Activation 4

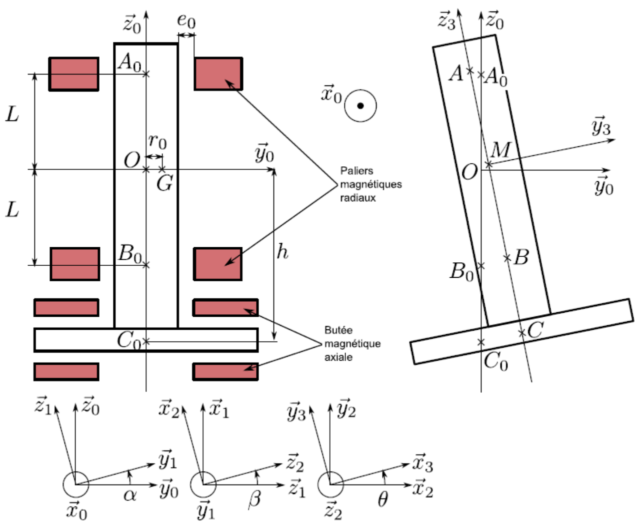
Pompe turbo-moléculaire

Centrale Supelec PSI 2009

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide*
- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Le comportement dynamique du rotor est étudié sur un modèle à 6 degrés de liberté : le rotor n'étant en contact avec aucun solide, il dispose des 6 mouvements de corps rigide. On suppose le rotor indéformable. La figure suivante montre à gauche le rotor dans sa position nominale ($\alpha=\beta=\theta=x=y=z=0$) et à droite le rotor dans une position quelconque. On note A_0 et B_0 les centres des paliers magnétiques radiaux et A et B les points appartenant à l'arbre et confondus avec et dans la position nominale.



On note O le milieu de $[A_0B_0]$ et M le milieu de $[AB]$. Bien qu'un soin très important soit apporté à la fabrication du rotor, il est impossible d'annuler totalement les défauts d'équilibrage. Le centre de gravité n'est donc pas exactement situé sur l'axe (AB), mais à une distance de celui-ci telle que $\overrightarrow{MG}=r_0\overrightarrow{y_3}$.

De même, la matrice d'inertie $I_{G,3}$ n'est pas parfaitement diagonale et présente un produit d'inertie D non nul. On admet toutefois que $r << L$ et $D << (A,B,C)$, où A, B, C sont les moments d'inertie. Le mouvement du rotor, auquel on associe le repère 3, par rapport au bâti est paramétré par les trois déplacements (x,y,z) du point M dans le repère $\mathcal{R}_0\left(0;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$: $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{x_0}+y\overrightarrow{y_0}+z\overrightarrow{z_0}$ ainsi que par trois rotations (α,β,γ) telles que :

- α paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_1\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ par rapport à $\mathcal{B}_0$ autour de l'axe $\overrightarrow{x_0}$;
- β paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_2\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_2}\right)$ par rapport à $\mathcal{B}_1$ autour de l'axe $\overrightarrow{y_1}$;
- θ paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_3\left(\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_2}\right)$ par rapport à $\mathcal{B}_2$ autour de l'axe $\overrightarrow{z_2}$.

Si le rotor présente 6 degrés de liberté, il est bien évident qu'excepté la rotation propre principale θ, ces mouvements sont très petits.

En notant $\varepsilon(x)$ une fonction telle que $|\varepsilon(x)| << |x|$, on peut écrire : $\left\{\begin{array}{l} x,y,z\simeq\varepsilon(L)\\ \alpha,\beta\simeq\varepsilon(1)\end{array}\right.$.

On suppose que la vitesse de rotation du rotor est constante : $\dot{\theta}=\omega$ et $\ddot{\theta}=0$.

