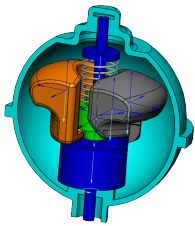


## Application 1



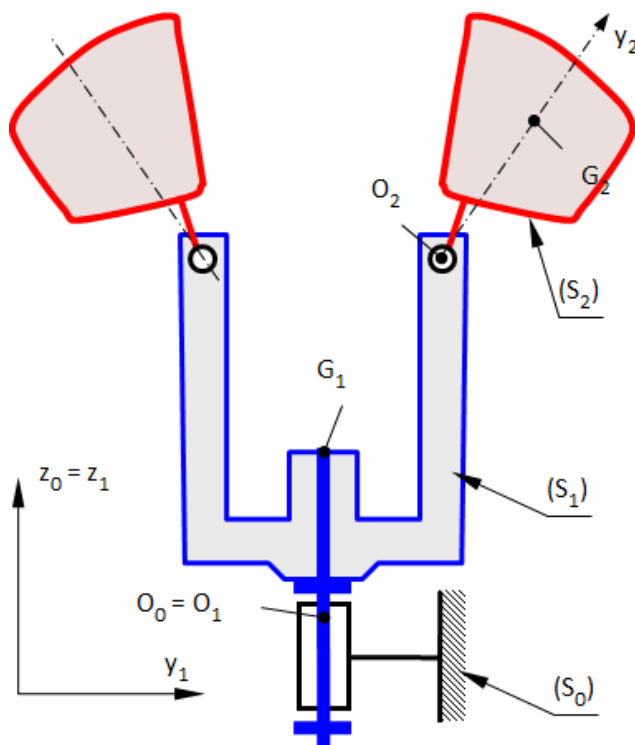
### Application – Régulateur centrifuge

C. Gamelon &amp; P. Dubois

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C13 : centre d'inertie
- Mod2.C14 : opérateur d'inertie
- Mod2.C15 : matrice d'inertie

On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor ( $S_1$ ) et la masselotte ( $S_2$ ) représentés schématiquement ci-dessous.

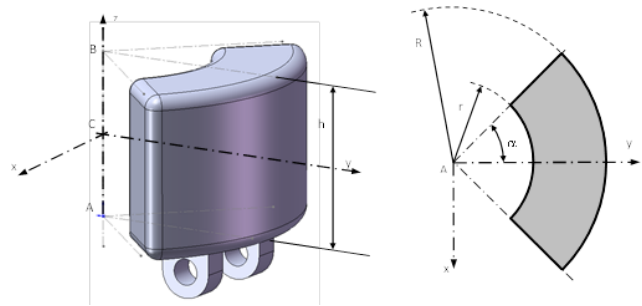


- ( $S_1$ ) est en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$  avec ( $S_0$ ).
- ( $S_2$ ) est en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{x}_1)$  avec ( $S_1$ ).
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$ .
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$ .
- $\vec{O_0 G_1} = h_1 \vec{z}_0$ .
- $\vec{O_0 O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$ .
- $\vec{O_2 G_2} = L_2 \vec{y}_2$ .

Pour chacun des solides  $S_i$  on note  $m_i$  la masse,  $I_{G_i}(S_i) =$

$$\begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$$

On note  $E = \{S_1, S_2\}$ . Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



**Question 1** Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Afin de ne pas trop alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$ .

**Question 2** Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

**Question 3** Déterminer :

- le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$  en  $O_1$  ;
- le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$  en  $O_2$ .

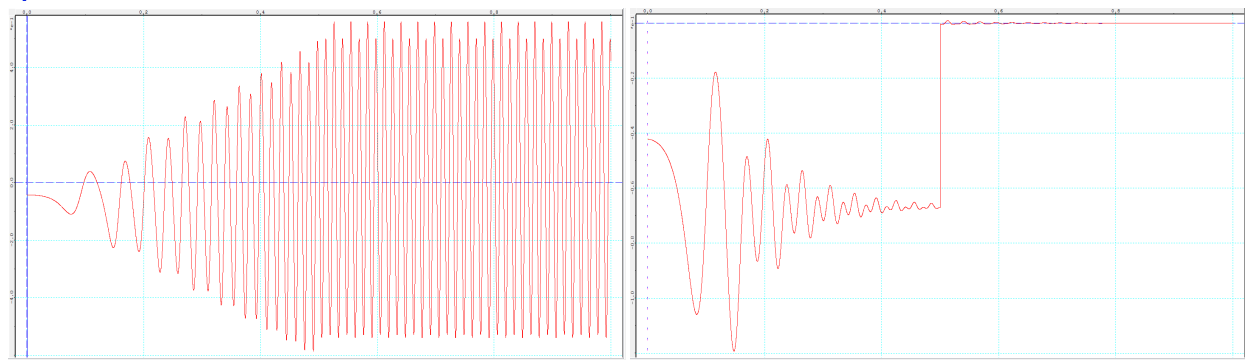
**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$ .

