Application 01

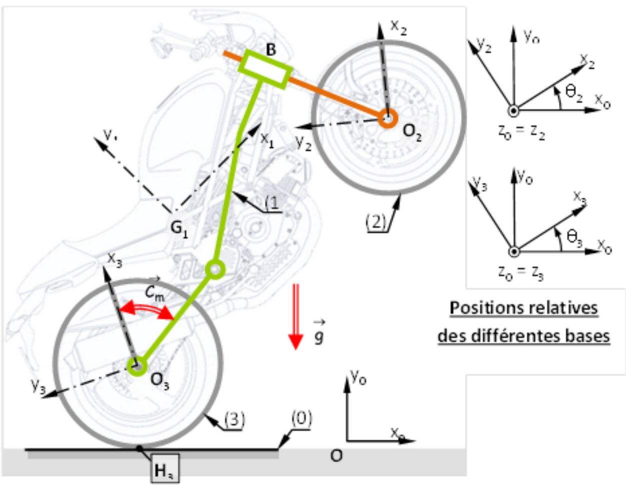
Chaîne ouverte – Wheeling moto

Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

Modélisation

L'étude proposée concerne l'étude dynamique d'une moto dans une phase de wheeling. Il s'agit d'une figure acrobatique consistant à soulever la roue avant, et de ne garder que l'appui sous la roue arrière. La moto est supposée se déplacer en ligne droite, sur une route horizontale, et l'étude menée est cinématiquement plane. Le modèle d'étude est sur la figure ci-dessous.



Positions relatives des différentes bases

- $\mathscr{R}_0 = \left(O_0; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ est un repère supposé galiléen, où $\overrightarrow{x_0}$ est dirigé suivant la vitesse de la moto et $\overrightarrow{y_0}$ suivant la verticale ascendante ;
- $\mathscr{R}_1 = \left(G_1; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ est un repère lié à l'ensemble considéré indéformable {cadre + bras arrière + fourche avant + pilote}. On note $\theta_1 = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right)$;
- $\mathscr{R}_2 = \left(O_2; \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ est un repère lié à la roue avant (2), de rayon R et de centre O_2 tel que $\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_0}$. On note $\theta_2 = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}\right)$;
- $\mathscr{R}_3 = \left(O_3; \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3}\right)$ est un repère lié à la roue arrière (3), de rayon R et de centre O_3 tel que $\overrightarrow{z_3} = \overrightarrow{z_0}$. On note $\theta_3 = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}\right)$. Les contacts entre les roues **(2)** et **(3)** et le sol **(0)** sont modélisés par des liaisons ponctuelles en H_2 et H_3.

On note :

- $\overrightarrow{O O_3} = \lambda \overrightarrow{x_0} + R \overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{O_3 O_2} = L_1 \overrightarrow{x_1}$;
- $\overrightarrow{O_3 G_1} = a_1 \overrightarrow{x_1} + b_1 \overrightarrow{y_1}$;
- $\overrightarrow{H_3 O_3} = R \overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{H_2 O_2} = R \overrightarrow{y_0}$;
- $G_2 = O_2$ et $G_3 = O_3$.

On note G_i le centre d'inertie, m_i la masse et C_i le moment d'inertie par rapport à l'axe de la pièce **(i)**.

Étude dynamique

La transmission exerce sur la roue arrière un couple moteur $\overrightarrow{C_m} = C_m \overrightarrow{z_0}$. On suppose que l'adhérence roue/-sol est suffisante pour assurer le roulement sans glissement de la roue **(3)** au contact en H avec le sol. La situation initiale est définie au moment où la roue avant quitte le contact avec le sol, avec $\dot{\theta}_1 = 0$ (après $\neq 0$).

