

Chapitre 1

Équilibrage des solides en rotation

Savoirs et compétences :

- Mod2.C16 : torseur cinétique
- Mod2.C17 : torseur dynamique
- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Mod2.C15 : matrice d'inertie
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement
- Res1.C2.SF1 : proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison



Turbine à gaz Alstom



Turboréacteur Snecma

1	Introduction	2
1.1	Problématique industrielle	2
1.2	Présentation du support de cours	2
2	Modélisation du problème	3
2.1	Paramétrage du problème	3
2.2	Analyse préliminaire	3
3	Conditions d'équilibrage	5
3.1	Présentation	5
3.2	Équilibrage statique	5
3.3	Équilibrage dynamique	5
3.4	Conditions d'équilibrage	5
3.5	Illustration de l'équilibrage	6
4	Réalisation de l'équilibrage	6
4.1	Présentation de la méthode d'ajout de masses ponctuelles	6
4.2	Équations de détermination de l'équilibrage	7
4.3	Mise en oeuvre : machine d'équilibrage industriel	7
1		82

1 Introduction

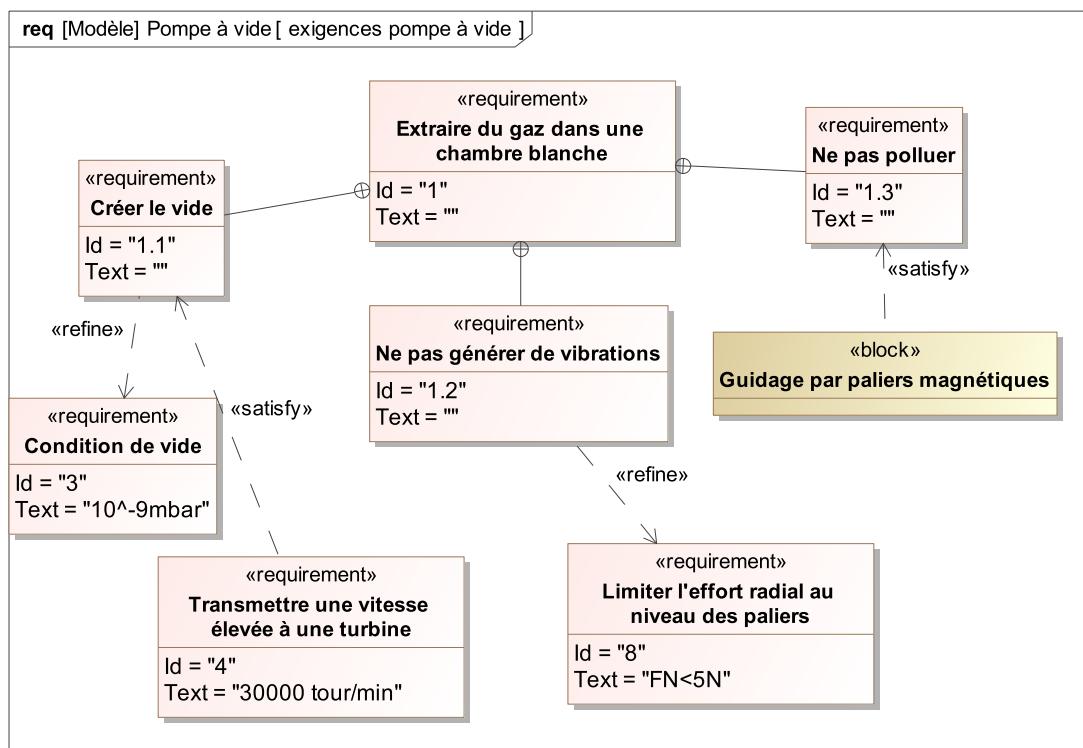
1.1 Problématique industrielle

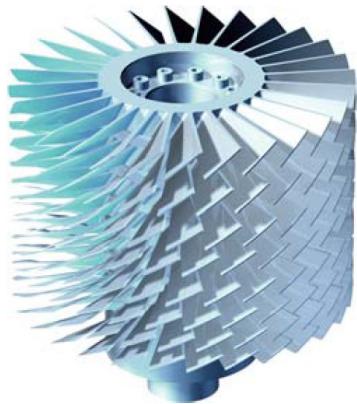
Le mise en rotation de rotor à haute vitesse (à partir de quelques centaines de tours par minute) est une configuration classique rencontrée dans l'industrie. Si un défaut géométrique existe, cela induit une dissymétrie de la répartition de masse qui provoque des effets vibratoires pouvant aller jusqu'à la rupture des éléments de guidage (paliers, roulements à billes).

Afin d'éviter ces problèmes il convient d'équilibrer dynamiquement ces rotors ce qui implique de rendre les actions mécaniques au niveau des guidages en rotation constantes au cours du temps.

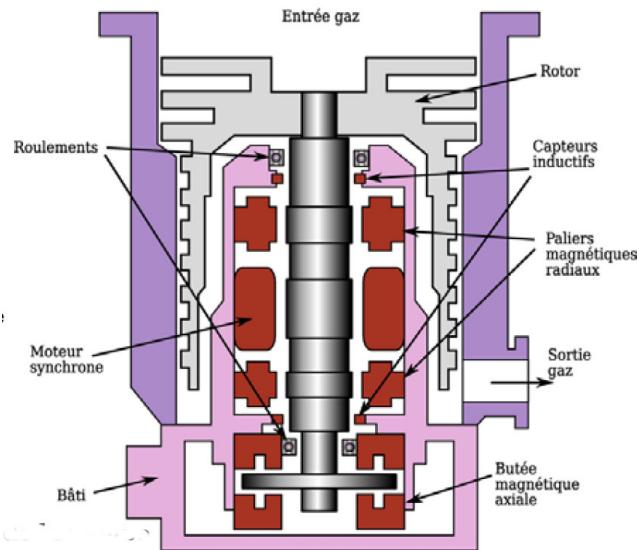
1.2 Présentation du support de cours

■ **Exemple — Étude d'une pompe turbo-moléculaire.** On s'intéresse ici à l'étude d'une pompe à vide destinée à la fabrication de composants électroniques capable d'évacuer des gaz en créant un vide de l'ordre 10^{-9} mbar dans une chambre blanche. Les conditions du cahier des charges sont très exigeantes et résumées dans le diagramme des exigences partiel suivant :





Rotor de la pompe

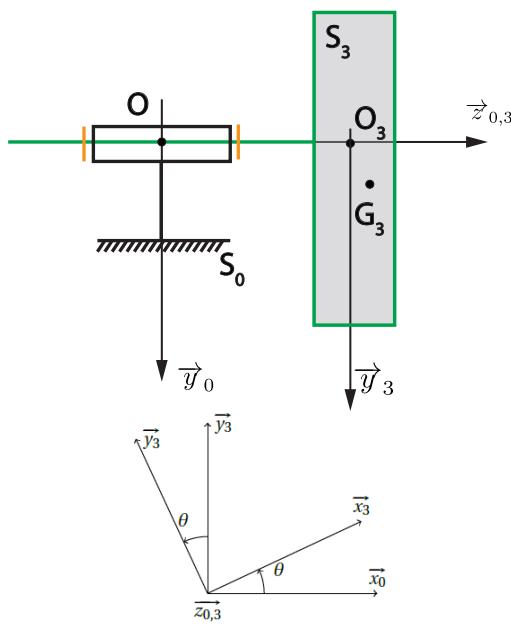


Vue en coupe du guidage par paliers magnétiques de la pompe

2 Modélisation du problème

2.1 Paramétrage du problème

La figure ci-dessous représente le paramétrage d'un rotor S_3 en mouvement par rapport à S_0 .



Paramétrage du problème

- Le référentiel R_0 associé à S_0 est supposé comme étant galiléen.
- Le guidage par paliers magnétiques entre le rotor S_3 et le bâti S_0 est modélisé par une liaison pivot d'axe (O_3 , $\vec{z}_{0,3}$) avec bâti S_0 .
- Le paramètre du mouvement de S_3/S_0 est défini par $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$.
- Le rotor S_3 est de masse m_3 , de centre de masse G_3 tel que $\vec{O}_3G_3 = b\vec{y}_3 + c\vec{z}_3$.
- Le rotor S_3 , bien qu'ayant une symétrie théorique de révolution est en réalité imparfait. Sa matrice d'inertie en O_3 est donnée par :

$$\bar{I}_{O_3}(S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{R_3}$$

- Un moteur, non représenté, entraîne S_3 avec un couple $C_m \vec{z}_{0,3}$ à vitesse constante ($\omega = \dot{\theta}$).
- L'accélération de la pesanteur est dirigée selon $+\vec{y}_0$ et vaut $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

2.2 Analyse préliminaire

Faire le bilan des actions mécaniques extérieures pour $\{S_3\}$.

