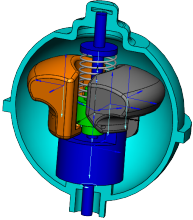


Corrigé



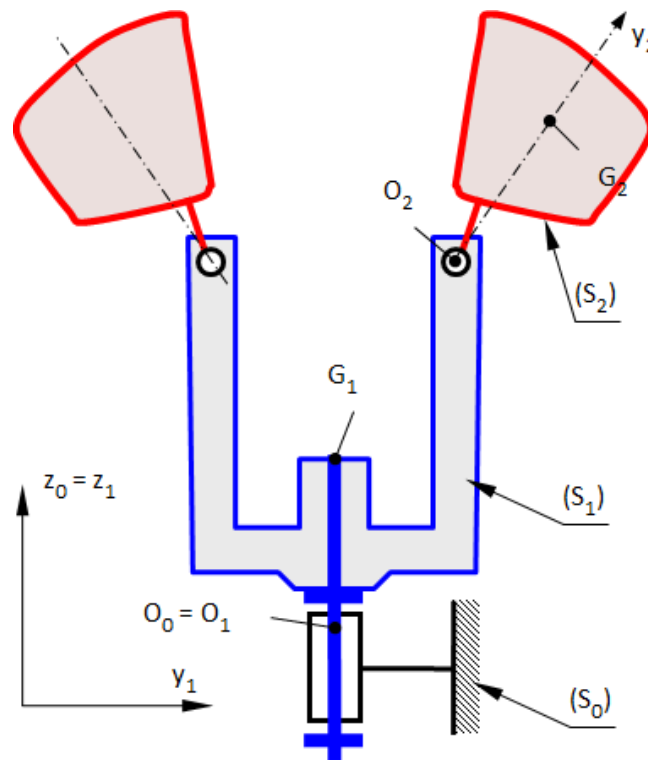
Application – Régulateur centrifuge

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- Mod2.C13 : centre d'inertie
- Mod2.C14 : opérateur d'inertie
- Mod2.C15 : matrice d'inertie

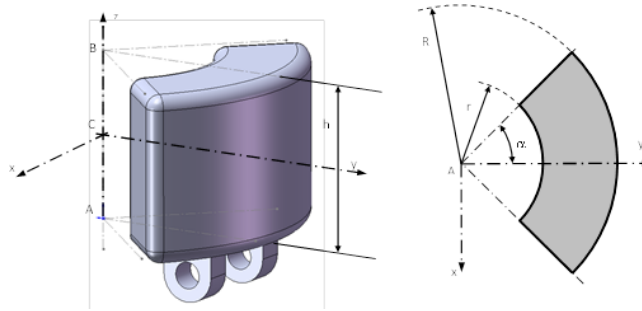
On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor (S_1) et la masselotte (S_2) représentés schématiquement ci-dessous.



- (S_1) est en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{z}_0) avec (S_0).
- (S_2) est en liaison pivot d'axe (O_2, \vec{x}_1) avec (S_1).
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$.
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$.
- $\vec{O_0 G_1} = h_1 \vec{z}_0$.
- $\vec{O_0 O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$.
- $\vec{O_2 G_2} = L_2 \vec{y}_2$.

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



Question 1 Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Correction Le solide 1 est axisymétrique. En tout point de l'axe du solide, la matrice d'inertie sera diagonale. On

$$\text{a donc } I_{O_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}.$$

Le solide 2 admet le plan (\vec{y}_2, \vec{z}_2) comme plan de symétrie. Les produits d'inertie dépendant de x sont nuls.

$$\text{On a donc } I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}.$$

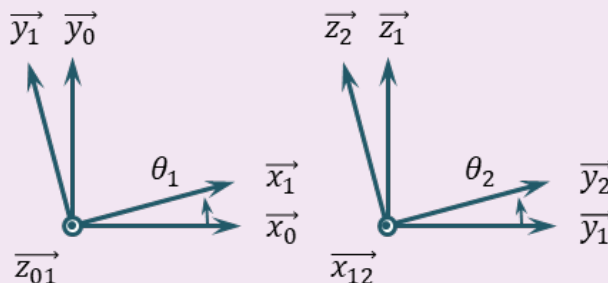
Afin de ne pas trop alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Question 2 Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

Question 3 Déterminer :

- le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$ en O_1 ;
- le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$ en O_2 .

Correction



Mouvement du solide 1/0

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{O_1}.$$

O_1 est un point fixe dans R_0 .

$$\{\sigma(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{0} \\ I_{O_1}(S_1) \overline{\Omega}(S_1/R_0) \end{pmatrix} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{pmatrix} \right\}_{O_1} \text{ et } \{\mathcal{D}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{0} \\ C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{pmatrix} \right\}_{O_1}.$$

Mouvement du solide 2/0

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \\ V(G_2 \in S_2/R_0) \end{pmatrix} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \\ L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 L_1 \vec{x}_1 \end{pmatrix} \right\}_{G_2}.$$

$$\overline{V}(G_2 \in S_2/R_0) = \overline{V}(G_2 \in S_2/S_1) + \overline{V}(G_2 \in S_1/R_0)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\underbrace{\overline{V}(O_2 \in S_2/S_1)}_{\vec{0}} + \overline{G_2 O_2} \wedge \overline{\Omega}(S_2/S_1) \right) + \left(\underbrace{\overline{V}(O_0 \in S_1/R_0)}_{\vec{0}} + \overline{G_2 O_0} \wedge \overline{\Omega}(S_1/R_0) \right) \\ &= (-L_2 \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{z}_2) + (-(\dot{\theta}_1 L_1 \vec{x}_1 + L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2) \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_1) = L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 \end{aligned}$$

G_2 est le centre de gravité de S_2 .

$$\{\sigma(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1) \\ I_{G_2}(S_2) \Omega(S_2/R_0) \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 = \dot{\theta}_1 (\cos \theta_2 \vec{z}_2 + \sin \theta_2 \vec{y}_2) + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2$$

$$I_{G_2}(S_2) \Omega(S_2/R_0) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\theta}_2 \\ B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \Gamma(G_2 \in S_2/R_0) \\ \left[\frac{d}{dt} (I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}) \right]_{R_0} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in S_2/R_0)} = \left[\frac{d(L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1)}{dt} \right]_{R_0}$$

$$= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 + L_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2) - \ddot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1 (-L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1^2 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1$$

$$= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{y}_2 + (2L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \ddot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2)) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1^2 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1$$

$$\left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} A_2 \ddot{\theta}_2 \\ B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + B_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$+ A_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + (B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) (-\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2) + (-D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) (\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2)$$

$$\left[\frac{d \vec{z}_2}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{z}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2$$

$$\left[\frac{d \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2$$

$$\left[\frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{y}_1$$

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$.

Correction $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$

$$= \left(\overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2$$

$$= \left(\left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2$$

$$\left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} \cdot \vec{x}_2 + \left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0}$$

Question 5 Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$ en O_2 ?

Question 6 Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre S_1 et S_2 (couple maximal 0,46 Nm) , une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

Question 7 Commenter ces résultats.