**Question 5** Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$  en  $O_2$  ?

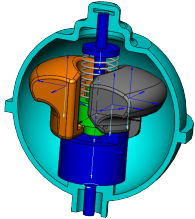
**Question 6** Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne les résultats de deux simulations permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre  $S_1$  et  $S_2$  (couple maximal 0,46 Nm), une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

**Question 7** Commenter ces résultats.



## Application 1 – Corrigé



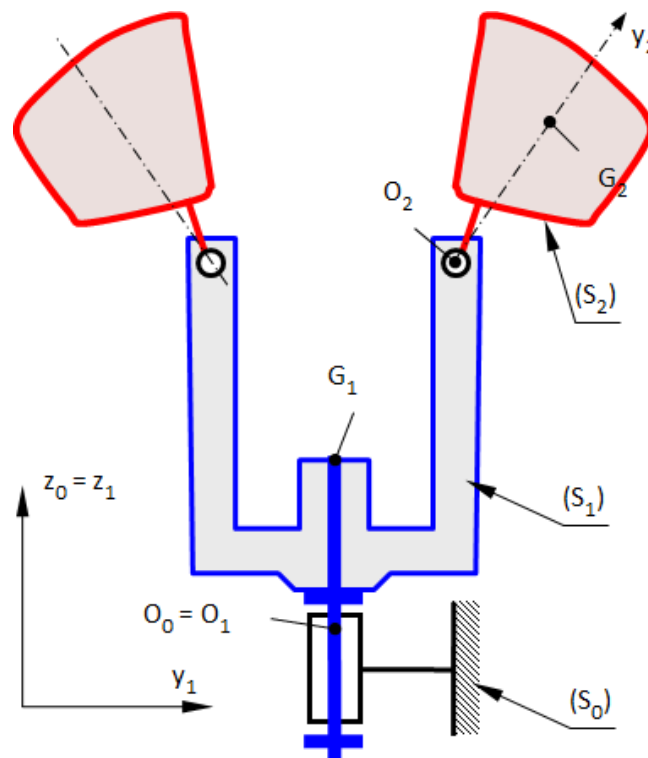
### Application – Régulateur centrifuge

C. Gamelon & P. Dubois

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C13 : centre d'inertie
- Mod2.C14 : opérateur d'inertie
- Mod2.C15 : matrice d'inertie

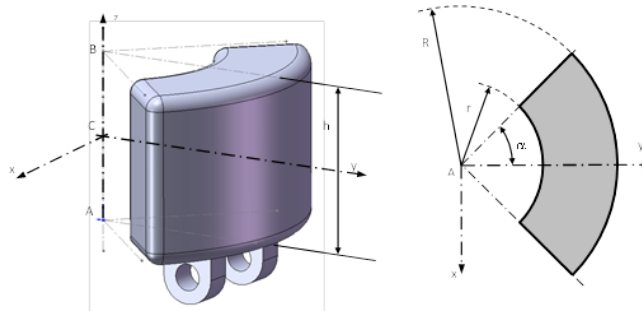
On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor ( $S_1$ ) et la masselotte ( $S_2$ ) représentés schématiquement ci-dessous.



- ( $S_1$ ) est en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$  avec ( $S_0$ ).
- ( $S_2$ ) est en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{x}_1)$  avec ( $S_1$ ).
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$ .
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$ .
- $\vec{O_0 G_1} = h_1 \vec{z}_0$ .
- $\vec{O_0 O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$ .
- $\vec{O_2 G_2} = L_2 \vec{y}_2$ .

Pour chacun des solides  $S_i$  on note  $m_i$  la masse,  $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$ .

