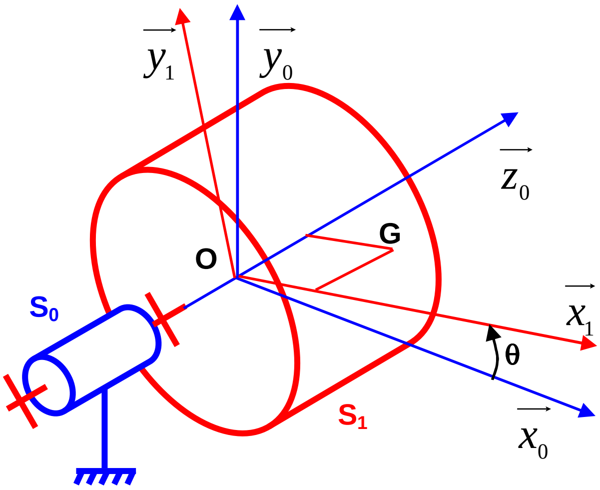
EQUILIBRAGE DYNAMIQUE

L'équilibrage dynamique concerne les pièces en mouvement de rotation autour d'un axe fixe dans un repère galiléen. C'est donc le cas de la plupart des machines tournantes (moteurs électriques par exemple) mais également des roues de voiture.
Si le système n'est pas équilibré dynamiquement, cela va générer des vibrations dans l'ensemble du mécanisme, donc du bruit et éventuellement une usure plus rapide des organes de guidage en rotation.

1- Schématisation adoptée



Le bâti S_0 est lié au repère galiléen R_0 (O, $\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}$)
Le solide S_1 de masse m, de centre d'inertie G est en liaison pivot d'axe (O, $\overrightarrow{z_0}$) avec le bâti S_0.
Le repère R_1 (O, $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0}$) est lié à S_1 et est choisi tel que G soit dans le plan ($\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z_0}$)

On pose ($\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}$) = θ
Et $\overrightarrow{OG} = a.\overrightarrow{x_1} + c.\overrightarrow{z_0}$

Le solide S_1 étant quelconque, la matrice d'inertie est de la forme :

$$[\mathrm{I}_O(S_1)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{O\,(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})}$$

Le milieu extérieur exerce sur S_1 des actions mécaniques qui peuvent être quelconques (dans le cas d'une roue de voiture, c'est l'action de la route sur la roue, l'action de la pesanteur, l'action de l'arbre de transmission…). On modélise cette action par le torseur :

$$\{\mathrm{T}_{(ext \to S_1)}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{(ext \to S_1)}} = X_{e1}.\overrightarrow{x_1} + Y_{e1}.\overrightarrow{y_1} + Z_{e1}.\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{M_{O\,(ext \to S_1)}} = L_{e1}.\overrightarrow{x_1} + M_{e1}.\overrightarrow{y_1} + N_{e1}.\overrightarrow{z_0} \end{matrix}\right\}_O$$

La liaison pivot exerce également une action qui se modélise dans le cas d'une liaison parfaite par le torseur suivant :

$$\{\mathrm{T}_{(S_0 \to S_1)}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{(S_0 \to S_1)}} = X_{01}.\overrightarrow{x_1} + Y_{01}.\overrightarrow{y_1} + Z_{01}.\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{M_{O\,(S_0 \to S_1)}} = L_{01}.\overrightarrow{x_1} + M_{01}.\overrightarrow{y_1} \end{matrix}\right\}_O$$

On souhaite déterminer ces inconnues de liaison, on suppose que l'on connaît les actions exercées par le milieu extérieur.
On applique donc le PFD au solide S_1 dans son mouvement par rapport à R_0 .

$$\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\} = \{T(\overline{S_1} \to S_1)\} = \{T(S_0 \to S_1)\} + \{T(ext \to S_1)\}$$

Il faut donc déterminer le torseur dynamique :

$$\boxed{\{\mathcal{D}_{(S_1/R_0)}\} = \left\{\begin{matrix} m\,\overrightarrow{\Gamma_{(G/R_0)}} \\ \overrightarrow{\delta_{O(S_1/R_0)}} \end{matrix}\right\}_O}$$

$\overrightarrow{V_{(G/R)}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{R_0} = a.\dot{\theta}.\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{\Gamma_{(G/R)}} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_{(G/R)}}}{dt}\right)_{R_0} = -a.\dot{\theta}^2.\overrightarrow{x_1} + a.\ddot{\theta}.\overrightarrow{y_1}$

