

Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur

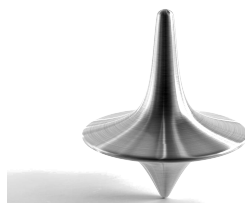
## Cours

### Chapitre 3

### Application du Principe Fondamental de la Dynamique

**Savoirs et compétences :**

- Mod2.C16 : torseur cinétique
- Mod2.C17 : torseur dynamique
- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Mod2.C15 : matrice d'inertie
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement
- Res1.C2.SF1 : proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison



Toupie



Volants d'inertie d'un vibrequin

<b>1</b>	<b>Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général</b>	<b>2</b>
1.1	Théorème de la résultante dynamique	2
1.2	Théorème du moment dynamique	2
<b>2</b>	<b>Torseur cinétique</b>	<b>2</b>
2.1	Définition	2
2.2	Écriture avec l'opérateur d'inertie	2
2.3	Cas particuliers	2
2.4	Méthodologie de Calcul	3
<b>3</b>	<b>Torseur dynamique</b>	<b>3</b>
3.1	Définition	3
3.2	Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques	4
3.3	Cas particuliers	4
3.4	Méthodologie de calcul	5

# 1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

**Définition — Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique.** Soit un ensemble matériel  $E$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur  $E$  est égale au torseur dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G \in E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)} \end{array} \right\}_A.$$

- On note  $\overrightarrow{R_d(S/R_0)}$  la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie  $G$ .
- Le **moment dynamique** dépend du point  $A$  et se note  $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$ .

Du Principe Fondamental de la dynamique découle plusieurs **théorèmes généraux**.

## 1.1 Théorème de la résultante dynamique

**Théorème — Théorème de la résultante dynamique.** Pour tout ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur  $E$  est égale à la résultante dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  :

$$\overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G \in E/R_0)}.$$

## 1.2 Théorème du moment dynamique

**Théorème — Théorème du moment dynamique.** Pour tout ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur  $E$  en un point quelconque  $A$  est égale au moment dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  en  $A$  :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}.$$

# 2 Torseur cinétique

## 2.1 Définition

**Définition** Le **torseur cinétique** d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$  exprimé en un point  $A$  quelconque se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A.$$

- La résultante du torseur cinétique  $\overrightarrow{R_c}(S/R_0)$  s'exprime en  $\text{kg m s}^{-1}$  et ne dépend pas du point  $A$  mais uniquement du centre d'inertie  $G$  de  $S$  (de masse  $m$ ) :  $\overrightarrow{R_c}(S/R_0) = m \overrightarrow{V}(G/R_0)$ .
- Le moment cinétique dépend du point  $A$  et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point :  $\overrightarrow{\sigma}(B, S/R_0) = \overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$ .

## 2.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

**Propriété** Pour un solide  $S$  de masse  $m$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  et soit un point  $A$  quelconque.

