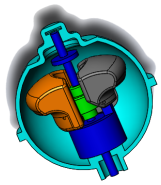
Application

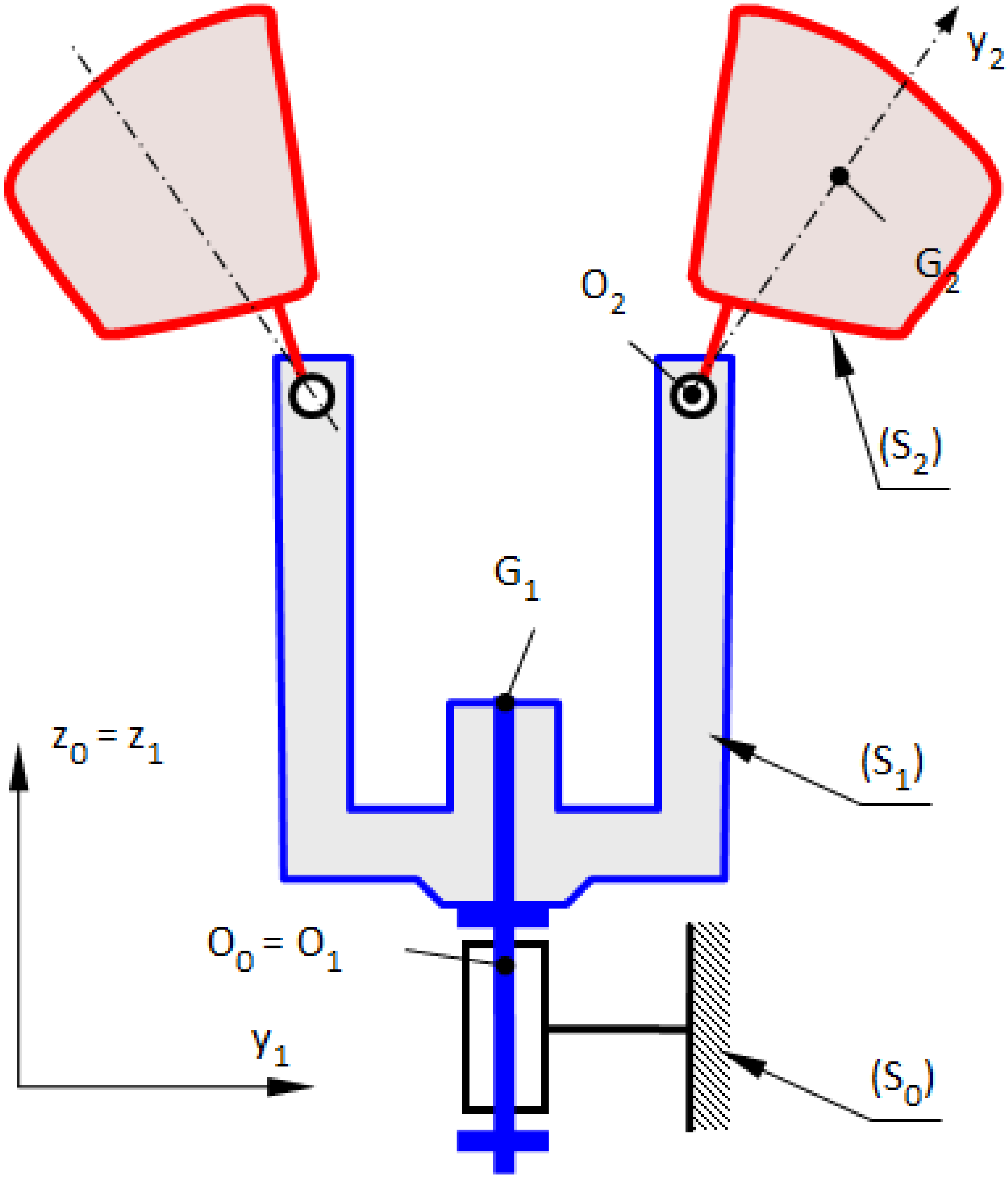


Application – Régulateur centrifuge

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor (S_1) et la masselotte (S_2) représentés schématiquement ci-dessous.

