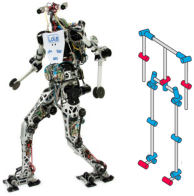


Synthèse 1 –
Corrigé

Le robot humanoïde Lola

Concours Mines Ponts – PSI 2015

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

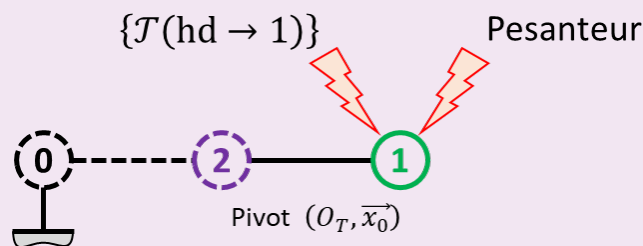
Mise en situation

Objectif L'objectif de cette partie est de mettre en place un modèle du maintien vertical du tronc de LOLA et de déterminer une structure de commande permettant d'assurer les performances du cahier des charges de l'exigence 1.3.2.

Modèle de connaissance de la dynamique de tangage

Question 1 Proposer une démarche de résolution afin d'obtenir l'équation différentielle du mouvement reliant α et ses dérivées successives aux données du problème. Effectuer un bilan des actions mécaniques extérieures au système matériel isolé.

Correction



Pour ne pas faire apparaître des inconnues de liaisons, on va isoler 1 et réaliser un TMD en projection sur (O_T, \vec{x}_0) .

Bilan des actions mécaniques extérieures à 1 :

- action de la pesanteur;
- $\{\mathcal{T}(\text{hd} \rightarrow 1)\}$;
- action des jambes sur 1.

Question 2 Développer l'ensemble des calculs pour déterminer l'équation différentielle reliant α et ses dérivées successives aux données du problème.

Correction

Déplacement du torseur de pesanteur On a : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -g m_1 \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_T} = \left\{ \begin{array}{c} -g m_1 \vec{z}_0 \\ Z_G \vec{z}_1 \wedge -g m_1 \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_T} = \left\{ \begin{array}{c} -g m_1 \vec{z}_0 \\ Z_G g m_1 \sin \alpha \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{O_T}$.

Calcul du moment dynamique

Calcul de $\overrightarrow{V}(G_T \in 1/0) = \overrightarrow{V}(O_T \in 1/0) + \overrightarrow{G_T O_T} \wedge \dot{\alpha} \vec{x}_0 = v(t) \vec{y}_0 - Z_G \vec{z}_1 \wedge \dot{\alpha} \vec{x}_0 = v(t) \vec{y}_0 - Z_G \dot{\alpha} \vec{y}_1 = (v(t) - Z_G \dot{\alpha}) \vec{y}_1$
La matrice d'inertie est donnée en O_T , point quelconque.

Commençons par calculer le moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma}(1, 0/O_T) = I_{O_T}(1) \overrightarrow{\Omega}(1/0) + m_1 \overrightarrow{O_T G} \wedge \overrightarrow{V}(O_T \in 1/0) = A_1 \dot{\alpha}_1 \vec{x}_1 + m_1 Z_g \vec{z}_1 \wedge v(t) \vec{y}_0 = A_1 \dot{\alpha}_1 \vec{x}_1 - m_1 Z_g v(t) \cos \alpha \vec{x}_0$$

Calcul du moment dynamique : $\overrightarrow{\delta(1,0/O_T)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(1,0/O_T)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + m_1 \overrightarrow{V(O_T \in 1/0)} \wedge \overrightarrow{V(G \in 1/0)} = A_1 \ddot{\alpha}_1 \overrightarrow{x_1} -$

$$m_1 Z_g \ddot{v}(t) \cos \alpha \overrightarrow{x_0} + m_1 Z_g v(t) \dot{\alpha} \sin \alpha \overrightarrow{x_0} + m_1 v(t) \overrightarrow{y_0} \wedge (v(t) - Z_g \dot{\alpha}) \overrightarrow{y_1}$$

$$= A_1 \ddot{\alpha}_1 \overrightarrow{x_1} - m_1 Z_g \ddot{v}(t) \cos \alpha \overrightarrow{x_0} + 2m_1 Z_g v(t) \dot{\alpha} \sin \alpha \overrightarrow{x_0} - m_1 v(t)^2 \sin \alpha \overrightarrow{x_0}$$

Théorème du moment dynamique en O_T suivant $\overrightarrow{x_0}$

Modèle du contrôle actif de la position verticale

Question 3 Indiquer les fonctions de transfert des blocs $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ et B_7 ainsi que l'expression de la fonction de transfert $H_1(p)$.

