Activation 1

Activation 1

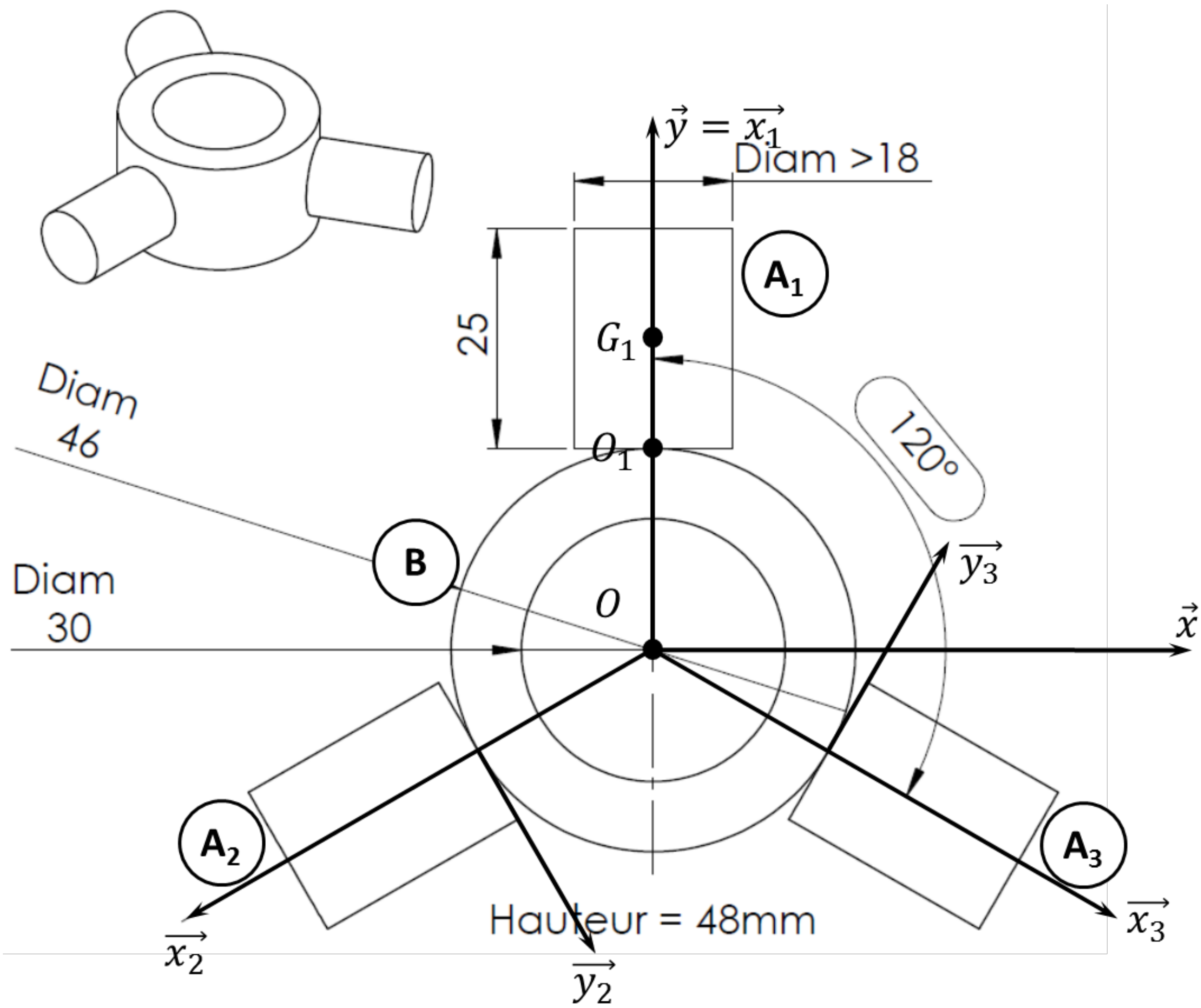
X. Pessoles

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- ❒ *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- ❒ *Mod2.C15 : matrice d'inertie*

Triaxe

On donne le plan d'un triaxe constitué des 3 axes A_1, A_2, A_3 et du moyeu central noté M. On note T l'ensemble.



