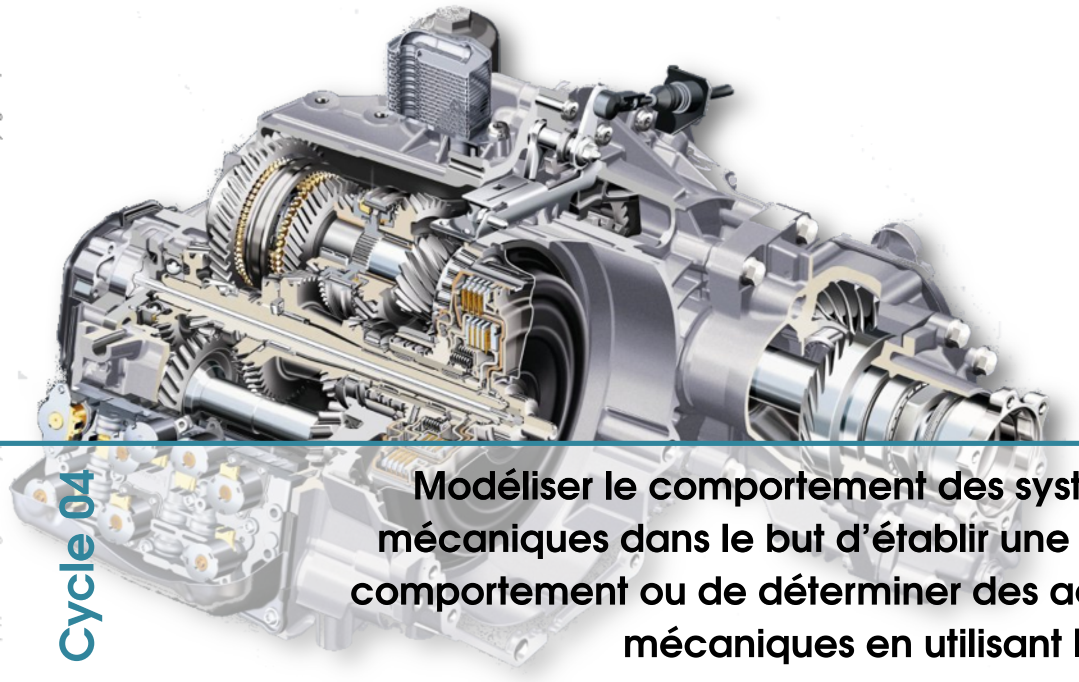


http://www.engineworld.fr/les-boites-robotisees-a-double-embrayage-22/

PSI⋆ – MP

Cycle 04

Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

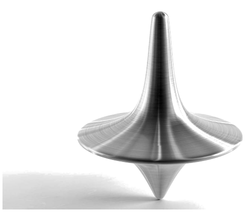
Cours

Chapitre 2

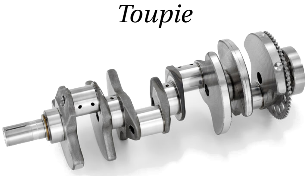
Caractéristation inertielle des solides

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- *Mod2.C15 : matrice d'inertie*



Toupie



Volants d'inertie d'un vilebrequin

1 Masse et centre de masse (centre d'inertie) 2
1.1 Définitions 2
1.2 Centre d'inertie d'un ensemble de solides encastrés entre eux 2
1.3 Méthode pour déterminer le centre d'inertie d'un solide (2) 3
2 Matrice d'inertie d'un solide 3
2.1 Opérateur et matrice d'inertie 3
2.2 Déplacement d'une matrice d'inertie 4
2.3 Changement de base de la matrice d'inertie 4
2.4 Détermination de la matrice d'inertie d'un solide (2) . . . 5
2.5 Matrice d'inertie de solides usuels (3) 5
1 72

Xavier Pessoles
PSI⋆ – MP

1 Masse et centre de masse (centre d'inertie)

1.1 Définitions

Définition — Masse d'un solide indéformable. On peut définir la masse totale d'un solide S par : $M = \int_{P\in S} \mathrm{d}m$.

Si de plus l'ensemble est fait d'un matériau homogène de masse volumique μ, on a $M = \mu \int_{P\in S} \mathrm{d}V$.

Définition — Centre d'inertie d'un solide. La position du centre d'inertie G d'un solide S est définie par $\int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\mathrm{d}m = \overrightarrow{0}$.

Pour déterminer la position du centre d'inertie d'un solide S, on passe généralement par l'origine du repère associé à S. On a alors $\int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\,\mathrm{d}m = \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OP}\right)\mathrm{d}m = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \int_{P\in S} \overrightarrow{OG}\,\mathrm{d}m = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}m \Leftrightarrow M\overrightarrow{OG} = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}m$.

Méthode Pour déterminer les coordonnées $\left(x_G, y_G, z_G\right)$ du centre d'inertie G du solide S dans la base $\left(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$, on a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} M\,x_G = \mu \int_{P\in S} x_P\,\mathrm{d}V \\ M\,y_G = \mu \int_{P\in S} y_P\,\mathrm{d}V \\ M\,z_G = \mu \int_{P\in S} z_P\,\mathrm{d}V \end{array}\right. \quad \text{avec } \mathrm{d}V \text{ volume élémentaire du solide } S.$$

Pour simplifier les calculs, on peut noter que le centre d'inertie appartient au(x) éventuel(s) plan(s) de symétrie du solide.

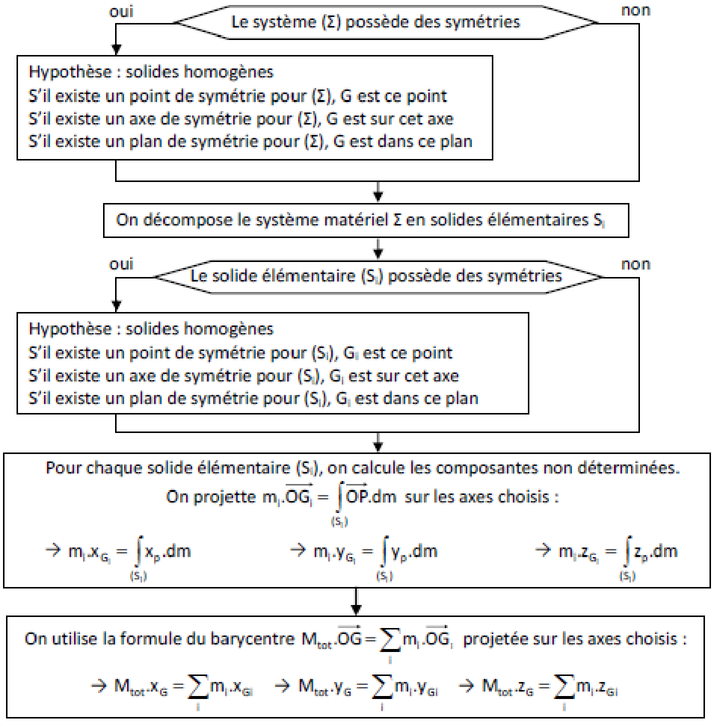
R Centre d'inertie et centre de gravité sont confondus lorsque le champ de pesanteur est considéré comme uniforme en tout point de l'espace.

