

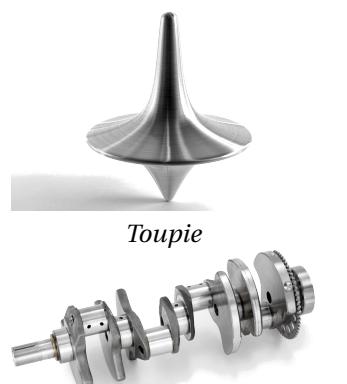
Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur

Chapitre 3 Application du Principe Fondamental de la Dynamique

Savoirs et compétences :

- Mod2.C16 : torseur cinétique
- Mod2.C17 : torseur dynamique
- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Mod2.C15 : matrice d'inertie
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement
- Res1.C2.SF1 : proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison



Volants d'inertie d'un vilebrequin

1	Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général	2
1.1	Théorème de la résultante dynamique	2
1.2	Théorème du moment dynamique	2
2	Torseur cinétique	2
2.1	Définition	2
2.2	Écriture avec l'opérateur d'inertie	2
2.3	Cas particuliers	2
2.4	Méthodologie de Calcul	2
3	Torseur dynamique	3
3.1	Définition	3
3.2	Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques	4
3.3	Cas particuliers	4
3.4	Méthodologie de calcul	5
1		82

1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

Définition — Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique. Soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égale au torseur dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G \in E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)} \end{array} \right\}_A.$$

- On note $\overrightarrow{R_d(S/R_0)}$ la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie G .
- Le **moment dynamique** dépend du point A et se note $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$.

Du Principe Fondamental de la dynamique découle plusieurs **théorèmes généraux**.

1.1 Théorème de la résultante dynamique

Théorème — Théorème de la résultante dynamique. Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G \in E/R_0)}.$$

1.2 Théorème du moment dynamique

Théorème — Théorème du moment dynamique. Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}.$$

2 Torseur cinétique

2.1 Définition

2.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

Propriété Pour un solide S de masse m dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

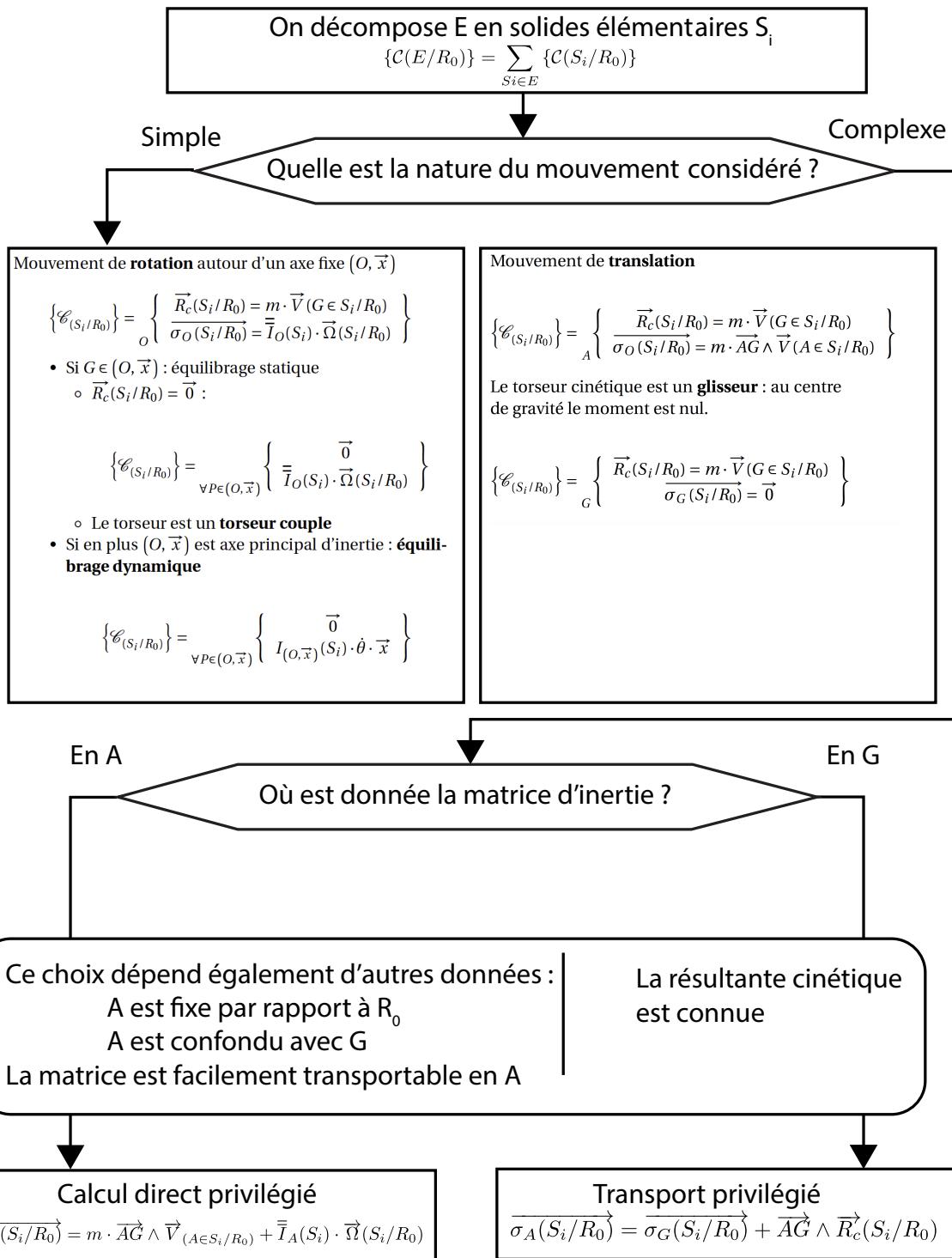
$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A \in S/R_0)}.$$

2.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point A fixe dans le mouvement de S/R_0 , on a : $\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.
- En appliquant cette formule en G , centre d'inertie de S , on a : $\overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)} = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.

2.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne la méthodologie de calcul du moment cinétique en un point A sur la figure suivante.



3 Torseur dynamique

3.1 Définition

Définition Le **torseur dynamique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_d(S/R_0) = \int_{P \in S} \vec{\Gamma}(P/R_0) dm \\ \vec{\delta}(A, S/R_0) = \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur dynamique, $\vec{R}_d(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie :

$$\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0).$$

- Le moment dynamique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point :

$$\overrightarrow{\delta}(B, S/R_0) = \overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R_0).$$

3.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Propriété — Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques. Pour un solide S de masse M dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

- Relation entre les **résultantes** :

$$\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{R_c}(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}.$$

- Relation entre les **moments** :

$$\overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0).$$

3.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point O **fixe** dans R_0 , on a :

