

## Cours

# Chapitre 1

## Approche énergétique

*Savoirs et compétences :*

- Mod2.C16 : torseur cinétique*
- Mod2.C17 : torseur dynamique*
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*



# 1 Introduction

## 1.1 Objectif de la modélisation

Dans ce chapitre nous aborderons les notions de **puissance**, **travail**, et **énergie**. Ces notions sont fondamentales pour :

- dimensionner des composants d'une chaîne d'énergie en terme de puissance transmissible;
- déterminer des équations de mouvement pour prévoir les performances d'un système;
- estimer le rendement d'une chaîne complète d'énergie.

# 2 Puissance

## 2.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

**Définition** On définit la **puissance d'une action mécanique extérieure** à un ensemble matériel ( $E$ ) en mouvement par rapport à un référentiel  $R$  subissant une densité d'effort  $\vec{f}(M)$  (où  $M$  est un point courant de ( $E$ )) comme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \overline{V}(M \in E/R) dV.$$

(R) On appellera **puissance galiléenne**, la puissance d'un ensemble matériel ( $E$ ) en mouvement dans un **référentiel galiléen**  $R_g : \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ .

! Dimensions et homogénéité.

- Une puissance est une **grandeur scalaire** s'exprimant en *Watt*.
- Elle est homogène à un produit entre un effort et une vitesse et peut donc s'exprimer en unité SI en  $\text{Nms}^{-1}$ .
- Historiquement on a utilisé longtemps les « chevaux » ou « cheval vapeur » (1 ch = 736 W).

**Propriété — Calcul des actions mécaniques s'appliquant sur un ensemble  $E$ .** On considère un ensemble matériel  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$ .

Dans la pratique pour calculer la puissance totale des actions mécaniques s'appliquant sur  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  il faut sommer toutes les puissances s'appliquant sur les  $S_i$  venant de l'extérieur de  $E$  :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \sum_{\forall S_i \in E} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_i/R).$$

## 2.2 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide

**Définition — Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ( $S$ ).** La **puissance d'une action mécanique extérieure** à un solide ( $S$ ) en mouvement dans un référentiel  $R$  peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit ( $S$ ) et le torseur cinématique du mouvement de  $S$  dans le référentiel  $R$ .

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}.$$

(!) On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point**.

(R)

- Le comoment des torseurs est défini par  $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}}{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \right\}_P \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(S/R)}}{\overrightarrow{V(P \in S/R)}} \right\}_P$   
 $= \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P \in S/R)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}.$
- Lorsque le torseur cinématique de  $S/R$  est un couple (mouvement de translation) alors en tout point  $A$  la puissance est alors donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P \in S/R)} \forall P$ .
- Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)} \forall P$ .

## 2.3 Puissance d'actions mutuelles entre deux solides

**Définition — Puissance d'actions mutuelles entre deux solides.** Soient deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) distincts, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $R_g$ , et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. **La puissance des actions mutuelles entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ )**, dans leur mouvement par rapport au repère  $R$ , est :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2 / R_g) = \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2 / R_g) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1 / R_g).$$

**La puissance des actions mutuelles** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) **est indépendante du repère  $R$** . Ainsi,

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2 / R) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2).$$

R

- On peut parler parfois de **puissance des inter-efforts**.
- Pour un ensemble  $E$ , on peut exprimer l'ensemble de la puissance des inter-effort comme la puissance intérieure à l'ensemble  $E$  :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j).$$

## 2.4 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

**Définition — Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons.** Si deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2 / S_1)\}.$$

La **liaison parfaite** si et seulement si quel que soit le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre  $S_1$  et  $S_2$  est nulle**.

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$

R

- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solide  $S_1$  et  $S_2$ . Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.
- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

## 3 Travail

### 3.1 Définition

**Définition — Travail.** Le travail entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  d'une action mécanique s'exerçant sur un ensemble matériel  $E$  dans son mouvement par rapport au repère  $R$  est donné par :

$$W_{t_1}^{t_2}(\text{ext} \rightarrow E / R) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E / R) dt.$$

R

On peut également définir le travail élémentaire par :

$$dW(\text{ext} \rightarrow E / R) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E / R) dt.$$

- Le travail est une grandeur scalaire.
- L'unité de travail est le **Joule**.
- Le travail est homogène au **produit entre une force et une distance**.

