

## TD 02

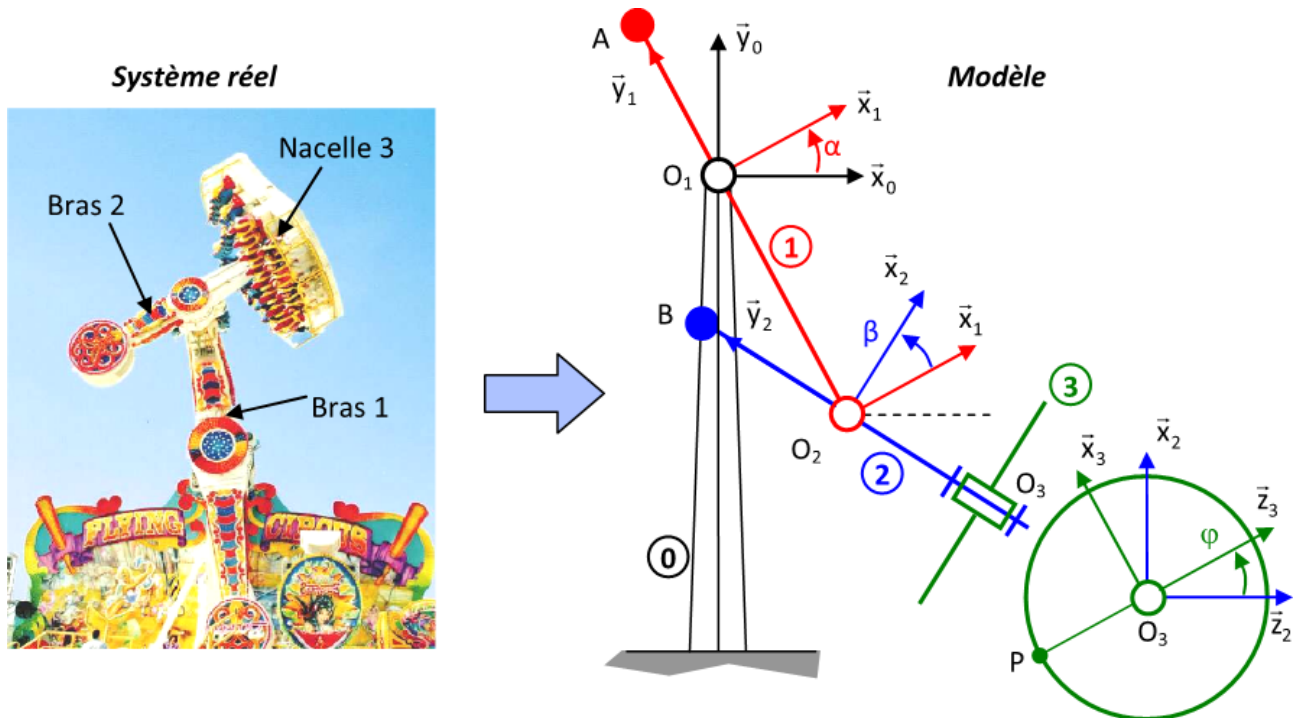


## Magic Arms

Florestan Mathurin

## Savoirs et compétences :

La manège Magic Arms dont la modélisation ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel est composé d'une structure métallique d'environ 12 m de haut avec deux bras mobiles. Les passagers s'assoient sur 39 pièces disposées sur une plate-forme tournante. Dès que tous les passagers sont assis et attachés, la nacelle tourne autour de son axe, le bras principal (bras 1) et le bras secondaires (bras 2), liés l'un à l'autre au début du cycle, commencent à tourner. Après 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les deux bras se désindexent et se mettent à tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par ordinateur.