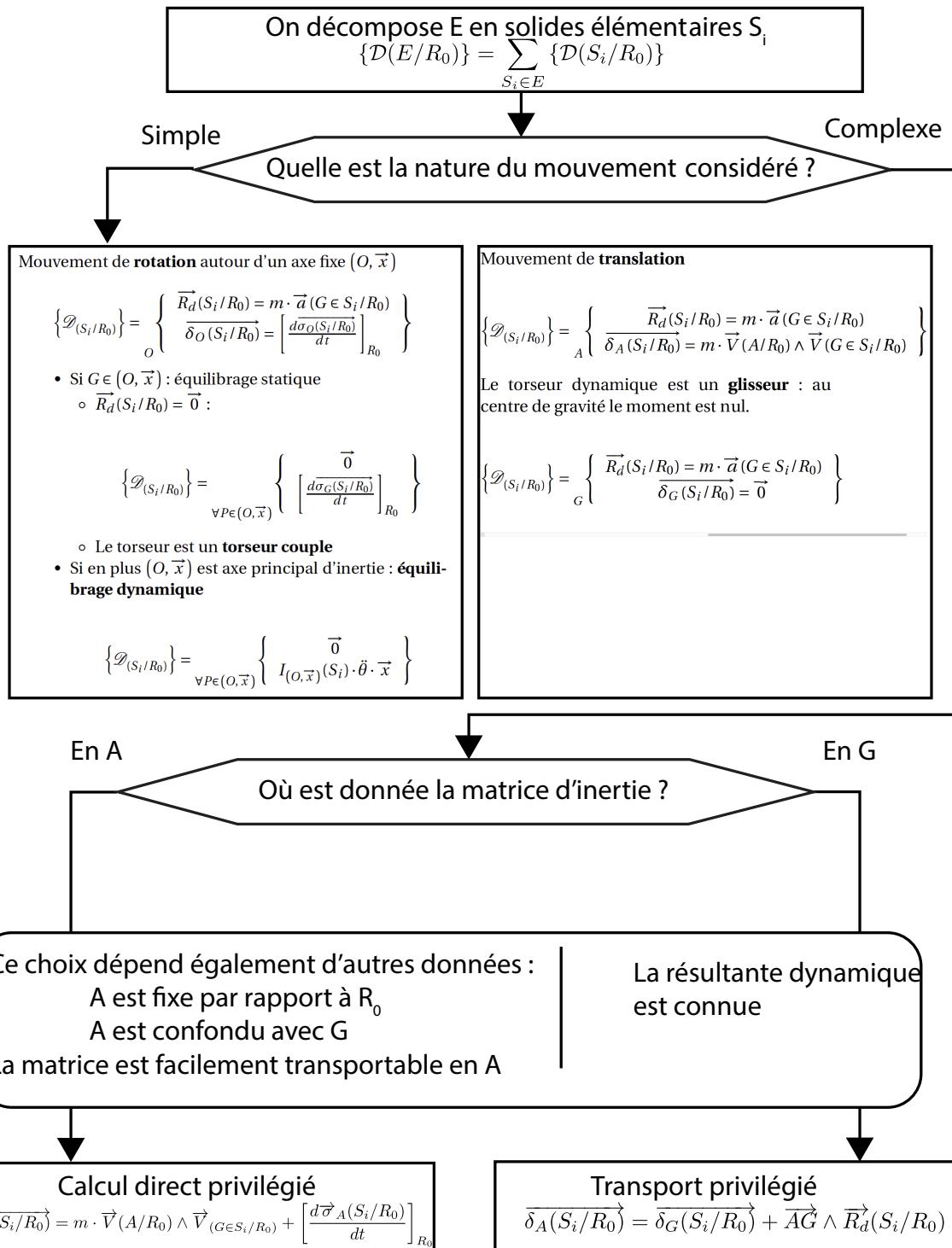
$$\overrightarrow{\delta}(O, S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(O, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}.$$

- En appliquant cette formule en un point G, **centre d'inertie de S**, on a :

$$\overrightarrow{\delta}(G, S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(G, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}.$$

3.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne l'algorithme de calcul du moment dynamique en un point A sur la figure ci-dessous.



Références

- [1] Emilien Durif, *Cinétique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.
- [2] Florestan Mathurin, *Cinétique*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Bilan

Point considéré	Point quelconque A	Centre de gravité G	Point fixe dans \mathcal{R}_0 , A
Torseur cinétique $\{\mathcal{C}(S/R_0)\}$	$\begin{cases} \vec{R}_c(S/R_0) = m \vec{V}(G/R_0) \\ \sigma(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) + m \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R_0) \end{cases}_A$	$\begin{cases} \vec{R}_c(S/R_0) = m \vec{V}(G/R_0) \\ \sigma(G, S/R_0) = I_G(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) \end{cases}_G$	$\begin{cases} \vec{R}_c(S/R_0) = m \vec{V}(G/R_0) \\ \sigma(A, S/R_0) = I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) \end{cases}_A$
Torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_0)\}$	$\begin{cases} \vec{R}_d(S/R_0) = m \vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \delta(A, S/R_0) = \left[\frac{d\sigma(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \vec{V}(A/R_0) \wedge \vec{R}_c(S/R_0) \end{cases}_A$	$\begin{cases} \vec{R}_d(S/R_0) = m \vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \delta(G, S/R_0) = \left[\frac{d\sigma(G, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{cases}_G$	$\begin{cases} \vec{R}_d(S/R_0) = m \vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \delta(A, S/R_0) = \left[\frac{d\sigma(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \end{cases}_A$

Activation 1



Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

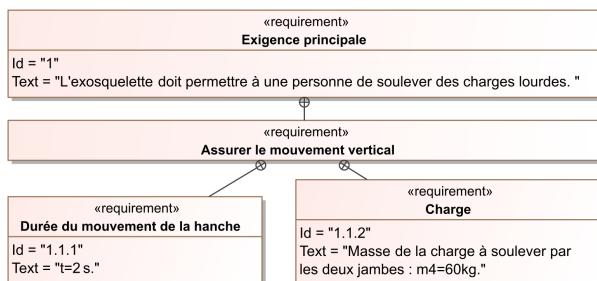
Concours Centrale Supelec TSI 2017

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



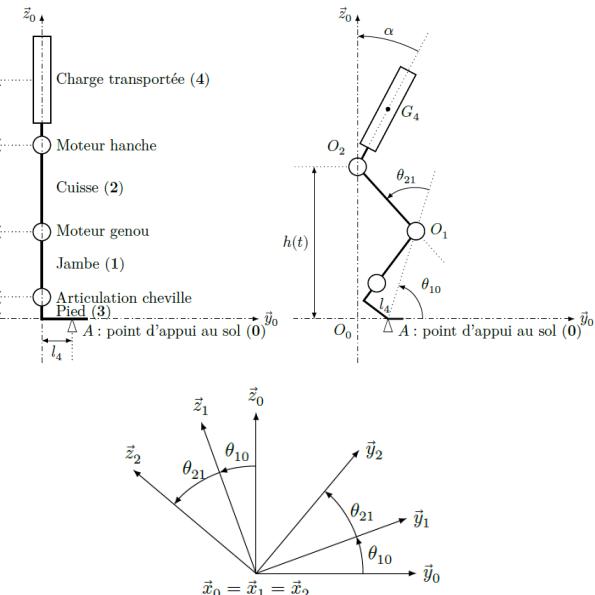
Objectif Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Élaboration du modèle dynamique

Objectif Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

Ces calculs visent à déterminer l'équation dynamique qui permet d'obtenir le couple moteur (minimal) en fonction des caractéristiques géométriques et massiques de la

charge à soulever ainsi que des conditions d'utilisation. Le modèle d'étude est celui représenté à la figure suivante correspondant au modèle d'étude plan position fléchie.



