Application 2

Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique ★

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

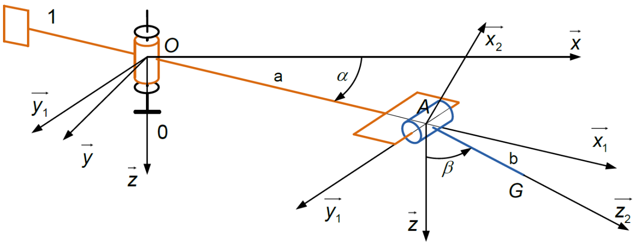
- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Présentation

La géotechnique correspond aux activités liées aux applications de la mécanique des sols, de la mécanique des roches et de la géologie. À partir d'essais en laboratoire et in situ, la géotechnique fournit aux constructeurs de bâtiments et d'ouvrages les données indispensables pour le génie civil en ce qui concerne leur stabilité en fonction des sols. Aujourd'hui la modélisation physique d'ouvrage géotechnique en centrifugeuse est une approche expérimentale répandue. La centrifugation des modèles réduits permet de reproduire des états de contraintes dans les matériaux semblables à ceux régnant dans l'ouvrage grandeur nature. Le laboratoire central des Ponts et Chaussées (LCPC) de Nantes possède une centrifugeuse géotechnique dont les principales caractéristiques sont données ci-après :

- distance de l'axe à la plate-forme nacelle : 5,5 m ;
- longueur du bras : 6,8 m ;
- accélération maximale : 200 g ;
- temps de montée à 200 g : 360 s.

On propose le modèle cinématique suivant :



Soit $\mathscr{R} = \left(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ un repère galiléen lié au bâti 0 de la centrifugeuse. L'axe $\left(O, \overrightarrow{z}\right)$ est dirigé suivant la verticale descendante. On désigne par $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{z}$ le vecteur accélération de la pesanteur.

Le bras 1 est en liaison pivot sans frottement d'axe $\left(O, \overrightarrow{z}\right)$ avec le bâti 0. Soit $\mathscr{R}_1 = \left(O; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z}\right)$ un repère lié au bras 1. On pose $\alpha = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1}\right)$, avec $\alpha = \omega t$, où ω est une constante positive.

La nacelle 2 est en liaison pivot sans frottement d'axe $\left(A, \overrightarrow{y_1}\right)$ avec le bras 1 , telle que $\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{x_1}$ (a est une constante positive). Soit $\mathscr{R}_2 = \left(A; \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_2}\right)$ un repère lié à la nacelle 2. On pose $\beta = \left(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{z_2}\right)$.

On note :

- bras 1 : moment d'inertie I par rapport à l'axe $\left(O, \overrightarrow{z}\right)$;
- nacelle 2 : centre d'inertie G , tel que $\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{z_2}$ (b est une constante positive), masse m, matrice d'inertie $I_A(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2}$.

Un moteur, fixé sur la bâti 0, exerce sur le bras 1 une action mécanique représentée par le couple $C_m\overrightarrow{z}$. Le bras 1 tourne à la vitesse constante ω par rapport au bâti 0.

Objectif Déterminer les équations du mouvement de la centrifugeuse, ainsi que le couple moteur à fournir au cours du mouvement.

Question 1 *Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.*

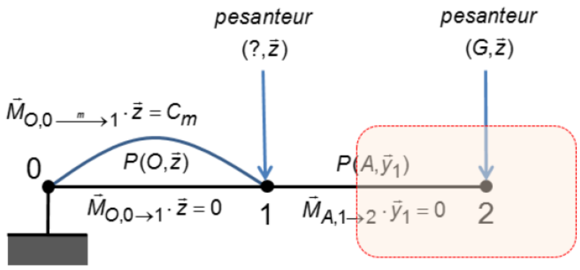
Question 2 *Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.*

On suppose que la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, et que $m b a >> A \simeq C$.

Question 3 *Déterminer les expressions de l'angle β et du couple moteur C_m ?*

1. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède deux degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver deux équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée : $\omega = cte$. Reste à déterminer $\beta(t)$.

