

## Activation 1

### Activation 1

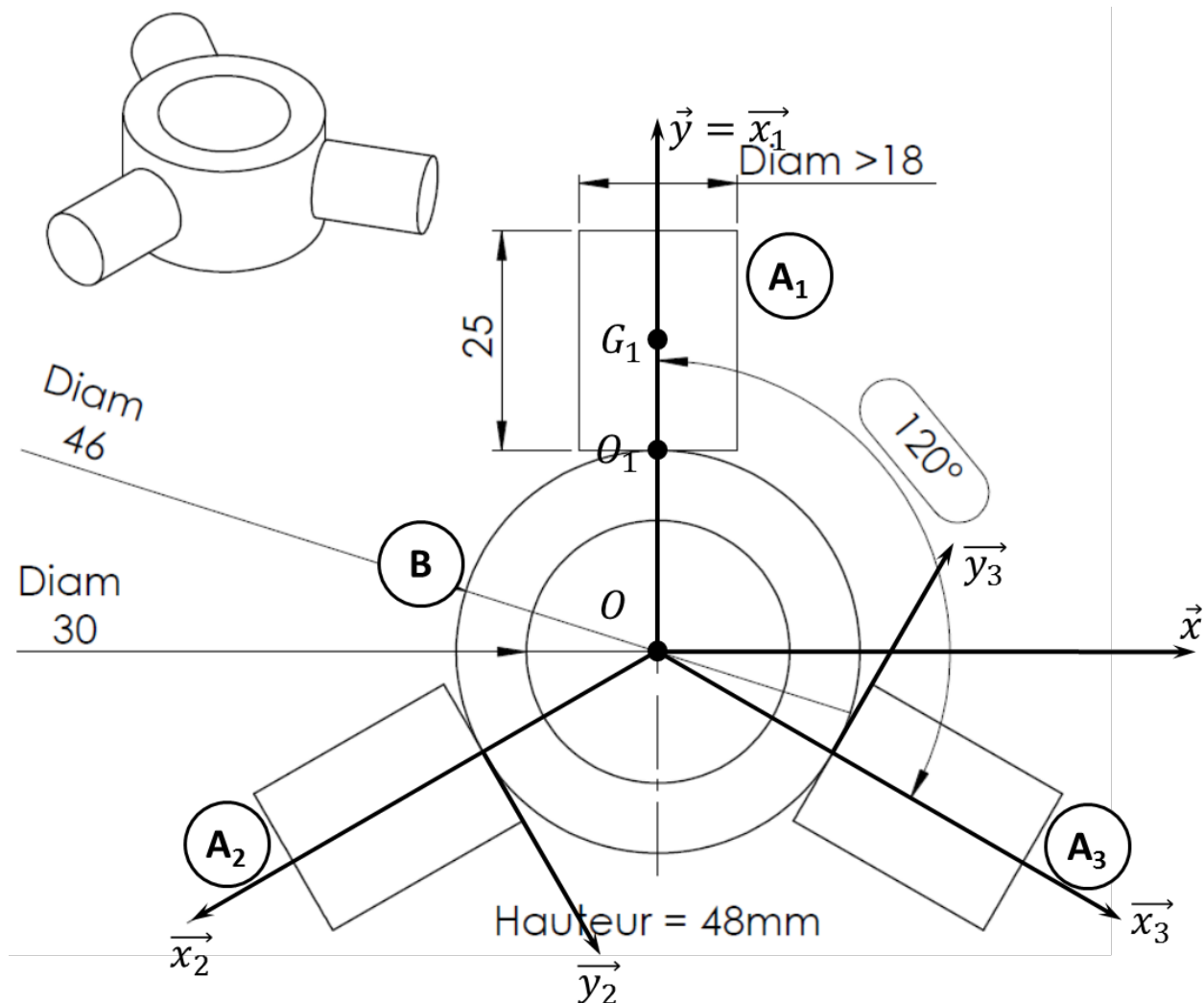
X. Pessoles

#### Savoirs et compétences :

- ☐ Mod2.C13 : centre d'inertie
- ☐ Mod2.C14 : opérateur d'inertie
- ☐ Mod2.C15 : matrice d'inertie

### Triaxe

On donne le plan d'un triaxe constitué des 3 axes  $A_1, A_2, A_3$  et du moyeu central noté  $M$ . On note  $T$  l'ensemble.



