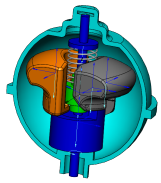
# Application

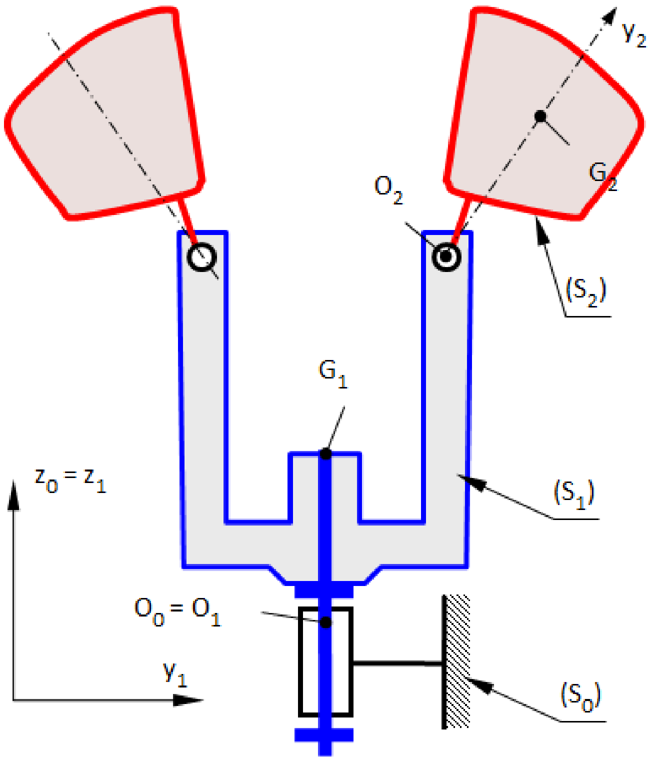


## Application – Régulateur centrifuge

*C. Gamelon & P. Dubois*

***Savoirs et compétences :***

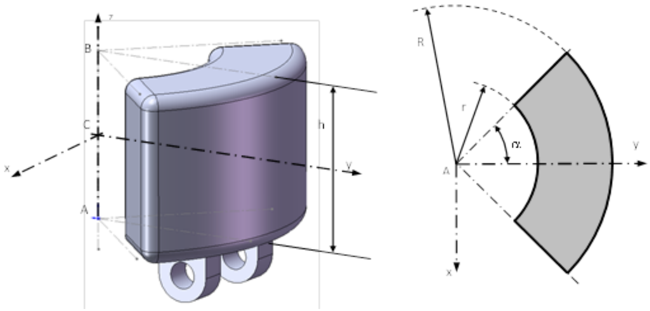
On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor $(S_1)$ et la masselotte $(S_2)$ représentés schématiquement ci-dessous.




- $(S_1)$ est en liaison pivot d'axe $\left(O_1, \overrightarrow{z_0}\right)$ avec $(S_0)$.
- $(S_2)$ est en liaison pivot d'axe $\left(O_2, \overrightarrow{x_1}\right)$ avec $(S_1)$.
- $\left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}\right) = \theta_1$.
- $\left(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}\right) = \left(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}\right) = \theta_2$.
- $\overrightarrow{O_0G_1} = h_1 \overrightarrow{z_0}$.
- $\overrightarrow{O_0O_2} = d_1 \overrightarrow{z_0} + L_1 \overrightarrow{y_1}$.
- $\overrightarrow{O_2G_2} = L_2 \overrightarrow{y_2}$.

Pour chacun des solides $S_i$ on note $m_i$ la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.




**Question 1** *Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).*

**Correction** Le solide 1 est axisymétrique. En tout point de l'axe du solide, la matrice d'inertie sera diagonale. On a donc $I_{O_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}$.

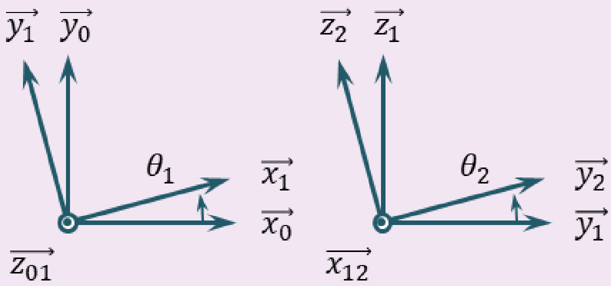
Le solide 2 admet le plan $\left(\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ comme plan de symétrie. Les produits d'inertie dépendant de $x$ sont nuls. On a donc $I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}$.

Afin de ne pas trop alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesse de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

**Question 2** *Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.*

**Question 3** *Déterminer :*
- *le torseur dynamique $\{\delta(S_1/R_0)\}$ en $O_1$ ;*
- *le torseur dynamique $\{\delta(S_2/R_0)\}$ en $O_2$.*

**Correction**




**Mouvement du solide 1/0**

On a : $\{\mathscr{V}(S_1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_1} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{O_1}$.

$O_1$ est un point fixe dans $R_0$.

$\{\sigma(S_1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ I_{O_1}(S_1)\overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \end{array}\right\}_{O_1} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \end{array}\right\}_{O_1}$ et $\{\delta(S_1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_1 \ddot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \end{array}\right\}_{O_1}$.