- Action du bâti (liaison pivot) :** $\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{03}\vec{x}_0 + Y_{03}\vec{y}_0 + Z_{03}\vec{z}_0 \\ L_{03}\vec{x}_0 + M_{03}\vec{y}_0 \end{array} \right\}_{\forall P \in (O_3, \vec{z}_{0,3})}$
- Action du moteur :** $\{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow S_3)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$.
- Action de la pesanteur :** $\{\mathcal{T}(\text{pesanteur} \rightarrow S_3)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{m}_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3}$
 $= \left\{ \begin{array}{l} \vec{m}_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{O}_3G_3 \wedge (\vec{m}_3 g \vec{y}_0) = (b\vec{y}_3 + c\vec{z}_3) \wedge (m_3 g \vec{y}_0) \end{array} \right\}_{O_3} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{m}_3 g \vec{y}_0 \\ m_3 g (-b \sin \theta \vec{z}_{0,3} - c \vec{x}_0) \end{array} \right\}_{O_3}$

Déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_3/R_0)\}$ en O_3 .

- Le solide S_3 est en mouvement de rotation autour de l'axe $(O_3, \overrightarrow{z_{0,3}})$ fixe par rapport à R_0 .

$$\{\mathcal{D}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S_3/R_0) = m_3 \overrightarrow{a}(G_3 \in S_3/R_0) \\ \overrightarrow{\delta(O_3, S_3/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O_3, S_3/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_{O_3}$$

- On calcule $\overrightarrow{R_d}(S_3/R_0) : \overrightarrow{R_d}(S_3/R_0) = m_3 \overrightarrow{a}(G_3 \in S_3/R_0) = m_3 \left[\frac{d\overrightarrow{V}(G_3 \in S_3/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$.

Or, $\overrightarrow{V}(G_3 \in S_3/R_0) = \overrightarrow{G_3 O_3} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S_3/R_0) = (-b \overrightarrow{y}_3 - c \overrightarrow{z}_3) \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{z_{0,3}} = -b \dot{\theta} \overrightarrow{x_3}$.
Donc,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_d}(S_3/R_0) &= -b m_3 \left(\dot{\theta} \overrightarrow{x_3} + \dot{\theta} \left[\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt} \right]_{R_0} \right) = -b m_3 (\dot{\theta} \overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_3}) \\ &= -b m_3 \omega^2 \overrightarrow{y_3} = -b m_3 \omega^2 (-\sin \theta \overrightarrow{x_0} + \cos \theta \overrightarrow{y_0}) \end{aligned}$$

- On calcule $\overrightarrow{\sigma(O_3, S_3/R_0)}$. O_3 est fixe par rapport à R_0 : $\overrightarrow{\sigma(O_3, S_3/R_0)} = \overline{\overrightarrow{I}}_{O_3}(S_3) \overrightarrow{\Omega}(S_3/R_0) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{R_3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{pmatrix}_{R_3} = \dot{\theta} (-E_3 \overrightarrow{x_3} - D_3 \overrightarrow{y_3} + C_3 \overrightarrow{z_3})$

- On calcule $\overrightarrow{\delta(O_3, S_3/R_0)}$: O_3 est fixe par rapport à R_0 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta(O_3, S_3/R_0)} &= \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(O_3, S_3/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} = (-E_3 \cdot \ddot{\theta} + D_3 \dot{\theta}^2) \overrightarrow{x_3} + (-D_3 \cdot \ddot{\theta} - E_3 \dot{\theta}^2) \overrightarrow{y_3} + C_3 \cdot \ddot{\theta} \overrightarrow{z_{0,3}} \\ &\quad = D_3 \omega^2 \overrightarrow{x_3} - E_3 \omega^2 \overrightarrow{y_3} \\ &\quad = \omega^2 [(D_3 \cdot \cos \theta + E_3 \cdot \sin \theta) \overrightarrow{x_0} + (D_3 \cdot \sin \theta - E_3 \cdot \cos \theta) \overrightarrow{y_0}] \end{aligned}$$

- On en déduit $\{\mathcal{D}(S_3/R_0)\}$ exprimé dans la base $b_0 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$:

$$\{\mathcal{D}(S_3/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} -b m_3 \omega^2 (-\sin \theta \overrightarrow{x_0} + \cos \theta \overrightarrow{y_0}) \\ \omega^2 [(D_3 \cdot \cos \theta + E_3 \cdot \sin \theta) \overrightarrow{x_0} + (D_3 \cdot \sin \theta - E_3 \cdot \cos \theta) \overrightarrow{y_0}] \end{array} \right\}_{O_3}$$

Déduire du Principe Fondamental de la Dynamique, les équations de mouvement.

Le Principe Fondamental de la dynamique appliqué à S_3 par rapport au référentiel R_0 donne :

Théorème de la résultante dynamique :

$$\begin{matrix} \overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{z_0} \end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{03} = b m_3 \omega^2 \sin \theta \\ Y_{03} + m_3 g = -b m_3 \omega^2 \cos \theta \\ Z_{03} = 0 \end{array} \right.$$

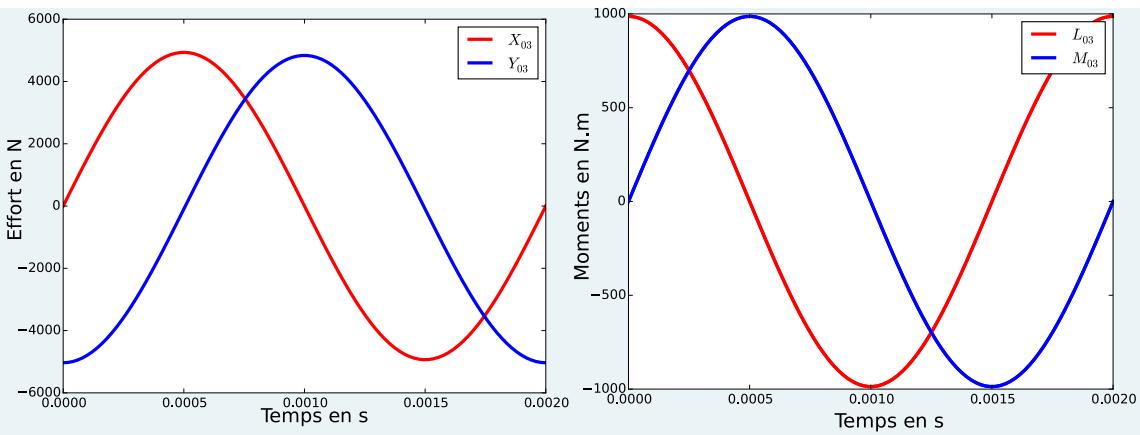
Théorème du moment dynamique en O_0 :

$$\begin{matrix} \overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{z_0} \end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{03} = \omega^2 (D_3 \cdot \cos \theta + E_3 \cdot \sin \theta) + c m_3 g \\ M_{03} = \omega^2 \cdot (D_3 \cdot \sin \theta - E_3 \cdot \cos \theta) \\ C_m - m_3 g b \sin \theta = 0 \end{array} \right.$$

Propriété — Évolution des efforts au niveau des paliers au cours du temps. Lorsque le rotor n'est pas équilibré dynamiquement (comme dans l'exemple précédent), les actions extérieures dans la liaison pivot dépendant de la position angulaire et fluctuent cycliquement.

On donne ci-dessous les évolutions des composantes de l'action mécanique dans la liaison pivot pour une rotation du rotor 3 :

- opérateur d'inertie : $E_3 = 0$ et $D_3 = 10^{-4} \text{ kg m}^2$;
- masse et centre de masse : $m_3 = 10 \text{ kg}$, $c = 0 \text{ mm}$ et $b = 0,05 \text{ mm}$;
- rotation de 3/0 : $\omega = 30000 \text{ tour/min}$.



Il apparaît des variations d'efforts de l'ordre de 10 kN et de moment de 2 kNm sur des périodes très brèves (2 ms) ce qui constitue une source importante de vibrations pour la structure. Ces valeurs sont très supérieures à celles exigées par le cahier des charges puisqu'on ne tolère au maximum que 5 N.