Efforts des paliers et du moteur sur le rotor

Pour le dimensionnement dynamique, on modélise les actions des trois paliers magnétiques et l'action du moteur électrique sous la forme :

$$\{\mathcal{T}(0\rightarrow 3A)\}=\left\{\begin{array}{c} X_A\overrightarrow{x_0}+Y_A\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A,\ \{\mathcal{T}(0\rightarrow 3B)\}=\left\{\begin{array}{c} X_B\overrightarrow{x_0}+Y_B\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B,\ \{\mathcal{T}(0\rightarrow 3C)\}=\left\{\begin{array}{c} Z_C\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_C,$$

$$\{\mathcal{T}(\text{moteur}\rightarrow 3)\}=\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0}\\ C_m\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_G.$$

$$\text{Avec}\left\{\begin{array}{l} X_A\overrightarrow{x_0}+Y_A\overrightarrow{y_0}=-k\left[\overrightarrow{A_0A}\right]_{\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}\right)}-c\left[\overrightarrow{V(A\in 3/0)}\right]_{\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}\right)}\\ X_B\overrightarrow{x_0}+Y_B\overrightarrow{y_0}=-k\left[\overrightarrow{B_0B}\right]_{\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}\right)}-c\left[\overrightarrow{V(B\in 3/0)}\right]_{\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}\right)}\\ Z_C=-k\overrightarrow{C_0C}\cdot\overrightarrow{z_0}-c\,\overrightarrow{V(C\in 3/0)}\cdot\overrightarrow{z_0}\end{array}\right.$$

et $k=50\times10^4\,\text{Nm}^{-1}$ et $c=970\,\text{Nm}^{-1}\text{s}$. La notation $\left[\overrightarrow{V}\right]_{\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}\right)}$ désigne la projection dans le plan $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}\right)$ du vecteur $\overrightarrow{V}$. Les actions de la pesanteur sont négligées. Le bâti est supposé être un référentiel galiléen.

Le rotor, tel que $L=50\,\text{mm}$, a pour masse $m=10\,\text{kg}$, pour centre de gravité G tel que $\overrightarrow{MG}=r_0\overrightarrow{y_3}$ où $r_0=0{,}05\,\text{mm}$, et pour matrice d'inertie en G : $I_G(3)=\begin{pmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & A & -D\\ 0 & -D & C\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$ où $A=0{,}08\,\text{kg}\,\text{m}^2$, $C=0{,}04\,\text{kg}\,\text{m}^2$ et $D=10^{-4}\,\text{kg}\,\text{m}^2$.

On admet que $r_0\simeq\varepsilon(L)$ et $D\simeq\varepsilon(A)\simeq\varepsilon(C)$.

Objectif Proposer un modèle de comportement dynamique du rotor en phase de rotation.

Question 1 *Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au rotor et l'exprimer sous forme torsorielle.*

Les questions suivantes visent à déterminer le système d'équations issu de cette équation torsorielle.

Question 2 *Montrer quel'expression au premier ordre de la vitesse du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti s'écrit :* $\overrightarrow{V(G\in 3/0)} = \dot{x}\,\overrightarrow{x_0} + \dot{y}\,\overrightarrow{y_0} + \dot{z}\,\overrightarrow{z_0} - r_0\omega\,\overrightarrow{x_3}$.

Question 3 *Déterminerl'expression au premier ordre de l'accélération du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti 0 :* $\overrightarrow{\Gamma(G\in 3/0)}$.

On admet que par changement de base, la matrice $I_{G,3}$ s'écrit dans la base B_2 : $I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & D\sin\theta \\ 0 & A & -D\cos\theta \\ D\sin\theta & -D\cos\theta & C \end{pmatrix}_{B_2}$.

Question 4 *Montrer que l'expression au premier ordre du moment cinétique en G du rotor par rapport au bâti s'écrit :* $\overrightarrow{\sigma(G,3/0)} = \begin{pmatrix} A\dot{\alpha} + D\omega\sin\theta \\ A\dot{\beta} - D\omega\cos\theta \\ C\omega \end{pmatrix}_{B_2}$.

