Application

Application – Régulateur

Savoirs et compétences :

Un système matériel est constitué de 5 solides reliés au bâti **(0)**. Les solides **(1)**, **(2)**, **(3)** et **(5)** sont des barres sans épaisseur, articulées par des pivots en O, A ou B de manière à demeurer dans un même plan noté $\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1}\right)$. Cet ensemble est donc mobile en rotation autour de $\overrightarrow{z_1}$. On repère sa position angulaire par le paramètre ψ.

Au bâti **(0)**, on associé le repère fixe $\mathscr{R}_0$.

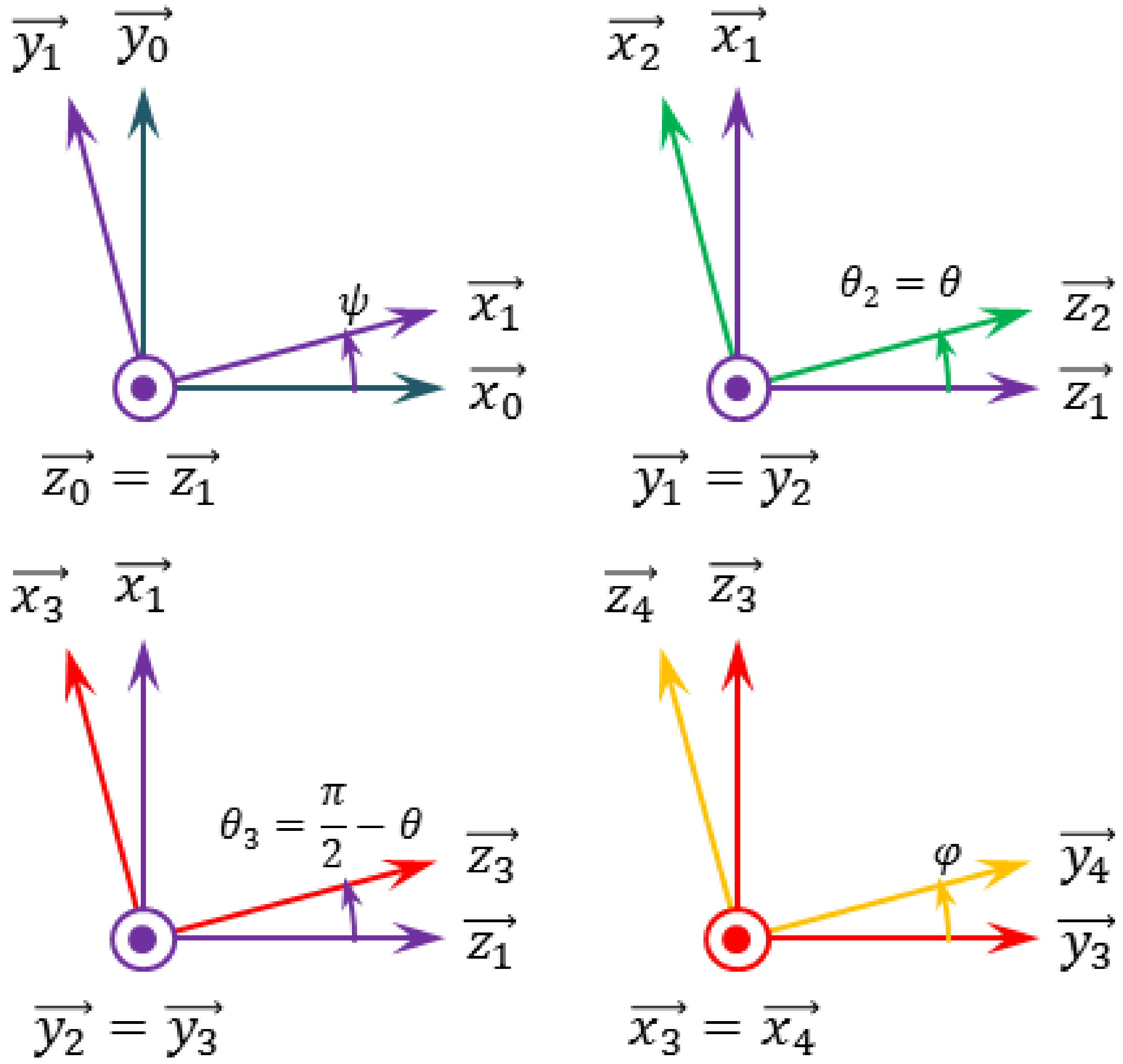
À chaque S_i on associe une base $\mathscr{B}_i\left(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{y_i},\overrightarrow{z_i}\right)$. Les repère $\mathscr{R}_i$ sont d'origine O ou A selon le cas.

