

## 1 Modélisation et paramétrage des systèmes mécaniques

**Méthode** — **Modélisation d'un système mécanique réel.** Pour modéliser un système mécanique réel (en TP par exemple) il faut :

- identifier les classes d'『quivalence cinématique, c'est-  dire tous les ensembles de pièces reliés entre elles par des liaisons encastrement;
- identifier les surfaces de contact entre les classes d'『quivalence;
- associer une liaison cinématique aux surfaces de contact;
- tracer les liaisons en utilisant une couleur par classe d'『quivalence et respectant leur positionnement relatif;
- relier les liaisons de manière filaire;
- indiquer le bâti, les centres de liaisons et la numérotation des classes d'『quivalence.

**Méthode** — **Paramétrage d'un mécanisme cinématique.** Pour paramétrer un mécanisme, il faut associer un repère à chaque classe d'『quivalence, une constante à chaque dimension fixe (pour une même classe d'『quivalence) et une variable à chaque degré de mobilité de liaison (entre deux classes d'『quivalence).

- si la mobilité est une translation, on définit un paramètre variable entre deux points selon une seule direction (la direction de la translation);
- si la mobilité est une rotation il faut définir l'axe de rotation et l'angle variable en précisant la figure de changement de base.



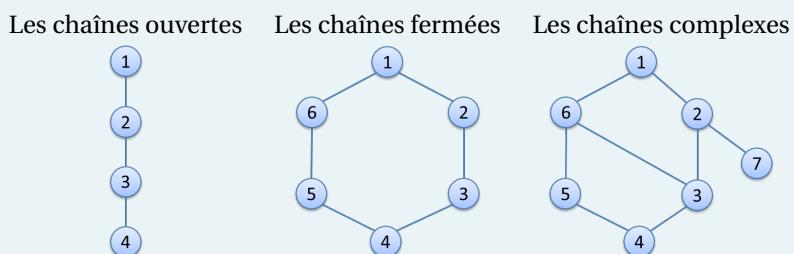
Par usage, nous associerons une lettre grecque à un paramètre variable et une lettre romane à une dimension fixe. Cela permet de repérer plus facilement quelles sont les variables temporelles lors de calcul de dérivées.

### Définition Graphe de structure – Chaînes

Graphe qui permet d'avoir une vue d'ensemble du mécanisme :

- les classes d'『quivalences sont schématisées par des cercles avec un repère (celui défini précédemment);
- les liaisons sont schématisées par des traits qui relient les cercles.

On définit 3 types de chaînes :



## 2 Résolution des lois entrée-sortie

**Méthode** **Calcul de la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée**

Un système se présentant sous forme d'une chaîne de solide fermée a pour but de transformer un mouvement. On s'intéresse alors pour cela à la relation cinématique liant le mouvement d'entrée du système et le mouvement de sortie. On ´écrit pour cela une **fermeture de chaîne géométrique**. Pour cela :

1. paramétrer le mécanisme;
2. identifier la grandeur d'entrée et de sortie;
3.    l'aide du théorème de Chasles, exprimer le vecteur nul en fonction des vecteurs liant le centre de chacune des liaisons;
4. projeter la relation vectorielle sur une des bases;

5. combiner les relations pour exprimer la sortie en fonction de l'entrée;
6. dériver si besoin pour avoir le lien entre les vitesses.

**Méthode Méthodes pour manipuler les systèmes équations :**

1. Pour supprimer une longueur  $\lambda$  : on met les deux équations sous la forme  $\lambda =$  et on fait le rapport des deux équations.
2. Pour supprimer l'angle  $\varphi$  : on met une équation sous la forme  $\cos \varphi =$  et la seconde sous la forme  $\sin \varphi =$  et on utilise la relation  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ .
3. Dans d'autres cas, on peut avoir à utiliser l'expression de la tangente.

**Méthode — Autre idée pour calculer la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée.** Dans certains mécanismes, on peut observer que deux vecteurs sont toujours orthogonaux. En utilisant le fait que le produit scalaire entre ces deux vecteurs est nul puis en projetant les vecteurs dans une même base puis en réalisant le calcul, il est possible de déterminer une loi entrée-sortie.

**Définition — Solide Indéformable.** On considère deux points  $A$  et  $B$  d'un solide indéformable noté  $S$ . On note  $t$  le temps.  $\forall A, B \in S, \forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB(t)}^2 = \text{constante}$ .

**Définition — Trajectoire d'un point appartenant à un solide.** Soit un point  $P$  se d  pla  tant dans un repère  $\mathcal{R}_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ . La trajectoire du point  $P$  est définie par la courbe  $\mathcal{C}(t)$  paramétrée par le temps  $t$ . On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{OP(t)} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = x(t)\vec{i}_0 + y(t)\vec{j}_0 + z(t)\vec{k}_0$$

**Définition — Vitesse d'un point appartenant à un solide.** Soit un solide  $S_0$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ . Soit un solide  $S_1$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ . Le solide  $S_1$  est en mouvement par rapport au solide  $S_0$ . Soit un point  $P$  appartenant au solide  $S_1$ . La vitesse du point  $P$  appartenant au solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_0$  se calcule donc ainsi :  $\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)}(t) = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_0P(t)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$ .

### ■ Exemple

**Résultat** Lorsque il n'y a pas de degré de liberté de translation dans une liaison, la vitesse au centre de la liaison est nulle. Ainsi :

- si les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison rotule de centre  $O$  alors  $\overrightarrow{V(O \in S_2/S_1)} = \vec{0}$  ;
- si les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison pivot de d'axe  $(O, \vec{u})$  alors  $\overrightarrow{V(O \in S_2/S_1)} = \vec{0}$  ;
- si les solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison rotule à doigt de centre  $O$  alors  $\overrightarrow{V(O \in S_2/S_1)} = \vec{0}$ .

### Résultat Dérivation vectorielle

Soient  $S_0$  et  $S_1$  deux solides en mouvements relatifs et  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  les repères orthonormés directs associés. Soit  $\vec{v}$  un vecteur de l'espace. On note  $\overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$  le vecteur instantané de rotation permettant d'exprimer les rotations entre chacune des deux bases. La dérivée d'un vecteur dans une base mobile se calcule donc ainsi :

$$\left[ \frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[ \frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \vec{v}.$$

### Résultat Champ du vecteur vitesse dans un solide – Formule de Varignon – Formule de BABAR

Soient  $A$  et  $B$  deux points appartenant à un solide  $S_1$  en mouvement par rapport à  $S_0$ . Le champ des vecteurs vitesses est donc déterminé ainsi :

$$\overrightarrow{V(\mathbf{B} \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(\mathbf{A} \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{\mathbf{BA}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}_{\vec{R}}$$

### Résultat Composition du vecteur vitesse

Soit un solide  $S_1$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  et un solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$ . Pour chacun des points  $A$  appartenant au solide  $S_2$ , on a :

$$\overrightarrow{V(A \in S_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V(A \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(A \in S_1/\mathcal{R}_0)}$$

**R**

- $\overrightarrow{V(A \in S_2/\mathcal{R}_0)}$  est appelé vecteur vitesse absolu;
- $\overrightarrow{V(A \in S_2/S_1)}$  est appelé vecteur vitesse relatif;
- $\overrightarrow{V(A \in S_1/\mathcal{R}_0)}$  est appelé vecteur vitesse d'entraînement.

### Résultat Composition du vecteur vitesse

Soit un solide  $S_1$  en mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  et un solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$ . On a :

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)}$$

### Définition Accélération d'un point appartenant à un solide

Soit un solide  $S_0$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ . Soit un solide  $S_1$  auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ . Le solide  $S_1$  est en mouvement par rapport au solide  $S_0$ .

Soit un point  $P$  appartenant au solide  $S_1$ . L'accélération du point  $P$  appartenant au solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_0$  se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/S_0)(t)} = \left[ \frac{d(\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)(t)})}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

## Application 01



### Micromoteur d'un avion de modélisme

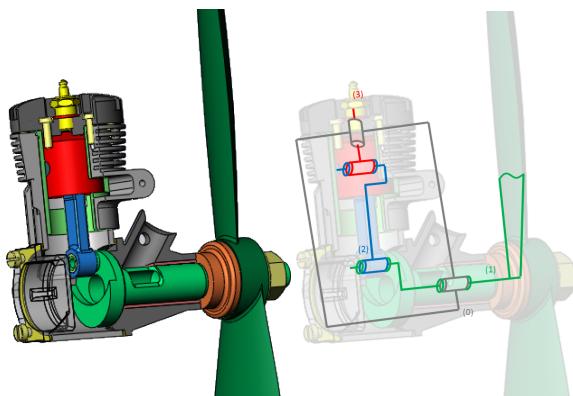
Xavier Pessoles

*Savoirs et compétences :*

Afin d'

#### Mise en situation

La mise en mouvement d'une certaine catégorie d'avions de modélisme est assurée par un moteur thermique. La figure ci-dessous propose un éclaté d'un modèle 3D ainsi que le schéma cinématique associé.



On appelle :

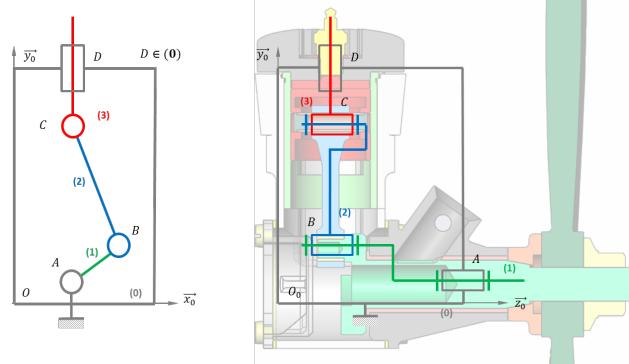
- (0) la bâti liée à la voilure de l'avion;
- (1) le vilebrequin, solidaire de l'hélice de l'avion;
- (2) la bielle;
- (3) le piston.

#### Objectif

- D閞miner la loi de position et de vitesse du piston pour avoir un taux de rotation du moteur de  $9000 \text{ tr min}^{-1}$ .
- V閞ifier que l'accélération est inférieure à  $10\,000 \text{ m s}^{-2}$ .

#### Modélisation

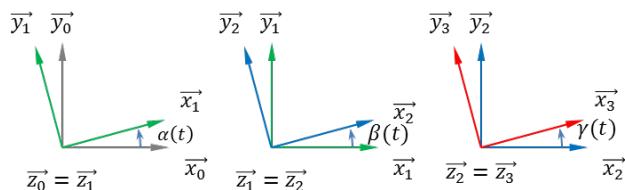
La modélisation par schéma cinématique est donnée dans le schéma ci-dessous.



On appelle :

- $\mathcal{R}_0 = (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère liée au bâti (0);
- $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  le repère liée au vilebrequin (1) avec  $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ;
- $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$  le repère liée à la bielle (2) avec  $\beta(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  avec  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{x}_1 = e$  et  $e = 5,25 \text{ mm}$ ;
- $\mathcal{R}_3 = (C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$  le repère liée au piston (3) avec  $\gamma(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$  avec  $\overrightarrow{BC} = L \vec{x}_2$  et  $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{y}_0 = \lambda(t)$  et  $L = 23,9 \text{ mm}$ .

