

## Application 2



### Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant★

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

#### Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

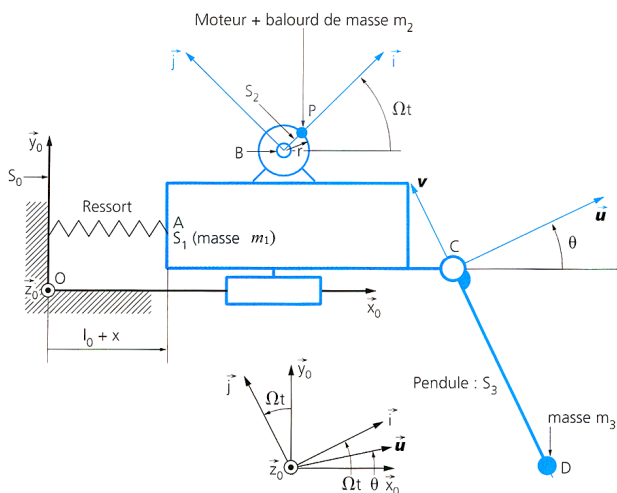
#### Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide  $S_1$ , de masse  $m_1$  en liaison glissière parfaite avec un support  $S_0$ , fixe par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  supposé galiléen.

Le solide  $S_1$  est rappelé par un ressort de longueur libre  $l_0$  et de raideur  $k$ . Une masse ponctuelle  $m_2$  excentrée, placée en  $P$ , tourne sur un rayon  $r$  et est entraînée à vitesse constante  $\Omega$ . Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur  $S_2$ .

Un pendule simple de longueur  $L$ , porte à son extrémité  $D$  une masse concentrée  $m_3$ , l'ensemble constitue le solide  $S_3$ , en liaison pivot parfaite d'axe  $(C, \vec{z}_0)$  avec  $S_1$ .

Les masses autres que  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  sont négligées.



**Objectif** Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse du système.

**Question 2** Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant  $x$ ,  $\theta$  et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles.

**Question 3** Déterminer ces deux équations. On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre  $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$  en supposant que  $x$ ,  $\theta$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{\theta}$  sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

**Question 4** Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme  $x(t) = A \cos(\Omega t)$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$ .

**Question 5** Déterminer le système d'équations permettant de calculer  $A$  et  $B$ .

**Question 6** Indiquer la condition que doit vérifier la longueur  $L$  afin d'assurer  $x(t) = 0$  en régime forcé.

#### Éléments de correction

1.  $(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta}\cos\theta - m_3L\dot{\theta}^2\sin\theta = m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)$  et  $\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$ .
2.  $(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta} = m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)$  et  $\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0$ .
3.  $A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$  et  $B = \frac{m_2r\Omega^2}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$ .
4.  $L = \frac{g}{\Omega^2}$ .

### Colle



### Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant\*

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

#### Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

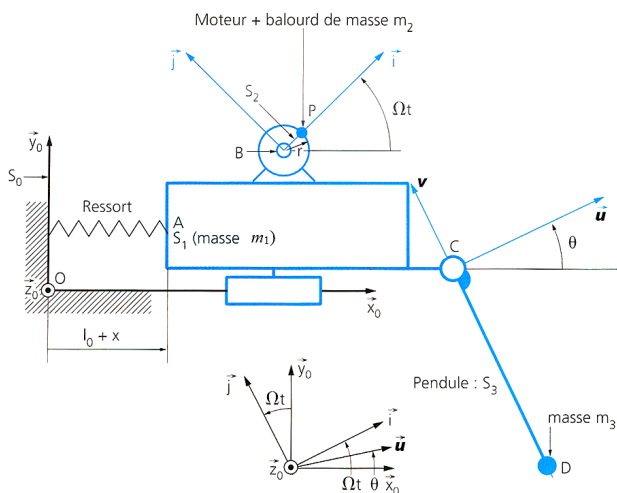
### Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide  $S_1$ , de masse  $m_1$  en liaison glissière parfaite avec un support  $S_0$ , fixe par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  supposé galiléen.

Le solide  $S_1$  est rappelé par un ressort de longueur libre  $l_0$  et de raideur  $k$ . Une masse ponctuelle  $m_2$  excentrée, placée en  $P$ , tourne sur un rayon  $r$  et est entraînée à vitesse constante  $\Omega$ . Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur  $S_2$ .