1.2 Centre d'inertie d'un ensemble de solides encastrés entre eux

Méthode Soit un solide composé de n solides élémentaires dont la position des centres d'inertie G_i et les masses M_i sont connues. On note $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$. La position du centre d'inertie G de l'ensemble S est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} M_i \overrightarrow{OG_i}.$$

1.3 Méthode pour déterminer le centre d'inertie d'un solide (2)



2 Matrice d'inertie d'un solide

2.1 Opérateur et matrice d'inertie

Définition Soient :

- un solide S de masse m en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0 = \left(O_0; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$;
- $\mathcal{R}_S = \left(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ le repère lié au solide S;
- P un point de S tel que $\overrightarrow{OP} = x_p \overrightarrow{x} + y_p \overrightarrow{y} + z_p \overrightarrow{z}$;
- $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire du solide S.

On appelle opérateur d'inertie l'application linéaire définie par :

$$\overrightarrow{u} \rightarrow \overrightarrow{J_{(O,S)}\left(\overrightarrow{u}\right)} = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \mathrm{d}m$$

On appelle matrice d'inertie du solide S en O, $I_O(S)$, l'image de cette application linéaire : $\overrightarrow{J_{(O,S)}\left(\overrightarrow{u}\right)} = I_O(S)\overrightarrow{u}$.

Définition — Matrice d'inertie. La matrice d'inertie s'écrit ainsi :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} \int_S \left(y_p^2 + z_p^2\right) \mathrm{d}m & -\int_S \left(x_p y_p\right) \mathrm{d}m & -\int_S \left(x_p z_p\right) \mathrm{d}m \\ -\int_S \left(x_p y_p\right) \mathrm{d}m & \int_S \left(x_p^2 + z_p^2\right) \mathrm{d}m & -\int_S \left(y_p z_p\right) \mathrm{d}m \\ -\int_S \left(x_p z_p\right) \mathrm{d}m & -\int_S \left(y_p z_p\right) \mathrm{d}m & \int_S \left(x_p^2 + y_p^2\right) \mathrm{d}m \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S}.$$

On appelle moments d'inertie par rapport aux axes $\left(O, \overrightarrow{x}\right)$, $\left(O, \overrightarrow{y}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{z}\right)$ les termes A, B et C.

On appelle produit d'inerties par rapport aux axes $\left(O, \overrightarrow{y}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{z}\right)$, $\left(O, \overrightarrow{x}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{z}\right)$, $\left(O, \overrightarrow{x}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{y}\right)$ les termes D, E et F.

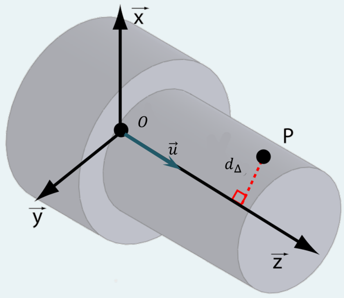
Propriété

- ❐ La matrice d'inertie est une matrice symétrique. Il existe une base dans laquelle elle est diagonalisable. Cette base est appelée base principale d'inertie.

- Si $\left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ est un plan de symétrie du solide, D et E sont nuls.
- Si $\left(O, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x}\right)$ est un plan de symétrie du solide, D et F sont nuls.
- Si $\left(O, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ est un plan de symétrie du solide, E et F sont nuls.
- Si un solide admet 2 plans de symétrie, alors D, E et F sont nuls.

Définition — Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque.

Le moment d'inertie caractérise la répartition de masse d'un solide autour d'un axe $\Delta\left(O, \overrightarrow{u}\right)$. Plus la valeur de l'inertie est grande plus il sera difficile de mettre en mouvement de rotation ce solide autour de l'axe Δ. On note $I_\Delta(S)$, le moment d'inertie du solide S autour de l'axe Δ. Son unité est en kg.m^2. On a alors :



$$I_\Delta(S) = \int_S d_\Delta^2 \mathrm{d}m \quad \text{où } d_\Delta \text{ est la distance entre le point courant } P \text{ et l'axe } \Delta.$$

R Si on connaît $I_O(S)$, alors $I_\Delta(S) = \overrightarrow{u}\, I_O(S)\, \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u}$ **vecteur unitaire**.

2.2 Déplacement d'une matrice d'inertie – Théorème de Huygens

Théorème — Théorème de Huygens. Soit S un solide de centre d'inertie G, de masse m, d'inertie $I_G(S)$ et d'inertie $I_O(S)$ avec $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{y} + c\overrightarrow{z}$. Les matrices $I_G(S)$ et $I_O(S)$ exprimées dans la base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ sont liées par :

$$\begin{pmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} + \begin{pmatrix} m\left(b^2+c^2\right) & -mab & -mac \\ -mab & m\left(a^2+c^2\right) & -mbc \\ -mac & -mbc & m\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

Si le solide est modélisé par une masse ponctuelle m en G et si on souhaite connaître le moment d'inertie pour un point situé à une distance d de G, on a $I = md^2$.

2.3 Changement de base de la matrice d'inertie

Définition — Matrice de Passage. On appelle P_{12} la matrice de passage permettant de passer de la base $\mathscr{B}_1$ à la base $\mathscr{B}_2$. Cette matrice est constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la base $\mathscr{B}_2$ écrits dans la base d'origine $\mathscr{B}_1$. On l'appelle aussi matrice de changement de base. Cette matrice est inversible.

Dans le cas des matrices de rotation, $P_{12}^{-1} = P_{12}^T$.

Exemple Soit $\mathscr{R}_1\left(O; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z}\right)$ et $\mathscr{R}_2\left(O; \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z}\right)$ avec $\beta = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right)$. On a alors $\overrightarrow{x_2} = \cos\beta\,\overrightarrow{x_1} + \sin\beta\,\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{y_2} = \cos\beta\,\overrightarrow{y_2} - \sin\beta\,\overrightarrow{x_2}$. En conséquences, $P_{12} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ■

Résultat Pour passer $I_A(S)_{\mathscr{B}_1}$ de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ de la on a $I_A(S)_{\mathscr{B}_2} = P_{12}^{-1} I_A(S)_{\mathscr{B}_1} P_{12}$.

2.4 Détermination de la matrice d'inertie d'un solide (2)

Le système (Σ) possède des symétries — oui / non

oui :

Hypothèse : solides homogènes
Si un axe de la base b est axe de symétrie → cet axe est principal d'inertie
Si le système Σ a un plan de symétrie dans la base b → l'axe $\perp$ au plan de symétrie est axe principal d'inertie
Si le système Σ a deux plans de symétrie $\perp$ dans b → la matrice d'inertie est diagonale

↓

On décompose le système matériel Σ en solides élémentaires S_i

↓

Le solide élémentaire (S_i) possède des symétries — oui / non

oui : Utilisation des symétries pour S_i (comme ci-dessus)

↓

Pour chaque solide élémentaire (S_i), on détermine la matrice d'inertie.