On isole la nacelle 2.
Le théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur $\vec{y}_1$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 2 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1 = \vec{M}_{A,\bar{2}\to 2}\cdot\vec{y}_1}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{A,\bar{2}\to 2}\cdot\vec{y}_1$:

$$\left\{T_{1\to2}\right\} = \underset{\forall P\in(A,\vec{y}_1)}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{1\to2} \\ \vec{M}_{P,1\to2} \end{Bmatrix}} \text{ avec } \vec{M}_{P,1\to2}\cdot\vec{y}_1 = 0 \qquad \left\{T_{pes\to2}\right\} = \underset{\forall P\in(G,\vec{z})}{\begin{Bmatrix} m g\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

Avec $\vec{M}_{A,1\to2}\cdot\vec{y}_1 = 0$

$$\vec{M}_{A,pes\to2}\cdot\vec{y}_1 = \left(\cancel{\vec{M}_{G,pes\to2}} + \overrightarrow{AG}\wedge mg\vec{z}\right)\cdot\vec{y}_1 = \left(b\vec{z}_2\wedge mg\vec{z}\right)\cdot\vec{y}_1 = \underline{-mgb\sin\beta}$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir : $\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1$:

A n'est pas un point fixe dans R_0. On ne peut donc pas utiliser l'intégration par partie.

La matrice d'inertie est donnée en un point A qui n'est pas le centre de gravité !!!

2 possibilités :

Méthode 1 : utiliser les définitions de $\vec{\sigma}_{A,2/0}$ et $\vec{\delta}_{A,2/0}$:

$$\vec{\sigma}_{A,2/0} = \bar{\bar{I}}_A(2)\cdot\vec{\Omega}_{2/0} + m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}_{A\in2/0} \quad \text{et} \quad \vec{\delta}_{A,2/0} = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt}\right|_0 + m\vec{V}_{A/0}\wedge\vec{V}_{G\in2/0}$$

Méthode 2 : utiliser Huygens pour obtenir la matrice au point G, puis utiliser la méthode classique en déterminant $\vec{\sigma}_{G,2/0}$ puis $\vec{\delta}_{G,2/0}$ puis $\vec{\delta}_{A,2/0}$.

Nous allons utiliser la méthode 1.

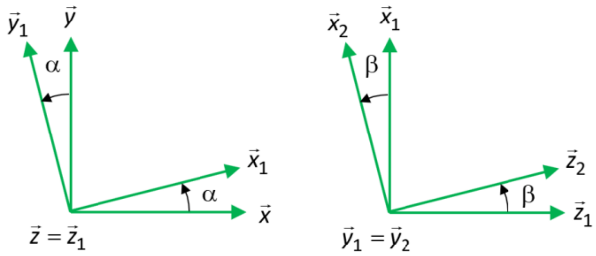
$$\vec V_{A/0}=\vec V_{A\in 2/0}=\vec V_{A\in 1/0}=\cancel{\vec V_{O\in 1/0}}+\overrightarrow{AO}\wedge\vec\Omega_{1/0}=-a\vec x_1\wedge\dot\alpha\vec z_1=a\dot\alpha\vec y_1$$

$$\vec\sigma_{A,2/0}=\bar{\bar{I}}_A(2)\cdot\vec\Omega_{2/0}+m\overrightarrow{AG}\wedge\vec V_{A\in 2/0}=\begin{bmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{bmatrix}_{b2}\cdot\begin{pmatrix}0\\\dot\beta\\\dot\alpha\end{pmatrix}_{b1}+mb\vec z_2\wedge a\dot\alpha\vec y_1$$

$$=\begin{bmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{bmatrix}_{b2}\cdot\begin{pmatrix}-\dot\alpha\sin\beta\\\dot\beta\\\dot\alpha\cos\beta\end{pmatrix}_{b2}-mba\dot\alpha\vec x_2$$

$$=-A\dot\alpha\sin\beta\vec x_2+B\dot\beta\vec y_2+C\dot\alpha\cos\beta\vec z_2-mba\dot\alpha\vec x_2$$

$$=-(A\dot\alpha\sin\beta+mba\dot\alpha)\vec x_2+B\dot\beta\vec y_2+C\dot\alpha\cos\beta\vec z_2$$



$$\vec\delta_{A,2/0}\cdot\vec y_1=\left.\frac{d\vec\sigma_{A,2/0}}{dt}\right|_0\cdot\vec y_1+(m\vec V_{A/0}\wedge\vec V_{G\in 2/0})\cdot\vec y_1$$

Avec : $(m\vec V_{A/0}\wedge\vec V_{G\in 2/0})\cdot\vec y_1=0$ car $\vec V_{A/0}\,//\,\vec y_1$

$$\left.\frac{d\vec\sigma_{A,2/0}}{dt}\right|_0\cdot\vec y_1=\frac{d\left(\vec\sigma_{A,2/0}\cdot\vec y_1\right)}{dt}-\vec\sigma_{A,2/0}\cdot\left.\frac{d\vec y_1}{dt}\right|_0$$

et $\left.\frac{d\vec y_1}{dt}\right|_0=\vec\Omega_{1/0}\wedge\vec y_1=\dot\alpha\vec z\wedge\vec y_1=-\dot\alpha\vec x_1$

