

## TD1



## Véhicule TIM

Florestan Mathurin

## Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique ;
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

L'éco-marathon SHELL est une compétition relative à la consommation énergétique des moyens de propulsion automobile. Les concurrents doivent concevoir et piloter leur véhicule sur une distance fixée avec une vitesse minimale imposée. Les candidats sont ensuite classés en fonction de la consommation de leur véhicule, exprimée en « kilomètre par litre » de carburant. L'étude sur ce sujet, issue d'un projet élaboré par l'équipe T.I.M. de l'INSA Toulouse, a pour objet de quantifier les effets résistants et dissipatifs que sont la résistance au roulement et les actions aérodynamiques sur les performances de leur véhicule. Les effets inertiels étant plutôt quantifiés numériquement au niveau de la conception assistée par ordinateur du véhicule.

## Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

Le principe est présenté sur la figure 1. On place 2 roues lestées sur un dispositif inclinable. On considère ensuite que l'angle d'inclinaison minimum de la pente, où il y a début du mouvement des roues, est représentatif de la résistance au roulement. L'ensemble des 2 roues lestées peut être assimilé au solide 1 représenté sur la figure 1, de masse  $m$ , de rayon  $R$  et de centre de masse  $G$ .

L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  tel que  $\vec{g} = -g \vec{z}_0$ .

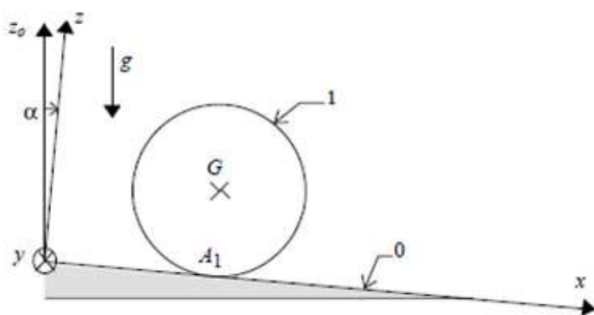


Figure 1

L'action de contact entre l'ensemble des roues 1 et le plan 0, incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, est modélisé comme un contact ponctuel avec frottement où l'on tient compte de la résistance au roulement.

Cette action de contact peut s'écrire :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{01} \vec{x} + N_{01} \vec{z} \\ -C_r \vec{y} \end{array} \right\}_{A_1}$  où  $C_r$  représente le couple de résistance au roulement qui s'oppose au roulement tel que :

$|C_r| = r|N_{01}|$  à la limite de l'équilibre et  $|C_r| < r|N_{01}|$  à l'équilibre.

**Question 1** Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 réduit au point  $G$  en projection sur la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 2** Déterminer l'expression analytique de l'angle  $\alpha_{\text{lim}}$  à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

Pour une masse du solide 1  $m = 50 \text{ kg}$  et pour un rayon  $R = 0,25 \text{ m}$  le roulement se produit à partir d'un angle  $\alpha_{\text{lim}}$  tel que  $\tan \alpha_{\text{lim}} = 0,008$ .

**Question 3** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $r$ .

**Question 4** Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en  $A_1$  si le coefficient de frottement au contact vaut  $f = 0,5$ .

## Modélisation du véhicule

L'objectif est d'établir un modèle analytique du véhicule, lors d'une phase de roulement sans glissement sur une ligne droite inclinée d'un angle  $\alpha$ , en l'absence de vent. En adoptant des conditions particulières d'essai, il sera possible d'identifier précisément, grâce à ce modèle, les actions aérodynamiques.

L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  telle que  $\vec{g} = -g \vec{z}_0$ . Le modèle est donné figure suivante. On considère que le véhicule se déplace sur une pente inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Le véhicule est constitué :

