TD 02

Quille pendulaire

Concours Commun Mines Ponts 2014

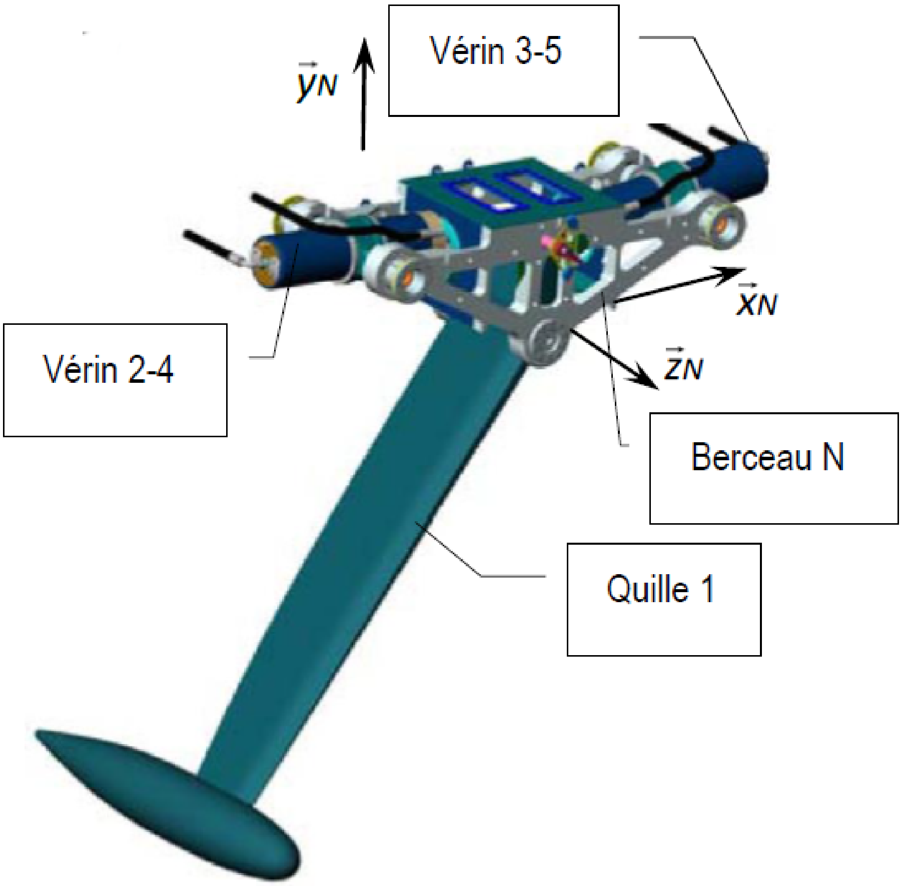
Savoirs et compétences :

Mise en situation

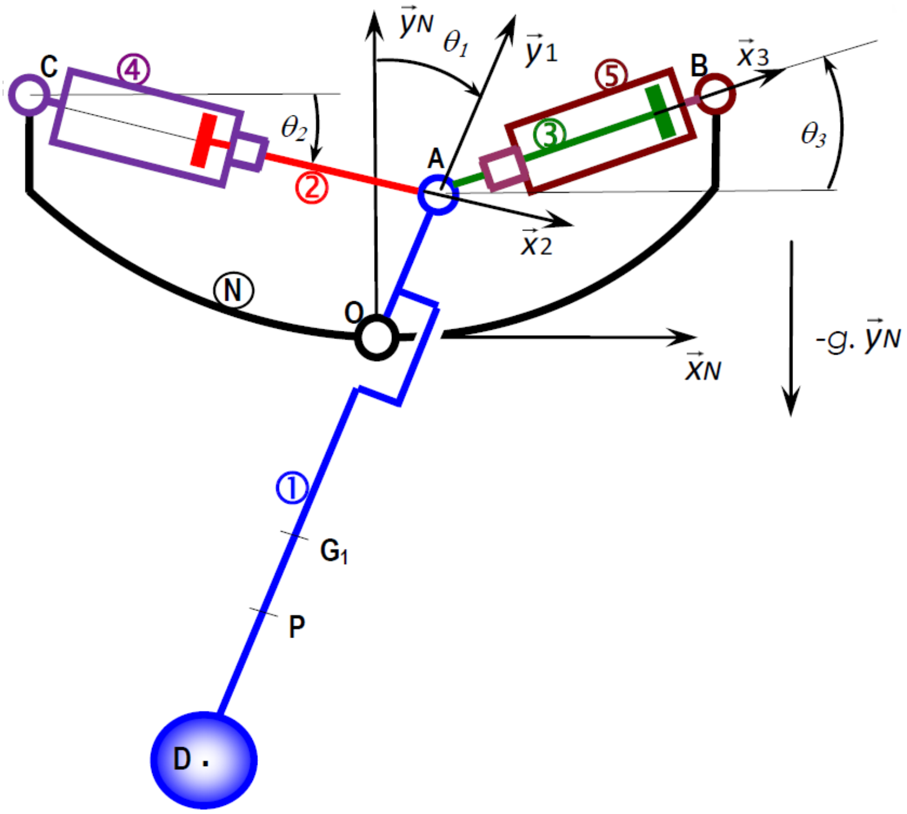
Objectif L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Travail à réaliser

