



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR  
LYON

CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.

ANNÉE 2017 - 2018

---

SLCI

## Colles de SI, cycle 2 - programme du 6/11/2011 au 17/11/2017

---



**Programme de colle :**

**Nom du colleur :**

Nom	Observations	Note

## I. Sujet 1

### 1 Étude d'un télésiège

On propose d'étudier le mouvement d'un télésiège modélisé par les solides  $S_1$  et  $S_2$  représentés ci-contre.

- $S_1$  est la pince débrayable qui relie le télésiège au câble porteur.
- $S_2$  représente le siège et le passager, il est schématisé sous la forme de 2 parallélépipèdes et d'un cylindre.

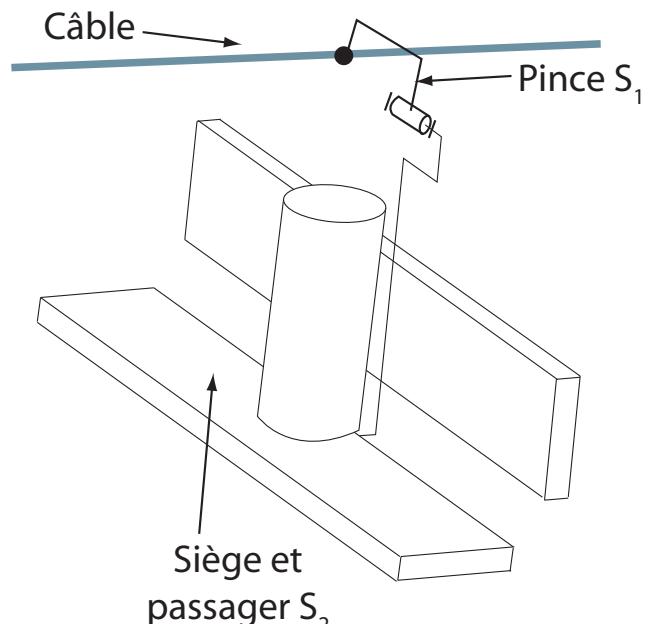


FIGURE 1 – Télésiège

Le solide  $S_2$  présenté sur la figure ci-dessous est modélisé à l'aide des volumes élémentaires suivants :

- un cylindre  $S_C$  de masse  $m_C$  et centre de masse  $G_C$
- deux parallélépipèdes identiques  $S_p$  et  $S'_p$  de masse individuelle  $m_p$  et de centres de masse  $G_p$  et  $G'_p$ .
- une structure porteuse (non représentée sur le schéma ci-dessous) de masse négligée.

#### a) Géométrie de masse :

**Q 1 : Par simple analyse des particularités géométriques de  $S_2$ , donner (sans calcul) le lieu géométrique supportant son centre de masse.**

**Q 2 : Définir la position du centre de masse de  $S_2$  en fonction des paramètres donnés et des masses  $m_C$  et  $m_p$ .**

**Q 3 : Donner, pour chaque volume élémentaire  $S_c$ ,  $S_p$  et  $S'_p$ , la forme de sa matrice d'inertie en son centre de masse.**



#### Remarque 1 :

- On utilisera les notations  $(A_p, B_p, C_p, \text{etc...})$  pour les solides  $S_p$  et  $S'_p$  et  $(A_c, B_c, C_c, \text{etc...})$  pour le solide  $S_c$ .
- On tiendra compte de la relation qui existe entre les moments d'inertie des solides  $S_p$  et  $S'_p$  autour des directions  $(G_p, \vec{y}_2)$  et  $(G'_p, \vec{z}_2)$  d'une part et  $(G_p, \vec{z}_2)$  et  $(G'_p, \vec{y}_2)$  d'autre part.

**Q 4 : Préciser pour chaque volume élémentaire les directions principales d'inertie au centre de masse (directions centrales d'inertie).**

