Application 1

Application 01

Éditions Vuibert

La rotation du rotor de queue d'un hélicoptère est obtenue à partir de la rotation du rotor principal par l'intermédiaire d'un système de transmission. Les arbres n'étant pas parallèles, on utilise un engrenage conique pour assurer cette transmission. Le rotor est donc constitué d'une roue conique standard montée sur un arbre épaulé. L'encastrement des deux pièces n'est pas toujours optimal car l'axe de l'arbre et l'axe de la roue peuvent être décalés de quelques centièmes de millimètres. Les opérations de maintenance préventive par contrôle non destructif (CND) correspondant à une analyse vibratoire permettent de détecter ces défauts.

Cahier des charges

Un extrait du diagramme des exigences est donné figure suivante.

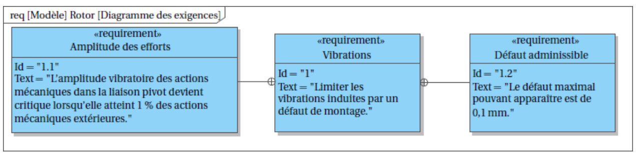
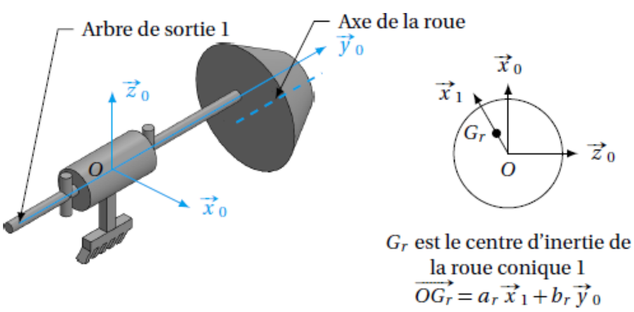


Diagramme des exigences pour l'analyse d'un défaut.

Objectif L'objectif de l'exercice est de déterminer la relation entre les efforts engendrant des vibrations et le défaut d'alignement des axes. Le diagramme des exigences de la figure précédentedéfinit les critères à respecter.

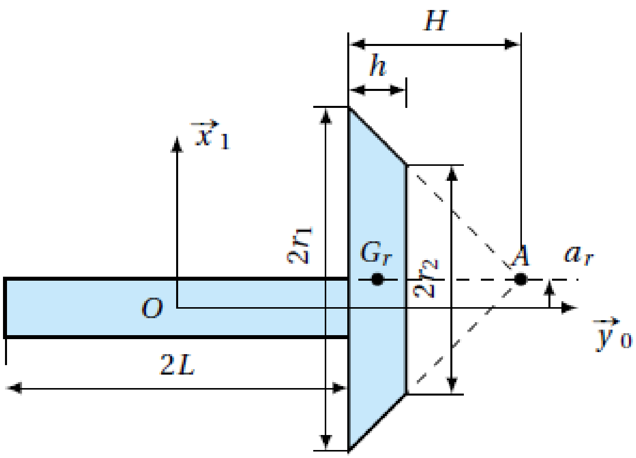
Modéliser le système



Modélisation du rotor avec roue conique.

On associe un repère $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_1})$ à l'arbre en rotation. On note $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_1})$ l'angle de rotation autour de l'axe $(O, \overrightarrow{y_0})$ de l'ensemble 1 par rapport au bâti fixe 0. La vitesse angulaire est notée $\omega = \dot{\theta}$.

Le solide 1 est constitué de 2 parties : un arbre de forme cylindrique de centre de gravité O, de diamètre $d = 40\,\text{mm}$ et de longueur $2L = 400\,\text{mm}$ et d'une roue conique en forme de tronc de cône plein de largeur $h = 50\,\text{mm}$ (la hauteur du cône correspondant est notée H), de diamètre de base $2r_1 = 280\,\text{mm}$ et de diamètre de tête $2r_2 = 200\,\text{mm}$. Les matériaux des deux pièces sont identiques. Le centre de gravité de la roue conique G_r est tel que $\overrightarrow{OG_r} = a_r\overrightarrow{x_1} + b_r\overrightarrow{y_0}$ avec a_r défaut admissible et $b_r = 425\,\text{mm}$. La masse du tronc de cône est notée $m_r = 20\,\text{kg}$ et celle de l'arbre $m_a = 4\,\text{kg}$ (on note $m = m_r + m_a \approx m_r$ la masse totale de la pièce 1).



