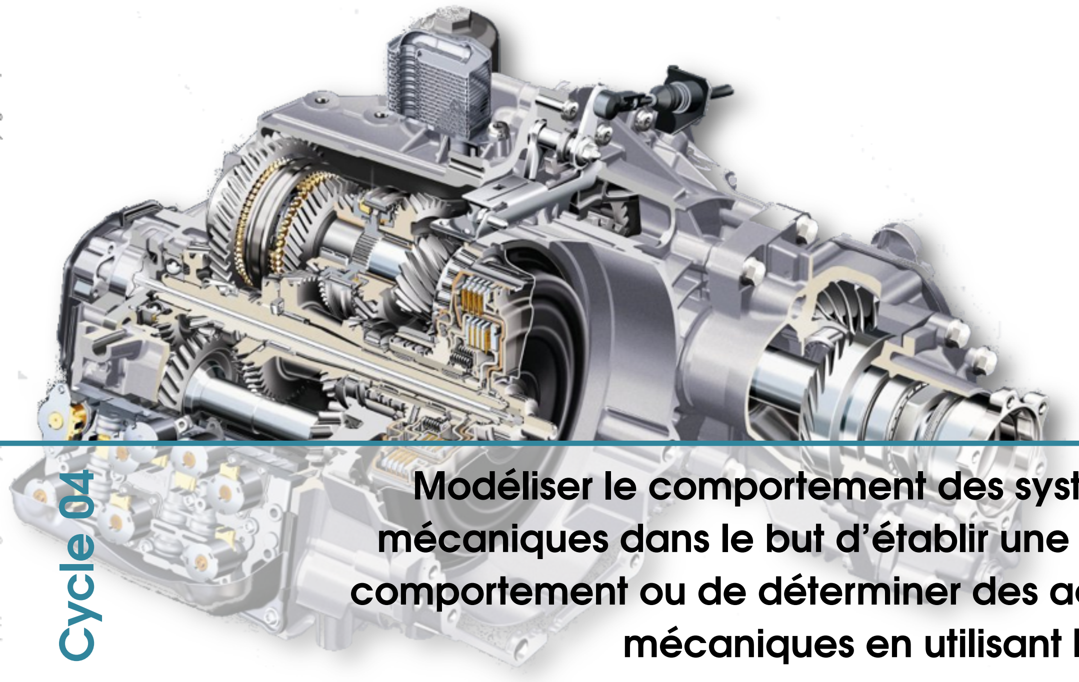


PSI⋆ – MP

Cycle 04

Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

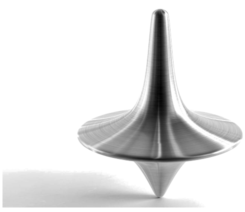
Cours

Chapitre 2

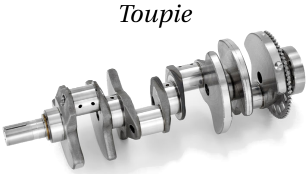
Caractéristation inertielle des solides

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- ❒ *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- ❒ *Mod2.C15 : matrice d'inertie*



Toupie



Volants d'inertie d'un vilebrequin

Xavier Pessoles
PSI⋆ – MP

1 Masse et centre de masse (centre d'inertie)

1.1 Masse d'un solide indéformable

Définition On peut définir la masse totale d'un solide S par : $M = \int_{P\in S} \mathrm{d}m$. Si de plus l'ensemble est fait d'un matériau homogène de masse volumique μ, on a $M = \mu \int_{P\in S} \mathrm{d}V$.

1.2 Centre d'inertie d'un solide

Définition La position du centre d'inertie G d'un solide S est définie par $\int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\mathrm{d}m = \overrightarrow{0}$.

Pour déterminer la position du centre d'inertie d'un solide S, on passe généralement par l'origine du repère associé à S. On a alors $\int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\mathrm{d}m = \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OP}\right)\mathrm{d}m = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \int_{P\in S} \overrightarrow{OG}\,\mathrm{d}m = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}m \Leftrightarrow M\overrightarrow{OG} = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}m$.

Méthode Pour déterminer les coordonnées (x_G, y_G, z_G) du centre d'inertie G du solide S dans la base $\left(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$, on a donc :

$$\begin{cases} M x_G = \mu \int_{P\in S} x_P \,\mathrm{d}V \\ M y_G = \mu \int_{P\in S} y_P \,\mathrm{d}V \\ M z_G = \mu \int_{P\in S} z_P \,\mathrm{d}V \end{cases} \quad \text{avec } \mathrm{d}V \text{ volume élémentaire du solide } S.$$

Pour simplifier les calculs, on peut noter que le centre d'inertie appartient au(x) éventuel(s) plan(s) de symétrie du solide.

