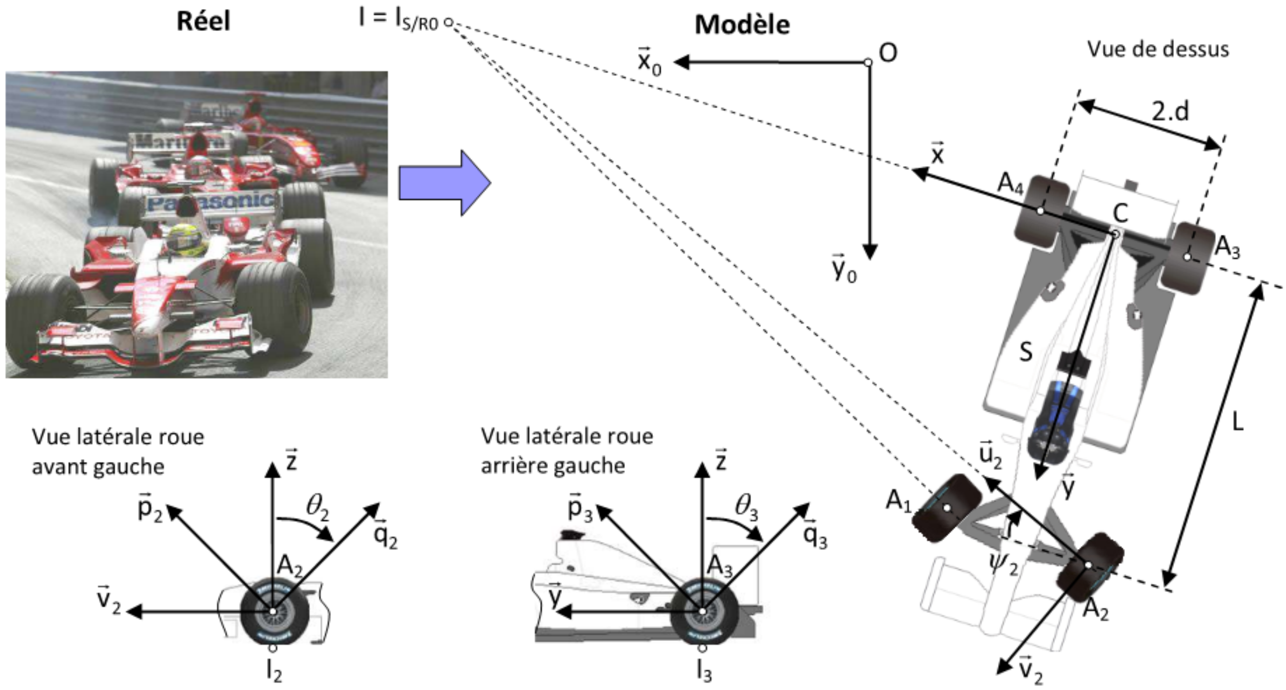
Application 02

Étude des performances cinématiques en virage d'une Formule 1

Florestan Mathurin

Savoirs et compétences :



Mise en situation

Une Formule 1 doit assurer un certain nombre d'exigences techniques afin d'assurer les meilleures performances en course tout en garantissant la sécurité du pilote. Une de ces exigences est que « le système doit tenir la trajectoire en phase de virage ». Pour y parvenir, le véhicule dispose d'une cinématique particulière permettant aux roues de tourner sur le sol en limitant le risque de glissement. On s'intéresse aux conséquences pratiques nécessaire pour assurer la condition de roulement sans glissement des roues sur le sol. On supposera donc que les 4 roues roulent sans glisser dans le plan $\left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}\right)$.

Pour cette étude on considère que le véhicule est constitué d'un châssis (S) et de 4 roues (S_i) avec $i = 1,2,3,4$. Le châssis est modélisé par un rectangle $A_1A_2A_3A_4$ tel que $\overrightarrow{A_4A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} = 2d\,\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{A_4A_1} = \overrightarrow{A_3A_2} = L\,\overrightarrow{y}$ où L correspond à l'empattement du véhicule et $2d$ à la voie.

On définit le repère $\mathscr{R}\left(C, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ attaché au châssis où le point C, origine du repère, est tel que $\overrightarrow{A_4C} = d\,\overrightarrow{x}$. Le véhicule est en phase de virage et on considère alors qu'il est en rotation par rapport au repère $\mathscr{R}_0\left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ autour du point $I_{S/R0} = I$, centre instantanée de rotation du mouvement. On pose $\beta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x}\right)$ angle de rotation du châssis par rapport à $\mathscr{R}_0$.

