TD 01

Modèle du frottement exponentiel – Poulie-courroie ⋆⋆

Lycée Mistral Avignon

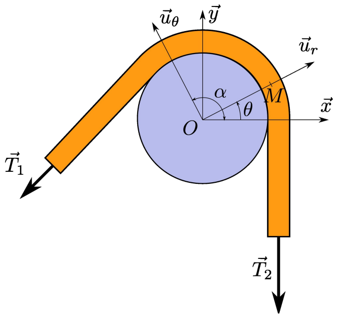
Savoirs et compétences :
- *Res2.C18* : principe fondamental de la statique :
- *Res2.C19* : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- *Res2.C20* : théorème des actions réciproques.

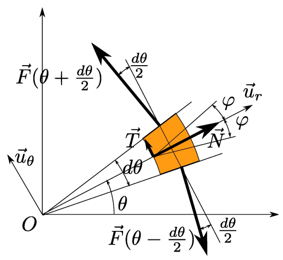
Mise en situation

Le problème du frottement d'une corde, d'une sangle ou d'une courroie sur une poulie ou un tambour est un problème classique.

Objectif Modéliser l'évolution de la tension dans un câble en fonction de l'angle d'enroulement sur une poulie.

On note f le coefficient de frottement entre le câble et la poulie.





On considère que le câble est enroulé d'un angle α autour de la poulie. Le câble est à la limite du glissement sous l'action des deux brins $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$. Soit $M(\theta)$ un point de l'enroulement.

Question 1 *Après avoir isolé une tranche élémentaire de câble en $M(\theta)$ de largeur $d\theta$, réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures.*

Question 2 *Appliquer le théorème en résultante statique en projection dans la base $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$.*

Question 3 *En considérant que l'angle θ est petit, établir l'équation différentielle liant f et $F(\theta)$ et θ.*

Question 4 *Résoudre l'équation différentielle pour établir la relation entre T_1, T_2, f et α.*

TD 01

Modèle du frottement exponentiel – Poulie-courroie ⋆⋆

Lycée Mistral Avignon

Savoirs et compétences :

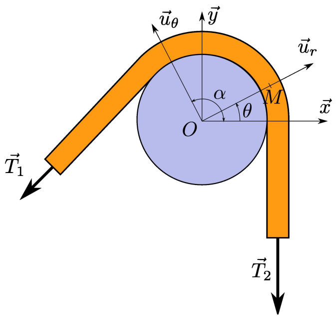
- *Res2.C18* : principe fondamental de la statique :
- *Res2.C19* : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides;
- *Res2.C20* : théorème des actions réciproques.

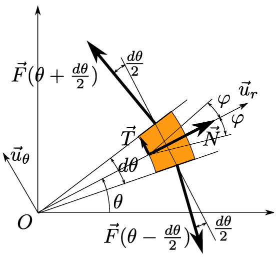
Mise en situation

Le problème du frottement d'une corde, d'une sangle ou d'une courroie sur une poulie ou un tambour est un problème classique.

Objectif Modéliser l'évolution de la tension dans un câble en fonction de l'angle d'enroulement sur une poulie.

On note f le coefficient de frottement entre le câble et la poulie.





On considère que le câble est enroulé d'un angle α autour de la poulie. Le câble est à la limite du glissement sous l'action des deux brins $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$. Soit $M(\theta)$ un point de l'enroulement.

Question 1 *Après avoir isolé une tranche élémentaire de câble en $M(\theta)$ de largeur $d\theta$, réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures.*

Correction BAME :

- action de tension du câble 1 $\overrightarrow{F}\left(\theta+\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)$;
- action de tension du câble 2 $\overrightarrow{F}\left(\theta-\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)$;
- action de la poulie sur le câble : $N\overrightarrow{u_r}+T\overrightarrow{u_\theta}$ avec $T=\pm f N$.

Question 2 *Appliquer le théorème en résultante statique en projection dans la base $\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}\right)$.*

Correction L'application du TRS à la tranche de câble, on a $\overrightarrow{F}\left(\theta+\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+\overrightarrow{F}\left(\theta-\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+N\overrightarrow{u_r}+T\overrightarrow{u_\theta}=\overrightarrow{0}$.

En projetant dans $\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}\right)$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l}-F\left(\theta+\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)-F\left(\theta-\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+N=0\\ F\left(\theta+\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)-F\left(\theta-\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+T=0\end{array}\right..$$

Question 3 *En considérant que l'angle θ est petit, établir l'équation différentielle liant f et $F(\theta)$ et θ.*

Correction
En utilisant $\cos\mathrm{d}\theta/2\simeq 1$ et $\sin\mathrm{d}\theta/2\simeq\mathrm{d}\theta/2$:

$$\left\{\begin{array}{l}-F\left(\theta+\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}-F\left(\theta-\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}+N=0\\ F\left(\theta+\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)-F\left(\theta-\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+T=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-\left(F\left(\theta+\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+F\left(\theta-\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\right)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}+N=0\\ F\left(\theta+\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)-F\left(\theta-\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+T=0\end{array}\right..$$

De plus, $F\left(\theta+\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\simeq F(\theta)+\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\dfrac{\mathrm{d}F(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$. On a donc : $\left\{\begin{array}{l}-2F(\theta)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}+N=0\\ \mathrm{d}F(\theta)+T=0\end{array}\right.$.

En utilisant le modèle de Coulomb, $T=\pm f N$

$$\mathrm{d}F(\theta)\pm f\left(2F(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)=0\Leftrightarrow\mathrm{d}F(\theta)\pm f F(\theta)\mathrm{d}\theta=0$$

Question 4 *Résoudre l'équation différentielle pour établir la relation entre T_1, T_2, f et α.*

Correction On a : $\mathrm{d}F(\theta)=\pm F(\theta)\mathrm{d}\theta\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{d}F(\theta)}{F(\theta)}=\pm\mathrm{d}\theta$

En intégrant l'équation précédente, on a : $[\ln F]_{T_2}^{T_1}=\pm f[\theta]_0^\alpha$ Soit $\ln T_2-\ln T_1=-f\alpha\Leftrightarrow\ln\dfrac{T_2}{T_1}=\pm f\alpha$ et $T_2=T_1\mathrm{e}^{\pm f\alpha}$.

(Le signe dépend du sens de glissement.)