Correction $B_6 = k_e, H_1(p) = \frac{1}{Lp + R}, B_5 = k_c.$

On a de plus, $J_{eq} p^2 A(p) - m_1 g Z_G A(p) = m_1 Z_G p V(p) + \frac{C_m(p)}{r}.$

On a donc $B_3 = \frac{1}{r}, p V(p) = \Gamma(p)$ et $B_1 = m_1 Z_G, B_2 = m_1 g Z_G$ et $B_7 = \frac{1}{J_{eq}}.$

Enfin, $B_4 = \frac{1}{r}.$

Question 4 Déterminer la fonction de transfert de la boucle dynamique $H_{dyn}(p) = \frac{\alpha(p)}{C_m(p)}$ en supposant la perturbation nulle.

Correction En déplaçant le point de prélèvement allant vers B_2 vers la gauche, B_2 est remplacé par B_2/p . On réduit

donc la boucle (avec un + sur le retour) : $H_{dyn}(p) = \frac{\frac{B_7}{p} \frac{B_3}{1 - \frac{B_2 B_7}{p^2}}}{\frac{1}{r J_{eq} p^2 - m_1 g Z_G r}} = \frac{\frac{B_7}{p} \frac{B_3}{p^2}}{1 - \frac{B_2 B_7}{p^2}} = \frac{B_3 B_7}{p^2 - B_2 B_7} = \frac{\frac{1}{r} \frac{1}{J_{eq}}}{p^2 - m_1 g Z_G \frac{1}{J_{eq}}}$

$$= \frac{1}{r J_{eq} p^2 - m_1 g Z_G r}.$$

Question 5 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée de l'asservissement $F(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$. Indiquer son ordre, sa classe et donner son gain statique K en fonction des données.

Correction On réduit alors le bouclage sur le moteur : $F_2(p) = \frac{H_1 B_5 B_3 F(p)}{1 + H_1 B_5 B_3 F(p) B_4 B_6}.$

Au final, $H_{dyn}(p) = F_2(p) \frac{1}{p} = \frac{H_1 B_5 B_3 F(p)}{1 + H_1 B_5 B_3 F(p) B_4 B_6} \cdot \frac{1}{p} = \frac{H_1 B_5 B_3 \frac{B_7 p}{p^2 - B_2 B_7}}{1 + H_1 B_5 B_3 \frac{B_7 p}{p^2 - B_2 B_7} B_4 B_6} \cdot \frac{1}{p}$

$$= \frac{H_1 B_5 B_3 B_7 p}{(p^2 - B_2 B_7) + H_1 B_5 B_3 B_7 p B_4 B_6} \cdot \frac{1}{p}$$

$$= \frac{\frac{1}{Lp + R} k_c \frac{1}{r} \frac{1}{J_{eq}} p}{\left(p^2 - m_1 g Z_G \frac{1}{J_{eq}} \right) + \frac{1}{Lp + R} k_c \frac{1}{r} \frac{1}{J_{eq}} p \frac{1}{r} k_e} \cdot \frac{1}{p}$$

$$= \frac{\frac{1}{Lp + R} k_c \frac{1}{r} \frac{1}{J_{eq}} p}{k_c \left(p^2 - m_1 g Z_G \frac{1}{J_{eq}} \right) + k_c p \frac{1}{r} k_e}$$

$$= \frac{r J_{eq} \left(Lp + R \right) \left(p^2 - m_1 g Z_G \frac{1}{J_{eq}} \right) + k_c p \frac{1}{r} k_e}{k_c r}$$

$$= \frac{r J_{eq} \left(Lp^3 + Rp^2 - Lp m_1 g Z_G \frac{1}{J_{eq}} - R m_1 g Z_G \frac{1}{J_{eq}} \right) + k_c p \frac{1}{r} k_e}{k_c r}$$

