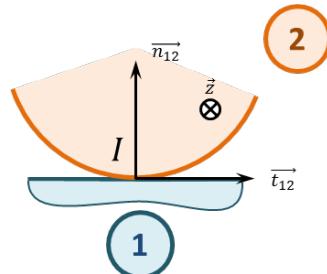


1 Modélisation du contact ponctuel entre 2 pièces

1.1 Torseur des actions mécaniques

Considérons le contact ponctuel ponctuel entre deux pièces 1 et 2. En considérant la liaison parfaite, le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 s'écrit sous la forme suivante : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{12} \vec{n}_{12} \\ 0 \end{array} \right\}_I$, en notant \vec{n}_{12} le vecteur normal au contact orienté de 1 vers 2. En considérant que la liaison n'est pas parfaite, plusieurs situation peuvent se présenter.

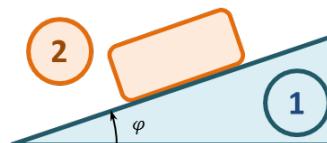


- Si on considère qu'un effort tant à faire translater 2 suivant \vec{t}_{12} , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12} \vec{n}_{12} + T_{12} \vec{t}_{12} \\ 0 \end{array} \right\}_I$.
- Si on considère qu'un effort tant à faire rouler 2 autour de \vec{z}_{12} , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12} \vec{n}_{12} \\ M_{r12} \vec{z} \end{array} \right\}_I$ avec M_{r12} moment de résistance au roulement.
- Si on considère qu'un effort tant à faire pivoter 2 autour de \vec{n}_{12} , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12} \vec{n}_{12} \\ M_{p12} \vec{n}_{12} \end{array} \right\}_I$ avec M_{p12} moment de résistance au pivotement.

R Il est possible de modéliser l'ensemble des composantes dues au frottement dans un même torseur. On fait l'hypothèse ici d'un problème plan, mais il peut aisément être adapté à un modèle 3D.

1.2 Facteur de glissement et d'adhérence

Considérons la pièce 2 sur un plan incliné 1. Notons φ_a l'angle à partir duquel la pièce 2 se met à glisser sur le plan. On appelle $f_a = \tan \varphi_a$ le facteur d'adhérence. On constate expérimentalement qu'une fois la pièce est en mouvement, si on diminue l'angle φ , la pièce continue à glisser, jusqu'à un angle φ_g . On appelle $f_g = \tan \varphi_g$ le facteur de glissement.

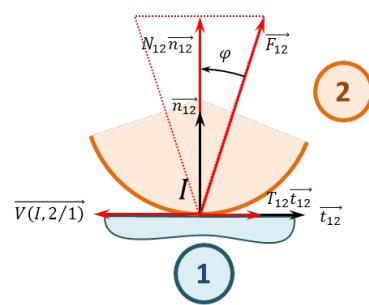


Ces facteurs sont sans unité. Ils dépendent de la nature des matériaux en contact ainsi que de la nature des surfaces de contact (et d'un lubrifiant éventuel). Ils sont indépendants de l'effort de 2 sur 1. Ces deux facteurs étant relativement proches, on fera l'hypothèse que $f = f_1 = f_2$.

1.3 Modélisation de l'adhérence et du glissement - Lois de Coulomb

Cas 1 - Glissement - $\overline{V(I \in 2/1)} \neq \overline{0}$ **Cas 2 - Adhérence** - $\overline{V(I \in 2/1)} = \overline{0}$

- Connaissant le sens et la direction de $\overline{V(I \in 2/1)}$, alors \vec{t}_{12} s'oppose à $\overline{V(I \in 2/1)}$.
- $|T_{12}| = f |N_{12}|$.
- La vecteur vitesse appartenant au plan tangent au contact, on dit que l'effort résultant ($\vec{F}_{12} = N_{12} \vec{n}_{12} + T_{12} \vec{t}_{12}$) est sur le cône de frottement.
- La direction de \vec{t}_{12} n'est pas connue.
- $|T_{12}| \leq f |N_{12}|$.
- La direction \vec{t}_{12} n'étant pas connue, on dit que l'effort résultant ($\vec{F}_{12} = N_{12} \vec{n}_{12} + T_{12} \vec{t}_{12}$) appartient au cône d'adhérence.



R En considérant que la direction du vecteur vitesse peut décrire le plan tangent au contact, la résultante des efforts \vec{F}_{12} décrit alors un cône. On parle donc de cône d'adhérence.

1.4 Modélisation de la résistance au roulement et au pivotement

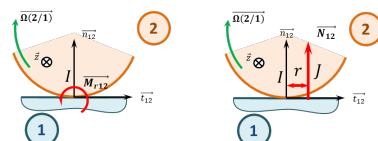
Modélisation de la résistance au roulement

- Le moment de résistance au roulement $\overrightarrow{M_{r12}}$ s'oppose à $\overrightarrow{\Omega(2/1)} \cdot \vec{z}$.
- On note r le coefficient de résistance au roulement ([m]) et on a $\|\overrightarrow{M_{r12}}\| = r \|\overrightarrow{N_{12}}\|$.

Modélisation de la résistance au pivotement

- Le moment de résistance au pivotement $\overrightarrow{M_{p12}}$ s'oppose à $\overrightarrow{\Omega(2/1)} \cdot \vec{n}_{12}$.
- On note p le coefficient de résistance au pivotement ([m]) et on a $\|\overrightarrow{M_{p12}}\| = p \|\overrightarrow{N_{12}}\|$.

Ainsi pour modéliser la résistance au roulement, on peut faire l'hypothèse que l'action normale de 1 sur 2 est « avancée » de r par rapport au point I .



2 Modélisation locale des actions mécaniques

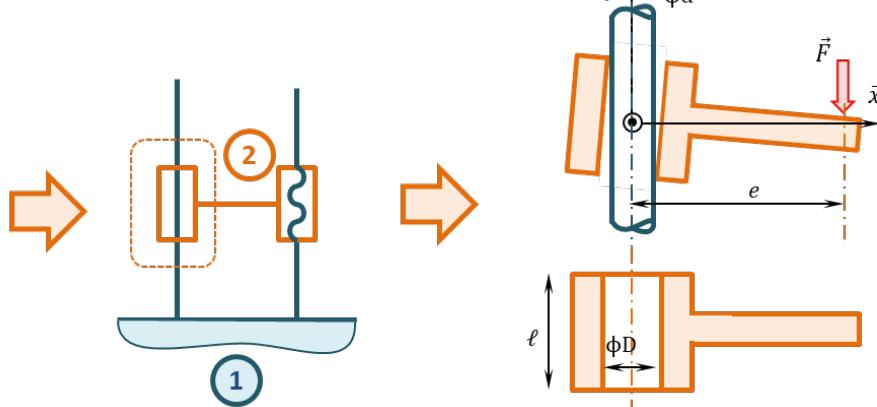
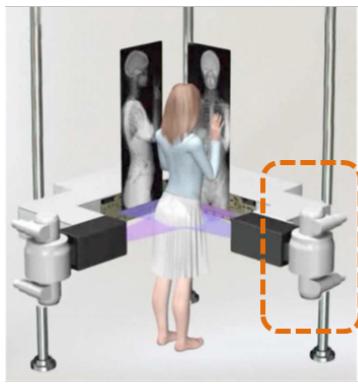
Définition Localement, les actions mécaniques dans un contact ponctuel avec frottement peuvent être modélisées par le torseur suivant : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iint_{\mathcal{S}} f(M) \overrightarrow{u(M)} d\mathcal{S} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, 1 \rightarrow 2)} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{PM} \wedge d\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M$.

