

# D<sup>2</sup>C Drone Didactique Contrôlé

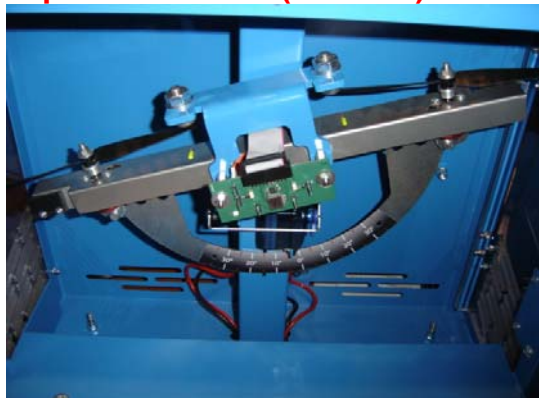
## TP : CPGE

### Etude dynamique du tangage du drone didactique D2C Avec le corrigé

Système réel :  
dynamique de tangage

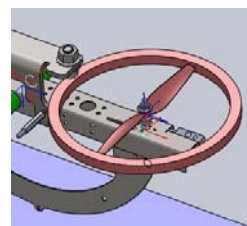


Système D2C : analyses et  
expérimentations (→écarts)

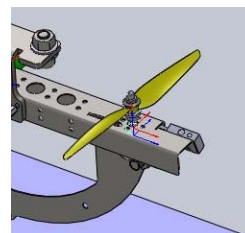


Conclusions  
pratiques

Conclusions  
théoriques



Simulations  
logicielles



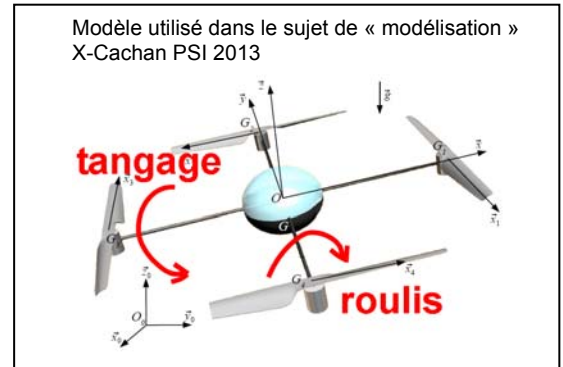
Le logiciel de simulation Solidworks-Méca3 est utilisé dans la deuxième partie de ce TP ;  
Les enregistrements proposés au format .avi peuvent pallier l'absence de celui-ci.

**Prérequis :**

- Principe fondamental de la dynamique des systèmes de solides ;
- Cinétique : calcul de moment cinétique et moment dynamique ;

**Problématiques :**

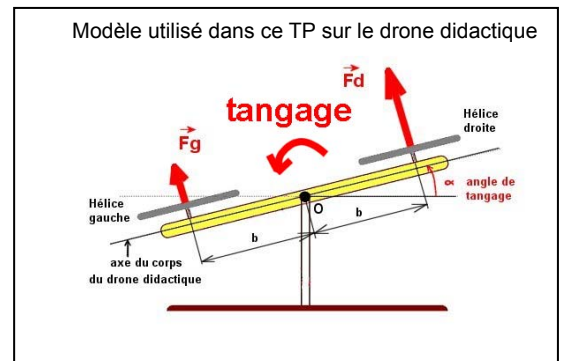
On montre que l'étude complète du comportement d'un drone quadrirotor dans l'espace à trois dimensions peut être séparée (moyennant des démarches de linéarisation à l'ordre 1) en quatre études indépendantes décomposées en différents « sous-systèmes » d'équations (démarche traitée dans le sujet de modélisation du concours X-Cachan PSI 2013, question 20).



- La première partie de ce TP porte sur le sous-système qui conduit au déplacement latéral du drone, dont on peut extraire l'équation « de tangage ».