On note :

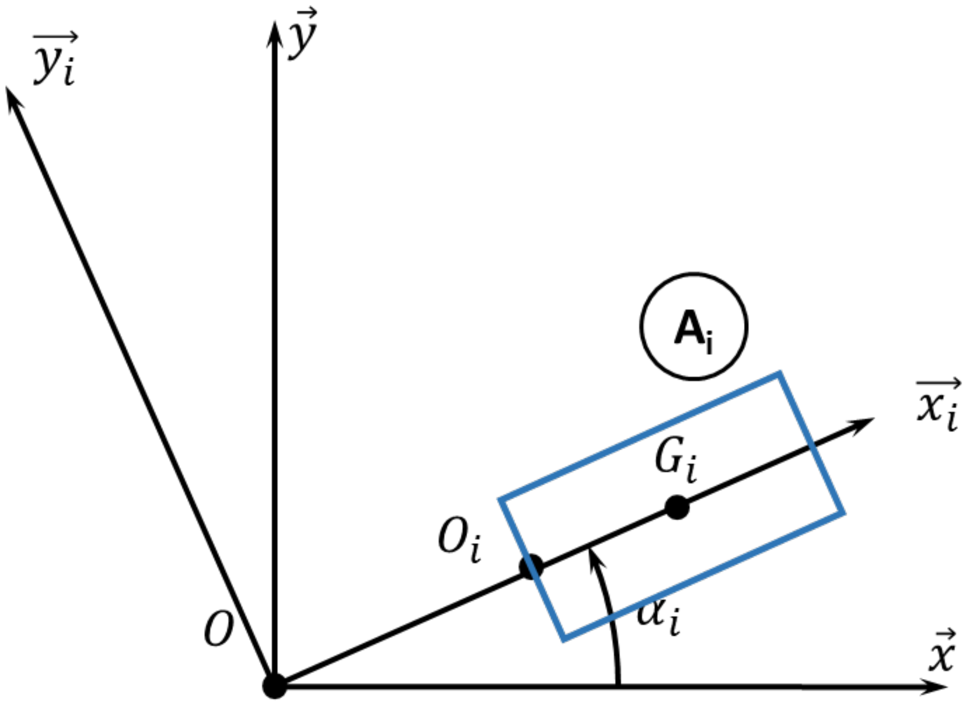
- $\vec{z}$ l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On se place ci-dessus dans le plan de symétrie $\left(O, \vec{x}, \vec{y}\right)$;
- $\mathcal{R}_i$ le repère $\left(O_i; \vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i}\right)$ et $\mathcal{B}_i$ la base associée.

TOUS LES CALCULS SE FERONT DE MANIÈRE LITTEREALE !

- $D_1 = 18\,\text{mm}$ et $H_1 = 25\,\text{mm}$.
- $D = 46\,\text{mm}$, $D' = 30\,\text{mm}$ et $H = 48\,\text{mm}$.

- $\alpha_1=\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_1}\right)=90°$, $\alpha_2=\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_2}\right)=-150°$ et $\alpha_3=\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_3}\right)=-30°$.

On donne ci-dessous le paramétrage d'un axe A_i.



Question 1 *Déterminer (sans calcul) la position du centre de gravité du triaxe.*

Correction

Le plan $\left(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{z}=0$
Le plan $\left(O,\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{x}=0$
Reste la coordonnée selon $\overrightarrow{y}$.
Les plans $\left(O,\overrightarrow{z},\overrightarrow{x_2}\right)$ et $\left(O,\overrightarrow{z},\overrightarrow{x_3}\right)$ étant plans de symétrie, on a $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{y_2}=0$ et $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{y_3}=0$. Or $\overrightarrow{OG}=y_g\overrightarrow{y}=y_g\cos\alpha_2\overrightarrow{y_2}-y_g\sin\alpha_2\overrightarrow{x_2}$. Il en résulte que $y_g\cos\alpha_2=0$ et donc nécessairement $y_g=0$ car $\alpha_2\neq 0$.

Question 2 *Déterminer analytiquement la position du centre de gravité G_i du solide A_1 dans le repère $\mathcal{R}_i$.*

Correction On pourrait répondre directement en disant que le solide à 3 plans de symétrie orthogonaux entre eux. En utilisant la définition on a :

- $M_1=\mu H_1\pi\dfrac{D_1^2}{4}$;
- en coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{O_iP_i}=x\overrightarrow{x_i}+\rho\cos\theta\overrightarrow{y_i}+\rho\sin\theta\overrightarrow{z_i}$ et $\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$ avec $x\in[0,H_1]$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,D_1/2]$;
- $m_ix_{G_i}=\mu\iiint x_P dV=\mu\iiint x\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=\mu\dfrac{H_1^2}{2}2\pi\dfrac{D_1^2}{8}$;
- $m_iy_{G_i}=\mu\iiint y_P dV=\mu\iiint\rho\cos\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=0$;
- $m_iz_{G_i}=\mu\iiint z_P dV=\mu\iiint\rho\sin\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=0$.

Au final, $\mu H_1\pi\dfrac{D_1^2}{4}x_{G_1}=\mu\dfrac{H_1^2}{2}2\pi\dfrac{D_1^2}{8}\Leftrightarrow x_{G_1}=\dfrac{H_1}{2}$.

