

Révisions



TD – Révisions de cinématique *

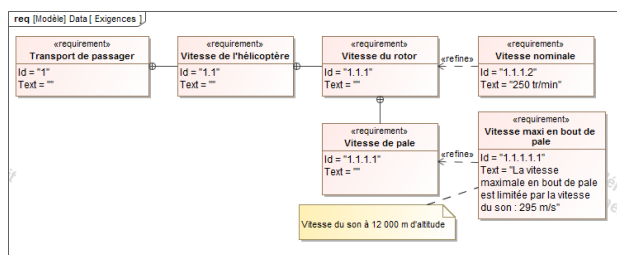
Savoirs et compétences :

Pales d'hélicoptères

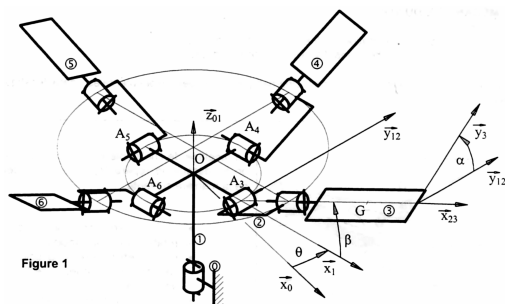
Mise en situation

L'hélicoptère est un giravion dont la sustentation est assurée par un rotor primaire équipé de pales. Un rotor secondaire (ou rotor de queue, lui aussi équipé de pales) permet à l'hélicoptère de ne pas tourner sur lui-même. Ces rotors sont entraînés par une ou deux turbines suivant les hélicoptères, par l'intermédiaire d'une boîte de vitesse.

En vol, les rotors tournent à une vitesse de rotation fixe. La modification de l'inclinaison des pales permet à elle seule une accélération, un décélération, un changement d'altitude ou de direction de l'hélicoptère.



Cinématique analytique



Le fuselage de l'hélicoptère est repéré par S_0 et on lui associe le repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_{01})$ défini de la manière suivante :

- (O, \vec{z}_{01}) correspond à l'axe de rotation du rotor principal;
- (O, \vec{x}_0) définit l'axe longitudinal de l'appareil et est orienté de l'arrière vers l'avant;
- (O, \vec{y}_0) définit l'axe transversal.

Ce rotor est constitué de :

- un moyeu central S_1 associé au repère $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_{12}, \vec{z}_{01})$ qui est entraîné par la boîte de vitesse (non représentée ici) ;
- quatre pales S_3, S_4, S_5 et S_6 . On associe le repère $\mathcal{R}_3(A_3, \vec{x}_{23}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ à la pale S_3 ;
- quatre pieds de pales identiques reliant les pales au moyeu. On associe le repère $\mathcal{R}_2(A_3, \vec{x}_{23}, \vec{y}_{12}, \vec{z}_2)$ au pied de pale S_2 .

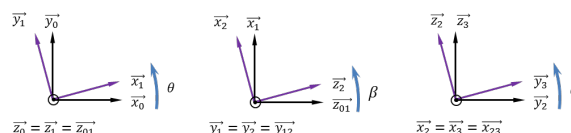
NB : Si les repères \mathcal{R}_i et \mathcal{R}_j ont un vecteur de base commun (par exemple $\vec{x}_i = \vec{x}_j$), celui-ci est noté \vec{x}_{ij} .

Le mouvement de S_1/S_0 est une rotation d'axe (O, \vec{z}_{01}) . On pose θ l'angle de rotation du rotor : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.

Le mouvement de S_2/S_1 est une rotation d'axe (A_3, \vec{y}_{12}) . On pose β l'angle de battement : $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_{23})$.

Le mouvement de S_3/S_2 est une rotation d'axe (A_3, \vec{x}_{23}) . On pose α l'angle de pas : $\alpha = (\vec{y}_{12}, \vec{y}_3)$.

On pose $\vec{OA}_3 = r \cdot \vec{x}_1$ et $\vec{A}_3G = a \cdot \vec{x}_{23}$ où G est le centre de gravité de la pale 3 (r et a constants). On suppose que tous les solides sont indéformables.



