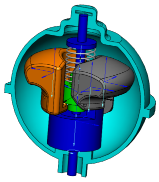
Application 2

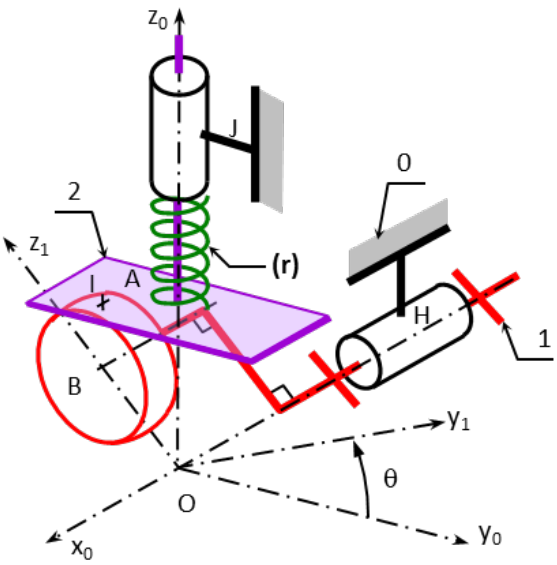


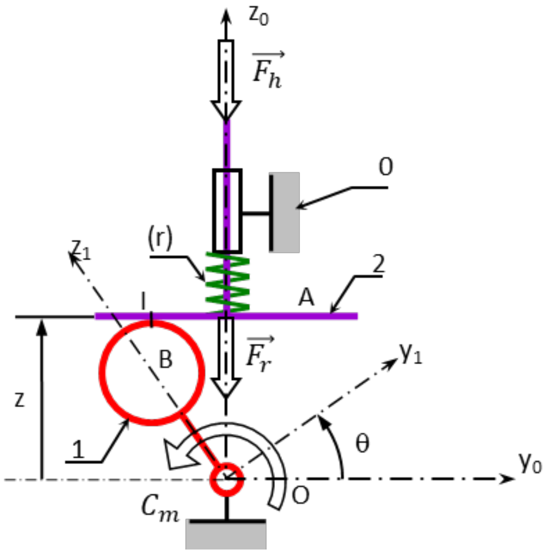
Application – Pompe à plateau

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.





L'arbre excentrique **(1)**, animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe $\left(O,\overrightarrow{x_0}\right)$ horizontal, agit sur le piston **(2)** en liaison pivot glissant d'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ avec le bâti **(0)**. Pendant la phase de descente du piston **(2)**, le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort **(r)**.

Paramétrage

Le repère $\left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ lié au bâti **(0)** est supposé galiléen. Le repère $\left(O;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est lié à l'arbre excentrique **(1)**. On a de plus :

- $\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)=\left(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_1}\right)=\theta$;
- $\overrightarrow{OB}=e\,\overrightarrow{z_1}$;
- $\overrightarrow{BI}=R\,\overrightarrow{z_0}$;
- $\overrightarrow{OA}=z\,\overrightarrow{z_0}$.

Les liaisons pivot entre **(0)** et **(1)**, ponctuelle entre **(1)** et **(2)**, et pivot glissant entre **(0)** et **(2)** sont supposées sans frottement. Le solide **(1)** possède un moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{x_0}\right)$. Le piston **(2)** possède une masse m_2. Le ressort **(r)**, de raideur k, est toujours comprimé. Pour $\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$, l'effort de compression est égal à $\overrightarrow{F_0}=-F_0\,\overrightarrow{z_0}$. Un moteur exerce un couple connu de moment $\overrightarrow{C_m}=C_m\,\overrightarrow{x_0}$ sur l'arbre **(1)**. Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ et de résultante $\overrightarrow{F_h}=-F_h\,\overrightarrow{z_0}$.

