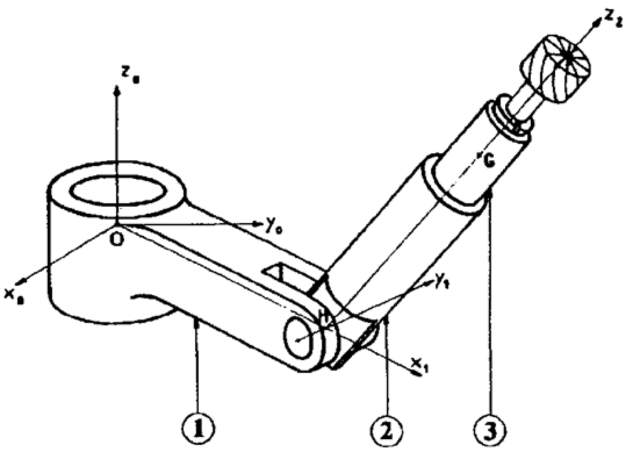
Colle 01

Porte-outil d'affûtage

Équipe PT – PT⋆ La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

Le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage est composé de trois solides **1**, **2** et **3**.



Le repère $\mathcal{R}_0=\left(O;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$, avec $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ vertical ascendant, est lié au bâti **0** de la machine. Il est supposé galiléen. Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Le repère $\mathcal{R}_1=\left(O;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0}\right)$ est lié au support tournant **1** en liaison pivot d'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ avec le bâti **0**. La position de **1** par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ est repérée par $\alpha=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)$.

On note I_1 le moment d'inertie de **1** par rapport à l'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ et H le point tel que $\overrightarrow{OH}=h\overrightarrow{x_1}$.

Le repère $\mathcal{R}_2=\left(H;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_2}\right)$ est lié au bras pivotant **2** en liaison pivot d'axe $\left(H,\overrightarrow{y_1}\right)$ avec **1**. La position de **2** est repérée par $\beta=\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right)=\left(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_2}\right)$.

On note m_2 la masse de **(2)**, de centre d'inertie H de matrice d'inertie $I_H(2)=\begin{pmatrix}A_2&0&0\\0&B_2&0\\0&0&C_2\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$.

Le repère $\mathcal{R}_3=\left(G;\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_2}\right)$ est lié au porte-outil **(3)** (avec l'outil à affûter tenu par le mandrin) en liaison pivot glissant d'axe $\left(H,\overrightarrow{z_2}\right)$ avec **(2)**.

La position de **(3)** est repérée par $\gamma=\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}\right)=\left(\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{y_3}\right)$ et par $\overrightarrow{HG}=\lambda\overrightarrow{z_2}$.

On note m_3 la masse de **(3)**, de centre d'inertie G de matrice d'inertie $I_G(3)=\begin{pmatrix}A_3&0&0\\0&B_3&0\\0&0&C_3\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$.

On note $\left\{\begin{array}{c}F_{23}\overrightarrow{z_2}\\C_{23}\overrightarrow{z_2}\end{array}\right\}_H$ le torseur d'action mécanique de l'actionneur de 2 sur 3 permettant d'assurer la translation et la rotation de l'outil.

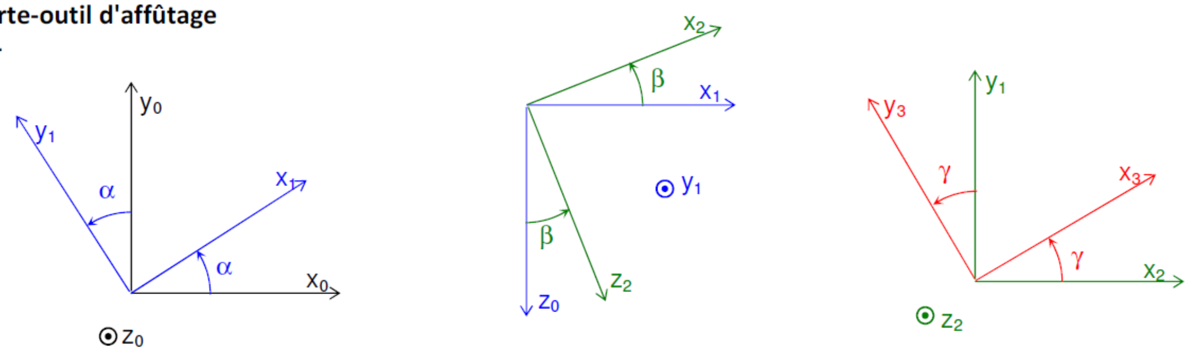
On note $\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\C_{12}\overrightarrow{y_1}\end{array}\right\}_H$ le torseur d'action mécanique du moteur de 1 sur 2 permettant d'assurer la rotation d'ensemble {2+3} autour de $\overrightarrow{y_1}$.