Hypothèses :

- L'étude est modélisable dans le plan.
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- Les inerties des pièces sont négligées sauf la masse de la charge à soulever.
- L'angle α entre la charge transportée et la verticale \vec{z}_0 reste constant.
- G_4 , centre de gravité de la charge transportée (4), reste en permanence à la verticale du point A d'appui au sol.

Données :

- $\overrightarrow{O_1 G_4} = \lambda(t) \vec{z}_0 - L \cos \theta_{10} \vec{y}_0$;
- Accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$;
- Longueur de la cuisse $l_1 = 43,1 \text{ cm}$.
- Longueur de la jambe $l_2 = 43,3 \text{ cm}$.
- Longueur de l'articulation de la cheville à la plante arrière du pied $l_3 = 6,9 \text{ cm}$.
- Longueur de la plante arrière du pied au point d'appui sur le sol $l_4 = 13 \text{ cm}$.
- Longueur $\overrightarrow{O_0 O_1} = L \vec{y}_1$ avec $L = 51,8 \text{ cm}$.
- Rapport de réduction : $r = \frac{1}{120}$.

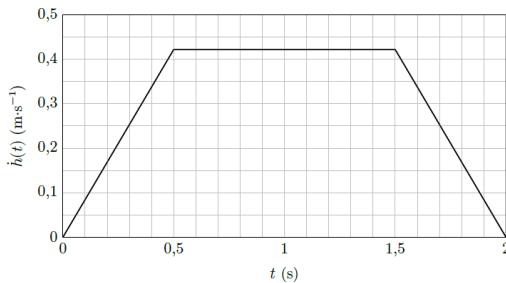
On note $E = \{\text{cuisse}(2) + \text{charge transportée}(4)\}$.

Question 1 Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\dot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Question 3 Déduire $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\ddot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

La loi d'évolution de la vitesse de la hanche est donnée à la figure suivante.



Question 4 Déterminer l'expression littérale du couple C_r exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche et calculer numériquement ce couple pour une valeur de θ_{10} égale à $54,5^\circ$ correspondant à la valeur maximale du couple.

Question 5 Calculer le couple C_m au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte $\eta = 0,75$ (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

Question 6 Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

Validation du dimensionnement du moteur

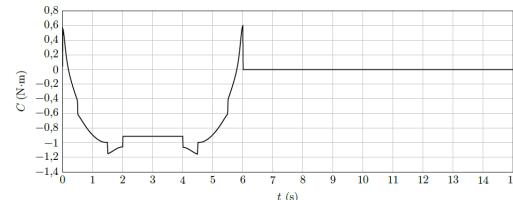
Objectif Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

Le cycle suivant obtenu à l'aide du modèle multiphysique de représente l'évolution du couple moteur, et ce en tenant compte du moment d'inertie du rotor, sur un cycle de période $T = 15$ s.

Quatre phases sont définies sur cette période :

- phase 1 pour $0 \leq t < 2$ s, valeur efficace du couple moteur $C_1 = 0,838 \text{ Nm}$;

- phase 2 pour $2 \leq t < 4$ s, couple moteur constant $C_2 = -0,912 \text{ Nm}$;
- phase 3 pour $4 \leq t < 6$ s, valeur efficace du couple moteur $C_3 = 0,838 \text{ Nm}$;
- phase 4 pour $6 \leq t < 15$ s, couple moteur nul.



Question 7 Préciser à quels mouvements correspondent les 4 phases de ce cycle.

Le couple efficace est également appelé couple thermiquement équivalent, il est défini par : $C_{\text{eff}} =$

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T c(t)^2 dt}. \text{ On a aussi } C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i}$$

Question 8 Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

Retour sur l'objectif

Le couple moteur varie entre $-1,156 \text{ Nm}$ et $0,596 \text{ Nm}$. Les caractéristiques du moteur choisi sont :

- vitesse à vide de 3120 tr min^{-1} pour une alimentation nominale en amont de l'onduleur de 36 V ;
- couple permanent admissible de $0,560 \text{ Nm}$;
- pente de la courbe de la vitesse en fonction du couple de $423 \text{ tr min}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

De plus une étude cinématique précédente a montré que le moteur permettant d'actionner le moteur doit pouvoir atteindre une vitesse de 2200 tr min^{-1} .

Question 9 Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.

Éléments de corrigé :

- \cdot
- $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = -Lm_4 \cos \theta_{10} \dot{h}(t)$.
- $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = -Lm_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$.
- $C_r = -m_4 L \cos \theta_{10} (g + \ddot{h}(t)) \approx 190,5 \text{ Nm}$.
- $C_m \approx 2,12 \text{ Nm}$.
- \dots
- \dots
- $C_{\text{eff}} \approx 0,546 \text{ Nm}$.

Problématique
Le moteur pré-choisi permet d'assurer le fonctionnement de l'exosquelette ?

Domaine de la modélisation

Résolution Cinématique

- $N_{\text{mot}} = 2200 \text{ tr min}^{-1}$

Modèle cinématique

Domaine du client

Moteur choisi

- Vitesse à vide : 3120 tr min^{-1}
- Couple permanent admissible : $0,56 \text{ Nm}$

Colle



Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

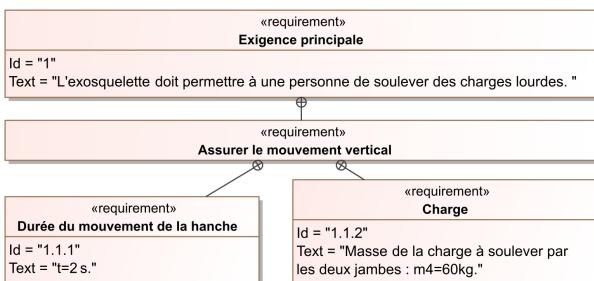
Concours Centrale Supelec TSI 2017

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



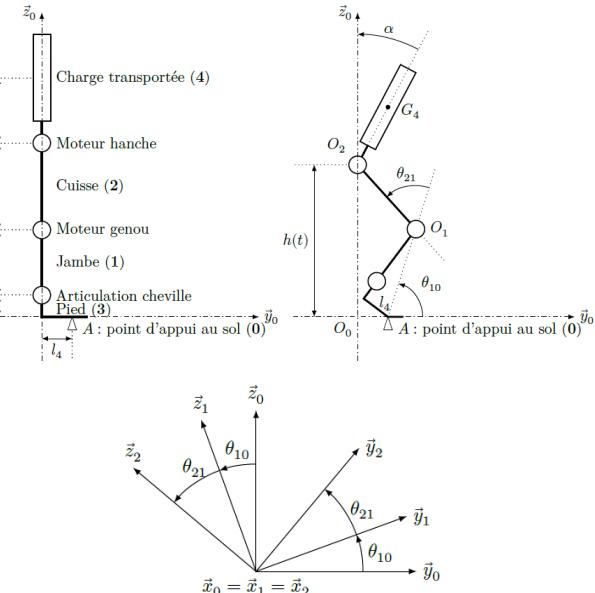
Objectif Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Élaboration du modèle dynamique

Objectif Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

Ces calculs visent à déterminer l'équation dynamique qui permet d'obtenir le couple moteur (minimal) en fonction des caractéristiques géométriques et massiques de la

charge à soulever ainsi que des conditions d'utilisation. Le modèle d'étude est celui représenté à la figure suivante correspondant au modèle d'étude plan position fléchie.



