Application 1 – Corrigé

Chaîne ouverte – Wheeling moto★

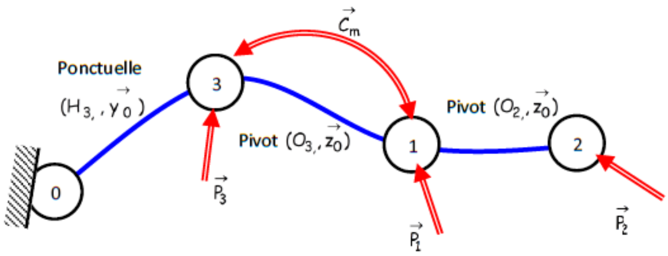
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Eléments de corrigé

Q1- Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling.
Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en H_3.



Si un considère des liaisons parfaites, en particulier en H_3 (liaison sans frottement), l'ensemble modélisé en 2D est isostatique et comporte 4 mobilités :

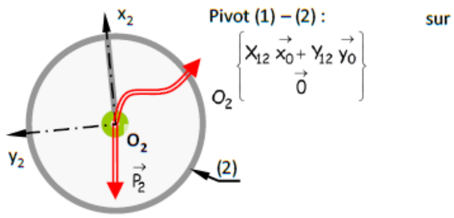
- déplacement suivant $\vec{x}_0$ du centre d'inertie G_1 du cadre (1) par rapport au sol : paramètre λ_1 ;
- position angulaire du cadre (1) par rapport au sol : paramètre $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- position angulaire de la roue (3) par rapport au sol : paramètre $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$;
- position angulaire de la roue (2) par rapport au sol : paramètre $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$.

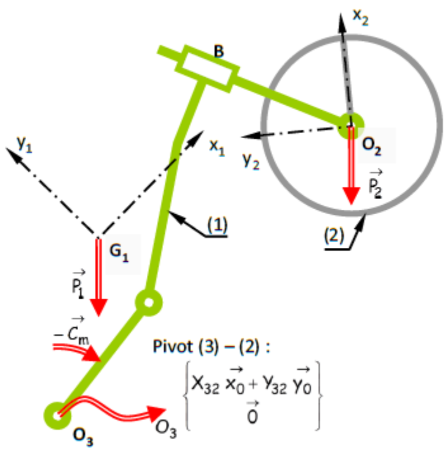
La propriété de roulement sans glissement en H_3 entre la roue (3) et le sol (0) introduit <u>une relation entre les paramètres de position</u>.
Il y a donc <u>3 équations du mouvement</u> issues de l'application du principe fondamental de la dynamique.

Q2- En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer le mouvement de l'ensemble :
• élément(s) isolé(s) ;
• théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.

Les trois équations sont obtenues en isolant successivement :

- la roue avant (2) :
  équation du moment dynamique en O_2, en projection sur $\vec{z}_0$. Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison pivot (1) – (2) ;

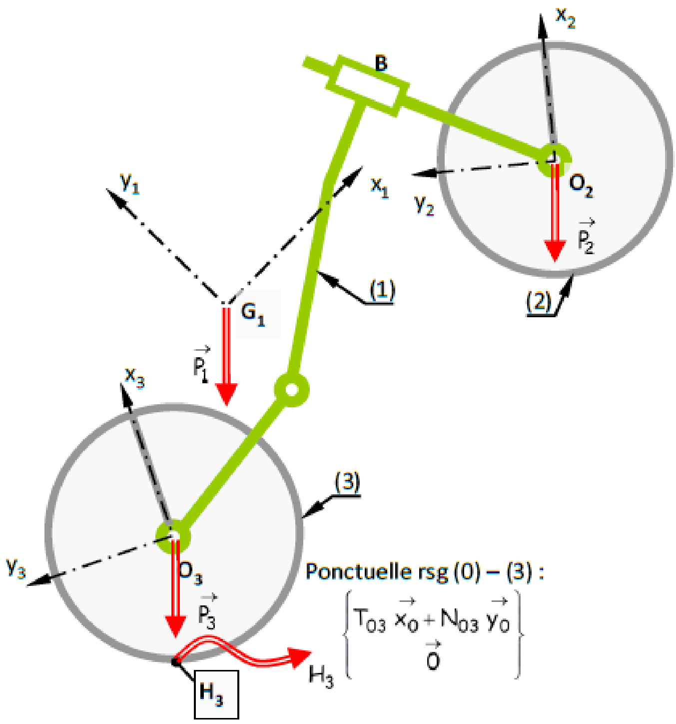




- ensemble {roue avant (2), cadre (1)} :

équation du moment dynamique en O_3, en projection sur $\vec{z}_0$.
Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison pivot (3) – (1) ;

- ensemble {roue avant (2), cadre (1), roue arrière (3)} :
  équation du moment dynamique en H_3, en projection sur $\vec{z_0}$.
  Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison ponctuelle avec RsG (0) – (3) ;



> Q3- Mettre en place les équations précédentes.
> Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.

