Applications

Exercice d'application

Xavier Pessoles

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C20 : modélisation locale, actions à distance et de contact.*
- *Res1.C2.SF1 : Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison.*
- *Res2.C18 : Principe fondamental de la statique.*
- *Res2.C20 : Théorème des actions réciproques.*

Torseur des actions mécaniques transmissibles dans un coussinet

Question 1 *Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note $\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)}$.*

Correction
1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en M : $\mathrm{d}\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)} = p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r}$.
2. La pression étant uniforme, on a $p(M)=p$.
3. La géométrie du coussinet étant cylindrique, on se place en coordonnées cylindriques et $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.
4. θ varie sur $[\pi, 2\pi]$ et z sur $[0, L]$.
5. $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{x} + \sin\theta\overrightarrow{y}$.

Au final, $\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)} = \int p\left(\cos\theta\overrightarrow{x}+\sin\theta\overrightarrow{y}\right)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ $= pR\int\left(\cos\theta\overrightarrow{x}+\sin\theta\overrightarrow{y}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ $= pR\left(\int\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{x}+\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{y}\right)$ $= LpR\left(\int\cos\theta\mathrm{d}\theta\overrightarrow{x}+\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\overrightarrow{y}\right)$ $= LpR\left([\sin\theta]_\pi^{2\pi}\overrightarrow{x}-[\cos\theta]_\pi^{2\pi}\overrightarrow{y}\right)$ $= LpR\left(-(1-(-1))\overrightarrow{y}\right)$ $= LpR\left(-(1-(-1))\overrightarrow{y}\right) = -2LpR\overrightarrow{y} = -LDp\overrightarrow{y}$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{\mathcal{M}(O,1\rightarrow 3)}\overrightarrow{z_N}$.*

Correction
1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en M : $\mathrm{d}\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)} = p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r}$.
2. Au point O, on a $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}(O,1\rightarrow 3)} = \overrightarrow{OM}\wedge\mathrm{d}\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)} = \overrightarrow{OM}\wedge\mathrm{d}\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)}$
3. $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r}+z\overrightarrow{z}$.

On a alors, $\overrightarrow{\mathcal{M}(0,1\rightarrow 3)}\overrightarrow{z} = \left(\overrightarrow{OM}\wedge\mathrm{d}\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)}\right)\overrightarrow{z}$ $= \left(\left(R\overrightarrow{e_r}+z\overrightarrow{z}\right)\wedge p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r}\right)\overrightarrow{z}$ $= \left(z\overrightarrow{z}\wedge p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r}\right)\overrightarrow{z} = 0$

Rappel : le produit mixte est invariant par permutation circulaire : $\left(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c} = \left(\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{b} = \left(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c}\right)\cdot\overrightarrow{a}$.

On considère maintenant que la pression n'est pas uniforme et vaut au point M $p(M) = p_0\sin\theta$.

Question 3 *Justifier que $\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)}$ n'a une composante que sur $\overrightarrow{y}$.*

Correction Pour des raisons de symétrie du champ de pression, la seule composante sera sur $\overrightarrow{y_N}$.

Question 4 *Déterminer la résultante des actions mécaniques de 1 sur 3. On la note $\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)}$. On rappelle que $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$.*

Correction On cherche donc $\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)}\cdot\overrightarrow{y_N}$.
1. On commence par exprimer le modèle local d'une action mécanique en M : $\mathrm{d}\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)} = p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r}$.
2. La pression étant uniforme, on a $p(M)=p_0\sin\theta$.
3. La géométrie du coussinet étant cylindrique, on se place en coordonnées cylindriques et $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.
4. θ varie sur $[\pi, 2\pi]$ et z sur $[0, L]$.

On a $\mathrm{d}\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)}\cdot\overrightarrow{y_N} = p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{y_N} = p_0\mathrm{d}S\sin^2\theta$.

