Activation 1

Activation 1

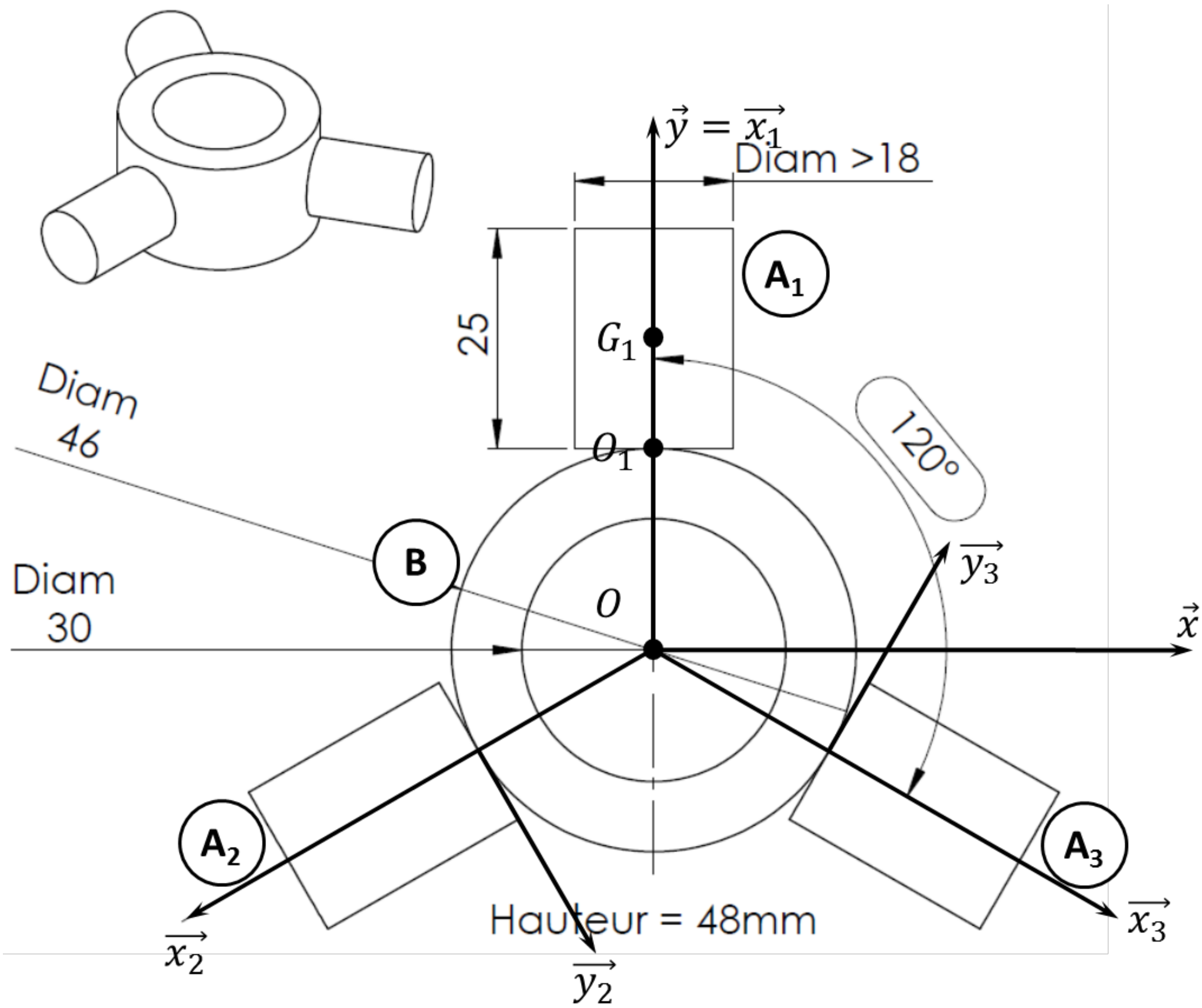
X. Pessoles

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- *Mod2.C15 : matrice d'inertie*

Triaxe

On donne le plan d'un triaxe constitué des 3 axes A_1, A_2, A_3 et du moyeu central noté M. On note T l'ensemble.



On note $\vec{z}$ l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On se place ci-dessus dans le plan de symétrie $\left(O, \vec{x}, \vec{y}\right)$.

TOUS LES CALCULS SE FERONT DE MANIÈRE LITTEREALE !

