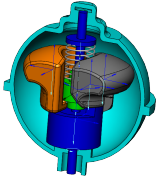


Application 3

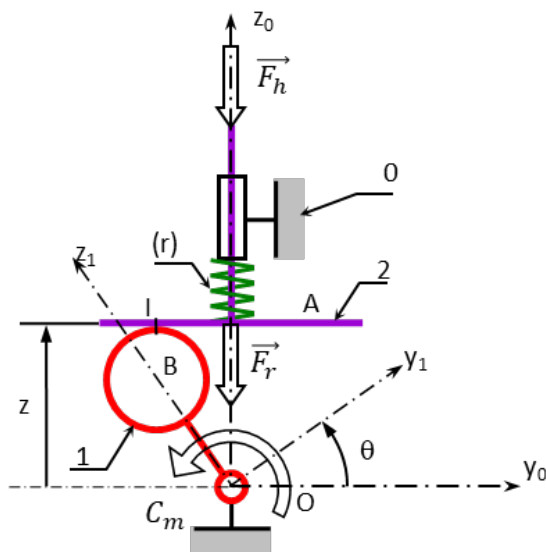
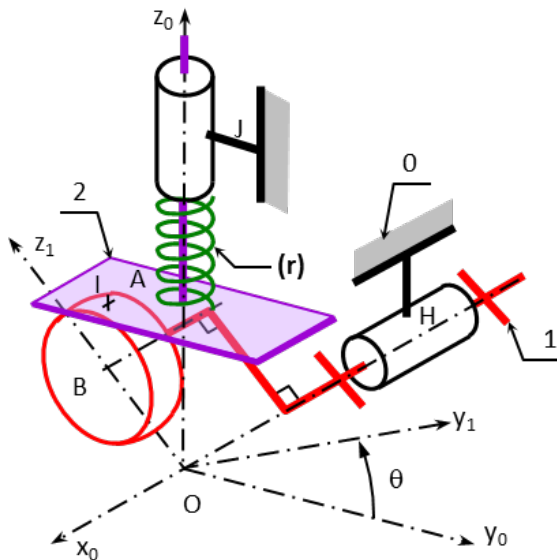


Application – Pompe à plateau

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.



L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe (O, \vec{x}_0) horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

Paramétrage

Le repère $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

- $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$;
- $\vec{OB} = e \vec{z}_1$;
- $\vec{BI} = R \vec{z}_0$;
- $\vec{OA} = z \vec{z}_0$.

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe (O, \vec{x}_0) . Le piston (2) possède une masse m_2 . Le ressort (r), de raideur k , est toujours comprimé. Pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, l'effort de compression est égal à $\vec{F}_0 = -F_0 \vec{z}_0$. Un moteur exerce un couple connu de moment $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$ sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe (O, \vec{z}_0) et de résultante $\vec{F}_h = -F_h \vec{z}_0$.

Question 1 Déterminer avec le PFD l'équation différentielle du mouvement, relative au paramètre θ .

Question 2 En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

Fermeture géométrique.

On a : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$.

En projection sur $\overrightarrow{z_0}$: $e \cos \theta + R = z$. Par dérivation successive, on a : $-e \dot{\theta} \sin \theta = \dot{z}$ et $-e \ddot{\theta} \sin \theta - e \dot{\theta}^2 \cos \theta = \ddot{z}$.

On isole le solide (1).

On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{01} \overrightarrow{x_0} + Y_{01} \overrightarrow{y_0} + Z_{01} \overrightarrow{z_0} \\ M_{01} \overrightarrow{y_0} + N_{01} \overrightarrow{z_0} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} Y_{01} \overrightarrow{y_0} + Z_{01} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} Y_{21} \overrightarrow{y_0} + Z_{21} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_I$. On a $Z_{21} < 0$, $Y_{21} > 0$ et à la limite du glissement, $Y_{21} = -f Z_{21}$.
 $\mathcal{M}(O, 2 \rightarrow 1) = \mathcal{M}(I, 2 \rightarrow 1) + \overrightarrow{OI} \wedge R(2 \rightarrow 1) = (e \overrightarrow{z_1} + R \overrightarrow{z_0}) \wedge (Y_{21} \overrightarrow{y_0} + Z_{21} \overrightarrow{z_0}) = -e Y_{21} \cos \theta \overrightarrow{x_0} - e Z_{21} \sin \theta \overrightarrow{x_0} - R Y_{21} \overrightarrow{x_0} = -((e \cos \theta + R) Y_{21} + e Z_{21} \sin \theta) \overrightarrow{x_0}$.
- Couple moteur : $\{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{x_0} \end{matrix} \right\}_O$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta}(O, 1/0) \cdot \overrightarrow{x_0}$.

O est un point fixe et I_1 moment d'inertie par rapport à $(O, \overrightarrow{x_0})$ on a donc : $\overrightarrow{\delta}(O, 1/0) \cdot \overrightarrow{x_0} = \left[\frac{d\sigma(O, 1/0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \cdot \overrightarrow{x_0} =$

$$\left[\frac{d\sigma(O, 1/0) \cdot \overrightarrow{x_0}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{dI_O(1) \Omega(1/0) \cdot \overrightarrow{x_0}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{dI_1 \dot{\theta} \overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{x_0}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = I_1 \ddot{\theta}.$$

Application du théorème du moment dynamique en projection sur $\overrightarrow{x_0}$.

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e Z_{21} \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On isole le solide (2).

On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot glissant : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} Y_{02} \overrightarrow{y_0} \\ L_{02} \overrightarrow{x_0} \end{matrix} \right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{matrix} -Y_{21} \overrightarrow{y_0} - Z_{21} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_I$.
- Ressort : $\{\mathcal{T}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} -F_0 - k z \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_A$.
- Pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} -m_2 g \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_A$.
- Fluide : $\{\mathcal{T}(\text{Fluide} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} -F_h \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_A$.

Calcul de $\overrightarrow{R_d}(2/0) \cdot \overrightarrow{z_0}$.

$$\overrightarrow{R_d}(2/0) \cdot \overrightarrow{z_0} = m_2 \ddot{z}$$

Application du théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

$$-F_h - Z_{21} - F_0 - k z - m_2 g = m_2 \ddot{z}.$$

Bilan :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} + e (-F_h - F_0 - k z - m_2 g - m_2 \ddot{z}) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On a alors :

$$C_m - ((e \cos \theta + R) Y_{21} - e (F_h + F_0 + k(e \cos \theta + R) + m_2 g - m_2 (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) \sin \theta) = I_1 \ddot{\theta}.$$

Bilan sans frottement :

$$C_m + e (F_h + F_0 + k(e \cos \theta + R) + m_2 g - m_2 \sin \theta (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)) = I_1 \ddot{\theta}.$$