Cycle 04

Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Chapitre 3 – Cinétique et application du Principe Fondamental de la Dynamique

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

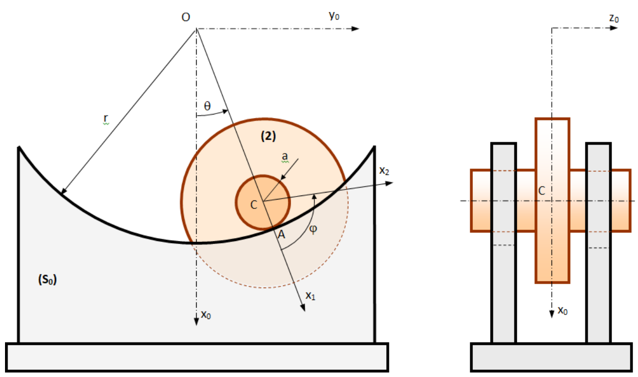
PSI⋆ – MP

Colle 02

Mesure de moment d'inertie

Équipe PT – PT⋆ La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :



La figure ci-dessus représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie I d'un solide de révolution **(2)** par rapport à son axe. Soit R_0 un repère galiléen lié au bâti (S_0) tel que l'axe $\left(O,\overrightarrow{x_0}\right)$ soit vertical descendant. Les deux portées sur lesquelles roule le solide **(2)** sont des portions de la surface d'un cylindre de révolution d'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ et de rayon r. Le solide **(2)**, de masse m, de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a. Soit f le coefficient de frottement entre **(2)** et (S_0). L'étude se ramène à celle d'un problème plan paramétré de la façon suivante :

- le tourillon de **(2)**, de centre C, roule sans glisser en A sur la portée cylindrique de (S_0) ;
- R_1 est un repère tel que $\overrightarrow{OA}=r\,\overrightarrow{x_1}$ et on pose $\theta=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)$;
- R_2 est un repère lié à 2 avec $\varphi=\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right)$. On suppose que $\varphi=0$ lorsque $\theta=0$.

Question 1 *Donner la relation entre φ et θ.*

Question 2 *Déterminer l'équation du mouvement de* **(2)** *par rapport à (S_0) en fonction de θ.*

Question 3 *On suppose que l'angle θ reste petit au cours du mouvement. Montrer que le mouvement est périodique et déterminer la période T des oscillations de* **(2)**.

Question 4 *En déduire le moment d'inertie I de* **(S)** *sachant que : $T=5\,\mathrm{s}$; $a=12.5\,\mathrm{mm}$; $r=141.1\,\mathrm{mm}$; $g=9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; $m=7217\,\mathrm{g}$; $f=0,15$.*

Question 5 *Déterminer l'angle θ_0 maxi pour qu'il n'y ait pas glissement en A. Faire l'application numérique.*

Dispositif de mesure de moment d'inertie.

1/2

1 - RSG en A $\vec{V}(A\in S/R_0)=\vec{0}=\vec{V}(C\in S/R_0)+\vec{AC}\wedge\vec{\Omega}(S/R_0)$

$\Leftrightarrow (r-a)\,\dot\theta\,\vec{y_1} - a\,\vec{x_1}\wedge(\dot\varphi+\theta)\,\vec{z_0}$

$\Leftrightarrow r\dot\theta + a\dot\varphi = 0$ en intégrant avec $c_1=0$: $\underline{r\theta + a\varphi = 0}$

2 - Isolons $\{S\}$

$\mathcal{T}(\text{pesanteur}\to S)=\left\{\begin{matrix} mg\,\vec{x_0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_C$ et $\mathcal{T}(S_0\to S)=\left\{\begin{matrix} N\vec{x_1}+T\vec{y_1}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A$

Appliquons le th de l'énergie cinétique $P(ext\to S/S_0)=\dfrac{d\,E_c(S/S_0)}{dt}$

• $E_c(S/S_0)=\frac{1}{2}m\left[(r-a)\dot\theta\right]^2+\frac{1}{2}I\,(\dot\theta+\varphi)^2=\frac{1}{2}m(r-a)^2\theta^2+\frac{1}{2}I\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\dot\theta^2$

$=\dfrac{(r-a)^2}{2}\left[m+\dfrac{I}{a^2}\right]\dot\theta^2$

$\dfrac{dE_c(S/S_0)}{dt}=(r-a)^2\left(m+\dfrac{I}{a^2}\right)\dot\theta\,\ddot\theta$

• $P(ext\to S/S_0)=\mathcal{T}(\text{pesanteur}\to S)\otimes\mathcal{V}(S/R_0)+\mathcal{T}(S_0\to S)\otimes\mathcal{V}(S/R_0)$