Les figures planes de changement de repère sont données ci-dessous :



**Question 1** Tracer le graphe de structure. D閞minir le nombre de cycles, la mobilité du mécanisme et le nombre de degrés de liberté de chacune des liaisons en 2D et en 3D.

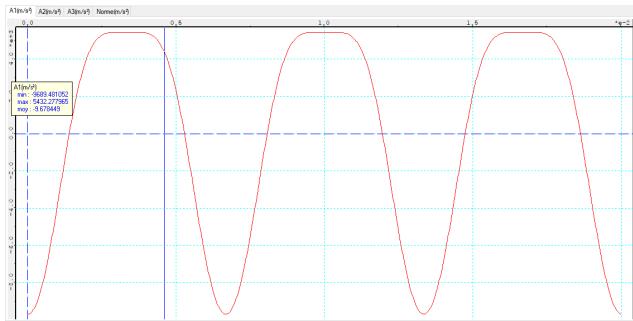
**Question 2** Préciser la variable d'entrée ainsi que la variable de sortie du système.

**Question 3** D閞minir la loi entrée-sortie géométrique du système.

**Question 4** D閞minir la loi entrée-sortie cinématique du système.

**Question 5** Tracer l'allure de la loi de vitesse du piston.

Une simulation réalisée sous M  eca3D permet d'obtenir l'évolution de l'accélération du piston :



**Question 6** Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

## Application 02



### Joint de cardan

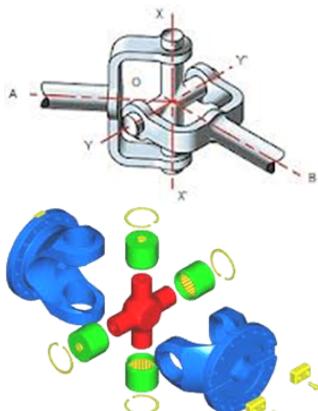
Xavier Pessoles

#### Savoirs et compétences :

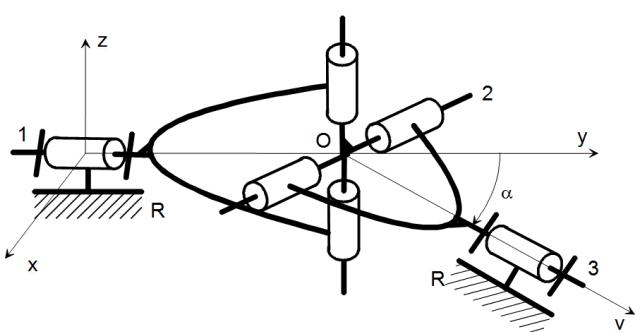
##### Joint de Cardan

Un joint de Cardan est un accouplement qui permet de transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres concourants mais non alignés. L'angle maximum pratiquement utilisé entre les arbres est de 45. Une application courante est la transmission entre boîte de vitesses et roues-avant d'une voiture.

Les vues ci-dessous donnent des images d'un joint de cardan.



La modélisation suivante est proposée.



On appelle :

- $\mathcal{R}$  le repère lié au solide  $R$  considéré comme fixe.  $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ;
- $\mathcal{R}'$  le repère lié au solide  $R$  considéré comme fixe.  $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ . On pose  $\alpha = (\vec{y}, \vec{v})$  (constant);
- $\alpha$  l'"angle de brisure" ;
- $\mathcal{R}_1$  le repère lié au solide 1.  $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On pose  $\theta_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ ;
- $\mathcal{R}_3$  le repère lié au solide 3.  $\mathcal{R}_3 = (O, \vec{x}_3, \vec{v}, \vec{z}_3)$ . On pose  $\theta_3 = (\vec{u}, \vec{x}_3)$ .

**Question 1** Tracer en vue orthogonale, les trois dessins (figures de changement de base) permettant le passage de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}_1$ , de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  et de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}_3$ .

**Question 2** Exprimer la condition géométrique sur 2 permettant de lier  $\mathcal{R}_1$  à  $\mathcal{R}_3$ .

**Question 3** Développer cette relation et trouver la loi entrée sortie :  $\theta_3 = f(\theta_1, \alpha)$ . Tracer, pour  $\alpha = 45$ , la courbe représentant l'évolution de la sortie  $\theta_3$  en fonction de l'entrée  $\theta_1$  avec  $\theta_1$  variant de  $-\pi$  à  $+\pi$ .

**Question 4** Dériver cette relation par rapport au temps pour trouver la vitesse de sortie  $\dot{\theta}_3$  en fonction de la vitesse d'entrée  $\dot{\theta}_1$ , de  $\theta_1$  et de  $\alpha$ .

**Question 5** Tracer l'évolution de la vitesse de sortie  $\dot{\theta}_3$  en fonction notamment de l'évolution de l'angle d'entrée  $\theta_1$ . On prendra un angle de brisure de 45 et une vitesse d'entrée constante  $\dot{\theta}_1$  de 1 rad/s.

**Question 6** Conclure sur une des propriétés de ce mécanisme.

## Révisions



### TD - Révisions de cinématique \*

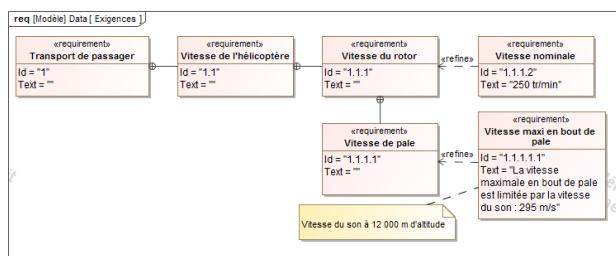
#### Savoirs et compétences :

## Pales d'hélicoptères

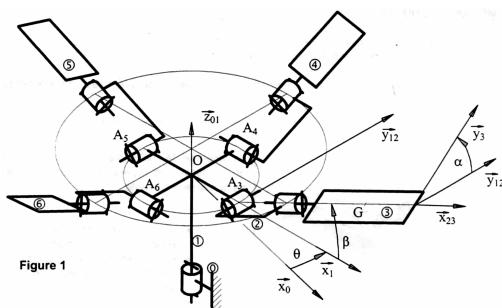
### Mise en situation

L'hélicoptère est un giravion dont la sustentation est assurée par un rotor primaire équipé de pales. Un rotor secondaire (ou rotor de queue, lui aussi équipé de pales) permet à l'hélicoptère de ne pas tourner sur lui même. Ces rotors sont entraînés par une ou deux turbines suivant les hélicoptères, par l'intermédiaire d'une boite de vitesse.

En vol, les rotors tournent à une vitesse de rotation fixe. La modification de l'inclinaison des pales permet à elle seule une accélération, un décélération, un changement d'altitude ou de direction de l'hélicoptère.



## Cinématique analytique



Le fuselage de l'hélicoptère est repéré par  $S_0$  et on lui associe le repère  $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_{01})$  défini de la manière suivante :

- $(O, \vec{z}_{01})$  correspond à l'axe de rotation du rotor principal;
- $(O, \vec{x}_0)$  définit l'axe longitudinal de l'appareil et est orienté de l'arrière vers l'avant;
- $(O, \vec{y}_0)$  définit l'axe transversal.

Ce rotor est constitué de :

- un moyeu central  $S_1$  associé au repère  $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_{12}, \vec{z}_{01})$  qui est entraîné par la boite de vitesse (non représentée ici);
- quatre pales  $S_3, S_4, S_5$  et  $S_6$ . On associe le repère  $\mathcal{R}_3(A_3, \vec{x}_{23}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  à la pale  $S_3$ ;
- quatre pieds de pales identiques reliant les pales au moyeu. On associe le repère  $\mathcal{R}_2(A_3, \vec{x}_{23}, \vec{y}_{12}, \vec{z}_2)$  au pied de pale  $S_2$ .

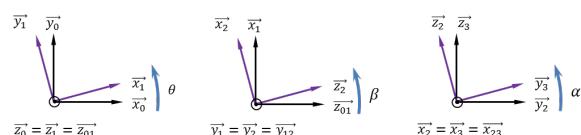
NB : Si les repères  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}_j$  ont un vecteur de base commun (par exemple  $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ ), celui-ci est noté  $\vec{x}_{ij}$ .

Le mouvement de  $S_1/S_0$  est une rotation d'axe  $(O, \vec{z}_{01})$ . On pose  $\theta$  l'angle de rotation du rotor :  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ .

Le mouvement de  $S_2/S_1$  est une rotation d'axe  $(A_3, \vec{y}_{12})$ . On pose  $\beta$  l'angle de battement :  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_{23})$ .

Le mouvement de  $S_3/S_2$  est une rotation d'axe  $(A_3, \vec{x}_{23})$ . On pose  $\alpha$  l'angle de pas :  $\alpha = (\vec{y}_{12}, \vec{y}_3)$ .

On pose  $\overrightarrow{OA_3} = r \cdot \vec{x}_1$  et  $\overrightarrow{A_3G} = a \cdot \vec{x}_{23}$  où G est le centre de gravité de la pale 3 ( $r$  et  $a$  constantes). On suppose que tous les solides sont indéformables.



**Question 1** D閠erminez les vecteurs  $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_2)}$ ,  $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_1)}$ ,  $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)}$ .

On pose maintenant  $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)} = (a \cdot \cos \beta + r) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_{12} - a\beta \vec{z}_2$ .

**Question 2** Exprimer l'accélération  $\overrightarrow{\Gamma(G \in S_3/S_0)}$ .

**Question 3** La longueur des pales est, entre autre, limitée par la vitesse du son en bout de pale (Exigence 1.1.1.1). Pour  $\beta = 0$ , calculer la longueur maximale de la pale pour ne pas dépassez la vitesse du son. La vitesse du rotor est de  $250 \text{ tr min}^{-1}$ .

## Système de coffre motorisé

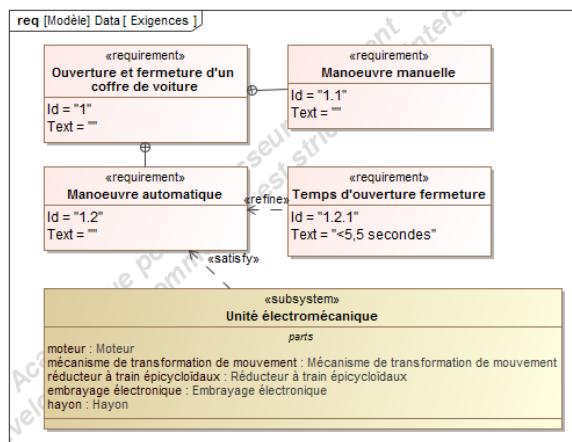
D'après le concours Centrale - Supélec 2007.



Depuis 2005, un coffre motorisé est proposé en option sur l'Audi A6. La motorisation du hayon permet l'ouverture ou la fermeture automatique du coffre. L'ouverture s'effectue soit à l'aide de la télécommande, soit par action sur une touche située à proximité du conducteur, soit par action sur une touche située sur la poignée du hayon. La fermeture s'effectue par action sur une touche située sur la face interne du hayon.