On se propose :

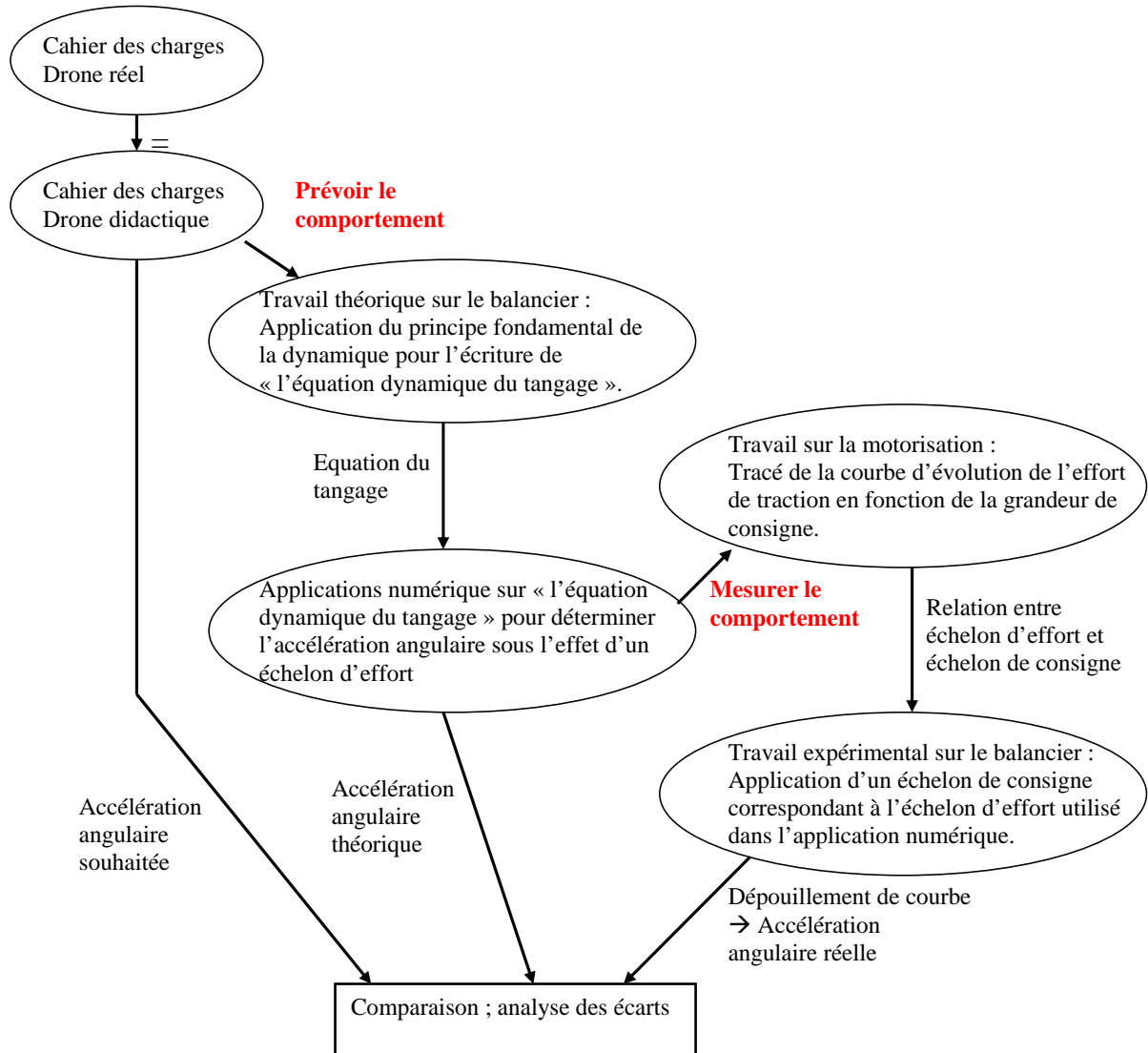
- de mettre en place cette « équation de tangage » pour la structure du drone didactique D2C,
- de vérifier expérimentalement sa validité
- de vérifier que le système peut atteindre les performances attendues.



- La deuxième partie du TP porte sur l'analyse du phénomène de couple gyroscopique ; on se propose de vérifier par la simulation logicielle, que ce phénomène peut effectivement être négligé, conformément aux démarches qui utilisent la linéarisation à l'ordre 1 dans une étude complète.

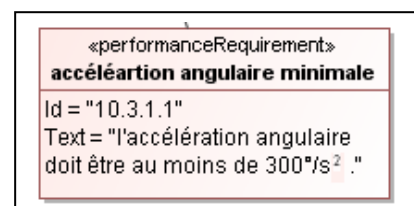
**Première partie : Etude du mouvement de tangage du drone didactique**

**Démarche d'étude :**



On fait l'hypothèse que le drone didactique a les mêmes caractéristiques inertielles autour de l'axe de tangage que le drone réel, et que la motorisation est identique.

