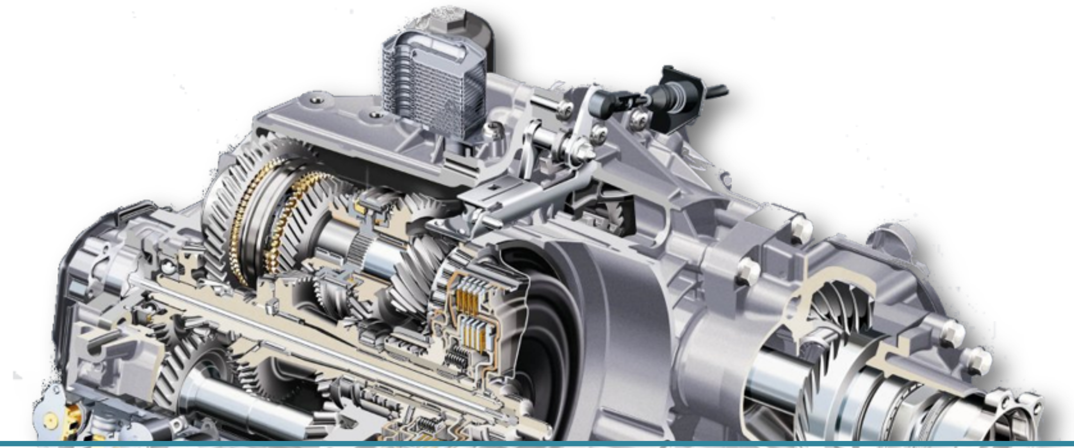


http://www.engineworld.fr/les-boites-robotisees-a-double-embrayage-22/

PSI⋆ – MP

Cycle 04

Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Cours

Chapitre 5
Équilibrage des solides en rotation

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C16 : torseur cinétique*
- ❒ *Mod2.C17 : torseur dynamique*
- ❒ *Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide*
- ❒ *Mod2.C15 : matrice d'inertie*
- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*
- ❒ *Res1.C2.SF1 : proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison*

Toupie
Volants d'inertie d'un vilebrequin

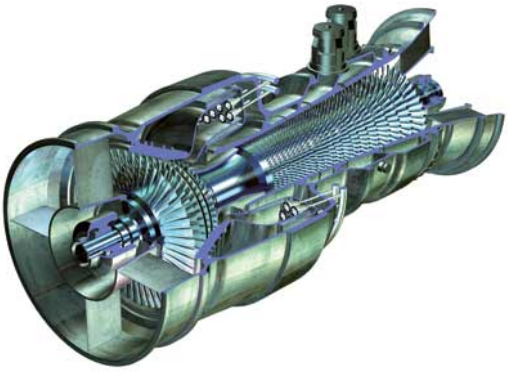
Xavier Pessoles
PSI⋆ – MP

1 Introduction

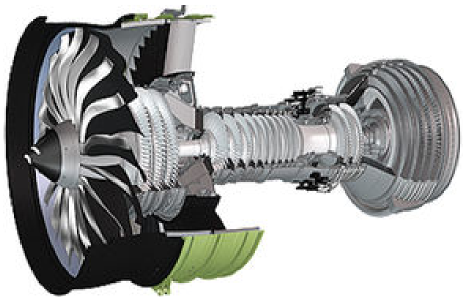
1.1 Problématique industrielle

Le mise en rotation de rotor à haute vitesse (à partir de quelques centaines de tours par minute) est une configuration classique rencontrée dans l'industrie. Si un défaut géométrique existe, cela induit une dissymétrie de la répartition de masse qui provoque des effets vibratoires pouvant aller jusqu'à la rupture des éléments de guidage (paliers, roulements à billes).

Afin d'éviter ces problèmes il convient d'équilibrer dynamiquement ces rotors ce qui implique de rendre les actions mécaniques au niveau des guidages en rotation constantes au cours du temps.



Turbine à gaz Alstom



Turborécateur Snecma

Exemple de systèmes présentant des structures tournantes à haute vitesse

1.2 Présentation du support de cours

▪ **Exemple — Étude d'une pompe turbo-moléculaire.** On s'intéresse ici à l'étude d'une pompe à vide destinée à la fabrication de composants électroniques capable d'évacuer des gaz en créant un vide de l'ordre $10^{-9} mbar$ dans une chambre blanche. Les conditions du cahier des charges sont très exigeantes et résumées dans le diagramme des exigences partiel suivant :