- $D_1 = 18\,\text{mm}$ et $H_1 = 25\,\text{mm}$.
- $D = 46\,\text{mm}$, $D' = 30\,\text{mm}$ et $H = 48\,\text{mm}$.
- $\alpha_1 = \left(\vec{x}, \overrightarrow{x_1}\right) = 90°$, $\alpha_2 = \left(\vec{x}, \overrightarrow{x_2}\right) = -150°$ et $\alpha_3 = \left(\vec{x}, \overrightarrow{x_3}\right) = -30°$.

Question 1 *Déterminer (sans calcul) la position du centre de gravité du triaxe.*

Correction

Le plan $\left(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)$ est plan de symétrie du triaxe; donc $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{z}=0$
Le plan $\left(O,\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ est plan de symétrie du triaxe; donc $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{x}=0$
Reste la coordonnée selon $\overrightarrow{y}$.
Les plans $\left(O,\overrightarrow{z},\overrightarrow{x_2}\right)$ et $\left(O,\overrightarrow{z},\overrightarrow{x_3}\right)$ étant plans de symétrie, on a $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{y_2}=0$ et $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{y_3}=0$. Or $\overrightarrow{OG}=y_g\overrightarrow{y}=y_g\cos\alpha_2\overrightarrow{y_2}-y_g\sin\alpha_2\overrightarrow{x_2}$. Il en résulte que $y_g\cos\alpha_2=0$ et donc nécessairement $y_g=0$ car $\alpha_2\neq 0$.

Question 2 *Déterminer analytiquement la position du centre de gravité G_1 du solide A_1 dans le repère $\mathcal{R}_1\left(O_1;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$.*

Correction On pourrait répondre directement en disant que le solide à 3 plans de symétrie orthogonaux entre eux. En utilisant la définition on a :

- $M_1=\mu H_1\pi\dfrac{D_1^2}{4}$;
- en coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{O_1P}=x\overrightarrow{x_1}+\rho\cos\theta\overrightarrow{y_1}+\rho\sin\theta\overrightarrow{z_1}$ et $\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$ avec $x\in[0,H_1]$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,D_1/2]$;
- $m_1x_{G_1}=\mu\iiint x_P\,dV=\mu\iiint x\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=\mu\dfrac{H_1^2}{2}2\pi\dfrac{D_1^2}{8}$;
- $m_1y_{G_1}=\mu\iiint y_P\,dV=\mu\iiint\rho\cos\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=0$;
- $m_1z_{G_1}=\mu\iiint z_P\,dV=\mu\iiint\rho\sin\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=0$.

Au final, $\mu H_1\pi\dfrac{D_1^2}{4}x_{G_1}=\mu\dfrac{H_1^2}{2}2\pi\dfrac{D_1^2}{8}\Leftrightarrow x_{G_1}=\dfrac{H_1}{2}$.

Question 3 *Déterminer (sans calcul) la* ***forme*** *de la matrice d'inertie du triaxe.*

Correction Me plan $\left(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)$ est plan de symétrie du triaxe; donc $E=\iiint xz\mathrm{d}m=0$ et $D=\iiint yz\mathrm{d}m=0$.
Le plan $\left(O,\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ est plan de symétrie du triaxe; donc $E=\iiint xz\mathrm{d}m=0$ et $E=\iiint xy\mathrm{d}m=0$.

La matrice est donc diagonale et de la forme $\begin{pmatrix}A_1&0&0\\0&B_1&0\\0&0&C_1\end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

Question 4 *Déterminer analytiquement la matrice d'inertie du solide A_1 en G_1 dans $\mathcal{R}_1$. On la note $I_{G_1}(A_1)=\begin{pmatrix}A_1&-F_1&-E_1\\-F_1&B_1&-D_1\\-E_1&-D_1&C_1\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ où les constantes seront à déterminer.*

Correction Au vu de la forme du solide, on a : $D_1=E_1=F_1=0$ et $C=B$. D'où $I_{G_1}(A_1)=\begin{pmatrix}A_1&0&0\\0&B_1&0\\0&0&B_1\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$.

