Application 1

Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme ⋆

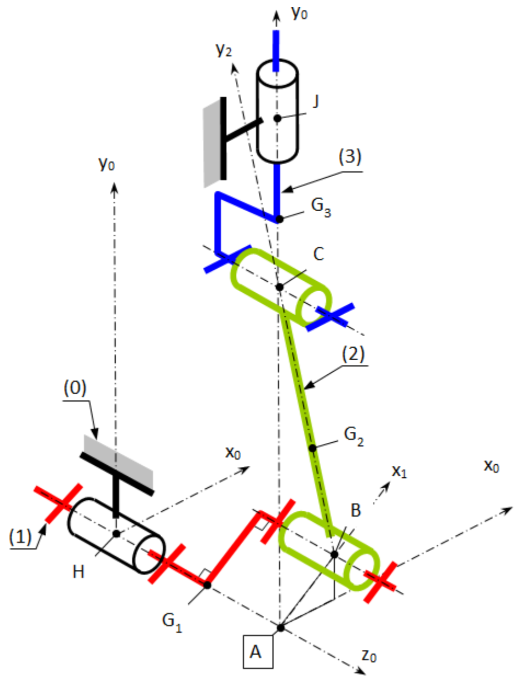
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Mise en situation

Les figures et le schéma ci-dessous représentent un micromoteur à combustion interne de modèle réduit. Du point de vue cinématique, il est basé sur un système bielle manivelle **(2,1)**, associé à un piston **(3)**, animé d'un mouvement de translation rectiligne alternatif.



On note :

- $\overrightarrow{AB} = e\,\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BC} = L_2\,\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda_3\,\overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{HG_1} = a_1\,\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BG_2} = a_2\,\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{CG_3} = a_3\,\overrightarrow{y_0}$;
- $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right) = \theta_1$, $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}\right) = \left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_2}\right) = \theta_2$; $\omega_{10} = \dot{\theta}_1$ et $\omega_{20} = \dot{\theta}_2$;
- m_1, m_2 et m_3 les masses des trois pièces mobiles **(1)**, **(2)** et **(3)**.

On note $C_m\,\overrightarrow{z_0}$ le couple délivré par le moteur et $F_e\,\overrightarrow{y_0}$ la force exercée sur le piston suite à l'explosion du mélange air – carburant. On néglige les effets de la pesanteur.

Question 1 *Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin **(1)** et la vitesse du piston **(3)**, notée $\dot{\lambda} = V_{3/0}$.*

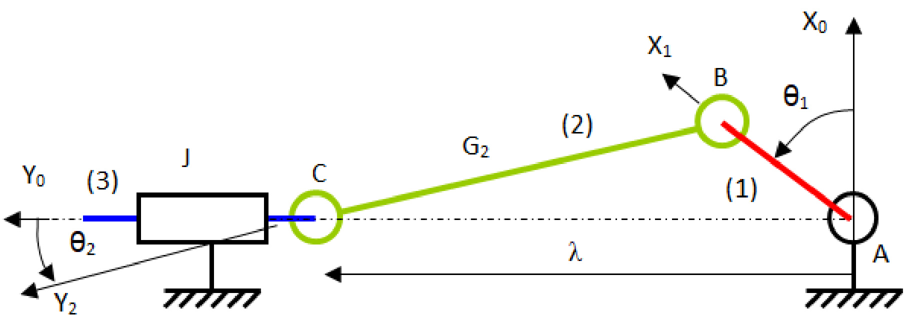
Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

On note $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$ la matrice d'inertie en H de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré **(1)**.

Question 2 *En considérant que seul le plan $\left(H,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.*

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie $I_A(1)$, $I_{G_2}(2)$ et $I_{G_3}(3)$ sont diagonales.

Question 3 *Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.*



Application 1 – Corrigé

Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme ★

Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Mise en situation

Question 1 *Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin* **(1)** *et la vitesse du piston* **(3)**, *notée $\dot{\lambda} = V_{3/0}$.*

Correction On réalise une fermeture géométrique dans le triangle ABC et on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow e\overrightarrow{x_1}+L_2\overrightarrow{x_2}-\lambda_3\overrightarrow{y_0} \Leftrightarrow e\left(\cos\theta_1\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_1\overrightarrow{y_0}\right)+L_2\left(\cos\theta_2\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_2\overrightarrow{y_0}\right)-\lambda_3\overrightarrow{y_0}=\overrightarrow{0}$. On a donc : $\left\{\begin{array}{l} e\cos\theta_1+L_2\cos\theta_2=0\\ e\sin\theta_1+L_2\sin\theta_2-\lambda_3=0\end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} L_2\cos\theta_2=-e\cos\theta_1\\ L_2\sin\theta_2=\lambda_3-e\sin\theta_1\end{array}\right.$ Au final, $L_2^2=e^2\cos^2\theta_1+(\lambda_3-e\sin\theta_1)^2 \Leftrightarrow L_2^2-e^2\cos^2\theta_1=(\lambda_3-e\sin\theta_1)^2$
$\Rightarrow \sqrt{L_2^2-e^2\cos^2\theta_1}=\lambda_3-e\sin\theta_1 \Rightarrow \lambda_3=\sqrt{L_2^2-e^2\cos^2\theta_1}+e\sin\theta_1$.

Question 2 *En considérant que seul le plan $\left(H,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.*

Correction On a donc une invariance suivant $\overrightarrow{y_1}$ et $I_H(1)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1\\ 0 & B_1 & 0\\ -E_1 & 0 & C_1\end{pmatrix}_{\left(H;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)}$

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie $I_A(1)$, $I_{G_2}(2)$ et $I_{G_3}(3)$ sont diagonales.