### 3.2 Travail conservatif

**Définition — Travail conservatif.** On dit que le **travail est conservatif** (noté  $W_c^{t_2}_{t_1}(\text{ext} \rightarrow E / R)$ ) s'il est indépendant du chemin suivi pour passer de l'état initial (instant  $t_1$ ) à l'état final (instant  $t_2$ ). Dans ce cas là il existe une grandeur appelée énergie potentielle de l'action mécanique extérieure à  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  qui vérifie :

$$dW_c(\text{ext} \rightarrow E / R) = -dE_p(\text{ext} \rightarrow E / R) \quad \text{avec} \quad dW_c(\text{ext} \rightarrow E / R) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E / R) dt.$$

On peut également l'écrire sous la forme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = -\frac{dE_p(\text{ext} \rightarrow E/R)}{dt}.$$

(R)

- On dit que la puissance à travail conservatif dérive d'une énergie potentielle (au signe près).
- L'énergie potentielle est une primitive de la puissance. Elle est donc définie à une constante près arbitraire.

### 3.2.1 Énergie potentielle de la pesanteur

**Définition — Énergie potentielle de la pesanteur.** L'énergie potentielle associée à l'action de la pesanteur sur un ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  dans son mouvement par rapport à  $R$  est donnée par :

$$E_p(g \rightarrow E/R) = m g z_G + k.$$

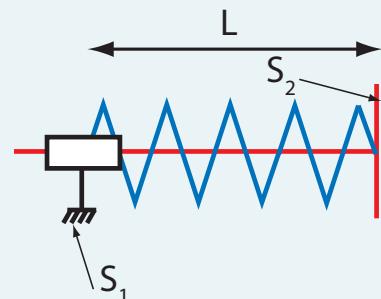
Où  $z_G$  correspond à la position du centre de gravité  $G$  de  $S$  suivant la verticale ascendante  $\vec{z}$  (colinéaire au champs de pesanteur  $\vec{g}$ ) et  $k$  une constante.

### 3.2.2 Énergie potentielle associée à un ressort

**Définition — Énergie potentielle associée à un ressort.**

L'énergie potentielle associée à l'action d'un ressort  $r$  de raideur  $K$  et de longueur à vide  $L_0$  situé entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$  dans son mouvement par rapport à  $R$  est donnée par :

$$E_p(r \rightarrow S_1, S_2/R) = \frac{K}{2}(L - L_0)^2 + k \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$



## 4 Énergie cinétique

### 4.1 Définition

**Définition — Énergie cinétique.** On définit l'énergie cinétique  $E_c$  d'un système matériel  $S$  en mouvement dans un référentiel  $R$  comme la somme des carrés de la vitesse en chaque point courant  $P$  de  $S$  pondéré de la masse élémentaire :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} (\vec{V}(P/R))^2 dm.$$

### 4.2 Propriétés

**Propriété — Expression avec les comoments.** L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \{\mathcal{V}(S/R)\} \otimes \{\sigma(S/R)\}.$$

!

Il faudra bien veiller à ce que chacun des torseurs soit exprimé en un même point.

**Propriété — Cas particuliers.**

- Solide  $S$  de masse  $M$  de centre d'inertie  $G$  en mouvement de **translation** par rapport à  $R$  :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} M \overrightarrow{V(G \in S/R)}^2.$$

- Solide  $S$  de moment d'inertie  $I_{Oz}(S)$  en mouvement de rotation par rapport à l'**axe fixe** ( $O, \vec{z}$ ) par rapport  $R$  :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} I_{Oz}(S) \overrightarrow{\Omega(S/R)}^2.$$

### 4.3 Énergie cinétique équivalente

**Définition — Énergie cinétique équivalente.** Lorsqu'un problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et pour simplifier les calculs, on peut exprimer l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$  en fonction d'un seul paramètre cinématique. On peut alors écrire  $E_c(E/R)$

- avec **son inertie équivalente**  $J_{\text{eq}}(E)$  (en  $\text{kg m}^2$ ) rapportée à un paramètre de rotation  $\dot{\theta}(t)$ :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} J_{\text{eq}}(E) \dot{\theta}^2.$$

- avec **sa masse équivalente**  $M_{\text{eq}}(E)$  (en kg) rapportée à un paramètre de translation  $\dot{x}(t)$ :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} M_{\text{eq}}(E) \dot{x}^2.$$

## 5 Théorème de l'énergie cinétique

### 5.1 Introduction

Le théorème de l'énergie cinétique est la traduction du Principe Fondamental de la Dynamique d'un point de vue énergétique.