La densité surfacique d'effort peut alors se décomposer sur le vecteur normal au contact et sur un vecteur appartenant au plan tangent au contact. On a alors $\overrightarrow{f(M)u(M)} = p_{12}(M) \overrightarrow{n_{12}} + \overrightarrow{\tau_{12}(M)}$. Dans le cas du glissement : $\|\overrightarrow{\tau_{12}(M)}\| = p_{12} \cdot f$. En notant :

- $p_{12}(M)$ pression de contact au point M (en Nm^{-2});
- $\overrightarrow{\tau_{12}(M)}$ la projection tangentielle de la densité surfacique (norme en Nm^{-2});
- f facteur de frottement.

3 Résolution des problèmes d'arc-boutement

L'arc-boutement est un phénomène de blocage d'une liaison (souvent glissière ou pivot glissant). Ce phénomène est causé d'une part par le frottement dans une liaison et d'autre part par le jeu existant entre les deux pièces en mouvement. En effet, le jeu dans la liaison autorise une légère rotation de la pièce mâle, modifiant les zones de contact. Le frottement dans ces zones de contact conduit à l'arc-boutement.



On commence donc par modéliser le contact par des liaisons ponctuelles avec frottement. L'écriture du PFS et l'utilisation du modèle de Coulomb permet de déterminer des conditions géométriques à la limite du coincement. (Pour cela, on fait l'hypothèse qu'on est à la limite du glissement en un point (égalité) et dans le cône d'adhérence à l'autre point inégalité.)

1 Ce qu'il faut connaître et savoir faire... pour pouvoir commencer

1. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
2. Faire un bilan des actions mécaniques extérieures et ´crire le torseur associé.
3. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
4. Faire un graphe d'analyse (ou de structure : liaisons et actions mécaniques extérieures).
5. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
6. Faire des produits vectoriels le plus vite possible.
7. Les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons.
8. Simplifier les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons dans le cas d'un problème plan.

2 Les types de problèmes

Le principe fondamental de la statique a pour objectif de calculer des actions mécaniques dans deux cas :

1. connaître toutes les actions mécaniques dans toutes les liaisons;

2. connaître la loi entrée-sortie en effort, c'est ´dire :

- quel couple moteur faut-il pour déplacer un objet?
- quel effort doit fournir le vérin pour soulever cette masse?
- ...

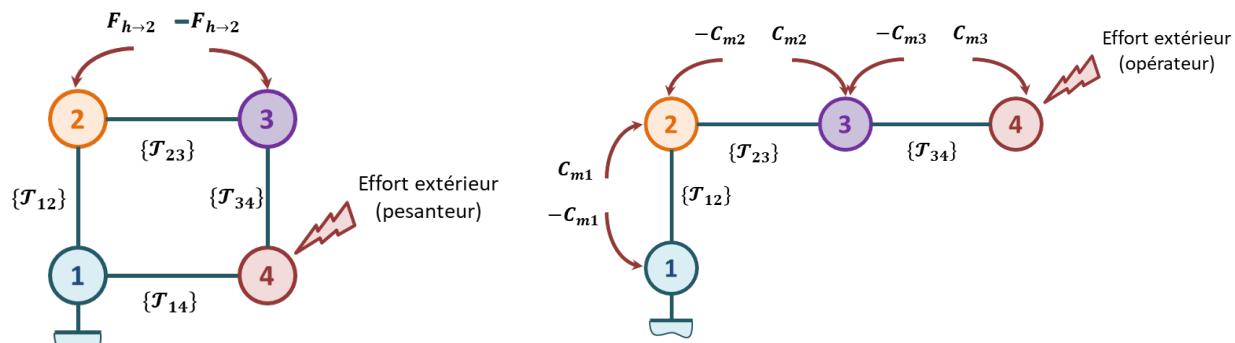
Dans le cas 1, il faut isoler chacune des pièces et réaliser le PFS.

Dans le cas 2, on peut essayer de minimiser le nombre d'equations ´crire. C'est cette stratégie que nous allons présenté.

3 Stratégie d'isolement

3.1 Graphe d'analyse, ou de structure

On rencontre principalement deux types de structures : des chaînes fermées, ou des chaînes ouvertes.



Remarques :

- Entre les pièces (ou les groupes de pièces), on mat  ralise les liaisons (dont vous connaissez super bien les torseurs).
- Entre certaines pièces (ou groupes de pièces), il peut exister des actions mécaniques extérieures qui agissent « en positif » sur une des pièces et « en négatif » sur l'autre. C'est par exemple le cas des moteurs et des vérins. Il faut bien préciser que l'action mécanique agit sur les deux pièces.
- Les actions strictement extérieures (comme la pesanteur) ne sont pas en interactions entre deux pièces.

3.2 Isoler les solides soumis à 2 glisseurs

On commence toujours, toujours, toujours, toujours, toujours par isoler les ensembles soumis à 2 glisseurs. Cela permet de conclure que, d'après le PFS (et le principe des actions réciproques qui en découle) les actions mécaniques agissant sur ce solide ont même direction, même norme et sens opposé. Ce qui supprime des inconnues.

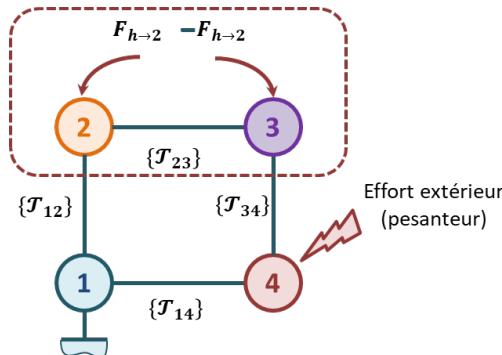
Mais qu'est-ce qu'un glisseur?

Un glisseur est un torseur dont il existe un point tel que le moment est nul. Ainsi, le torseur statique d'une liaison rotule est un glisseur. Le torseur statique d'une liaison pivot n'est pas un glisseur. Lorsque le problème est plan est une liaison pivot à son axe perpendiculaire au plan, c'est un glisseur.

Le torseur cinématique d'une glissière est un glisseur... alors que le torseur statique d'une liaison glissière ne l'est pas...

R

Pour démontrer qu'un torseur est un glisseur, on peut par exemple montrer que son automoent est nul. L'automoent est le produit de la résultante du moment d'un torseur. Il est identique en tout point. C'est un invariant du torseur (comme la résultante).



Dans le cas ci-dessus, si on isole 2, 3 et h (qui pourrait être une action hydraulique). Ainsi, si $\{\mathcal{T}_{12}\}$ et $\{\mathcal{T}_{34}\}$ sont des glisseurs de « centres » respectifs A et B et qu'on note $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$. Alors on a

$$\{\mathcal{T}_{12}\} = -\{\mathcal{T}_{34}\} = \left\{ \begin{array}{c} F \vec{u} \\ 0 \end{array} \right\}_A.$$

Il faut bien comprendre que $\{\mathcal{T}_{12}\}$ et $\{\mathcal{T}_{34}\}$ pouvaient avoir chacun 2 ou 3 inconnues et que maintenant nous avons au total UNE inconnue.

