TD 3 – Corrigé

Dynamique du véhicule – Chariot élévateur à bateaux★

X – ENS – PSI – 2012

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Présentation

Étude de la position du centre de gravité

Objectif L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req C206 : la position du centre de gravité de l'ensemble Σ={chariot, tablier, contrepoids} doit être situé à un tiers de l'empattement par rapport à l'axe des roues arrières».

Question 1 *Déterminer l'expression de x_{G_C} afin de valider l'exigence req C206.*

Correction On a $\overrightarrow{OG}=\dfrac{m_T}{m_T+m_1+m_C}\overrightarrow{OG_T}+\dfrac{m_1}{m_T+m_1+m_C}\overrightarrow{OG_1}+\dfrac{m_C}{m_T+m_1+m_C}\overrightarrow{OG_C}$. On souhaite que $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{0}$. On a donc $0=\dfrac{m_T}{m_T+m_1+m_C}x_{G_T}+\dfrac{m_1}{m_T+m_1+m_C}x_{G_1}+\dfrac{m_C}{m_T+m_1+m_C}x_{G_C}$ et donc : $x_{G_C}=-\dfrac{m_T}{m_C}x_{G_T}-\dfrac{m_1}{m_C}x_{G_1}$.

Pour toute la suite de l'étude, les points G et O sont supposés confondus et la masse totale de l'ensemble $\Sigma=$ {chariot, tablier, contrepoids} est notée M.

Étude du basculement frontal

Question 2 *Écrire les équations issues de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble $\{\Sigma,B\}$. Le théorème du moment dynamique sera appliqué au point I_4.*

Correction **On isole $\{\Sigma,B\}$.**

On fait le BAME.

- Poids du bateau : $\{\mathcal{T}(\text{pes}\rightarrow B)\}=\left\{\begin{array}{c}-m_B g\overrightarrow{z}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O=\left\{\begin{array}{c}-m_B g\overrightarrow{z}\\ m_B g\overrightarrow{y}\left(x_{G_B}-\dfrac{2L}{3}\right)+E m_B g\overrightarrow{x}\end{array}\right\}_{I_4}$.
- Poids de Σ : $\{\mathcal{T}(\text{pes}\rightarrow\Sigma)\}=\left\{\begin{array}{c}-Mg\overrightarrow{z}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O=\left\{\begin{array}{c}-Mg\overrightarrow{z}\\ -\dfrac{2MgL}{3}\overrightarrow{y}+EMg\overrightarrow{x}\end{array}\right\}_{I_4}$.
- Action du sol sur chaque roue :
  - $\{\mathcal{T}(\text{sol}\rightarrow P_1)\}=\left\{\begin{array}{c}-T_1\overrightarrow{x}+N_1\overrightarrow{z}\\ LN_1\overrightarrow{y}\end{array}\right\}_{I_4}$;
  - $\{\mathcal{T}(\text{sol}\rightarrow P_2)\}=\left\{\begin{array}{c}-T_1\overrightarrow{x}+N_1\overrightarrow{z}\\ -2EN_2\overrightarrow{x}+LN_2\overrightarrow{y}-2ET_2\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_{I_4}$;
  - $\{\mathcal{T}(\text{sol}\rightarrow P_3)\}=\left\{\begin{array}{c}-T_3\overrightarrow{x}+N_3\overrightarrow{z}\\ -2EN_3\overrightarrow{x}-2ET_3\overrightarrow{z}\end{array}\right\}_{I_4}$;
  - $\{\mathcal{T}(\text{sol}\rightarrow P_4)\}=\left\{\begin{array}{c}-T_4\overrightarrow{x}+N_4\overrightarrow{z}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{I_4}$.

Calcul du $\{\mathcal{D}(\{\Sigma,B\}/0)\}$.

$\{\mathcal{D}(\{\Sigma,B\}/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_d(\{\Sigma,B\}/0)}\\ \overrightarrow{\delta(I_4,\{\Sigma,B\}/0)}\end{array}\right\}_{I_4}$.

On a $\overrightarrow{R_d(\{\Sigma,B\}/0)}=-(M+m_B)\text{dec}_x\overrightarrow{x_1}$.

