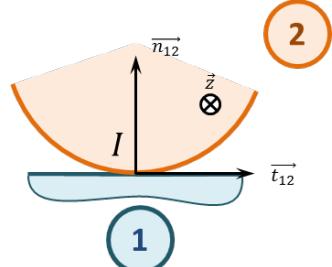


1 Modélisation du contact ponctuel entre 2 pièces

1.1 Torseur des actions mécaniques

Considérons le contact ponctuel ponctuel entre deux pièces **1** et **2**. En considérant la liaison parfaite, le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 s'écrit sous la forme suivante : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{12} \vec{n}_{12} \\ 0 \end{array} \right\}_I$, en notant \vec{n}_{12} le vecteur normal au contact orienté de 1 vers 2. En considérant que la liaison n'est pas parfaite, plusieurs situation peuvent se présenter.

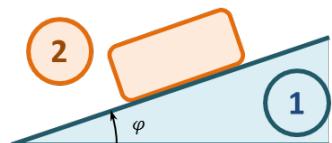


- Si on considère qu'un effort tant à faire translater 2 suivant \vec{t}_{12} , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12} \vec{n}_{12} + T_{12} \vec{t}_{12} \\ 0 \end{array} \right\}_I$.
- Si on considère qu'un effort tant à faire rouler 2 autour de \vec{z}_{12} , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12} \vec{n}_{12} \\ M_{r12} \vec{z} \end{array} \right\}_I$ avec M_{r12} moment de résistance au roulement.
- Si on considère qu'un effort tant à faire pivoter 2 autour de \vec{n}_{12} , le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 peut alors s'écrire sous la forme $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12} \vec{n}_{12} \\ M_{p12} \vec{n}_{12} \end{array} \right\}_I$ avec M_{p12} moment de résistance au pivotement.

R Il est possible de modéliser l'ensemble des composantes dues au frottement dans un même torseur. On fait l'hypothèse ici d'un problème plan, mais il peut aisément être adapté à un modèle 3D.

1.2 Facteur de glissement et d'adhérence

Considérons la pièce 2 sur un plan incliné 1. Notons φ_a l'angle à partir duquel la pièce 2 se met à glisser sur le plan. On appelle $f_a = \tan \varphi_a$ le facteur d'adhérence. On constate expérimentalement qu'une fois la pièce est en mouvement, si on diminue l'angle φ , la pièce continue à glisser, jusqu'à un angle φ_g . On appelle $f_g = \tan \varphi_g$ le facteur de glissement.

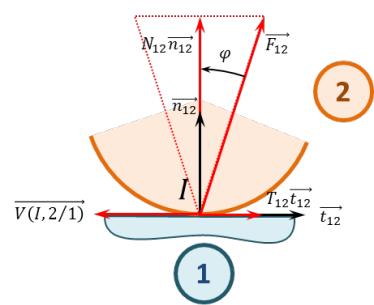


Ces facteurs sont sans unité. Ils dépendent de la nature des matériaux en contact ainsi que de la nature des surfaces de contact (et d'un lubrifiant éventuel). Ils sont indépendants de l'effort de 2 sur 1. Ces deux facteurs étant relativement proches, on fera l'hypothèse que $f = f_1 = f_2$.

1.3 Modélisation de l'adhérence et du glissement – Lois de Coulomb

Cas 1 – Glissement – $\overline{V(I \in 2/1)} \neq \vec{0}$ **Cas 2 – Adhérence** – $\overline{V(I \in 2/1)} = \vec{0}$

- Connaissant le sens et la direction de $\overline{V(I \in 2/1)}$, alors \vec{t}_{12} s'oppose à $\overline{V(I \in 2/1)}$.
- $|T_{12}| = f |N_{12}|$.
- La vecteur vitesse appartenant au plan tangent au contact, on dit que l'effort résultant ($\vec{F}_{12} = N_{12} \vec{n}_{12} + T_{12} \vec{t}_{12}$) est sur le cône de frottement.
- La direction de \vec{t}_{12} n'est pas connue.
- $|T_{12}| \leq f |N_{12}|$.
- La direction \vec{t}_{12} n'étant pas connue, on dit que l'effort résultant ($\vec{F}_{12} = N_{12} \vec{n}_{12} + T_{12} \vec{t}_{12}$) appartient au cône d'adhérence.



R En considérant que la direction du vecteur vitesse peut décrire le plan tangent au contact, la résultante des efforts \vec{F}_{12} décrit alors un cône. On parle donc de cône d'adhérence.

1.4 Modélisation de la résistance au roulement et au pivotement

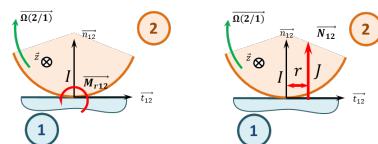
Modélisation de la résistance au roulement

- Le moment de résistance au roulement $\overrightarrow{M_{r12}}$ s'oppose à $\overrightarrow{\Omega(2/1)} \cdot \vec{z}$.
- On note r le coefficient de résistance au roulement ([m]) et on a $\|\overrightarrow{M_{r12}}\| = r \|\overrightarrow{N_{12}}\|$.

Modélisation de la résistance au pivotement

- Le moment de résistance au pivotement $\overrightarrow{M_{p12}}$ s'oppose à $\overrightarrow{\Omega(2/1)} \cdot \vec{n}_{12}$.
- On note p le coefficient de résistance au pivotement ([m]) et on a $\|\overrightarrow{M_{p12}}\| = p \|\overrightarrow{N_{12}}\|$.

Ainsi pour modéliser la résistance au roulement, on peut faire l'hypothèse que l'action normale de 1 sur 2 est « avancée » de r par rapport au point I .



2 Modélisation locale des actions mécaniques

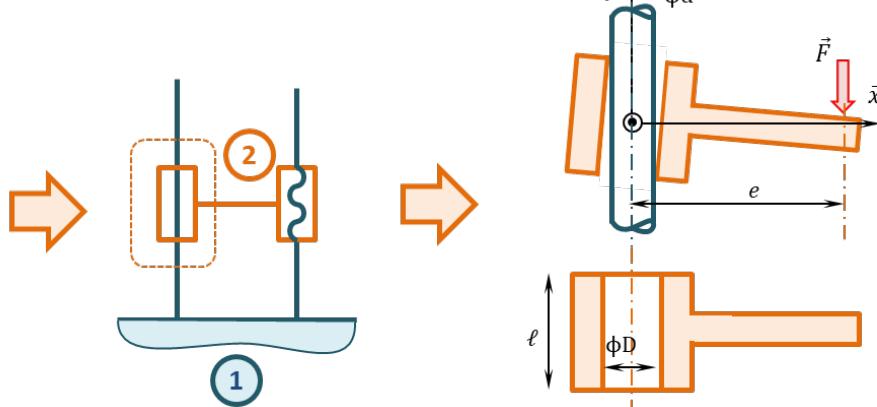
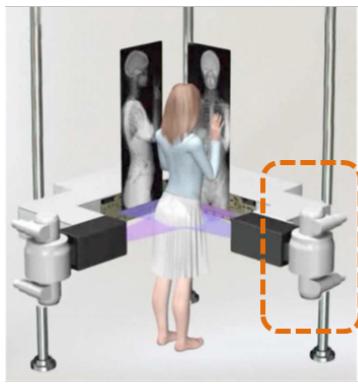
Définition Localement, les actions mécaniques dans un contact ponctuel avec frottement peuvent être modélisées par le torseur suivant : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1 \rightarrow 2)}} = \iint_{\mathcal{S}} f(M) \overrightarrow{u(M)} d\mathcal{S} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, 1 \rightarrow 2)} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{PM} \wedge d\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M$.

La densité surfacique d'effort peut alors se décomposer sur le vecteur normal au contact et sur un vecteur appartenant au plan tangent au contact. On a alors $\overrightarrow{f(M)u(M)} = p_{12}(M) \overrightarrow{n_{12}} + \overrightarrow{\tau_{12}(M)}$. Dans le cas du glissement : $\|\overrightarrow{\tau_{12}(M)}\| = p_{12} \cdot f$. En notant :

- $p_{12}(M)$ pression de contact au point M (en Nm^{-2});
- $\overrightarrow{\tau_{12}(M)}$ la projection tangentielle de la densité surfacique (norme en Nm^{-2});
- f facteur de frottement.

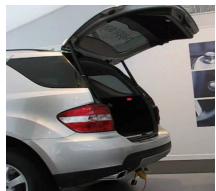
3 Résolution des problèmes d'arc-boutement

L'arc-boutement est un phénomène de blocage d'une liaison (souvent glissière ou pivot glissant). Ce phénomène est causé d'une part par le frottement dans une liaison et d'autre part par le jeu existant entre les deux pièces en mouvement. En effet, le jeu dans la liaison autorise une légère rotation de la pièce mâle, modifiant les zones de contact. Le frottement dans ces zones de contact conduit à l'arc-boutement.



On commence donc par modéliser le contact par des liaisons ponctuelles avec frottement. L'écriture du PFS et l'utilisation du modèle de Coulomb permet de déterminer des conditions géométriques à la limite du coincement. (Pour cela, on fait l'hypothèse qu'on est à la limite du glissement en un point (égalité) et dans le cône d'adhérence à l'autre point inégalité.)

TD 01



Modélisation d'un hayon de coffre électrique

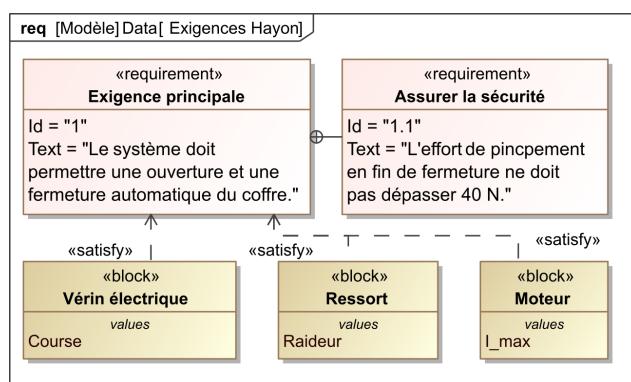
Concours Centrale Supelec TSI 2013

Savoirs et compétences :

Mise en situation

Le PCS (Power Closure System), conçu par Valéo, est un système d'ouverture et de fermeture automatique de hayon de coffre automobile. Le système étant symétrique, les deux vérins sont ramenées dans le plan d'évolution de la porte de coffre et leur action mécanique s'exerçant sur la porte de coffre est supposée identique.

On donne un diagramme d'exigence partiel du système étudié.



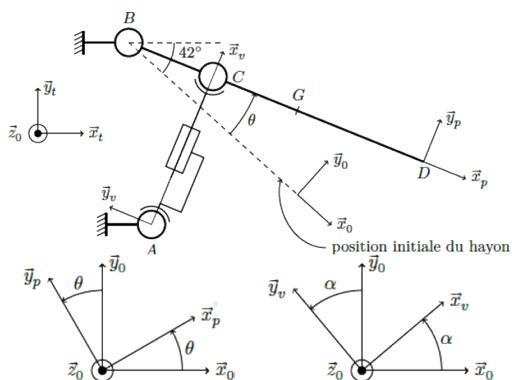
Objectif

- Déterminer les caractéristiques du vérin répondant au cahier des charges : longueur du vérin en position coffre ouvert et coffre fermé, course du vérin, raideur du ressort équipant le vérin.
- Déterminer le couple moteur maximal nécessaire pour le maintien en position du hayon.
- Déterminer le courant de pincement afin que l'effort de pincement soit inférieur à 40 N pendant 10 ms.

Le repère $(B; \vec{x}_t, \vec{y}_t, \vec{z}_0)$ est lié à la Terre. L'accélération de la pesanteur s'écrit $\vec{g} = -g \vec{y}_t$ avec $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. La structure du véhicule et la porte de coffre sont en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) .

Le repère $(B; \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_0)$ est lié à la porte de coffre S_1 de masse $M = 30 \text{ kg}$. Le repère $(B; \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_0)$ est lié au corps du vérin. La sortie de tige par rapport au corps du vérin S_3 se fait dans la direction du vecteur \vec{x}_v . Les liaisons entre le corps du vérin S_3 et le bâti S_0 ainsi qu'entre la

tige du vérin S_2 et la porte de coffre S_1 sont des liaisons rotules de centres respectifs A et C . Le point D représente l'extrémité de la porte du coffre. La hauteur du point D par rapport au sol suivant la verticale est de 0,7 m en position coffre fermé et de 1,8 m en position coffre ouvert.



Caractéristiques géométriques du vérin

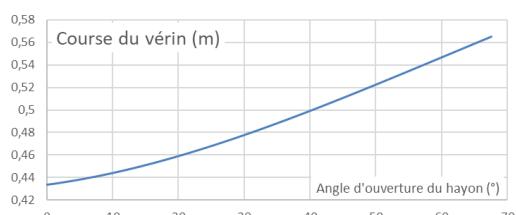
Le centre d'inertie du coffre est situé en G tel que $\overrightarrow{BG} = \lambda \vec{x}_p$ avec $\lambda = 0,6 \text{ m}$.

$\overrightarrow{AB} = -a \vec{x}_t + b \vec{y}_t$, $\overrightarrow{AC} = L \vec{x}_p$, $\overrightarrow{BC} = c \vec{x}_p$, $\overrightarrow{BD} = d \vec{x}_p$ avec $a = 0,55 \text{ m}$, $b = 0,14 \text{ m}$, $c = 0,14 \text{ m}$ et $d = 1 \text{ m}$. L'angle formé entre \vec{x}_0 et l'horizontale \vec{x}_t est $\theta_0 = 42^\circ$.

Question 1 Déterminer l'angle d'ouverture maximal.

Question 2 Déterminer la longueur du vérin L en fonction de l'angle d'ouverture du coffre θ .

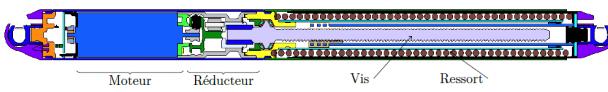
On donne la courbe donnant l'évolution de la course du vérin en fonction de l'ouverture du hayon.



Question 3 Déterminer les valeurs extrêmes de L , ainsi que la course du vérin.

Dimensionnement des caractéristiques du ressort

Les vérins utilisés sont constitués d'un moteur à courant continu, d'un réducteur à engrenage, d'une vis à billes et d'un ressort. Ce dernier permet d'assurer l'équilibre de la porte de coffre en cas de panne des vérins électriques.

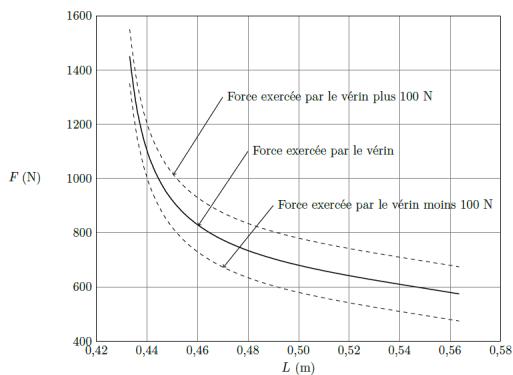


On suppose dans un premier temps que le coffre est à l'équilibre.

Question 4 Déterminer l'effort F exercé par chacun des vérins sur la porte de coffre en fonction de θ , α et des constantes du problème.

En exploitant les équations obtenues à partir de l'écriture de la fermeture géométrique obtenue précédemment, on montre que la relation entre θ et α s'écrit : $\tan \alpha = \frac{b + c \sin \theta}{-a + c \cos \theta}$.

On déduit de la question précédente le tracé de l'évolution de l'effort F nécessaire au maintien en équilibre du coffre en fonction de la longueur L du vérin.

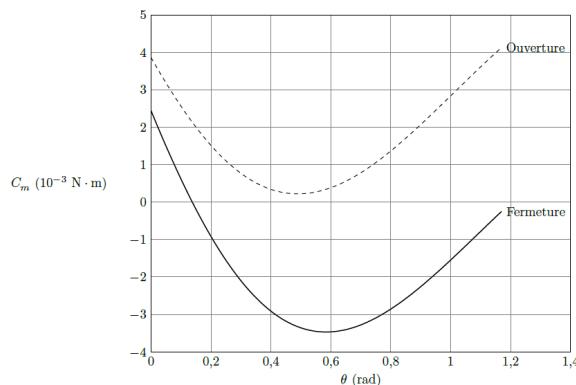


On choisit d'utiliser un ressort précontraint au sein du vérin de manière à assister l'ouverture du coffre et à assurer l'équilibre du coffre sur une plage de fonctionnement maximale. On estime que les forces de frottement maximales au sein du vérin (essentiellement dues à la friction dans la vis) sont de l'ordre de $F_{\text{frot}} = 100 \text{ N}$.

La figure précédente représente la force que doit exercer le vérin sur la porte de coffre pour assurer l'équilibre de cette dernière en fonction de la longueur du vérin. Les courbes en pointillés représentent la force du vérin $\pm 100 \text{ N}$.

Question 5 Déterminer la raideur k du ressort et sa longueur à vide L_0 de manière à obtenir une situation d'équilibre sur la plus grande plage de fonctionnement. Préciser votre démarche.

La figure suivante représente l'évolution du couple moteur dans un vérin lors des phases d'ouverture et de fermeture du coffre.

