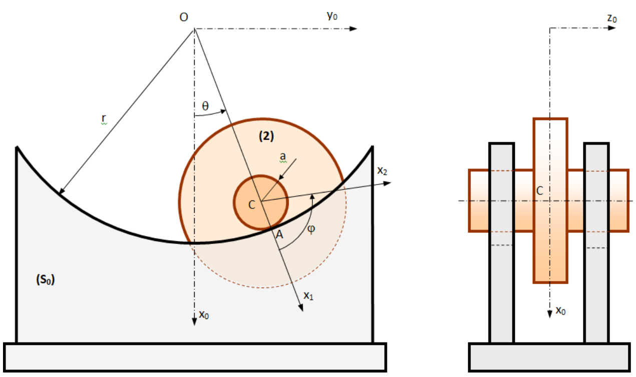
Colle 02

Culbuto

Équipe PT – PT★ La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :



La figure ci-dessus représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie I d'un solide de révolution **(2)** par rapport à son axe. Soit R_0 un repère galiléen lié au bâti (S_0) tel que l'axe $\left(O,\overrightarrow{x_0}\right)$ soit vertical descendant. Les deux portées sur lesquelles roule le solide **(2)** sont des portions de la surface d'un cylindre de révolution d'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ et de rayon r. Le solide **(2)**, de masse m, de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a. Soit f le coefficient de frottement entre **(2)** et (S_0). L'étude se ramène à celle d'un problème plan paramétré de la façon suivante :

- le tourillon de **(2)**, de centre C, roule sans glisser en A sur la portée cylindrique de (S_0) ;
- R_1 est un repère tel que $\overrightarrow{OA}=r\overrightarrow{x_1}$ et on pose $\theta=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)$;
- R_2 est un repère lié à 2 avec $\varphi=\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right)$. On suppose que $\varphi=0$ lorsque $\theta=0$.

Question 1 *Donner la relation entre φ et θ.*

Question 2 *Déterminer l'équation du mouvement de* **(2)** *par rapport à (S_0) en fonction de θ.*

Question 3 *On suppose que l'angle θ reste petit au cours du mouvement. Montrer que le mouvement est périodique et déterminer la période T des oscillations de* **(2)**.

Question 4 *En déduire le moment d'inertie I de* **(S)** *sachant que : $T=5\,\text{s}$; $a=12.5\,\text{mm}$; $r=141.1\,\text{mm}$; $g=9.81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$; $m=7217\,\text{g}$; $f=0,15$.*

Question 5 *Déterminer l'angle θ_0 maxi pour qu'il n'y ait pas glissement en A. Faire l'application numérique.*

Dispositif de mesure de moment d'inertie. 1/2

1 - RSG en A $\overrightarrow{V}(A \in S/R_0) = \vec{0} = \overrightarrow{V}(C \in S/R_0) + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$

$\Leftrightarrow (r-a)\,\dot{\theta}\,\vec{y_1} - a\,\vec{x_1} \wedge (\dot{\varphi}+\dot{\theta})\,\vec{z_0}$

$\Leftrightarrow r\dot{\theta} + a\dot{\varphi} = 0$ en intégrant avec $c_1 = 0$: $\boxed{r\theta + a\varphi = 0}$

2 - Isolons $\{S\}$

$\mathcal{T}(\text{pesanteur} \to S) = \left\{ \begin{matrix} mg\,\vec{x_0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C$ et $\mathcal{T}(S_0 \to S) = \left\{ \begin{matrix} N\vec{x_1} + T\vec{y_1} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$

Appliquons le th de l'énergie cinétique $P(\text{ext} \to S/S_0) = \dfrac{d\,E_c(S/S_0)}{dt}$

- $E_c(S/S_0) = \frac{1}{2} m \left[(r-a)\dot{\theta}\right]^2 + \frac{1}{2} I \left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{1}{2} m (r-a)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{a-r}{a}\right)^2 \dot{\theta}^2$

$= \dfrac{(r-a)^2}{2}\left[m + \dfrac{I}{a^2}\right]\dot{\theta}^2$

$\dfrac{dE_c(S/S_0)}{dt} = (r-a)^2\left(m + \dfrac{I}{a^2}\right)\dot{\theta}\,\ddot{\theta}$

- $P(\text{ext} \to S/S_0) = \mathcal{T}(\text{pesanteur} \to S) \otimes \mathcal{V}(S/R_0) + \mathcal{T}(S_0 \to S) \otimes \mathcal{V}(S/R_0)$

