

Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur

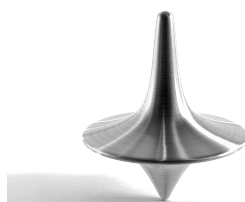
Cours

Chapitre 3

Application du Principe Fondamental de la Dynamique

Savoirs et compétences :

- ❑ Mod2.C16 : torseur cinétique
- ❑ Mod2.C17 : torseur dynamique
- ❑ Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- ❑ Mod2.C15 : matrice d'inertie
- ❑ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ❑ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement
- ❑ Res1.C2.SF1 : proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison



Toupie



Volants d'inertie d'un vilebrequin

1	Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général	2
1.1	Théorème de la résultante dynamique	2
1.2	Théorème du moment dynamique	2
2	Torseur cinétique	2
2.1	Définition	2
2.2	Écriture avec l'opérateur d'inertie	2
2.3	Cas particuliers	2
2.4	Méthodologie de Calcul	3
3	Torseur dynamique	3
3.1	Définition	3
3.2	Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques	4
3.3	Cas particuliers	4
3.4	Méthodologie de calcul	4

1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

Définition — Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique. Soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égale au torseur dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G \in E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)} \end{array} \right\}_A.$$

- On note $\overrightarrow{R_d(S/R_0)}$ la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie G .
- Le **moment dynamique** dépend du point A et se note $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$.

Du Principe Fondamental de la dynamique découle plusieurs **théorèmes généraux**.

1.1 Théorème de la résultante dynamique

Théorème — Théorème de la résultante dynamique. Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G \in E/R_0)}.$$

1.2 Théorème du moment dynamique

Théorème — Théorème du moment dynamique. Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}.$$

2 Torseur cinétique

2.1 Définition

Définition Le **torseur cinétique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 exprimé en un point A quelconque se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A.$$

- La résultante du torseur cinétique $\overrightarrow{R_c(S/R_0)}$ s'exprime en kg m s^{-1} et ne dépend pas du point A mais uniquement du centre d'inertie G de S (de masse m) : $\overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V}(G/R_0)$.
- Le moment cinétique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\sigma(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_0)}$.

2.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

Propriété Pour un solide S de masse m dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}(A \in S/R_0).$$

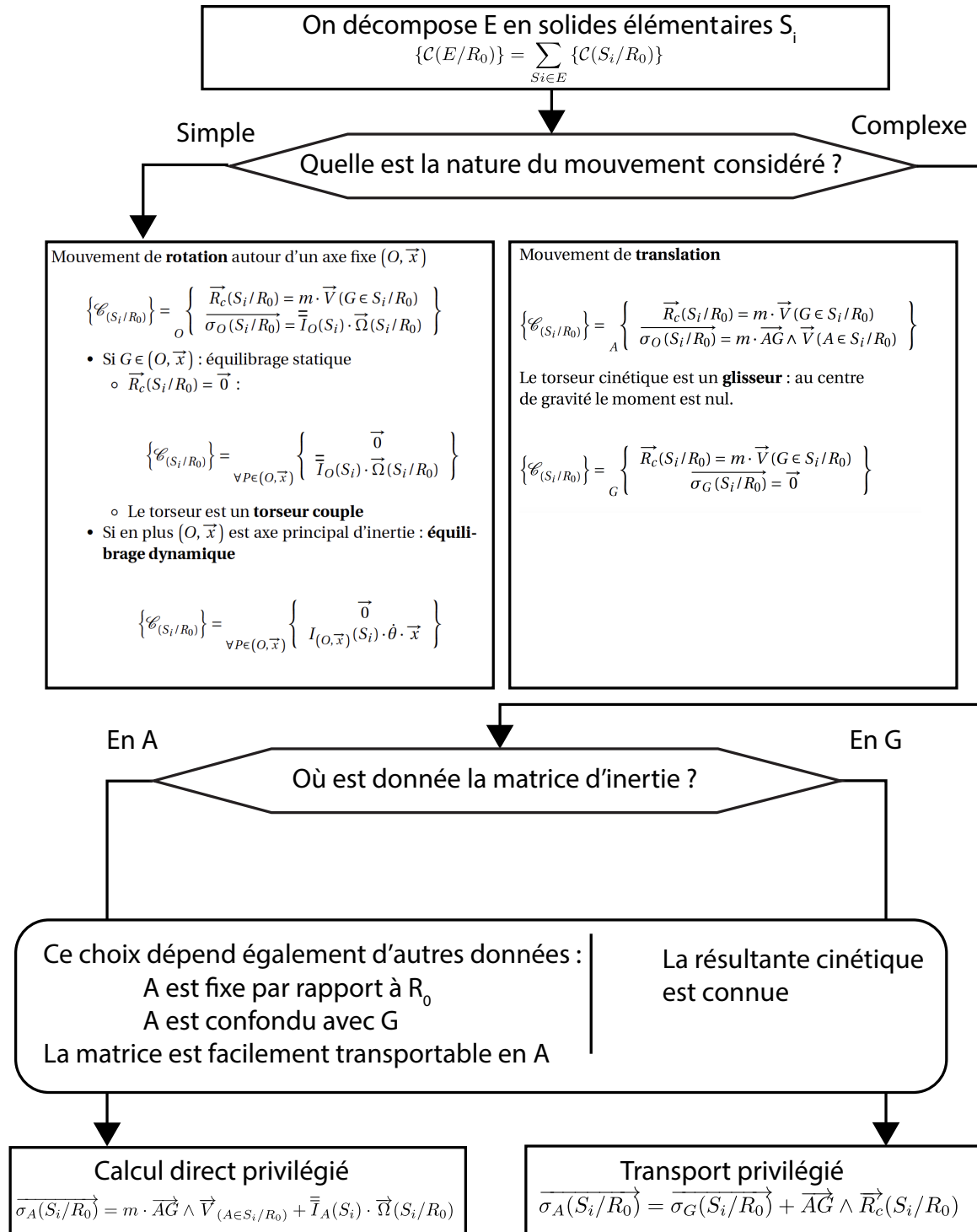
2.3 Cas particuliers



- En appliquant cette formule en un point **A fixe** dans le mouvement de S/R_0 , on a : $\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$.
- En appliquant cette formule en G , **centre d'inertie** de S , on a : $\overrightarrow{\sigma}(G, S/R_0) = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$.

