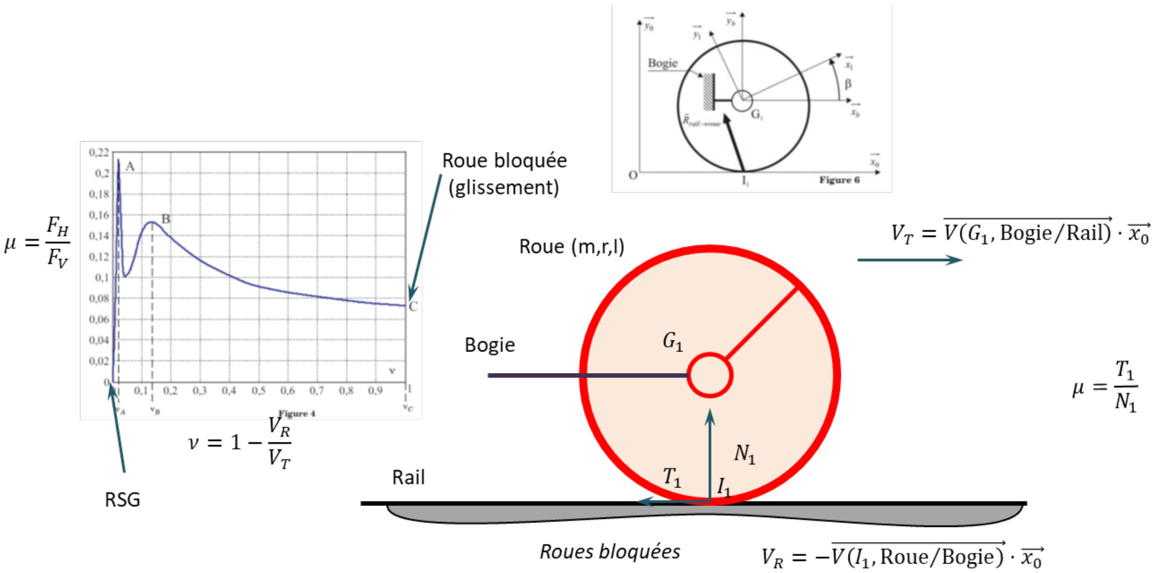
Application 2

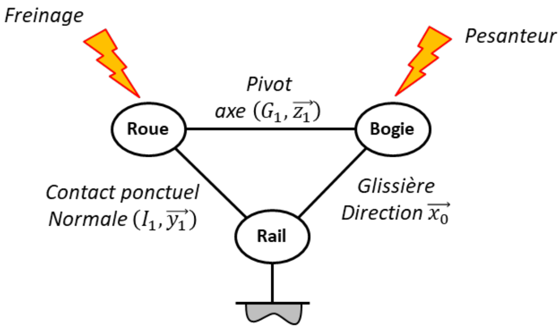
Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Centrale Supelec PSI 2006

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique ;*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*





On cherche une relation entre $\dot{\nu}$, ν et F_R en fonction de F_R, V_T, $f(\nu)$, I, r, M et g.

- On isole l'ensemble du TGV.
- BAME :
  - pesanteur ;
  - action des rails sur les N roues — sur la roue i $\overrightarrow{R(\text{Rail} \to \text{Roue } i)} = N_i \overrightarrow{Y_0} - f(\nu) N_i \overrightarrow{X_0}$ — ;
- Théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{x_0}$: $-f(\nu) N N_i = M \overrightarrow{\Gamma(G \in \text{Bogie/Rail})} \cdot \overrightarrow{X_0} = M \dot{V}_T$ et donc $-f(\nu) N N_i = M \dot{V}_T$.
- Théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{y_0}$: $N N_i - M g = 0$.
- Bilan : $-f(\nu) g = \dot{V}_T$.

- On isole la roue :
- BAME :
  - contact roue rail ;
  - liaison pivot ;

- couple de freinage.

- Théorème de la résultante dynamique suivant $\overrightarrow{x_0}$: $X - f(\nu)N_i = 0$ (masse de la roue négligeable).
- Théorème de la résultante dynamique suivant $\overrightarrow{y_0}$: $Y + N_i = 0$ (avec $Y = -Mg$).
- Théorème du moment dynamique en G_1 : $C_f - rT_1 = I\ddot{\beta} \Leftrightarrow C_f - rf(\nu)N_1 = I\ddot{\beta}$.
- Bilan : $X = f(\nu)Mg$, $N_i = Mg$ et $C_f - rf(\nu)Mg = I\ddot{\beta}$.