La maniabilité du drone nécessite que la vitesse de  $30^\circ/\text{s}$  soit atteinte en moins de 1 dixième de seconde ; L'exigence du cahier des charges à vérifier est traduite dans l'extrait de diagramme d'exigence ci-contre :



### 1-1 : mise en place de l'équation dynamique du tangage

Données :

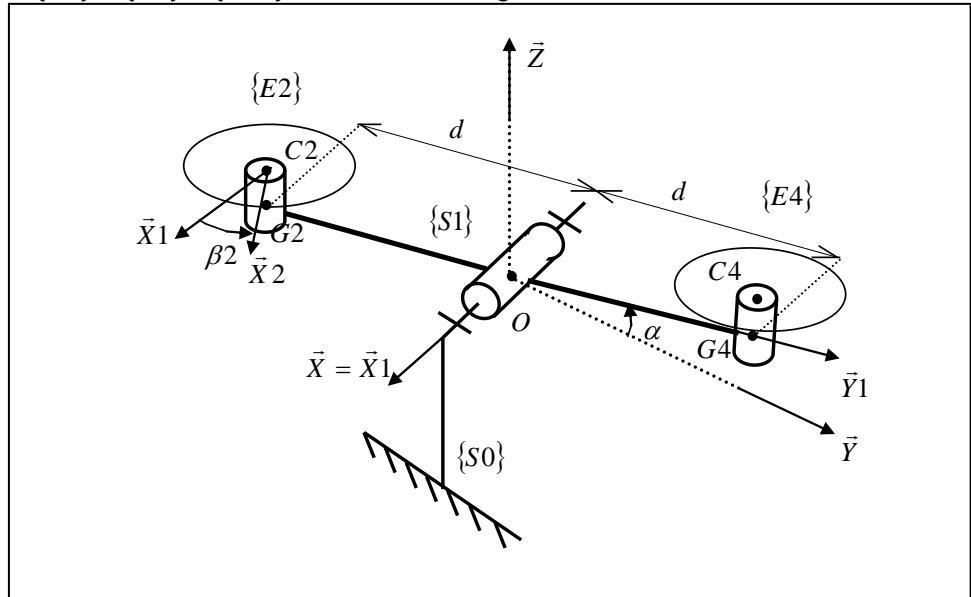
Le schéma paramétré du dispositif est fourni ci-dessous.

On distinguera les différents ensemble  $\{E2\} = \{ \text{hélice 2} + \text{rotor moteur 2} \}$ ,  $\{E4\} = \{ \text{hélice 4} + \text{rotor moteur 4} \}$  dont les caractéristiques inertielles sont identiques à celles de  $\{E2\}$ , et la structure  $\{S1\} = \{ \text{bras} + \text{stator moteur 2} + \text{stator moteur 4} \}$  qui comprend le bras reliant les deux moteurs et les stators de chaque moteur ;  $\{S1\}$  est en liaison pivot d'axe  $O\vec{x}$  par rapport au support fixe  $\{S0\}$  ; les frottements de cette liaison sont supposés négligeables ; O est le centre de gravité de  $\{S1\}$ . On appelle « balancier » l'ensemble  $\{B\} = \{E2\} + \{E4\} + \{S1\}$  ; son centre de gravité est O.

On note

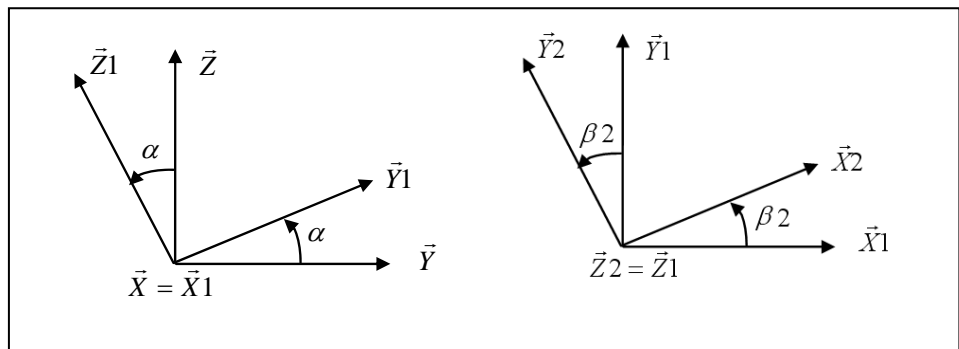
$$R_0 = (0, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$$

Le repère fixe galiléen de référence, lié au support fixe  $\{S0\}$ .



