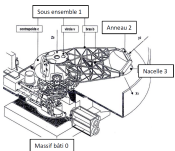


## Application



## Application 01

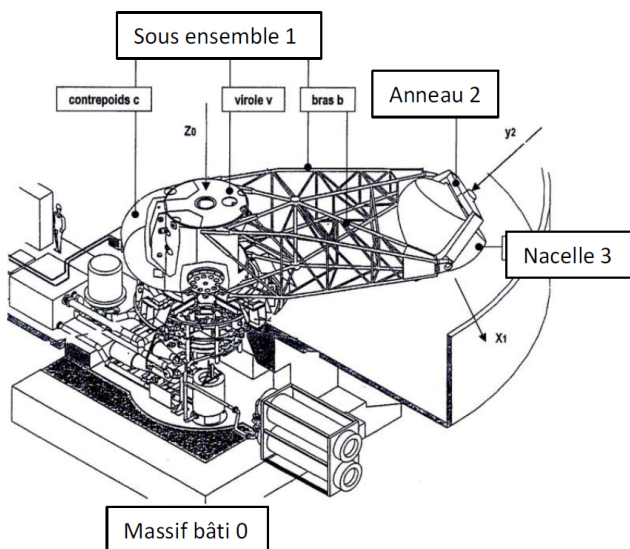
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

## Savoirs et compétences :

## Présentation

On s'intéresse à une centrifugeuse humaine dont on donne une description structurale ainsi que la modélisation cinématique. Le système étudié est constitué de 4 éléments principaux :

- un massif-bâti en béton 0 sur lequel est rigidement ancré un axe assurant le guidage en rotation du sous ensemble 1 autour d'un axe vertical ;
- un sous ensemble 1 en rotation autour de l'axe vertical qui est composé d'un contrepoids  $c$ , d'une virole  $v$  et d'un bras en treillis tubulaire  $b$  ;
- un anneau 2, interposé entre la nacelle et le bras, autorisant les rotations autour des 2 axes orthogonaux (roulis et tangage) ;
- une nacelle instrumentée 3 équipée du siège pour le pilote.

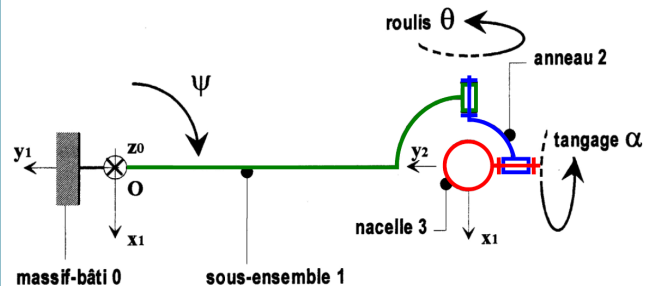


Aux 4 éléments précédents s'ajoutent des équipements complémentaires : un générateur de puissance hydraulique, un réducteur pouvant transmettre une puissance de l'ordre de 1 MW pour le mouvement de rotation du sous ensemble 1 par rapport à 0, une motorisation embarquée pour les mouvements de rotation de roulis et de tangage, un système d'asservissement pour chaque actionneur.

Cette conception permet de lier de façon univoque, les profils de position (ou de vitesse relative) engendrés

au niveau de chaque liaison à l'évolution temporelle des 3 composantes d'accélération que subit le pilote. Ainsi les consignes de position ou de vitesse à appliquer aux liaisons sont directement déduites de l'accélération à reproduire. La vitesse de rotation du bras détermine l'intensité de l'accélération imposée au pilote et l'orientation de la nacelle en roulis et tangage fixe la direction de l'accélération imposée au pilote.

## Modélisation cinématique et paramétrage

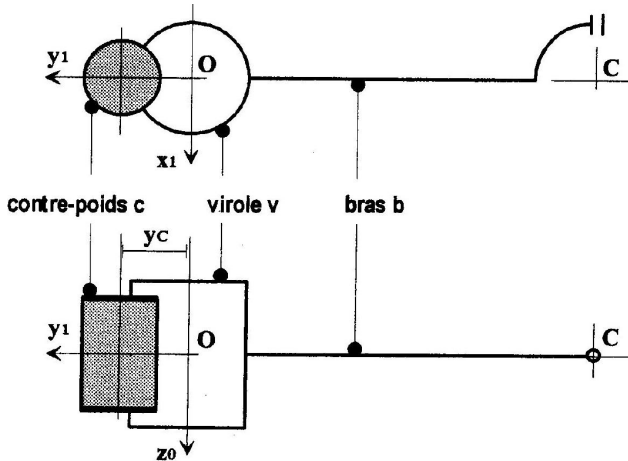


À l'arrêt les angles  $\alpha$  et  $\theta$  sont nuls.

