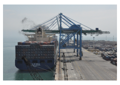
Application 01



Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs

Centrale Supelec PSI 2013

Savoirs et compétences :

Modélisation dynamique du comportement de la charge

Objectif Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

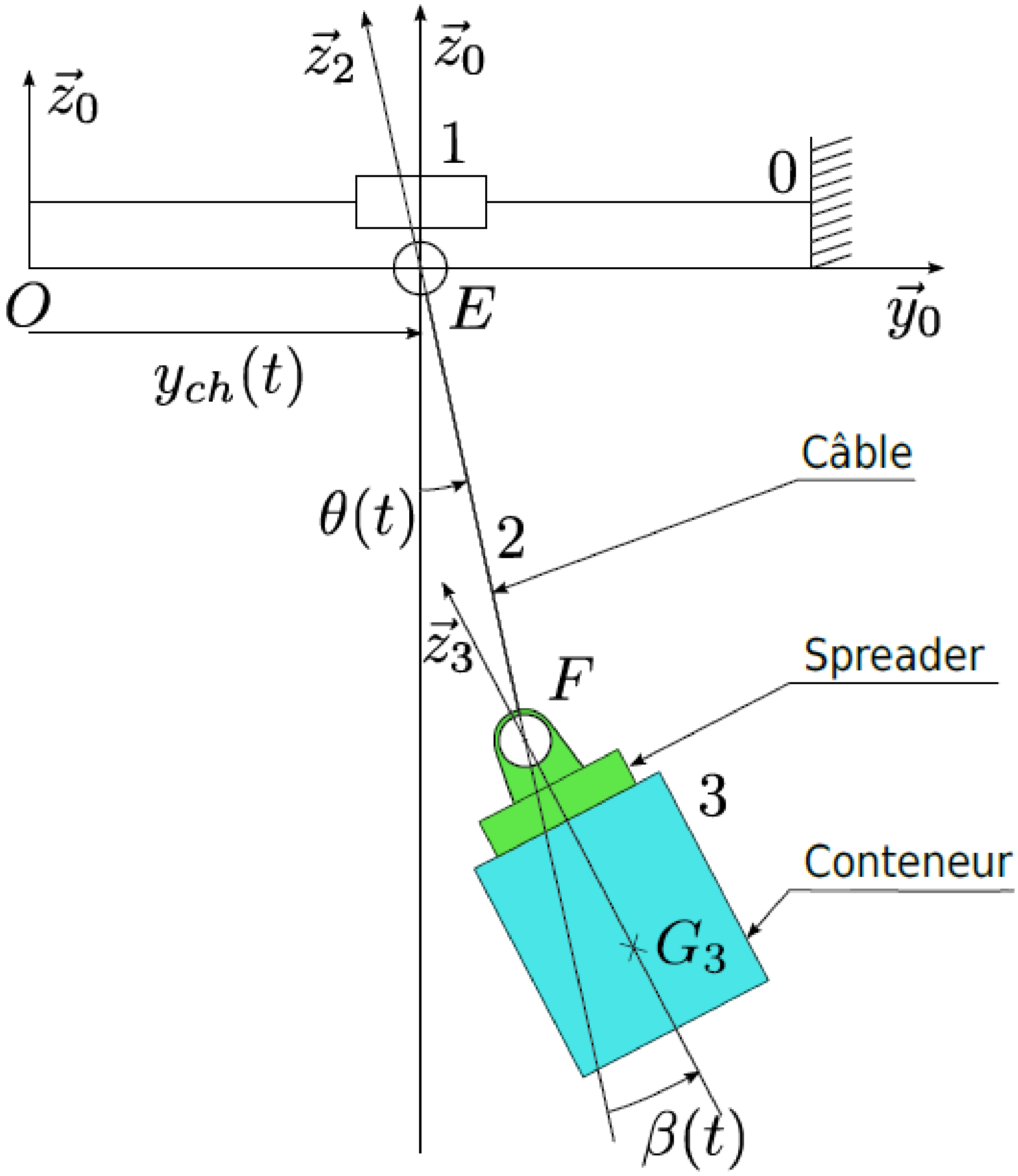
En vue d'élaborer une commande automatisée du déchargement des conteneurs, une bonne compréhension de la dynamique du système est nécessaire. Cette partie vise à établir les équations du mouvement du conteneur. La charge peut alors balancer selon le modèle présenté ci-après. Dans cette étude, la vitesse de vent nulle. On fait l'hypothèse que le conteneur est suspendu à un seul câble indéformable, en liaison pivot à ses extrémités. Les liaisons entre les solides 0, 1, 2 et 3 sont supposées parfaites. Le portique support du chariot est noté 0, le chariot 1, le câble 2 et l'ensemble {spreader + conteneur} 3.