Par ailleurs, on a $\overrightarrow{\delta(G,\{\Sigma,B\}/0)}=\overrightarrow{\delta(G,\Sigma/0)}+\overrightarrow{\delta(G,B/0)}$. Le bateau étant en translation par rapport au bâti, on a donc :

- $\overrightarrow{\delta(G,\{\Sigma\}/0)} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\delta(I_4,\{\Sigma\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G,\{\Sigma,\}/0)} + \overrightarrow{I_4G} \wedge \overrightarrow{R_d(\{\Sigma\}/0)} = \left(-2\dfrac{L}{3}\overrightarrow{x_1} - E\overrightarrow{y_1} + h\overrightarrow{z_1}\right) \wedge -M\text{dec}_x\overrightarrow{x_1} = -M\text{dec}_x\left(E\overrightarrow{z_1} + h\overrightarrow{y_1}\right)$;
- $\overrightarrow{\delta(G_B,\{B\}/0)} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\delta(I_4,\{B\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G_B,\{B\}/0)} + \overrightarrow{I_4G_B} \wedge \overrightarrow{R_d(\{B\}/0)} = \left(\left(-x_{G_B} + 2\dfrac{L}{3}\right)\overrightarrow{x_1} + E\overrightarrow{y_1} + \left(z_{G_B} + h\right)\overrightarrow{z_1}\right) \wedge -m_B\text{dec}_x\overrightarrow{x_1} = m_B\text{dec}_x\left(E\overrightarrow{z_1} - \left(z_{G_B} + h\right)\overrightarrow{y_1}\right)$;
- au final, $\overrightarrow{\delta(I_4,\{\Sigma,B\}/0)} = m_B\text{dec}_x\left(E\overrightarrow{z_1} - \left(z_{G_B} + h\right)\overrightarrow{y_1}\right) - M\text{dec}_x\left(E\overrightarrow{z_1} + h\overrightarrow{y_1}\right)$.

On applique le PFD.

- Théorème de la résultante dynamique :
  - suivant $\overrightarrow{x_1}$:$-(M + m_B)\text{dec}_x = -\sum_{i=1}^{4} T_i$;
  - suivant $\overrightarrow{y_1}$:$0 = 0$;
  - suivant $\overrightarrow{z_1}$:$0 = \sum_{i=1}^{4} N_i - (M + m_B)g$.
- Théorème du moment dynamique :
  - suivant $\overrightarrow{x_1}$:$0 = Em_Bg + EMg - 2EN_2 - 2EN_3$;
  - suivant $\overrightarrow{y_1}$:$-m_B\text{dec}_x\left(z_{G_B} + h\right) - M\text{dec}_x h = L(N_1 + N_2) + m_Bg\left(x_{G_B} - 2\dfrac{L}{3}\right) - \dfrac{Mg2L}{3}$;
  - suivant $\overrightarrow{z_1}$:$m_B\text{dec}_x E - M\text{dec}_x E = -2ET_2 - 2ET_3$.

Question 3 *Donner les hypothèses qui peuvent être faites afin de réduire le nombre d'inconnues du problème.*

Correction La mise en équation précédente permet d'exprimer 8 inconnues (N_i et T_i pour i allant de 1 à 4).

En faisant l'hypothèse que le plan $\left(G_1, \overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{x_1}\right)$ est plan de symétrie, on peut considérer que $N_4 = N_3$, $T_4 = T_3$, $N_1 = N_2$, $T_1 = T_2$. Il reste donc 4 inconnues.

De plus, à la limite du basculement frontal, les roues arrières se décolleraient. Il resterait donc les inconnues N_3 et T_3.

On considère que le basculement a lieu lorsque les roues arrière perdent le contact avec le sol.

Question 4 *Déterminer alors l'expression de dec_x.*

Correction Le basculement frontal du véhicule peut se traduire par un théorème du moment dynamique appliqué en I_4 en projection sur $\overrightarrow{y_1}$. On utilise les conditions précédentes. On a donc :

$$-m_B\text{dec}_x\left(z_{G_B} + h\right) - M\text{dec}_x h = m_Bg\left(x_{G_B} - 2\frac{L}{3}\right) - \frac{Mg2L}{3} \text{ soit } \text{dec}_x = \frac{m_Bg\left(x_{G_B} - 2\dfrac{L}{3}\right) - \dfrac{Mg2L}{3}}{-m_B\left(z_{G_B} + h\right) - Mh}$$

$$\Leftrightarrow \text{dec}_x = -g\frac{m_B\left(3x_{G_B} - 2L\right) - M2L}{3m_B\left(z_{G_B} + h\right) + 3Mh}$$

Le facteur d'adhérence entre le pneu et la route est noté f .

