

## Activation



### Activation – Système de dépose de composants électroniques

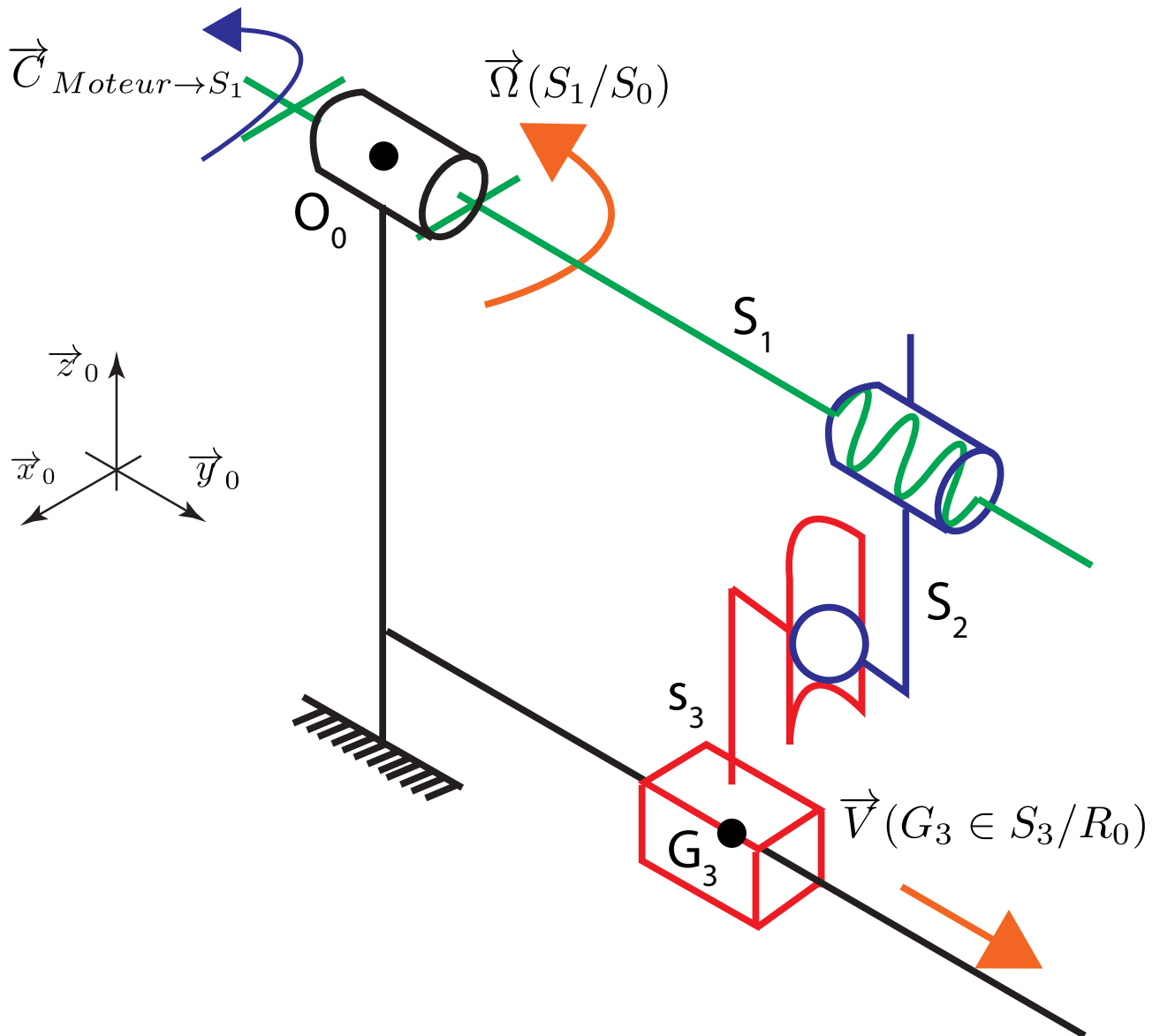
Émilien Durif – E3A PSI 2011

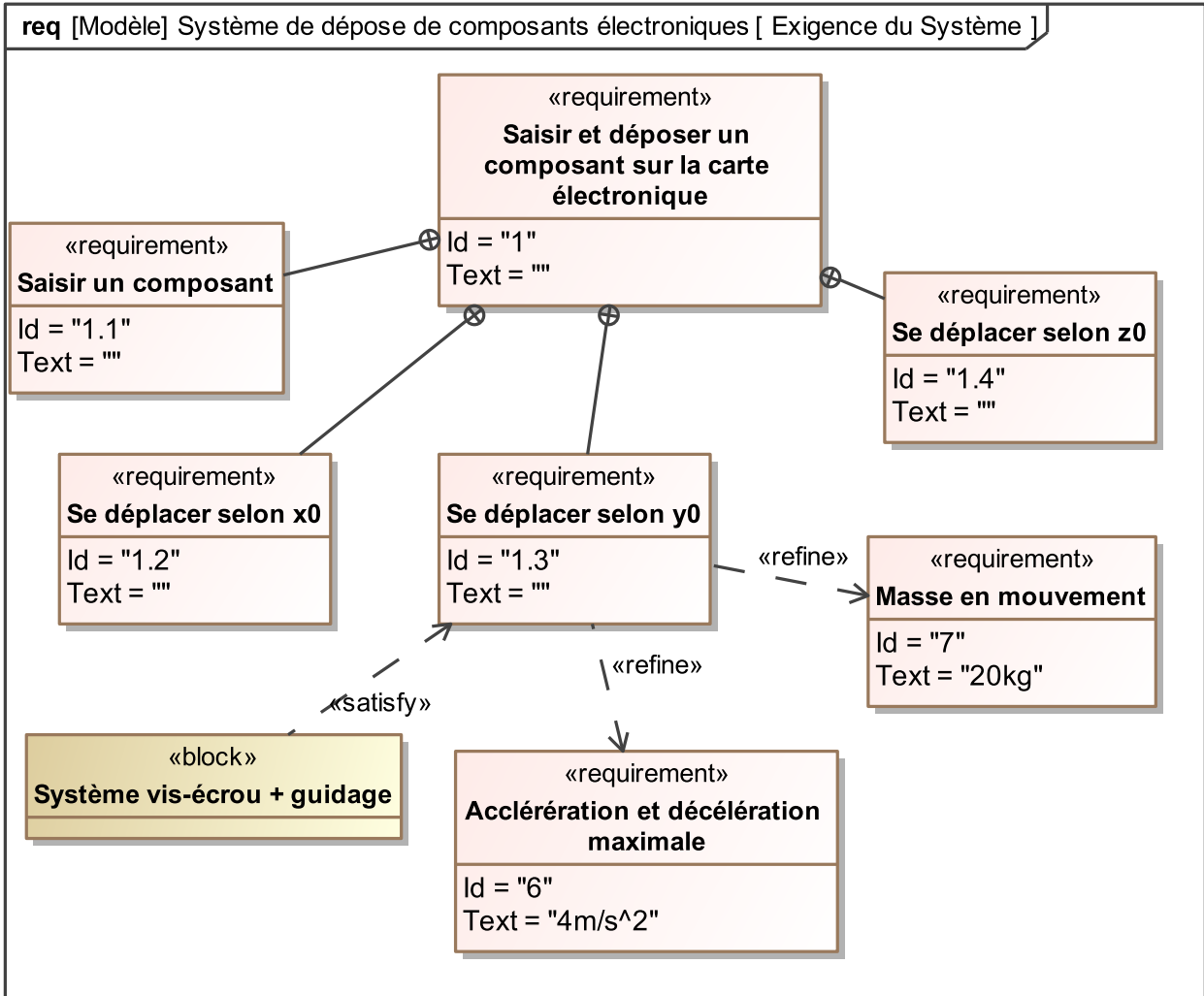
#### Savoirs et compétences :

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée  $\vec{y}_0$ ) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

#### Hypothèses :

- le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
- les solides seront supposés indéformables;
- on notera  $J_1$  le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  :  
 $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$ ;
- on note  $M_3$  et  $G_3$  respectivement la masse et le centre d'inertie du solide  $S_3$ ;
- la position de  $G_3$  est définie par  $\vec{O_0G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre  $S_0$  et  $S_3$  (Coefficient de frottement noté  $\mu$ ) et la pivot entre  $S_0$  et  $S_1$  (couple résistant noté  $C_r$ );
- seul l'action de pesanteur sur  $S_3$  sera supposée non négligeable.





- $S_0$  : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
- $S_1$  : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
- $S_2$  : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
- $S_3$  : chariot supportant la tête de dépose (masse  $M_3$ ).

#### Données numériques associées au système :

- Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) :  $\mu = 0,1$ .
- Pas de la vis à billes :  $p = 20$  mm.
- Diamètre de la vis à billes :  $D = 25$  mm.
- Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe  $\vec{y}_0$  :  $I_v = 2,15 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .
- Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) :  $C_r = 3$  Nm.
- $l$ , longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) : 1000 mm.
- Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :
  - couple maximal,  $C_{\max} = 21,2$  Nm;
  - fréquence de rotation maximale,  $N_m = 6000$  tr/min;
  - moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe  $\vec{y}_0$ ,  $I_m = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

**Objectif** L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- couple moteur transmis à  $S_1$  :  $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$ ;
- vitesse de rotation de  $S_1$  :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$ .

