

Activation



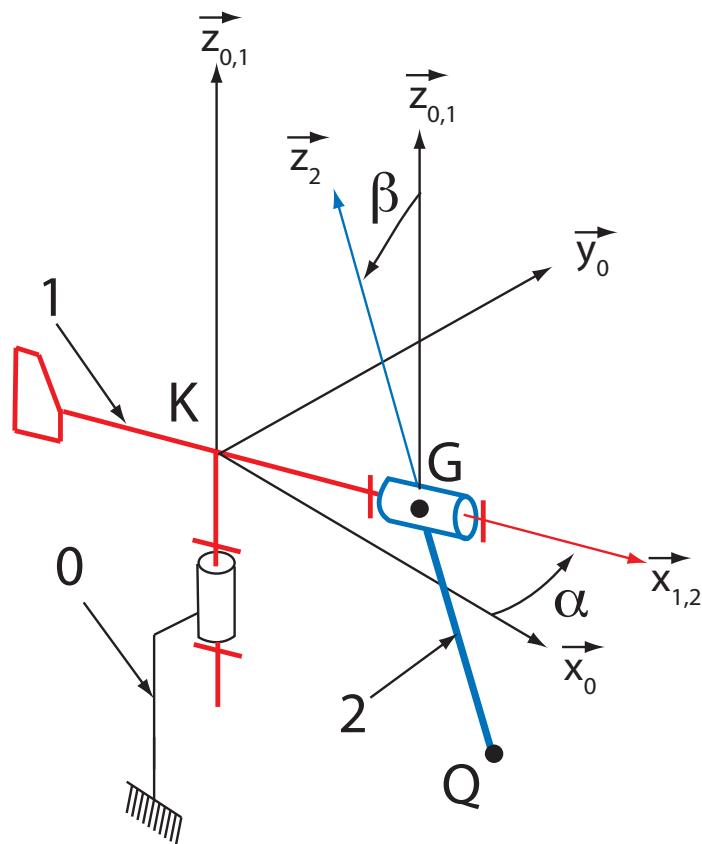
Activation – Éolienne

Emilien Durif

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides. On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 pour créer un couple C_m selon la direction \vec{z}_0 .

L'éolienne est composée de :

- un support **0**, auquel on associe un repère $R_0 = (K; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- une girouette **1** (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ avec le support **0**. On lui associe un repère $R_1 = (K; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}_1) : $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$;
- une hélice **2**, en liaison pivot d'axe $(K, \vec{x}_{1,2})$ avec **1**. On lui associe un repère $R_2 = (K; \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ choisi tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. On note M sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on

pose $\overrightarrow{KG} = a \overrightarrow{x}_1$. On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\overline{I}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{z}_2)}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd **3** assimilé à une masse ponctuelle m au point Q. On pose $\overrightarrow{GQ} = -b \overrightarrow{z}_2$.

Question 1 Tracer le schéma de structure de l'éolienne.

Correction

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Correction On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ($E = \{1 + 2 + 3\}$) en projection sur l'axe $(K, \overrightarrow{z}_0)$: $\mathcal{M}(K, \vec{E} \rightarrow \vec{E}) \cdot \overrightarrow{z}_0 = \overline{\delta}(K, E/R_0) \cdot \overrightarrow{z}_0 \Leftrightarrow C_m = \left(\overline{\delta}(K, 1/R_0) + \overline{\delta}(K, 2/R_0) + \overline{\delta}(K, 3/R_0) \right) \cdot \overrightarrow{z}_0$.

Question 3 Déterminer la composante suivant \overrightarrow{z}_0 du moment cinétique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **1**, notée $\sigma(K, 1/0) \cdot \overrightarrow{z}_0$.

Correction

- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $(K, \overrightarrow{z}_0)$:
- $\sigma(K, 1/0) \cdot \overrightarrow{z}_0 = \left(\overline{I}_K(1) \cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0) \right) \cdot \overrightarrow{z}_0 = \left(\overline{I}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_0 \right) \cdot \overrightarrow{z}_0$
- or on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \overrightarrow{z}) soit : $\overline{I}_K(1) \cdot \overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{z}_0 = J$
- Ainsi : $\sigma(K, 1/0) \cdot \overrightarrow{z}_0 = J \dot{\alpha}$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\overline{\sigma}(K, 2/0)$ calculé au point K de l'hélice **2** dans son mouvement par rapport à **0**.

