

## Application 01



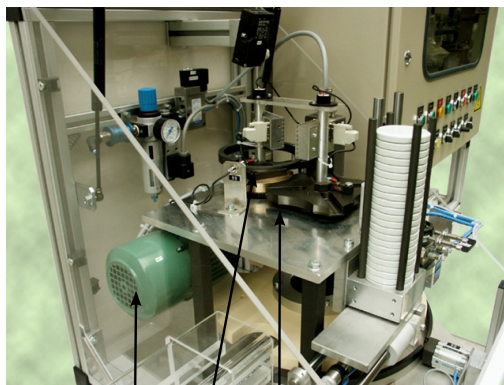
### Capsuleuse de bocaux \*\*

Xavier Pessoles

#### Savoirs et compétences :

Le conditionnement de nombreux produits alimentaires est réalisé dans des bocaux en verre fermés par des capsules vissées. La société RAVOUX, spécialisée dans le conditionnement, a créé ce prototype afin d'optimiser ses machines de production. Elle est donc équipée de nombreux capteurs permettant, via un ordinateur, d'optimiser les paramètres de production tels que qualité totale, production maximale, ...

Le système de laboratoire proposé s'insère dans une chaîne de conditionnement de produits alimentaires, entre l'unité de remplissage des bocaux et le poste d'étiquetage. Sa fonction principale est la «fermeture étanche de bocaux préalablement remplis de produits alimentaires»



Motorréducteur  
Maneton  
Croix de Malte

On s'intéresse ici au système de croix de Malte. Il permet d'obtenir une rotation discontinue à partir d'un mouvement de rotation continue. Ainsi, pendant que la croix de Malte ne tourne pas, le système peut agir sur la matière d'œuvre (flacon).

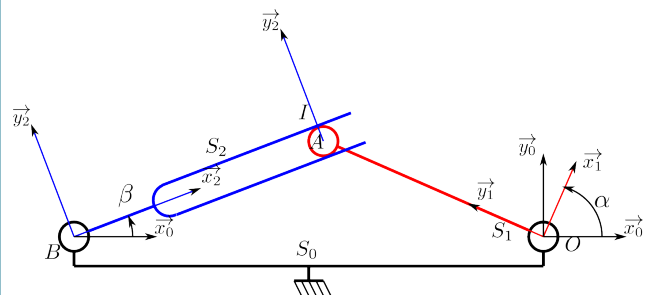
Lors de la rotation de la croix de Malte, la capsuleuse déplace deux flacons. Afin d'accroître la productivité, il faut diminuer la durée de cette phase. Cependant, si la croix de Malte tourne trop vite, les flacons basculent ce qui entraîne un mauvais fonctionnement du système. Ainsi, on désire que la **vitesse de la croix soit inférieure à 50 tours/minute**.

#### Modélisation sans galet

Afin de modéliser le système à croix de malte, on propose le schéma cinématique ci-contre.

On note :

- $\mathcal{R} = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère lié au bâti  $S_0$ . On note  $\vec{OB} = -L\vec{x}_0$  avec  $L = 145$  mm;
- $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  le repère lié à l'arbre  $S_1$ . On pose  $\vec{OA} = R\vec{y}_1$  avec  $R = 141$  mm et  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ . L'arbre  $S_1$  est lié au motoréducteur de la capsuleuse. On a :  $\dot{\alpha} = 10$  tr/min;
- $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  le repère lié à l'arbre  $S_2$ . On pose  $\vec{BA} = \lambda(t)\vec{x}_2$ ,  $\vec{AI} = r\vec{y}_2$  et  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ ;



**Question 1** Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

**Question 2** Établir la loi entrée/sortie du système.

**Question 3** Donner une méthode permettant de valider la cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

**Question 4** Donner l'expression de  $\vec{V}(I, S_1/S_0)$  et  $\vec{\Omega}(S_1/S_0)$ .

**Question 5** Donner l'expression de  $\vec{V}(I, S_2/S_0)$  et  $\vec{\Omega}(S_2/S_0)$ .

**Question 6** En déduire l'expression de  $\vec{V}(I, S_2/S_1)$  dans la base  $\mathcal{R}_2$ . On donne  $\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta)\vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta)\vec{y}_2$ .