On définit le repère $\mathscr{R}_i\left(A_i, \overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{p_i}, \overrightarrow{q_i}\right)$ attaché à chaque roue (S_i) . Ces 4 roues de rayon R sont en liaison pivot avec le châssis (S) suivant les axes $\left(A_i, \overrightarrow{u_i}\right)$ avec $i = 1,2,3,4$. On pose $\theta_i = \left(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{q_i}\right)$ angle de rotation de la roue i par rapport au châssis. Afin d'assurer la direction du véhicule, les 2 roues pivotent d'un angle ψ_1 suivant l'axe $\left(A_i, \overrightarrow{z}\right)$ pour la roue 1 et d'un angle ψ_2 suivant l'axe $\left(A_2, \overrightarrow{z}\right)$) pour la roue 2 avec $\psi_1 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u_1}\right) = \left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{v_1}\right)$ et $\psi_2 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u_2}\right) = \left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{v_2}\right)$. On considère que le contact sol/roue et assimilable à un contact ponctuel en I de normale $\left(I, \overrightarrow{z}\right)$ tel que $\overrightarrow{I_iA_i} = R\,\overrightarrow{z}$.

Question 1 *Établir les figures géométrales utiles.*

Question 2 *Écrire la condition de roulement sans glissement de la roue (S_1) par rapport au sol $\mathscr{R}_0$. En déduire une relation vectorielle simple entre $\overrightarrow{V(I_1 \in S_1/S)}$ et $\overrightarrow{V(I_1 \in S/\mathscr{R}_0)}$.*

Question 3 *Donner la forme simple du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_0)\}$ écrit en I. En déduire alors $\overrightarrow{V(I_1 \in S/\mathcal{R}_0)}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_0)}$ et $\overrightarrow{II_1}$ (on n'effectuera pas les produits vectoriels).*

Question 4 *Donner la forme simple du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_1/S)\}$ écrit en A_1. En déduire alors $\overrightarrow{V(I_1 \in S_1/S)}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega(S_1/S)}$ et $\overrightarrow{A_1I_1}$ (on n'effectuera pas les produits vectoriels).*

Question 5 *Déduire des relations précédentes que* $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{A_1I_1} = \overrightarrow{0}$.

Question 6 *On pose $\overrightarrow{IA_1} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{v_1} + c\overrightarrow{z}$, montrer que l'on a nécessairement $a = -\dfrac{R\dot{\theta}_1}{\dot{\beta}}$ et $b = 0$ pour que la relation obtenue question précédente soit respectée.*

Question 7 *Montrer que l'axe (D_1) de la roue (S_1) passe par I, puis en déduire que l'axe (D_i) de la roue (S_i) passe par I.*

On pose par la suite $\overrightarrow{IC} = \rho\overrightarrow{x}$ et on note $\overrightarrow{V(C \in S/R)} = V\overrightarrow{y}$ (ρ est le rayon du virage et V la vitesse du véhicule).

Question 8 *À partir de $\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_0)\}$ exprimé en I, quelle relation simple existe-t-il entre V et ρ ?*