Par ailleurs, $F_R = C_f/r$; donc $C_f = rF_r$ et donc $rF_r - rf(\nu)Mg = I\ddot{\beta}$.

Il faut supprimer β et introduire ν. β est défini comme l'angle de rotation de la roue par rapport au bogie. On a $V_R = -\overrightarrow{V(I_1 \in \text{Roue/Bogie})} \cdot \overrightarrow{x_0} = -\left(\overrightarrow{V(G_1 \in \text{Roue/Bogie})} + \overrightarrow{I_1G_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(\text{Roue/Bogie})}\right) \cdot \overrightarrow{x_0} = -\left(r\overrightarrow{Y_0} \wedge \dot{\beta}\overrightarrow{Z_0}\right) \cdot \overrightarrow{x_0} = -r\dot{\beta}$.

On a donc $rF_r - rf(\nu)Mg = -I\dfrac{\dot{V}_R}{r}$. Par ailleurs, on a $\nu = 1 - \dfrac{V_R}{V_T}$; donc $V_R = V_T - \nu V_T$. En dérivant $\dot{V}_R = \dot{V}_T - \dot{\nu}V_T - \nu\dot{V}_T = \dot{V}_T(1-\nu) - \dot{\nu}V_T$. De plus, $-f(\nu)g = \dot{V}_T$; donc $\dot{V}_R = -f(\nu)g(1-\nu) - \dot{\nu}V_T$.

Au final, $rF_r - rf(\nu)Mg = -I\dfrac{\dot{V}_R}{r} \Leftrightarrow rF_r - rf(\nu)Mg = -I\dfrac{-f(\nu)g(1-\nu) - \dot{\nu}V_T}{r}$.
$\Leftrightarrow r^2F_r - r^2f(\nu)Mg = If(\nu)g(1-\nu) + I\dot{\nu}V_T$
$\Leftrightarrow I\dot{\nu}V_T = -r^2f(\nu)Mg - If(\nu)g + If(\nu)g\nu + r^2F_r$
$\Leftrightarrow \dot{\nu} = -\dfrac{gf(\nu)}{IV_T}\left(r^2M + I\right) + \dfrac{f(\nu)g}{V_T}\nu + \dfrac{r^2F_r}{IV_T}$

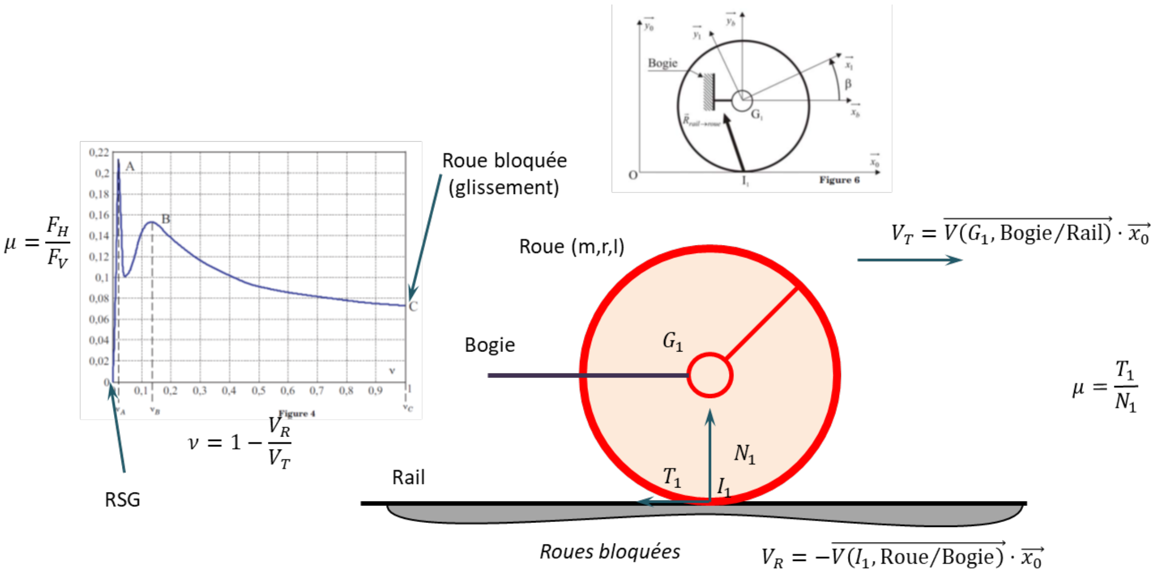
Application 2 – Corrigé

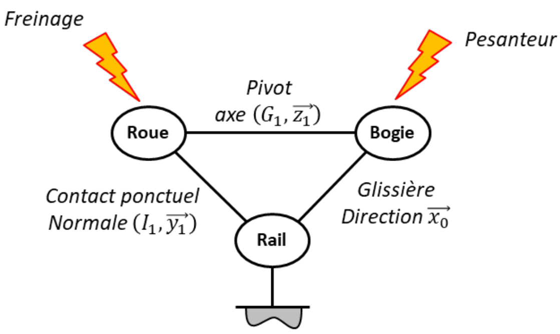
Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Centrale Supelec PSI 2006

