l'Ingénieur

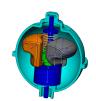
Sciences

Industrielles de

Chapitre 3 - Cinétique et application du Principe Fondamental de la

Dynamique

Application

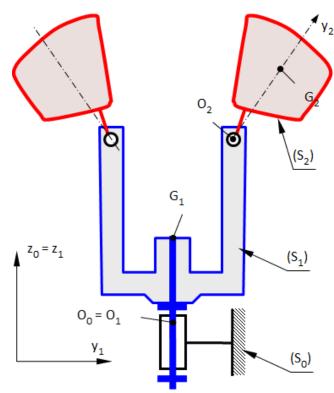


Application – Régulateur centrifuge

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor (S_1) et la masselotte (S_2) représentés schématiquement ci-dessous.



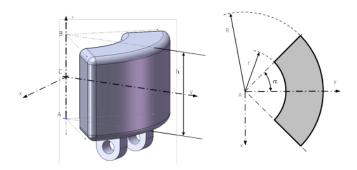
1

- (S_1) est en liaison pivot d'axe $(O_1, \overrightarrow{z_0})$ avec (S_0) .
- (S_2) est en liaison pivot d'axe $(O_2, \overrightarrow{x_1})$ avec (S_1) .
- $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) = \theta_1$.
- $(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}) = \theta_2$.
- $\bullet \overrightarrow{O_0G_1} = h_1 \overrightarrow{z_0}.$ $\bullet \overrightarrow{O_0O_2} = d_1 \overrightarrow{z_0} + L_1 \overrightarrow{y_1}.$ $\bullet \overrightarrow{O_2G_2} = L_2 \overrightarrow{y_2}.$

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.





Question 1 Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Correction Le solide 1 est axisymétrique. En tout point de l'axe du solide, la matrice d'inertie sera diagonale. On

a donc
$$I_{O_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}$$

Le solide 2 admet le plan $(\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ comme plan de symétrie. Les produits d'inertie dépendant de x sont nuls.

On a donc
$$I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$
.

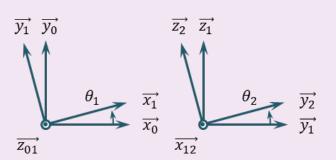
Afin de ne pas trop alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesse de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Question 2 Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

Question 3 Déterminer :

- le torseur dynamique $\{\delta(S_1/R_0)\}\ en\ O_1$;
- le torseur dynamique $\{\delta(S_2/R_0)\}$ en O_2 .

Correction



Mouvement du solide 1/0

On a:
$$\{\mathscr{V}(S_1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta_1} \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_1} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta_1} \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{O_1}.$$

 O_1 est un point fixe dans R_0 .

$$\{\sigma(S_1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ I_{O_1}(S_1)\overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \end{array}\right\}_{O_1} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{z}_1 \end{array}\right\}_{O_1} \text{ et } \{\delta(S_1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_1\ddot{\theta}_1\overrightarrow{z}_1 \end{array}\right\}_{O_1}.$$

Mouvement du solide 2/0

On a:
$$\{\mathcal{V}(S_2/R_0)\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{\dot{\theta}_1 \, \overline{z_1} + \dot{\theta}_2 \, \overline{x_2}}{V(G_2 \in S_2/R_0)} \end{array}\right\}_{G_2} = \left\{\begin{array}{l} \dot{\theta}_1 \, \overline{z_1} + \dot{\theta}_2 \, \overline{x_2}\\ L_2 \dot{\theta}_2 \, \overline{z_2} - \dot{\theta}_1 L_1 \, \overline{x_1} \end{array}\right\}_{G_2}.$$

$$V(G_2 \in S_2/R_0) = V(G_2 \in S_2/S_1) + V(G_2 \in S_1/R_0)$$

$$= \underbrace{\underbrace{V(O_2 \in S_2/S_1)}_{\overrightarrow{O}} + \overrightarrow{G_2O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}}_{\overrightarrow{O}} + \underbrace{\underbrace{V(O_0 \in S_1/R_0)}_{\overrightarrow{O}} + \overrightarrow{G_2O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)}}_{\overrightarrow{O}} + \underbrace{\overrightarrow{G_2O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)}}_{\overrightarrow{O}} + \underbrace{\overrightarrow{G_1O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)}$$