- En un point privilégié G_i
- Dans une base privilégiée b_i liée à S_i

⇒ $I_{G_i}(S_i)$

↓

Pour chaque solide élémentaire (S_i), on ramène la matrice d'inertie au point A dans la base b

- Transport de $G_i \to A$ (Huygens) : $I_A(S_i) = I_{G_i}(S_i) + I_A(m_i \to G_i)$
- Changement de base $b_i \to b$: $I_A(S_i)_b = P^{-1}.I_A(S_i)_b.P$

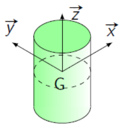
⇒ $I_A(S_i)$

↓

On assemble les matrices écrites au même point et dans la même base : $I_A(\Sigma) = \sum_i I_A(S_i)$

2.5 Matrice d'inertie de solides usuels (3)

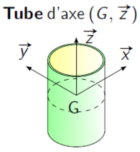
Cylindre d'axe $(G, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} m\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{G\,(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$

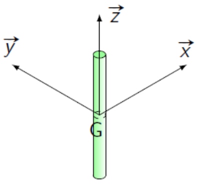
Tube d'axe $(G, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H (épaisseur négligeable)



$$\begin{pmatrix} m\cdot\left(\frac{R^2}{2}+\frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\left(\frac{R^2}{2}+\frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{G\,(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

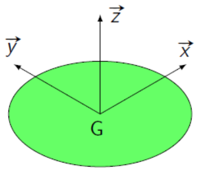
Tige cylindrique $(G, \vec{z})$ de rayon négligeable



$$\begin{pmatrix} m\cdot\frac{H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\frac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{G\,(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

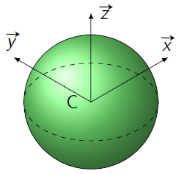
Disque d'axe $(G, \vec{z})$ d'épaisseur négligeable



$$\begin{pmatrix} m\cdot\frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{G\,(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

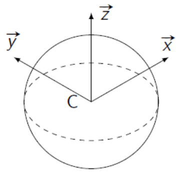
Sphère pleine de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}m\cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}m\cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{G\,\forall\mathcal{B}}$$

En C centre de la sphère et dans toute base

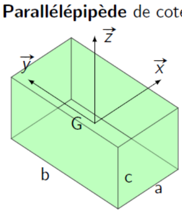
Sphère creuse de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}m\cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}m\cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{G\,\forall\mathcal{B}}$$

En C centre de la sphère et dans toute base

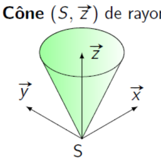
Parallélépipède de cotés a, b et c



$$\begin{pmatrix} m\cdot\frac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\frac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot\frac{a^2+b^2}{12} \end{pmatrix}_{G\,\mathcal{B}}$$

en G dans la base $\mathcal{B}$ parallèle aux arêtes du parallélépipède

Cône $(S, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} \frac{3\cdot m}{5}\cdot\left(\frac{R^2}{4}+H^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\cdot m}{5}\cdot\left(\frac{R^2}{4}+H^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\cdot m}{5}\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{S\,(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}$$

au sommet S dans toute base contenant $\vec{z}$.

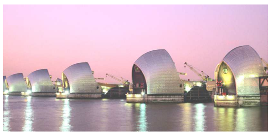
Références

[1] Emilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.*

[2] Florestan Mathurin, *Géométrie des masses, Lycée Bellevue, Toulouse,* `http://florestan.mathurin.free.fr/`.

[3] Robert Papanicola, *Opérateurs d'inetie, Lycée Charlemagne, Paris,* `http://sciences-indus-cpge.papanicola.info/`.

Activation 1



Barrière sur la tamise – Matrices d'inertie

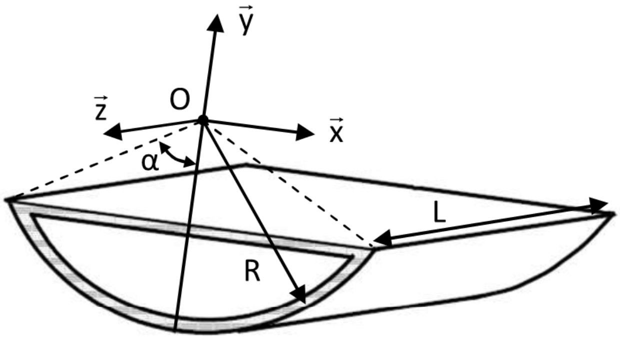
Florestan Mathurin

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- ❒ *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- ❒ *Mod2.C15 : matrice d'inertie*

Barrière sur la Tamise

Le barrage sur la Tamise permet de protéger Londres des grandes marrées évitant ainsi des crues qui pourraient survenir. Ce barrage est constituée de dix portes dont une modélisation est donnée ci-dessous.



On donne :

- $L = 58\,\text{m}$ la longueur de la porte;
- $R = 12{,}4\,\text{m}$ le rayon de la porte;
- $e = 0{,}05\,\text{m}$ l'épaisseur de la porte, considérée négligeable devant R;
- $\rho = 7800\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$;
- $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Question 1 *Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la porte :*

1. *déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_P de la plaque;*
2. *déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_C de la portion cylindrique;*
3. *déterminer les coordonnées du centre d'inertie G de la porte.*

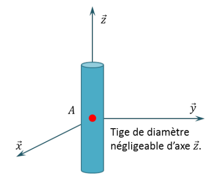
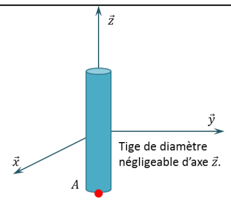
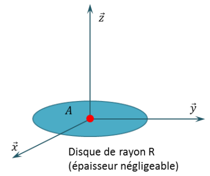
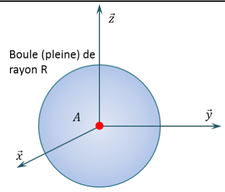
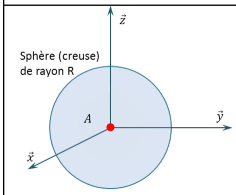
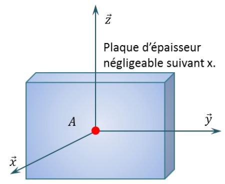
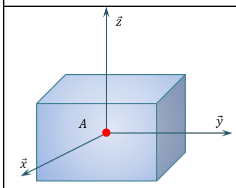
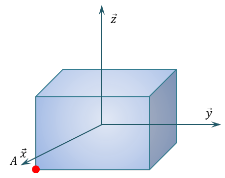
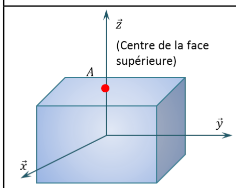
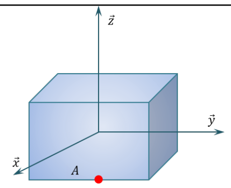
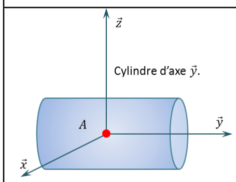
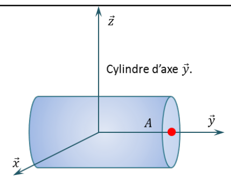
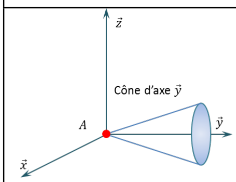
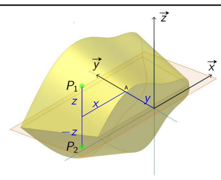
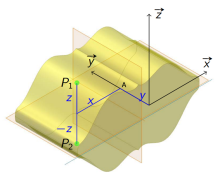
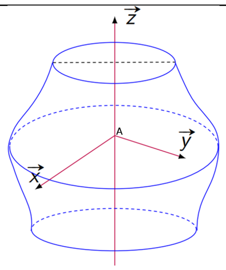
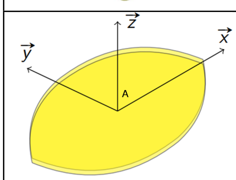
Question 2 *Déterminer la forme de la matrice d'inertie de la porte :*