Hypothèses :

- L'étude est modélisable dans le plan.
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- Les inerties des pièces sont négligées sauf la masse de la charge à soulever.
- L'angle α entre la charge transportée et la verticale \vec{z}_0 reste constant.
- G_4 , centre de gravité de la charge transportée (4), reste en permanence à la verticale du point A d'appui au sol.

Données :

- $\overrightarrow{O_1 G_4} = \lambda(t) \vec{z}_0 - L \cos \theta_{10} \vec{y}_0$;
- Accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$;
- Longueur de la cuisse $l_1 = 43,1 \text{ cm}$.
- Longueur de la jambe $l_2 = 43,3 \text{ cm}$.
- Longueur de l'articulation de la cheville à la plante arrière du pied $l_3 = 6,9 \text{ cm}$.
- Longueur de la plante arrière du pied au point d'appui sur le sol $l_4 = 13 \text{ cm}$.
- Longueur $\overrightarrow{O_0 O_1} = L \vec{y}_1$ avec $L = 51,8 \text{ cm}$.
- Rapport de réduction : $r = \frac{1}{120}$.

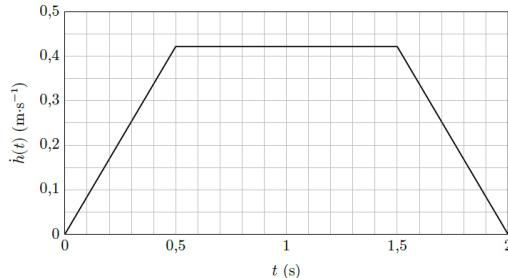
On note $E = \{\text{cuisse}(2) + \text{charge transportée}(4)\}$.

Question 1 Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\dot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Question 3 Déduire $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\ddot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

La loi d'évolution de la vitesse de la hanche est donnée à la figure suivante.



Question 4 Déterminer l'expression littérale du couple C_r exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche et calculer numériquement ce couple pour une valeur de θ_{10} égale à 54,5° correspondant à la valeur maximale du couple.

Question 5 Calculer le couple C_m au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte $\eta = 0,75$ (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

Question 6 Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

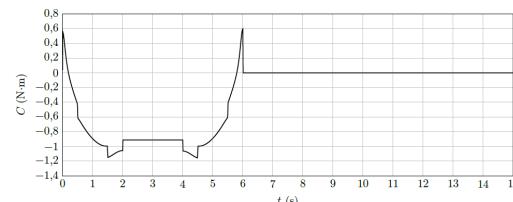
Validation du dimensionnement du moteur

Objectif Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

Le cycle suivant obtenu à l'aide du modèle multiphysique de représente l'évolution du couple moteur, et ce en tenant compte du moment d'inertie du rotor, sur un cycle de période $T = 15$ s.

Quatre phases sont définies sur cette période :

- phase 1 pour $0 \leq t < 2$ s, valeur efficace du couple moteur $C_1 = 0,838 \text{ Nm}$;
- phase 2 pour $2 \leq t < 4$ s, couple moteur constant $C_2 = -0,912 \text{ Nm}$;
- phase 3 pour $4 \leq t < 6$ s, valeur efficace du couple moteur $C_3 = 0,838 \text{ Nm}$;
- phase 4 pour $6 \leq t < 15$ s, couple moteur nul.



Question 7 Préciser à quels mouvements correspondent les 4 phases de ce cycle.

Le couple efficace est également appelé couple thermiquement équivalent, il est défini par : $C_{\text{eff}} =$

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T c(t)^2 dt}. \text{ On a aussi } C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i}$$

Question 8 Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

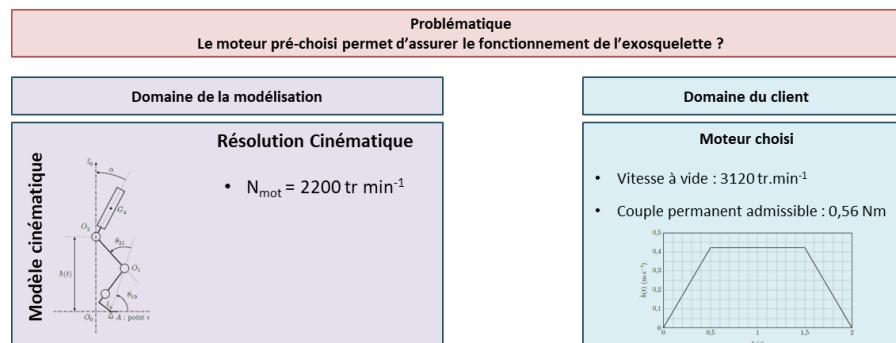
Retour sur l'objectif

Le couple moteur varie entre $-1,156 \text{ Nm}$ et $0,596 \text{ Nm}$. Les caractéristiques du moteur choisi sont :

- vitesse à vide de 3120 tr min^{-1} pour une alimentation nominale en amont de l'onduleur de 36 V;
- couple permanent admissible de $0,560 \text{ Nm}$;
- pente de la courbe de la vitesse en fonction du couple de $423 \text{ tr min}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

De plus une étude cinématique précédente a montré que le moteur permettant d'actionner le moteur doit pouvoir atteindre une vitesse de 2200 tr min^{-1} .

Question 9 Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.



Activation 1 –**Corrigé****Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie**

Concours Centrale Supelec TSI 2017

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

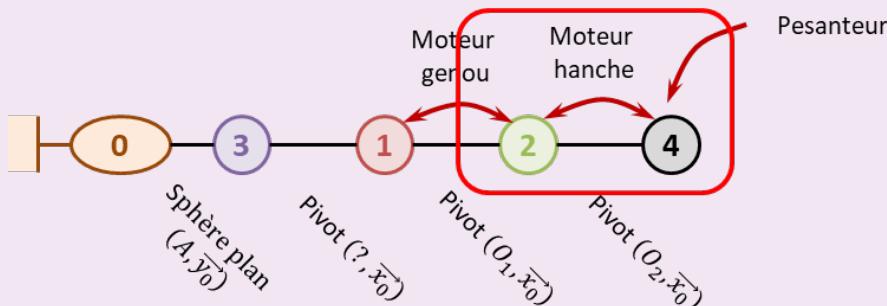
Objectif Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Élaboration du modèle dynamique

Objectif Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

Question 1 Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

Correction Étant donné que l'on souhaite que l'angle α reste constant pendant la levée d'une charge, le mouvement de 4 sera donc un mouvement de translation rectiligne.



Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\dot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Correction E étant en translation, on a $\overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)} = \vec{0}$. On a alors $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} = \overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)} + \overrightarrow{O_1 G_4} \wedge \overrightarrow{R_c(E/0)}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{R_c(E/0)} = m_4 \overrightarrow{V(G_4 \in E/0)} = m_4 \dot{h}(t) \vec{z}_0$. On a donc : $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = ((\lambda(t) \vec{z}_0 - L \cos \theta_{10} \vec{y}_0) \wedge m_4 \dot{h}(t) \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = -L m_4 \cos \theta_{10} \dot{h}(t)$.