Question 1 *Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling. Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en H_3.*

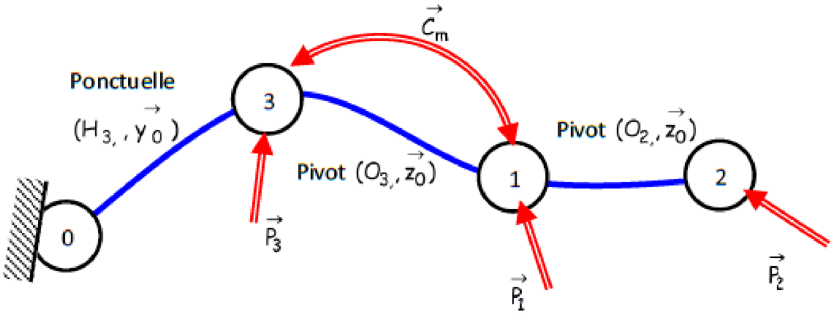
Question 2 *En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer le mouvement de l'ensemble, en précisant :*

- *élément(s) isolé(s) ;*
- *théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.*

Question 3 *Mettre en place les équations précédentes. Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.*

Eléments de corrigé

Q1- Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling.
Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en H_3.



Si un considère des liaisons parfaites, en particulier en H_3 (liaison sans frottement), l'ensemble modélisé en 2D est isostatique et comporte 4 mobilités :

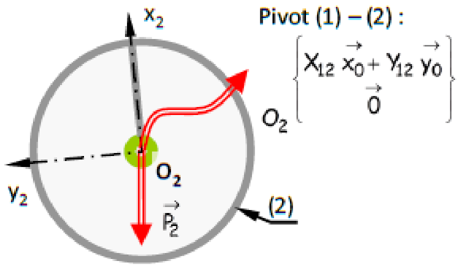
- déplacement suivant $\vec{x}_0$ du centre d'inertie G_1 du cadre (1) par rapport au sol : paramètre λ_1 ;
- position angulaire du cadre (1) par rapport au sol : paramètre $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- position angulaire de la roue (3) par rapport au sol : paramètre $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$;
- position angulaire de la roue (2) par rapport au sol : paramètre $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$.

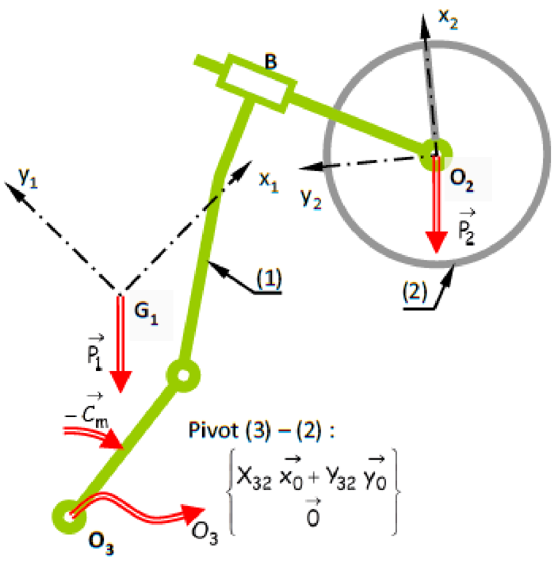
La propriété de roulement sans glissement en H_3 entre la roue (3) et le sol (0) introduit une relation entre les paramètres de position.
Il y a donc 3 équations du mouvement issues de l'application du principe fondamental de la dynamique.

Q2- En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer le mouvement de l'ensemble :
• élément(s) isolé(s) ;
• théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.

Les trois équations sont obtenues en isolant successivement :

- la roue avant (2) :
  équation du moment dynamique en O_2, en projection sur $\vec{z}_0$. Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison pivot (1) – (2) ;