Donc

$$\vec\delta_{A,2/0}\cdot\vec y_1=\frac{d\left(B\dot\beta\right)}{dt}-\left[-(A\dot\alpha\sin\beta+mba\dot\alpha)\vec x_2+B\dot\beta\vec y_2+C\dot\alpha\cos\beta\vec z_2\right]\cdot\left[-\dot\alpha\vec x_1\right]$$

$$\vec\delta_{A,2/0}\cdot\vec y_1=B\ddot\beta+\dot\alpha\left[-(A\dot\alpha\sin\beta+mba\dot\alpha)\cos\beta+C\dot\alpha\cos\beta\sin\beta\right]$$ car $\vec x_2\cdot\vec x_1=\cos\beta$ et $\vec z_2\cdot\vec x_1=\sin\beta$

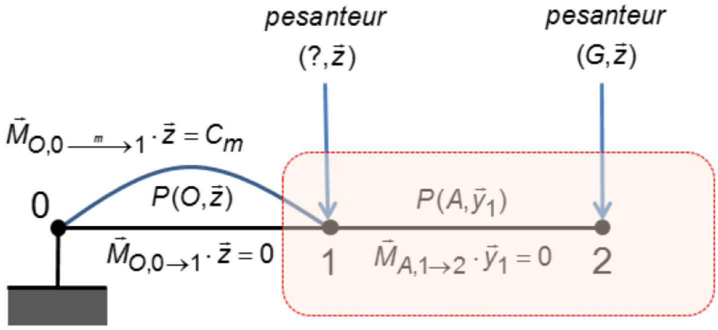
$$\underline{\vec\delta_{A,2/0}\cdot\vec y_1=B\ddot\beta+\dot\alpha^2\cos\beta\left[\sin\beta(C-A)-mba\right]}$$

Théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur $\vec y_1$: $\vec\delta_{A,2/0}\cdot\vec y_1=\vec M_{A,\bar 2\to 2}\cdot\vec y_1$

$$\boxed{-mgb\sin\beta=B\ddot\beta+\omega^2\cos\beta\left[\sin\beta(C-A)-mba\right]}\ (1)$$

2. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

Graphe de structure :



On isole l'ensemble *E=bras 1+ nacelle 2*.
Le théorème du moment dynamique appliqué à *E* au point O et en projection sur $\vec{z}$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas.

$$\boxed{\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z}=\vec{M}_{O,\bar{E}\to E}\cdot\vec{z}}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{O,\bar{E}\to E}\cdot\vec{z}$:

$$\{\mathcal{T}_{0\to 1}\}=\left\{\begin{array}{l}\vec{R}_{0\to 1}\\ \vec{M}_{P,0\to 1}\end{array}\right\}_{\forall P\in(O,\vec{z})} \quad avec\ \vec{M}_{P,0\to 1}\cdot\vec{z}=0$$

$$\{\mathcal{T}_{0\xrightarrow{m}1}\}=\left\{\begin{array}{l}\vec{0}\\ \vec{M}_{P,0\xrightarrow{m}1}\end{array}\right\}_{\forall P} \quad avec\ \vec{M}_{P,0\xrightarrow{m}1}\cdot\vec{z}=C_m$$

$$\{\mathcal{T}_{pes\to 1}\}=\left\{\begin{array}{l}m_1 g\vec{z}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_{\forall P\in(G_1,\vec{z})}$$

$$\{\mathcal{T}_{pes\to 2}\}\left\{\begin{array}{l}mg\vec{z}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_{\forall P\in(G,\vec{z})}$$

Avec $\vec{M}_{O,pes\to i}\cdot\vec{z}=\left(\cancel{\vec{M}_{G,pes\to i}}+\overrightarrow{OG_i}\wedge m_i g\vec{z}\right)\cdot\vec{z}=0$

$$\vec{M}_{O,\bar{E}\to E}\cdot\vec{z}=\vec{M}_{O,0\to 1}\cdot\vec{z}+\vec{M}_{O,0\xrightarrow{m}1}\cdot\vec{z}+\vec{M}_{O,pes\to 1}\cdot\vec{z}+\vec{M}_{O,pes\to 2}\cdot\vec{z}=C_m$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z}$:

O est un point fixe dans R_0. On peut donc utiliser l'intégration par partie.