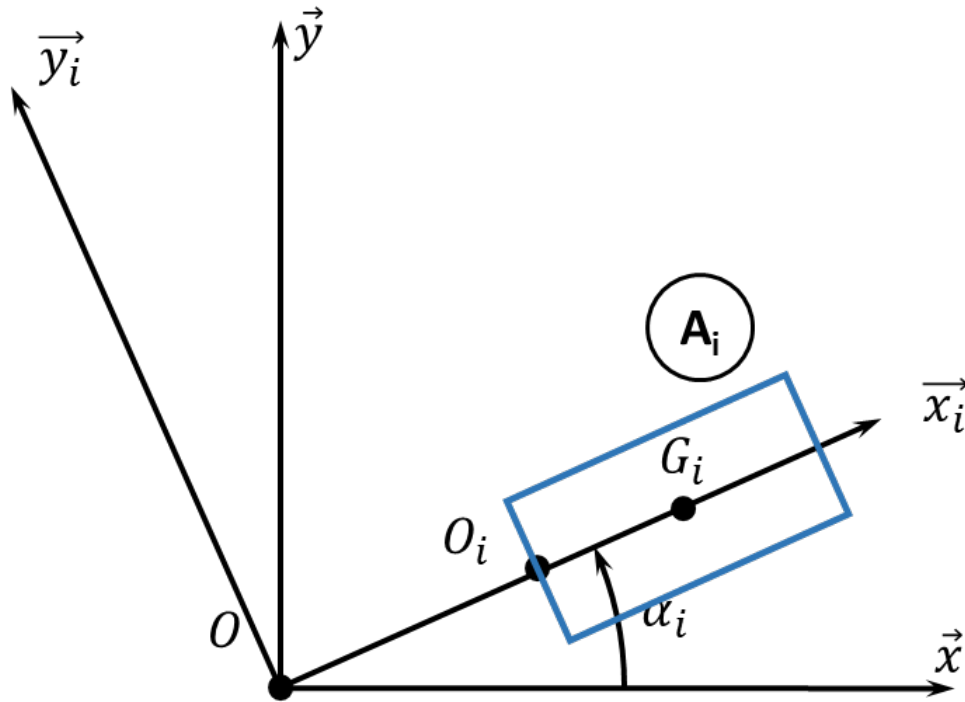
On note :

- $\vec{z}$  l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On se place ci-dessus dans le plan de symétrie  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ ;
- $\mathcal{R}_i$  le repère  $(O_i; \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  et  $\mathcal{B}_i$  la base associée.

**TOUS LES CALCULS SE FERONT DE MANIÈRE LITTÉRALE!**

- $D_1 = 18 \text{ mm}$  et  $H_1 = 25 \text{ mm}$ .
- $D = 46 \text{ mm}$ ,  $D' = 30 \text{ mm}$  et  $H = 48 \text{ mm}$ .

- $\alpha_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1) = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = (\vec{x}, \vec{x}_2) = -150^\circ$  et  $\alpha_3 = (\vec{x}, \vec{x}_3) = -30^\circ$ .  
On donne ci-dessous le paramétrage d'un axe  $A_i$ .



**Question 1** Déterminer (sans calcul) la position du centre de gravité du triaxe.

**Correction**

Le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  est plan de symétrie du triaxe; donc  $\vec{OG} \cdot \vec{z} = 0$   
 Le plan  $(O, \vec{y}, \vec{z})$  est plan de symétrie du triaxe; donc  $\vec{OG} \cdot \vec{x} = 0$   
 Reste la coordonnée selon  $\vec{y}$ .  
 Les plans  $(O, \vec{z}, \vec{x}_2)$  et  $(O, \vec{z}, \vec{x}_3)$  étant plans de symétrie, on a  $\vec{OG} \cdot \vec{y}_2 = 0$  et  $\vec{OG} \cdot \vec{y}_3 = 0$ . Or  $\vec{OG} = y_g \vec{y} = y_g \cos \alpha_2 \vec{y}_2 - y_g \sin \alpha_2 \vec{x}_2$ . Il en résulte que  $y_g \cos \alpha_2 = 0$  et donc nécessairement  $y_g = 0$  car  $\alpha_2 \neq 0$ .

**Question 2** Déterminer analytiquement la position du centre de gravité  $G_i$  du solide  $A_1$  dans le repère  $\mathcal{R}_i$ .

**Correction** On pourrait répondre directement en disant que le solide à 3 plans de symétrie orthogonaux entre eux. En utilisant la définition on a :

- $M_1 = \mu H_1 \pi \frac{D_1^2}{4}$ ;
- en coordonnées cylindriques,  $\vec{O_1P} = x \vec{x}_1 + \rho \cos \theta \vec{y}_1 + \rho \sin \theta \vec{z}_1$  et  $dV = \rho d\rho d\theta dx$  avec  $x \in [0, H_1]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\rho \in [0, D_1/2]$ ;
- $m_1 x_{G_1} = \mu \iiint x_P dV = \mu \iiint x \rho d\rho d\theta dx = \mu \frac{H_1^2}{2} 2\pi \frac{D_1^2}{8}$ ;
- $m_1 y_{G_1} = \mu \iiint y_P dV = \mu \iiint \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta dx = 0$ ;
- $m_1 z_{G_1} = \mu \iiint z_P dV = \mu \iiint \rho \sin \theta \rho d\rho d\theta dx = 0$ .

Au final,  $\mu H_1 \pi \frac{D_1^2}{4} x_{G_1} = \mu \frac{H_1^2}{2} 2\pi \frac{D_1^2}{8} \Leftrightarrow x_{G_1} = \frac{H_1}{2}$ .