Question 1 Déterminer le vecteur $\vec{V}(G \in S_3/S_2)$.

Question 2 Déterminer le vecteur $\vec{V}(G \in S_2/S_1)$.

Question 3 Déterminer le vecteur $\vec{V}(G \in S_1/S_0)$.

Question 4 Déduire des questions précédentes le torseur $\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\}$ au point G .

On pose maintenant $\vec{V}(G \in S_3/S_0) = (a \cdot \cos \beta + r) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_{12} - a \dot{\beta} \vec{z}_2$.

Question 5 Exprimer l'accélération $\vec{\Gamma}(G \in S_3/S_0)$.

Question 6 La longueur des pales est, entre autre, limitée par la vitesse du son en bout de pale (Exigence 1.1.1.1.1). Pour $\beta = 0$, calculer la longueur maximale de la pale pour ne pas dépasser la vitesse du son. La vitesse du rotor est de 250 tr min^{-1} .

Système de coffre motorisé

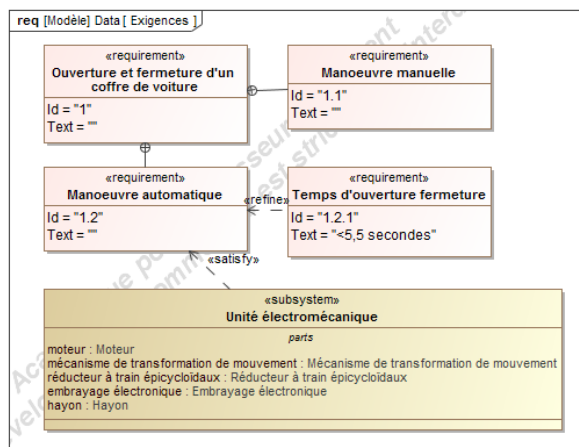
D'après le concours Centrale – Supélec 2007.



Depuis 2005, un coffre motorisé est proposé en option sur l'Audi A6. La motorisation du hayon permet l'ouverture ou la fermeture automatique du coffre. L'ouverture s'effectue soit à l'aide de la télécommande, soit par action sur une touche située à proximité du conducteur, soit par action sur une touche située sur la poignée du hayon. La fermeture s'effectue par action sur une touche située sur la face interne du hayon.

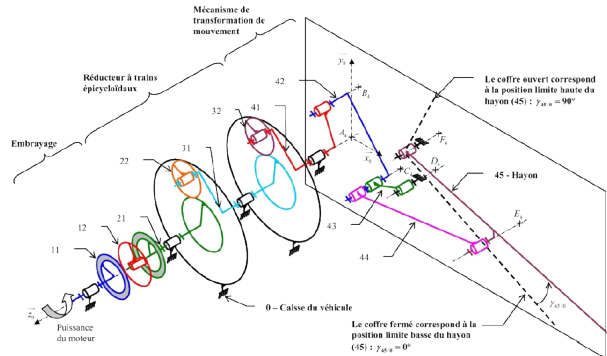
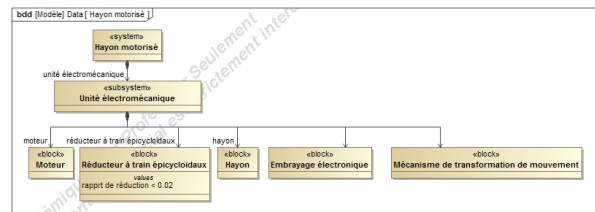
- Objectif**
- Vérifier le rapport de réduction du train épicycloïdal.
 - Déterminer la loi Entrée – Sortie du système 4 barres.

L'utilisateur a la possibilité de programmer l'angle d'ouverture du hayon pour éviter par exemple qu'il ne heurte le plafond du garage. L'utilisateur conserve naturellement la possibilité de manœuvrer manuellement le hayon. Ce système dispose également de détecteurs d'obstacles. En position fermée, le système doit assurer le blocage du hayon avec la caisse du véhicule.