$$\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z}=\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,E/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt}-\vec{\sigma}_{O,E/0}\cdot\cancel{\left.\frac{d\vec{z}}{dt}\right|_0}=\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,E/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt}$$

$$\vec{\sigma}_{O,1/0}\cdot\vec{z}=\left(\bar{\bar{I}}_O(1)\cdot\vec{\Omega}_{1/0}\right)\cdot\vec{z}=I\dot{\alpha} \quad \text{donc} \quad \frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,1/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt}=0 \quad (\text{car } \dot{\alpha}=\omega=cte)$$

$$\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}=\left(\vec{\sigma}_{A,2/0}+\overrightarrow{OA}\wedge m\vec{V}_{G\in 2/0}\right)\cdot\vec{z}=\vec{\sigma}_{A,2/0}\cdot\vec{z}+\left(\overrightarrow{OA}\wedge m\vec{V}_{G\in 2/0}\right)\cdot\vec{z}$$

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A,2/0}\cdot\vec{z}&=\left[-(A\dot{\alpha}\sin\beta+mba\dot{\alpha})\vec{x}_2+B\dot{\beta}\vec{y}_2+C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2\right]\cdot\vec{z}\\&=-(A\dot{\alpha}\sin\beta+mba\dot{\alpha})(-\sin\beta)+C\dot{\alpha}\cos^2\beta \qquad \text{car } \vec{x}_2\cdot\vec{z}=-\sin\beta \ \text{ et } \ \vec{z}_2\cdot\vec{z}=\cos\beta\\&=\omega\left(A\sin^2\beta+C\cos^2\beta+mba\sin\beta\right)\end{aligned}$$

$$\left(\overrightarrow{OA} \wedge m\vec{V}_{G\in 2/0}\right)\cdot\vec{z} = \left[a\vec{x}_1 \wedge m(\vec{V}_{A\in 2/0} + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0})\right]\cdot\vec{z}$$
$$= \left\{a\vec{x}_1 \wedge m\left[a\dot{\alpha}\vec{y}_1 - b\vec{z}_2 \wedge (\dot{\alpha}\vec{z} + \dot{\beta}\vec{y}_1)\right]\right\}\cdot\vec{z}$$
$$= \left\{a\vec{x}_1 \wedge m\left[\dot{\alpha}(a + b\sin\beta)\vec{y}_1 + b\dot{\beta}\vec{x}_2\right]\right\}\cdot\vec{z}$$
$$= ma\dot{\alpha}(a + b\sin\beta)$$
$$= ma\omega(a + b\sin\beta)$$

Ainsi $\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z} = \omega\left(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + 2mba\sin\beta + ma^2\right)$

$$\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z} = \omega\left(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + 2mba\sin\beta + ma^2\right)$$
$$\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt} = \omega\left(2\dot{\beta}A\sin\beta\cos\beta - 2C\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta + 2mba\dot{\beta}\cos\beta\right)$$
$$\boxed{\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt} = 2\omega\dot{\beta}\cos\beta\left[\sin\beta(A-C) + mba\right]}$$

Théorème du moment dynamique appliqué à E au point O et en projection sur $\vec{z}$: $\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z} = \vec{M}_{O,\bar{E}\to E}\cdot\vec{z}$

$$\boxed{C_m = 2\omega\dot{\beta}\cos\beta\left[\sin\beta(A-C) + mba\right]} \qquad (2)$$

3. Déterminer les expressions de l'angle β et du couple moteur C_m ?

On suppose que $mba >> A \approx C$

De plus lorsque la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, on a : $\beta = cte \Rightarrow \dot{\beta} = \ddot{\beta} = 0$

Ainsi, les deux équations déterminées aux questions 1 et 2 $\begin{cases} -mgb\sin\beta = B\ddot{\beta} + \omega^2\cos\beta\left[\sin\beta(C-A) - mba\right] & (1) \\ C_m = 2\omega\dot{\beta}\cos\beta\left[\sin\beta(A-C) + mba\right] & (2) \end{cases}$ deviennent :

(1) $\Rightarrow\ -mgb\sin\beta = -\omega^2\cos\beta mba \quad \Rightarrow\ \tan\beta = \dfrac{\omega^2 a}{g} \quad \Rightarrow\ \boxed{\beta = \arctan\left(\dfrac{\omega^2 a}{g}\right)}$

(2) $\Rightarrow \boxed{C_m = 0}$ ce qui est normal, car la liaison 1/0 est parfaite, donc à vitesse constante de 1/0, il n'y a pas besoin de couple moteur (qui sert à accélérer ou freiner).