Question 1 *Déterminer avec le PFD l'équation différentielle du mouvement, relative au paramètre θ.*

Question 2 *En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre **(1)** et **(2)**, déterminer l'équation différentielle du mouvement.*

Fermeture géométrique.
On a : $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{0}$.
En projection sur $\overrightarrow{z_0}$: $e\cos\theta+R=z$. Par dérivation successive, on a : $-e\dot{\theta}\sin\theta=\dot{z}$ et $-e\ddot{\theta}\sin\theta-e\dot{\theta}^2\cos\theta=\ddot{z}$.
On isole le solide (1).
On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} X_{01}\overrightarrow{x_0}+Y_{01}\overrightarrow{y_0}+Z_{01}\overrightarrow{z_0} \\ M_{01}\overrightarrow{y_0}+N_{01}\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_O=\left\{\begin{array}{c} Y_{01}\overrightarrow{y_0}+Z_{01}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} Y_{21}\overrightarrow{y_0}+Z_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_I$. On a $Z_{21}<0$, $Y_{21}>0$ et à la limite du glissement, $Y_{21}=-fZ_{21}$.
$\overrightarrow{\mathscr{M}(O,2\rightarrow 1)}=\overrightarrow{\mathscr{M}(I,2\rightarrow 1)}+\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{R(2\rightarrow 1)}=\left(e\overrightarrow{z_1}+R\overrightarrow{z_0}\right)\wedge\left(Y_{21}\overrightarrow{y_0}+Z_{21}\overrightarrow{z_0}\right)=-eY_{21}\cos\theta\overrightarrow{x_0}-eZ_{21}\sin\theta\overrightarrow{x_0}-RY_{21}\overrightarrow{x_0}=-\left((e\cos\theta+R)\,Y_{21}+eZ_{21}\sin\theta\right)\overrightarrow{x_0}$.
- Couple moteur : $\{\mathscr{T}(\text{Moteur}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{x_0}\end{array}\right\}_O$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O,1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}$.

O est un point fixe et I_1 moment d'inertie par rapport à $\left(O,\overrightarrow{x_0}\right)$ on a donc : $\overrightarrow{\delta(O,1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O,1/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}\overrightarrow{x_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O,1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}I_O(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}I_1\dot{\theta}\overrightarrow{x_0}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=I_1\ddot{\theta}$.

Application du théorème du moment dynamique en projection sur $\overrightarrow{x_0}$.

$$C_m-\left((e\cos\theta+R)\,Y_{21}+eZ_{21}\sin\theta\right)=I_1\ddot{\theta}.$$

On isole le solide (2).
On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot glissant : $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c} Y_{02}\overrightarrow{y_0} \\ L_{02}\overrightarrow{x_0}\end{array}\right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\}=-\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} -Y_{21}\overrightarrow{y_0}-Z_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_I$.
- Ressort : $\{\mathscr{T}(\text{Ressort}\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c} -F_0-kz\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$.
- Pesanteur : $\{\mathscr{T}(\text{Pesanteur}\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c} -m_2g\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$.
- Fluide : $\{\mathscr{T}(\text{Fluide}\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c} -F_h\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$.

Calcul de $\overrightarrow{R_d(2/0)}\cdot\overrightarrow{z_0}$.
$\overrightarrow{R_d(2/0)}\cdot\overrightarrow{z_0}=m_2\ddot{z}$
Application du théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

$$-F_h-Z_{21}-F_0-kz-m_2g=m_2\ddot{z}.$$

Bilan :

$$C_m-\left((e\cos\theta+R)\,Y_{21}+e\left(-F_h-F_0-kz-m_2g-m_2\ddot{z}\right)\sin\theta\right)=I_1\ddot{\theta}.$$

On a alors :

$$C_m-\left((e\cos\theta+R)\,Y_{21}-e\left(F_h+F_0+k(e\cos\theta+R)+m_2g-em_2\left(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\right)\sin\theta\right)=I_1\ddot{\theta}.$$

Bilan sans frottement :

$$C_m+e\left(F_h+F_0+k(e\cos\theta+R)+m_2g-em_2\sin\theta\left(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\right)=I_1\ddot{\theta}.$$