On note $\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\C_{01}\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_O$ le torseur d'action mécanique du moteur de 0 sur 1 permettant d'assurer la rotation d'ensemble {1+2+3} autour de $\overrightarrow{z_0}$.

Question 1 *Déterminer les équations différentielles de chacun des mouvements.*

Porte-outil d'affûtage

1 –



Torseur cinématique de **3** / R_0: $\mathcal{V}(3/R_0)$ = $\left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(3/R_0) = \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(G \in 3/R_0) = \left[\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} \end{matrix} \right\}_G$

$$\overrightarrow{OG} = h\,\vec{x}_1 + r\,\vec{z}_2$$

$$\vec{V}(G \in 3/R_0) = h\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2 + r\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0} \text{ avec } \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{z}_0) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_1$$

$$\boxed{\mathcal{V}(3/R_0) = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{y}_1 + \dot{\gamma}\,\vec{z}_2 \\ r\,\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2 \end{matrix} \right\}_G}$$

2 – Accélération de $G \in 3/R_0$: $\vec{\Gamma}(G \in 3/R_0) = \left[\dfrac{d\vec{V}(G \in 3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}$

$$= \dot{r}\,\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + r\,\ddot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{r}\,\dot{\beta}\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_0} + (\dot{r}\sin\beta + r\,\dot{\beta}\cos\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + (h + r\sin\beta)(\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 - \dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1) + \ddot{r}\,\vec{z}_2 + \dot{r}\,(\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_1)$$

avec $\left[\dfrac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{x}_2 = (\dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{z}_0) \wedge \vec{x}_2 = -\dot{\beta}\,\vec{z}_2 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y}_1$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(G \in 3/R_0) = (2\dot{r}\,\dot{\beta} + r\,\ddot{\beta})\,\vec{x}_2 + [2\dot{\alpha}(\dot{r}\sin\beta + r\,\dot{\beta}\cos\beta) + (h + r\sin\beta)\ddot{\alpha}]\,\vec{y}_1 - (h + r\sin\beta)\,\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1 + (\ddot{r} - r\,\dot{\beta}^2)\,\vec{z}_2}$$

3 – Pour déterminer F_{23} et C_{23}, faisons le bilan des actions mécaniques extérieures sur le solide **3**:

Liaison pivot glissant d'axe (G, $\vec{z}_2$) entre **2** et **3**: $\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)$ = $\left\{ \begin{matrix} X_{23}\,\vec{x}_2 + Y_{23}\,\vec{y}_1 \\ L_{23}\,\vec{x}_2 + M_{23}\,\vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_G$

Action de l'actionneur M_{23}: $\mathcal{T}(M_{23} \rightarrow 3)$ = $\left\{ \begin{matrix} F_{23}\,\vec{z}_2 \\ C_{23}\,\vec{z}_2 \end{matrix} \right\}_H$

Action de la pesanteur: $\mathcal{T}(\text{pesanteur} \rightarrow 3)$ = $\left\{ \begin{matrix} -\,m_3\,g\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$

Pour déterminer F_{23}, il faut appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide **3** en mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{z}_2$:

$m_3\ \vec{\Gamma}(G \in 3/R_0).\vec{z}_2 = F_{23} - m_3\, g\, \vec{z}_0.\vec{z}_2$

$m_3(-(h + r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\ \vec{x}_1.\vec{z}_2 + (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2)\ ) = F_{23} - m_3 g \cos\beta$

$$\boxed{F_{23} = m_3(\ddot{r} - r\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2(h + r\sin\beta)\sin\beta + g\cos\beta)}$$