Question 3 Déduire $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\ddot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Correction Méthode 1 – Calcul de $\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)}$ et déplacement

On a $\overrightarrow{\delta(G_4, E/0)} = \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4, E/0)}}{dt} = \vec{0}$. En conséquences, $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = ((\lambda(t) \vec{z}_0 - L \cos \theta_{10} \vec{y}_0) \wedge m_4 \ddot{h}(t) \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = -L m_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$.

Méthode 2 – Calcul de $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)}$

On a aussi $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)}}{dt} \right) + m_4 \overrightarrow{V(O_1/0)} \wedge \overrightarrow{V(G_4 \in E/0)}$.

$$\begin{aligned} \text{Par suite on a } & \left(\overrightarrow{V(O_1 \in E/0)} \wedge \overrightarrow{V(G_4 \in E/0)} \right) \overrightarrow{x_0} = ((L \overrightarrow{y_1} \wedge \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{x_0}) \wedge \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}) \overrightarrow{x_0} \\ & = (-L \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{z_1} \wedge \dot{h}(t) \overrightarrow{z_0}) \overrightarrow{x_0} \\ & = -L \dot{\theta}_{10} \dot{h}(t) \sin \theta_{10}. \end{aligned}$$

$$\text{Enfin, } \overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \overrightarrow{x_0} = -Lm_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t) + Lm_4 \dot{\theta}_{10} \sin \theta_{10} \dot{h}(t) - m_4 L \dot{\theta}_{10} \dot{h}(t) \sin \theta_{10} = -Lm_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t).$$

Question 4 Déterminer l'expression littérale du couple C_r exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche et calculer numériquement ce couple pour une valeur de θ_{10} égale à 54,5° correspondant à la valeur maximale du couple.

Correction

- On isole l'ensemble E .

- On réalise le bilan des actions mécaniques :

- action de la liaison pivot : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow E)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(1 \rightarrow E)}}{\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)}} \right\}_{O_1}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = 0$;
- action du réducteur : $\{\mathcal{T}(1_r \rightarrow E)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{C_r \overrightarrow{x_0}} \right\}_{O_1}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, 1 \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = 0$;
- action de la pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \frac{-m_4 g \overrightarrow{z_0}}{\overrightarrow{0}} \right\}_{G_4}$. On a alors $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_1, \text{pes} \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{\mathcal{M}(G_4, \text{pes} \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{x_0} + (\overrightarrow{O_1 G_4} \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = ((\lambda(t) \overrightarrow{z_0} - L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0}) \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = (-L \cos \theta_{10} \overrightarrow{y_0} \wedge -m_4 g \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_0} = m_4 g L \cos \theta_{10}$.

- E étant en pivot d'axe ($O_1, \overrightarrow{x_1}$), on applique le théorème du moment dynamique en O_1 en projection sur $\overrightarrow{x_1}$:

$$-Lm_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t) = C_r + m_4 g L \cos \theta_{10} \Leftrightarrow C_r = -m_4 L \cos \theta_{10} (g + \ddot{h}(t)).$$

En réalisant l'application numérique, on a : $C_r = -60 \times 51,8 \times 10^{-2} \times \cos 54,5 \left(9,81 + \frac{0,425}{0,5} \right) \simeq 190,5 \text{ Nm}$.

Question 5 Calculer le couple C_m au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte $\eta = 0,75$ (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

Correction En régime permanent, on a $\eta = \frac{C_r \omega_r}{C_m \omega_m} = r \frac{C_r}{C_m}$ et $C_m = \frac{r}{\eta} C_r = \frac{1}{0,75 \times 120} \times 190,5 \simeq 2,12 \text{ Nm}$.

Question 6 Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

Correction Si on en avait la possibilité, il faudrait mettre un capteur de puissance au niveau de la commande (mesure de la vitesse et du couple de commande) puis un capteur de puissance au niveau de la charge (mesure de vitesse et du couple en sortie au niveau du genou). Le rendement peut s'observer en régime permanent en faisant le rapport des puissances. Pour observer une perte de rendement, il est nécessaire que soient modélisées les actions de frottement.

Validation du dimensionnement du moteur

Objectif Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

Question 7 Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

Correction $C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i} = \sqrt{\frac{1}{15} (0,838^2 \times 2 + 0,912^2 \times 2 + 0,838^2 \times 2)} \simeq 0,546 \text{ Nm}$.

Retour sur l'objectif

Question 8 Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.

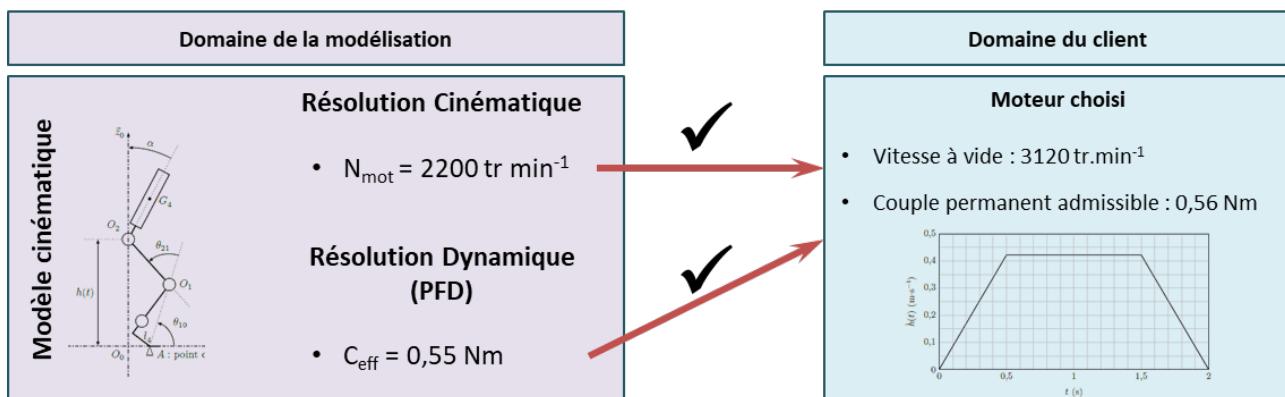
Correction

- Le couple thermiquement équivalent calculé est de 0,546 Nm ce qui est inférieur aux couple admissible par le moteur.
- La fréquence de rotation à atteindre par le moteur est de 2200 tr min^{-1} . Le moteur proposé tourne à 3120 tr min^{-1} à vide. On peut donc supposer qu'en charge, il atteindra les 2200 tr min^{-1} .

Su ces deux critères le moteur proposé est donc validé.

Problématique

Le moteur pré-choisi permet d'assurer le fonctionnement de l'exosquelette ?



Activation 2



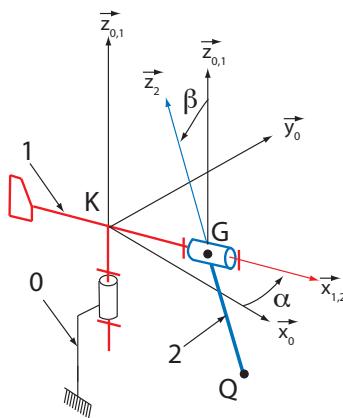
Éolienne

Émilien Durif

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides. On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 pour créer un couple C_m selon la direction \vec{z}_0 .

