Application 02

Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

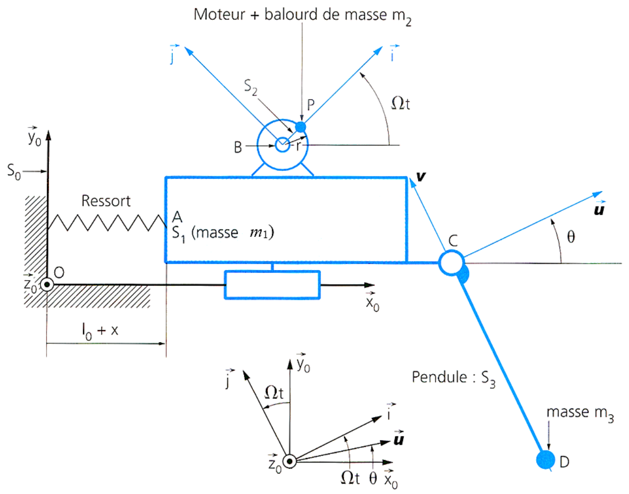
Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide S_1, de masse m_1 en liaison glissière parfaite avec un support S_0, fixe par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$ supposé galiléen.

Le solide S_1 est rappelé par un ressort de longueur libre l_0 et de raideur k. Une masse ponctuelle m_2 excentrée, placée en P, tourne sur un rayon r et est entraînée à vitesse constante Ω. Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur S_2.

Un pendule simple de longueur L, porte à son extrémité D une masse concentrée m_3, l'ensemble constitue le solide S_3, en liaison pivot parfaite d'axe $\left(C,\overrightarrow{z_0}\right)$ avec S_1.

Les masses autres que m_1, m_2 et m_3 sont négligées.



Objectif Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

Question 1 *Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x, θ et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.*

On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre $(x_0,\theta_0)=(0,0)$ en supposant que x, θ, $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

Question 2 *Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.*

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme $x(t)=A\cos(\Omega t)$ et $\theta(t)=B\cos(\Omega t)$.

Question 3 *Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B.*

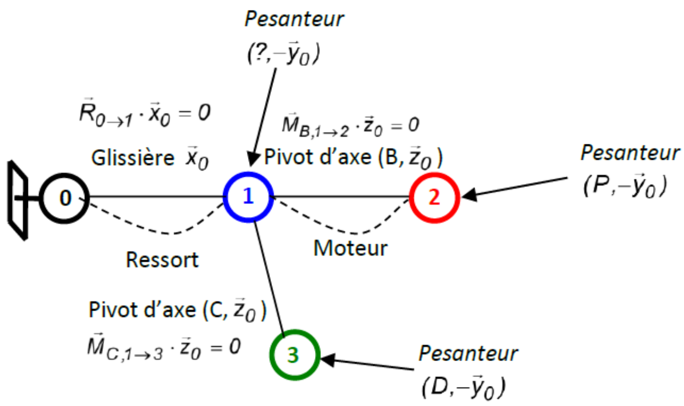
Question 4 *Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t)=0$ en régime forcé.*

Éléments de correction

1. $(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+kx+m_3L\ddot{\theta}\cos\theta-m_3L\dot{\theta}^2\sin\theta=m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)$ et $\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$.
2. $(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+kx+m_3L\ddot{\theta}=m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)$ et $\ddot{x}+L\ddot{\theta}+g\theta=0$.
3. $A=\dfrac{m_2r\Omega^2\left(-L\Omega^2+g\right)}{\left[-(m_1+m_2+m_3)\Omega^2+k\right]\left(-L\Omega^2+g\right)-m_3L\Omega^4}$ et $B=\dfrac{m_2r\Omega^2}{\left[-(m_1+m_2+m_3)\Omega^2+k\right]\left(-L\Omega^2+g\right)-m_3L\Omega^4}$.
4. $L=\dfrac{g}{\Omega^2}$.

1. Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x, θ , leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède trois degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver trois équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée : $\Omega = cte$. Reste à déterminer $\theta(t)$ et $x(t)$.

