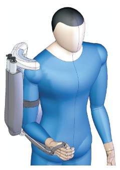
TD 1



Orthèse d'épaule

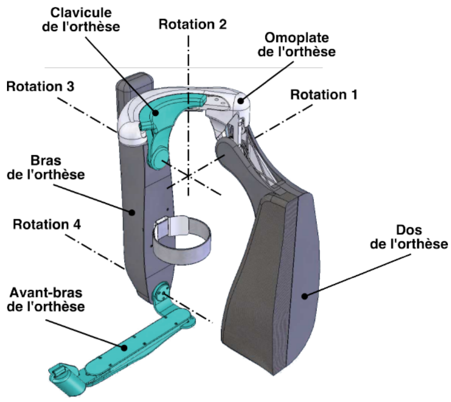
Concours Centrale Supelec PSI 2010

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide*
- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*

Mise en situation

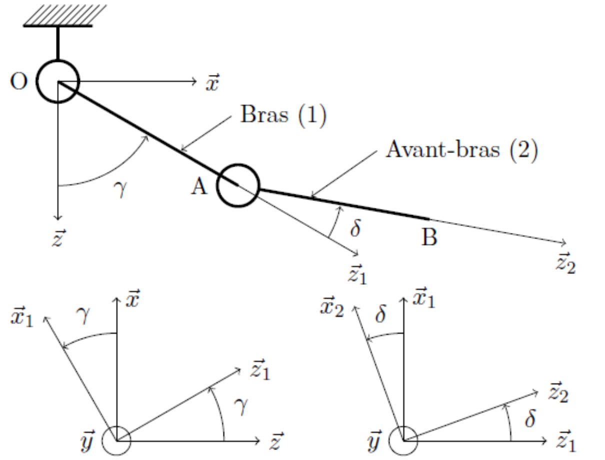
Le support de cette étude est une orthèse portable, de type exosquelette, qui contribue au développement de la tonicité musculaire de l'épaule et du bras. Installée dans le dos de l'individu et liée à la fois au bras et à la main, elle offre une résistance aux mouvements de la main.



Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

Objectif Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

Le système étudié se réduit donc à l'ensemble {Bras + Avant-bras} relativement au reste du dispositif supposé fixe : on suppose que les angles d'abduction/adduction et de rotation interne/rotation externe de l'épaule sont maintenus identiquement nuls par l'action des moteurs situés dans la partie dorsale du dispositif (non étudiée ici). Le paramétrage se réduit donc à la situation de la figure suivante qui représente l'ensemble étudié dans un plan $\left(\overrightarrow{x};\overrightarrow{z}\right)$ donné, où l'on choisit $\overrightarrow{z}$ vertical dans le sens descendant. Le tableau précise les différents paramètres utiles pour le calcul de dynamique envisagé.



Bâti		
Repère $R_0 = (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ fixe, galiléen		
Bras (moteurs compris)		
Repère $R_1 = (O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ Angle $\gamma = (\vec{x},\vec{x}_1) = (\vec{z},\vec{z}_1)$ $\vec{y} = \vec{y}_1$	Longueur $l_1 = 350$ mm Masse $m_1 = 2{,}3$ kg Centre d'inertie G_1 tel que : $\overrightarrow{OG_1} = \lambda_1\vec{z}_1,\ \lambda_1 = 50$ mm	Matrice d'inertie $I(G_1,1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1}$ $A_1 = 2{,}4\times10^{-2}$ kg · m^2 $B_1 = 2{,}3\times10^{-2}$ kg · m^2 $D_1 = 2{,}1\times10^{-3}$ kg · m^2
Avant-bras		
Repère $R_2 = (A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ Angle $\delta = (\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{z}_1,\vec{z}_2)$ $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$	Longueur $l_2 = 270$ mm Masse $m_2 = 0{,}3$ kg Centre d'inertie G_2 tel que : $\overrightarrow{AG_2} = \lambda_2\vec{z}_2,\ \lambda_2 = 135$ mm	Matrice d'inertie $I(G_2,2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2}$ $A_2 = 1{,}8\times10^{-3}$ kg · m^2 $B_2 = 1{,}8\times10^{-3}$ kg · m^2 $D_2 = 4{,}3\times10^{-5}$ kg · m^2