1. *donner la forme de la matrice d'inertie de la plaque P en G_P ;*
2. *donner la forme de la matrice d'inertie du cylindre C en G_C ;*
3. *donner la forme de la matrice d'inertie de la porte P en G.*

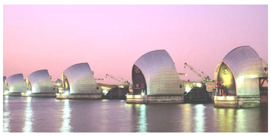
Question 3 *Déterminer la moment d'inertie de la porte par rapport à $\left(O, \overrightarrow{z}\right)$.*

Matrices d'inertie

Question *Donner les formes des matrices d'inertie suivantes.*

Activation 1 – Corrigé



Barrière sur la tamise – Matrices d'inertie

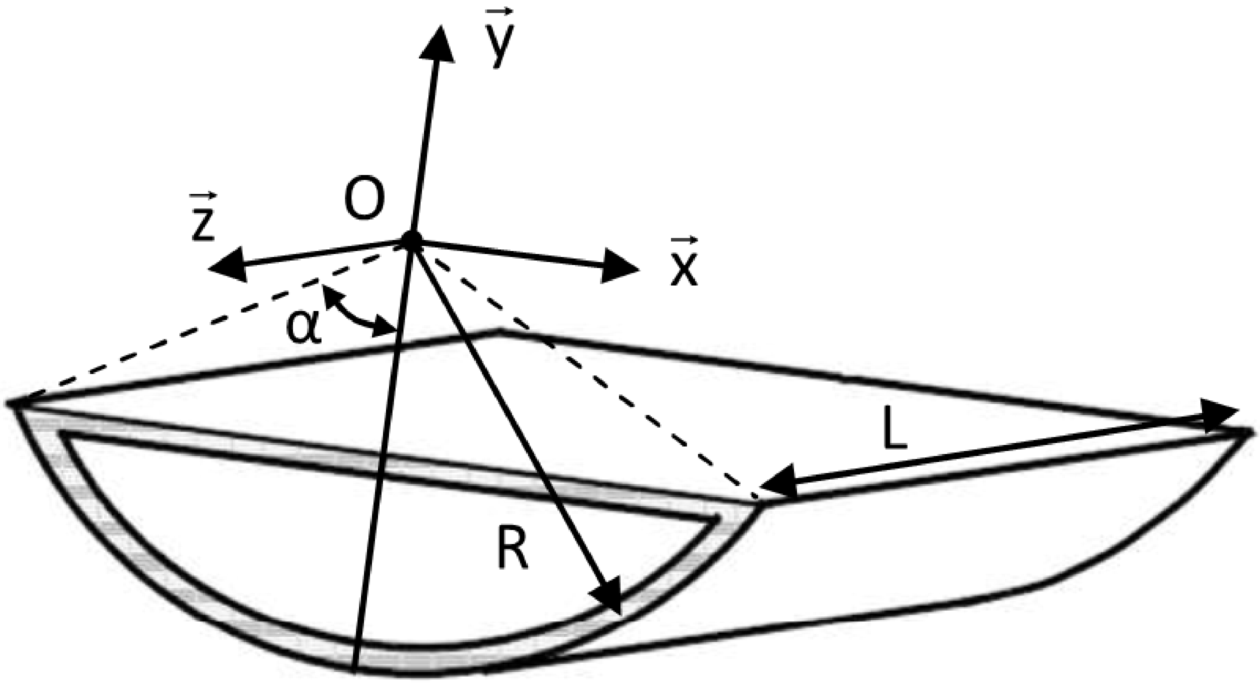
Florestan Mathurin

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- ❒ *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- ❒ *Mod2.C15 : matrice d'inertie*

Barrière sur la Tamise

Le barrage sur la Tamise permet de protéger Londres des grandes marrées évitant ainsi des crues qui pourraient survenir. Ce barrage est constituée de dix portes dont une modélisation est donnée ci-dessous.



On donne :

- $L = 58\,\text{m}$ la longueur de la porte ;
- $R = 12{,}4\,\text{m}$ le rayon de la porte ;
- $e = 0{,}05\,\text{m}$ l'épaisseur de la porte, considérée négligeable devant R ;
- $\rho = 7800\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$;
- $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Question 1 *Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la porte :*

1. *déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_P de la plaque ;*
2. *déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_C de la portion cylindrique ;*
3. *déterminer les coordonnées du centre d'inertie G de la porte.*