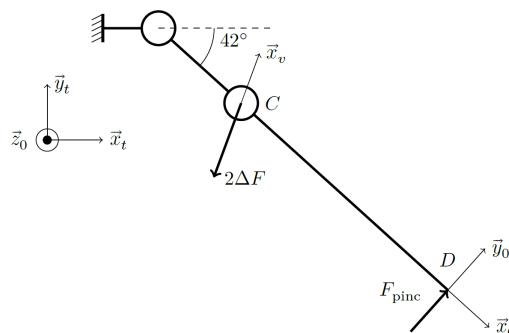


Question 6 Déterminer le couple moteur maximal en phase d'ouverture puis en phase de fermeture.

Réglage de la fonction sécurité des personnes

Pour limiter le risque d'accident lié au pincement d'un utilisateur, il est nécessaire de limiter le couple du moteur à courant continu durant la phase de fermeture du hayon.

On envisage la présence d'un obstacle empêchant la fermeture du coffre. On modélise l'action de l'obstacle sur la porte de coffre par un glisseur s'appliquant en D et s'exprimant $\vec{F}_{\text{pinc}} = F_{\text{pinc}} \vec{y}_p$.



On cherche à déterminer l'accroissement de couple moteur en cas de présence d'obstacle. On suppose ainsi que la porte de coffre est en équilibre sous l'effet du poids et de l'action des vérins. On ajoute ainsi l'effort de pincement F_{pinc} en D et on cherche l'accroissement d'effort $\Delta F \vec{x}_v$ qu'exercent chacun des vérins en C sur la porte en la supposant en équilibre.

On donne la relation entre le couple moteur et la force fournie par le vérin en régime quasi-statique : $C_m = \rho F$ avec $\rho = 7,89 \times 10^{-5} \text{ m}$.

Question 7 Déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de ΔF l'accroissement de la force qu'exerce chacun des vérins sur la porte de hayon.

La constante de couple du moteur est donnée par $K_t = 9,5 \times 10^{-3} \text{ NmA}^{-1}$.

Question 8 En déduire la valeur numérique de l'accroissement ΔC_m de couple moteur en fonction de la présence d'un obstacle. Déterminer l'intensité maximale du courant dans le moteur lors d'un pincement.

Synthèse

Question 9 Réaliser un poster permettant de synthétiser comment les caractéristiques des composants ont été déterminées.

TD 01



Modélisation d'un hayon de coffre électrique

Concours Centrale Supelec TSI 2013

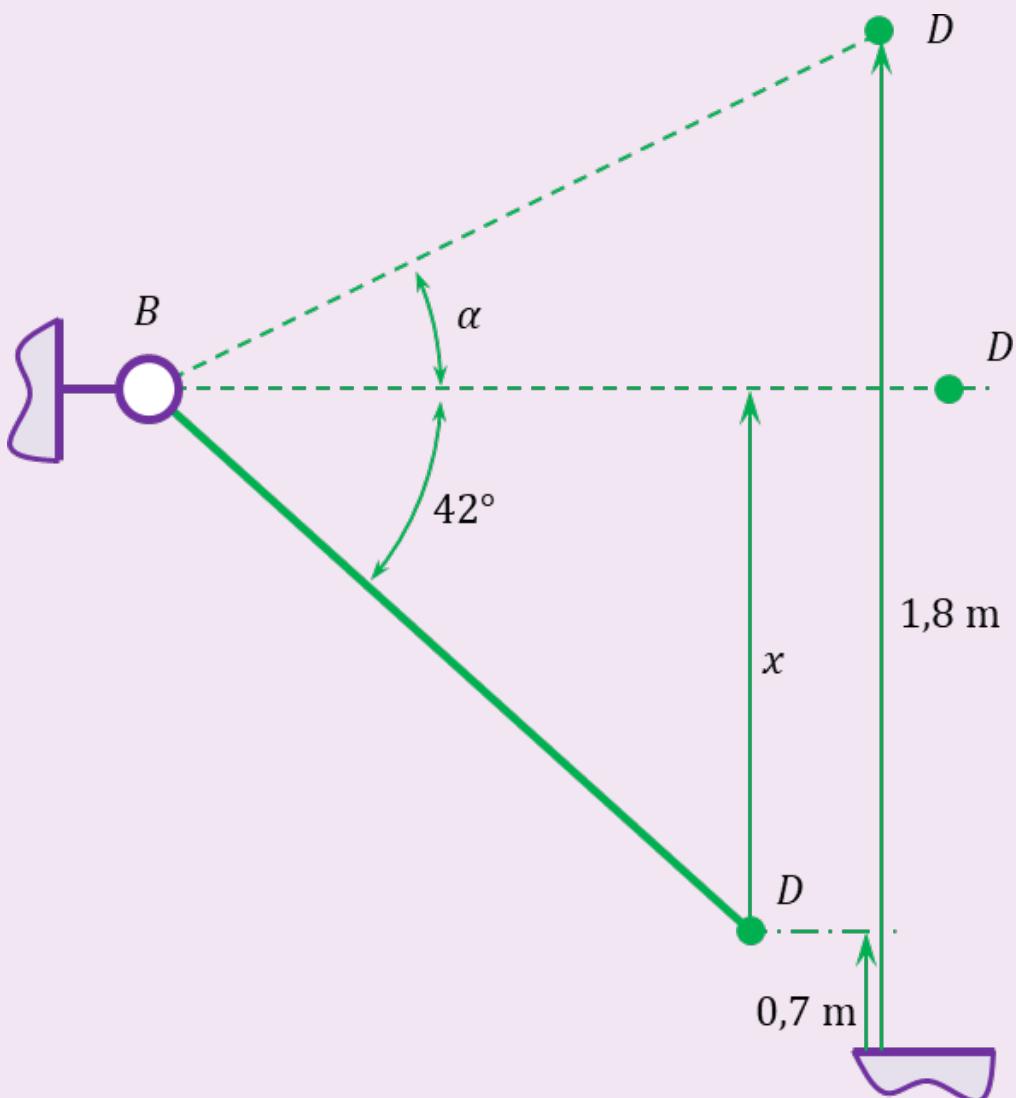
Savoirs et compétences :

Mise en situation

Caractéristiques géométriques du vérin

Question 1 Déterminer l'angle d'ouverture maximal.

Correction



D'une part, $x = d \sin 42 \approx 0,67 \text{ m}$. D'autre part, $\sin \alpha = \frac{1,8 - 0,7 - x}{d} = 0,43$. Au final $\alpha = 25,5^\circ$.

L'angle d'ouverture est donc de $67,5^\circ$.

Question 2 Déterminer la longueur du vérin L en fonction de l'angle d'ouverture du coffre θ .

Correction

La longueur du vérin est donnée par la valeur de L . En réalisant la fermeture géométrique, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow -a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{y_0} + c\overrightarrow{x_p} - L\overrightarrow{x_v} = \overrightarrow{0}$.

En projetant l'équation vectorielle dans \mathcal{R}_0 , on a :

$$\begin{cases} -a + c \cos \theta - L \cos \alpha = 0 \\ b + c \sin \theta - L \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

On a donc $L^2 = (-a + c \cos \theta)^2 + (b + c \sin \theta)^2$.

Question 3 Déterminer les valeurs extrêmes de L , ainsi que la course du vérin.

Correction

La longueur du vérin varie de 43,3 cm à 56,5 cm soit une course de 13,2 cm.

Dimensionnement des caractéristiques du ressort

Question 4 Déterminer l'effort F exercé par chacun des vérins sur la porte de coffre en fonction de θ , α et des constantes du problème.

Correction

On isole le corps et le piston du vérin. L'ensemble est soumis à deux actions mécaniques (liaisons sphériques en A et C). D'après le PFS, cette action mécanique est donc suivant Ces deux actions mécaniques sont donc de même direction (le vecteur $\overrightarrow{x_v}$), de même norme et de sens opposé.

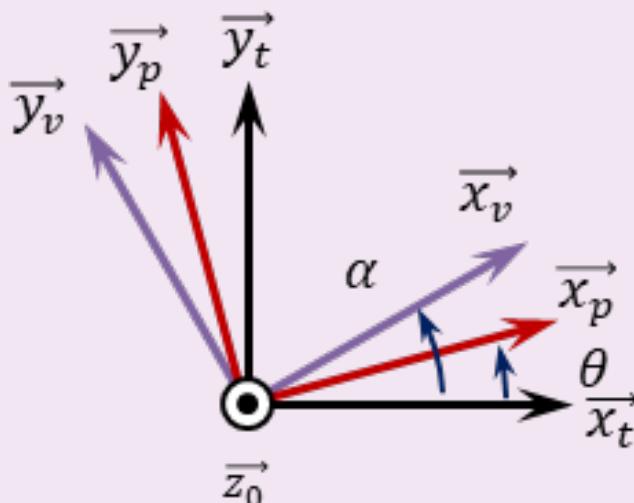
On isole le hayon h .

On réalise le BAME :

- action mécanique du vérin v : $\{\mathcal{T}(v \rightarrow h)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_v \overrightarrow{x_v} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_C$;
- action de la pesanteur : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow h)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \overrightarrow{y_t} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$;
- action de la pivot en B : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow h)\}$.

On cherche à connaître l'action du vérin en fonction des actions de pesanteur. On réalise donc le théorème du moment statique en B en projection sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{BC} \wedge F_v \overrightarrow{x_v} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{BG} \wedge -Mg \overrightarrow{y_t}) \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{0} \Rightarrow (c \overrightarrow{x_p} \wedge F_v \overrightarrow{x_v} + \lambda \overrightarrow{x_p} \wedge -Mg \overrightarrow{y_t}) \cdot \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{0}$$



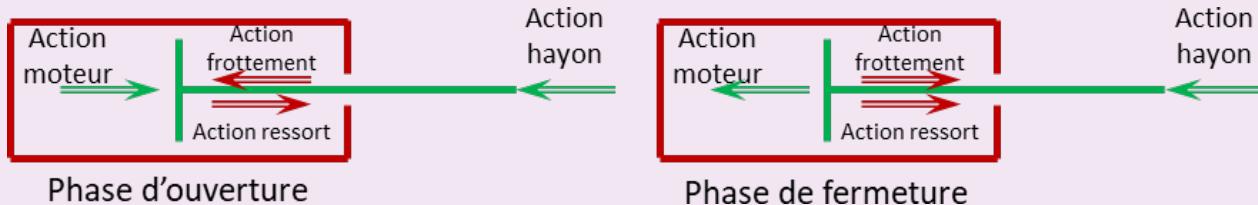
$$\Leftrightarrow c F_v \sin(\alpha - \theta) - \lambda M g \cos \theta = 0$$

$$F_v = \frac{\lambda M g \cos \theta}{c \sin(\alpha - \theta)}.$$

Dans le cas où on considère les deux vérins, on aura $F_1 = F_2 = F_v/2$.

Question 5 Déterminer la raideur k du ressort et sa longueur à vide L_0 de manière à obtenir une situation d'équilibre sur la plus grande plage de fonctionnement. Préciser votre démarche.

Correction



Phase d'ouverture

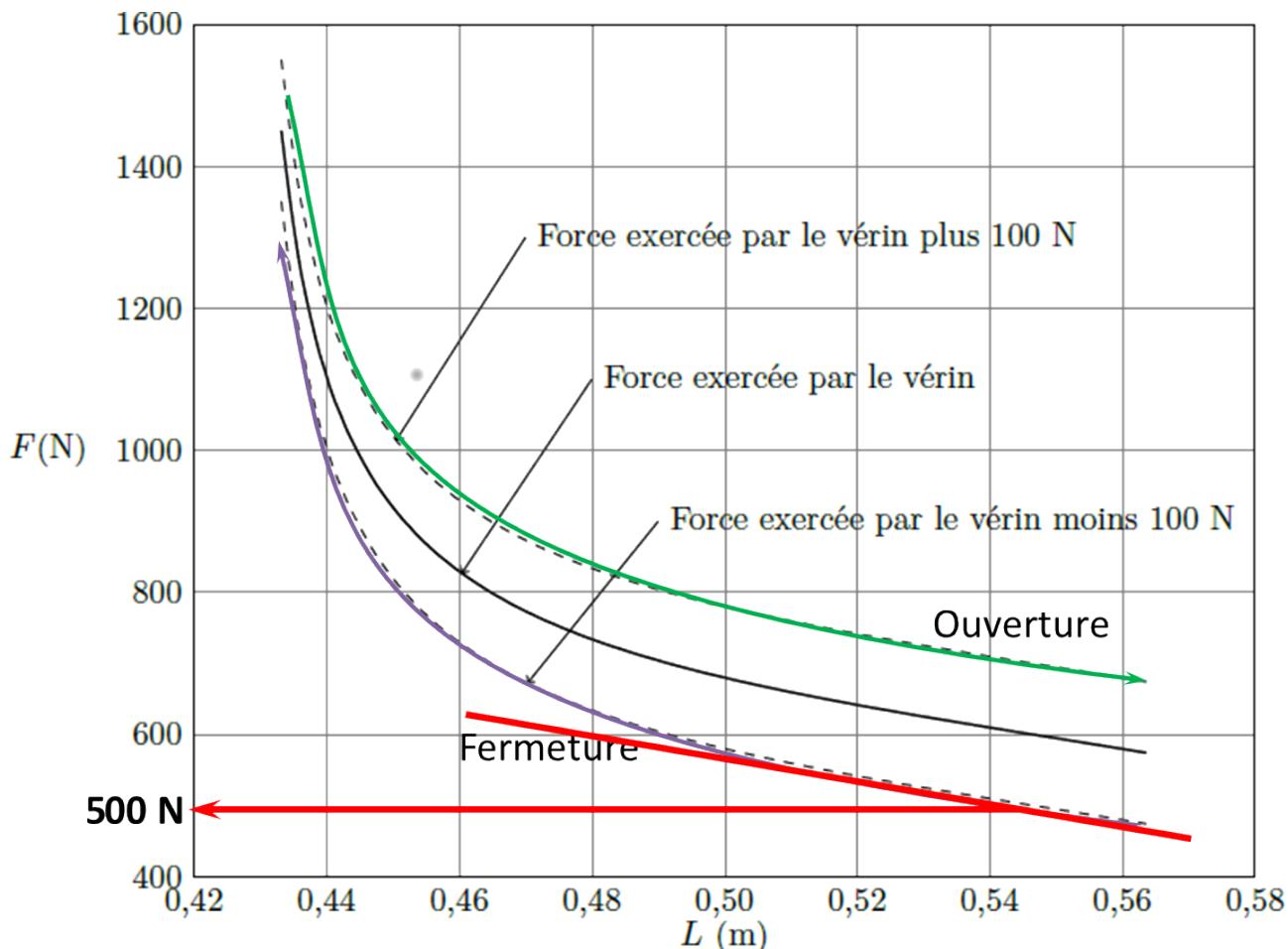
Phase de fermeture

Si on isole la tige du vérin :

- en phase d'ouverture, le TRS s'exprime par : $F_m + F_r - F_f - F_h = 0 \Leftrightarrow F_r = F_f + F_h - F_m$;
- en phase de fermeture, le TRS s'exprime par : $-F_m + F_r + F_f - F_h = 0 \Leftrightarrow F_r = -F_f + F_h + F_m$;

La plage de fonctionnement la plus large est située entre 0,5 m et 0,56 m. La pente est la même pour les 3 courbes. Elle est d'environ $k = \frac{100}{0,06} \simeq 1667 \text{ N m}^{-1}$.

En phase de fermeture, lorsque le vérin est déployé, la précharge permettant d'assurer l'équilibre est d'environ 500 N. L'écrasement est donc de 300 mm environ.



Question 6 Déterminer le couple moteur maximal en phase d'ouverture puis en phase de fermeture.

Correction

En phase d'ouverture, le couple maximal est de $4 \times 10^{-3} \text{ Nm}$. En phase de fermeture il est de $3,5 \times 10^{-3} \text{ Nm}$.

Réglage de la fonction sécurité des personnes

Question 7 Déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de ΔF l'accroissement de la force qu'exerce chacun des vérins sur la porte de hayon.

Correction

On isole le hayon et on réalise le BAME. Le théorème du moment statique en B en projection sur \vec{z}_0 :

$$\left(\vec{0} + \vec{BC} \wedge -2\Delta F \vec{x}_v + \vec{0} + \vec{BD} \wedge F_{\text{pinc}} \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = \vec{0} \Rightarrow (c \vec{x}_0 \wedge -2\Delta F \vec{x}_v + d \vec{x}_0 \wedge F_{\text{pinc}} \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{0} \Rightarrow -c2\Delta F \sin \alpha + dF_{\text{pinc}} = 0 \Rightarrow \Delta F = \frac{dF_{\text{pinc}}}{c2 \sin \alpha}.$$

$$AN : \text{Pour } \theta = 0, \tan \alpha = \frac{b}{-a + c} = \frac{0,14}{-0,55 + 0,14} = -0,34 \Rightarrow \alpha \simeq -18,8^\circ. \Rightarrow \Delta F = \frac{40}{2 \cdot 0,14 \sin \alpha} = -443 \text{ N.}$$

La constante de couple du moteur est donnée par $K_t = 9,5 \times 10^{-3} \text{ NmA}^{-1}$.