**Q 5 : Donner la forme de la matrice d'inertie de  $S_2$  en  $G_2$  (notation  $A_2, B_2, C_2, \text{etc...}$ )**

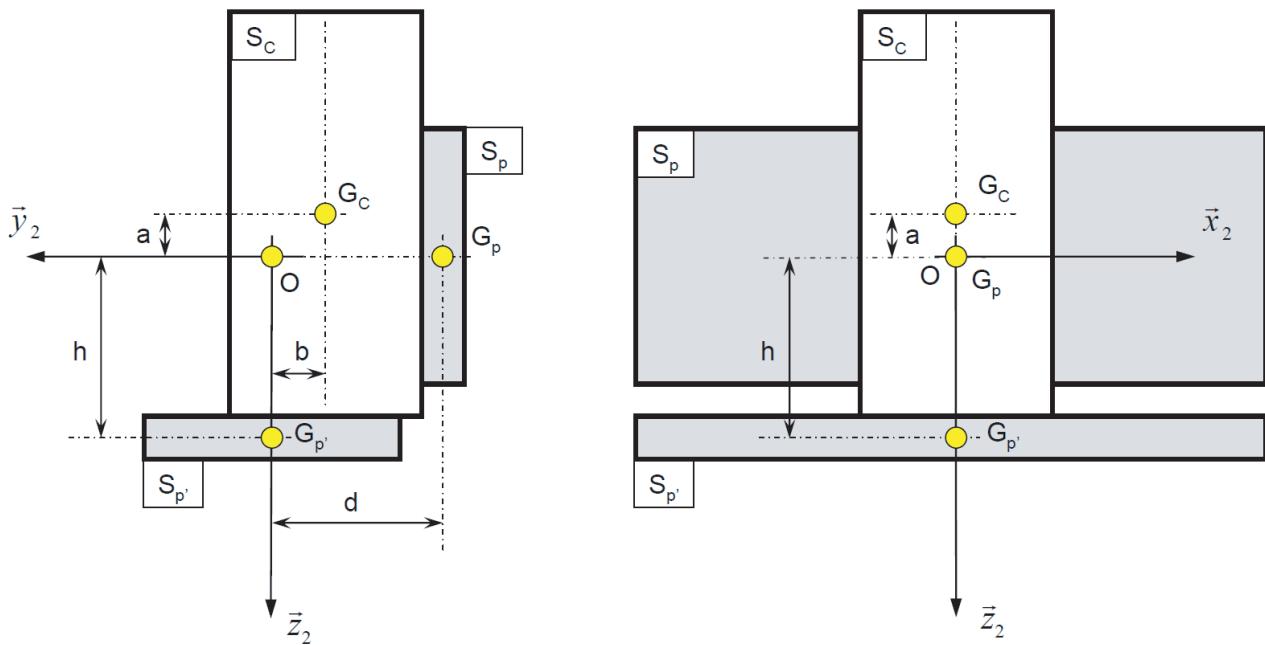


FIGURE 2 – Télésiège

**Q 6 : En notant  $\overrightarrow{OG_2} = Y\vec{y}_2 + Z\vec{z}_2$ , calculer cette matrice à partir des matrices d'inertie des volumes élémentaires obtenues à la question 3 et des distances définies sur la figure.**

**b) Cinétique :**

On suppose le câble du télésiège arrêté (le repère  $R_0$  étant supposé galiléen,  $\vec{y}_0$  horizontal et  $\vec{z}_0$  vertical descendant) et l'on s'intéresse au modèle présenté sur la figure ci-dessous :

**Paramétrage :**

- La liaison entre la pince débrayable  $S_1$  et le câble  $S_0$  est modélisée par une liaison pivot d'axe  $(O_0, \overrightarrow{y_{0,1}})$  : paramètre de mouvement  $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$
- Le solide  $S_2$  (Siège et passager) est lié à la pince  $S_1$  par une liaison pivot d'axe  $(O_0, \overrightarrow{x_{1,2}})$  : paramètre de mouvement  $\theta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$

**Géométrie des masses :**

- $S_1$  : masse et inertie négligée,
- $S_2$  : masse  $m_2$ , centre masse  $G_2$  tel que  $\overrightarrow{O_0G_2} = z_G \vec{z}_2$ , matrice d'inertie en  $G_2$  (notation  $A_2, B_2, C_2$ , etc...) telle que définie à la question 4 de la première partie.

**Q 7 : Donner le moment d'inertie de  $S_2$  autour de l'axe  $(O_0, \overrightarrow{x_{1,2}})$  avec seulement les mouvements de tangage ( $\varphi = 0$ ).**

**Q 8 : Donner alors la projection du moment dynamique galiléen de  $S_2$  en  $O_0$  sur  $(O_0, \overrightarrow{x_{1,2}})$ .**

**Q 9 : Maintenant on considère que  $\varphi$  est non nul. Après avoir transporté la matrice d'inertie de  $S_2$  en  $O_0$ , Donner le moment dynamique galiléen de  $S_2$  en  $O_0$  (Expression dans la base 2).**