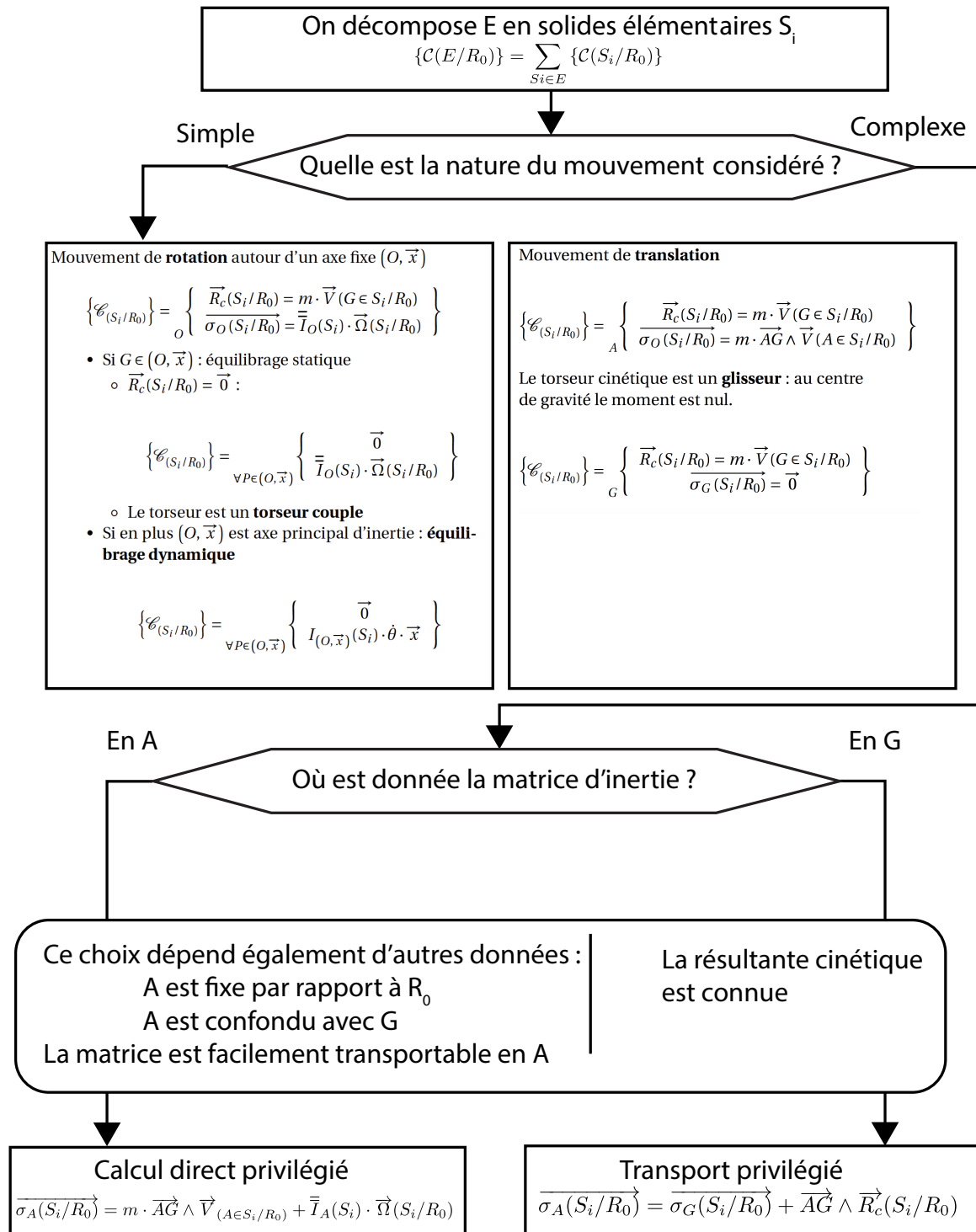
$$\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}(A \in S/R_0).$$

## 2.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point  $A$  **fixe** dans le mouvement de  $S/R_0$ , on a :  $\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$ .
- En appliquant cette formule en  $G$ , **centre d'inertie** de  $S$ , on a :  $\overrightarrow{\sigma}(G, S/R_0) = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$ .

## 2.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel  $E$  composé de solides  $S_i$ . On étudie son mouvement dans le référentiel  $R_0$ . On donne la méthodologie de calcul du moment cinétique en un point  $A$  sur la figure suivante.



## 3 Torseur dynamique

### 3.1 Définition

**Définition** Le **torseur dynamique** d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$  se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur dynamique,  $\overrightarrow{R_d}(S/R_0)$  ne dépend pas du point  $A$  mais uniquement du centre de gravité  $G$  de  $S$  (de masse  $m$ ) et vérifie :

$$\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0).$$

- Le moment dynamique dépend du point  $A$  et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point :

$$\overrightarrow{\delta}(B, S/R_0) = \overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R_0).$$

### 3.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

**Propriété — Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques.** Pour un solide  $S$  de masse  $M$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  et soit un point  $A$  quelconque.

- Relation entre les **résultantes** :

$$\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{R_c}(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}.$$

- Relation entre les **moments** :

$$\overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V}(A/R_0) \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0).$$

