

**Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement en utilisant les méthodes énergétiques.**

**Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur**

## Cours

### Chapitre 1

#### Approche énergétique

##### Savoirs et compétences :

- ❑ Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- ❑ Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.
- ❑ Res1.C3.SF1 : Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre.
- ❑ Mod1.C4.SF1 : Associer les grandeurs physiques aux échanges d'énergie et à la transmission de puissance.
- ❑ Mod1.C5.SF1 : Identifier les pertes d'énergie.
- ❑ Mod1.C6.SF1 : Évaluer le rendement d'une chaîne d'énergie en régime permanent.
- ❑ Mod1.C5.SF2 : Déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement rapport à un autre solide.
- ❑ Mod1.C5.SF3 : Déterminer la puissance des actions mécaniques intérieures à un ensemble de solides.

<b>1</b>	<b>Caractéristiques d'inertie des solides</b>	<b>2</b>
1.1	Détermination de la masse d'un solide . . . . .	2
1.2	Centre d'inertie d'un solide . . . . .	2
1.3	Grandeurs inertielles d'un solide . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Cinétique et dynamique du solide indéformable</b>	<b>5</b>
2.1	Le torseur cinétique . . . . .	5
2.2	Le torseur dynamique . . . . .	5
2.3	Énergie cinétique . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Principe fondamental de la dynamique</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Théorème de l'énergie puissance</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Méthodologie</b>	<b>5</b>

## 1 Caractéristiques d'inertie des solides

L'inertie d'un solide peut se « caractériser » par la résistance ressentie lorsqu'on souhaite mettre un solide en mouvement. Pour un mouvement de translation, la connaissance de la masse permet de déterminer l'effort nécessaire à la mettre en mouvement. Pour un mouvement de rotation, il est nécessaire de connaître la répartition de la masse autour de l'axe de rotation.

### ■ Exemple

- Couple pour faire tourner une hélice bipale, tripale, quadripale.
- Couple pour faire tourner une bille et effort pour faire translater une bille.

### 1.1 Détermination de la masse d'un solide

#### 1.1.1 Définition

##### Définition

On peut définir la masse  $M$  d'un système matériel (solide)  $S$  par :

$$M = \int_S dm = \int_{P \in V} \mu(P) dv$$

avec :

- $\mu(P)$  la masse volumique au point  $P$  ;
- $dv$  un élément volumique de  $S$ .

#### 1.1.2 Principe de conservation de la masse

### 1.2 Centre d'inertie d'un solide

#### 1.2.1 Définition

**Définition — Centre d'inertie d'un solide.** La position du centre d'inertie  $G$  d'un solide  $S$  est définie par

$$\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \overrightarrow{0}.$$

Pour déterminer la position du centre d'inertie d'un solide  $S$ , on passe généralement par l'origine du repère associé à  $S$ . On a alors  $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \int_{P \in S} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) dm = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \int_{P \in S} \overrightarrow{OG} dm = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm \Leftrightarrow M \overrightarrow{OG} = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm$ .

**Méthode** Pour déterminer les coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$  du centre d'inertie  $G$  du solide  $S$  dans la base  $(O; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ , on a donc :

$$\begin{cases} M x_G = \mu \int_{P \in S} x_P dV \\ M y_G = \mu \int_{P \in S} y_P dV \\ M z_G = \mu \int_{P \in S} z_P dV \end{cases}$$

avec :

- $dV$  : un élément volumique de  $S$  ;
- $\mu$  : la masse volumique supposée constante.

Pour simplifier les calculs, on peut noter que le centre d'inertie appartient au(x) éventuel(s) plan(s) de symétrie du solide.

