Cycle 05

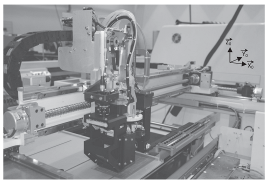
Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant les méthodes énergétiques

Chapitre 1 – Approche énergétique

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

PSI⋆ – MP

Activation



Activation – Système de dépose de composants électroniques

Émilien Durif – E3A PSI 2011

Savoirs et compétences :

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée $\overrightarrow{y_0}$) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « *vis-écrou* ».

Hypothèses :

- le référentiel associé au repère $R_0 = \left(O_0; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ est supposé galiléen;
- les solides seront supposés indéformables;
- on notera J_1 le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe $\left(O_0, \overrightarrow{y_0}\right)$: $J_1 = I_{\left(O_0,\overrightarrow{y_0}\right)}(S_1)$;
- on note M_3 et G_3 respectivement la masse et le centre d'inertie du solide S_3;
- la position de G_3 est définie par $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \overrightarrow{y_0} + z \cdot \overrightarrow{z_0}$
- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre S_0 et S_3 (Coefficient de frottement noté μ) et la pivot entre S_0 et S_1 (couple résistant noté C_r);
- seul l'action de pesanteur sur S_3 sera supposée non négligeable.
- S_0 : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
- S_1 : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
- S_2 : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
- S_3 : chariot supportant la tête de dépose (masse M_3).

Données numériques associées au système :

- Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) : $\mu = 0,1$.
- Pas de la vis à billes : $p = 20\,\text{mm}$.
- Diamètre de la vis à billes : $D = 25\,\text{mm}$.
- Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe $\overrightarrow{y_0}$: $I_v = 2,15 \times 10^{-4}\,\text{kg}\,\text{m}^2$.
- Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) : $C_r = 3\,\text{Nm}$.
- l, longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) : 1000 mm.
- Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :
  - couple maximal, $C_{\max} = 21.2\,\text{Nm}$;
  - fréquence de rotation maximale, $N_m = 6000\,\text{tr/min}$;
  - moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe $\overrightarrow{y_0}$, $I_m = 1,6 \times 10^{-4}\,\text{kg}\,\text{m}^2$.

Objectif L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- couple moteur transmis à S_1 : $\overrightarrow{C}_{\text{Moteur}\rightarrow S_1} \cdot \overrightarrow{y_0} = C_m(t)$;
- vitesse de rotation de S_1 : $\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \overrightarrow{y_0} = \dot{\theta}(t)$;

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose S_3) :

- masse : M_3;
- cinématique de S_3 : $\overrightarrow{a}(G_3 R_0) \cdot \overrightarrow{y_0} = \ddot{y}(t)$.

On considère l'ensemble $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$.

Question 1 *Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.*

Correction

Question 2 *Déterminer l'expression de $\mathscr{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).*

Correction

$$\mathscr{P}(\text{ext} \to E/R_g) = \mathscr{P}(S_0 \to S_1/R_0) + \mathscr{P}(\text{Moteur } \to S_1/R_0) + \mathscr{P}(S_0 \to S_3/R_0) + \mathscr{P}(\text{poids} \to S_3/R_0)$$

Question 3 *Calculer $\mathscr{P}(ext \to E/R_0)$ en fonction des données du problème.*

Correction On a :

$$\mathscr{P}(\text{ext} \to E/R_g) = \mathscr{P}(S_0 \to S_1/R_0) + \mathscr{P}(\text{Moteur} \to S_1/R_0) + \mathscr{P}(S_0 \to S_3/R_0) + \mathscr{P}(\text{poids} \to S_3/R_0)$$

- $\mathscr{P}(S_0 \to S_1/R_0) = \{\mathscr{T}(S_0 \to S_1)\} \otimes \{\mathscr{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01} \cdot \overrightarrow{x_0} + Y_{01} \cdot \overrightarrow{y_0} + Z_{01} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ L_{01} \cdot \overrightarrow{x_0} \pm C_r \cdot \overrightarrow{y_0} + N_{01} \cdot \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_0} = \pm C_r \cdot \dot{\theta}(t)$.
  Le signe de la composante suivant $\overrightarrow{y_0}$ dépendra du sens du mouvement de S_1/S_0.
- $\mathscr{P}(\text{Moteur} \to S_1/R_0) = \{\mathscr{T}(\text{Moteur} \to S_1)\} \otimes \{\mathscr{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \cdot \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{-} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_0} = C_m \cdot \dot{\theta}(t)$.
- $\mathscr{P}(S_0 \to S_3/R_0) = \{\mathscr{T}(S_0 \to S_3)\} \otimes \{\mathscr{V}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{03} \cdot \overrightarrow{x_0} \pm Y_{03} \cdot \overrightarrow{y_0} + Z_{03} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ L_{03} \cdot \overrightarrow{x_0} + M_{03} \cdot \overrightarrow{y_0} + N_{03} \cdot \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{-} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{-} = \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t)$.
- $\mathscr{P}(\text{Poids} \to S_3/R_0) = \{\mathscr{T}(\text{pes} \to S_3)\} \otimes \{\mathscr{V}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ -M_3 \cdot g \cdot \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_3} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{G_3} = 0$.

