

## TD 1 – Corrigé



## Véhicule TIM

Florestan Mathurin

## Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique ;
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

## Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

**Question 1** Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 réduit au point G en projection sur la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Correction** • On isole le solide 1.

- Le solide est soumis à l'action de pesanteur et à l'action du sol.
- On applique le PFS :
  - TRS :  $-T_{01}\vec{x} + N_{01}\vec{z} = -mg\vec{z}_0 = -mg(\cos\alpha\vec{z} - \sin\alpha\vec{x})$  ;
  - TMS en G en projection sur  $\vec{y}$  :  $-C_r + RT_{01} = 0$ .
- On résout :
  - $-T_{01} + mg\sin\alpha = 0$  ;
  - $N_{01} - mg\cos\alpha = 0$  ;
  - $C_r = RT_{01}$ .

**Question 2** Déterminer l'expression analytique de l'angle  $\alpha_{\text{lim}}$  à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

**Correction** À la limite du roulement, on a  $C_r = rN_{01} \Leftrightarrow RT_{01} = rN_{01} \Leftrightarrow Rmg\sin\alpha_{\text{lim}} = rmg\cos\alpha_{\text{lim}}$  et  $\tan\alpha_{\text{lim}} = \frac{r}{R}$ .

Pour une masse du solide 1  $m = 50\text{ kg}$  et pour un rayon  $R = 0,25\text{ m}$  le roulement se produit à partir d'un angle  $\alpha_{\text{lim}}$  tel que  $\tan\alpha_{\text{lim}} = 0,008$ .

**Question 3** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $r$ .

**Correction**  $r = 0,002\text{ m}$ .

**Question 4** Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en  $A_1$  si le coefficient de frottement au contact vaut  $f = 0,5$ .

**Correction** À la limite du glissement, on a  $T_{01} = fN_{01}$  et  $\frac{T_{01}}{N_{01}} = \tan\alpha$ . Pour  $\tan\alpha_{\text{lim}} < f$  il y a donc roulement sans glissement.

## Modélisation du véhicule

**Question 5** Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point  $A_{23}$  et  $A_4$ .

**Correction** En  $A_{23}$ , on a :  $\overrightarrow{V(A_{23} \in 23/0)} = \vec{0}$ . On a alors  $\overrightarrow{V(A_{23} \in 23/0)} = \overrightarrow{V(A_{23} \in 23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23} \in 1/0)}$  et  $\vec{0} = \overrightarrow{V(O_{23} \in 23/1)} + A_{23}O_{23} \wedge \vec{\Omega}(23/1) + \overrightarrow{V(A_{23} \in 1/0)} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} + R\vec{z} \wedge \dot{\theta}_{23}\vec{y} + \dot{x}\vec{x} \Rightarrow 0 = -R\dot{\theta}_{23} + \dot{x}$ .

De même en  $A_4$ ,  $0 = -R\ddot{\theta}_4 + \dot{x}$ .

**Question 6** En isolant l'ensemble  $E = 1 + 2 + 3 + 4$ , écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

**Correction**

• On isole  $E$ .

• BAME :

$$\begin{aligned} - \text{Pesanteur : } \{\mathcal{T}(\text{Pes} \rightarrow E)\} &= \left\{ \frac{-(M+3m)g\vec{z}_0}{0} \right\}_{G_E} = \left\{ \frac{-(M+3m)g(\cos\alpha\vec{z} - \sin\alpha\vec{x})}{0} \right\}_{G_E} \\ - \text{Résistance au roulement : } \{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_i &= \left\{ \begin{matrix} -T_{0i}\vec{x} + N_{0i}\vec{z} \\ -C_r\vec{y} \end{matrix} \right\}_{A_i} \\ - \text{Traînée : } \{\mathcal{T}(\text{Trainee} \rightarrow E)\} &= \left\{ \frac{-\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 \vec{x}}{0} \right\}_{O_{23}} \end{aligned}$$

- La résultante dynamique est donnée par  $(M+3m)\vec{\Gamma}(G \in E/0) = (M+3m)\ddot{x}\vec{x}$ .
- On applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  :
  - $(M+3m)g \sin\alpha - \frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M+3m)\ddot{x}$
  - $-(M+3m)g \cos\alpha + N_{04} + N_{023} = 0$

**Question 7** Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en  $O_{23}$  et  $O_4$  en projection sur  $\vec{y}$ .