Question 5 *Déterminer l'expression au premier ordre du moment dynamique en G du rotor par rapport au bâti 0 :* $\overrightarrow{\delta(G,3/0)}$*, dans la base B_2.*

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au rotor 3, réduit en G, conduit alors à :

$$\left[\begin{array}{l} m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = -mr_0\omega^2\sin\theta \\ m\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = mr_0\omega^2\cos\theta \\ A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + 2cL\dot{\alpha} + 2kL\alpha = -D\omega^2\cos\theta \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} + 2cL\dot{\beta} + 2kL\beta = -D\omega^2\sin\theta \\ C_m = 0 \end{array}\right.$$

Activation 4 – Corrigé

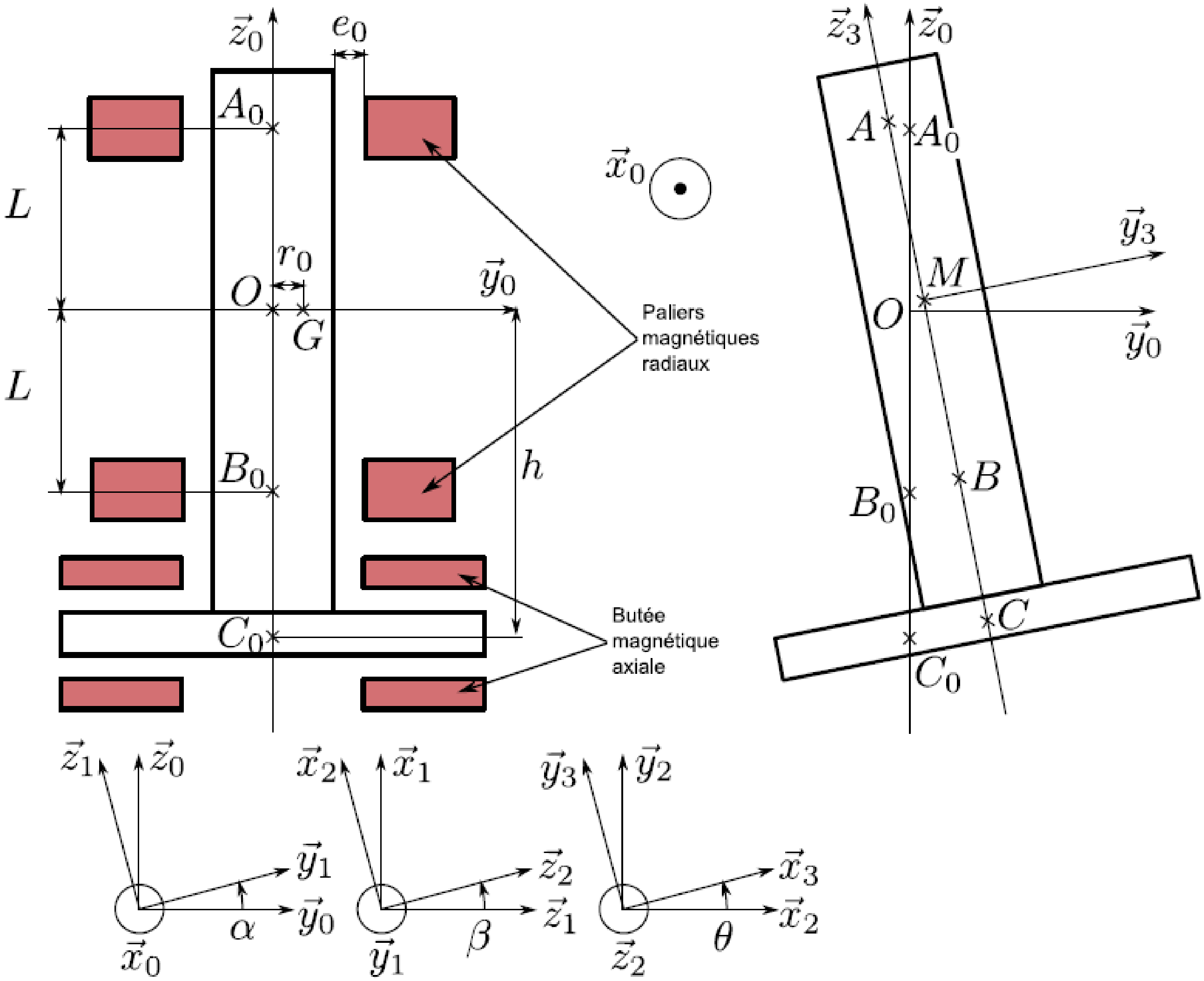
Pompe turbo-moléculaire

Centrale Supelec PSI 2009

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide*
- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Le comportement dynamique du rotor est étudié sur un modèle à 6 degrés de liberté : le rotor n'étant en contact avec aucun solide, il dispose des 6 mouvements de corps rigide. On suppose le rotor indéformable. La figure suivante montre à gauche le rotor dans sa position nominale ($\alpha=\beta=\theta=x=y=z=0$) et à droite le rotor dans une position quelconque. On note A_0 et B_0 les centres des paliers magnétiques radiaux et A et B les points appartenant à l'arbre et confondus avec et dans la position nominale.



On note O le milieu de $[A_0B_0]$ et M le milieu de $[AB]$. Bien qu'un soin très important soit apporté à la fabrication du rotor, il est impossible d'annuler totalement les défauts d'équilibrage. Le centre de gravité n'est donc pas exactement situé sur l'axe (AB), mais à une distance de celui-ci telle que $\overrightarrow{MG}=r_0\,\overrightarrow{y_3}$.