### 5.2 Énoncé pour un solide

**Théorème — Théorème de l'énergie cinétique.** La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_g$  est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à  $S$ . Soit :

$$\frac{dE_c(S/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{S} \rightarrow S/R_g).$$

### 5.3 Énoncé pour un ensemble de solides

**Théorème — Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides.** Soit  $(E)$  un ensemble de  $n$  solide ( $S_1, S_2, \dots, S_n$ ) en mouvement par rapport à un repère galiléen  $R_g$ . Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{dE_c(E/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j / R_g) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) + \mathcal{P}_{\text{int}}(E).$$

Avec :

- $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$  la puissance intérieure à  $E$  qui est nulle s'il n'y a pas d'apport d'énergie interne ni de dissipation (liaisons parfaites) ;
- $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ , la puissance galiléenne de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_g$ .

(R)

- Dans le théorème de l'énergie cinétique, contrairement au principe fondamental de la dynamique, on tient compte de la puissance des actions mutuelles donc internes à l'ensemble matériel  $E$  que l'on considère.
- Ce théorème permet d'obtenir une seule équation scalaire. Cette méthode est donc moins riche que le principe fondamental de la dynamique mais permet d'obtenir quasiment directement les équations de mouvements.
- Pour obtenir une équation de mouvement (ie éliminer les inconnues en actions mécaniques) il faut alors combiner d'autres équations issues des théorèmes généraux de la dynamique.

## 6 Notion de rendement énergétique

### 6.1 Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle

Une étude dynamique d'une chaîne fonctionnelle peut se décomposer en deux parties :

- en **régime permanent** (variation d'énergie cinétique négligeable) : étude des effets dissipatifs pour estimer une puissance nominale des actionneurs ;
- en **régime transitoire** : évaluation du complément de puissance pour permettre au système de fonctionner.

**Définition — Rendement d'une chaîne fonctionnelle.** Le rendement se définit **en régime permanent** comme la puissance utile sur la puissance d'entrée d'une chaîne fonctionnelle :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})}.$$

- $\eta \in [0, 1]$ ;
- $\mathcal{P}(\text{entrée}) > 0$  définit la puissance fournie par l'actionneur **en régime permanent**;
- $\mathcal{P}(\text{utile}) > 0$  définit la puissance fournie à l'aval d'une chaîne fonctionnelle (effecteur par exemple) **en régime permanent**.

**Propriété — Rendement global d'une chaîne d'énergie.** Le **rendement global** d'une chaîne d'énergie comportant  $n$  éléments de rendements  $\eta_i$  est donné par :

$$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i \leq 1.$$

Chacun des rendements successifs  $\eta_i$  étant au plus égale à 1, le rendement global est nécessairement inférieur ou égal au plus mauvais rendement.

## 6.2 Détermination d'une puissance dissipée

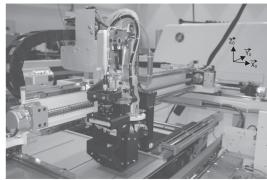
**Propriété — Estimation des dissipations.** On peut évaluer en régime permanent les pertes ou puissance dissipée à partir de la connaissance du rendement  $\eta$  :

$$\mathcal{P}(\text{dissipée}) = (1 - \eta) \cdot \mathcal{P}(\text{entrée}).$$

## Références

[1] Émilien Durif, *Approche énergétique des systèmes*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

