Application 3 – Corrigé

Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique ★

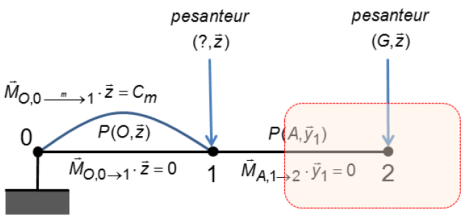
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- ❐ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❐ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

1. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède deux degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver deux équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée : $\omega = cte$. Reste à déterminer $\beta(t)$.

On isole la nacelle 2.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur $\vec{y}_1$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 2 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1=\vec{M}_{A,\bar{2}\to2}\cdot\vec{y}_1}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{A,\bar{2}\to2}\cdot\vec{y}_1$:

$$\{T_{1\to2}\}=\underset{\forall P\in(A,\vec{y}_1)}{\begin{Bmatrix}\vec{R}_{1\to2}\\ \vec{M}_{P,1\to2}\end{Bmatrix}}\ avec\ \vec{M}_{P,1\to2}\cdot\vec{y}_1=0 \qquad \{T_{pes\to2}\}=\underset{\forall P\in(G,\vec{z})}{\begin{Bmatrix}mg\vec{z}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}}$$

Avec $\vec{M}_{A,1\to2}\cdot\vec{y}_1=0$

$$\vec{M}_{A,pes\to2}\cdot\vec{y}_1=\left(\cancel{\vec{M}_{G,pes\to2}}+\overrightarrow{AG}\wedge mg\vec{z}\right)\cdot\vec{y}_1=\left(b\vec{z}_2\wedge mg\vec{z}\right)\cdot\vec{y}_1=\underline{-mgb\sin\beta}$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir : $\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1$:

A n'est pas un point fixe dans R_0. On ne peut donc pas utiliser l'intégration par partie.

La matrice d'inertie est donnée en un point A qui n'est pas le centre de gravité !!!

2 possibilités :

Méthode 1 : utiliser les définitions de $\vec{\sigma}_{A,2/0}$ et $\vec{\delta}_{A,2/0}$:

$$\vec{\sigma}_{A,2/0}=\overline{\overline{I}}_A(2)\cdot\vec{\Omega}_{2/0}+m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}_{A\in2/0} \quad \text{et} \quad \vec{\delta}_{A,2/0}=\left.\frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt}\right|_0+m\vec{V}_{A/0}\wedge\vec{V}_{G\in2/0}$$

Méthode 2 : utiliser Huygens pour obtenir la matrice au point G, puis utiliser la méthode classique en déterminant $\vec{\sigma}_{G,2/0}$ puis $\vec{\delta}_{G,2/0}$ puis $\vec{\delta}_{A,2/0}$.

Nous allons utiliser la méthode 1.

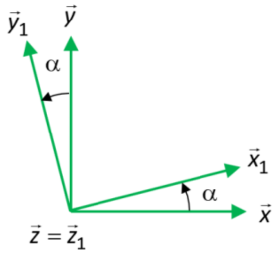
$\vec{V}_{A/0}=\vec{V}_{A\in 2/0}=\vec{V}_{A\in 1/0}=\cancel{\vec{V}_{O\in 1/0}}+\overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}_{1/0}=-a\vec{x}_1\wedge\dot{\alpha}\vec{z}_1=a\dot{\alpha}\vec{y}_1$

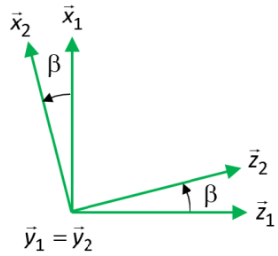
$$\vec{\sigma}_{A,2/0}=\bar{\bar{I}}_A(2)\cdot\vec{\Omega}_{2/0}+m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}_{A\in 2/0}=\begin{bmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{bmatrix}_{b2}\cdot\begin{pmatrix}0\\\dot{\beta}\\\dot{\alpha}\end{pmatrix}_{b1}+mb\vec{z}_2\wedge a\dot{\alpha}\vec{y}_1$$

$$=\begin{bmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{bmatrix}_{b2}\cdot\begin{pmatrix}-\dot{\alpha}\sin\beta\\\dot{\beta}\\\dot{\alpha}\cos\beta\end{pmatrix}_{b2}-mba\dot{\alpha}\vec{x}_2$$

$$=-A\dot{\alpha}\sin\beta\vec{x}_2+B\dot{\beta}\vec{y}_2+C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2-mba\dot{\alpha}\vec{x}_2$$

$$=-(A\dot{\alpha}\sin\beta+mba\dot{\alpha})\vec{x}_2+B\dot{\beta}\vec{y}_2+C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2$$





$$\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1=\left.\frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt}\right|_0\cdot\vec{y}_1+(m\vec{V}_{A/0}\wedge\vec{V}_{G\in 2/0})\cdot\vec{y}_1$$

