

Activation 4

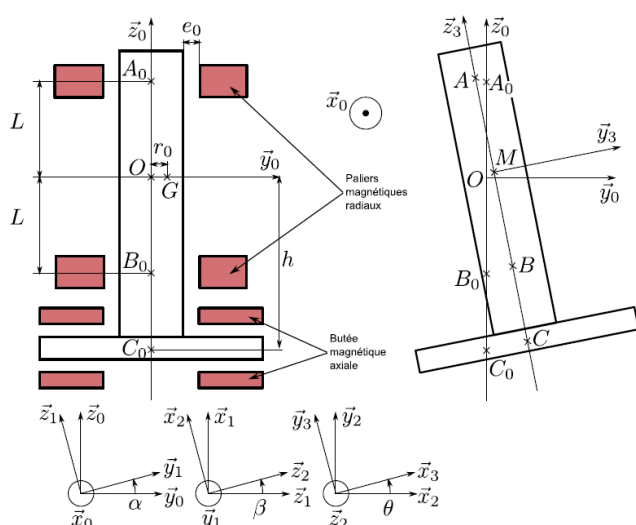
Pompe turbo-moléculaire

Centrale Supélec PSI 2009

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Le comportement dynamique du rotor est étudié sur un modèle à 6 degrés de liberté : le rotor n'étant en contact avec aucun solide, il dispose des 6 mouvements de corps rigide. On suppose le rotor indéformable. La figure suivante montre à gauche le rotor dans sa position nominale ($\alpha = \beta = \theta = x = y = z = 0$) et à droite le rotor dans une position quelconque. On note A_0 et B_0 les centres des paliers magnétiques radiaux et A et B les points appartenant à l'arbre et confondus avec et dans la position nominale.



On note O le milieu de $[A_0B_0]$ et M le milieu de $[AB]$. Bien qu'un soin très important soit apporté à la fabrication du rotor, il est impossible d'annuler totalement les défauts d'équilibrage. Le centre de gravité n'est donc pas exactement situé sur l'axe (AB) , mais à une distance de celui-ci telle que $\overrightarrow{MG} = r_0 \vec{y}_3$.

De même, la matrice d'inertie $I_{G,3}$ n'est pas parfaitement diagonale et présente un produit d'inertie D non nul. On admet toutefois que $r \ll L$ et $D \ll (A, B, C)$, où A, B, C sont les moments d'inertie. Le mouvement du rotor, auquel on associe le repère 3, par rapport au bâti est paramétré par les trois déplacements (x, y, z) du point M dans le repère $\mathcal{B}_0(0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: $\overrightarrow{OM} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0$ ainsi que par trois rotations (α, β, γ) telles que :

- α paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport à \mathcal{B}_0 autour de l'axe \vec{x}_0 ;

- β paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ par rapport à \mathcal{B}_1 autour de l'axe \vec{y}_1 ;
- θ paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ par rapport à \mathcal{B}_2 autour de l'axe \vec{z}_2 .

Si le rotor présente 6 degrés de liberté, il est bien évident qu'excepté la rotation propre principale θ , ces mouvements sont très petits.

En notant $\varepsilon(x)$ une fonction telle que $|\varepsilon(x)| \ll |x|$, on peut écrire :
$$\begin{cases} x, y, z \simeq \varepsilon(L) \\ \alpha, \beta \simeq \varepsilon(1) \end{cases}$$

On suppose que la vitesse de rotation du rotor est constante : $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$.

Efforts des paliers et du moteur sur le rotor

Pour le dimensionnement dynamique, on modélise les actions des trois paliers magnétiques et l'action du moteur électrique sous la forme :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3A)\} &= \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_A, \quad \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3B)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_B \vec{x}_0 + Y_B \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_B, \quad \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3C)\} = \left\{ \begin{array}{c} Z_C \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_C, \\ \{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow 3)\} &= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ C_m \vec{z}_0 \end{array} \right\}_G. \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 = -k \left[\overline{A_0 A} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} - c \left[\overline{V(A \in 3/0)} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \\ X_B \vec{x}_0 + Y_B \vec{y}_0 = -k \left[\overline{B_0 B} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} - c \left[\overline{V(B \in 3/0)} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \\ Z_C = -k \overline{C_0 C} \vec{z}_0 - c \overline{V(C \in 3/0)} \cdot \vec{z}_0 \end{cases}$$

et $k = 50 \times 10^4 \text{ Nm}^{-1}$ et $c = 970 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$. La notation $\left[\overline{V} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}$ désigne la projection dans le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) du vecteur \vec{V} . Les actions de la pesanteur sont négligées. Le bâti est supposé être un référentiel galiléen.