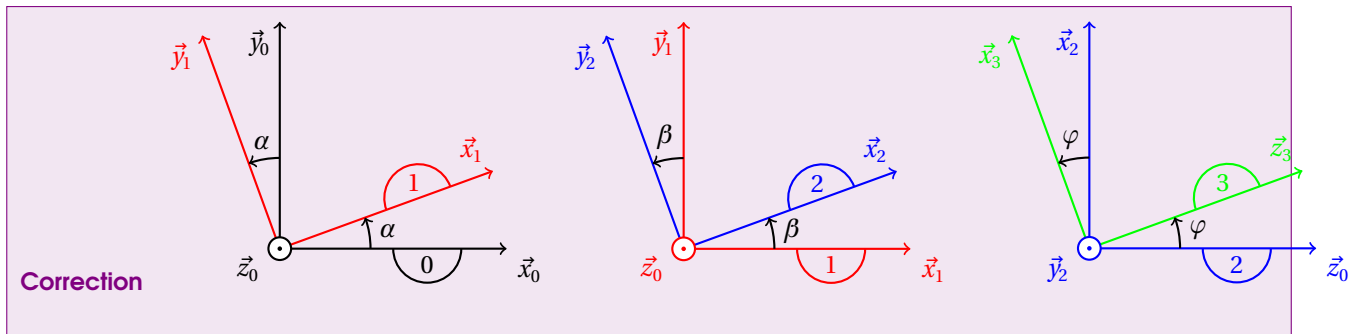


Exigences techniques	Critère	Niveau
Exigence 1.2	Accélération subie par le passager	2,5g maxi

Le manège, schématisé ci-dessus, comporte :

- un bras principal 1 assimilé à une barre  $AO_1O_2$ . Il est en liaison pivot parfait d'axe  $(O_1, \vec{z}_1)$  caractérisée par le paramètre  $\alpha$  avec le bâti 0. On pose  $\vec{O_1O_2} = -l_1 \vec{y}_1$  ;
- un bras secondaire 2 assimilé à une barre  $BO_2O_3$ . Il est en liaison pivot parfait d'axe  $(O_2, \vec{z}_2)$  caractérisée par le paramètre  $\beta$  avec le bras principal 1. On pose  $\vec{O_2O_3} = -l_2 \vec{y}_2$  ;
- une nacelle 2 assimilée à un disque de centre  $O_3$  et de rayon  $R$ . Elle est en liaison parfaite d'axe  $(O_3, \vec{y}_2)$  caractérisée par le paramètre  $\varphi$  avec le bras 2. On s'intéresse plus particulièrement à un passager considéré comme un point matériel  $P$  tel que  $\vec{O_3P} = -R \vec{z}_3$ .

**Question 1** Construire les figures planes associées au schéma cinématique.



**Question 2** Calculer  $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$ ,  $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$ .

**Correction**

$$\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \dot{\beta} \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{3/2} = \dot{\varphi} \vec{y}_2$$

**Question 3** Calculer  $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$ .

**Correction**

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \overrightarrow{\Omega}_{2/1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0}$$

$$= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{3/0} = \overrightarrow{\Omega}_{3/2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/0}$$

$$= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\varphi} \vec{y}_2$$

**Question 4** Calculer les produits vectoriels suivants :  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2$ ,  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1$ ,  $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0$ .

**Correction**

$$\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3 = \sin \varphi \vec{y}_2$$

$$\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\sin \varphi \vec{y}_2$$

$$\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \vec{y}_2$$

$$= -\cos \varphi \vec{y}_2$$

$$\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0 = (\cos \beta \vec{x}_1 + \sin \beta \vec{y}_1) \wedge \vec{x}_0$$

$$= -\cos \beta \sin \alpha \vec{z}_0 - \sin \beta \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \vec{z}_0$$

$$= (-\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha) \vec{z}_0$$

$$= -\sin(\beta + \alpha) \vec{z}_0$$

$$\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0 = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \vec{y}_2$$