$$= \frac{r^2 J_{eq} Lp^3 + r^2 J_{eq} R p^2 - r^2 Lp m_1 g Z_G - r R m_1 g Z_G + k_c p k_e}{k_c r}$$

$$= \frac{k_c r}{r^2 J_{eq} L p^3 + r^2 J_{eq} R p^2 + p(-r^2 L m_1 g Z_G + k_c k_e) - r R m_1 g Z_G}$$

$$= \frac{\frac{k_c}{R m_1 g Z_G}}{\frac{r J_{eq} L}{R m_1 g Z_G} p^3 + \frac{r J_{eq}}{m_1 g Z_G} p^2 + p \frac{-r^2 L m_1 g Z_G + k_c k_e}{r R m_1 g Z_G} - 1}$$

Fonction de transfert d'ordre 3, de classe 0 et de gain $K = -\frac{k_c}{R m_1 g Z_G}$.

Erreur éventuelle avec des r qui se baladent.

Question 6 En analysant les diagrammes de Bode, déterminer les valeurs de τ_1 , τ_2 et K . Justifier en complétant les diagrammes avec les diagrammes asymptotiques de gain et de phase.

Correction On a $G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}$
 $= 20 \log K - 20 \log(1 + \tau_1^2 \omega^2) - 20 \log \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}$.
 De plus $\varphi(\omega) = \arg K - \arg(1 + \tau_1 p) - \arg(-1 + \tau_1 p) - \arg(1 + \tau_2 p)$
 $= -\arctan(\tau_1 \omega) - \pi - \arctan(\tau_1 \omega) - \arctan(\tau_2 \omega)$
 $= -\pi - 2 \arctan(\tau_1 \omega) - \arctan(\tau_2 \omega)$.
 On a donc $\tau_1 = \frac{1}{\omega_1} = 1 \text{ s}$ et $\tau_2 = \frac{1}{\omega_2} = 1 \times 10^{-3} \text{ s}$.
 De plus, $20 \log K = -40$ et $K = 0,01 \text{ rad V}^{-1}$.

Question 7 Justifier le choix de cette simplification.

Correction Les pôles de la fonction de transfert sont $\frac{-1}{\tau_1} = -1$, $\frac{1}{\tau_1} = 1$ et $\frac{-1}{\tau_2} = -1000$. Les poles dominants sont ceux les plus proches de l'axe des imaginaires. -1 et 1 sont donc les pôles dominants. Cela justifie donc la forme proposée (le pôle -1000 est négligé).

Question 8 Expliquer pourquoi le critère du revers ne peut pas être appliqué pour étudier la stabilité en boucle fermée.

Correction Pour que le critère du revers, les pôles doivent être à partie réelle négative ou nulle.

Question 9 Déterminer deux conditions sur K_1 pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée $\frac{\alpha(p)}{U_C(p)}$ soit stable. En déduire la valeur minimale de K_1 .

Correction La fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée est donnée par : $\frac{F(p)}{1 + F(p)H_{ci}(p)}$

$$= \frac{\frac{K}{(1 + \tau_1 p)(-1 + \tau_1 p)}}{1 + \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(-1 + \tau_1 p)} K_1 (p + 1)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(-1 + \tau_1 p) + K K_1 (p + 1)} = \frac{K}{-1 - \tau_1 p + \tau_1 p + \tau_1^2 p^2 + K K_1 p + K K_1}$$

$$= \frac{K}{-1 + K K_1 + K K_1 p + \tau_1^2 p^2}$$

Il faut donc que $K K_1 - 1 > 0$ soit $K_1 > \frac{1}{K}$ soit $K_1 > 100 \text{ V rad}^{-1}$.

Question 10 Déterminer K_1 pour que la fonction de transfert $\frac{\alpha(p)}{U_C(p)}$ ait un facteur d'amortissement $\xi = 1,7$. Vérifier que cette valeur est compatible avec les conditions obtenues précédemment. En déduire les valeurs de la pulsation propre ω_0 et du gain statique de la boucle ouverte K_{BO} .