**Q 10 : Calculer l'énergie cinétique de  $S_2$ .**

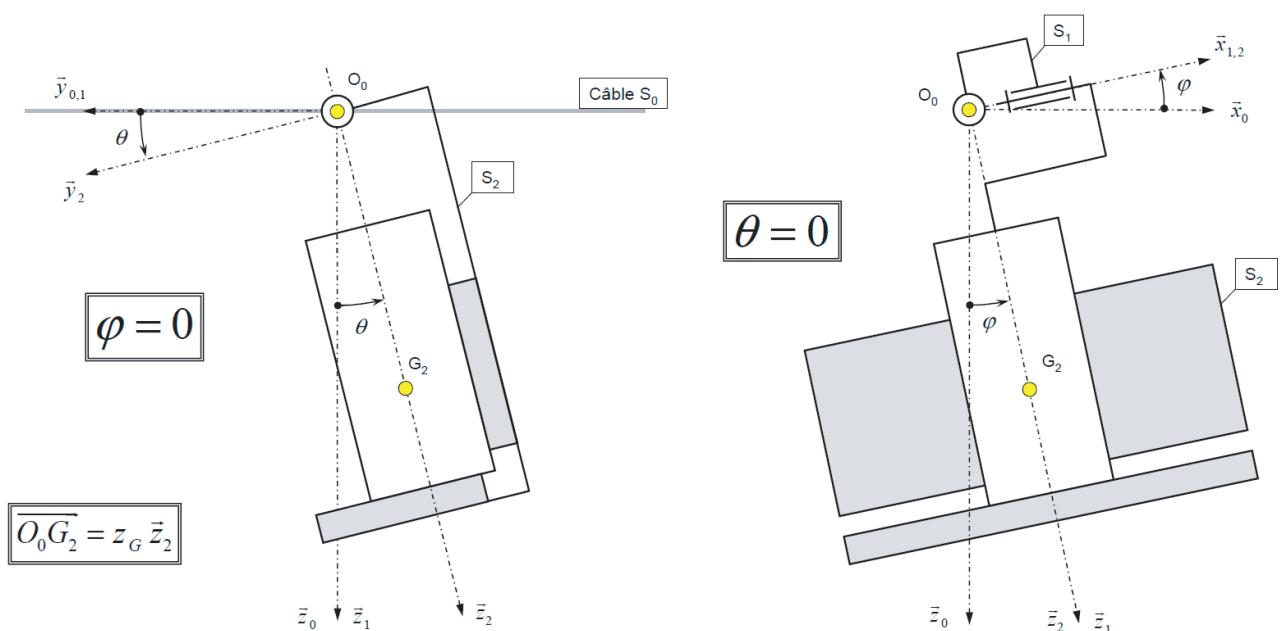


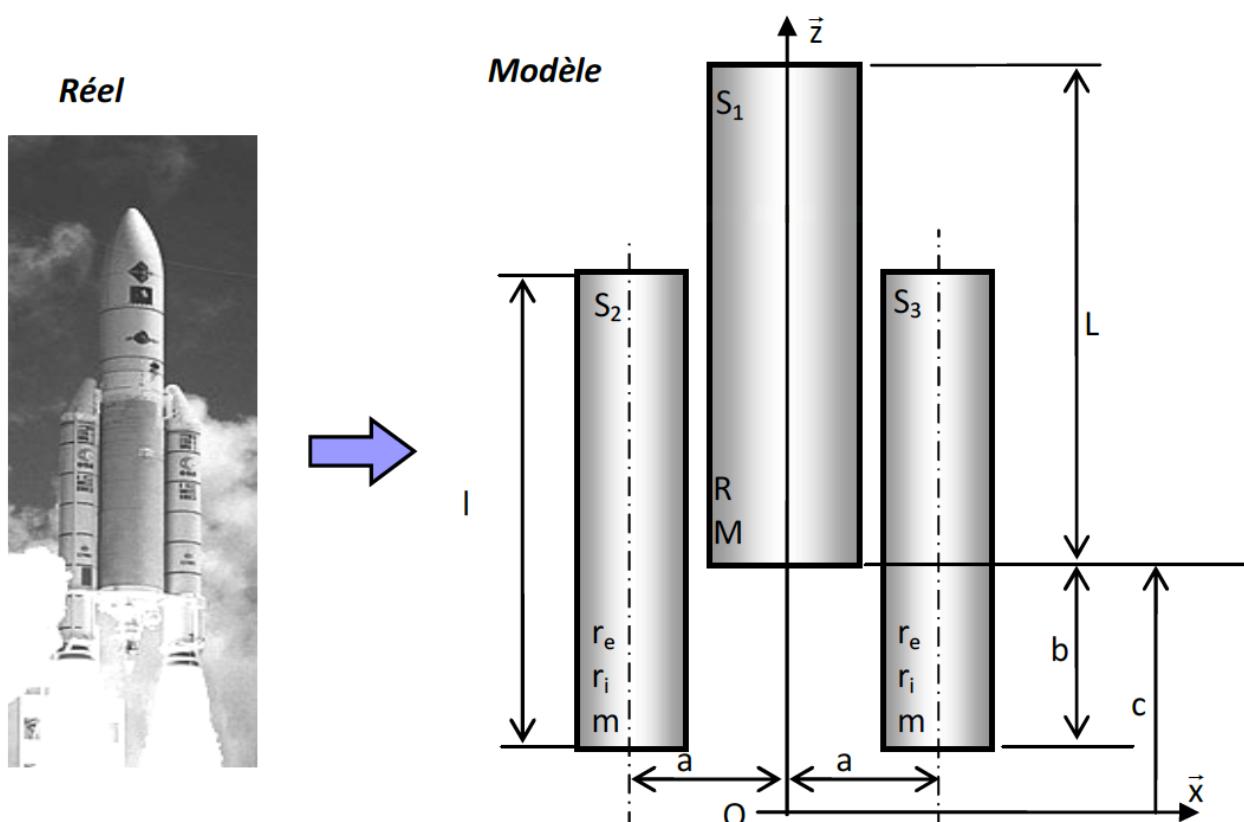
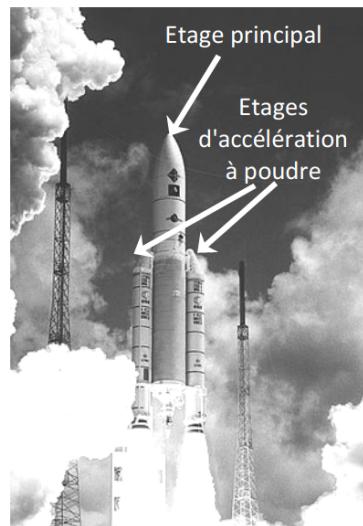
FIGURE 3 – Télésiège