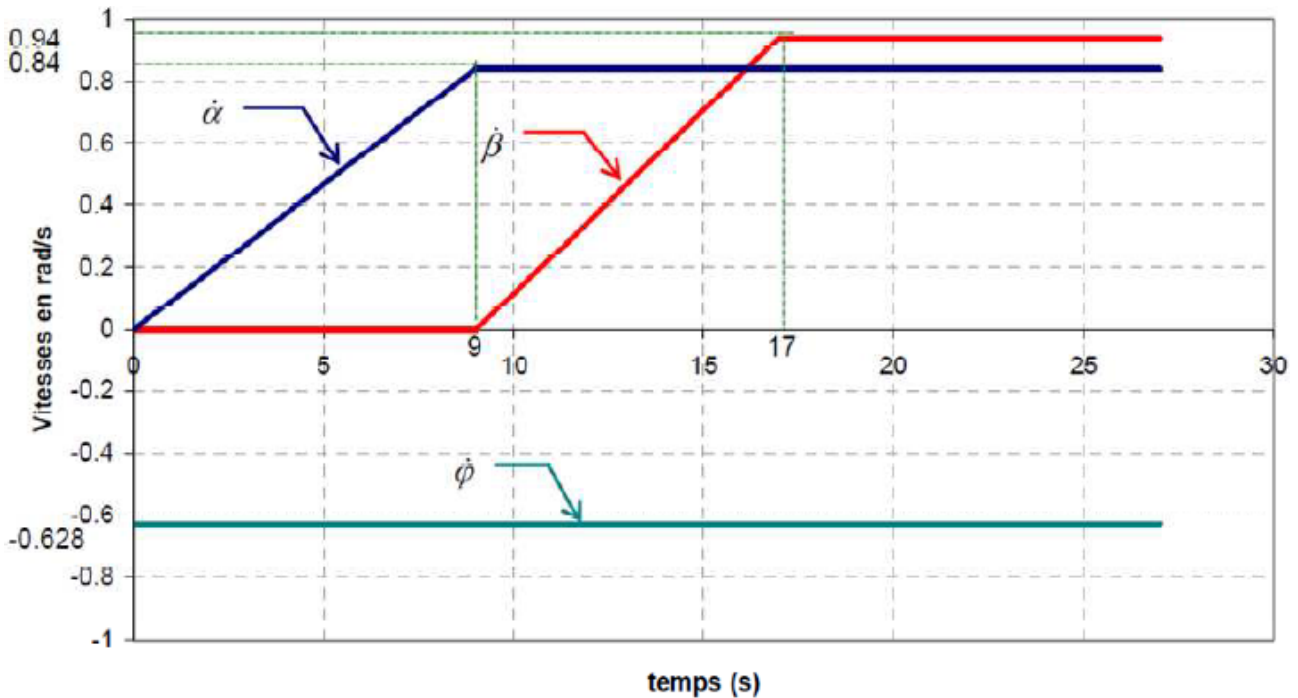
$$= -\cos \varphi \vec{y}_2$$

**Question 5** Calculer  $\overrightarrow{V(O_2 \in 2/0)}$ ,  $\overrightarrow{V(O_3 \in 3/0)}$  et  $\overrightarrow{V(P \in 3/0)}$ .

Correction

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_{O_2 \in 2/0} &= \vec{V}_{O_2 \in 2/1} + \vec{V}_{O_2 \in 1/0} \\
 &= \vec{V}_{O_1 \in 1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1 O_2} \\
 &= \dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge (-l_1 \vec{y}_1) \\
 \vec{V}_{O_2 \in 2/0} &= l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 \\
 \vec{V}_{O_3 \in 3/0} &= \vec{V}_{O_3 \in 3/2} + \vec{V}_{O_3 \in 2/0} \\
 &= \vec{V}_{O_2 \in 2/0} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{O_2 O_3} \\
 &= l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \wedge (-l_2 \vec{y}_2) \\
 \vec{V}_{O_3 \in 3/0} &= l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 \\
 \vec{V}_{P \in 3/0} &= \vec{V}_{O_3 \in 3/0} + \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \overrightarrow{O_3 P} \\
 &= l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 + ((\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\varphi} \vec{y}_2) \wedge (-R \vec{z}_3) \\
 \vec{V}_{P \in 3/0} &= l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3
 \end{aligned}$$

On donne l'évolution des vitesses angulaires des moteurs du manège en fonction du temps.



**Question 6** Déterminer les valeurs des paramètres  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  et  $\dot{\varphi}$  puis l'expression analytique des positions angulaires  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  et  $\varphi(t)$  dans l'intervalle de temps [17;27] secondes en sachant qu'à l'instant  $t = 17$ s, on a  $\alpha = 10.5$ rad,  $\beta = 3.76$ rad et  $\varphi = -10.676$ rad.

**Correction** Dans l'intervalle de temps compris entre 17 et 27 secondes, les vitesses angulaires sont constantes.

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0.84 \text{ rad/s} \\ \dot{\beta} = 0.94 \text{ rad/s} \\ \dot{\varphi} = -0.628 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Ainsi, par intégration :

$$\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^t \dot{\alpha} d\tau$$

**Question 7** Déterminer les valeurs numériques à l'instant  $t_1 = 19,8$  s de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\varphi$ .