Pour déterminer C_{23}, il faut appliquer le théorème du moment dynamique au solide **3**, en mouvement par rapport à R_0, en G (la matrice d'inertie de **3** est donnée en G) en projection sur $\vec{z}_2$:

$$\vec{\delta}_G(3/R_0).\vec{z}_2 = C_{23} + \overrightarrow{GH} \wedge F_{23}\vec{z}_2 = C_{23} - r\vec{z}_2 \wedge F_{23}\vec{z}_2 = C_{23}$$

$$\vec{\delta}_G(3/R_0).\vec{z}_2 = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}.\vec{z}_2 = \frac{d[\vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{z}_2]}{dt} - \vec{\sigma}_G(3/R_0).\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\vec{\sigma}_G(3/R_0) = \mathcal{I}_G(3)\,\vec{\Omega}(3/R_0) \qquad \text{avec } \vec{\Omega}(3/R_0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0 + \dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\gamma}\vec{z}_2$$

La matrice d'inertie du solide **3** est donnée sur le repère R_3 mais l'axe (G, $\vec{z}_2$) étant de révolution (voir l'allure de la matrice), elle est identique sur le repère R_2. Il est plus simple d'exprimer $\vec{\Omega}(3/R_0)$ sur R_2 que sur R_3:

$$\vec{\Omega}(3/R_0) = \dot{\alpha}\ (\cos\beta\,\vec{z}_2 - \sin\beta\,\vec{x}_2) + \dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\gamma}\vec{z}_2 = -\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2 + \dot{\beta}\vec{y}_1 + (\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta)\vec{z}_2$$

$$\vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix}.\vec{z}_2 = \left[-D\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2 + D\dot{\beta}\vec{y}_1 + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta)\vec{z}_2\right].\vec{z}_2$$

soit $\quad \vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{z}_2 = E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta)$

$$\vec{\sigma}_G(3/R_0).\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0} = (-D\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2 + D\dot{\beta}\vec{y}_1 + E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta)\vec{z}_2)(\dot{\beta}\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_1) = 0$$

d'où $\quad C_{23} = \dfrac{d[E(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta]}{dt}$

$$\boxed{C_{23} = E(\ddot{\gamma} + \ddot{\alpha}\cos\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta)}$$

Pour déterminer C_{12}, le bilan des actions mécaniques extérieures sur le solide **2** fait intervenir les actions de **3** sur **2** et celles de **1** sur **2**.

La liaison entre **1** et **2** étant une liaison pivot d'axe (H, $\vec{y}_1$), la seule équation ne faisant pas intervenir d'inconnues de cette liaison est la projection du théorème du moment dynamique sur l'axe (H, $\vec{y}_1$) mais celle-ci va faire intervenir les inconnues de la liaison **3/2.** Il faut donc isoler l'ensemble {**2**, **3**}.

Bilan des actions mécaniques extérieures sur l'ensemble {**2**, **3**}:

Liaison pivot d'axe (H, $\vec{y}_1$) entre **1** et **2**: $\mathcal{T}(1 \to 2) = {}_G\begin{Bmatrix} X_{12}\,\vec{x}_1 + Y_{12}\,\vec{y}_1 + Z_{12}\vec{z}_0 \\ L_{12}\,\vec{x}_1 + N_{12}\,\vec{z}_0 \end{Bmatrix}$

Action du moteur M_{12}: $\mathcal{T}(M_{12} \to 2) = {}_H\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{12}\,\vec{y}_1 \end{Bmatrix}$