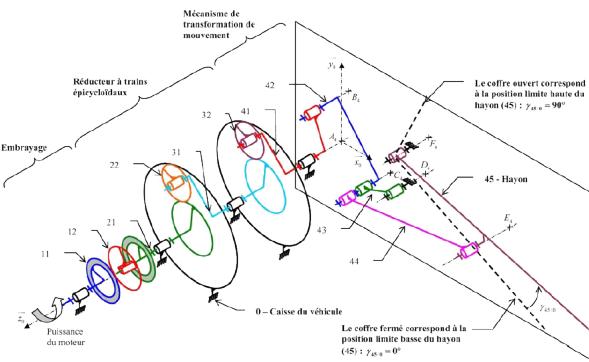
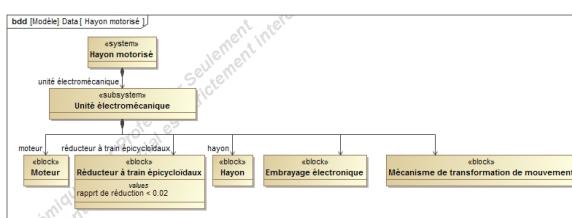
- |                 |   |
|-----------------|---|
| <b>Objectif</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Vérifier le rapport de réduction du train épicycloïdal.</li> <li>Déterminer la loi Entrée – Sortie du système 4 barres.</li> </ul> |
|-----------------|---|

L'utilisateur a la possibilité de programmer l'angle d'ouverture du hayon pour éviter par exemple qu'il ne heurte le plafond du garage. L'utilisateur conserve naturellement la possibilité de manœuvrer manuellement le hayon. Ce système dispose également de détecteurs d'obstacles. En position fermée, le système doit assurer le blocage du hayon avec la caisse du véhicule.



La chaîne d'énergie du système est constituée :

- d'un moteur à courant continu;
- d'un embrayage électromagnétique;
- d'un double train épicycloïdal
- d'un mécanisme de transformation de mouvement de type 4 barres;
- de l'effecteur à savoir le hayon 45 du coffre.



## Étude du train épicycloïdal

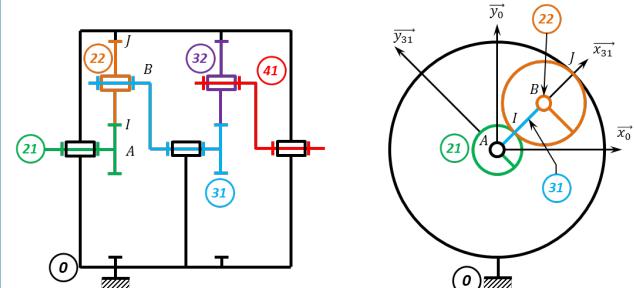
On donne le schéma cinématique du double train épicycloïdal.

Le premier train est constitué :

- du planétaires **21**. On note  $\overrightarrow{\Omega(21/0)} = \omega(21/0)\vec{z}_0$  et  $\| \vec{IA} \| = R_{21}$ ;
- du satellite **22**. On note  $\overrightarrow{\Omega(22/31)} = \omega(22/31)\vec{z}_0$  et  $\| \vec{IB} \| = R_{22}$ ;
- du porte-satellite **31**. On note  $\overrightarrow{\Omega(31/0)} = \omega(31/0)\vec{z}_0$  ;
- de la couronne **0**. On note  $\| \vec{AJ} \| = R_0$ ;

Le second train est constitué :

- du planétaires **21**;
- du satellite **32**;
- du porte-satellite **41**;
- de la couronne **0**.

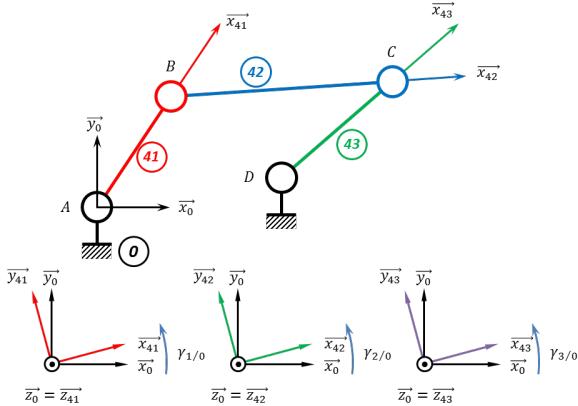


**Question 4** Déterminer le rapport de réduction  $\frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)}$ .

**Question 5** Déterminer le rapport de réduction  $\frac{\omega(41/0)}{\omega(31/0)}$ .

**Question 6** En déduire le rapport de réduction du double train épicycloïdal. Puis faire l'application numérique. On donne  $Z_{21} = 13$  et  $Z_{22} = 81$ . Le rapport de réduction est-il compatible avec celui du diagramme de blocs ?

## Étude du mécanisme de transformation de mouvement



On donne :

- $\overrightarrow{AB} = L_1 \overrightarrow{x_{41}}$ ;

- $\overrightarrow{BC} = L_2 \overrightarrow{x_{42}}$ ;

- $\overrightarrow{DC} = L_3 \overrightarrow{x_{43}}$ ;

- $\overrightarrow{AD} = a \overrightarrow{x_0} + b \overrightarrow{y_0}$ .

**Question 7** Établir une relation géométrique entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$ . Cette relation pourra faire intervenir les différents paramètres constants ( $a, b, L_1, L_2, L_3$ ). On ne devra pas voir apparaître  $\gamma_2$ .

## TD 01

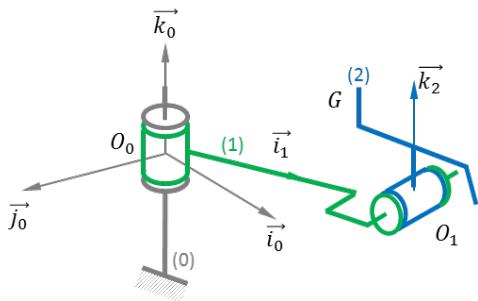


## Centrifugeuse humaine

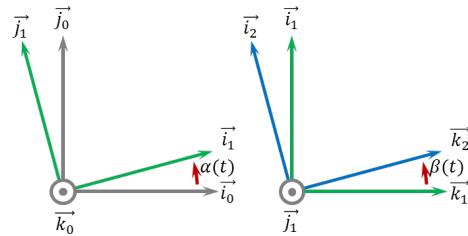
Xavier Pessoles

## Savoirs et compétences :

Afin d'analyser les effets de l'accélération sur le corps humaine, le CNRS / MEDES a développé une centrifugeuse humaine. On donne ci-dessous la modélisation cinématique de la centrifugeuse.



Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci-dessous :



Les paramètres constants du système sont les suivants :

- $\overrightarrow{O_0 O_1} = a \vec{i}_1$ ;
- $\overrightarrow{O_1 G} = b \vec{i}_2 + c \vec{k}_2$ .

## Trajectographie

**Question 1** Donner la trajectoire du point  $G$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$ .

## Cinématique

**Question 2** Calculer  $\overrightarrow{V(G \in S_2/S_0)}$ .

## Acc  l  eration

**Question 3** Calculer  $\overrightarrow{\Gamma(G \in S_2/S_0)}$ .

## TD 02

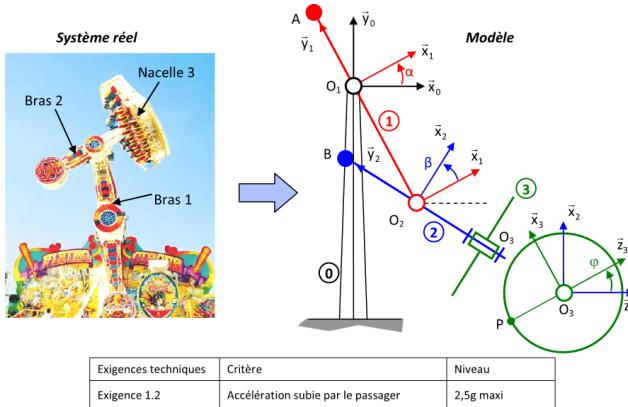


## Magic Arms

Florestan Mathurin

*Savoirs et compétences :*

La man  ge Magic Arms dont la modélisation ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel est composé d'une structure métallique d'environ 12 m de haut avec deux bras mobiles. Les passagers s'assoient sur 39 pièces disposées sur une plate-forme tournante. Dès que tous les passagers sont assis et attachés, la nacelle tourne autour de son axe, le bras principal (bras 1) et le bras secondaires (bras 2), liés l'un 脿 l'autre au début du cycle, commencent 脿 tourner. Après 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les deux bras se d  sinexent et se mettent 脿 tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par ordinateur.



Le man  ge, schématisé ci-dessus, comporte :

- un bras principal 1 assimilé 脿 une barre  $AO_1O_2$ . Il est en liaison pivot parfait d'axe ( $O_1, \vec{z}_1$ ) caractérisée par le paramètre  $\alpha$  avec le bâti 0. On pose  $\overrightarrow{O_1O_2} = -l_1 \vec{y}_1$ ;
- un bras secondaire 2 assimilé 脿 une barre  $BO_2O_3$ . Il est en liaison pivot parfait d'axe ( $O_2, \vec{z}_2$ ) caractérisée par le paramètre  $\beta$  avec le bras principal 1. On pose  $\overrightarrow{O_2O_3} = -l_2 \vec{y}_2$ ;
- une nacelle 2 assimilée 脿 un disque de centre  $O_3$  et de rayon  $R$ . Elle est en liaison parfaite d'axe ( $O_3, \vec{y}_2$ ) caractérisée par le paramètre  $\varphi$  avec le bras 2. On s'intéresse plus particulièrement 脿 un passager considéré comme un point matériel  $P$  tel que  $\overrightarrow{O_3P} = -R \vec{z}_3$ .

**Question 1** Construire les figures planes associées au schéma cinématique.

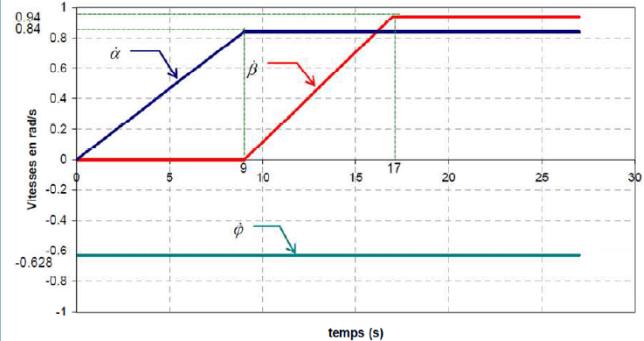
**Question 2** Calculer  $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$ ,  $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$ .

**Question 3** Calculer  $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$ .

**Question 4** Calculer les produits vectoriels suivants :  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_3$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2$ ,  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1$ ,  $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0$ ,  $\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_0$ .

**Question 5** Calculer  $\overrightarrow{V(O_2 \in 2/0)}$ ,  $\overrightarrow{V(O_3 \in 3/0)}$  et  $\overrightarrow{V(P \in 3/0)}$ .

