

## Application 4 – Corrigé



### Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs \*

Centrale Supélec PSI 2013

#### Savoirs et compétences :

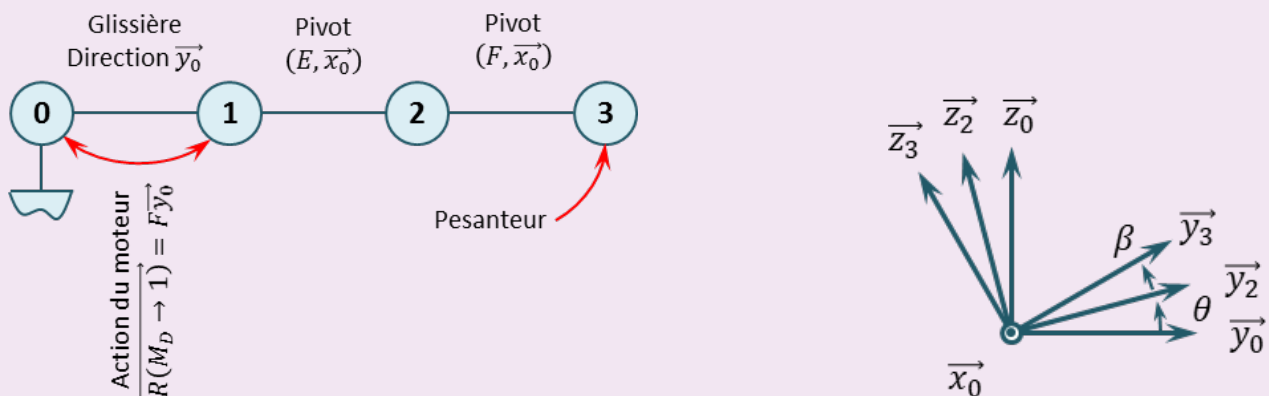
- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

### Modélisation dynamique du comportement de la charge

**Objectif** Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

**Question 1** Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?

#### Correction



Le système a trois mobilités :

- la translation de la liaison glissière de longueur  $y_{ch}(t)$  (degré de liberté motorisé) ;
- la rotation du câble d'angle  $\theta(t)$  (degré de liberté non motorisé) ;
- la rotation du conteneur d'angle  $\beta(t)$  (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.

**Question 2** Déterminer littéralement, au point  $G_3$ , la vitesse  $\overrightarrow{V}(G_3 \in 3/0)$  puis le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(3/0)\}$  de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ .

**Correction** 
$$\overrightarrow{V}(G_3 \in 3/0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG_3}) \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d}{dt} (y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} - \ell_2\overrightarrow{z_2} - h_3\overrightarrow{z_3}) \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

On a :

- $\left[ \frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega}(2/0) \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta} \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta} \overrightarrow{y_2};$
- $\left[ \frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_3} + \overrightarrow{\Omega}(3/0) \wedge \overrightarrow{z_3} = (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_3} = -(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_3};$

$$\bullet \left[ \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \vec{z}_2;$$

$$\bullet \left[ \frac{d\vec{y}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{z}_3.$$

$$\overrightarrow{V(G_3 \in 3/0)} = \dot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \dot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{y}_3.$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} = \ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3.$$

$$\text{Par ailleurs, } G_3 \text{ étant le centre d'inertie, de 3, on a } \overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_3, 3/0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{dA_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} =$$

$$A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0.$$

$$\text{On a donc, } \{\mathcal{D}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \\ A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{G_3}$$

**Question 3** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$ , sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

**Correction** D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant  $\vec{z}_2$ , on peut donc suggérer de réaliser le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur  $\vec{y}_2$ .

Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3;
- action de 2 sur 3.

$$\text{On a donc : } -M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_2 = \left( M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{y}_2$$

$$\Leftrightarrow -M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$$

Résolution faisant intervenir  $F$  – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc (1+2+3) et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{y}_0$ .