On isole Σ =1+2+3.
Le théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ en projection sur $\vec{x}_0$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{R}_{d\,\Sigma/0}\cdot\vec{x}_0 = \vec{R}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\cdot\vec{x}_0}$$

On isole 3.
Le théorème du moment dynamique appliqué à 3 au point C et en projection sur $\vec{z}_0$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 3 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0 = \vec{M}_{C,\overline{3}\to 3}\cdot\vec{z}_0}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{R}_{\overline{(1+2+3)}\to(1+2+3)}\cdot\vec{x}_0$:

$$\left\{T_{0\to 1}\right\} = \underset{\forall P}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{0\to 1} \\ \vec{M}_{P,0\to 1} \end{Bmatrix}} \quad avec \quad \vec{R}_{0\to 1}\cdot\vec{x}_0 = 0 \qquad \left\{T_{0\xrightarrow{ressort}1}\right\} = \underset{\forall P\in(A,\vec{x}_0)}{\begin{Bmatrix} -kx\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

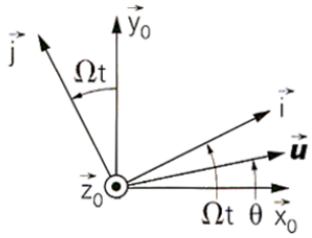
$$\left\{T_{pes\to 1}\right\} = \underset{\forall P\in(G_1,\vec{y}_0)}{\begin{Bmatrix} -m_1 g\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \qquad \left\{T_{pes\to 2}\right\} = \underset{\forall P\in(G_2,\vec{y}_0)}{\begin{Bmatrix} -m_2 g\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \qquad \left\{T_{pes\to 3}\right\} = \underset{\forall P\in(G_3,\vec{y}_0)}{\begin{Bmatrix} -m_3 g\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

$$\vec{R}_{\overline{(1+2+3)}\to(1+2+3)}\cdot\vec{x}_0 = -kx$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0}\cdot\vec{x}_0$:

$$\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0}\cdot\vec{x}_0=\sum_{i=1}^{3} m_i\vec{\Gamma}_{G_i\in i/0}\cdot\vec{x}_0$$

Soit $\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0}\cdot\vec{x}_0=m_1\vec{\Gamma}_{G_1\in1/0}\cdot\vec{x}_0+m_2\vec{\Gamma}_{G_2\in2/0}\cdot\vec{x}_0+m_3\vec{\Gamma}_{G_3\in3/0}\cdot\vec{x}_0$



$$\vec{V}_{G_1\in1/0}=\dot{x}\vec{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_1\in1/0}=\ddot{x}\vec{x}_0}$$

$$\vec{V}_{G_2\in2/1}=\cancel{\vec{V}_{B\in2/1}}+\overrightarrow{G_2B}\wedge\vec{\Omega}_{2/1}=-r\vec{i}\wedge\Omega\vec{z}_0=r\Omega\vec{j}$$

$$\vec{V}_{G_2\in2/0}=\vec{V}_{G_2\in2/1}+\vec{V}_{G_2\in1/0}=r\Omega\vec{j}+\dot{x}\vec{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_2\in2/0}=\ddot{x}\vec{x}_0-r\Omega^2\vec{i}} \quad \text{car } \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_0=\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\vec{j}=\Omega\vec{z}_0\wedge\vec{j}=-\Omega\vec{i}$$

$$\vec{V}_{G_3\in3/1}=\cancel{\vec{V}_{C\in3/1}}+\overrightarrow{G_3C}\wedge\vec{\Omega}_{3/1}=L\vec{v}\wedge\dot{\theta}\vec{z}_0=L\dot{\theta}\vec{u}$$

$$\vec{V}_{G_3\in3/0}=\vec{V}_{G_3\in3/1}+\vec{V}_{G_3\in1/0}=L\dot{\theta}\vec{u}+\dot{x}\vec{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_3\in3/0}=\ddot{x}\vec{x}_0+L\ddot{\theta}\vec{u}+L\dot{\theta}^2\vec{v}} \quad \text{car } \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_0=\vec{\Omega}_{3/0}\wedge\vec{u}=\dot{\theta}\vec{z}_0\wedge\vec{u}=\dot{\theta}\vec{v}$$

Théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ=S1 + S2 + S3 en projection sur $\vec{x}_0$: $\vec{R}_{d\,\Sigma/0}\cdot\vec{x}_0=\vec{R}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\cdot\vec{x}_0$

$$-kx=m_1\ddot{x}+m_2\left(\ddot{x}-r\Omega^2\cos(\Omega t)\right)+m_3\left(\ddot{x}+L\ddot{\theta}\cos\theta-L\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

$$\boxed{(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+kx+m_3L\ddot{\theta}\cos\theta-m_3L\dot{\theta}^2\sin\theta=m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{C,\bar{3}\to3}\cdot\vec{z}_0$:

$$\{T_{2\to3}\}=\underset{\forall P\in(C,\vec{z}_0)}{\begin{cases}\vec{R}_{2\to3}\\ \vec{M}_{P,2\to3}\end{cases}} \text{ avec } \vec{M}_{P,2\to3}\cdot\vec{z}_0=0 \qquad \{T_{pes\to3}\}=\underset{\forall P\in(G_3,\vec{y}_0)}{\begin{cases}-m_3g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{cases}}$$

$$\vec{M}_{C,pes\to3}\cdot\vec{z}_0=\left(\cancel{\vec{M}_{G_3,pes\to3}}+\overrightarrow{CG_3}\wedge -m_3g\vec{y}_0\right)\cdot\vec{z}_0=\left[-L\vec{v}\wedge -m_3g\vec{y}_0\right]\cdot\vec{z}_0=-m_3gL\sin\theta$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0$:

$\vec{\delta}_{G_3,3/0}=\vec{0}$ (masse ponctuelle)

$$\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0=\left[\vec{\delta}_{G_3,3/0}+\overrightarrow{CG_3}\wedge\vec{R}_{d\,3/0}\right]\cdot\vec{z}_0=\left[-L\vec{v}\wedge m_3\vec{\Gamma}_{G_3\in3/0}\right]\cdot\vec{z}_0=-m_3L[\vec{z}_0\wedge\vec{v}]\cdot\vec{\Gamma}_{G_3\in3/0}=m_3L\vec{u}\cdot\vec{\Gamma}_{G_3\in3/0}=m_3L\left[\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}\right]$$

Théorème du moment dynamique appliqué à $S3$ au point C et en projection sur $\vec{z}_0$: $\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0=\vec{M}_{C,\bar{3}\to3}\cdot\vec{z}_0$

$$-m_3gL\sin\theta=m_3L\left[\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}\right] \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}+g\sin\theta=0}$$

2. Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

En considérant que $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de la position d'équilibre $(x_0, \theta_0) = (0,0)$,

et que le développement limité de $f(x)$ à l'ordre n en a est $f(x+a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}x^n$, on a :

ordre 0 : $\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$ ordre 1 : $\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = \theta \end{cases}$ ordre 2 : $\begin{cases} \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin\theta = \theta \end{cases}$ ordre 3 : $\begin{cases} \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} \\ \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} \end{cases}$

et $\dot{\theta}^2 \approx 0$

Donc : $\boxed{(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3 L\ddot{\theta} = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)}$ et $\boxed{\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0}$

3. Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B.

En posant $x(t) = A\cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B\cos(\Omega t)$, on a : $\ddot{x}(t) = -A\Omega^2\cos(\Omega t)$ et $\ddot{\theta}(t) = -B\Omega^2\cos(\Omega t)$

Les deux équations obtenues précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2 + m_3)A\Omega^2\cos(\Omega t) + kA\cos(\Omega t) - m_3 LB\Omega^2\cos(\Omega t) = m_2 r\Omega^2\cos(\Omega t) \\ -A\Omega^2\cos(\Omega t) - LB\Omega^2\cos(\Omega t) + gB\cos(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit à : $\begin{cases} \left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]A - m_3 L\Omega^2 B = m_2 r\Omega^2 \\ -A\Omega^2 + \left(-L\Omega^2 + g\right)B = 0 \end{cases}$

Soit :

$$\boxed{A = \frac{m_2 r\Omega^2\left(-L\Omega^2 + g\right)}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}}$$

$$\boxed{B = \frac{m_2 r\Omega^4}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}}$$

4. Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t) = 0$ en régime forcé.

On a $x(t) = 0$ en régime forcé, si $A = 0$.

Ce qui implique que : $A = \frac{m_2 r\Omega^2\left(-L\Omega^2 + g\right)}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}$ Soit : $\boxed{L = \frac{g}{\Omega^2}}$

Dans ce cas $B = \frac{-m_2 r}{m_3 L}$ et $\theta(t) = B\cos(\Omega t) = \frac{-m_2 r}{m_3 L}\cos(\Omega t)$