Question 8 En déduire la valeur numérique de l'accroissement ΔC_m de couple moteur en fonction de la présence d'un obstacle. Déterminer l'intensité maximale du courant dans le moteur lors d'un pincement.

Correction

On a $|\Delta C_m| = \rho |\Delta F|$ avec $\rho = 7,89 \times 10^{-5} \text{ m}$. En conséquence : $|\Delta C_m| = 443 \cdot 7,89 \cdot 10^{-5} = 35 \text{ mNm}$.

$$\text{En fin de fermeture, } C_m = 2,5 \times 10^{-3} \text{ Nm. En conséquence } I_{\text{max}} = \frac{C_{\text{max}}}{K_t} = \frac{C_m + \Delta C_m}{K_t} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} + 35 \cdot 10^{-3}}{9,5 \cdot 10^{-3}} = 3,95 \text{ A.}$$

Synthèse

Question 9 Réaliser un poster permettant de synthétiser comment les caractéristiques des composants ont été déterminées.

TD 02



Dépose de bagage automatique dans les aéroports (DBA) *

Concours Centrale Supelec TSI 2018

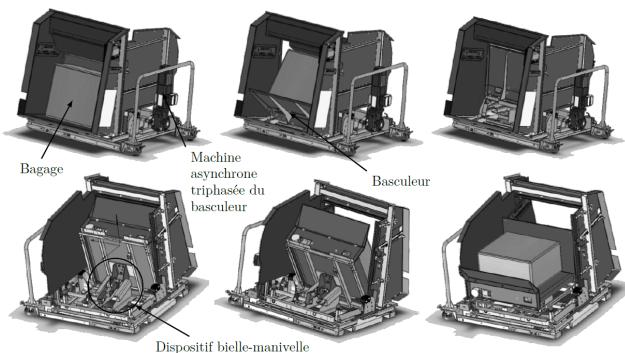
Savoirs et compétences :

- Res2.C18 : principe fondamental de la statique;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

Le processus d'enregistrement des passagers dans les aéroports est en train de vivre une mutation en évoluant de la « banque d'enregistrement » classique vers une idée de « dépose bagages » automatisée. Cette évolution a été justifiée pour fluidifier le trafic passager notamment sur les destinations avec des fréquences très importantes, par exemple certains vols Paris-Province.

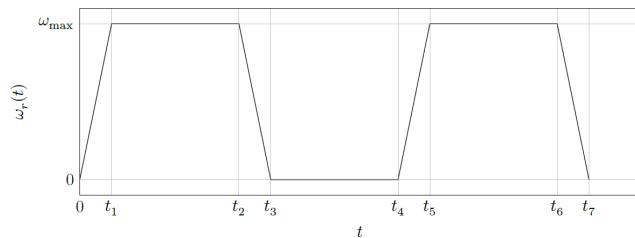
Le système DBA est constitué par un basculeur actionné par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone.



Recherche de la vitesse de rotation maximale

Objectif Le bagage et le chariot sont animés par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone triphasée avec un réducteur entraînant la manivelle. L'objectif est de déterminer la vitesse de rotation maximale de la machine asynchrone triphasée actionnant le basculeur en accord avec l'exigence 1.4 (le basculement du bagage doit se faire en 8 s).

Pour dimensionner correctement la machine asynchrone, la première étape est le calcul de la vitesse maximale de l'arbre moteur. On choisit comme loi de mouvement de rotation du moteur une loi en trapèze. On donne ainsi le profil de vitesse de rotation ω_r de l'arbre de sortie du réducteur par rapport au bâti.



Le rapport de réduction entre l'arbre moteur de vitesse de rotation et l'arbre de sortie de réducteur est noté $k = \frac{\omega_r}{\omega_{mot}} = \frac{1}{107,7}$. Compte tenu du temps de basculement du bagage de 8 s, les valeurs des temps sont les suivantes : $t_1 = 0,5$ s, $t_2 = 2,5$ s, $t_3 = 3$ s, $t_4 = 5$ s, $t_5 = 5,5$ s, $t_6 = 7,5$ s, $t_7 = 8$ s. L'arbre de sortie du motoréducteur doit faire un demi-tour entre 0 et t_3 , puis un demi-tour entre t_4 et t_7 .

Question 1 Déterminer ω_{max} en fonction des différents t_i . Faire l'application numérique.

Question 2 En déduire la vitesse de rotation de l'arbre moteur maximale $\omega_{mot\ max}$. Faire l'application numérique et donner le résultat en $tr \cdot min^{-1}$.

Recherche du couple moteur maximal en vue du dimensionnement de la machine asynchrone

Objectif La seconde étape du dimensionnement consiste à rechercher le couple moteur maximal en accord avec l'exigence 1.2 (la masse du bagage pouvant être manœuvré par le système est de 50 kg).

Pour calculer le couple moteur maximal, on se place dans un cas quasi-statique et on néglige tous les effets dynamiques. Compte tenu de la construction du mécanisme (non linéaire), le couple moteur est variable et on le calcule dans une position particulière correspondant au couple maximal.

On note :

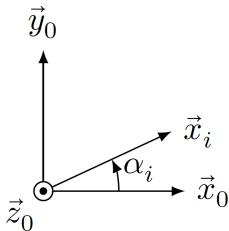
- S_0 le bâti;
- S_1 l'ensemble constitué par le chariot, le bagage et les galets, dont le centre de gravité est noté G et la masse est notée $m = 80$ kg;
- S_2 la bielle DB de direction \vec{x}_2 ;

- S_3 l'arbre de sortie de réducteur et la manivelle $\overrightarrow{ED} = R \vec{x}_3$ avec $R = 86\text{ mm}$.

Le mouvement est considéré comme plan. On néglige toutes les masses sauf celle de l'ensemble S_1 . Toutes les liaisons sont parfaites. Le référentiel lié au solide S_0 est considéré galiléen. On note l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \vec{y}_0$ avec $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Les liaisons entre S_0 et S_1 sont des liaisons sphère-plan de normales (A_1, \vec{x}_{11}) et (A_2, \vec{x}_{12}) . On note I le point d'intersection des normales (A_1, \vec{x}_{11}) et (A_2, \vec{x}_{12}) . On note $\overrightarrow{IB} = L_2 \vec{x}_{12}$ et $\overrightarrow{IG} = x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0$.

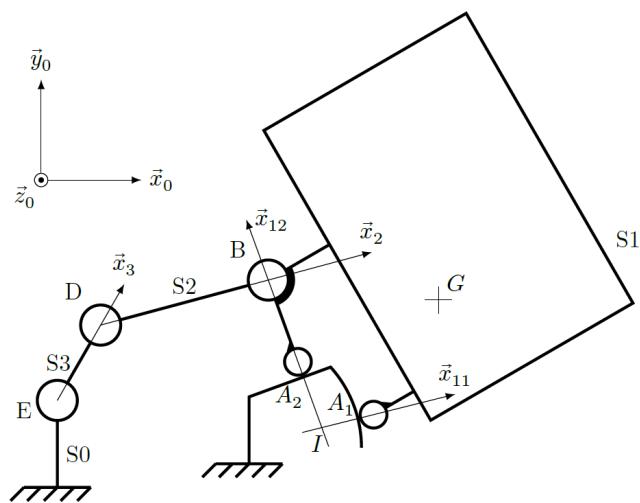
On note les angles α_i formés entre les vecteurs \vec{x}_0 et $\vec{x}_i : \alpha_i = (\vec{x}_0, \vec{x}_i)$ avec $i \in \{2; 3; 11; 12\}$.



La liaison entre S_1 et S_2 est une liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) .

La liaison entre S_2 et S_3 est une liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_0) .

La liaison entre S_0 et S_3 est une liaison pivot d'axe (E, \vec{z}_0) .



Question 3 Déterminer la forme des torseurs $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1$ au point A_1 et $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2$ au point A_2 des actions mécaniques des rampes du bâti S_0 s'appliquant sur le chariot S_1 . Ces torseurs sont-ils des glisseurs?

Question 4 La somme des torseurs $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1$ et $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2$ est-elle un glisseur? Si oui, déterminer un point de son support.

Question 5 Déterminer la forme du torseur $\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\}$ de l'action mécanique de la bielle S_2 sur l'ensemble S_1 au point B . On notera F_B la norme de la résultante de ce torseur.

Question 6 En isolant S_1 , et en ramenant les moments en I , déterminer l'expression de F_B en fonction de la masse m de S_1 , des angles α_i et des constantes du problème.

Question 7 On note C_{red} le couple exercé par l'arbre de sortie de réducteur sur la manivelle S_3 . Montrer que $C_{red} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$.

Dans la configuration choisie, on a $x_G = 506\text{ mm}$, $L_2 = 140\text{ mm}$, $\alpha_3 = 91^\circ$, $\alpha_{12} = 108^\circ$ et $\alpha_2 = 3^\circ$ (on montre par une simulation numérique que cette position conduit au couple maximal).

Question 8 En déduire l'expression du couple C_{red} qu'exerce le réducteur sur la manivelle S_3 en fonction du poids du chariot, des angles α_i et des constantes du problème. Faire l'application numérique.

Question 9 En déduire la valeur numérique C_m du couple qu'exerce l'arbre de la machine asynchrone sur l'arbre d'entrée du réducteur (on supposera le rendement du réducteur égal à 1).

Éléments de corrigé

1. $1,26 \text{ rad s}^{-1}$.
2. 1292 tr min^{-1} .
3. Oui.
4. I .
5. $\left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_B$.
6. $F_B = \frac{mg x_G}{L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_2)}$.
7. $C_{red} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$.
8. 252 Nm .
9. $2,34 \text{ Nm}$.

TD 02



Dépose de bagage automatique dans les aéroports (DBA) *

Concours Centrale Supelec TSI 2018

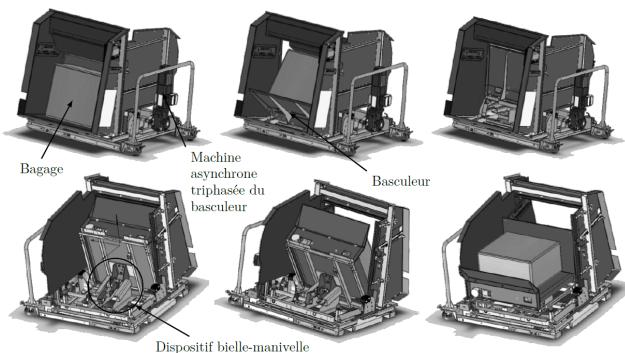
Savoirs et compétences :

- Res2.C18 : principe fondamental de la statique;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

Le processus d'enregistrement des passagers dans les aéroports est en train de vivre une mutation en évoluant de la « banque d'enregistrement » classique vers une idée de « dépose bagages » automatisée. Cette évolution a été justifiée pour fluidifier le trafic passager notamment sur les destinations avec des fréquences très importantes, par exemple certains vols Paris-Province.

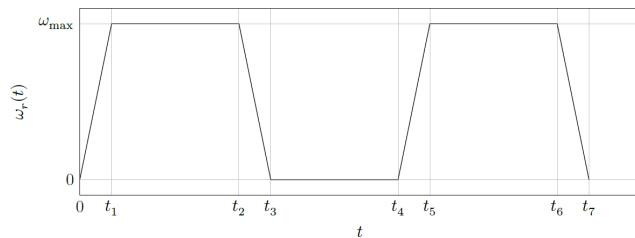
Le système DBA est constitué par un basculeur actionné par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone.



Recherche de la vitesse de rotation maximale

Objectif Le bagage et le chariot sont animés par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone triphasée avec un réducteur entraînant la manivelle. L'objectif est de déterminer la vitesse de rotation maximale de la machine asynchrone triphasée actionnant le basculeur en accord avec l'exigence 1.4 (le basculement du bagage doit se faire en 8 s).

Pour dimensionner correctement la machine asynchrone, la première étape est le calcul de la vitesse maximale de l'arbre moteur. On choisit comme loi de mouvement de rotation du moteur une loi en trapèze. On donne ainsi le profil de vitesse de rotation ω_r de l'arbre de sortie du réducteur par rapport au bâti.



Le rapport de réduction entre l'arbre moteur de vitesse de rotation et l'arbre de sortie de réducteur est noté $k = \frac{\omega_r}{\omega_{mot}} = \frac{1}{107,7}$. Compte tenu du temps de basculement du bagage de 8 s, les valeurs des temps sont les suivantes : $t_1 = 0,5\text{s}$, $t_2 = 2,5\text{s}$, $t_3 = 3\text{s}$, $t_4 = 5\text{s}$, $t_5 = 5,5\text{s}$, $t_6 = 7,5\text{s}$, $t_7 = 8\text{s}$. L'arbre de sortie du motoréducteur doit faire un demi-tour entre 0 et t_3 , puis un demi-tour entre t_4 et t_7 .

Question 1 Déterminer ω_{max} en fonction des différents t_i . Faire l'application numérique.

Question 2 En déduire la vitesse de rotation de l'arbre moteur maximale $\omega_{mot\ max}$. Faire l'application numérique et donner le résultat en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Recherche du couple moteur maximal en vue du dimensionnement de la machine asynchrone

Objectif La seconde étape du dimensionnement consiste à rechercher le couple moteur maximal en accord avec l'exigence 1.2 (la masse du bagage pouvant être manœuvré par le système est de 50 kg).

Pour calculer le couple moteur maximal, on se place dans un cas quasi-statique et on néglige tous les effets dynamiques. Compte tenu de la construction du mécanisme (non linéaire), le couple moteur est variable et on le calcule dans une position particulière correspondant au couple maximal.

On note :

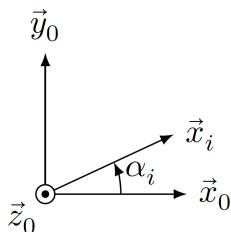
- S_0 le bâti;
- S_1 l'ensemble constitué par le chariot, le bagage et les galets, dont le centre de gravité est noté G et la masse est notée $m = 80\text{kg}$;
- S_2 la bielle DB de direction \vec{x}_2 ;

- S_3 l'arbre de sortie de réducteur et la manivelle $\overrightarrow{ED} = R \overrightarrow{x}_3$ avec $R = 86\text{ mm}$.

Le mouvement est considéré comme plan. On néglige toutes les masses sauf celle de l'ensemble S_1 . Toutes les liaisons sont parfaites. Le référentiel lié au solide S_0 est considéré galiléen. On note l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \vec{y}_0$ avec $g = 9,81\text{ m s}^{-2}$.

Les liaisons entre S_0 et S_1 sont des liaisons sphère-plan de normales (A_1, \vec{x}_{11}) et (A_2, \vec{x}_{12}) . On note I le point d'intersection des normales (A_1, \vec{x}_{11}) et (A_2, \vec{x}_{12}) . On note $\overrightarrow{IB} = L_2 \vec{x}_{12}$ et $\overrightarrow{IG} = x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0$.

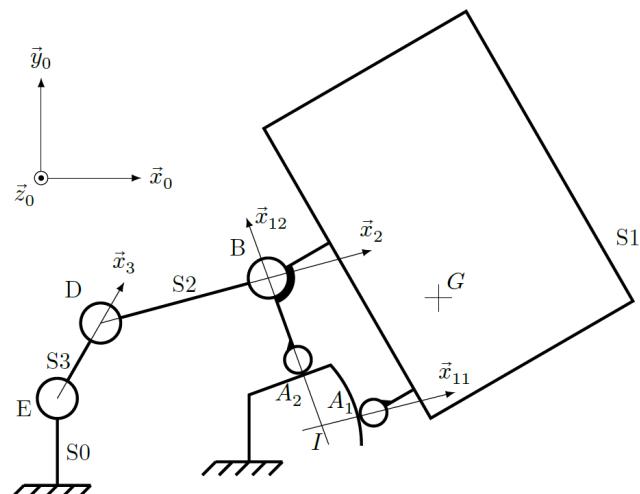
On note les angles α_i formés entre les vecteurs \vec{x}_0 et $\vec{x}_i : \alpha_i = (\vec{x}_0, \vec{x}_i)$ avec $i \in \{2; 3; 11; 12\}$.



La liaison entre S_1 et S_2 est une liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) .

La liaison entre S_2 et S_3 est une liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_0) .

La liaison entre S_0 et S_3 est une liaison pivot d'axe (E, \vec{z}_0) .



Question 3 Déterminer la forme des torseurs $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1$ au point A_1 et $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2$ au point A_2 des actions mécaniques des rampes du bâti S_0 s'appliquant sur le chariot S_1 . Ces torseurs sont-ils des glisseurs?

Question 4 La somme des torseurs $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1$ et $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2$ est-elle un glisseur? Si oui, déterminer un point de son support.

Question 5 Déterminer la forme du torseur $\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\}$ de l'action mécanique de la bielle S_2 sur l'ensemble S_1 au point B . On notera F_B la norme de la résultante de ce torseur.

Question 6 En isolant S_1 , et en ramenant les moments en I , déterminer l'expression de F_B en fonction de la masse m de S_1 , des angles α_i et des constantes du problème.

Question 7 On note C_{red} le couple exercé par l'arbre de sortie de réducteur sur la manivelle S_3 . Montrer que $C_{red} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$.

Dans la configuration choisie, on a $x_G = 506\text{ mm}$, $L_2 = 140\text{ mm}$, $\alpha_3 = 91^\circ$, $\alpha_{12} = 108^\circ$ et $\alpha_2 = 3^\circ$ (on montre par une simulation numérique que cette position conduit au couple maximal).

