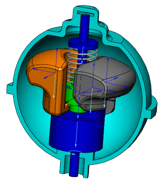
Application

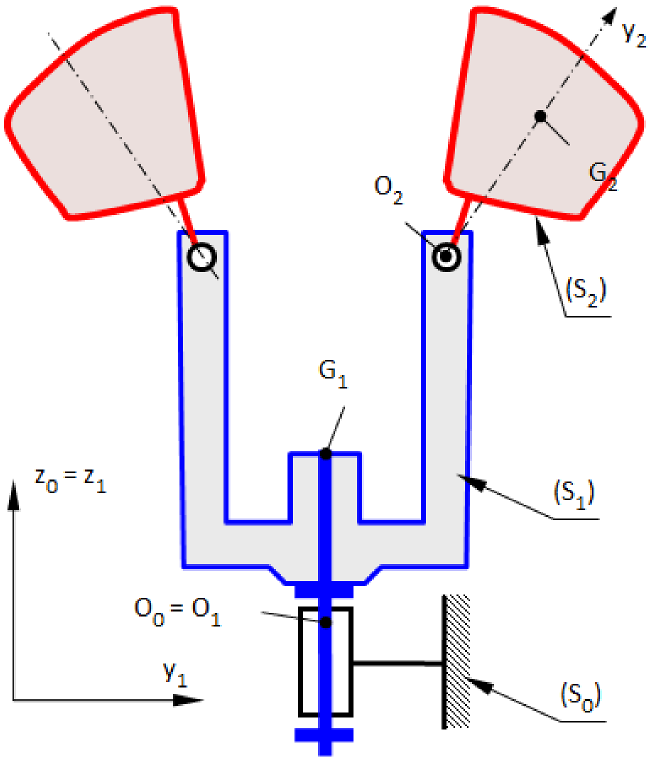


Application – Régulateur centrifuge

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

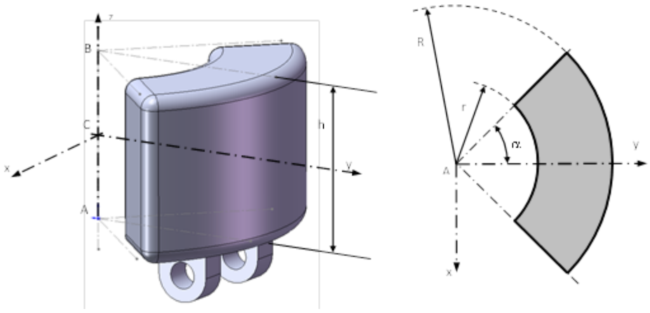
On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor (S_1) et la masselotte (S_2) représentés schématiquement ci-dessous.



- (S_1) est en liaison pivot d'axe $\left(O_1, \overrightarrow{z_0}\right)$ avec (S_0).
- (S_2) est en liaison pivot d'axe $\left(O_2, \overrightarrow{x_1}\right)$ avec (S_1).
- $\left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}\right) = \theta_1$.
- $\left(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}\right) = \left(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}\right) = \theta_2$.
- $\overrightarrow{O_0G_1} = h_1 \overrightarrow{z_0}$.
- $\overrightarrow{O_0O_2} = d_1 \overrightarrow{z_0} + L_1 \overrightarrow{y_1}$.
- $\overrightarrow{O_2G_2} = L_2 \overrightarrow{y_2}$.

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



Question 1 *Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).*

Correction Le solide 1 est axisymétrique. En tout point de l'axe du solide, la matrice d'inertie sera diagonale. On a donc $I_{O_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$.

Le solide 2 admet le plan $\left(\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ comme plan de symétrie. Les produits d'inertie dépendant de x sont nuls. On a donc $I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.

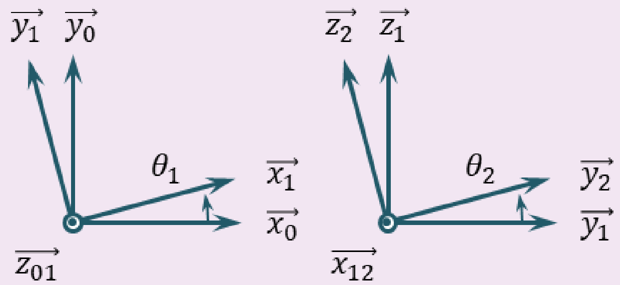
Afin de ne pas trop alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesse de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Question 2 *Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.*

Question 3 *Déterminer :*

- *le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$ en O_1 ;*
- *le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$ en O_2.*

Correction



Mouvement du solide 1/0

On a : $\{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_1}$.

O_1 est un point fixe dans R_0.

$\{\mathcal{C}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ I_{O_1}(S_1)\overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_{O_1}$ et $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_1 \ddot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_{O_1}$.

Mouvement du solide 2/0

On a : $\{\mathcal{V}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{V(G_2 \in S_2/R_0)} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} \\ L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1 L_1 \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_{G_2}$.