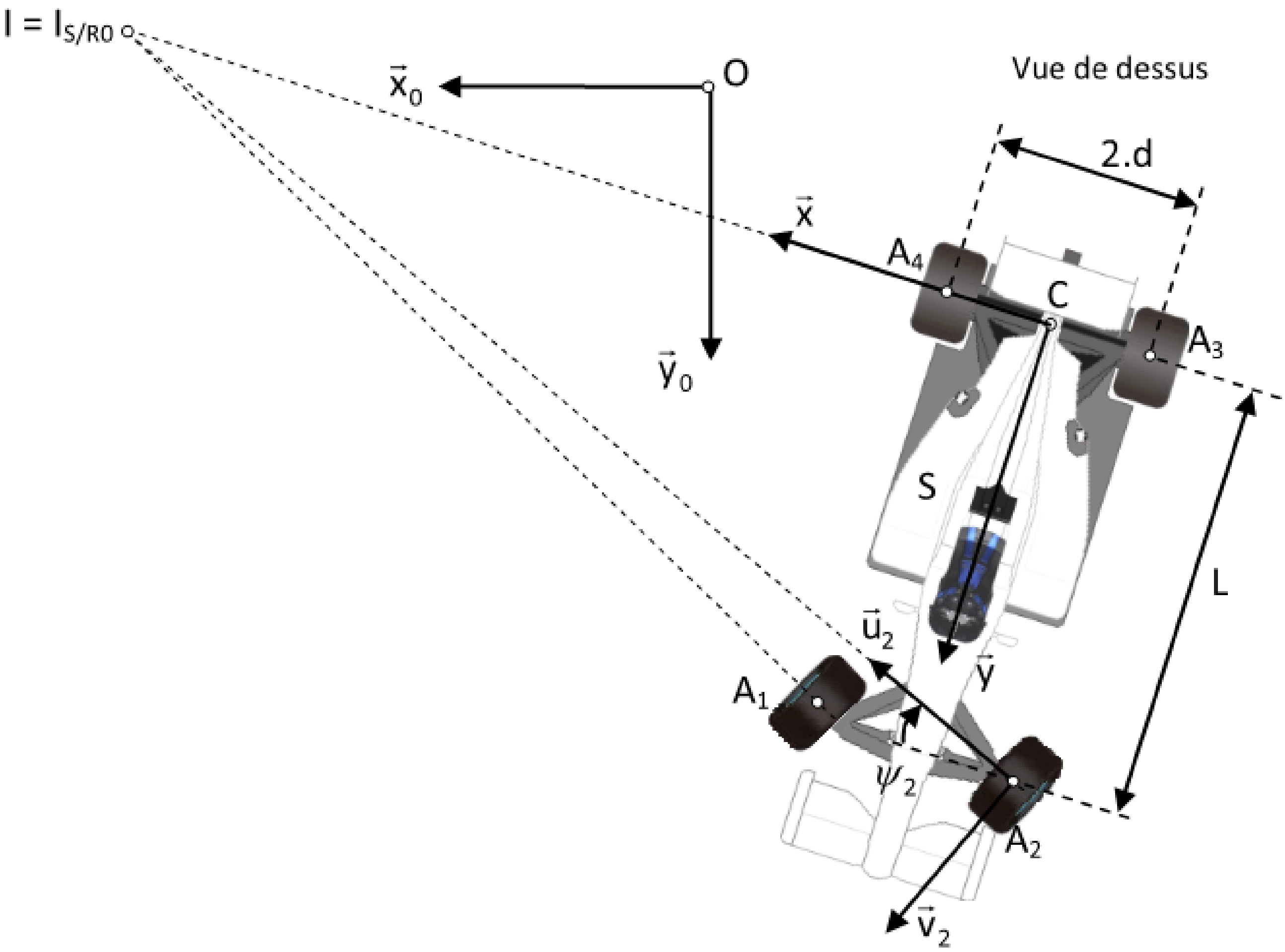
Question 9 *En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer les vitesses de rotation $\dot{\theta}_3$ et $\dot{\theta}_4$ des deux roues arrières (S_3) et (S_4) en fonction de ρ, R, d et V. Que constate-t-on ?*

Question 10 *En déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu arrière pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en I_3 et I_4.*

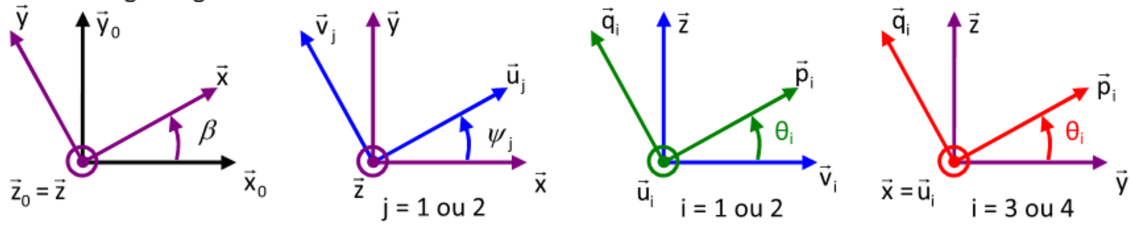
On considère que le véhicule roule à 90 kmh, les roues ont pour diamètre 80 cm et le virage décrit une courbe telle que la vitesse angulaire du véhicule $\dot{\beta} = 0.1$ rad/s. On donne $d = 1$ m.

Question 11 *Déterminer graphiquement les vitesses des roues S_1, S_2, S_3, S_4 en I_1, I_2, I_3, I_4. Utiliser une échelle judicieuse pour les vitesses et justifier les constructions.*

Question 12 *Que constate-t-on sur les roues avants et en déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu avant pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en I_1 et I_2.*



Q.1. Etablir les figures géométrales utiles.