Question 8 En déduire l'expression du couple C_{red} qu'exerce le réducteur sur la manivelle S_3 en fonction du poids du chariot, des angles α_i et des constantes du problème. Faire l'application numérique.

Question 9 En déduire la valeur numérique C_m du couple qu'exerce l'arbre de la machine asynchrone sur l'arbre d'entrée du réducteur (on supposera le rendement du réducteur égal à 1).

TD 02



Dépose de bagage automatique dans les aéroports (DBA) *

Concours Centrale Supelec TSI 2018

Savoirs et compétences :

- Res2.C18 : principe fondamental de la statique;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

Recherche de la vitesse de rotation maximale

Objectif Le bagage et le chariot sont animés par un dispositif bielle-manivelle et une machine asynchrone triphasée avec un réducteur entraînant la manivelle. L'objectif est de déterminer la vitesse de rotation maximale de la machine asynchrone triphasée actionnant le basculeur en accord avec l'exigence 1.4 (le basculement du bagage doit se faire en 8 s).

Question 1 Déterminer ω_{\max} en fonction des différents t_i . Faire l'application numérique.

Correction En calculant l'aire sous la courbe (l'intégrale de la vitesse est la position) et sachant que le réducteur doit faire un demi-tour (π rad), on a : $\pi = \frac{1}{2}t_1\omega_{\max} + \frac{1}{2}(t_3 - t_2)\omega_{\max} + (t_2 - t_1)\omega_{\max} = \left(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}(t_3 - t_2) + (t_2 - t_1)\right)\omega_{\max}$. On a donc $\omega_{\max} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}(t_3 - t_2) + (t_2 - t_1)} = \frac{\pi}{-\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3} = \frac{\pi}{-\frac{1}{2}0,5 + \frac{1}{2}2,5 + \frac{1}{2}3} = \frac{\pi}{2,5} = 1,26 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 2 En déduire la vitesse de rotation de l'arbre moteur maximale $\omega_{\text{mot max}}$. Faire l'application numérique et donner le résultat en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Correction $\omega_{\text{mot max}} = 107,7 \times 1,26 = 135 \text{ rad s}^{-1} = 1292 \text{ tr min}^{-1}$.

Recherche du couple moteur maximal en vue du dimensionnement de la machine asynchrone

Objectif La seconde étape du dimensionnement consiste à rechercher le couple moteur maximal en accord avec l'exigence 1.2 (la masse du bagage pouvant être manœuvré par le système est de 50 kg).

Question 3 Déterminer la forme des torseurs $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1$ au point A_1 et $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2$ au point A_2 des actions mécaniques des rampes du bâti S_0 s'appliquant sur le chariot S_1 . Ces torseurs sont-ils des glisseurs?

Correction $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1 = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_1 x_{11}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{A_1}$ et $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_2 x_{12}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{A_2}$. Ces torseurs sont des glisseurs (il existe un point où le moment est nul, ici les droites (A_i, I)).

Question 4 La somme des torseurs $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1$ et $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2$ est-elle un glisseur? Si oui, déterminer un point de son support.

Correction On a $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_1 + \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_1 x_{11}} + \overrightarrow{F_2 x_{12}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_I$. Ce torseur est un glisseur dont le point I appartient au support.

Question 5 Déterminer la forme du torseur $\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\}$ de l'action mécanique de la bielle S_2 sur l'ensemble S_1 au point B . On notera F_B la norme de la résultante de ce torseur.

Correction On prendra F_B comme valeur algébrique et pas comme norme de la résultante. On isole la bielle S_2 , elle est soumise à deux glisseurs. D'après le PFS, ces glisseurs sont de même norme, de même direction (la droite (DB)) et de sens opposés. On a $\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_B x_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.

Question 6 En isolant S_1 , et en ramenant les moments en I , déterminer l'expression de F_B en fonction de la masse m de S_1 , des angles α_i et des constantes du problème.

Correction On isole S_1 .

On réalise le BAME :

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_B \\ & = \left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{x}_2 \\ L_2 F_B \sin(\alpha_{12} - \alpha_2) \vec{z} \end{array} \right\}_I (\vec{IB} \wedge F_B \vec{x}_2) = \\ & L_2 \vec{x}_{12} \wedge F_B \vec{x}_2 = L_2 F_B \sin(\alpha_{12} - \alpha_2) \vec{z}; \\ \bullet \quad & \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{x}_{11} + F_2 \vec{x}_{12} \\ 0 \end{array} \right\}_I; \\ \bullet \quad & \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -mg \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_G \\ & = \left\{ \begin{array}{c} -mg \vec{y}_0 \\ -mg x_G \vec{z}_0 \end{array} \right\}_I (\vec{IG} \wedge -mg \vec{y}_0) = \\ & (x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0) \wedge -mg \vec{y}_0 = -mg x_G \vec{z}_0. \end{aligned}$$

En appliquant le TMS en I en projection sur \vec{z}_0 , on a : $L_2 F_B \sin(\alpha_{12} - \alpha_2) - mg x_G = 0$ soit $F_B = \frac{mg x_G}{L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_2)}$.

Correction En isolant 2, on montre que $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}$.

On isole 3.

On fait le BAME :

- $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_B \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_D$ et
on a $\overline{\mathcal{M}(E, 2 \rightarrow 3)} = \overline{\mathcal{M}(D, 2 \rightarrow 3)} + \overline{ED} \wedge -F_B \vec{x}_2 = R \vec{x}_3 \wedge -F_B \vec{x}_2 = -RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2);$
- $\{\mathcal{T}(\text{réd} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ C_{\text{red}} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_E;$
- $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3)\}$ avec $\overline{\mathcal{M}(E, 0 \rightarrow 3)} \cdot \vec{z}_0 = 0$.

On applique le TMS en E en projection sur \vec{z}_0 : $C_{\text{red}} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$.

Dans la configuration choisie, on a $x_G = 506 \text{ mm}$, $L_2 = 140 \text{ mm}$, $\alpha_3 = 91^\circ$, $\alpha_{12} = 108^\circ$ et $\alpha_2 = 3^\circ$ (on montre par une simulation numérique que cette position conduit au couple maximal).

Question 8 En déduire l'expression du couple C_{red} qu'exerce le réducteur sur la manivelle S_3 en fonction du poids du chariot, des angles α_i et des constantes du problème. Faire l'application numérique.

Correction On a $C_{\text{red}} = RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = \frac{Rmg x_G \sin(\alpha_3 - \alpha_2)}{L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_2)} \simeq 252 \text{ Nm}$.

Question 9 En déduire la valeur numérique C_m du couple qu'exerce l'arbre de la machine asynchrone sur l'arbre d'entrée du réducteur (on supposera le rendement du réducteur égal à 1).

Correction Le couple moteur est alors de 2,34 Nm.

Question 7 On note C_{red} le couple exercé par l'arbre de sortie de réducteur sur la manivelle S_3 . Montrer que $C_{\text{red}} - RF_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$.

TD 01



Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

Savoirs et compétences :

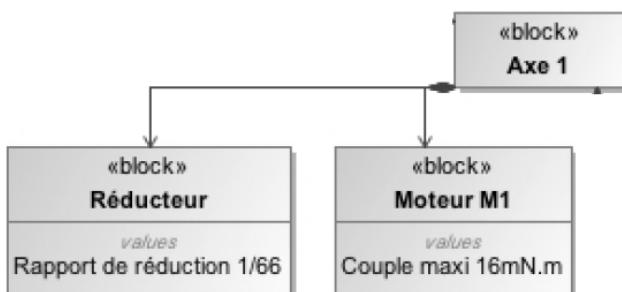
- Res2.C18 : principe fondamental de la statique ;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

Le robot MC²E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

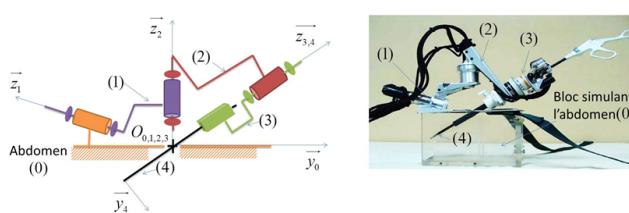
Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.

Objectif Valider par un calcul simplifié de pré-dimensionnement la motorisation de l'axe 1 du MC²E.



Validation des performances statiques des motorisations

On donne ci-dessous le schéma cinématique simplifié du mécanisme.



Dans l'étude envisagée, les trois axes de rotation sont asservis en position angulaire et l'axe de translation de la pince (4) est asservi en effort. On va étudier le maintien en position réalisé par les trois axes de rotation. Dans cette phase, les trois moteurs maintiennent la position du robot le plus précisément possible et ce malgré les perturbations qu'engendrent les actions de pesanteur ainsi

que les réactions dues aux efforts à l'extrémité de la pince (4).

Hypothèses

- Étant données la très faible amplitude des mouvements et leur faible évolution dans le temps, une étude quasi statique est suffisante.
- Le point $O_0 = O_{0,1,2,3}$ est supposé fixe.
- Les actions mécaniques entre l'abdomen du patient et la pince (4) en O_0 seront négligées. On considère donc qu'il n'y a pas de liaison et d'action mécanique transmissible associée.
- Les liaisons pivot et la liaison glissière sont toutes supposées parfaites (sans frottement).

Modélisation des actions mécaniques

- Le moteur M1 et son réducteur, mettant en mouvement le solide (1) par rapport à (0), permettent d'exercer en sortie de réducteur un couple sur (1) dont le moment est noté : $\vec{C}_{m01} = C_{m01} \vec{z}_1$.
- De même, on note $\vec{C}_{m12} = C_{m12} \vec{z}_2$ et $\vec{C}_{m23} = C_{m23} \vec{z}_3$ les couples moteurs que (1) exerce sur (2) et (2) exerce sur (3).
- On admettra que le moteur M4 et son réducteur, mettant en mouvement la pince (4) par rapport à (3), permettent d'exercer un glisseur en O_4 de résultante $\vec{F}_{m34} = F_{m34} \vec{z}_3$.
- L'action mécanique qu'exerce l'organe du patient sur la pince (4) est modélisable par un glisseur noté $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow 4} = R_{\text{ext} \rightarrow 4} \vec{z}_4 \\ 0 \end{array} \right\}_{O_4}$ où O_4 est le point de contact entre (4) et l'organe du patient.

Démarche globale

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse associé au système étudié.

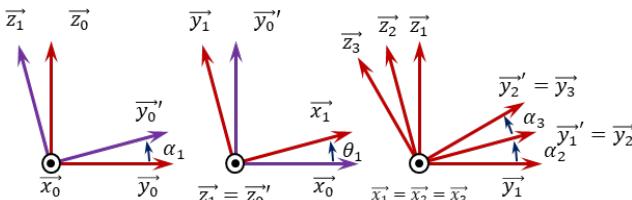
Question 2 Proposer la démarche (solide(s) isolé(s), théorème(s) utilisé(s)) permettant de déterminer les expressions littérales des couples C_{m01} , C_{m12} , C_{m23} , et de la résultante F_{m34} , lors de la phase de maintien statique. Les calculs ne doivent pas être développés.

Modélisation simplifiée

- On se place dans une configuration particulière telle que $1 \theta_1 = 45^\circ$ et $\theta_2 = \theta_3 = 0^\circ$ ainsi que $O_4 = O$.

On donne pour cela les figures de calcul simplifiées.

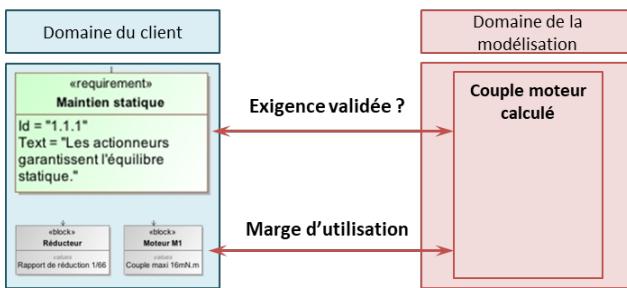
- Le centre d'inertie équivalent de l'ensemble matériel $E = (1+2+3+4)$ est noté G . Pour la configuration étudiée, la position de G est considérée telle que $\overrightarrow{O_0G} = \ell \overrightarrow{z_2}$. La masse totale de cet ensemble est notée $M = 1,3\text{ kg}$. On prend $\ell = 5\text{ cm}$. Le champ de pesanteur est noté $-g \overrightarrow{z_0}$ avec (avec $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$).



Question 3 Déterminer analytiquement en fonction de g , ℓ , M , θ_1 , α_1 et α_2 , l'expression littérale de C_{m01} lors de la phase de maintien statique. Effectuer l'application numérique (avec $\alpha_1 = 70^\circ$ et $\alpha_2 = -70^\circ$).

Retour sur la cahier des charges

Question 4 En utilisant le diagramme de blocs et les résultats précédents, vérifier que l'exigence 1.1.1 peut être satisfaite. Remplir le diagramme suivant.

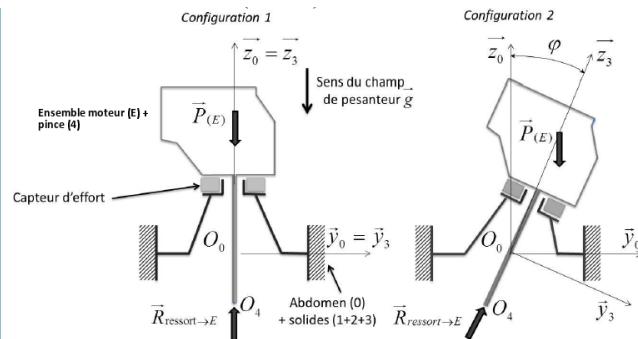


Pour aller plus loin : Validation des performances de l'asservissement d'effort

Lors du retrait de la vésicule, il est nécessaire de maintenir un effort constant en bout de pince (4). Pour cela, on réalise un asservissement d'effort de l'axe en translation.

Objectif Valider le positionnement du capteur d'effort et justifier la nécessité de faire une compensation de pesanteur.

L'ensemble (E) contient ici la totalité de la transmission d'effort de la pince (4), moteur M4 compris. Dans cette partie, on simplifiera le modèle de contact entre abdomen et pince en retenant une liaison libre. Pour deux configurations géométriques distinctes, le montage du capteur d'effort peut être modélisé par les schémas cinématiques simplifiés ci-dessous.



Un ressort simulant la vésicule biliaire (raideur du ressort similaire à la raideur de la vésicule) est installé en bout de pince.

Hypothèses

- Le problème est plan.
- Étant données les faibles vitesses et accélérations envisagées, une étude quasi-statique est suffisante.
- Les actions mécaniques de pesanteur sur (E) ne peuvent pas être négligées face aux actions mécaniques mises en jeu lors d'une opération. On notera leur résultante $\overrightarrow{P}_{(E)}$.
- Le capteur d'effort assure la liaison entre l'ensemble (0+1+2+3) et (E). Le capteur sera donc toujours en contact avec ces deux ensembles.

Modélisation des actions mécaniques

- L'action mécanique qu'exerce le ressort sur l'ensemble (E) est modélisée par un glisseur noté $\{\mathcal{T}(\text{Ressort} \rightarrow E)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(\text{Ressort} \rightarrow E)}}{0} \right\}_{O_4}$ où O_4 est le point de contact entre la pince (4) et le ressort.
- L'action mécanique, mesurée par le capteur, liée à sa liaison avec l'ensemble (E), est modélisée par $\{\mathcal{T}(\text{Capteur} \rightarrow E)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(\text{Capteur} \rightarrow E)}}{\mathcal{M}(O_4, \text{Capteur} \rightarrow E)} \right\}_{O_4}$. La résultante sera notée $\overrightarrow{R(\text{Capteur} \rightarrow E)} = F_z \overrightarrow{z_3} + F_y \overrightarrow{y_3}$. Seules ces deux composantes seront prises en compte par la suite.

Pour que la résultante de l'action mécanique mesurée par le capteur soit égale à la résultante de l'action mécanique que génère le ressort sur (E), il faut compenser la résultante de l'action mécanique de pesanteur.

Question 5 Pour la configuration 1 et par la méthode de votre choix, définir l'expression de F_z et F_y en fonction des autres actions mécaniques utiles. Commenter le résultat obtenu et la capacité du capteur à mesurer seulement les actions mécaniques générées par la pince sur le ressort.

La compensation de pesanteur revient à faire prendre en compte par le calculateur, en temps réel, la valeur des actions mécaniques de pesanteur quelle que soit la configuration géométrique du MC²E. On pourra alors connaître, à partir de la mesure du capteur d'effort, l'action mécanique exercée par la pince (4) sur le ressort.

Pour comprendre le traitement de l'information que devra faire le calculateur on propose une deuxième configuration géométrique (configuration 2) du MC²E.

Question 6 Dans la configuration 2, définir l'expression de F_z et F_y en fonction des autres actions mécaniques utiles. Pour réaliser la compensation, quels sont les paramètres à connaître en temps réel ?