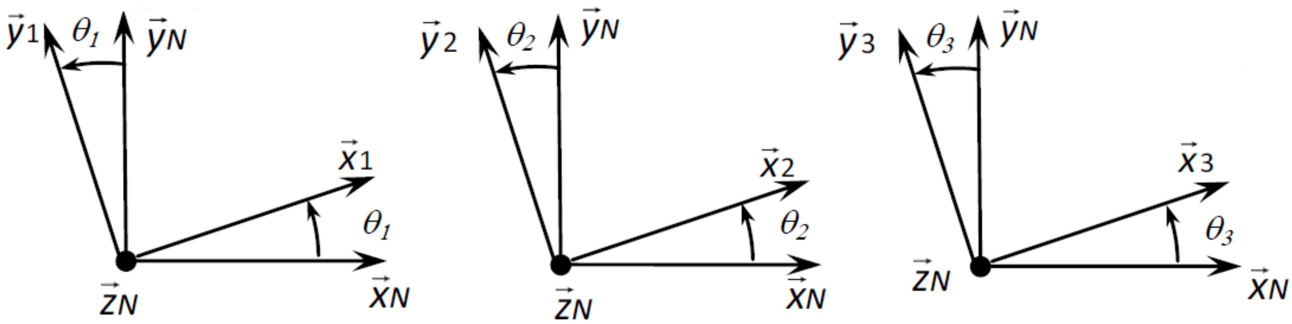
Le modèle de calcul est donné dans les figures suivantes.



Modèle volumique 3D



Modèle 2D



Paramétrage

Hypothèses

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Le bateau est à l'arrêt et son repère R_N est galiléen.
- Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que : $F_{h2} > 0$ et $F_{h3} = 0$. Le vérin 2–4 est alors moteur et le vérin 3–5 est libre (F_{h2} désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2 ; on a donc $-F_{h2}$ qui agit sur 4).
- Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Données géométriques, massiques et inertielles

$\overrightarrow{OA} = R\,\overrightarrow{y_1}$; $\overrightarrow{CA} = x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}$; $\overrightarrow{AB} = x_{35}(t)\overrightarrow{x_3}$,

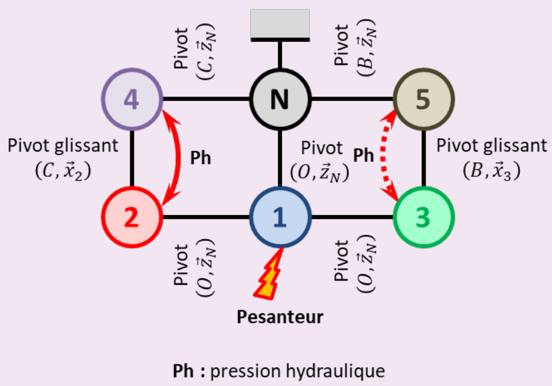
- Solide 1, masse M_1, centre d'inertie G_1, $\overrightarrow{OG_1} = -L_1\,\overrightarrow{y_1}$, $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_N})}$.
- Solide 2, masse M_2, centre d'inertie G_2, $\overrightarrow{AG_2} = -L_2\,\overrightarrow{x_2}$, $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_N})}$.
- Solide 3, masse $M_3 = M_2$, centre d'inertie G_3, $\overrightarrow{AG_3} = L_2\,\overrightarrow{x_3}$, $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_N})}$.

- Solide 4, masse M_4, centre d'inertie C, $I_C(4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_N},)}$.
- Solide 5, masse M_5, centre d'inertie B, $I_B(5) = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_N},)}$.

