Cycle 05

Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement ou de déterminer des actions mécaniques en utilisant les méthodes énergétiques

Chapitre 1 – Approche énergétique

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

PSI⋆ – MP

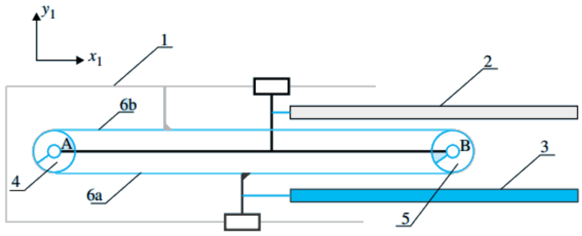
Application

Application 01

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie

Savoirs et compétences :

On s'intéresse un dispositif d'ouverture des deux parties du vantail de gauche d'une porte automatique schématisé ci-dessous :



Le mécanisme étudié comprend essentiellement :

- un bâti 1 auquel est lié le repère $\left(A;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ supposé galiléen;
- deux vantaux 2 et 3 de dimensions identiques et de masse identique M ;
- un châssis solidaire du vantail 2 et guidé en translation par rapport au bâti 1 ;
- deux poulies 4 et 5, de même rayon R, en rotation par rapport au châssis lié à 2 ;
- une courroie crantée dont les brins rectilignes, notés 6a et 6b, sont liés respectivement aux bâti 1 et au vantail 5 ;
- un moteur dont le stator est fixe sur le châssis lié à 2 et le rotor lié à la poulie 4.

On note :

- g, l'accélération de la pesanteur orientée suivant $-\overrightarrow{z_1}$;
- C_m, le couple moteur exercé par le stator sur le rotor;
- J , l'inertie équivalente, ramenée sur l'axe du moteur, de toutes les masses et inerties autres que celles des deux vantaux.

On néglige la masse de la courroie. On suppose toutes les liaisons parfaites et l'absence de glissement entre la courroie et les poulies.

Objectif Déterminer la loi entrée-sortie en effort $C_m = f(M)$ en vue d'adapter les caractéristiques du moteur électrique aux performances souhaitées.

Question 1 *Déterminer la relation entre ω_{42} et ω_{52} qui sont les vitesses de rotation respectives de 4/2 et 5/2.*

Question 2 *Donner :*

- *la relation entre ω_{42} et u_{21} la vitesse de déplacement du vantail 2 par rapport au bâti 1 ;*
- *la relation entre u_{21} et u_{31} la vitesse de déplacement du vantail 3 par rapport au bâti 1.*

Question 3 *Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = \{2,3,4,5\}$ dans son mouvement par rapport au bâti 1.*

Question 4 *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ dans son mouvement par rapport au bâti 1. En déduire la loi entrée-sortie en effort recherchée.*

Question 5 *Interpréter les différents termes de l'expression trouvée.*

Éléments de correction

1. $\omega_{42} = \omega_{52}$.
2. $u_{21} = R\omega_{42}$ et $u_{31} = 2u_{21}$.
3. $E_{c\,\Sigma/1} = \dfrac{1}{2}\left(5MR^2 + J\right)\omega_{42}^2$.
4. $C_m = \left(5MR^2 + J\right)\dot{\omega}_{42}$.

1. Déterminer la relation entre ω_{42} et ω_{52} qui sont les vitesses de rotation respectives de 4/2 et 5/2.

Les deux poulies 4 et 5 sont de même rayon R, on a donc : $\boxed{\omega_{42} = \omega_{52}}$

2. Donner :

Ce mécanisme est assez inhabituel. En effet, il intègre une courroie, solide déformable, qui est lié d'une part au bâti 1 et d'autre part au vantail 3. Pour faciliter l'étude, on peut supposer les deux brins de la courroie 6a et 6b tendus et inextensibles et imaginer ainsi les remplacer par deux crémaillères distinctes engrenant avec les roues dentée 4 et 5 :

- une crémaillère 6b lié à 1 ;
- une crémaillère 6a liée à 3.

Posons :

$$\mathcal{V}_{2/1} = \underset{\forall P}{\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u_{21} \cdot \vec{x}_1 \end{Bmatrix}} \qquad \mathcal{V}_{3/1} = \underset{\forall P}{\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u_{31} \cdot \vec{x}_1 \end{Bmatrix}} \qquad \mathcal{V}_{4/2} = \underset{\forall P \in (A,\vec{z}_1)}{\begin{Bmatrix} \omega_{42} \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \qquad \mathcal{V}_{5/2} = \underset{\forall P \in (B,\vec{z}_1)}{\begin{Bmatrix} \omega_{52} \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

- relation entre ω_{42} et u_{21} :

$u_{6b/2} = -\omega_{42} \cdot R$

Or $u_{6b/2} = u_{12} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_{21} = \omega_{42} \cdot R}$

En effet, en observant le schéma, on imagine bien que lorsque ω_{42} est > 0, le châssis lié au vantail 2 se déplace suivant $\vec{x}_1$.