$=\left\{\begin{matrix} mg\,\vec{x_0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_C\otimes\left\{\begin{matrix}(\theta+\dot\varphi)\,\vec{z_0}\\ (r-a)\dot\theta\,\vec{y_1}\end{matrix}\right\}_C+\left\{\begin{matrix} N\vec{x_1}+T\vec{y_1}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A\otimes\left\{\begin{matrix}(\theta+\dot\varphi)\,\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A$

$=-mg\,(r-a)\,\dot\theta\sin\theta$

d'où $(r-a)\left(m+\dfrac{I}{a^2}\right)\ddot\theta=-mg\sin\theta$

$\Leftrightarrow \underline{(r-a)(ma^2+I)\,\theta+mg\,a^2\sin\theta=0}$ (1)

Autre solution : PFD appliqué à $\{S\}$ en A :

$\left\{\begin{matrix} m\,\vec{\Gamma}(C\in S/R_0)\\ \vec{\delta}_A(S/R_0)\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} mg\,\vec{x_0}+N\vec{x_1}+T\vec{y_1}\\ mga\,\sin\theta\,\vec{z_0}\end{matrix}\right\}_A$

2/2

avec $\overrightarrow{\delta_A}(S/R_0) = \overrightarrow{\delta_C}(S/R_0) + \overrightarrow{AC} \wedge m\overrightarrow{\Gamma}(C\in S/R_0)$

$$= \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{J_C(S)\,\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)}_{I(\dot\theta+\dot\varphi)\overrightarrow{z_0}}\Big] - ma\,\overrightarrow{x_1} \wedge \left[(r-a)\ddot\theta\,\overrightarrow{y_1} - (r-a)\dot\theta^2\,\overrightarrow{x_1}\right]$$

$$= \left[I\left(1-\frac{r}{a}\right)\ddot\theta - ma(r-a)\ddot\theta\right]\overrightarrow{z_0}$$

TMD en $A/\overrightarrow{z_0}$ $\quad (r-a)\left[I+ma^2\right]\ddot\theta + mga^2\sin\theta = 0 \qquad (1)$

3 – θ petit $\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$ d'où l'éq diff du 2^{nd} ordre :

$$\ddot\theta + \frac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\,\theta = 0$$

Le coef de θ étant positif, on a un phénomène périodique de période $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(r-a)(I+ma^2)}{mga^2}}}$

4 – $T^2 = 4\pi^2\,\dfrac{(r-a)(I+ma^2)}{mga^2} \iff I = \dfrac{T^2.mga^2}{4\pi^2(r-a)} - ma^2$

A.N $\quad I = \dfrac{2{,}5\,.\,7{,}217\;9{,}81\;12{,}5^2\;10^{-6}}{4\pi^2\,(141{,}1-12{,}5)\,10^{-3}} - 7{,}217\;12{,}5^2\;10^{-6} = \boxed{53{,}3.10^{-3}\ \mathrm{kg\,m^2}}$

5 – Th de la résultante dynamique appliqué à $\{S\}$: $m\left[(r-a)\ddot\theta\,\overrightarrow{y_1} - (r-a)\dot\theta^2\,\overrightarrow{x_1}\right] = mg\overrightarrow{x_0} + N\overrightarrow{x_1} + T\overrightarrow{y_1}$

$/\overrightarrow{x_1}$ $\quad -m(r-a)\dot\theta^2 = mg\cos\theta + N \iff N = -m(r-a)\dot\theta^2 - mg\cos\theta$

$/\overrightarrow{y_1}$ $\quad m(r-a)\ddot\theta = T - mg\sin\theta \iff T = m(r-a)\ddot\theta + mg\sin\theta$

pas de glissement $\Rightarrow \|\overrightarrow{T}\| < f\|\overrightarrow{N}\| \iff |m(r-a)\ddot\theta + mg\sin\theta| < f\left(m(r-a)\dot\theta^2 + mg\cos\theta\right)$

de (1) $\quad \ddot\theta = \dfrac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}.\sin\theta \quad$ et $\dot\theta_0 = 0$ car il y a risque de glissement quand θ est maxi (ici θ_0)

d'où : $\quad m(r-a)\dfrac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\sin\theta_0 + mg\sin\theta_0 < f\,mg\cos\theta_0$

$$\iff \boxed{\tan\theta_0 < f.\left(1+\frac{ma^2}{I}\right)}$$

A.N. $\quad \boxed{\theta_0 < 8{,}7^\circ}$