Application 1

Micromoteur de modélisme ★

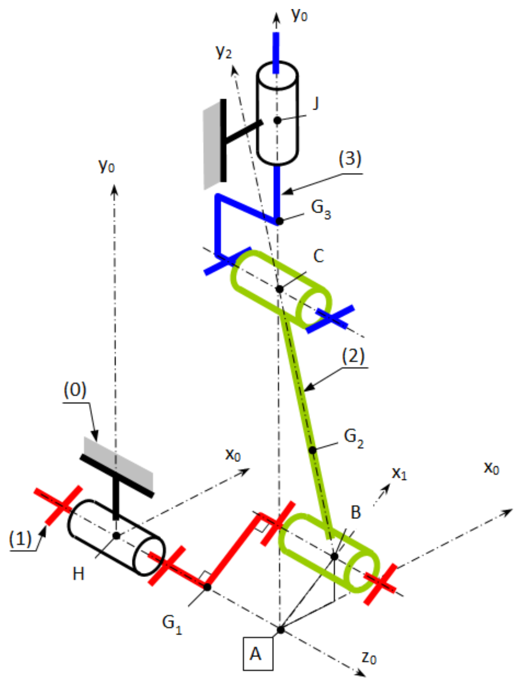
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Mise en situation

Les figures et le schéma ci-dessous représentent un micromoteur à combustion interne de modèle réduit. Du point de vue cinématique, il est basé sur un système bielle manivelle **(2,1)**, associé à un piston **(3)**, animé d'un mouvement de translation rectiligne alternatif.



On note :

- $\overrightarrow{AB}=e\,\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BC}=L_2\,\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{AC}=\lambda_3\,\overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{HG_1}=a_1\,\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BG_2}=a_2\,\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{CG_3}=a_3\,\overrightarrow{y_0}$;
- $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)=\theta_1$, $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_2}\right)=\theta_2$; $\omega_{10}=\dot{\theta}_1$ et $\omega_{20}=\dot{\theta}_2$;
- m_1, m_2 et m_3 les masses des trois pièces mobiles **(1)**, **(2)** et **(3)**.

On note $C_m\,\overrightarrow{z_0}$ le couple délivré par le moteur et $F_e\,\overrightarrow{y_0}$ la force exercée sur le piston suite à l'explosion du mélange air – carburant. On néglige les effets de la pesanteur.

Question 1 *Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin **(1)** et la vitesse du piston **(3)**, notée $\dot{\lambda}=V_{3/0}$.*

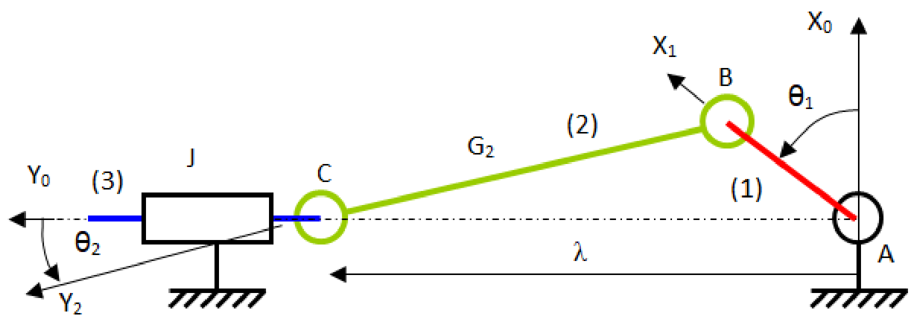
Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

On note $I_H(1)=\begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$ la matrice d'inertie en H de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré **(1)**.

Question 2 *En considérant que seul le plan $\left(H,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.*

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie $I_A(1)$, $I_{G_2}(2)$ et $I_{G_3}(3)$ sont diagonales.

Question 3 *Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.*



Colle

Micromoteur de modélisme ⋆

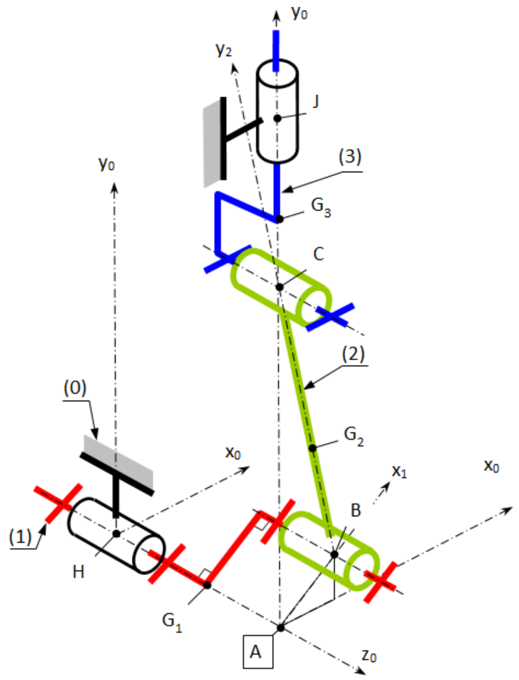
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Mise en situation

Les figures et le schéma ci-dessous représentent un micromoteur à combustion interne de modèle réduit. Du point de vue cinématique, il est basé sur un système bielle manivelle **(2,1)**, associé à un piston **(3)**, animé d'un mouvement de translation rectiligne alternatif.



On note :

- $\overrightarrow{AB} = e\,\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BC} = L_2\,\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda_3\,\overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{HG_1} = a_1\,\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BG_2} = a_2\,\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{CG_3} = a_3\,\overrightarrow{y_0}$;
- $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right) = \theta_1$, $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_2}\right) = \theta_2$; $\omega_{10} = \dot{\theta}_1$ et $\omega_{20} = \dot{\theta}_2$;
- m_1, m_2 et m_3 les masses des trois pièces mobiles **(1)**, **(2)** et **(3)**.

On note $C_m\,\overrightarrow{z_0}$ le couple délivré par le moteur et $F_e\,\overrightarrow{y_0}$ la force exercée sur le piston suite à l'explosion du mélange air – carburant. On néglige les effets de la pesanteur.

Question 1 *Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin **(1)** et la vitesse du piston **(3)**, notée $\dot{\lambda} = V_{3/0}$.*

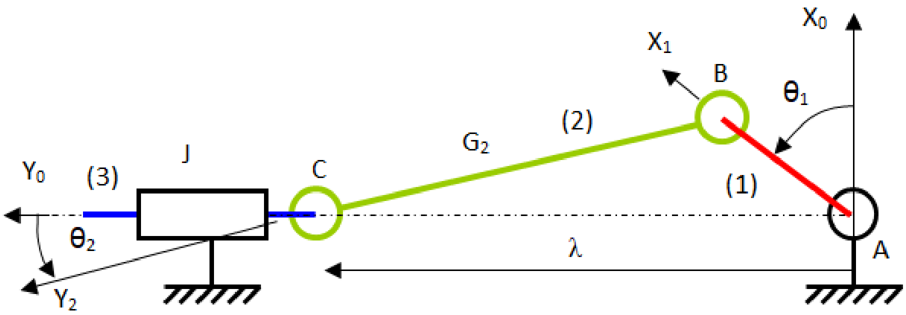
Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

On note $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{\left(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)}$ la matrice d'inertie en H de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré **(1)**.

Question 2 *En considérant que seul le plan $\left(H,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.*

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie $I_A(1)$, $I_{G_2}(2)$ et $I_{G_3}(3)$ sont diagonales.

Question 3 *Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.*



Application 1 – Corrigé

Micromoteur de modélisme ⋆

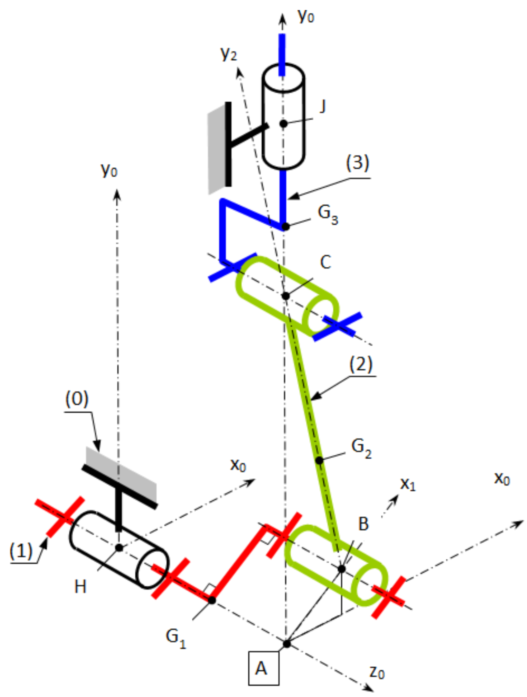
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Mise en situation

Les figures et le schéma ci-dessous représentent un micromoteur à combustion interne de modèle réduit. Du point de vue cinématique, il est basé sur un système bielle manivelle **(2,1)**, associé à un piston **(3)**, animé d'un mouvement de translation rectiligne alternatif.



On note :

- $\overrightarrow{AB} = e\,\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BC} = L_2\,\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda_3\,\overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{HG_1} = a_1\,\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BG_2} = a_2\,\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{CG_3} = a_3\,\overrightarrow{y_0}$;
- $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right) = \theta_1$, $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_2}\right) = \theta_2$; $\omega_{10} = \dot{\theta}_1$ et $\omega_{20} = \dot{\theta}_2$;
- m_1, m_2 et m_3 les masses des trois pièces mobiles **(1)**, **(2)** et **(3)**.

On note $C_m\,\overrightarrow{z_0}$ le couple délivré par le moteur et $F_e\,\overrightarrow{y_0}$ la force exercée sur le piston suite à l'explosion du mélange air – carburant. On néglige les effets de la pesanteur.

Question 1 *Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin* ***(1)*** *et la vitesse du piston* ***(3)****, notée $\dot{\lambda} = V_{3/0}$.*

Correction On réalise une fermeture géométrique dans le triangle ABC et on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow e\,\overrightarrow{x_1} + L_2\,\overrightarrow{x_2} - \lambda_3\,\overrightarrow{y_0} \Leftrightarrow e\left(\cos\theta_1\,\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_1\,\overrightarrow{y_0}\right) + L_2\left(\cos\theta_2\,\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_2\,\overrightarrow{y_0}\right) - \lambda_3\,\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0}$. On a donc : $\left\{\begin{array}{l} e\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 = 0 \\ e\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2 - \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_2 \cos\theta_2 = -e\cos\theta_1 \\ L_2 \sin\theta_2 = \lambda_3 - e\sin\theta_1 \end{array}\right.$ Au final, $L_2^2 = e^2\cos^2\theta_1 + (\lambda_3 - e\sin\theta_1)^2 \Leftrightarrow L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1 = (\lambda_3 - e\sin\theta_1)^2$

$\Rightarrow \sqrt{L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1} = \lambda_3 - e\sin\theta_1 \Rightarrow \lambda_3 = \sqrt{L_2^2 - e^2\cos^2\theta_1} + e\sin\theta_1$.

Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

On note $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$ la matrice d'inertie en H de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré **(1)**.

Question 2 *En considérant que seul le plan $\left(H,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.*

Correction On a donc une invariance suivant $\overrightarrow{y_1}$ et $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie $I_A(1)$, $I_{G_2}(2)$ et $I_{G_3}(3)$ sont diagonales.

Correction H est un point fixe :

- $\{\sigma(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(1/0)} = m_1 \overrightarrow{V(G_1\in 1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(H,1/0)} = I_H(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} \end{array}\right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_1\dot\theta_1\overrightarrow{z_1} \end{array}\right\}_H$
- $\{\mathscr{D}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1\in 1/0)} \\ \overrightarrow{\delta(H,1/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\delta(H,1/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} \end{array}\right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_1\ddot\theta_1\overrightarrow{z_1} \end{array}\right\}_H$

G_3 est le centre de gravité de 3. Le solide 3 est en translation par rapport à 0.

- $\{\sigma(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(3/0)} = m_3 \overrightarrow{V(G_3\in 3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)} \end{array}\right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3\dot\lambda_3\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_3}$
- $\{\mathscr{D}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(3/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_3\in 3/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_3,1/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} \end{array}\right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} m_3\ddot\lambda_3\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_3}$

G_2 est le centre de gravité de 2.

- $\{\sigma(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(2/0)} = m_2 \overrightarrow{V(G_2\in 2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)} = I_{G_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)} \end{array}\right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2\left(\dot\lambda_3\overrightarrow{y_0} + a_2\dot\theta_2\overrightarrow{x_2}\right) \\ C_2\dot\theta_2\overrightarrow{z_0} \end{array}\right\}_{G_2}$
- $\{\mathscr{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2\in 2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_2,2/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} \end{array}\right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2\left(\ddot\lambda_3\overrightarrow{y_0} + a_2\ddot\theta_2\overrightarrow{x_2} + a_2\dot\theta_2^2\overrightarrow{y_2}\right) \\ C_2\ddot\theta_2\overrightarrow{z_0} \end{array}\right\}_{G_2}$

Détail des calculs.

Calcul de $\overrightarrow{V(G_2\in 2/0)}$.

$\overrightarrow{V(G_2\in 2/0)} = \overrightarrow{V(G_2\in 2/3)} + \overrightarrow{V(G_2\in 3/0)}$

$\overrightarrow{V(G_2\in 2/3)} = \overrightarrow{V(C\in 2/3)} + \overrightarrow{G_2C}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/3)} = \overrightarrow{0} + a_2\overrightarrow{y_2}\wedge\dot\theta_2\overrightarrow{z_0} = a_2\dot\theta_2\overrightarrow{x_2}$ $\quad \overrightarrow{V(G_2\in 3/0)} = \dot\lambda_3\overrightarrow{y_0}$

$\overrightarrow{V(G_2\in 2/0)} = \dot\lambda_3\overrightarrow{y_0} + a_2\dot\theta_2\overrightarrow{x_2}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_2\in 2/0)}$.

$\overrightarrow{\Gamma(G_2\in 2/0)} = \ddot\lambda_3\overrightarrow{y_0} + a_2\ddot\theta_2\overrightarrow{x_2} + a_2\dot\theta_2^2\overrightarrow{y_2}$.

Question 3 *Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.*

Correction

- On isole **(1)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(0\rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(0\rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A,0\rightarrow 1)} \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(A,0\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(2\rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(2\rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(B,2\rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(B,2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison). Par ailleurs, $\overrightarrow{\mathcal{M}(A,2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\mathcal{M}(B,2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0} + \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R(2\rightarrow 1)}\right)\overrightarrow{z_0} = \left(e\,\overrightarrow{x_1}\wedge\left(X_{21}\overrightarrow{x_2}+Y_{21}\overrightarrow{y_2}\right)\right)\overrightarrow{z_0}$ $= \left(e\,X_{21}\overrightarrow{x_1}\wedge\overrightarrow{x_2} + e\,Y_{21}\overrightarrow{x_1}\wedge\overrightarrow{y_2}\right)\overrightarrow{z_0} = e\,X_{21}\sin(\theta_2-\theta_1) + e\,Y_{21}\cos(\theta_2-\theta_1)$
  - Couple moteur : $\{\mathcal{T}(0_m\rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_A$.
- On applique le TMD en A en projection suivant $\overrightarrow{z}$:

$$e\,X_{21}\sin(\theta_2-\theta_1) + e\,Y_{21}\cos(\theta_2-\theta_1) + C_m = C_1\ddot{\theta}_1$$

- On isole **(2)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(1\rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(2\rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(B,2\rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(B,2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(3\rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(2\rightarrow 3)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(C,2\rightarrow 3)} \end{array} \right\}_C$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(C,2\rightarrow 3)}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
- On applique le TMD en C en projection sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$-\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{R(2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z} = \overrightarrow{\delta(C,2/0)}\cdot\overrightarrow{z} \Longleftrightarrow L_2\overrightarrow{y_2}\wedge\left(X_{21}\overrightarrow{x_2}+Y_{21}\overrightarrow{y_2}\right)\cdot\overrightarrow{z} = \left(\overrightarrow{\delta(G_2,2/0)} + \overrightarrow{CG_2}\wedge m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2\in 2/0)}\right)\cdot\overrightarrow{z}$$

$$\Longrightarrow -L_2X_{21} = C_2\ddot{\theta}_2\left(-a_2\overrightarrow{y_2}\wedge\left(m_2\left(\ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0}+a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}+a_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}\right)\right)\right)\cdot\overrightarrow{z}$$
$$\Longrightarrow -L_2X_{21} = C_2\ddot{\theta}_2 + a_2m_2\left(\ddot{\lambda}_3\sin\theta_2 - a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{z_2}\right)$$

- On isole **(2+3)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison glissière : $\{\mathcal{T}(0\rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(0\rightarrow 3)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(A,0\rightarrow 3)} \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{R(0\rightarrow 3)}\cdot\overrightarrow{y_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(1\rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(2\rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathcal{M}(B,2\rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(B,2\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Force explosion : $\{\mathcal{T}(0_e\rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_y\overrightarrow{y} + F_z\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{C_{exp}} \end{array} \right\}_C$.
- On applique le TRD en projection sur $\overrightarrow{y_0}$:

$$F_y - Y_{21} = m_3\ddot{\lambda}_3 + \left(m_2\left(\ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0}+a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}+a_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}\right)\right)\cdot\overrightarrow{y_0}$$

$$\Longleftrightarrow F_y - Y_{21} = m_3\ddot{\lambda}_3 + \left(m_2\left(\ddot{\lambda}_3 + a_2\ddot{\theta}_2\sin\theta_2 + a_2\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2\right)\right)$$

Application 1

Chaîne ouverte – Wheeling moto⋆

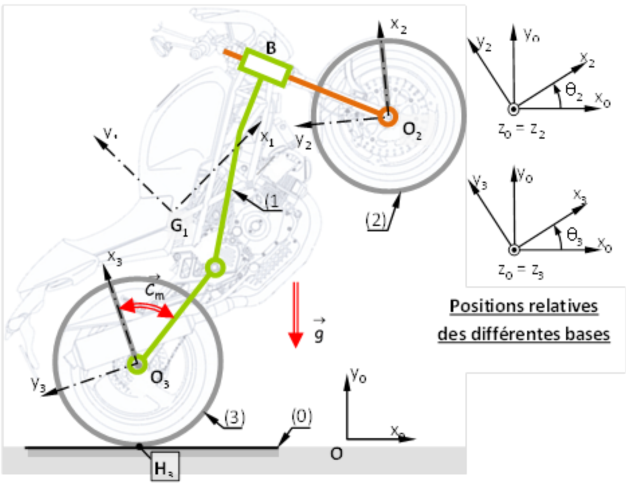
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Modélisation

L'étude proposée concerne l'étude dynamique d'une moto dans une phase de wheeling. Il s'agit d'une figure acrobatique consistant à soulever la roue avant, et de ne garder que l'appui sous la roue arrière. La moto est supposée se déplacer en ligne droite, sur une route horizontale, et l'étude menée est cinématiquement plane. Le modèle d'étude est sur la figure ci-dessous.



- $\mathscr{R}_0=\left(O_0;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ est un repère supposé galiléen, où $\overrightarrow{x_0}$ est dirigé suivant la vitesse de la moto et $\overrightarrow{y_0}$ suivant la verticale ascendante ;
- $\mathscr{R}_1=\left(G_1;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est un repère lié à l'ensemble considéré indéformable {cadre + bras arrière + fourche avant + pilote}. On note $\theta_1=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)$;
- $\mathscr{R}_2=\left(O_2;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)$ est un repère lié à la roue avant (2), de rayon R et de centre O_2 tel que $\overrightarrow{z_2}=\overrightarrow{z_0}$. On note $\theta_2=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}\right)$;
- $\mathscr{R}_3=\left(O_3;\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3}\right)$ est un repère lié à la roue arrière (3), de rayon R et de centre O_3 tel que $\overrightarrow{z_3}=\overrightarrow{z_0}$. On note $\theta_3=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_3}\right)$. Les contacts entre les roues **(2)** et **(3)** et le sol **(0)** sont modélisés par des liaisons ponctuelles en H_2 et H_3.

On note :

- $\overrightarrow{OO_3}=\lambda\overrightarrow{x_0}+R\overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{O_3O_2}=L_1\overrightarrow{x_1}$;
- $\overrightarrow{O_3G_1}=a_1\overrightarrow{x_1}+b_1\overrightarrow{y_1}$;
- $\overrightarrow{H_3O_3}=R\overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{H_2O_2}=R\overrightarrow{y_0}$;
- $G_2=O_2$ et $G_3=O_3$.

On note G_i le centre d'inertie, m_i la masse et C_i le moment d'inertie par rapport à l'axe de la pièce **(i)**.

Étude dynamique

La transmission exerce sur la roue arrière un couple moteur $\overrightarrow{C_m}=C_m\overrightarrow{z_0}$. On suppose que l'adhérence roue/sol est suffisante pour assurer le roulement sans glissement de la roue **(3)** au contact en H avec le sol. La situation initiale est définie au moment où la roue avant quitte le contact avec le sol, avec $\dot{\theta}_1=0$ (après $\neq 0$).