Question 2 *Déterminer la forme de la matrice d'inertie de la porte :*

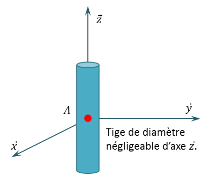
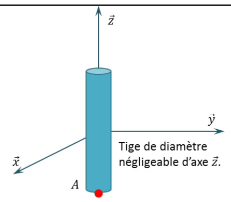
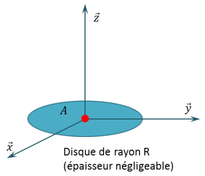
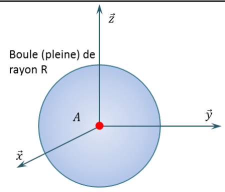
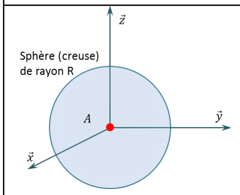
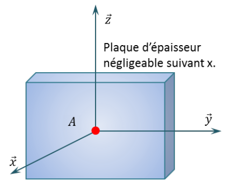
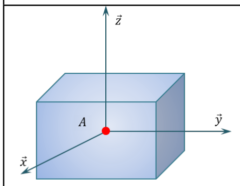
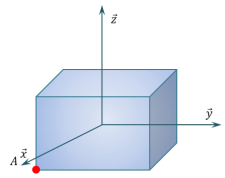
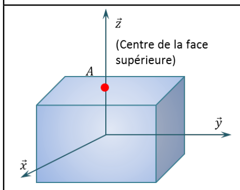
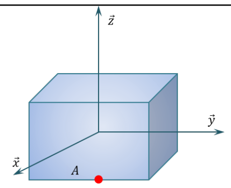
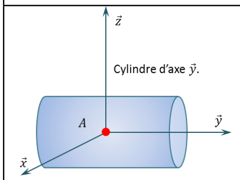
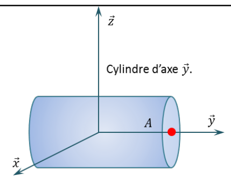
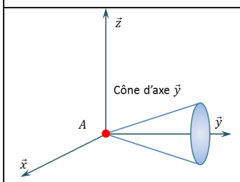
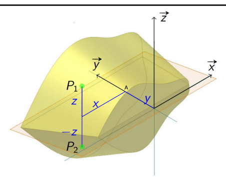
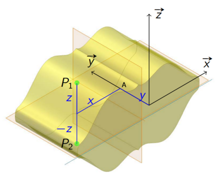
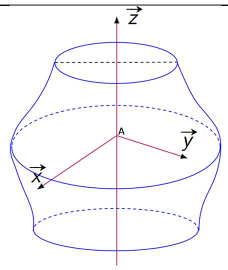
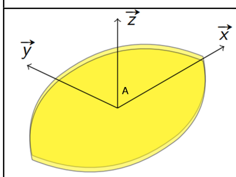
1. *donner la forme de la matrice d'inertie de la plaque P en G_P ;*
2. *donner la forme de la matrice d'inertie du cylindre C en G_C ;*

3. *donner la forme de la matrice d'inertie de la porte P en G.*

Question 3 *Déterminer la moment d'inertie de la porte par rapport à $\left(O,\overrightarrow{z}\right)$.*

Matrices d'inertie

Question *Donner les formes des matrices d'inertie suivantes.*

Application 1

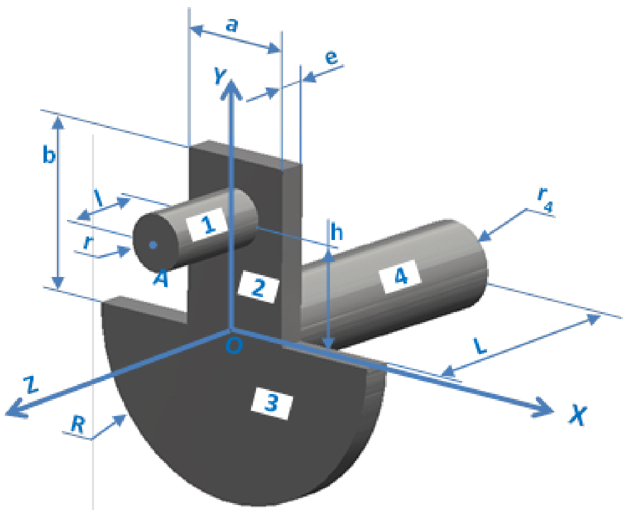
Application – Vilebrequin de moteur

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- ❒ *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- ❒ *Mod2.C15 : matrice d'inertie*

Un vilebrequin est réalisé en mécanosoudage pour faire fonctionner un prototype de moteur. Les géométries sont par conséquent simples : assemblage de tôles ou cylindres en acier.



L'origine O repère $\mathscr{R}$ est située dans le plan de contact du cylindre 1 et du parallélépipède 2.

On note $\rho = 7200\,\text{kg}\,\text{m}^3$ la masse volumique du matériau et on donne :

- $a = 20\,\text{mm}$;
- $b = 30\,\text{mm}$;
- $e = 5\,\text{mm}$;
- $l = 20\,\text{mm}$;
- $r = 5\,\text{mm}$;
- $L = 50\,\text{mm}$;
- $r_4 = 7{,}5\,\text{mm}$;
- $h = 20\,\text{mm}$.

Question 1 *Calculer les masses des différentes pièces : m_1, m_2, m_3 et m_4.*

Question 2 *Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.*

Question 3 *Déterminer la valeur de R afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.*

Question 4 *Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.*

Question 5 *Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en O dans la base $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.*

Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

Question 6 *Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe $\overrightarrow{OA}$.*

Application 1 – Corrigé

Application – Vilebrequin de moteur

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- *Mod2.C15 : matrice d'inertie*

Question 1 *Calculer les masses des différentes pièces : m_1, m_2, m_3 et m_4.*

Correction On a :

- $m_1=\mu\pi r_1^2 l_1$;
- $m_2=\mu a b e$
- $m_3=\mu\dfrac{1}{2}\pi R^2 e$;
- $m_4=\mu\pi r_3^2 L$.

Question 2 *Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.*

Correction On a :

- $\overrightarrow{OG_1}=h\overrightarrow{y}+\dfrac{l_1}{2}\overrightarrow{z}$;
- $\overrightarrow{OG_2}=\dfrac{b}{2}\overrightarrow{y}-\dfrac{e}{2}\overrightarrow{z}$;
- $\overrightarrow{OG_4}=-\left(e+\dfrac{L}{2}\right)\overrightarrow{z}$.

Le solide 3 a deux plans de symétrie : $\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)$ et $\left(\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$. On ne cherche donc la composante du centre d'inertie que dans la direction $\overrightarrow{y}$.

$m_3\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y}=\int\overrightarrow{OP}\,\overrightarrow{y}\,\mathrm{d}m$ avec $\mathrm{d}m=\mu\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\, e$ (ρ variant de 0 à R et θ variant de $-\pi$ à 0) et $\overrightarrow{OP}=\rho\left(\cos\theta\,\overrightarrow{x}+\sin\theta\,\overrightarrow{y}\right)$.

On a donc :

$$\mu\frac{1}{2}\pi R^2 e\,\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y}=\int\rho\left(\cos\theta\,\overrightarrow{x}+\sin\theta\,\overrightarrow{y}\right)\overrightarrow{y}\,\mu e\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\pi R^2\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y}=\int\rho^2\sin\theta\,\overrightarrow{y}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\Leftrightarrow\frac{1}{2}\pi R^2\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y}=-\frac{R^3}{3}\left[\cos\theta\right]_{-\pi}^{0}\overrightarrow{y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\pi\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y}=-2\frac{R}{3}\Leftrightarrow\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y}=-4\frac{R}{3\pi}\overrightarrow{y}$$

Au final : $\overrightarrow{OG_3}=-\dfrac{4R}{3\pi}\overrightarrow{y}-\dfrac{e}{2}\overrightarrow{z}$

Question 3 *Déterminer la valeur de R afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.*

Correction On a $\left(m_1+m_2+m_3+m_4\right)\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{y}=0$

$$\Leftrightarrow m_1\overrightarrow{OG_1}\cdot\overrightarrow{y}+m_2\overrightarrow{OG_2}\cdot\overrightarrow{y}+m_3\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y}+m_4\overrightarrow{OG_4}\cdot\overrightarrow{y}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\mu\pi r_1^2 l_1\right)h+\left(\mu a b e\right)\frac{b}{2}-\left(\mu\frac{1}{2}\pi R^2 e\right)\frac{4R}{3\pi}+\left(\mu\pi r_3^2 L\right)\cdot 0=0$$

$$\Leftrightarrow\pi r_1^2 l_1 h+a b e\frac{b}{2}-\frac{1}{2}R^2 e\frac{4R}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow \pi r_1^2 l_1 h \frac{3}{2} + a b^2 e \frac{3}{4} = R^3 e \Leftrightarrow R^3 = \pi r_1^2 l_1 h \frac{3}{2e} + a b^2 \frac{3}{4}$$

Question 4 *Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base* $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.