Le rotor, tel que $L = 50 \text{ mm}$, a pour masse $m = 10 \text{ kg}$, pour centre de gravité G tel que $\overrightarrow{MG} = r_0 \vec{y}_3$ où $r_0 = 0,05 \text{ mm}$, et pour matrice d'inertie en G : $I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{B_3}$ où $A = 0,08 \text{ kgm}^2$, $C = 0,04 \text{ kgm}^2$ et $D = 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

On admet que $r_0 \simeq \varepsilon(L)$ et $D \simeq \varepsilon(A) \simeq \varepsilon(C)$.

Objectif Proposer un modèle de comportement dynamique du rotor en phase de rotation.

Question 1 Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au rotor et l'exprimer sous forme torsorielle.

Les questions suivantes visent à déterminer le système d'équations issu de cette équation torsorielle.

Question 2 Montrer que, dans le cadre des hypothèses formulées, l'expression au premier ordre de la vitesse du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti s'écrit : $\vec{V}(G \in 3/0) = \dot{x} \vec{x}_0 + \dot{y} \vec{y}_0 + \dot{z} \vec{z}_0 - r_0 \omega \vec{x}_3$.

Question 3 Déterminer, dans le cadre des hypothèses formulées, l'expression au premier ordre de l'accélération du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti 0 : $\vec{\Gamma}(G \in 3/0)$.

On admet que par changement de base, la matrice $I_{G,3}$ s'écrit dans la base B_2 : $I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & D \sin \theta \\ 0 & A & -D \cos \theta \\ D \sin \theta & -D \cos \theta & C \end{pmatrix}_{B_2}$.

Question 4 Montrer que, dans le cadre des hypothèses formulées, l'expression au premier ordre du moment cinétique en G du rotor par rapport au bâti s'écrit : $\vec{\sigma}(G, 3/0) = \begin{pmatrix} A\dot{\alpha} + D\omega \sin \theta \\ A\dot{\beta} - D\omega \cos \theta \\ C\omega \end{pmatrix}_{B_2}$.

Question 5 Déterminer, dans le cadre des hypothèses formulées, l'expression au premier ordre du moment dynamique en G du rotor par rapport au bâti 0 : $\vec{\delta}(G, 3/0)$, dans la base B_2 .

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au rotor 3, réduit en G , conduit alors à :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = -mr_0\omega^2 \sin \theta \\ m\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = mr_0\omega^2 \cos \theta \\ A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + 2cL\dot{\alpha} + 2kL\alpha = -D\omega^2 \cos \theta \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} + 2cL\dot{\beta} + 2kL\beta = -D\omega^2 \sin \theta \\ C_m = 0 \end{cases}$$