Question 1 *Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling. Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en H_3.*

Question 2 *En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer le mouvement de l'ensemble, en précisant :*

- *élément(s) isolé(s) ;*
- *théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.*

Question 3 *Mettre en place les équations précédentes. Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.*

Application 1 – Corrigé

Chaîne ouverte – Wheeling moto⋆

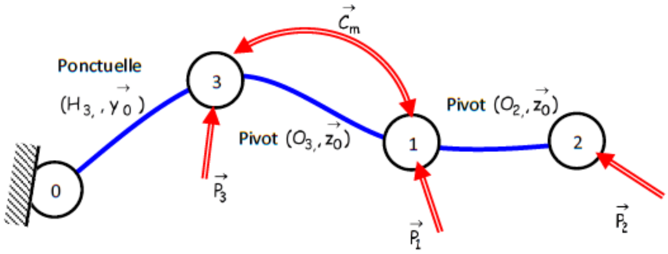
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Eléments de corrigé

Q1- Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling.
Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en H_3.



Si un considère des liaisons parfaites, en particulier en H_3 (liaison sans frottement), l'ensemble modélisé en 2D est isostatique et comporte 4 mobilités :

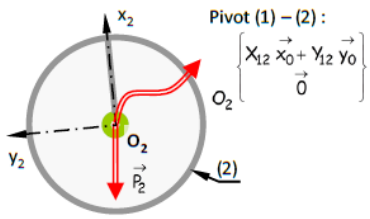
- déplacement suivant $\vec{x}_0$ du centre d'inertie G_1 du cadre (1) par rapport au sol : paramètre λ_1 ;
- position angulaire du cadre (1) par rapport au sol : paramètre $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- position angulaire de la roue (3) par rapport au sol : paramètre $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$;
- position angulaire de la roue (2) par rapport au sol : paramètre $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$.

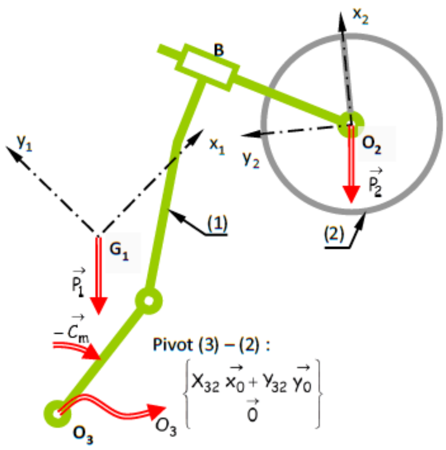
La propriété de roulement sans glissement en H_3 entre la roue (3) et le sol (0) introduit <u>une relation entre les paramètres de position</u>.
Il y a donc <u>3 équations du mouvement</u> issues de l'application du principe fondamental de la dynamique.

Q2- En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer le mouvement de l'ensemble :
• élément(s) isolé(s) ;
• théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.

Les trois équations sont obtenues en isolant successivement :

- la roue avant (2) :
équation du moment dynamique en O_2, en projection sur $\vec{z}_0$. Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison pivot (1) – (2) ;

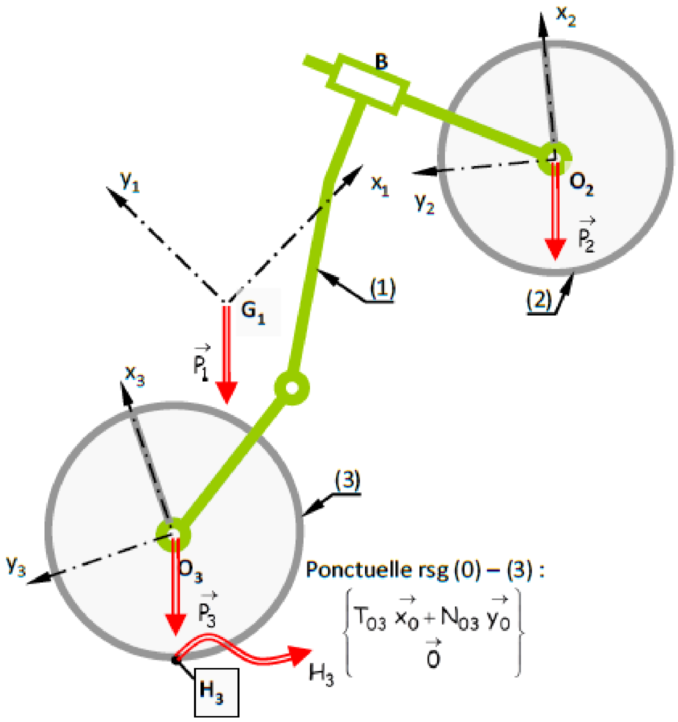




- ensemble {roue avant (2), cadre (1)} :

équation du moment dynamique en O_3, en projection sur $\vec{z}_0$.
Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison pivot (3) – (1) ;

- ensemble {roue avant (2), cadre (1), roue arrière (3)} :
  équation du moment dynamique en H_3, en projection sur $\vec{z_0}$.
  Cette équation est la seule à ne faire apparaître aucune composante d'effort de la liaison ponctuelle avec RsG (0) – (3) ;



Q3- Mettre en place les équations précédentes.
Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.

EQUATION (1)

Moment cinétique de la roue (2) : il est défini en O_2, centre d'inertie de la roue (2), point où est supposée définie sa matrice d'inertie : $\vec{\sigma}(O_2,2/0) = \bar{\bar{I}}(O_2,2) \otimes \dot{\theta}_2\,\vec{z_0} = C_2\,\dot{\theta}_2\,\vec{z_0}$

Moment dynamique : $\vec{\delta}(O_2,2/0) = \dfrac{d\,\vec{\sigma}(O_2,2/0)}{dt\,/(0)} = C_2\,\ddot{\theta}_2\,\vec{z_0}$

Actions extérieures sur la roue (2) :

- pesanteur : le poids $\vec{P_2}$ est supposé appliqué en O_2, donc de moment nul en ce point ;
- la liaison pivot (1) – (2) a un moment nul en O_2.

Soit l'équation (1) : $\boxed{C_2\,\ddot{\theta}_2 = 0}$

EQUATION (2)

Moment dynamique de l'ensemble {(1), (2)} : il est défini en O_3, en faisant la somme des moments dynamiques de (1) et de (2) : $\vec{\delta}(O_3,\{1,2\}/0) = \vec{\delta}(O_3,1/0) + \vec{\delta}(O_3,2/0)$

Calcul pour le cadre (1) :

Moment cinétique du cadre (1) : il est défini en G_1, centre d'inertie du cadre (1), point où est supposée définie sa matrice d'inertie : $\vec{\sigma}(G_1,1/0) = \bar{\bar{I}}(G_1,1) \otimes \dot{\theta}_1\,\vec{z_0} = C_1\,\dot{\theta}_1\,\vec{z_0}$

Moment dynamique : $\vec{\delta}(G_1,1/0) = \dfrac{d\,\vec{\sigma}(G_1,1/0)}{dt\,/(0)} = C_1\,\ddot{\theta}_1\,\vec{z_0}$

Calcul en O_3 : $\vec{\delta}(O_3,1/0) = \vec{\delta}(G_1,1/0) + m_1\,\vec{\Gamma}(G_1,1/0) \wedge \vec{G_1O_3}$

Calcul de l'accélération $\vec{\Gamma}(G_1,1/0)$: pour ce calcul, il est plus adroit de repérer la position du cadre (1) par rapport au sol (0) en définissant comme paramètre λ_1 : $\vec{OO_3} = \lambda_1\,\vec{x_0}$.

Le point O est un point lié au sol, situé à la distance R du plan de contact de la roue avec la chaussée.

$\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OO_3} + \overrightarrow{O_3G_1} = \lambda_1 \overrightarrow{x_0} + a_1 \overrightarrow{x_1} + b_1 \overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{V}(G_1 1/0) = \dot{\lambda}_1 \overrightarrow{x_0} + \dot{\theta}_1 (a_1 \overrightarrow{y_1} - b_1 \overrightarrow{x_1})$

$\overrightarrow{\Gamma}(G_1 1/0) = \ddot{\lambda}_1 \overrightarrow{x_0} + \ddot{\theta}_1 (a_1 \overrightarrow{y_1} - b_1 \overrightarrow{x_1}) - \dot{\theta}_1^2 (a_1 \overrightarrow{x_1} + b_1 \overrightarrow{y_1})$

Moment dynamique en O_3 : $\overrightarrow{\delta}(O_3 1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \overrightarrow{z_0} + m_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \overrightarrow{x_0} + \ddot{\theta}_1 (a_1 \overrightarrow{y_1} - b_1 \overrightarrow{x_1}) - \dot{\theta}_1^2 (a_1 \overrightarrow{x_1} + b_1 \overrightarrow{y_1}) \right] \wedge (-a_1 \overrightarrow{x_1} - b_1 \overrightarrow{y_1})$

$$\overrightarrow{\delta}(O_3,1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \overrightarrow{z_0} - m_1 \left[\ddot{\lambda}_1 (a_1 \sin\theta_1 + b_1 \cos\theta_1) - \ddot{\theta}_1 (a_1^2 + b_1^2) \right] \overrightarrow{z_0}$$

Calcul pour la roue avant (2) :

$\overrightarrow{\delta}(O_3 2/0) = \overrightarrow{\delta}(O_2 2/0) + m_2 \overrightarrow{\Gamma}(O_2 2/0) \wedge \overrightarrow{O_2O_3}$

Calcul de l'accélération $\overrightarrow{\Gamma}(O_2 2/0)$

$\overrightarrow{OO_2} = \lambda_1 \overrightarrow{x_0} + L_1 \overrightarrow{x_1}$

$\overrightarrow{V}(O_2 2/0) = \dot{\lambda}_1 \overrightarrow{x_0} + \dot{\theta}_1 L_1 \overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{\Gamma}(O_2 2/0) = \ddot{\lambda}_1 \overrightarrow{x_0} + \ddot{\theta}_1 L_1 \overrightarrow{y_1} - \dot{\theta}_1^2 L_1 \overrightarrow{x_1}$

Moment dynamique en O_3 : $\overrightarrow{\delta}(O_3 2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} + m_2 \left[\ddot{\lambda}_1 \overrightarrow{x_0} + \ddot{\theta}_1 L_1 \overrightarrow{y_1} - \dot{\theta}_1^2 L_1 \overrightarrow{x_1} \right] \wedge -L_1 \overrightarrow{x_1}$

$$\overrightarrow{\delta}(O_3,2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} - m_2 . L_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \sin\theta_1 - \ddot{\theta}_1 L_1 \right] \overrightarrow{z_0}$$

Actions extérieures appliquées à l'ensemble {1, 2} :

- pesanteur sur (2) : le poids $\overrightarrow{P_2}$ appliqué en O_2, de moment en O_3 :
  $\overrightarrow{O_3O_2} \wedge -P_2 \overrightarrow{y_0} = L_1 \overrightarrow{x_1} \wedge -P_2 \overrightarrow{y_0} = -L_1 P_2 \cos\theta_1 \overrightarrow{z_0}$
- pesanteur sur (1) : le poids $\overrightarrow{P_1}$ appliqué en G_1, de moment en O_3 :
  $\overrightarrow{O_3G_1} \wedge -P_1 \overrightarrow{y_0} = (a_1 \overrightarrow{x_1} + b_1 \overrightarrow{y_1}) \wedge -P_1 \overrightarrow{y_0} = -P_1 (a_1 \cos\theta_1 - b_1 \sin\theta_1) \overrightarrow{z_0}$
- le moteur agit sur le cadre (1) en exerçant un couple de moment $-C_m \overrightarrow{z_0}$
- la liaison pivot (3) – (2) a un moment nul en O_3.