**Correction** Pour  $t = 19,8$  s,

$$\begin{cases} \alpha = 0,84 \times (19,8 - 17) + 10,5 = 12,85 \text{ rad} \\ \beta = 0,94 \times (19,8 - 17) + 3,76 = 6,39 \text{ rad} \\ \varphi = -0,628 \times (19,8 - 17) - 10,676 = 12,43 \text{ rad} \end{cases}$$

**Question 8** On pose  $\overrightarrow{V}(P \in 3/0) = V_{x2} \overrightarrow{x_2} + V_{y2} \overrightarrow{y_2} + V_{z2} \overrightarrow{z_2}$ . Déterminer les expressions littérales de  $V_{x2}$ ,  $V_{y2}$ ,  $V_{z2}$  puis les valeurs numériques de à  $t_1 = 19,8$  s. (On donne :  $l_1 = 3,9$  m,  $l_2 = 2,87$  m,  $R = 2,61$  m.)

**Correction** Il s'agit de projeter le vecteur  $\overrightarrow{V}_{P \in 3/0}$  dans la base  $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_0})$ . En effet, le vecteur  $\overrightarrow{z_2}$  est identique au vecteur  $\overrightarrow{z_0}$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}_{P \in 3/0} &= V_{x2} \overrightarrow{x_2} + V_{y2} \overrightarrow{y_2} + V_{z2} \overrightarrow{z_0} \\ V_{x2} &= \overrightarrow{V}_{P \in 3/0} \cdot \overrightarrow{x_2} \\ &= (l_1 \dot{\alpha} \overrightarrow{x_1} + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{x_2} - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} - R \dot{\varphi} \overrightarrow{x_3}) \cdot \overrightarrow{x_2} \\ V_{x2} &= l_1 \dot{\alpha} \cos \beta + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - R \dot{\varphi} \cos \varphi \\ V_{y2} &= \overrightarrow{V}_{P \in 3/0} \cdot \overrightarrow{y_2} \\ &= (l_1 \dot{\alpha} \overrightarrow{x_1} + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{x_2} - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} - R \dot{\varphi} \overrightarrow{x_3}) \cdot \overrightarrow{y_2} \\ V_{y2} &= -l_1 \dot{\alpha} \sin \beta - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \\ V_{z2} &= \overrightarrow{V}_{P \in 3/0} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &= (l_1 \dot{\alpha} \overrightarrow{x_1} + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{x_2} - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} - R \dot{\varphi} \overrightarrow{x_3}) \cdot \overrightarrow{z_0} \\ V_{z2} &= R \dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

Valeurs numériques à  $t = 19,8$  s :

$$\begin{aligned} V_{x2} &= 3,9 \times 0,84 \times \cos(6,39) + 2,87 \times (0,84 + 0,94) + 2,61 \times 0,628 \times \cos(12,43) \\ &= 9,99 \text{ m/s} \\ V_{y2} &= -3,9 \times 0,84 \times \sin(6,39) - 2,61 \times \sin(12,43) \times (0,84 + 0,94) \\ &= -0,28 \text{ m/s} \\ V_{z2} &= -2,61 \times 0,628 \times \sin(12,43) \\ &= -0,22 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Question 9** Calculer  $\overrightarrow{\Gamma}(P \in 3/0)$ .

Correction

$$\begin{aligned}
 \vec{\Gamma}_{P \in 3/0} &= \left( \frac{d \vec{V}_{P \in 3/0}}{dt} \right)_0 \\
 &= \frac{d}{dt} (l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3)_0 \\
 &= l_1 \ddot{\alpha} \vec{x}_1 + l_1 \dot{\alpha} \underbrace{\left( \frac{d \vec{x}_1}{dt} \right)_0}_{\ddot{\alpha} \vec{y}_1} + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{x}_2 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \underbrace{\left( \frac{d \vec{x}_2}{dt} \right)_0}_{(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2} - R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 \\
 &\quad - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \underbrace{\left( \frac{d \vec{y}_2}{dt} \right)_0}_{-(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2} - R \ddot{\varphi} \vec{x}_3 - R \dot{\varphi} \left( \frac{d \vec{x}_3}{dt} \right)_0 \\
 \left( \frac{d \vec{x}_3}{dt} \right)_0 &= \left( \frac{d \vec{x}_3}{dt} \right)_3 + \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{x}_3 \\
 &= ((\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\varphi} \vec{y}_2) \wedge \vec{x}_3 \\
 &= (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \varphi \vec{y}_2 - \dot{\varphi} \vec{z}_3
 \end{aligned}$$