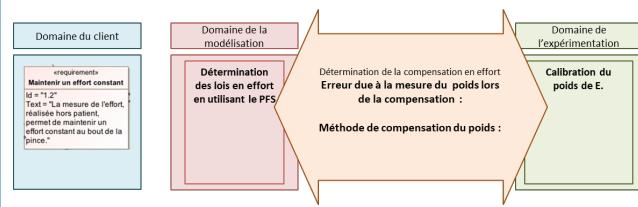
Retour sur le cahier des charges

Le montage d'essai suivant a été mis en place. La seconde configuration a été réalisée avec un angle φ de 20° . Cet essai, réalisé sans interaction entre le ressort et la pince (4), a permis d'obtenir les valeurs expérimentales suivantes mesurées par le capteur.

Configuration 1	Configuration 2		
$ F_{y0} $	$ F_{z0} $	$ F_{y20} $	$ F_{z20} $
0,0222 N	12,753 N	4,382 N	11,999 N

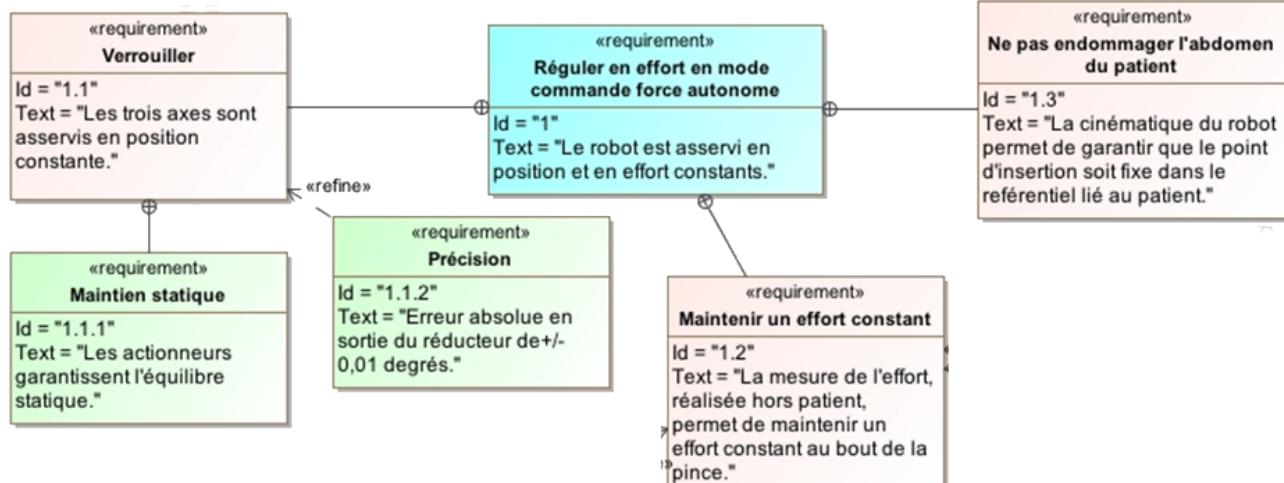
Question 7 Estimer la valeur du poids. Donner une estimation de la fiabilité sur la détermination du poids

par les capteurs d'efforts. Pour réaliser la compensation de pesanteur, comment doivent être utilisées ces grandeurs mesurées ?



Corrigé résumé

- 1.
- 2.
3. $C_m = -M g \ell \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \theta_1 = 0,4 \text{ Nm}$.
- 4.



TD 01



Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

Savoirs et compétences :

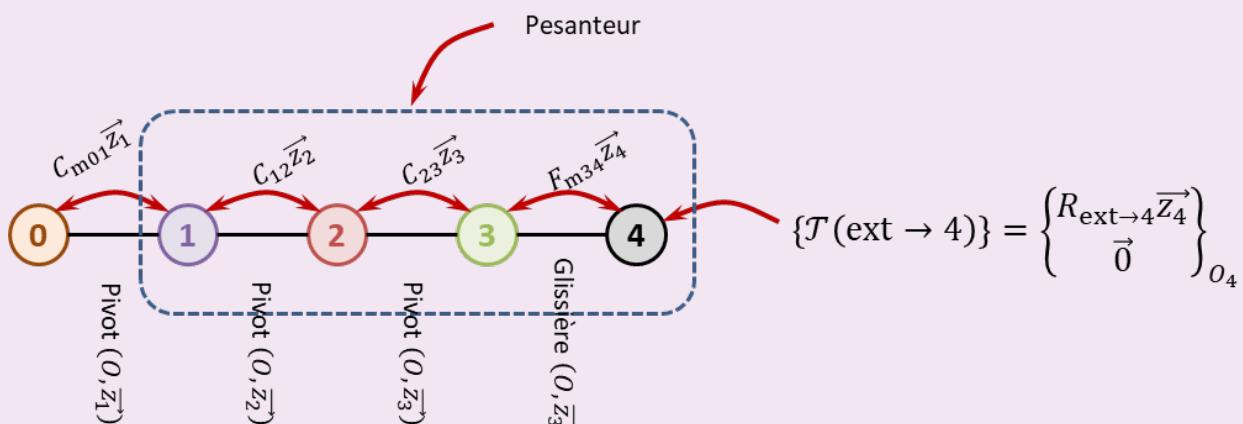
- Res2.C18 : principe fondamental de la statique ;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

Démarche globale

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse associé au système étudié.

Correction



$$\{T(\text{ext} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} R_{\text{ext} \rightarrow 0} \vec{z}_4 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_4}$$

Question 2 Proposer la démarche (solide(s) isolé(s), théorème(s) utilisé(s)) permettant de déterminer les expressions littérales des couples C_{m01} , C_{m12} , C_{m23} , et de la résultante F_{m34} , lors de la phase de maintien statique. Les calculs ne doivent pas être développés.

Correction

Méthode On cherche ici à déterminer le couple et les efforts à fournir par chacun des actionneurs pour maintenir en équilibre statique. 4 actionneurs sont à déterminer, il faut donc un minimum de 4 équations. On va écrire les équations du PFS correspondant au mobilité afin de pas faire apparaître les inconnues de liaisons.

1. Pour déterminer F_{m34} on isole le solide (4) et on applique le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{z}_4 .
2. Pour déterminer C_{m23} on isole l'ensemble (3+4) et on applique le théorème du moment statique en O en projection sur \vec{z}_3 .
3. Pour déterminer C_{m12} on isole l'ensemble (2+3+4) et on applique le théorème du moment statique en O en projection sur \vec{z}_2 .
4. Pour déterminer C_{m01} on isole l'ensemble (1+2+3+4) et on applique le théorème du moment statique en O en projection sur \vec{z}_1 .

Modélisation simplifiée

Question 3 Déterminer analytiquement en fonction de g , l , M , θ_1 , α_1 et α_2 , l'expression littérale de C_{m01} lors de la phase de maintien statique. Effectuer l'application numérique (avec $\alpha_1 = 70^\circ$ et $\alpha_2 = -70^\circ$).

Correction

- On isole l'ensemble (1+2+3+4).

- On réalise le bilan des actions mécaniques :
 - action de la liaison pivot de 0 sur 1 : $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 0 \rightarrow 1)z_1} = 0$.
 - action du moteur 0 sur 1 : $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, 0_m \rightarrow 1)z_1} = C_{m01}$.
 - action de la pesanteur sur E : $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, pes \rightarrow E)z_1}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(O, pes \rightarrow E)z_1} = \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}(G, pes \rightarrow E)z_1}}_0 + \overrightarrow{OG} \wedge (-Mg \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{z_1} = -Mg\ell (\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{z_1} = -Mg\ell (\overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{z_1}).$$

$$\overrightarrow{z_2} = -Mg\ell \sin \alpha_1 (\overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{z_2}) = -Mg\ell \sin \alpha_1 (\overrightarrow{x_0} \cdot (\cos \alpha_2 \overrightarrow{z_1} - \sin \alpha_2 \overrightarrow{y_1})) = Mg\ell \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta_1 \right) = Mg\ell \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \theta_1.$$

$$- \text{ action de l'organe sur (4)} : \overrightarrow{\mathcal{M}(O, ext \rightarrow 4)z_1} = \overrightarrow{0}.$$

- On applique le théorème du moment statique en O en projection sur $\overrightarrow{z_1}$:

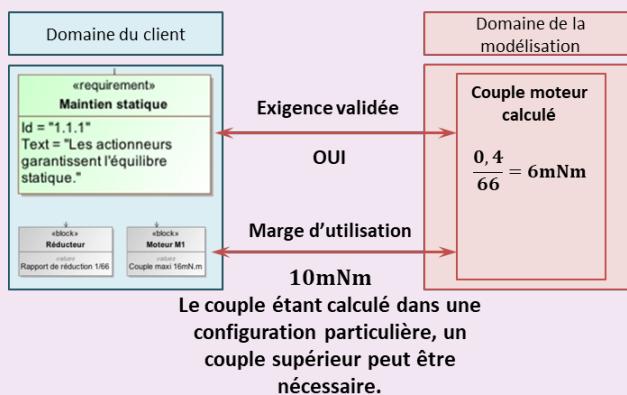
$$C_m + Mg\ell \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \theta_1 = 0.$$

On réalise l'application numérique : $C_m = -Mg\ell \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \theta_1 = -1,3 \cdot 9,8 \cdot 0,05 \cdot \sin 70 \sin -70 \sin 45 = 0,4 \text{ Nm}$.

Retour sur la cahier des charges

Question 4 En utilisant le diagramme de blocs et les résultats précédents, vérifier que l'exigence 1.1.1 peut être satisfaite. Remplir le diagramme suivant.

Correction Le couple en sortie de réducteur est de $16 \cdot 10^{-3} \cdot 66 = 1,056 \text{ Nm}$ ce qui est supérieur au couple nécessaire calculé à la question précédente. L'exigence 1.1.1 est donc validée.



Pour aller plus loin : Validation des performances de l'asservissement d'effort

Lors du retrait de la vésicule, il est nécessaire de maintenir un effort constant en bout de pince (4). Pour cela, on réalise un asservissement d'effort de l'axe en translation.

Objectif Valider le positionnement du capteur d'effort et justifier la nécessité de faire une compensation de pesanteur.

Question 5 Pour la configuration 1 et par la méthode de votre choix, définir l'expression de F_z et F_y en fonction des autres actions mécaniques utiles. Commenter le résultat obtenu et la capacité du capteur à mesurer seulement les actions mécaniques générées par la pince sur le ressort.

Correction

Méthode Dans la configuration 1, $\vec{z}_0 = \vec{z}_3$ et $\vec{y}_0 = \vec{y}_3$. On cherche des expressions suivant \vec{z}_0 et \vec{y}_0 . Appliquer le théorème de la résultante statique suivant \vec{y}_0 et \vec{z}_0 devrait permettre de conclure.

- On isole (E).
- On réalise le bilan des actions mécaniques :
 - actions de pesanteur sur (E) de résultante $\vec{P}_{(E)} = -P \vec{z}_0$;
 - actions du ressort sur (E) de résultante $\vec{R}(\text{Ressort} \rightarrow E) = -F_{R \rightarrow E} \vec{z}_0$;
 - actions du capteur sur (E) de résultante $\vec{R}(\text{Capteur} \rightarrow E) = F_z \vec{z}_0 + F_y \vec{y}_0$.
- On applique le théorème de la résultante statique suivant \vec{y}_0 et \vec{z}_0 et on obtient :
 - $F_y = 0$.
 - $F_z = P - F_{R \rightarrow E}$.

Le capteur doit mesurer les actions de la pince sur le ressort. Or ici, l'effort va aussi dépendre du points de l'ensemble. Dans cette configuration, le capteur ne permet donc pas de dissocier l'effort de l'abdomen du poids du système.

Question 6 Dans la configuration 2, définir l'expression de F_z et F_y en fonction des autres actions mécaniques utiles. Pour réaliser la compensation, quels sont les paramètres à connaître en temps réel ?

Correction

Méthode Dans la configuration 2, appliquer le théorème de la résultante statique suivant \vec{y}_3 et \vec{z}_3 devrait permettre de conclure.

- On isole (E).
- On réalise le bilan des actions mécaniques :
 - actions de pesanteur sur (E) de résultante $\vec{P}_{(E)} = -P \vec{z}_0 = -P (\cos \varphi \vec{z}_3 - \sin \varphi \vec{y}_3)$;
 - actions du ressort sur (E) de résultante $\vec{R}(\text{Ressort} \rightarrow E) = -F_{R \rightarrow E} \vec{z}_3$;
 - actions du capteur sur (E) de résultante $\vec{R}(\text{Capteur} \rightarrow E) = F_z \vec{z}_3 + F_y \vec{y}_3$.
- On applique le théorème de la résultante statique suivant \vec{y}_3 et \vec{z}_3 et on obtient :
 - $F_y = -P \sin \varphi$.
 - $F_z = P \cos \varphi - F_{R \rightarrow E}$.

Si φ est une valeur connue, la mesure suivant \vec{y}_3 permet de déterminer le poids de l'ensemble. Connaissant P , la mesure suivant \vec{z}_3 permet alors de déterminer l'action mécanique du ressort.

Retour sur le cahier des charges

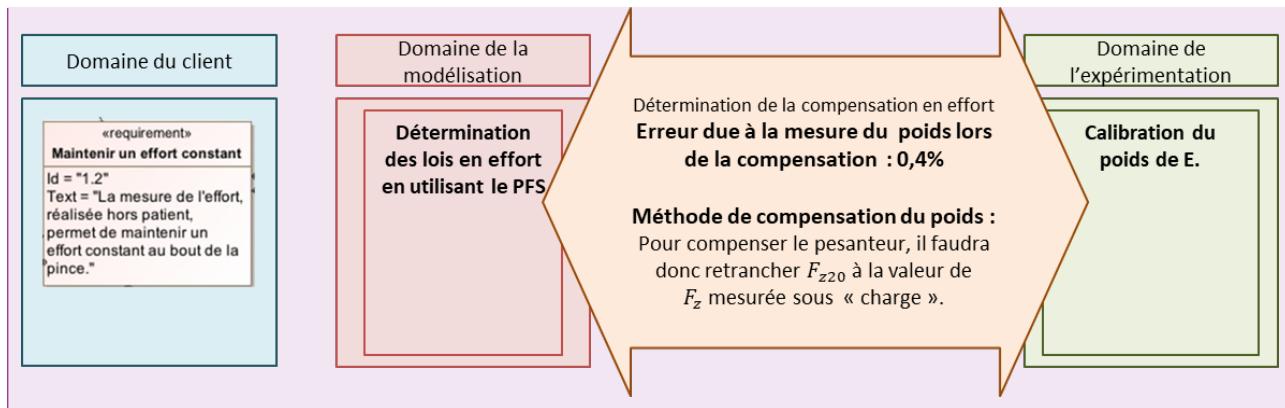
Question 7 Estimer la valeur du poids. Donner une estimation de la fiabilité sur la détermination du poids par les capteurs d'efforts. Pour réaliser la compensation de pesanteur, comment doivent être utilisées ces grandeurs mesurées ?

Correction

On ne connaît pas le poids de l'ensemble qui devrait être une donnée. On va donc le déduire du montage expérimental. En utilisant les expressions de la question précédente, on déduit que $P \approx 12,753 \text{ N}$.

Dans la seconde configuration, on a $|P| = \frac{|F_{y20}|}{\sin \varphi} = \frac{4,382}{\sin 20} \approx 12,81 \text{ N}$ ou $|P| = \frac{|F_{z20}|}{\cos \varphi} = \frac{11,999}{\cos 20} \approx 12,77 \text{ N}$.

Ainsi, une estimation de l'erreur peut être donnée par : $e = \frac{12,81 - 12,753}{12,753} \approx 0,4\%$



TD 02



Quille pendulaire

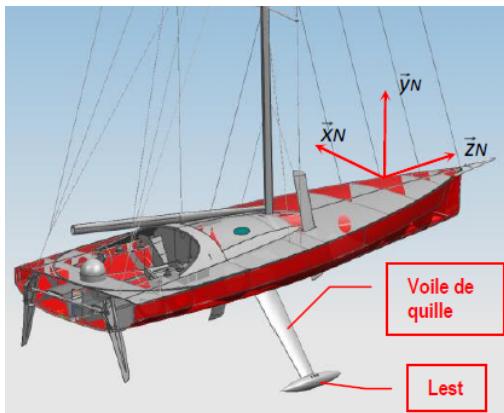
Concours Commun Mines Ponts 2014

Savoirs et compétences :

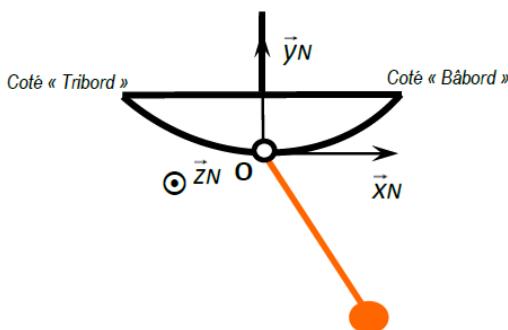
- Res1.C2.SF1 : Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison.
- Res1.C3.SF1 : Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre.
- Res2.C18 : Principe fondamental de la statique.
- Res2.C19 : Équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides.
- Res2.C20 : Théorème des actions réciproques.