Soit l'équation (2) :

$$\boxed{C_1 \ddot{\theta}_1 - m_1 \left[\ddot{\lambda}_1 (a_1 \sin\theta_1 + b_1 \cos\theta_1) + \ddot{\theta}_1 (a_1^2 + b_1^2) \right] + C_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 . L_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \sin\theta_1 - \ddot{\theta}_1 L_1 \right] = -L_1 P_2 \cos\theta_1 - P_1 (a_1 \cos\theta_1 - b_1 \sin\theta_1) - C_m}$$

EQUATION (3)

Moment dynamique de l'ensemble {(1), (2), (3)} : il est défini en H_3, en faisant la somme des moments dynamiques de (1), de (2) et de (3) : $\overrightarrow{\delta}(H_3, \{1,2,3\}/0) = \overrightarrow{\delta}(H_3 1/0) + \overrightarrow{\delta}(H_3 2/0) + \overrightarrow{\delta}(H_3 3/0)$

Calcul pour le cadre (1) :

Moment dynamique en H_3 : $\overrightarrow{\delta}(H_3 1/0) = \overrightarrow{\delta}(G_1 1/0) + m_1 \overrightarrow{\Gamma}(G_1 1/0) \wedge \overrightarrow{G_1H_3}$

$\overrightarrow{\delta}(H_3 1/0) = C_1 \ddot{\theta}_1 \overrightarrow{z_0} + m_1 \left[\ddot{\lambda}_1 \overrightarrow{x_0} + \ddot{\theta}_1 (a_1 \overrightarrow{y_1} - b_1 \overrightarrow{x_1}) - \dot{\theta}_1^2 (a_1 \overrightarrow{x_1} + b_1 \overrightarrow{y_1}) \right] \wedge (-R \overrightarrow{y_0} - a_1 \overrightarrow{x_1} - b_1 \overrightarrow{y_1})$

Calcul pour la roue avant (2) :

Moment dynamique en H_3 : $\overrightarrow{\delta}(H_3 2/0) = \overrightarrow{\delta}(O_2 2/0) + +m_2 \overrightarrow{\Gamma}(O_2 2/0) \wedge \overrightarrow{O_2H_3}$

$$\overrightarrow{\delta}(H_3,2/0) = C_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} + m_2 . L_1 . \left[\ddot{\lambda}_1 \overrightarrow{x_0} + \ddot{\theta}_1 L_1 \overrightarrow{y_1} - \dot{\theta}_1^2 L_1 \overrightarrow{x_1} \right] \wedge (-R \overrightarrow{y_0} - L_1 \overrightarrow{x_1})$$

Calcul pour la roue arrière (3) :

Moment cinétique de la roue (3) : il est défini en O_3, centre d'inertie de la roue (3), point où est supposée définie sa matrice d'inertie.

$\vec{\sigma}(O_3,3/0) = \bar{\bar{I}}(O_3,3) \otimes \dot{\theta}_3 \vec{z_0} = C_3 \dot{\theta}_3 \vec{z_0}$

Moment dynamique : $\vec{\delta}(O_3,3/0) = \dfrac{d\,\vec{\sigma}(O_3,3/0)}{dt/(0)} = C_3 \ddot{\theta}_3 \vec{z_0}$

Moment dynamique en H_3 : $\vec{\delta}(H_3,3/0) = \vec{\delta}(O_3,3/0) + m_3 \vec{\Gamma}(O_3,3/0) \wedge \overrightarrow{O_3H_3}$, avec $O_3 = G_3$, centre d'inertie de la roue (3).

Calcul de l'accélération $\vec{\Gamma}(O_3,3/0)$

$\overrightarrow{OO_3} = \lambda_1 \vec{x_0}$

$\vec{V}(O_3,3/0) = \dot{\lambda}_1 \vec{x_0}$

$\vec{\Gamma}(O_3,3/0) = \ddot{\lambda}_1 \vec{x_0}$

En H_3 : $\vec{\delta}(H_3,3/0) = C_3 \ddot{\theta}_3 \vec{z_0} + m_3 \ddot{\lambda}_1 \vec{x_0} \wedge -R\vec{y_0} = (C_3 \ddot{\theta}_3 - m_3 \ddot{\lambda}_1 R)\vec{z_0}$

Actions extérieures appliquées à l'ensemble {1, 2, 3} :

- pesanteur sur (2) : le poids $\vec{P_2}$ appliqué en O_2, de moment en H_3 : $\overrightarrow{H_3O_2} \wedge -P_2 \vec{y_0} = -L_1P_2 \cos\theta_1 \vec{z_0}$
- pesanteur sur (1) : le poids $\vec{P_1}$ appliqué en G_1, de moment en H_3 : $\overrightarrow{H_3G_1} \wedge -P_1 \vec{y_0} = -P_1(a_1 \cos\theta_1 - b_1 \sin\theta_1)\vec{z_0}$
- pesanteur sur (3) : le poids $\vec{P_3}$ appliqué en O_3, a un moment nul en H_3 ;
- le contact ponctuel du sol sur la roue (3) a un moment nul en H_3.

Nota : le moteur est interne à l'ensemble isolé…

Soit l'équation (3) :

Il reste à conclure…

Le système d'équations n'est pas intégrable dans le cas général.
Seule l'équation (1) indépendante des deux autres donne un résultat simple :

$C_2 \ddot{\theta}_2 = 0$, soit $\dot{\theta}_2 = Cte$: la vitesse de rotation de la roue avant est constante…

Application 2

Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant⋆

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

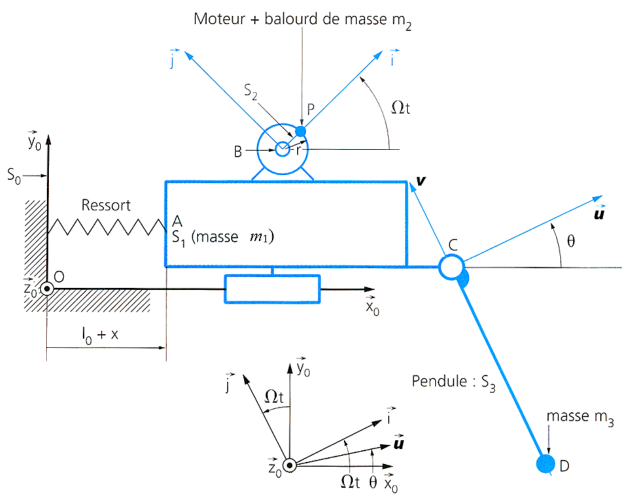
Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide S_1, de masse m_1 en liaison glissière parfaite avec un support S_0, fixe par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$ supposé galiléen.

Le solide S_1 est rappelé par un ressort de longueur libre l_0 et de raideur k. Une masse ponctuelle m_2 excentrée, placée en P, tourne sur un rayon r et est entraînée à vitesse constante Ω. Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur S_2.

Un pendule simple de longueur L, porte à son extrémité D une masse concentrée m_3, l'ensemble constitue le solide S_3, en liaison pivot parfaite d'axe $\left(C,\overrightarrow{z_0}\right)$ avec S_1.

Les masses autres que m_1, m_2 et m_3 sont négligées.



Objectif Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

Question 1 *Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x, θ et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.*

On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre $(x_0,\theta_0)=(0,0)$ en supposant que x, θ, $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

Question 2 *Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.*

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme $x(t)=A\cos(\Omega t)$ et $\theta(t)=B\cos(\Omega t)$.

Question 3 *Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B.*

Question 4 *Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t)=0$ en régime forcé.*

Éléments de correction

1. $(m_1+m_2+m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta}\cos\theta - m_3L\dot{\theta}^2\sin\theta = m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)$ et $\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$.
2. $(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+kx+m_3L\ddot{\theta} = m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)$ et $\ddot{x}+L\ddot{\theta}+g\theta=0$.
3. $A = \dfrac{m_2r\Omega^2\left(-L\Omega^2+g\right)}{\left[-(m_1+m_2+m_3)\Omega^2+k\right]\left(-L\Omega^2+g\right)-m_3L\Omega^4}$ et $B = \dfrac{m_2r\Omega^2}{\left[-(m_1+m_2+m_3)\Omega^2+k\right]\left(-L\Omega^2+g\right)-m_3L\Omega^4}$.
4. $L=\dfrac{g}{\Omega^2}$.

Colle

Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant★

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

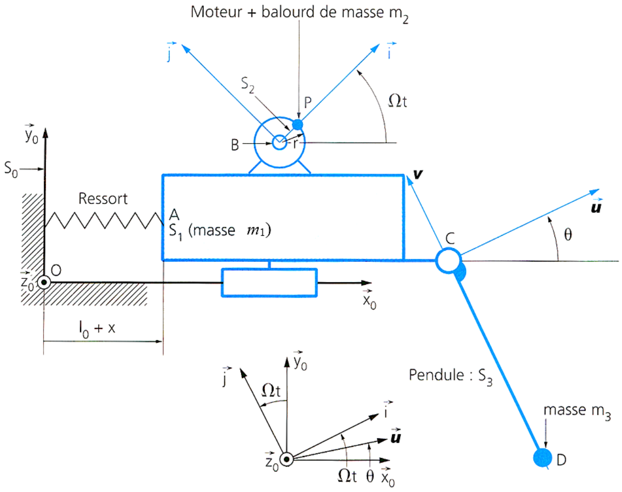
Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide S_1, de masse m_1 en liaison glissière parfaite avec un support S_0, fixe par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$ supposé galiléen.