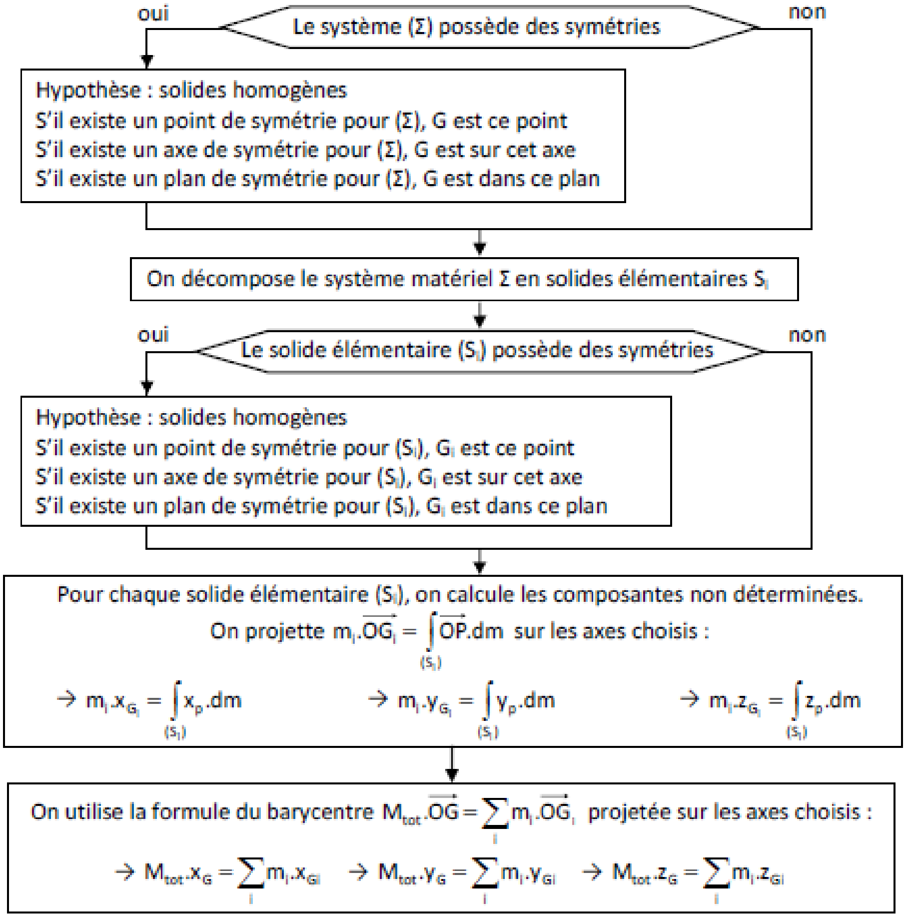
R Centre d'inertie et centre de gravité sont confondus lorsque le champ de pesanteur est considéré comme uniforme en tout point de l'espace.

1.3 Centre d'inertie d'un ensemble de solides encastrés entre eux

Méthode Soit un solide composé de n solides élémentaires dont la position des centres d'inertie G_i et les masses M_i sont connues. On note $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$. La position du centre d'inertie G de l'ensemble S est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} M_i \overrightarrow{OG_i}.$$

1.4 Méthode pour déterminer le centre d'inertie d'un solide (2)



2 Matrice d'inertie d'un solide

2.1 Opérateur et matrice d'inertie

Définition Soient :

- un solide S de masse m en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}_0 = \left(O_0; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$;
- $\mathscr{R}_S = \left(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ le repère lié au solide S ;
- P un point de S tel que $\overrightarrow{OP} = x_p\,\overrightarrow{x} + y_p\,\overrightarrow{y} + z_p\,\overrightarrow{z}$;
- $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire du solide S.

On appelle opérateur d'inertie l'application linéaire définie par :

$$\overrightarrow{u} \rightarrow \overrightarrow{J_{(O,S)}\left(\overrightarrow{u}\right)} = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \mathrm{d}m$$

On appelle matrice d'inertie du solide S en O, $I_O(S)$, l'image de cette application linéaire : $\overrightarrow{J_{(O,S)}\left(\overrightarrow{u}\right)} = I_O(S)\,\overrightarrow{u}$.

