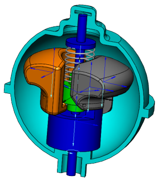
Application 1 – Corrigé



Application – Pompe à plateau

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique ;*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Fermeture géométrique.
On a : $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{0}$.
En projection sur $\overrightarrow{z_0}$: $e\cos\theta+R=z$. Par dérivation successive, on a : $-e\dot{\theta}\sin\theta=\dot{z}$ et $-e\ddot{\theta}\sin\theta-e\dot{\theta}^2\cos\theta=\ddot{z}$.
On isole le solide (1).
On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(0\to1)\}=\left\{\begin{array}{c} X_{01}\overrightarrow{x_0}+Y_{01}\overrightarrow{y_0}+Z_{01}\overrightarrow{z_0} \\ M_{01}\overrightarrow{y_0}+N_{01}\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_O=\left\{\begin{array}{c} Y_{01}\overrightarrow{y_0}+Z_{01}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathcal{T}(2\to1)\}=\left\{\begin{array}{c} Y_{21}\overrightarrow{y_0}+Z_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_I$. On a $Z_{21}<0$, $Y_{21}>0$ et à la limite du glissement, $Y_{21}=-fZ_{21}$.
$\overrightarrow{\mathcal{M}(O,2\to1)}=\overrightarrow{\mathcal{M}(I,2\to1)}+\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{R(2\to1)}=\left(e\overrightarrow{z_1}+R\overrightarrow{z_0}\right)\wedge\left(Y_{21}\overrightarrow{y_0}+Z_{21}\overrightarrow{z_0}\right)=-eY_{21}\cos\theta\overrightarrow{x_0}-eZ_{21}\sin\theta\overrightarrow{x_0}-RY_{21}\overrightarrow{x_0}=-((e\cos\theta+R)Y_{21}+eZ_{21}\sin\theta)\overrightarrow{x_0}$.
- Couple moteur : $\{\mathcal{T}(\text{Moteur}\to1)\}=\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{x_0}\end{array}\right\}_O$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O,1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}$.

O est un point fixe et I_1 moment d'inertie par rapport à $\left(O,\overrightarrow{x_0}\right)$ on a donc : $\overrightarrow{\delta(O,1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O,1/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}\overrightarrow{x_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O,1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}I_O(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}I_1\dot{\theta}\overrightarrow{x_0}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}=I_1\ddot{\theta}$.

Application du théorème du moment dynamique en projection sur $\overrightarrow{x_0}$.

$$C_m-((e\cos\theta+R)Y_{21}+eZ_{21}\sin\theta)=I_1\ddot{\theta}.$$

On isole le solide (2).
On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot glissant : $\{\mathcal{T}(0\to2)\}=\left\{\begin{array}{c} Y_{02}\overrightarrow{y_0} \\ L_{02}\overrightarrow{x_0}\end{array}\right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathcal{T}(1\to2)\}=-\{\mathcal{T}(2\to1)\}=\left\{\begin{array}{c} -Y_{21}\overrightarrow{y_0}-Z_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_I$.
- Ressort : $\{\mathcal{T}(\text{Ressort}\to2)\}=\left\{\begin{array}{c} -F_0-kz\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$.
- Pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur}\to2)\}=\left\{\begin{array}{c} -m_2g\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$.
- Fluide : $\{\mathcal{T}(\text{Fluide}\to2)\}=\left\{\begin{array}{c} -F_h\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$.

Calcul de $\overrightarrow{R_d(2/0)}\cdot\overrightarrow{z_0}$.
$\overrightarrow{R_d(2/0)}\cdot\overrightarrow{z_0}=m_2\ddot{z}$
Application du théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

$$-F_h-Z_{21}-F_0-kz-m_2g=m_2\ddot{z}.$$

Bilan :

$$C_m - \left(\left(e\cos\theta + R \right) Y_{21} + e\left(-F_h - F_0 - kz - m_2 g - m_2 \ddot{z} \right) \sin\theta \right) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On a alors :

$$C_m - \left(\left(e\cos\theta + R \right) Y_{21} - e\left(F_h + F_0 + k\left(e\cos\theta + R \right) + m_2 g - e\, m_2 \left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta \right) \right) \sin\theta \right) = I_1 \ddot{\theta}.$$

Bilan sans frottement :

$$C_m + e\left(F_h + F_0 + k\left(e\cos\theta + R \right) + m_2 g - e\, m_2 \sin\theta \left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta \right) \right) = I_1 \ddot{\theta}.$$