Correction

$$I_{G_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_R \quad I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_R \quad I_{G_3}(S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_R \quad I_{G_4}(S_4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_R$$

Question 5 *Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en* O *dans la base* $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.

Correction $\overrightarrow{OG_1} = h\overrightarrow{y} + \frac{l_1}{2}\overrightarrow{z}$

$$I_O(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_R + m_1 \begin{pmatrix} h^2 + \frac{l_1^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_1^2}{4} & -\frac{h l_1}{2} \\ 0 & -\frac{h l_1}{2} & h^2 \end{pmatrix}_R$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{b}{2}\overrightarrow{y} - \frac{e}{2}\overrightarrow{z}$$

$$I_O(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_R + m_2 \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} + \frac{e^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^2}{4} & -\frac{b e}{4} \\ 0 & -\frac{b e}{4} & \frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_R$$

$$\overrightarrow{OG_3} = -\frac{4R}{3\pi}\overrightarrow{y} - \frac{e}{2}\overrightarrow{z}$$

$$I_O(S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_R + m_3 \begin{pmatrix} \frac{16R^2}{9\pi^2} + \frac{e^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^2}{4} & -\frac{4R}{3\pi}\frac{e}{2} \\ 0 & -\frac{4R}{3\pi}\frac{e}{2} & \frac{16R^2}{9\pi^2} \end{pmatrix}_R$$

$$\overrightarrow{OG_4} = -\left(e + \frac{L}{2}\right)\overrightarrow{z}.$$

$$I_O(S_4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_R + m_4 \begin{pmatrix} \left(e + \frac{L}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(e + \frac{L}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_R$$

On a :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_R$$

Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

Question 6 *Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe* $\overrightarrow{OA}$.

Correction $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{||\overrightarrow{OA}||} = \frac{L_1\overrightarrow{z} + h\overrightarrow{y}}{\sqrt{L_1^2 + h^2}}$

$$J_{\Delta}=\begin{pmatrix}0 & u_y & u_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & B & -D\\ 0 & -D & C\end{pmatrix}_R\begin{pmatrix}0\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & u_y & u_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ Bb-Dc\\ -Db+Cc\end{pmatrix}$$

$$J_{\Delta}=(Bb-Dc)\,u_y+(-Db+Cc)\,u_z$$

Application 1

Application 2

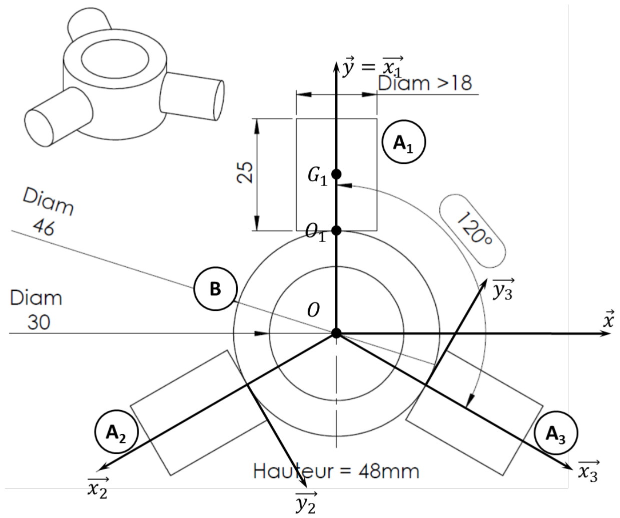
X. Pessoles

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- ❒ *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- ❒ *Mod2.C15 : matrice d'inertie*

Triaxe

On donne le plan d'un triaxe constitué des 3 axes A_1, A_2, A_3 et du moyeu central noté M. On note T l'ensemble.



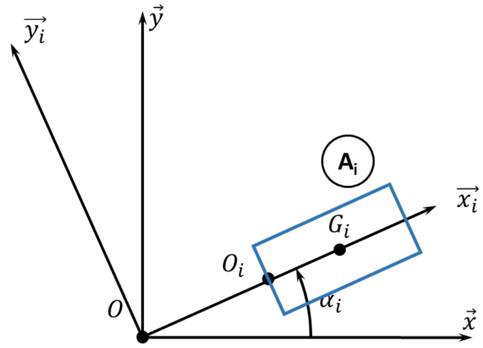
On note :

- $\overrightarrow{z}$ l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On se place ci-dessus dans le plan de symétrie $\left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$;
- $\mathcal{R}_i$ le repère $\left(O_i; \overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i}\right)$ et $\mathcal{B}_i$ la base associée.

TOUS LES CALCULS SE FERONT DE MANIÈRE LITTEREALE!

- $D_1 = 18\,\text{mm}$ et $H_1 = 25\,\text{mm}$.
- $D = 46\,\text{mm}$, $D' = 30\,\text{mm}$ et $H = 48\,\text{mm}$.
- $\alpha_1 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1}\right) = 90°$, $\alpha_2 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_2}\right) = -150°$ et $\alpha_3 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_3}\right) = -30°$.

On donne ci-dessous le paramétrage d'un axe A_i.



Question 1 *Déterminer (sans calcul) la position du centre de gravité du triaxe.*

Question 2 *Déterminer analytiquement la position du centre de gravité G_i du solide A_1 dans le repère $\mathcal{R}_i$.*

Question 3 *Déterminer (sans calcul) la **forme** de la matrice d'inertie du triaxe.*

Question 4 *Déterminer analytiquement la matrice d'inertie du solide A_i en G_i dans $\mathcal{R}_i$. On la note $I_{G_i}(A_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_i}$ où les constantes seront à déterminer littéralement.*

Question 5 *Déterminer $I_{G_i}(A_i)$ dans la base $\mathcal{B}\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ puis $I_O(A_i)$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Question 6 *Déterminer $I_O(B)$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Question 7 *Proposer une méthode pour déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base $\mathcal{B}$.*

Question 8 *Déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base $\mathcal{B}$.*