La chaîne d'énergie du système est constituée :

- d'un moteur à courant continu;
- d'un embrayage électromagnétique;
- d'un double train épicycloïdal
- d'un mécanisme de transformation de mouvement de type 4 barres;
- de l'effecteur à savoir le hayon 45 du coffre.



Étude du train épicycloïdal

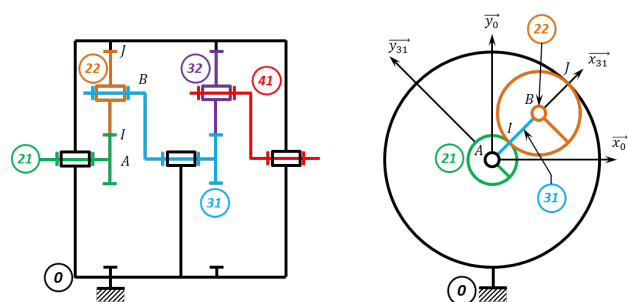
On donne le schéma cinématique du double train épicycloïdal.

Le premier train est constitué :

- du planétaire **21**. On note $\overrightarrow{\Omega}(21/0) = \omega(21/0)\vec{z}_0$ et $\|\vec{IA}\| = R_{21}$;
- du satellite **22**. On note $\overrightarrow{\Omega}(22/31) = \omega(22/31)\vec{z}_0$ et $\|\vec{IB}\| = R_{22}$;
- du porte-satellite **31**. On note $\overrightarrow{\Omega}(31/0) = \omega(31/0)\vec{z}_0$;
- de la couronne **0**. On note $\|\vec{AJ}\| = R_0$;

Le second train est constitué :

- du planétaire **21**;
- du satellite **32**;
- du porte-satellite **41**;
- de la couronne **0**.

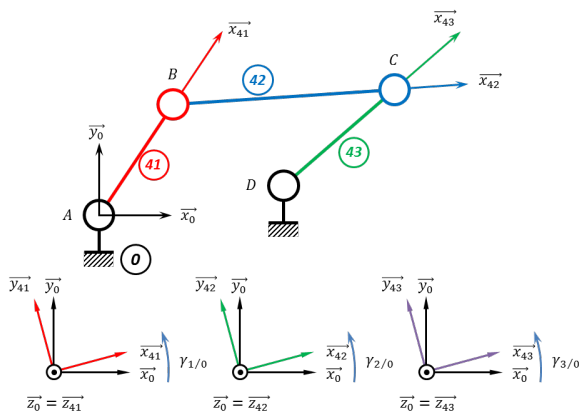


Question 7 Déterminer le rapport de réduction $\frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)}$.

Question 8 Déterminer le rapport de réduction $\frac{\omega(41/0)}{\omega(31/0)}$.

Question 9 En déduire le rapport de réduction du double train épicycloïdal. Puis faire l'application numérique. On donne $Z_{21} = 13$ et $Z_{22} = 81$. Le rapport de réduction est-il compatible avec celui du diagramme de blocs ?

Étude du mécanisme de transformation de mouvement



On donne :

- $\overrightarrow{AB} = L_1 \overrightarrow{x_{41}}$;
- $\overrightarrow{BC} = L_2 \overrightarrow{x_{42}}$;
- $\overrightarrow{DC} = L_3 \overrightarrow{x_{43}}$;
- $\overrightarrow{AD} = a \overrightarrow{x_0} + b \overrightarrow{y_0}$.

Question 10 Établir une relation géométrique entre γ_1 et γ_3 . Cette relation pourra faire intervenir les différents paramètres constants (a , b , L_1 , L_2 , L_3). On ne devra pas voir apparaître γ_2 .

Révisions – Corrigé



TD – Révisions de cinématique ★

Savoirs et compétences :

Pales d'hélicoptères

Mise en situation

Cinématique analytique

Question 1 Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_2)}$.