$$\begin{split} &= \left(-L_2 \overrightarrow{y_2} \wedge \hat{\theta}_2 \overrightarrow{z_2}\right) + \left(-\left(d_1 \overrightarrow{z_0} + L_1 \overrightarrow{y_1} + L_2 \overrightarrow{y_2}\right) \wedge \hat{\theta}_1 \overrightarrow{z_1}\right) = L_2 \hat{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - \hat{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos \theta_2\right) \overrightarrow{x_1} \\ G_2 \text{ est le centre de gravité de } S_2, \\ &\{\sigma(S_2/R_0)\} = \begin{cases} m_2 \left(L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos \theta_2\right) \overrightarrow{x_1}\right) \\ I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)} = \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} = \dot{\theta}_1 \left(\cos \theta_2 \overrightarrow{z_2} + \sin \theta_2 \overrightarrow{y_2}\right) + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} \\ I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} \\ \begin{cases} \dot{\delta}(S_2/R_0) \right\} = \begin{cases} \frac{d}{d_1} \left(L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos \theta_2\right) \overrightarrow{x_1}\right) \\ \left[\frac{d}{d_1} \left(L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos \theta_2\right) \overrightarrow{x_1}\right) \right]_{R_0} \end{cases}_{G_2} \\ = L_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} + L_2 \dot{\theta}_2 \left(\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_2 \overrightarrow{y_2}\right) - \ddot{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos \theta_2\right) \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_1 \left(-L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2\right) \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_1^2 \left(L_1 + L_2 \cos \theta_2\right) \overrightarrow{y_1} \\ = L_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} + L_2 \dot{\theta}_2 \left(\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_2 \overrightarrow{y_2}\right) - \ddot{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos \theta_2\right) \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_1 \left(-L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2\right) \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_1^2 \left(L_1 + L_2 \cos \theta_2\right) \overrightarrow{y_1} \\ = L_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} + L_2 \dot{\theta}_2 \left(\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_2 \overrightarrow{y_2}\right) - \ddot{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos \theta_2\right) \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_1 \left(-L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2\right) \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_1^2 \left(L_1 + L_2 \cos \theta_2\right) \overrightarrow{y_1} \\ = L_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - L_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2} + \left(2L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \ddot{\theta}_1 \left(L_1 + L_2 \cos \theta_2\right)\right) \overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}_1^2 \left(L_1 + L_2 \cos \theta_2\right) \overrightarrow{y_1} \\ = \left(\frac{d}{d_1} I_{G_2} \left(S_2\right) \overline{\Omega(S_2/R_0)}\right)_{R_0} = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} A_2 \ddot{\theta}_2 \\ B_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -D_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -D_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \partial \cos \theta_2 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -D_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \partial \cos \theta_2 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -D_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \partial \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \partial \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}$$

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \overrightarrow{x_2}$.

$$\begin{aligned} & \text{Correction} \quad \overline{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \overline{x_2} \\ &= \left(\overline{\delta(G_2, 2/0)} + \overline{O_2 G_2} \wedge M_2 \overline{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \right) \cdot \overline{x_2} \\ &= \left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} + \overline{O_2 G_2} \wedge M_2 \overline{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \right) \cdot \overline{x_2} \\ &= \left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \overline{x_2} \right]_{R_0} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} \cdot \overline{x_2} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \overline{x_2} \right]_{R_0} \end{aligned}$$

Question 5 Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique $\{\delta(E/R_0)\}$ en O_2 ?

Question 6 Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre S_1 et S_2 (couple maximal 0.46 Nm) , une seconde avec frottement (couple maximal 0.1 Nm).

Question 7 Commenter ces résultats.