3 Conditions d'équilibrage

3.1 Présentation

Définition — Équilibrage d'un solide en rotation. Pour éviter les vibrations, il faut rendre l'action mécanique extérieure s'exerçant sur un solide en rotation la plus constante possible. Il faut donc qu'elle soit indépendante de la vitesse de rotation (ω).

- On en tire les conditions de l'**équilibrage statique** en vérifiant cette définition sur les équations dynamiques de mouvement en **résultante**.
- On en tire les conditions de l'**équilibrage dynamique** en vérifiant cette définition sur les équations dynamiques de mouvement en **moment**.

3.2 Équilibrage statique

■ **Exemple — Mise en œuvre de l'équilibrage statique du rotor S_3 .** Déterminer les conditions d'équilibrage statique.

Les équations en résultantes impliquent que le paramètre b doit être nul. Cela revient à dire que le centre d'inertie G_3 soit sur l'axe de rotation $(O_3, \vec{z}_{0,3})$ de S_3 par rapport à S_0 .

3.3 Équilibrage dynamique

■ **Exemple — Mise en œuvre de l'équilibrage dynamique du rotor S_3 .** Déterminer les conditions d'équilibrage dynamique.

Les équations en moment impliquent que $D_3 = E_3 = 0$. Cela revient à dire que l'axe $(O_0, \vec{z}_{0,3})$ soit axe principal d'inertie du solide S_3 .

3.4 Conditions d'équilibrage

Définition — Condition d'équilibrage d'un solide en rotation. Un solide équilibré doit vérifier les deux conditions suivantes :

- son centre d'inertie se situe sur son axe de rotation;
- son axe de rotation est axe principal d'inertie : les produits d'inertie sont nul selon cet axe.

3.5 Illustration de l'équilibrage

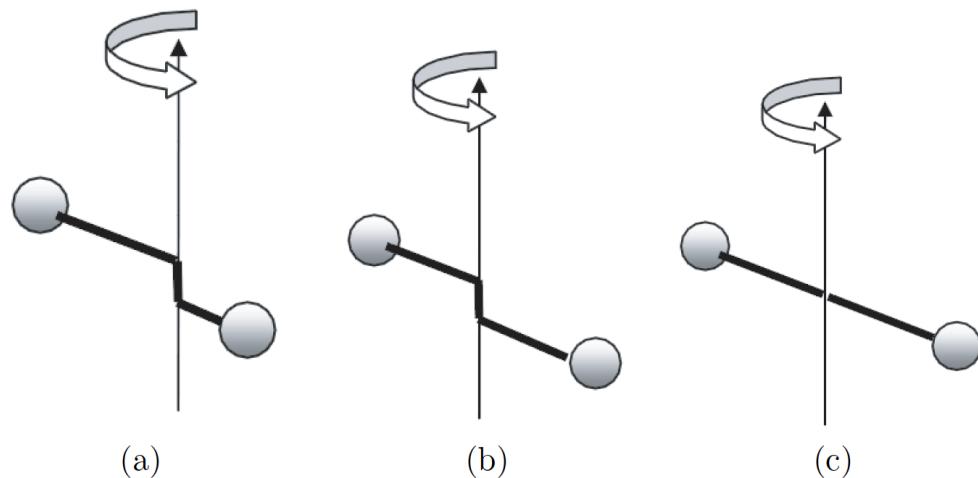


Illustration avec deux masses ponctuelles

- (a) : Les 2 masses ne sont pas à la même distance de l'axe de rotation : on n'a ni équilibrage statique ni équilibrage dynamique.
- (b) : Les deux masses sont à la même distance de l'axe : on a réalisé l'équilibrage statique.
- (c) : Les deux masses sont en face l'une de l'autre : on a réalisé l'équilibrage dynamique.

4 Réalisation de l'équilibrage

4.1 Présentation de la méthode d'ajout de masses ponctuelles

On utilise alors deux masses d'équilibrage ponctuelles m_1 et m_2 localisées sur la jante (rayon r) sur sa partie avant (masse m_1) et sur sa partie arrière (masse m_2) par les angles Φ_1 et Φ_2 . On définit alors leur position par :

- $\overrightarrow{O_3G_1} = r \vec{x}_1 + h \vec{z}_3$
- $\overrightarrow{O_3G_2} = r \vec{x}_2 - h \vec{z}_3$

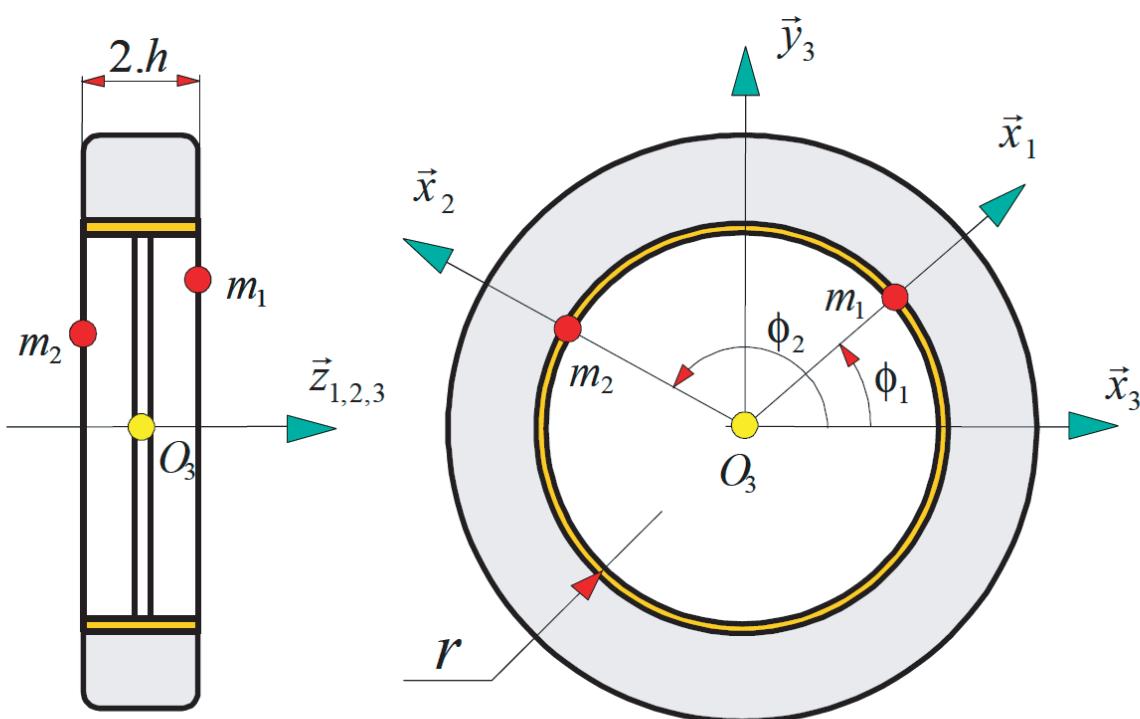


FIGURE 1 – Définition du problème avec la présence de masses d'équilibrage

On considère dorénavant l'ensemble cinématiquement lié $E = \{1 + 2 + 3\}$:

- Soit G son centre d'inertie;

- $\bar{\bar{I}}O_3(E)$ sont opérateur d'inertie en O_3 : $\bar{\bar{I}}O_3(E) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_3}$.

■ **Exemple — Détermination de l'équilibrage statique.** Traduire la relation donnée par l'équilibrage statique.

- La condition d'équilibrage statique implique : $\overrightarrow{O_3G}\overrightarrow{x_3} = 0$ et $\overrightarrow{O_3G}\overrightarrow{y_3} = 0$.
- La formule du barycentre donne : $\overrightarrow{O_3G} = \frac{m_1\overrightarrow{O_3G_1} + m_1\overrightarrow{O_3G_2} + m_3\overrightarrow{O_3G_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$.
- On peut exprimer $\overrightarrow{O_3G_1}$ et $\overrightarrow{O_3G_2}$ dans la base $b_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_{0,3}})$:

$$\overrightarrow{O_3G_1} = r \cos \Phi_1 \overrightarrow{x_3} + r \sin \Phi_1 \overrightarrow{y_3} + h \overrightarrow{z_{0,3}} \quad \overrightarrow{O_3G_2} = r \cos \Phi_2 \overrightarrow{x_3} + r \sin \Phi_2 \overrightarrow{y_3} - h \overrightarrow{z_{0,3}}$$

- $\overrightarrow{O_3G}\overrightarrow{x_3} = 0$ donne : $r(m_1 \cos \Phi_1 + m_1 \cos \Phi_1) = 0$.
- $\overrightarrow{O_3G}\overrightarrow{y_3} = 0$ donne : $m_3 b + r(m_1 \sin \Phi_1 + m_1 \sin \Phi_1) = 0$.