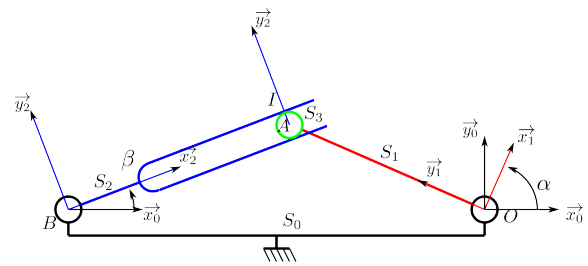
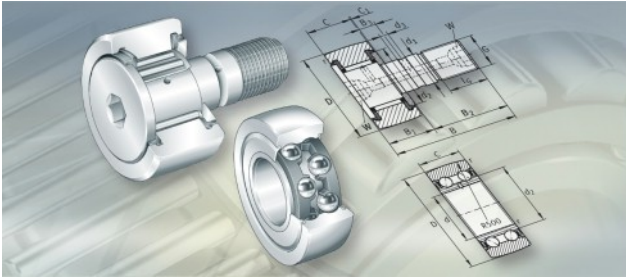
**Question 7** D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide  $S_1$  par rapport à  $S_2$  ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.

**Question 8**  $\vec{V}(I, S_2/S_1) \cdot \vec{x}_2$  est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse ? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse ? Si oui, comment ? Si non, proposez une modification du système permettant la prise en compte de ce problème.

## Modélisation avec galet

On considère maintenant l'existence d'un galet  $S_3$  en bout de de l'arbre  $S_1$ . On fait l'hypothèse que le galet roule sans glisser dans le  $S_2$ .  $S_3$  et  $S_1$  sont en liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  et de centre  $A$ .

Le galet a un diamètre extérieur de 16 mm. D'après la documentation constructeur, la vitesse de rotation du galet ne doit pas dépasser les 5000 tr/min.



**Question 9** Quelle est la modification sur le paramétrage du système?

**Question 10** Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement** sans glissement?

**Question 11** Calculer la vitesse de rotation du galet  $\dot{\gamma}$  en commençant par exprimer  $\vec{V}(I, S_3/S_2)$ ? Indice : décomposer  $\vec{V}(I, S_3/S_2)$  en fonction des mouvements connus.