D'où :

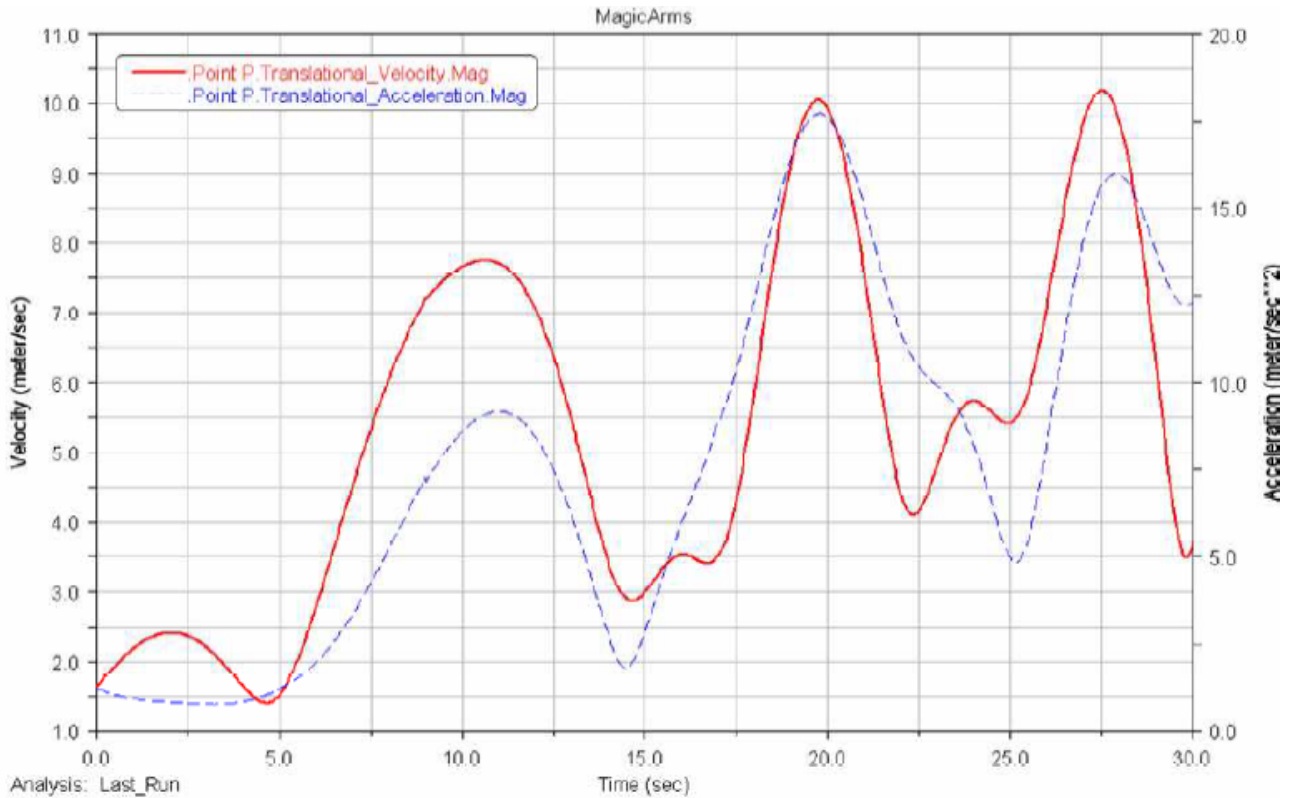
$$\begin{aligned}
 \vec{\Gamma}_{P \in 3/0} &= l_1 \ddot{\alpha} \vec{x}_1 + l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{x}_2 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 \\
 &\quad - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 - R \ddot{\varphi} \vec{x}_3 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3
 \end{aligned}$$

**Question 10** Calculer  $\overline{\Gamma(P \in 3/0)}$  dans l'intervalle de temps  $[17; 27]$  secondes pour lequel les vitesses angulaires sont constantes.