Paramétrage

- Le repère $\mathscr{R}_0=\left(O_0;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ est lié au portique fixe; il est supposé galiléen avec $\overrightarrow{z_0}$ l'axe vertical ascendant.
- La position du chariot telle que $\overrightarrow{OE}=y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}$ est notée $y_{ch}(t)$; l'angle $\left(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_2}\right)$ d'inclinaison du câble $\theta(t)$ et l'angle $\left(\overrightarrow{z_2},\overrightarrow{z_3}\right)$ d'inclinaison du conteneur par rapport au câble $\beta(t)$.

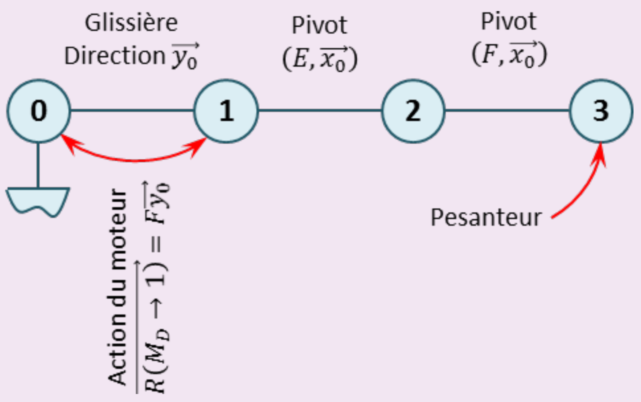
Données

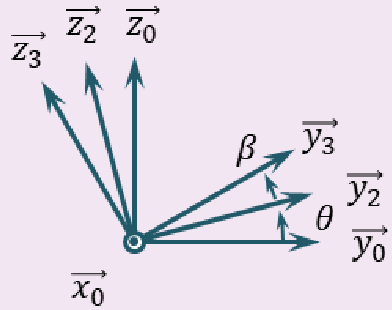
- $\mathscr{R}_1=\left(E;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ repère lié au chariot de levage 1.
- $\mathscr{R}_2=\left(E;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)$ repère lié au câble 2; $\ell_2=50\,\text{m}$ la longueur EF du câble; la masse est négligée.
- $\mathscr{R}_3=\left(F;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3}\right)$ repère lié à l'ensemble {spreader + conteneur}; $m_3=50\,$tonnes la masse du solide 3; G_3 le centre de gravité du solide 3, tel que $\overrightarrow{G_3F}=h_3\overrightarrow{z_3}$ où $h_3=2.5\,\text{m}$; la matrice d'inertie du solide 3 s'écrit $I_3(G_3)=\begin{pmatrix}A_3 & 0 & 0\\ 0 & B_3 & 0\\ 0 & 0 & C_3\end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3}\right)}$ où $\left|\begin{array}{l}A_3=52\times10^3\,\text{kg}\,\text{m}^2\\ B_3=600\times10^3\,\text{kg}\,\text{m}^2\\ C_3=600\times10^3\,\text{kg}\,\text{m}^2\end{array}\right.$.
- la motorisation M_D du mouvement de direction exerce, par l'intermédiaire de câbles, des actions mécaniques sur (1) qui se réduisent à un glisseur de la forme $\overrightarrow{R(M_D\rightarrow1)}=F\,\overrightarrow{y_0}$;
- l'action mécanique du câble sur le spreader est notée $\overrightarrow{R(2\rightarrow3)}=F_{23}\overrightarrow{z_2}$.



Question 1 *Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?*

Correction





Le système a trois mobilités :

- la translation de la liaison glissière de longueur $y_{ch}(t)$ (degré de liberté motorisé) ;
- la rotation du câble d'angle $\theta(t)$ (degré de liberté non motorisé) ;
- la rotation du conteneur d'angle $\beta(t)$ (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.

Question 2 *Déterminer littéralement, au point G_3, la vitesse $\overrightarrow{V(G_3\in 3/0)}$ puis le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0$.*

Correction $\overrightarrow{V(G_3\in 3/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG_3}\right)\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}-\ell_2\overrightarrow{z_2}-h_3\overrightarrow{z_3}\right)\right]_{\mathscr{R}_0}$.