Traduire la relation donnée par l'équilibrage dynamique.

- L'opérateur d'inertie de E en O_3 doit avoir la direction $(O_3, \overrightarrow{z_{0,3}})$ comme principale d'inertie d'où $D = E = 0$.
- On obtient alors une relation avec l'expression de D : $D = D_3 + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = D_3 + m_1 r \sin \Phi_1 h - m_2 r \sin \Phi_2 h$.
- On obtient alors une relation avec l'expression de E : $E = E_3 + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = E_3 + m_1 r \cos \Phi_1 h - m_2 r \cos \Phi_2 h$.

4.2 Équations de détermination de l'équilibrage

Définition — Équations de détermination de l'équilibrage. En notant,

- x_i , y_i et z_i (i allant de 1 à 2) les coordonnées des deux masselottes dans le repère $(O; \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$ lié à un solide S ,
- r_s la distance entre le centre d'inertie de S par rapport à $(O, \overrightarrow{z_s})$,
- D_s , E_s et E_s les produits d'inertie du solide S dans la base $b_s = (\overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$

L'écriture des conditions d'équilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe $(O, \overrightarrow{z_s})$ donne :

Centre d'inertie G sur l'axe de rotation	Axe de rotation (O, \overrightarrow{z}) axe principal d'inertie du solide S
$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$ $m_3 r_s + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$	$D = D_s + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2$ $E = E_s + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2$

4.3 Mise en œuvre : machine d'équilibrage industriel

Propriété — Mise en œuvre de l'équilibrage dynamique.

D'après l'étude précédente, on obtient 4 équations avec 8 inconnues (m_1 , m_2 , x_1 , y_1 , z_1 , x_2 , y_2 et z_2). Il faut donc imposer 4 variables. Généralement pour des raisons pratiques comme dans l'exemple précédent, on impose z_1 et z_2 puis on impose une relation entre x_1 et y_1 puis entre x_2 et y_2 cela revient à fixer une distance entre les masses additionnelles et l'axe de rotation. Dans la pratique on utilise une équilibruse qui mesure les efforts au niveau des paliers et qui en déduit les variables citées précédemment pour obtenir les conditions d'équilibrage.



Application 1



Application 01

Éditions Vuibert

La rotation du rotor de queue d'un hélicoptère est obtenue à partir de la rotation du rotor principal par l'intermédiaire d'un système de transmission. Les arbres n'étant pas parallèles, on utilise un engrenage conique pour assurer cette transmission. Le rotor est donc constitué d'une roue conique standard montée sur un arbre épaulé. L'enca斯特ement des deux pièces n'est pas toujours optimal car l'axe de l'arbre et l'axe de la roue peuvent être décalés de quelques centièmes de millimètres. Les opérations de maintenance préventive par contrôle non destructif (CND) correspondant à une analyse vibratoire permettent de détecter ces défauts.

Cahier des charges

Un extrait du diagramme des exigences est donné figure suivante.

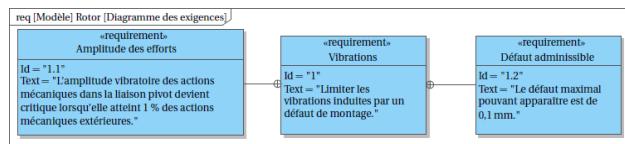
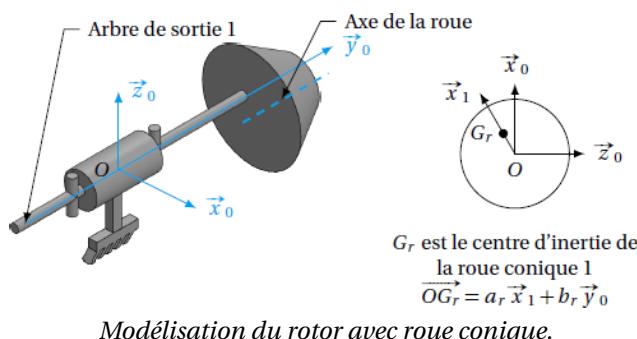


Diagramme des exigences pour l'analyse d'un défaut.

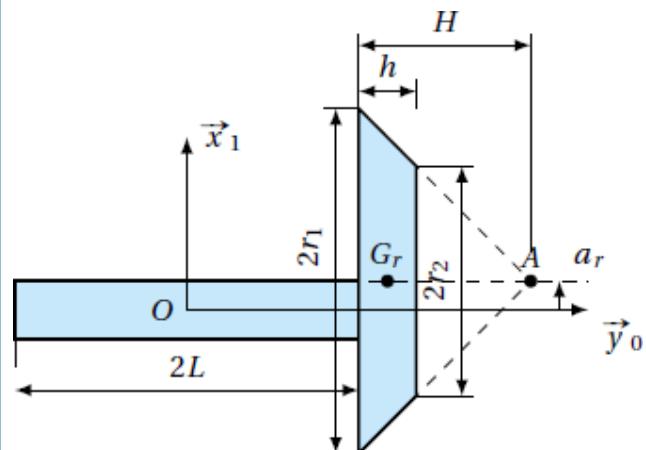
Objectif L'objectif de l'exercice est de déterminer la relation entre les efforts engendrant des vibrations et le défaut d'alignement des axes. Le diagramme des exigences de la figure précédente définit les critères à respecter.

Modéliser le système



On associe un repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$ à l'arbre en rotation. On note $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ l'angle de rotation autour de l'axe (O, \vec{y}_0) de l'ensemble 1 par rapport au bâti fixe 0. La vitesse angulaire est notée $\omega = \dot{\theta}$.

Le solide 1 est constitué de 2 parties : un arbre de forme cylindrique de centre de gravité O , de diamètre $d = 40$ mm et de longueur $2L = 400$ mm et d'une roue conique en forme de tronc de cône plein de largeur $h = 50$ mm (la hauteur du cône correspondant est notée H), de diamètre de base $2r_1 = 280$ mm et de diamètre de tête $2r_2 = 200$ mm. Les matériaux des deux pièces sont identiques. Le centre de gravité de la roue conique G_r est tel que $\overrightarrow{OG_r} = a_r \vec{x}_1 + b_r \vec{y}_0$ avec a_r défaut admissible et $b_r = 425$ mm. La masse du tronc de cône est notée $m_r = 20$ kg et celle de l'arbre $m_a = 4$ kg (on note $m = m_r + m_a \approx m_r$ la masse totale de la pièce 1).



Géométrie de la pièce 1 = arbre + tronc de cône.

Question 1 Déterminer le centre de gravité de la pièce 1 : $\overrightarrow{OG_1} = a \vec{x}_1 + b \vec{y}_0$.

Déterminer les actions de liaisons

On prend dans un premier temps une matrice d'inertie quelconque de l'ensemble 1 au point O dans la base R_1 :

$$[I(O, S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)} .$$

L'action mécanique extérieure exercée par la denture sur la roue conique est notée :

$$\{\mathcal{T}(ext \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_e \vec{x}_1 + Y_e \vec{y}_0 + Z_e \vec{z}_1 \\ L_e \vec{x}_1 + C_e \vec{y}_0 + N_e \vec{z}_1 \end{array} \right\}_O.$$

L'action mécanique exercée dans la liaison pivot parfaite par le bâti 0 est notée :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_0 \vec{x}_1 + Y_0 \vec{y}_0 + Z_0 \vec{z}_1 \\ L_0 \vec{x}_1 + N_0 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_O.$$

Question 2 Compte tenu de la géométrie de la pièce 1, donner la forme simplifiée de la matrice d'inertie $I_O(S)$.

Question 3 Calculer l'accélération $\overrightarrow{\Gamma(G \in 1/0)}$ et le moment dynamique $\overrightarrow{\delta(O, 1/0)}$.

Question 4 Déduire de l'application du PFD les actions mécaniques dans la liaison pivot.

Pour éviter les vibrations, il faut que les actions mécaniques dans la liaison pivot ne dépendent pas de $\dot{\omega} = \dot{\theta}$ et de $\omega = \dot{\theta}$.

Question 5 Quelles conditions sur la position du centre de gravité et sur la matrice d'inertie doit-on vérifier pour respecter ce critère ?