Action de la pesanteur: $\mathcal{T}(\text{pesanteur} \to 2{+}3) = {}_G\begin{Bmatrix} -m_3\, g\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_H\begin{Bmatrix} -m_2\, g\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Théorème du moment dynamique en H appliqué à l'ensemble {**2**, **3**} en mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{y}_1$:

$$\vec{\delta}_H(2/R_0).\vec{y}_1+\vec{\delta}_H(3/R_0).\vec{y}_1=C_{12}+(\overrightarrow{HG}\wedge -m_3 g\vec{z}_0).\vec{y}_1=C_{12}-(r\vec{z}_2\wedge m_3 g\vec{z}_0).\vec{y}_1=C_{12}+r\,m_3\,g\sin\beta$$

$$*\ \vec{\delta}_H(2/R_0).\vec{y}_1=\left[\frac{d\vec{\sigma}_H(2/R_0)}{dt}\right]_{R_0}.\vec{y}_1=\frac{d[\vec{\sigma}_H(2/R_0).\vec{y}_1]}{dt}-\vec{\sigma}_H(2/R_0).\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0}\quad\text{avec}\quad\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0}=-\dot{\alpha}\,\vec{x}_1$$

$$\vec{\sigma}_H(2/R_0)=\mathcal{I}_H(2)\vec{\Omega}(2/R_0)\qquad\text{avec}\ \vec{\Omega}(2/R_0)=\dot{\alpha}\,\vec{z}_0+\dot{\beta}\,\vec{y}_1=\dot{\alpha}(\cos\beta\,\vec{z}_2-\sin\beta\,\vec{x}_2)+\dot{\beta}\,\vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_H(2/R_0)=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dot{\alpha}\sin\beta\\ \dot{\beta}\\ \dot{\alpha}\cos\beta\end{pmatrix}=-A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2+B\dot{\beta}\,\vec{y}_1+C\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2$$

$$\text{d'où}\quad\vec{\delta}_H(2/R_0).\vec{y}_1=\frac{d(B\dot{\beta})}{dt}-A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2.\dot{\alpha}\,\vec{x}_1+C\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2.\dot{\alpha}\,\vec{x}_1=B\ddot{\beta}+(C-A)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta$$

$$*\ \vec{\delta}_H(3/R_0).\vec{y}_1=\left[\frac{d\vec{\sigma}_G(3/R_0)}{dt}\right]_{R_0}.\vec{y}_1+\left[\overrightarrow{HG}\wedge m_3\,\vec{\Gamma}(G\in 3/R_0)\right]\vec{y}_1$$

$$=\frac{d[\vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{y}_1]}{dt}-\vec{\sigma}_G(3/R_0).\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0}+\left[r\,\vec{z}_2\wedge m_3\,\vec{\Gamma}(G\in 3/R_0)\right]\vec{y}_1$$

$$=\frac{d(D\dot{\beta})}{dt}-D\dot{\alpha}^2\sin\beta\,\vec{x}_2.\vec{x}_1+E\dot{\alpha}(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\vec{z}_2.\vec{x}_1+r\,m_3(\vec{y}_1\wedge\vec{z}_2).\vec{\Gamma}(G\in 3/R_0)$$

$$=D\ddot{\beta}-D\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta+E\dot{\alpha}(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\sin\beta+r\,m_3[2\dot{r}\dot{\beta}+r\ddot{\beta}-(h+r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1.\vec{x}_2]$$

$$\text{d'où}\quad C_{12}=-r\,m_3\,g\sin\beta+B\ddot{\beta}+(C-A)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta$$
$$+D\ddot{\beta}-D\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta+E\dot{\alpha}(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\sin\beta+r\,m_3[2\dot{r}\dot{\beta}+r\ddot{\beta}-(h+r\sin\beta)\dot{\alpha}^2\cos\beta]$$

$$\boxed{C_{12}=\ddot{\beta}(B+D+m_3r^2)+\dot{\alpha}^2[(C-A-D+E+m_3r^2)\sin\beta-hrm_3]\cos\beta+E\,\dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\sin\beta+r\,m_3(2\dot{r}\dot{\beta}-g\sin\beta)}$$

Pour déterminer C_{01}, faisons le bilan des actions mécaniques extérieures à l'ensemble {**1**, **2**, **3**}:

Liaison pivot d'axe (O, $\vec{z}_0$) entre **0** et **1**: $\mathcal{T}(0\rightarrow 1)=\left\{\begin{matrix}X_{01}\,\vec{x}_0+Y_{01}\,\vec{y}_0+Z_{01}\vec{z}_0\\ L_{01}\,\vec{x}_0+M_{01}\,\vec{y}_0\end{matrix}\right\}_O$