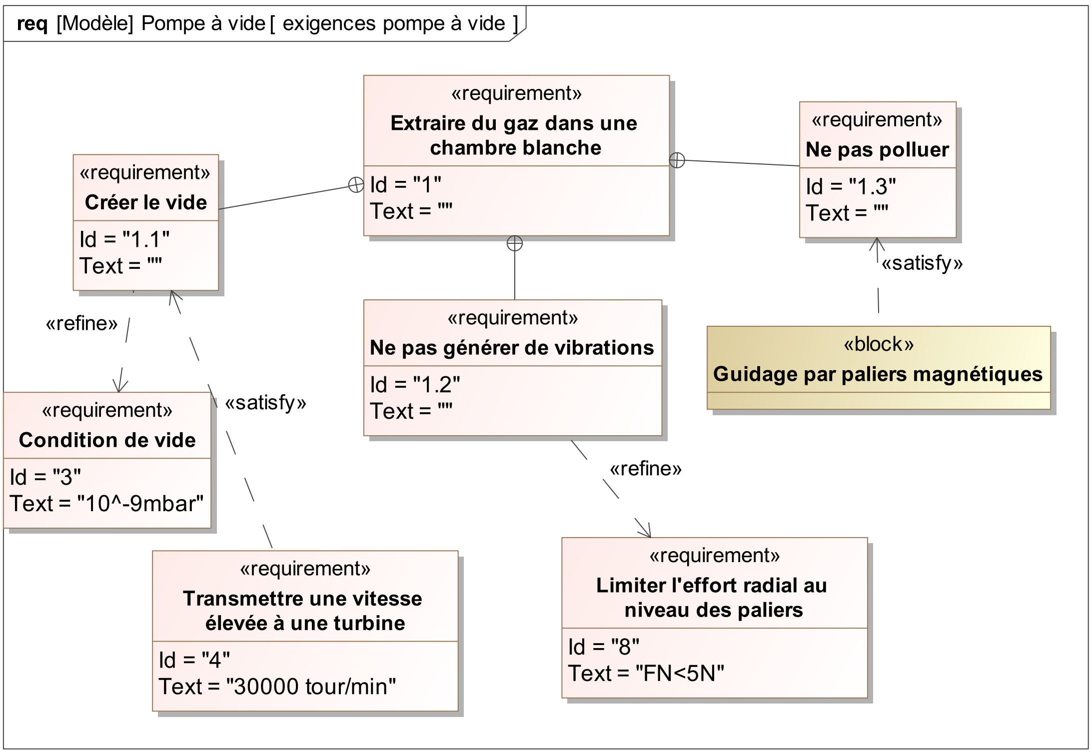
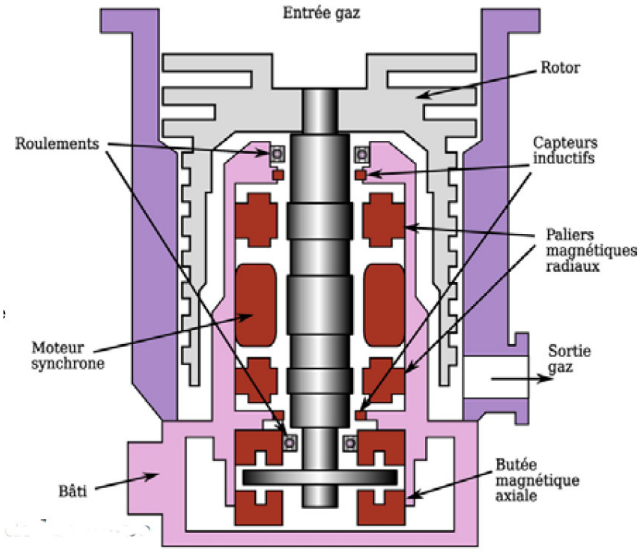


Diagramme des exigences partiel de la pompe à vide

■

Rotor de la pompe

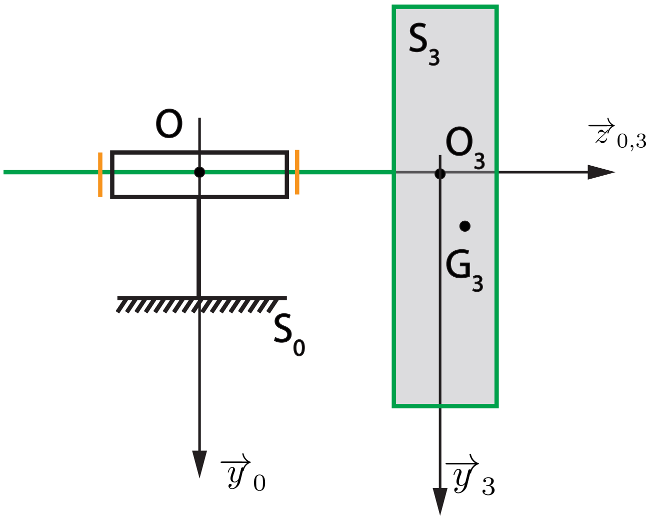


Vue en coupe du guidage par paliers magnétiques de la pompe

2 Modélisation du problème

2.1 Paramétrage du problème

La figure ci-dessous représente le paramétrage d'un rotor S_3 en mouvement par rapport à S_0.