On a :

- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)}\wedge\overrightarrow{z_2} = \dot\theta\,\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{z_2} = -\dot\theta\,\overrightarrow{y_2}$;
- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_3} + \overrightarrow{\Omega(3/0)}\wedge\overrightarrow{z_3} = \left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{z_3} = -\left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{y_3}$;
- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot\theta\,\overrightarrow{z_2}$;
- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{z_3}$.

$\overrightarrow{V(G_3\in 3/0)} = \dot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}+\ell_2\dot\theta\,\overrightarrow{y_2}+h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{y_3}$.

$\overrightarrow{\Gamma(G_3\in 3/0)} = \ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}+\ell_2\ddot\theta\,\overrightarrow{y_2}+h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3}+\ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2}+h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}$.

Par ailleurs, G_3 étant le centre d'inertie, de 3, on a $\overrightarrow{\delta(G_3,3/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}A_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = A_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{x_0}$.

On a donc, $\{\mathscr{D}(3/0)\} = \left\{\begin{array}{l} M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}+\ell_2\ddot\theta\,\overrightarrow{y_2}+h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3}+\ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2}+h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\\ A_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{x_0}\end{array}\right\}_{G_3}$

Question 3 *En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.*

Correction D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant $\overrightarrow{z_2}$, on peut donc suggérer de réaliser le thorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur $\overrightarrow{y_2}$.

Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3 ;
- action de 2 sur 3.

On a donc : $-M_3 g\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{y_2} = \left(M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}+\ell_2\ddot\theta\,\overrightarrow{y_2}+h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3}+\ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2}+h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{y_2}$

$\Leftrightarrow -M_3 g\sin\theta = M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\cos\theta+\ell_2\ddot\theta+h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\cos\beta-h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\sin\beta\right)$

Résolution faisant intervenir F – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc **(1+2+3)** et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{y_0}$.

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$) ;
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$) ;
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$) ;
- action du moteur sur 1.

On applique le TRD sur $\overrightarrow{y_0}$: $F = \overrightarrow{R_d(1+2+3/0)}\cdot\overrightarrow{y_0} = \underbrace{\overrightarrow{R_d(1/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}}_{=0\text{(masse négligée)}} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(2/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}}_{=0\text{(masse négligée)}} + \overrightarrow{R_d(3/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}$

$\Rightarrow F = \left(M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot{\theta}\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2} + h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{y_0}$

$\Leftrightarrow F = M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2\ddot{\theta}\cos\theta + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\cos\left(\beta+\theta\right) - \ell_2\dot{\theta}^2\sin\theta - h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\sin\left(\beta+\theta\right)\right)$

Question 4 *En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.*

Correction Le TRD appliqué à 3 en projection suivant $\overrightarrow{z_2}$ se traduit par :

$-M_3 g\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{z_2} = \left(M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot{\theta}\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2} + h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{z_2}$

$\Leftrightarrow -M_3 g\cos\theta = M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\sin\theta - h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\sin\beta + \ell_2\dot{\theta}^2 + h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\cos\beta\right)$

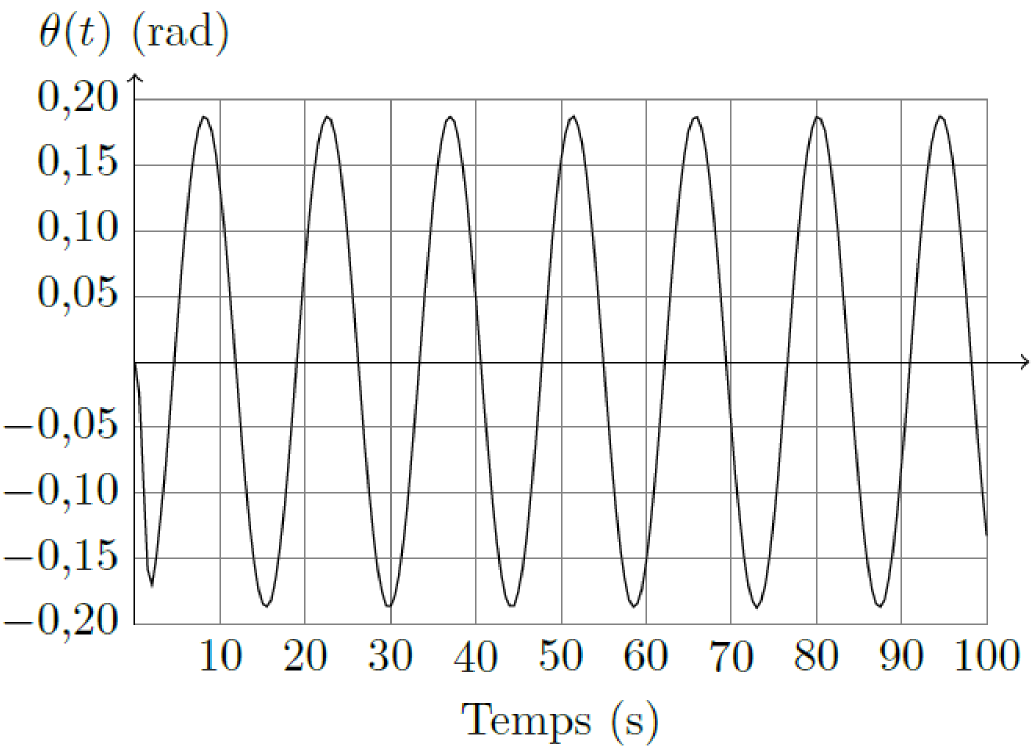
Question 5 *En supposant que θ, β, $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.*

