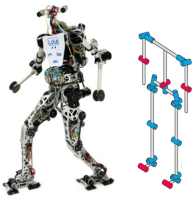


Activation 3



Le robot humanoïde Lola

Concours Mines Ponts – PSI 2015

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C17.SF1* : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- *Res1.C2* : principe fondamental de la dynamique

Mise en situation

Le développement de robots à forme humaine est en croissance constante depuis quelques dizaines d'années. En robotique, il est difficile d'affirmer que tous les robots remplaçant l'homme dans ses tâches doivent être de forme humaine. Les véhicules autonomes, par exemple, ne sont pas anthropomorphes. Les tâches auxquelles sont destinées les robots définissent leur forme idéale. Si nous souhaitons un jour que les robots remplacent l'homme dans ses tâches ennuyeuses, ils devront s'intégrer au mieux à notre société, à notre environnement et à notre ergonomie.

Les dimensions d'une maison et la hauteur des meubles sont adaptées à notre forme humaine. L'avantage des robots humanoïdes devient alors économique : il n'est pas indispensable de modifier l'environnement quotidien pour les utiliser.

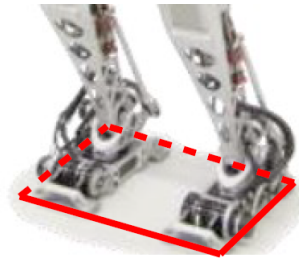
Le robot humanoïde LOLA, développé par l'Université de Munich, est un robot de forme humaine conçu pour un mode de marche rapide. LOLA possède une structure à 25 degrés de liberté lui permettant une flexibilité accrue. Chaque jambe possède 7 degrés de liberté, le haut du corps 8 et la tête 3. Le robot est équipé d'une caméra stéréoscopique haute définition afin de percevoir son environnement, d'une centrale inertielle équipée de 3 gyroscopes et de 3 accéléromètres. Chaque articulation possède un codeur angulaire absolu et chaque pied est muni d'un capteur d'effort 6 axes permettant d'obtenir l'effort de contact avec le sol. Les caractéristiques techniques de LOLA sont données dans le tableau suivant.

Caractéristiques	Valeurs
Hauteur	180 cm
Masse	55 kg
Nombre de degrés de liberté	25
Vitesse de marche	5 km.h ⁻¹ maxi
Hauteur du centre de gravité	105 cm

Stabilité du robot

Par définition, le robot humanoïde bipède s'appuie sur ses deux jambes. Comme tout système de solides en équilibre statique, LOLA est à l'équilibre si la projection de son centre de gravité sur le sol est contenu dans le polygone de sustentation qui est tracé en rouge autour

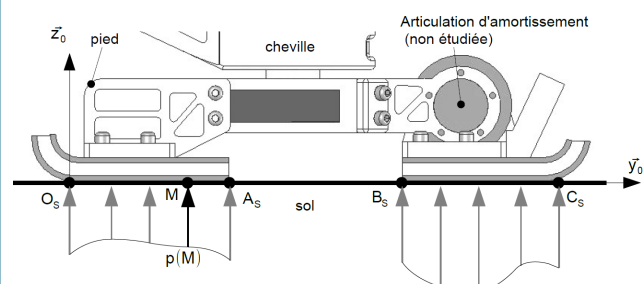
de ses deux pieds sur la figure suivante. Lorsque le robot marche, il y a une phase où il n'est en appui que sur un seul pied. Dans ce cas, le polygone de sustentation est réduit à un seul pied.



Objectif L'objectif de cette partie est de trouver à quelle condition le maintien du contact sur le sol est possible lorsque le robot marche et si l'accélération est compatible avec le cahier des charges, dont un extrait est donné ciaprès.

Exigence 1.3 : Le robot ne doit pas basculer lors de la marche	
Description : La position du ZMP* reste dans le polygone de sustentation	
* : défini dans la suite	
Exigence 1.1 : Le robot doit pouvoir atteindre les performances cibles	
Sous-exigence	Description
Id=1.1.4	La longueur d'une foulée est de 150 cm au maximum
Id=1.1.3	Le robot peut accélérer jusqu'à 1,39 m.s ⁻²

Le contact du pied sur le sol est modélisé sans frottement sur la figure suivante.



