

Application

Application – Régulateur

Savoirs et compétences :

Un système matériel est constitué de 5 solides reliés au bâti (0). Les solides (1), (2), (3) et (5) sont des barres sans épaisseur, articulées par des pivots en O , A ou B de manière à demeurer dans un même plan noté (\vec{x}_1, \vec{y}_1) . Cet ensemble est donc mobile en rotation autour de \vec{z}_1 . On repère sa position angulaire par le paramètre ψ .

Au bâti (0), on associe le repère fixe \mathcal{R}_0 .

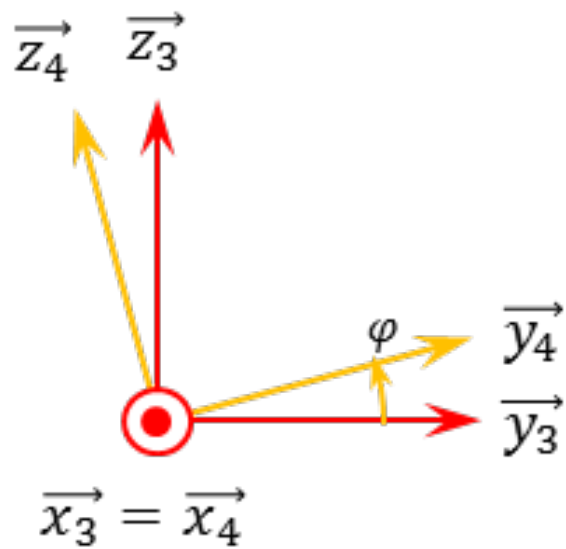
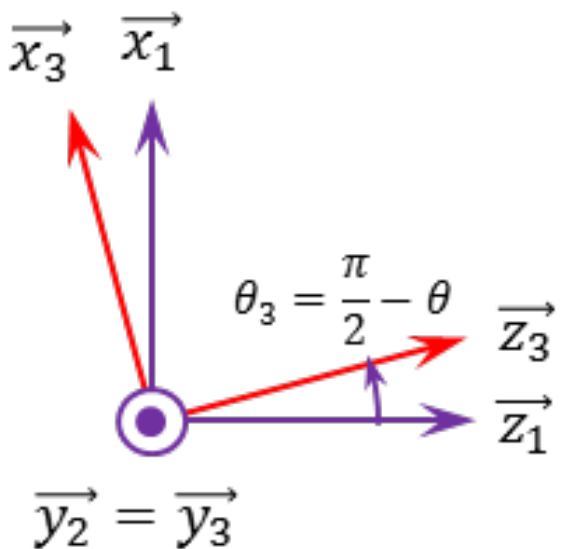
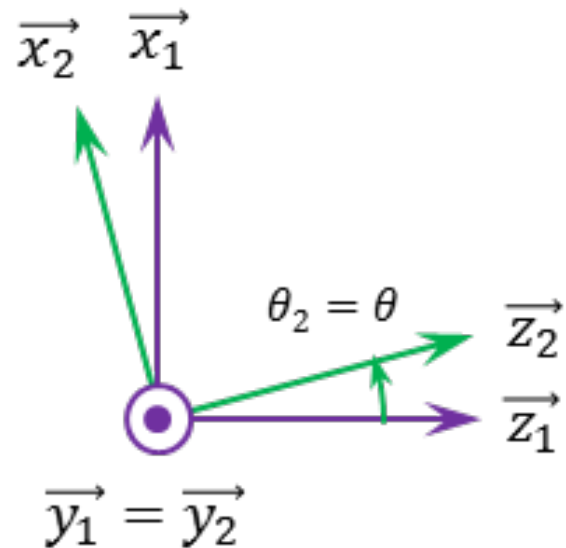
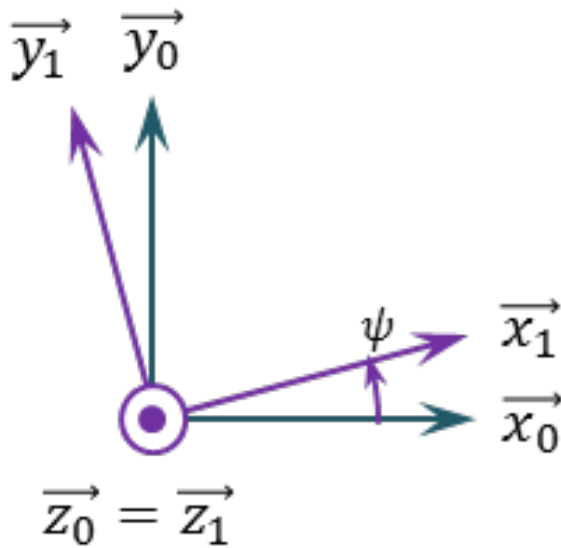
À chaque S_i on associe une base $\mathcal{B}_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Les repères \mathcal{R}_i sont d'origine O ou A selon le cas.