## II. Sujet 2

### 1 Propriétés inertielles d'un lanceur spatial

On s'intéresse aux propriétés inertielles du lanceur spatial Ariane 5. Le lanceur est constitué d'un étage principal dans lequel sont installés les satellites et de deux étages d'accélération à poudre qui assurent 90% de la propulsion durant les deux premières minutes du vol. Pour élaborer les lois de pilotage automatique assurant le suivi de la trajectoire désirée, les concepteurs doivent déterminer les propriétés inertielles du lanceur. Dans ce problème, cette phase est conduite de façon simplifiée à un instant donné du vol et pour l'ensemble du lanceur (étage principal et ses deux étages d'accélération à poudre). La modélisation proposée est la suivante :

- l'étage principal (solide  $S_1$ ) est assimilé à un cylindre homogène de masse  $M$ , de longueur  $L$  et de rayon  $R$ ,
- chacun des deux étages d'accélération à poudre (solide  $S_2$  et solide  $S_3$ ) est assimilé à un cylindre creux et homogène de masse  $m$ , de longueur  $l$ , de rayon intérieur  $r_i$  et de rayon extérieur  $r_e$ .



**Q.1.** Déterminer la position dans le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  des centres d'inertie  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G_3$  des solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ .

**Q.2.** Donner la forme des matrices d'inertie des solides 1, 2 et 3 exprimées dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et à leurs centres de gravité respectifs.

**Q.3.** Déterminer la masse totale du lanceur  $M_t$  et la position dans le repère  $R$  du centre d'inertie  $G_t(x_{Gt}, y_{Gt}, z_{Gt})$  de l'ensemble du lanceur constitué des solides 1, 2 et 3.

**Q.4.** Déterminer la matrice d'inertie de l'ensemble du lanceur exprimée dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et au point  $G_t$ .

**Q.5.** Compte tenu de la combustion, les propriétés inertielles évoluent dans le temps. Quelle modélisation pourrait être utilisée pour rendre compte ce phénomène ?

### III. Sujet 3

#### 1 Inertie d'un cadre de transport de moules d'injection plastique

On s'intéresse à la détermination des caractéristiques inertielles d'un cadre support d'un moule destiné à l'injection plastique des tableaux de bord automobile (figure 4).



FIGURE 4 – Photo d'un tableau de bord

L'objectif de l'étude est de déterminer les caractéristiques inertielles nécessaires pour assurer les niveaux de la fonction technique : "assurer les déplacements des moules d'un poste à l'autre".

La matrice d'inertie du cadre au point  $O_c$ , milieu du cadre se trouvant sur l'axe de rotation  $(O_c, \vec{x}_c)$  de celui-ci avec le plateau, dans la base  $b_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$  est la suivante :

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(\text{cadre}) = \begin{pmatrix} A_c & -F_c & -E_c \\ -F_c & B_c & -D_c \\ -E_c & -D_c & C_c \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