Modélisation de l'effort de contact entre le sol et le robot

Sous la semelle du robot, la pression de contact avec le sol est supposée répartie de manière uniforme transversalement (suivant la direction \vec{x}_0). Le problème se ramène donc à une répartition linéique de pression sur les deux segments de contact $[O_S; A_S]$ et $[B_S; C_S]$. En chaque point

M (d'ordonnée \vec{y}) de ces segments, la densité d'efforts de contact est $p(M)\vec{z}_0$, avec $p(M)$ en $N\ m^{-2}$. On notera que si le robot n'est pas équipé de semelles magnétiques ou adhésives, on a $p(M) > 0$. Ainsi, en notant b la largeur de la semelle suivant \vec{x}_0 et $\Sigma = [O_S, A_S] \cup [B_S, C_S]$, le modèle global d'action mécanique de contact du sol sur le pied peut être donné par le torseur : $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} = b \int_{M \in \Sigma} p(M)\vec{z}_0 dy \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M)\vec{z}_0 dy \end{array} \right\}$.

Question 1 Montrer que $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$ est un glisseur.

Soit H_S le point de la droite (O_S, \vec{y}_0) tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}(H_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \vec{0}$, on notera $\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{H_S} \vec{y}_0$. Ce point est fondamental en robotique humanoïde, il prend le nom de Zero Moment Point (ZMP) : de l'anglais « point de moment nul ».

Question 2 Montrer que $H_S \in [O_S; C_S]$, c'est-à-dire qu'il est situé sous le pied du robot.

Question 3 Donner la forme du torseur $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$ dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à-dire que la densité d'efforts de contact est $p(M)\vec{z}_0 + t(M)\vec{y}_0$). Montrer que les résultats des questions 1 et 2 sont inchangés.

Établissement de la condition de non-basculement

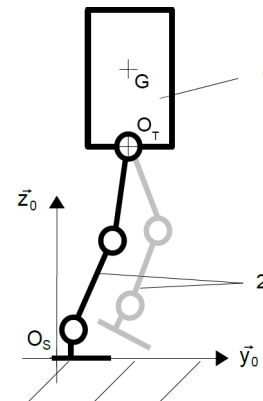
Considérons le robot en marche avec le torse ayant un mouvement de translation vers l'avant (suivant $+\vec{y}_0$). Le robot est toujours dans la phase d'appui d'un seul pied sur le sol, via une des deux jambes notées (2).

Données et paramètres :

- Torse (1) :
 - masse m_1 , accélération de la pesanteur : $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ avec $g = 9,81\ m\ s^{-2}$;
 - centre de gravité : G , tel que $\overrightarrow{O_S G} = Y_G(t)\vec{y}_0 + Z_G(t)\vec{z}_0$;
 - le torse est supposé en mouvement de translation rectiligne, de direction \vec{y}_0 par rapport au sol, on a : $\{\mathcal{V}(1/\text{Sol})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \frac{dY_G}{dt} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_G$.
- Jambe avec les pieds (2) :
 - masses et inerties négligeables dans cette phase;
 - le pied d'appui est sans mouvement par rapport au sol;
 - l'action mécanique du sol sur la semelle du pied est modélisée par le glisseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{H_S} \quad \text{où :}$$

H_S est le ZMP, point mis en évidence à la question 2 tel que $\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{H_S} \vec{y}_0$, $\overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} = N_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \vec{z}_0 + T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \vec{y}_0$, avec à la limite du glissement $|T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}| = \mu N_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}$ où μ est le facteur de frottement du contact sol / semelle.



Question 4 En appliquant le théorème du moment dynamique, puis le théorème de la résultante dynamique au système $\{1+2\}$, montrer que la condition de stabilité (non basculement) s'écrit : $Y_{H_S} = Y_G - \frac{Z_G}{g} \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$.

Conformément au résultat de la question 2, le calculateur du robot contrôle en permanence la position du point H_S (ZMP) : s'il est positionné à l'intérieur du segment $[O_S; C_S]$, le robot ne bascule pas. On appelle foulée, la longueur entre deux emplacements successifs d'appui du même pied. Lors du premier pas, le centre de gravité se déplace de sorte que $Y_G \in \left[-\frac{\text{foulée}}{4}, +\frac{\text{foulée}}{4} \right]$, car pour une accélération constante, les deux pas qui constituent une foulée sont de même longueur.

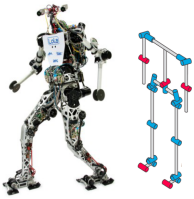
Le cahier des charges stipule qu'à partir de la station immobile, le robot doit atteindre la vitesse cible de $5\ km\ h^{-1}$ en une seconde, avec une accélération constante du centre de gravité $\frac{d^2 Y_G}{dt^2} = 1,39\ m\ s^{-2}$. On rappelle que $Z_G = 105\ cm$.

Question 5 Sachant que la longueur de la semelle du robot $[O_S; C_S]$ est $L = 300\ mm$, déterminez la longueur de la première foulée du robot qui garantit la condition de non-basculement. Est-ce compatible avec le cahier des charges ?