# Activation 1



## Activation – Système de dépose de composants électroniques

Émilien Durif – E3A PSI 2011

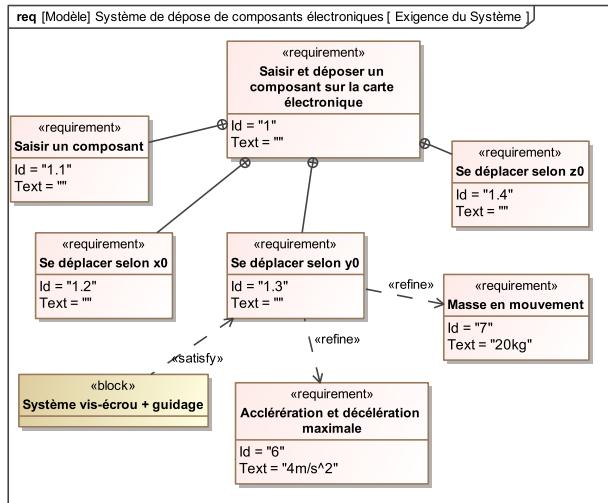
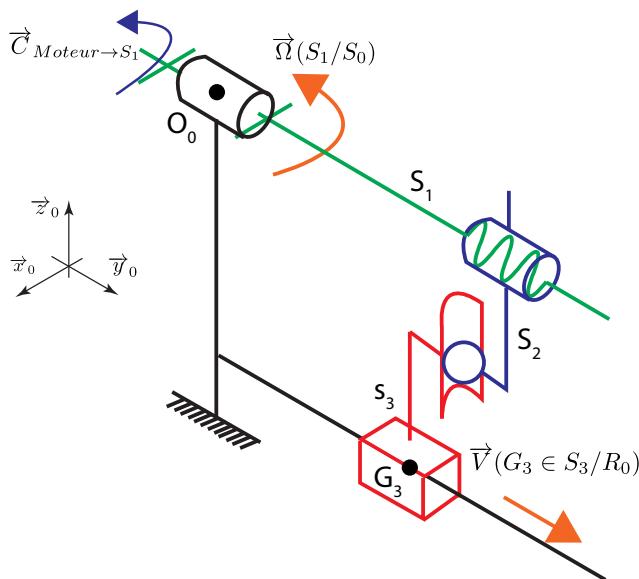
Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée  $\vec{y}_0$ ) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

### Hypothèses :

- le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
- les solides seront supposés indéformables;
- on notera  $J_1$  le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  :  $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$ ;
- on note  $M_3$  et  $G_3$  respectivement la masse et le centre d'inertie du solide  $S_3$ ;
- la position de  $G_3$  est définie par  $\overrightarrow{O_0 G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre  $S_0$  et  $S_3$  (Coefficient de frottement noté  $\mu$ ) et la pivot entre  $S_0$  et  $S_1$  (couple résistant noté  $C_r$ );
- seul l'action de pesanteur sur  $S_3$  sera supposée non négligeable.



- $S_0$  : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
- $S_1$  : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
- $S_2$  : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
- $S_3$  : chariot supportant la tête de dépose (masse  $M_3$ ).

### Données numériques associées au système :

- Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) :  $\mu = 0,1$ .
- Pas de la vis à billes :  $p = 20\text{ mm}$ .
- Diamètre de la vis à billes :  $D = 25\text{ mm}$ .
- Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe  $\vec{y}_0$  :  $I_b = 2,15 \times 10^{-4}\text{ kg m}^2$ .
- Couple résistant sur la vis due à son guidage (palières + joints) :  $C_r = 3\text{ Nm}$ .
- $l$ , longueur libre de la vis – entre deux palières – (mm) :  $1000\text{ mm}$ .
- Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :
  - couple maximal,  $C_{\max} = 21,2\text{ Nm}$ ;
  - fréquence de rotation maximale,  $N_m = 6000\text{ tr/min}$ ;
  - moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe  $\vec{y}_0$ ,  $I_m = 1,6 \times 10^{-4}\text{ kg m}^2$ .

**Objectif** L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- couple moteur transmis à  $S_1$  :  $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$ ;
  - vitesse de rotation de  $S_1$  :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$ ;
- à celles liées à l'effecteur (tête de dépose  $S_3$ ) :
- masse :  $M_3$ ;
  - cinématique de  $S_3$  :  $\vec{a}(G_3 R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}(t)$ .

On considère l'ensemble  $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$ .

**Question 1** Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

**Question 2** Déterminer l'expression de  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$  en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

**Question 3** Calculer  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction des données du problème.

**Question 4** Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble  $E$  :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$ .