On donne l'évolution des vitesses angulaires des m  tours du man  ge en fonction du temps.



**Question 6** D閠erminez les valeurs des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\dot{\varphi}$  puis l'expression analytique des positions angulaires  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  et  $\varphi(t)$  dans l'intervalle de temps [17;27] secondes en sachant qu'à l'instant  $t = 17\text{ s}$ , on a  $\alpha = 10,5\text{ rad}$ ,  $\beta = 3,76\text{ rad}$  et  $\varphi = -10,676\text{ rad}$ .

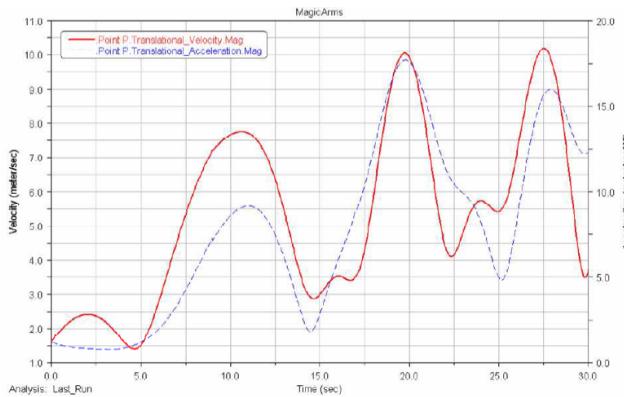
**Question 7** D閠erminez les valeurs numériques 脿 l'instant  $t_1 = 19,8\text{ s}$  de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\varphi$ .

**Question 8** On pose  $\overrightarrow{V(P \in 3/0)} = V_{x2} \vec{x}_2 + V_{y2} \vec{y}_2 + V_{z2} \vec{z}_2$ . D閠erminez les expressions littérales de  $V_{x2}$ ,  $V_{y2}$ ,  $V_{z2}$  puis les valeurs numériques de 脿  $t_1 = 19,8\text{ s}$ . (On donne :  $l_1 = 3,9\text{ m}$ ,  $l_2 = 2,87\text{ m}$ ,  $R = 2,61\text{ m}$ .)

**Question 9** Calculer  $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$ .

**Question 10** Calculer  $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$  dans l'intervalle de temps [17;27] secondes pour lequel les vitesses angulaires sont constantes.

Le graphe ci-dessous, obtenu par simulation numérique, présente le module de la vitesse du passager  $P$  par rapport au bâti 0 ainsi que le module de l'accr  tation du passager  $P$  par rapport au bâti 0 en fonction du temps.



**Question 11** Comparer les résultats obtenus à la question 6 à ceux du graphe pour le temps  $t_1 = 19,8 \text{ s.}$

**Question 12** Relever l'accélération maximale subie par le passager et conclure vis-à-vis du CdCE

1.  $\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha} \overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta} \overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{\Omega(3/2)} = \dot{\varphi} \overrightarrow{y_2}.$
2.  $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{\Omega(3/0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{z_0} + \dot{\varphi} \overrightarrow{y_2};$

4.  $\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{z_3} = \sin \varphi \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{x_2} = -\sin \varphi \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\cos \varphi \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{z_1} = \vec{0}, \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{x_0} = -\sin(\beta + \alpha) \overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_0} = -\cos \varphi \overrightarrow{y_2}.$
5.  $\overrightarrow{V(O_2 \in 2/0)} = l_1 \dot{\alpha} \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{V(O_3 \in 3/0)} = l_1 \dot{\alpha} \overrightarrow{x_1} + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{V(P \in 3/0)} = l_1 \dot{\alpha} \overrightarrow{x_1} + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{x_2} - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} - R \dot{\varphi} \overrightarrow{x_3}.$
6.  $\dot{\alpha} = 0,84 \text{ rad/s}, \dot{\beta} = 0,94 \text{ rad/s}, \dot{\varphi} = -0,628 \text{ rad/s}$  et  $\alpha(t) - \alpha(17) = \int_{17}^t \dot{\alpha} d\tau.$
7.  $\alpha = [12,85 \text{ rad}], \beta = [6,39 \text{ rad}], \varphi = [12,43 \text{ rad}].$
8.  $V_{x2} = l_1 \dot{\alpha} \cos \beta + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - R \dot{\varphi} \cos \varphi = [9,99 \text{ m/s}], V_{y2} = -l_1 \dot{\alpha} \sin \beta - R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = [-0,28 \text{ m/s}], V_{z2} = R \dot{\varphi} \sin \varphi = [-0,22 \text{ m/s}].$
9.  $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)} = l_1 \ddot{\alpha} \overrightarrow{x_1} + l_1 \dot{\alpha}^2 \overrightarrow{y_1} + l_2(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \overrightarrow{x_2} + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{y_2} - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} - R \sin \varphi (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \overrightarrow{y_2} + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{x_2} - R \dot{\varphi} \overrightarrow{x_3} + R \dot{\varphi}^2 \overrightarrow{z_3}.$
10.  $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)} = l_1 \dot{\alpha}^2 \overrightarrow{y_1} + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{y_2} - 2R \dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} + R \sin \varphi (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \overrightarrow{x_2} + R \dot{\varphi}^2 \overrightarrow{z_3}.$
11.  $\left\| \overrightarrow{V(P \in 3/0)} \right\| = [10 \text{ m/s}]$
12. .

## TD 03



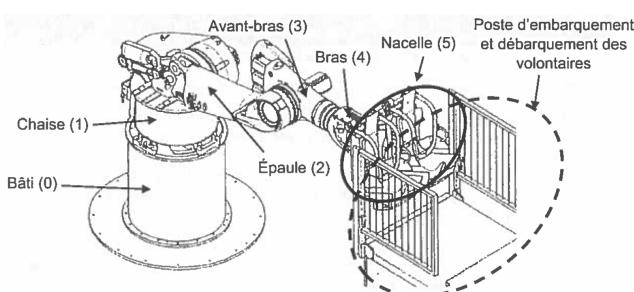
## Danse avec les robots

ICNA 2017

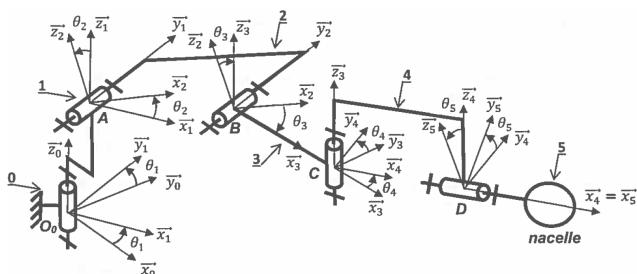
## Savoirs et compétences :

« Danse avec les robots » est une attraction du Futuroscope de Poitiers. Le principe consiste   tacher deux personnes au bout d'un bras de robot 5 axes. Les personnes sont ainsi remués au rythme de la musique.

On appelle nacelle l'ensemble de solides composé des sièges, des harnais de sécurité et des 2 volontaires.



On donne sur la figure suivant le schéma cinématique spatial d'un des robots avec le paramétrage associé aux différents solides et aux liaisons.



L'ensemble des repères sont considérés orthonormés directs.

- On note  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère supposé galiléen associé au sol de la salle de spectacle, appellé bâti 0.
- On note  $\mathcal{R}_1 = (O_0; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  le repère associé à la chaise 1 et  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  l'angle de rotation de la chaise 1 par rapport au bâti 0.
- On note  $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  le repère associé à l'épaule 2,  $\overrightarrow{O_0 A} = a \vec{z}_0 + b \vec{x}_1$  et  $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  =

$(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$  l'angle de rotation de l'épaule 2 par rapport à la chaise 1.

- On note  $\mathcal{R}_3 = (B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  le repère associé à l'avant-bras 3,  $\overrightarrow{AB} = c \vec{x}_2$  et  $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$  l'angle de rotation de l'avant-bras 3 par rapport à l'épaule 2.
- On note  $\mathcal{R}_4 = (C; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  le repère associé au bras 4,  $\overrightarrow{BC} = d \vec{x}_3$  et  $\theta_4 = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{y}_3, \vec{y}_4)$  l'angle de rotation du bras 4 par rapport à l'avant-bras 3.
- On note  $\mathcal{R}_5 = (D; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  le repère associé à la nacelle 5,  $\overrightarrow{CD} = e \vec{x}_4$  et  $\theta_5 = (\vec{y}_4, \vec{y}_5) = (\vec{z}_4, \vec{z}_5)$  l'angle de rotation de la nacelle 5 par rapport à bras 4.

Le centre de gravité de la nacelle 5 (si  ge + volontaire + harnais) est tel que  $\overrightarrow{DG} = f \vec{x}_4 + h \vec{z}_5$ .

On définit la position du point G dans la base  $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  telle que  $\overrightarrow{O_0 G} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0$ .

**Question 1** Tracer les figures planes de changement de repère.

**Question 2** Exprimer la position du point G suivant  $\vec{x}_0$ .

**Objectif** Valider que l'exigence d'accélération est satisfaite : l'accélération ressentie doit être au maximum de 3,5 g.

**Question 3** Exprimer la vitesse du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée  $\overrightarrow{V(G \in 5/0)}$ .

On limite désormais l'étude dans au cas où  $\dot{\theta}_2 = 1,45 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0$ .

**Question 4** Exprimer l'accélération du point G dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée  $\overrightarrow{\Gamma(G \in 5/0)}$ .

**Question 5** Conclure quant au respect de l'exigence d'accélération ressentie.

## TD 04



## Robot de peinture \*

P  le Chateaubriand - Joliot Curie

## Savoirs et compétences :

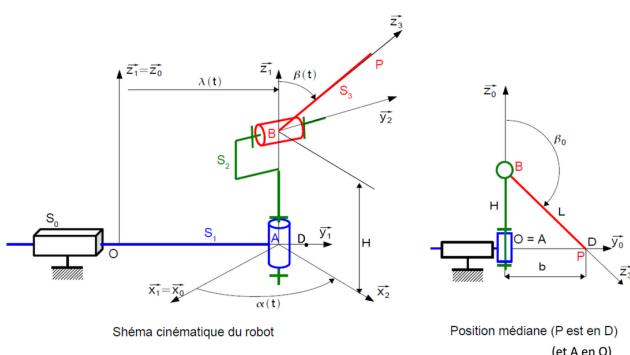
## Robot de peinture

On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot, pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.



Exigences techniques	Critère	Niveau
1.7	Vitesse de déplacement relatif	Vitesse constante

La modélisation cinématique du robot est donnée sur la figure suivante :



Le chariot  $S_1$ , auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est en mouvement de translation de direction  $\vec{y}_0$  par rapport au bâti  $S_0$  de repère  $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Le corps  $S_2$ , auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est en mouvement de rotation autour de l'axe  $(B, \vec{z}_0)$  avec le chariot  $S_1$ .

Le bras  $S_3$ , auquel on associe le repère  $\mathcal{R}_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est en mouvement de rotation autour de l'axe  $(B, \vec{y}_2)$  avec le corps  $S_2$ .