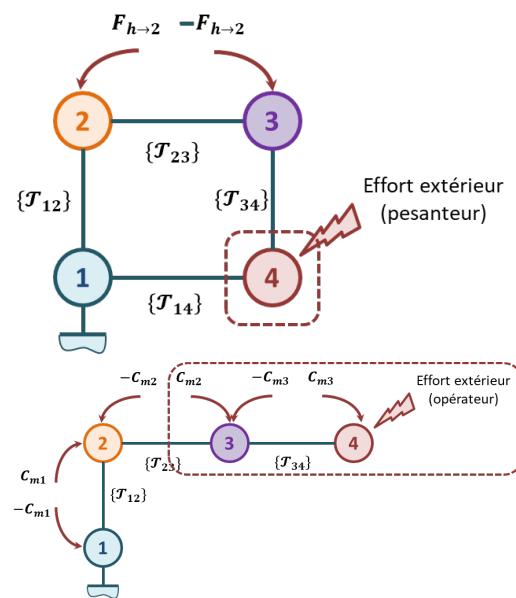
3.3 Isoler les solides soumis à 3 glisseurs ou plus

La stratégie est toujours la suivante :

1. **Isoler la pièce.**
2. **Réaliser le bilan des actions mécaniques, en écrivant les torseurs** et en laissant de la place à gauche de la feuille pour les déplacer.
3. **Citer L'équation du PFS qu'on va utiliser.** Cela peut être le théorème de la résultante statique (TRS) suivant l'axe \vec{u} ou le théorème du moment statique (TMS) au point A en projection sur \vec{u} .
4. **Effectuer la résolution.** (Déplacer les torseurs, appliquer le PFS.)
5. **Réitérer avec un autre isolement.**

3.4 Oui, mais quel est le problème ?

Le problème est de choisir L'équation. Je dirai qu'il faut écrire le théorème qui correspond à la mobilité de la pièce isolée, mais cela a-t-il vraiment un sens? Prenons des exemples...



Si on a isolé 4 et que $\{\mathcal{T}_{14}\}$ est une liaison pivot d'axe (A, \vec{z}), on réalisera un théorème du moment statique en A en projection suivant \vec{z} .

Si on a isolé 4 et que $\{\mathcal{T}_{14}\}$ est une liaison glissière de direction \vec{u} , on réalisera un théorème de la résultante statique en projection suivant \vec{u} .

... **Est-ce que c'est plus clair?**... J'espère...

Si on cherche une relation entre l'effort extérieur et C_{m2} , que la liaison entre 2 et 3 est une liaison pivot d'axe (B, \vec{x}), on isolera **{3 et 4}** et on réalisera un théorème du moment statique en B en projection suivant \vec{x} .

... **Toujours pas clair?**... Si?

3.5 Il y a plus qu'à ...

Petite remarque pour finir : le produit mixte. Lorsqu'on applique un TMS suivant une direction, le produit mixte peut être un bon outil : $\mathcal{M}(B, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z} = (\overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{z} + (\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}) \cdot \vec{z} \dots$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{z} = (\vec{v} \wedge \vec{z}) \cdot \vec{u} = (\vec{z} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} \dots$

Application 01

Exercice d'application

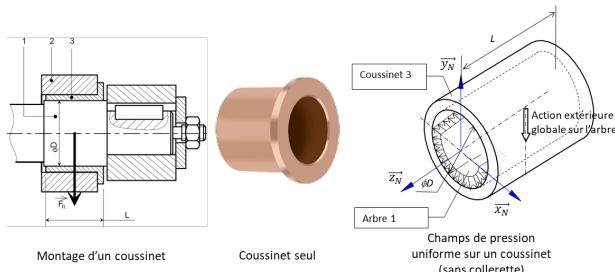
Xavier Pessoles

Savoirs et compétences :

- Mod2.C20 : modélisation locale, actions à distance et de contact.
- Res1.C2.SF1 : proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison.
- Res2.C18 : principe fondamental de la statique.
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

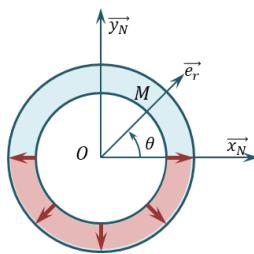
Torseur des actions mécaniques transmis-sibles dans un coussinet

Un coussinet (ou bague) est un ´lement technologique permettant de réaliser des liaisons pivot. Suivant les cas d'utilisation d'un système, un chargement sur l'arbre est transmis au coussinet.



On donne le modèle suivant où le champ de pression de l'arbre sur le coussinet est uniforme pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$

On note $R = \frac{D}{2}$ le rayon du coussinet.



Question 1 D閞miner la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note $R(1 \rightarrow 3)$.

Question 2 D閞miner $\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)z_N$.

On considère maintenant que la pression n'est pas uniforme et vaut au point M $p(M) = p_0 \sin \theta$.

Question 3 Justifier que $R(1 \rightarrow 3)$ n'a une composante que sur \vec{y}_N .

Question 4 D閞miner la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note $R(1 \rightarrow 3)$. On rappelle que $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$.

Eléments de corrigé :

$$\begin{aligned} 1. \quad \overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} &= -LDp \overrightarrow{y_N}. \\ 2. \quad \overrightarrow{\mathcal{M}(O, 1 \rightarrow 3)z_N} &= 0. \\ 3. \quad & \\ 4. \quad \overrightarrow{R(1 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{y_N} &= -\frac{p_0 DL\pi}{4}. \end{aligned}$$

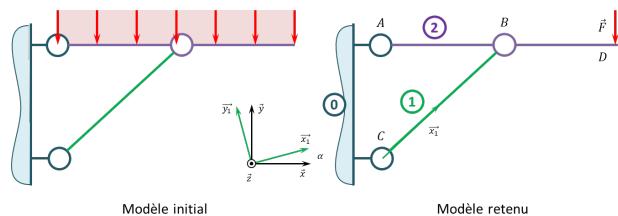
D閞mination des efforts dans une struc-ture étayée

Lors de la démolition d'une partie de la gare de Lyon Part-Dieu (en 2018), des étais ont dû être posés afin de soutenir la structure supérieure.



Dans le but de dimensionner les étais, il est nécessaire de déterminer les actions mécanique dans chacune des liaisons.

Pour cela, on utilise la modélisation suivante.



On a $\overrightarrow{AB} = a \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{BD} = b \overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{CB} = L \overrightarrow{x_1}$.

Question 1 Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).

Question 2 Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

Question 3 D閞miner les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de F.