### 3.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point  $O$  **fixe** dans  $R_0$ , on a :

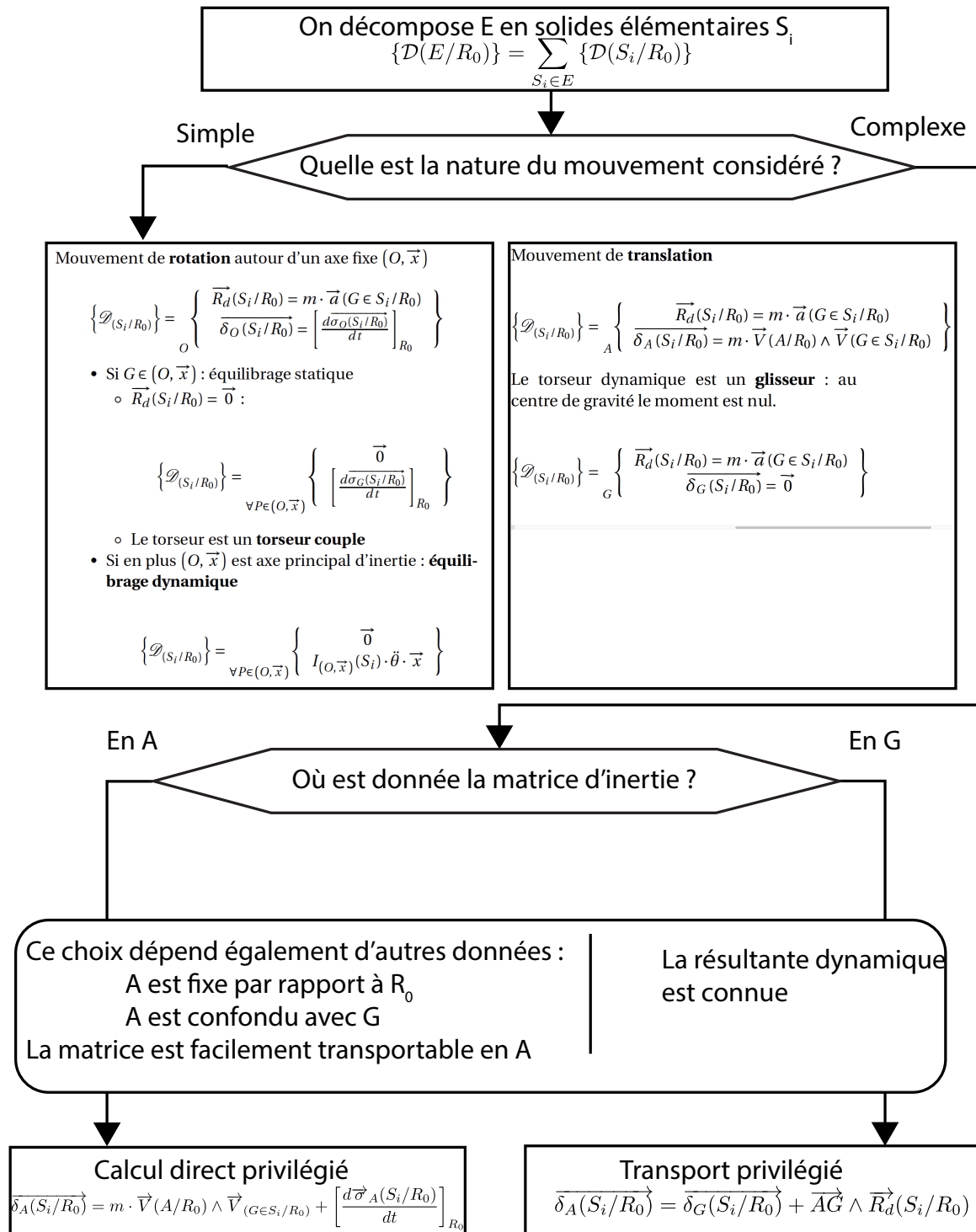
$$\overrightarrow{\delta}(O, S/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma}(O, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}.$$

- En appliquant cette formule en un point  $G$ , **centre d'inertie** de  $S$ , on a :

$$\overrightarrow{\delta}(G, S/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma}(G, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}.$$

### 3.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel  $E$  composé de solides  $S_i$ . On étudie son mouvement dans le référentiel  $R_0$ . On donne l'algorithme de calcul du moment dynamique en un point  $A$  sur la figure ci-dessous.



### Références

- [1] Emilien Durif, *Cinétique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.
- [2] Florestan Mathurin, *Cinétique*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Point considéré	Point quelconque A	Centre de gravité G	Point fixe dans $\mathcal{R}_0$ A
Torseur cinétique $\{\mathcal{C}(S/R_0)\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_c(S/R_0) = m \vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) + m \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R_0) \end{array} \right\}_A$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_c(S/R_0) = m \vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}(G, S/R_0) = I_G(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) \end{array} \right\}_G$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_c(S/R_0) = m \vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) \end{array} \right\}_A$
Torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_0)\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_d(S/R_0) = m \vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}(A, S/R_0) = \left[ \frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \vec{V}(A/R_0) \wedge \vec{R}_c(S/R_0) \end{array} \right\}_A$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_d(S/R_0) = m \vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}(G, S/R_0) = \left[ \frac{d\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_G$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_d(S/R_0) = m \vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}(A, S/R_0) = \left[ \frac{d\vec{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_A$