On a  $\overrightarrow{OD} = b \vec{y}_0$  avec  $b = \sqrt{L^2 - H^2}$ .

**Question 1** Construire les figures planes de repérage/paramétrage puis exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation  $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$ ,  $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ ,  $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V}(P \in 3/0)$ .

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(P \in 3/0)}$ .

On désire que  $P$  décrit la droite  $(D, \vec{x}_0)$  à vitesse constante  $V$ , conformément au cahier des charges.

**Question 4** Représenter sur une figure dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , puis sur une figure dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$ , les positions des points  $O, D, A, B$  et  $P$  du robot lorsque celui-ci est en position extrême ( $A$  est en  $D$ ).

**Question 5** Traduire, à l'aide de l'expression de  $\overrightarrow{V}(P \in 3/0)$  le fait que  $P$  se déplace à la vitesse  $V$  selon  $\vec{x}_0$ . En déduire  $\dot{\beta}$ .

**Question 6** Exprimer alors  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\alpha}$  en fonction de  $L, V, \alpha$  et  $\beta_0$ .

**Question 7** A l'aide de la figure précédente, exprimer  $\beta_0$  en fonction de  $b$  et  $L$ .

**Question 8** Exprimer  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\alpha}$  en fonction de  $V, b$  et  $\alpha$ .

## TD 05



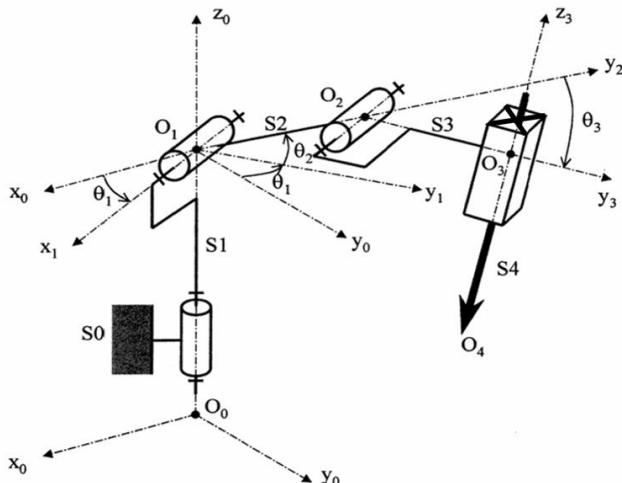
## Robot de peinture \*

P  le Chateaubriand - Joliot Curie

## Savoirs et compétences :

## Mise en situation

On s'intéresse à un robot soudeur dont le schéma cinématique lié cette étude est proposé ci-dessous. Sur ce schéma, les « flèches » au dessus des vecteurs unitaires ne sont pas représentées.



Ce robot est constitué de cinq solides :

- le bâti 0, fixé au sol de l'atelier, de repère associé  $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  tel que  $\vec{z}_0$  vertical ascendant;
- le fût 1, de repère associé  $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  tel que  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$ ;
- le bras 2, de repère associé  $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  tel que  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ ;
- l'avant-bras 3, de repère associé  $\mathcal{R}_3 = (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  tel que  $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$ ;
- la buse 4, de repère associé  $\mathcal{R}_4 = (O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  tel que  $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3$ .

Chaque articulation possède son propre actionneur, le mouvement qui lui est associé peut donc être réalisé indépendamment des autres.

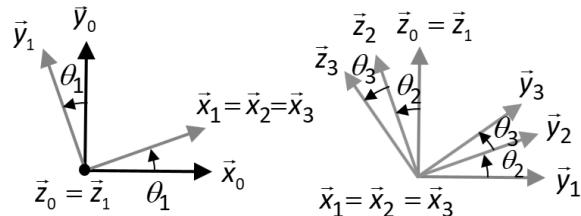
Paramètres du mouvement :

- $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ;
- $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ ;
- $\theta_3 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$ ;
- $\vec{O}_3 O_4 = \lambda \vec{z}_3$ .

Caractéristiques géométriques :

- $\vec{O}_0 O_1 = L_1 \vec{z}_0$ ;
- $\vec{O}_1 O_2 = L_2 \vec{y}_2$ ;
- $\vec{O}_2 O_3 = L_3 \vec{y}_3$ .

Les figures de changement de base sont donnés ci-dessous.



On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges :

- exigence 1 : afin d'assurer la sécurité de l'environnement, la buse doit rester en permanence à l'intérieur d'une sphère de centre  $O_0$  et de rayon  $R$ .
- exigence 2 : en phase d'utilisation normale, la buse doit se déplacer par rapport au bâti suivant la droite  $(O_0, \vec{y}_0)$  : réalisation d'un cordon de soudure linéaire.
- exigence 3 : pour que le cordon de soudure linéaire suivant  $\vec{y}_0$  soit correctement réalisé, l'orientation de la buse 4 par rapport à la direction verticale doit être constante, et la vitesse de la buse doit être constante :  $V$ .

**Objectif** D閞miner les relations à imposer entre les valeurs instantanées des paramètres de mouvement et de leurs dérivées lors de la réalisation d'un cordon de soudure.

**Question 1** Préciser une condition sur le vecteur position du point  $O_4$  dans le repère lié à 0 qui traduit l'exigence Ex1 du cahier des charges. En d閞uire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

**Question 2** Préciser deux conditions sur le vecteur position du point  $O_4$  dans le repère lié à 0 qui traduisent l'exigence Ex2 du cahier des charges. En d閞uire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.

**Question 3** D閞miner le torseur  $\{\mathcal{V}(4/0)\}$  au point  $O_4$  puis calculer  $\overrightarrow{\Gamma(O_4 \in 4/0)}$ .

**Question 4** D閞miner le torseur  $\{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$  qui traduit l'exigence Ex3.

**Question 5** On se place dans le cas où le moteur de l'articulation entre 0 et 1 est arrêté dans la position  $\theta_1 = 0$ , traduire alors la condition  $\{\mathcal{V}(4/0)\} = \{\mathcal{V}(4/0)\}_{\text{impose}}$  en deux relations vectorielles.

**Question 6** En d閞uire 3 relations scalaires imposées entre les paramètres de mouvement et/ou leurs dérivées.

## Application 01



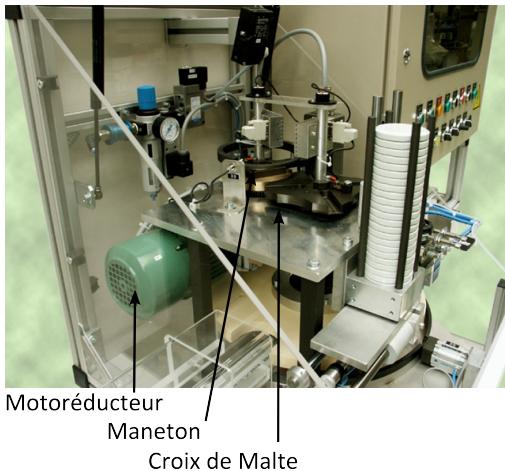
## Capsuleuse de bocaux \*

Xavier Pessoles

### **Savoirs et compétences :**

Le conditionnement de nombreux produits alimentaires est réalisé dans des bocaux en verre fermés par des capsules vissées. La société RAVOUX, spécialisée dans le conditionnement, a créé ce prototype afin d'optimiser ses machines de production. Elle est donc équipée de nombreux capteurs permettant, via un ordinateur, d'optimiser les paramètres de production tels que qualité totale, production maximale, ...

Le système de laboratoire proposé s'insère dans une chaîne de conditionnement de produits alimentaires, entre l'unité de remplissage des bocaux et le poste d'étiquetage. Sa fonction principale est la «fermeture étanche de bocaux préalablement remplis de produits alimentaires»



On s'intéresse ici au système de croix de Malte. Il permet d'obtenir une rotation discontinue à partir d'un mouvement de rotation continue. Ainsi, pendant que la croix de Malte ne tourne pas, le système peut agir sur la matière d'œuvre (flacon).

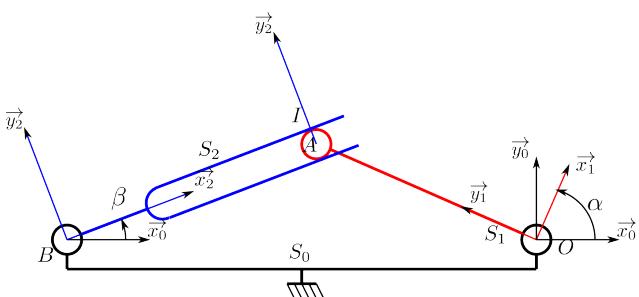
Lors de la rotation de la croix de Malte, la capsuleuse déplace deux flacons. Afin d'accroître la productivité, il faut diminuer la durée de cette phase. Cependant, si la croix de Malte tourne trop vite, les flacons basculent ce qui entraîne un mauvais fonctionnement du système. Ainsi, on désire que la **vitesse de la croix soit inférieure à 50 tours/minute**.

## Modélisation sans galet

Afin de modéliser le système à croix de malte, on propose le schéma cinématique ci-contre.

On note :

- $\mathcal{R} = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère lié au bâti  $S_0$ . On note  $\vec{OB} = -L\vec{x}_0$  avec  $L = 145$  mm;
  - $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  le repère lié à l'arbre  $S_1$ . On pose  $\vec{OA} = R\vec{y}_1$  avec  $R = 141$  mm et  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ . L'arbre  $S_1$  est lié au motoréducteur de la capsuleuse. On a :  $\dot{\alpha} = 10$  tr/min;
  - $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  le repère lié à l'arbre  $S_2$ . On pose  $\vec{BA} = \lambda(t)\vec{x}_2$ ,  $\vec{AI} = r\vec{y}_2$  et  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ ;



**Question 1** Donner le paramétrage associé au schéma cinématique.

**Question 2** Établir la loi entrée/sortie du système.

**Question 3** Donner une méthode permettant de valider la cahier des charges vis à vis de la vitesse de rotation de la croix de Malte.

**Question** 4 Donner l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_1/S_0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$ .

**Question 5** Donner l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_0)}$  et  $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}$ .

**Question 6** En déduire l'expression de  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)}$  dans la base  $\mathcal{R}_2$ . On donne  $\overrightarrow{x_1} = \cos(\alpha - \beta) \overrightarrow{x_2} + \sin(\alpha - \beta) \overrightarrow{y_2}$ .

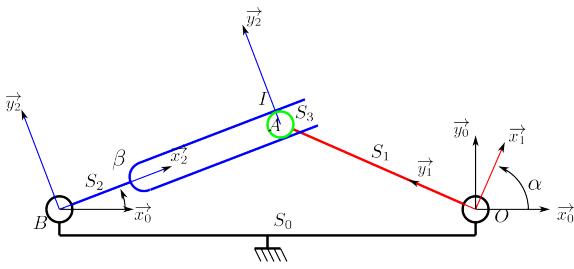
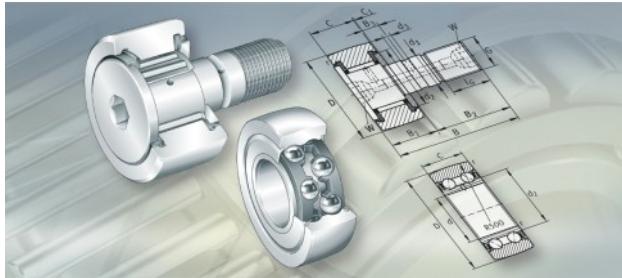
**Question 7** D'après le paramétrage adopté, quelle est la direction du vecteur vitesse du solide  $S_1$  par rapport à  $S_2$ ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire une condition de fonctionnement du mécanisme.