Eléments de corrigé :

$$3. \quad X_{02} = -F \frac{a+b}{a \tan \alpha}, \quad F_{01} = F \frac{a+b}{a \sin \alpha}, \quad Y_{02} = -\frac{b}{a} F.$$

TD 01

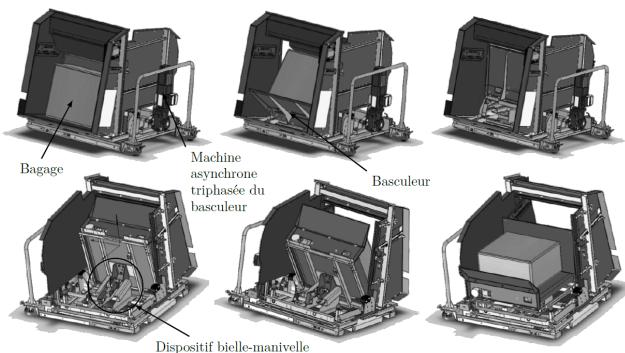

Dépose de bagage automatique dans les aéroports (DBA) *
Concours Centrale Supelec TSI 2018
Savoirs et compétences :

- Res2.C18 : principe fondamental de la statique;
- Res2.C19 : quilibre d'un solide, d'un ensemble de solides;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

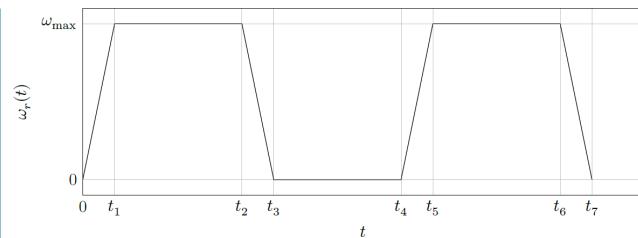
Le processus d'enregistrement des passagers dans les aéroports est en train de vivre une mutation en évoluant de la « banque d'enregistrement » classique vers une idée de « dépose bagages » automatisée. Cette évolution a été justifiée pour fluidifier le trafic passager notamment sur les destinations avec des fréquences très importantes, par exemple certains vols Paris-Province.

Le système DBA est constitué par un basculeur actionné par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone.


Recherche de la vitesse de rotation maximale

Objectif Le bagage et le chariot sont animés par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone triphasée avec un réducteur entraînant la manivelle. L'objectif est de déterminer la vitesse de rotation maximale de la machine asynchrone triphasée actionnant le basculeur en accord avec l'exigence 1.4 (le basculement du bagage doit se faire en 8 s).

Pour dimensionner correctement la machine asynchrone, la première étape est le calcul de la vitesse maximale de l'arbre moteur. On choisit comme loi de mouvement de rotation du moteur une loi en trapèze. On donne ainsi le profil de vitesse de rotation ω_r de l'arbre de sortie du réducteur par rapport au bâti.



Le rapport de réduction entre l'arbre moteur de vitesse de rotation et l'arbre de sortie de réducteur est noté $k = \frac{\omega_r}{\omega_{mot}} = \frac{1}{107,7}$. Compte tenu du temps de basculement du bagage de 8 s, les valeurs des temps sont les suivantes : $t_1 = 0,5$ s, $t_2 = 2,5$ s, $t_3 = 3$ s, $t_4 = 5$ s, $t_5 = 5,5$ s, $t_6 = 7,5$ s, $t_7 = 8$ s. L'arbre de sortie du motoréducteur doit faire un demi-tour entre 0 et t_3 , puis un demi-tour entre t_4 et t_7 .

Question 1 Déterminer ω_{max} en fonction des différents t_i . Faire l'application numérique.

Question 2 En déduire la vitesse de rotation de l'arbre moteur maximale $\omega_{mot\ max}$. Faire l'application numérique et donner le résultat en $tr\cdot min^{-1}$.

Recherche du couple moteur maximal en vue du dimensionnement de la machine asynchrone

Objectif La seconde étape du dimensionnement consiste être rechercher le couple moteur maximal en accord avec l'exigence 1.2 (la masse du bagage pouvant être manœuvré par le système est de 50 kg).

Pour calculer le couple moteur maximal, on se place dans un cas quasi-statique et on néglige tous les effets dynamiques. Compte tenu de la construction du mécanisme (non linéaire), le couple moteur est variable et on le calcule dans une position particulière correspondant au couple maximal.

On note :

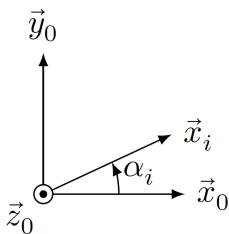
- S_0 le bâti;
- S_1 l'ensemble constitué par le chariot, le bagage et les galets, dont le centre de gravité est noté G et la masse est notée $m = 80$ kg;
- S_2 la bielle DB de direction \vec{x}_2 ;

- S_3 l'arbre de sortie de réducteur et la manivelle $\overrightarrow{ED} = R \vec{x}_3$ avec $R = 86\text{ mm}$.

Le mouvement est considéré comme plan. On néglige toutes les masses sauf celle de l'ensemble S_1 . Toutes les liaisons sont parfaites. Le référentiel lié au solide S_0 est considéré galiléen. On note l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \vec{y}_0$ avec $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Les liaisons entre S_0 et S_1 sont des liaisons sphère-plan de normales (A_1, \vec{x}_{11}) et (A_2, \vec{x}_{12}) . On note I le point d'intersection des normales (A_1, \vec{x}_{11}) et (A_2, \vec{x}_{12}) . On note $\overrightarrow{IB} = L_2 \vec{x}_{12}$ et $\overrightarrow{IG} = x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0$.

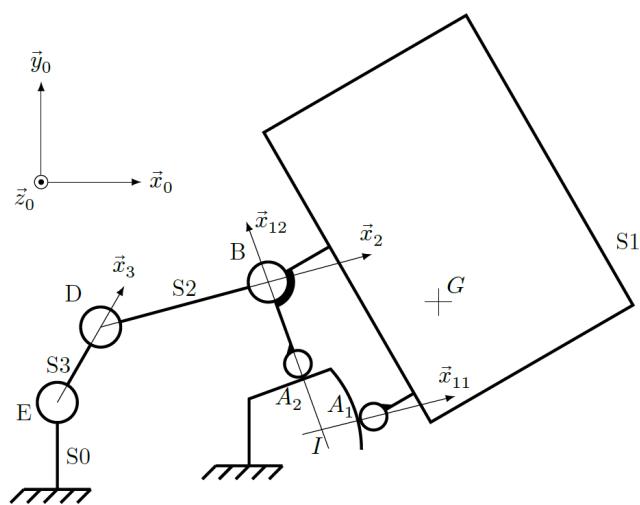
On note les angles α_i formés entre les vecteurs \vec{x}_0 et $\vec{x}_i : \alpha_i = (\vec{x}_0, \vec{x}_i)$ avec $i \in \{2; 3; 11; 12\}$.



La liaison entre S_1 et S_2 est une liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) .

La liaison entre S_2 et S_3 est une liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_0) .

La liaison entre S_0 et S_3 est une liaison pivot d'axe (E, \vec{z}_0) .



Question 3 Déterminer la forme des torseurs $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1$ au point A_1 et $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2$ au point A_2 des actions mécaniques des rampes du bâti S_0 s'appliquant sur le chariot S_1 . Ces torseurs sont-ils des glisseurs?

Question 4 La somme des torseurs $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1$ et $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2$ est-elle un glisseur? Si oui, déterminer un point de son support.