**Question 3** Déterminer (sans calcul) la **forme** de la matrice d'inertie du triaxe.

**Correction** Le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  est plan de symétrie du triaxe; donc  $E = \iiint x z dm = 0$  et  $D = \iiint y z dm = 0$ .  
 Le plan  $(O, \vec{y}, \vec{z})$  est plan de symétrie du triaxe; donc  $E = \iiint x z dm = 0$  et  $E = \iiint x y dm = 0$ .

La matrice est donc diagonale et de la forme  $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ .

**Question 4** Déterminer analytiquement la matrice d'inertie du solide  $A_i$  en  $G_i$  dans  $\mathcal{R}_i$ . On la note  $I_{G_i}(A_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_i}$  où les constantes seront à déterminer littéralement.

**Correction** Au vu de la forme du solide, on a :  $D_1 = E_1 = F_1 = 0$  et  $C = B$ . D'où  $I_{G_1}(A_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ .

$$\text{Calculons } A_1 = \iiint (y^2 + z^2) dm = \mu \iiint (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta dx$$

$$= \mu \iiint \rho^3 d\rho d\theta dz = \mu \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{D_1/2} 2\pi H_1 = \mu \frac{D_1^4}{16 \cdot 4} 2\pi H_1 = M_1 \frac{D_1^2}{8}.$$

$$\text{Calculons } B_1 = \iiint (x^2 + z^2) dm = \mu \iiint (x^2 + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta dx$$

$$B_x = \mu \iiint x^2 \rho d\rho d\theta dx + \mu \iiint \rho^2 \sin^2 \theta \rho d\rho d\theta dx = \mu \iiint x^2 \rho d\rho d\theta dx = \mu \frac{H_1^3}{4 \cdot 3} \frac{D_1^2}{8} 2\pi = M \frac{H_1^2}{12}$$

$$B_z = \mu \iiint \rho^2 \sin^2 \theta \rho d\rho d\theta dx = \mu \iiint \rho^3 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\rho d\theta dx = \mu \iiint \frac{\rho^3}{2} \theta d\rho d\theta dx = \mu \frac{D_1^4}{2 \cdot 16 \cdot 4} 2\pi H_1 = M \frac{D_1^2}{16}.$$

$$\text{Au final, } A = M_1 \frac{D_1^2}{8} \text{ et } B = M \left( \frac{H_1^2}{12} + \frac{D_1^2}{16} \right).$$

**Question 5** Déterminer  $I_{G_i}(A_i)$  dans la base  $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  puis  $I_O(A_i)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Correction** On a  $\vec{x}_1 = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}$ ,  $\vec{y}_1 = \cos \alpha \vec{y} - \sin \alpha \vec{x}$ . En conséquences, on a :  $P_{10} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On a donc  $I_{G_1}(A_1)_{\mathcal{R}} = P_{10}^{-1} I_{G_1}(A_1)_{\mathcal{R}_1} P_{10}$ .

$$I_{G_1}(A_1)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos \alpha & -A_1 \sin \alpha & 0 \\ B_1 \sin \alpha & B_1 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cos^2 \alpha + B_1 \sin^2 \alpha & -A_1 \sin \alpha \cos \alpha + B_1 \cos \alpha \sin \alpha & 0 \\ -A_1 \sin \alpha \cos \alpha + B_1 \cos \alpha \sin \alpha & A_1 \sin^2 \alpha + B_1 \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } \alpha = \pi/2, \text{ on a : } I_{G_1}(A_1)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

$$\text{Par ailleurs, } \vec{OG}_1 = \frac{H+D}{2} \vec{y}; \text{ donc : } I_O(A_1)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + M_1 \begin{pmatrix} \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

$$\text{Au final, } I_O(A_1)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} B_1 + M_1 \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 + M_1 \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

**Question 6** Déterminer  $I_O(B)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Question 7** Proposer une méthode pour déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en  $O$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Question 8** Déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en  $O$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Correction**

$$I_{G_2}(A_2)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} A_1 \cos^2 \alpha + B_1 \sin^2 \alpha & -A_1 \sin \alpha \cos \alpha + B_1 \cos \alpha \sin \alpha & 0 \\ -A_1 \sin \alpha \cos \alpha + B_1 \cos \alpha \sin \alpha & A_1 \sin^2 \alpha + B_1 \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Avec } \alpha = -\pi/6, \text{ on a : } I_{G_2}(A_2)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{3A_1 + B_1}{4} & (A_1 - B_1) \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ (A_1 - B_1) \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{A_1 + 3B_1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par ailleurs, } \overrightarrow{OG_2} = \frac{H+D}{2} \cos \alpha \vec{x} + \frac{H+D}{2} \sin \alpha \vec{y};$$

$$\text{donc : } I_O(A_1)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + M_1 \begin{pmatrix} \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \frac{1}{4} & -\frac{(H+D)^2}{4} \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{(H+D)^2}{4} \frac{\sqrt{3}}{4} & \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

**Question 9** Déterminer  $I_O(M)$  la matrice d'inertie du moyeu  $M$ .

**Correction**

**Question 10** Déterminer  $I_O(T)$  la matrice d'inertie du triaxe  $T$ .

**Correction**