Correction

En mettant la fonction précédente sous forme canonique, on a donc $\frac{\frac{K}{K K_1 - 1}}{1 + \frac{K K_1}{K K_1 - 1} p + \frac{\tau_1^2}{K K_1 - 1} p^2}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{1}{\omega_0^2} &= \frac{\tau_1^2}{K K_1 - 1} \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{K K_1 - 1}{\tau_1^2}. \\ \text{De plus, } \frac{2\xi}{\omega_0} &= \frac{K K_1}{K K_1 - 1} \Leftrightarrow 2\xi(K K_1 - 1) = K K_1 \omega_0 \Leftrightarrow 2\xi(K K_1 - 1) = K K_1 \sqrt{K K_1 - 1}. \\ \Rightarrow 4\xi^2(K K_1 - 1)^2 &= K^2 K_1^2(K K_1 - 1) \Leftrightarrow 4\xi^2(K K_1 - 1)^2 - K^2 K_1^2(K K_1 - 1) = 0 \Leftrightarrow 4\xi^2(K K_1 - 1) - K^2 K_1^2 = 0 \end{aligned}$$

Question 11 Nommer ce correcteur.

Correction Il s'agit d'un correcteur proportionnel et à avance de phase.

Question 12 Déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d .

Correction

D'après le cahier des charges, on souhaite que la bande passante à 0 dB en boucle ouverte soit de 50 rad s^{-1} et la marge de phase doit être de 50° .

Calculons la phase pour le système non corrigé.

Pour calculer la phase, il faut faire attention, au domaine de définition de l'arctan. Il y a plusieurs façons de s'y prendre... On peut par exemple calculer les deux constantes de temps du système (vu que $\xi > 1$). On peut aussi constater que pour un second ordre où $\xi > 1$, la phase est comprise entre 0 et -90° lorsque la pulsation est inférieure à 3 rad s^{-1} et la phase est comprise entre -90 et -180° lorsque la pulsation est supérieure à 3 rad s^{-1} .

Ici on souhaite calculer la marge pour une pulsation de 50 rad s^{-1} . On aura donc une phase comprise entre -90 et -180° . Le calcul de l'arctan se fera donc avec un décalage de -180° .

$$\varphi(\omega) = -180 - \arctan\left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) = -168^\circ.$$

La marge de phase est donc de $-168 - (-180) = 12^\circ$. Le correcteur doit donc apporter 38° .

$$\text{On a } \sin \varphi_m = \frac{a-1}{a+1} \Leftrightarrow a \sin \varphi_m + \sin \varphi_m = a - 1 \Leftrightarrow a \sin \varphi_m + \sin \varphi_m - a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a(\sin \varphi_m - 1) + \sin \varphi_m + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sin \varphi_m + 1}{1 - \sin \varphi_m} = 4,28.$$

$$\text{Par suite, } T_d = \frac{1}{\omega_c \sqrt{a}} \simeq 9,7 \times 10^{-3} \text{ s}.$$

Question 13 Déterminer le gain K_p pour que le critère de bande passante du cahier des charges soit bien vérifié.

Correction On doit choisir K_p pour que le gain soit nul lorsque $\omega_c = 50 \text{ rad s}^{-1}$.

$$\text{La gain non corrigé est de } G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log K_{BO} - 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\omega\xi}{\omega_0}\right)^2} \right) = -108 \text{ dB}.$$

Le gain apporté par l'avance de phase est de $10 \log a = 6,31 \text{ dB}$. Le gain proportionnel doit donc apporter $-108 + 6 = 102 \text{ dB}$. On cherche donc $20 \log K_p = 102$ soit $K_p = 10^{102/20} = 125892 \text{ SI}$

Question 14 Justifier l'allure de la réponse temporelle. Déterminer graphiquement sur le document réponse le temps de réponse à 5%, le dépassement maximal et l'erreur statique. Conclure sur la capacité du correcteur à vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges.

Correction Le système est perturbé « en accélération ». On souhaite minimiser l'influence de cette perturbation sur l'angle de tangage (souhaité nul). On mesure :

- temps de réponse à 5% : $40 \text{ ms} < 0,2 \text{ s}$: CDCF OK;
- écart statique : $\simeq 2,4 \times 10^3^\circ < 0,5^\circ$: CDCF OK;
- dépassement $\simeq 0,8 \times 10^3^\circ < 1^\circ$: CDCF OK.