Question 5 Déterminer la forme du torseur $\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\}$ de l'action mécanique de la bielle S_2 sur l'ensemble S_1 au point B . On notera F_B la norme de la résultante de ce torseur.

Question 6 En isolant S_1 , et en ramenant les moments en I , déterminer l'expression de F_B en fonction de la masse m de S_1 , des angles α_i et des constantes du problème.

Question 7 On note C_{red} le couple exercé par l'arbre de sortie de réducteur sur la manivelle S_3 . Montrer que $C_{red} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$.

Dans la configuration choisie, on a $x_G = 506\text{ mm}$, $L_2 = 140\text{ mm}$, $\alpha_3 = 91^\circ$, $\alpha_{12} = 108^\circ$ et $\alpha_2 = 3^\circ$ (on montre par une simulation numérique que cette position conduit au couple maximal).

Question 8 En déduire l'expression du couple C_{red} qu'exerce le réducteur sur la manivelle S_3 en fonction du poids du chariot, des angles α_i et des constantes du problème. Faire l'application numérique.

Question 9 En déduire la valeur numérique C_m du couple qu'exerce l'arbre de la machine asynchrone sur l'arbre d'entrée du réducteur (on supposera le rendement du réducteur égal à 1).

Éléments de corrigé

1. $1,26 \text{ rad s}^{-1}$.
2. 1292 tr min^{-1} .
3. Oui.
4. I .
5. $\left\{ \begin{array}{l} F_B \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_B$.
6. $F_B = \frac{mg x_G}{L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_2)}$.
7. $C_{red} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$.
8. 252 Nm .
9. $2,34 \text{ Nm}$.

TD 01


Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

Savoirs et compétences :

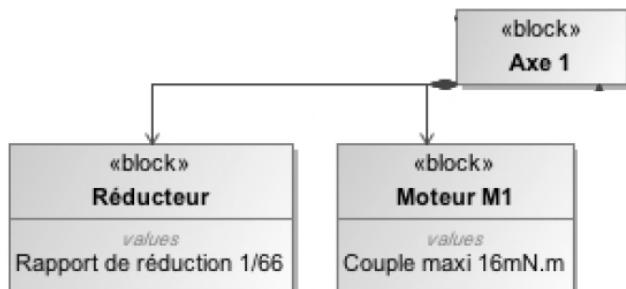
- Res2.C18 : principe fondamental de la statique ;
- Res2.C19 :   quilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

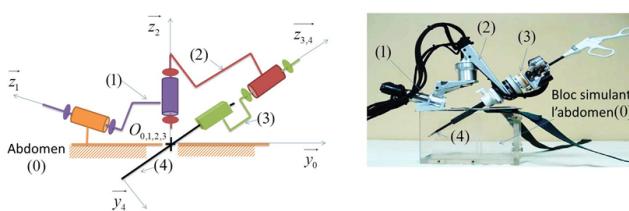
Le robot MC²E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

Objectif Valider par un calcul simplifié de prédimensionnement la motorisation de l'axe 1 du MC²E.

**Validation des performances statiques des motorisations**

On donne ci-dessous le schéma cinématique simplifié du mécanisme.



Dans l'étude envisagée, les trois axes de rotation sont asservis en position angulaire et l'axe de translation de la pince (4) est asservi en effort. On va étudier le maintien en position réalisé par les trois axes de rotation. Dans cette phase, les trois moteurs maintiennent la position du robot le plus précisément possible et ce malgré les perturbations qu'engendrent les actions de pesanteur ainsi

que les réactions dues aux efforts à l'extrémité de la pince (4).

Hypothèses

- tant données la très faible amplitude des mouvements et leur faible évolution dans le temps, une étude quasi statique est suffisante.
- Le point $O_0 = O_{0,1,2,3}$ est supposé fixe.
- Les actions mécaniques entre l'abdomen du patient et la pince (4) en O_0 seront négligées. On considère donc qu'il n'y a pas de liaison et d'action mécanique transmissible associée.
- Les liaisons pivot et la liaison glissière sont toutes supposées parfaites (sans frottement).

Modélisation des actions mécaniques

- Le moteur M1 et son réducteur, mettant en mouvement le solide (1) par rapport à (0), permettent d'exercer en sortie de réducteur un couple sur (1) dont le moment est noté : $\vec{C}_{m01} = C_{m01} \vec{z}_1$.
- De même, on note $\vec{C}_{m12} = C_{m12} \vec{z}_2$ et $\vec{C}_{m23} = C_{m23} \vec{z}_3$ les couples moteurs que (1) exerce sur (2) et (2) exerce sur (3).
- On admettra que le moteur M4 et son réducteur, mettant en mouvement la pince (4) par rapport à (3), permettent d'exercer un glisseur en O_4 de résultante $\vec{F}_{m34} = F_{m34} \vec{z}_3$.
- L'action mécanique qu'exerce l'organe du patient sur la pince (4) est modélisable par un glisseur noté $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow 4} = R_{\text{ext} \rightarrow 4} \vec{z}_4 \\ 0 \end{array} \right\}_{O_4}$ o  u O_4 est le point de contact entre (4) et l'organe du patient.

Démarche globale

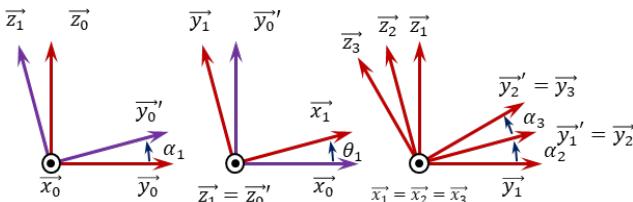
Question 1 Réaliser le graphe d'analyse associé au système étudié.

Question 2 Proposer la démarche (solide(s) isolé(s), théorème(s) utilisé(s)) permettant de déterminer les expressions littérales des couples C_{m01} , C_{m12} , C_{m23} , et de la résultante F_{m34} , lors de la phase de maintien statique. Les calculs ne doivent pas être développés.

Modélisation simplifiée

- On se place dans une configuration particulière telle que $1 \theta_1 = 45^\circ$ et $\theta_2 = \theta_3 = 0^\circ$ ainsi que $O_4 = O$.

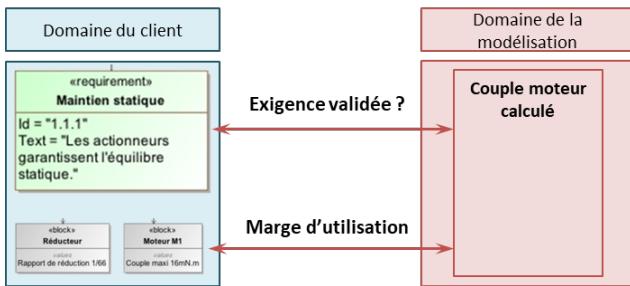
On donne pour cela les figures de calcul simplifiées.
• Le centre d'inertie équivalent de l'ensemble matériel $E = (1+2+3+4)$ est noté G . Pour la configuration étudiée, la position de G est considérée telle que $\overrightarrow{O_0G} = \ell \overrightarrow{z_2}$. La masse totale de cet ensemble est notée $M = 1,3\text{ kg}$. On prend $\ell = 5\text{ cm}$. Le champ de pesanteur est noté $-g \overrightarrow{z_0}$ avec (avec $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$).