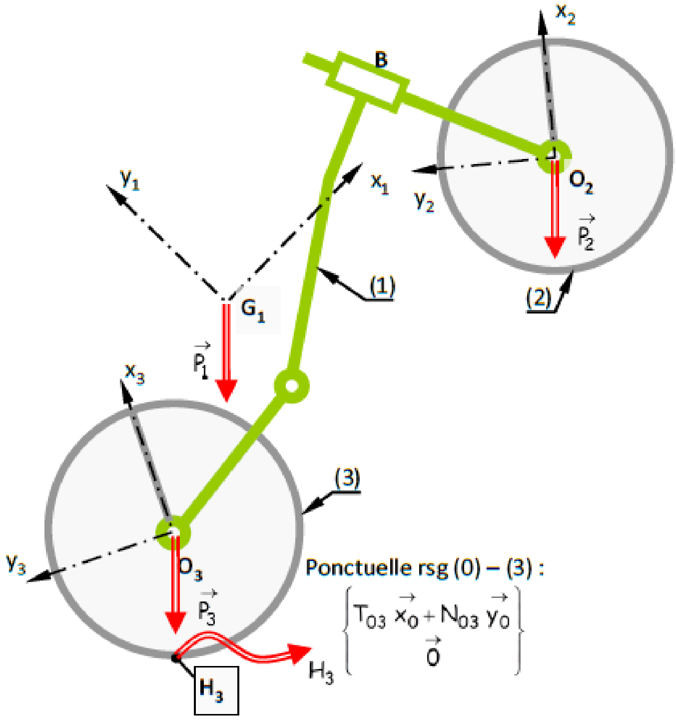




- ensemble {roue avant (2), cadre (1)} :

équation du moment dynamique en O_3, en projection sur $\vec{z}_0$.
Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison pivot (3) – (1) ;

- ensemble {roue avant (2), cadre (1), roue arrière (3)} :
  équation du moment dynamique en H_3, en projection sur $\vec{z_0}$.
  Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison ponctuelle avec RsG (0) – (3) ;



Q3- Mettre en place les équations précédentes.
Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.

Equation (1)

Moment cinétique de la roue (2) : il est défini en O_2, centre d'inertie de la roue (2), point où est supposée définie sa matrice d'inertie : $\vec{\sigma}(O_2,2/0)=\bar{\bar{I}}(O_2,2)\otimes\dot{\theta}_2\,\vec{z_0}=C_2\,\dot{\theta}_2\,\vec{z_0}$

Moment dynamique : $\vec{\delta}(O_2,2/0)=\dfrac{d\,\vec{\sigma}(O_2,2/0)}{dt\,/(0)}=C_2\,\ddot{\theta}_2\,\vec{z_0}$

Actions extérieures sur la roue (2) :

- pesanteur : le poids $\vec{P_2}$ est supposé appliqué en O_2, donc de moment nul en ce point ;
- la liaison pivot (1) – (2) a un moment nul en O_2.

Soit l'équation (1) : $\boxed{C_2\,\ddot{\theta}_2=0}$

Equation (2)

Moment dynamique de l'ensemble {(1), (2)} : il est défini en O_3, en faisant la somme des moments dynamiques de (1) et de (2) : $\vec{\delta}(O_3,\{1,2\}/0)=\vec{\delta}(O_3,1/0)+\vec{\delta}(O_3,2/0)$

Calcul pour le cadre (1) :

Moment cinétique du cadre (1) : il est défini en G_1, centre d'inertie du cadre (1), point où est supposée définie sa matrice d'inertie : $\vec{\sigma}(G_1,1/0)=\bar{\bar{I}}(G_1,1)\otimes\dot{\theta}_1\,\vec{z_0}=C_1\,\dot{\theta}_1\,\vec{z_0}$

Moment dynamique : $\vec{\delta}(G_1,1/0)=\dfrac{d\,\vec{\sigma}(G_1,1/0)}{dt\,/(0)}=C_1\,\ddot{\theta}_1\,\vec{z_0}$

Calcul en O_3 : $\vec{\delta}(O_3,1/0)=\vec{\delta}(G_1,1/0)+m_1\,\vec{\Gamma}(G_1,1/0)\wedge\vec{G_1O_3}$

Calcul de l'accélération $\vec{\Gamma}(G_1,1/0)$: pour ce calcul, il est plus adroit de repérer la position du cadre (1) par rapport au sol (0) en définissant comme paramètre λ_1 : $\vec{OO_3}=\lambda_1\vec{x_0}$.
Le point O est un point lié au sol, situé à la distance R du plan de contact de la roue avec la chaussée.