$\overrightarrow{V(G_2 \in S_2/R_0)} = \overrightarrow{V(G_2 \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(G_2 \in S_1/R_0)}$

$= \left(\underbrace{\overrightarrow{V(O_2 \in S_2/S_1)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{G_2 O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} \right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{V(O_0 \in S_1/R_0)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{G_2 O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \right)$

$= \left(-L_2\overrightarrow{y_2}\wedge\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}\right)+\left(-\left(d_1\overrightarrow{z_0}+L_1\overrightarrow{y_1}+L_2\overrightarrow{y_2}\right)\wedge\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}\right)=L_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_2}-\dot{\theta}_1\left(L_1+L_2\cos\theta_2\right)\overrightarrow{x_1}$

G_2 est le centre de gravité de S_2.

$$\left\{\mathscr{C}\left(S_2/R_0\right)\right\}=\left\{\begin{array}{l} m_2\left(L_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_2}-\dot{\theta}_1\left(L_1+L_2\cos\theta_2\right)\overrightarrow{x_1}\right)\\ I_{G_2}\left(S_2\right)\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\end{array}\right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}=\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}+\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}=\dot{\theta}_1\left(\cos\theta_2\overrightarrow{z_2}+\sin\theta_2\overrightarrow{y_2}\right)+\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}$$

$$I_{G_2}\left(S_2\right)\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & -D_2\\ 0 & -D_2 & C_2\end{pmatrix}_{B_2}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_1\sin\theta_2\\ \dot{\theta}_1\cos\theta_2\end{pmatrix}_{B_2}=\begin{pmatrix} A_2\dot{\theta}_2\\ B_2\dot{\theta}_1\sin\theta_2-D_2\dot{\theta}_1\cos\theta_2\\ -D_2\dot{\theta}_1\sin\theta_2+C_2\dot{\theta}_1\cos\theta_2\end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\left\{\mathscr{D}\left(S_2/R_0\right)\right\}=\left\{\begin{array}{l} m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2\in S_2/R_0)}\\ \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_{G_2}\left(S_2\right)\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\right)\right]_{R_0}\end{array}\right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_2\in S_2/R_0)}=\left[\frac{\mathrm{d}\left(L_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_2}-\dot{\theta}_1\left(L_1+L_2\cos\theta_2\right)\overrightarrow{x_1}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}$$

$= L_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{z_2}+L_2\dot{\theta}_2\left(\dot{\theta}_1\sin\theta_2\overrightarrow{x_{1,2}}-\dot{\theta}_2\overrightarrow{y_2}\right)-\ddot{\theta}_1\left(L_1+L_2\cos\theta_2\right)\overrightarrow{x_1}-\dot{\theta}_1\left(-L_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right)\overrightarrow{x_1}-\dot{\theta}_1^2\left(L_1+L_2\cos\theta_2\right)\overrightarrow{y_1}$

$= L_2\ddot{\theta}_2\overrightarrow{z_2}-L_2\dot{\theta}_2^2\overrightarrow{y_2}+\left(2L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2-\ddot{\theta}_1\left(L_1+L_2\cos\theta_2\right)\right)\overrightarrow{x_1}-\dot{\theta}_1^2\left(L_1+L_2\cos\theta_2\right)\overrightarrow{y_1}$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{G_2}\left(S_2\right)\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\right]_{R_0}=\ldots$$

$$=\begin{pmatrix} A_2\ddot{\theta}_2\\ B_2\ddot{\theta}_1\sin\theta_2-D_2\ddot{\theta}_1\cos\theta_2+B_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2+D_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2\\ -D_2\ddot{\theta}_1\sin\theta_2+C_2\ddot{\theta}_1\cos\theta_2-D_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2-C_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2\end{pmatrix}_{B_2}$$

$+A_2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1\overrightarrow{y_1}+\left(B_2\dot{\theta}_1\sin\theta_2-D_2\dot{\theta}_1\cos\theta_2\right)\left(-\dot{\theta}_1\cos\theta_2\overrightarrow{x_1}+\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_2}\right)+\left(-D_2\dot{\theta}_1\sin\theta_2+C_2\dot{\theta}_1\cos\theta_2\right)\left(\dot{\theta}_1\sin\theta_2\overrightarrow{x_{1,2}}-\dot{\theta}_2\overrightarrow{y_2}\right)$

$$\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_2}+\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\wedge\overrightarrow{z_2}=\left(\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}+\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}\right)\wedge\overrightarrow{z_2}=\dot{\theta}_1\sin\theta_2\overrightarrow{x_{1,2}}-\dot{\theta}_2\overrightarrow{y_2}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_2}+\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\wedge\overrightarrow{y_2}=\left(\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}+\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}\right)\wedge\overrightarrow{y_2}=-\dot{\theta}_1\cos\theta_2\overrightarrow{x_1}+\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_2}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_1}+\overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)}\wedge\overrightarrow{x_1}=\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}\wedge\overrightarrow{x_1}=\dot{\theta}_1\overrightarrow{y_1}$$

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\delta\left(O_2,2/0\right)}\cdot\overrightarrow{x_2}$.*

Correction $\overrightarrow{\delta\left(O_2,2/0\right)}\cdot\overrightarrow{x_2}$

$$=\left(\overrightarrow{\delta\left(G_2,2/0\right)}+\overrightarrow{O_2G_2}\wedge M_2\overrightarrow{\Gamma(G_2\in 2/0)}\right)\cdot\overrightarrow{x_2}$$

$$=\left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{G_2}\left(S_2\right)\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\right]_{R_0}+\overrightarrow{O_2G_2}\wedge M_2\overrightarrow{\Gamma(G_2\in 2/0)}\right)\cdot\overrightarrow{x_2}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{G_2}\left(S_2\right)\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\cdot\overrightarrow{x_2}\right]_{R_0}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{G_2}\left(S_2\right)\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\right]_{R_0}\cdot\overrightarrow{x_2}+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{G_2}\left(S_2\right)\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\cdot\overrightarrow{x_2}\right]_{R_0}$$

Question 5 *Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique $\left\{\mathscr{D}\left(E/R_0\right)\right\}$ en O_2 ?*

Question 6 *Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.*

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre S_1 et S_2 (couple maximal 0.46 Nm) , une seconde avec frottement (couple maximal 0.1 Nm).

Question 7 *Commenter ces résultats.*