Question 5 *Donner les expressions de N_4 et T_4 et expliquer qualitativement comment vérifier que le basculement a lieu avant le glissement afin de justifier l'hypothèse faite en début d'étude.*

Correction

Étude du basculement latéral

Question 6 *Quel théorème doit-on utiliser afin d'obtenir directement l'équation permettant de déterminer l'expression de V qui provoque le basculement latéral ?*

Correction

Question 7 *En déduire l'expression de V qui provoque le basculement latéral .*

Correction

TD 3 – Corrigé

Dynamique du véhicule – Chariot élévateur à bateaux★

X – ENS – PSI – 2012

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Présentation

Étude de la position du centre de gravité

Objectif L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req C206 : la position du centre de gravité de l'ensemble Σ={chariot, tablier, contrepoids} doit être situé à un tiers de l'empattement par rapport à l'axe des roues arrières».

Question 1 *Déterminer l'expression de x_{G_C} afin de valider l'exigence req C206.*

Correction On a $\overrightarrow{OG} = \dfrac{m_T}{m_T+m_1+m_C}\overrightarrow{OG_T} + \dfrac{m_1}{m_T+m_1+m_C}\overrightarrow{OG_1} + \dfrac{m_C}{m_T+m_1+m_C}\overrightarrow{OG_C}$. On souhaite que $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$. On a donc $0 = \dfrac{m_T}{m_T+m_1+m_C}x_{G_T} + \dfrac{m_1}{m_T+m_1+m_C}x_{G_1} + \dfrac{m_C}{m_T+m_1+m_C}x_{G_C}$ et donc : $x_{G_C} = -\dfrac{m_T}{m_C}x_{G_T} - \dfrac{m_1}{m_C}x_{G_1}$.

Pour toute la suite de l'étude, les points G et O sont supposés confondus et la masse totale de l'ensemble Σ = {chariot, tablier, contrepoids} est notée M.

Étude du basculement frontal

Question 2 *Écrire les équations issues de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble $\{\Sigma, B\}$. Le théorème du moment dynamique sera appliqué au point I_4.*

Correction **On isole $\{\Sigma, B\}$.**

On fait le BAME.

- Poids du bateau : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \to B)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_B g \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} -m_B g \overrightarrow{z} \\ m_B g \overrightarrow{y}\left(x_{G_B} - \dfrac{2L}{3}\right) + E m_B g \overrightarrow{x} \end{array} \right\}_{I_4}$.
- Poids de Σ : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \to \Sigma)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M g \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} -M g \overrightarrow{z} \\ -\dfrac{2MgL}{3}\overrightarrow{y} + E M g \overrightarrow{x} \end{array} \right\}_{I_4}$.
- Action du sol sur chaque roue :
  - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \to P_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -T_1 \overrightarrow{x} + N_1 \overrightarrow{z} \\ L N_1 \overrightarrow{y} \end{array} \right\}_{I_4}$;
  - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \to P_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -T_1 \overrightarrow{x} + N_1 \overrightarrow{z} \\ -2E N_2 \overrightarrow{x} + L N_2 \overrightarrow{y} - 2E T_2 \overrightarrow{z} \end{array} \right\}_{I_4}$;
  - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \to P_3)\} = \left\{ \begin{array}{c} -T_3 \overrightarrow{x} + N_3 \overrightarrow{z} \\ -2E N_3 \overrightarrow{x} - 2E T_3 \overrightarrow{z} \end{array} \right\}_{I_4}$;
  - $\{\mathcal{T}(\text{sol} \to P_4)\} = \left\{ \begin{array}{c} -T_4 \overrightarrow{x} + N_4 \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_4}$.

Calcul du $\{\mathcal{D}(\{\Sigma, B\}/0)\}$.

$\{\mathcal{D}(\{\Sigma, B\}/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(\{\Sigma, B\}/0)} \\ \overrightarrow{\delta(I_4, \{\Sigma, B\}/0)} \end{array} \right\}_{I_4}$.

On a $\overrightarrow{R_d(\{\Sigma, B\}/0)} = -(M + m_B)\text{dec}_x \overrightarrow{x_1}$.