Question 3 Déterminer analytiquement en fonction de g , ℓ , M , θ_1 , α_1 et α_2 , l'expression littérale de C_{m01} lors de la phase de maintien statique. Effectuer l'application numérique (avec $\alpha_1 = 70^\circ$ et $\alpha_2 = -70^\circ$).

Retour sur la cahier des charges

Question 4 En utilisant le diagramme de blocs et les résultats précédents, vérifier que l'exigence 1.1.1 peut être satisfaite. Remplir le diagramme suivant.

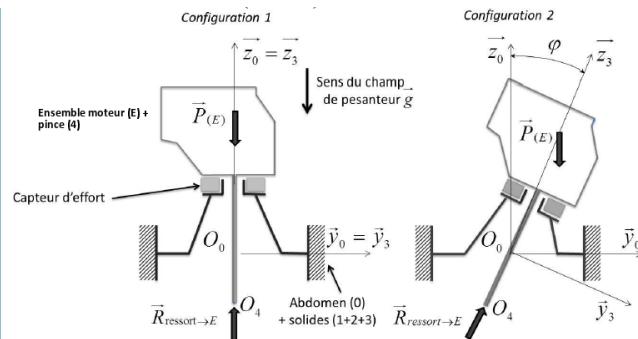


Pour aller plus loin : Validation des performances de l'asservissement d'effort

Lors du retrait de la vésicule, il est nécessaire de maintenir un effort constant en bout de pince (4). Pour cela, on réalise un asservissement d'effort de l'axe en translation.

Objectif Valider le positionnement du capteur d'effort et justifier la nécessité de faire une compensation de pesanteur.

L'ensemble (E) contient ici la totalité de la transmission d'effort de la pince (4), moteur M4 compris. Dans cette partie, on simplifiera le modèle de contact entre abdomen et pince en retenant une liaison libre. Pour deux configurations géométriques distinctes, le montage du capteur d'effort peut être modélisé par les schémas cinématiques simplifiés ci-dessous.



Un ressort simulant la vésicule biliaire (raideur du ressort similaire à la raideur de la vésicule) est installé en bout de pince.

Hypothèses

- Le problème est plan.
- Étant données les faibles vitesses et accélérations envisagées, une étude quasi-statique est suffisante.
- Les actions mécaniques de pesanteur sur (E) ne peuvent pas être négligées face aux actions mécaniques mises en jeu lors d'une opération. On notera leur résultante $\overrightarrow{P}_{(E)}$.
- Le capteur d'effort assure la liaison entre l'ensemble (0+1+2+3) et (E). Le capteur sera donc toujours en contact avec ces deux ensembles.

Modélisation des actions mécaniques

- L'action mécanique qu'exerce le ressort sur l'ensemble (E) est modélisée par un glisseur noté $\{\mathcal{T}(\text{Ressort} \rightarrow E)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(\text{Ressort} \rightarrow E)}}{0} \right\}_{O_4}$ où O_4 est le point de contact entre la pince (4) et le ressort.
- L'action mécanique, mesurée par le capteur, liée à sa liaison avec l'ensemble (E), est modélisée par $\{\mathcal{T}(\text{Capteur} \rightarrow E)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(\text{Capteur} \rightarrow E)}}{\mathcal{M}(O_4, \text{Capteur} \rightarrow E)} \right\}_{O_4}$. La résultante sera notée $\overrightarrow{R(\text{Capteur} \rightarrow E)} = F_z \overrightarrow{z_3} + F_y \overrightarrow{y_3}$. Seules ces deux composantes seront prises en compte par la suite.

Pour que la résultante de l'action mécanique mesurée par le capteur soit égale à la résultante de l'action mécanique que génère le ressort sur (E), il faut compenser la résultante de l'action mécanique de pesanteur.

Question 5 Pour la configuration 1 et par la méthode de votre choix, définir l'expression de F_z et F_y en fonction des autres actions mécaniques utiles. Commenter le résultat obtenu et la capacité du capteur à mesurer seulement les actions mécaniques générées par la pince sur le ressort.

La compensation de pesanteur revient à faire prendre en compte par le calculateur, en temps réel, la valeur des actions mécaniques de pesanteur quelle que soit la configuration géométrique du MC²E. On pourra alors connaître, à partir de la mesure du capteur d'effort, l'action mécanique exercée par la pince (4) sur le ressort.

Pour comprendre le traitement de l'information que devra faire le calculateur on propose une deuxième configuration géométrique (configuration 2) du MC²E.

Question 6 Dans la configuration 2, définir l'expression de F_x et F_y en fonction des autres actions mécaniques utiles. Pour réaliser la compensation, quels sont les paramètres à connaître en temps réel ?

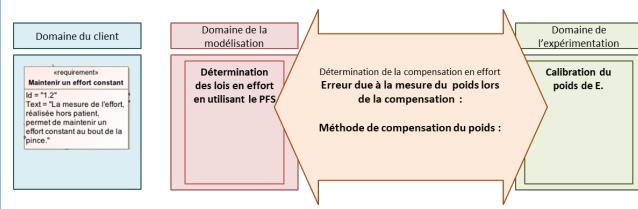
Retour sur le cahier des charges

Le montage d'essai suivant a été mis en place. La seconde configuration a été réalisée avec un angle φ de 20° . Cet essai, réalisé sans interaction entre le ressort et la pince (4), a permis d'obtenir les valeurs expérimentales suivantes mesurées par le capteur.

Configuration 1	Configuration 2		
$ F_{y0} $	$ F_{z0} $	$ F_{y20} $	$ F_{z20} $
0,0222 N	12,753 N	4,382 N	11,999 N

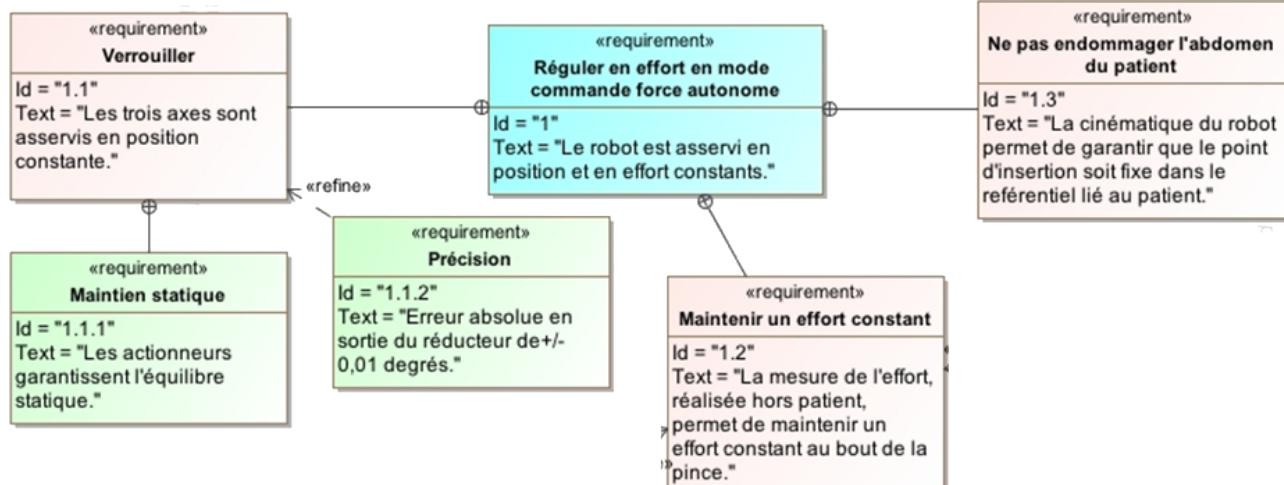
Question 7 Estimer la valeur du poids. Donner une estimation de la fiabilité sur la détermination du poids

par les capteurs d'efforts. Pour réaliser la compensation de pesanteur, comment doivent être utilisées ces grandeurs mesurées ?



