

Application 02



Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

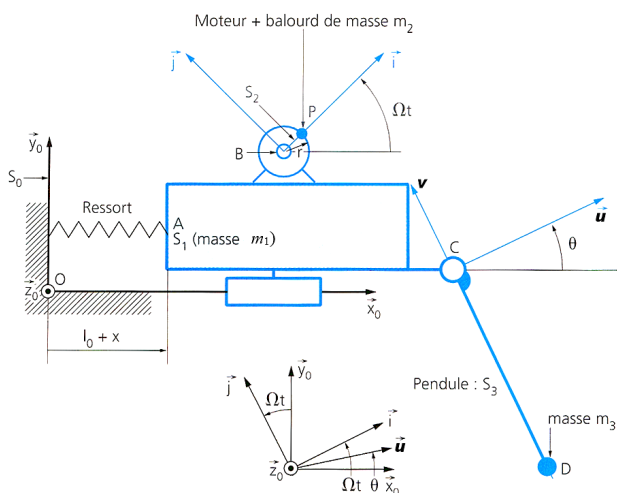
Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide S_1 , de masse m_1 en liaison glissière parfaite avec un support S_0 , fixe par rapport à un repère \mathcal{R}_0 supposé galiléen.

Le solide S_1 est rappelé par un ressort de longueur libre l_0 et de raideur k . Une masse ponctuelle m_2 excentrée, placée en P , tourne sur un rayon r et est entraînée à vitesse constante Ω . Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur S_2 .

Un pendule simple de longueur L , porte à son extrémité D une masse concentrée m_3 , l'ensemble constitue le solide S_3 , en liaison pivot parfaite d'axe (C, \vec{z}_0) avec S_1 .

Les masses autres que m_1 , m_2 et m_3 sont négligées.



Objectif Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

Question 1 Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x , θ et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$ en supposant que x , θ , \dot{x} , $\dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

Question 2 Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme $x(t) = A \cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$.

Question 3 Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B .

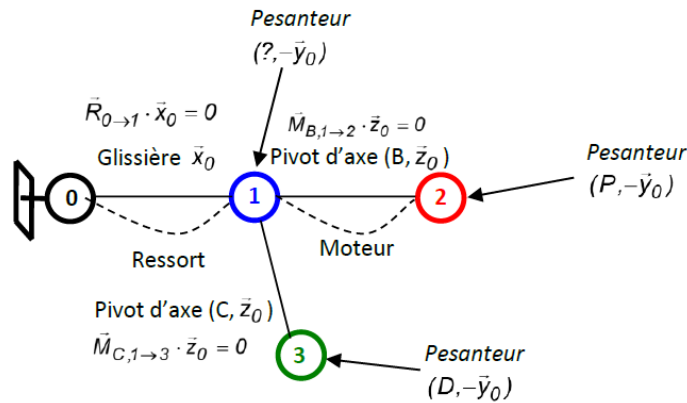
Question 4 Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t) = 0$ en régime forcé.

Éléments de correction

- $(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} \cos \theta - m_3 L \dot{\theta}^2 \sin \theta = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$ et $\ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$.
- $(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$ et $\ddot{x} + L \ddot{\theta} + g \theta = 0$.
- $A = \frac{m_2 r \Omega^2 (-L \Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3) \Omega^2 + k](-L \Omega^2 + g) - m_3 L \Omega^4}$ et $B = \frac{m_2 r \Omega^2}{[-(m_1 + m_2 + m_3) \Omega^2 + k](-L \Omega^2 + g) - m_3 L \Omega^4}$.
- $L = \frac{g}{\Omega^2}$.

1. Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x, θ , leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède trois degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver trois équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée : $\Omega = cte$. Reste à déterminer $\theta(t)$ et $x(t)$.

On isole $\Sigma = 1+2+3$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ en projection sur \vec{x}_0 doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas :

$$\vec{R}_{d\Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x}_0$$

On isole 3.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 3 au point C et en projection sur \vec{z}_0 doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 3 n'interviennent pas :

$$\vec{\delta}_{C,3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C,3 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{R}_{(1+2+3) \rightarrow (1+2+3)} \cdot \vec{x}_0$:

$$\begin{aligned} \{T_{0 \rightarrow 1}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{P,0 \rightarrow 1} \end{array} \right\}_{\forall P} \text{ avec } \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_0 = 0 & \{T_{0 \rightarrow 1}^{\text{ressort}}\} &= \left\{ \begin{array}{l} -kx\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall P \in (A, \vec{x}_0)} \\ \{T_{pes \rightarrow 1}\} &= \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall P \in (G_1, \vec{y}_0)} & \{T_{pes \rightarrow 2}\} &= \left\{ \begin{array}{l} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall P \in (G_2, \vec{y}_0)} & \{T_{pes \rightarrow 3}\} &= \left\{ \begin{array}{l} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall P \in (G_3, \vec{y}_0)} \end{aligned}$$

$$\vec{R}_{(1+2+3) \rightarrow (1+2+3)} \cdot \vec{x}_0 = -kx$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0$:

$$\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = \sum_{i=1}^3 m_i \vec{\Gamma}_{G_i \in i/0} \cdot \vec{x}_0$$