L'éolienne est composée de :

- un support **0**, auquel on associe un repère $R_0 = (K; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- une girouette **1** (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ avec le support **0**. On lui associe un repère $R_1 = (K; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}_1) : $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$;
- une hélice **2**, en liaison pivot d'axe $(K, \vec{x}_{1,2})$ avec **1**. On lui associe un repère $R_2 = (K; \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ choisi tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. On note M sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\vec{KG} = \alpha \cdot \vec{x}_1$. On donne la

matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\bar{\bar{I}}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd **3** assimilé à une masse ponctuelle m au point Q . On pose $\vec{GQ} = -b \vec{z}_2$.

Question 1 Tracer le schéma de structure de l'éolienne.

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Question 3 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment cinétique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **1**, notée $\vec{\sigma}(K, 1/0) \cdot \vec{z}_0$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(K, 2/0)$ calculé au point K de l'hélice **2** dans son mouvement par rapport à **0**.

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(K, 3/0)$

Question 6 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **0**, notée $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}(K, 1/0)$.

Question 7 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}(K, 2/0)$.

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de **3/0** selon \vec{z}_0 : $\vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}(K, 3/0)$.

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice **2** ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expriment du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre **0** et **1**) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

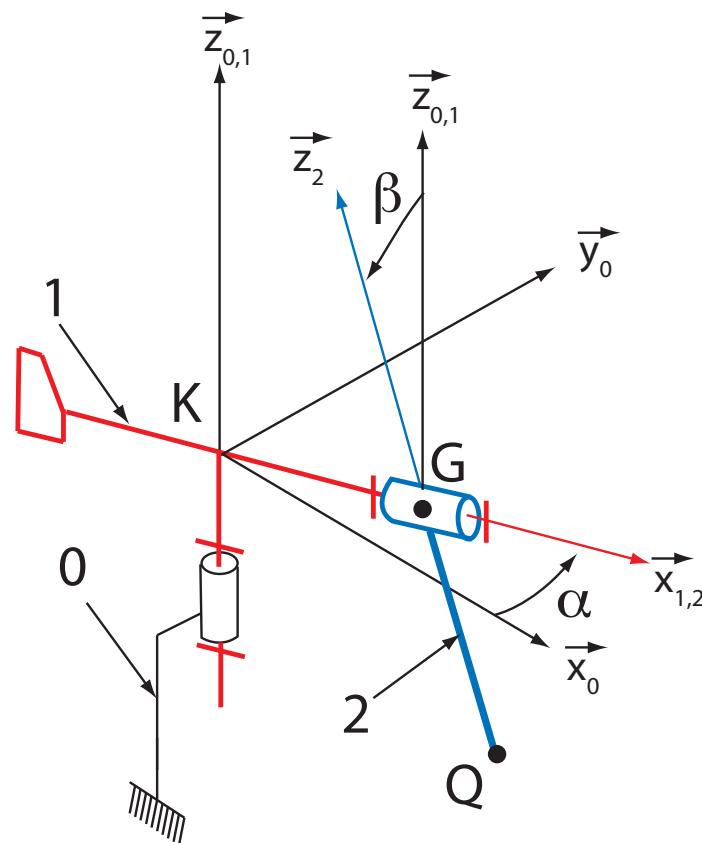
Activation 2 –**Corrigé****Éolienne**

Émilien Durif

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides. On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 pour créer un couple C_m selon la direction \vec{z}_0 .

L'éolienne est composée de :

- un support **0**, auquel on associe un repère $R_0 = (K; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- une girouette **1** (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ avec le support **0**. On lui associe un repère $R_1 = (K; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}_1) : $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$;
- une hélice **2**, en liaison pivot d'axe $(K, \vec{x}_{1,2})$ avec **1**. On lui associe un repère $R_2 = (K; \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ choisi tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. On note M sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\vec{KG} = a \vec{x}_1$. On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\bar{\bar{I}}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd 3 assimilé à une masse ponctuelle m au point Q . On pose $\overrightarrow{GQ} = -b \overrightarrow{z_2}$.

Question 1 Tracer le schéma de structure de l'éolienne.

Correction

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Correction On pourra appliquer un théorème du moment dynamique s'appliquant sur l'éolienne ($E = \{1 + 2 + 3\}$) en projection sur l'axe $(K, \overrightarrow{z_0})$: $\overrightarrow{\mathcal{M}(K, \bar{E} \rightarrow E)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\delta(K, E/R_0)} \cdot \overrightarrow{z_0} \Leftrightarrow C_m = (\overrightarrow{\delta(K, 1/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 2/R_0)} + \overrightarrow{\delta(K, 3/R_0)}) \cdot \overrightarrow{z_0}$.

Question 3 Déterminer la composante suivant $\overrightarrow{z_0}$ du moment cinétique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 1, notée $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}$.

Correction

- Le mouvement de 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $(K, \overrightarrow{z_0})$:
- $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \overrightarrow{z_0} = (\bar{I}_K(1) \cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0)) \cdot \overrightarrow{z_0} = (\bar{I}_K(1) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{z_0}$
- or on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \overrightarrow{z}) soit: $\bar{I}_K(1) \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{z_0} = J$
- Ainsi: $\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)} \cdot \overrightarrow{z_0} = J \dot{\alpha}$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$ calculé au point K de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.

Correction

- Le mouvement de 2/0 n'est pas un mouvement simple.
- On connaît l'opérateur d'inertie en G , on calcule donc: $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} = \bar{I}_G(2) \cdot \overrightarrow{\Omega}(2/0)$.
- On calcule $\overrightarrow{\Omega}(2/0) : \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 = \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha}(\cos \beta \overrightarrow{z}_2 + \sin \beta \overrightarrow{y}_2)$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})}$.
- On calcule $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}$:
 - $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{R_c}(2/0) = \overrightarrow{\sigma(G, 2/0)} + a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge M \cdot \overrightarrow{V}(G \in 2/0)$
 - On calcule $\overrightarrow{V}(G \in 2/0) : \overrightarrow{V}(G \in 2/0) = \overrightarrow{V}(K \in 2/0) + \overrightarrow{KG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/0) = \overrightarrow{0} - a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge (\dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_{1,2} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1) = a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1$
 - On calcule $a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge M \cdot \overrightarrow{V}(G \in 2/0) : a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge M \cdot \overrightarrow{V}(G \in 2/0) = a \cdot \overrightarrow{x}_1 \wedge M(a \cdot \dot{\alpha} \overrightarrow{y}_1) = M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1$
 - On en déduit $\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} : \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})}$

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)}$

Correction

- Le solide 3 est solide à masse ponctuelle, ainsi $\overrightarrow{\sigma(Q, 3/0)} = \overrightarrow{0}$.
- $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = \overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}(Q \in 3/0) :$
 - On calcule $\overrightarrow{KQ} : \overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GQ} = a \cdot \overrightarrow{x}_1 - b \cdot \overrightarrow{z}_2$
 - On calcule $\overrightarrow{V}(Q \in 3/0) : \overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = \overrightarrow{V}(Q \in 3/2) + \overrightarrow{V}(Q \in 2/1) + \overrightarrow{V}(Q \in 1/0) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{V}(G \in 2/1) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/1) + \overrightarrow{V}(G \in 1/0) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \overrightarrow{0} + b \cdot \overrightarrow{z}_2 \wedge \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 + b \cdot \overrightarrow{z}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 = b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \overrightarrow{x}_{1,2}$
 - On calcule $\overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}(Q \in 3/0) :$

$$\overrightarrow{KQ} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}(Q \in 3/0) = m \cdot [a \cdot \overrightarrow{x}_1 - b \cdot \overrightarrow{z}_2] \wedge [b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y}_2 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y}_1 - b \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \overrightarrow{x}_{1,2}] = m [a \cdot b \cdot \overrightarrow{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \overrightarrow{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \overrightarrow{y}_2]$$
 - $\overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} = m [a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \overrightarrow{x}_1 + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \cdot \overrightarrow{y}_2]$

Question 6 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique au point K de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)}$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 1/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 1/0)}}{dt} \right]_{R_0} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

Question 7 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)}$.

