TD

TD – Révisions de cinématique

Xavier Pessoles

Savoirs et compétences :

Pales d'hélicoptères

Mise en situation

Cinématique analytique

Question 1 *Déterminer le vecteur* $\overrightarrow{V(G\in S_3/S_2)}$.

Correction On a :

$$\{\mathscr{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)} = \dot{\alpha}\overrightarrow{x_{23}} \\ \overrightarrow{V(A_3\in S_3/S_2)} = \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{A_3}$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{V(G\in S_3/S_2)} = \underbrace{\overrightarrow{V(A_3\in S_3/S_2)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GA_3}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)} = -a\overrightarrow{x_{23}}\wedge\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{23}} = \overrightarrow{0}$.

Au final,

$$\{\mathscr{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)} = \dot{\alpha}\overrightarrow{x_{23}} \\ \overrightarrow{V(G\in S_3/S_2)} = \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G}$$

Question 2 *Déterminer le vecteur* $\overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}$.

Correction On a :

$$\{\mathscr{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}} \\ \overrightarrow{V(A_3\in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{A_3}$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)} = \underbrace{\overrightarrow{V(A_3\in S_2/S_1)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GA_3}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = -a\overrightarrow{x_{23}}\wedge\dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}} = -a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}$

Au final,

$$\{\mathscr{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}} \\ \overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)} = -a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2} \end{array}\right\}_{G}$$

Question 3 *Déterminer le vecteur* $\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}$.

Correction On a :

$$\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}} \\ \overrightarrow{V(O\in S_1/S_0)} = \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{O}$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)} = \underbrace{\overrightarrow{V(O\in S_1/S_0)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GO}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \left(-a\overrightarrow{x_{23}} - r\overrightarrow{x_1}\right)\wedge\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}} = a\dot{\theta}\cos\beta\overrightarrow{y_{12}} + r\dot{\theta}\overrightarrow{y_{12}}$

Au final,

$$\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}} \\ \overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)} = \dot{\theta}\left(a\cos\beta + r\right)\overrightarrow{y_{12}} \end{array}\right\}_{G}$$

Question 4 *Déduire des questions précédentes le torseur $\{\mathscr{V}(S_3/S_0)\}$ au point G.*

Correction Par composition du torseur cinématique on a :

$$\{\mathscr{V}(S_3/S_0)\} = \{\mathscr{V}(S_3/S_2)\} + \{\mathscr{V}(S_2/S_1)\} + \{\mathscr{V}(S_1/S_0)\}$$

Tous les torseurs ayant déjà été exprimés au même point, on a :

$$\{\mathscr{V}(S_3/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_0)} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}} + \dot{\alpha}\overrightarrow{x_{23}} + \dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}} \\ \overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)} = \dot{\theta}\left(a\cos\beta + r\right)\overrightarrow{y_{12}} - a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2} \end{array} \right\}_G$$

On pose maintenant $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)} = (a\cdot\cos\beta + r)\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{y_{12}} - a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}$.

On pose maintenant $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)} = (a\cdot\cos\beta + r)\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{y_{12}} - a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}$.

Question 5 *Exprimer l'accélération $\overrightarrow{\Gamma(G \in S_3/S_0)}$.*

Correction Par définition,

$$\overrightarrow{\Gamma(G \in S_3/S_0)} = \left[\frac{\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

Il est donc nécessaire de dériver $\overrightarrow{y_{12}}$ et $\overrightarrow{z_2}$:

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_{12}}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{y_{12}}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \overrightarrow{y_{12}} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}} \wedge \overrightarrow{y_{12}} = -\dot{\theta}\overrightarrow{x_1}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} \wedge \overrightarrow{z_2} = \left(\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}} + \dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}}\right) \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}\sin\beta\overrightarrow{y_1} + \dot{\beta}\overrightarrow{x_2}$$

Au final :

$$\overrightarrow{\Gamma(G \in S_3/S_0)} = -a\dot{\beta}\sin\beta\dot{\theta}\overrightarrow{y_{12}} + (a\cos\beta + r)\ddot{\theta}\overrightarrow{y_{12}} - (a\cos\beta + r)\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} - a\ddot{\beta}\overrightarrow{z_2} - a\dot{\beta}\left(\dot{\theta}\sin\beta\overrightarrow{y_1} + \dot{\beta}\overrightarrow{x_2}\right)$$

Question 6 *La longueur des pales est, entre autre, limitée par la vitesse du son en bout de pale (Exigence 1.1.1.1.1). Pour $\beta = 0$, calculer la longueur maximale de la pale pour ne pas dépasser la vitesse du son. La vitesse du rotor est de* $250\,\mathrm{tr\,min^{-1}}$.

Correction Lorsque $\beta = 0$ la vitesse en bout de pale est donnée par $L\dot{\theta}$. $\dot{\theta} = 250\ tr/min = \dfrac{250\cdot 2\pi}{60}\ rad/s = 26,18\ rad/s$ On a donc :

$$L = \frac{295,1}{26,18} = 11.2\,\mathrm{m}$$

Système de coffre motorisé

D'après le concours Centrale – Supélec 2007.