Correction On a :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)} = \dot{\alpha} \overrightarrow{x_{23}} \\ \overrightarrow{V(A_3 \in S_3/S_2)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{A_3}$$

$$\text{Par ailleurs, } \overrightarrow{V(G \in S_3/S_2)} = \underbrace{\overrightarrow{V(A_3 \in S_3/S_2)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GA_3} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)} = -a \overrightarrow{x_{23}} \wedge \dot{\alpha} \overrightarrow{x_{23}} = \overrightarrow{0}.$$

Au final,

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)} = \dot{\alpha} \overrightarrow{x_{23}} \\ \overrightarrow{V(G \in S_3/S_2)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$$

Question 2 Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)}$.

Correction On a :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \dot{\beta} \overrightarrow{y_{12}} \\ \overrightarrow{V(A_3 \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{A_3}$$

$$\text{Par ailleurs, } \overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)} = \underbrace{\overrightarrow{V(A_3 \in S_2/S_1)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GA_3} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = -a \overrightarrow{x_{23}} \wedge \dot{\beta} \overrightarrow{y_{12}} = -a \dot{\beta} \overrightarrow{z_2}$$

Au final,

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \dot{\beta} \overrightarrow{y_{12}} \\ \overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)} = -a \dot{\beta} \overrightarrow{z_2} \end{array} \right\}_G$$

Question 3 Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)}$.

Correction On a :

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} \\ \overrightarrow{V(O \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

$$\text{Par ailleurs, } \overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)} = \underbrace{\overrightarrow{V(O \in S_1/S_0)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = (-a \overrightarrow{x_{23}} - r \overrightarrow{x_1}) \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} = a \dot{\theta} \cos \beta \overrightarrow{y_{12}} + r \dot{\theta} \overrightarrow{y_{12}}$$

Au final,

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_{01}} \\ \overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)} = \dot{\theta} (a \cos \beta + r) \overrightarrow{y_{12}} \end{array} \right\}_G$$

Question 4 Déduire des questions précédentes le torseur $\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\}$ au point G.

Correction Par composition du torseur cinématique on a :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\} = \{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} + \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} + \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

Tous les torseurs ayant déjà été exprimés au même point, on a :

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_{01} + \dot{\alpha} \vec{x}_{23} + \dot{\beta} \vec{y}_{12} \\ \overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)} = \dot{\theta} (a \cos \beta + r) \vec{y}_{12} - a \dot{\beta} \vec{z}_2 \end{array} \right\}_G$$

On pose maintenant $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)} = (a \cdot \cos \beta + r) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_{12} - a \dot{\beta} \vec{z}_2$.

On pose maintenant $\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)} = (a \cdot \cos \beta + r) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_{12} - a \dot{\beta} \vec{z}_2$.

Question 5 Exprimer l'accélération $\overrightarrow{\Gamma(G \in S_3/S_0)}$.

Correction Par définition,

$$\overrightarrow{\Gamma(G \in S_3/S_0)} = \left[\frac{\overrightarrow{V(G \in S_3/S_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Il est donc nécessaire de dériver \vec{y}_{12} et \vec{z}_2 :

$$\left[\frac{d\vec{y}_{12}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\vec{y}_{12}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \vec{y}_{12} = \dot{\theta} \vec{z}_{01} \wedge \vec{y}_{12} = -\dot{\theta} \vec{x}_1$$

$$\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta} \vec{z}_{01} + \dot{\beta} \vec{y}_{12}) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta} \sin \beta \vec{y}_1 + \dot{\beta} \vec{x}_2$$

Au final :

$$\overrightarrow{\Gamma(G \in S_3/S_0)} = -a \dot{\beta} \sin \beta \dot{\theta} \vec{y}_{12} + (a \cos \beta + r) \ddot{\theta} \vec{y}_{12} - (a \cos \beta + r) \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 - a \ddot{\beta} \vec{z}_2 - a \dot{\beta} (\dot{\theta} \sin \beta \vec{y}_1 + \dot{\beta} \vec{x}_2)$$

Question 6 La longueur des pales est, entre autre, limitée par la vitesse du son en bout de pale (Exigence 1.1.1.1.1). Pour $\beta = 0$, calculer la longueur maximale de la pale pour ne pas dépasser la vitesse du son. La vitesse du rotor est de 250 tr min^{-1} .