Mise en situation

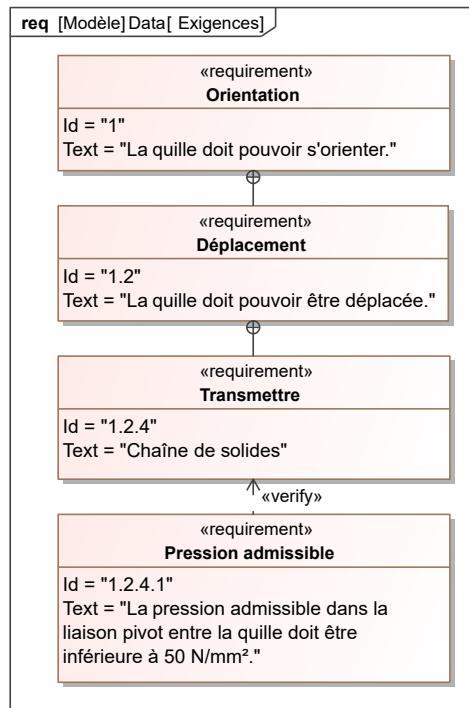
Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.



Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



Objectif L'objectif de cette partie est de valider la solution technologique de réalisation de la liaison pivot entre la quille et la coque.



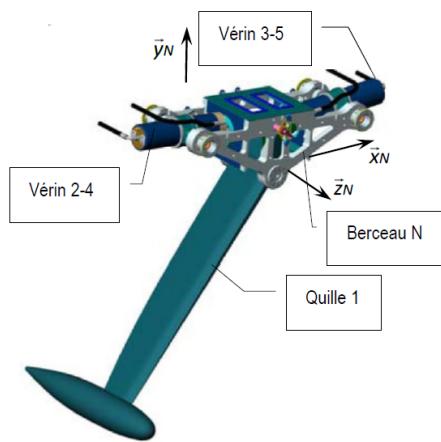
Travail à réaliser

Le modèle de calcul est donné dans les figures suivantes.

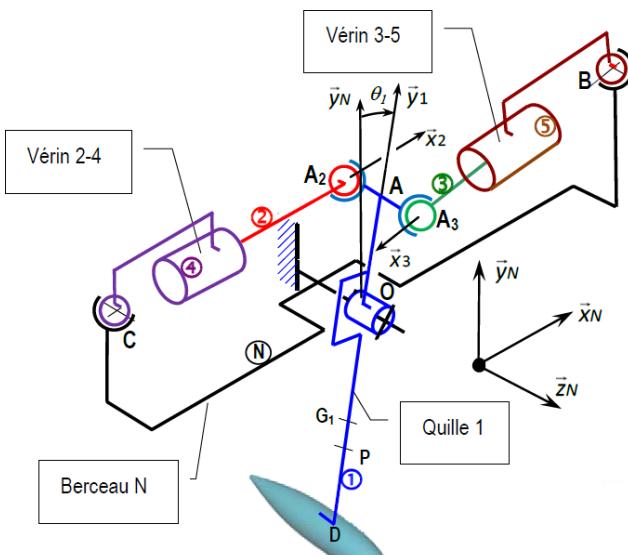
Hypothèses

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- **Seul le vérin 2-4 est moteur** ($F_{h3} = 0$ – les solides 3 et 5 ne sont donc pas à prendre en compte). Le fluide (pression hydraulique) agit simultanément sur les pièces 2 et 4. L'action du fluide sur 2 est donnée par $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_{h2} \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_C$.
- Les actions mécaniques de frottement visqueux provenant du déplacement du fluide dans les canalisations sont toutes négligées.
- Les actions hydrodynamiques sur le voile et le lest de quille sont également négligées.
- Les poids des éléments constitutifs des deux vérins sont négligés.
- Les bases \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_N sont considérées confondues. Cependant l'angle θ_1 est différent de zéro.

- Les conditions de déplacement rendent négligeables les effets dynamiques. Les théorèmes de la statique seront donc utilisés dans la suite.



Modèle volumique 3D



$$\overrightarrow{OA} = R \overrightarrow{y_1}, \theta_1 = (\overrightarrow{x_N}, \overrightarrow{x_1}), \overrightarrow{OG_1} = -L_1 \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{AA_2} = -d \overrightarrow{z_N}$$

$$\overrightarrow{AA_3} = d \overrightarrow{z_N}.$$

Schéma cinématique 3D

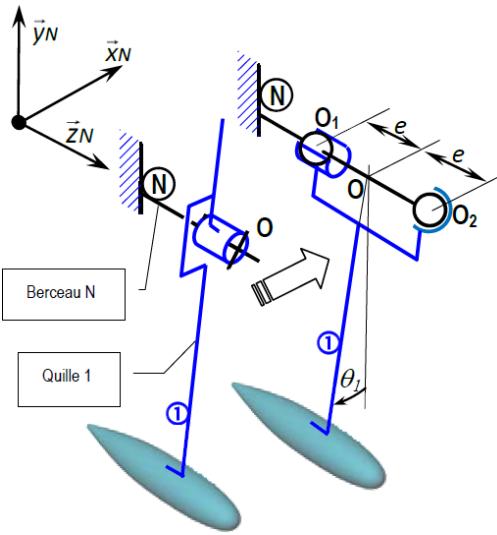
Question 1 En isolant le bon système, montrer que l'action de 2 sur 1 en A_2 est représentable par le glisseur dont la forme sera notée : $\left\{ \begin{array}{c} F_{21} \overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{array} \right\}_{A_2}$ ou $\left\{ \begin{array}{c} F_{21} \overrightarrow{x_N} \\ 0 \end{array} \right\}_{A_2}$ puisque $\mathcal{B}_N = \mathcal{B}_2$.

Question 2 Déterminer l'effort F_{21} nécessaire au déplacement de la quille.

Question 3 Exprimer, en fonction de d , g , M_1 , et F_{21} , par ses éléments de réduction en O , dans la base $(\overrightarrow{x_N}, \overrightarrow{y_N}, \overrightarrow{z_N})$, le torseur d'action mécanique de N sur 1, $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{pivot}$.

La liaison pivot de N sur 1 est composée de deux paliers modélisés par une liaison sphère-cylindre et une liaison sphérique placées en parallèle (voir figure suivante).

La géométrie de l'assemblage est telle que : $\overrightarrow{O_2} = e \overrightarrow{z_N}$; $\overrightarrow{O_1} = -e \overrightarrow{z_N}$ avec $e = 350$ mm.



Question 4 Écrire la relation liant les torseurs d'action mécanique $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphere-cylindre}$, $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphérique}$ et $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{pivot}$. En déduire, par ses éléments de réduction en O_1 , dans la base $\mathcal{B}_N = (\overrightarrow{x_N}, \overrightarrow{y_N}, \overrightarrow{z_N})$, en fonction de d , g , M_1 , et F_{21} , le torseur d'action mécanique de N sur 1 en O_1 , $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphere-cylindre}$.

Retour sur le cahier des charges

On se place dans les conditions suivantes :

- la valeur maximale de l'action F_{21} a été estimée dans l'étude précédente : $F_{21\text{Maxi}} = 2 \times 10^5$ N. De plus : $M_1 g = 4,1 \times 10^4$ N, $e = 350$ mm et $d = 200$ mm;
- les « paliers » sont constitués côté quille de contacts cylindriques de diamètre $d_c = 80$ mm et de longueur $L_c = 50$ mm, O_1 étant dans le plan médian du cylindre de contact. Un coussinet de nylon sert d'interface entre la quille et le navire. Ce coussinet est caractérisé par sa pression de contact maximale admissible : $p_{\text{adm}} = 50$ N mm $^{-2}$. Par ailleurs on peut montrer que lorsqu'un coussinet est chargé par une pression uniforme sur un demi-cylindre, la relation entre l'effort radial est la pression est donnée par :

$$p_{21} = \frac{F}{d_c L_c}.$$

Question 5 Dans ces conditions, calculer la valeur de l'effort radial (perpendiculaire à l'axe géométrique du coussinet) qui sollicite ce coussinet en O_1 . Valider ensuite l'usage de ce coussinet de nylon.

Corrigé résumé

1. .
2. $\Leftrightarrow F_{21} = -\frac{L_1}{R} M_1 g \tan \theta_1$.
3. $X_{N1p} = -F_{21}$, $Y_{N1p} = M_1 g$, $Z_{N1p} = 0$, $L_{N1p} = 0$, $M_{N1p} = d F_{21}$.
4. $X_{N1sc} = -\frac{d}{e} F_{21} - \frac{M_1 g}{2}$ et $Y_{N1sc} = \frac{M_1 g}{2}$ (ou $X_{N1sc} = -\frac{e+d}{2e} F_{21}$).
5. $F = 136336$ N et $p_{21} \approx 34$ MPa < p_{adm} (ou $F = 158000$ N et $p_{21} \approx 40$ MPa).

TD 02



Quille pendulaire

Concours Commun Mines Ponts 2014

Savoirs et compétences :

- Res1.C2.SF1 : Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison.
- Res1.C3.SF1 : Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre.
- Res2.C18 : Principe fondamental de la statique.
- Res2.C19 : Équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides.
- Res2.C20 : Théorème des actions réciproques.

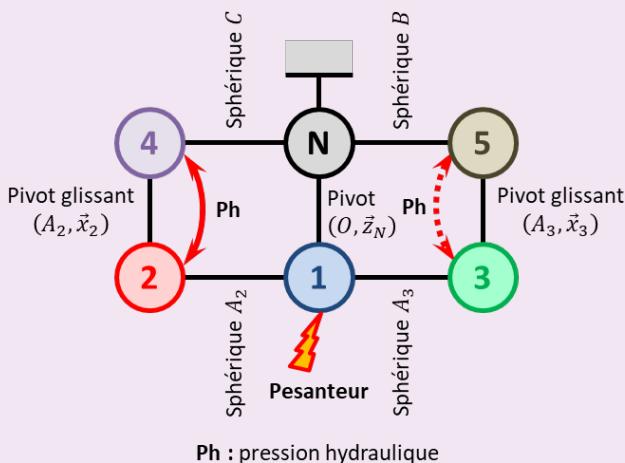
Mise en situation

Objectif L'objectif de cette partie est de valider la solution technologique de réalisation de la liaison pivot entre la quille et la coque.

Travail à réaliser

Question 1 En isolant le bon système, montrer que l'action de 2 sur 1 en A_2 est représentable par le glisseur dont la forme sera notée : $\left\{ \begin{array}{c} F_{21} \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_{A_2}$ ou $\left\{ \begin{array}{c} F_{21} \vec{x}_N \\ 0 \end{array} \right\}_{A_2}$ puisque $\mathcal{B}_N = \mathcal{B}_2$.

Correction Le graphe de structure associé au modèle cinématique est donné dans la figure suivante.



On isole l'ensemble **{4+2}**. Cet ensemble est soumis à 2 glisseurs. D'après le PFS les deux actions mécaniques ont donc même direction (la droite (A_2C), vecteur $\vec{x}_2 = \vec{x}_N$), la même norme ($|F_{21}|$) et le sens opposé. On a donc : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 4)\} + \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \{0\} \Leftrightarrow \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 4)\} = \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}$ et donc $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{21} \vec{x}_N \\ 0 \end{array} \right\}_{A_2}$.

Question 2 Déterminer l'effort F_{21} nécessaire au déplacement de la quille.

Correction On isole la quille 1.

On réalise le BAME :

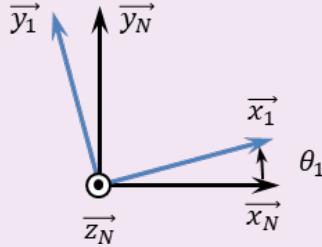
- action de 2 sur 1 : $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{21} \vec{x}_N \\ 0 \end{array} \right\}_{A_2}$;
- action de 3 sur 1 : $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1)\} = \{0\}$ (pas d'action mécanique dans le vérin) ;
- action de N sur 1 : $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{pivot} = \left\{ \begin{array}{c} X_{N1p} \vec{x}_N + Y_{N1p} \vec{y}_N + Z_{N1p} \vec{z}_N \\ L_{N1p} \vec{x}_N + M_{N1p} \vec{y}_N \end{array} \right\}_O$;
- action de la pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(pes \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_1 g \vec{y}_N \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1}$.

La quille étant en pivot d'axe (O, \vec{z}_N) par rapport à $\mathbf{0}$, réalisons le théorème du moment statique en O en projection sur \vec{z}_N :

$$\begin{aligned}
 & (\overrightarrow{OA_2} \wedge F_{21} \vec{x}_N + \overrightarrow{OG_1} \wedge -M_1 g \vec{y}_N) \vec{z}_N = 0 \\
 \Leftrightarrow & ((R \vec{y}_1 - d \vec{z}_N) \wedge F_{21} \vec{x}_N + L_1 \vec{y}_1 \wedge M_1 g \vec{y}_N) \vec{z}_N = 0 \\
 \Leftrightarrow & -F_{21} \vec{y}_N (R \vec{y}_1 - d \vec{z}_N) + L_1 M_1 g (\vec{x}_N \cdot \vec{y}_1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & -RF_{21} \cos \theta_1 - L_1 M_1 g \sin \theta_1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & F_{21} = -\frac{L_1}{R} M_1 g \tan \theta_1.
 \end{aligned}$$

Question 3 Exprimer, en fonction de d , g , M_1 , et F_{21} , par ses éléments de réduction en O , dans la base $(\vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$, le torseur d'action mécanique de N sur 1, $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{pivot}$.

Correction



En conservant le même isolement et le même bilan des actions mécaniques, on réalise le PFS en O et on a :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} F_{21} \vec{x}_N + X_{N1p} \vec{x}_N + Y_{N1p} \vec{y}_N + Z_{N1p} \vec{z}_N - M_1 g \vec{y}_N = \vec{0} \\ \overrightarrow{OA_2} \wedge F_{21} \vec{x}_N + \overrightarrow{OG_1} \wedge -M_1 g \vec{y}_N + L_{N1p} \vec{x}_N + M_{N1p} \vec{y}_N = \vec{0} \end{array} \right. \\
 \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} F_{21} \vec{x}_N + X_{N1p} \vec{x}_N + Y_{N1p} \vec{y}_N + Z_{N1p} \vec{z}_N - M_1 g \vec{y}_N = \vec{0} \\ F_{21} (R \vec{y}_1 \wedge \vec{x}_N - d \vec{z}_N \wedge \vec{x}_N) - L_1 M_1 g \sin \theta \vec{z}_N + L_{N1p} \vec{x}_N + M_{N1p} \vec{y}_N = \vec{0} \end{array} \right. \\
 \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} F_{21} \vec{x}_N + X_{N1p} \vec{x}_N + Y_{N1p} \vec{y}_N + Z_{N1p} \vec{z}_N - M_1 g \vec{y}_N = \vec{0} \\ F_{21} (-R \cos \theta_1 \vec{z}_N - d \vec{y}_N) - L_1 M_1 g \sin \theta \vec{z}_N + L_{N1p} \vec{x}_N + M_{N1p} \vec{y}_N = \vec{0} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} F_{21} + X_{N1p} = 0 \\ Y_{N1p} - M_1 g = 0 \\ Z_{N1p} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{N1p} = 0 \\ -d F_{21} + M_{N1p} = 0 \\ -F_{21} R \cos \theta_1 - L_1 M_1 g \sin \theta = 0 \end{array} \right. \\
 \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} X_{N1p} = -F_{21} \\ Y_{N1p} = M_1 g \\ Z_{N1p} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{N1p} = 0 \\ M_{N1p} = d F_{21} \\ 0 = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Question 4 Écrire la relation liant les torseurs d'action mécanique $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphère-cylindre}$, $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphérique}$ et $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{pivot}$. En déduire, par ses éléments de réduction en O_1 , dans la base $\mathcal{B}_N = (\vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$, en fonction de d , g , M_1 , et F_{21} , le torseur d'action mécanique de N sur 1 en O_1 , $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphère-cylindre}$.

Correction

On a $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphère-cylindre} + \{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphérique} = \{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{pivot}$.

$$\begin{aligned}
 \text{En conséquences : } & \{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphère-cylindre} = \left\{ \begin{array}{l} X_{N1sc} \vec{x}_N + Y_{N1sc} \vec{y}_N \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{l} X_{N1sc} \vec{x}_N + Y_{N1sc} \vec{y}_N \\ -e X_{N1sc} \vec{y}_N + e Y_{N1sc} \vec{x}_N \end{array} \right\}_O \\
 \text{et } & \{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphérique} = \left\{ \begin{array}{l} X_{N1s} \vec{x}_N + Y_{N1s} \vec{y}_N + Z_{N1s} \vec{z}_N \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_2} = \left\{ \begin{array}{l} X_{N1s} \vec{x}_N + Y_{N1s} \vec{y}_N + Z_{N1s} \vec{z}_N \\ e X_{N1s} \vec{y}_N - e Y_{N1s} \vec{x}_N \end{array} \right\}_O.
 \end{aligned}$$

Au final, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{N1p} = X_{N1sc} + X_{N1s} \\ Y_{N1p} = Y_{N1sc} + Y_{N1s} \\ Z_{N1p} = Z_{N1s} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{N1p} = e Y_{N1sc} - e Y_{N1s} \\ M_{N1p} = -e X_{N1sc} - e Y_{N1s} \\ 0 = 0 \end{array} \right..$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{N1p} = X_{N1sc} + X_{N1s} \\ Y_{N1p} = Y_{N1sc} + Y_{N1s} \\ Z_{N1p} = Z_{N1s} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} L_{N1p} = e Y_{N1sc} - e Y_{N1s} \\ M_{N1p} = -e X_{N1sc} - e Y_{N1s} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -F_{21} = X_{N1sc} + X_{N1s} \\ M_1g = Y_{N1sc} + Y_{N1s} \\ 0 = Z_{N1s} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} 0 = e Y_{N1sc} - e Y_{N1s} \\ dF_{21} = -e X_{N1sc} - e Y_{N1s} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -F_{21} = X_{N1sc} + X_{N1s} \\ M_1g = 2Y_{N1sc} \\ Z_{N1s} = 0 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} Y_{N1sc} = Y_{N1s} \\ dF_{21} = -e X_{N1sc} - e Y_{N1sc} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_{N1sc} = -\frac{d}{e}F_{21} - \frac{M_1g}{2} \\ Y_{N1sc} = \frac{M_1g}{2} \end{array} \right.$$

Retour sur le cahier des charges

Question 5 Dans ces conditions, calculer la valeur de l'effort radial (perpendiculaire à l'axe géométrique du coussinet) qui sollicite ce coussinet en O_1 . Valider ensuite l'usage de ce coussinet de nylon.

