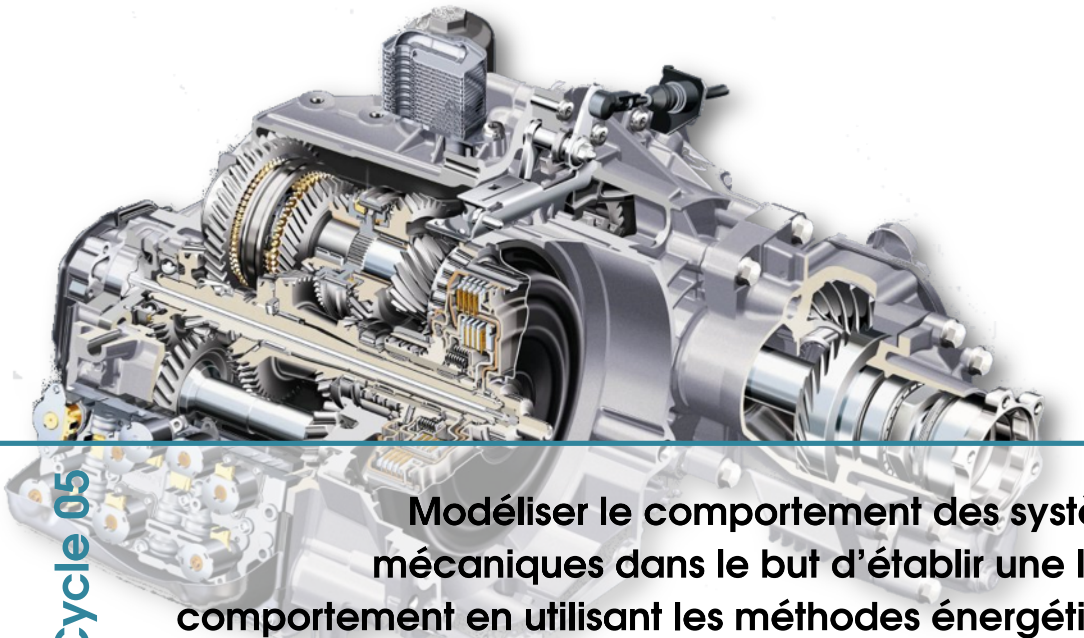


PSI★ – MP

Cycle 05

Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement en utilisant les méthodes énergétiques.

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Cours

Chapitre 1

Énergétique

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*
- *Res1.C3.SF1 : Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre.*
- *Mod1.C4.SF1 : Associer les grandeurs physiques aux échanges d'énergie et à la transmission de puissance.*
- *Mod1.C5.SF1 : Identifier les pertes d'énergie .*
- *Mod1.C6.SF1 : Évaluer le rendement d'une chaîne d'énergie en régime permanent.*
- *Mod1.C5.SF2 : Déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement rapport à un autre solide.*
- *Mod1.C5.SF3 : Déterminer la puissance des actions mécaniques intérieures à un ensemble de solides.*

Toupie
Volants d'inertie d'un vilebrequin

Xavier Pessoles
PSI★ – MP

1 Introduction

1.1 Objectif de la modélisation

Dans ce chapitre nous aborderons les notions de **puissance**, **travail**, et **énergie**. Ces notions sont fondamentales pour :

- dimensionner des composants d'une chaîne d'énergie en terme de puissance transmissible ;
- déterminer des équations de mouvement pour prévoir les performances d'un système ;
- estimer le rendement d'une chaîne complète d'énergie.