- relation entre u_{21} et u_{31} :

$u_{6a/2} = \omega_{52} \cdot R = \omega_{42} \cdot R$

Or $u_{6a/2} = u_{32} \quad \Rightarrow \quad u_{31} - u_{21} = \omega_{42} \cdot R$

On a donc : $\boxed{u_{31} = 2 \cdot u_{21}}$

En position ouverte, les deux vantaux se trouvent superposés. Lors de la fermeture, le vantail 3 avance par rapport au bâti 1 deux fois plus que le vantail 2.

3. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma=\{2,3,4,5\}$ dans son mouvement par rapport au bâti 1.

Calculons l'énergie cinétique de Σ dans son mouvement par rapport à 1. On a :

$$E_{c\,\Sigma/1}=E_{c\,2/1}+E_{c\,3/1}+E_{c\,4/1}+E_{c\,5/1}+E_{c\,courroie/1}+E_{c\,rotor/1}$$

Or on a :

$E_{c\,4/1}+E_{c\,5/1}+E_{c\,courroie/1}+E_{c\,rotor/1}=\frac{1}{2}\cdot J\cdot\omega_{42}{}^2$ avec J, inertie équivalente, ramenée sur l'axe du moteur

Et : $E_{c\,2/1}=\frac{1}{2}\cdot M\cdot u_{21}{}^2=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2\cdot\omega_{42}{}^2$ (mouvement de translation)

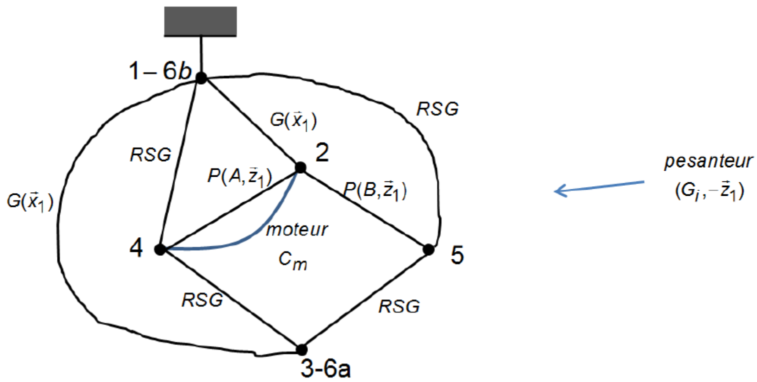
Ainsi que : $E_{c\,3/1}=\frac{1}{2}\cdot M\cdot u_{31}{}^2=\frac{1}{2}\cdot M\cdot 4\cdot R^2\cdot\omega_{42}{}^2$

On a donc : $\boxed{E_{c\,\Sigma/1}=\frac{1}{2}\cdot\left(5\cdot M\cdot R^2+J\right)\cdot\omega_{42}{}^2}$

4. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ dans son mouvement par rapport au bâti 1. En déduire la loi entrée-sortie en effort recherchée.

Ce mécanisme est assez inhabituel. En effet, il intègre une courroie, solide déformable, qui est lié d'une part au bâti 1 et d'autre part au vantail 3. Pour faciliter l'étude énergétique, et plus particulièrement les calculs de puissance, on peut supposer les deux brins de la courroie 6a et 6b tendus et inextensibles et imaginer ainsi les remplacer par deux crémaillères distinctes engrenant avec les roues dentée 4 et 5 :

- une crémaillère 6b lié à 1 ;
- une crémaillère 6a liée à 3.



Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à Σ dans son mouvement par rapport au bâti 1. On a :

$$\frac{dE_{c\,\Sigma/1}}{dt}=P_{\bar{\Sigma}\to\Sigma/1}+P_{\text{inter-effort}}$$

Or on a : $P_{\bar{\Sigma}\to\Sigma/1}=P_{1\to2/1}+P_{1\to5/1}+P_{6b\to4/1}+P_{6b\to5/1}+P_{pes\to\Sigma/1}$

Avec : $P_{1\to2/1}=P_{1\to5/1}=0$ (liaisons glissières parfaites et 1 fixe dans 1)

Avec : $P_{6b\to4/1}=P_{6b\to5/1}=0$ (roulement sans glissement)

Et : $P_{pes\to\Sigma/1}=0$ car $\forall S_i\in\Sigma,\ \vec{V}_{G_i\in S_i/1}\perp\vec{g}$

Soit : $P_{\bar{\Sigma}\to\Sigma/1}=0$

Cycle 05

De plus, en supposant toutes les liaisons parfaite et en tenant compte du non glissement entre 6a et les poulies, on a :

$P_{\text{inter-effort}} = C_m \cdot \omega_{42}$

Le théorème de l'énergie cinétique nous permet donc d'écrire que : $\boxed{C_m = \left(5 \cdot M \cdot R^2 + J\right) \cdot \dot{\omega}_{42}}$

5. Interpréter les différents termes de l'expression trouvée.

$\left(5 \cdot M \cdot R^2 + J\right)$ représente l'inertie équivalente, ramenée sur l'arbre moteur, de l'ensemble des solides en mouvement. On remarque que le vantail 3 à une influence quatre fois plus importante que le vantail 2.

Puisque l'on a négligé les frottements en considérant toutes les liaisons parfaites et puisque les solides se déplacent dans un plan perpendiculaire à l'action de la pesanteur, on remarque que le moteur sert uniquement à mettre en mouvement les vantaux ou à les freiner mais qu'il n'intervient pas lors d'un déplacement à vitesse constante.