Correction On a $F = \sqrt{X_{N1sc}^2 + Y_{N1sc}^2} = \sqrt{\left(-\frac{d}{e}F_{21} - \frac{M_1g}{2}\right)^2 + \left(\frac{M_1g}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(-\frac{200}{350}200000 - \frac{41000}{2}\right)^2 + \left(\frac{41000}{2}\right)^2} = 136336 \text{ N.}$$

Et donc, $p_{21} = \frac{136336}{80 \cdot 50} \simeq 34 \text{ MPa} < p_{\text{adm}}$.

TD 01



WHING : WHEELCHAIR INITIATIVE NEW GENERATION *

Concours CCP TSI 2017

Savoirs et compétences :

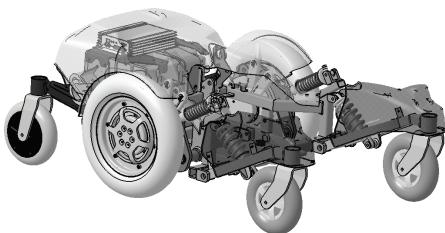
- Res2.C18 : principe fondamental de la statique ;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

Le projet WHING a pour objet d'imaginer et de réaliser et proposer aux utilisateurs un fauteuil verticaliseur à déplacement motorisé de nouvelle génération avec, comme objectifs associés :

- d'intégrer de nouvelles technologies ;
- de mieux prendre en compte les besoins spécifiques des utilisateurs,
- d'utiliser une conception modulaire.

Le fauteuil est équipé d'une base roulante à six roues indépendantes. Les roues centrales motrices autorisent un faible moyen de giration. La base roulante, forte de ses 6 roues indépendantes et amorties assure la stabilité et motricité du fauteuil, quel que soit le profil du terrain rencontré.

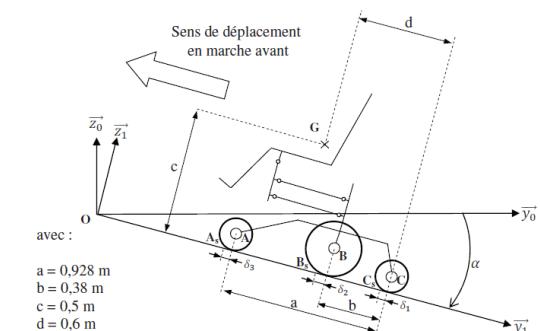


Objectif L'exigence Id = « 1.4.5 » indique que le fauteuil doit être capable de gravir une pente pour monter dans un véhicule de transport. La pente maximale est de 15°. Les caractéristiques du moteur-roue sont données ci-dessous.

«block»	
Moteur roue	
valeurs	
Couple maximal	= 100 N.m
Couple nominal	= 24 N.m
Courant maximal	= 80 A
Courant nominal	= 25 A
Diamètre	= 340 mm
Niveau sonore	= 50 dB
Puissance nominale	= 400 W
Rapport du réducteur	= 8.78
Tension nominale	= 24 V DC
Type	= MCC

↑2

</div



Diamètre roue arrière	$D_1 = 0,180 \text{ m}$
Diamètre moteur-roue	$D_2 = 0,336 \text{ m}$
Diamètre roue avant	$D_3 = 0,200 \text{ m}$
Masse (fauteuil : 167 kg et PMR : 120 kg)	$m = 287 \text{ kg}$
Pente du sol	$\alpha = 15^\circ$ attention α est négatif sur la figure 13
Coefficient résistance au roulement d'une roue arrière	$\delta_1 = 0,001 \text{ m}$
Coefficient résistance au roulement d'une roue motrice	$\delta_2 = 0,004 \text{ m}$
Coefficient résistance au roulement d'une roue avant	$\delta_3 = 0,002 \text{ m}$
Rapport de réduction du moteur-roue	$i = 8,78$
Rendement du réducteur	$\eta = 0,9$

Travail demandé

Question 1 Porter sur la figure suivante :

- l'action de la pesanteur;
- les actions de contact du sol sur les roues. Pour un point A, la composante normale sera notée \vec{N}_A et la composante tangentielle \vec{T}_A . Le sens d'une composante tangentielle est différent si la roue est motrice ou folle;

- le couple \vec{C}_{red} , couple à la sortie du réducteur du moteur-roue.

Question 2 Appliquer le principe fondamental de la statique à l'ensemble WHING + PMR isolé et écrire les 3 équations dans la base \mathcal{R}_1 en fonction des données littérales. L'équation de moment sera exprimée au point B_S .

Question 3 Isoler la roue arrière puis la roue avant et déterminer une équation issue du principe fondamental de statique donnant la composante normale de l'action du sol sur la roue, en fonction des paramètres géométriques et de la composante tangentielle.

Question 4 Isoler la roue motrice et déterminer une équation issue du PFS donnant \vec{C}_{red} en fonction des données géométriques, de \vec{N}_{BS} et \vec{T}_{BS} .

En supposant que le contact du sol sur la roue motrice se fait à la limite du glissement, on obtient un système de 7 équations à 7 inconnues.

La résolution de ce système donne les résultats suivants : $\vec{N}_{BS} \cdot \vec{z}_1 = 1140 \text{ N}$ et $\vec{T}_{BS} \cdot \vec{y}_1 = -350 \text{ N}$.

Question 5 Justifier que la composante $\vec{T}_{BS} \cdot \vec{y}_1$ est négative. À partir des valeurs de $\|\vec{T}_{BS}\|$ et $\|\vec{N}_{BS}\|$, déterminer la valeur de $\|\vec{C}_m\|$ et conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

TD 01



WHING : WHEELCHAIR INITIATIVE NEW GENERATION *

Concours CCP TSI 2017

Savoirs et compétences :

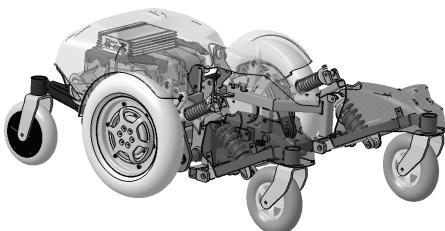
- Res2.C18 : principe fondamental de la statique ;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

Le projet WHING a pour objet d'imaginer et de réaliser et proposer aux utilisateurs un fauteuil verticaliseur à déplacement motorisé de nouvelle génération avec, comme objectifs associés :

- d'intégrer de nouvelles technologies ;
- de mieux prendre en compte les besoins spécifiques des utilisateurs,
- d'utiliser une conception modulaire.

Le fauteuil est équipé d'une base roulante à six roues indépendantes. Les roues centrales motrices autorisent un faible moyen de giration. La base roulante, forte de ses 6 roues indépendantes et amorties assure la stabilité et motricité du fauteuil, quel que soit le profil du terrain rencontré.



Objectif L'exigence Id = « 1.4.5 » indique que le fauteuil doit être capable de gravir une pente pour monter dans un véhicule de transport. La pente maximale est de 15°. Les caractéristiques du moteur-roue sont données ci-dessous.

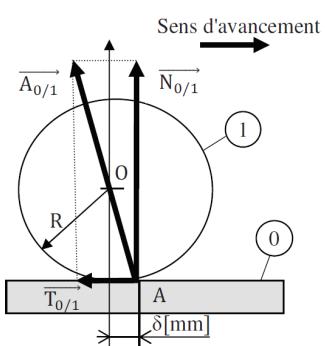
«block»	
Moteur roue	
valeurs	
Couple maximal	= 100 N.m
Couple nominal	= 24 N.m
Courant maximal	= 80 A
Courant nominal	= 25 A
Diamètre	= 340 mm
Niveau sonore	= 50 dB
Puissance nominale	= 400 W
Rapport du réducteur	= 8.78
Tension nominale	= 24 V DC
Type	= MCC

↑2

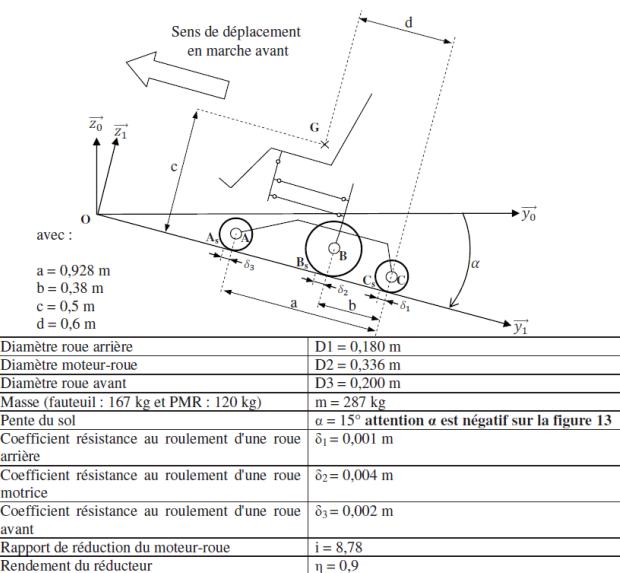
Pour valider cette exigence, le cadre de l'étude est le suivant. Les hypothèses d'étude sont :

- le référentiel $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au sol est supposé galiléen ;
- le WHING se déplace en ligne droite dans une phase de montée, le problème est considéré comme un problème plan. Les effets dynamiques sont négligés car la vitesse de déplacement du fauteuil est faible ;
- le référentiel $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au WHING avec $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$;
- $\vec{P} = -mg\vec{z}_0$ est l'action de la pesanteur et G le centre de gravité de l'ensemble {fauteuil + PMR} ;
- le modèle adopté est équivalent à un seul moteur fournissant un couple C_m avec l'action de la pesanteur ramenée au centre de gravité égale à $\frac{P}{2}$;
- le contact des roues avec le sol se fait avec frottement, on note f le facteur de frottement de valeur 0,45 ;
- la résistance au roulement modélise la déformation du pneumatique.

La résistance au roulement illustrée à la figure suivante, se traduit par un décalage du point d'application de l'action mécanique de contact vers l'avant du fauteuil (dans le sens de l'avancement). La résultante des forces passe en un point A à une distance δ de l'axe de rotation. Cette distance est par définition le coefficient de résistance au roulement.



La figure suivante donne le paramétrage de l'étude en phase de montée d'une pente et les dimensions du WHING. Les points A_S , B_S et C_S correspondent aux points d'application des actions mécaniques du sol sur les roues avant, motrices et arrière du fauteuil.



Travail demandé

Question 1 Porter sur la figure suivante :

- l'action de la pesanteur;
- les actions de contact du sol sur les roues. Pour un point A, la composante normale sera notée \vec{N}_A et la composante tangentielle \vec{T}_A . Le sens d'une composante tangentielle est différent si la roue est motrice ou folle;
- le couple \vec{C}_{red} , couple à la sortie du réducteur du moteur-roue.

Correction

Question 2 Appliquer le principe fondamental de la statique à l'ensemble WHING + PMR isolé et écrire les 3

équations dans la base \mathcal{R}_1 en fonction des données littérales. L'équation de moment sera exprimée au point B_S .

Correction

Question 3 Isoler la roue arrière puis la roue avant et déterminer une équation issue du principe fondamental de statique donnant la composante normale de l'action du sol sur la roue, en fonction des paramètres géométriques et de la composante tangentielle.

Correction

Question 4 Isoler la roue motrice et déterminer une équation issue du PFS donnant \vec{C}_{red} en fonction des données géométriques, de \vec{N}_{BS} et \vec{T}_{BS} .

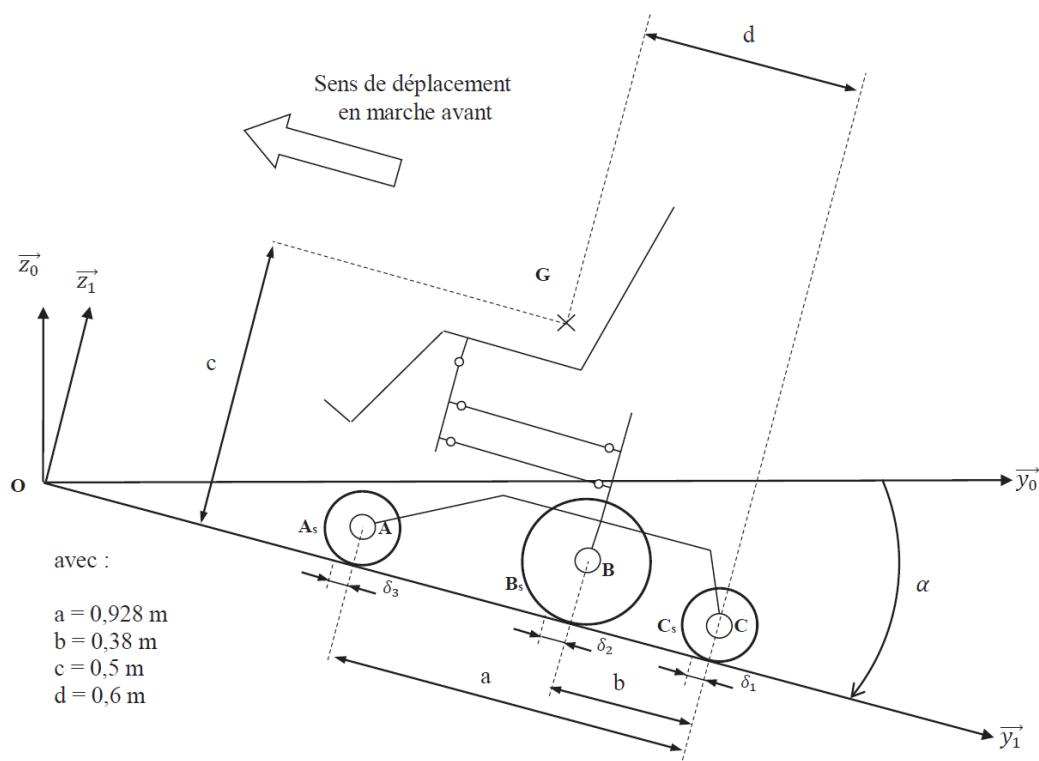
Correction

En supposant que le contact du sol sur la roue motrice se fait à la limite du glissement, on obtient un système de 7 équations à 7 inconnues.

La résolution de ce système donne les résultats suivants : $\vec{N}_{BS} \cdot \vec{z}_1 = 1140\text{ N}$ et $\vec{T}_{BS} \cdot \vec{y}_1 = -350\text{ N}$.

Question 5 Justifier que la composante $\vec{T}_{BS} \cdot \vec{y}_1$ est négative. À partir des valeurs de $\|\vec{T}_{BS}\|$ et $\|\vec{N}_{BS}\|$, déterminer la valeur de $\|\vec{C}_m\|$ et conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

Correction

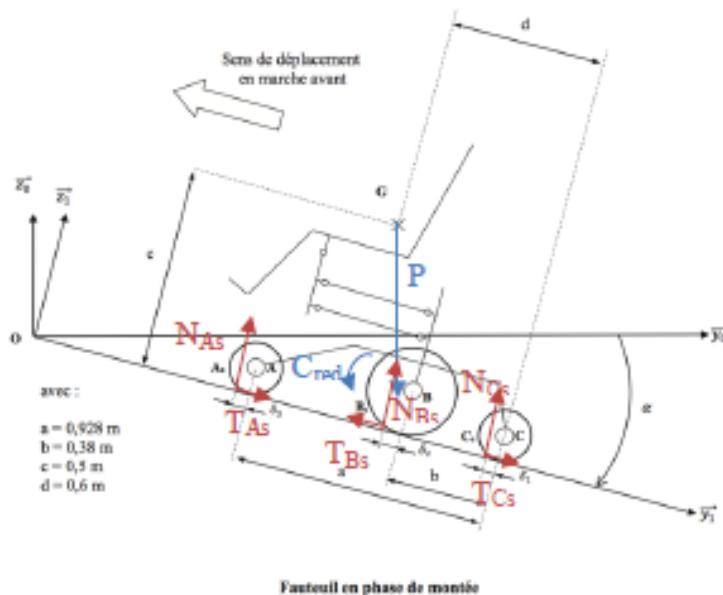


Fauteuil en phase de montée

Détermination du couple des moteurs-roues

Q29. Lorsque la roue est motrice, un couple génère la rotation de la roue. L'action de la roue motrice sur le sol a donc une composante tangentielle issue du frottement qui est colinéaire à \vec{y}_1 . Par action réaction, la composante tangentielle de l'action du sol sur la roue motrice est donc colinéaire à $-\vec{y}_1$.