Par ailleurs, on a $\overrightarrow{\delta(G, \{\Sigma, B\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G, \Sigma/0)} + \overrightarrow{\delta(G, B/0)}$. Le bateau étant en translation par rapport au bâti, on a donc :

- $\overrightarrow{\delta(G,\{\Sigma\}/0)} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\delta(I_4,\{\Sigma\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G,\{\Sigma,\}/0)} + \overrightarrow{I_4G} \wedge \overrightarrow{R_d(\{\Sigma\}/0)} = \left(-2\dfrac{L}{3}\overrightarrow{x_1} - E\overrightarrow{y_1} + h\overrightarrow{z_1}\right) \wedge -M\text{dec}_x\overrightarrow{x_1} = -M\text{dec}_x\left(E\overrightarrow{z_1} + h\overrightarrow{y_1}\right)$;
- $\overrightarrow{\delta(G_B,\{B\}/0)} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\delta(I_4,\{B\}/0)} = \overrightarrow{\delta(G_B,\{B\}/0)} + \overrightarrow{I_4G_B} \wedge \overrightarrow{R_d(\{B\}/0)} = \left(\left(-x_{G_B} + 2\dfrac{L}{3}\right)\overrightarrow{x_1} + E\overrightarrow{y_1} + \left(z_{G_B} + h\right)\overrightarrow{z_1}\right) \wedge -m_B\text{dec}_x\overrightarrow{x_1} = m_B\text{dec}_x\left(E\overrightarrow{z_1} - \left(z_{G_B} + h\right)\overrightarrow{y_1}\right)$;
- au final, $\overrightarrow{\delta(I_4,\{\Sigma,B\}/0)} = m_B\text{dec}_x\left(E\overrightarrow{z_1} - \left(z_{G_B} + h\right)\overrightarrow{y_1}\right) - M\text{dec}_x\left(E\overrightarrow{z_1} + h\overrightarrow{y_1}\right)$.

On applique le PFD.

- Théorème de la résultante dynamique :
  - suivant $\overrightarrow{x_1}$:$-(M+m_B)\text{dec}_x = -\sum_{i=1}^{4} T_i$;
  - suivant $\overrightarrow{y_1}$:$0 = 0$;
  - suivant $\overrightarrow{z_1}$:$0 = \sum_{i=1}^{4} N_i - (M+m_B)g$.
- Théorème du moment dynamique :
  - suivant $\overrightarrow{x_1}$:$0 = Em_Bg + EMg - 2EN_2 - 2EN_3$;
  - suivant $\overrightarrow{y_1}$:$-m_B\text{dec}_x\left(z_{G_B}+h\right) - M\text{dec}_x h = L(N_1+N_2) + m_Bg\left(x_{G_B} - 2\dfrac{L}{3}\right) - \dfrac{Mg2L}{3}$;
  - suivant $\overrightarrow{z_1}$:$m_B\text{dec}_x E - M\text{dec}_x E = -2ET_2 - 2ET_3$.

Question 3 *Donner les hypothèses qui peuvent être faites afin de réduire le nombre d'inconnues du problème.*

Correction La mise en équation précédente permet d'exprimer 8 inconnues (N_i et T_i pour i allant de 1 à 4).

En faisant l'hypothèse que le plan $\left(G_1, \overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{x_1}\right)$ est plan de symétrie, on peut considérer que $N_4 = N_3$, $T_4 = T_3$, $N_1 = N_2$, $T_1 = T_2$. Il reste donc 4 inconnues.

De plus, à la limite du basculement frontal, les roues arrières se décolleraient. Il resterait donc les inconnues N_3 et T_3.

On considère que le basculement a lieu lorsque les roues arrière perdent le contact avec le sol.

Question 4 *Déterminer alors l'expression de dec_x.*

Correction Le basculement frontal du véhicule peut se traduire par un théorème du moment dynamique appliqué en I_4 en projection sur $\overrightarrow{y_1}$. On utilise les conditions précédentes. On a donc :

$$-m_B\text{dec}_x\left(z_{G_B}+h\right) - M\text{dec}_x h = m_Bg\left(x_{G_B} - 2\frac{L}{3}\right) - \frac{Mg2L}{3} \text{ soit } \text{dec}_x = \frac{m_Bg\left(x_{G_B} - 2\frac{L}{3}\right) - \frac{Mg2L}{3}}{-m_B\left(z_{G_B}+h\right) - Mh}$$

$$\Leftrightarrow \text{dec}_x = -g\frac{m_B\left(3x_{G_B} - 2L\right) - M2L}{3m_B\left(z_{G_B}+h\right) + 3Mh}$$

Le facteur d'adhérence entre le pneu et la route est noté f .

Question 5 *Donner les expressions de N_4 et T_4 et expliquer qualitativement comment vérifier que le basculement a lieu avant le glissement afin de justifier l'hypothèse faite en début d'étude.*

Correction

Étude du basculement latéral

Question 6 *Quel théorème doit-on utiliser afin d'obtenir directement l'équation permettant de déterminer l'expression de V qui provoque le basculement latéral ?*

Correction

Question 7 *En déduire l'expression de V qui provoque le basculement latéral .*

Correction