$$\mathscr{P}(\text{ext} \to E/R_0) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t)$$

Question 4 *Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble E : $\mathscr{P}_{int}(E)$.*

Correction

- D'après le graphe des liaisons : $\mathscr{P}_{\text{int}}(E) = \mathscr{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) + \mathscr{P}(S_2 \longleftrightarrow S_3)$.
- Calcul de $\mathscr{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) = = \{\mathscr{T}(S_1 \to S_2)\} \otimes \{\mathscr{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12} \overrightarrow{x_0} + Y_{12} \overrightarrow{y_0} + Z_{12} \overrightarrow{z_0} \\ L_{12} \overrightarrow{x_0} + M_{12} \overrightarrow{y_0} + N_{12} \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} q_{21} \overrightarrow{y_0} \\ v_{12} \cdot \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{O_0} = Y_{12} \cdot v_{12} + q_{21} \cdot M_{12}$. Or, $\left\{ \begin{array}{l} M_{12} = -\frac{p}{2\pi} Y_{12} \\ v_{12} = \frac{p}{2\pi} q_{21} \end{array} \right.$. D'où : $\mathscr{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) = Y_{12} \cdot v_{12} + q_{21} \cdot M_{12} = \frac{p}{2\pi}\left[Y_{12} \cdot q_{21} - q_{21} \cdot Y_{12}\right] = 0$.
- Calcul de $\mathscr{P}(S_2 \longleftrightarrow S_3) = \{\mathscr{T}(S_2 \to S_3)\} \otimes \{\mathscr{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{23} \overrightarrow{x}_0 + Y_{23} \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{A} \otimes \left\{ \begin{array}{c} p_{32} \overrightarrow{x}_0 + q_{32} \overrightarrow{y}_0 + r_{32} \overrightarrow{z_0} \\ w_{32} \cdot \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{A} = 0$.
- On en déduit donc : $\mathscr{P}_{\text{int}}(E) = 0$.

Question 5 *Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à R_0*

Correction

- Énergie cinétique de l'ensemble dans son mouvement par rapport à R_0 :

$$E_c(E/R_0) = E_c(1/R_0) + E_c(2/R_0) + E_c(3/R_0)$$

- Énergie cinétique de 1 dans son mouvement par rapport à R_0 : $E_c(1/R_0) = \dfrac{1}{2}\{\sigma(1/R_0)\} \otimes \{\mathscr{V}(1/R_0)\} = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{*} \\ \overline{\overline{I}}_{O_0}(S_1) \cdot \dot{\theta}(t) \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_0} = \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}^2 \overline{\overline{I}}_{O_0}(S_1) \cdot \overrightarrow{y}_0 \cdot \overrightarrow{y}_0\right] = \frac{1}{2} J_1 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2$.
- Énergie cinétique de 2 dans son mouvement par rapport à R_0 : $E_c(2/R_0) = \frac{1}{2}\{\sigma(2/R_0)\} \otimes \{\mathscr{V}(2/R_0)\} = 0$ car l'inertie de 2 est négligeable.
- Énergie cinétique de 3 dans son mouvement par rapport à R_0 : $E_c(3/R_0) = \frac{1}{2}\{\sigma(3/R_0)\} \otimes \{\mathscr{V}(3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} - \\ M_3 \cdot \dot{y}(t) \cdot \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{\overrightarrow{0}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} - \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{\dot{y}(t) \cdot \overrightarrow{y_0}} = \frac{1}{2} M_3 \cdot \dot{y}^2(t)$.
- L'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble E : $E_c(E/R_0) = \frac{1}{2}\left[(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)\right]$.

Question 6 *Déterminer la mobilité du système.*

Correction Ici la mobilité vaut 1.

Question 7 *Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.*

Correction Par une fermeture cinématique on pourrait montrer : $\dot{y}(t) = -\frac{p}{2\pi}\dot{\theta}(t)$.