Calculons $A_1=\iiint\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}m=\mu\iiint\left(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$
$=\mu\iiint\rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\mu\left[\dfrac{\rho^4}{4}\right]_0^{D_1/2}2\pi H_1=\mu\dfrac{D_1^4}{16\cdot4}2\pi H_1=M_1\dfrac{D_1^2}{8}$.
Calculons $B_1=\iiint\left(x^2+z^2\right)\mathrm{d}m=\mu\iiint\left(x^2+\rho^2\sin^2\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$
$B_x=\mu\iiint x^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x+\mu\iiint\rho^2\sin^2\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=\mu\iiint x^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=\mu\dfrac{H_1^3}{4\cdot3}\dfrac{D_1^2}{8}2\pi=M\dfrac{H_1^2}{12}$
$B_z=\mu\iiint\rho^2\sin^2\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=\mu\iiint\rho^3\dfrac{1-\cos2x}{2}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=\mu\iiint\dfrac{\rho^3}{2}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=\mu\dfrac{D_i^4}{2\cdot16\cdot4}2\pi H_1=M\dfrac{D_i^2}{16}$.
Au final, $A=M_1\dfrac{D_1^2}{8}$ et $B=M\left(\dfrac{H_1^2}{12}+\dfrac{D_1^2}{16}\right)$.

Question 5 *Déterminer $I_{G_1}(A_1)$ dans la base $\mathscr{B}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$ puis $I_O(A_1)$ dans la base $\mathscr{B}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$.*

Correction On a $\overrightarrow{x_1}=\cos\alpha\,\overrightarrow{x}+\sin\alpha\,\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{y_1}=\cos\alpha\,\overrightarrow{y}-\sin\alpha\,\overrightarrow{x}$. En conséquences, on a : $P_{10}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

On a donc $I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}}=P_{10}^{-1}I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}_1}P_{10}$.

$$I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\cos\alpha & -A_1\sin\alpha & 0\\ B_1\sin\alpha & B_1\cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\cos^2\alpha+B_1\sin^2\alpha & -A_1\sin\alpha\cos\alpha+B_1\cos\alpha\sin\alpha & 0\\ -A_1\sin\alpha\cos\alpha+B_1\cos\alpha\sin\alpha & A_1\sin^2\alpha+B_1\cos^2\alpha & 0\\ 0 & 0 &$$

Avec $\alpha=\pi/2$, on a : $I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}}=\begin{pmatrix}B_1 & 0 & 0\\ 0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{OG_1}=\dfrac{H+D}{2}\overrightarrow{y}$; donc : $I_O(A_1)_{\mathscr{R}}=\begin{pmatrix}B_1 & 0 & 0\\ 0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}+M_1\begin{pmatrix}\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$.

Au final, $I_O(A_1)_{\mathscr{R}}=\begin{pmatrix}B_1+M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2 & 0 & 0\\ 0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & B_1+M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$.

Question 6 *Déterminer $I_O(A_2)$ et $I_O(A_3)$ dans la base $\mathscr{B}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$.*

Correction

$$I_{G_2}(A_2)_{\mathscr{R}}=\begin{pmatrix}A_1\cos^2\alpha+B_1\sin^2\alpha & -A_1\sin\alpha\cos\alpha+B_1\cos\alpha\sin\alpha & 0\\ -A_1\sin\alpha\cos\alpha+B_1\cos\alpha\sin\alpha & A_1\sin^2\alpha+B_1\cos^2\alpha & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}.$$

Avec $\alpha=-\pi/6$, on a : $I_{G_2}(A_2)_{\mathscr{R}}=\begin{pmatrix}\dfrac{3A_1+B_1}{4} & (A_1-B_1)\dfrac{\sqrt{3}}{4} & 0\\ (A_1-B_1)\dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{A_1+3B_1}{4} & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{OG_2}=\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\,\overrightarrow{x}+\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\,\overrightarrow{y}$;

donc : $I_O(A_1)_{\mathscr{R}}=\begin{pmatrix}B_1 & 0 & 0\\ 0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}+M_1\begin{pmatrix}\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\dfrac{1}{4} & -\dfrac{(H+D)^2}{4}\dfrac{\sqrt{3}}{4} & 0\\ -\dfrac{(H+D)^2}{4}\dfrac{\sqrt{3}}{4} & \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\dfrac{3}{4} & 0\\ 0 & 0 & \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$.

Question 7 *Déterminer $I_O(M)$ la matrice d'inertie du moyeu M.*

Correction

Question 8 *Déterminer $I_O(T)$ la matrice d'inertie du triaxe T.*

Correction

Cycle 04