Question 6

Question 7

Activation 4 – Corrigé

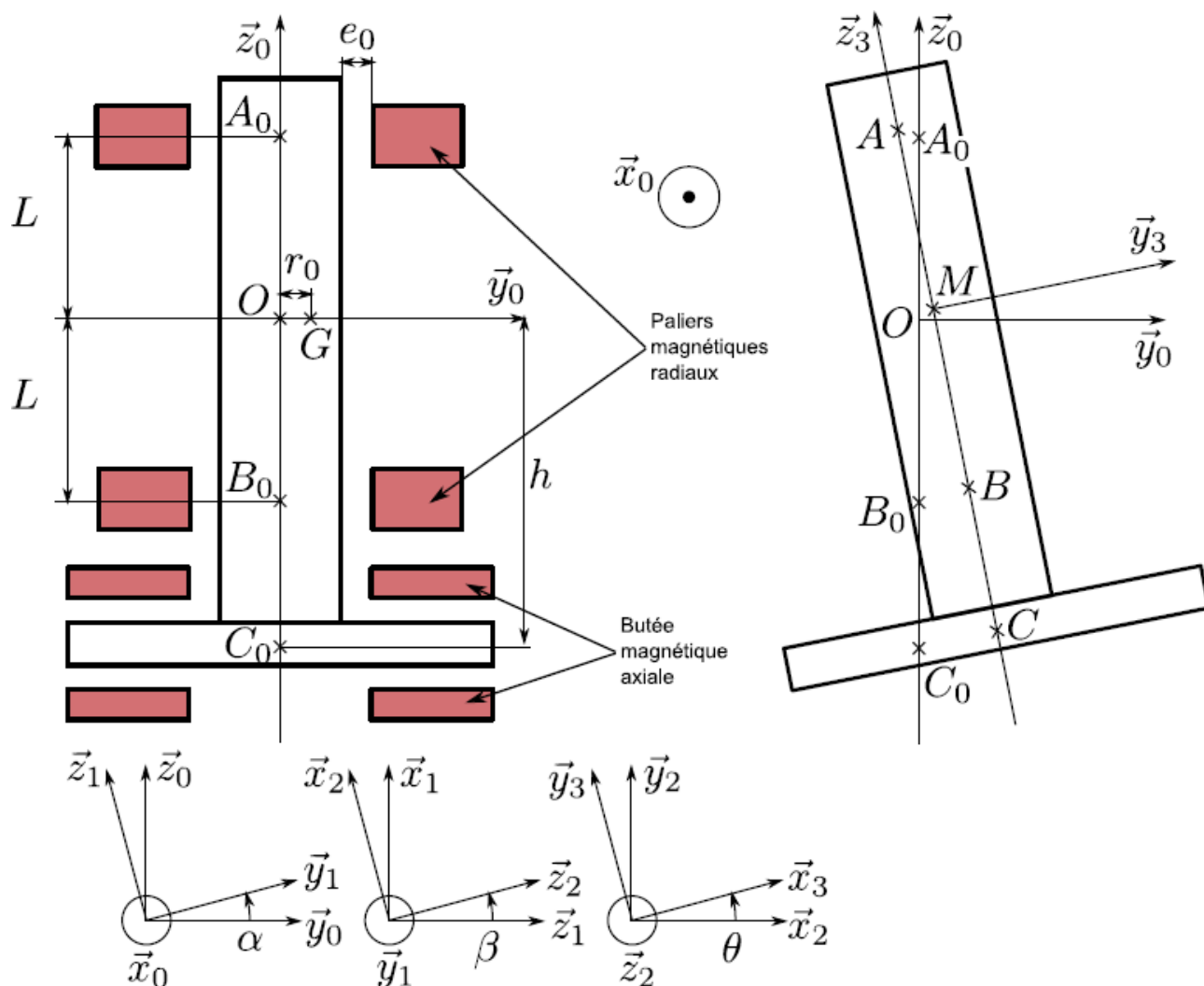
Pompe turbo-moléculaire

Centrale Supelec PSI 2009

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Le comportement dynamique du rotor est étudié sur un modèle à 6 degrés de liberté : le rotor n'étant en contact avec aucun solide, il dispose des 6 mouvements de corps rigide. On suppose le rotor indéformable. La figure suivante montre à gauche le rotor dans sa position nominale ($\alpha = \beta = \theta = x = y = z = 0$) et à droite le rotor dans une position quelconque. On note A_0 et B_0 les centres des paliers magnétiques radiaux et A et B les points appartenant à l'arbre et confondus avec et dans la position nominale.



On note O le milieu de $[A_0 B_0]$ et M le milieu de $[AB]$. Bien qu'un soin très important soit apporté à la fabrication du rotor, il est impossible d'annuler totalement les défauts d'équilibrage. Le centre de gravité n'est donc pas exactement situé sur l'axe (AB) , mais à une distance de celui-ci telle que $\vec{MG} = r_0 \vec{y}_3$.

De même, la matrice d'inertie $I_{G,3}$ n'est pas parfaitement diagonale et présente un produit d'inertie D non nul. On admet toutefois que $r \ll L$ et $D \ll (A, B, C)$, où A, B, C sont les moments d'inertie. Le mouvement du rotor,

auquel on associe le repère 3, par rapport au bâti est paramétré par les trois déplacements (x, y, z) du point M dans le repère $\mathcal{R}_0(0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: $\vec{OM} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0$ ainsi que par trois rotations (α, β, γ) telles que :

- α paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport à \mathcal{B}_0 autour de l'axe \vec{x}_0 ;
- β paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ par rapport à \mathcal{B}_1 autour de l'axe \vec{y}_1 ;
- θ paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$ par rapport à \mathcal{B}_2 autour de l'axe \vec{z}_2 .

Si le rotor présente 6 degrés de liberté, il est bien évident qu'excepté la rotation propre principale θ , ces mouvements sont très petits.

