420\times 840+420\times 225p}{p\left((225p+840)(31p+91)+210\times 211\right)}$$
$$=\frac{210\times 420+420\times 840+420\times 225p}{p\left(225\times 31p^2+840\times 31p+91\times 225p+91\times 840+210\times 211\right)}$$
$$=\frac{210\times 420+420\times 840+420\times 225p}{p\left(225\times 31p^2+840\times 31p+91\times 225p+91\times 840+210\times 211\right)}$$
$$=\frac{441000+94500p}{p\left(6975p^2+46515p+120750\right)}$$