Correction H est un point fixe :

- $\{\sigma(1/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c(1/0)}=m_1\overrightarrow{V(G_1\in 1/0)}\\ \overrightarrow{\sigma(H,1/0)}=I_H(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)}\end{array}\right\}_H=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}\end{array}\right\}_H$
- $\{\mathscr{D}(1/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d(1/0)}=m_1\overrightarrow{\Gamma(G_1\in 1/0)}\\ \overrightarrow{\delta(H,1/0)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\delta(H,1/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}\end{array}\right\}_H=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_1\ddot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}\end{array}\right\}_H$

G_3 est le centre de gravité de 3. Le solide 3 est en translation par rapport à 0.

- $\{\sigma(3/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c(3/0)}=m_3\overrightarrow{V(G_3\in 3/0)}\\ \overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)}\end{array}\right\}_{G_3}=\left\{\begin{array}{c}m_3\dot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G_3}$
- $\{\mathscr{D}(3/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_d(3/0)}=m_1\overrightarrow{\Gamma(G_3\in 3/0)}\\ \overrightarrow{\delta(G_3,1/0)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}\end{array}\right\}_{G_3}=\left\{\begin{array}{c}m_3\ddot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G_3}$

G_2 est le centre de gravité de 2.

- $\{\sigma(2/0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_c(2/0)}=m_2\overrightarrow{V(G_2\in 2/0)}\\ \overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)}=I_{G_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)}\end{array}\right\}_{G_2}=\left\{\begin{array}{l}m_2\left(\dot{\lambda}_3\overrightarrow{y_0}+a_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}\right)\\ C_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_{G_2}$

- $\{\mathscr{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_2,2/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)}}{\mathrm{d}t} \right]_{\mathscr{R}_0} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} m_2\left(\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2\ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2\dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}\right) \\ C_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$

Détail des calculs.

Calcul de $\overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)}$.

$\overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)} = \overrightarrow{V(G_2 \in 2/3)} + \overrightarrow{V(G_2 \in 3/0)}$

$\overrightarrow{V(G_2 \in 2/3)} = \overrightarrow{V(C \in 2/3)} + \overrightarrow{G_2C} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/3)} = \overrightarrow{0} + a_2\overrightarrow{y_2} \wedge \dot{\theta}_2\overrightarrow{z_0} = a_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}$ $\quad \overrightarrow{V(G_2 \in 3/0)} = \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0}$

$\overrightarrow{V(G_2 \in 2/0)} = \dot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}$.

$\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} = \ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{x_2} + a_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}$.

Question 3 *Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.*

Correction

- On isole **(1)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(A, 0 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison). Par ailleurs, $\overrightarrow{\mathscr{M}(A, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} + \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)}\right)\overrightarrow{z_0} = \left(e\overrightarrow{x_1} \wedge \left(X_{21}\overrightarrow{x_2} + Y_{21}\overrightarrow{y_2}\right)\right)\overrightarrow{z_0}$ $= \left(e X_{21} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} + e Y_{21} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2}\right)\overrightarrow{z_0} = e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1)$
  - Couple moteur : $\{\mathscr{T}(0_m \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_A$.
- On applique le TMD en A en projection suivant $\overrightarrow{z}$:

$$e X_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) + e Y_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1) + C_m = C_1 \ddot{\theta}_1$$

- On isole **(2)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathscr{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(3 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 3)} \\ -\overrightarrow{\mathscr{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_C$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(C, 2 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
- On applique le TMD en C en projection sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$-\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{\delta(C, 2/0)} \cdot \overrightarrow{z} \Longleftrightarrow L_2 \overrightarrow{y_2} \wedge \left(X_{21}\overrightarrow{x_2} + Y_{21}\overrightarrow{y_2}\right) \cdot \overrightarrow{z} = \left(\overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} + \overrightarrow{CG_2} \wedge m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}\right) \cdot \overrightarrow{z}$$

$$\Longrightarrow -L_2 X_{21} = C_2 \ddot{\theta}_2 \left(-a_2 \overrightarrow{y_2} \wedge \left(m_2 \left(\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2\ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2\dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2}\right)\right)\right) \cdot \overrightarrow{z}$$

$$\Longrightarrow -L_2 X_{21} = C_2 \ddot{\theta}_2 + a_2 m_2 \left(\ddot{\lambda}_3 \sin\theta_2 - a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2}\right)$$

- On isole **(2+3)**.
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Liaison glissière : $\{\mathscr{T}(0 \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(A, 0 \rightarrow 3)} \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{y_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).
  - Liaison pivot : $\{\mathscr{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} \\ -\overrightarrow{\mathscr{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ avec $\overrightarrow{\mathscr{M}(B, 2 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$ (pas de frottement dans la liaison).

Cycle 04

- Force explosion : $\{\mathscr{T}(0_e \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_y \overrightarrow{y} + F_z \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{C_{exp}} \end{array} \right\}_C$.

- On applique le TRD en projection sur $\overrightarrow{y_0}$:

$$F_y - Y_{21} = m_3 \ddot{\lambda}_3 + \left(m_2 \left(\ddot{\lambda}_3 \overrightarrow{y_0} + a_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} + a_2 \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{y_2} \right) \right) \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$\Longleftrightarrow F_y - Y_{21} = m_3 \ddot{\lambda}_3 + \left(m_2 \left(\ddot{\lambda}_3 + a_2 \ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + a_2 \dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 \right) \right)$$