Question 1 *Exprimer le $\{\mathscr{D}(Bras/R_0)\}$ au point O.*

Question 2 *Exprimer littéralement, au point G_2 et dans le repère R_1, le torseur dynamique du mouvement du solide {Avant-bras} par rapport au référentiel fixe R_0 supposé galiléen : $\{\mathscr{D}(Avant\text{-}bras/R_0)\}_{G2,(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$.*

Question 3 *Exprimer le $\{\mathscr{D}(Avant\text{-}bras/R_0)\}$ au point A.*

Question 4 *Exprimer le $\{\mathscr{D}(Bras{+}Avant\text{-}bras/R_0)\}$ au point O.*

Les différentes actions mécaniques agissant sur le dispositif sont les suivantes :

- l'action de la pesanteur sur les solides {Bras} et {Avant-bras};
- l'action du bâti sur le solide {Bras} au travers de la liaison pivot d'axe $\left(O,\overrightarrow{y}\right)$ et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante : $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Bâti}\rightarrow\text{Bras}\right)\right\}=\left\{\begin{array}{c} X_1\overrightarrow{x_1}+Y_1\overrightarrow{y_1}+Z_1\overrightarrow{z_1}\\ L_1\overrightarrow{x_1}+M_1\overrightarrow{y_1}+N_1\overrightarrow{z_1}\end{array}\right\}_O$ où les paramètres $(X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1)$ sont inconnus;
- l'action du premier actionneur sur le solide {Bras} : $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Actionneur 1}\rightarrow\text{Bras}\right)\right\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_1(t)\overrightarrow{y}\end{array}\right\}_O$ où le couple $C_1(t)$ exercé est connu au cours du temps;
- l'action du solide {Bras} sur le solide {Avant-bras} au travers de la liaison pivot d'axe $\left(A,\overrightarrow{y}\right)$ et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante : $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Bras}\rightarrow\text{Avant-bras}\right)\right\}=\left\{\begin{array}{c} X_2\overrightarrow{x_1}+Y_2\overrightarrow{y}+Z_2\overrightarrow{z_1}\\ L_2\overrightarrow{x_1}+M_2\overrightarrow{y}+N_2\overrightarrow{z_1}\end{array}\right\}_A$ où les paramètres $(X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2)$ sont inconnus;
- les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées : $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Actionneur 2}\rightarrow\text{Bras}\right)\right\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ -C_2(t)\overrightarrow{y}\end{array}\right\}_A$ et $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Actionneur 2}\rightarrow\text{Avant-bras}\right)\right\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_2(t)\overrightarrow{y}\end{array}\right\}_A$ où le couple $C_2(t)$ exercé est connu au cours du temps;
- l'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité B de l'avant-bras et définie par : $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Force}\rightarrow\text{Avant-bras}\right)\right\}=\left\{\begin{array}{c} X_F\overrightarrow{x}+Z_F\overrightarrow{z}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B$.

On veut déterminer les deux équations permettant de décrire le mouvement des deux axes de l'orthèse. On suppose pour cela que les deux liaisons pivots sont parfaites.

Le PFD permet d'obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} C_1(t)= & \left(B_1+B_2+m_1\lambda_1^2+m_2l_1^2+m_2\lambda_2^2\right)\ddot{\gamma}+\left(B_2+m_2\lambda_2^2\right)\ddot{\delta}\\ & +m_2l_1\left(\lambda_2\left(2\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\cos\delta+\lambda_2\left(\dot{\gamma}^2-\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2\right)\sin\delta\right)\\ & +m_1g\lambda_1\sin\gamma+m_2g\left(l_1\sin\gamma+\lambda_2\sin\left(\gamma+\delta\right)\right)\\ & -X_F\left(l_1\cos\gamma+l_2\cos\left(\gamma+\delta\right)\right)+Z_F\left(l_1\sin\gamma+l_2\left(\gamma+\delta\right)\right)\end{aligned}$$

Question 5 *Détailler la démarche qui a permis d'obtenir cette équation, on précisera en particulier l'isolement, le bilan des Actions Mécaniques Extérieures et le choix des équations utilisées.*

Question 6 *Appliquer la démarche pour retrouver l'équation donnée.*

Question 7 *Écrire une deuxième relation issue du Principe Fondamental de la Dynamique, indépendante de la précédente, faisant intervenir le couple $C_2(t)$, et qui permette de ne pas faire apparaître les composantes L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2 des torseurs des actions de liaison. On détaillera la démarche de la même façon que lors de la première question.*