Un pendule simple de longueur  $L$ , porte à son extrémité  $D$  une masse concentrée  $m_3$ , l'ensemble constitue le solide  $S_3$ , en liaison pivot parfaite d'axe  $(C, \vec{z}_0)$  avec  $S_1$ .

Les masses autres que  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  sont négligées.



**Objectif** Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse du système.

**Question 2** Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant  $x$ ,  $\theta$  et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles.

**Question 3** Déterminer ces deux équations. On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre  $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$  en supposant que  $x$ ,  $\theta$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{\theta}$  sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

**Question 4** Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme  $x(t) = A \cos(\Omega t)$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$ .

**Question 5** Déterminer le système d'équations permettant de calculer  $A$  et  $B$ .

**Question 6** Indiquer la condition que doit vérifier la longueur  $L$  afin d'assurer  $x(t) = 0$  en régime forcé.

## Application 2 –

## Corrigé



## Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant★

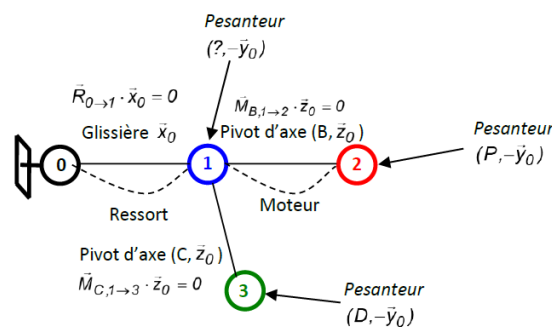
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

## Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

1. Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant  $x, \theta$ , leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède trois degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver trois équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée :  $\Omega = cte$ . Reste à déterminer  $\theta(t)$  et  $x(t)$ .

On isole  $\Sigma = 1+2+3$ .

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à  $\Sigma$  en projection sur  $\vec{x}_0$  doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas :

$$\vec{R}_{d \Sigma / 0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x}_0$$

On isole 3.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 3 au point C et en projection sur  $\vec{z}_0$  doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 3 n'interviennent pas :

$$\vec{\delta}_{C,3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C,3 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$$

Actions mécaniques pour obtenir  $\vec{R}_{(1+2+3) \rightarrow (1+2+3)} \cdot \vec{x}_0$  :

$$\begin{aligned} \{T_{0 \rightarrow 1}\} &= \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{P,0 \rightarrow 1} \end{cases} \text{ avec } \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_0 = 0 & \{T_{0 \rightarrow 1}^{\text{ressort}}\} &= \begin{cases} -kx\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{cases} \\ \{T_{pes \rightarrow 1}\} &= \begin{cases} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} & \{T_{pes \rightarrow 2}\} &= \begin{cases} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} & \{T_{pes \rightarrow 3}\} &= \begin{cases} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\vec{R}_{(1+2+3) \rightarrow (1+2+3)} \cdot \vec{x}_0 = -kx$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir  $\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0$  :

$$\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = \sum_{i=1}^3 m_i \vec{\Gamma}_{G_i \in i/0} \cdot \vec{x}_0$$

$$\text{Soit } \vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = m_1 \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} \cdot \vec{x}_0 + m_2 \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} \cdot \vec{x}_0 + m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} \cdot \vec{x}_0$$

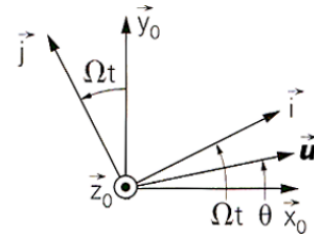
$$\vec{V}_{G_1 \in 1/0} = \dot{\vec{x}}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} = \ddot{\vec{x}}_0$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/1} = \cancel{\vec{V}_{B \in 2/1}} + \vec{G_2 B} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -r\vec{i} \wedge \Omega \vec{z}_0 = r\Omega \vec{j}$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/0} = \vec{V}_{G_2 \in 2/1} + \vec{V}_{G_2 \in 1/0} = r\Omega \vec{j} + \dot{\vec{x}}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} = \ddot{\vec{x}}_0 - r\Omega^2 \vec{i} \quad \text{car } \left. \frac{d\vec{j}}{dt} \right|_0 = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{j} = \Omega \vec{z}_0 \wedge \vec{j} = -\Omega \vec{i}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/1} = \cancel{\vec{V}_{C \in 3/1}} + \vec{G_3 C} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} = L\vec{v} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = L\dot{\theta} \vec{u}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{V}_{G_3 \in 3/1} + \vec{V}_{G_3 \in 1/0} = L\dot{\theta} \vec{u} + \dot{\vec{x}}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = \ddot{\vec{x}}_0 + L\ddot{\theta} \vec{u} + L\dot{\theta}^2 \vec{v} \quad \text{car } \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_0 = \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \vec{v}$$



