Colle 02

Disque non équilibré

Équipe PT – PT⋆ La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

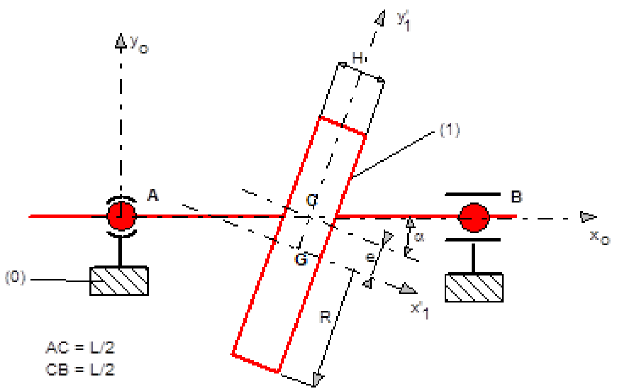
Soit le rotor **(1)** défini ci-dessous. Il est constitué d'un arbre de masse négligeable en liaison pivot par rapport à un bâti **(0)**. Sur cet arbre est monté, en liaison complète, un disque de masse M, de rayon R et d'épaisseur H. Le repère $\mathscr{R}_1' = \left(G;\overrightarrow{x_1'},\overrightarrow{y_1'},\overrightarrow{z_1'}\right)$ est attaché à ce solide.

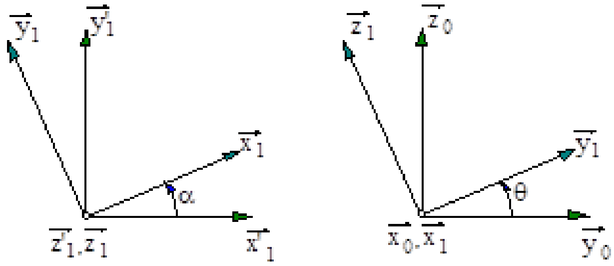
La base $\mathscr{B}_1' = \left(\overrightarrow{x_1'},\overrightarrow{y_1'},\overrightarrow{z_1'}\right)$ se déduit de $\mathscr{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ par une rotation d'angle α autour de $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_1'}$.

La base $\mathscr{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ se déduit de $\mathscr{B}_0 = \left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ par une rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0}$.

Le montage de ce disque présente deux défauts :

- un défaut de perpendicularité caractérisé par l'angle α ;
- un défaut d'excentricité représenté par la cote e.





Question 1 *Déterminer la forme de la matrice d'inertie dy cylindre en C dans la base $\mathscr{B}_1'$.*

Question 2 *Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de **(1)** dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$.*

Question 3 *Appliquer le PFD pour déterminer les inconnues de liaison.*

CORRIGE

Q1- Déterminer l'expression littérale de la matrice d'inertie de (1) au point C dans la base B'_1. Dans ce qui suit garder la matrice sous la forme générique (A, B, C, ...)

Matrice d'inertie de (1) dans la base B'1

On sait que : $\overset{\approx}{I}(G,1) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(3R^2+4H^2)}{12} \end{bmatrix}_{B'_1}$

Transfert au point C : $\overrightarrow{CG} = - e\ \vec{y}'_1$

$\overset{\approx}{I}(C,1) = \overset{\approx}{I}(G,1) + m \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}_{B'_1}$

Ainsi : $\overset{\approx}{I}(C,1) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{2}+e^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3R^2+H^2+12e^2) \end{bmatrix}_{B'_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1}$

Q2- Déterminer les éléments de réduction en C du torseur cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{C\ (1/R_0)\} = \left\{ \begin{matrix} m\ \overrightarrow{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}\ (C,1/R_0) \end{matrix} \right\}_C$$

Résultante cinétique : $m\ \overrightarrow{V}(G/R_0) = - m\, e\, \dot{\theta}\ \cos\alpha\ \vec{z}_1$

Moment cinétique : $\vec{\sigma}\ (C,1/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B'_1} \begin{bmatrix} \dot{\theta}\ c\alpha \\ \dot{\theta}\ s\alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{B'_1} = \dot{\theta}\ (A\ c\alpha\, \vec{x}'_1 + B\ s\alpha\, \vec{y}'_1)$