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur  $\vec{y}_0$ );
- action du moteur sur 1.

$$\text{On applique le TRD sur } \vec{y}_0 : F = \overrightarrow{R_d(1+2+3/0)} \cdot \vec{y}_0 = \underbrace{\overrightarrow{R_d(1/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{y}_0}_{=0(\text{masse négligée})} + \overrightarrow{R_d(3/0)} \cdot \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow F = \left( M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{y}_0$$

$$\Leftrightarrow F = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} \cos \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos(\beta + \theta) - \ell_2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin(\beta + \theta))$$

**Question 4** En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $y_{ch}(t)$  et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

**Correction** Le TRD appliqué à 3 en projection suivant  $\vec{z}_2$  se traduit par :

$$F - M_3 g \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2 = \left( M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \vec{y}_0 + \ell_2 \ddot{\theta} \vec{y}_2 + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \vec{y}_3 + \ell_2 \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \vec{z}_3) \right) \cdot \vec{z}_2$$

$$\Leftrightarrow F - M_3 g \cos \theta = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta).$$

Le TMD appliqué à 3 au point  $F$  en projection suivant  $\vec{x}_0$  se traduit par :

$$\overrightarrow{F G_3} \wedge (-M_3 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = \left( \overrightarrow{\delta(G_3, 3/0)} + \overrightarrow{F G_3} \wedge \overrightarrow{R_d(3/0)} \right) \cdot \vec{x}_0$$

$$\Leftrightarrow -h_3 \vec{z}_3 \wedge (-M_3 g \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$$

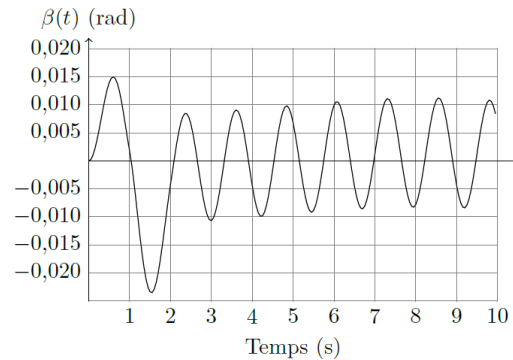
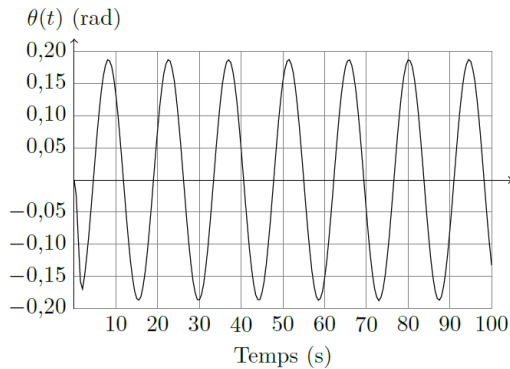
$$\Leftrightarrow -M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}).$$

**Question 5** En supposant que  $\theta$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, linéariser les équations précédentes.

**Correction**

- On a  $-M_3 g \sin \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) \cos \theta + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos \beta - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin \beta)$ . En linéarisant, on obtient  $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) - h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \beta)$ . En considérant que  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, on a :  $-M_3 g \theta = M_3 (\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}))$ .
- On a :  $F - M_3 g \cos \theta = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \sin \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos \beta)$ . En linéarisant, on obtient :  $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta + \ell_2 \dot{\theta}^2 + h_3 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2)$ . En considérant que  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\beta}$  sont petits, on a :  $F - M_3 g = M_3 (-\ddot{y}_{ch}(t) \theta + h_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \beta)$ .
- On a :  $M_3 g h_3 \sin(\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$ . En linéarisant, on obtient  $M_3 g h_3 (\beta + \theta) = A_3 (\ddot{\theta} + \ddot{\beta})$ .

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en  $y_{ch}(t)$  de 10 m.



**Question 6** Proposer une simplification de la modélisation précédente.

**Correction** L'amplitude des oscillations de  $\beta$  est 10 fois inférieure aux oscillations de  $\theta$ . En conséquences, on pourrait poser  $\beta = 0$  et :

- $-g \theta = \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2 \ddot{\theta} + h_3 \ddot{\theta}$  ;
- $F - M_3 g = -M_3 \ddot{y}_{ch}(t) \theta$  ;
- $M_3 g h_3 \theta = A_3 \ddot{\theta}$ .