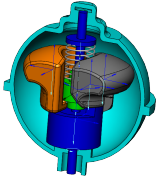


## Application 2

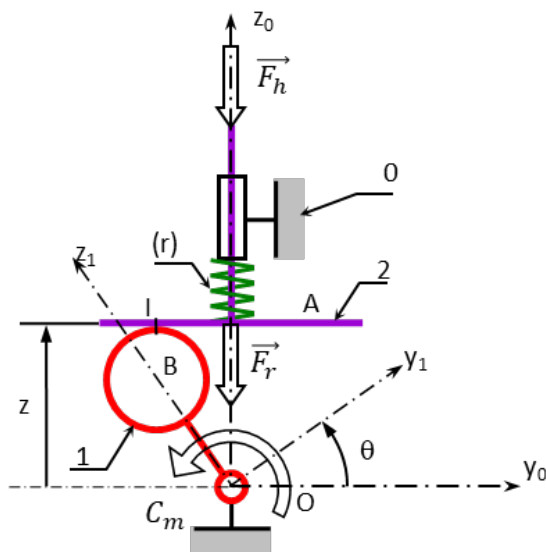
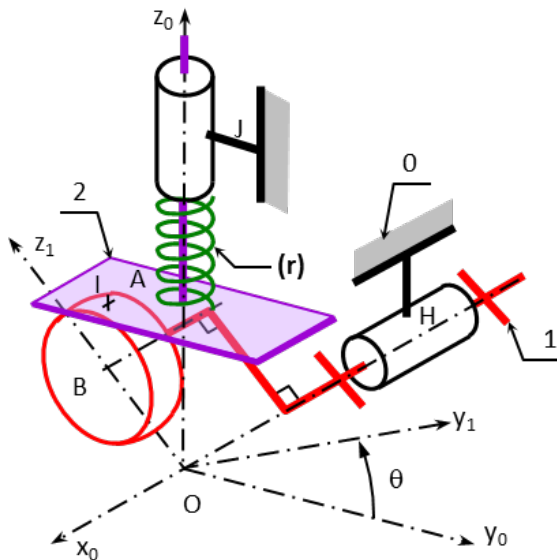


### Application – Pompe à plateau

C. Gamelon & P. Dubois

**Savoirs et compétences :**

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.



L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

#### Paramétrage

Le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère  $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

- $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$  ;
- $\vec{OB} = e \vec{z}_1$  ;
- $\vec{BI} = R \vec{z}_0$  ;
- $\vec{OA} = z \vec{z}_0$ .

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie  $I_1$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Le piston (2) possède une masse  $m_2$ . Le ressort (r), de raideur  $k$ , est toujours comprimé. Pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , l'effort de compression est égal à  $\vec{F}_0 = -F_0 \vec{z}_0$ . Un moteur exerce un couple connu de moment  $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$  sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et de résultante  $\vec{F}_h = -F_h \vec{z}_0$ .

**Question 1** Déterminer avec le PFD l'équation différentielle du mouvement, relative au paramètre  $\theta$ .

**Question 2** En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

### Fermeture géométrique.

On a :  $\vec{OB} + \vec{BI} + \vec{IA} + \vec{AO} = \vec{0}$ .

En projection sur  $\vec{z}_0$  :  $e \cos \theta + R = z$ . Par dérivation successive, on a :  $-e \dot{\theta} \sin \theta = \dot{z}$  et  $-e \ddot{\theta} \sin \theta - e \dot{\theta}^2 \cos \theta = \ddot{z}$ .

### On isole le solide (1).

#### On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{01} \vec{x}_0 + Y_{01} \vec{y}_0 + Z_{01} \vec{z}_0 \\ M_{01} \vec{y}_0 + N_{01} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} Y_{01} \vec{y}_0 + Z_{01} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$ .
- Liaison ponctuelle :  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} Y_{21} \vec{y}_0 + Z_{21} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I$ . On a  $Z_{21} < 0$ ,  $Y_{21} > 0$  et à la limite du glissement,  $Y_{21} = -f Z_{21}$ .  
 $\mathcal{M}(O, 2 \rightarrow 1) = \mathcal{M}(I, 2 \rightarrow 1) + \vec{OI} \wedge R(2 \rightarrow 1) = (e \vec{z}_1 + R \vec{z}_0) \wedge (Y_{21} \vec{y}_0 + Z_{21} \vec{z}_0) = -e Y_{21} \cos \theta \vec{x}_0 - e Z_{21} \sin \theta \vec{x}_0 - R Y_{21} \vec{x}_0 = -((e \cos \theta + R) Y_{21} + e Z_{21} \sin \theta) \vec{x}_0$ .
- Couple moteur :  $\{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{matrix} \right\}_O$ .

#### Calcul de $\overrightarrow{\delta(O, 1/0)} \cdot \vec{x}_0$ .

O est un point fixe et  $I_1$  moment d'inertie par rapport à  $(O, \vec{x}_0)$  on a donc :  $\overrightarrow{\delta(O, 1/0)} \cdot \vec{x}_0 = \left[ \frac{d\sigma(O, 1/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \cdot \vec{x}_0 =$

$$\left[ \frac{d\sigma(O, 1/0) \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{dI_O(1) \Omega(1/0) \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{dI_1 \dot{\theta} \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = I_1 \ddot{\theta}.$$

#### Application du théorème du moment dynamique en projection sur $\vec{x}_0$ .

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e Z_{21} \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

### On isole le solide (2).

#### On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot glissant :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} Y_{02} \vec{y}_0 \\ L_{02} \vec{x}_0 \end{matrix} \right\}_O$ .
- Liaison ponctuelle :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} -Y_{21} \vec{y}_0 - Z_{21} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I$ .
- Ressort :  $\{\mathcal{T}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} -F_0 - k z \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$ .
- Pesanteur :  $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} -m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$ .
- Fluide :  $\{\mathcal{T}(\text{Fluide} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} -F_h \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$ .

#### Calcul de $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{z}_0$ .

$$\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{z}_0 = m_2 \ddot{z}$$

#### Application du théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{z}_0$ .

$$-F_h - Z_{21} - F_0 - k z - m_2 g = m_2 \ddot{z}.$$

#### Bilan :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e (-F_h - F_0 - k z - m_2 g - m_2 \ddot{z}) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On a alors :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} - e (F_h + F_0 + k(e \cos \theta + R) + m_2 g - m_2 (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

#### Bilan sans frottement :

$$C_m + e (F_h + F_0 + k(e \cos \theta + R) + m_2 g - m_2 \sin \theta (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) = I_1 \ddot{\theta}.$$