Or : $\vec{x}'_1 = c\alpha\ \vec{x}_1 - s\alpha\ \vec{y}_1$ et $\vec{y}'_1 = c\alpha\ \vec{y}_1 + s\alpha\ \vec{x}_1$

$$\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = \dot{\theta}\ \{\ (A\ c^2\alpha+Bs^2\alpha)\,\vec{x}_1+(B\text{-}A)\ s\alpha\ c\alpha\ \vec{y}_1\} = \dot{\theta}\ (A'\vec{x}_1+B'\vec{y}_1)$$

$$\boxed{\{C\ (1/R_0)\} = {}_C\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{V}\,(G/R_0) = -\ m\ e\ \dot{\theta}\ \cos\alpha\ \vec{z}_1 \\ \vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = \dot{\theta}\ \{\ (A\ c^2\alpha+Bs^2\alpha)\,\vec{x}_1+(B\text{-}A)\ s\alpha\ c\alpha\ \vec{y}_1\} = \dot{\theta}\ (A'\vec{x}_1+B'\vec{y}_1) \end{Bmatrix}}$$

Q3- Déterminer les éléments de réduction en A du torseur dynamique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

$$\{D\ (1/R_0)\} = {}_C\begin{Bmatrix} M\,\overrightarrow{\Gamma}\,(G/R_0) \\ \vec{\delta}\,(C,1/R_0) \end{Bmatrix}$$

Résultante dynamique : $M\,\overrightarrow{\Gamma}\,(G/R_0) = -\ m\ e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z}_1-\dot{\theta}^2\ \vec{y}_1)$

Moment dynamique : C est un point fixe, donc : $\vec{\delta}\,(C,1/R_0)=\dfrac{d\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0)}{dt/R_0}$

$$\vec{\delta}\,(C,1/R_0)=\frac{d\,\{\dot{\theta}\ (A'\vec{x}_1+B'\vec{y}_1)\}}{dt/R_0} = \ddot{\theta}\ (A'\vec{x}_1+B'\vec{y}_1)+B'\dot{\theta}^2\,\vec{z}_1$$

Car $\dfrac{d\ \vec{y}_1}{dt/R_0} = \dfrac{d\ \vec{y}_1}{dt/R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\Lambda\,\vec{y}_1 = \dot{\theta}\ \vec{x}_1\,\Lambda\,\vec{y}_1 = \dot{\theta}\ \vec{z}_1$

$$\boxed{\{D\ (1/R_0)\} = {}_C\begin{Bmatrix} M\,\overrightarrow{\Gamma}\,(G/R_0) = -\ m\ e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z}_1-\dot{\theta}^2\ \vec{y}_1) \\ \vec{\delta}\,(C,1/R_0)= \ddot{\theta}\ (A'\vec{x}_1+B'\vec{y}_1)+B'\dot{\theta}^2\,\vec{z}_1 \end{Bmatrix}}$$

Calculons :

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0)= \vec{\delta}\,(C,1/R_0)+\overrightarrow{AC}\,\Lambda\ m\vec{\Gamma}(G,1/R_0)$$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0)=\ddot{\theta}\ (A'\vec{x}_1+B'\vec{y}_1)+B'\dot{\theta}^2\,\vec{z}_1+\ \overrightarrow{AC}\,\Lambda\ (\text{-}\ m\ e\ \cos\alpha\ (\ddot{\theta}\ \vec{z}_1-\dot{\theta}^2\ \vec{y}_1)$$

Or : $\overrightarrow{AC} = \dfrac{L}{2}\ \vec{x}_1$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0)=\ddot{\theta}\ (A'\vec{x}_1+B'\vec{y}_1)+B'\dot{\theta}^2\,\vec{z}_1+m\ e\ \cos\alpha\ \frac{L}{2}\ (\ddot{\theta}\ \vec{y}_1+\dot{\theta}^2\ \vec{z}_1)$$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0)=\vec{x}_1(A'\ddot{\theta})+\ \vec{y}_1\ (B'+m\ e\frac{L}{2}\cos\alpha\ )\ddot{\theta}\ +\ \vec{z}_1(B'+m\ e\ \frac{L}{2}\cos\alpha)\ \dot{\theta}^2$$

$$\left\{\mathcal{D}\,(1/R_0)\right\} = \begin{Bmatrix} M\,\vec{\Gamma}\,(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\,\left(\ddot{\theta}\,\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\,\vec{y}_1\right) \\ \vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{x}_1(A'\ddot{\theta}) + \vec{y}_1\,\left(B' + m\,e\,\dfrac{L}{2}\cos\alpha\right)\ddot{\theta} + \vec{z}_1\left(B' + m\,e\,\dfrac{L}{2}\cos\alpha\right)\dot{\theta}^2 \end{Bmatrix}_A$$