Soit $\vec{R}_{d(1+2+3)/0} \cdot \vec{x}_0 = m_1 \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} \cdot \vec{x}_0 + m_2 \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} \cdot \vec{x}_0 + m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} \cdot \vec{x}_0$

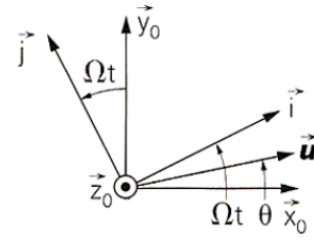
$$\vec{V}_{G_1 \in 1/0} = \dot{\vec{x}}_0 \Rightarrow \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} = \ddot{\vec{x}}_0$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/1} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \vec{G_2 B} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -r\vec{i} \wedge \Omega \vec{z}_0 = r\Omega \vec{j}$$

$$\vec{V}_{G_2 \in 2/0} = \vec{V}_{G_2 \in 2/1} + \vec{V}_{G_2 \in 1/0} = r\Omega \vec{j} + \dot{\vec{x}}_0 \Rightarrow \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} = \ddot{\vec{x}}_0 - r\Omega^2 \vec{i} \quad \text{car } \left. \frac{d\vec{j}}{dt} \right|_0 = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{j} = \Omega \vec{z}_0 \wedge \vec{j} = -\Omega \vec{i}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/1} = \vec{V}_{C \in 3/1} + \vec{G_3 C} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} = L\vec{v} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = L\dot{\theta} \vec{u}$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{V}_{G_3 \in 3/1} + \vec{V}_{G_3 \in 1/0} = L\dot{\theta} \vec{u} + \dot{\vec{x}}_0 \Rightarrow \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = \ddot{\vec{x}}_0 + L\ddot{\theta} \vec{u} + L\dot{\theta}^2 \vec{v} \quad \text{car } \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_0 = \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge \vec{u} = \dot{\theta} \vec{v}$$



Théorème de la résultante dynamique appliqué à $\Sigma = S1 + S2 + S3$ en projection sur \vec{x}_0 : $\vec{R}_{d\Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x}_0$

$$-kx = m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - r\Omega^2 \cos(\Omega t)) + m_3 (\ddot{x} + L\ddot{\theta} \cos\theta - L\dot{\theta}^2 \sin\theta)$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + kx + m_3 L \ddot{\theta} \cos\theta - m_3 L \dot{\theta}^2 \sin\theta = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{C, \vec{3} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$:

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{P, 2 \rightarrow 3} \end{array} \right\} \text{ avec } \vec{M}_{P, 2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \{T_{pes \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\vec{M}_{C, pes \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = \left(\vec{M}_{G_3, pes \rightarrow 3} + \vec{CG_3} \wedge -m_3 g \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = [-L\vec{v} \wedge -m_3 g \vec{y}_0] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 g L \sin\theta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0$:

$$\vec{\delta}_{G_3, 3/0} = \vec{0} \text{ (masse ponctuelle)}$$

$$\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0 = [\vec{\delta}_{G_3, 3/0} + \vec{CG_3} \wedge \vec{R}_{d3/0}] \cdot \vec{z}_0 = [-L\vec{v} \wedge m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0}] \cdot \vec{z}_0 = -m_3 L [\vec{z}_0 \wedge \vec{v}] \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L \vec{u} \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} = m_3 L [\ddot{x} \cos\theta + L\ddot{\theta}]$$

Théorème du moment dynamique appliqué à $S3$ au point C et en projection sur \vec{z}_0 : $\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C, \vec{3} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0$

$$-m_3 g L \sin\theta = m_3 L [\ddot{x} \cos\theta + L\ddot{\theta}] \quad \text{d'où } \ddot{x} \cos\theta + L\ddot{\theta} + g \sin\theta = 0$$

2. Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

En considérant que $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de la position d'équilibre $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$,

et que le développement limité de $f(x)$ à l'ordre n en a est $f(x+a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}x^n$, on a :

$$\text{ordre 0: } \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \quad \text{ordre 1: } \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre 2: } \begin{cases} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin \theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre 3: } \begin{cases} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} \end{cases}$$

et $\dot{\theta}^2 \approx 0$

Donc : $\boxed{(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta} = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t)}$ et $\boxed{\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0}$

3. Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B .

En posant $x(t) = A \cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$, on a : $\ddot{x}(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t)$ et $\ddot{\theta}(t) = -B\Omega^2 \cos(\Omega t)$

Les deux équations obtenues précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2 + m_3)A\Omega^2 \cos(\Omega t) + kA \cos(\Omega t) - m_3LB\Omega^2 \cos(\Omega t) = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - LB\Omega^2 \cos(\Omega t) + gB \cos(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{cases} [-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k]A - m_3LB\Omega^2 = m_2r\Omega^2 \\ -A\Omega^2 + (-L\Omega^2 + g)B = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$$

$$B = \frac{m_2r\Omega^4}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$$

4. Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t) = 0$ en régime forcé.

On a $x(t) = 0$ en régime forcé, si $A = 0$.

Ce qui implique que : $A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$ Soit : $\boxed{L = \frac{g}{\Omega^2}}$

Dans ce cas $B = \frac{-m_2r}{m_3L}$ et $\theta(t) = B \cos(\Omega t) = \frac{-m_2r}{m_3L} \cos(\Omega t)$