Le point O étant fixe dans R0, on a $\boxed{\overrightarrow{\delta_{O(S_1/R_0)}} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{o(S_1/R_0)}}}{dt}\right)_{R_0}}$

Et $\overrightarrow{\sigma_{O(S_1/R_0)}} = [I_O(S_1)][\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}]$ avec $\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} = \dot{\theta}.\overrightarrow{z_0}$

Soit $\overrightarrow{\sigma_{O(S_1/R_0)}} = -E.\dot{\theta}.\overrightarrow{x_1} - D.\dot{\theta}.\overrightarrow{y_1} + C.\dot{\theta}.\overrightarrow{z_0}$

$\overrightarrow{\delta_{O(S_1/R_0)}} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O(S_1/R_0)}}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O(S_1/R_0)}}}{dt}\right)_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{\sigma_{O(S_1/R_0)}}$ en changeant le repère de dérivation

ce qui nous donne

$$\overrightarrow{\delta_{O(S_1/R_0)}} = -E.\ddot{\theta}.\overrightarrow{x_1} - D.\ddot{\theta}.\overrightarrow{y_1} + C.\ddot{\theta}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\overrightarrow{z_0} \wedge (-E.\dot{\theta}.\overrightarrow{x_1} - D.\dot{\theta}.\overrightarrow{y_1} + C.\dot{\theta}.\overrightarrow{z_0})$$
$$= (-E.\ddot{\theta} + D.\dot{\theta}^2).\overrightarrow{x_1} - (D.\ddot{\theta} + E.\dot{\theta}^2).\overrightarrow{y_1} + C.\ddot{\theta}.\overrightarrow{z_0}$$

Les deux équations vectorielles issues du PFD en projection dans la base R_1 (O, $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0}$) nous donnent donc les 6 équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} -m.a.\dot{\theta}^2 = X_{01} + X_{e1} \\ m.a.\ddot{\theta} = Y_{01} + Y_{e1} \\ 0 = Z_{01} + Z_{e1} \\ -E.\ddot{\theta} + D.\dot{\theta}^2 = L_{01} + L_{e1} \\ -(D.\ddot{\theta} + E.\dot{\theta}^2) = M_{01} + M_{e1} \\ C.\ddot{\theta} = N_{e1} \end{cases}$$

On peut donc exprimer les inconnues de liaison à partir de ces équations.

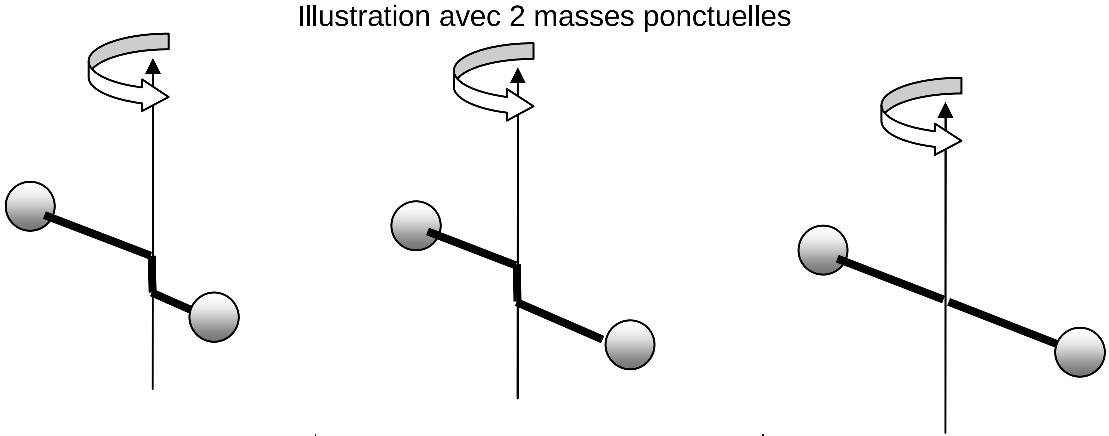
2- Conditions d'équilibrage

Pour éviter les vibrations, il faut rendre l'action mécanique dans la liaison entre S_0 et S_1 aussi constante que possible, et en particulier qu'elle soit indépendante de $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

Il faut donc que :

- a = 0 : le centre d'inertie doit être sur l'axe de rotation : condition d'équilibrage statique
- D = 0 et E = 0 : l'axe de rotation doit être un axe principal d'inertie pour S_1.