Les différentes bases et les paramètres angulaires sont récapitulés figure ci-contre :

$\beta_2$  est le paramètre angulaire qui caractérise la position angulaire de  $\{E2\}$ , de même que  $\beta_4$  pour  $\{E4\}$ .



la masse de l'ensemble  $\{E2\} = \{ \text{hélice 2} + \text{rotor moteur 2} \}$  est notée :  $m$  ; le centre de masse de l'ensemble est  $G_2$  situé sur l'axe  $C_2\vec{Z}_1$

On utilisera pour la matrice d'inertie de l'ensemble  $\{E2\}$  suivante :

$$I_{G_2(E2)} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{au point } G_2, \text{ exprimée dans la base } (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1).$$

On donne :  $\vec{OG}_2 = -d \cdot \vec{Y}_1$  avec  $d = 0,14 \text{ m}$

On utilisera la désignation  $IS1$  pour le moment d'inertie  $IS1$  de la structure  $\{S1\}$  par rapport à l'axe  $O\vec{x}$ .

**Travail 1** : calcul du moment dynamique

→ montrer que l'expression analytique  $\vec{\delta}_{O(B/R_0)}$  du moment dynamique de l'ensemble balancier :  $\{B\}=\{E2\}+\{E4\}+\{S1\}$  dans son mouvement par rapport à  $\{S0\}$  est :

$$\vec{\delta}_{O(B/R_0)} = (2.(I_{xx} + m.d^2) + IS1).\ddot{\alpha}.\vec{x}_1 - I_{zz}.\dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_4.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + I_{zz}.\ddot{\beta}_2 + \ddot{\beta}_4.\vec{z}_1$$

Nota : on pourra procéder aux calculs successifs suivants :

- expression analytique au point O, du moment cinétique  $\vec{\sigma}_{O(E2/R_0)}$  de  $\{E2\}$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- expression analytique au point O, du moment dynamique  $\vec{\delta}_{O(E2/R_0)}$  de  $\{E2\}$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- expression analytique au point O, du moment dynamique  $\vec{\delta}_{O(E4/R_0)}$  de  $\{E4\}$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ; déduite du résultat précédent.
- expression analytique au point O, du moment dynamique  $\vec{\delta}_{O(S1/R_0)}$ .

**Solution :**

- expression analytique au point O, du moment cinétique  $\vec{\sigma}_{O(E2/R_0)}$  de  $\{E2\}$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{O(E2/R_0)} &= \vec{\sigma}_{G2(E2/R_0)} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m \overrightarrow{V_{G2,E2/R_0}} \\ &= \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} + (-d \cdot \vec{y}_1) \wedge m (-d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1) \\ &= (I_{xx} + m.d^2).\dot{\alpha}.\vec{x}_1 + I_{zz}.\dot{\beta}_2.\vec{z}_1\end{aligned}$$

- expression analytique au point O, du moment dynamique  $\vec{\delta}_{O(E2/R_0)}$  de  $\{E2\}$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{O(E2/R_0)} &= \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{O(E2/R_0)}) \quad (\text{pas de terme complémentaire car O est un point fixe}). \\ &= (I_{xx} + m.d^2).\ddot{\alpha}.\vec{x}_1 - I_{zz}.\dot{\beta}_2.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + I_{zz}.\ddot{\beta}_2.\vec{z}_1\end{aligned}$$

Nota : autre méthode :  $\vec{\delta}_{O(E2/R_0)} = \vec{\delta}_{G2(E2/R_0)} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m \overrightarrow{a_{G2,E2/R_0}}$

$$\begin{aligned}&= \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{G2(E2/R_0)}) + (-d \cdot \vec{y}_1) \wedge m (d \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{y}_1 - d \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{z}_1) \\ &= (I_{xx}.\ddot{\alpha}.\vec{x}_1 - I_{zz}.\dot{\beta}_2.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + I_{zz}.\ddot{\beta}_2.\vec{z}_1) + m.d^2.\ddot{\alpha}.\vec{x}_1\end{aligned}$$

- expression analytique au point O, du moment dynamique  $\vec{\delta}_{O(E4/R_0)}$  de  $\{E4\}$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  :

La seule modification à effectuer pour ce calcul est de remplacer l'expression de

$\vec{OG}_2 = -d \cdot \vec{Y}_1$  par  $\vec{OG}_4 = +d \cdot \vec{Y}_1$  ; et  $\beta_2$  par  $\beta_4$  ; alors :

$$\vec{\delta}_{O(E4/R_0)} = (I_{xx} + m.d^2) \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 - I_{zz} \cdot \dot{\beta}_4 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + I_{zz} \cdot \ddot{\beta}_4 \cdot \vec{z}_1$$

- expression analytique du moment dynamique  $\vec{\delta}_{O(S1/R_0)}$ .