2 Puissance

2.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel (E)

Définition On définit la **puissance d'une action mécanique extérieure** à un ensemble matériel (E) en mouvement par rapport à un référentiel R subissant une densité d'effort $\overrightarrow{f}(M)$ (où M est un point courant de (E)) comme :

$$\mathscr{P}(\text{ext} \to E/R) = \int_{M\in E} \overrightarrow{f}(M) \cdot \overrightarrow{V}(M \in E/R) \mathrm{d}V.$$

R On appellera **puissance galiléenne**, la puissance d'un ensemble matériel (E) en mouvement dans un **référentiel galiléen** R_g : $\mathscr{P}(\text{ext} \to E/R_g)$

! [Dimension et homogénéité]

- Une puissance est une **grandeur scalaire** s'exprimant en $Watt$.
- Elle est homogène à un produit entre un effort et une vitesse et peut donc s'exprimer en unité SI en Nms^{-1}.
- Historiquement on a utilisé longtemps les « chevaux » ou « cheval vapeur » ($1\,\text{cV} = 736\,\text{W}$).

Propriété — Calcul des actions mécaniques s'appliquant sur un ensemble E. On considère un ensemble matériel E composé de n solides S_i.

Dans la pratique pour calculer la puissance totale des actions mécaniques s'appliquant sur E dans son mouvement par rapport à R il faut sommer toutes les puissances s'appliquant sur les S_i venant de l'extérieur de E :

$$\mathscr{P}(\text{ext} \to E/R) = \sum_{\forall S_i \in E} \mathscr{P}(\text{ext} \to S_i/R)$$

2.2 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide (S)

Définition — Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide (S). La puissance d'une action mécanique extérieure à un solide (S) en mouvement dans un référentiel R peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit (S) et le torseur cinématique du mouvement de S dans le référentiel R.

$$\mathscr{P}(\text{ext} \to S/R) = \{\mathscr{T}(\text{ext} \to S)\} \otimes \{\mathscr{V}(S/R)\}.$$

! On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point.**

R

- Lorsque le torseur cinématique de S/R est un couple (mouvement de translation) alors en tout point A la puissance est alors donnée par $\mathscr{P}(\text{ext} \to S/R) = \overrightarrow{R}_{\text{ext}\to S} \cdot \overrightarrow{V}(A, S/R)\, \forall A$..
- Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par $\mathscr{P}(\text{ext} \to S/R) = \overrightarrow{M}_A(\text{ext} \to S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/R)\, \forall A$.

2.3 Puissance d'actions mutuelles entre deux solides

Définition — Puissance d'actions mutuelles entre deux solides. Soient deux solides (S_1) et (S_2) distincts, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R, et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. **La puissance des actions mutuelles** entre (S_1) et (S_2), dans leur mouvement par rapport au repère R, est :

$$\mathscr{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R) = \mathscr{P}(S_1 \to S_2/R) + \mathscr{P}(S_2 \to S_1/R)$$

La **puissance des actions mutuelles** entre (S_1) et (S_2) **est indépendante du repère** R. Ainsi,

$$\mathscr{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2/R) = \mathscr{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2)$$

R

- On peut parler parfois de **puissance des inter-efforts**.
- Pour un ensemble E, on peut exprimer l'ensemble de la puissance des inter-effort comme la puissance intérieure à l'ensemble E :

$$\mathscr{P}_{int}(E) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\mathscr{P}(S_i \longleftrightarrow S_j)$$

2.4 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

Définition — Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons. Deux solides S_1 et S_2 ont une **liaison parfaite** si et seulement si quelque soit le mouvement de S_2 par rapport à S_1 autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre S_1 et S_2 est nulle**.

$$\mathscr{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) = 0.$$

R

- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solide S_1 et S_2. Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.
- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

3 Travail

3.1 Définition

Définition — Travail. Le travail entre deux instants t_1 et t_2 d'une action mécanique s'exerçant sur un ensemble matériel E dans son mouvement par rapport au repère R est donné par :

$$W_{t_1}^{t_2}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}(\text{ext} \rightarrow E/R)\,\mathrm{d}t.$$

R On peut également définir le travail élémentaire par :

$$\mathrm{d}W(\text{ext} \rightarrow E/R) = \mathscr{P}(\text{ext} \rightarrow E/R)\,\mathrm{d}t.$$

- Le travail est une grandeur scalaire.
- L'unité de travail est le **Joule**.
- Le travail est homogène au **produit entre une force et une distance**.