Avec : $(m\vec{V}_{A/0}\wedge\vec{V}_{G\in 2/0})\cdot\vec{y}_1=0$ car $\vec{V}_{A/0}//\vec{y}_1$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt}\right|_0\cdot\vec{y}_1=\frac{d\left(\vec{\sigma}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1\right)}{dt}-\vec{\sigma}_{A,2/0}\cdot\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_0$$

et $\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_0=\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{y}_1=\dot{\alpha}\vec{z}\wedge\vec{y}_1=-\dot{\alpha}\vec{x}_1$

Donc

$$\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1=\frac{d\left(B\dot{\beta}\right)}{dt}-\left[-(A\dot{\alpha}\sin\beta+mba\dot{\alpha})\vec{x}_2+B\dot{\beta}\vec{y}_2+C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2\right]\cdot\left[-\dot{\alpha}\vec{x}_1\right]$$

$\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1=B\ddot{\beta}+\dot{\alpha}\left[-(A\dot{\alpha}\sin\beta+mba\dot{\alpha})\cos\beta+C\dot{\alpha}\cos\beta\sin\beta\right]$ car $\vec{x}_2\cdot\vec{x}_1=\cos\beta$ et $\vec{z}_2\cdot\vec{x}_1=\sin\beta$

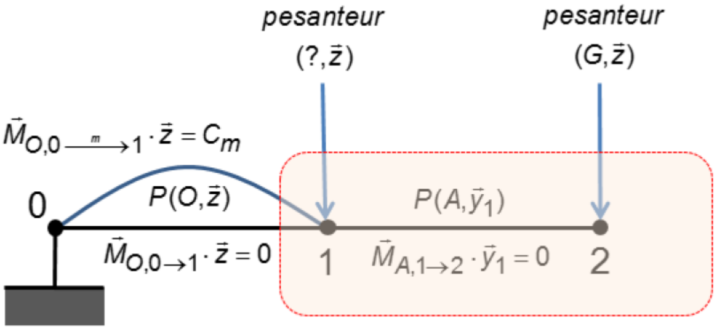
$$\boxed{\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1=B\ddot{\beta}+\dot{\alpha}^2\cos\beta\left[\sin\beta(C-A)-mba\right]}$$

Théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur $\vec{y}_1$: $\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1=\vec{M}_{A,\bar{2}\to 2}\cdot\vec{y}_1$

$$\boxed{-mgb\sin\beta=B\ddot{\beta}+\omega^2\cos\beta\left[\sin\beta(C-A)-mba\right]}\ (1)$$

2. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

Graphe de structure :



On isole l'ensemble *E=bras 1+ nacelle 2*.

Le théorème du moment dynamique appliqué à E au point O et en projection sur $\vec{z}$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas.

$$\boxed{\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z}=\vec{M}_{O,\bar{E}\rightarrow E}\cdot\vec{z}}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{O,\bar{E}\rightarrow E}\cdot\vec{z}$:

$$\{T_{0\rightarrow 1}\}=\left\{\begin{array}{l}\vec{R}_{0\rightarrow 1}\\ \vec{M}_{P,0\rightarrow 1}\end{array}\right._{\forall P\in(O,\vec{z})} \quad avec \quad \vec{M}_{P,0\rightarrow 1}\cdot\vec{z}=0$$

$$\{T_{0_m\rightarrow 1}\}=\left\{\begin{array}{l}\vec{0}\\ \vec{M}_{P,0_m\rightarrow 1}\end{array}\right._{\forall P} \quad avec \quad \vec{M}_{P,0_m\rightarrow 1}\cdot\vec{z}=C_m$$

$$\{T_{pes\rightarrow 1}\}=\left\{\begin{array}{l}m_1 g\vec{z}\\ \vec{0}\end{array}\right._{\forall P\in(G_1,\vec{z})}$$

$$\{T_{pes\rightarrow 2}\}\left\{\begin{array}{l}mg\vec{z}\\ \vec{0}\end{array}\right._{\forall P\in(G,\vec{z})}$$

Avec $\vec{M}_{O,pes\rightarrow i}\cdot\vec{z}=\left(\cancel{\vec{M}_{G,pes\rightarrow i}}+\overrightarrow{OG_i}\wedge m_i g\vec{z}\right)\cdot\vec{z}=0$

$$\vec{M}_{O,\bar{E}\rightarrow E}\cdot\vec{z}=\vec{M}_{O,0\rightarrow 1}\cdot\vec{z}+\vec{M}_{O,0_m\rightarrow 1}\cdot\vec{z}+\vec{M}_{O,pes\rightarrow 1}\cdot\vec{z}+\vec{M}_{O,pes\rightarrow 2}\cdot\vec{z}=C_m$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z}$:

O est un point fixe dans R_0. On peut donc utiliser l'intégration par partie.

$$\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z}=\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,E/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt}-\vec{\sigma}_{O,E/0}\cdot\cancel{\left.\frac{d\vec{z}}{dt}\right|_0}=\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,E/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt}$$

$$\vec{\sigma}_{O,1/0}\cdot\vec{z}=\left(\bar{\bar{I}}_O(1)\cdot\vec{\Omega}_{1/0}\right)\cdot\vec{z}=I\dot{\alpha} \quad \text{donc} \quad \frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,1/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt}=0 \quad (\text{car } \dot{\alpha}=\omega=cte)$$

$$\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}=\left(\vec{\sigma}_{A,2/0}+\overrightarrow{OA}\wedge m\vec{V}_{G\in 2/0}\right)\cdot\vec{z}=\vec{\sigma}_{A,2/0}\cdot\vec{z}+\left(\overrightarrow{OA}\wedge m\vec{V}_{G\in 2/0}\right)\cdot\vec{z}$$

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A,2/0}\cdot\vec{z}&=\left[-(A\dot{\alpha}\sin\beta+mba\dot{\alpha})\vec{x}_2+B\dot{\beta}\vec{y}_2+C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2\right]\cdot\vec{z}\\&=-(A\dot{\alpha}\sin\beta+mba\dot{\alpha})(-\sin\beta)+C\dot{\alpha}\cos^2\beta \qquad \text{car } \vec{x}_2\cdot\vec{z}=-\sin\beta \text{ et } \vec{z}_2\cdot\vec{z}=\cos\beta\\&=\omega\left(A\sin^2\beta+C\cos^2\beta+mba\sin\beta\right)\end{aligned}$$

$$\left(\overrightarrow{OA}\wedge m\vec{V}_{G\in 2/0}\right)\cdot\vec{z} = \left[a\vec{x}_1 \wedge m(\vec{V}_{A\in 2/0}+\overrightarrow{GA}\wedge\vec{\Omega}_{2/0})\right]\cdot\vec{z}$$
$$= \left\{a\vec{x}_1\wedge m\left[a\dot{\alpha}\vec{y}_1 - b\vec{z}_2\wedge(\dot{\alpha}\vec{z}+\dot{\beta}\vec{y}_1)\right]\right\}\cdot\vec{z}$$
$$= \left\{a\vec{x}_1\wedge m\left[\dot{\alpha}(a+b\sin\beta)\vec{y}_1 + b\dot{\beta}\vec{x}_2\right]\right\}\cdot\vec{z}$$
$$= ma\dot{\alpha}(a+b\sin\beta)$$
$$= ma\omega(a+b\sin\beta)$$

Ainsi $\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z} = \omega\left(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + 2mba\sin\beta + ma^2\right)$

$$\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z} = \omega\left(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + 2mba\sin\beta + ma^2\right)$$
$$\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt} = \omega\left(2\dot{\beta}A\sin\beta\cos\beta - 2C\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta + 2mba\dot{\beta}\cos\beta\right)$$
$$\boxed{\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt} = 2\omega\dot{\beta}\cos\beta\left[\sin\beta(A-C)+mba\right]}$$

Théorème du moment dynamique appliqué à E au point O et en projection sur $\vec{z}$: $\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z} = \vec{M}_{O,\bar{E}\to E}\cdot\vec{z}$

$$\boxed{C_m = 2\omega\dot{\beta}\cos\beta\left[\sin\beta(A-C)+mba\right]} \qquad (2)$$

3. Déterminer les expressions de l'angle β et du couple moteur C_m ?

On suppose que $mba >> A \approx C$

De plus lorsque la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, on a : $\beta = cte \Rightarrow \dot{\beta} = \ddot{\beta} = 0$

Ainsi, les deux équations déterminées aux questions 1 et 2 $\begin{cases} -mgb\sin\beta = B\ddot{\beta} + \omega^2\cos\beta\left[\sin\beta(C-A)-mba\right] & (1) \\ C_m = 2\omega\dot{\beta}\cos\beta\left[\sin\beta(A-C)+mba\right] & (2)\end{cases}$ deviennent :

(1) $\Rightarrow$ $-mgb\sin\beta = -\omega^2\cos\beta mba$ $\Rightarrow$ $\tan\beta = \dfrac{\omega^2 a}{g}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\beta = \arctan\left(\dfrac{\omega^2 a}{g}\right)}$

(2) $\Rightarrow \boxed{C_m = 0}$ ce qui est normal, car la liaison 1/0 est parfaite, donc à vitesse constante de 1/0, il n'y a pas besoin de couple moteur (qui sert à accélérer ou freiner).