{ S1 } est un solide en rotation autour de l'axe  $O\vec{x}_1$  fixe ; donc :  $\vec{\delta}_{O(S1/R_0)} = IS1 \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{x}_1$

- En sommant toutes les valeurs, on obtient bien l'expression demandée :

$$\vec{\delta}_{O(B/R_0)} = (2 \cdot (I_{xx} + m.d^2) + IS1) \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 - I_{zz} \cdot (\dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_4) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + I_{zz} \cdot (\ddot{\beta}_2 + \ddot{\beta}_4) \cdot \vec{z}_1$$

**Travail 2** : application du principe fondamental de la dynamique

On exprime les résultantes des actions exercées par l'air sur les hélices H2 et H4, aux points respectifs C2 et C4, du fait de leur rotation, par :  $\vec{F}2 = F2 \cdot \vec{z}_1$  et  $\vec{F}4 = F4 \cdot \vec{z}_1$ .

→ Montrer en précisant le choix d'isolement et l'équation utilisée, que l'expression analytique de l'accélération angulaire  $\ddot{\alpha}$  en fonction de F2, F4, des éléments inertiels et des distances est :

$$\ddot{\alpha} = \frac{d \cdot (F4 - F2)}{2 \cdot (I_{xx} + m.d^2) + IS1}$$

**Solution :**

On isole l'ensemble {B} = {E2} + {E4} + { S1 } ; Les actions mécaniques appliquées sont :

- les actions exercées par l'air sur les hélices ;
  - l'action de la pesanteur (de moment nul car CDG en O) ;
  - l'action du support { S0 } sur { S1 } (de moment nul car liaison 0/1 supposée sans frottement) ;
- on utilise l'équation des moments du principe fondamental de la dynamique, en projection sur l'axe

$$\vec{x}_1 : \Sigma(M_{0,ext \rightarrow \{B\}} \cdot \vec{x}_1) = \vec{\delta}_{O(B/R_0)} \cdot \vec{x}_1$$

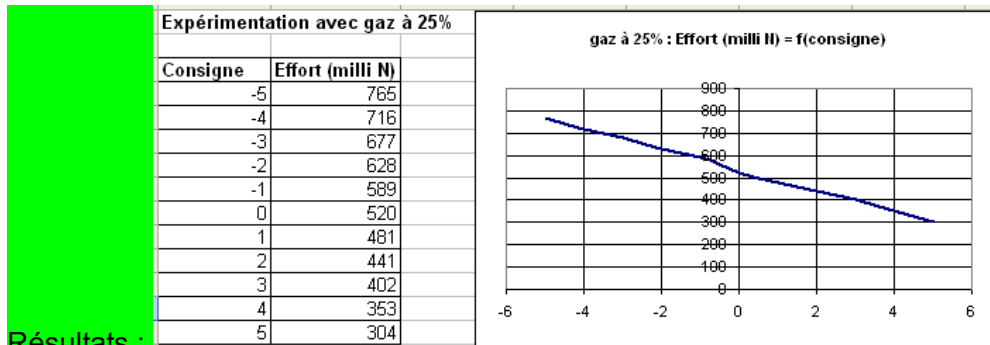
$$\rightarrow d \cdot F4 - d \cdot F2 = (2 \cdot (I_{xx} + m.d^2) + IS1) \cdot \ddot{\alpha}$$

$$\text{d'où : } \ddot{\alpha} = \frac{d \cdot (F4 - F2)}{2 \cdot (I_{xx} + m.d^2) + IS1}$$

### 1-2 : Etude expérimentale du comportement statique de la motorisation

Utiliser le premier paragraphe de la « fiche mesures-dynamiques-tangage.pdf » pour obtenir expérimentalement la courbe d'évolution de l'effort généré par le moteur en fonction de la valeur de « commande tangage » variant de -5 à +5 autour du point de fonctionnement de 25% de la « consigne gaz ».

En déduire la variation d'effort  $\Delta F4$  et  $\Delta F2$  autour du point de fonctionnement  $F4_{25\%} = F2_{25\%}$ , générée par les moteurs droit et gauche pour un échelon de commande de 0 à -5, en boucle ouverte.