Déterminer les composantes inertielles

La matrice d'inertie d'un cône de sommet A, de rayon R, de hauteur H et d'axe \vec{y}_0 est la suivante : $[I(A, \text{cône})] = \begin{bmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)}$ avec $A_c = \frac{3mR^2}{20} + \frac{3mH^2}{5}$ et $B_c = \frac{3mR^2}{10}$.

La masse de ce cône est égale à $\rho \frac{\pi HR^2}{3}$ (avec ρ masse volumique). Le centre d'inertie du cône est défini par $\overrightarrow{AG_c} = -\frac{3H}{4} \vec{y}_0$.

Question 6 Justifier que la matrice d'inertie en A de la roue en forme de tronc de cône défini dans le sujet soit

la suivante : $[I(A, \text{roue})] = \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & B_r & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)}$ avec

$$A_r = \frac{3m_{c1}r_1^2}{20} + \frac{3m_{c1}H^2}{5} - \frac{3m_{c2}r_2^2}{20} - \frac{3m_{c2}(H-h)^2}{5} \text{ et}$$

$$B_r = \frac{3m_{c1}r_1^2}{10} - \frac{3m_{c2}r_2^2}{10} \text{ où } m_{c1} = \frac{\rho\pi r_1^2 H}{3} \text{ et } m_{c2} = \frac{\rho\pi r_2^2(H-h)}{3}.$$

Question 7 Déterminer la matrice d'inertie en G_r de la roue en utilisant le théorème de Huygens puis la déterminer en O.

Question 8 Calculer les valeurs numériques de a, b et F à partir du cahier des charges, des résultats précédents et des valeurs numériques données en début d'énoncé.

Vérification du cahier des charges

On cherche à déterminer si un défaut admissible défini dans le cahier des charges convient ou non en termes d'efforts vibratoires. On se place donc en régime permanent ($\dot{\omega} = 0$) à la fréquence angulaire de 800 tr min^{-1} . On considère uniquement une action extérieure présentant une résultante selon \vec{x}_1 de $X_e = 5000 \text{ N}$ et un moment N_e selon \vec{z}_1 égal à 2000 Nm .

Question 9 Calculer la composante de l'action mécanique dans la liaison pivot X_0 et le moment N_0 pour un défaut maximal (on prendra $H = 86 \text{ mm}$). Conclure quant au cahier des charges.

Question 10 Pourrait-on vérifier les conditions d'équilibrage déterminées dans la première partie avec un petit perçage de masse négative m_p situé en P tel que $\overrightarrow{OP} = a_p \vec{x}_1 + b_p \vec{y}_0$.

$$1. a = \frac{m_r a_r}{m} \text{ et } b = \frac{m_r b_r}{m}.$$

$$2. \overrightarrow{D} = \overrightarrow{E} = 0,$$

$$3. \overrightarrow{\Gamma(G \in 1/0)} = -a\ddot{\theta}\vec{z}_1 - a\dot{\theta}^2\vec{x}_1. \overrightarrow{\delta(O, 1/0)} = B\ddot{\theta}\vec{y}_0 - F\ddot{\theta}\vec{x}_1 + F\dot{\theta}^2\vec{z}_1.$$

$$4. \begin{cases} X_0 + X_e = -ma\dot{\theta}^2 \\ Y_0 + Y_e = -ma\ddot{\theta} \\ Z_0 + Z_e = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L_0 + L_e = -F\ddot{\theta} \\ C_e = B\ddot{\theta} \\ N_0 + N_e = F\dot{\theta}^2 \end{cases}.$$

$$5. a = 0 \text{ et } F = 0.$$

$$6. .$$

$$7. [I(O, \text{tronc})] =$$

$$m_r \begin{bmatrix} \frac{A_r}{m_r} - (L+H-b_r)^2 + b_r^2 & -a_r(L+H) & 0 \\ -a_r(L+H) & \frac{B_r}{m_r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_r}{m_r} + b_r^2 - (L+H-b_r)^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)}$$

$$8. a = \frac{m_r a_r}{m} = 0,08 \text{ mm et } b = \frac{m_r b_r}{m} = 354 \text{ mm. } F = m_r \cdot a_r (L+H) = 20 \times 0,1 \times 10^{-3} \times 0,286 = 5,7 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2.$$

$$9. X_0 = -X_e - ma\omega^2 \text{ et } N_0 = -N_e - F\omega^2 \text{ avec } F\omega^2 \approx 4 \text{ Nm.}$$

$$10. .$$

Application 1 – Corrigé



Application 01

Éditions Vuibert

1) On utilise la propriété $m\overrightarrow{OG} = m_r\overrightarrow{OG_r}$.

Ainsi, $a = \frac{m_r a_r}{m}$ et $b = \frac{m_r b_r}{m}$.

2) Le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{x}_1)$ est plan de symétrie, donc les produits d'inertie D et E sont nuls.

3) La vitesse du point G est égale à $\vec{V}_{1/0}(G) = -a\dot{\theta}\vec{z}_1$. L'accélération est donc égale à $\vec{a}_{1/0}(G) = -a\ddot{\theta}\vec{z}_1 - a\dot{\theta}^2\vec{x}_1$.

$$\vec{\delta}_{1/0}(O) = \left. \frac{d\vec{\sigma}_{1/0}(O)}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d(B\dot{\theta}\vec{y}_0 - F\dot{\theta}\vec{x}_1)}{dt} \right|_0.$$

Ainsi, $\vec{\delta}_{1/0}(O) = B\ddot{\theta}\vec{y}_0 - F\ddot{\theta}\vec{x}_1 + F\dot{\theta}^2\vec{z}_1$.

4) On isole le solide 1 soumis à l'action de la liaison pivot et aux actions mécaniques extérieures. Le PFD écrit au point O dans le référentiel galiléen 0 en projection dans la base 1 donne :

$$\begin{cases} X_0 + X_e = -ma\dot{\theta}^2 \\ Y_0 + Y_e = -ma\ddot{\theta} \\ Z_0 + Z_e = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L_0 + L_e = -F\ddot{\theta} \\ C_e = B\ddot{\theta} \\ N_0 + N_e = F\dot{\theta}^2 \end{cases} .$$

5) Il faut, d'après les équations, que la distance a et le produit d'inertie F soient nuls.

6) Le tronc de cône défini dans l'énoncé est obtenu par soustraction de la matrice d'inertie d'un cône de rayon r_1 et de hauteur H de sommet A et d'un cône de rayon r_2 et de hauteur $H-h$ de sommet A .

7) Le centre d'inertie du tronc de cône est défini par $\overrightarrow{OG_r} = a_r\vec{x}_1 + b_r\vec{y}_0$ d'après la première partie. Ainsi, $\overrightarrow{AG_r} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG_r} = a_r\vec{x}_1 + (b_r - L - H)\vec{y}_0$.

La matrice d'inertie en G_r est obtenue par la relation $[I(A, \text{tronc})] = [I(G_r, \text{tronc})] + m_r \begin{bmatrix} (L+H-b_r)^2 & a_r(L+H-b_r) & 0 \\ a_r(L+H-b_r) & a_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_r^2 + (L+H-b_r)^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)}$.

Pour déterminer la matrice d'inertie en O , on utilise la même relation.

$$[I(O, \text{tronc})] = [I(G_r, \text{tronc})] + m_r \begin{bmatrix} b_r^2 & -a_r b_r & 0 \\ -a_r b_r & a_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & b_r^2 + a_r^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)} . \text{ Finalement :}$$

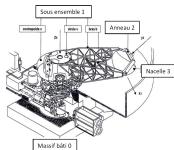
$$[I(O, \text{tronc})] = m_r \begin{bmatrix} \frac{a_r}{m_r} - (L+H-b_r)^2 + b_r^2 & -a_r(L+H) & 0 \\ -a_r(L+H) & \frac{B_r}{m_r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_r}{m_r} + b_r^2 - (L+H-b_r)^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)} .$$

8) Le défaut maximal est $a_r = 0,1 \text{ mm}$. En utilisant les relations de la première question, il vient $a = \frac{m_r a_r}{m} = 0,08 \text{ mm}$ et $b = \frac{m_r b_r}{m} = 354 \text{ mm}$. Les résultats de la question précédente nous permettent de calculer $F = m_r \cdot a_r(L+H) = 20 \times 0,1 \times 10^{-3} \times 0,286 = 5,7 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

9) On obtient $X_0 = -X_e - ma\omega^2$ avec $ma\omega^2 \approx 14 \text{ N}$. On constate que l'effort induit par le défaut est négligeable devant l'effort extérieur (beaucoup moins de 1 %). Le cahier des charges est vérifié. Le moment N_0 vaut quant à lui $N_0 = -N_e - F\omega^2$ avec $F\omega^2 \approx 4 \text{ Nm}$. On constate à nouveau que le cahier des charges est vérifié et que le moment induit par la rotation est inférieur à 1 % de la valeur du moment extérieur. Si les actions extérieures étaient plus faibles, on risquerait de ne pas vérifier le cahier des charges.