**Question 12** Valider le choix du galet.

## Application 01



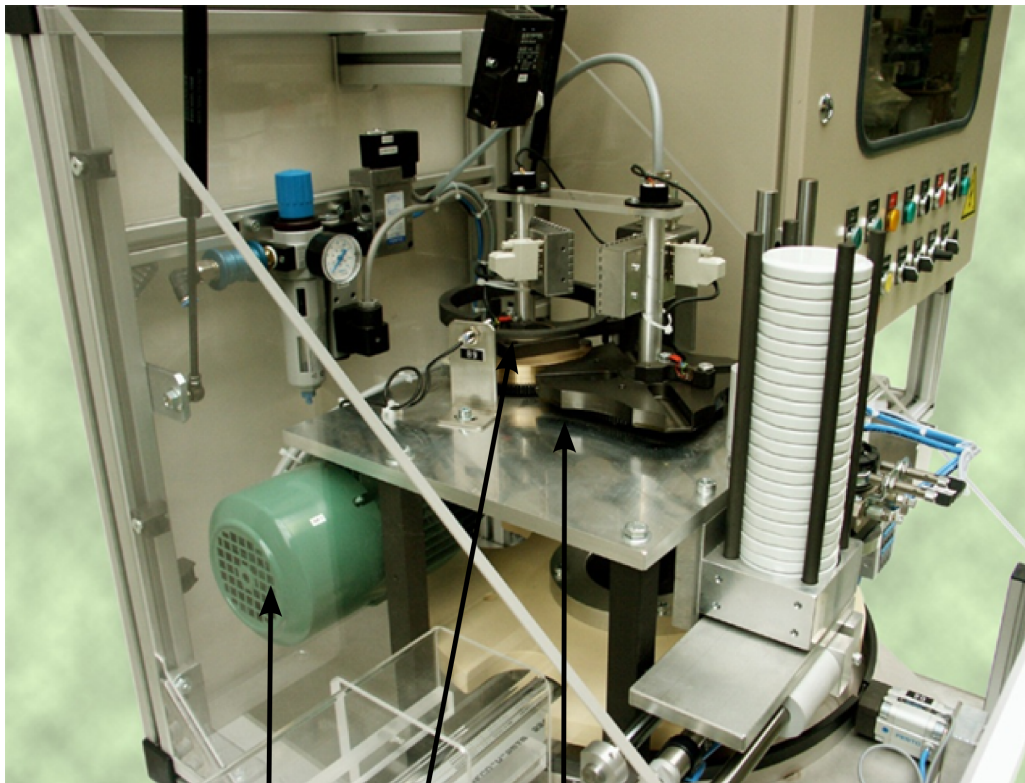
## Capsuleuse de bocaux \*\*

Xavier Pessoles

## Savoirs et compétences :

Le conditionnement de nombreux produits alimentaires est réalisé dans des bocaux en verre fermés par des capsules vissées. La société RAVOUX, spécialisée dans le conditionnement, a créé ce prototype afin d'optimiser ses machines de production. Elle est donc équipée de nombreux capteurs permettant, via un ordinateur, d'optimiser les paramètres de production tels que qualité totale, production maximale, ...

Le système de laboratoire proposé s'insère dans une chaîne de conditionnement de produits alimentaires, entre l'unité de remplissage des bocaux et le poste d'étiquetage. Sa fonction principale est la «fermeture étanche de bocaux préalablement remplis de produits alimentaires»



Motoréducteur

Maneton

Croix de Malte

On s'intéresse ici au système de croix de Malte. Il permet d'obtenir une rotation discontinue à partir d'un mouvement de rotation continue. Ainsi, pendant que la croix de Malte ne tourne pas, le système peut agir sur la matière d'œuvre (flacon).

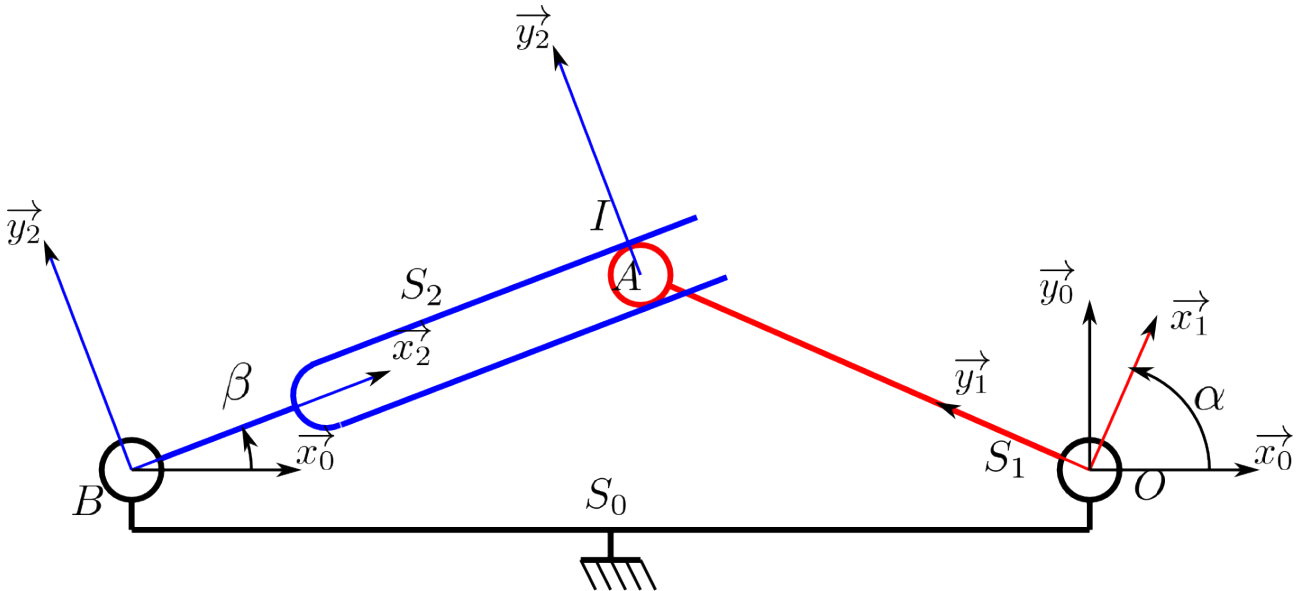
Lors de la rotation de la croix de Malte, la capsuleuse déplace deux flacons. Afin d'accroître la productivité, il faut diminuer la durée de cette phase. Cependant, si la croix de Malte tourne trop vite, les flacons basculent ce qui entraîne un mauvais fonctionnement du système. Ainsi, on désire que la **vitesse de la croix soit inférieure à 50 tours/minute**.