$= \left\{ \begin{matrix} mg\,\vec{x_0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C \otimes \left\{ \begin{matrix} (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\vec{z_0} \\ (r-a)\dot{\theta}\,\vec{y_1} \end{matrix} \right\}_C + \left\{ \begin{matrix} N\vec{x_1} + T\vec{y_1} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$

$= -mg\,(r-a)\,\dot{\theta}\sin\theta$

d'où $(r-a)\left(m + \dfrac{I}{a^2}\right)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

$\Leftrightarrow \boxed{(r-a)(ma^2 + I)\,\ddot{\theta} + mga^2\sin\theta = 0}$ (1)

Autre solution : PFD appliqué à $\{S\}$ en A :

$\left\{ \begin{matrix} m\,\overrightarrow{\Gamma}(C \in S/R_0) \\ \overrightarrow{\delta_A}(S/R_0) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} mg\,\vec{x_0} + N\vec{x_1} + T\vec{y_1} \\ mga\sin\theta\,\vec{z_0} \end{matrix} \right\}_A$

2/2

avec $\vec{\delta}_A(S/R_0) = \vec{\delta}_C(S/R_0) + \vec{AC} \wedge m\vec{\Gamma}(C\in S/R_0)$

$$= \frac{d}{dt}\left[\underbrace{J_c(S)\,\vec{\Omega}(S/R_0)}_{I(\dot\theta+\dot\varphi)\vec{z_0}}\right] - ma\,\vec{x_1}\wedge\left[(r-a)\ddot\theta\,\vec{y_1} - (r-a)\dot\theta^2\,\vec{x_1}\right]$$

$$= \left[I\left(1-\frac{r}{a}\right)\ddot\theta - ma(r-a)\ddot\theta\right]\vec{z_0}$$

TMD en $A/\vec{z_0}$ $\quad (r-a)\left[I+ma^2\right]\ddot\theta + mga^2\sin\theta = 0 \qquad (1)$

3 - θ petit $\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$ d'où l'éq diff du 2nd ordre :

$$\ddot\theta + \frac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\,\theta = 0$$

Le coef de θ étant positif, on a un phénomène périodique de période $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(r-a)(I+ma^2)}{mga^2}}}$

4 - $T^2 = 4\pi^2\,\frac{(r-a)(I+ma^2)}{mga^2} \iff I = \frac{T^2\,mga^2}{4\pi^2(r-a)} - ma^2$

A.N $\quad I = \frac{25 \cdot 7{,}217 \cdot 9{,}81 \cdot 12{,}5^2\,10^{-6}}{4\pi^2\,(141{,}1-12{,}5)\,10^{-3}} - 7{,}217 \cdot 12{,}5^2\,10^{-6} = \boxed{53{,}3 \cdot 10^{-3}\ kg\,m^2}$

5 - Th de la résultante dynamique appliqué à $\{S\}$: $m\left[(r-a)\ddot\theta\,\vec{y_1} - (r-a)\dot\theta^2\,\vec{x_1}\right] = mg\vec{x_0} + N\vec{x_1} + T\vec{y_1}$

$/\vec{x_1} \quad -m(r-a)\dot\theta^2 = mg\cos\theta + N \iff N = -m(r-a)\dot\theta^2 - mg\cos\theta$

$/\vec{y_1} \quad m(r-a)\ddot\theta = T - mg\sin\theta \iff T = m(r-a)\ddot\theta + mg\sin\theta$

pas de glissement $\Rightarrow \|\vec{T}\| < f\,\|\vec{N}\| \iff |m(r-a)\ddot\theta + mg\sin\theta| < f\left(m(r-a)\dot\theta^2 + mg\cos\theta\right)$

de (1) $\quad \ddot\theta = \frac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\cdot\sin\theta \quad$ et $\dot\theta_0 = 0$ car il y a risque de glissement quand θ est max, (ici θ_0)

d'où : $\quad m(r-a)\,\frac{mga^2}{(r-a)(I+ma^2)}\,\sin\theta_0 + mg\sin\theta_0 < f\,mg\cos\theta_0$

$$\iff \boxed{\tan\theta_0 < f\cdot\left(1+\frac{ma^2}{I}\right)}$$

A.N. $\quad \boxed{\theta_0 < 8{,}7°}$