**Question 8**  $\overrightarrow{V(I, S_2/S_1)} \cdot \overrightarrow{x_2}$  est appelée **vitesse de glissement**. Quel problème technologique pose l'existence de cette vitesse ? Ce problème est-il pris en compte sur la capsuleuse ? Si oui, comment ? Si non, proposez une modification du système permettant la prise en compte de ce problème.

## Modélisation avec galet

On considère maintenant l'existence d'un galet  $S_3$  en bout de l'arbre  $S_1$ . On fait l'hypothèse que le galet roule sans glisser dans le  $S_2$ .  $S_3$  et  $S_1$  sont en liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$  et de centre  $A$ .

Le galet a un diamètre extérieur de 16 mm. D'après la documentation constructeur, la vitesse de rotation du galet ne doit pas dépasser les 5000 tr/min.



**Question 9** Quelle est la modification sur le paramétrage du système ?

**Question 10** Comment est-il possible de traduire l'hypothèse de **roulement sans glissement** ?

**Question 11** Calculer la vitesse de rotation du galet  $\dot{\gamma}$  en commençant par exprimer  $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$ ? Indice : décomposer  $\overrightarrow{V(I, S_3/S_2)}$  en fonction des mouvements connus.

**Question 12** Valider le choix du galet.

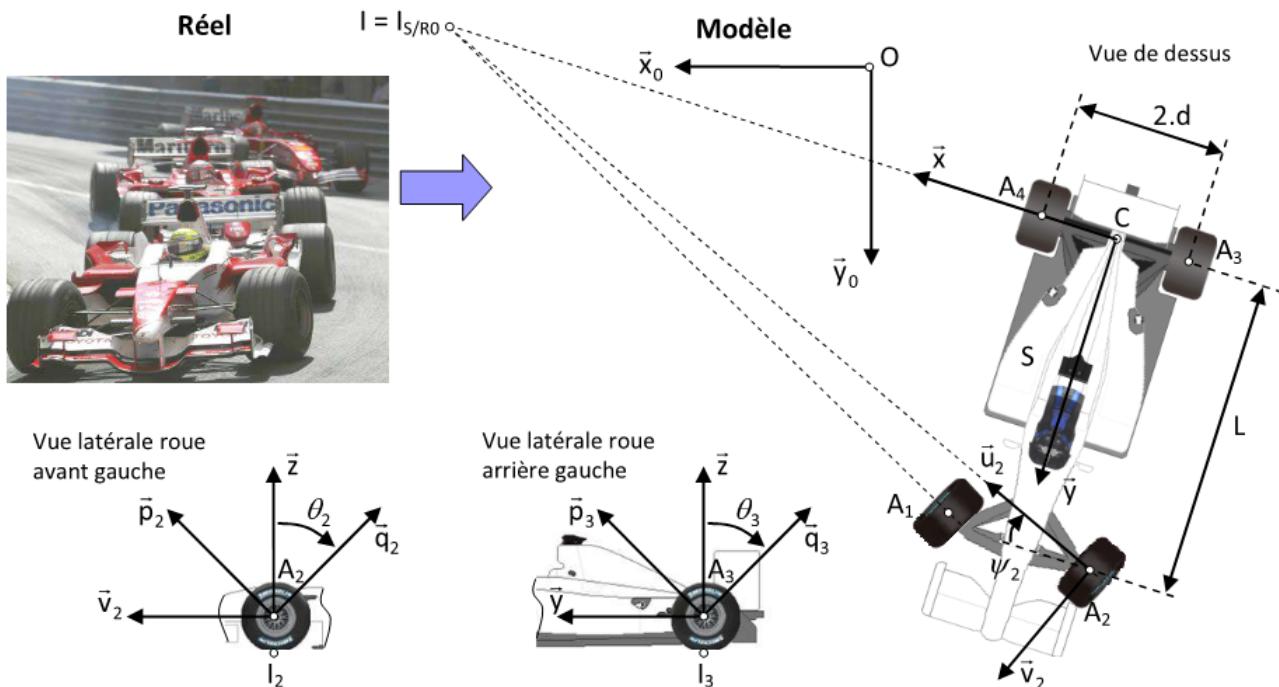
## Application 02



###   tude des performances cinématiques en virage d'une Formule 1 \*

Florestan Mathurin

#### Savoirs et compétences :



#### Mise en situation

Une Formule 1 doit assurer un certain nombre d'exigences techniques afin d'assurer les meilleures performances en course tout en garantissant la sécurité du pilote. Une de ces exigences est que « le système doit tenir la trajectoire en phase de virage ». Pour y parvenir, le véhicule dispose d'une cinématique particulière permettant aux roues de tourner sur le sol en limitant le risque de glissement. On s'intéresse aux conséquences pratiques nécessaire pour assurer la condition de roulement sans glissement des roues sur le sol. On supposera donc que les 4 roues roulent sans glisser dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .

Pour cette \'etude on considère que le véhicule est constitué d'un châssis ( $S$ ) et de 4 roues ( $S_i$ ) avec  $i = 1, 2, 3, 4$ . Le châssis est modélisé par un rectangle  $A_1A_2A_3A_4$  tel que  $\overrightarrow{A_4A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} = 2d\vec{x}$  et  $\overrightarrow{A_4A_1} = \overrightarrow{A_3A_2} = L\vec{y}$  o  u  $L$  correspond l'empattement du véhicule et  $2d$  la voie.

On définit le repère  $\mathcal{R}(C; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  attaché au châssis o  u le point  $C$ , origine du repère, est tel que  $\overrightarrow{A_4C} = d\vec{x}$ . Le véhicule est en phase de virage et on considère alors qu'il est en rotation par rapport au repère  $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour du point  $I_{S/R0} = I$ , centre instantanée de rotation du mouvement. On pose  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x})$

angle de rotation du châssis par rapport ´a  $\mathcal{R}_0$ .

On définit le repère  $\mathcal{R}_i(A_i; \vec{u}_i, \vec{p}_i, \vec{q}_i)$  attaché ´a chaque roue ( $S_i$ ). Ces 4 roues de rayon  $R$  sont en liaison pivot avec le châssis ( $S$ ) suivant les axes  $(A_i, \vec{u}_i)$  avec  $i = 1, 2, 3, 4$ . On pose  $\theta_i = (\vec{z}, \vec{q}_i)$  angle de rotation de la roue  $i$  par rapport au châssis. Afin d'assurer la direction du véhicule, les 2 roues pivotent d'un angle  $\psi_1$  suivant l'axe  $(A_1, \vec{z})$  pour la roue 1 et d'un angle  $\psi_2$  suivant l'axe  $(A_2, \vec{z})$  pour la roue 2 avec  $\psi_1 = (\vec{x}, \vec{u}_1) = (\vec{y}, \vec{v}_1)$  et  $\psi_2 = (\vec{x}, \vec{u}_2) = (\vec{y}, \vec{v}_2)$ . On considère que le contact sol/roue et assimilable ´a un contact ponctuel en  $I$  de normale  $(I, \vec{z})$  tel que  $\overrightarrow{I_i A_i} = R\vec{z}$ .

**Question 1** Etablir les figures géométrales utiles.

**Question 2** Ecrire la condition de roulement sans glissement de la roue ( $S_1$ ) par rapport au sol  $\mathcal{R}_0$ . En d閏uire une relation vectorielle simple entre  $\overrightarrow{V(I_1 \in S/\mathcal{R}_0)}$  et  $\overrightarrow{V(I_1 \in S/\mathcal{R}_0)}$ .

**Question 3** Donner la forme simple du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_0)\}$  écrit en  $I$ . En d閏uire alors  $\overrightarrow{V(I_1 \in S/\mathcal{R}_0)}$  en fonction de  $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_0)}$  et  $\overrightarrow{II_1}$  (on n'effectuera pas les produits vectoriels).

**Question 4** Donner la forme simple du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(S_1/S)\}$  écrit en  $A_1$ . En déduire alors  $\overrightarrow{V}(I_1 \in S_1/S)$  en fonction de  $\overrightarrow{\Omega(S_1/S)}$  et  $\overrightarrow{A_1 I_1}$  (on n'effectuera pas les produits vectoriels).

**Question 5** Déduire des relations précédentes que  $\overrightarrow{\Omega(S/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{A_1 I_1} = \overrightarrow{0}$ .

**Question 6** On pose  $\overrightarrow{IA_1} = a \overrightarrow{u_1} + b \overrightarrow{v_1} + c \overrightarrow{z}$ , montrer que l'on a nécessairement  $a = -\frac{R \dot{\theta}_1}{\dot{\beta}}$  et  $b = 0$  pour que la relation obtenue question précédente soit respectée.

**Question 7** Montrer que l'axe ( $D_1$ ) de la roue ( $S_1$ ) passe par  $I$ , puis en déduire que l'axe ( $D_i$ ) de la roue ( $S_i$ ) passe par  $I$ .

On pose par la suite  $\overrightarrow{IC} = \rho \overrightarrow{x}$  et on note  $\overrightarrow{V(C \in S/R)} = \overrightarrow{Vy}$  ( $\rho$  est le rayon du virage et  $V$  la vitesse du véhicule).

**Question 8** À partir de  $\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_0)\}$  exprimé en  $I$ , quelle relation simple existe-t-il entre  $V$  et  $\rho$  ?

**Question 9** En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer les vitesses de rotation  $\dot{\theta}_3$  et  $\dot{\theta}_4$  des deux roues arrières ( $S_3$ ) et ( $S_4$ ) en fonction de  $\rho$ ,  $R$ ,  $d$  et  $V$ . Que constate-t-on ?

**Question 10** En déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu arrière pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en  $I_3$  et  $I_4$ .

On considère que le véhicule roule à 90 kmh, les roues ont pour diamètre 80 cm et le virage décrit une courbe telle que la vitesse angulaire du véhicule  $\dot{\beta} = 0,1$  rad/s. On donne  $d = 1$  m.

**Question 11** Déterminer graphiquement les vitesses des roues  $S_1, S_2, S_3, S_4$  en  $I_1, I_2, I_3, I_4$ . Utiliser une échelle judicieuse pour les vitesses et justifier les constructions.

**Question 12** Que constate-t-on sur les roues avant et en déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu avant pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en  $I_1$  et  $I_2$ .