Paramétrage du problème

- Le référentiel R_0 associé à S_0 est supposé comme étant galiléen.
- Le guidage par paliers magnétiques entre le rotor S_3 et le bâti S_0 est modélisé par une liaison pivot d'axe $(O_3, \overrightarrow{z}_{0,3})$ avec bâti S_0.
- Le paramètre du mouvement de S_3/S_0 est défini par $\theta = (\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{x}_3)$.
- Le rotor S_3 est de masse m_3, de centre de masse G_3 tel que $\overrightarrow{O_3G_3} = b\,\overrightarrow{y}_3 + c\,\overrightarrow{z}_3$.
- Le rotor S_3, bien qu'ayant une symétrie théorique de révolution est en réalité imparfait. Sa matrice d'inertie en O_3 est donnée par :

$$\overline{\overline{I}}_{O_3}(S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{R_3}$$

- Un moteur, non représenté, entraîne S_3 avec un couple $C_m\,\overrightarrow{z}_{0,3}$ à vitesse constante ($\omega = \dot{\theta}$).
- L'accélération de la pesanteur est dirigée selon $+\overrightarrow{y}_0$ et vaut $g = 9,81 m\cdot s^{-2}$.

2.2 Analyse préliminaire

Question 1 *Faire le bilan des actions mécaniques extérieures pour $\{S_3\}$.*

- **Action du bâti (liaison pivot)** :

$$\{\mathcal{T}(S_0\to S_3)\}=\left\{\begin{array}{l}\forall P\in\left(O_3,\overrightarrow{z}_{0,3}\right)\\ X_{03}\cdot\overrightarrow{x}_0+Y_{03}\cdot\overrightarrow{y}_0+Z_{03}\cdot\overrightarrow{z}_0\end{array}\right\}_{L_{03}\cdot\overrightarrow{x}_0+M_{03}\cdot\overrightarrow{y}_0}$$

- **Action du moteur :**

$$\{\mathcal{T}(\text{moteur}\to S_3)\}=\left\{\begin{array}{c}\forall P\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{C_m\cdot\overrightarrow{z}_0}$$

- **Action de la pesanteur :**

$$\{\mathcal{T}(\text{pesanteur}\to S_3)\}=\left\{\begin{array}{l}G_3\\ m_3\cdot g\cdot\overrightarrow{y}_0\end{array}\right\}_{\overrightarrow{0}}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}O_3\\ m_3\cdot g\cdot\overrightarrow{y}_0\end{array}\right\}_{\overrightarrow{O_3G_3}\wedge\left(m_3\cdot g\cdot\overrightarrow{y}_0\right)=\left(b\overrightarrow{y}_3+c\overrightarrow{z}_3\right)\wedge\left(m_3\cdot g\cdot\overrightarrow{y}_0\right)}=\left\{\begin{array}{l}O_3\\ m_3\cdot g\cdot\overrightarrow{y}_0\end{array}\right\}_{m_3\cdot g\left(-b\sin\theta\cdot\overrightarrow{z}_{0,3}-c\overrightarrow{x}_0\right)}$$

Question 2 *Déterminer le torseur dynamique : $\mathcal{D}_{O_3}(S_3/S_0)$.*

- Le solide S_3 est en mouvement de rotation autour de l'axe $\left(O_3,\overrightarrow{z}_{0,3}\right)$ fixe par rapport à R_0.

$$\{\mathcal{D}(S_3/R_0)\}=\left\{\begin{array}{l}O_3\\ \overrightarrow{R_d}(S_3/R_0)=m_3\cdot\overrightarrow{a}(G_3\in S_3/R_0)\end{array}\right\}_{\overrightarrow{\delta(O_3,S_3/R_0)}=\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O_3,S_3/R_0)}}{dt}\right]_{R_0}}$$

- On calcule $\overrightarrow{R_d}(S_3/R_0)$:

$$\overrightarrow{R_d}(S_3/R_0)=m_3\cdot\overrightarrow{a}(G_3\in S_3/R_0)=m_3\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{V}(G_3\in S_3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}$$