Question 3 *Déterminer (sans calcul) la **forme** de la matrice d'inertie du triaxe.*

Correction Le plan $\left(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $E=\iiint xz\mathrm{d}m=0$ et $D=\iiint yz\mathrm{d}m=0$.
Le plan $\left(O,\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $E=\iiint xz\mathrm{d}m=0$ et $F=\iiint xy\mathrm{d}m=0$.

La matrice est donc diagonale et de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$.

Question 4 *Déterminer analytiquement la matrice d'inertie du solide A_i en G_i dans $\mathscr{R}_i$. On la note $I_{G_i}(A_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_i}$ où les constantes seront à déterminer littéralement.*

Correction Le solide étant axisymétrique, on a : $D_i = E_i = F_i = 0$ et $C_i = B_i$. D'où $I_{G_i}(A_1) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & B_i \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1}$.

Calculons $A_i = \iiint (y^2+z^2)\,\mathrm{d}m = \mu \iiint \left(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x$

$= \mu \iiint \rho^3 \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \mu \left[\dfrac{\rho^4}{4}\right]_0^{D_1/2} 2\pi H_1 = \mu \dfrac{D_1^4}{16\cdot 4} 2\pi H_1 = M_1 \dfrac{D_1^2}{8}$.

Calculons $B_i = \iiint (x^2+z^2)\,\mathrm{d}m = \mu \iiint \left(x^2 + \rho^2\sin^2\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x$

$B_x = \mu \iiint x^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x + \mu \iiint \rho^2\sin^2\theta\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x = \mu \iiint x^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x = \mu \dfrac{H_1^3}{4\cdot 3}\dfrac{D_1^2}{8} 2\pi = M \dfrac{H_1^2}{12}$

$B_z = \mu \iiint \rho^2\sin^2\theta\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x = \mu \iiint \rho^3 \dfrac{1-\cos 2x}{2}\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x = \mu \iiint \dfrac{\rho^3}{2}\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x = \mu \dfrac{D_i^4}{2\cdot 16\cdot 4} 2\pi H_1 = M \dfrac{D_i^2}{16}$.

Au final, $A_i = M_1 \dfrac{D_1^2}{8}$ et $B_i = M\left(\dfrac{H_1^2}{12} + \dfrac{D_1^2}{16}\right)$.

Question 5 *Déterminer $I_{G_i}(A_i)$ dans la base $\mathscr{B}\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ puis $I_O(A_i)$ dans la base $\mathscr{B}$.*

Correction On a $\overrightarrow{x_i} = \cos\alpha\,\overrightarrow{x} + \sin\alpha\,\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{y_i} = \cos\alpha\,\overrightarrow{y} - \sin\alpha\,\overrightarrow{x}$. En conséquences, on a : $P_{10} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}} = P_{10}^{-1} I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}_1} P_{10}$.

$$I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1\cos\alpha & -A_1\sin\alpha & 0 \\ B_1\sin\alpha & B_1\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1\cos^2\alpha + B_1\sin^2\alpha & -A_1\sin\alpha\cos\alpha + B_1\cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ -A_1\sin\alpha\cos\alpha + B_1\cos\alpha\sin\alpha & A_1\sin^2\alpha + B_1\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{OG_i} = \dfrac{H+D}{2}\overrightarrow{x_i} = \dfrac{H+D}{2}\left(\cos\alpha\,\overrightarrow{x} + \sin\alpha\,\overrightarrow{y}\right)$; donc :

$$I_O(A_i)_{\mathscr{R}} = I_{G_i}(A_i)_{\mathscr{R}} + M_1 \begin{pmatrix} \left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right) & 0 \\ \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right) & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 + \left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$I_O(A_i)_{\mathscr{R}} = I_{G_i}(A_i)_{\mathscr{R}} + M_1 \begin{pmatrix} \left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 & \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}}.$$

Au final, $I_O(A_i)_{\mathcal{R}} =$

$$\begin{pmatrix} A_1\cos^2\alpha + B_1\sin^2\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 & (B_1-A_1)\sin\alpha\cos\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ (B_1-A_1)\sin\alpha\cos\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & A_1\sin^2\alpha + B_1\cos^2\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

On note $I_O(A_i)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} f(\alpha) & fg(\alpha) & 0 \\ fg(\alpha) & g(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & h(\alpha) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

Question 6 *Déterminer $I_O(B)$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Question 7 *Proposer une méthode pour déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base $\mathcal{B}$.*

Question 8 *Déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base $\mathcal{B}$.*

Correction

Question 9 *Déterminer $I_O(M)$ la matrice d'inertie du moyeu M.*

Correction

Question 10 *Déterminer $I_O(T)$ la matrice d'inertie du triaxe T.*

Correction