## Application 03



### OMNIROB – Le robot collaboratif de l'usine du futur d'Airbus

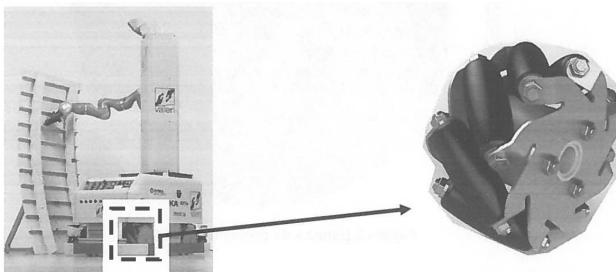
ICNA 2019

#### Savoirs et compétences :

**Objectif** D閞miner le modèle cinématique direct ou inverse de la commande Omniprob.

Valider le critère de mobilité omnidirectionnelle et analyser les limites du modèle.

Les roues utilisés pour le robot omnirob sont des roues holonomes g  alement appellées Mecanum (voir figure suivante) qui sont mises en mouvement par quatre moteurs commandés indépendamment. La surface de roulement de ces roues spéciales est pourvue de rouleaux ellipsoïdes répartis sur la circonference à un angle de 45  .



Le paramétrage cinématique est donné dans les pages suivantes.

**Question 1** En analysant la géométrie du contact entre les rouleaux et le sol, proposer la liaison équivalente entre le châssis 3 et le sol.

Hypotheses :

- Les roues sont parfaitement symétriques par rapport aux plans  $(O_3, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$  et  $(O_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .
- Les roues roulent sans glisser sur le sol.

Données :

- Le nombre de rouleaux 1 par roue est  $n = 8$ .
- Les rouleaux sont inclinés d'un angle  $\alpha_a = -45^\circ$  par rapport à l'axe de rotation de la roue.

Notations : torseurs cinématiques.

- Le torseur cinématique de 3/0 pourra s'exprimer dans la base locale du robot  $\mathcal{B}_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  avec les notations  $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} \\ \overrightarrow{V(O_3 \in 3/0)} \end{array} \right\}_{O_3}$
- $\left\{ \begin{array}{c} \vec{\varphi} \vec{z}_3 = \omega \vec{z}_3 \\ V_{RX} \vec{x}_3 + V_{RY} \vec{y}_3 \end{array} \right\}_{O_3}$ .

Dans le mouvement de rotation de la roue a, le rouleau 1 reste en contact avec le sol suivant la corde  $I_{1a\_ext} I_{1a\_int}$  (annexe 4).

On peut alors d閞montrer que la fluctuation du rayon  $r$  de l'ellipsoïde est telle que :  $\Delta r \% = \left( \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \right) \sin \alpha_a$  avec  $n$  le nombre de rouleaux.

Pour les roues de cette étude,  $\alpha_a = -45^\circ$  et  $n = 8$  rouleaux, on obtient une fluctuation de rayon de 14 % lorsque le point de contact  $I_{1a}$  se déplace le long de la corde de rouleau 1. On supposera donc le rayon  $r$  comme étant constant.

**Question 2** D閞miner  $\overrightarrow{V(I_{1a} \in 1/2)}$  en fonction du paramétrage du robot dans la base  $\mathcal{B}_3$ .

On constate que la variation d'angle  $\theta_{2a}$  lors du contact d'un rouleau avec le sol reste faible,  $\theta_{2a} \ll 1$ . Ainsi, en effectuant un d閏veloppement limité à l'ordre 1 de  $\cos \theta_{2a}$ , on gardera pour la suite du sujet une expression de la vitesse  $\overrightarrow{V(I_{1a} \in 1/2)} = r \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\theta}_{1a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$

**Question 3** En vous aidant de l'annexe 3, d閞miner  $\overrightarrow{V(I_{1a} \in 2/3)}$  en fonction du paramétrage du robot.

**Question 4** En vous aidant de l'annexe 1, d閞miner  $\overrightarrow{V(I_{1a} \in 3/0)}$  en fonction du paramétrage du robot et des notations du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(3/0)\}$  proposées.

**Question 5** D閞miner  $\overrightarrow{\Gamma(I_{1a} \in 3/0)}$ .

Afin d'閰tablir le modèle cinématique du robot, on introduit une notation classique en robotique avec les vecteurs suivants :

- $\dot{q}_k$  étant le vecteur des vitesses articulaires des roues  $k = a, b, c$  et  $d$  tel que  $\dot{q}_k = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{2k} \\ \dot{\theta}_{1k} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{2k} \\ \omega_{1k} \\ \omega \end{pmatrix}$ . On aura par exemple pour la roue  $a$  le vecteur  $\dot{q}_a = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$ .

- $\dot{q}$  étant le vecteur des vitesses articulaires pilotées donc les vitesses des 4 moteurs des roues  $a, b, c$  et  $d$  tel que  $\dot{q} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix}$ ;

- $\dot{X}_R$  étant le vecteur des vitesses opérationnelles du robot tel que  $\dot{X}_R = \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix}$  exprimé dans la base locale  $\mathcal{B}_3$  du robot.

Dans un premier temps nous allons chercher les relations entre  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  pour  $k = a, b, c$  et  $d$ .

**Question 6** À partir des équations des questions 2 à 4, déduire de la condition de roulement sans glissement du rouleau 1 par rapport au sol 0 la relation  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  pour la roue  $a$ . On utilisera les notations proposées et ton rappelle que l'on note  $\omega = \dot{\varphi}$ .

La relation précédente pourra se noter  $\dot{X}_R = \mathcal{J}_a \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$  avec  $\mathcal{J}_a$  la matrice jacobienne relative à la roue  $a$ .

De façon analogue en prenant  $\lambda, -\lambda, \ell$  ou  $-\ell$  on trouve rapidement les matrices jacobiniennes relatives aux roues  $b, c$  et  $d$ .

$\dot{X}_R$  étant unique on peut obtenir 4 équations faisant intervenir uniquement les 4 inconnues articulaires  $\omega_{2a}, \omega_{2b}, \omega_{2c}$  et  $\omega_{2d}$  que l'on souhaite déterminer.

En effet, pour chaque relation  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  on peut écrire pour :

- la roue  $a : V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2a} + (\lambda + \ell)\omega$  (eq1);
- la roue  $b : V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2b} + (\lambda + \ell)\omega$  (eq2);
- la roue  $c : V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2c} - (\lambda + \ell)\omega$  (eq3);
- la roue  $d : V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2d} - (\lambda + \ell)\omega$  (eq4).

Trouver le modèle cinématique direct (MCD) revient à obtenir  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ . Ainsi on remarquera que les coordonnées de  $\dot{X}_R$  se déduisent facilement en utilisant les simplifications issues des 3 combinaisons :

- (eq1)+(eq3)+(eq3)+(eq4);
- (eq2)-(eq1)+(eq4)-(eq3);
- (eq1)+(eq2)-(eq3)-(eq4).

**Question 7** Déduire de ces 3 simplifications, le modèle cinématique direct (MCD) du robot,  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ .

**Question 8** Déduire également à l'aide des équations (eq1), (eq2), (eq3), (eq4), le modèle cinématique inverse (MCI) du robot  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$ .

Le contrôle du robot peut également être envisagé dans l'espace de travail lié au bâti à savoir le système de coordonnées du repère global.

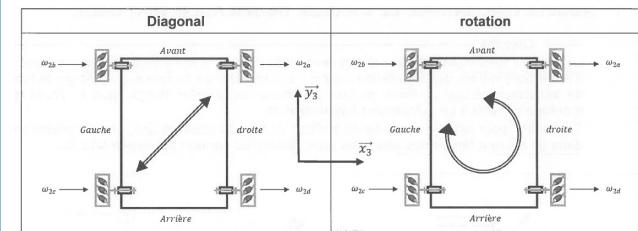
En notant  $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(3/0)}}{V(O_3 \in 3/0)} \right\}_{O_3}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} \overrightarrow{z_0} = \omega \overrightarrow{z_0} \\ V_X \overrightarrow{x_0} + V_Y \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{O_3}$$

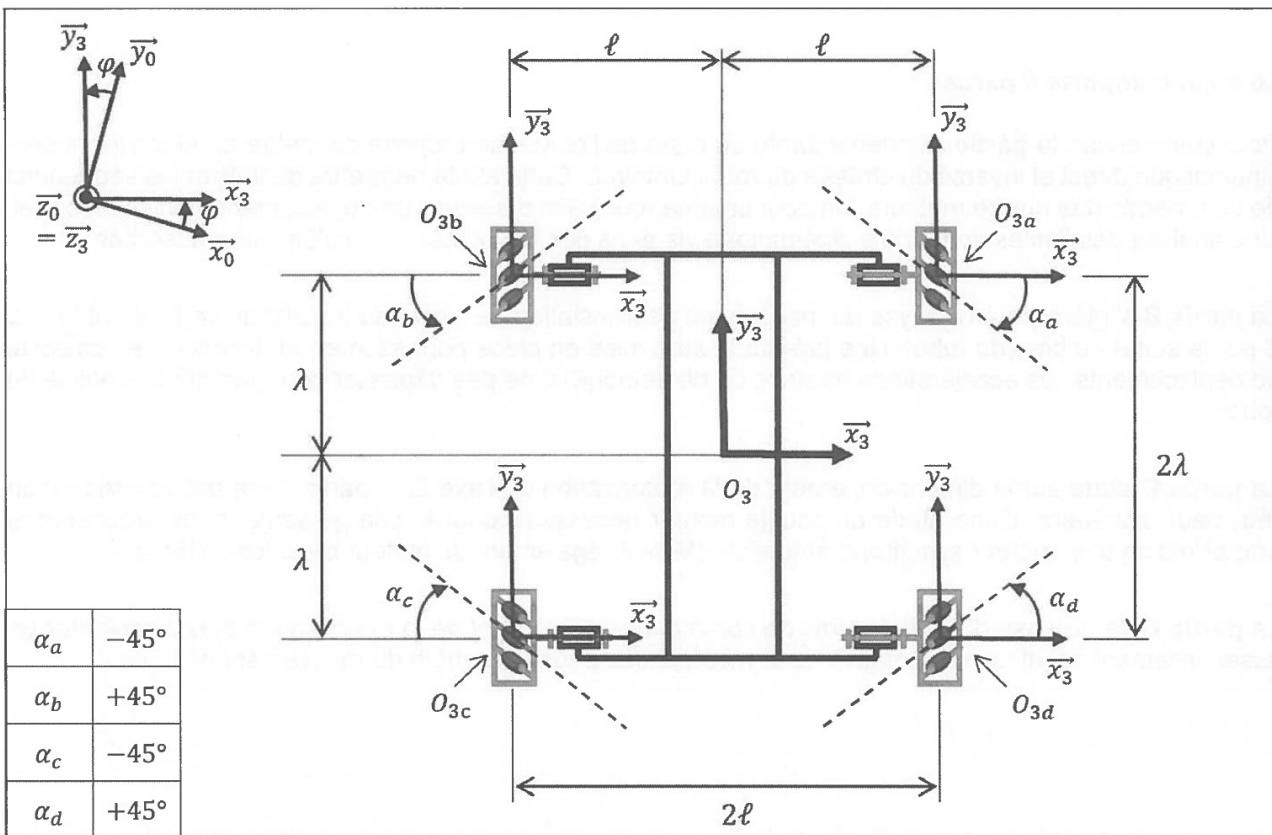
le torseur cinématique de 3/0 dans la base  $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ , le changement de base étant une rotation d'un angle  $\varphi$  selon  $\overrightarrow{z_0}$ , il vient immédiatement

$$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \\ \omega \end{pmatrix}.$$