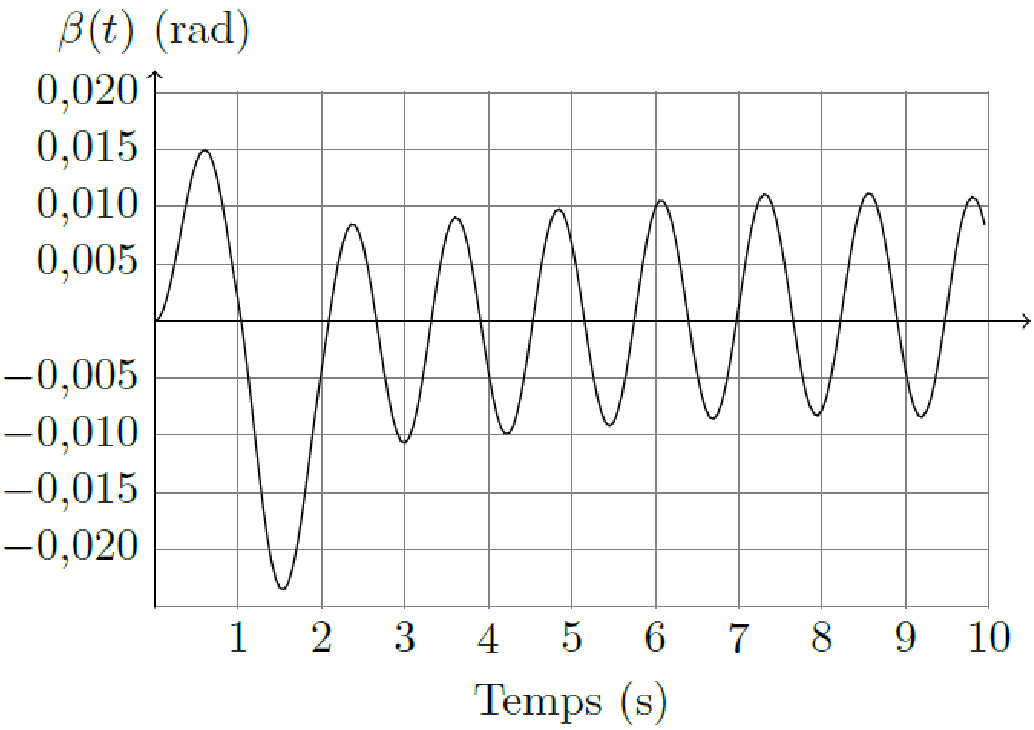
Correction On a $-M_3 g\sin\theta = M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t)\cos\theta + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\cos\beta - h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\sin\beta\right)$. En linéarisant, on obtient

$-M_3 g\theta = M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right) - h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\beta\right)$.

On a : $-M_3 g\cos\theta = M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\sin\theta - h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\sin\beta + \ell_2\dot{\theta}^2 + h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\cos\beta\right)$. En linéarisant, on obtient :
$-M_3 g = M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\theta - h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\beta + \ell_2\dot{\theta}^2 + h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\right)$

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10 m.





Question 6 *Proposer une simplification de la modélisation précédente.*

Correction