Question 8 *En déduire que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :* $\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\ddot{\gamma}\\\ddot{\delta}\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\\dot{\delta}\end{pmatrix}+C+Q\begin{pmatrix}X_F\\Y_F\end{pmatrix}$ *où C est un vecteur et A, B et Q sont des matrices 2×2 que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement $\left(\gamma,\delta\right)$ et de leurs dérivées premières $\left(\dot{\gamma},\dot{\delta}\right)$.*

Question 9 *Calculer les couples (C_1, C_2) exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ($X_F=0$, $Z_F=0$) et dans une position statique. Discuter de la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.*

Question 10 *Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras}?*

TD 1 – Corrigé

Orthèse d'épaule

Concours Centrale Supelec PSI 2010

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide*
- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*

Question 1

$$\boxed{\left\{D_{AB/R0}\right\}=\left\{D_{2/0}\right\}=\left\{\begin{array}{c} m_2\vec{a}(G_2,2/0) \\ \vec{\delta}_{G2}(2/0)\end{array}\right\}_{G2}}$$

$$\vec{V}(G_2,2/0)=l_1\dot{\gamma}\vec{x}_{11}+\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)\vec{x}_2$$

$$\vec{a}(G_2,2/0)=l_1\ddot{\gamma}\vec{x}_1-l_1\dot{\gamma}^2\vec{z}_1+\lambda_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\vec{x}_2-\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2\vec{z}_2$$

$$\boxed{m_2\vec{a}(G_2,2/0)=m_2\left|\begin{array}{c} l_1\ddot{\gamma}+\lambda_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\cos\delta-\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2\sin\delta \\ 0 \\ -l_1\dot{\gamma}^2-\lambda_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\sin\delta-\lambda_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right)^2\cos\delta \end{array}\right._{R1}}$$

$$\vec{\sigma}_{G2}(2/0)=\left[I_{G2}(2)\right]\vec{\Omega}(2/0)=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{R2}.\left|\begin{array}{c} 0 \\ \dot{\gamma}+\dot{\delta} \\ 0 \end{array}\right._{R2}=\left|\begin{array}{c} 0 \\ B_2\left(\dot{\gamma}+\dot{\delta}\right) \\ 0 \end{array}\right._{R2ouR1}$$

$$\boxed{\vec{\delta}_{G2}(2/0)=\left(\frac{d\vec{\sigma}_{G2}(2/0)}{dt}\right)_0=B_2\left(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}\right)\vec{y}_1}$$

Question 2

- On isole l'ensemble {bras (1) + Avant-Bras (2)}.
- BAME :

$\left\{T(b\hat{a}ti\rightarrow 1)\right\}=\left\{\begin{array}{c} X_1\vec{x}_1+Y_1\vec{y}_1+Z_1\vec{z}_1 \\ L_1\vec{x}_1+M_1\vec{y}_1+N_1\vec{z}_1\end{array}\right\}_O$ avec M_1=0 si liaison pivot parfaite ;

$\left\{T(actionneur1\rightarrow 1)\right\}=\left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1(t)\vec{y}\end{array}\right\}_O$;

$\left\{T(force\rightarrow 2)\right\}=\left\{\begin{array}{c} X_F\vec{x}+Z_F\vec{z} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_B$;

$\left\{T(pesanteur\rightarrow 1)\right\}=\left\{\begin{array}{c} m_1g\vec{z} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_{G1}$;

$\left\{T(pesanteur\rightarrow 2)\right\}=\left\{\begin{array}{c} m_2g\vec{z} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_{G2}$;

- On écrit le Théorème du moment dynamique en 0 selon la direction $\vec{y}$:

$$C_1(t)+0+\left(\overrightarrow{OB}\wedge\left(X_F\vec{x}+Z_F\vec{z}\right)+\overrightarrow{OG_1}\wedge m_1g\vec{z}+\overrightarrow{OG_2}\wedge m_2g\vec{z}\right).\vec{y}=\vec{\delta}_O(1/0).\vec{y}+\vec{\delta}_O(2/0).\vec{y}$$

Question 3

Compléments au corrigé : Détails du calcul (**non demandé**) :