Vecteurs vitesse

Question 1 *Tracer le graphe de liaisons.*

Correction



Question 2 *Exprimer les vitesses suivantes :*

1. *$\overrightarrow{V(G_1\in 1/N)}$ en fonction de $\dfrac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles;*
2. *$\overrightarrow{V(G_2\in 2/N)}$ en fonction de $\dfrac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\dfrac{dx_{24}(t)}{dt}$, x_{24} et des paramètres géométriques utiles;*
3. *$\overrightarrow{V(G_3\in 3/N)}$ en fonction de $\dfrac{d\theta_3(t)}{dt}$, $\dfrac{dx_{35}(t)}{dt}$, x_{35} et des paramètres géométriques utiles;*
4. *$\overrightarrow{V(A\in 2/4)}$ en fonction de $\dfrac{dx_{24}(t)}{dt}$.*

Correction

1. $\overrightarrow{V(G_1\in 1/N)} = \overrightarrow{V(O\in 1/N)} + \overrightarrow{G_1O}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/N)} = L_1\overrightarrow{y_1}\wedge\dot\theta_1\overrightarrow{z_N} = L_1\dot\theta_1\overrightarrow{x_1}$.
2. $\overrightarrow{V(G_2\in 2/N)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(R\overrightarrow{y_1}-L_2\overrightarrow{x_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = -R\dot\theta_1\overrightarrow{x_1}-L_2\dot\theta_1\overrightarrow{y_2}$.

   On a aussi $\overrightarrow{V(G_2\in 2/N)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}-L_2\overrightarrow{x_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = \dot x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot\theta_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}$.
3. $\overrightarrow{V(G_3\in 3/N)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(R\overrightarrow{y_1}+L_2\overrightarrow{x_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = -R\dot\theta_1\overrightarrow{x_1}+L_2\dot\theta_3\overrightarrow{y_3}$.

   On a aussi $\overrightarrow{V(G_3\in 3/N)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(-x_{35}(t)\overrightarrow{x_3}+L_2\overrightarrow{x_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_N} = -\dot x_{35}(t)\overrightarrow{x_3}+\dot\theta_3\left(-x_{35}(t)+L_2\right)\overrightarrow{y_3}$.
4. $\overrightarrow{V(A\in 2/4)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{CA}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_4} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{R_4} = \dot x_{24}(t)\overrightarrow{x_2}$.

Energie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.
On note $\mathcal{E}_c(i/N)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N.

Question 3 *Exprimer les énergies cinétiques suivantes :*

1. $\mathcal{E}_c(1/N)$, *en fonction de* $\dfrac{d\theta_1(t)}{dt}$ *et des paramètres inertiels et géométriques utiles ;*
2. $\mathcal{E}_c(2/N)$, *en fonction de* $\dfrac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\dfrac{dx_{24}(t)}{dt}$, $x_{24}(t)$ *et des paramètres inertiels et géométriques utiles.*
3. $\mathcal{E}_c(4/N)$, *en fonction de* $\dfrac{d\theta_1(t)}{dt}$ *et des paramètres inertiels et géométriques utiles.*

Correction

1. $\mathcal{E}_c(1/N) = \dfrac{1}{2}\{\mathcal{V}(1/N)\}\otimes\{\sigma(1/N)\} = \dfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(1/N)}\\ \overrightarrow{V(G_1\in 1/N)}\end{array}\right\}_{G_1}\otimes\left\{\begin{array}{c}M_1\overrightarrow{V(G_1\in 1/N)}\\ \overrightarrow{\sigma(G_1,1/N)}\end{array}\right\}_{G_1} = \dfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_N}\\ L_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}\end{array}\right\}_{G_1}\otimes$ $\left\{\begin{array}{c}M_1L_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1}\\ \dot{\theta}_1\left(-D_1\overrightarrow{y_N}+C_1\overrightarrow{z_N}\right)\end{array}\right\}_{G_1} = \dfrac{1}{2}\left(\dot{\theta}_1^2\left(-D_1\overrightarrow{y_N}+C_1\overrightarrow{z_N}\right)\overrightarrow{z_N}+M_1L_1^2\dot{\theta}_1^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dot{\theta}_1^2C_1+M_1L_1^2\dot{\theta}_1^2\right) = \dfrac{1}{2}\dot{\theta}_1^2\left(C_1+M_1L_1^2\right).$
2. $\mathcal{E}_c(2/N) = \dfrac{1}{2}\{\mathcal{V}(2/N)\}\otimes\{\sigma(2/N)\} = \dfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(2/N)}\\ \overrightarrow{V(G_2\in 2/N)}\end{array}\right\}_{G_2}\otimes\left\{\begin{array}{c}M_2\overrightarrow{V(G_2\in 2/N)}\\ \overrightarrow{\sigma(G_2,2/N)}\end{array}\right\}_{G_2}$
$= \dfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_N}\\ \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}\end{array}\right\}_{G_2}\otimes\left\{\begin{array}{c}M_2\left(\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}\right)\\ \dot{\theta}_2B_2\overrightarrow{z_N}\end{array}\right\}_{G_1}$
$= \dfrac{1}{2}\left(B_2\dot{\theta}_2^2+M_2\left(\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}+\dot{\theta}_2\left(x_{24}(t)-L_2\right)\overrightarrow{y_2}\right)^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(B_2\dot{\theta}_2^2+M_2\left(\dot{x}_{24}(t)^2+\dot{\theta}_2^2\left(x_{24}(t)-L_2\right)^2\right)\right)$
.
3. $\mathcal{E}_c(4/N)$, .

