

Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD

Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur

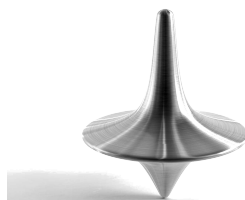
## Cours

### Chapitre 2

#### Caractérisation inertielle des solides

*Savoirs et compétences :*

- Mod2.C13 : centre d'inertie
- Mod2.C14 : opérateur d'inertie
- Mod2.C15 : matrice d'inertie



Toupie



Volants d'inertie d'un vibrequin

<b>1</b>	<b>Masse et centre de masse (centre d'inertie)</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions	2
1.2	Centre d'inertie d'un ensemble de solides encastrés entre eux	2
1.3	Méthode pour déterminer le centre d'inertie d'un solide (2)	2
<b>2</b>	<b>Matrice d'inertie d'un solide</b>	<b>3</b>
2.1	Opérateur et matrice d'inertie	3
2.2	Déplacement d'une matrice d'inertie	3
2.3	Changement de base de la matrice d'inertie	4
2.4	Détermination de la matrice d'inertie d'un solide (2)	4
2.5	Matrice d'inertie de solides usuels (3)	5

# 1 Masse et centre de masse (centre d'inertie)

## 1.1 Définitions

**Définition — Masse d'un solide indéformable.** On peut définir la masse totale d'un solide  $S$  par :  $M = \int_{P \in S} dm$ .

Si de plus l'ensemble est fait d'un matériau homogène de masse volumique  $\mu$ , on a  $M = \mu \int_{P \in S} dV$ .

**Définition — Centre d'inertie d'un solide.** La position du centre d'inertie  $G$  d'un solide  $S$  est définie par  $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}$ .

Pour déterminer la position du centre d'inertie d'un solide  $S$ , on passe généralement par l'origine du repère associé à  $S$ . On a alors  $\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \int_{P \in S} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) dm = \vec{0} \Leftrightarrow \int_{P \in S} \overrightarrow{OG} dm = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm \Leftrightarrow M \overrightarrow{OG} = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} dm$ .

**Méthode** Pour déterminer les coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$  du centre d'inertie  $G$  du solide  $S$  dans la base  $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , on a donc :

$$\begin{cases} M x_G = \mu \int_{P \in S} x_P dV \\ M y_G = \mu \int_{P \in S} y_P dV \\ M z_G = \mu \int_{P \in S} z_P dV \end{cases} \quad \text{avec } dV \text{ volume élémentaire du solide } S.$$

Pour simplifier les calculs, on peut noter que le centre d'inertie appartient au(x) éventuel(s) plan(s) de symétrie du solide.

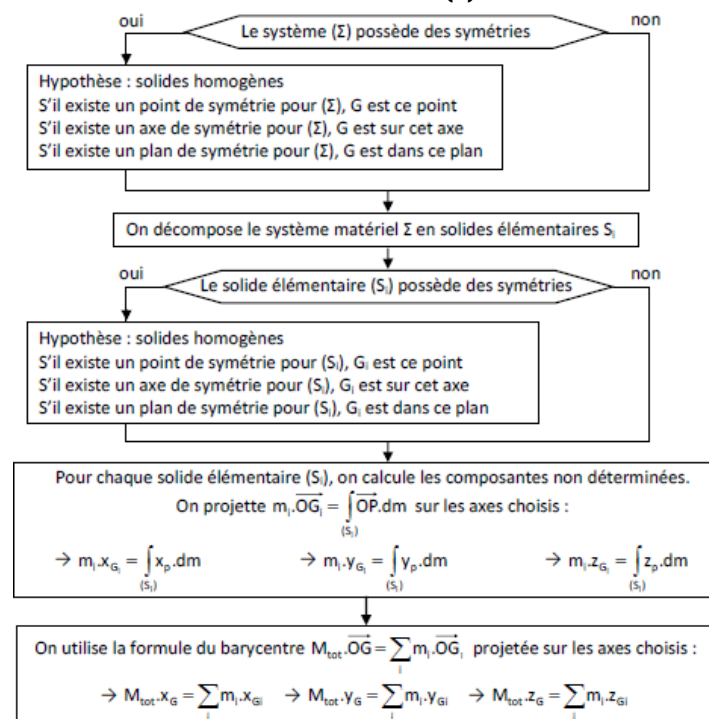
**R** Centre d'inertie et centre de gravité sont confondus lorsque le champ de pesanteur est considéré comme uniforme en tout point de l'espace.

