Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Chapitre 3 – Application du Principe Fondamental de la Dynamique

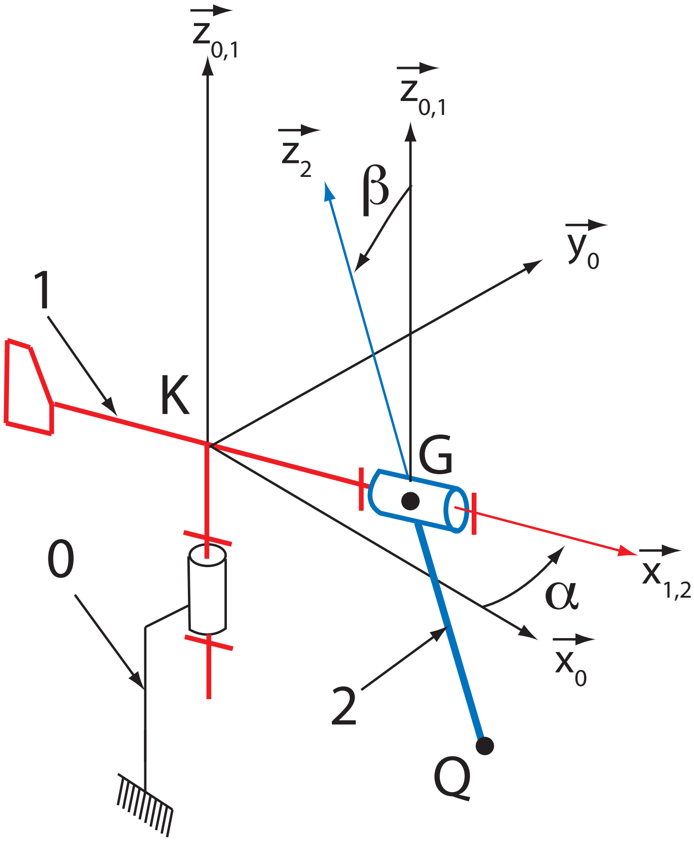
Activation

Activation – Eolienne

Emilien Durif

Savoirs et compétences :

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides.On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 pour créer un couple C_m selon la direction $\overrightarrow{z}_0$.

L'éolienne est composée de :

- un support **0**, auquel on associe un repère $R_0 = \left(K;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$;
- une girouette **1** (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $\left(K,\overrightarrow{z_{0,1}}\right)$ avec le support **0**. On lui associe un repère $R_1 = \left(K;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z}_{0,1}\right)$ et on pose $\alpha = \left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe $\left(K,\overrightarrow{z_1}\right)$: $J = I_{\left(K,\overrightarrow{z_1}\right)}(1)$;
- une hélice **2**, en liaison pivot d'axe $\left(K,\overrightarrow{x_{1,2}}\right)$ avec **1**. On lui associe un repère $R_2 = \left(K;\overrightarrow{x_{1,2}},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)$ choisi tel que $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1}$ et on pose $\beta = \left(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2}\right)$. On note M sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on

pose $\overrightarrow{KG} = a\,\overrightarrow{x}_1$. On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\overline{\overline{I}}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd **3** assimilé à une masse ponctuelle m au point Q. On pose $\overrightarrow{GQ} = -b\,\overrightarrow{z_2}$.

Question 1 *Tracer le schéma de structure de l'éolienne.*

Correction

Question 2 *Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.*

Correction On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ($E = \{1+2+3\}$) en projection sur l'axe $\left(K, \overrightarrow{z_0}\right)$: $\overrightarrow{\mathcal{M}\left(K, \bar{E} \to E\right)} \cdot \overrightarrow{z}_0 = \overrightarrow{\delta(K, E/R_0)} \cdot \overrightarrow{z}_0 \Leftrightarrow C_m = \left(\overrightarrow{\delta(K, 1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 3/R_0)}\right) \cdot \overrightarrow{z}_0$.

Question 3 *Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment cinétique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **1**, notée $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}$.*

Correction

- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $\left(K, \overrightarrow{z_0}\right)$:
- $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \overrightarrow{z}_0 = \left(\overline{\overline{I}}_K(1) \cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0)\right) \cdot \overrightarrow{z}_0 = \left(\overline{\overline{I}}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_0\right) \cdot \overrightarrow{z}_0$
- or on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe $\left(K, \overrightarrow{\overrightarrow{z}}\right)$ soit : $\overline{\overline{I}}_K(1) \cdot \overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{z}_0 = J$
- Ainsi : $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \overrightarrow{z}_0 = J\dot{\alpha}$.