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 *Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathcal{P}\left(i\longleftrightarrow j\right)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.*

Correction

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 *Recenser, puis exprimer les puissances galiliéennes non nulles (notées $\mathcal{P}\left(i\longrightarrow j/k\right)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E. Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.*

Correction

Question 6 *Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N. Ecrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).*

Correction

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position $\theta_1 = 0$ à la position $\theta_1 = 45°$ en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position $\theta_1 = 0$ en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

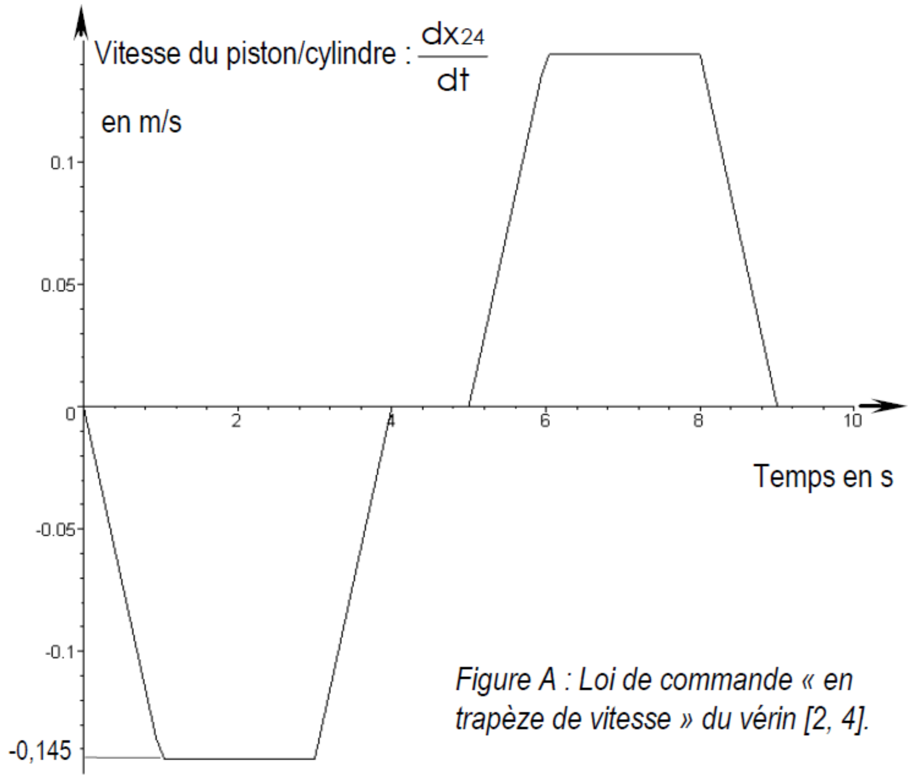


Figure A : Loi de commande « en trapèze de vitesse » du vérin [2, 4].

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure suivante.

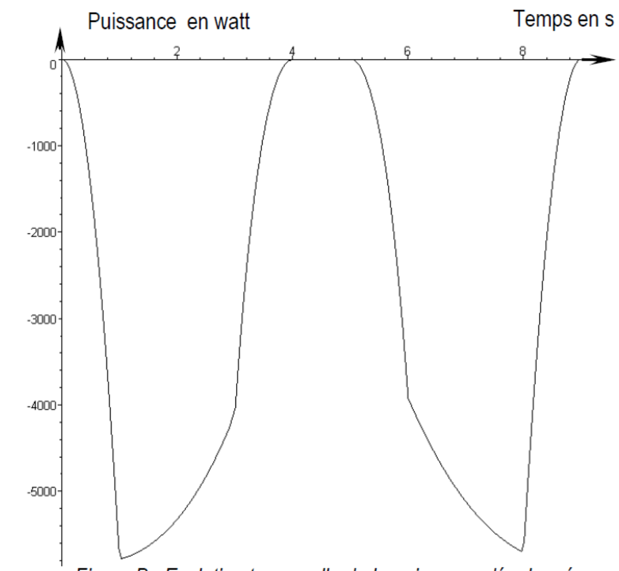


Figure B : Evolution temporelle de la puissance développée par l'ensemble des actions de frottement visqueux.