Question 9 *Déterminer $I_O(M)$ la matrice d'inertie du moyeu M.*

Question 10 *Déterminer $I_O(T)$ la matrice d'inertie du triaxe T.*

Application 1 – Corrigé

Application 2

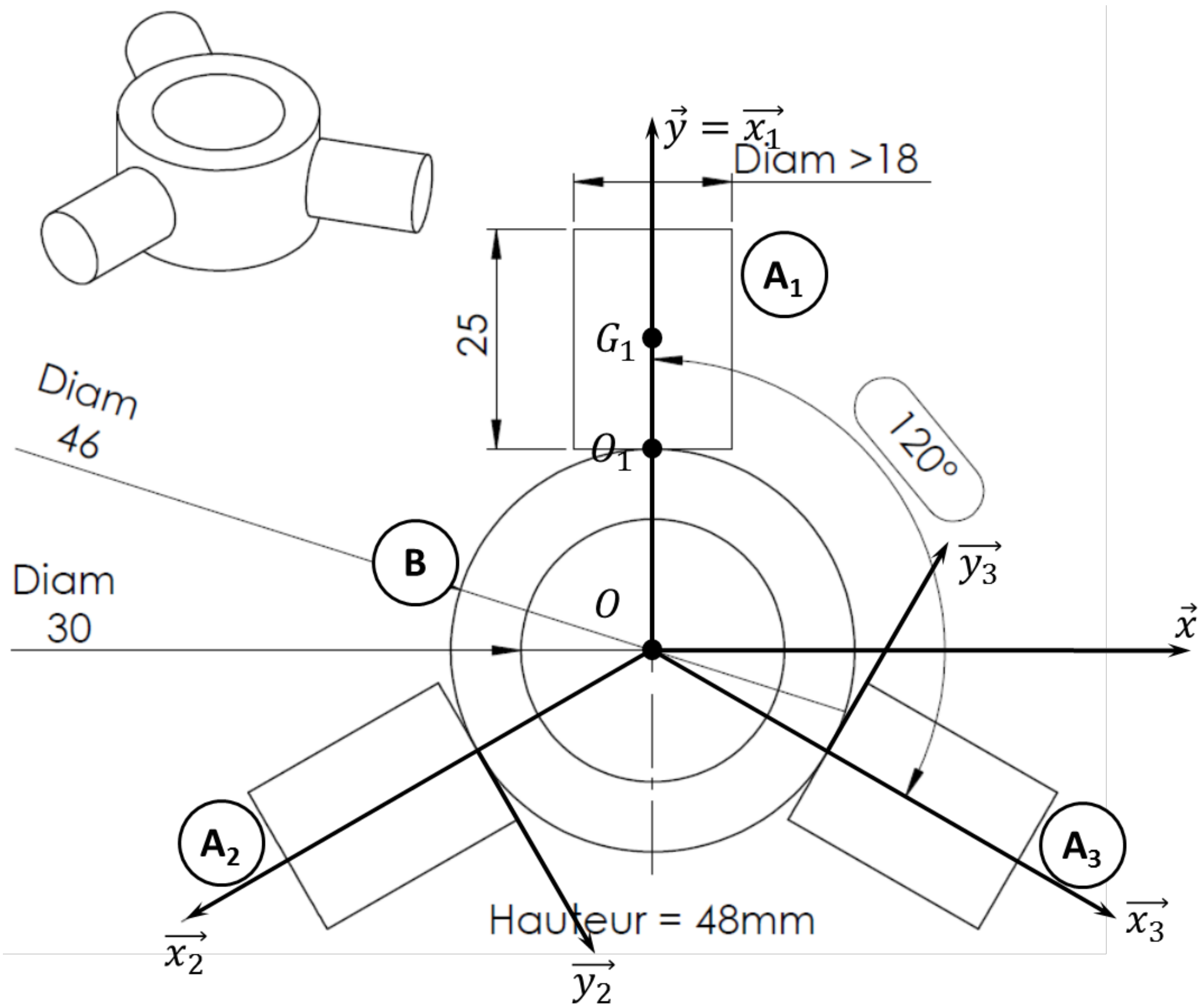
X. Pessoles

Savoirs et compétences :

- ❐ *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- ❐ *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- ❐ *Mod2.C15 : matrice d'inertie*

Triaxe

On donne le plan d'un triaxe constitué des 3 axes A_1, A_2, A_3 et du moyeu central noté M. On note T l'ensemble.



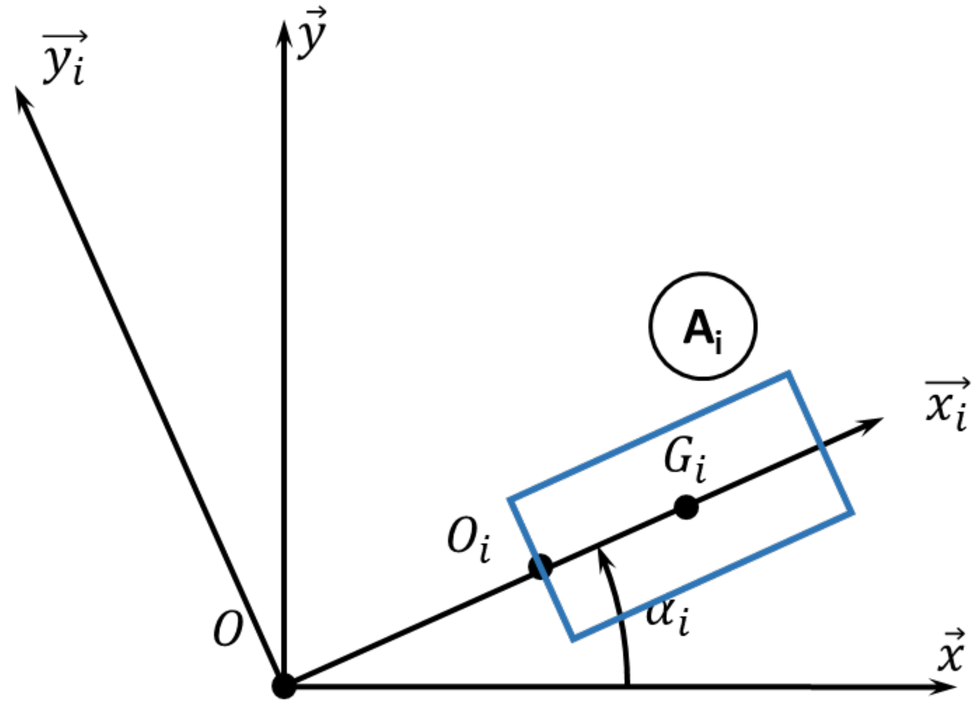
On note :

- $\vec{z}$ l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On se place ci-dessus dans le plan de symétrie $\left(O, \vec{x}, \vec{y}\right)$;
- $\mathscr{R}_i$ le repère $\left(O_i ; \overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i}\right)$ et $\mathscr{B}_i$ la base associée.

TOUS LES CALCULS SE FERONT DE MANIÈRE LITTEREALE !

- $D_1 = 18\,\text{mm}$ et $H_1 = 25\,\text{mm}$.
- $D = 46\,\text{mm}$, $D' = 30\,\text{mm}$ et $H = 48\,\text{mm}$.
- $\alpha_1 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1}\right) = 90°$, $\alpha_2 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_2}\right) = -150°$ et $\alpha_3 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_3}\right) = -30°$.

On donne ci-dessous le paramétrage d'un axe A_i.