## 1.2 Centre d'inertie d'un ensemble de solides encastrés entre eux

**Méthode** Soit un solide composé de  $n$  solides élémentaires dont la position des centres d'inertie  $G_i$  et les masses  $M_i$  sont connues. On note  $M = \sum_{i=1}^n M_i$ . La position du centre d'inertie  $G$  de l'ensemble  $S$  est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n M_i \overrightarrow{OG_i}.$$

## 1.3 Méthode pour déterminer le centre d'inertie d'un solide (2)



## 2 Matrice d'inertie d'un solide

### 2.1 Opérateur et matrice d'inertie

**Définition** Soient :

- un solide  $S$  de masse  $m$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ;
- $\mathcal{R}_S = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère lié au solide  $S$ ;
- $P$  un point de  $S$  tel que  $\vec{OP} = x_p \vec{x} + y_p \vec{y} + z_p \vec{z}$ ;
- $\vec{u}$  un vecteur unitaire du solide  $S$ .

On appelle opérateur d'inertie l'application linéaire définie par :

$$\vec{u} \rightarrow \overline{J_{(O,S)}(\vec{u})} = \int_S \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) dm$$

On appelle matrice d'inertie du solide  $S$  en  $O$ ,  $I_O(S)$ , l'image de cette application linéaire :  $\overline{J_{(O,S)}(\vec{u})} = I_O(S) \vec{u}$ .

**Définition — Matrice d'inertie.** La matrice d'inertie s'écrit ainsi :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} \int_S (y_p^2 + z_p^2) dm & -\int_S x_p y_p dm & -\int_S x_p z_p dm \\ -\int_S x_p y_p dm & \int_S (x_p^2 + z_p^2) dm & -\int_S y_p z_p dm \\ -\int_S x_p z_p dm & -\int_S y_p z_p dm & \int_S (x_p^2 + y_p^2) dm \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S}.$$

On appelle moments d'inertie par rapport aux axes  $(O, \vec{x})$ ,  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$  les termes  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

On appelle produit d'inerties par rapport aux axes  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$ ,  $(O, \vec{x})$  et  $(O, \vec{z})$ ,  $(O, \vec{x})$  et  $(O, \vec{y})$  les termes  $D$ ,  $E$  et  $F$ .

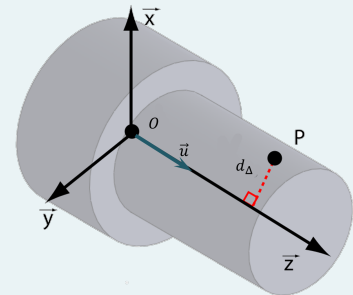
**Propriété**

- ❑ La matrice d'inertie est une matrice symétrique. Il existe une base dans laquelle elle est diagonalisable. Cette base est appelée base principale d'inertie.
- ❑ Si  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  est un plan de symétrie du solide,  $D$  et  $E$  sont nuls.
- ❑ Si  $(O, \vec{z}, \vec{x})$  est un plan de symétrie du solide,  $D$  et  $F$  sont nuls.
- ❑ Si  $(O, \vec{y}, \vec{z})$  est un plan de symétrie du solide,  $E$  et  $F$  sont nuls.
- ❑ Si un solide admet 2 plans de symétrie, alors  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont nuls.