Action du moteur M_{01}: $\mathcal{T}(M_{01}\rightarrow 1)=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ C_{01}\,\vec{z}_0\end{matrix}\right\}_O$

Action de la pesanteur: $\mathcal{T}(\text{pesanteur}\rightarrow 1+2+3)=\left\{\begin{matrix}-m_3\,g\,\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_G+\left\{\begin{matrix}-m_2\,g\,\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_H+\left\{\begin{matrix}-m_1\,g\,\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_O$

Théorème du moment dynamique en O appliqué à l'ensemble {**1**, **2**, **3**} en mouvement par rapport à R_0 en projection sur $\vec{z}_0$:

$$\vec{\delta}_O(1/R_0).\vec{z}_0+\vec{\delta}_O(2/R_0).\vec{z}_0+\vec{\delta}_O(3/R_0).\vec{z}_0=C_{01}+(\overrightarrow{OG}\wedge -m_3 g\vec{z}_0+\overrightarrow{OH}\wedge -m_2 g\vec{z}_0).\vec{z}_0=C_{01}$$
$$=\frac{d[\vec{\sigma}_O(1/R_0).\vec{z}_0+\vec{\sigma}_O(2/R_0).\vec{z}_0+\vec{\sigma}_O(3/R_0).\vec{z}_0]}{dt}$$

* $\vec{\sigma}_O(1/R_0).\vec{z}_0 = I_1\,\dot{\alpha}$ car **1/0 =** rotation autour de l'axe (O, $\vec{z}_0$) fixe dans R_0

* $\vec{\sigma}_O(2/R_0).\vec{z}_0 = \vec{\sigma}_H(2/R_0).\vec{z}_0 + [\overrightarrow{OH} \wedge m_2\vec{V}(H\in 2/R_0)].\vec{z}_0$

$$= -A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2.\vec{z}_0 + B\dot{\beta}\,\vec{y}_1.\vec{z}_0 + C\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2.\vec{z}_0 + (h\,\vec{x}_1 \wedge m_2 h\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1).\vec{z}_0$$

$$= A\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + C\,\dot{\alpha}\cos^2\beta + m_2 h^2\,\dot{\alpha}$$

* $\vec{\sigma}_O(3/R_0).\vec{z}_0 = \vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{z}_0 + [\overrightarrow{OG} \wedge m_3\vec{V}(G\in 3/R_0)].\vec{z}_0$

$$\vec{\sigma}_G(3/R_0).\vec{z}_0 = -D\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2.\vec{z}_0 + D\dot{\beta}\,\vec{y}_1.\vec{z}_0 + E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\vec{z}_2.\vec{z}_0$$

$$= D\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\cos\beta$$

$$[\overrightarrow{OG} \wedge m_3\vec{V}(G\in 3/R_0)].\vec{z}_0 = m_3[(h\,\vec{x}_1 + r\,\vec{z}_2)\wedge(r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2)].\vec{z}_0$$

$$= m_3[\vec{z}_0 \wedge (h\,\vec{x}_1 + r\,\vec{z}_2)].[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2)]$$

$$= m_3(h + r\sin\beta)\vec{y}_1.[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2)]$$

$$= m_3(h + r\sin\beta)\vec{y}_1.[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2)]$$

$$= m_3(h + r\sin\beta)^2\dot{\alpha}$$

d'où $C_{01} = \dfrac{d}{dt}\left[I_1\,\dot{\alpha} + A\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + C\,\dot{\alpha}\cos^2\beta + m_2h^2\,\dot{\alpha} + D\,\dot{\alpha}\sin^2\beta + E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\cos\beta m_3(h + r\sin\beta)^2\dot{\alpha}\right]$

$$\boxed{C_{01} = \frac{d}{dt}\left[(I_1 + (A+D)\sin^2\beta + (C+E)\cos^2\beta + m_2h^2 + m_3(h + r\sin\beta)^2)\dot{\alpha} + E\,\dot{\gamma}\cos\beta\right]}$$