On note  $E = \{S_1, S_2\}$ . Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



**Question 1** Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

**Correction** Le solide 1 est axisymétrique. En tout point de l'axe du solide, la matrice d'inertie sera diagonale. On

$$\text{a donc } I_{O_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}.$$

Le solide 2 admet le plan  $(\vec{y}_2, \vec{z}_2)$  comme plan de symétrie. Les produits d'inertie dépendant de  $x$  sont nuls.

$$\text{On a donc } I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}.$$

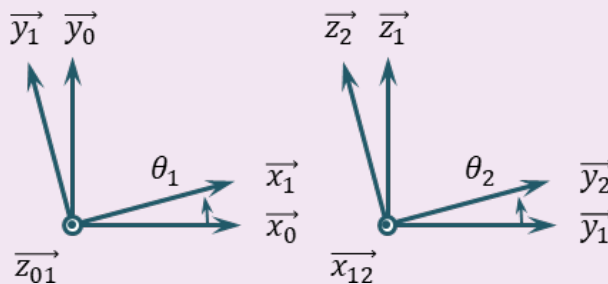
Afin de ne pas trop alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$ .

**Question 2** Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

**Question 3** Déterminer :

- le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$  en  $O_1$  ;
- le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$  en  $O_2$ .

**Correction**



**Mouvement du solide 1/0**

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{O_1}.$$

$O_1$  est un point fixe dans  $R_0$ .

$$\{\sigma(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{0} \\ I_{O_1}(S_1) \Omega(S_1/R_0) \end{pmatrix} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{pmatrix} \right\}_{O_1} \text{ et } \{\mathcal{D}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{0} \\ C_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{pmatrix} \right\}_{O_1}.$$

**Mouvement du solide 2/0**

$$\text{On a : } \{\mathcal{V}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \\ V(G_2 \in S_2/R_0) \end{pmatrix} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \\ L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 L_1 \vec{x}_1 \end{pmatrix} \right\}_{G_2}.$$

$$\overrightarrow{V(G_2 \in S_2/R_0)} = \overrightarrow{V(G_2 \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(G_2 \in S_1/R_0)}$$

$$\begin{aligned} &= \left( \underbrace{\overrightarrow{V(O_2 \in S_2/S_1)}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{G_2 O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} \right) + \left( \underbrace{\overrightarrow{V(O_0 \in S_1/R_0)}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{G_2 O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \right) \\ &= (-L_2 \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{z}_2) + (-(\dot{\theta}_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1 + L_2 \vec{y}_2) \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_1) = L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 \end{aligned}$$

$G_2$  est le centre de gravité de  $S_2$ .

$$\{\sigma(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1) \\ I_{G_2}(S_2) \Omega(S_2/R_0) \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 = \dot{\theta}_1 (\cos \theta_2 \vec{z}_2 + \sin \theta_2 \vec{y}_2) + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2$$

$$I_{G_2}(S_2) \Omega(S_2/R_0) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\theta}_2 \\ B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \Gamma(G_2 \in S_2/R_0) \\ \left[ \frac{d}{dt} (I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}) \right]_{R_0} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in S_2/R_0)} = \left[ \frac{d(L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1)}{dt} \right]_{R_0}$$

$$= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 + L_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2) - \ddot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1 (-L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1^2 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1$$

$$= L_2 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{y}_2 + (2L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \ddot{\theta}_1 (L_1 + L_2 \cos \theta_2)) \vec{x}_1 - \dot{\theta}_1^2 (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{y}_1$$

$$\left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} A_2 \ddot{\theta}_2 \\ B_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + B_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ -D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$+ A_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + (B_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 - D_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) (-\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2) + (-D_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + C_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) (\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2)$$

$$\left[ \frac{d \vec{z}_2}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d \vec{z}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \vec{x}_{1,2} - \dot{\theta}_2 \vec{y}_2$$

$$\left[ \frac{d \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{x}_2) \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2$$

$$\left[ \frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d \vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d \vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{y}_1$$

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$ .

**Correction**  $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$

$$= \left( \overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2$$

$$= \left( \left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \right) \cdot \vec{x}_2$$

$$\left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0} = \left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \right]_{R_0} \cdot \vec{x}_2 + \left[ \frac{d}{dt} I_{G_2}(S_2) \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0}$$

**Question 5** Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$  en  $O_2$  ?

**Question 6** Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre  $S_1$  et  $S_2$  (couple maximal 0,46 Nm) , une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

**Question 7** Commenter ces résultats.