Equation (1)

Moment cinétique de la roue (2) : il est défini en O_2, centre d'inertie de la roue (2), point où est supposée définie sa matrice d'inertie : $\vec{\sigma}(O_2,2/0) = \bar{\bar{I}}(O_2,2) \otimes \dot{\theta}_2 \vec{z_0} = C_2\, \dot{\theta}_2 \vec{z_0}$

Moment dynamique : $\vec{\delta}(O_2,2/0) = \dfrac{d\vec{\sigma}(O_2,2/0)}{dt/(0)} = C_2\, \ddot{\theta}_2 \vec{z_0}$

Actions extérieures sur la roue (2) :

- pesanteur : le poids $\vec{P_2}$ est supposé appliqué en O_2, donc de moment nul en ce point ;
- la liaison pivot (1) – (2) a un moment nul en O_2.

Soit l'équation (1) : $\boxed{C_2\, \ddot{\theta}_2 = 0}$

Equation (2)

Moment dynamique de l'ensemble {(1), (2)} : il est défini en O_3, en faisant la somme des moments dynamiques de (1) et de (2) : $\vec{\delta}(O_3,\{1,2\}/0) = \vec{\delta}(O_3,1/0) + \vec{\delta}(O_3,2/0)$

Calcul pour le cadre (1) :

Moment cinétique du cadre (1) : il est défini en G_1, centre d'inertie du cadre (1), point où est supposée définie sa matrice d'inertie : $\vec{\sigma}(G_1,1/0) = \bar{\bar{I}}(G_1,1) \otimes \dot{\theta}_1 \vec{z_0} = C_1\, \dot{\theta}_1 \vec{z_0}$

Moment dynamique : $\vec{\delta}(G_1,1/0) = \dfrac{d\vec{\sigma}(G_1,1/0)}{dt/(0)} = C_1\, \ddot{\theta}_1 \vec{z_0}$

Calcul en O_3 : $\vec{\delta}(O_3,1/0) = \vec{\delta}(G_1,1/0) + m_1\, \vec{\Gamma}(G_1,1/0) \wedge \vec{G_1O_3}$

Calcul de l'accélération $\vec{\Gamma}(G_1,1/0)$: pour ce calcul, il est plus adroit de repérer la position du cadre (1) par rapport au sol (0) en définissant comme paramètre λ_1 : $\vec{OO_3} = \lambda_1 \vec{x_0}$.
Le point O est un point lié au sol, situé à la distance R du plan de contact de la roue avec la chaussée.

$\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OO_3}+\overrightarrow{O_3G_1}=\lambda_1\overrightarrow{x_0}+a_1\overrightarrow{x_1}+b_1\overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{V}(G_1 1/0)=\dot{\lambda}_1\overrightarrow{x_0}+\dot{\theta}_1(a_1\overrightarrow{y_1}-b_1\overrightarrow{x_1})$

$\overrightarrow{\Gamma}(G_1 1/0)=\ddot{\lambda}_1\overrightarrow{x_0}+\ddot{\theta}_1(a_1\overrightarrow{y_1}-b_1\overrightarrow{x_1})-\dot{\theta}_1^2(a_1\overrightarrow{x_1}+b_1\overrightarrow{y_1})$

Moment dynamique en O_3 : $\overrightarrow{\delta}(O_3 1/0)=C_1\ddot{\theta}_1\overrightarrow{z_0}+m_1\left[\ddot{\lambda}_1\overrightarrow{x_0}+\ddot{\theta}_1(a_1\overrightarrow{y_1}-b_1\overrightarrow{x_1})-\dot{\theta}_1^2(a_1\overrightarrow{x_1}+b_1\overrightarrow{y_1})\right]\wedge(-a_1\overrightarrow{x_1}-b_1\overrightarrow{y_1})$

$$\overrightarrow{\delta}(O_3,1/0)=C_1\ddot{\theta}_1\overrightarrow{z_0}-m_1\left[\ddot{\lambda}_1(a_1\sin\theta_1+b_1\cos\theta_1)-\ddot{\theta}_1(a_1^2+b_1^2)\right]\overrightarrow{z_0}$$