Géométrie de la pièce 1 = arbre + tronc de cône.

Question 1 *Déterminer le centre de gravité de la pièce 1 :* $\overrightarrow{OG_1} = a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_0}$.

Déterminer les actions de liaisons

On prend dans un premier temps une matrice d'inertie quelconque de l'ensemble 1 au point O dans la base R_1 :

$$[I(O,S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_1})}.$$

L'action mécanique extérieure exercée par la denture sur la roue conique est notée :

$$\{\mathscr{T}(ext \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_e \overrightarrow{x_1} + Y_e \overrightarrow{y_0} + Z_e \overrightarrow{z_1} \\ L_e \overrightarrow{x_1} + C_e \overrightarrow{y_0} + N_e \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_O.$$

L'action mécanique exercée dans la liaison pivot parfaite par le bâti 0 est notée :

$$\{\mathscr{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_0 \overrightarrow{x_1} + Y_0 \overrightarrow{y_0} + Z_0 \overrightarrow{z_1} \\ L_0 \overrightarrow{x_1} + N_0 \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_O.$$

Question 2 *Compte tenu de la géométrie de la pièce 1, donner la forme simplifiée de la matrice d'inertie $I_O(S)$.*

Question 3 *Calculer l'accélération $\overrightarrow{\Gamma(G \in 1/0)}$ et le moment dynamique $\overrightarrow{\delta(O, 1/0)}$.*

Question 4 *Déduire de l'application du PFD les actions mécaniques dans la liaison pivot.*

Pour éviter les vibrations, il faut que les actions mécaniques dans la liaison pivot ne dépendent pas de $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$ et de $\omega = \dot{\theta}$.

Question 5 *Quelles conditions sur la position du centre de gravité et sur la matrice d'inertie doit-on vérifier pour respecter ce critère ?*

Déterminer les composantes inertielles

La matrice d'inertie d'un cône de sommet A, de rayon R, de hauteur H et d'axe $\overrightarrow{y}_0$ est la suivante : $[I(A, \text{cône})] = \begin{bmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_1})}$ avec $A_c = \dfrac{3mR^2}{20} + \dfrac{3mH^2}{5}$ et $B_c = \dfrac{3mR^2}{10}$.

La masse de ce cône est égale à $\rho \dfrac{\pi H R^2}{3}$ (avec ρ masse volumique). Le centre d'inertie du cône est défini par $\overrightarrow{AG_c} = -\dfrac{3H}{4} \overrightarrow{y_0}$.

Question 6 *Justifier que la matrice d'inertie en A de la roue en forme de tronc de cône défini dans le sujet soit la suivante : $[I(A, \text{roue})] = \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & B_r & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_1})}$ avec $A_r = \dfrac{3m_{c1} r_1^2}{20} + \dfrac{3m_{c1} H^2}{5} - \dfrac{3m_{c2} r_2^2}{20} - \dfrac{3m_{c2}(H-h)^2}{5}$ et $B_r = \dfrac{3m_{c1} r_1^2}{10} - \dfrac{3m_{c2} r_2^2}{10}$ où $m_{c1} = \dfrac{\rho \pi r_1^2 H}{3}$ et $m_{c2} = \dfrac{\rho \pi r_2^2 (H-h)}{3}$.*

Question 7 *Déterminer la matrice d'inertie en G_r de la roue en utilisant le théorème de Huygens puis la déterminer en O.*

Question 8 *Calculer les valeurs numériques de a, b et F à partir du cahier des charges, des résultats précédents et des valeurs numériques données en début d'énoncé.*

Vérification du cahier des charges

On cherche à déterminer si un défaut admissible défini dans le cahier des charges convient ou non en termes d'efforts vibratoires. On se place donc en régime permanent ($\dot{\omega} = 0$) à la fréquence angulaire de $800\,\text{tr}\,\text{min}^{-1}$. On considère uniquement une action extérieure présentant une résultante selon $\overrightarrow{x_1}$ de $X_e = 5000\,\text{N}$ et un moment N_e selon $\overrightarrow{z_1}$ égal à $2000\,\text{Nm}$.