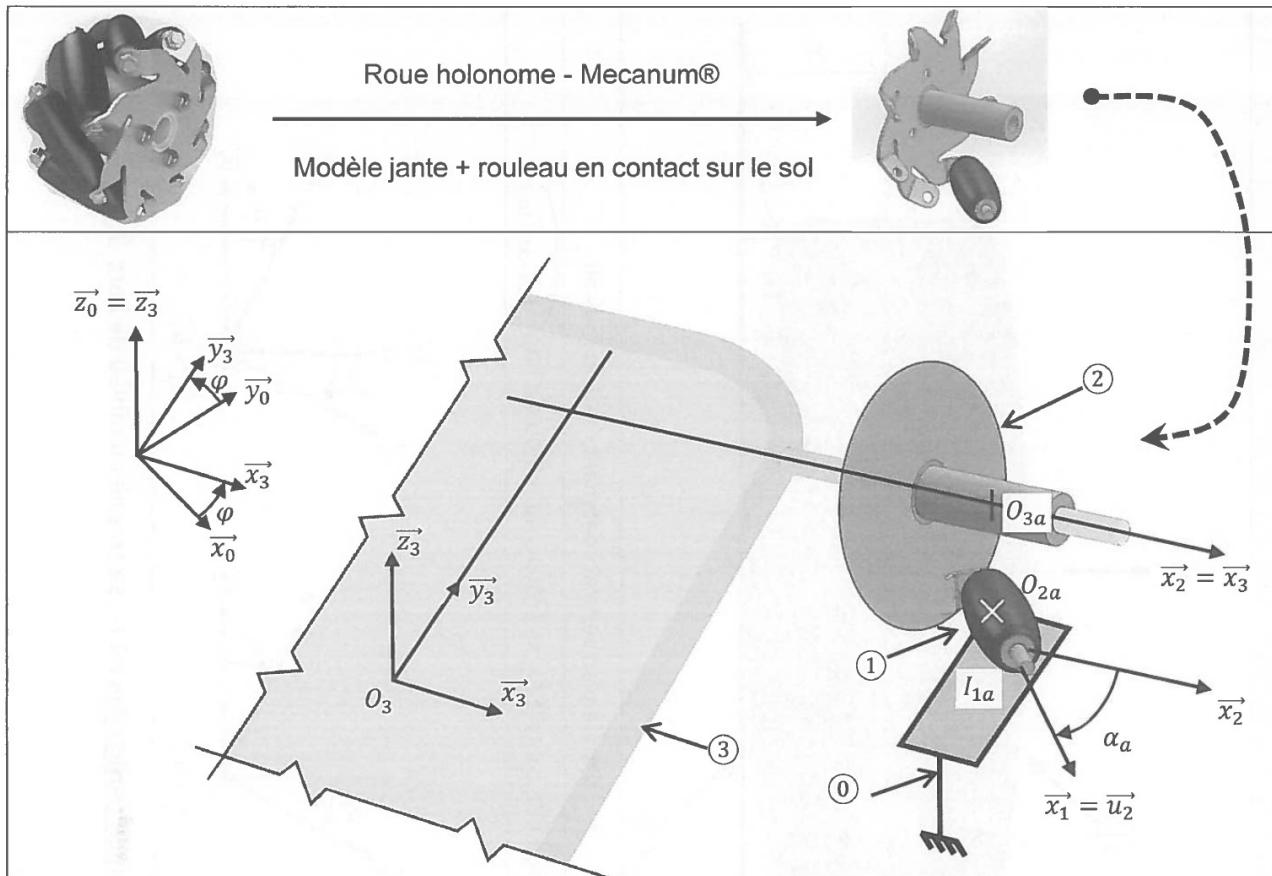
**Question 9** À partir des résultats précédents, indiquer comment commander la vitesse de rotation des moteurs des 4 roues  $a, b, c$  et  $d$  pour que le robot se déplace suivant une direction diagonale puis tourne sur lui-même,  $\omega_m$  est une vitesse de rotation algébrique.



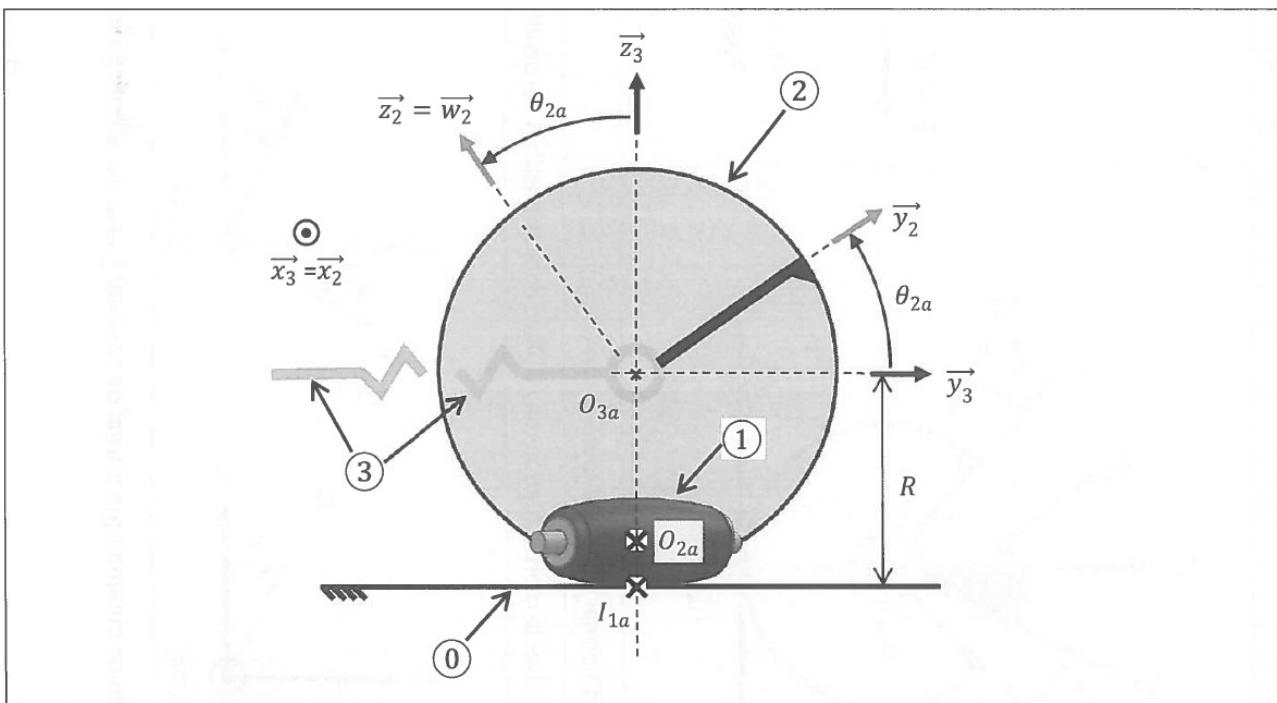
**Question 10** Conclure sur le comportement omnidirectionnel du robot des limites possibles.



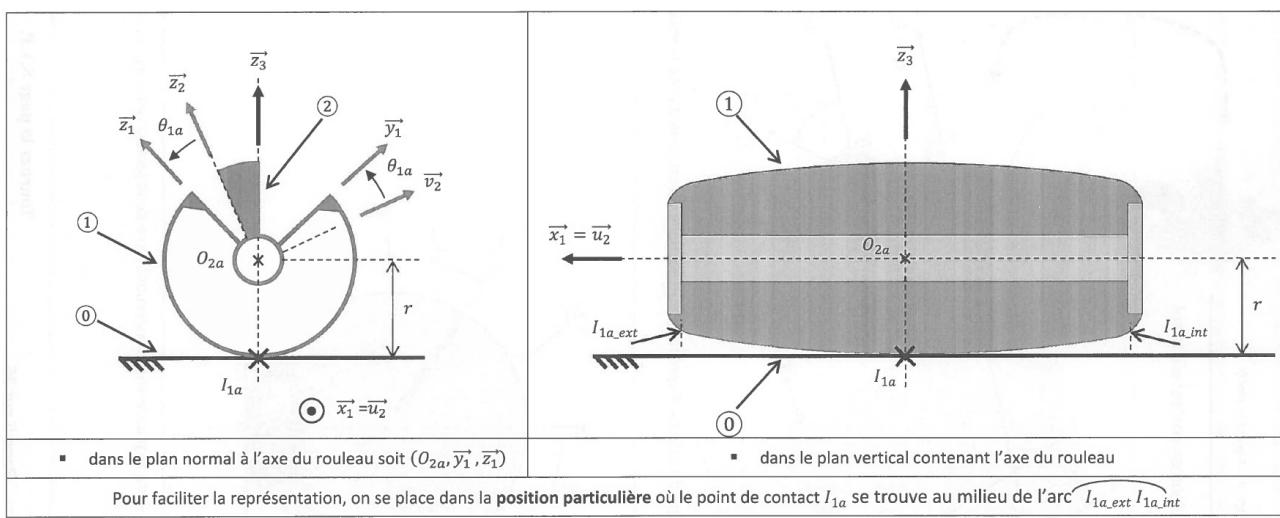
Annexe 1 : Schéma cinématique plan du robot – Paramétrages repères robot et repère global



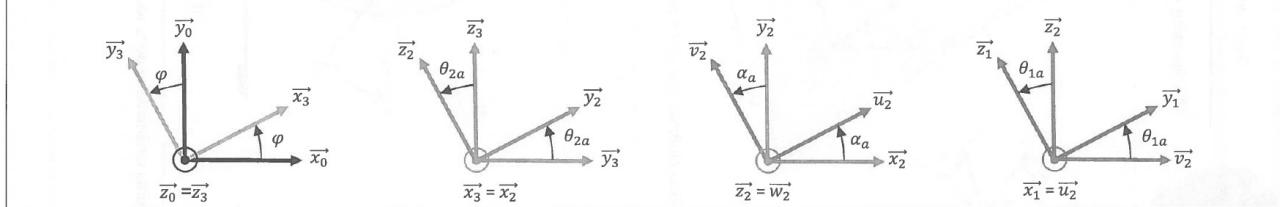
Annexe 2 : Schéma cinématique 3D de principe du robot – Représentation partielle du châssis 3 avec la roue a



Annexe 3 : Schéma cinématique de la roue  $a$  dans le plan vertical contenant l'axe de la jante 2 soit  $(O_{3g}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$



Pour faciliter la représentation, on se place dans la **position particulière** où le point de contact  $I_{1a}$  se trouve au milieu de l'arc  $I_{1a} \text{ ext } I_{1a} \text{ int }$



*Annexe 4 : Schéma cinématique partiel du rouleau 1 seul de la roue a dans la position particulière où  $I_{1a}$  se trouve au milieu de l'arc  $I_{1a\_ext} - I_{1a\_int}$ .*