10) Pour réaliser l'équilibrage avec un perçage (c'est-à-dire enlever une masse ponctuelle m_p) situé en P tel que $\overrightarrow{OP} = a_p\vec{x}_1 + b_p\vec{y}_0$, il faut vérifier que $m_r a_r + m_p a_p = 0$ mais aussi $m_r a_r b_r + m_p a_p b_p = 0$ avec $m_p < 0$. On doit donc percer le tronc de cône ($b_r = b_p$). Si on perce en périphérie du cône soit environ à 120 mm, on doit enlever une masse $m_p = m_r \frac{a_r}{a_p}$ soit 20 g ce qui correspond bien à un petit perçage (on enlève peu par rapport à la masse de la roue conique). On peut donc équilibrer le rotor avec un petit perçage.

Application 2



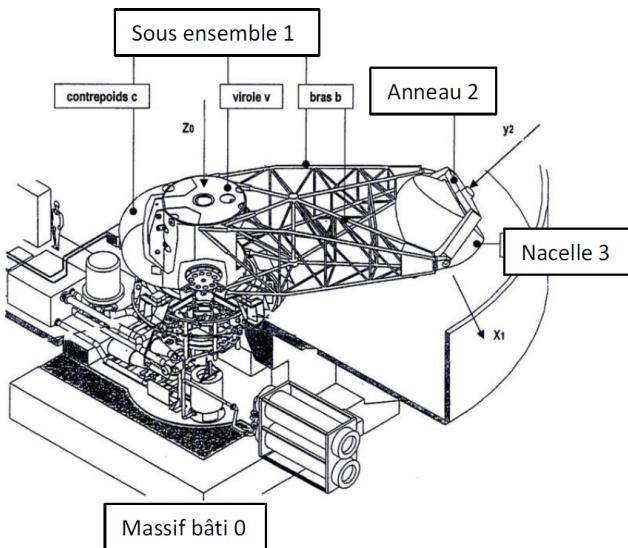
Application 02

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Présentation

On s'intéresse à une centrifugeuse humaine dont on donne une description structurelle ainsi que la modélisation cinématique. Le système étudié est constitué de 4 éléments principaux :

- un massif-bâti en béton 0 sur lequel est rigidement ancré un axe assurant le guidage en rotation du sous ensemble 1 autour d'un axe vertical;
- un sous ensemble 1 en rotation autour de l'axe vertical qui est composé d'un contrepoids c , d'une virole v et d'un bras en treillis tubulaire b ;
- un anneau 2, interposé entre la nacelle et le bras, autorisant les rotations autour des 2 axes orthogonaux (roulis et tangage);
- une nacelle instrumentée 3 équipée du siège pour le pilote.

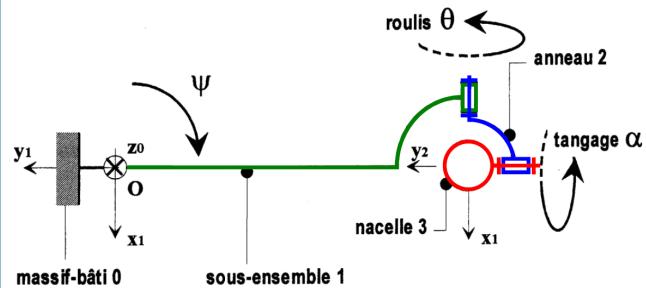


Aux 4 éléments précédents s'ajoutent des équipements complémentaires : un générateur de puissance hydraulique, un réducteur pouvant transmettre une puissance de l'ordre de 1 MW pour le mouvement de rotation du sous ensemble 1 par rapport à 0, une motorisation embarquée pour les mouvements de rotation de roulis et de tangage, un système d'asservissement pour chaque actionneur.

Cette conception permet de lier de façon univoque, les profils de position (ou de vitesse relative) engendrés

au niveau de chaque liaison à l'évolution temporelle des 3 composantes d'accélération que subit le pilote. Ainsi les consignes de position ou de vitesse à appliquer aux liaisons sont directement déduites de l'accélération à reproduire. La vitesse de rotation du bras détermine l'intensité de l'accélération imposée au pilote et l'orientation de la nacelle en roulis et tangage fixe la direction de l'accélération imposée au pilote.

Modélisation cinématique et paramétrage

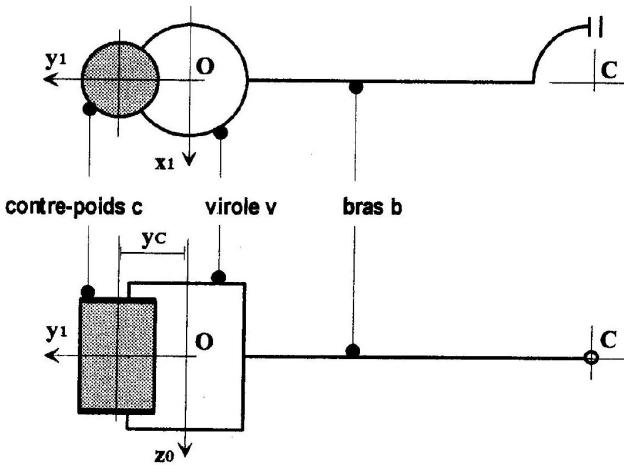


À l'arrêt les angles α et θ sont nuls.

- Le repère $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti 0. Ce repère sera considéré comme galiléen. Le champ de la pesanteur est défini par $\vec{g} = g \vec{z}_0$.
- Le repère $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au sous ensemble 1 (composée du contrepoids c , de la virole v et du bras en treillis tubulaire b). La liaison 1/0 est considérée comme une liaison pivot parfaite d'axe (O, \vec{z}_0) , sa position est paramétrée par l'angle $\psi(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.
- Le repère $\mathcal{R}_2 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est lié à l'anneau 2. La liaison 2/1 est considérée comme une liaison pivot parfaite d'axe (C, \vec{x}_1) , sa position est paramétrée par l'angle $\theta(t) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. θ est appelé angle de roulis, la position du point C est définie par le vecteur $\vec{OC} = -R \vec{y}_1$ avec $R = 7,62 \text{ m}$.
- Le repère $\mathcal{R}_3 = (C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_3)$ est lié à la nacelle 3 dans laquelle le pilote prend place. La liaison 3/2 est considérée comme une liaison pivot parfaite d'axe (C, \vec{y}_2) , sa position est paramétrée par l'angle $\alpha(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

Géométrie des masses

Les valeurs approchées des moments d'inertie suivants ne sont données qu'à titre indicatif. Le sous ensemble (1) est composé de la virole v, du contrepoids c et du bras b.



Sous ensemble (1)

- Virole : masse $m_v = 8325 \text{ kg}$, centre de gravité G_v tel que $\overrightarrow{OG_v} = z_v \vec{z}_0$ avec $z_v = 0,63 \text{ m}$, matrice d'inertie $I_O(v) = \begin{pmatrix} A_v & 0 & 0 \\ 0 & A_v & 0 \\ 0 & 0 & C_v \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$, avec $A_v = 20625 \text{ kg m}^2$ et $C_v = 17600 \text{ kg m}^2$.
- Contrepoids : masse $m_c = 5600 \text{ kg}$, centre de gravité G_c tel que $\overrightarrow{OG_c} = y_c \vec{y}_1$ avec $y_c = 2 \text{ m}$, matrice d'inertie $I_O(c) = \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$, avec $A_c = 25625 \text{ kg m}^2$, $B_c = 3000 \text{ kg m}^2$ et $C_c = 22775 \text{ kg m}^2$.
- Bras : masse $m_b = 1980 \text{ kg}$, centre de gravité G_b tel que $\overrightarrow{OG_b} = -y_b \vec{y}_1$ avec $y_b = 3,45 \text{ m}$, matrice d'inertie $I_O(b) = \begin{pmatrix} A_b & 0 & 0 \\ 0 & B_b & 0 \\ 0 & 0 & C_b \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$, avec $A_b = 31575 \text{ kg m}^2$, $B_b = 6000 \text{ kg m}^2$ et $C_b = 33775 \text{ kg m}^2$.

Anneau (2) Masse et inertie supposées négligeables dans cette approche.