Q.2. RSG en I_1 : $\overrightarrow{V_{I_1,S_1/R_0}} = \vec 0 = \overrightarrow{V_{I_1,S_1/S}} + \overrightarrow{V_{I_1,S/R_0}}$

Q.3. $\{\mathcal{V}_{S/R_0}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \dot\beta.\vec z \\ \overrightarrow{V_{I,S/R_0}} = \vec 0 \end{matrix} \right\}_I$ avec $I = I_{S/R0}$ et $\overrightarrow{V_{I,S/R_0}} = \vec 0 = \overrightarrow{V_{I_1,S/R_0}} + \overrightarrow{II_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$

Q.4. $\{\mathcal{V}_{S_1/S}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S_1/S}} = \dot\psi_1.\vec z + \dot\theta_1.\vec u_1 \\ \overrightarrow{V_{A_1,S_1/S}} = \vec 0 \end{matrix} \right\}_{A_1}$ avec $\overrightarrow{V_{A_1,S_1/S}} = \vec 0 = \overrightarrow{V_{I_1,S_1/S}} + \overrightarrow{A_1I_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S_1/S}}$

Q.5. Questions 4 et 5 : $\overrightarrow{V_{I,S/R_0}} = \vec 0 = \overrightarrow{V_{I_1,S/R_0}} + \overrightarrow{II_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \rightarrow \overrightarrow{V_{I_1,S/R_0}} = \overrightarrow{I_1I} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$

et $\overrightarrow{V_{A_1,S_1/S}} = \vec 0 = \overrightarrow{V_{I_1,S_1/S}} + \overrightarrow{A_1I_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S_1/S}} \rightarrow \overrightarrow{V_{I_1,S_1/S}} = \overrightarrow{I_1A_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S_1/S}}$

Question 3 : $\overrightarrow{V_{I_1,S_1/R_0}} = \vec 0 = \overrightarrow{V_{I_1,S_1/S}} + \overrightarrow{V_{I_1,S/R_0}}$

$\rightarrow \overrightarrow{I_1A_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S_1/S}} + \overrightarrow{I_1I} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \vec 0$

$\rightarrow \overrightarrow{I_1A_1} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{R_0/S}}) + (\overrightarrow{I_1A_1} + \overrightarrow{A_1I}) \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \vec 0$

$$\rightarrow \overrightarrow{I_1A_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}} + \underbrace{\overrightarrow{I_1A_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_0/S}} + \overrightarrow{I_1A_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}}_{\rightarrow \vec 0 \text{ car } \overrightarrow{\Omega_{R_0/S}} = -\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}} + \overrightarrow{A_1I} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \vec 0$$

$\rightarrow \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{A_1I_1} = \vec 0$

Q.6. On a $\overrightarrow{IA_1} = a.\vec u_1 + b.\vec v_1 + c.\vec z$; $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \dot\beta.\vec z$; $\overrightarrow{A_1I_1} = -R.\vec z$ et $\overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{S_1/S}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = (\dot\beta + \dot\psi_1).\vec z + \dot\theta_1.\vec u_1$

$\rightarrow \dot\beta.\vec z \wedge a.\vec u_1 + b.\vec v_1 + c.\vec z = -R.\vec z \wedge ((\dot\beta + \dot\psi_1).\vec z + \dot\theta_1.\vec u_1)$

$\rightarrow a.\dot\beta.\vec v_1 - b.\dot\beta.\vec u_1 = -R.\dot\theta_1.\vec v_1$

Par identification on a nécessairement $a = -\dfrac{R.\dot\theta_1}{\dot\beta}$ et b = 0 pour que la relation soit respectée.

Q.7. On a l'axe (D_1) de la roue (S_1) qui est porté par l'axe $\vec u_1$.

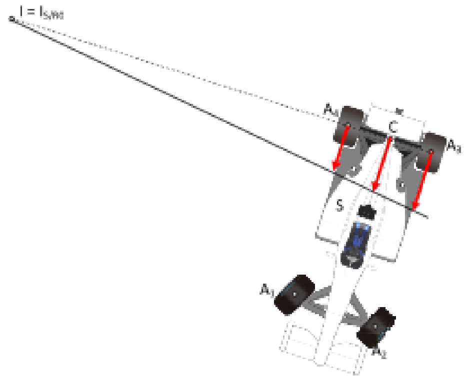
Le problème est plan → c = 0 donc $\overrightarrow{IA_1} = a.\vec u_1$ → le point I est donc sur l'axe $\vec u_1$.

En généralisant on a l'axe (D_i) de la roue (S_i) passe par le CIR I.