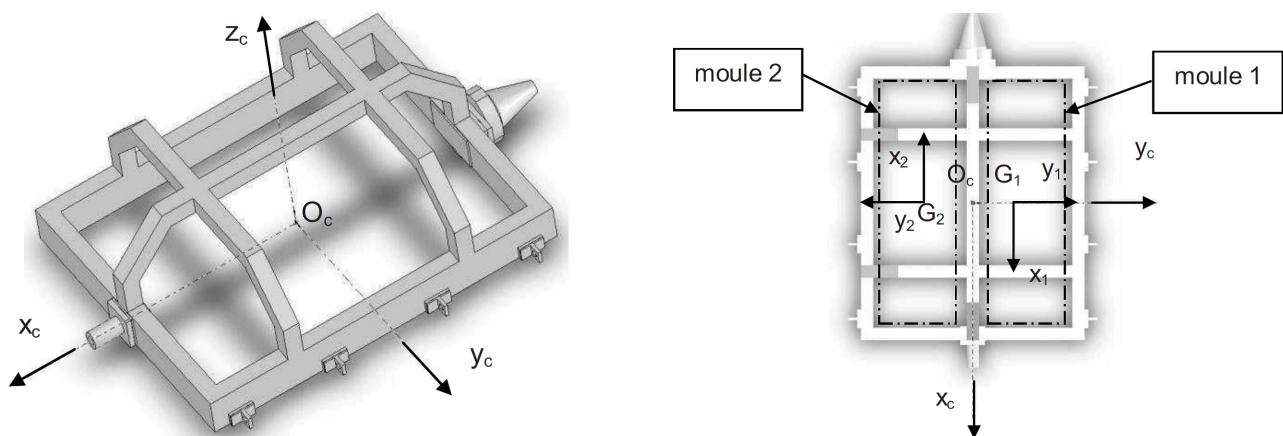


FIGURE 5 – Caractéristiques géométriques du cadre

**Q 1 : Indiquer les termes nuls de cette matrice et préciser pourquoi.**

Le cadre est équipé de deux moules identiques respectivement 1 et 2 montés en opposition (voir bases associées). Les matrices d'inertie des moules 1 et 2, au point  $O_c$  dans leurs bases respectives :  $b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $b_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  sont identiques :

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(moule1) = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

et

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(moule2) = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

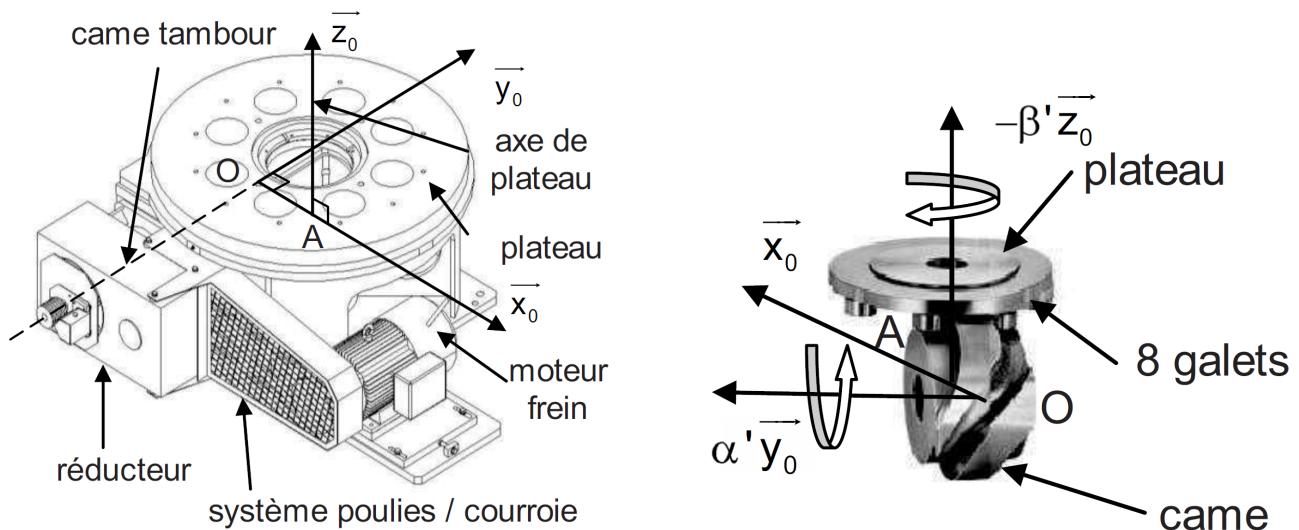
**Q 2 : Déterminer littéralement la matrice d'inertie du cadre équipé des deux moules au point  $O_c$  dans la base  $b_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$  en fonction des termes de la matrice précédente :**

$$\bar{\bar{I}}_{O_c}(\text{cadre} + \text{moules}) = \begin{pmatrix} A_{cm} & -F_{cm} & -E_{cm} \\ -F_{cm} & B_{cm} & -D_{cm} \\ -E_{cm} & -D_{cm} & C_{cm} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)}$$