Correction

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \vec{z}_0 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)}}{dt} \right]_{R_0}$$

Or, $\vec{z}_{0,1} = \cos \beta \cdot \vec{z}_2 + \sin \beta \cdot \vec{y}_2$,

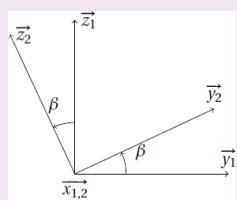
$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 2/0)} &= \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \\ &= \dot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] \end{aligned}$$

d'où,

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K, 2/0)} = \dot{\alpha} [B \cdot \sin^2 \beta + C \cdot \cos^2 \beta + M \cdot a^2] + 2 \cdot \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta [B - C].$$

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de 3/0 selon $\vec{z}_0 : \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 3/0)}$.

Correction



$$\begin{aligned} \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_2 &= \cos \beta \\ \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{z}_1 &= 1 \\ \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_0 &= 0 \\ \vec{z}_{0,1} \cdot \vec{x}_1 &= 0 \\ \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 &= \sin \beta \end{aligned}$$

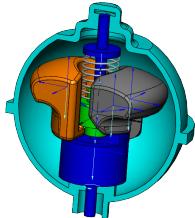
On trouve alors :

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma(K, 3/0)} &= m \frac{d[a \cdot b \cdot \dot{\beta} \cos \beta + a^2 \cdot \dot{\alpha} + b^2 \cdot \dot{\alpha} \sin^2 \beta]}{dt} \\ &= m [a \cdot b \cdot (\dot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 \cdot (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta)] \end{aligned}$$

Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice 2 ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expriment du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre 0 et 1) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Correction Le théorème du moment dynamique autour de l'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ donne : $C_m = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta$.

Activation 2



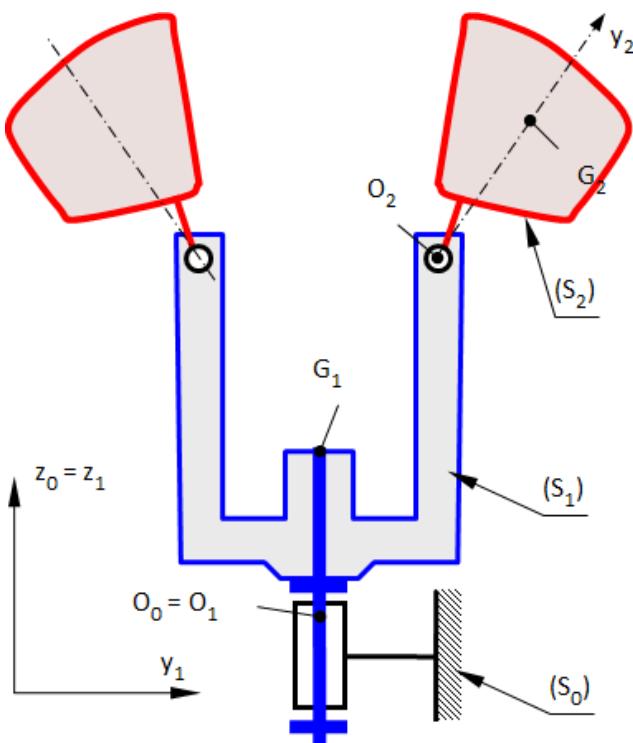
Application – Régulateur centrifuge

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- Mod2.C13 : centre d'inertie
- Mod2.C14 : opérateur d'inertie
- Mod2.C15 : matrice d'inertie

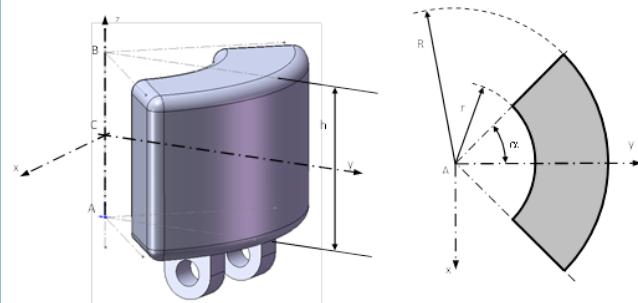
On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor (S_1) et la masselotte (S_2) représentés schématiquement ci-dessous.



- (S_1) est en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{z}_0) avec (S_0).
- (S_2) est en liaison pivot d'axe (O_2, \vec{x}_1) avec (S_1).
- (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = θ_1 .
- (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = θ_2 .
- $\overrightarrow{O_0G_1} = h_1 \vec{z}_0$.
- $\overrightarrow{O_0O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$.
- $\overrightarrow{O_2G_2} = L_2 \vec{y}_2$.

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



Question 1 Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Afin de ne pas trop alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Question 2 Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

Question 3 Déterminer :

- le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$ en O_1 ;
- le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$ en O_2 .

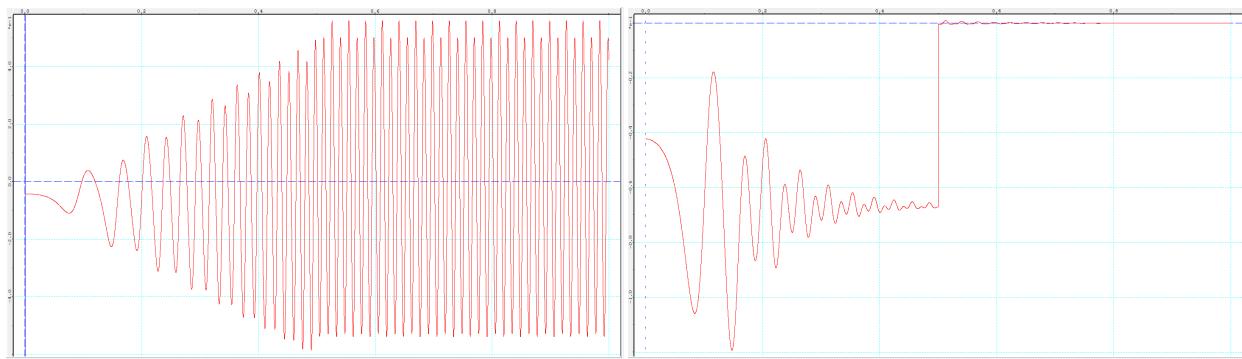
Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$.

Question 5 Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$ en O_2 ?

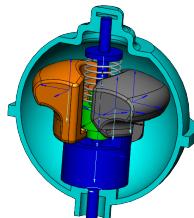
Question 6 Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre S_1 et S_2 (couple maximal 0,46 Nm), une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

Question 7 Commenter ces résultats.