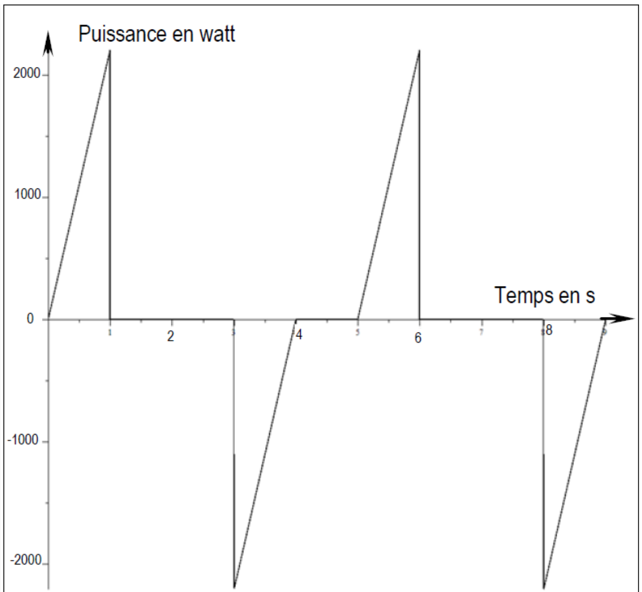


Figure C : Evolution temporelle de la dérivée de l'énergie cinétique totale.

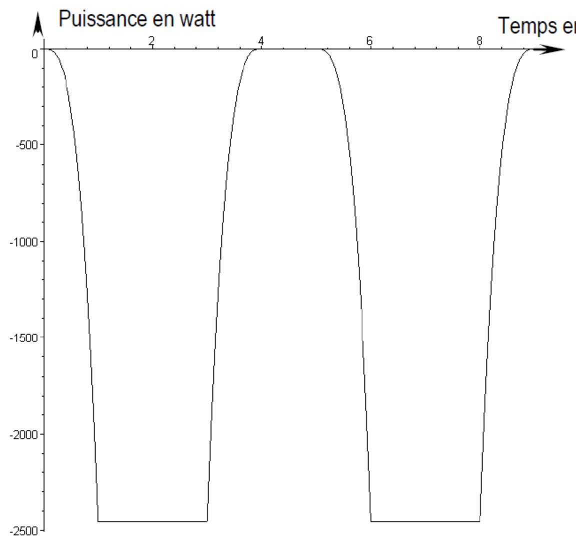


Figure D : Evolution temporelle de la puissance développée par l'ensemble des actions hydrauliques.

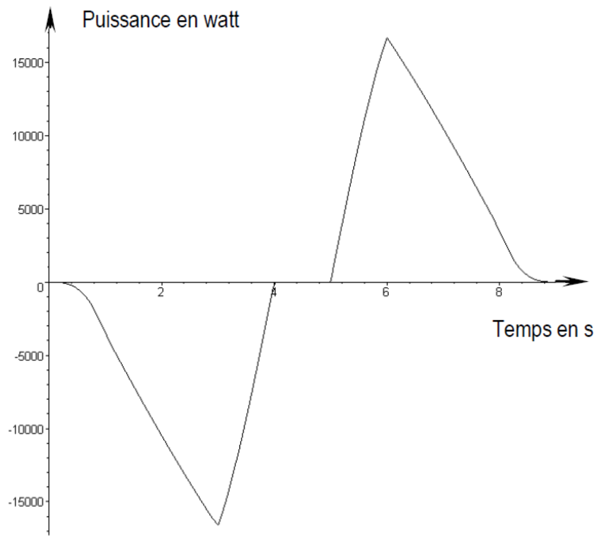


Figure E : Evolution temporelle de la puissance développée par l'ensemble des actions de pesanteur.

Question 7 *Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de l'« Annexe 2 », sur la figure R4 de la copie, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0\,\text{s}$, $t = 1\,\text{s}$, $t = 3\,\text{s}$ et $t = 4\,\text{s}$. Sur cet intervalle $[0, 4\,\text{s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.*

Correction

Question 8 *Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de* $30\,\text{kW}$. *Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.*

Correction