Correction

- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- On connaît l'opérateur d'inertie en G, on calcule donc : $\overline{\sigma}(G, 2/0) : \overline{\sigma}(G, 2/0) = \overline{I}_G(2) \cdot \overrightarrow{\Omega}(2/0)$.
- On calcule $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$: $\overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} (\cos \beta \overrightarrow{z}_2 + \sin \beta \overrightarrow{y}_2)$.
- On calcule $\overline{\sigma}(G, 2/0) : \overline{\sigma}(G, 2/0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{z}_2)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{z}_2)}$.
- On calcule $\overline{\sigma}(K, 2/0)$:
 - $\overline{\sigma}(K, 2/0) = \overline{\sigma}(G, 2/0) + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{R}_c(2/0) = \overline{\sigma}(G, 2/0) + a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge M \cdot \overrightarrow{V}(G \in 2/0)$
 - On calcule $\overrightarrow{V}(G \in 2/0)$: $\overrightarrow{V}(G \in 2/0) = \overrightarrow{V}(K \in 2/0) + \overrightarrow{GK} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{0} - a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge (\dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1) = a \cdot \dot{\alpha} \overrightarrow{y}_1$
 - On calcule $a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge M \cdot \overrightarrow{V}(G \in 2/0)$: $a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge M \cdot \overrightarrow{V}(G \in 2/0) = a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge M (a \cdot \dot{\alpha} \overrightarrow{y}_1) = M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1$
 - On en déduit $\overline{\sigma}(K, 2/0) : \overline{\sigma}(K, 2/0) = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{z}_2)}$

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\overline{\sigma}(K, 3/0)$

Correction

- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi $\overline{\sigma}(Q, 3/0) = \overrightarrow{0}$.
- $\overline{\sigma}(K, 3/0) = \overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$:
 - On calcule \overrightarrow{KQ} : $\overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a \cdot \overrightarrow{x}_1 - b \cdot \overrightarrow{z}_2$
 - On calcule $\overrightarrow{V}(Q \in 3/0)$: $\overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = \overrightarrow{V}(Q \in 3/2) + \overrightarrow{V}(Q \in 2/1) + \overrightarrow{V}(Q \in 1/0) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{V}(G \in 2/1) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{V}(G \in 1/0) + \overrightarrow{GQ} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \overrightarrow{0} + b \cdot \overrightarrow{z}_2 \wedge \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 + b \cdot \overrightarrow{z}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 =$

$$\begin{aligned}
 & b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2} \\
 & - \text{On calcule } \overrightarrow{KQ} \wedge m \overrightarrow{V}(Q \in 3/0): \\
 & \overrightarrow{KQ} \wedge m \overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = m \cdot [a \cdot \vec{x}_1 - b \cdot \vec{z}_2] \wedge [b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{x}_{1,2}] \\
 & = m [a \cdot b \cdot \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2] \\
 & \bullet \overrightarrow{\sigma}(K, 3/0) = m [a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \vec{y}_2]
 \end{aligned}$$

Question 6 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta}(K, 1/0)$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta}(K, 1/0) = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(K, 1/0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 1/0)}{dt} \right]_{R_0} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

Question 7 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta}(K, 2/0)$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta}(K, 2/0) = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(K, 2/0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 2/0)}{dt} \right]_{R_0}$$

$$\text{Or, } \vec{z}_{0,1} = \cos \beta \cdot \vec{z}_2 + \sin \beta \cdot \vec{y}_2,$$

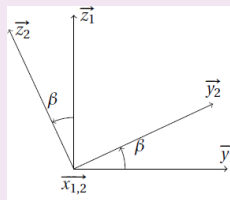
$$\begin{aligned}
 \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 2/0) &= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \\
 &= \dot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2]
 \end{aligned}$$

d'où,

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta}(K, 2/0) = \ddot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] + 2 \cdot \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta [B - C].$$

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon \vec{z}_0 : $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 3/0)$.

Correction



$$\begin{aligned}
 \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_2 &= \cos \beta \\
 \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_1 &= 1 \\
 \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_0 &= 0 \\
 \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_1 &= 0 \\
 \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 &= \sin \beta
 \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned}
 \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma}(K, 3/0) &= m \frac{d[a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cos \beta + a^2 \cdot \dot{\alpha} + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin^2 \beta]}{dt} \\
 &= m [a \cdot b \cdot (\dot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 \cdot (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)]
 \end{aligned}$$

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expriment du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Correction Le théorème du moment dynamique autour de l'axe $(K, \overrightarrow{z_{0,1}})$ donne : $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta$.