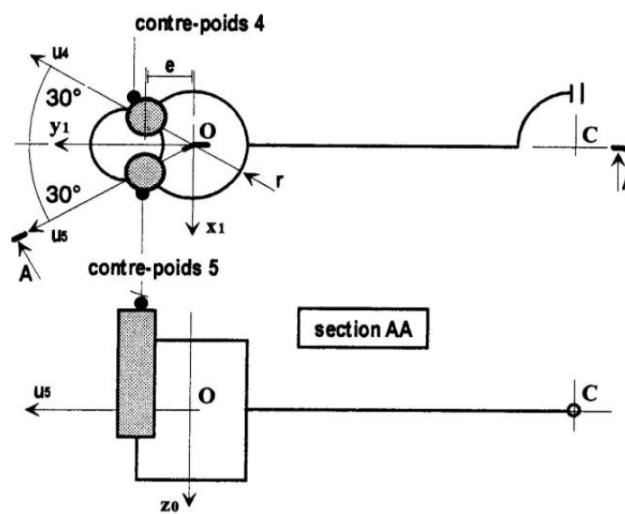
Nacelle et pilote (3)

- Masse $m_3 = 1705 \text{ kg}$, le centre de gravité reste confondu avec le point C tel que $\overrightarrow{OC} = -R \vec{y}_1$ avec $R = 7,62 \text{ m}$, matrice d'inertie $I_C(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}_{(C; \vec{x}_3, \vec{y}_2, \vec{z}_3) \text{ et } (C; \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$, avec $A_3 = 135 \text{ kg m}^2$ et $B_3 = 1575 \text{ kg m}^2$.

Étude des équilibrages statiques et dynamiques

La centrifugeuse comporte, en complément de l'ensemble des éléments précédemment décrits, deux contrepoids mobiles par rapport au sous-ensemble 1 et repérés 4 et 5. Ces contrepoids placés symétriquement par rapport au plan $(O, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ sont modélisés par des cylindres de révolution.

Les liaisons contrepoids 4/virole 1 et contrepoids 5/virole 1 sont assimilées à des liaisons glissières parfaites de direction \vec{z}_0 . Le schéma ci-dessous définit les implantations de ces deux contrepoids mobiles dans le repère \mathcal{R}_1 ainsi que les notations complémentaires retenues pour la géométrie des masses.



Contrepoids mobile i ($i = 4$ ou 5)

- Masse m_i , le centre de gravité G_i est tel que $\overrightarrow{OG_i} = r \vec{u}_i + z_i \vec{z}_0$ et $\overrightarrow{OG_i} \vec{y}_1 = e$ avec $e = 1,2 \text{ m}$, matrice d'inertie $I_{G_i}(i) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & A_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{(G_i; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}$.

Question 1 Quelle est la condition nécessaire afin de réaliser l'équilibrage statique de l'ensemble E en liaison pivot autour de l'axe (O, \vec{z}_0) avec le massif bâti 0 ? Exprimer les relations traduisant cet équilibrage statique.

Question 2 En déduire l'expression des masses des deux contrepoids mobiles m_4 et m_5 en fonction des données du problème. Faire l'application numérique.

Question 3 Exprimer la coordonnée z_G du centre de gravité de l'ensemble E en fonction de z_4 et z_5 .

Question 4 Exprimer de façon formelle les conditions qui traduisent l'équilibrage dynamique de l'ensemble E en liaison pivot autour de l'axe (O, \vec{z}_0) avec le massif bâti 0 ? Quelles sont les conséquences de l'équilibrage dynamique sur la matrice d'inertie exprimée en O de l'ensemble E ? Donner la forme de cette matrice.

Question 5 En tenant compte des données du problème que peut-on dire de la forme de la matrice d'inertie du sous ensemble 1 exprimée en O dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.

Question 6 Déterminer la matrice la matrice d'inertie du solide 4 exprimée en O dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ en fonction m_4 , x_4 , y_4 , z_4 , A_4 et C_4 .

Question 7 En déduire la matrice la matrice d'inertie du solide 5 exprimée en O dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.

Question 8 Exprimer la matrice de passage notée $[P]$ de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ vers la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ et en déduire la matrice d'inertie du solide 3 exprimée en C dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.

Question 9 Déterminer les moments produits de la matrice d'inertie du solide 3 exprimée en O dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.

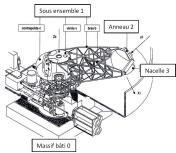
Question 10 À partir des conditions d'équilibrage dynamique définies précédemment, déterminer les coordonnées z_4 et z_5 des centres de gravité des contrepoids 4 et 5 en fonction de A_3 , B_3 et θ .

La conception de la centrifugeuse permet de lier les

profils de position (ou de vitesse relative) engendrés au niveau de chaque liaison à l'évolution temporelle des 3 composantes d'accélération que subit le pilote. Ainsi comme la vitesse de rotation du bras détermine l'intensité de l'accélération imposée au pilote, la consigne de position du roulis θ est liée à cette vitesse de rotation $\dot{\psi}$ du bras par la relation $\theta = \arctan \frac{R\dot{\psi}^2}{g}$. Lorsque le taux de rotation est à $\dot{\psi} = 4,39 \text{ rad/s}$ le pilote subit une accélération simulée de la pesanteur de $15g$.

Question 11 Déduire à partir des résultats de la question 10 les valeurs numériques de z_4 et z_5 lorsque le pilote subit cette accélération simulée de la pesanteur de $15g$.

Application 2 – Corrigé



Application 02

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

- Quelle est la condition nécessaire afin de réaliser l'équilibrage statique de l'ensemble E=1+2+3+4+5 en liaison pivot autour de l'axe (O, \vec{z}_0) avec le massif bâti 0 ? Exprimer les relations traduisant cet équilibrage statique.

Équilibrage statique : le centre de gravité de l'ensemble E=1+2+3+4+5 doit être sur l'axe de rotation = axe (O, \vec{z}_0) → ici on a donc $x_G = y_G = 0$ et $z_G = \text{cte}$ à déterminer

On recherche les coordonnées du centre de gravité de l'ensemble E=1+2+3+4+5

$$\rightarrow m_{\text{tot}} \cdot \vec{OG} = \sum_i m_i \cdot \vec{OG}_i \quad \text{avec } m_{\text{tot}} = m_c + m_v + m_b + m_3 + m_4 + m_5$$

On projette sur \vec{x}_1 , \vec{y}_1 et \vec{z}_0 $\rightarrow m_{\text{tot}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & x_c & x_v & x_b & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & y_c + m_v & y_v + m_b & y_b + m_3 & y_3 + m_4 & y_4 + m_5 & y_5 \\ z_c & z_v & z_b & z_3 & z_4 & z_5 \end{vmatrix}$

Soit avec les données du problème :

$$\boxed{m_{\text{tot}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r \cdot \sin 30 & r \cdot \sin 30 \\ 0 & y_c + m_v & 0 + m_b & -y_b + m_3 & -R + m_4 & e & + m_5 \cdot e \\ z_c & 0 & z_v & 0 & 0 & z_4 & z_5 \end{vmatrix}}$$

- En déduire l'expression des masses des deux contrepoids mobiles m_4 et m_5 en fonction des données du problème. Faire l'application numérique.

Le système précédent donne les équations scalaires suivantes :

$$-m_4 \cdot r \cdot \sin 30 + m_5 \cdot r \cdot \sin 30 = 0$$

$$m_c \cdot y_c - m_b \cdot y_b - m_3 \cdot R + m_4 \cdot e + m_5 \cdot e = 0$$

$$-m_i = m_4 = m_5 = \frac{-m_c \cdot y_c + m_b \cdot y_b + m_3 \cdot R}{2 \cdot e}$$

$$\text{A.N. : } m_i = m_4 = m_5 = \frac{-5600 \times 2 + 1980 \times 3,45 + 1705 \times 7,62}{2 \times 1,2} = \boxed{3593 \text{ kg}}$$

- Exprimer la coordonnée z_G du centre de gravité de l'ensemble E en fonction de z_4 et z_5 .

Le système précédent donne l'équation scalaire suivante :

$$m_{\text{tot}} \cdot z_G = m_v \cdot z_v + m_4 \cdot z_4 + m_5 \cdot z_5 \rightarrow \boxed{z_G = \frac{m_v \cdot z_v + m_4 \cdot z_4 + m_5 \cdot z_5}{m_{\text{tot}}}}$$

4. Exprimer de façon formelle les conditions qui traduisent l'équilibrage dynamique de l'ensemble $E=1+2+3+4+5$ en liaison pivot autour de l'axe (O, \bar{z}_0) avec le massif bâti 0 ? Quelles sont les conséquences de l'équilibrage dynamique sur la matrice d'inertie exprimée en 0 de l'ensemble $E=1+2+3+4+5$? Donner la forme de cette matrice.