Nota: si on applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble {**1**, **2**, **3**}, on va trouver une relation liant C_{01}, C_{12}, C_{23} et F_{23}. En effet:

$$P(M_{01}\to 1/R_0) + P(0\to 1/R_0) + P(\text{pesanteur}\to 1+2+3/R_0) + \sum P_{int} = \frac{d}{dt}T(1+2+3/R_0)$$

avec $P(M_{01}\to 1/R_0) = C_{01}\,\dot{\alpha}$

$P(0\to 1/R_0) = 0$ (liaison parfaite)

$P(\text{pesanteur}\to 1/R_0) = 0$ car le centre de gravité O de **1** est fixe dans R_0

$P(\text{pesanteur}\to 2/R_0) = 0$ car la vitesse du centre de gravité H de **2** est perpendiculaire au poids

$P(\text{pesanteur}\to 3/R_0) = -m_3\, g\, \vec{z}_0.\vec{V}(G\in 3/R_0) = -m_3\, g\, \vec{z}_0.[r\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (h + r\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{r}\,\vec{z}_2]$

$$= m_3\, g(r\dot{\beta}\sin\beta - \dot{r}\cos\beta)$$

$\sum P_{int} = P_i(1,2) + P_i(2,3)$

$$= [\mathcal{T}(1\to 2) + \mathcal{T}(M_{12}\to 2)] \otimes \mathcal{V}(2/1) + [\mathcal{T}(2\to 3) + \mathcal{T}(M_{23}\to 3)] \otimes \mathcal{V}(3/2)$$

$$= {}_H\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{12}\,\vec{y}_1 \end{Bmatrix} \otimes {}_H\begin{Bmatrix} \dot{\beta}\,\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_H\begin{Bmatrix} F_{23}\,\vec{z}_2 \\ C_{23}\,\vec{z}_2 \end{Bmatrix} \otimes {}_H\begin{Bmatrix} \dot{\gamma}\,\vec{z}_2 \\ \dot{r}\,\vec{z}_2 \end{Bmatrix} = C_{12}\,\dot{\beta} + C_{23}\,\dot{\gamma} + F_{23}\,\dot{r}$$

$$T(1/R_0) = \frac{1}{2}I_1\,\dot{\alpha}^2$$

$$T(2/R_0) = \frac{1}{2}m_2\vec{V}^2(H\in 2/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(2/R_0).\vec{\sigma}_H(2/R_0)$$

$$= \frac{1}{2}m_2h^2\,\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{y}_1)(-A\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\,\vec{y}_1 + C\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2)$$

$$= \frac{1}{2}m_2h^2\,\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(A\,\dot{\alpha}^2\sin^2\beta + C\,\dot{\alpha}^2\cos^2\beta + B\dot{\beta}^2)$$

$$T(3/R_0) = \frac{1}{2}m_3\vec{V}^2(G\in 3/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(3/R_0).\vec{\sigma}_G(3/R_0)$$

$$=\frac{1}{2}m_3[r\dot{\beta}\vec{x}_2+(h+r\sin\beta)\dot{\alpha}\vec{y}_1+\dot{r}\vec{z}_2]^2$$

$$+\frac{1}{2}[-\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2+\dot{\beta}\vec{y}_1+(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\vec{z}_2]\left[-D\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_2+D\dot{\beta}\vec{y}_1+E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)\vec{z}_2\right]$$

$$=\frac{1}{2}m_3[r^2\dot{\beta}^2+(h+r\sin\beta)^2\dot{\alpha}^2+\dot{r}^2]+\frac{1}{2}\left[D(\dot{\alpha}^2\sin^2\beta+\dot{\beta}^2)+E(\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta)^2\right]$$

soit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\begin{matrix}[I_1+m_2h^2+(A+D)\sin^2\beta+(C+E)\cos^2\beta+m_3(h+r\sin\beta)^2]\dot{\alpha}^2\\+[B+D+m_3r^2]\dot{\beta}^2+m_3\dot{r}^2+E\dot{\gamma}^2+2E\dot{\gamma}\dot{\alpha}\cos\beta\end{matrix}\right\}$$

$$=C_{01}\dot{\alpha}+C_{12}\dot{\beta}+C_{23}\dot{\gamma}+F_{23}\dot{r}+m_3g(r\dot{\beta}\sin\beta-\dot{r}\cos\beta)$$