Étude du train épicycloïdal

Question 7 *Déterminer le rapport de réduction $\dfrac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)}$.*

Correction On bloque le porte-satellite 31 et on libère le bâti. On a $\dfrac{\omega(0/31)}{\omega(21/31)} = -\dfrac{Z_{21}}{Z_0}$.

On cherche $\dfrac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)}$; donc $\dfrac{\omega(31/0)}{\omega(21/31)} = \dfrac{\omega(31/0)}{\omega(21/0) + \omega(0/31)} = \dfrac{Z_{21}}{Z_0} \Leftrightarrow \omega(31/0) = \dfrac{Z_{21}}{Z_0}\omega(21/0) - \dfrac{Z_{21}}{Z_0}\omega(31/0)$

$$\Leftrightarrow \omega(31/0)\left(1+\frac{Z_{21}}{Z_0}\right)=\frac{Z_{21}}{Z_0}\omega(21/0) \Leftrightarrow \frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)}=\frac{\frac{Z_{21}}{Z_0}}{1+\frac{Z_{21}}{Z_0}}=\frac{Z_{21}}{Z_0+Z_{21}}$$

Question 8 *Déterminer le rapport de réduction* $\dfrac{\omega(41/0)}{\omega(31/0)}$.

Correction Par analogie, $\dfrac{\omega(41/0)}{\omega(31/0)}=\dfrac{Z_{31}}{Z_0+Z_{31}}$

Question 9 *En déduire le rapport de réduction du double train épicycloïdal. Puis faire l'application numérique. On donne $Z_{21}=13$ et $Z_{22}=81$. Le rapport de réduction est-il compatible avec celui du diagramme de blocs ?*

Correction Le rapport de réduction du réducteur s'exprime par : $\dfrac{Z_{21}}{Z_0+Z_{21}}\dfrac{Z_{31}}{Z_0+Z_{31}}$. Si les deux trains ont les mêmes caractéristiques, on a $\left(\dfrac{Z_{21}}{Z_0+Z_{21}}\right)^2$. En exprimant les conditions de fonctionnement, on a : $R_{21}+2R_{22}=R_0 \Leftrightarrow Z_{21}+2Z_{22}=Z_0$.

On a : alors

$$\left(\frac{Z_{21}}{2Z_{21}+2Z_{22}}\right)^2=0,0047$$

Étude du mécanisme de transformation de mouvement

Question 10 *Établir une relation géométrique entre γ_1 et γ_3. Cette relation pourra faire intervenir les différents paramètres constants (a, b, L_1, L_2, L_3). On ne devra pas voir apparaître γ_2.*

Correction En écrivant la fermeture de chaîne géométrique, on a :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0}\\
\Longleftrightarrow\quad & L_1\overrightarrow{x_{41}}+L_2\overrightarrow{x_{42}}-L_3\overrightarrow{x_{43}}-a\,\overrightarrow{x_0}-b\,\overrightarrow{y_0}=\overrightarrow{0}\\
\Longleftrightarrow\quad & L_1\left(\cos\gamma_1\overrightarrow{x_0}+\sin\gamma_1\overrightarrow{y_0}\right)+L_2\left(\cos\gamma_2\overrightarrow{x_0}+\sin\gamma_2\overrightarrow{y_0}\right)-L_3\left(\cos\gamma_3\overrightarrow{x_0}+\sin\gamma_3\overrightarrow{y_0}\right)-a\,\overrightarrow{x_0}-b\,\overrightarrow{y_0}=\overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

En projetant respectivement cette expression sur $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} L_1\cos\gamma_1+L_2\cos\gamma_2-L_3\cos\gamma_3-a=0\\ L_1\sin\gamma_1+L_2\sin\gamma_2-L_3\sin\gamma_3-b=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} L_2\cos\gamma_2=L_3\cos\gamma_3-L_1\cos\gamma_1+a\\ L_2\sin\gamma_2=L_3\sin\gamma_3-L_1\sin\gamma_1+b\end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
L_2^2 &= \left(L_3\cos\gamma_3-L_1\cos\gamma_1+a\right)^2+\left(L_3\sin\gamma_3-L_1\sin\gamma_1+b\right)^2\\
L_2^2 &= L_3^2\cos^2\gamma_3+L_1^2\cos^2\gamma_1+a^2\\
&\quad -2L_3L_1\cos\gamma_3\cos\gamma_1+2bL_3\cos\gamma_3-2bL_1\cos\gamma_1\\
&\quad +L_3^2\sin^2\gamma_3+L_1^2\sin^2\gamma_1+b^2\\
&\quad -2L_3L_1\sin\gamma_3\sin\gamma_1+2bL_3\sin\gamma_3-2bL_1\sin\gamma_1\\
&= L_3^2+L_1^2+a^2+b^2-2L_3L_1\left(\cos\gamma_3\cos\gamma_1+\sin\gamma_3\sin\gamma_1\right)\\
&\quad +2bL_3\left(\cos\gamma_3+\sin\gamma_3\right)-2bL_1\left(\cos\gamma_1+\sin\gamma_1\right)
\end{aligned}$$