Question 6 Dans le cas d'un sol relativement glissant, avec un facteur de frottement du contact sol/semelle $\mu = 0,1$, quelle accélération maximale $\left[\frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \right]_{\max}$ le robot peut-il avoir ? Est-ce compatible avec le cahier des charges pour la phase de démarrage ?

Activation 3 –

Corrigé



Le robot humanoïde Lola

Concours Mines Ponts – PSI 2015

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Mise en situation

Stabilité du robot

Objectif L'objectif de cette partie est de trouver à quelle condition le maintien du contact sur le sol est possible lorsque le robot marche et si l'accélération est compatible avec le cahier des charges, dont un extrait est donné ciaprès.

Exigence 1.3 : Le robot ne doit pas basculer lors de la marche

Description : La position du ZMP* reste dans le polygone de sustentation

* : défini dans la suite

Exigence 1.1 : Le robot doit pouvoir atteindre les performances cibles

Sous-exigence	Description
Id=1.1.4	La longueur d'une foulée est de 150 cm au maximum
Id=1.1.3	Le robot peut accélérer jusqu'à $1,39 \text{ m.s}^{-2}$

Modélisation de l'effort de contact entre le sol et le robot

Question 1 Montrer que $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$ est un glisseur.

Correction

L'automoment est un des invariants du torseur : $\forall P, \overrightarrow{R}(\text{sol} \rightarrow \text{pied}) \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(O_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied}) = \text{cst}$. Dans le cas d'un glisseur, il existe un point tel que le moment est nul. L'automoment est donc nul en tous points de l'espace.

Dans notre cas, $b \int_{M \in \Sigma} p(M) \overrightarrow{z_0} dy \cdot b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = 0$ (permutation circulaire du produit mixte).

Question 2 Montrer que $H_S \in [O_S; C_S]$, c'est à-dire qu'il est situé sous le pied du robot.

Correction On cherche H_S tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}}(H_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied}) = \overrightarrow{0}$.

$$\text{On a donc } b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{H_S O_S} + \overrightarrow{O_S M}) \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S O_S} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} -Y_{H_S} \overrightarrow{y_0} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy \overrightarrow{x_0} + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\text{Projetons cette expression sur } \overrightarrow{x_0} : -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} dy = 0$$

$$\Leftrightarrow -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} p(M) \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{O_S M} dy = 0$$

$$\Leftrightarrow -Y_{H_S} \int_{M \in \Sigma} p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} Y_M p(M) dy = 0 \text{ soit } Y_{H_S} = \frac{\int_{M \in \Sigma} Y_M p(M) dy}{\int_{M \in \Sigma} p(M) dy}.$$

On a, en raison du parmaétrage, $Y_M > 0$. Nécessairement, H_S est donc à droite du point O_S .

$$\text{De même, on a donc } b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{H_S C_S} + \overrightarrow{C_S M}) \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{H_S C_S} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{C_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy = \overrightarrow{0} \\ &\text{On a } \overrightarrow{C_S M} = -\lambda \overrightarrow{y_0} \text{ avec } \lambda > 0 \text{ (} M \in \Sigma \text{) et } \overrightarrow{H_S C_S} = \mu \overrightarrow{y}. \text{ En projetant de plus suivant } \overrightarrow{x_0}, \text{ on a :} \\ &(\int_{M \in \Sigma} \mu \overrightarrow{y_0} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy + \int_{M \in \Sigma} -\lambda \overrightarrow{y_0} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy) \overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{0} \\ &\Rightarrow \int_{M \in \Sigma} \mu p(M) dy + \int_{M \in \Sigma} -\lambda p(M) dy = 0 \text{ soit } \mu = \frac{\int_{M \in \Sigma} \lambda p(M) dy}{\int_{M \in \Sigma} p(M) dy}. \\ &\mu \text{ est donc nécessairement positif et } H_S \text{ est à gauche de } C_S. \\ &\text{Au final, } H_S \text{ appartient à } [O_S C_S]. \end{aligned}$$

Question 3 Donner la forme du torseur $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$ dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à-dire que la densité d'efforts de contact est $p(M) \overrightarrow{z_0} + t(M) \overrightarrow{y_0}$). Montrer que les résultats des questions 1 et 2 sont inchangés.