$\vec{OG_1} = \vec{OO_3} + \vec{O_3G_1} = \lambda_1 \vec{x_0} + a_1 \vec{x_1} + b_1 \vec{y_1}$

$\vec{V}(G_1,1/0) = \dot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \dot{\theta}_1 (a_1 \vec{y_1} - b_1 \vec{x_1})$

$\vec{\Gamma}(G_1,1/0) = \ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \ddot{\theta}_1 (a_1 \vec{y_1} - b_1 \vec{x_1}) - \dot{\theta}_1^2 (a_1 \vec{x_1} + b_1 \vec{y_1})$

Moment dynamique en O_3 : $\vec{\delta}(O_3,1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z_0} + m_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \ddot{\theta}_1 (a_1 \vec{y_1} - b_1 \vec{x_1}) - \dot{\theta}_1^2 (a_1 \vec{x_1} + b_1 \vec{y_1}) \right] \wedge (-a_1 \vec{x_1} - b_1 \vec{y_1})$

$$\vec{\delta}(O_3,1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z_0} - m_1 \left[\ddot{\lambda}_1 (a_1 \sin\theta_1 + b_1 \cos\theta_1) - \ddot{\theta}_1 (a_1^2 + b_1^2) \right] \vec{z_0}$$

Calcul pour la roue avant (2) :

$\vec{\delta}(O_3,2/0) = \vec{\delta}(O_2,2/0) + m_2 \vec{\Gamma}(O_2,2/0) \wedge \vec{O_2O_3}$

Calcul de l'accélération $\vec{\Gamma}(O_2,2/0)$

$\vec{OO_2} = \lambda_1 \vec{x_0} + L_1 \vec{x_1}$

$\vec{V}(O_2,2/0) = \dot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \dot{\theta}_1 L_1 \vec{y_1}$

$\vec{\Gamma}(O_2,2/0) = \ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \ddot{\theta}_1 L_1 \vec{y_1} - \dot{\theta}_1^2 L_1 \vec{x_1}$

Moment dynamique en O_3 : $\vec{\delta}(O_3,2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z_0} + m_2 \left[\ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \ddot{\theta}_1 L_1 \vec{y_1} - \dot{\theta}_1^2 L_1 \vec{x_1} \right] \wedge -L_1 \vec{x_1}$

$$\vec{\delta}(O_3,2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z_0} - m_2.L_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \sin\theta_1 - \ddot{\theta}_1 L_1 \right] \vec{z_0}$$

Actions extérieures appliquées à l'ensemble {1, 2} :

- pesanteur sur (2) : le poids $\vec{P_2}$ appliqué en O_2, de moment en O_3 :
  $\vec{O_3O_2} \wedge -P_2 \vec{y_0} = L_1 \vec{x_1} \wedge -P_2 \vec{y_0} = -L_1 P_2 \cos\theta_1 \vec{z_0}$
- pesanteur sur (1) : le poids $\vec{P_1}$ appliqué en G_1, de moment en O_3 :
  $\vec{O_3G_1} \wedge -P_1 \vec{y_0} = (a_1 \vec{x_1} + b_1 \vec{y_1}) \wedge -P_1 \vec{y_0} = -P_1 (a_1 \cos\theta_1 - b_1 \sin\theta_1) \vec{z_0}$
- le moteur agit sur le cadre (1) en exerçant un couple de moment $-C_m \vec{z_0}$
- la liaison pivot (3) – (2) a un moment nul en O_3.

Soit l'équation (2) :

$$\boxed{C_1 \ddot{\theta}_1 - m_1 \left[\ddot{\lambda}_1 (a_1 \sin\theta_1 + b_1 \cos\theta_1) + \ddot{\theta}_1 (a_1^2 + b_1^2) \right] + C_2 \ddot{\theta}_2 - m_2.L_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \sin\theta_1 - \ddot{\theta}_1 L_1 \right] = -L_1 P_2 \cos\theta_1 - P_1 (a_1 \cos\theta_1 - b_1 \sin\theta_1) - C_m}$$

EQUATION (3)

Moment dynamique de l'ensemble {(1), (2), (3)} : il est défini en H_3, en faisant la somme des moments dynamiques de (1), de (2) et de (3) : $\vec{\delta}(H_3,\{1,2,3\}/0) = \vec{\delta}(H_3,1/0) + \vec{\delta}(H_3,2/0) + \vec{\delta}(H_3,3/0)$