**Q 3 : Effectuer l'application numérique.**  $Ac = 159,22 \text{ kg.m}^2$ ,  $Bc = 426,02 \text{ kg.m}^2$ ,  $Cc = 531,77 \text{ kg.m}^2$ ,  $Ec = 0,06 \text{ kg.m}^2$ ,  $Am = 14,38 \text{ kg.m}^2$ ,  $Bm = 15,43 \text{ kg.m}^2$ ,  $Cm = 21,44 \text{ kg.m}^2$ ,  $Dm = 5,32 \text{ kg.m}^2$ ,  $Em = 0,36 \text{ kg.m}^2$ ,  $Fm = -0,04 \text{ kg.m}^2$

On donne :

- La masse  $m_{cm}$  d'un cadre équipé de deux moules;
- Le moment d'inertie  $C_{cm}$  d'un cadre équipé de deux moules autour de l'axe  $(O_c, \vec{z}_c)$ ;
- Le centre de gravité d'un cadre équipé de deux moules est sur l'axe  $(O_c, \vec{z}_c)$  et situé à une distance  $d$  par rapport à l'axe de rotation  $(A, \vec{z}_0)$  du plateau indexeur ( $\vec{z}_0 = \vec{z}_c$ ) (voir les deux figures suivantes avec  $O = O_c$ );
- Le moment d'inertie  $C_p$  du plateau indexeur par rapport à l'axe de rotation  $(A, \vec{z}_0)$ .
- L'inertie des "peaux fabriquées" étant négligée par rapport à celle du cadre équipé de deux moules.



**Q 4 : Déterminer littéralement le moment d'inertie C de l'ensemble tournant plateau indexeur équipé de ses quatre cadres et huit moules par rapport à l'axe de rotation  $(A, \vec{z}_0)$  en fonction des termes précédents.**

**Q 5 : Application numérique avec**  $C_{cm} = 575 \text{ kg.m}^2$ ;  $m_{cm} = 500 \text{ kg}$ ;  $d = 2,95 \text{ m}$ ;  $C_p = 1500 \text{ kg.m}^2$

## IV. Sujet 4

# V. Système de maintenance de Tramway

### 1 Étude de la transmission de puissance d'un système d'élévation d'une rame de Tram

L'étude repose sur un système permettant de soulever une rame de Tramway du sol pour effectuer des opérations de maintenance. On s'intéresse dans cette étude aux exigences (figure ??) : **1.2 Générer un mouvement vertical**

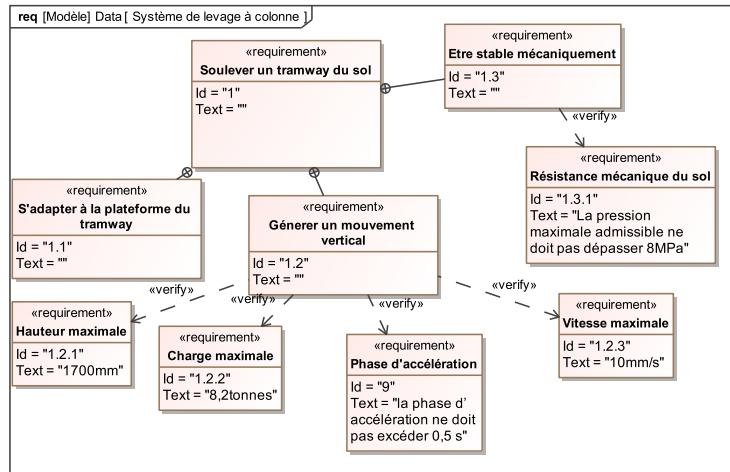
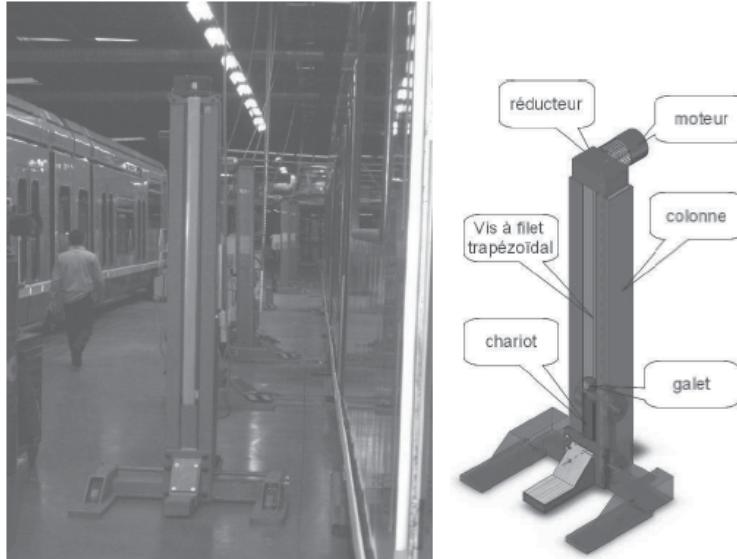


FIGURE 6 – Diagramme des exigences partiel



### 2 Exigence 1.2 Générer un mouvement vertical

Le système permettant de générer le mouvement vertical du Tramway est modélisé par le schéma cinématique de la figure ??.