- Le repère  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au bâti 0. Ce repère sera considéré comme galiléen. Le champ de la pesanteur est défini par  $\vec{g} = g \vec{z}_0$ .
- Le repère  $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  est lié au sous ensemble 1 (composée du contrepoids  $c$ , de la virole  $v$  et du bras en treillis tubulaire  $b$ ). La liaison 1/0 est considérée comme une liaison pivot parfaite d'axe  $(O, \vec{z}_0)$ , sa position est paramétrée par l'angle  $\psi(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ .
- Le repère  $\mathcal{R}_2 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est lié à l'anneau 2. La liaison 2/1 est considérée comme une liaison pivot parfaite d'axe  $(C, \vec{x}_1)$ , sa position est paramétrée par l'angle  $\theta(t) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ .  $\theta$  est appelé angle de roulis, la position du point  $C$  est définie par le vecteur  $\vec{OC} = -R \vec{y}_1$  avec  $R = 7.62 \text{ m}$ .
- Le repère  $\mathcal{R}_3 = (C; \vec{x}_3, \vec{y}_2, \vec{z}_3)$  est lié à la nacelle 3 dans laquelle le pilote prend place. La liaison 3/2 est considérée comme une liaison pivot parfaite d'axe  $(C, \vec{y}_2)$ , sa position est paramétrée par l'angle  $\alpha(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ .

## Géométrie des masses

Les valeurs approchées des moments d'inertie suivants ne sont données qu'à titre indicatif. Le sous ensemble (1) est composé de la virole v, du contrepoids c et du bras b.



### Sous ensemble (1)

- Virole : masse  $m_v = 8325 \text{ kg}$ , centre de gravité  $G_v$  tel que  $\overrightarrow{OG_v} = z_v \vec{z}_0$  avec  $z_v = 0.63 \text{ m}$ , matrice d'inertie  $I_O(v) = \begin{pmatrix} A_v & 0 & 0 \\ 0 & A_v & 0 \\ 0 & 0 & C_v \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ , avec  $A_v = 20625 \text{ kgm}^2$  et  $C_v = 17600 \text{ kgm}^2$ .
- Contrepoids : masse  $m_c = 5600 \text{ kg}$ , centre de gravité  $G_c$  tel que  $\overrightarrow{OG_c} = y_c \vec{y}_1$  avec  $y_c = 2 \text{ m}$ , matrice d'inertie  $I_O(c) = \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ , avec  $A_c = 25625 \text{ kgm}^2$ ,  $B_c = 3000 \text{ kgm}^2$  et  $C_c = 22775 \text{ kgm}^2$ .
- Bras : masse  $m_b = 1980 \text{ kg}$ , centre de gravité  $G_b$  tel que  $\overrightarrow{OG_b} = -y_b \vec{y}_1$  avec  $y_b = 3.45 \text{ m}$ , matrice d'inertie  $I_O(b) = \begin{pmatrix} A_b & 0 & 0 \\ 0 & B_b & 0 \\ 0 & 0 & C_b \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ , avec  $A_b = 31575 \text{ kgm}^2$ ,  $B_b = 6000 \text{ kgm}^2$  et  $C_b = 33775 \text{ kgm}^2$ .

**Anneau (2)** Masse et inertie supposées négligeables dans cette approche.

### Nacelle et pilote (3)

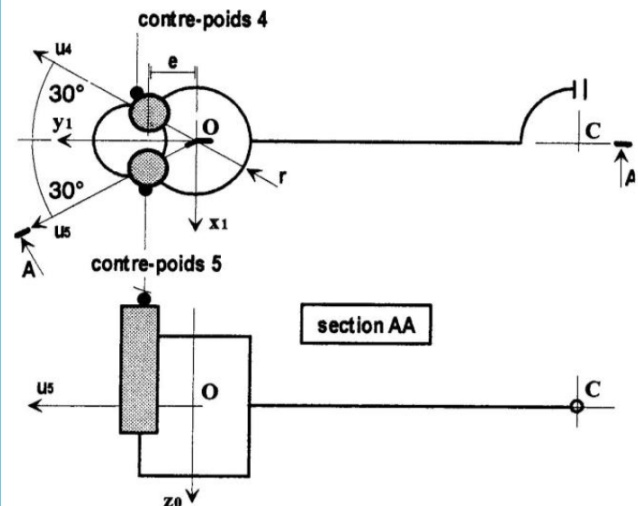
- Masse  $m_3 = 1705 \text{ kg}$ , le centre de gravité reste confondu avec le point C tel que  $\overrightarrow{OC} = -R \vec{y}_1$  avec  $R = 7.62 \text{ m}$ , matrice d'inertie  $I_C(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}_{(C; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$  et  $(C; \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , avec  $A_3 = 135 \text{ kgm}^2$  et  $B_3 = 1575 \text{ kgm}^2$ .