2.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne la méthodologie de calcul sur la figure suivante.



3 Torseur dynamique

3.1 Définition

Définition — Torseur dynamique. Le **torseur dynamique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{a}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur dynamique, $\overrightarrow{R_d}(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie :

$$\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m \overrightarrow{a}(G/R_0)$$

- Le moment dynamique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point :

$$\overrightarrow{\delta}(B, S/R_0) = \overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R_0).$$

3.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Propriété — Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques. Pour un solide S de masse M dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

- Relation entre les **résultantes** :

$$\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{R_c}(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

- Relation entre les **moments** :

$$\overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V}(A/R_0) \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0).$$

3.3 Cas particuliers

R [Cas particuliers]

- En appliquant cette formule en un point O **fixe** dans R_0 , on a :

$$\overrightarrow{\delta}(O, S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(O, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

- En appliquant cette formule en un point G , **centre d'inertie de S** , on a :

$$\overrightarrow{\delta}(G, S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(G, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

3.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne l'algorithme de calcul du moment dynamique sur la figure 1.

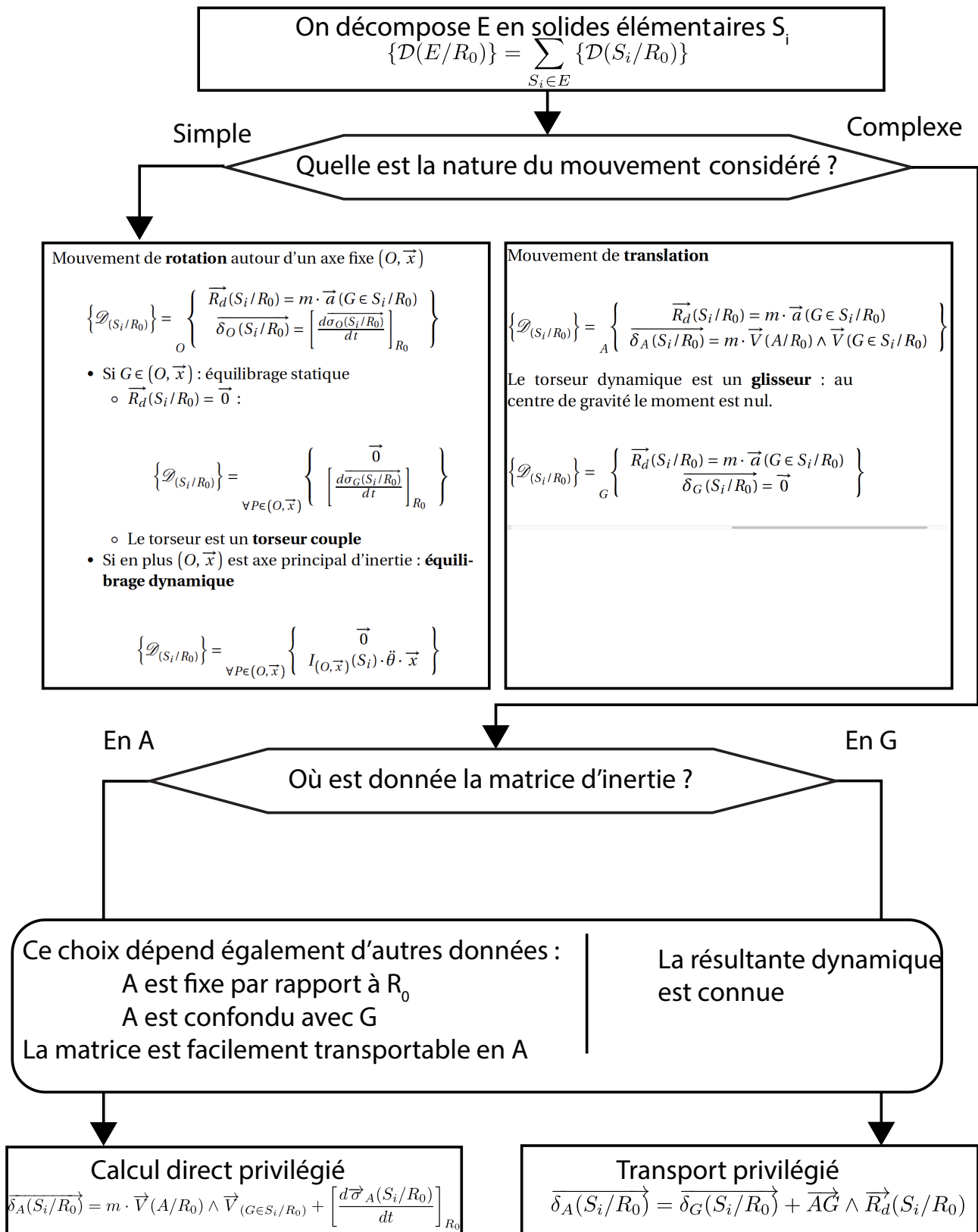


FIGURE 1 – Algorithme de calcul du moment dynamique