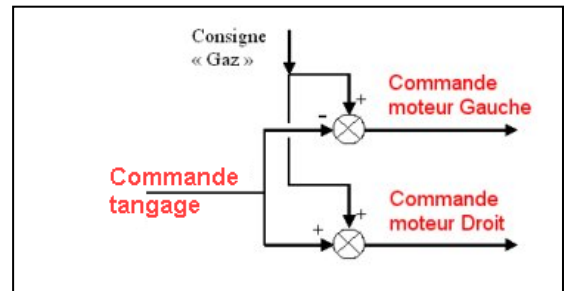
Résultats :

$$\Delta F4 = 0,765 - 0,520 = 0,245 \text{ N} ; \quad \Delta F2 = 0,304 - 0,520 = -0,216 \text{ N.}$$

### 1-3 Calcul de la valeur théorique de l'accélération angulaire

**Donnée 1** : le principe de commande des moteurs du drone en boucle ouverte est donné par la figure ci-contre :

Pour une valeur donnée de « commande tangage », le moteur droit reçoit une commande qui est la « consigne gaz » à laquelle on **ajoute** la « commande tangage » ; le moteur gauche reçoit une commande qui est la « consigne gaz » à laquelle on **soustrait** la « commande tangage » ;



**Donnée 2** : le TP de cinétique sur la mesure du moment d'inertie du balancier permet d'obtenir la valeur du dénominateur de  $\ddot{\alpha}$  :  $2.(I_{xx} + m.d^2) + IS1 = 10^{-2} \text{ kg.m}^2$ .

**Donnée 3** : On fait l'hypothèse simplificatrice que les moteurs sont capables de fournir instantanément la valeur de poussée correspondant à la commande (malgré une constante de temps voisine de 0,2 seconde, observée dans le TP sur la recherche de la fonction de transfert de la motorisation).

→ réaliser l'application numérique pour obtenir la valeur théorique de l'accélération angulaire, sous l'effet d'une commande tangage en échelon de 0 à -5, en boucle ouverte.

Résultat :

$$\ddot{\alpha} = \frac{d.((F4_{25\%} + \Delta F4) - (F2_{25\%} + \Delta F2))}{2.(I_{xx} + m.d^2) + IS1} = \frac{d.(\Delta F4 - \Delta F2)}{2.(I_{xx} + m.d^2) + IS1}$$

$$= 0,14 (0,245 - (-0,216)) / 10^{-2} = 6,454 \text{ rd/s}^2 = 369 \text{ }^\circ/\text{s}^2$$

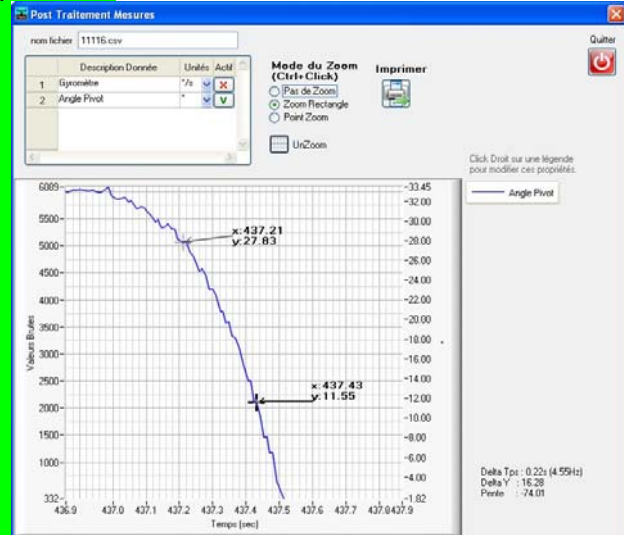
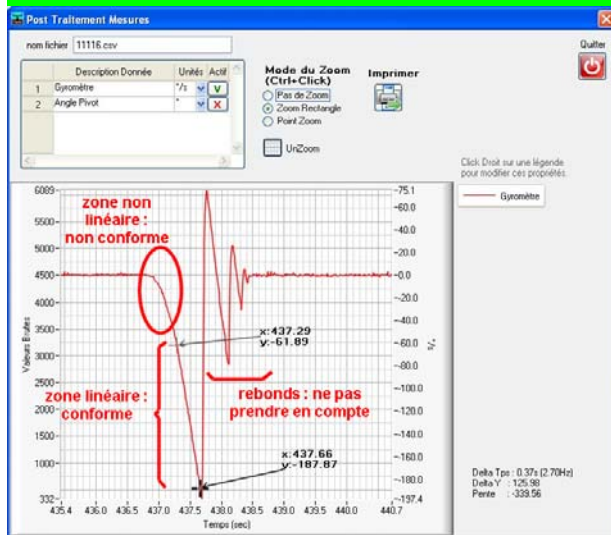


#### 1-4 Mesure de l'accélération angulaire du balancier sous l'effet d'une commande de tangage

Utiliser le deuxième paragraphe de la « fiche mesures-dynamiques-tangage.pdf » pour obtenir expérimentalement la courbe d'évolution de la vitesse angulaire et de la position angulaire du balancier du drone didactique en fonction du temps.