Question 9 *Calculer la composante de l'action mécanique dans la liaison pivot X_0 et le moment N_0 pour un défaut maximal (on prendra $H = 86\,\text{mm}$). Conclure quant au cahier des charges.*

Question 10 *Pourrait-on vérifier les conditions d'équilibrage déterminées dans la première partie avec un petit perçage de masse négative m_p situé en P tel que $\overrightarrow{OP} = a_p \overrightarrow{x_1} + b_p \overrightarrow{y_0}$.*

1. $a = \frac{m_r a_r}{m}$ et $b = \frac{m_r b_r}{m}$.
2. $D = E = 0$.
3. $\overrightarrow{\Gamma(G \in 1/0)} = -a\ddot{\theta}\vec{z}_1 - a\dot{\theta}^2\vec{x}_1$. $\overrightarrow{\delta(O, 1/0)} = B\ddot{\theta}\vec{y}_0 - F\ddot{\theta}\vec{x}_1 + F\dot{\theta}^2\vec{z}_1$.
4. $\left\{ \begin{array}{l} X_0 + X_e = -ma\dot{\theta}^2 \\ Y_0 + Y_e = -ma\ddot{\theta} \\ Z_0 + Z_e = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} L_0 + L_e = -F\ddot{\theta} \\ C_e = B\ddot{\theta} \\ N_0 + N_e = F\dot{\theta}^2 \end{array} \right.$.
5. $a = 0$ et $F = 0$.
6. .
7. $[I(O, \text{tronc})] = m_r \begin{bmatrix} \frac{A_r}{m_r} - (L+H-b_r)^2 + b_r^2 & -a_r(L+H) & 0 \\ -a_r(L+H) & \frac{B_r}{m_r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_r}{m_r} + b_r^2 - (L+H-b_r)^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_1})}$.
8. $a = \frac{m_r a_r}{m} = 0{,}08\,\text{mm}$ et $b = \frac{m_r b_r}{m} = 354\,\text{mm}$. $F = m_r \cdot a_r (L+H) = 20 \times 0{,}1 \times 10^{-3} \times 0{,}286 = 5{,}7 \times 10^{-4}\,\text{kg}\,\text{m}^2$.
9. $X_0 = -X_e - ma\omega^2$ et $N_0 = -N_e - F\omega^2$ avec $F\omega^2 \approx 4\,\text{Nm}$.
10. .

Application 1 – Corrigé

Application 01

Éditions Vuibert

1) On utilise la propriété $m\overrightarrow{OG} = m_r\overrightarrow{OG_r}$.
Ainsi, $a = \frac{m_r a_r}{m}$ et $b = \frac{m_r b_r}{m}$.

2) Le plan $(O, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{x}_1)$ est plan de symétrie, donc les produits d'inertie D et E sont nuls.

3) La vitesse du point G est égale à $\overrightarrow{V}_{1/0}(G) = -a\dot{\theta}\overrightarrow{z}_1$. L'accélération est donc égale à $\overrightarrow{a}_{1/0}(G) = -a\ddot{\theta}\overrightarrow{z}_1 - a\dot{\theta}^2\overrightarrow{x}_1$.

$\overrightarrow{\delta}_{1/0}(O) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}_{1/0}(O)}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \left.\frac{\mathrm{d}(B\dot{\theta}\overrightarrow{y}_0 - F\dot{\theta}\overrightarrow{x}_1)}{\mathrm{d}t}\right|_0$.

Ainsi, $\overrightarrow{\delta}_{1/0}(O) = B\ddot{\theta}\overrightarrow{y}_0 - F\ddot{\theta}\overrightarrow{x}_1 + F\dot{\theta}^2\overrightarrow{z}_1$.