**Définition — Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque.**

Le moment d'inertie caractérise la répartition de masse d'un solide autour d'un axe  $\Delta(O, \vec{u})$ . Plus la valeur de l'inertie est grande plus il sera difficile de mettre en mouvement de rotation ce solide autour de l'axe  $\Delta$ . On note  $I_\Delta(S)$ , le moment d'inertie du solide  $S$  autour de l'axe  $\Delta$ . Son unité est en  $\text{kg.m}^2$ . On a alors :

$$I_\Delta(S) = \int_S d_\Delta^2 dm \quad \text{où } d_\Delta \text{ est la distance entre le point courant } P \text{ et l'axe } \Delta.$$



**R** Si on connaît  $I_O(S)$ , alors  $I_\Delta(S) = \vec{u} I_O(S) \vec{u}$  avec  $\vec{u}$  vecteur unitaire.

### 2.2 Déplacement d'une matrice d'inertie – Théorème de Huygens

**Théorème — Théorème de Huygens.** Soit  $S$  un solide de centre d'inertie  $G$ , de masse  $m$ , d'inertie  $I_G(S)$  et d'inertie  $I_O(S)$  avec  $\vec{OG} = a \vec{x} + b \vec{y} + c \vec{z}$ . Les matrices  $I_G(S)$  et  $I_O(S)$  exprimées dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

sont liées par :

$$\begin{pmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} m(b^2 + c^2) & -mab & -mac \\ -mab & m(a^2 + c^2) & -mbc \\ -mac & -mbc & m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Si le solide est modélisé par une masse ponctuelle  $m$  en  $G$  et si on souhaite connaître le moment d'inertie pour un point situé à une distance  $d$  de  $G$ , on a  $I = md^2$ .

### 2.3 Changement de base de la matrice d'inertie

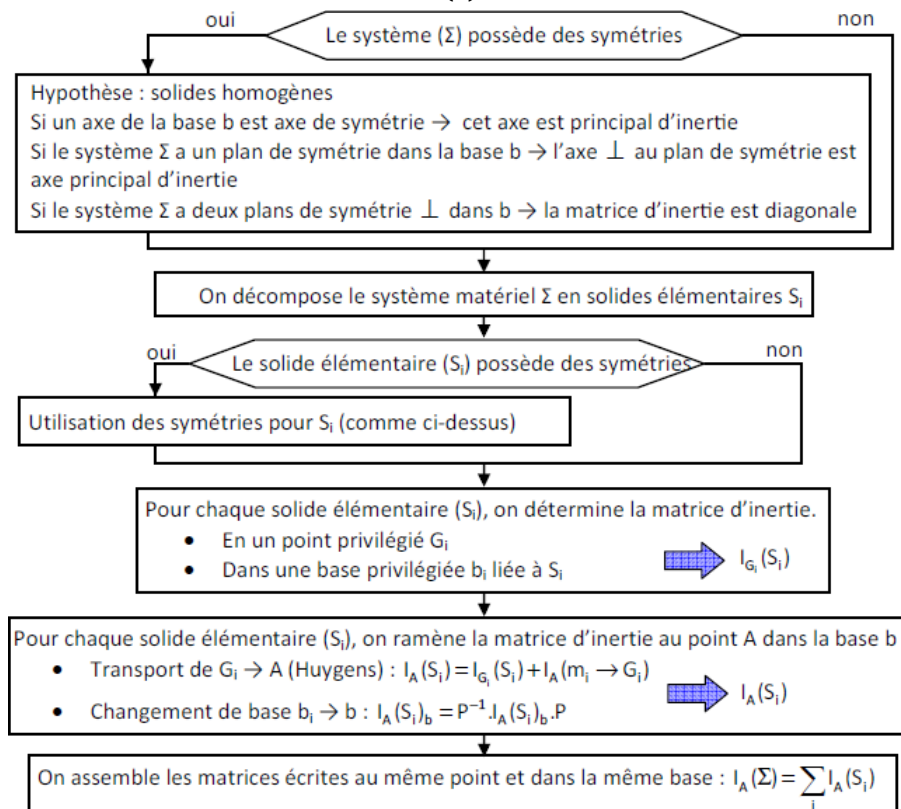
**Définition — Matrice de Passage.** On appelle  $P_{12}$  la matrice de passage permettant de passer de la base  $\mathcal{B}_1$  à la base  $\mathcal{B}_2$ . Cette matrice est constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_2$  écrits dans la base d'origine  $\mathcal{B}_1$ . On l'appelle aussi matrice de changement de base. Cette matrice est inversible.