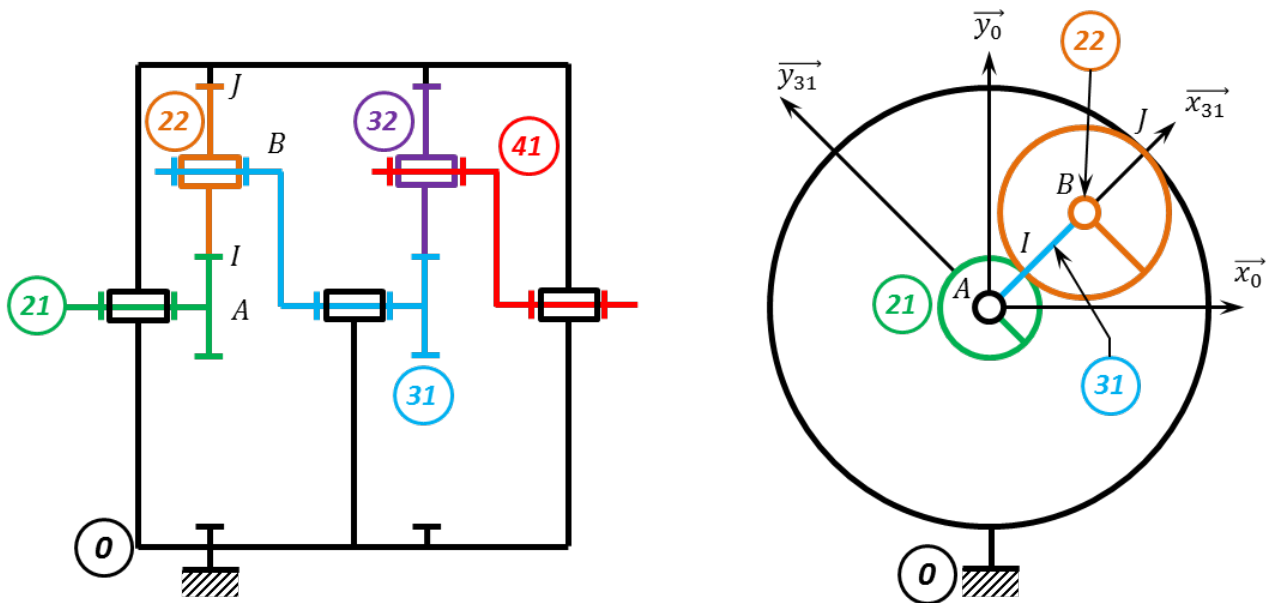
Correction Lorsque $\beta = 0$ la vitesse en bout de pale est donnée par $L \dot{\theta}$. $\dot{\theta} = 250 \text{ tr/min} = \frac{250 \cdot 2\pi}{60} \text{ rad/s} = 26,18 \text{ rad/s}$ On a donc :

$$L = \frac{295,1}{26,18} = 11,2 \text{ m}$$

Système de coffre motorisé

D'après le concours Centrale – Supélec 2007.

Étude du train épicycloïdal



Question 7 Déterminer le rapport de réduction $\frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)}$.

Correction On bloque le porte-satellite 31 et on libère le bâti. On a $\frac{\omega(0/31)}{\omega(21/31)} = -\frac{Z_{21}}{Z_0}$.
On cherche $\frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)}$; donc $\frac{\omega(31/0)}{\omega(21/31)} = \frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0) + \omega(0/31)} = \frac{Z_{21}}{Z_0} \Leftrightarrow \omega(31/0) = \frac{Z_{21}}{Z_0} \omega(21/0) - \frac{Z_{21}}{Z_0} \omega(31/0)$
 $\Leftrightarrow \omega(31/0) \left(1 + \frac{Z_{21}}{Z_0}\right) = \frac{Z_{21}}{Z_0} \omega(21/0) \Leftrightarrow \frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)} = \frac{\frac{Z_{21}}{Z_0}}{1 + \frac{Z_{21}}{Z_0}} = \frac{Z_{21}}{Z_0 + Z_{21}}$

Question 8 Déterminer le rapport de réduction $\frac{\omega(41/0)}{\omega(31/0)}$.