**Mouvement du solide 2/0**

On a : $\{\mathscr{V}(S_2/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{V(G_2 \in S_2/R_0)} \end{array}\right\}_{G_2} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} \\ L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1 L_1 \overrightarrow{x_1} \end{array}\right\}_{G_2}$.

$\overrightarrow{V(G_2 \in S_2/R_0)} = \overrightarrow{V(G_2 \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(G_2 \in S_1/R_0)}$

$= \left(\underbrace{\overrightarrow{V(O_2 \in S_2/S_1)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{G_2O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}\right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{V(O_0 \in S_1/R_0)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{G_2O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)}\right)$

$= \left(-L_2 \overrightarrow{y_2} \wedge \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}\right) + \left(-\left(d_1 \overrightarrow{z_0} + L_1 \overrightarrow{y_1} + L_2 \overrightarrow{y_2}\right) \wedge \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1}\right) = L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos\theta_2\right) \overrightarrow{x_1}$

$G_2$ est le centre de gravité de $S_2$.

$$\left\{\sigma\left(S_2/R_0\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \left(L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos\theta_2\right) \overrightarrow{x_1}\right) \\ I_{G_2}\left(S_2\right) \overrightarrow{\Omega\left(S_2/R_0\right)} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Omega\left(S_2/R_0\right)} = \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} = \dot{\theta}_1 \left(\cos\theta_2 \overrightarrow{z_2} + \sin\theta_2 \overrightarrow{y_2}\right) + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}$$

$$I_{G_2}\left(S_2\right) \overrightarrow{\Omega\left(S_2/R_0\right)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\theta}_2 \\ B_2 \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\left\{\delta\left(S_2/R_0\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \overrightarrow{\Gamma\left(G_2 \in S_2/R_0\right)} \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_{G_2}\left(S_2\right) \overrightarrow{\Omega\left(S_2/R_0\right)}\right)\right]_{R_0} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Gamma\left(G_2 \in S_2/R_0\right)} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos\theta_2\right) \overrightarrow{x_1}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}$$

$= L_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} + L_2 \dot{\theta}_2 \left(\dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \overrightarrow{x_{1,2}} - \dot{\theta}_2 \overrightarrow{y_2}\right) - \ddot{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos\theta_2\right) \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_1 \left(-L_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2\right) \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_1^2 \left(L_1 + L_2 \cos\theta_2\right) \overrightarrow{y_1}$

$= L_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - L_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2} + \left(2 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - \ddot{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos\theta_2\right)\right) \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_1^2 \left(L_1 + L_2 \cos\theta_2\right) \overrightarrow{y_1}$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_{G_2}\left(S_2\right) \overrightarrow{\Omega\left(S_2/R_0\right)}\right]_{R_0} = \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} A_2 \ddot{\theta}_2 \\ B_2 \ddot{\theta}_1 \sin\theta_2 - D_2 \ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 + B_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \\ -D_2 \ddot{\theta}_1 \sin\theta_2 + C_2 \ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$+ A_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{y_1} + \left(B_2 \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos\theta_2\right)\left(-\dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \overrightarrow{x_1} + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2}\right) + \left(-D_2 \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos\theta_2\right)\left(\dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \overrightarrow{x_{1,2}} - \dot{\theta}_2 \overrightarrow{y_2}\right)$

$$\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega\left(S_2/R_0\right)} \wedge \overrightarrow{z_2} = \left(\dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}\right) \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \overrightarrow{x_{1,2}} - \dot{\theta}_2 \overrightarrow{y_2}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega\left(S_2/R_0\right)} \wedge \overrightarrow{y_2} = \left(\dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}\right) \wedge \overrightarrow{y_2} = -\dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \overrightarrow{x_1} + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega\left(S_1/R_0\right)} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\theta}_1 \overrightarrow{y_1}$$

**Question 4** *Déterminer* $\overrightarrow{\delta\left(O_2, 2/0\right)} \cdot \overrightarrow{x_2}$.

**Correction** $\overrightarrow{\delta\left(O_2, 2/0\right)} \cdot \overrightarrow{x_2}$

$$= \left(\overrightarrow{\delta\left(G_2, 2/0\right)} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma\left(G_2 \in 2/0\right)}\right) \cdot \overrightarrow{x_2}$$

$$= \left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_{G_2}\left(S_2\right) \overrightarrow{\Omega\left(S_2/R_0\right)}\right]_{R_0} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma\left(G_2 \in 2/0\right)}\right) \cdot \overrightarrow{x_2}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_{G_2}\left(S_2\right) \overrightarrow{\Omega\left(S_2/R_0\right)} \cdot \overrightarrow{x_2}\right]_{R_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_{G_2}\left(S_2\right) \overrightarrow{\Omega\left(S_2/R_0\right)}\right]_{R_0} \cdot \overrightarrow{x_2} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_{G_2}\left(S_2\right) \overrightarrow{\Omega\left(S_2/R_0\right)} \cdot \overrightarrow{x_2}\right]_{R_0}$$

**Question 5** *Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique* $\left\{\delta\left(E/R_0\right)\right\}$ *en* $O_2$ *?*

**Question 6** *Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.*

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre $S_1$ et $S_2$ (couple maximal 0.46 Nm) , une seconde avec frottement (couple maximal 0.1 Nm).

**Question 7** *Commenter ces résultats.*