De même, la matrice d'inertie $I_{G,3}$ n'est pas parfaitement diagonale et présente un produit d'inertie D non nul. On admet toutefois que $r << L$ et $D << (A,B,C)$, où A, B, C sont les moments d'inertie. Le mouvement du rotor, auquel on associe le repère 3, par rapport au bâti est paramétré par les trois déplacements (x, y, z) du point M dans le repère $\mathscr{R}_0\left(0; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$: $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{x_0} + y\overrightarrow{y_0} + z\overrightarrow{z_0}$ ainsi que par trois rotations (α, β, γ) telles que :

- α paramètre la rotation d'une base $\mathscr{B}_1\left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ par rapport à $\mathscr{B}_0$ autour de l'axe $\overrightarrow{x_0}$;
- β paramètre la rotation d'une base $\mathscr{B}_2\left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_2}\right)$ par rapport à $\mathscr{B}_1$ autour de l'axe $\overrightarrow{y_1}$;
- θ paramètre la rotation d'une base $\mathscr{B}_3\left(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_2}\right)$ par rapport à $\mathscr{B}_2$ autour de l'axe $\overrightarrow{z_2}$.

Si le rotor présente 6 degrés de liberté, il est bien évident qu'excepté la rotation propre principale θ, ces mouvements sont très petits.

En notant $\varepsilon(x)$ une fonction telle que $|\varepsilon(x)| << |x|$, on peut écrire : $\left\{ \begin{array}{l} x, y, z \simeq \varepsilon(L) \\ \alpha, \beta \simeq \varepsilon(1) \end{array} \right.$.

On suppose que la vitesse de rotation du rotor est constante : $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$.

Efforts des paliers et du moteur sur le rotor

Pour le dimensionnement dynamique, on modélise les actions des trois paliers magnétiques et l'action du moteur électrique sous la forme :

$\{\mathscr{T}(0 \to 3A)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_A\overrightarrow{x_0} + Y_A\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$, $\{\mathscr{T}(0 \to 3B)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_B\overrightarrow{x_0} + Y_B\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$, $\{\mathscr{T}(0 \to 3C)\} = \left\{ \begin{array}{c} Z_C\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_C$, $\{\mathscr{T}(\text{moteur} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_G$.

