

## Activation 2



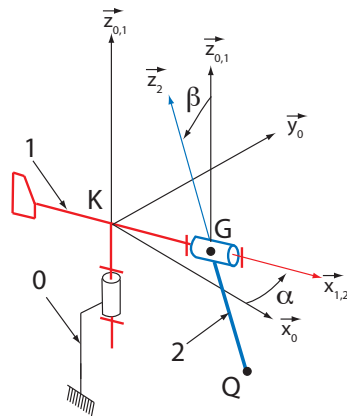
### Éolienne

Émilien Durif

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides. On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 pour créer un couple  $C_m$  selon la direction  $\vec{z}_0$ .

L'éolienne est composée de :

- un support **0**, auquel on associe un repère  $R_0 = (K; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ;
- une girouette **1** (de centre d'inertie  $K$ ) en liaison pivot d'axe  $(K, \vec{z}_{0,1})$  avec le support **0**. On lui associe un repère  $R_1 = (K; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$  et on pose  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ . On note  $J$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(K, \vec{z}_1)$  :  $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$ ;
- une hélice **2**, en liaison pivot d'axe  $(K, \vec{x}_{1,2})$  avec **1**. On lui associe un repère  $R_2 = (K; \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  choisi tel que  $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$  et on pose  $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ . On note  $M$  sa masse,  $G$  son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose  $\vec{KG} = a \vec{x}_1$ . On donne la

matrice de l'opérateur d'inertie au point  $G$  :

$$\bar{\bar{I}}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd **3** assimilé à une masse ponctuelle  $m$  au point  $Q$ . On pose  $\vec{GQ} = -b \vec{z}_2$ .

**Question 1** Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

**Question 2** Déterminer le théorème à utiliser pour relier  $C_m$  aux paramètres dynamiques du problème.

**Question 3** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment cinétique au point  $K$  de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **1**, notée  $\sigma(K, 1/0) \cdot \vec{z}_0$ .

**Question 4** Déterminer le moment cinétique  $\sigma(K, 2/0)$  calculé au point  $K$  de l'hélice **2** dans son mouvement par rapport à **0**.

**Question 5** Déterminer le moment cinétique  $\sigma(K, 3/0)$ .

**Question 6** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment dynamique au point  $K$  de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **0**, notée  $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}(K, 1/0)$ .

**Question 7** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment dynamique  $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}(K, 2/0)$ .

**Question 8** Déterminer la projection du moment dynamique de **3/0** selon  $\vec{z}_0$  :  $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}(K, 3/0)$ .

**Question 9** Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice **2** ( $\beta$ ) constante et dans le cas où l'angle  $\alpha$  est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple  $C_m$  que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre **0** et **1**) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

## Activation 2

### Corrigé



#### Éolienne

Émilien Durif

##### Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

**Question 1** Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

#### Correction

**Question 2** Déterminer le théorème à utiliser pour relier  $C_m$  aux paramètres dynamiques du problème.

**Correction** On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ( $E = \{1 + 2 + 3\}$ ) en projection sur l'axe  $(K, \vec{z}_0)$  :  $\overrightarrow{\mathcal{M}}(K, \vec{E} \rightarrow E) \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{\delta}(K, E/R_0) \cdot \vec{z}_0 \Leftrightarrow C_m = \left( \overrightarrow{\delta}(K, 1/R_0) + \overrightarrow{\delta}(K, 2/R_0) + \overrightarrow{\delta}(K, 3/R_0) \right) \cdot \vec{z}_0$ .

**Question 3** Déterminer la composante suivant  $\vec{z}_0$  du moment cinétique au point  $K$  de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée  $\sigma(K, 1/0) \cdot \vec{z}_0$ .

**Correction**

- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe  $(K, \vec{z}_0)$  :
- $\sigma(K, 1/0) \cdot \vec{z}_0 = \left( \overline{I}_K(1) \cdot \overline{\Omega}(1/0) \right) \cdot \vec{z}_0 = \left( \overline{I}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 \right) \cdot \vec{z}_0$
- or on note  $J$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(K, \vec{z}_0)$  soit :  $\overline{I}_K(1) \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_0 = J$
- Ainsi :  $\sigma(K, 1/0) \cdot \vec{z}_0 = J \dot{\alpha}$ .