On a donc $\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)}\cdot\overrightarrow{y_N} = \int p_0\sin^2\theta R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ $= p_0RL\int\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{2}p_0RL\left[\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_\pi^{2\pi} = \dfrac{1}{2}p_0RL\pi = \dfrac{1}{4}p_0DL\pi$.

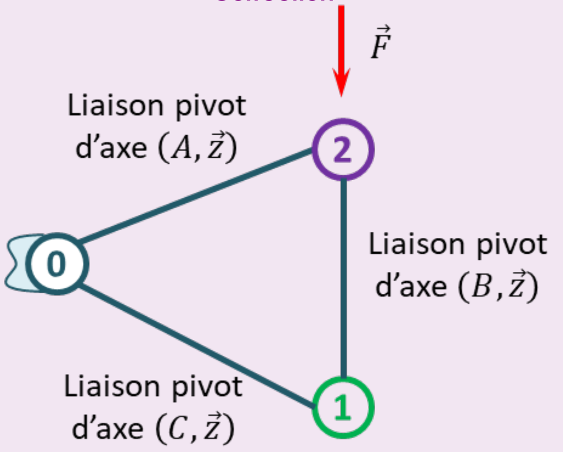
Éléments de corrigé :

1. $\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)} = -LDp\overrightarrow{y}$.
2. $\overrightarrow{\mathcal{M}(O,1\rightarrow 3)}\overrightarrow{z_N} = 0$.
3.
4. $\overrightarrow{R(1\rightarrow 3)}\cdot\overrightarrow{y_N} = -\dfrac{p_0DL\pi}{4}$.

Détermination des efforts dans une structure étayée

Question 1 *Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).*

Correction



Question 2 *Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.*

Correction Ici, il s'agit de déterminer les actions mécaniques dans toutes les liaisons. Il faudra donc isoler successivement toutes les pièces et réaliser un PFS pour chacune d'entre elles. Cependant, il y a quand même une stratégie d'isolement à avoir : **il faut commencer par isoler les solides soumis à deux glisseurs**. En effet, d'après le PFS, lorsqu'un solide est soumis à deux glisseurs, les deux forces sont de même norme, de même direction (droite passant par le point d'application des deux glisseurs) et de sens opposé.

La stratégie est donc la suivante :

- on isole 1 et on réalise le PFS.
- on isole 2 et on réalise le PFS en B.

Question 3 *Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de F.*

Correction **On isole 1. On réalise le BAME :**

- $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\}$;
- $\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\}$.

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a : $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\}+\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\}=0$.

Résolution : $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\} = -\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} F_{01}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A$.

Correction **On isole 2. On réalise le BAME :**

- $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} X_{02}\overrightarrow{x}+Y_{02}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c} X_{02}\overrightarrow{x}+Y_{02}\overrightarrow{y} \\ -a\,Y_{02}\overrightarrow{z} \end{array}\right\}_A$;
- $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} F_{01}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_B$;
- $\{\mathscr{T}(\text{ext}\rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} -F\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_C = \left\{\begin{array}{c} -F\overrightarrow{y} \\ -F\,b\,\overrightarrow{z} \end{array}\right\}_C$.

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a :

$\{\mathscr{T}(0\rightarrow 2)\}+\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\}+\{\mathscr{T}(\text{ext}\rightarrow 2)\}=0$.

Résolution :

$$\left\{\begin{array}{l} X_{02}+F_{01}\cos\alpha=0 \\ Y_{02}+F_{01}\sin\alpha-F=0 \\ -a\,Y_{02}-F\,b=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X_{02}=-F_{01}\cos\alpha=-F\dfrac{a+b}{a\tan\alpha} \\ F_{01}=\dfrac{F-Y_{02}}{\sin\alpha}=F\dfrac{a+b}{a\sin\alpha} \\ Y_{02}=-\dfrac{b}{a}F \end{array}\right.$$

Éléments de corrigé :

3. $X_{02}=-F\dfrac{a+b}{a\tan\alpha}$, $F_{01}=F\dfrac{a+b}{a\sin\alpha}$, $Y_{02}=-\dfrac{b}{a}F$.