Dans le cas des matrices de rotation,  $P_{12}^{-1} = P_{12}^T$ .

■ **Exemple** Soit  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  et  $\mathcal{R}_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  avec  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On a alors  $\vec{x}_2 = \cos \beta \vec{x}_1 + \sin \beta \vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2 = \cos \beta \vec{y}_1 - \sin \beta \vec{x}_1$ . En conséquences,  $P_{12} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . ■

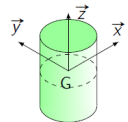
**Résultat** Pour passer  $I_A(S)_{\mathcal{B}_1}$  de  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  de la on a  $I_A(S)_{\mathcal{B}_2} = P_{12}^{-1} I_A(S)_{\mathcal{B}_1} P_{12}$ .

### 2.4 Détermination de la matrice d'inertie d'un solide (2)



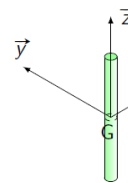
## 2.5 Matrice d'inertie de solides usuels (3)

**Cylindre** d'axe  $(G, \vec{z})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$



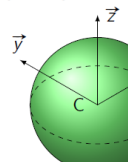
$$\begin{pmatrix} m \cdot \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{\substack{\text{en } G \text{ dans toute base contenant } \vec{z} \\ \mathcal{C}_{(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x})}}}$$

**Tige cylindrique**  $(G, \vec{z})$  de rayon négligeable



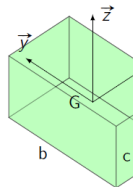
$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\substack{\text{en } G \text{ dans toute base contenant } \vec{z} \\ \mathcal{C}_{(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x})}}}$$

**Sphère pleine** de centre C



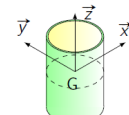
$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} m \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m \cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{\substack{\text{En } C \text{ centre de la sphère et dans toute base} \\ \mathcal{C}_{\vec{v}_B}}}$$

**Parallélépipède** de cotés  $a$ ,  $b$  et  $c$



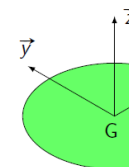
$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{b^2 + c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{a^2 + c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{a^2 + b^2}{12} \end{pmatrix}_{\substack{\text{en } G \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ parallèle aux arêtes du pa-} \\ \text{rallélépipède} \\ \mathcal{C}_{\vec{v}_B}}}$$

**Tube** d'axe  $(G, \vec{z})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  (épaisseur négligeable)



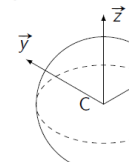
$$\begin{pmatrix} m \cdot \left( \frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left( \frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{\substack{\text{en } G \text{ dans toute base contenant } \vec{z} \\ \mathcal{C}_{(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x})}}}$$

**Disque** d'axe  $(G, \vec{z})$  d'épaisseur négligeable



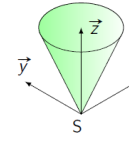
$$\begin{pmatrix} m \cdot \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{\substack{\text{en } G \text{ dans toute base contenant } \vec{z} \\ \mathcal{C}_{(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x})}}}$$

**Sphère creuse** de centre C



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} m \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} m \cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} m \cdot R^2 \end{pmatrix}_{\substack{\text{En } C \text{ centre de la sphère et dans toute base} \\ \mathcal{C}_{\vec{v}_B}}}$$

**Cône**  $(S, \vec{z})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$



$$\begin{pmatrix} \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \left( \frac{R^2}{4} + H^2 \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \left( \frac{R^2}{4} + H^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot m}{5} \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{\substack{\text{au sommet } S \text{ dans toute base contenant } \vec{z} \\ \mathcal{C}_{(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x})}}}$$

## Références

- [1] Emilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.
- [2] Florestan Mathurin, *Géométrie des masses*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.
- [3] Robert Papanicola, *Opérateurs d'inertie*, Lycée Charlemagne, Paris, <http://sciences-indus-cpge.papanicola.info/>.