Les rotations internes sont définies par θ_2 autour de $\left(O,\overrightarrow{y_1}\right)$ et θ_3 autour de $\left(A,\overrightarrow{y_1}\right)$.

Les barres **(2)** et **(3)** sont identiques, de longueur $2a$ et de masse $m_2=m_3=m$.

Les barres **(1)** et **(5)** ont une masse m_i et des longueurs ℓ_i. **(4)** est un volant d'inertie de masse M qui fait l'objet d'une liaison pivot d'axe $\left(G,\overrightarrow{x_3}\right)$ avec la barre **(3)**. Un repère $\mathscr{R}_4$ est lié à ce volant dont on définit sa position par le paramètre angulaire φ.

On donne le paramétrage suivant.



Question 1 *Déterminer les torseurs cinétiques suivants : $\{\sigma(1/0)\}_O$, $\{\sigma(2/0)\}_O$ et $\{\sigma(3/0)\}_O$ dans $\mathcal{R}_1$, $\{\sigma(4/0)\}_O$ dans $\mathcal{R}_3$ et $\{\sigma(5/0)\}_A$ dans $\mathcal{R}_1$.*

Correction

Détermination de $\{\sigma(1/0)\}_O$

O est un point fixe. On a donc :

$$\{\sigma(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \overrightarrow{V(G_1 \in 1/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(O_1, 1/0)} = I_O(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} \end{array} \right\}_O$$

(1) est une tige d'axe $\overrightarrow{z_0}$ et de rayon négligeable.

On a donc $I_O(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ avec $A_1 = \dfrac{m_1 l_1^2}{3}$.

De plus, $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{V(O \in 1/0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$. On a donc

$I_O(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{0}$. Au final :

$$\{\sigma(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

Détermination de $\{\sigma(2/0)\}_O$

O est un point fixe. On a donc :

$$\{\sigma(2/0)\}=\left\{\begin{array}{c} m_2\overrightarrow{V(G_2\in 2/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(O,2/0)}\end{array}\right\}_O$$

(2) est une tige d'axe $\overrightarrow{z_2}$ et de rayon négligeable. On a donc $I_{O_2}(2)=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$ avec $A_2=\dfrac{4ma^2}{3}=$. De plus, $\{\mathcal{V}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(2/0)}=\dot{\psi}\overrightarrow{z_1}+\dot{\theta}\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{V(G_2\in 2/0)}\end{array}\right\}_{G_2}$.

$\overrightarrow{V(G_2\in 2/0)} = \overrightarrow{V(O\in 2/0)}+\overrightarrow{G_2O}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/0)} = -a\overrightarrow{z_2}\wedge\left(\dot{\psi}\overrightarrow{z_1}+\dot{\theta}\overrightarrow{y_2}\right) = a\left(\dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{y_1}+\dot{\theta}\overrightarrow{x_2}\right) = a\left(\dot{\psi}\sin\theta\overrightarrow{y_1}+\dot{\theta}\left(\cos\theta\overrightarrow{x_1}-\sin\theta\overrightarrow{z_1}\right)\right)$

On a donc

$$I_{O_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)}=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}\begin{pmatrix}-\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}=\begin{pmatrix}-A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}.$$

Au final :

$$\{\sigma(2/0)\}=\left\{\begin{array}{c} ma\begin{pmatrix}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \\ \begin{pmatrix}-A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}\end{array}\right\}_O=\left\{\begin{array}{c} ma\begin{pmatrix}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \\ \begin{pmatrix}-A_2\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ A_2\dot{\psi}\sin\theta\sin\theta\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

Détermination de $\{\sigma(3/0)\}_O$

***************** Au point G_3, on a :

$$\{\sigma(3/0)\}=\left\{\begin{array}{c} m_3\overrightarrow{V(G_3\in 3/0)} \\ \overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)}\end{array}\right\}_O$$

(3) est une tige d'axe $\overrightarrow{x_3}$ et de rayon négligeable. On a donc $I_{G_3}(3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$ avec $A_4=\dfrac{4ma^2}{3}=$. De plus, $\{\mathcal{V}(3/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(3/0)}=\dot{\psi}\overrightarrow{z_1}+\dot{\theta}_3\overrightarrow{y_3} \\ \overrightarrow{V(G_3\in 3/0)}\end{array}\right\}_{G_3}$.

$\overrightarrow{V(G_3\in 3/0)}$

On a donc

$$I_{O_2}(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)}=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}\begin{pmatrix}-\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}=\begin{pmatrix}-A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}.$$

Au final :

$$\{\sigma(2/0)\}=\left\{\begin{array}{c} ma\begin{pmatrix}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \\ \begin{pmatrix}-A_2\dot{\psi}\sin\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}\end{array}\right\}_O=\left\{\begin{array}{c} ma\begin{pmatrix}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \\ \begin{pmatrix}-A_2\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta \\ A_2\dot{\theta} \\ A_2\dot{\psi}\sin\theta\sin\theta\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}\end{array}\right\}_O$$

Question 2 *Déterminer les torseur dynamique* $\{\delta(4/0)\}_G\cdot\overrightarrow{x_3}$.