Calcul pour le cadre (1) :

Moment dynamique en H_3 : $\vec{\delta}(H_3,1/0) = \vec{\delta}(G_1,1/0) + m_1 \vec{\Gamma}(G_1,1/0) \wedge \vec{G_1H_3}$

$\vec{\delta}(H_3,1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z_0} + m_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \ddot{\theta}_1 (a_1 \vec{y_1} - b_1 \vec{x_1}) - \dot{\theta}_1^2 (a_1 \vec{x_1} + b_1 \vec{y_1}) \right] \wedge (-R \vec{y_0} - a_1 \vec{x_1} - b_1 \vec{y_1})$

Calcul pour la roue avant (2) :

Moment dynamique en H_3 : $\vec{\delta}(H_3,2/0) = \vec{\delta}(O_2,2/0) + +m_2 \vec{\Gamma}(O_2,2/0) \wedge \vec{O_2H_3}$

$$\vec{\delta}(H_3,2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z_0} + m_2.L_1. \left[\ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} + \ddot{\theta}_1 L_1 \vec{y_1} - \dot{\theta}_1^2 L_1 \vec{x_1} \right] \wedge (-R \vec{y_0} - L_1 \vec{x_1})$$

Calcul pour la roue arrière (3) :

Moment cinétique de la roue (3) : il est défini en O_3, centre d'inertie de la roue (3), point où est supposée définie sa matrice d'inertie.

$\vec{\sigma}(O_3,3/0) = \overline{\overline{I}}(O_3,3) \otimes \dot{\theta}_3 \vec{z_0} = C_3 \dot{\theta}_3 \vec{z_0}$

Moment dynamique : $\vec{\delta}(O_3,3/0) = \dfrac{d\,\vec{\sigma}(O_3,3/0)}{dt/(0)} = C_3 \ddot{\theta}_3 \vec{z_0}$

Moment dynamique en H_3 : $\vec{\delta}(H_3,3/0) = \vec{\delta}(O_3,3/0) + m_3 \vec{\Gamma}(O_3,3/0) \wedge \overrightarrow{O_3H_3}$, avec $O_3 = G_3$, centre d'inertie de la roue (3).

Calcul de l'accélération $\vec{\Gamma}(O_3,3/0)$

$\overrightarrow{OO_3} = \lambda_1 \vec{x_0}$

$\vec{V}(O_3,3/0) = \dot{\lambda}_1 \vec{x_0}$

$\vec{\Gamma}(O_3,3/0) = \ddot{\lambda}_1 \vec{x_0}$

En H_3 : $\vec{\delta}(H_3,3/0) = C_3 \ddot{\theta}_3 \vec{z_0} + m_3 \ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} \wedge -R\vec{y_0} = (C_3 \ddot{\theta}_3 - m_3 \ddot{\lambda}_1 R)\vec{z_0}$

Actions extérieures appliquées à l'ensemble {1, 2, 3} :

- pesanteur sur (2) : le poids $\vec{P_2}$ appliqué en O_2, de moment en H_3 : $\overrightarrow{H_3O_2} \wedge -P_2 \vec{y_0} = -L_1P_2 \cos\theta_1 \vec{z_0}$
- pesanteur sur (1) : le poids $\vec{P_1}$ appliqué en G_1, de moment en H_3 : $\overrightarrow{H_3G_1} \wedge -P_1 \vec{y_0} = -P_1(a_1 \cos\theta_1 - b_1 \sin\theta_1)\vec{z_0}$
- pesanteur sur (3) : le poids $\vec{P_3}$ appliqué en O_3, a un moment nul en H_3 ;
- le contact ponctuel du sol sur la roue (3) a un moment nul en H_3.

Nota : le moteur est interne à l'ensemble isolé...

Soit l'équation (3) :

Il reste à conclure...

Le système d'équations n'est pas intégrable dans le cas général.
Seule l'équation (1) indépendante des deux autres donne un résultat simple :

$C_2 \ddot{\theta}_2 = 0$, soit $\dot{\theta}_2 = Cte$: la vitesse de rotation de la roue avant est constante...