Théorème de la résultante dynamique appliqué à  $\Sigma = S1 + S2 + S3$  en projection sur  $\vec{x}_0$  :  $\vec{R}_{d\Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x}_0$

$$-kx = m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - r\Omega^2 \cos(\Omega t)) + m_3 (\ddot{x} + L\ddot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} \cos \theta - m_3 L \dot{\theta}^2 \sin \theta = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

Actions mécaniques pour obtenir  $\vec{M}_{C, \vec{3} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$  :

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \forall P \in (C, \vec{z}_0) \begin{cases} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{P, 2 \rightarrow 3} \end{cases} \text{ avec } \vec{M}_{P, 2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \{T_{pes \rightarrow 3}\} = \forall P \in (G_3, \vec{y}_0) \begin{cases} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{M}_{C, pes \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = \left( \cancel{\vec{M}_{G_3, pes \rightarrow 3}} + \vec{CG_3} \wedge -m_3 g \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = [-L\vec{v} \wedge -m_3 g \vec{y}_0] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 g L \sin \theta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir  $\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0$  :

$$\vec{\delta}_{G_3, 3/0} = \vec{0} \text{ (masse ponctuelle)}$$

$$\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0 = [\vec{\delta}_{G_3, 3/0} + \vec{CG_3} \wedge \vec{R}_{d3/0}] \cdot \vec{z}_0 = [-L\vec{v} \wedge m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0}] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 L [\vec{z}_0 \wedge \vec{v}] \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L \vec{u} \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L [\ddot{x} \cos \theta + L\ddot{\theta}]$$

Théorème du moment dynamique appliqué à  $S3$  au point  $C$  et en projection sur  $\vec{z}_0$  :  $\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C, \vec{3} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$

$$-m_3 g L \sin \theta = m_3 L [\ddot{x} \cos \theta + L\ddot{\theta}] \quad \text{d'où } \boxed{\ddot{x} \cos \theta + L\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0}$$

2. Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

En considérant que  $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$  sont des petites variations de position ou de vitesse autour de la position d'équilibre  $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$ ,

et que le développement limité de  $f(x)$  à l'ordre  $n$  en  $a$  est  $f(x+a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}x^n$ , on a :

$$\text{ordre 0:} \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \quad \text{ordre 1:} \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre 2:} \begin{cases} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin \theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre 3:} \begin{cases} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} \end{cases}$$

et  $\dot{\theta}^2 \approx 0$

Donc :  $\boxed{(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta} = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t)}$  et  $\boxed{\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0}$

3. Déterminer le système d'équations permettant de calculer  $A$  et  $B$ .

En posant  $x(t) = A \cos(\Omega t)$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$ , on a :  $\ddot{x}(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t)$  et  $\ddot{\theta}(t) = -B\Omega^2 \cos(\Omega t)$

Les deux équations obtenues précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2 + m_3)A\Omega^2 \cos(\Omega t) + kA \cos(\Omega t) - m_3LB\Omega^2 \cos(\Omega t) = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - LB\Omega^2 \cos(\Omega t) + gB \cos(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{cases} [-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k]A - m_3L\Omega^2 B = m_2r\Omega^2 \\ -A\Omega^2 + (-L\Omega^2 + g)B = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$$

$$B = \frac{m_2r\Omega^4}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$$

4. Indiquer la condition que doit vérifier la longueur  $L$  afin d'assurer  $x(t) = 0$  en régime forcé.

On a  $x(t) = 0$  en régime forcé, si  $A = 0$ .

Ce qui implique que :  $A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$  Soit :  $\boxed{L = \frac{g}{\Omega^2}}$

Dans ce cas  $B = \frac{-m_2r}{m_3L}$  et  $\theta(t) = B \cos(\Omega t) = \frac{-m_2r}{m_3L} \cos(\Omega t)$