**Question 4** Déterminer le moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0)$  calculé au point  $K$  de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

**Correction**

- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- On connaît l'opérateur d'inertie en  $G$ , on calcule donc :  $\overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) : \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) = \overline{I}_G(2) \cdot \overline{\Omega}(2/0)$ .
- On calcule  $\overline{\Omega}(2/0)$  :  $\overline{\Omega}(2/0) = \overline{\Omega}(2/1) + \overline{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} (\cos \beta \vec{z}_2 + \sin \beta \vec{y}_2)$ .
- On calcule  $\overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) : \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$ .
- On calcule  $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0)$  :
  - $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) = \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{R_c}(2/0) = \overrightarrow{\sigma}(G, 2/0) + a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V}(G \in 2/0)$
  - On calcule  $\vec{V}(G \in 2/0)$  :  $\vec{V}(G \in 2/0) = \vec{V}(K \in 2/0) + \overrightarrow{GK} \wedge \overline{\Omega}(2/0) = \vec{0} - a \cdot \vec{x}_1 \wedge (\dot{\beta} \cdot \vec{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1) = a \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1$
  - On calcule  $a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V}(G \in 2/0)$  :  $a \cdot \vec{x}_1 \wedge M \cdot \vec{V}(G \in 2/0) = a \cdot \vec{x}_1 \wedge M (a \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1) = M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$
  - On en déduit  $\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) : \overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$

**Question 5** Déterminer le moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma}(K, 3/0)$

**Correction** • Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi  $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = \overrightarrow{0}$ .

- $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = \overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$  :
  - On calcule  $\overrightarrow{KQ}$  :  $\overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a \cdot \overrightarrow{x}_1 - b \cdot \overrightarrow{z}_2$
  - On calcule  $\overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$  :  $\overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = \overrightarrow{V}(Q \in 3/2) + \overrightarrow{V}(Q \in 2/1) + \overrightarrow{V}(Q \in 1/0) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{V}(G \in 2/1) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{V}(G \in 1/0) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \overrightarrow{0} + b \cdot \overrightarrow{z}_2 \wedge \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 + b \cdot \overrightarrow{z}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 = b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \overrightarrow{x}_{1,2}$
  - On calcule  $\overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$  :  
 $\overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = m \cdot [a \cdot \overrightarrow{x}_1 - b \cdot \overrightarrow{z}_2] \wedge [b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \overrightarrow{x}_{1,2}]$   
 $= m [a \cdot b \cdot \overrightarrow{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \overrightarrow{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \overrightarrow{y}_2]$
- $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = m [a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \overrightarrow{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \overrightarrow{y}_2]$

**Question 6** Déterminer la composante suivant  $\overrightarrow{z}_0$  du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée  $\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)}$ .

**Correction**

$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = \overrightarrow{z}_0 \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

**Question 7** Déterminer la composante suivant  $\overrightarrow{z}_0$  du moment dynamique  $\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$ .

**Correction**

$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \overrightarrow{z}_0 \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0}$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{z}_{0,1} = \cos \beta \cdot \overrightarrow{z}_2 + \sin \beta \cdot \overrightarrow{y}_2,$$

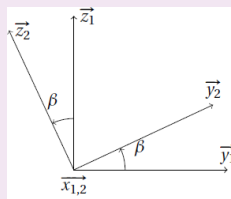
$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{z}_2)} = \dot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2]$$

d'où,

$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \ddot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] + 2 \cdot \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta [B - C].$$

**Question 8** Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon  $\overrightarrow{z}_0$  :  $\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 3/0)}$ .

**Correction**



$$\begin{aligned} \overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{z}_2 &= \cos \beta \\ \overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{z}_1 &= 1 \\ \overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{x}_0 &= 0 \\ \overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{x}_1 &= 0 \\ \overrightarrow{z}_1 \cdot \overrightarrow{y}_2 &= \sin \beta \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} &= m \frac{d[a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cos \beta + a^2 \cdot \dot{\alpha} + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin^2 \beta]}{dt} \\ &= m [a \cdot b \cdot (\dot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 \cdot (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)] \end{aligned}$$

**Question 9** Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice  $2 (\dot{\beta})$  constante et dans le cas où l'angle  $\alpha$  est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple  $C_m$  que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre **0** et **1**) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

**Correction** Le théorème du moment dynamique autour de l'axe  $(K, \overrightarrow{z_{0,1}})$  donne :  $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta$ .