Définition — Matrice d'inertie. La matrice d'inertie s'écrit ainsi :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} \int_S \left(y_p^2 + z_p^2\right) \mathrm{d}m & -\int_S \left(x_p y_p\right) \mathrm{d}m & -\int_S \left(x_p z_p\right) \mathrm{d}m \\ -\int_S \left(x_p y_p\right) \mathrm{d}m & \int_S \left(x_p^2 + z_p^2\right) \mathrm{d}m & -\int_S \left(y_p z_p\right) \mathrm{d}m \\ -\int_S \left(x_p z_p\right) \mathrm{d}m & -\int_S \left(y_p z_p\right) \mathrm{d}m & \int_S \left(x_p^2 + y_p^2\right) \mathrm{d}m \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_S}.$$

On appelle moments d'inertie par rapport aux axes $\left(O, \overrightarrow{x}\right)$, $\left(O, \overrightarrow{y}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{z}\right)$ les termes A, B et C.

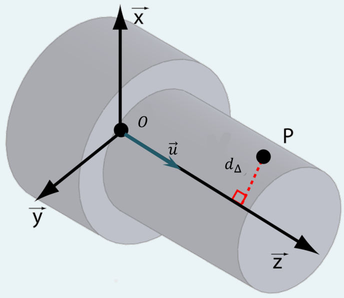
On appelle produit d'inerties par rapport aux axes $\left(O, \overrightarrow{y}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{\overrightarrow{z}}\right)$, $\left(O, \overrightarrow{x}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{z}\right)$, $\left(O, \overrightarrow{x}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{y}\right)$ les termes D, E et F.

Propriété

- La matrice d'inertie est une matrice symétrique. Il existe une base dans laquelle elle est diagonalisable. Cette base est appelée base principale d'inertie.
- Si $\left(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)$ est un plan de symétrie du solide, D et E sont nuls.
- Si $\left(O,\overrightarrow{z},\overrightarrow{x}\right)$ est un plan de symétrie du solide, D et F sont nuls.
- Si $\left(O,\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ est un plan de symétrie du solide, E et F sont nuls.
- Si un solide admet 2 plans de symétrie, alors D, E et F sont nuls.

Définition — Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque.

Le moment d'inertie caractérise la répartition de masse d'un solide autour d'un axe $\Delta\left(O,\overrightarrow{u}\right)$. Plus la valeur de l'inertie est grande plus il sera difficile de mettre en mouvement de rotation ce solide autour de l'axe Δ. On note $I_\Delta(S)$, le moment d'inertie du solide S autour de l'axe Δ. Son unité est en kg.m^2. On a alors :



$$I_\Delta(S)=\int_S d_\Delta^2\,\mathrm{d}m \quad \text{où } d_\Delta \text{ est la distance entre le point courant } P \text{ et l'axe } \Delta.$$

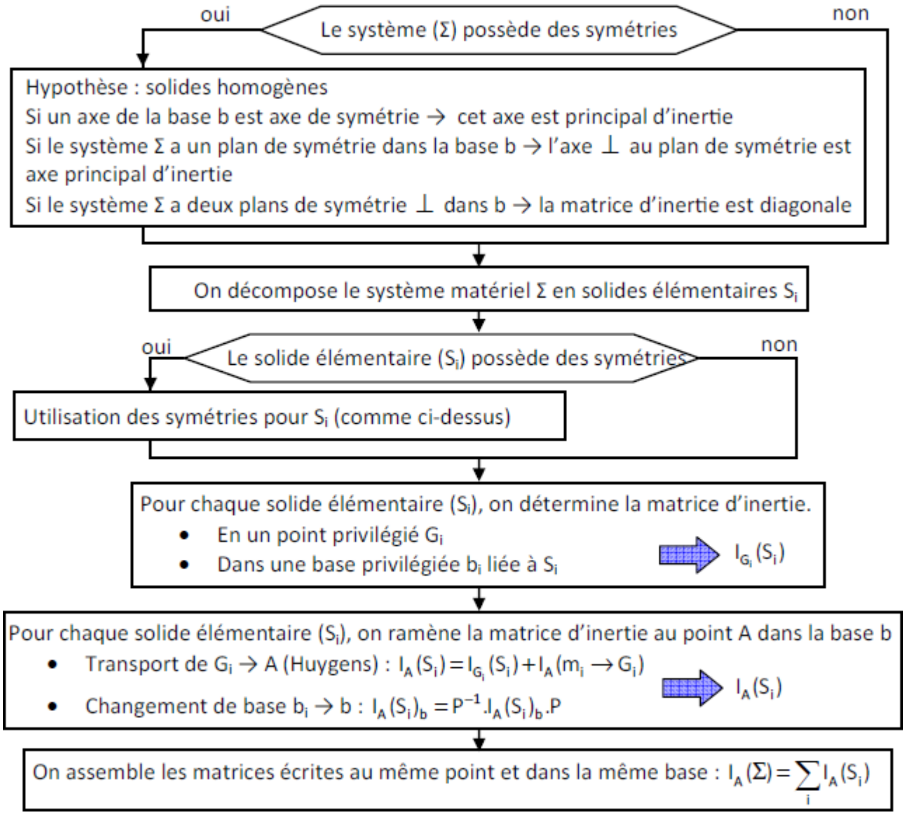
(R) Si on connaît $I_O(S)$, alors $I_\Delta(S)=\overrightarrow{u}\,I_O(S)\,\overrightarrow{u}$.