## Modélisation sans galet

Afin de modéliser le système à croix de malte, on propose le schéma cinématique ci-contre.

On note :

- $\mathcal{R} = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère lié au bâti  $S_0$ . On note  $\vec{OB} = -L\vec{x}_0$  avec  $L = 145 \text{ mm}$ ;
- $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  le repère lié à l'arbre  $S_1$ . On pose  $\vec{OA} = R\vec{y}_1$  avec  $R = 141 \text{ mm}$  et  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ . L'arbre  $S_1$  est lié au motoréducteur de la capsuleuse. On a :  $\dot{\alpha} = 10 \text{ tr/min}$ ;
- $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  le repère lié à l'arbre  $S_2$ . On pose  $\vec{BA} = \lambda(t)\vec{x}_2$ ,  $\vec{AI} = r\vec{y}_2$  et  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ ;



**Question 1** Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

**Correction**

**Question 2** Établir la loi entrée/sortie du système.

**Correction** On a :

$$\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0} \iff R\vec{y}_1 - \lambda(t)\vec{x}_2 + L\vec{x}_0 = \vec{0}$$

En projetant sur  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  on a :

$$\begin{cases} -R \sin \alpha(t) - \lambda(t) \cos \beta(t) + L = 0 \\ R \cos \alpha(t) - \lambda(t) \sin \beta(t) = 0 \end{cases}$$

Suivant le cas, on peut donc avoir  $\alpha$  en fonction de  $\beta$  ou  $\lambda$  en fonction de  $\alpha$  ou  $\beta$  :

$$\tan \beta = \frac{R \cos \alpha}{L - R \sin \alpha}$$

$$\lambda(t)^2 = R^2 + L^2 - 2RL \sin \alpha$$

**Question 3** Donner une méthode permettant de valider la cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

**Correction** On peut calculer :

$$\dot{\beta} = \frac{R^2 \dot{\alpha} - LR \dot{\alpha} \sin \alpha}{L^2 - 2RL \sin \alpha + R^2}$$

Le tracé Excel permet de valider que la vitesse de rotation de la croix de Malte reste inférieure à 50 tours par

minute.

**Question 4** Donner l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$ .

**Correction**

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(O, S_1/S_0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = \vec{IO} \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_I \\ \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} &= (-R \vec{y}_1 - r \vec{y}_2) \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 = -R \dot{\alpha} \vec{x}_1 - r \dot{\alpha} \vec{x}_2 \\ \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = -R \dot{\alpha} \vec{x}_1 - r \dot{\alpha} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I\end{aligned}$$

**Question 5** Donner l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$ .

**Correction**

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(B, S_2/S_0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} = \vec{IB} \wedge \dot{\beta} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_I \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} &= (-\lambda(t) \vec{x}_2 - r \vec{y}_2) \wedge \dot{\beta} \vec{z}_0 = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r \dot{\beta} \vec{x}_2 \\ \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r \dot{\beta} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I\end{aligned}$$

**Question 6** En déduire l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$  dans la base  $\mathcal{R}_2$ . On donne  $\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2$ .