Corrigé résumé

- 1.
- 2.
3. $C_m = -M g \ell \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \theta_1 = 0,4 \text{ Nm}$.
- 4.



TD 01



WHING : WHeelchair Initiative New Generation *

Concours CCP TSI 2017

Savoirs et compétences :

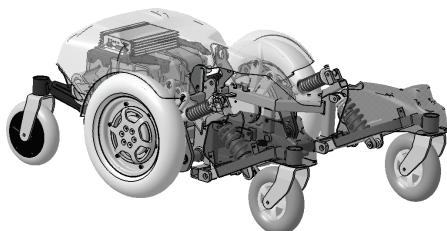
- Res2.C18 : principe fondamental de la statique ;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

Le projet WHING a pour objet d'imaginer et de réaliser et proposer aux utilisateurs un fauteuil verticaliseur à déplacement motorisé de nouvelle génération avec, comme objectifs associés :

- d'intégrer de nouvelles technologies ;
- de mieux prendre en compte les besoins spécifiques des utilisateurs,
- d'utiliser une conception modulaire.

Le fauteuil est équipé d'une base roulante à six roues indépendantes. Les roues centrales motrices autorisent un faible moyen de giration. La base roulante, forte de ses 6 roues indépendantes et amorties assure la stabilité et motricité du fauteuil, quel que soit le profil du terrain rencontré.



Objectif L'exigence Id = « 1.4.5 » indique que le fauteuil doit être capable de gravir une pente pour monter dans un véhicule de transport. La pente maximale est de 15°. Les caractéristiques du moteur-roue sont données ci-dessous.

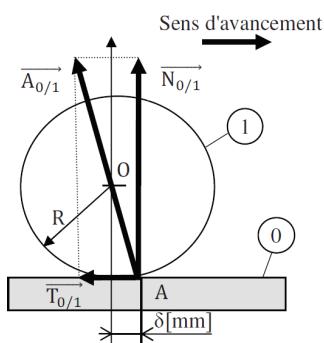
«block» Moteur roue	
valeurs	
Couple maximal = 100 N.m	
Couple nominal = 24 N.m	
Courant maximal = 80 A	
Courant nominal = 25 A	
Diamètre = 340 mm	
Niveau sonore = 50 dB	
Puissance nominale = 400 W	
Rapport du réducteur = 8.78	
Tension nominale = 24 V DC	
Type = MCC	

↑2

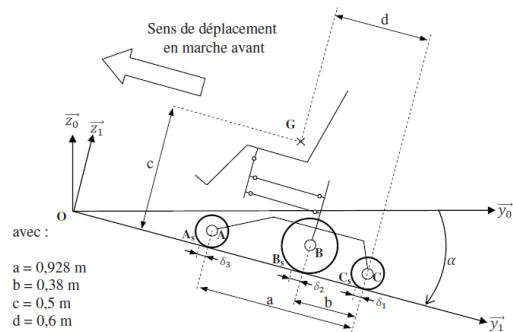
Pour valider cette exigence, le cadre de l'étude est le suivant. Les hypothèses d'étude sont :

- le référentiel $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au sol est supposé galiléen ;
- le WHING se déplace en ligne droite dans une phase de montée, le problème est considéré comme un problème plan. Les effets dynamiques sont négligés car la vitesse de déplacement du fauteuil est faible ;
- le référentiel $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au WHING avec $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$;
- $\vec{P} = -mg\vec{z}_0$ est l'action de la pesanteur et G le centre de gravité de l'ensemble {fauteuil + PMR} ;
- le modèle adopté est équivalent à un seul moteur fournissant un couple C_m avec l'action de la pesanteur ramenée au centre de gravité égale à $\frac{P}{2}$;
- le contact des roues avec le sol se fait avec frottement, on note f le facteur de frottement de valeur 0,45 ;
- la résistance au roulement modélise la déformation du pneumatique.

La résistance au roulement illustrée à la figure suivante, se traduit par un décalage du point d'application de l'action mécanique de contact vers l'avant du fauteuil (dans le sens de l'avancement). La résultante des forces passe en un point A à une distance δ de l'axe de rotation. Cette distance est par définition le coefficient de résistance au roulement.



La figure suivante donne le paramétrage de l'étude en phase de montée d'une pente et les dimensions du WHING. Les points A_S , B_S et C_S correspondent aux points d'application des actions mécaniques du sol sur les roues avant, motrices et arrière du fauteuil.



Diamètre roue arrière	D1 = 0,180 m
Diamètre moteur-roue	D2 = 0,336 m
Diamètre roue avant	D3 = 0,200 m
Masse (fauteuil : 167 kg et PMR : 120 kg)	m = 287 kg
Pente du sol	$\alpha = 15^\circ$ attention α est négatif sur la figure 13
Coefficient résistance au roulement d'une roue arrière	$\delta_1 = 0,001 \text{ m}$
Coefficient résistance au roulement d'une roue motrice	$\delta_2 = 0,004 \text{ m}$
Coefficient résistance au roulement d'une roue avant	$\delta_3 = 0,002 \text{ m}$
Rapport de réduction du moteur-roue	i = 8,78
Rendement du réducteur	$\eta = 0,9$

Travail demandé

Question 1 Porter sur la figure suivante :

- l'action de la pesanteur;
- les actions de contact du sol sur les roues. Pour un point A, la composante normale sera notée \vec{N}_A et la composante tangentielle \vec{T}_A . Le sens d'une composante tangentielle est différent si la roue est motrice ou folle;

- le couple $\overrightarrow{C_{red}}$, couple à la sortie du réducteur du moteur-roue.

Question 2 Appliquer le principe fondamental de la statique à l'ensemble WHING + PMR isolé et écrire les 3 équations dans la base \mathcal{R}_1 en fonction des données littérales. L'équation de moment sera exprimée au point B_S .

Question 3 Isoler la roue arrière puis la roue avant et déterminer une équation issue du principe fondamental de statique donnant la composante normale de l'action du sol sur la roue, en fonction des paramètres géométriques et de la composante tangentielle.

Question 4 Isoler la roue motrice et déterminer une équation issue du PFS donnant $\overrightarrow{C_{red}}$ en fonction des données géométriques, de \vec{N}_{BS} et \vec{T}_{BS} .

En supposant que le contact du sol sur la roue motrice se fait à la limite du glissement, on obtient un système de 7 équations à 7 inconnues.