Correction Par analogie, $\frac{\omega(41/0)}{\omega(31/0)} = \frac{Z_{31}}{Z_0 + Z_{31}}$

Question 9 En déduire le rapport de réduction du double train épicycloïdal. Puis faire l'application numérique. On donne $Z_{21} = 13$ et $Z_{22} = 81$. Le rapport de réduction est-il compatible avec celui du diagramme de blocs?

Correction Le rapport de réduction du réducteur s'exprime par : $\frac{Z_{21}}{Z_0 + Z_{21}} \frac{Z_{31}}{Z_0 + Z_{31}}$. Si les deux trains ont les mêmes caractéristiques, on a $\left(\frac{Z_{21}}{Z_0 + Z_{21}}\right)^2$. En exprimant les conditions de fonctionnement, on a : $R_{21} + 2R_{22} = R_0 \Leftrightarrow Z_{21} + 2Z_{22} = Z_0$.
On a : alors

$$\left(\frac{Z_{21}}{2Z_{21} + 2Z_{22}}\right)^2 = 0,0047$$

Étude du mécanisme de transformation de mouvement

Question 10 Établir une relation géométrique entre γ_1 et γ_3 . Cette relation pourra faire intervenir les différents paramètres constants (a , b , L_1 , L_2 , L_3). On ne devra pas voir apparaître γ_2 .

Correction En écrivant la fermeture de chaîne géométrique, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow L_1 \overrightarrow{x_{41}} + L_2 \overrightarrow{x_{42}} - L_3 \overrightarrow{x_{43}} - a \overrightarrow{x_0} - b \overrightarrow{y_0} &= \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow L_1 (\cos \gamma_1 \overrightarrow{x_0} + \sin \gamma_1 \overrightarrow{y_0}) + L_2 (\cos \gamma_2 \overrightarrow{x_0} + \sin \gamma_2 \overrightarrow{y_0}) - L_3 (\cos \gamma_3 \overrightarrow{x_0} + \sin \gamma_3 \overrightarrow{y_0}) - a \overrightarrow{x_0} - b \overrightarrow{y_0} &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

En projetant respectivement cette expression sur $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$, on a :

$$\begin{cases} L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos \gamma_2 - L_3 \cos \gamma_3 - a = 0 \\ L_1 \sin \gamma_1 + L_2 \sin \gamma_2 - L_3 \sin \gamma_3 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \cos \gamma_2 = L_3 \cos \gamma_3 - L_1 \cos \gamma_1 + a \\ L_2 \sin \gamma_2 = L_3 \sin \gamma_3 - L_1 \sin \gamma_1 + b \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}L_2^2 &= (L_3 \cos \gamma_3 - L_1 \cos \gamma_1 + a)^2 + (L_3 \sin \gamma_3 - L_1 \sin \gamma_1 + b)^2 \\ L_2^2 &= L_3^2 \cos^2 \gamma_3 + L_1^2 \cos^2 \gamma_1 + a^2 \\ &\quad - 2L_3 L_1 \cos \gamma_3 \cos \gamma_1 + 2b L_3 \cos \gamma_3 - 2b L_1 \cos \gamma_1 \\ &\quad + L_3^2 \sin^2 \gamma_3 + L_1^2 \sin^2 \gamma_1 + b^2 \\ &\quad - 2L_3 L_1 \sin \gamma_3 \sin \gamma_1 + 2b L_3 \sin \gamma_3 - 2b L_1 \sin \gamma_1 \\ &= L_3^2 + L_1^2 + a^2 + b^2 - 2L_3 L_1 (\cos \gamma_3 \cos \gamma_1 + \sin \gamma_3 \sin \gamma_1) \\ &\quad + 2b L_3 (\cos \gamma_3 + \sin \gamma_3) - 2b L_1 (\cos \gamma_1 + \sin \gamma_1)\end{aligned}$$