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose  $S_3$ ) :

- masse :  $M_3$ ;
- cinématique de  $S_3$  :  $\vec{a}(G_3/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}(t)$ .

On considère l'ensemble  $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$ .

**Question 1** Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

**Correction**

**Question 2** Déterminer l'expression de  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$  en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

**Correction**

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow S_3/R_0)$$

**Question 3** Calculer  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction des données du problème.

**Correction** On a :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \rightarrow S_3/R_0)$$

$$\bullet \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1/R_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{01} \cdot \vec{y}_0 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ L_{01} \cdot \vec{x}_0 \pm C_r \cdot \vec{y}_0 + N_{01} \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta}(t) \cdot \vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{O_0} = \pm C_r \cdot \dot{\theta}(t).$$

Le signe de la composante suivant  $\vec{y}_0$  dépendra du sens du mouvement de  $S_1/S_0$ .

$$\bullet \mathcal{P}(\text{Moteur} \rightarrow S_1/R_0) = \{\mathcal{T}(\text{Moteur} \rightarrow S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta}(t) \cdot \vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{O_0} = C_m \cdot \dot{\theta}(t).$$

$$\bullet \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) = \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{03} \cdot \vec{x}_0 + Y_{03} \cdot \vec{y}_0 + Z_{03} \cdot \vec{z}_0 \\ L_{03} \cdot \vec{x}_0 + M_{03} \cdot \vec{y}_0 + N_{03} \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_{O_0} = \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t).$$

$$\bullet \mathcal{P}(\text{Poids} \rightarrow S_3/R_0) : \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_3/R_0) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{matrix} G_3 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{-M_3 \cdot \vec{g} \cdot \vec{z}_0} \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_{G_3} = 0.$$

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t)$$

**Question 4** Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble  $E : \mathcal{P}_{\text{int}}(E)$ .

**Correction**

• D'après le graphe des liaisons :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) + \mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_3)$ .

$$\bullet \text{ Calcul de } \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{12} \vec{x}_0 + Y_{12} \vec{y}_0 + Z_{12} \vec{z}_0 \\ L_{12} \vec{x}_0 + M_{12} \vec{y}_0 + N_{12} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{matrix} q_{21} \vec{y}_0 \\ \nu_{12} \cdot \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_{O_0}$$

$$= Y_{12} \cdot \nu_{12} + q_{21} \cdot M_{12}. \text{ Or, } \left\{ \begin{matrix} M_{12} = -\frac{p}{2\pi} Y_{12} \\ \nu_{12} = \frac{p}{2\pi} q_{21} \end{matrix} \right\}. \text{ D'où : } \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = Y_{12} \cdot \nu_{12} + q_{21} \cdot M_{12} = \frac{p}{2\pi} [Y_{12} \cdot q_{21} - q_{21} \cdot Y_{12}] = 0.$$

$$\bullet \text{ Calcul de } \mathcal{P}(S_2 \leftrightarrow S_3) = \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \left\{ \begin{matrix} A \\ X_{23} \vec{x}_0 + Y_{23} \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_{\vec{0}} \otimes \left\{ \begin{matrix} A \\ p_{32} \vec{x}_0 + q_{32} \vec{y}_0 + r_{32} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{w_{32} \cdot \vec{z}_0} = 0.$$

• On en déduit donc :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0$ .

**Question 5** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$

**Correction**

• Énergie cinétique de l'ensemble dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :

$$E_c(E/R_0) = E_c(1/R_0) + E_c(2/R_0) + E_c(3/R_0)$$

$$\bullet \text{ Énergie cinétique de 1 dans son mouvement par rapport à } R_0 : E_c(1/R_0) = \frac{1}{2} \{\sigma(1/R_0)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_0)\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \vec{*} \\ \vec{I}_{O_0}(S_1) \cdot \dot{\theta}(t) \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_{O_0} \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta}(t) \vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{O_0} = \frac{1}{2} [\dot{\theta}^2 \vec{I}_{O_0}(S_1) \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{y}_0] = \frac{1}{2} J_1 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2.$$

• Énergie cinétique de 2 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :  $E_c(2/R_0) = \frac{1}{2} \{\sigma(2/R_0)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_0)\} = 0$  car l'inertie de 2 est négligeable.

- Énergie cinétique de 3 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  :  $E_c(3/R_0) = \frac{1}{2} \{ \sigma(3/R_0) \} \otimes \{ \mathcal{V}(3/R_0) \} = \left\{ \begin{matrix} - \\ M_3 \cdot \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_{\vec{0}} \otimes \left\{ \begin{matrix} - \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{\dot{y}(t) \cdot \vec{y}_0} = \frac{1}{2} M_3 \cdot \dot{y}^2(t)$ .
- L'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble  $E$  :  $E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)]$ .