Question 1 *Déterminer (sans calcul) la position du centre de gravité du triaxe.*

Correction

Le plan $\left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{z} = 0$

Le plan $\left(O, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{x} = 0$

Reste la coordonnée selon $\overrightarrow{y}$.

Les plans $\left(O, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x_2}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x_3}\right)$ étant plans de symétrie, on a $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{y_2} = 0$ et $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{y_3} = 0$. Or $\overrightarrow{OG} = y_g \overrightarrow{y} = y_g \cos\alpha_2 \overrightarrow{y_2} - y_g \sin\alpha_2 \overrightarrow{x_2}$. Il en résulte que $y_g \cos\alpha_2 = 0$ et donc nécessairement $y_g = 0$ car $\alpha_2 \neq 0$.

Question 2 *Déterminer analytiquement la position du centre de gravité G_i du solide A_1 dans le repère $\mathcal{R}_i$.*

Correction On pourrait répondre directement en disant que le solide à 3 plans de symétrie orthogonaux entre eux. En utilisant la définition on a :

- $M_1 = \mu H_1 \pi \dfrac{D_1^2}{4}$;
- en coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{O_i P_i} = x\overrightarrow{x_i} + \rho\cos\theta\overrightarrow{y_i} + \rho\sin\theta\overrightarrow{z_i}$ et $\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$ avec $x \in [0, H_1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, D_1/2]$;
- $m_i x_{G_i} = \mu \iiint x_P dV = \mu \iiint x\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x = \mu\dfrac{H_1^2}{2}2\pi\dfrac{D_1^2}{8}$;
- $m_i y_{G_i} = \mu \iiint y_P dV = \mu \iiint \rho\cos\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x = 0$;
- $m_i z_{G_i} = \mu \iiint z_P dV = \mu \iiint \rho\sin\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x = 0$.

Au final, $\mu H_1 \pi \dfrac{D_1^2}{4} x_{G_1} = \mu\dfrac{H_1^2}{2}2\pi\dfrac{D_1^2}{8} \Leftrightarrow x_{G_1} = \dfrac{H_1}{2}$.

Question 3 *Déterminer (sans calcul) la **forme** de la matrice d'inertie du triaxe.*

Correction Le plan $\left(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $E=\iiint xz\mathrm{d}m=0$ et $D=\iiint yz\mathrm{d}m=0$.
Le plan $\left(O,\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $E=\iiint xz\mathrm{d}m=0$ et $F=\iiint xy\mathrm{d}m=0$.
La matrice est donc diagonale et de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$.

Question 4 *Déterminer analytiquement la matrice d'inertie du solide A_i en G_i dans $\mathscr{R}_i$. On la note $I_{G_i}(A_i)=\begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i\\ -F_i & B_i & -D_i\\ -E_i & -D_i & C_i\end{pmatrix}_{\mathscr{R}_i}$ où les constantes seront à déterminer littéralement.*

Correction Le solide étant axisymétrique, on a : $D_i=E_i=F_i=0$ et $C_i=B_i$. D'où $I_{G_i}(A_1)=\begin{pmatrix} A_i & 0 & 0\\ 0 & B_i & 0\\ 0 & 0 & B_i\end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1}$.

Calculons $A_i=\iiint\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}m=\mu\iiint\left(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$
$=\mu\iiint\rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\mu\left[\dfrac{\rho^4}{4}\right]_0^{D_1/2}2\pi H_1=\mu\dfrac{D_1^4}{16\cdot 4}2\pi H_1=M_1\dfrac{D_1^2}{8}$.

Calculons $B_i=\iiint\left(x^2+z^2\right)\mathrm{d}m=\mu\iiint\left(x^2+\rho^2\sin^2\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$

$B_x=\mu\iiint x^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x+\mu\iiint\rho^2\sin^2\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=\mu\iiint x^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=\mu\dfrac{H_1^3}{4\cdot 3}\dfrac{D_1^2}{8}2\pi=M\dfrac{H_1^2}{12}$

$B_z=\mu\iiint\rho^2\sin^2\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=\mu\iiint\rho^3\dfrac{1-\cos 2x}{2}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=\mu\iiint\dfrac{\rho^3}{2}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=\mu\dfrac{D_i^4}{2\cdot 16\cdot 4}2\pi H_1=M\dfrac{D_i^2}{16}$.

Au final, $A_i=M_1\dfrac{D_1^2}{8}$ et $B_i=M\left(\dfrac{H_1^2}{12}+\dfrac{D_1^2}{16}\right)$.

Question 5 *Déterminer $I_{G_i}(A_i)$ dans la base $\mathscr{B}\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ puis $I_O(A_i)$ dans la base $\mathscr{B}$.*

Correction On a $\overrightarrow{x_i}=\cos\alpha\,\overrightarrow{x}+\sin\alpha\,\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{y_i}=\cos\alpha\,\overrightarrow{y}-\sin\alpha\,\overrightarrow{x}$. En conséquences, on a : $P_{10}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

On a donc $I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}}=P_{10}^{-1}I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}_1}P_{10}$.

$$I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\cos\alpha & -A_1\sin\alpha & 0\\ B_1\sin\alpha & B_1\cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_1\cos^2\alpha+B_1\sin^2\alpha & -A_1\sin\alpha\cos\alpha+B_1\cos\alpha\sin\alpha & 0\\ -A_1\sin\alpha\cos\alpha+B_1\cos\alpha\sin\alpha & A_1\sin^2\alpha+B_1\cos^2\alpha & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{OG_i}=\dfrac{H+D}{2}\overrightarrow{x_i}=\dfrac{H+D}{2}\left(\cos\alpha\,\overrightarrow{x}+\sin\alpha\,\overrightarrow{y}\right)$; donc :

$$I_O(A_i)_{\mathscr{R}}=I_{G_i}(A_i)_{\mathscr{R}}+M_1\begin{pmatrix}\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right) & 0\\ \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right) & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2\end{pmatrix}$$

$$I_O(A_i)_{\mathcal{R}} = I_{G_i}(A_i)_{\mathcal{R}} + M_1 \begin{pmatrix} \left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 & \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

Au final, $I_O(A_i)_{\mathcal{R}} =$

$$\begin{pmatrix} A_1\cos^2\alpha + B_1\sin^2\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 & (B_1-A_1)\sin\alpha\cos\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ (B_1-A_1)\sin\alpha\cos\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & A_1\sin^2\alpha + B_1\cos^2\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

On note $I_O(A_i)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} f(\alpha) & fg(\alpha) & 0 \\ fg(\alpha) & g(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & h(\alpha) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

Question 6 *Déterminer $I_O(B)$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Question 7 *Proposer une méthode pour déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base $\mathcal{B}$.*

Question 8 *Déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base $\mathcal{B}$.*

Correction

Question 9 *Déterminer $I_O(M)$ la matrice d'inertie du moyeu M.*

Correction

Question 10 *Déterminer $I_O(T)$ la matrice d'inertie du triaxe T.*

Correction