On note :

- la vitesse de rotation de l'arbre moteur :  $\vec{\Omega}(1/0) = \omega_{10} \cdot \vec{x}_0 = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$ ;
- la vitesse de levé du tramway :  $V_L = \dot{z}_4 = \vec{V}(O_4/4/0) \cdot \vec{z}_0$ .

#### a) Données sur les liaisons

- Liaison  $L_{12}$  :
  - Pignon de l'arbre 1 engrenant avec l'arbre 2 : nombre de dents :  $Z_{12} = 15$ ,

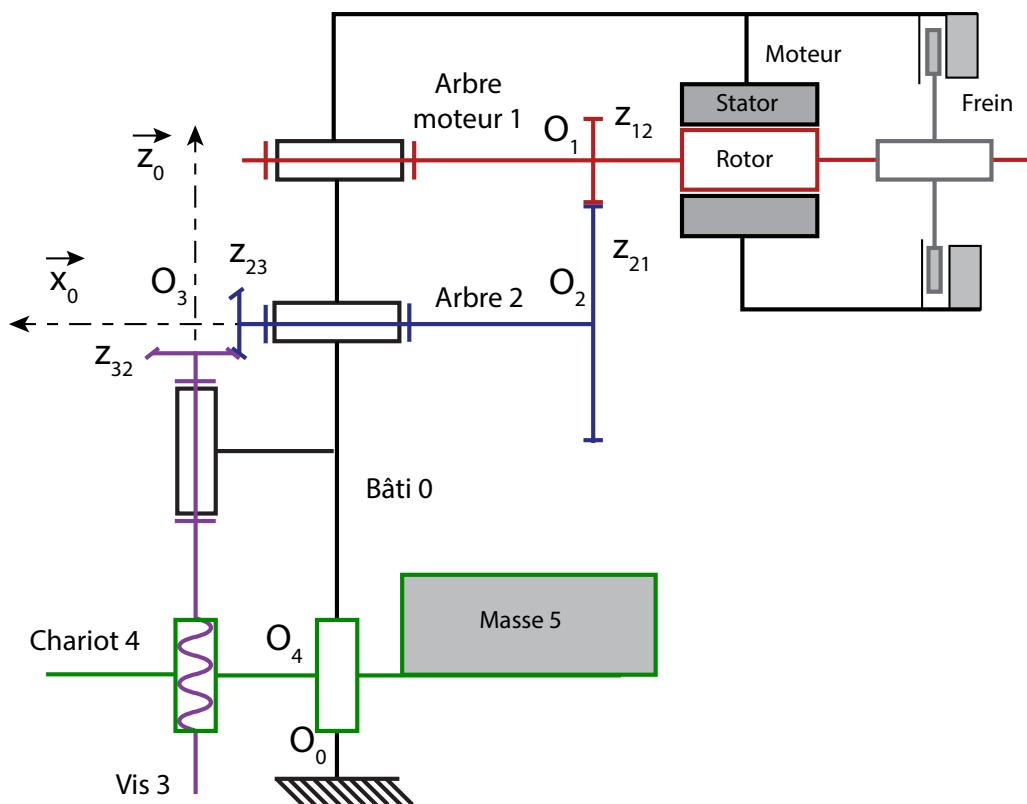


FIGURE 7 – Schéma Cinématique du système permettant de soulever les tramway

- Pignon de l'arbre 2 engrenant avec l'arbre 1 : nombre de dents :  $Z_{21} = 75$ ,
- Liaison  $L_{23}$  :
  - Pignon de l'arbre 2 engrenant avec la vis 3 : nombre de dents :  $Z_{23} = 14$ ,
  - Pignon de la vis 3 engrenant avec l'arbre 2 : nombre de dents :  $Z_{32} = 35$ ,
- Liaison  $L_{34}$  : pas du système vis-écrou :  $p_{34} = 5 \text{ mm}$

### b) Étude du réducteur de vitesse

**Q 1 : Déterminer l'expression littérale des rapports de réduction en fonction des données concernant les roues dentées :**

1.  $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$ ,
2.  $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}$ ,

**Q 2 : En déduire les expressions de :**

1.  $\vec{\Omega}_{2/0}$ ,
2.  $\vec{\Omega}_{3/0}$ .

en fonction de  $\dot{\theta}_1$  et des données concernant les roues dentées

**Q 3 : Déterminer numériquement les rapports :**

1.  $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$ ,
2.  $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}$ ,