Le solide S_1 est rappelé par un ressort de longueur libre l_0 et de raideur k. Une masse ponctuelle m_2 excentrée, placée en P, tourne sur un rayon r et est entraînée à vitesse constante Ω. Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur S_2.

Un pendule simple de longueur L, porte à son extrémité D une masse concentrée m_3, l'ensemble constitue le solide S_3, en liaison pivot parfaite d'axe $\left(C,\overrightarrow{z_0}\right)$ avec S_1.

Les masses autres que m_1, m_2 et m_3 sont négligées.



Objectif Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

Question 1 *Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x, θ et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.*

On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre $(x_0, \theta_0) = (0,0)$ en supposant que x, θ, $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

Question 2 *Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.*

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme $x(t) = A\cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B\cos(\Omega t)$.

Question 3 *Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B.*

Question 4 *Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t) = 0$ en régime forcé.*

Application 2 – Corrigé

Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant★

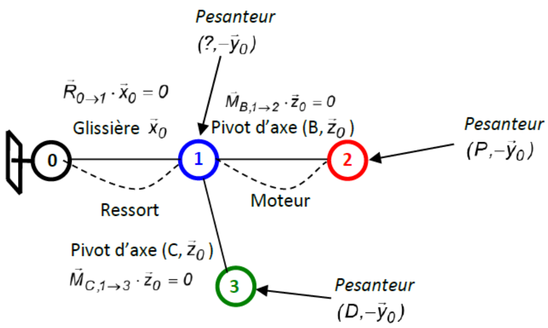
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

1. Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x, θ , leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède trois degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver trois équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée : $\Omega = cte$. Reste à déterminer $\theta(t)$ et $x(t)$.

On isole Σ =1+2+3.
Le théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ en projection sur $\vec{x}_0$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{R}_{d\,\Sigma/0}\cdot\vec{x}_0 = \vec{R}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\cdot\vec{x}_0}$$

On isole 3.
Le théorème du moment dynamique appliqué à 3 au point C et en projection sur $\vec{z}_0$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 3 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0 = \vec{M}_{C,\bar{3}\to 3}\cdot\vec{z}_0}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{R}_{\overline{(1+2+3)}\to(1+2+3)}\cdot\vec{x}_0$:

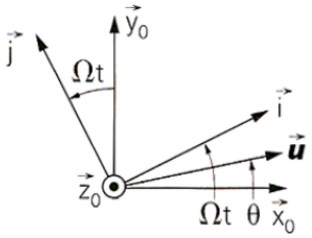
$$\{T_{0\to 1}\} = \underset{\forall P}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{0\to 1} \\ \vec{M}_{P,0\to 1} \end{Bmatrix}} \text{ avec } \vec{R}_{0\to 1}\cdot\vec{x}_0 = 0 \qquad \{T_{0\xrightarrow{ressort}1}\} = \underset{\forall P\in(A,\vec{x}_0)}{\begin{Bmatrix} -kx\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

$$\{T_{pes\to 1}\} = \underset{\forall P\in(G_1,\vec{y}_0)}{\begin{Bmatrix} -m_1 g\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \qquad \{T_{pes\to 2}\} = \underset{\forall P\in(G_2,\vec{y}_0)}{\begin{Bmatrix} -m_2 g\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \qquad \{T_{pes\to 3}\} = \underset{\forall P\in(G_3,\vec{y}_0)}{\begin{Bmatrix} -m_3 g\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

$$\vec{R}_{\overline{(1+2+3)}\to(1+2+3)}\cdot\vec{x}_0 = -kx$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0}\cdot\vec{x}_0$:

$$\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0}\cdot\vec{x}_0=\sum_{i=1}^{3}m_i\vec{\Gamma}_{G_i\in i/0}\cdot\vec{x}_0$$



Soit $\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0}\cdot\vec{x}_0=m_1\vec{\Gamma}_{G_1\in 1/0}\cdot\vec{x}_0+m_2\vec{\Gamma}_{G_2\in 2/0}\cdot\vec{x}_0+m_3\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}\cdot\vec{x}_0$

$$\vec{V}_{G_1\in 1/0}=\dot{x}\vec{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_1\in 1/0}=\ddot{x}\vec{x}_0}$$

$$\vec{V}_{G_2\in 2/1}=\cancel{\vec{V}_{B\in 2/1}}+\overrightarrow{G_2B}\wedge\vec{\Omega}_{2/1}=-r\vec{i}\wedge\Omega\vec{z}_0=r\Omega\vec{j}$$

$$\vec{V}_{G_2\in 2/0}=\vec{V}_{G_2\in 2/1}+\vec{V}_{G_2\in 1/0}=r\Omega\vec{j}+\dot{x}\vec{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_2\in 2/0}=\ddot{x}\vec{x}_0-r\Omega^2\vec{i}} \quad \text{car } \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_0=\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\vec{j}=\Omega\vec{z}_0\wedge\vec{j}=-\Omega\vec{i}$$

$$\vec{V}_{G_3\in 3/1}=\cancel{\vec{V}_{C\in 3/1}}+\overrightarrow{G_3C}\wedge\vec{\Omega}_{3/1}=L\vec{v}\wedge\dot{\theta}\vec{z}_0=L\dot{\theta}\vec{u}$$

$$\vec{V}_{G_3\in 3/0}=\vec{V}_{G_3\in 3/1}+\vec{V}_{G_3\in 1/0}=L\dot{\theta}\vec{u}+\dot{x}\vec{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}=\ddot{x}\vec{x}_0+L\ddot{\theta}\vec{u}+L\dot{\theta}^2\vec{v}} \quad \text{car } \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_0=\vec{\Omega}_{3/0}\wedge\vec{u}=\dot{\theta}\vec{z}_0\wedge\vec{u}=\dot{\theta}\vec{v}$$

Théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ=S1 + S2 + S3 en projection sur $\vec{x}_0$: $\vec{R}_{d\,\Sigma/0}\cdot\vec{x}_0=\vec{R}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\cdot\vec{x}_0$

$$-kx=m_1\ddot{x}+m_2\left(\ddot{x}-r\Omega^2\cos(\Omega t)\right)+m_3\left(\ddot{x}+L\ddot{\theta}\cos\theta-L\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

$$\boxed{(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+kx+m_3L\ddot{\theta}\cos\theta-m_3L\dot{\theta}^2\sin\theta=m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{C,\overline{3}\to 3}\cdot\vec{z}_0$:

$$\left\{\mathcal{T}_{2\to 3}\right\}=\underset{\forall P\in(C,\vec{z}_0)}{\begin{Bmatrix}\vec{R}_{2\to 3}\\ \vec{M}_{P,2\to 3}\end{Bmatrix}} \quad avec \quad \vec{M}_{P,2\to 3}\cdot\vec{z}_0=0 \qquad\qquad \left\{\mathcal{T}_{pes\to 3}\right\}=\underset{\forall P\in(G_3,\vec{y}_0)}{\begin{Bmatrix}-m_3g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{Bmatrix}}$$

$$\vec{M}_{C,pes\to 3}\cdot\vec{z}_0=\left(\cancel{\vec{M}_{G_3,pes\to 3}}+\overrightarrow{CG_3}\wedge-m_3g\vec{y}_0\right)\cdot\vec{z}_0=\left[-L\vec{v}\wedge-m_3g\vec{y}_0\right]\cdot\vec{z}_0=-m_3gL\sin\theta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0$:

$\vec{\delta}_{G_3,3/0}=\vec{0}$ (masse ponctuelle)

$$\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0=\left[\vec{\delta}_{G_3,3/0}+\overrightarrow{CG_3}\wedge\vec{R}_{d\,3/0}\right]\cdot\vec{z}_0=\left[-L\vec{v}\wedge m_3\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}\right]\cdot\vec{z}_0=-m_3L\left[\vec{z}_0\wedge\vec{v}\right]\cdot\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}=m_3L\vec{u}\cdot\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}=m_3L\left[\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}\right]$$

Théorème du moment dynamique appliqué à *S3* au point *C* et en projection sur $\vec{z}_0$: $\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0=\vec{M}_{C,\overline{3}\to 3}\cdot\vec{z}_0$

$$-m_3gL\sin\theta=m_3L\left[\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}\right] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}+g\sin\theta=0}$$

2. Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

En considérant que $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de la position d'équilibre $(x_0, \theta_0) = (0,0)$,

et que le développement limité de $f(x)$ à l'ordre n en a est $f(x+a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}x^n$, on a :

$$\text{ordre } 0 : \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \quad \text{ordre } 1 : \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre } 2 : \begin{cases} \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin\theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre } 3 : \begin{cases} \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} \end{cases}$$

et $\dot{\theta}^2 \approx 0$

Donc : $\boxed{(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3 L\ddot{\theta} = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)}$ et $\boxed{\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0}$

3. Déterminer le système d'équations permettant de calculer *A* et *B*.

En posant $x(t) = A\cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B\cos(\Omega t)$, on a : $\ddot{x}(t) = -A\Omega^2\cos(\Omega t)$ et $\ddot{\theta}(t) = -B\Omega^2\cos(\Omega t)$

Les deux équations obtenues précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2 + m_3)A\Omega^2\cos(\Omega t) + kA\cos(\Omega t) - m_3 LB\Omega^2\cos(\Omega t) = m_2 r\Omega^2\cos(\Omega t) \\ -A\Omega^2\cos(\Omega t) - LB\Omega^2\cos(\Omega t) + gB\cos(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit à : $\begin{cases} \left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]A - m_3 L\Omega^2 B = m_2 r\Omega^2 \\ -A\Omega^2 + \left(-L\Omega^2 + g\right)B = 0 \end{cases}$

Soit : $\boxed{A = \frac{m_2 r\Omega^2\left(-L\Omega^2 + g\right)}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}}$

$\boxed{B = \frac{m_2 r\Omega^4}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}}$

4. Indiquer la condition que doit vérifier la longueur *L* afin d'assurer *x*(*t*) = 0 en régime forcé.

On a $x(t) = 0$ en régime forcé, si $A = 0$.