Savoirs et compétences :

- ❐ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique ;*
- ❐ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*





On cherche une relation entre $\dot{\nu}$, ν et F_R en fonction de F_R, V_T, $f(\nu)$, I, r, M et g.

- On isole l'ensemble du TGV.
- BAME :
  - pesanteur ;
  - action des rails sur les N roues — sur la roue i $\overrightarrow{R(\text{Rail} \to \text{Roue } i)} = N_i \overrightarrow{Y_0} - f(\nu) N_i \overrightarrow{X_0}$ — ;
- Théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{x_0}$: $-f(\nu) N N_i = M \overrightarrow{\Gamma(G \in \text{Bogie}/\text{Rail})} \cdot \overrightarrow{X_0} = M \dot{V}_T$ et donc $-f(\nu) N N_i = M \dot{V}_T$.
- Théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{y_0}$: $N N_i - M g = 0$.
- Bilan : $-f(\nu) g = \dot{V}_T$.

- On isole la roue :
- BAME :
  - contact roue rail ;

  - liaison pivot;
  - couple de freinage.
- Théorème de la résultante dynamique suivant $\overrightarrow{x_0}$: $X - f(\nu)N_i = 0$ (masse de la roue négligeable).
- Théorème de la résultante dynamique suivant $\overrightarrow{y_0}$: $Y + N_i = 0$ (avec $Y = -Mg$).
- Théorème du moment dynamique en G_1 : $C_f - rT_1 = I\ddot{\beta} \Leftrightarrow C_f - rf(\nu)N_1 = I\ddot{\beta}$.
- Bilan : $X = f(\nu)Mg$, $N_i = Mg$ et $C_f - rf(\nu)Mg = I\ddot{\beta}$.

Par ailleurs, $F_R = C_f/r$; donc $C_f = rF_r$ et donc $rF_r - rf(\nu)Mg = I\ddot{\beta}$.

Il faut supprimer β et introduire ν. β est défini comme l'angle de rotation de la roue par rapport au bogie. On a $V_R = -\overrightarrow{V\left(I_1 \in \text{Roue/Bogie}\right)} \cdot \overrightarrow{x_0} = -\left(\overrightarrow{V\left(G_1 \in \text{Roue/Bogie}\right)} + \overrightarrow{I_1G_1} \wedge \overrightarrow{\Omega\left(\text{Roue/Bogie}\right)}\right) \cdot \overrightarrow{x_0} = -\left(r\overrightarrow{Y_0} \wedge \dot{\beta}\overrightarrow{Z_0}\right) \cdot \overrightarrow{x_0} = -r\dot{\beta}$.

On a donc $rF_r - rf(\nu)Mg = -I\dfrac{\dot{V}_R}{r}$. Par ailleurs, on a $\nu = 1 - \dfrac{V_R}{V_T}$; donc $V_R = V_T - \nu V_T$. En dérivant $\dot{V}_R = \dot{V}_T - \dot{\nu}V_T - \nu\dot{V}_T = \dot{V}_T(1-\nu) - \dot{\nu}V_T$. De plus, $-f(\nu)g = \dot{V}_T$; donc $\dot{V}_R = -f(\nu)g(1-\nu) - \dot{\nu}V_T$.

Au final, $rF_r - rf(\nu)Mg = -I\dfrac{\dot{V}_R}{r} \Leftrightarrow rF_r - rf(\nu)Mg = -I\dfrac{-f(\nu)g(1-\nu) - \dot{\nu}V_T}{r}$.

$\Leftrightarrow r^2F_r - r^2f(\nu)Mg = If(\nu)g(1-\nu) + I\dot{\nu}V_T$

$\Leftrightarrow I\dot{\nu}V_T = -r^2f(\nu)Mg - If(\nu)g + If(\nu)g\nu + r^2F_r$

$\Leftrightarrow \dot{\nu} = -\dfrac{gf(\nu)}{IV_T}\left(r^2M + I\right) + \dfrac{f(\nu)g}{V_T}\nu + \dfrac{r^2F_r}{IV_T}$