### c) Étude du système de transformation de mouvement

**Q 4 : Tracer le graph des liaisons du système de transformation de mouvement constitué des solides 0 – 3 – 4.**

**Q 5 : Écrire les torseurs cinématiques associé à chaque liaison en précisant les lieux d'invariance.**

**Q 6 : Écrire la fermeture cinématique.**

**Q 7 : En déduire une relation entre la vitesse de levée :  $V_L = \vec{V}(O_4 \in 4/0) \cdot \vec{z}_0$  et  $\omega_{30} = \vec{\Omega}_{3/0} \cdot \vec{z}_0$**

**Q 8 : En déduire les rapports :**

$$1. \ r_{34} = \frac{V_L}{\omega_{30}},$$

$$2. \ r_g = -\frac{V_L}{\omega_{10}}.$$

**Q 9 :** Déterminer la vitesse de rotation du moteur souhaitée (à exprimer en tours par minute) pour obtenir une vitesse de levée conforme au cahier des charges.

d) Dimensionnement dynamique du système.

**Données**

- Le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites;
- Masse du solide 4 :  $M_4 = 67 \text{ kg}$ ;
- Masse du solide 5 :  $M_5 = 6000 \text{ kg}$ ;
- accélération de la pesanteur :  $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_0$  avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ;
- Les solides 4 et 5 sont supposés encastrés entre eux;
- Moment d'inertie du solide 1 selon l'axe  $(O_1, \vec{x}_0)$  :  $J_{(O_1, \vec{x}_0)}(S_1) = J_1 = 10,5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- Inerties des solides 2 et 3 négligeables;
- $C_m$  le couple qu'exerce le moteur sur le solide 1 (selon l'axe  $\vec{x}_0$ );
- $C_{21}$  le moment de l'action de l'arbre 2 sur l'arbre 1 en projection sur  $(O_1, \vec{x}_0)$  :  $\vec{M}_{O_1}(2 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = C_{21}$ ;
- $C_{23}$  le moment de l'action de l'arbre 2 sur l'arbre 3 en projection sur  $(O_3, \vec{z}_0)$  :  $\vec{M}_{O_3}(2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = C_{23}$ ;
- En supposant un rendement égal à 1 au niveau du réducteur on obtient la relation entre  $C_{21}$  et  $C_{23}$  :

$$C_{23} = -\frac{p_{34}}{r_g \cdot 2 \cdot \pi} \cdot C_{21}$$

- On rappelle le résultat de la partie précédente :

$$\dot{z}_4 = -r_g \cdot \dot{\theta}_1$$

et quelle que soit la valeur trouvée pour  $r_g$ , la valeur utilisée dans la suite du sujet sera :  $r_g = 6,36 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

**Q 10 :** Donner le graphe de structure de l'ensemble 0 – 3 – 4 – 5.

**Q 11 :** Donner la forme du torseur de l'action mécanique du à la liaison de 3 → 4.

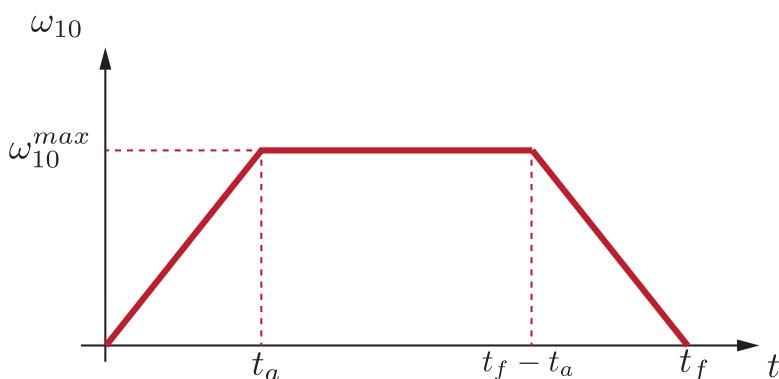
**Q 12 :** En isolant l'ensemble  $E = \{4 + 5\}$  et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant  $\ddot{z}_4, M_4, M_5, g$  et le(s) inconnue(s) de l'action mécanique du solide 3 sur 4.

**Q 13 :** En isolant le solide 1 et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant  $\ddot{\theta}_1, J_1, C_m$  et  $C_{21}$ .

**Q 14 :** En isolant le solide 3 et en appliquant un théorème général de la dynamique, déterminer une équation reliant  $C_{23}$  à(la) inconnue(s) de l'action mécanique du solide 3 sur 4.

**Q 15 :** Déduire des questions précédentes l'expression de  $C_m$  en fonction de  $\ddot{z}_4, M_4, M_5, g, r_g$ , et  $J_1$ .

**Q 16 :** On souhaite piloter le moteur avec un trapèze en vitesse. Donner les caractéristiques du trapèze en fonction des données du cahier des charges.



**Q 17 :** Pour chaque phase du trapèze, donner l'expression du couple moteur  $C_m$  ainsi que les applications numériques associées.