3.2 Travail conservatif

Définition — Travail conservatif. On dit que le **travail est conservatif** (noté $W_{c\,t_1}^{\;t_2}(\text{ext} \rightarrow E/R)$) s'il est indépendant du chemin suivi pour passer de l'état initial (instant t_1) à l'état final (instant t_2). Dans ce cas là il existe une grandeur appelée énergie potentielle de l'action mécanique extérieure à E dans son mouvement par rapport à R qui vérifie :

$$\mathrm{d}W_c(\text{ext} \rightarrow E/R) = -\mathrm{d}E_p(\text{ext} \rightarrow E/R).$$

avec

$$\mathrm{d}W_c(\text{ext} \rightarrow E/R) = \mathscr{P}(\text{ext} \rightarrow E/R)\,\mathrm{d}t.$$

On peut également l'écrire sous la forme :

$$\mathscr{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = -\frac{\mathrm{d}E_p(\text{ext} \rightarrow E/R)}{\mathrm{d}t}.$$

R

- On dit que la puissance à travail conservatif dérive d'une énergie potentielle (au signe près).
- L'énergie potentielle est une primitive de la puissance. Elle est donc définie à une constante près arbitraire.

3.2.1 Énergie potentielle de la pesanteur

Définition — Énergie potentielle de la pesanteur. L'**énergie potentielle** associée à l'action de la pesanteur sur un ensemble matériel (E) de masse m dans son mouvement par rapport à R est donnée par :

$$E_p(g \to E/R) = m\ g\ z_G + k.$$

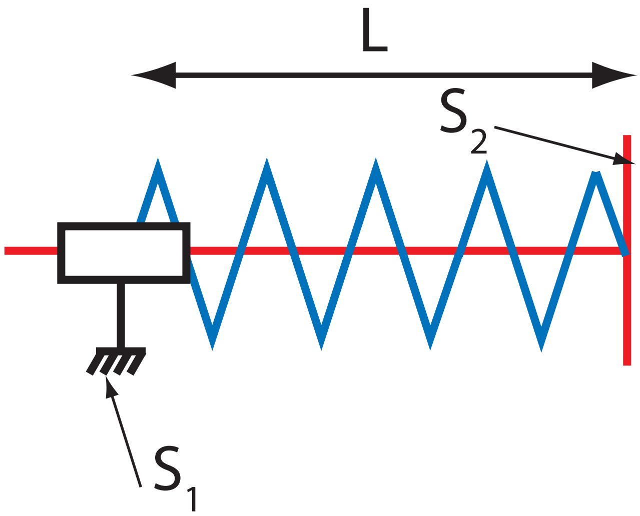
Où z_G correspond à la position du centre de gravité G de S suivant la verticale ascendante $\overrightarrow{z}$ (colinéaire au champs de pesanteur $\overrightarrow{g}$) et k une constante.

3.2.2 Énergie potentielle associée à un ressort

Définition — Énergie potentielle associée à un ressort. L'**énergie potentielle associée à l'action d'un ressort** r de raideur K et de longueur à vide L_0 situé entre deux solides S_1 et S_2 dans son mouvement par rapport à R est donnée par :

$$E_p(r \to S_1, S_2/R) = \frac{K}{2}(L - L_0)^2 + k.$$

Où k est une constante.



4 Énergie cinétique

4.1 Définition

Définition — Énergie cinétique. On définit **l'énergie cinétique** E_c d'un système matériel S en mouvement dans un référentiel R_0 comme la somme des carrés de la vitesse en chaque point courant P de S pondéré de la masse élémentaire :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_{P\in S}\left(\overrightarrow{V}(P/R_0)\right)^2 \mathrm{d}m$$

4.2 Propriétés

Propriété — Expression avec les comoments. L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}\left\{\mathscr{V}(S/R_0)\right\} \otimes \left\{\sigma(S/R_0)\right\}.$$

! Il faudra bien veiller à ce que chacun des torseurs soit exprimé en un même point.