**Correction** D'après la composition du torseur cinématique on a :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} + \{\mathcal{V}(S_0/S_1)\} \iff \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/S_0)\} - \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} - \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(I, S_2/S_0)} - \overrightarrow{V(I, S_1/S_0)} = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r \dot{\beta} \vec{x}_2 + R \dot{\alpha} \vec{x}_1 + r \dot{\alpha} \vec{x}_2 \end{array} \right\}_I \\ \vec{x}_1 &= \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2\end{aligned}$$

D'où :

$$\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} = \lambda(t) \dot{\beta} \vec{y}_2 - r \dot{\beta} \vec{x}_2 + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + R \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2 + r \dot{\alpha} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha} \\ \lambda(t) \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

**Question 7** D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide  $S_1$  par rapport à  $S_2$  ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.

**Correction** Nécessairement, la vitesse de glissement appartient au plan tangent au contact. On a donc :

$$\begin{cases} -r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha} = \dot{\lambda} \\ \lambda(t) \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) = 0 \end{cases}$$

**Question 8**  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} \cdot \vec{x}_2$  est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse ? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse ? Si oui, comment ? Si non, proposez une modification du système permettant la prise en compte de ce problème.

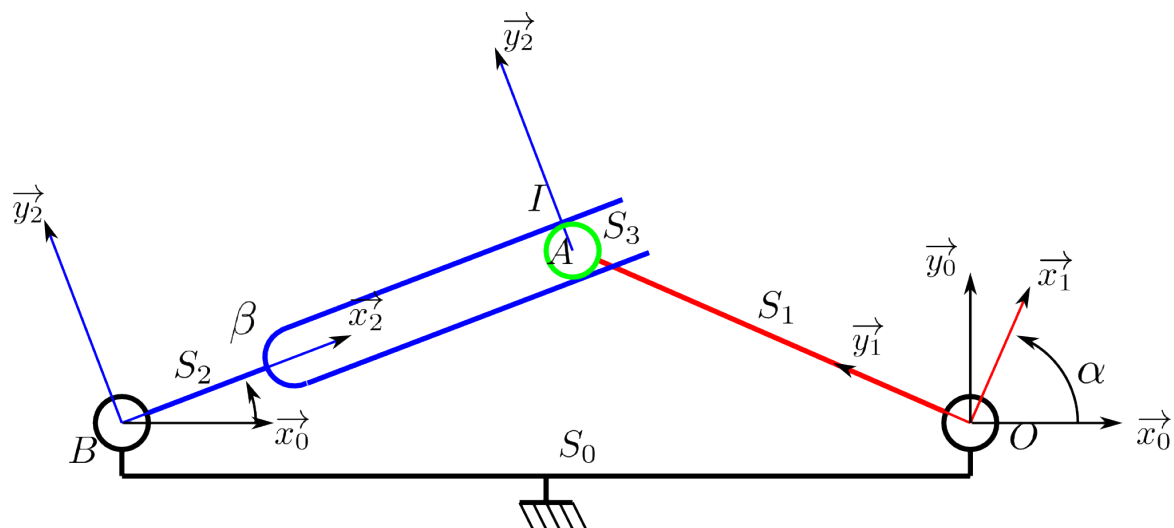
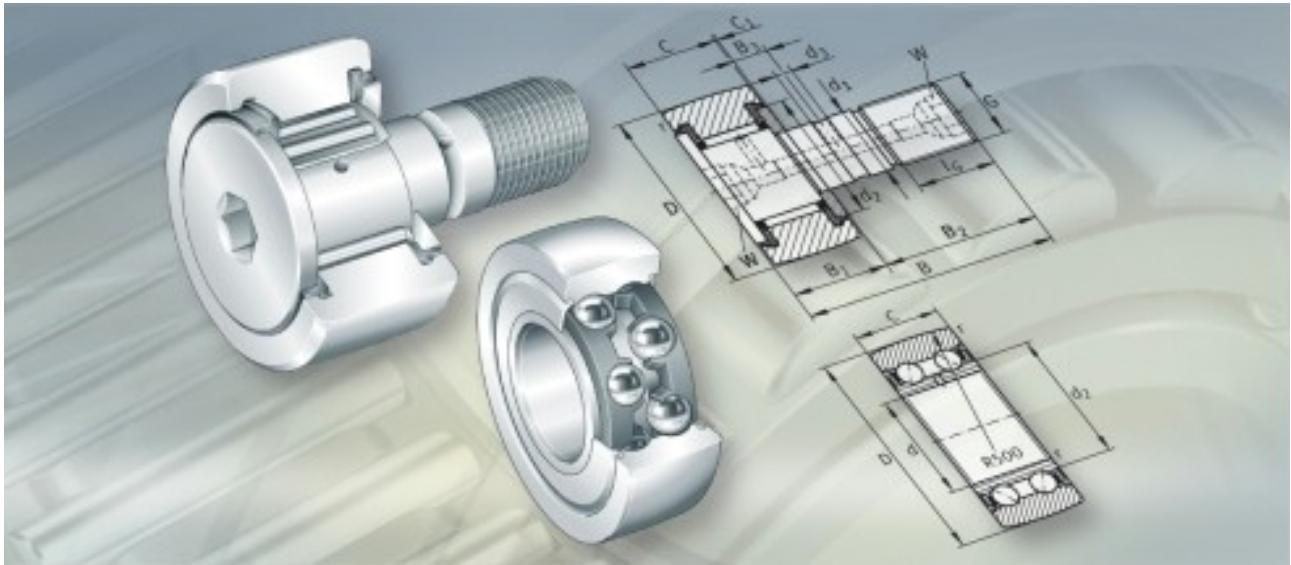
**Correction** Cette vitesse de glissement provoque le frottement du doigt sur la croix de Malte. Ce frottement entraînant de l'usure, la capsuleuse de bouchons est équipée d'un galet.