Q.8. $\left\{\mathcal{V}_{S/R_0}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \dot{\beta}.\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{I,S/R_0}} = \vec{0}\end{matrix}\right\}_I$ $\quad \overrightarrow{V_{C,S/R_0}} = \overrightarrow{V_{I,S/R_0}} + \overrightarrow{CI} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = -\rho.\vec{x} \wedge \dot{\beta}.\vec{z} = \rho.\dot{\beta}.\vec{y} = V.\vec{y} \rightarrow V = \rho.\dot{\beta}$

Q.9. En appliquant le champ des vitesses on retrouve :

$\overrightarrow{V_{A_3,S/R_0}} = \overrightarrow{V_{I,S/R_0}} + \overrightarrow{A_3I} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = -(\rho+d).\vec{x} \wedge \dot{\beta}.\vec{z} = (\rho+d).\dot{\beta}.\vec{y}$



RSG en I_3 : $\overrightarrow{V_{I_3,S_3/R_0}} = \vec{0} = \overrightarrow{V_{I_3,S_3/S}} + \overrightarrow{V_{I_3,S/R_0}}$

$\rightarrow \underbrace{\overrightarrow{V_{A_3,S_3/S}} + \overrightarrow{I_3A_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S_3/S}}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{V_{A_3,S/R_0}} + \underbrace{\overrightarrow{A_3I_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}}_{=\vec{0}\ \text{(vecteurs portés par } \vec{z}\text{)}} = \vec{0}$

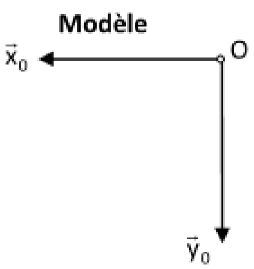
$\rightarrow R.\vec{z} \wedge \dot{\theta}_3.\vec{u}_3 + (\rho+d).\dot{\beta}.\vec{y} = \vec{0} \rightarrow R.\dot{\theta}_3 = -(\rho+d).\dot{\beta}$

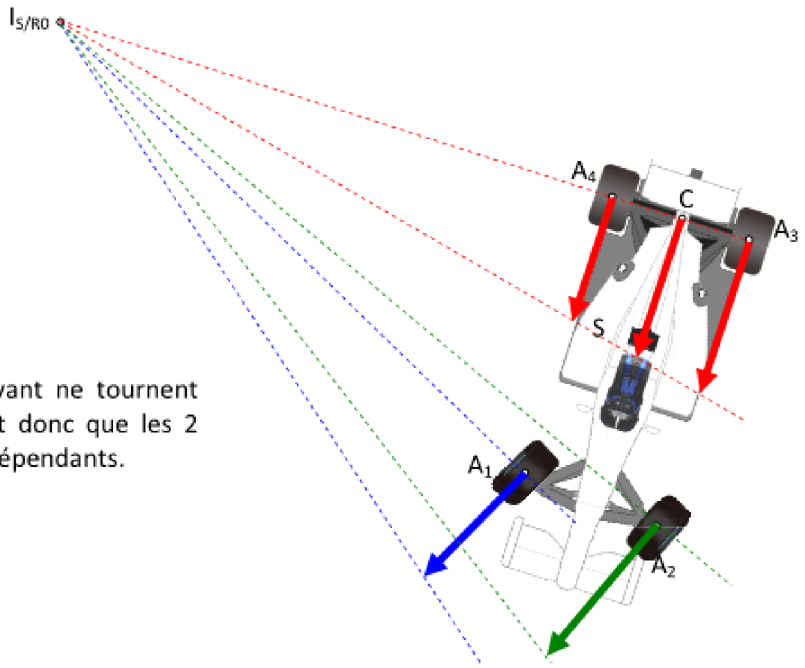
$\rightarrow \dot{\theta}_3 = -\dfrac{(\rho+d)}{R}.\dfrac{V}{\rho}$

De même on obtient : $\dot{\theta}_4 = -\dfrac{(\rho-d)}{R}.\dfrac{V}{\rho}$ Les deux roues arrière ne tournent pas à la même vitesse.

Q.10. Comme les 2 roues arrière ne tournent pas à la même vitesse angulaire, il faut que les 2 essieux de ces roues soient indépendants. De plus ici ce sont les roues arrières qui sont motrices → utilisation d'un différentiel.

Q.11. On a $V = \rho.\dot{\beta}$ = 90 km/h soit 2 cm sur le schéma en C. En appliquant simplement le champ des vitesses on en déduit ensuite les vecteurs vitesse recherchés.





On constate que les roues avant ne tournent pas à la même vitesse. Il faut donc que les 2 essieux de ces roues soient indépendants.