Résultat : vitesse

et position :



→ Commenter les résultats en indiquant quels sont les écarts entre les tracés obtenus et les tracés attendus ; proposer une origine à ces écarts.

Sur la courbe de vitesse, on distingue une zone non linéaire au départ du mouvement ; ceci n'est pas conforme au comportement attendu car l'accélération théorique est constante.

L'écart est dû au fait que l'on a supposé une génération instantanée de la poussée par les moteurs, qui n'est pas la réalité ; on vérifie qu'après 0,6 secondes (temps de réponse à 5% des moteurs), la courbe d'accélération redevient conforme.

→ Exploiter la portion du graphe qui correspond aux résultats attendus pour déduire la valeur de l'accélération angulaire mesurée.

Comparer à la valeur théorique et proposer une explication aux éventuels écarts constatés.

Dans la zone de vitesse linéaire, on mesure une accélération de  $339,56 \text{ } ^\circ/\text{s}^2$ .

Cette valeur est relativement proche de celle ( $369 \text{ } ^\circ/\text{s}^2$ ) mesurée ;

Les écarts peuvent provenir :

- des frottements dans la liaison pivot du balancier ;
- des tourbillons d'air générés par le moteur gauche sur le moteur droit et inversement, qui peuvent modifier la réaction des hélices, par rapport à l'expérimentation statique effectuée pour obtenir les efforts.

Comparer le résultat d'expérimentation avec l'exigence du cahier des charges ; conclure.

Le cahier des charges impose une valeur de  $300^\circ/\text{s}^2$  ; l'expérimentation montre que cette accélération, est atteinte, mais seulement lorsque la vitesse angulaire dépasse  $60^\circ/\text{s}$ .

Pour savoir si cette accélération peut être atteinte plus tôt, il faudrait faire des expérimentations (ou des démarches analytiques) avec des échelons de consigne de valeur plus importante que 5 incréments. Néanmoins le temps de réponse à 5 % de la motorisation qui est de 0,2 s limite l'accélération et il est vraisemblable que l'objectif d'une vitesse de  $30^\circ/\text{s}$  atteinte en moins de 1 dixième de seconde ne puisse être atteint.



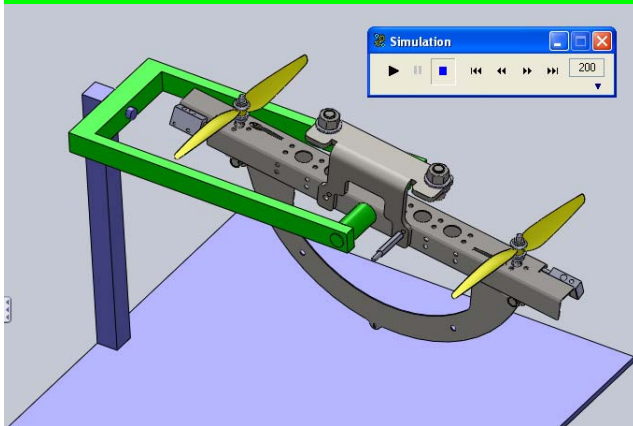
## Deuxième partie : Etude du phénomène de couple gyroscopique

### 2-1 simulation logicielle pour la mise en évidence du phénomène

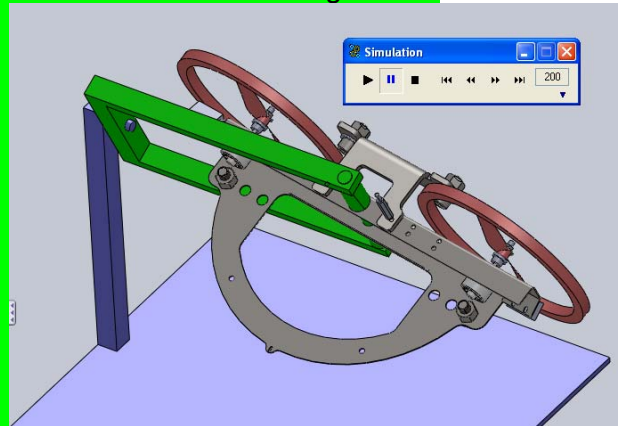
- Travail 1 : Utiliser le document « Fiche\_simulation-Meca3D-couple-gyroscopique.pdf » pour visualiser en simulation l'effet du couple gyroscopique sur le drone didactique, dans les deux cas suivants :
- 1- utilisation des hélices à inertie augmentée ;
  - 2- utilisation des hélices normales.