Question 8 *Déterminer l'inertie équivalente de E ramenée à la rotation autour de l'axe $\left(O_0, \overrightarrow{y_0}\right)$ et du paramètre $\dot{\theta}(t)$.*

Correction $E_c(E/R_0) = \frac{1}{2}\left[(I_m + I_v)\cdot\dot{\theta}^2(t) + M_3\cdot\dot{y}^2(t)\right] = \frac{1}{2}\left[(I_m + I_v) + M_3\cdot\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\right]\cdot\dot{\theta}^2(t)$ d'où, $J_{\text{eq}}(E) = (I_m + I_v) + M_3\cdot\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2$.

Question 9 *Déterminer la masse équivalente de E ramené à la translation selon la direction $\overrightarrow{y_0}$ et du paramètre $\dot{y}(t)$.*

Correction $E_c(E/R_0) = \frac{1}{2}\left[(I_m + I_v)\cdot\dot{\theta}^2(t) + M_3\cdot\dot{y}^2(t)\right] = \frac{1}{2}\left[(I_m + I_v)\cdot\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + M_3\right]\cdot\dot{y}^2(t)$ d'où, $M_{\text{eq}}(E) = (I_m + I_v)\cdot\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + M_3$.

Question 10 *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E.*

Correction En combinant les résultats des différentes questions précédentes, on obtient : $M_{\text{eq}}\cdot\dot{y}(t)\cdot\ddot{y}(t) = (C_m \pm C_r)\cdot\dot{\theta}(t) \pm Y_{03}\cdot\dot{y}(t) + 0$.

On peut postuler un sens de déplacement : $\dot{y}(t) > 0$, ainsi $\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{p}\dot{y}(t) < 0$, $C_r > 0$, $Y_{03} < 0$: $M_{\text{eq}}\cdot\dot{y}(t)\cdot\ddot{y}(t) = \left[-(C_m + C_r)\cdot\frac{2\pi}{p} + Y_{03}\right]\cdot\dot{y}(t)$

Question 11 *Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier C_m à $y(t)$.*

Correction Il faut éliminer le paramètre Y_{03}. Pour cela on peut écrire le théorème de la résultante dynamique appliqué à S_3 en projection selon $\overrightarrow{z_0}$: $Z_{03} - M_3\cdot g = 0$.

Or la loi de Coulomb donne (avec $Z_{03} > 0$ et $Y_{03} < 0$) : $Y_{03} = -\mu\cdot Z_{03} = -\mu\cdot M_3\cdot g$.

Ainsi l'équation de mouvement obtenue est (en éliminant $\dot{y}(t) \neq 0$) : $\boxed{M_{\text{eq}}\cdot\ddot{y}(t) = -(C_m + C_r)\cdot\frac{2\pi}{p} - \mu\cdot M_3\cdot g}$.

Question 12 *Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).*

Correction

$$C_m = -\frac{p}{2\pi}\left[M_{\text{eq}}\ddot{y}_{\max} + M_3\cdot g\cdot\mu\right] - C_r = -\frac{p}{2\pi}M_3\left(\ddot{y}_{\max} + g\cdot\mu\right) - (I_m + I_v)\frac{2\pi}{p}\ddot{y}_{\max} - C_r$$

L'application numérique donne : $C_m = -3,79 N\cdot m$

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre S_1 et S_2. On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement η défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

Question 13 *En considérant le système $E_1 = \{S_1 + S_2\}$, définir le rendement.*

Correction

$$\eta = \frac{\mathscr{P}(\text{utile})}{\mathscr{P}(\text{entrée})} = \frac{\mathscr{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0)}{\mathscr{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)}$$

Question 14 *On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre S_1 et S_2. En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à S_2/R_0 et S_1/R_0 en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans* *la liaison hélicoïdale.*

Correction
- Expression de $\mathscr{P}(\text{dissipée})$: $\mathscr{P}(\text{dissipée}) = -\mathscr{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) = -(\mathscr{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) + \mathscr{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0))$;
- TEC appliqué à S_2/R_0 en régime permanent : $\mathscr{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) = -\mathscr{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0)$;
- TEC appliqué à S_1/R_0 en régime permanent : $\mathscr{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = -\mathscr{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0)$
- en combinant ces équations on obtient $\mathscr{P}(\text{dissipée})$: $\mathscr{P}(\text{dissipée}) = -(-\mathscr{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0) - \mathscr{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0))$ $= -\mathscr{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0) + \mathscr{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = (1-\eta)\,\mathscr{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)$.

On donne :
- Rendement η dans la liaison hélicoïdale : $\eta = 0,8$;

Question 15 *Déterminer dans ces conditions les dissipations.*

Correction $\mathscr{P}(\text{dissipée}) = C_{\text{max}} \cdot \dot{\theta}_{\text{max}} \cdot (\eta - 1) = 21,2 \times 6000\frac{2\pi}{60} \cdot (1-\eta) = 2664\,\text{W}$