Calcul pour la roue avant (2) :

$\overrightarrow{\delta}(O_3 2/0)=\overrightarrow{\delta}(O_2 2/0)+m_2\overrightarrow{\Gamma}(O_2 2/0)\wedge\overrightarrow{O_2O_3}$

Calcul de l'accélération $\overrightarrow{\Gamma}(O_2 2/0)$

$\overrightarrow{OO_2}=\lambda_1\overrightarrow{x_0}+L_1\overrightarrow{x_1}$

$\overrightarrow{V}(O_2 2/0)=\dot{\lambda}_1\overrightarrow{x_0}+\dot{\theta}_1 L_1\overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{\Gamma}(O_2 2/0)=\ddot{\lambda}_1\overrightarrow{x_0}+\ddot{\theta}_1 L_1\overrightarrow{y_1}-\dot{\theta}_1^2 L_1\overrightarrow{x_1}$

Moment dynamique en O_3 : $\overrightarrow{\delta}(O_3 2/0)=C_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{z_0}+m_2\left[\ddot{\lambda}_1\overrightarrow{x_0}+\ddot{\theta}_1 L_1\overrightarrow{y_1}-\dot{\theta}_1^2 L_1\overrightarrow{x_1}\right]\wedge -L_1\overrightarrow{x_1}$

$$\overrightarrow{\delta}(O_3,2/0)=C_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{z_0}-m_2.L_1\left[\ddot{\lambda}_1\sin\theta_1-\ddot{\theta}_1 L_1\right]\overrightarrow{z_0}$$

Actions extérieures appliquées à l'ensemble {1, 2} :

- pesanteur sur (2) : le poids $\overrightarrow{P_2}$ appliqué en O_2, de moment en O_3 :
  $\overrightarrow{O_3O_2}\wedge -P_2\overrightarrow{y_0}=L_1\overrightarrow{x_1}\wedge -P_2\overrightarrow{y_0}=-L_1P_2\cos\theta_1\overrightarrow{z_0}$
- pesanteur sur (1) : le poids $\overrightarrow{P_1}$ appliqué en G_1, de moment en O_3 :
  $\overrightarrow{O_3G_1}\wedge -P_1\overrightarrow{y_0}=(a_1\overrightarrow{x_1}+b_1\overrightarrow{y_1})\wedge -P_1\overrightarrow{y_0}=-P_1(a_1\cos\theta_1-b_1\sin\theta_1)\overrightarrow{z_0}$
- le moteur agit sur le cadre (1) en exerçant un couple de moment $-C_m\overrightarrow{z_0}$
- la liaison pivot (3) – (2) a un moment nul en O_3.

Soit l'équation (2) :

$$\boxed{C_1\ddot{\theta}_1-m_1\left[\ddot{\lambda}_1(a_1\sin\theta_1+b_1\cos\theta_1)+\ddot{\theta}_1(a_1^2+b_1^2)\right]+C_2\ddot{\theta}_2-m_2.L_1\left[\ddot{\lambda}_1\sin\theta_1-\ddot{\theta}_1 L_1\right]=-L_1P_2\cos\theta_1-P_1(a_1\cos\theta_1-b_1\sin\theta_1)-C_m}$$

EQUATION (3)

Moment dynamique de l'ensemble {(1), (2), (3)} : il est défini en H_3, en faisant la somme des moments dynamiques de (1), de (2) et de (3) : $\overrightarrow{\delta}(H_3,\{1,2,3\}/0)=\overrightarrow{\delta}(H_3 1/0)+\overrightarrow{\delta}(H_3 2/0)+\overrightarrow{\delta}(H_3,3/0)$

Calcul pour le cadre (1) :

Moment dynamique en H_3 : $\overrightarrow{\delta}(H_3 1/0)=\overrightarrow{\delta}(G_1 1/0)+m_1\overrightarrow{\Gamma}(G_1 1/0)\wedge\overrightarrow{G_1H_3}$