Correction

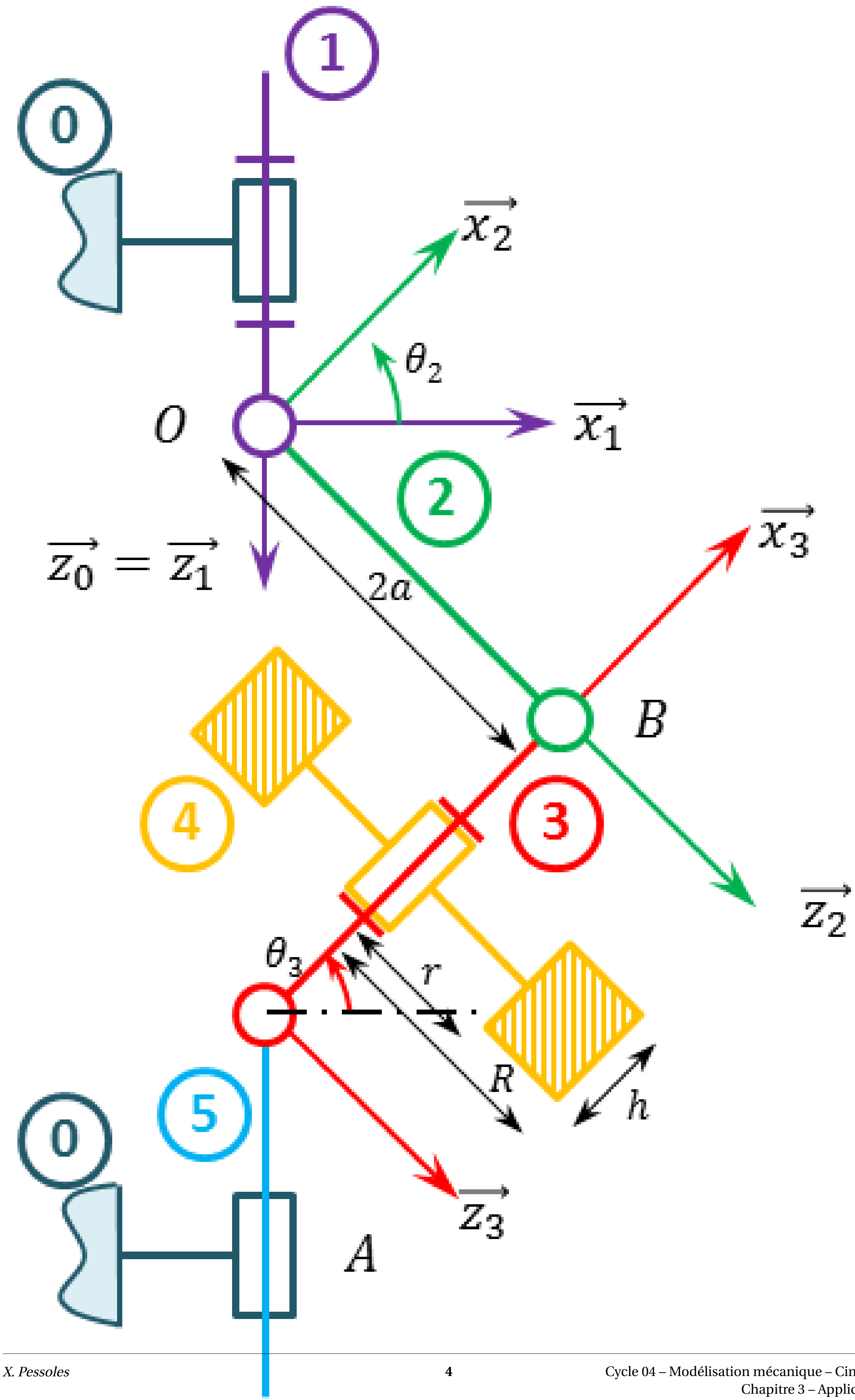
Question 3 *Déterminer les torseur dynamique* $\{\delta(1\cup 2\cup 3\cup 4\cup 5/0)\}_O\cdot\overrightarrow{z_0}$.

Correction

Question 4 *Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble du système dans son mouvement par rapport au bâti.*

Correction

Cycle 04


1
0
$\overrightarrow{x_2}$
θ_2
O
$\overrightarrow{x_1}$
2
$\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$
$2a$
$\overrightarrow{x_3}$
B
4
3
$\overrightarrow{z_2}$
θ_3
r
R
h
0
5
$\overrightarrow{z_3}$
A