#### 1.2.2 Centre d'inertie d'un solide constitué de plusieurs solides

Soit un solide composé de  $n$  solides élémentaires dont la position des centres d'inertie  $G_i$  et les masses  $M_i$  sont connues. On note  $M = \sum_{i=1}^n M_i$ . La position du centre d'inertie  $G$  de l'ensemble  $S$  est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n M_i \overrightarrow{OG_i}.$$

#### 1.2.3 Théorème de Guldin

##### 1.2.3.1 Centre d'inertie d'une courbe plane

##### 1.2.3.2 Centre d'inertie d'une surface plane

### 1.3 Grandeurs inertielles d'un solide

#### 1.3.1 Moment et produit d'inertie

**Définition — Moment d'inertie par rapport à un point dans  $\mathcal{R}$ .** Soit un repère  $\mathcal{R}(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$  et un point  $P$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $\mathcal{R}$ . On appelle moment d'inertie du solide  $S$  par rapport à un point  $O$  la quantité :

$$I_O(S) = \int_S \overrightarrow{OP}^2 dm = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm.$$

**Définition — Moment d'inertie par rapport à un axe dans  $\mathcal{R}$ .** On appelle moment d'inertie du solide  $S$  par rapport à une droite  $(\Delta)$  la quantité positive :

$$I_{\Delta}(S) = \int_S (\overrightarrow{\delta} \wedge \overrightarrow{AP})^2 dm$$

Par suite, le moment d'inertie du solide  $S$  par rapport à la droite  $(O, \overrightarrow{x})$  est donné par :

$$I_{(O, \overrightarrow{x})}(S) = \int_S (\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{OP})^2 dm.$$

On détermine donc les moments d'inerties par rapport à  $(O, \overrightarrow{x})$ ,  $(O, \overrightarrow{y})$  et  $(O, \overrightarrow{z})$  :

$$I_{(O, \overrightarrow{x})}(S) = \int_S (y^2 + z^2) dm \quad I_{(O, \overrightarrow{y})}(S) = \int_S (x^2 + z^2) dm \quad I_{(O, \overrightarrow{z})}(S) = \int_S (x^2 + y^2) dm.$$

### 1.3.2 Matrice d'inertie

**Définition** Soient :

- un solide  $S$  de masse  $m$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ;
- $\mathcal{R}_S = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$  le repère lié au solide  $S$ ;
- $P$  un point de  $S$  tel que  $\overrightarrow{OP} = x_p \overrightarrow{i} + y_p \overrightarrow{j} + z_p \overrightarrow{k}$ ;
- $\overrightarrow{u}$  un vecteur unitaire du solide  $S$ .

On appelle opérateur d'inertie l'application linéaire définie par :

$$\overrightarrow{u} \rightarrow \overrightarrow{J_{(O,S)}(\overrightarrow{u})} = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OP}) dm$$

On appelle matrice d'inertie du solide  $S$  en  $O$ ,  $I_O(S)$ , l'image de cette application linéaire :  $\overrightarrow{J_{(O,S)}(\overrightarrow{u})} = I_O(S) \overrightarrow{u}$ .

Recherchons la matrice de l'application linéaire. On note  $\overrightarrow{u} = u_x \overrightarrow{i} + u_y \overrightarrow{j} + u_z \overrightarrow{k}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \wedge \left( \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u_y z_p - y_p u_z \\ -u_x z_p + x_p u_z \\ u_x y_p - x_p u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_p (u_x y_p - x_p u_y) - z_p (-u_x z_p + x_p u_z) \\ -x_p (u_x y_p - x_p u_y) + z_p (u_y z_p - y_p u_z) \\ x_p (-u_x z_p + x_p u_z) - y_p (u_y z_p - y_p u_z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_p^2 u_x - y_p x_p u_y + z_p^2 u_x - z_p x_p u_z \\ -x_p y_p u_x + x_p^2 u_y + z_p^2 u_y - z_p y_p u_z \\ -x_p z_p u_x + x_p^2 u_z - y_p z_p u_y + y_p^2 u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_p^2 + z_p^2 & -y_p x_p & -x_p z_p \\ -x_p y_p & x_p^2 + z_p^2 & -z_p y_p \\ -x_p z_p & -y_p z_p & y_p^2 + x_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Définition — Matrice d'inertie.** La matrice d'inertie s'écrit ainsi :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} \int_S (y_p^2 + z_p^2) dm & -\int_S (x_p y_p) dm & -\int_S (x_p z_p) dm \\ -\int_S (x_p y_p) dm & \int_S (x_p^2 + z_p^2) dm & -\int_S (y_p z_p) dm \\ -\int_S (x_p z_p) dm & -\int_S (y_p z_p) dm & \int_S (x_p^2 + y_p^2) dm \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S}.$$

On appelle moments d'inertie par rapport aux axes  $(O, \overrightarrow{i})$ ,  $(O, \overrightarrow{j})$  et  $(O, \overrightarrow{k})$  les termes  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

On appelle produits d'inertie par rapport aux plans  $(O, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ,  $(O, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i})$  et  $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$  les termes  $D$ ,  $E$  et  $F$ .