Q4- Déterminer l'énergie cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0

C étant fixe dans R_0 : $2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0).\,[\bar{\bar{I}}(C,S)\,\vec{\Omega}(S/R_0)]$

$$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}(C,S/R_0)$$

$$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = \dot{\theta}\,\vec{x}_1\,.\,\dot{\theta}(A'\,\vec{x}_1 + B'\,\vec{y}_1)$$

$$2\,T(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0)\,.\,\vec{\sigma}\,(C,1/R_0) = A'\,\dot{\theta}^2 = (A\,c^2\alpha + B s^2\alpha)\,\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{2\,T(S/R_0) = A'\,\dot{\theta}^2 = (A\,c^2\alpha + B s^2\alpha)\,\dot{\theta}^2}$$

Q5- Les liaisons en A et B sont supposées parfaites. Le rotor tourne à vitesse constante $\dot{\theta} = \omega$. Déterminer les actions de liaison en A et B et le couple moteur nécessaire C_m pour obtenir ce mouvement

On isole 1 et on lui applique le PFD : $\left\{\mathcal{D}\,(1/R_0)\right\} = \left\{\bar{1} \rightarrow 1\right\}$

Or : $\left\{\mathcal{D}\,(1/R_0)\right\} = \left\{A \rightarrow 1\right\} + \left\{B \rightarrow 1\right\} + \left\{\text{Poids} \rightarrow 1\right\} + \left\{Cm\right\}$

$$\left\{\bar{1} \rightarrow 1\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} + {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} + {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} + \begin{Bmatrix} 0 & Cm \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$$

On réduit tout en A dans la base B_0 :

LA en B : $\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R} = L\,\vec{x}_0 \wedge (X_B\,\vec{x}_0 + Y_B\,\vec{y}_0 + Z_B\,\vec{z}_0) = L(Y_B\,\vec{z}_0 - Z_B\,\vec{y}_0)$

Pesanteur : $\vec{M}_A = \vec{M}_G + \vec{AG} \wedge \vec{R} = (\frac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y'}_1) \wedge -\,mg\,\vec{y}_0 = -mg\frac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\,\vec{y'}_1 \wedge \vec{y}_0$

Or : $\vec{y'}_1 = c\alpha\,\vec{y}_1 + s\alpha\,\vec{x}_0$ et $\vec{y}_1 = c\theta\,\vec{y}_0 + s\theta\,\vec{z}_0$

$$\vec{y'}_1 = c\alpha\,(c\theta\,\vec{y}_0 + s\theta\,\vec{z}_0) + s\alpha\,\vec{x}_0 = s\alpha\,\vec{x}_0 + c\alpha\,c\theta\,\vec{y}_0 + c\alpha\,s\theta\,\vec{z}_0$$

$$\vec{y'}_1 \wedge \vec{y}_0 = (s\alpha\,\vec{x}_0 + c\alpha\,c\theta\,\vec{y}_0 + c\alpha\,s\theta\,\vec{z}_0) \wedge \vec{y}_0 = s\alpha\,\vec{z}_0 - c\alpha\,s\theta\,\vec{x}_0$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_G + \vec{AG} \wedge \vec{R} = (\frac{L}{2}\vec{x}_0 - e\,\vec{y'}_1) \wedge -\,mg\,\vec{y}_0 = -mg\frac{L}{2}\vec{z}_0 + e\,m\,g\,(s\alpha\,\vec{z}_0 - c\alpha\,s\theta\,\vec{x}_0)$$

$$\vec{M}_A = -\,e\,m\,g\;c\alpha\,s\theta\;\vec{x}_0 + mg\,(e\,s\alpha - \frac{L}{2})\,\vec{z}_0$$