En notant $\varepsilon(x)$ une fonction telle que $|\varepsilon(x)| \ll |x|$, on peut écrire :
$$\begin{cases} x, y, z \simeq \varepsilon(L) \\ \alpha, \beta \simeq \varepsilon(1) \end{cases}.$$

On suppose que la vitesse de rotation du rotor est constante : $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$.

Efforts des paliers et du moteur sur le rotor

Pour le dimensionnement dynamique, on modélise les actions des trois paliers magnétiques et l'action du moteur électrique sous la forme :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3A)\} = \begin{Bmatrix} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_A, \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3B)\} = \begin{Bmatrix} X_B \vec{x}_0 + Y_B \vec{y}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_B, \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3C)\} = \begin{Bmatrix} Z_C \vec{z}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_C, \{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ C_m \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_G.$$

Avec
$$\begin{cases} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 = -k \left[\overline{A_0 A} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} - c \left[\overline{V(A \in 3/0)} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \\ X_B \vec{x}_0 + Y_B \vec{y}_0 = -k \left[\overline{B_0 B} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} - c \left[\overline{V(B \in 3/0)} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \\ Z_C = -k \overline{C_0 C} \vec{z}_0 - c \overline{V(C \in 3/0)} \cdot \vec{z}_0 \end{cases} \text{ et } k = 50 \times 10^4 \text{ Nm}^{-1} \text{ et } c = 970 \text{ Nm}^{-1} \text{ s. La nota-}$$

tion $\left[\overline{V} \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}$ désigne la projection dans le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) du vecteur \vec{V} . Les actions de la pesanteur sont négligées. Le bâti est supposé être un référentiel galiléen.

Le rotor, tel que $L = 50 \text{ mm}$, a pour masse $m = 10 \text{ kg}$, pour centre de gravité G tel que $\vec{MG} = r_0 \vec{y}_3$ où $r_0 = 0,05 \text{ mm}$, et pour matrice d'inertie en G : $I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{B_3}$ où $A = 0,08 \text{ kgm}^2$, $C = 0,04 \text{ kgm}^2$ et $D = 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

On admet que $r_0 \simeq \varepsilon(L)$ et $D \simeq \varepsilon(A) \simeq \varepsilon(C)$.

Objectif Proposer un modèle de comportement dynamique du rotor en phase de rotation.

Question 1 Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au rotor et l'exprimer sous forme torsorielle.

Correction

Les questions suivantes visent à déterminer le système d'équations issu de cette équation torsorielle.

Question 2 Montrer que, dans le cadre des hypothèses formulées, l'expression au premier ordre de la vitesse du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti s'écrit : $\vec{V}(G \in 3/0) = \dot{x} \vec{x}_0 + \dot{y} \vec{y}_0 + \dot{z} \vec{z}_0 - r_0 \omega \vec{x}_3$.

Correction

Question 3 Déterminer, dans le cadre des hypothèses formulées, l'expression au premier ordre de l'accélération du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti 0 : $\vec{\Gamma}(G \in 3/0)$.

Correction

On admet que par changement de base, la matrice $I_{G,3}$ s'écrit dans la base B_2 : $I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & D \sin \theta \\ 0 & A & -D \cos \theta \\ D \sin \theta & -D \cos \theta & C \end{pmatrix}_{B_2}.$

Question 4 Montrer que, dans le cadre des hypothèses formulées, l'expression au premier ordre du moment cinétique en G du rotor par rapport au bâti s'écrit : $\vec{\sigma}(G, 3/0) = \begin{pmatrix} A\dot{\alpha} + D\omega \sin \theta \\ A\dot{\beta} - D\omega \cos \theta \\ C\omega \end{pmatrix}_{B_2}.$

Correction

Question 5 Déterminer, dans le cadre des hypothèses formulées, l'expression au premier ordre du moment dynamique en G du rotor par rapport au bâti $0 : \overrightarrow{\delta}(G, 3/0)$, dans la base B_2 .

Correction

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au rotor 3, réduit en G , conduit alors à :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = -mr_0\omega^2 \sin \theta \\ m\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = mr_0\omega^2 \cos \theta \\ A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + 2cL\dot{\alpha} + 2kL\alpha = -D\omega^2 \cos \theta \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} + 2cL\dot{\beta} + 2kL\beta = -D\omega^2 \sin \theta \\ C_m = 0 \end{cases} .$$

Question 6

Correction

Question 7

Correction