**Correction**

• On isole 23.

• BAME :

$$\begin{aligned} - 23 \text{ est soumis à la pesanteur;} \\ - \text{action de la pivot sans frottement avec le solide 1;} \\ - \text{résistance au roulement : } \{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_{23} &= \left\{ \begin{matrix} -T_{023}\vec{x} + N_{023}\vec{z} \\ -N_{023}r\vec{y} \end{matrix} \right\}_{A_{23}} = \left\{ \begin{matrix} -T_{023}\vec{x} + N_{023}\vec{z} \\ (-rN_{023} + RT_{023})\vec{y} \end{matrix} \right\}_{O_{23}} \end{aligned}$$

- Le moment dynamique de  $O_{23}$  centre d'inertie des roues en projection sur  $\vec{y}_0$  s'écrit  $\delta(O_{23}, 23/0)\vec{y}_0 = 2I\ddot{\theta}_{23}$ .
- TMD en  $O_{23}$  en projection sur  $\vec{y}_0$  s'écrit donc  $-rN_{023} + RT_{023} = 2I\ddot{\theta}_{23}$ .

De même pour la roue 4 en ajoutant la sollicitation du couple moteur :  $-rN_{04} + RT_{04} + C_m = I\ddot{\theta}_4$ .

**Question 8** Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur  $C_m$  vaut :

$$C_m = (M+3m)g \cos\alpha r + \left[ \frac{3I}{R} + R(M+3m) \right] \ddot{x} - R(M+3m)g \sin\alpha + \frac{1}{2}R\rho SC_x \dot{x}^2.$$

**Correction**

$$\begin{aligned} \text{On a : } C_m = I\ddot{\theta}_4 + rN_{04} - RT_{04} &= \frac{I}{R}\ddot{x} + rN_{04} - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} - rN_{023} + r(M+3m)g \cos\alpha - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} - RT_{023} + \\ 2I\ddot{\theta}_{23} + r(M+3m)g \cos\alpha - RT_{04} &= \frac{I}{R}\ddot{x} + \frac{2I}{R}\ddot{x} + r(M+3m)g \cos\alpha - R \left( (M+3m)g \sin\alpha - \frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 - (M+3m)\ddot{x} \right) \\ C_m &= r(M+3m)g \cos\alpha + \left( \frac{3I}{R} + R(M+3m) \right) \ddot{x} + \left( -R(M+3m)g \sin\alpha + R\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 \right). \end{aligned}$$

CQFD.

**Question 9** Identifier dans l'expression de  $C_m$  les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

**Correction**

$$C_m = \underbrace{(M+3m)gr \cos\alpha}_{\text{Résistance au roulement}} - \underbrace{(M+3m)gR \sin\alpha}_{\text{Couple pour monter la pente}} + \underbrace{\left( \frac{3I}{R} + R(M+3m) \right) \ddot{x}}_{\text{Couple pour vaincre les effets d'inertie}} + \underbrace{R\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la traînée}}.$$

**Question 10** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  quand le véhicule a une vitesse constante  $V$  sur une piste horizontale.

**Correction** À vitesse constante sur du plat, on a :

$$C_m = \underbrace{(M+3m)gr}_{\text{Résistance au roulement}} + \underbrace{R \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

**Question 11** Déterminer dans les conditions d'essais le produit  $\frac{1}{2} \rho S C_x$  caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

**Correction** La vitesse constante atteinte sur les graphes est de  $17 \text{ m s}^{-1}$ . Par ailleurs  $\frac{1}{2} \rho S C_x = \frac{C_m - (M+3m)gr}{R \dot{x}^2} = \frac{3,245 - (70 + 3 \cdot 1) \cdot 10 \cdot 0,002}{0,25 \cdot 17^2} = 0,025 \text{ kg m}^{-1}$ .

**Question 12** Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de  $5 \text{ km h}^{-1}$  (on négligera le couple de résistance au roulement).

**Correction**