**Question 6** Déterminer la mobilité du système.

**Correction** Ici la mobilité vaut 1.

**Question 7** Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

**Correction** Par une fermeture cinématique on pourrait montrer :  $\dot{y}(t) = -\frac{p}{2\pi} \dot{\theta}(t)$ .

**Question 8** Déterminer l'inertie équivalente de  $E$  ramenée à la rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  et du paramètre  $\dot{\theta}(t)$ .

**Correction**  $E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)] = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) + M_3 \cdot \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2] \cdot \dot{\theta}^2(t)$  d'où,  $J_{eq}(E) = (I_m + I_v) + M_3 \cdot \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2$ .

**Question 9** Déterminer la masse équivalente de  $E$  ramené à la translation selon la direction  $\vec{y}_0$  et du paramètre  $\dot{y}(t)$ .

**Correction**  $E_c(E/R_0) = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \dot{\theta}^2(t) + M_3 \cdot \dot{y}^2(t)] = \frac{1}{2} [(I_m + I_v) \cdot \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + M_3] \cdot \dot{y}^2(t)$  d'où,  $M_{eq}(E) = (I_m + I_v) \cdot \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + M_3$ .

**Question 10** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $E$ .

**Correction** En combinant les résultats des différentes questions précédentes, on obtient :  $M_{eq} \cdot \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = (C_m \pm C_r) \cdot \dot{\theta}(t) \pm Y_{03} \cdot \dot{y}(t) + 0$ .

On peut postuler un sens de déplacement :  $\dot{y}(t) > 0$ , ainsi  $\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{p} \dot{y}(t) < 0$ ,  $C_r > 0$ ,  $Y_{03} < 0$  :  $M_{eq} \cdot \dot{y}(t) \cdot \ddot{y}(t) = \left[ -(C_m + C_r) \cdot \frac{2\pi}{p} + Y_{03} \right] \cdot \dot{y}(t)$

**Question 11** Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier  $C_m$  à  $y(t)$ .

**Correction** Il faut éliminer le paramètre  $Y_{03}$ . Pour cela on peut écrire le théorème de la résultante dynamique appliqué à  $S_3$  en projection selon  $\vec{z}_0$  :  $Z_{03} - M_3 \cdot g = 0$ .

Or la loi de Coulomb donne (avec  $Z_{03} > 0$  et  $Y_{03} < 0$ ) :  $Y_{03} = -\mu \cdot Z_{03} = -\mu \cdot M_3 \cdot g$ .

Ainsi l'équation de mouvement obtenue est (en éliminant  $\dot{y}(t) \neq 0$ ) :  $M_{eq} \cdot \ddot{y}(t) = -(C_m + C_r) \cdot \frac{2\pi}{p} - \mu \cdot M_3 \cdot g$ .

**Question 12** Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

**Correction**

$$C_m = -\frac{p}{2\pi} [M_{eq} \ddot{y}_{\max} + M_3 \cdot g \cdot \mu] - C_r = -\frac{p}{2\pi} M_3 (\ddot{y}_{\max} + g \cdot \mu) - (I_m + I_v) \frac{2\pi}{p} \ddot{y}_{\max} - C_r$$

L'application numérique donne :  $C_m = -3,79 N \cdot m$

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre  $S_1$  et  $S_2$ . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement  $\eta$  défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

**Question 13** En considérant le système  $E_1 = \{S_1 + S_2\}$ , définir le rendement.

**Correction**

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})} = \frac{\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0)}{\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)}$$

**Question 14** On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre  $S_1$  et  $S_2$ . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à  $S_2/R_0$  et  $S_1/R_0$  en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

**Correction**

- Expression de  $\mathcal{P}(\text{dissipée})$  :  $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = -\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = -(\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0))$ ;
- TEC appliqué à  $S_2/R_0$  en régime permanent :  $\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) = -\mathcal{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0)$ ;
- TEC appliqué à  $S_1/R_0$  en régime permanent :  $\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = -\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0)$
- en combinant ces équations on obtient  $\mathcal{P}(\text{dissipée})$  :  $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = -(-\mathcal{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0) - \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0))$   
 $= -\mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = (1 - \eta) \mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)$ .

On donne :

- Rendement  $\eta$  dans la liaison hélicoïdale :  $\eta = 0,8$ ;

**Question 15** Déterminer dans ces conditions les dissipations.

**Correction**  $\mathcal{P}(\text{dissipée}) = C_{\max} \cdot \dot{\theta}_{\max} \cdot (\eta - 1) = 21,2 \times 6000 \frac{2\pi}{60} \cdot (1 - \eta) = 2664 \text{ W}$