2.2 Déplacement d'une matrice d'inertie – Théorème de Huygens

Théorème — Théorème de Huygens. Soit S un solide de centre d'inertie G, de masse m, d'inertie $I_G(S)$ et d'inertie $I_O(S)$ avec $\overrightarrow{OG}=a\overrightarrow{x}+b\overrightarrow{y}+c\overrightarrow{z}$. Les matrices $I_G(S)$ et $I_O(S)$ exprimées dans la base $\mathcal{B}=\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ sont liées par :

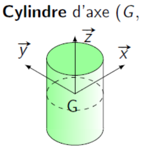
$$\begin{pmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} m\left(b^2+c^2\right) & -mab & -mac \\ -mab & m\left(a^2+c^2\right) & -mbc \\ -mac & -mbc & m\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

2.3 Détermination de la matrice d'inertie d'un solide (2)



2.4 Matrice d'inertie de solides usuels (3)

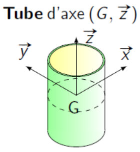
Cylindre d'axe $(G, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} m\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$

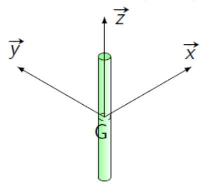
Tube d'axe $(G, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H (épaisseur négligeable)



$$\begin{pmatrix} m\cdot\left(\frac{R^2}{2}+\frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\left(\frac{R^2}{2}+\frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

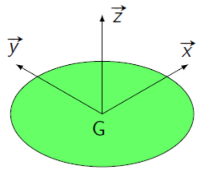
Tige cylindrique $(G, \vec{z})$ de rayon négligeable



$$\begin{pmatrix} m\cdot\frac{H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\frac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

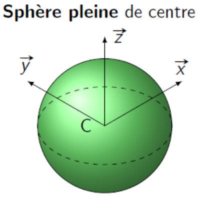
Disque d'axe $(G, \vec{z})$ d'épaisseur négligeable



$$\begin{pmatrix} m\cdot\frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

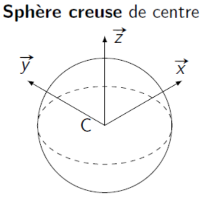
Sphère pleine de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}m\cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}m\cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{C\,\forall\mathcal{B}}$$

En C centre de la sphère et dans toute base

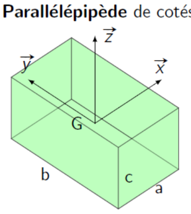
Sphère creuse de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}m\cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}m\cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{C\,\forall\mathcal{B}}$$

En C centre de la sphère et dans toute base

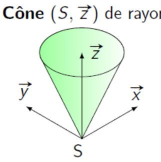
Parallélépipède de cotés a, b et c



$$\begin{pmatrix} m\cdot\frac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\frac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot\frac{a^2+b^2}{12} \end{pmatrix}_{G\,\mathcal{B}}$$

en G dans la base $\mathcal{B}$ parallèle aux arêtes du parallélépipède

Cône $(S, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} \frac{3\cdot m}{5}\cdot\left(\frac{R^2}{4}+H^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\cdot m}{5}\cdot\left(\frac{R^2}{4}+H^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\cdot m}{5}\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{S\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

au sommet S dans toute base contenant $\vec{z}$.

Références

[1] Emilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.*

[2] Florestan Mathurin, *Correction des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse,* http://florestan.mathurin.free.fr/.

[3] Robert Papanicola, *Opérateurs d'inetie, Lycée Charlemagne, Paris,* http://sciences-indus-cpge.papanicola.info/.