## Modélisation avec galet

On considère maintenant l'existence d'un galet  $S_3$  en bout de de l'arbre  $S_1$ . On fait l'hypothèse que le galet roule sans glisser dans le  $S_2$ .  $S_3$  et  $S_1$  sont en liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  et de centre  $A$ .

Le galet a un diamètre extérieur de 16 mm. D'après la documentation constructeur, la vitesse de rotation du galet ne doit pas dépasser les 5000 tr/min.



**Question 9** Quelle est la modification sur le paramétrage du système ?

**Correction** Un angle  $\gamma$  correspondant à la rotation du galet sur lui même apparaît.

**Question 10** Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement** sans glissement ?

**Correction** La vitesse est nulle entre le galet et la croix de Malte est nulle au point  $I$  :

$$\vec{V}(I, S_3/S_2) = \vec{0}$$

**Question 11** Calculer la vitesse de rotation du galet  $\dot{\gamma}$  en commençant par exprimer  $\vec{V}(I, S_3/S_2)$  ? Indice : décomposer  $\vec{V}(I, S_3/S_2)$  en fonction des mouvements connus.

**Correction** Malgré l'introduction d'un nouveau composant, la position du point  $I$  reste inchangée. Il faut identifier le torseur  $\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\}$ . Pour cela, la composition des vitesses donne :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \{\mathcal{V}(S_3/S_1)\} + \{\mathcal{V}(S_1/S_2)\}$$

Au point  $I$  on connaît déjà  $\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\}$ .  
Calculons  $\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_1)} = \dot{\gamma} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(A, S_3/S_1)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_1)} = \dot{\gamma} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(I, S_3/S_1)} = \overrightarrow{IA} \wedge \dot{\gamma} \overrightarrow{z_0} = -r \overrightarrow{y_2} \wedge \dot{\gamma} \overrightarrow{z_0} = -r \dot{\gamma} \overrightarrow{x_2} \end{array} \right\}_I$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} &= \overrightarrow{V(I, S_3/S_1)} + \overrightarrow{V(I, S_1/S_2)} \\ \overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} &= -r \dot{\gamma} \overrightarrow{x_2} + (-r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha}) \overrightarrow{x_2} - (\lambda(t) \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)) \overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} &= \begin{bmatrix} -r \dot{\gamma} + (-r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha}) \\ -(\lambda(t) \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de roulement sans glissement, on a :

$$\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)} = \overrightarrow{0} \implies \dot{\gamma} = -\frac{-r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha}}{r}$$

**Question 12** Valider le choix du galet.

**Correction**

$$\dot{\gamma} = -\frac{-r \dot{\beta} + R \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) + r \dot{\alpha}}{r}$$