#### Résultats :

Position en fin de mouvement  
avec hélices normales

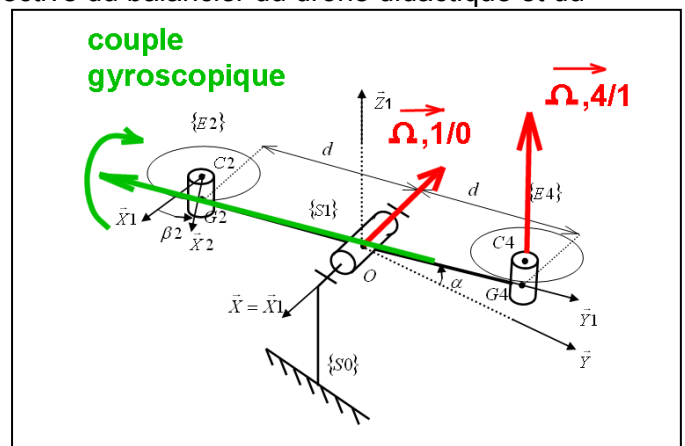


avec hélices à inertie augmentée



- Travail 2 : Tracer un schéma cinématique en perspective du balancier du drone didactique et du moteur droit, avec les deux liaisons pivot châssis/balancier et balancier/rotor ; y placer les trois vecteurs caractéristiques du phénomène dans le cas du mouvement de tangage :

- le vecteur rotation de l'hélice par rapport au balancier du drone didactique ;
- le vecteur rotation imposée du balancier par rapport au repère terrestre ;
- le vecteur couple gyroscopique qui résulte des observations réalisées en simulation sur la maquette numérique du drone didactique.



### 2-2 Quantification du phénomène

- Identifier dans l'expression du moment dynamique  $\bar{\delta}_{O(B/R_0)}$  utilisée au travail 1, la contribution au phénomène de couple gyroscopique.

$$\bar{\delta}_{O(B/R_0)} = (2.(I_{xx} + m.d^2) + IS_1).\ddot{\alpha} \vec{x}_1 - I_{zz}(\ddot{\beta}_2 + \ddot{\beta}_4).\dot{\alpha} \vec{y}_1 + I_{zz}(\ddot{\beta}_2 + \ddot{\beta}_4).\vec{z}_1$$

- calculer numériquement la valeur de cette contribution pour la position, où le balancier passe à l'horizontale, dans des conditions voisines de l'expérimentation réalisée en première partie du TP :

- vitesse des moteurs 2500 tr/min ;
- vitesse de rotation du balancier 23 tr/min ;
- Inertie Izz : cas hélice normale : (rotor moteur + hélice)

Moments d'inertie: ( grammes * millimètres carrés ) Pris au système de coordonnées de sortie.		
Ixx = 85127.41	Ixy = -108.37	Ixz = 0.00
Iyx = -108.37	Iyy = 86103.00	Iyz = -0.00
Izx = 0.00	Izy = -0.00	<b>Izz = 4224.57</b>

$$I_{zz} \cdot (\dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_4) \cdot \dot{\alpha} = 4224 \cdot 10^{-9} \cdot (5000) \cdot (2 \cdot \pi / 60) \cdot 23 \cdot (2 \cdot \pi / 60)$$

$$= 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ N.m environ}$$

→ Comparer cette contribution à la valeur des moments générés par les forces de poussée des moteurs autour de l'axe de tangage lors de l'expérimentation de la première partie.

Le moment généré par les moteurs autour de l'axe y était :

$$d \cdot (\Delta F_4 - \Delta F_2) = 0,14 \cdot (0,245 - (-0,216)) = 6,45 \cdot 10^{-2} \text{ N.m}$$

Conclure en analysant la difficulté de pilotage du drone réel, induite par le couple gyroscopique.

Le couple gyroscopique est 12 fois plus faible que le couple généré en tangage par les forces de poussée des moteurs → ce couple gyroscopique peut être négligé dans le cas d'utilisation d'hélices de faible inertie ; on peut conclure que le pilote du drone ne devrait pas avoir besoin d'actionner la commande de roulis lorsqu'il agit sur la commande de tangage.