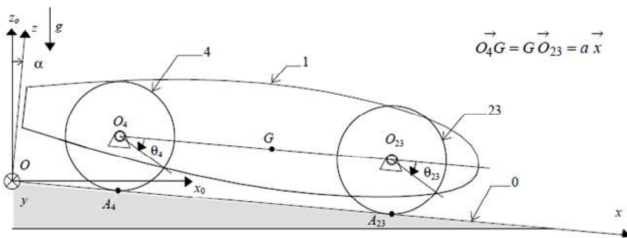
- d'un châssis avec son pilote : solide 1 de centre d'inertie  $G$ , de masse  $M$  en translation par rapport au repère galiléen  $R$  avec  $\vec{OG} = x \vec{x} + R \vec{z}$  ;
- de deux roues avant : solide 23 de centre d'inertie  $O_{23}$ , de masse  $2m$ , de rayon  $R$ , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O_{23}, \vec{y})$  sera noté  $2I$ . Le solide 23 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe  $(O_{23}, \vec{y})$  caractérisé par le paramètre  $\theta_{23}$  ;
- d'une roue arrière motrice : solide 4 de centre d'inertie  $O_4$ , de masse  $m$ , de rayon  $R$ , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O_4, \vec{y})$  sera noté  $I$ . Le solide 4 est en liaison pivot sans frottement par rap-

port au châssis 1 d'axe  $(O_4, \vec{y})$  caractérisé par le paramètre  $\theta_4$ ;

- un moteur d'entraînement du véhicule dont le corps est solidaire du châssis 1 exerce sur la roue 4 un couple moteur noté  $C_m \vec{y}$ .

Les roues sont en contact ponctuel avec frottement avec le sol 0. Afin de tenir compte de la résistance au roulement du pneu sur le sol, les actions de contact peuvent être modélisées en dynamique par :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow i)\}_{A_i} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{0i} \vec{x} + N_{0i} \vec{z} \\ -N_{0i} r \vec{y} \end{array} \right\}_{A_i}$  avec  $i = 4$  ou 23.

L'ensemble du véhicule dont la carrosserie est soumis lors de son mouvement à un effort de traînée aérodynamique qui peut être modélisée par le torseur  $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 \vec{x} \\ \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 \vec{x} \end{array} \right\}_{O_{23}}$  avec  $\rho$  masse volumique du véhicule,  $S$  surface alaire,  $C_x$  coefficient de traînée du véhicule,  $\dot{x}$  vitesse relative du véhicule par rapport à l'air ambiant.



**Question 5** Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux points  $A_{23}$  et  $A_4$ .

**Question 6** En isolant l'ensemble  $E = 1+2+3+4$ , écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

**Question 7** Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en  $O_{23}$  et  $O_4$  en projection sur  $\vec{y}$ .

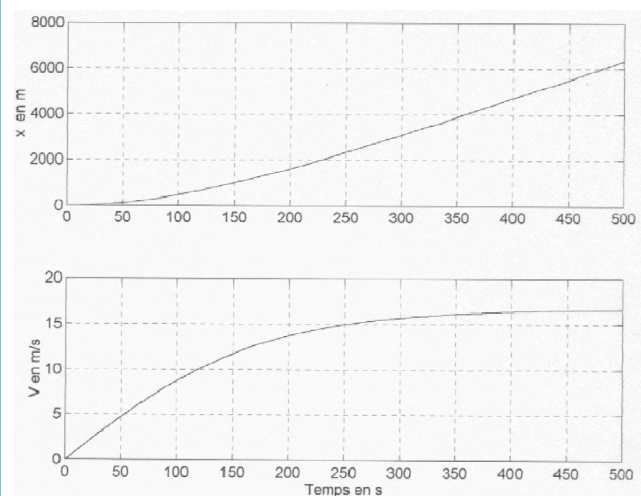
**Question 8** Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur  $C_m$

$$\text{vaut : } C_m = (M + 3m)g \cos \alpha r + \left[ \frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right] \ddot{x} - R(M + 3m)g \sin \alpha + \frac{1}{2} R \rho S C_x \dot{x}^2.$$

**Question 9** Identifier dans l'expression de  $C_m$  les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

**Question 10** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  quand le véhicule a une vitesse constante  $V$  sur une piste horizontale.

On réalise un essai du véhicule sur terrain horizontal, le moteur du véhicule délivrant un couple  $C_m$  constant. Les données véhicules sont :  $M = 70 \text{ kg}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $r = 2.10^{-3} \text{ m}$ ,  $R = 0,25 \text{ m}$ ,  $C_m = 3,245 \text{ mN}$ ,  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ . L'acquisition des paramètres vitesse véhicule et distance parcourue sont visualisés par les graphes ci-dessous.