Lorsque la roue est folle, l'action du sol s'oppose au déplacement de la roue folle. La composante tangentielle de l'action du sol sur la roue folle est donc colinéaire à $+\vec{y}_1$.



Q30. On isole l'ensemble {Whing + PMR} = \sum

Bilan des actions mécaniques :

- Action de la pesanteur : $\{T_{g \rightarrow \Sigma}\} = \begin{cases} \frac{m}{2} g \cdot \vec{z_0} \\ \vec{0} \end{cases}$
- Couple moteur : $\{T_{red \rightarrow \Sigma}\} = \begin{cases} \vec{0} \\ C_{red} \cdot \vec{x_1} \end{cases}$ avec $C_{red} = \eta \cdot i \cdot C_m$
- Ponctuelle en As : $\{T_{s \rightarrow \Sigma}^{As}\} = \begin{cases} N_{As} \cdot \vec{z_1} + T_{As} \cdot \vec{y_1} \\ \vec{0} \end{cases}$
- Ponctuelle en Bs : $\{T_{s \rightarrow \Sigma}^{Bs}\} = \begin{cases} N_{Bs} \cdot \vec{z_1} - T_{Bs} \cdot \vec{y_1} \\ \vec{0} \end{cases}$
- Ponctuelle en Cs : $\{T_{s \rightarrow \Sigma}^{Cs}\} = \begin{cases} N_{Cs} \cdot \vec{z_1} + T_{Cs} \cdot \vec{y_1} \\ \vec{0} \end{cases}$

On déplace tous les moments au point Bs :

$$\overrightarrow{M_{Bs,g \rightarrow \Sigma}} = \overrightarrow{M_{G,g \rightarrow \Sigma}} + \overrightarrow{BsG} \wedge \overrightarrow{R_{g \rightarrow \Sigma}} = -\frac{m}{2} g [(\delta_2 + b - d) \cos \alpha - c \sin \alpha] \cdot \vec{x_1}$$

$$\overrightarrow{M_{Bs,red \rightarrow \Sigma}} = C_{red} \cdot \vec{x_0} \text{ car c'est un torseur couple}$$

$$\overrightarrow{M_{Bs,s \rightarrow \Sigma}^{As}} = (\delta_2 + b - a - \delta_3) N_{As} \cdot \vec{x_1}$$

$$\overrightarrow{M_{Bs,s \rightarrow \Sigma}^{Cs}} = (\delta_2 + b - \delta_1) N_{Cs} \cdot \vec{x_1}$$

Le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 donne :

$$\begin{aligned} N_{As} + N_{Bs} + N_{Cs} - \frac{m}{2}g \cos \alpha &= 0 \\ T_{As} + T_{Cs} - T_{Bs} - \frac{m}{2}g \sin \alpha &= 0 \\ -\frac{m}{2}g[(\delta_2 + b - d) \cos \alpha - c \sin \alpha] + C_{red} + (\delta_2 + b - a - \delta_3)N_{As} + (\delta_2 + b - \delta_1)N_{Cs} &= 0 \end{aligned}$$

Q31. On isole la roue arrière : On choisit d'énoncer le PFS en moment au point A projeté sur \vec{x}_0 pour ne pas faire intervenir les inconnues de la liaison pivot d'axe (C, \vec{x}_0) :

On déplace le torseur des actions du sol au point A :

$$\overrightarrow{M_{A,s \rightarrow \Sigma}^{As}} = \left(-\delta_3 N_{As} + \frac{D_3}{2} T_{As} \right) \cdot \vec{x}_1$$

Le TMS donne :

$$\delta_3 N_{As} = \frac{D_3}{2} T_{As}$$

Idem sur la roue avant. On obtient :

$$\delta_1 N_{Cs} = \frac{D_1}{2} T_{Cs}$$

Q32. On isole la roue motrice : TMS exprimé au point C projeté sur \vec{x}_0 :

$$\overrightarrow{M_{B,s \rightarrow \Sigma}^{Bs}} = \left(-\delta_2 N_{Bs} - \frac{D_2}{2} T_{Bs} \right) \cdot \vec{x}_1$$

D'où :

$$C_{red} = \delta_2 N_{Bs} + \frac{D_2}{2} T_{Bs}$$

Q33. Si $\vec{T}_{Bs} \cdot \vec{y}_1$ n'était pas négative, il s'opposerait au couple moteur et le frottement n'aiderait pas le moteur à faire gravir la côte au Whing.

AN : $C_{red} = 0,004 \cdot 1140 + 0,336 / 2 \cdot 350 = 63,36 \text{ Nm}$

D'où $C_m = \frac{C_{red}}{\eta i} = \frac{63,36}{8,78 \cdot 0,9} = 8 \text{ Nm}$

Le moteur pouvant développer un couple moteur de 24 Nm, le Whing peut démarrer sur une pente de 15° .

TD 01



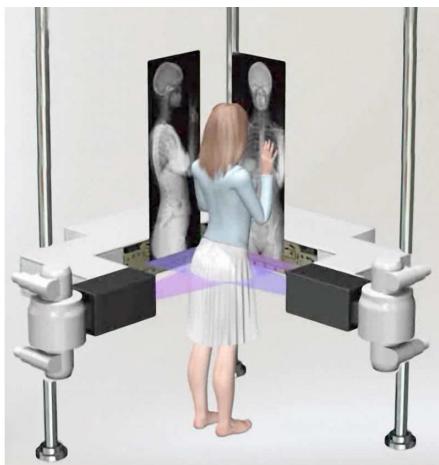
Système EOS *

Banque PT SIA – 2016

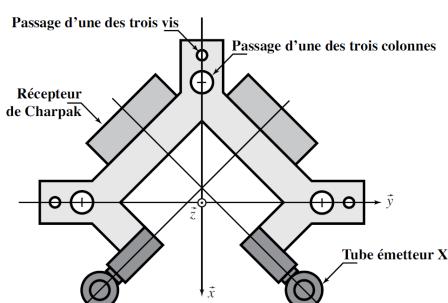
Savoirs et compétences :

Mise en situation

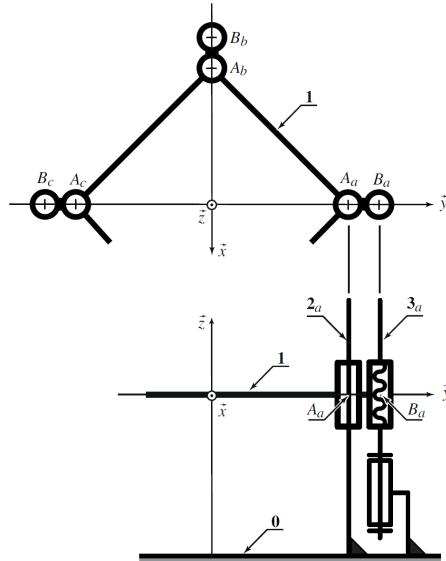
Le système EOS permet l'acquisition simultanée de radiographies de face et de profil du corps entier (ou d'une zone anatomique localisée) avec une réduction de la dose de rayons X de l'ordre de 90 % par rapport à un système radiographique conventionnel ou un scanner.



Le mécanisme interne, constitué d'un bras mobile, guidé par rapport au bâti par trois colonnes verticales. Le bras supporte deux chaînes d'acquisition, chacune d'entre elles étant composée d'un tube à rayons X et d'un détecteur.

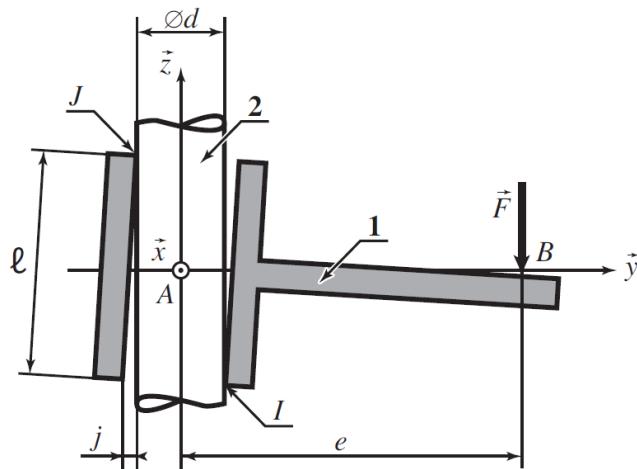


La figure suivante représente le bras mobile en vue de dessus, ce qui permet de voir les passages des colonnes et des vis. Le modèle cinématique permettant d'appréhender le fonctionnement interne.



On s'intéresse plus précisément à une des trois chaînes réalisant la liaison entre le bras mobile 1 et le bâti 0. Cette liaison est principalement réalisée par le biais d'une colonne 2, qui est en liaison complète avec 0. Un schéma de principe est représenté sur la figure suivante. La colonne est de diamètre d , l'alésage du bras de diamètre $d + j$ et de longueur ℓ . On suppose que le jeu j , bien que négligeable devant d ($j \ll d$), permet un léger basculement du bras par rapport à la colonne, ce qui conduit à considérer cet assemblage comme l'association en parallèle de deux liaisons sphère-plan, en I et J . Le contact est modélisé en utilisant la modèle de Coulomb et on note f le coefficient de frottement. Le bras 1 est soumis à une action mécanique motrice (issue de la liaison hélicoïdale) modélisée par un glisseur en B noté $F = -F_z$ ($F > 0$) dont l'axe central est distant de e de l'axe de la liaison. On se propose d'étudier le risque d'arcoulement de cette liaison, supposée plane, en négligeant les actions de la pesanteur.

Objectif Déterminer les conditions de non arcoulement du guidage du système EOS.



Travail à réaliser

Question 1 En introduisant $F_I = Y_I \vec{y} + Z_I \vec{z}$ et $F_J = Y_J \vec{y} + Z_J \vec{z}$, les glisseurs en I et J qui résultent des actions mécaniques exercées par la colonne 2 sur le bras 1, écrire les trois équations scalaires traduisant l'équilibre du bras.

Question 2 En supposant que $F > 0$, comme précisé ci-dessus, donner les signes des composantes Y_I , Z_I , Y_J et Z_J puis écrire, en utilisant le modèle de Coulomb, les inéquations qui lient ces composantes.

Question 3 En supposant qu'on est à la limite du glissement au niveau d'un des contacts, donner la condition nécessaire entre ℓ , f et e pour qu'il n'y ait pas d'arcoulement

ment dans la liaison.

Conclusion vis-à-vis de l'objectif

Question 4 Vérifier que la condition de non arcoulement est satisfaite sur le système EOS pour lequel les grandeurs caractéristiques fournies ci-dessous ?

Grandeur	Notation	Unités	Valeur numérique
Diamètre des colonnes de guidage	d	cm	10
Diamètre des vis de guidage	d'	cm	5
Hauteur totale des colonnes	H	cm	200
Limite de course du bras	h0	cm	10
Longueur de guidage des colonnes	ℓ	cm	20
Coefficient de frottement colonne/bras	f	—	0,2
Excentration guidage en translation	e	cm	20

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \begin{cases} Y_I + Y_J = 0 \\ Z_I + Z_J - F = 0 \\ -Y_J \frac{\ell}{2} - Z_J \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - Z_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \end{cases} \\
 2. . \\
 3. \quad & \frac{\ell}{2e} \leq f \\
 4. .
 \end{aligned}$$

TD 01



Système EOS *

Banque PT SIA – 2016

Savoirs et compétences :

Mise en situation

Objectif Déterminer les conditions de non arcubtement du guidage du système EOS.

Travail à réaliser

Question 1 En introduisant $F_I = Y_I \vec{y} + Z_I \vec{z}$ et $F_J = Y_J \vec{y} + Z_J \vec{z}$, les glisseurs en I et J qui résultent des actions mécaniques exercées par la colonne 2 sur le bras 1, écrire les trois équations scalaires traduisant l'équilibre du bras.

Correction

En appliquant le PFS en B, on a :

$$\begin{cases} Y_I + Y_J = 0 \\ Z_I + Z_J - F = 0 \\ -Y_J \frac{\ell}{2} - Z_J \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - Z_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

Question 2 En supposant que $F > 0$, comme précisé ci-dessus, donner les signes des composantes Y_I , Z_I , Y_J et Z_J puis écrire, en utilisant le modèle de Coulomb, les inéquations qui lient ces composantes.

Correction

$$\text{On a de plus : } \begin{cases} Y_I \geq 0 \text{ et } Z_I \geq 0 \\ Y_J \leq 0 \text{ et } Z_J \geq 0 \\ |Z_I| \leq f|Y_I| \text{ et } |Z_J| \leq f|Y_J| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_I \geq 0 \text{ et } Z_I \geq 0 \\ Y_J \leq 0 \text{ et } Z_J \geq 0 \\ Z_I \leq f Y_I \text{ et } Z_J \leq -f Y_J \end{cases}$$

Question 3 En supposant qu'on est à la limite du glissement au niveau d'un des contacts, donner la condition nécessaire entre ℓ , f et e pour qu'il n'y ait pas d'arcubtement dans la liaison.

Correction

On considère qu'on est à la limite du glissement au point I. En conséquences,

$$\begin{cases} Z_I = f Y_I \\ Y_I + Y_J = 0 \\ Z_I + Z_J - F = 0 \\ -Y_J \frac{\ell}{2} - Z_J \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - Z_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \\ Y_I \frac{\ell}{2} - (F - f Y_I) \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - f Y_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow Y_I \left(\frac{\ell}{2} + f \left(e + \frac{d}{2} \right) + \frac{\ell}{2} - f \left(e - \frac{d}{2} \right) \right) - F \left(e + \frac{d}{2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow Y_I (\ell + f d) - F \left(e + \frac{d}{2} \right) = 0 \\ \text{et } \Leftrightarrow F = Y_I \frac{\ell + f d}{e + \frac{d}{2}} = Y_I \frac{2\ell + 2fd}{2e + d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_I = f Y_I \\ Y_J = -Y_I \\ Z_J = F - Z_I = F - f Y_I \\ Y_I \frac{\ell}{2} - (F - f Y_I) \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - f Y_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

De plus, au point J , on a nécessairement : $Z_J \leq -f Y_J$. En conséquences,

$$F - f Y_I \leq f Y_I$$

$$\Leftrightarrow F - f Y_I \leq f Y_I \Leftrightarrow F \leq 2f Y_I \Leftrightarrow F \leq 2f Y_I \Leftrightarrow Y_I \frac{2\ell + 2fd}{2e + d} \leq 2f Y_I \Leftrightarrow \frac{2\ell + 2fd}{2e + d} \leq 2f \Leftrightarrow 2\ell + 2fd \leq 4fe + 2fd$$

$$\Leftrightarrow \ell \leq 2fe \Leftrightarrow \frac{\ell}{2e} \leq f$$

Correction

On considère qu'on est à la limite du glissement au point J . En conséquences,

$$\begin{cases} Z_J = -f Y_J \\ Y_I + Y_J = 0 \\ Z_I + Z_J - F = 0 \\ -Y_J \frac{\ell}{2} - Z_J \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - Z_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z_J = -f Y_J \\ Y_I = -Y_J \\ Z_I = -Z_J + F = f Y_J + F \\ -Y_J \frac{\ell}{2} + f Y_J \left(e + \frac{d}{2} \right) - Y_J \frac{\ell}{2} - (f Y_J + F) \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Et donc } Y_J \left(-\ell + f \left(e + \frac{d}{2} \right) - f \left(e - \frac{d}{2} \right) \right) - F \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow Y_J (-\ell + fd) - F \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow Y_J (-\ell + fd) = F \left(e - \frac{d}{2} \right) \Leftrightarrow F = Y_J \frac{-\ell + fd}{e - \frac{d}{2}}$$

Par ailleurs, on a : $Z_I \leq f Y_I \Leftrightarrow f Y_J + F \leq -f Y_J$

$$\Leftrightarrow 2f Y_J + F \leq 0 \Leftrightarrow 2f Y_J + Y_J \frac{-\ell + fd}{e - \frac{d}{2}} \leq 0 \Leftrightarrow 2f + \frac{-\ell + fd}{e - \frac{d}{2}} \geq 0 \quad (Y_J < 0) \Leftrightarrow \frac{2fe - fd - \ell + fd}{e - \frac{d}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2fe - \ell}{e - \frac{d}{2}} \geq 0$$

0.

???

- Si $e - \frac{d}{2} > 0$: $2fe - \ell \geq 0$ et $f \geq \frac{\ell}{2e}$.
- Si $e - \frac{d}{2} < 0$: $2fe - \ell \leq 0$ et $f \leq \frac{\ell}{2e}$.

Conclusion vis-à-vis de l'objectif

Question 4 Vérifier que la condition de non arcublement est satisfaite sur le système EOS pour lequel les grandeurs caractéristiques fournies ci-dessous ?

Correction Pour ne pas arcouter, il faut donc vérifier la relation $\frac{\ell}{2e} > f : \frac{20}{2 \times 20} > f$ et donc $0,5 > 0,2$. La condition de glissement est donc vérifiée.