Illustration avec 2 masses ponctuelles

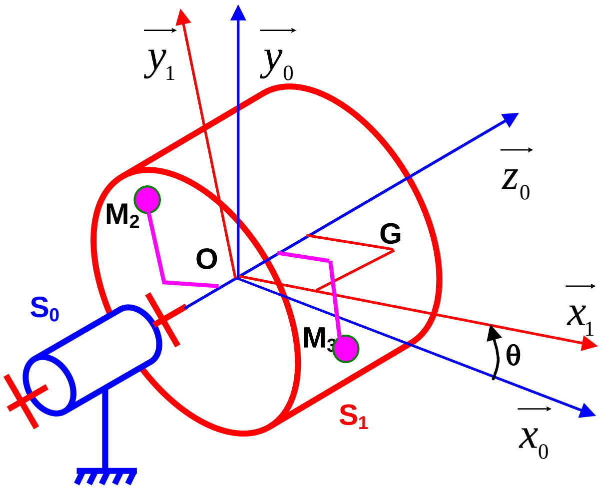


Les 2 masses ne sont pas à la même distance de l'axe de rotation : on n'a ni l'équilibrage statique, ni l'équilibrage dynamique	Les 2 masses sont à la même distance de l'axe : on a réalisé l'équilibrage statique	Les 2 masses sont en face l'une de l'autre : on a réalisé l'équilibrage dynamique

3 Réalisation de l'équilibrage dynamique

Pour réaliser l'équilibrage dans l'exemple précédent, on a déplacé les masses ponctuelles.
On peut également envisager de rajouter d'autres masses ponctuelles afin de réaliser l'équilibrage statique et dynamique
On appelle S_2 et S_3 les deux masses ponctuelles, que l'on va fixer sur le solide S_1. On appelle M_2 et M_3 les points où sont placées ces deux masses.

$$\overrightarrow{OM_2} = x_2.\overrightarrow{x_1} + y_2.\overrightarrow{y_1} + z_2.\overrightarrow{z_0}$$
$$\overrightarrow{OM_3} = x_3.\overrightarrow{x_1} + y_3.\overrightarrow{y_1} + z_3.\overrightarrow{z_0}$$



Par définition du centre d'inertie du solide S_e constitué des solides $S_1 + S_2 + S_3$, on a

$$(m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{OG_e} = m.\overrightarrow{OG} + m_2.\overrightarrow{OM_2} + m_3.\overrightarrow{OM_3}$$

Pour que G_e soit sur l'axe (O, $\overrightarrow{z_0}$), on doit donc avoir en projetant cette relation sur $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$:

$m.a + m_2.x_2 + m_3.x_3 = 0$ ①

$m_2.y_2 + m_3.y_3 = 0$ ②

Les produits d'inertie D_e et E_e valent :

$D_e = D + m_2.y_2.z_2 + m_3.y_3.z_3$

$E_e = E + m_2.x_2.z_2 + m_3.x_3.z_3$

(application du théorème de Huygens)

La condition d'équilibrage dynamique impose que D_e et E_e soient nuls, ce qui se traduit par :

$D + m_2.y_2.z_2 + m_3.y_3.z_3 = 0$ ③

$E + m_2.x_2.z_2 + m_3.x_3.z_3 = 0$ ④

Remarque1 : Si $D \neq 0$, on a besoin des 2 masses pour faire l'équilibrage , car si $m_3 = 0$, la relation ② impose que $y_2 = 0$ ce qui ne permet pas de rendre la relation ③ vraie

Remarque2 : On dispose de 4 équations et de 8 inconnues (masses + coordonnées de S_2 et S_3. On a donc une infinité de solution.

Dans le cas de l'équilibrage d'une roue de voiture, les masses sont fixées sur le bord de la jante dans le cas d'une jante en tôle ou bien collées sur la jante dans le cas d'une jante en aluminium.
On impose donc le rayon et la composante selon $\overrightarrow{z_0}$ pour chacune des masses, ce qui ne laisse que 4 paramètres pour 4 équations. La solution est donc unique et consiste donc à choisir la valeur de la masse et la position angulaire de celle ci.

Dans le cas des moteurs électriques, on ne rajoute pas des masses mais on en « retire » en venant usiner localement la partie en fer doux du rotor.

Encoches usinées permettant de réaliser l'équilibrage statique et dynamique du rotor