Le centre de gravité de l'ensemble $E=1+2+3+4+5$ doit être sur l'axe de rotation (O, \bar{z}_0) et cet axe doit être

axe principal d'inertie de l'ensemble $E \rightarrow \overline{\overline{I_O(E)}} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)}$

5. En tenant compte des données du problème que peut-on dire de la forme de la matrice d'inertie du sous ensemble 1 exprimée en 0 dans la base $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)$.

Les matrices d'inertie de la virole, du contrepoids et du bras sont toutes exprimées au même point, dans la même base et sont toutes diagonales. La matrice d'inertie du sous ensemble 1 exprimée en 0 dans la base $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)$ est obtenue en sommant ces 3 matrices — elle est donc elle aussi diagonale.

6. Déterminer la matrice la matrice d'inertie du solide 4 exprimée en 0 dans la base $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)$ en fonction de m_4, x_4, y_4, z_4, A_4 et C_4 .

Huygens : $\overline{\overline{I_O(4)}} = \overline{\overline{I_{G_4}(4)}} + \overline{\overline{I_O(m_4 \rightarrow G_4)}}$

avec $\overline{\overline{I_{G_4}(4)}} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(G_4, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)}$

et $\overline{\overline{I_O(m_4 \rightarrow G_4)}} = m_4 \cdot \begin{bmatrix} (y_{G4}^2 + z_{G4}^2) & -x_{G4} \cdot y_{G4} & -x_{G4} \cdot z_{G4} \\ -x_{G4} \cdot y_{G4} & (x_{G4}^2 + z_{G4}^2) & -y_{G4} \cdot z_{G4} \\ -x_{G4} \cdot z_{G4} & -y_{G4} \cdot z_{G4} & (y_{G4}^2 + x_{G4}^2) \end{bmatrix}_{(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)}$

$$\rightarrow \overline{\overline{I_O(4)}} = \begin{bmatrix} A_4 + m_4 \cdot (y_{G4}^2 + z_{G4}^2) & -m_4 \cdot x_{G4} \cdot y_{G4} & -m_4 \cdot x_{G4} \cdot z_{G4} \\ -m_4 \cdot x_{G4} \cdot y_{G4} & A_4 + m_4 \cdot (x_{G4}^2 + z_{G4}^2) & -m_4 \cdot y_{G4} \cdot z_{G4} \\ -m_4 \cdot x_{G4} \cdot z_{G4} & -m_4 \cdot y_{G4} \cdot z_{G4} & C_4 + m_4 \cdot (y_{G4}^2 + x_{G4}^2) \end{bmatrix}_{(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)}$$

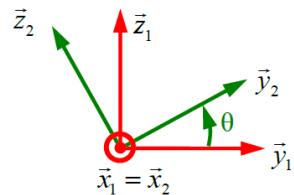
7. En déduire la matrice la matrice d'inertie du solide 5 exprimée en 0 dans la base $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)$.

$$\overline{\overline{I_O(5)}} = \begin{bmatrix} A_5 + m_5 \cdot (y_{G5}^2 + z_{G5}^2) & -m_5 \cdot x_{G5} \cdot y_{G5} & -m_5 \cdot x_{G5} \cdot z_{G5} \\ -m_5 \cdot x_{G5} \cdot y_{G5} & A_5 + m_5 \cdot (x_{G5}^2 + z_{G5}^2) & -m_5 \cdot y_{G5} \cdot z_{G5} \\ -m_5 \cdot x_{G5} \cdot z_{G5} & -m_5 \cdot y_{G5} \cdot z_{G5} & C_5 + m_5 \cdot (y_{G5}^2 + x_{G5}^2) \end{bmatrix}_{(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)}$$

8. Exprimer la matrice de passage notée $[P]$ de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ vers la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ et en déduire la matrice d'inertie du solide 3 exprimée en C dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{x}_2 \\ \vec{y}_1 &= \cos \theta \cdot \vec{y}_2 - \sin \theta \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{z}_1 &= \sin \theta \cdot \vec{y}_2 + \cos \theta \cdot \vec{z}_2\end{aligned}$$

D'où $[P_{b2 \rightarrow b1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$



$$\begin{aligned}\overline{\overline{I_C(3)_{b1}}} &= \overline{\overline{P_{(b2 \rightarrow b1)}^{-1}} \cdot \overline{\overline{I_C(3)_{b2}}} \cdot \overline{\overline{P_{(b2 \rightarrow b1)}}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}_{b2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ \overline{\overline{I_C(3)_{b1}}} &= \overline{\overline{P_{(b2 \rightarrow b1)}^{-1}} \cdot \overline{\overline{I_C(3)_{b2}}} \cdot \overline{\overline{P_{(b2 \rightarrow b1)}}}} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta \cdot B_3 & -\sin \theta \cdot A_3 \\ 0 & \sin \theta \cdot B_3 & \cos \theta \cdot A_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{\overline{I_C(3)_{b1}}} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 \cdot \cos^2 \theta + A_3 \cdot \sin^2 \theta & (B_3 - A_3) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \\ 0 & (B_3 - A_3) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta & B_3 \cdot \sin^2 \theta + A_3 \cdot \cos^2 \theta \end{bmatrix}_{b1}}$$

9. Déterminer les moments produits de la matrice d'inertie du solide 3 exprimée en O dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.

. Huygens : $\overline{\overline{I_O(3)}} = \begin{bmatrix} A'_3 & -F'_3 & -E'_3 \\ -F'_3 & B'_3 & -D'_3 \\ -E'_3 & -D'_3 & A'_3 \end{bmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)} = \overline{\overline{I_C(3)}} + \overline{\overline{I_O(m_3 \rightarrow C)}} \text{ car } C \text{ centre de gravité.}$

D'où :

$$-D'_3 = (B_3 - A_3) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + m_3 \cdot y_c \cdot z_c = \boxed{(B_3 - A_3) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta} \quad \text{car } x_c = z_c = 0$$

$$-E'_3 = 0 + m_3 \cdot x_c \cdot z_c = \boxed{0}$$

$$-F'_3 = 0 + m_3 \cdot x_c \cdot y_c = \boxed{0}$$

10. A partir des conditions d'équilibrage dynamique définies précédemment, déterminer les coordonnées z_4 et z_5 des centres de gravité des contrepoids 4 et 5 en fonction de A_3, B_3 et θ .

$$\overline{\overline{I_O(E)}} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)} = \overline{\overline{I_O(1)_{b1}}} + \overline{\overline{I_O(3)_{b1}}} + \overline{\overline{I_O(4)_{b1}}} + \overline{\overline{I_O(5)_{b1}}}$$

En ne s'intéressant qu'aux produits d'inertie qui doivent être nuls, on obtient 2 équations scalaires :

$$-D_E = (B_3 - A_3) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta - m_4 \cdot y_{G4} \cdot z_{G4} - m_5 \cdot y_{G5} \cdot z_{G5} = 0$$

$$-m_4 \cdot x_{G4} \cdot z_{G4} - m_5 \cdot x_{G5} \cdot z_{G5} = 0$$

De plus on sait que $x_{G4} = -x_{G5}$, que $y_{G4} = y_{G5}$ et que $m_4 = m_5$, d'où :

$$\rightarrow z_{G4} = \boxed{z_{G5}}$$

$$\rightarrow z_{Gi} = \frac{(B_3 - A_3) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{2 \cdot m_i \cdot y_{Gi}} = \boxed{\frac{(B_3 - A_3) \cdot \sin 2\theta}{4 \cdot m_i \cdot y_{Gi}}} \text{ avec } i = 4 \text{ ou } 5.$$

11. Déduire à partir des résultats de la question 10 les valeurs numériques de z_4 et z_5 lorsque le pilote subit cette accélération simulée de la pesanteur de 15 g.

$$\theta = \arctan \left(\frac{R \cdot \dot{\psi}^2}{g} \right) \rightarrow \boxed{\theta = \arctan \left(\frac{7,62 \times 4,39^2}{9,81} \right)} \text{ et } z_{Gi} = \frac{(1575 - 135) \cdot \sin 2\theta}{4 \times 3593 \times 1,2} = \boxed{11,85 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$