Ce qui implique que : $A = \frac{m_2 r\Omega^2\left(-L\Omega^2 + g\right)}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}$ Soit : $\boxed{L = \frac{g}{\Omega^2}}$

Dans ce cas $B = \frac{-m_2 r}{m_3 L}$ et $\theta(t) = B\cos(\Omega t) = \frac{-m_2 r}{m_3 L}\cos(\Omega t)$

Application 2

Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique ★

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

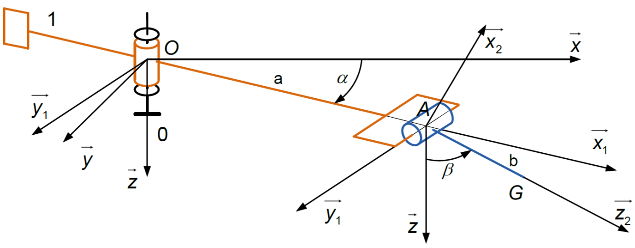
- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Présentation

La géotechnique correspond aux activités liées aux applications de la mécanique des sols, de la mécanique des roches et de la géologie. À partir d'essais en laboratoire et in situ, la géotechnique fournit aux constructeurs de bâtiments et d'ouvrages les données indispensables pour le génie civil en ce qui concerne leur stabilité en fonction des sols. Aujourd'hui la modélisation physique d'ouvrage géotechnique en centrifugeuse est une approche expérimentale répandue. La centrifugation des modèles réduits permet de reproduire des états de contraintes dans les matériaux semblables à ceux régnant dans l'ouvrage grandeur nature. Le laboratoire central des Ponts et Chaussées (LCPC) de Nantes possède une centrifugeuse géotechnique dont les principales caractéristiques sont données ci-après :

- distance de l'axe à la plate-forme nacelle : 5,5 m ;
- longueur du bras : 6,8 m ;
- accélération maximale : 200 g ;
- temps de montée à 200 g : 360 s.

On propose le modèle cinématique suivant :



Soit $\mathscr{R} = \left(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ un repère galiléen lié au bâti 0 de la centrifugeuse. L'axe $\left(O, \overrightarrow{z}\right)$ est dirigé suivant la verticale descendante. On désigne par $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{z}$ le vecteur accélération de la pesanteur.

Le bras 1 est en liaison pivot sans frottement d'axe $\left(O, \overrightarrow{z}\right)$ avec le bâti 0. Soit $\mathscr{R}_1 = \left(O; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z}\right)$ un repère lié au bras 1. On pose $\alpha = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1}\right)$, avec $\alpha = \omega t$, où ω est une constante positive.

La nacelle 2 est en liaison pivot sans frottement d'axe $\left(A, \overrightarrow{y_1}\right)$ avec le bras 1 , telle que $\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{x_1}$ (a est une constante positive). Soit $\mathscr{R}_2 = \left(A; \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_2}\right)$ un repère lié à la nacelle 2. On pose $\beta = \left(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{z_2}\right)$.

On note :

- bras 1 : moment d'inertie I par rapport à l'axe $\left(O, \overrightarrow{z}\right)$;
- nacelle 2 : centre d'inertie G , tel que $\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{z_2}$ (b est une constante positive), masse m, matrice d'inertie $I_A(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_2}$.

Un moteur, fixé sur la bâti 0, exerce sur le bras 1 une action mécanique représentée par le couple $C_m\overrightarrow{z}$. Le bras 1 tourne à la vitesse constante ω par rapport au bâti 0.

Objectif Déterminer les équations du mouvement de la centrifugeuse, ainsi que le couple moteur à fournir au cours du mouvement.

Question 1 *Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.*

Question 2 *Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.*

On suppose que la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, et que $mba >> A \simeq C$.

Question 3 *Déterminer les expressions de l'angle β et du couple moteur C_m ?*

Application 2 – Corrigé

Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique ★

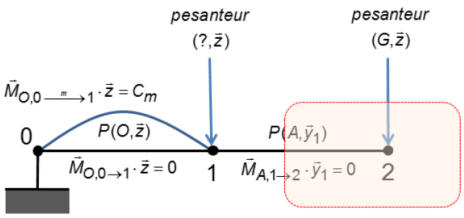
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

1. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède deux degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver deux équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée : $\omega = cte$. Reste à déterminer $\beta(t)$.

On isole la nacelle 2.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur $\vec{y}_1$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 2 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1 = \vec{M}_{A,\bar{2}\to 2} \cdot \vec{y}_1}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{A,\bar{2}\to 2} \cdot \vec{y}_1$:

$$\left\{\mathcal{T}_{1\to 2}\right\} = \underset{\forall P\in(A,\vec{y}_1)}{\left\{\begin{array}{l}\vec{R}_{1\to 2}\\ \vec{M}_{P,1\to 2}\end{array}\right.} \quad avec \quad \vec{M}_{P,1\to 2} \cdot \vec{y}_1 = 0 \qquad \left\{\mathcal{T}_{pes\to 2}\right\} = \underset{\forall P\in(G,\vec{z})}{\left\{\begin{array}{l}mg\vec{z}\\ \vec{0}\end{array}\right.}$$

Avec $\vec{M}_{A,1\to 2} \cdot \vec{y}_1 = 0$

$$\vec{M}_{A,pes\to 2} \cdot \vec{y}_1 = \left(\cancel{\vec{M}_{G,pes\to 2}} + \overrightarrow{AG} \wedge mg\vec{z}\right) \cdot \vec{y}_1 = \left(b\vec{z}_2 \wedge mg\vec{z}\right) \cdot \vec{y}_1 = \underline{-mgb\sin\beta}$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir : $\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{y}_1$:

A n'est pas un point fixe dans R_0. On ne peut donc pas utiliser l'intégration par partie.

La matrice d'inertie est donnée en un point A qui n'est pas le centre de gravité !!!

2 possibilités :

Méthode 1 : utiliser les définitions de $\vec{\sigma}_{A,2/0}$ et $\vec{\delta}_{A,2/0}$:

$$\vec{\sigma}_{A,2/0} = \bar{\bar{I}}_A(2) \cdot \vec{\Omega}_{2/0} + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A\in 2/0} \quad \text{et} \quad \vec{\delta}_{A,2/0} = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt}\right|_0 + m\vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G\in 2/0}$$

Méthode 2 : utiliser Huygens pour obtenir la matrice au point G, puis utiliser la méthode classique en déterminant $\vec{\sigma}_{G,2/0}$ puis $\vec{\delta}_{G,2/0}$ puis $\vec{\delta}_{A,2/0}$.

Nous allons utiliser la méthode 1.

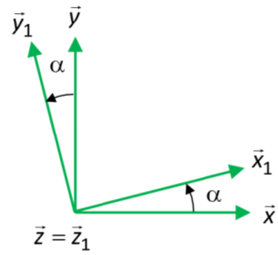
$$\vec V_{A/0} = \vec V_{A\in 2/0} = \vec V_{A\in 1/0} = \cancel{\vec V_{O\in 1/0}} + \overrightarrow{AO}\wedge\vec\Omega_{1/0} = -a\vec x_1 \wedge \dot\alpha \vec z_1 = a\dot\alpha\vec y_1$$

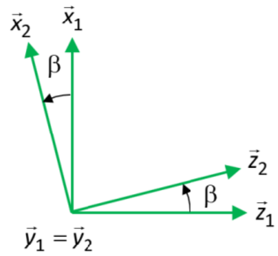
$$\vec\sigma_{A,2/0} = \bar{\bar{I}}_A(2)\cdot\vec\Omega_{2/0} + m\overrightarrow{AG}\wedge\vec V_{A\in 2/0} = \begin{bmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{bmatrix}_{b2}\cdot\begin{pmatrix}0\\\dot\beta\\\dot\alpha\end{pmatrix}_{b1} + mb\vec z_2\wedge a\dot\alpha\vec y_1$$

$$= \begin{bmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{bmatrix}_{b2}\cdot\begin{pmatrix}-\dot\alpha\sin\beta\\\dot\beta\\\dot\alpha\cos\beta\end{pmatrix}_{b2} - mba\dot\alpha\vec x_2$$

$$= -A\dot\alpha\sin\beta\vec x_2 + B\dot\beta\vec y_2 + C\dot\alpha\cos\beta\vec z_2 - mba\dot\alpha\vec x_2$$

$$= -(A\dot\alpha\sin\beta + mba\dot\alpha)\vec x_2 + B\dot\beta\vec y_2 + C\dot\alpha\cos\beta\vec z_2$$





$$\vec\delta_{A,2/0}\cdot\vec y_1 = \left.\frac{d\vec\sigma_{A,2/0}}{dt}\right|_0\cdot\vec y_1 + (m\vec V_{A/0}\wedge\vec V_{G\in 2/0})\cdot\vec y_1$$

Avec : $(m\vec V_{A/0}\wedge\vec V_{G\in 2/0})\cdot\vec y_1 = 0$ car $\vec V_{A/0} // \vec y_1$

$$\left.\frac{d\vec\sigma_{A,2/0}}{dt}\right|_0\cdot\vec y_1 = \frac{d\left(\vec\sigma_{A,2/0}\cdot\vec y_1\right)}{dt} - \vec\sigma_{A,2/0}\cdot\left.\frac{d\vec y_1}{dt}\right|_0$$

et $\left.\dfrac{d\vec y_1}{dt}\right|_0 = \vec\Omega_{1/0}\wedge\vec y_1 = \dot\alpha\vec z\wedge\vec y_1 = -\dot\alpha\vec x_1$

Donc

$$\vec\delta_{A,2/0}\cdot\vec y_1 = \frac{d\left(B\dot\beta\right)}{dt} - \left[-(A\dot\alpha\sin\beta + mba\dot\alpha)\vec x_2 + B\dot\beta\vec y_2 + C\dot\alpha\cos\beta\vec z_2\right]\cdot\left[-\dot\alpha\vec x_1\right]$$

$$\vec\delta_{A,2/0}\cdot\vec y_1 = B\ddot\beta + \dot\alpha\left[-(A\dot\alpha\sin\beta + mba\dot\alpha)\cos\beta + C\dot\alpha\cos\beta\sin\beta\right]$$ car $\vec x_2\cdot\vec x_1 = \cos\beta$ et $\vec z_2\cdot\vec x_1 = \sin\beta$

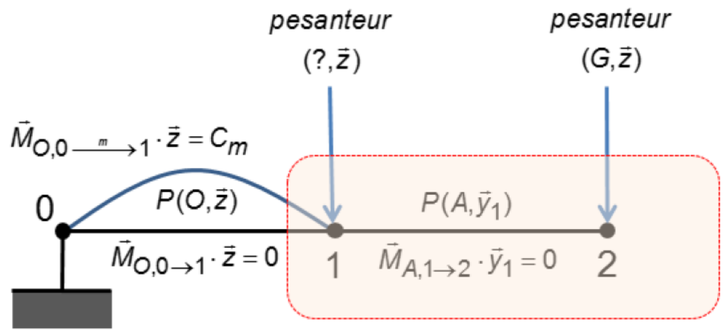
$$\boxed{\vec\delta_{A,2/0}\cdot\vec y_1 = B\ddot\beta + \dot\alpha^2\cos\beta\left[\sin\beta(C-A) - mba\right]}$$

Théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur $\vec y_1$: $\vec\delta_{A,2/0}\cdot\vec y_1 = \vec M_{A,\bar 2\to 2}\cdot\vec y_1$

$$\boxed{-mgb\sin\beta = B\ddot\beta + \omega^2\cos\beta\left[\sin\beta(C-A) - mba\right]}\ (1)$$

2. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

Graphe de structure :



On isole l'ensemble *E=bras 1+ nacelle 2*.
Le théorème du moment dynamique appliqué à *E* au point O et en projection sur $\vec{z}$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas.

$$\boxed{\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z}=\vec{M}_{O,\bar{E}\to E}\cdot\vec{z}}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{O,\bar{E}\to E}\cdot\vec{z}$:

$$\{\mathcal{T}_{0\to1}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{0\to1}\\ \vec{M}_{P,0\to1}\end{matrix}\right\}_{\forall P\in(O,\vec{z})} \text{ avec } \vec{M}_{P,0\to1}\cdot\vec{z}=0 \qquad \{\mathcal{T}_{0\xrightarrow{m}1}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{M}_{P,0\xrightarrow{m}1}\end{matrix}\right\}_{\forall P} \text{ avec } \vec{M}_{P,0\xrightarrow{m}1}\cdot\vec{z}=C_m$$

$$\{\mathcal{T}_{pes\to1}\}=\left\{\begin{matrix}m_1 g\vec{z}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{\forall P\in(G_1,\vec{z})} \qquad \{\mathcal{T}_{pes\to2}\}=\left\{\begin{matrix}mg\vec{z}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{\forall P\in(G,\vec{z})}$$

Avec $\vec{M}_{O,pes\to i}\cdot\vec{z}=\left(\cancel{\vec{M}_{G,pes\to i}}+\vec{OG_i}\wedge m_i g\vec{z}\right)\cdot\vec{z}=0$

$$\vec{M}_{O,\bar{E}\to E}\cdot\vec{z}=\vec{M}_{O,0\to1}\cdot\vec{z}+\vec{M}_{O,0\xrightarrow{m}1}\cdot\vec{z}+\vec{M}_{O,pes\to1}\cdot\vec{z}+\vec{M}_{O,pes\to2}\cdot\vec{z}=C_m$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z}$:

O est un point fixe dans R_0. On peut donc utiliser l'intégration par partie.

$$\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z}=\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,E/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt}-\vec{\sigma}_{O,E/0}\cdot\cancel{\left.\frac{d\vec{z}}{dt}\right|_0}=\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,E/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt}$$

$$\vec{\sigma}_{O,1/0}\cdot\vec{z}=\left(\bar{\bar{I}}_O(1)\cdot\vec{\Omega}_{1/0}\right)\cdot\vec{z}=I\dot{\alpha} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,1/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt}=0} \quad (\text{car } \dot{\alpha}=\omega=cte)$$

$$\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}=\left(\vec{\sigma}_{A,2/0}+\vec{OA}\wedge m\vec{V}_{G\in2/0}\right)\cdot\vec{z}=\vec{\sigma}_{A,2/0}\cdot\vec{z}+\left(\vec{OA}\wedge m\vec{V}_{G\in2/0}\right)\cdot\vec{z}$$

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A,2/0}\cdot\vec{z}&=\left[-(A\dot{\alpha}\sin\beta+mba\dot{\alpha})\vec{x}_2+B\dot{\beta}\vec{y}_2+C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2\right]\cdot\vec{z}\\&=-(A\dot{\alpha}\sin\beta+mba\dot{\alpha})(-\sin\beta)+C\dot{\alpha}\cos^2\beta \qquad \text{car } \vec{x}_2\cdot\vec{z}=-\sin\beta \text{ et } \vec{z}_2\cdot\vec{z}=\cos\beta\\&=\omega\left(A\sin^2\beta+C\cos^2\beta+mba\sin\beta\right)\end{aligned}$$

$$\left(\overrightarrow{OA} \wedge m\vec{V}_{G\in 2/0}\right)\cdot\vec{z} = \left[a\vec{x}_1 \wedge m(\vec{V}_{A\in 2/0} + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0})\right]\cdot\vec{z}$$
$$= \left\{a\vec{x}_1 \wedge m\left[a\dot{\alpha}\vec{y}_1 - b\vec{z}_2 \wedge (\dot{\alpha}\vec{z} + \dot{\beta}\vec{y}_1)\right]\right\}\cdot\vec{z}$$
$$= \left\{a\vec{x}_1 \wedge m\left[\dot{\alpha}(a + b\sin\beta)\vec{y}_1 + b\dot{\beta}\vec{x}_2\right]\right\}\cdot\vec{z}$$
$$= ma\dot{\alpha}(a + b\sin\beta)$$
$$= ma\omega(a + b\sin\beta)$$

Ainsi $\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z} = \omega\left(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + 2mba\sin\beta + ma^2\right)$

$$\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z} = \omega\left(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + 2mba\sin\beta + ma^2\right)$$
$$\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt} = \omega\left(2\dot{\beta}A\sin\beta\cos\beta - 2C\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta + 2mba\dot{\beta}\cos\beta\right)$$
$$\boxed{\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt} = 2\omega\dot{\beta}\cos\beta\left[\sin\beta(A - C) + mba\right]}$$

Théorème du moment dynamique appliqué à E au point O et en projection sur $\vec{z}$: $\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z} = \vec{M}_{O,\bar{E}\to E}\cdot\vec{z}$

$$\boxed{C_m = 2\omega\dot{\beta}\cos\beta\left[\sin\beta(A - C) + mba\right]} \qquad (2)$$

3. Déterminer les expressions de l'angle β et du couple moteur C_m ?

On suppose que $mba >> A \approx C$

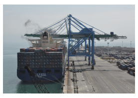
De plus lorsque la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, on a : $\beta = cte \Rightarrow \dot{\beta} = \ddot{\beta} = 0$

Ainsi, les deux équations déterminées aux questions 1 et 2 $\begin{cases} -mgb\sin\beta = B\ddot{\beta} + \omega^2\cos\beta\left[\sin\beta(C - A) - mba\right] & (1) \\ C_m = 2\omega\dot{\beta}\cos\beta\left[\sin\beta(A - C) + mba\right] & (2) \end{cases}$ deviennent :

(1) $\Rightarrow \quad -mgb\sin\beta = -\omega^2\cos\beta mba \quad \Rightarrow \quad \tan\beta = \dfrac{\omega^2 a}{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = \arctan\left(\dfrac{\omega^2 a}{g}\right)}$

(2) $\Rightarrow \boxed{C_m = 0}$ ce qui est normal, car la liaison 1/0 est parfaite, donc à vitesse constante de 1/0, il n'y a pas besoin de couple moteur (qui sert à accélérer ou freiner).

Application 4



Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs ⋆

Centrale Supelec PSI 2013

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Modélisation dynamique du comportement de la charge

Objectif Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

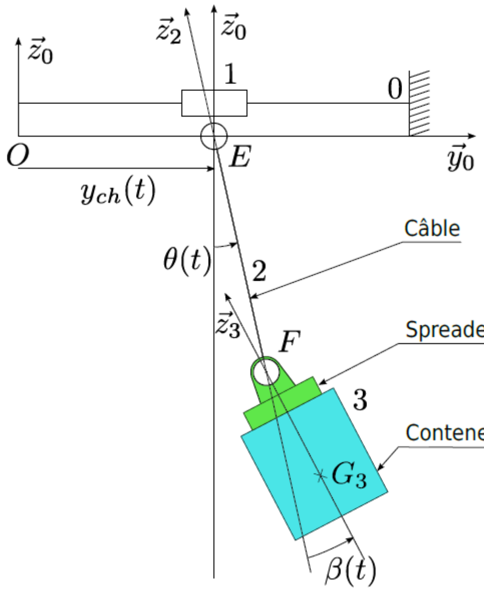
En vue d'élaborer une commande automatisée du déchargement des conteneurs, une bonne compréhension de la dynamique du système est nécessaire. Cette partie vise à établir les équations du mouvement du conteneur. La charge peut alors balancer selon le modèle présenté ci-après. Dans cette étude, la vitesse de vent nulle. On fait l'hypothèse que le conteneur est suspendu à un seul câble indéformable, en liaison pivot à ses extrémités. Les liaisons entre les solides 0, 1, 2 et 3 sont supposées parfaites. Le portique support du chariot est noté 0, le chariot 1, le câble 2 et l'ensemble {spreader + conteneur} 3.

Paramétrage

- Le repère $\mathcal{R}_0 = \left(O_0;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ est lié au portique fixe; il est supposé galiléen avec $\overrightarrow{z_0}$ l'axe vertical ascendant.
- La position du chariot telle que $\overrightarrow{OE} = y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}$ est notée $y_{ch}(t)$; l'angle $\left(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_2}\right)$ d'inclinaison du câble $\theta(t)$ et l'angle $\left(\overrightarrow{z_2},\overrightarrow{z_3}\right)$ d'inclinaison du conteneur par rapport au câble $\beta(t)$.

Données

- $\mathcal{R}_1 = \left(E;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ repère lié au chariot de levage 1.
- $\mathcal{R}_2 = \left(E;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)$ repère lié au câble 2; $\ell_2 = 50\,\text{m}$ la longueur EF du câble; la masse est négligée.
- $\mathcal{R}_3 = \left(F;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3}\right)$ repère lié à l'ensemble {spreader + conteneur}; $m_3 = 50$ tonnes la masse du solide 3; G_3 le centre de gravité du solide 3, tel que $\overrightarrow{G_3F} = h_3\overrightarrow{z_3}$ où $h_3 = 2{,}5\,\text{m}$; la matrice d'inertie du solide 3 s'écrit $I_3(G_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0\\ 0 & B_3 & 0\\ 0 & 0 & C_3\end{pmatrix}_{\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3}\right)}$ où $\left|\begin{array}{l} A_3 = 52\times 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^2\\ B_3 = 600\times 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^2\\ C_3 = 600\times 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^2\end{array}\right.$.
- la motorisation M_D du mouvement de direction exerce, par l'intermédiaire de câbles, des actions mécaniques sur (1) qui se réduisent à un glisseur de la forme $\overrightarrow{R(M_D \to 1)} = F\,\overrightarrow{y_0}$;
- l'action mécanique du câble sur le spreader est notée $\overrightarrow{R(2\to 3)} = F_{23}\overrightarrow{z_2}$.