Avec $\left\{ \begin{array}{l} X_A\overrightarrow{x_0} + Y_A\overrightarrow{y_0} = -k\left[\overrightarrow{A_0A}\right]_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})} - c\left[\overrightarrow{V(A \in 3/0)}\right]_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})} \\ X_B\overrightarrow{x_0} + Y_B\overrightarrow{y_0} = -k\left[\overrightarrow{B_0B}\right]_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})} - c\left[\overrightarrow{V(B \in 3/0)}\right]_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})} \\ Z_C = -k\overrightarrow{C_0C}\,\overrightarrow{z_0} - c\,\overrightarrow{V(C \in 3/0)} \cdot \overrightarrow{z_0} \end{array} \right.$ et $k = 50 \times 10^4\,\text{N}\,\text{m}^{-1}$ et $c = 970\,\text{N}\,\text{m}^{-1}\text{s}$. La notation $\left[\overrightarrow{V}\right]_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})}$ désigne la projection dans le plan $\left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}\right)$ du vecteur $\overrightarrow{V}$. Les actions de la pesanteur sont négligées. Le bâti est supposé être un référentiel galiléen.

Le rotor, tel que $L = 50\,\text{mm}$, a pour masse $m = 10\,\text{kg}$, pour centre de gravité G tel que $\overrightarrow{MG} = r_0\overrightarrow{y_3}$ où $r_0 = 0{,}05\,\text{mm}$, et pour matrice d'inertie en G : $I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{B_3}$ où $A = 0{,}08\,\text{kg}\,\text{m}^2$, $C = 0{,}04\,\text{kg}\,\text{m}^2$ et $D = 10^{-4}\,\text{kg}\,\text{m}^2$.

On admet que $r_0 \simeq \varepsilon(L)$ et $D \simeq \varepsilon(A) \simeq \varepsilon(C)$.

Objectif Proposer un modèle de comportement dynamique du rotor en phase de rotation.

Question 1 *Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au rotor et l'exprimer sous forme torsorielle.*

Correction

Les questions suivantes visent à déterminer le système d'équations issu de cette équation torsorielle.

Question 2 *Montrer quel'expression au premier ordre de la vitesse du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti s'écrit : $\overrightarrow{V(G \in 3/0)} = \dot{x}\overrightarrow{x_0} + \dot{y}\overrightarrow{y_0} + \dot{z}\overrightarrow{z_0} - r_0\omega\overrightarrow{x_3}$.*

Correction

Question 3 *Déterminerl'expression au premier ordre de l'accélération du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti 0 : $\overrightarrow{\Gamma(G \in 3/0)}$.*

Correction

On admet que par changement de base, la matrice $I_{G,3}$ s'écrit dans la base B_2 : $I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & D\sin\theta \\ 0 & A & -D\cos\theta \\ D\sin\theta & -D\cos\theta & C \end{pmatrix}_{B_2}$.

Question 4 *Montrer que l'expression au premier ordre du moment cinétique en G du rotor par rapport au bâti s'écrit : $\overrightarrow{\sigma(G, 3/0)} = \begin{pmatrix} A\dot{\alpha} + D\omega\sin\theta \\ A\dot{\beta} - D\omega\cos\theta \\ C\omega \end{pmatrix}_{B_2}$.*

Correction

Question 5 *Déterminer l'expression au premier ordre du moment dynamique en G du rotor par rapport au bâti 0 :* $\overrightarrow{\delta(G,3/0)}$, *dans la base B_2.*

Correction

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au rotor 3, réduit en G, conduit alors à :

$$\left[\begin{array}{l} m\ddot{x}+2c\dot{x}+2kx=-mr_0\omega^2\sin\theta \\ m\ddot{y}+2c\dot{y}+2ky=mr_0\omega^2\cos\theta \\ A\ddot{\alpha}+C\omega\dot{\beta}+2cL\dot{\alpha}+2kL\alpha=-D\omega^2\cos\theta \\ A\ddot{\beta}-C\omega\dot{\alpha}+2cL\dot{\beta}+2kL\beta=-D\omega^2\sin\theta \\ C_m=0 \end{array}\right.$$