### 1.3.3 Propriétés des matrices d'inertie

### 1.3.4 Théorème de Huygens

**Théorème — Théorème de Huygens.** Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe  $(A, \vec{\delta})$  est donné par :

$$I_{(A, \vec{\delta})}(S) = I_{(G, \vec{\delta})}(S) + m d^2$$

avec :

- $d$  : distance séparant  $(A, \vec{\delta})$  et  $(G, \vec{\delta})$  en m ;
- $m$  : masse de  $S$  en kg.

**Théorème — Théorème de Huygens.** Soit  $S$  un solide de centre d'inertie  $G$ , de masse  $m$ , d'inertie  $I_G(S)$  et d'inertie  $I_O(S)$  avec  $\vec{OG} = a \vec{x} + b \vec{y} + c \vec{z}$ . Les matrices  $I_G(S)$  et  $I_O(S)$  exprimées dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  sont liées par :

$$\begin{pmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} m(b^2 + c^2) & -mab & -mac \\ -mab & m(a^2 + c^2) & -mbc \\ -mac & -mbc & m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Si le solide est modélisé par une masse ponctuelle  $m$  en  $G$  et si on souhaite connaître le moment d'inertie pour un point situé à une distance  $d$  de  $G$ , on a  $I = m d^2$ .

#### Démonstration

Par définition,  $\overline{J_{(O,S)}(\vec{u})} = \int_S \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) dm$ .

$$\begin{aligned} \text{En introduisant le point } G, \text{ on a } \overline{J_{(O,S)}(\vec{u})} &= \int_S (\vec{OG} + \vec{GP}) \wedge (\vec{u} \wedge (\vec{OG} + \vec{GP})) dm = \int_S (\vec{OG} + \vec{GP}) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG} + \vec{u} \wedge \vec{GP}) dm \\ &= \int_S (\vec{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG}) + \vec{u} \wedge \vec{GP}) + \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG} + \vec{u} \wedge \vec{GP}) dm \\ &= \int_S (\vec{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG}) + \vec{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP})) dm + \int_S (\vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG}) + \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP})) dm \\ &= \int_S (\vec{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG})) dm + \int_S (\vec{OG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP})) dm + \int_S (\vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG})) dm + \int_S (\vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP})) dm \\ &= \overline{J_{(G,S)}(\vec{u})} + \vec{OG} \wedge \left( \vec{u} \wedge \int_S \vec{GP} dm \right) + \int_S (\vec{GP} dm) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OG}) + \left( \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP}) \right) \int_S dm \end{aligned}$$

$G$  étant le centre d'inertie du solide, on a  $\vec{GP} dm = \vec{0}$  (par définition du centre d'inertie).

En conséquences,  $\overline{J_{(O,S)}(\vec{u})} = \overline{J_{(G,S)}(\vec{u})} + \left( \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP}) \right) \int_S dm$

On note  $\vec{GP} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$  et  $M_S = \int_S dm$ .

$$\text{En reprenant le calcul vu en 1.3.2, on a : } \left( \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP}) \right) = \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}.$$

CQFD.

1.3.5 Rotation de la matrice d'inertie

## 2 Cinétique et dynamique du solide indéformable

### 2.1 Le torseur cinétique

#### 2.1.1 Définition

#### 2.1.2 Cas particuliers

### 2.2 Le torseur dynamique

#### 2.2.1 Définition

#### 2.2.2 Cas particuliers

### 2.3 Énergie cinétique

#### 2.3.1 Définition

#### 2.3.2 Cas du solide indéformable

#### 2.3.3 Cas d'un système de solide

#### 2.3.4 Inertie équivalente

## 3 Principe fondamental de la dynamique

## 4 Théorème de l'énergie puissance

## 5 Méthodologie

### Références

[1] Émilien Durif, *Approche énergétique des systèmes*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.