4) On isole le solide 1 soumis à l'action de la liaison pivot et aux actions mécaniques extérieures. Le PFD écrit au point O dans le référentiel galiléen 0 en projection dans la base 1 donne :

$$\left\{\begin{array}{l} X_0 + X_e = -ma\dot{\theta}^2 \\ Y_0 + Y_e = -ma\ddot{\theta} \\ Z_0 + Z_e = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} L_0 + L_e = -F\ddot{\theta} \\ C_e = B\ddot{\theta} \\ N_0 + N_e = F\dot{\theta}^2 \end{array}\right. .$$

5) Il faut, d'après les équations, que la distance a et le produit d'inertie F soient nuls.

6) Le tronc de cône défini dans l'énoncé est obtenu par soustraction de la matrice d'inertie d'un cône de rayon r_1 et de hauteur H de sommet A et d'un cône de rayon r_2 et de hauteur $H-h$ de sommet A.

7) Le centre d'inertie du tronc de cône est défini par $\overrightarrow{OG_r} = a_r\overrightarrow{x}_1 + b_r\overrightarrow{y}_0$ d'après la première partie. Ainsi, $\overrightarrow{AG_r} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG_r} = a_r\overrightarrow{x}_1 + (b_r - L - H)\overrightarrow{y}_0$.

La matrice d'inertie en G_r est obtenue par la relation $[I(A, \text{tronc})] = [I(G_r, \text{tronc})] +$

$$m_r \begin{bmatrix} (L+H-b_r)^2 & a_r(L+H-b_r) & 0 \\ a_r(L+H-b_r) & a_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_r^2 + (L+H-b_r)^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_1})} .$$

Pour déterminer la matrice d'inertie en O, on utilise la même relation.

$$[I(O, \text{tronc})] = [I(G_r, \text{tronc})] + m_r \begin{bmatrix} b_r^2 & -a_r b_r & 0 \\ -a_r b_r & a_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & b_r^2 + a_r^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_1})}$$. Finalement :

$$[I(O, \text{tronc})] = m_r \begin{bmatrix} \frac{A_r}{m_r} - (L+H-b_r)^2 + b_r^2 & -a_r(L+H) & 0 \\ -a_r(L+H) & \frac{B_r}{m_r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_r}{m_r} + b_r^2 - (L+H-b_r)^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_1})} .$$

8) Le défaut maximal est $a_r = 0{,}1\,\text{mm}$. En utilisant les relations de la première question, il vient $a = \frac{m_r a_r}{m} = 0{,}08\,\text{mm}$ et $b = \frac{m_r b_r}{m} = 354\,\text{mm}$ Les résultats de la question précédente nous permettent de calculer $F = m_r \cdot a_r(L+H) = 20 \times 0{,}1 \times 10^{-3} \times 0{,}286 = 5{,}7 \times 10^{-4}\,\text{kg}\,\text{m}^2$.

9) On obtient $X_0 = -X_e - ma\omega^2$ avec $ma\omega^2 \approx 14$ N. On constate que l'effort induit par le défaut est négligeable devant l'effort extérieur (beaucoup moins de 1 %). Le cahier des charges est vérifié. Le moment N_0 vaut quant à lui $N_0 = -N_e - F\omega^2$ avec $F\omega^2 \approx 4\,\text{Nm}$. On constate à nouveau que le cahier des charges est vérifié et que le moment induit par la rotation est inférieur à 1 % de la valeur du moment extérieur. Si les actions extérieures étaient plus faibles, on risquerait de ne pas vérifier le cahier des charges.

10) Pour réaliser l'équilibrage avec un perçage (c'est-à-dire enlever une masse ponctuelle m_p) situé en P tel que $\overrightarrow{OP} = a_p\overrightarrow{x}_1 + b_p\overrightarrow{y}_0$, il faut vérifier que $m_r a_r + m_p a_p = 0$ mais aussi $m_r a_r b_r + m_p a_p b_p = 0$ avec $m_p < 0$. On doit donc percer le tronc de cône $(b_r = b_p)$. Si on perce en périphérie du cône soit environ à 120 mm, on doit enlever une masse $m_p = m_r \frac{a_r}{a_p}$ soit 20 g ce qui correspond bien à un petit perçage (on enlève peu par rapport à la masse de la roue conique). On peut donc équilibrer le rotor avec un petit perçage.