$\overrightarrow{\delta}(H_3 1/0)=C_1\ddot{\theta}_1\overrightarrow{z_0}+m_1\left[\ddot{\lambda}_1\overrightarrow{x_0}+\ddot{\theta}_1(a_1\overrightarrow{y_1}-b_1\overrightarrow{x_1})-\dot{\theta}_1^2(a_1\overrightarrow{x_1}+b_1\overrightarrow{y_1})\right]\wedge(-R\overrightarrow{y_0}-a_1\overrightarrow{x_1}-b_1\overrightarrow{y_1})$

Calcul pour la roue avant (2) :

Moment dynamique en H_3 : $\overrightarrow{\delta}(H_3 2/0)=\overrightarrow{\delta}(O_2 2/0)++m_2\overrightarrow{\Gamma}(O_2 2/0)\wedge\overrightarrow{O_2H_3}$

$$\overrightarrow{\delta}(H_3,2/0)=C_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{z_0}+m_2.L_1.\left[\ddot{\lambda}_1\overrightarrow{x_0}+\ddot{\theta}_1 L_1\overrightarrow{y_1}-\dot{\theta}_1^2 L_1\overrightarrow{x_1}\right]\wedge(-R\overrightarrow{y_0}-L_1\overrightarrow{x_1})$$

Calcul pour la roue arrière (3) :

Moment cinétique de la roue (3) : il est défini en O_3, centre d'inertie de la roue (3), point où est supposée définie sa matrice d'inertie.

$\overrightarrow{\sigma}(O_3,3/0) = \overline{\overline{I}}(O_3,3) \otimes \dot{\theta}_3 \overrightarrow{z_0} = C_3 \dot{\theta}_3 \overrightarrow{z_0}$

Moment dynamique : $\overrightarrow{\delta}(O_3,3/0) = \dfrac{d\overrightarrow{\sigma}(O_3,3/0)}{dt/(0)} = C_3 \ddot{\theta}_3 \overrightarrow{z_0}$

Moment dynamique en H_3 : $\overrightarrow{\delta}(H_3,3/0) = \overrightarrow{\delta}(O_3,3/0) + m_3 \overrightarrow{\Gamma}(O_3,3/0) \wedge \overrightarrow{O_3H_3}$, avec $O_3 = G_3$, centre d'inertie de la roue (3).

Calcul de l'accélération $\overrightarrow{\Gamma}(O_3,3/0)$

$\overrightarrow{OO_3} = \lambda_1 \overrightarrow{x_0}$

$\overrightarrow{V}(O_3,3/0) = \dot{\lambda}_1 \overrightarrow{x_0}$

$\overrightarrow{\Gamma}(O_3,3/0) = \ddot{\lambda}_1 \overrightarrow{x_0}$

En H_3 : $\overrightarrow{\delta}(H_3,3/0) = C_3 \ddot{\theta}_3 \overrightarrow{z_0} + m_3 \ddot{\lambda}_1 \overrightarrow{x_0} \wedge -R\overrightarrow{y_0} = (C_3 \ddot{\theta}_3 - m_3 \ddot{\lambda}_1 R)\overrightarrow{z_0}$

Actions extérieures appliquées à l'ensemble {1, 2, 3} :

- pesanteur sur (2) : le poids $\overrightarrow{P_2}$ appliqué en O_2, de moment en H_3 : $\overrightarrow{H_3O_2} \wedge -P_2 \overrightarrow{y_0} = -L_1 P_2 \cos\theta_1 \overrightarrow{z_0}$
- pesanteur sur (1) : le poids $\overrightarrow{P_1}$ appliqué en G_1, de moment en H_3 : $\overrightarrow{H_3G_1} \wedge -P_1 \overrightarrow{y_0} = -P_1(a_1 \cos\theta_1 - b_1 \sin\theta_1)\overrightarrow{z_0}$
- pesanteur sur (3) : le poids $\overrightarrow{P_3}$ appliqué en O_3, a un moment nul en H_3 ;
- le contact ponctuel du sol sur la roue (3) a un moment nul en H_3.

Nota : le moteur est interne à l'ensemble isolé…

Soit l'équation (3) :

Il reste à conclure…

Le système d'équations n'est pas intégrable dans le cas général.
Seule l'équation (1) indépendante des deux autres donne un résultat simple :

$C_2 \ddot{\theta}_2 = 0$, soit $\dot{\theta}_2 = Cte$: la vitesse de rotation de la roue avant est constante…