Or,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(G_3\in S_3/R_0)=\overrightarrow{G_3O_3}\wedge\overrightarrow{\Omega}(S_3/R_0)&=(-b\cdot\overrightarrow{y}_3-c\cdot\overrightarrow{z}_3)\wedge\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{z}_{0,3}\\ &=-b\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{x}_3.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R_d}(S_3/R_0)=-b\cdot m_3\cdot\left(\ddot{\theta}\cdot\overrightarrow{x}_3+\dot{\theta}\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{x}_3}{dt}\right]_{R_0}\right)&=-b\cdot m_3\cdot\left(\ddot{\theta}\cdot\overrightarrow{x}_3+\dot{\theta}^2\cdot\overrightarrow{y}_3\right)\\ =-b\cdot m_3\cdot\omega^2\cdot\overrightarrow{y}_3&=-b\cdot m_3\cdot\omega^2\left(-\sin\theta\cdot\overrightarrow{x}_0+\cos\theta\cdot\overrightarrow{y}_0\right)\end{aligned}$$

- On calcule $\overrightarrow{\sigma(O_3,S_3/R_0)}$:
  O_3 est fixe par rapport à R_0 :

$$\overrightarrow{\sigma(O_3,S_3/R_0)}=\overline{\overline{I}}_{O_3}(S_3)\cdot\overrightarrow{\Omega}(S_3/R_0)=\begin{pmatrix}A_3&-F_3&-E_3\\-F_3&B_3&-D_3\\-E_3&-D_3&C_3\end{pmatrix}_{R_3}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{pmatrix}_{R_3}=\dot{\theta}\left(-E_3\cdot\overrightarrow{x}_3-D_3\cdot\overrightarrow{y}_3+C_3\cdot\overrightarrow{z}_3\right)$$

- On calcule $\overrightarrow{\delta(O_3,{}_3/R_0)}$: O_3 est fixe par rapport à R_0 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\delta(O_3,{}_3/R_0)}=\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O_3,S_3/R_0)}}{dt}\right]_{R_0}&=\left(-E_3\cdot\ddot{\theta}+D_3\cdot\dot{\theta}^2\right)\cdot\overrightarrow{x}_3+\left(-D_3\cdot\ddot{\theta}-E_3\cdot\dot{\theta}^2\right)\cdot\overrightarrow{y}_3+C_3\cdot\ddot{\theta}\,\overrightarrow{z}_{0,3}\\ &=D_3\cdot\omega^2\cdot\overrightarrow{x}_3-E_3\cdot\omega^2\cdot\overrightarrow{y}_3\\ &=\omega^2\cdot\left[(D_3\cdot\cos\theta+E_3\cdot\sin\theta)\cdot\overrightarrow{x}_0+(D_3\cdot\sin\theta-E_3\cdot\cos\theta)\cdot\overrightarrow{y}_0\right]\end{aligned}$$

- On en déduit $\{\mathscr{D}(S_3/R_0)\}$ exprimé dans la base $b_0 = \left(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0\right)$:

$$\{\mathscr{D}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} O_3 \\ -b \cdot m_3 \cdot \omega^2 \left(-\sin\theta \cdot \overrightarrow{x}_0 + \cos\theta \cdot \overrightarrow{y}_0\right) \end{array} \right\}_{\omega^2 \cdot \left[(D_3 \cdot \cos\theta + E_3 \cdot \sin\theta) \cdot \overrightarrow{x}_0 + (D_3 \cdot \sin\theta - E_3 \cdot \cos\theta) \cdot \overrightarrow{y}_0\right]}$$

Question 3 *Déduire du Principe Fondamental de la Dynamique, les équations de mouvement.*

Le Principe Fondamental de la dynamique appliqué à S_3 par rapport au référentiel R_0 donne :

- Théorème de la résultante dynamique :

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{x}_0 \\ \overrightarrow{y}_0 \\ \overrightarrow{z}_0 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} X_{03} = b \cdot m_3 \cdot \omega^2 \sin\theta \\ Y_{03} + m_3 \cdot g = -b \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cos\theta \\ Z_{03} = 0 \end{array} \right.$$

- Théorème du moment dynamique en O_0 :

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{x}_0 \\ \overrightarrow{y}_0 \\ \overrightarrow{z}_0 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} L_{03} = \omega^2 \cdot (D_3 \cdot \cos\theta + E_3 \cdot \sin\theta) + c \cdot m_3 \cdot g \\ M_{03} = \omega^2 \cdot (D_3 \cdot \sin\theta - E_3 \cdot \cos\theta) \\ C_m - m_3 \cdot g \cdot b \sin\theta = 0 \end{array} \right.$$