Application

Application – Vilebrequin de moteur

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- ❒ *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- ❒ *Mod2.C15 : matrice d'inertie*

Question 1 *Calculer les masses des différentes pièces : m_1, m_2, m_3 et m_4.*

Correction On a :

- $m_1 = \mu\pi r_1^2 l_1$;
- $m_2 = \mu a b e$
- $m_3 = \mu \dfrac{1}{2}\pi R^2 e$;
- $m_4 = \mu\pi r_3^2 L$.

Question 2 *Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.*

Correction On a :

- $\overrightarrow{OG_1} = h\overrightarrow{y} + \dfrac{l_1}{2}\overrightarrow{z}$;
- $\overrightarrow{OG_2} = \dfrac{b}{2}\overrightarrow{y} - \dfrac{e}{2}\overrightarrow{z}$;
- $\overrightarrow{OG_4} = -\left(e + \dfrac{L}{2}\right)\overrightarrow{z}$.

Le solide 3 a deux plans de symétrie : $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ et $\left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$. On ne cherche donc la composante du centre d'inertie que dans la direction $\overrightarrow{y}$.

$m_3\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} = \int \overrightarrow{OP}\,\overrightarrow{y}\,\mathrm{d}m$ avec $\mathrm{d}m = \mu\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\, e$ (ρ variant de 0 à R et θ variant de $-\pi$ à 0) et

$\overrightarrow{OP} = \rho\left(\cos\theta\,\overrightarrow{x} + \sin\theta\,\overrightarrow{y}\right)$.

On a donc :

$\mu\dfrac{1}{2}\pi R^2 e\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} = \int \rho\left(\cos\theta\,\overrightarrow{x} + \sin\theta\,\overrightarrow{y}\right)\overrightarrow{y}\,\mu e\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\pi R^2\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} = \int \rho^2\sin\theta\,\overrightarrow{y}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\pi R^2\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} = -\dfrac{R^3}{3}\left[\cos\theta\right]_{-\pi}^{0}\overrightarrow{y}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\pi\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} = -2\dfrac{R}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} = -4\dfrac{R}{3\pi}\overrightarrow{y}$

Au final : $\overrightarrow{OG_3} = -\dfrac{4R}{3\pi}\overrightarrow{y} - \dfrac{e}{2}\overrightarrow{z}$

Question 3 *Déterminer la valeur de R afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.*

Correction On a $(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{y} = 0$

$\Leftrightarrow m_1\overrightarrow{OG_1}\cdot\overrightarrow{y} + m_2\overrightarrow{OG_2}\cdot\overrightarrow{y} + m_3\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} + m_4\overrightarrow{OG_4}\cdot\overrightarrow{y} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\mu\pi r_1^2 l_1\right)h + (\mu a b e)\dfrac{b}{2} - \left(\mu\dfrac{1}{2}\pi R^2 e\right)\dfrac{4R}{3\pi} + \left(\mu\pi r_3^2 L\right)\cdot 0 = 0$

$\Leftrightarrow \pi r_1^2 l_1 h + a b e\dfrac{b}{2} - \dfrac{1}{2}R^2 e\dfrac{4R}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \pi r_1^2 l_1 h\dfrac{3}{2} + a b^2 e\dfrac{3}{4} = R^3 e \Leftrightarrow R^3 = \pi r_1^2 l_1 h\dfrac{3}{2e} + a b^2\dfrac{3}{4}$

Question 4 *Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base $\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$.*

Correction

$$I_{G_1}(S_1)=\begin{pmatrix}A_1&0&0\\0&A_1&0\\0&0&C_1\end{pmatrix}_R \quad I_{G_2}(S_2)=\begin{pmatrix}A_2&0&0\\0&B_2&0\\0&0&C_2\end{pmatrix}_R \quad I_{G_3}(S_3)=\begin{pmatrix}A_3&0&0\\0&B_3&0\\0&0&C_3\end{pmatrix}_R \quad I_{G_4}(S_4)=\begin{pmatrix}A_4&0&0\\0&A_4&0\\0&0&C_4\end{pmatrix}_R$$

Question 5 *Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en O dans la base $\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$.*

Correction $\overrightarrow{OG_1}=h\overrightarrow{y}+\dfrac{l_1}{2}\overrightarrow{z}$

$$I_O(S_1)=\begin{pmatrix}A_1&0&0\\0&A_1&0\\0&0&C_1\end{pmatrix}_R+m_1\begin{pmatrix}h^2+\dfrac{l_1^2}{4}&0&0\\0&\dfrac{l_1^2}{4}&-\dfrac{hl_1}{2}\\0&-\dfrac{hl_1}{2}&h^2\end{pmatrix}_R$$

$$\overrightarrow{OG_2}=\frac{b}{2}\overrightarrow{y}-\frac{e}{2}\overrightarrow{z}$$

$$I_O(S_2)=\begin{pmatrix}A_2&0&0\\0&B_2&0\\0&0&C_2\end{pmatrix}_R+m_2\begin{pmatrix}\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{e^2}{4}&0&0\\0&\dfrac{e^2}{4}&-\dfrac{be}{4}\\0&-\dfrac{be}{4}&\dfrac{b^2}{4}\end{pmatrix}_R$$

$$\overrightarrow{OG_3}=-\frac{4R}{3\pi}\overrightarrow{y}-\frac{e}{2}\overrightarrow{z}$$

$$I_O(S_3)=\begin{pmatrix}A_3&0&0\\0&B_3&0\\0&0&C_3\end{pmatrix}_R+m_3\begin{pmatrix}\dfrac{16R^2}{9\pi^2}+\dfrac{e^2}{4}&0&0\\0&\dfrac{e^2}{4}&-\dfrac{4R}{3\pi}\dfrac{e}{2}\\0&-\dfrac{4R}{3\pi}\dfrac{e}{2}&\dfrac{16R^2}{9\pi^2}\end{pmatrix}_R$$

$$\overrightarrow{OG_4}=-\left(e+\frac{L}{2}\right)\overrightarrow{z}.$$

$$I_O(S_4)=\begin{pmatrix}A_4&0&0\\0&A_4&0\\0&0&C_4\end{pmatrix}_R+m_4\begin{pmatrix}\left(e+\dfrac{L}{2}\right)^2&0&0\\0&\left(e+\dfrac{L}{2}\right)^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}_R$$

On a :

$$I_O(S)=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&B&-D\\0&-D&C\end{pmatrix}_R$$

Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

Question 6 *Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe $\overrightarrow{OA}$.*

Correction $\overrightarrow{u}=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{||\overrightarrow{OA}||}=\dfrac{L_1\overrightarrow{z}+h\overrightarrow{y}}{\sqrt{L_1^2+h^2}}$

$$J_\Delta=\begin{pmatrix}0&u_y&u_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0&0\\0&B&-D\\0&-D&C\end{pmatrix}_R\begin{pmatrix}0\\u_y\\u_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&u_y&u_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\Bb-Dc\\-Db+Cc\end{pmatrix}$$

$$J_\Delta=(Bb-Dc)u_y+(-Db+Cc)u_z$$