Question 1 *Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?*

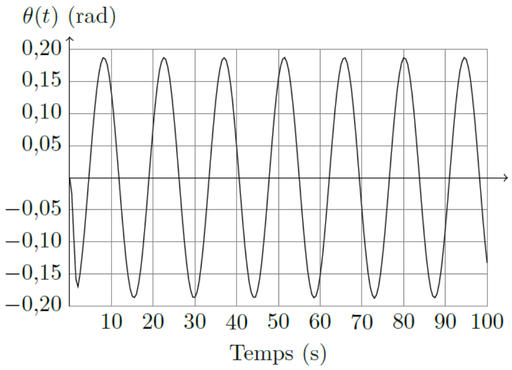
Question 2 *Déterminer littéralement, au point G_3, la vitesse $\overrightarrow{V(G_3\in 3/0)}$ puis le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_0$.*

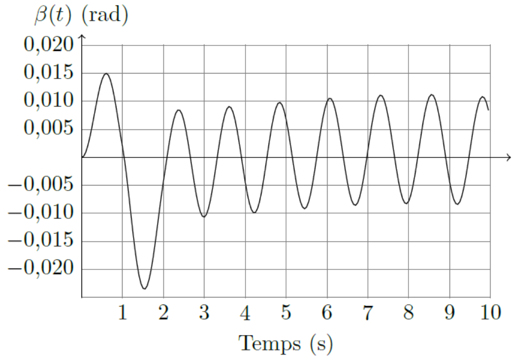
Question 3 *En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.*

Question 4 *En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.*

Question 5 *En supposant que θ, β, $\dot\theta$ et $\dot\beta$ sont petits, linéariser les équations précédentes.*

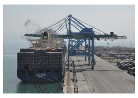
Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10 m.





Question 6 *Proposer une simplification de la modélisation précédente.*

Application 4 – Corrigé



Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs ⋆⋆⋆

Centrale Supelec PSI 2013

Savoirs et compétences :

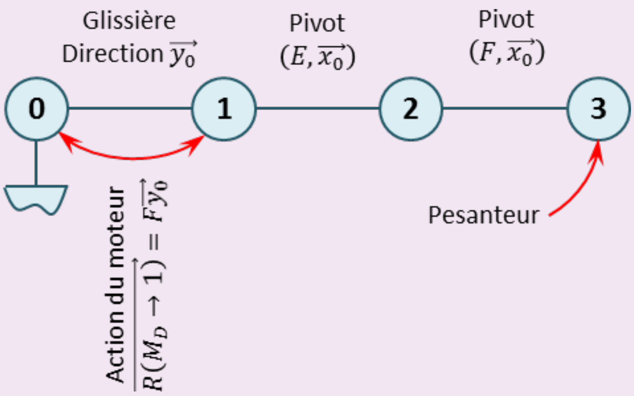
- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

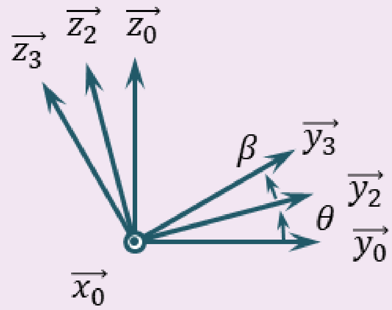
Modélisation dynamique du comportement de la charge

Objectif Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

Question 1 *Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?*

Correction





Le système a trois mobilités :

- la translation de la liaison glissière de longueur $y_{ch}(t)$ (degré de liberté motorisé) ;
- la rotation du câble d'angle $\theta(t)$ (degré de liberté non motorisé) ;
- la rotation du conteneur d'angle $\beta(t)$ (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.

Question 2 *Déterminer littéralement, au point G_3, la vitesse $\overrightarrow{V(G_3\in 3/0)}$ puis le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0$.*

Correction $\overrightarrow{V(G_3\in 3/0)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG_3}\right)\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}-\ell_2\overrightarrow{z_2}-h_3\overrightarrow{z_3}\right)\right]_{\mathscr{R}_0}$.

On a :

- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_2}+\overrightarrow{\Omega(2/0)}\wedge\overrightarrow{z_2}=\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{z_2}=-\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}$;
- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_3}+\overrightarrow{\Omega(3/0)}\wedge\overrightarrow{z_3}=\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{z_3}=-\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)\overrightarrow{y_3}$;

- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\dot{\theta}\,\overrightarrow{z_2}$;
- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)\overrightarrow{z_3}$.

$\overrightarrow{V(G_3\in 3/0)}=\dot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}+\ell_2\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}+h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)\overrightarrow{y_3}$.

$\overrightarrow{\Gamma(G_3\in 3/0)}=\ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}+\ell_2\ddot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}+h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{y_3}+\ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2}+h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\overrightarrow{z_3}$.

Par ailleurs, G_3 étant le centre d'inertie, de 3, on a $\overrightarrow{\delta(G_3,3/0)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}A_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=A_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{x_0}$.

On a donc, $\{\mathscr{D}(3/0)\}=\left\{\begin{array}{l}M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}+\ell_2\ddot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}+h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{y_3}+\ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2}+h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\\ A_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{x_0}\end{array}\right\}_{G_3}$

Question 3 *En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.*

Correction D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant $\overrightarrow{z_2}$, on peut donc suggérer de réaliser le thorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur $\overrightarrow{y_2}$.

Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3 ;
- action de 2 sur 3.

On a donc : $-M_3g\,\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{y_2}=\left(M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}+\ell_2\ddot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}+h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{y_3}+\ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2}+h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{y_2}$

$\Leftrightarrow -M_3g\sin\theta=M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t)\cos\theta+\ell_2\ddot{\theta}+h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\cos\beta-h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\sin\beta\right)$

Résolution faisant intervenir F – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc **(1+2+3)** et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{y_0}$.

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$) ;
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$) ;
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$) ;
- action du moteur sur 1.

On applique le TRD sur $\overrightarrow{y_0}$: $F=\overrightarrow{R_d(1+2+3/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}=\underbrace{\overrightarrow{R_d(1/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}}_{=0\text{(masse négligée)}}+\underbrace{\overrightarrow{R_d(2/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}}_{=0\text{(masse négligée)}}+\overrightarrow{R_d(3/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}$

$\Rightarrow F=\left(M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}+\ell_2\ddot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}+h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{y_3}+\ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2}+h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{y_0}$

$\Leftrightarrow F=M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t)+\ell_2\ddot{\theta}\cos\theta+h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\cos\left(\beta+\theta\right)-\ell_2\dot{\theta}^2\sin\theta-h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\sin\left(\beta+\theta\right)\right)$

Question 4 *En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.*

Correction Le TRD appliqué à 3 en projection suivant $\overrightarrow{z_2}$ se traduit par :

$F-M_3g\,\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{z_2}=\left(M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}+\ell_2\ddot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}+h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{y_3}+\ell_2\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_2}+h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{z_2}$

$\Leftrightarrow F-M_3g\cos\theta=M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\sin\theta+h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\sin\beta+\ell_2\dot{\theta}^2+h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\cos\beta\right)$.

Le TMD appliqué à 3 au point F en projection suivant $\overrightarrow{x_0}$ se traduit par :

$\overrightarrow{FG_3}\wedge\left(-M_3g\,\overrightarrow{z_0}\right)\cdot\overrightarrow{x_0}=\left(\overrightarrow{\delta(G_3,3/0)}+\overrightarrow{FG_3}\wedge\overrightarrow{R_d(3/0)}\right)\cdot\overrightarrow{x_0}$

$\Leftrightarrow -h_3\,\overrightarrow{z_3}\wedge\left(-M_3g\,\overrightarrow{z_0}\right)\cdot\overrightarrow{x_0}=A_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)$

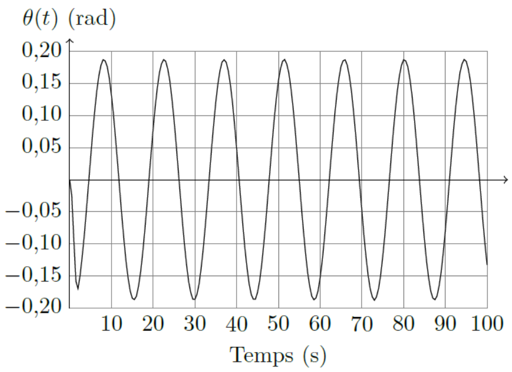
$\Leftrightarrow -M_3gh_3\sin\left(\beta+\theta\right)=A_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)$.

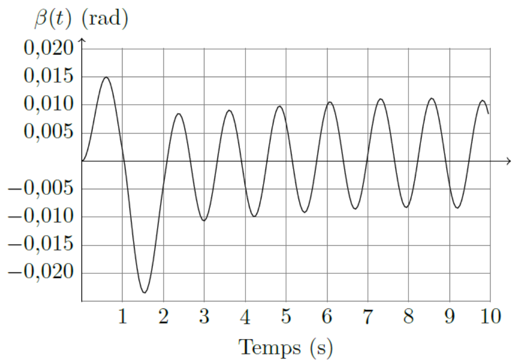
Question 5 *En supposant que θ, β, $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.*

Correction

- On a $-M_3 g \sin\theta = M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t)\cos\theta + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\cos\beta - h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\sin\beta\right)$. En linéarisant, on obtient $-M_3 g\theta = M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right) - h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\beta\right)$. En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $-M_3 g\theta = M_3\left(\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\right)$.
- On a : $F - M_3 g\cos\theta = M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\sin\theta + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\sin\beta + \ell_2\dot{\theta}^2 + h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\cos\beta\right)$. En linéarisant, on obtient : $F - M_3 g = M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\theta + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\beta + \ell_2\dot{\theta}^2 + h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\right)$ En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $F - M_3 g = M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\theta + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\beta\right)$.
- On a : $M_3 g h_3 \sin\left(\beta+\theta\right) = A_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)$ En linéarisant, on obtient $M_3 g h_3\left(\beta+\theta\right) = A_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)$.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10 m.





Question 6 *Proposer une simplification de la modélisation précédente.*

Correction L'amplitude des oscillations de β est 10 fois inférieure aux oscillations de θ. En conséquences, on pourrait poser $\beta = 0$ et :

- $-g\theta = \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\ddot{\theta}$;
- $F - M_3 g = -M_3\ddot{y}_{ch}(t)\theta$;
- $M_3 g h_3\theta = A_3\ddot{\theta}$.