Résultante dynamique

$$M\,\vec{\Gamma}(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\;(\ddot{\theta}\;\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2\;\vec{y}_1)$$

$$\vec{y}_1 = c\theta\;\vec{y}_0 + s\theta\;\vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{z}_1 = c\theta\;\vec{z}_0 - s\theta\;\vec{y}_0$$

$$M\,\vec{\Gamma}(G/R_0) = -\,m\,e\,\cos\alpha\;\{\ddot{\theta}\;(c\theta\;\vec{z}_0 - s\theta\;\vec{y}_0) - \dot{\theta}^2\,(c\theta\;\vec{y}_0 + s\theta\;\vec{z}_0)\}$$

$$\boxed{M\,\vec{\Gamma}(G/R_0) = m\,e\,\cos\alpha\;\{\vec{y}_0(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) - \vec{z}_0(\ddot{\theta}\;c\theta - \dot{\theta}^2\,s\theta)\}}$$

Moment dynamique :

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{x}_0(A'\ddot{\theta}) + \vec{y}_1\;(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\,)\ddot{\theta} + \vec{z}_1(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\;\dot{\theta}^2$$

$$\vec{y}_1 = c\theta\;\vec{y}_0 + s\theta\;\vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{z}_1 = c\theta\;\vec{z}_0 - s\theta\;\vec{y}_0$$

$$\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = \vec{x}_0(A'\ddot{\theta}) + (c\theta\;\vec{y}_0 + s\theta\;\vec{z}_0)\;(B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\,)\ddot{\theta} + (c\theta\;\vec{z}_0 - s\theta\;\vec{y}_0)(B' + m\,e\;\frac{L}{2}\cos\alpha)\;\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\delta}\,(A,1/R_0) = {} & \vec{x}_0(A'\ddot{\theta}) \\ & + (B' + m\,e\frac{L}{2}\cos\alpha\,)(\ddot{\theta}\;c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\;\vec{y}_0 \\ & + (B' + m\,e\;\frac{L}{2}\cos\alpha)\;(c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\;s\theta)\;\vec{z}_0\end{aligned}}$$

En définitive : $\{\bar{1} \to 1\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc} X_A & Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta \\ Y_A + Y_B - mg & -L\,Z_B \\ Z_A + Z_B & LY_B + mg\,(e\,s\alpha - \frac{L}{2}) \end{array}\right\}_{B_0}$

$$\{D(1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & A'\ddot{\theta} \\ m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) & (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha\,)(\ddot{\theta}\,c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta) \\ m\,e\,\cos\alpha\,(-\ddot{\theta}\,c\theta + \dot{\theta}^2\,s\theta) & (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\,s\theta) \end{array} \right\}_{A\,B_0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - mg = m\,e\,\cos\alpha\,(\ddot{\theta}\,s\theta + \dot{\theta}^2\,c\theta) \\ Z_A + Z_B = m\,e\,\cos\alpha\,(-\ddot{\theta}\,c\theta + \dot{\theta}^2\,s\theta) \\ Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta = A'\ddot{\theta} \\ Z_B = -\frac{1}{L}\{(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha\,)(\ddot{\theta}\,c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta)\} \\ Y_B = \frac{1}{L}\{m\,g\,(\frac{L}{2} - e\,s\alpha) + (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,(c\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\,s\theta)\} \end{array}}$$

Si $\dot{\theta} = \omega = cste$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - mg = m\,e\,\cos\alpha\,\omega^2\,c\theta \\ Z_A + Z_B = m\,e\,\cos\alpha\,\omega^2\,s\theta \\ Cm - e\,m\,g\,c\alpha\,s\theta = 0 \\ Z_B = -\frac{1}{L}(B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha\,)\,\omega^2\,s\theta \\ Y_B = \frac{1}{L}\{\,m\,g\,(\frac{L}{2} - e\,s\alpha) + (B' + m\,e\,\frac{L}{2}\cos\alpha)\,\omega^2\,c\theta\} \end{array}}$$

ZA et ZB sont non nulles. Si tout était équilibré elles seraient nulles
Le mouvement est imposé. La recherche des composantes de liaisons donne lieu à des équations algébriques