$\overrightarrow{OB} = l_1\vec{z}_1 + l_2\vec{z}_2$; $\overrightarrow{OG_1} = \lambda_1\vec{z}_1$; $\overrightarrow{OG_2} = l_1\vec{z}_1 + \lambda_2\vec{z}_2$

$$\vec{\delta}_O(2/0) = \vec{\delta}_{G2}(2/0) + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2\vec{a}(G_2, 2/0)$$

$$\vec{\delta}_O(2/0).\vec{y} = B_2(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}) + \left(\begin{vmatrix} \lambda_2 \sin\delta \\ 0 \\ l_1 + \lambda_2\cos\delta \end{vmatrix}_{R1} \wedge m_2 \begin{vmatrix} l_1\ddot{\gamma} + \lambda_2(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta})\cos\delta - \lambda_2(\dot{\gamma}+\dot{\delta})^2\sin\delta \\ 0 \\ -l_1\dot{\gamma}^2 - \lambda_2(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta})\sin\delta - \lambda_2(\dot{\gamma}+\dot{\delta})^2\cos\delta \end{vmatrix}_{R1} \right).\vec{y}$$

$$\ddot{\gamma}(B_2 + m_2l_1^2 + 2m_2l_1\lambda_2\cos\delta + m_2\lambda_2^2) + \ddot{\delta}(B_2 + m_2l_1\lambda_2\cos\delta + m_2\lambda_2^2) - m_2l_1\lambda_2(\dot{\gamma}+\dot{\delta})^2 + m_2l_1\lambda_2\dot{\gamma}^2$$

$$\vec{\delta}_O(1/0) = \vec{\delta}_{G1}(1/0) + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1\vec{a}(G_1, 2/0)$$

$$\vec{\delta}_O(1/0).\vec{y} = B_1\ddot{\gamma} + \left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{vmatrix}_{R1} \wedge m_1 \begin{vmatrix} l_1\ddot{\gamma} \\ 0 \\ -l_1\dot{\gamma}^2 \end{vmatrix}_{R1} \right).\vec{y} = \ddot{\gamma}(B_1 + m_1l_1^2)$$

Soit :

$$C_1(t) + l_1X_F\cos\gamma - l_1Z_F\sin\gamma + l_2X_F\cos(\gamma+\delta) - l_2Z_F\sin(\gamma+\delta) - \lambda_1m_1g\sin\gamma - l_1m_2g\sin\gamma - \lambda_2m_2g\sin(\gamma+\delta) =$$
$$\ddot{\gamma}(B_1 + m_1l_1^2) + \ddot{\gamma}(B_2 + m_2l_1^2 + 2m_2l_1\lambda_2\cos\delta + m_2\lambda_2^2) + \ddot{\delta}(B_2 + m_2l_1\lambda_2\cos\delta + m_2\lambda_2^2) - m_2l_1\lambda_2(\dot{\gamma}+\dot{\delta})^2 + m_2l_1\lambda_2\dot{\gamma}^2$$

Question 4

- On isole l'Avant-Bras (2)}.
- BAME :

$\{T(1\to 2)\} = \left\{ \begin{matrix} X_2\vec{x}_1 + Y_2\vec{y}_1 + Z_2\vec{z}_1 \\ L_2\vec{x}_1 + M_2\vec{y}_1 + N_2\vec{z}_1 \end{matrix} \right\}_A$ avec M_2=0 si liaison pivot parfaite ;

$\{T(actionneur2 \to 2)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_2(t)\vec{y} \end{matrix} \right\}_A$;

$\{T(force \to 2)\} = \left\{ \begin{matrix} X_F\vec{x} + Z_F\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B$;

$\{T(pesanteur \to 2)\} = \left\{ \begin{matrix} m_2g\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G2}$;

- On écrit le Théorème du moment dynamique en A selon la direction $\vec{y}$:

$$C_2(t) + 0 + \left(\overrightarrow{AB} \wedge (X_F\vec{x} + Z_F\vec{z}) + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2g\vec{z}\right).\vec{y} = \vec{\delta}_2(2/0).\vec{y}$$

- Détails du calcul :