Activation 2 –

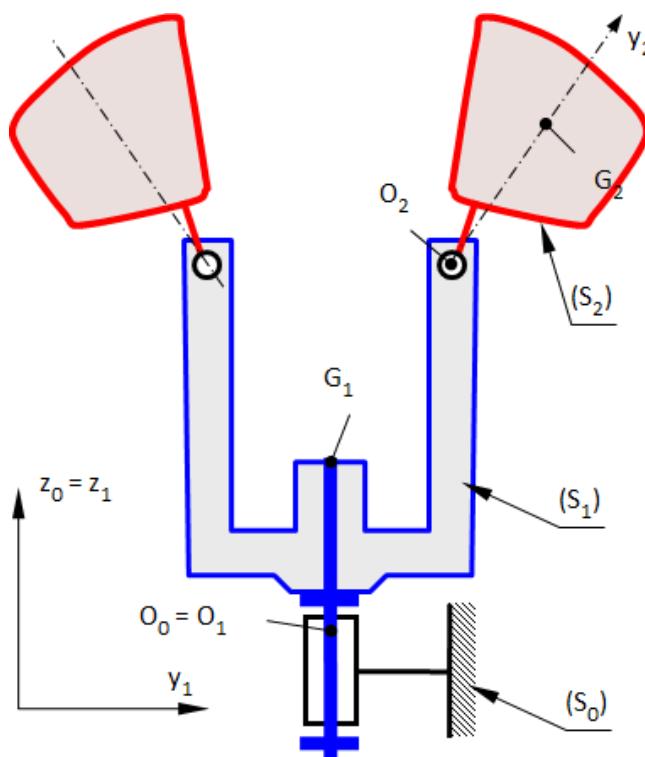
Corrigé**Application – Régulateur centrifuge**

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- Mod2.C13 : centre d'inertie
- Mod2.C14 : opérateur d'inertie
- Mod2.C15 : matrice d'inertie

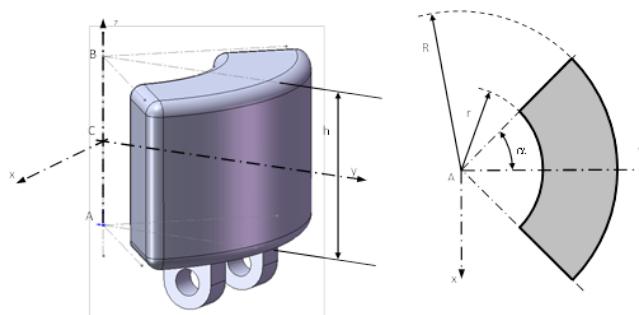
On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor (S_1) et la masselotte (S_2) représentés schématiquement ci-dessous.



- (S_1) est en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{z}_0) avec (S_0) .
- (S_2) est en liaison pivot d'axe (O_2, \vec{x}_1) avec (S_1) .
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$.
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$.
- $\overrightarrow{O_0 G_1} = h_1 \vec{z}_0$.
- $\overrightarrow{O_0 O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$.
- $\overrightarrow{O_2 G_2} = L_2 \vec{y}_2$.

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



Question 1 Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Correction Le solide 1 est axisymétrique. En tout point de l'axe du solide, la matrice d'inertie sera diagonale. On

$$\text{a donc } I_{O_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}.$$

Le solide 2 admet le plan (\vec{y}_2, \vec{z}_2) comme plan de symétrie. Les produits d'inertie dépendant de x sont nuls.

$$\text{On a donc } I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}.$$

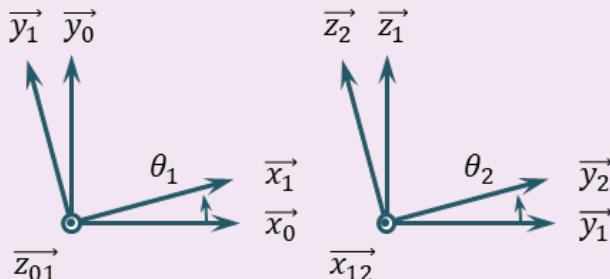
Afin de ne pas trop alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Question 2 Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

Question 3 Déterminer :

- le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$ en O_1 ;
- le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$ en O_2 .

Correction



Mouvement du solide 1/0

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1}.$$

O_1 est un point fixe dans R_0 .

$$\{\sigma(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ I_{O_1}(S_1) \vec{\Omega}(S_1/R_0) \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1} \text{ et } \{\mathcal{D}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1}.$$

Mouvement du solide 2/0

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 \\ V(G_2 \in S_2/R_0) \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 \\ L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 L_1 \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{G_2}.$$

$$\begin{aligned} \overline{V(G_2 \in S_2/R_0)} &= \overline{V(G_2 \in S_2/S_1)} + \overline{V(G_2 \in S_1/R_0)} \\ &= \left(\underbrace{\overline{V(O_2 \in S_2/S_1)}}_{\vec{0}} + \overline{G_2 O_2} \wedge \overline{\Omega(S_2/S_1)} \right) + \left(\underbrace{\overline{V(O_0 \in S_1/R_0)}}_{\vec{0}} + \overline{G_2 O_0} \wedge \overline{\Omega(S_1/R_0)} \right) \\ &= (-L_2 \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) + (-d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1 + L_2 \vec{y}_2) \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 = L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 \end{aligned}$$

G_2 est le centre de gravité de S_2 .

$$\{\sigma(S_2/R_0)\} = \left\{ \frac{m_2(L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1(L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1)}{I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)}} \right\}_{G_2}$$

$$\overline{\Omega(S_2/R_0)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 = \dot{\theta}_1(\cos \theta_2 \vec{z}_2 + \sin \theta_2 \vec{y}_2) + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2$$

$$I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\theta}_2 \\ B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\} = \left\{ \frac{m_2 \overline{\Gamma(G_2 \in S_2/R_0)}}{\left[\frac{d}{dt} (I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)}) \right]_{R_0}} \right\}_{G_2}$$

$$\overline{\Gamma(G_2 \in S_2/R_0)} = \left[\frac{d(L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1(L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1)}{dt} \right]_{R_0}$$

$$= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 + L_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2) - \ddot{\theta}_1(L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1(-L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1^2(L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1$$

$$= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{y}_2 + (2L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_1(L_1 + L_2 \cos \theta_2)) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1^2(L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1$$

$$\left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} A_2 \ddot{\theta}_2 \\ B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + B_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$+ A_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + (B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2)(-\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2) + (-D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2)(\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2)$$

$$\left[\frac{d \vec{z}_2}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{z}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overline{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2$$

$$\left[\frac{d \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overline{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2$$

$$\left[\frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + \overline{\Omega(S_1/R_0)} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{y}_1$$

Question 4 Déterminer $\overline{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$.

Correction $\overline{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$

$$= \left(\overline{\delta(G_2, 2/0)} + \overline{O_2 G_2} \wedge M_2 \overline{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2$$

$$= \left(\left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} + \overline{O_2 G_2} \wedge M_2 \overline{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2$$

$$\left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} \cdot \vec{x}_2 + \left[\frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overline{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0}$$

Question 5 Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$ en O_2 ?

Question 6 Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre S_1 et S_2 (couple maximal 0,46 Nm), une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

Question 7 Commenter ces résultats.