La résolution de ce système donne les résultats suivants : $\vec{N}_{BS} \cdot \vec{z}_1 = 1140 \text{ N}$ et $\vec{T}_{BS} \cdot \vec{y}_1 = -350 \text{ N}$.

Question 5 Justifier que la composante $\vec{T}_{BS} \cdot \vec{y}_1$ est négative. À partir des valeurs de $\|\vec{T}_{BS}\|$ et $\|\vec{N}_{BS}\|$, déterminer la valeur de $\|\overrightarrow{C_m}\|$ et conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

TD 02

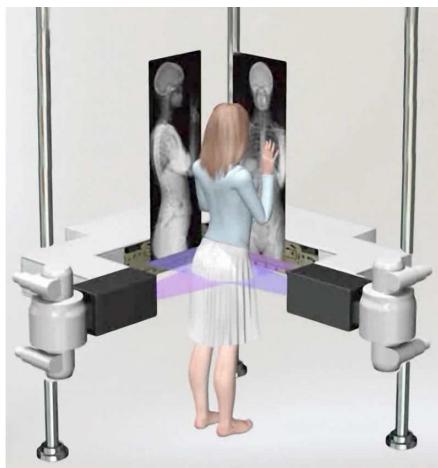


Système EOS *

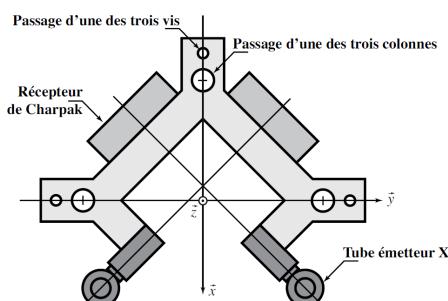
Banque PT SIA - 2016

Savoirs et compétences :**Mise en situation**

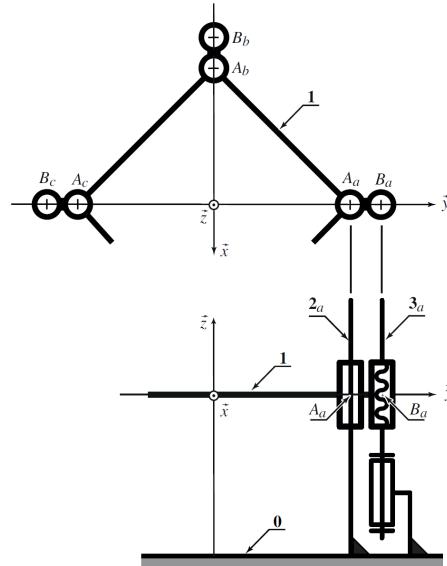
Le système EOS permet l'acquisition simultanée de radiographies de face et de profil du corps entier (ou d'une zone anatomique localisée) avec une réduction de la dose de rayons X de l'ordre de 90 % par rapport à un système radiographique conventionnel ou un scanner.



Le mécanisme interne, constitué d'un bras mobile, guidé par rapport au bâti par trois colonnes verticales. Le bras supporte deux chaînes d'acquisition, chacune d'entre elles étant composée d'un tube à rayons X et d'un d閑teur.

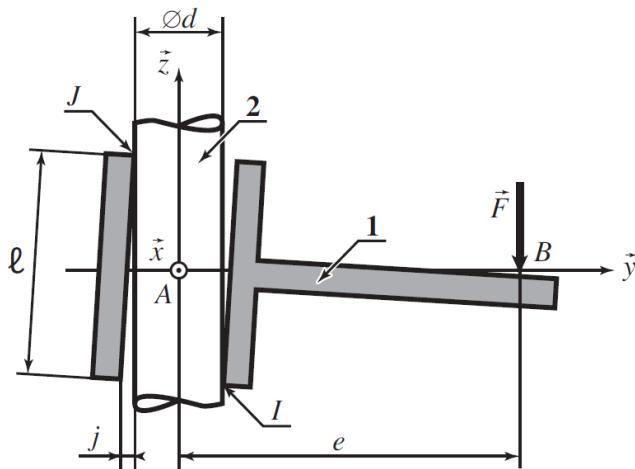


La figure suivante représente le bras mobile en vue de dessus, ce qui permet de voir les passages des colonnes et des vis. Le modèle cinématique permettant d'appréhender le fonctionnement interne.



On s'intéresse plus précisément à une des trois chaînes réalisant la liaison entre le bras mobile 1 et le bâti 0. Cette liaison est principalement réalisée par le biais d'une colonne 2, qui est en liaison complète avec 0. Un schéma de principe est représenté sur la figure suivante. La colonne est de diamètre d , l'alésage du bras de diamètre $d + j$ et de longueur ℓ . On suppose que le jeu j , bien que négligeable devant d ($j \ll d$), permet un léger basculement du bras par rapport à la colonne, ce qui conduit à considérer cet assemblage comme l'association en parallèle de deux liaisons sphère-plan, en I et J . Le contact est modélisé en utilisant la modèle de Coulomb et on note f le coefficient de frottement. Le bras 1 est soumis à une action mécanique motrice (issue de la liaison hélicoïdale) modélisée par un glisseur en B noté $F = -F_z$ ($F > 0$) dont l'axe central est distant de e de l'axe de la liaison. On se propose d'étudier le risque d'arcoulement de cette liaison, supposée plane, en négligeant les actions de la pesanteur.

Objectif D閠erminez les conditions de non arcoulement du guidage du système EOS.



Travail à réaliser

Question 1 En introduisant $F_I = Y_I \vec{y} + Z_I \vec{z}$ et $F_J = Y_J \vec{y} + Z_J \vec{z}$, les glisseurs en I et J qui résultent des actions mécaniques exercées par la colonne 2 sur le bras 1, écrire les trois équations scalaires traduisant l'équilibre du bras.

Question 2 En supposant que $F > 0$, comme précisé ci-dessus, donner les signes des composantes Y_I , Z_I , Y_J et Z_J puis écrire, en utilisant le modèle de Coulomb, les inéquations qui lient ces composantes.

Question 3 En supposant qu'on est à la limite du glissement au niveau d'un des contacts, donner la condition nécessaire entre ℓ , f et e pour qu'il n'y ait pas d'arcoulement dans la liaison.

ment dans la liaison.

Conclusion vis-à-vis de l'objectif

Question 4 Vérifier que la condition de non arcoulement est satisfaite sur le système EOS pour lequel les grandeurs caractéristiques fournies ci-dessous ?

Grandeur	Notation	Unités	Valeur numérique
Diamètre des colonnes de guidage	d	cm	10
Diamètre des vis de guidage	d'	cm	5
Hauteur totale des colonnes	H	cm	200
Limite de course du bras	h0	cm	10
Longueur de guidage des colonnes	ℓ	cm	20
Coefficient de frottement colonne/bras	f	-	0,2
Excentration guidage en translation	e	cm	20

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \begin{cases} Y_I + Y_J = 0 \\ Z_I + Z_J - F = 0 \\ -Y_J \frac{\ell}{2} - Z_J \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - Z_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \end{cases} \\
 2. . \\
 3. \quad & \frac{\ell}{2e} \leq f \\
 4. .
 \end{aligned}$$