Correction $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\} = \left\{ \begin{array}{c} b \int_{M \in \Sigma} (p(M) \overrightarrow{z_0} + t(M) \overrightarrow{y_0}) dy \\ b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy \end{array} \right\}_{O_S}$

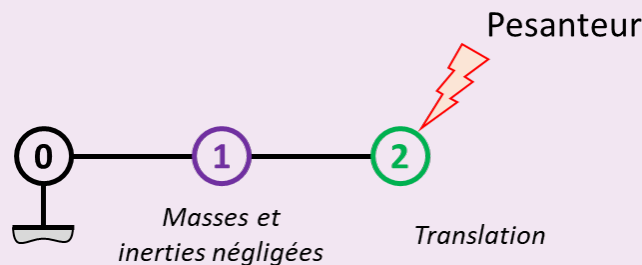
$$= \left\{ \begin{array}{c} b \int_{M \in \Sigma} p(M) \overrightarrow{z_0} dy \\ b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \overrightarrow{z_0} dy \end{array} \right\}_{O_S} + \left\{ \begin{array}{c} b \int_{M \in \Sigma} t(M) \overrightarrow{y_0} dy \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_S}.$$

Le premier torseur vérifie bien les deux premières questions. Le second torseur est bien un glisseur (automoment nul).
(...)

Établissement de la condition de non-basculement

Question 4 En appliquant le théorème du moment dynamique, puis le théorème de la résultante dynamique au système $\{1+2\}$, montrer que la condition de stabilité (non basculement) s'écrit : $Y_{H_S} = Y_G - \frac{Z_G}{g} \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$.

Correction



- On isole 1+2.
 - Bilan des actions mécaniques :
 - action de la pesanteur;
 - action du sol.
 - On applique le TMD au point H_S en projection sur $\overrightarrow{y_0}$.
 - $\overrightarrow{\delta}(1,0/G) = \overrightarrow{0}$ (mouvement de translation). $\overrightarrow{\delta}(1,0/H_S) = \overrightarrow{\delta}(1,0/G) + \overrightarrow{H_S G} \wedge \overrightarrow{R_d}(1/0)$
 $= m_1 (-Y_{H_S} \overrightarrow{y_0} + Y_G(t) \overrightarrow{y_0} + Z_G(t) \overrightarrow{z_0}) \wedge \ddot{Y}_G \overrightarrow{y_0} = -m_1 Z_G(t) \ddot{Y}_G \overrightarrow{x_0}$.
 - Déplacement de l'action de la pesanteur : $(-Y_{H_S} \overrightarrow{y_0} + Y_G(t) \overrightarrow{y_0} + Z_G(t) \overrightarrow{z_0}) \wedge -m_1 g \overrightarrow{z_0}$
 $= -m_1 g (-Y_{H_S} \overrightarrow{x_0} + Y_G(t) \overrightarrow{x_0})$.
 - Au final, $-m_1 g (-Y_{H_S} + Y_G(t)) = -m_1 Z_G(t) \ddot{Y}_G \Leftrightarrow g (-Y_{H_S} + Y_G(t)) = Z_G(t) \ddot{Y}_G$. On a donc $g Y_G(t) - Z_G(t) \ddot{Y}_G = g Y_{H_S}$ et $Y_{H_S} = \frac{g Y_G(t) - Z_G(t) \ddot{Y}_G}{g}$.
- En faisant le TMD au point H_S il est inutile de faire le TRD.

Question 5 Sachant que la longueur de la semelle du robot $[O_S; C_S]$ est $L = 300 \text{ mm}$, déterminez la longueur de la première foulée du robot qui garantit la condition de non-basculement. Est-ce compatible avec le cahier des charges ?

Correction Le cas limite de basculement est lorsque $H_S = C_S$ et donc $Y_{H_S} = L$.

$$\text{On a donc } Y_G(t) = Y_{H_S} + \frac{Z_G(t)\ddot{Y}_G}{g} = 300 + \frac{1050 \times 1390}{9810} = 449 \text{ mm.}$$

La foulée est donnée par $4Y_G \simeq 1,795 \text{ m} < 1,50 \text{ m}$. L'exigence 1.1.4 n'est pas respectée.

Question 6 Dans le cas d'un sol relativement glissant, avec un facteur de frottement du contact sol/semelle $\mu = 0,1$, quelle accélération maximale $\left[\frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \right]_{\max}$ le robot peut-il avoir ? Est-ce compatible avec le cahier des charges pour la phase de démarrage ?

Correction On isole (1+2) et on réalise le TRD :

- projection sur \vec{y}_0 : $b \int_{M \in \Sigma} t(M) dy = m_1 \frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2}$;
- projection sur \vec{z}_0 : $b \int_{M \in \Sigma} p(M) dy - m_1 g = 0$.

À la limite du glissement, on a $b \int_{M \in \Sigma} t(M) dy = \mu b \int_{M \in \Sigma} p(M) dy$ soit $\left[\frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \right]_{\max} = \mu g = 0,1 \times 9,81 = 0,981 \text{ ms}^{-2} < 1,39 \text{ ms}^{-2}$. L'exigence 1.1.3 n'est pas respectée.