**Correction** Dans le cas où les vitesses angulaires sont constantes, les accélérations angulaires  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{\beta}$ , et  $\ddot{\varphi}$  sont nulles. L'expression de  $\vec{\Gamma}_{P \in 3/0}$  se simplifie donc :

$$\vec{\Gamma}_{P \in 3/0} = l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3$$

Le graphe ci-dessous, obtenu par simulation numérique, présente le module de la vitesse du passager  $P$  par rapport au bâti 0 ainsi que le module de l'accélération du passager  $P$  par rapport au bâti 0 en fonction du temps.



**Question 11** Comparer les résultats obtenus à la question 6 à ceux du graphe pour le temps  $t_1 = 19,8$  s..

**Correction** Le graphe montre qu'à  $t = 19,8$  s, l'intensité du vecteur  $\vec{V}_{P \in 3/0}$  vaut 10 m/s. Or d'après la question 8,

$$\begin{aligned} \left\| \vec{V}_{P \in 3/0} \right\| &= \sqrt{V_{x2}^2 + V_{y2}^2 + V_{z2}^2} \\ &= \sqrt{9,99^2 + 0,28^2 + 0,22^2} \\ &= \boxed{10 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

On constate que le calcul littéral nous donne le même résultat que l'exploitation de la courbe.

**Question 12** Relever l'accélération maximale subie par le passager et conclure vis-à-vis du CdCF.

**Correction** D'après la courbe de l'accélération (en pointillés), la valeur maximale de l'accélération subie par le passager vaut 17,5 m/s<sup>2</sup>. Le cahier des charges exige que l'accélération maximale ne dépasse pas 2,5 g, soit 24,5 m/s<sup>2</sup>. Le cahier des charges est donc respecté.

- 1.
2.  $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \vec{z}_0$ ,  $\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\beta} \vec{z}_0$ ,  $\vec{\Omega}_{3/2} = \dot{\varphi} \vec{y}_2$ .
3.  $\vec{\Omega}_{2/0} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0$ ,  $\vec{\Omega}_{3/0} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 + \dot{\varphi} \vec{y}_2$ ;
4.  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3 = \sin \varphi \vec{y}_2$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\sin \varphi \vec{y}_2$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 = -\cos \varphi \vec{y}_2$ ,  $\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1 = \vec{0}$ ,  $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0 = -\sin(\beta + \alpha) \vec{z}_0$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0 = -\cos \varphi \vec{y}_2$ .
5.  $\vec{V}_{O_2 \in 2/0} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1$ ,  $\vec{V}_{O_3 \in 3/0} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2$ ,  $\vec{V}_{P \in 3/0} = l_1 \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_2 - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \dot{\varphi} \vec{x}_3$ .
6.  $\dot{\alpha} = 0,84 \text{ rad/s}$ ,  $\dot{\beta} = 0,94 \text{ rad/s}$ ,  $\dot{\varphi} = -0,628 \text{ rad/s}$  et  $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^t \dot{\alpha} d\tau$ .
7.  $\alpha = \boxed{12,85 \text{ rad}}$ ,  $\beta = \boxed{6,39 \text{ rad}}$ ,  $\varphi = \boxed{12,43 \text{ rad}}$ .
8.  $V_{x2} = l_1 \dot{\alpha} \cos \beta + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - R \dot{\varphi} \cos \varphi = \boxed{9,99 \text{ m/s}}$ ,  $V_{y2} = -l_1 \dot{\alpha} \sin \beta - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = \boxed{-0,28 \text{ m/s}}$ ,  $V_{z2} = R \dot{\varphi} \sin \varphi = \boxed{-0,22 \text{ m/s}}$ .
9.  $\vec{\Gamma}_{P \in 3/0} = l_1 \ddot{\alpha} \vec{x}_1 + l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{x}_2 + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 - R \ddot{\varphi} \vec{x}_3 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3$ .
10.  $\vec{\Gamma}_{P \in 3/0} = l_1 \dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{y}_2 - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2 + R \dot{\varphi}^2 \vec{z}_3$ .

11.  $\left\| \vec{V}_{P \in 3/0} \right\| = \boxed{10 \text{ m/s}}$   
12. .