$\overrightarrow{AB} = l_2\vec{z}_2$; $\overrightarrow{AG_2} = \lambda_2\vec{z}_2$

$$\vec{\delta}_A(2/0) = \vec{\delta}_{G2}(2/0) + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2\vec{a}(G_2, 2/0)$$

avec $\vec{a}(G_2, 2/0) = l_1\ddot{\gamma}\vec{x}_1 - l_1\dot{\gamma}^2\vec{z}_1 + \lambda_2(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta})\vec{x}_2 - \lambda_2(\dot{\gamma}+\dot{\delta})^2\vec{z}_2$

$$\vec{\delta}_A(2/0).\vec{y} = B_2(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}) + \left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{vmatrix}_{R2} \wedge m_2 \begin{vmatrix} l_1\ddot{\gamma}\cos\delta + l_1\dot{\gamma}^2\sin\delta + \lambda_2(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}) \\ 0 \\ l_1\ddot{\gamma}\sin\delta - l_1\dot{\gamma}^2\cos\delta - \lambda_2(\dot{\gamma}+\dot{\delta})^2 \end{vmatrix}_{R1} \right).\vec{y}$$

$$= B_2(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta}) + m_2\lambda_2\left(l_1\ddot{\gamma}\cos\delta + l_1\dot{\gamma}^2\sin\delta + \lambda_2(\ddot{\gamma}+\ddot{\delta})\right)$$

Soit : $\boxed{\begin{matrix} C_2(t) + l_2X_F\cos(\gamma+\delta) - l_2Z_F\sin(\gamma+\delta) - \lambda_2m_2g\sin(\gamma+\delta) = \\ \ddot{\gamma}(B_2 + m_2l_1\lambda_2\cos\delta + m_2\lambda_2^2) + \ddot{\delta}(B_2 + m_2\lambda_2^2) + m_2\lambda_2l_1\dot{\gamma}^2\sin\delta \end{matrix}}$

Question 5

Les expressions des couples moteur déterminées aux questions 27 et 28 peuvent s'écrire sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_1 l_1{}^2 + m_2 l_1{}^2 + 2 m_2 l_1 \lambda_2 \cos\delta + m_2 \lambda_2{}^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos\delta + m_2 \lambda_2{}^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos\delta + m_2 \lambda_2{}^2 & B_2 + m_2 \lambda_2{}^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 g \sin\gamma + l_1 m_2 g \sin\gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma+\delta) \\ \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin\delta & -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin\delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin\delta & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 \lambda_2 (2\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin\delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin\delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin\delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin\delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin\delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos\gamma - l_2 \cos(\gamma+\delta) & l_1 \sin\gamma + l_2 \sin(\gamma+\delta) \\ -l_2 \cos(\gamma+\delta) & l_2 \sin(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas **statique** (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données ($C_1(t)$, $C_2(t)$, X_F, Z_F) sont indépendantes du temps.

Question 6

Les expressions des couples moteur déterminées aux questions 27 et 28 peuvent s'écrire sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_1 l_1{}^2 + m_2 l_1{}^2 + 2 m_2 l_1 \lambda_2 \cos\delta + m_2 \lambda_2{}^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos\delta + m_2 \lambda_2{}^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos\delta + m_2 \lambda_2{}^2 & B_2 + m_2 \lambda_2{}^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 g \sin\gamma + l_1 m_2 g \sin\gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma+\delta) \\ \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin\delta & -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin\delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin\delta & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 \lambda_2 (2\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin\delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin\delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin\delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin\delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin\delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos\gamma - l_2 \cos(\gamma+\delta) & l_1 \sin\gamma + l_2 \sin(\gamma+\delta) \\ -l_2 \cos(\gamma+\delta) & l_2 \sin(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas **statique** (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données ($C_1(t)$, $C_2(t)$, X_F, Z_F) sont indépendantes du temps.

Question 7

Hypothèses :

- $\ddot{\gamma} = \ddot{\delta} = 0$ et $\dot{\gamma} = \dot{\delta} = 0$ (statique)
- $\gamma = \pi/2$ et $\delta=0$ (configuration la plus défavorable)

$C_{1,stat\max} = (l_1 + l_2) Z_F + C_{1,pes\max}$ et $C_{2,stat\max} = l_2 Z_F + C_{2,pes\max}$

Le couple statique maximal est limité à $C_{1,stat\max} = 50$ N.m soit :

$$Z_{F,\max} = \frac{C_{1,stat\max} - C_{1,pes\max}}{l_1 + l_2} = \frac{50 - 2{,}55}{0{,}35 + 0{,}27} \text{ soit } \boxed{Z_{F,\max} = 76{,}5 N}$$

Le cahier des charges est respecté (effort de manipulation maximal du patient 50 N.m)