Les rotations internes sont définies par θ_2 autour de (O, \vec{y}_1) et θ_3 autour de (A, \vec{y}_1) .

Les barres (2) et (3) sont identiques, de longueur $2a$ et de masse $m_2 = m_3 = m$.

Les barres (1) et (5) ont une masse m_i et des longueurs ℓ_i . (4) est un volant d'inertie de masse M qui fait l'objet d'une liaison pivot d'axe (G, \vec{x}_3) avec la barre (3). Un repère \mathcal{R}_4 est lié à ce volant dont on définit sa position par le paramètre angulaire φ .

On donne le paramétrage suivant.



Question 1 Déterminer les torseurs cinétiques suivants : $\{\sigma(1/0)\}_O$, $\{\sigma(2/0)\}_O$ et $\{\sigma(3/0)\}_O$ dans \mathcal{R}_1 , $\{\sigma(4/0)\}_O$ dans \mathcal{R}_3 et $\{\sigma(5/0)\}_A$ dans \mathcal{R}_1 .

Correction

Détermination de $\{\sigma(1/0)\}_O$

O est un point fixe. On a donc :

$$\{\sigma(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_1 \overrightarrow{V(G_1 \in 1/0)} \\ \sigma(O_1, 1/0) = I_O(1) \overrightarrow{\Omega(1/0)} \end{array} \right\}_O$$

(1) est une tige d'axe \vec{z}_0 et de rayon négligeable.

On a donc $I_O(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ avec $A_1 = \frac{m_1 l_1^2}{3}$.

De plus, $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \psi \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{V(O \in 1/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_O$. On a donc

$$I_O(1) \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} = \vec{0}. \text{ Au final :}$$

$$\{\sigma(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

Détermination de $\{\sigma(2/0)\}_O$

O est un point fixe. On a donc :

$$\{\sigma(2/0)\} = \left\{ \frac{m_2 \overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)}}{\overrightarrow{\sigma(O, 2/0)}} \right\}_O$$

(2) est une tige d'axe $\overrightarrow{z_2}$ et de rayon négligeable. On

a donc $I_{O_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$ avec $A_2 = \frac{4ma^2}{3}$. De

$$\text{plus, } \{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\psi} \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta} \overrightarrow{y_2}}{\overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)}} \right\}_{G_2}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)} &= \overrightarrow{V(O \in 2/0)} + \overrightarrow{G_2 O} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \\ -a \overrightarrow{z_2} \wedge (\dot{\psi} \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta} \overrightarrow{y_2}) &= a(\dot{\psi} \sin \theta \overrightarrow{y_1} + \dot{\theta} \overrightarrow{x_2}) = \\ a(\dot{\psi} \sin \theta \overrightarrow{y_1} + \dot{\theta} (\cos \theta \overrightarrow{x_1} - \sin \theta \overrightarrow{z_1})) \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } I_{O_2}(2) \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} =$$

$$\begin{pmatrix} -A_2 \dot{\psi} \sin \theta \\ A_2 \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}.$$

Au final :

$$\{\sigma(2/0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} m \begin{pmatrix} a \dot{\theta} \cos \theta \\ a \dot{\psi} \sin \theta \\ -a \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \\ \begin{pmatrix} -A_2 \dot{\psi} \sin \theta \\ A_2 \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \end{pmatrix} \right\}_O$$

Question 2 Déterminer les torseur dynamique $\{\delta(4/0)\}_G \cdot \overrightarrow{x_3}$.

Correction

Question 3 Déterminer les torseur dynamique $\{\delta(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5/0)\}_O \cdot \overrightarrow{z_0}$.

Correction

Question 4 Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble du système dans son mouvement par rapport au bâti.

Correction