## Étude des équilibres statiques et dynamiques

La centrifugeuse comporte, en complément de l'ensemble des éléments précédemment décrits, deux contrepoids mobiles par rapport au sous-ensemble 1 et repérés 4 et 5. Ces contrepoids placés symétriquement par rap-

port au plan  $(O, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  sont modélisés par des cylindres de révolution.

Les liaisons contrepoids 4/virole 1 et contrepoids 5/virole 1 sont assimilées à des liaisons glissières parfaites de direction  $\vec{z}_0$ . Le schéma ci-dessous définit les implantations de ces deux contrepoids mobiles dans le repère  $\mathcal{R}_1$  ainsi que les notations complémentaires retenues pour la géométrie des masses.



### Contrepoids mobile $i$ ( $i = 4$ ou $5$ )

- Masse  $m_i$ , le centre de gravité  $G_i$  est tel que  $\overrightarrow{OG_i} = r \vec{u}_i + z_i \vec{z}_0$  et  $\overrightarrow{OG_i} \cdot \vec{y}_1 = e$  avec  $e = 1.2 \text{ m}$ , matrice d'inertie  $I_{G_i}(i) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & A_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{(G_i; \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_0)}$ .

**Question 1** Quelle est la condition nécessaire afin de réaliser l'équilibre statique de l'ensemble E en liaison pivot autour de l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le massif bâti 0? Exprimer les relations traduisant cet équilibre statique.

**Question 2** En déduire l'expression des masses des deux contrepoids mobiles  $m_4$  et  $m_5$  en fonction des données du problème. Faire l'application numérique.

**Question 3** Exprimer la coordonnée  $z_G$  du centre de gravité de l'ensemble E en fonction de  $z_4$  et  $z_5$ .

**Question 4** Exprimer de façon formelle les conditions qui traduisent l'équilibre dynamique de l'ensemble E en liaison pivot autour de l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le massif bâti 0? Quelles sont les conséquences de l'équilibre dynamique sur la matrice d'inertie exprimée en O de l'ensemble E? Donner la forme de cette matrice.

**Question 5** En tenant compte des données du problème que peut-on dire de la forme de la matrice d'inertie du sous ensemble 1 exprimée en O dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ .

**Question 6** Déterminer la matrice la matrice d'inertie du solide 4 exprimée en O dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  en fonction  $m_4, x_4, y_4, z_4, A_4$  et  $C_4$ .

**Question 7** En déduire la matrice la matrice d'inertie du solide 5 exprimée en O dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ .

**Question 8** Exprimer la matrice de passage notée  $[P]$  de la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  vers la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  et en déduire la matrice d'inertie du solide 3 exprimée en C dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ .

**Question 9** Déterminer les moments produits de la matrice d'inertie du solide 3 exprimée en O dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ .

**Question 10** À partir des conditions d'équilibrage dynamique définies précédemment, déterminer les coordonnées  $z_4$  et  $z_5$  des centres de gravité des contrepoids 4 et 5 en fonction de  $A_3$ ,  $B_3$  et  $\theta$ .

La conception de la centrifugeuse permet de lier les profils de position (ou de vitesse relative) engendrés au niveau de chaque liaison à l'évolution temporelle des 3 composantes d'accélération que subit le pilote. Ainsi comme la vitesse de rotation du bras détermine l'intensité de l'accélération imposée au pilote, la consigne de position du roulis  $\theta$  est liée à cette vitesse de rotation  $\dot{\psi}$  du bras par la relation  $\theta = \arctan \frac{R\dot{\psi}^2}{g}$ . Lorsque le taux de rotation est à  $\dot{\psi} = 4.39 \text{ rad/s}$  le pilote subit une accélération simulée de la pesanteur de  $15g$ .

**Question 11** Déduire à partir des résultats de la question 10 les valeurs numériques de  $z_4$  et  $z_5$  lorsque le pilote subit cette accélération simulée de la pesanteur de  $15g$ .