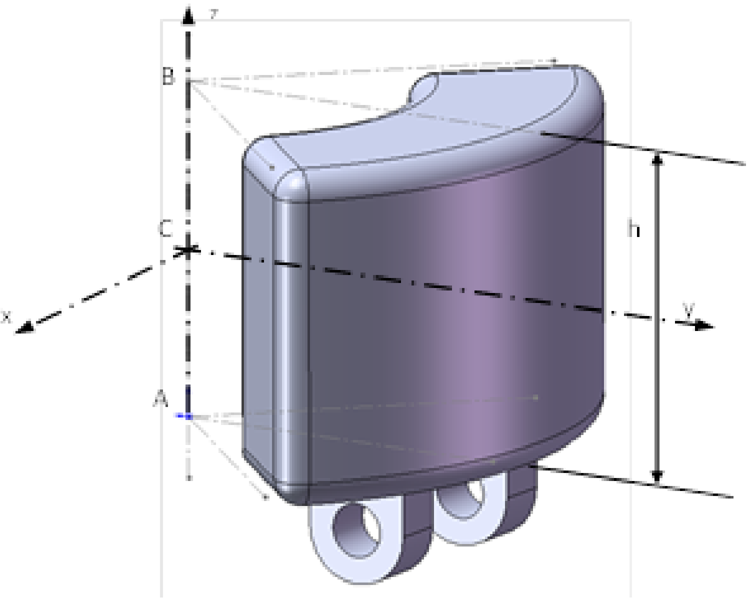


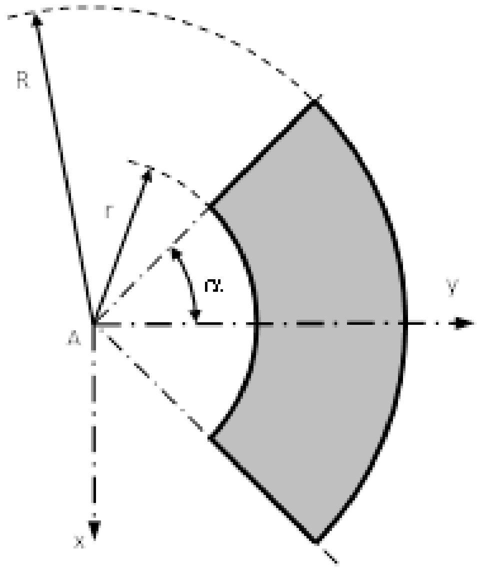
- (S_1) est en liaison pivot d'axe $\left(O_1, \overrightarrow{z_0}\right)$ avec (S_0).
- (S_2) est en liaison pivot d'axe $\left(O_2, \overrightarrow{x_1}\right)$ avec (S_1).
- $\left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}\right) = \theta_1$.
- $\left(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}\right) = \left(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}\right) = \theta_2$.
- $\overrightarrow{O_0G_1} = h_1 \overrightarrow{z_0}$.
- $\overrightarrow{O_0O_2} = d_1 \overrightarrow{z_0} + L_1 \overrightarrow{y_1}$.
- $\overrightarrow{O_2G_2} = L_2 \overrightarrow{y_2}$.

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$.

Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.





Question 1 *Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).*

Correction Le solide 1 est axisymétrique. En tout point de l'axe du solide, la matrice d'inertie sera diagonale. On a donc $I_{O_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$.

Le solide 2 admet le plan $\left(\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ comme plan de symétrie. Les produits d'inertie dépendant de x sont nuls. On a donc $I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.

Afin de ne pas trop alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesse de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Question 2 *Déterminer :*

- *le torseur dynamique $\{\delta(S_1/R_0)\}$ en O_1 ;*
- *le torseur dynamique $\{\delta(S_2/R_0)\}$ en O_2 ;*
- *le torseur dynamique $\{\delta(E/R_0)\}$ en O_2 ;*

Correction

Mouvement du solide 1/0

On a : $\{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_1}$.

O_1 est un point fixe dans R_0.

$\{\sigma(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ I_{O_1}(S_1)\overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_{O_1}$ et $\{\delta(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_1 \ddot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_{O_1}$.

Mouvement du solide 2/0

On a : $\{\mathcal{V}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{V(G_2 \in S_2/R_0)} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2} \\ L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1 L_1 \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_{G_2}$.

$\overrightarrow{V(G_2 \in S_2/R_0)} = \overrightarrow{V(G_2 \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(G_2 \in S_1/R_0)}$

$= \left(\underbrace{\overrightarrow{V(O_2 \in S_2/S_1)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{G_2O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} \right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{V(O_0 \in S_1/R_0)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{G_2O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} \right)$

$= \left(-L_2 \overrightarrow{y_2} \wedge \dot{\theta}_2 \overrightarrow{x_2}\right) + \left(-\left(d_1 \overrightarrow{z_0} + L_1 \overrightarrow{y_1}\right) \wedge \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_1}\right) = L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1 L_1 \overrightarrow{x_1}$

G_2 est le centre de gravité de S_2.

$$\{\sigma(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2\left(L_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1 L_1\overrightarrow{x_1}\right) \\ I_{G_2}(S_2)\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} = \dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2} = \dot{\theta}_1\left(\cos\theta_2\overrightarrow{z_2} + \sin\theta_2\overrightarrow{y_2}\right) + \dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}$$

$$I_{G_2}(S_2)\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1\sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} A_2\dot{\theta}_2 \\ B_2\dot{\theta}_1\sin\theta_2 - D_2\dot{\theta}_1\cos\theta_2 \\ -D_2\dot{\theta}_1\sin\theta_2 + C_2\dot{\theta}_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\{\delta(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2\in S_2/R_0)} \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_{G_2}(S_2)\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\right]_{R_0} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_2\in S_2/R_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(L_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1 L_1\overrightarrow{x_1}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = L_2\dot{\theta}_2\left(\dot{\theta}_1\sin\theta_2\overrightarrow{x_{1,2}} - \dot{\theta}_2\overrightarrow{y_2}\right) - L_1\dot{\theta}_1^2\overrightarrow{y_1}$$

$$\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_{G_2}(S_2)\overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\right]_{R_0} = \begin{pmatrix} A_2\ddot{\theta}_2 \\ B_2\ddot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + D_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ -D_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2 - C_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \end{pmatrix}_{B_2} \begin{pmatrix} A_2\ddot{\theta}_2 \\ B_2\ddot{\theta}_1\sin\theta_2 - D_2\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 \\ -D_2\ddot{\theta}_1\sin\theta_2 + C_2\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\wedge\overrightarrow{z_2} = \left(\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}\right)\wedge\overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}_1\sin\theta_2\overrightarrow{x_{1,2}} - \dot{\theta}_2\overrightarrow{y_2}$$

$$\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(S_2/R_0)}\wedge\overrightarrow{y_2} = \left(\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_2\overrightarrow{x_2}\right)\wedge\overrightarrow{y_2} = -\dot{\theta}_1\cos\theta_2\overrightarrow{x_1} + \dot{\theta}_2\overrightarrow{z_2}$$

$$\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)}\wedge\overrightarrow{x_1} = \dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}\wedge\overrightarrow{x_1} = \dot{\theta}_1\overrightarrow{y_1}$$