**Question 11** Déterminer dans les conditions d'essais le produit  $\frac{1}{2} \rho S C_x$  caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

**Question 12** Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de  $5 \text{ km h}^{-1}$  (on négligera le couple de résistance au roulement).

## TD 1 – Corrigé



## Véhicule TIM

Florestan Mathurin

## Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique ;
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

## Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

**Question 1** Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 réduit au point G en projection sur la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Correction** • On isole le solide 1.

- Le solide est soumis à l'action de pesanteur et à l'action du sol.
- On applique le PFS :
  - TRS :  $-T_{01} \vec{x} + N_{01} \vec{z} = -mg \vec{z}_0 = -mg (\cos \alpha \vec{z} - \sin \alpha \vec{x})$  ;
  - TMS en G en projection sur  $\vec{y}$  :  $-C_r + R T_{01} = 0$ .
- On résout :
  - $-T_{01} + mg \sin \alpha = 0$  ;
  - $N_{01} - mg \cos \alpha = 0$  ;
  - $C_r = R T_{01}$ .

**Question 2** Déterminer l'expression analytique de l'angle  $\alpha_{\text{lim}}$  à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

**Correction** À la limite du roulement, on a  $C_r = r N_{01} \Leftrightarrow R T_{01} = r N_{01} \Leftrightarrow R mg \sin \alpha_{\text{lim}} = r mg \cos \alpha_{\text{lim}}$  et  $\tan \alpha_{\text{lim}} = \frac{r}{R}$ .

Pour une masse du solide 1  $m = 50 \text{ kg}$  et pour un rayon  $R = 0,25 \text{ m}$  le roulement se produit à partir d'un angle  $\alpha_{\text{lim}}$  tel que  $\tan \alpha_{\text{lim}} = 0,008$ .

**Question 3** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $r$ .

**Correction**  $r = 0,002 \text{ m}$ .

**Question 4** Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en  $A_1$  si le coefficient de frottement au contact vaut  $f = 0,5$ .

**Correction** À la limite du glissement, on a  $T_{01} = f N_{01}$  et  $\frac{T_{01}}{N_{01}} = \tan \alpha$ . Pour  $\tan \alpha_{\text{lim}} < f$  il y a donc roulement sans glissement.

## Modélisation du véhicule

**Question 5** Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point  $A_{23}$  et  $A_4$ .

**Correction** En  $A_{23}$ , on a :  $\overrightarrow{V(A_{23} \in 23/0)} = \vec{0}$ . On a alors  $\overrightarrow{V(A_{23} \in 23/0)} = \overrightarrow{V(A_{23} \in 23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23} \in 1/0)}$  et  $\vec{0} = \overrightarrow{V(O_{23} \in 23/1)} + A_{23} \overrightarrow{O_{23}} \wedge \overrightarrow{\Omega(23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23} \in 1/0)} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} + R \vec{z} \wedge \dot{\theta}_{23} \vec{y} + \dot{x} \vec{x} \Rightarrow 0 = -R \dot{\theta}_{23} + \dot{x}$ .

De même en  $A_4$ ,  $0 = -R\dot{\theta}_4 + \dot{x}$ .

**Question 6** En isolant l'ensemble  $E = 1 + 2 + 3 + 4$ , écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

**Correction**

• On isole  $E$ .

• BAME :

- Pesanteur :  $\{\mathcal{T}(\text{Pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \frac{-(M+3m)g\vec{z}_0}{0} \right\}_{G_E} = \left\{ \frac{-(M+3m)g(\cos\alpha\vec{z} - \sin\alpha\vec{x})}{0} \right\}_{G_E}$ .

- Résistance au roulement :  $\{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_i = \left\{ \begin{matrix} -T_{0i}\vec{x} + N_{0i}\vec{z} \\ -C_r\vec{y} \end{matrix} \right\}_{A_i}$ .

- Traînée :  $\{\mathcal{T}(\text{Trainee} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{matrix} -\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 \vec{x} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{O_{23}}$ .

• La résultante dynamique est donnée par  $(M+3m)\overline{\Gamma(G \in E/0)} = (M+3m)\ddot{x}\vec{x}$ .