Question 4 *Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$ calculé au point K de l'hélice **2**dans son mouvement par rapport à **0**.*

Correction

- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- On connaît l'opérateur d'inertie en G, on calcule donc : $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)}$:$\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} = \overline{\overline{I}}_G(2) \cdot \overrightarrow{\Omega}(2/0)$.
- On calcule $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$: $\overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha}\left(\cos\beta\,\overrightarrow{z}_2 + \sin\beta\,\overrightarrow{y}_2\right)$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)}$: $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$:
  - $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{R_c}(2/0) = \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} + a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge M \cdot \overrightarrow{V}(G \in 2/0)$
  - On calcule $\overrightarrow{V}(G \in 2/0)$: $\overrightarrow{V}(G \in 2/0) = \overrightarrow{V}(K \in 2/0) + \overrightarrow{GK} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{0} - a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge \left(\dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1\right)$ $= a \cdot \dot{\alpha}\,\overrightarrow{y}_1$
  - On calcule $a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge M \cdot \overrightarrow{V}(G \in 2/0)$: $a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge M \cdot \overrightarrow{V}(G \in 2/0) = a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge M\left(a \cdot \dot{\alpha}\,\overrightarrow{y}_1\right) = M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1$
  - On en déduit $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$: $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha}\sin\beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$

Question 5 *Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)}$*

Correction

- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi $\overrightarrow{\sigma(Q, 3/0)} = \overrightarrow{0}$.
- $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = \overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$:
  - On calcule $\overrightarrow{KQ}$: $\overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a \cdot \overrightarrow{x}_1 - b \cdot \overrightarrow{z}_2$
  - On calcule $\overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$: $\overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = \overrightarrow{V}(Q \in 3/2) + \overrightarrow{V}(Q \in 2/1) + \overrightarrow{V}(Q \in 1/0) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{V}(G \in 2/1) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{V}(G \in 1/0) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \overrightarrow{0} + b \cdot \overrightarrow{z}_2 \wedge \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 + b \cdot \overrightarrow{z}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 =$

$b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin\beta \cdot \overrightarrow{x}_{1,2}$

- On calcule $\overrightarrow{KQ} \wedge m\overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$:
  $\overrightarrow{KQ} \wedge m\overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = m \cdot \left[a \cdot \overrightarrow{x}_1 - b \cdot \overrightarrow{z}_2\right] \wedge \left[b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin\beta \cdot \overrightarrow{x}_{1,2}\right]$
  $= m\left[a \cdot b \cdot \overrightarrow{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin\beta \cdot \overrightarrow{y}_2\right]$

- $\overrightarrow{\sigma(K,3/0)} = m\left[a \cdot b \cdot \dot{\beta}\overrightarrow{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin\beta \cdot \overrightarrow{y}_2\right]$

Question 6 *Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z}_0$ du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,1/0)}$.*

Correction

$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,1/0)} = \overrightarrow{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K,1/0)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,1/0)}}{dt}\right]_{R_0} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

Question 7 *Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z}_0$ du moment dynamique $\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)}$.*

Correction

$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)} = \overrightarrow{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K,2/0)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,2/0)}}{dt}\right]_{R_0}$$

Or, $\overrightarrow{z}_{0,1} = \cos\beta \cdot \overrightarrow{z}_2 + \sin\beta \cdot \overrightarrow{y}_2$,

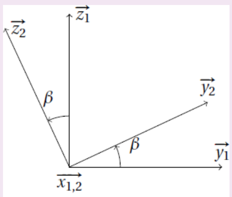
$$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin\beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos\beta \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{z}_2\right)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{z}_2\right)}$$
$$= \dot{\alpha}\left[B \cdot \sin^2\beta + C \cdot \cos^2\beta + M \cdot a^2\right]$$

d'où,

$$\boxed{\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)} = \ddot{\alpha}\left[B \cdot \sin^2\beta + C \cdot \cos^2\beta + M \cdot a^2\right] + 2 \cdot \dot{\alpha}\dot{\beta} \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta\,[B - C].}$$

Question 8 *Déterminer la projection du moment dynamique de $3/0$ selon $\overrightarrow{z}_0$: $\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,3/0)}$.*

Correction



$$\overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{z}_2 = \cos\beta$$
$$\overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{z}_1 = 1$$
$$\overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{x}_0 = 0$$
$$\overrightarrow{z}_{0,1} \cdot \overrightarrow{x}_1 = 0$$
$$\overrightarrow{z}_1 \cdot \overrightarrow{y}_2 = \sin\beta$$

On trouve alors :
$\overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K,3/0)} = m\frac{\mathrm{d}\left[a \cdot b \cdot \dot{\beta}\cos\beta + a^2 \cdot \dot{\alpha} + b^2 \cdot \dot{\alpha}\sin^2\beta\right]}{\mathrm{d}t}$
$= m\left[a \cdot b \cdot \left(\ddot{\beta}\cos\beta - \dot{\beta}^2\sin\beta\right) + a^2\ddot{\alpha} + b^2 \cdot \left(\ddot{\alpha}\sin^2\beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta\right)\right]$

Question 9 *Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expriment du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour "contrer" les effets dynamiques du balourd.*

Correction Le théorème du moment dynamique autour de l'axe $\left(K,\overrightarrow{z_{0,1}}\right)$ donne : $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin\beta$.