• On applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  :

-  $(M+3m)g \sin\alpha - \frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M+3m)\ddot{x}$

-  $-(M+3m)g \cos\alpha + N_{04} + N_{023} = 0$

**Question 7** Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en  $O_{23}$  et  $O_4$  en projection sur  $\vec{y}$ .

**Correction**

• On isole 23.

• BAME :

- 23 est soumis à la pesanteur;

- action de la pivot sans frottement avec le solide 1;

- résistance au roulement :  $\{\mathcal{T}(T \rightarrow 0)\}_{23} = \left\{ \begin{matrix} -T_{023}\vec{x} + N_{023}\vec{z} \\ -N_{023}r\vec{y} \end{matrix} \right\}_{A_{23}} = \left\{ \begin{matrix} -T_{023}\vec{x} + N_{023}\vec{z} \\ (-rN_{023} + RT_{023})\vec{y} \end{matrix} \right\}_{O_{23}}$ .

• Le moment dynamique de  $O_{23}$  centre d'inertie des roues en projection sur  $\vec{y}_0$  s'écrit  $\delta(O_{23}, 23/0)\vec{y}_0 = 2I\ddot{\theta}_{23}$ .

• TMD en  $O_{23}$  en projection sur  $\vec{y}_0$  s'écrit donc  $-rN_{023} + RT_{023} = 2I\ddot{\theta}_{23}$ .

De même pour la roue 4 en ajoutant la sollicitation du couple moteur :  $-rN_{04} + RT_{04} + C_m = I\ddot{\theta}_4$ .

**Question 8** Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur  $C_m$  vaut :

$$C_m = (M+3m)g \cos\alpha r + \left[ \frac{3I}{R} + R(M+3m) \right] \ddot{x} - R(M+3m)g \sin\alpha + \frac{1}{2}R\rho SC_x \dot{x}^2.$$

**Correction**

On a :  $C_m = I\ddot{\theta}_4 + rN_{04} - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} + rN_{04} - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} - rN_{023} + r(M+3m)g \cos\alpha - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} - RT_{023} + 2I\ddot{\theta}_{23} + r(M+3m)g \cos\alpha - RT_{04} = \frac{I}{R}\ddot{x} + \frac{2I}{R}\ddot{x} + r(M+3m)g \cos\alpha - R\left((M+3m)g \sin\alpha - \frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 - (M+3m)\ddot{x}\right)$ .

$$C_m = r(M+3m)g \cos\alpha + \left( \frac{3I}{R} + R(M+3m) \right) \ddot{x} + \left( -R(M+3m)g \sin\alpha + R\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2 \right).$$

CQFD.

**Question 9** Identifier dans l'expression de  $C_m$  les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

**Correction**

$$C_m = \underbrace{(M+3m)gr \cos\alpha}_{\text{Résistance au roulement}} - \underbrace{(M+3m)gR \sin\alpha}_{\text{Couple pour monter la pente}} + \underbrace{\left( \frac{3I}{R} + R(M+3m) \right) \ddot{x}}_{\text{Couple pour vaincre les effets d'inertie}} + \underbrace{R\frac{1}{2}\rho SC_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la traînée}}.$$

**Question 10** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  quand le véhicule a une vitesse constante  $V$  sur une piste horizontale.

**Correction** À vitesse constante sur du plat, on a :

$$C_m = \underbrace{(M+3m)gr}_{\text{Résistance au roulement}} + \underbrace{R \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

**Question 11** Déterminer dans les conditions d'essais le produit  $\frac{1}{2} \rho S C_x$  caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

**Correction** La vitesse constante atteinte sur les graphes est de  $17 \text{ m s}^{-1}$ . Par ailleurs  $\frac{1}{2} \rho S C_x = \frac{C_m - (M+3m)gr}{R \dot{x}^2} = \frac{3,245 - (70 + 3 \cdot 1) \cdot 10 \cdot 0,002}{0,25 \cdot 17^2} = 0,025 \text{ kg m}^{-1}$ .

**Question 12** Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de  $5 \text{ km h}^{-1}$  (on négligera le couple de résistance au roulement).

**Correction**