**Question 5** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$

**Question 6** Déterminer la mobilité du système.

**Question 7** Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

**Question 8** Déterminer l'inertie équivalente de  $E$  ramenée à la rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  et du para-

mètre  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 9** Déterminer la masse équivalente de  $E$  ramené à la translation selon la direction  $\vec{y}_0$  et du paramètre  $\dot{y}(t)$ .

**Question 10** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $E$ .

**Question 11** Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier  $C_m$  à  $y(t)$ .

**Question 12** Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre  $S_1$  et  $S_2$ . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement  $\eta$  défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

**Question 13** En considérant le système  $E_1 = \{S_1 + S_2\}$ , définir le rendement.

**Question 14** On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre  $S_1$  et  $S_2$ . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à  $S_2/R_0$  et  $S_1/R_0$  en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

On donne :

- Rendement  $\eta$  dans la liaison hélicoïdale :  $\eta = 0,8$ ;

**Question 15** Déterminer dans ces conditions les dissipations.

# Application 1



## Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

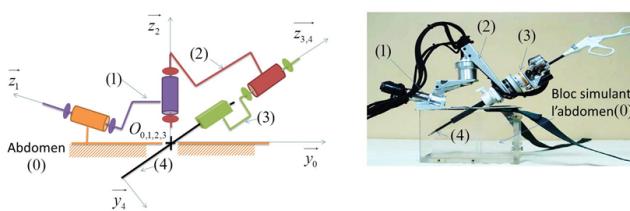
Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

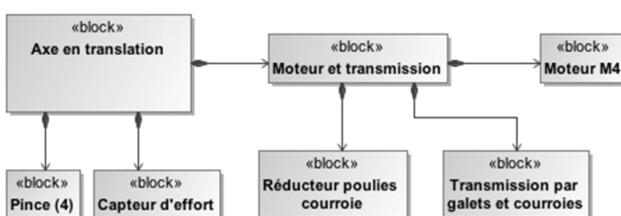
### Mise en situation

Le robot MC<sup>2</sup>E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.



Les blocs permettant de réaliser le mouvement de translation sont présentés ci-dessous.



Pour cela un moteur réducteur entraîne via 3 systèmes poulie-courroie 3 galets qui entraînent la pince. 3 autres galets permettent de guider la pince. Au total 6 galets permettent d'entraîner et guider la pince par adhérence. Le premier étage de poulie-courroie permet de réduire la vitesse du moteur. Les deux autres étages ont un rapport de réduction unitaire (voir figure au verso).

**Objectif** Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

### Équation de mouvement

#### Hypothèses

- La compensation de la pesanteur est parfaitement réalisée (système non étudié dans le cadre de cet exercice). On ne tiendra pas compte des actions mécaniques dues à la pesanteur par la suite.
- Les axes de rotation du MC<sup>2</sup>E sont asservis en position. En conséquence, les repères liés aux solides (1), (2) et (3) seront supposés fixes par rapport au repère lié au bâti (0) dont le repère associé est supposé galiléen.
- L'instrument chirurgical est vertical.
- Toutes les courroies sont inextensibles et il n'y a pas de glissement entre les galets et les courroies.
- Tous les galets  $G_i$  ont même rayon noté  $\mathcal{R}_g$  et roulement sans glisser sur la pince (4) au niveau des points  $I_1$  à  $I_6$ .
- La poulie réceptrice est liée à un pignon. Ce pignon entraîne un deuxième pignon de même rayon primaire pour assurer la transmission de puissance. Il n'y a pas de glissement en leur point de contact.

Remarque : Dans la suite, toutes les vitesses sont définies par rapport au bâti (0).

#### Modélisation simplifiée du problème

- La vitesse de rotation du rotor moteur M4 par rapport à son stator fixe (lié au bâti (0)) est notée  $\omega_m(t)\vec{x}_0$  où  $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$  (vitesse de rotation avant réduction de rapport  $r$ ).
- La poulie motrice a un rayon  $R_i$  et tourne à la vitesse  $\omega_i(t)$  (vitesse de rotation après réduction de rapport  $r$ ).
- La poulie réceptrice a un rayon  $R_e$  et tourne à la vitesse  $\omega_e(t)$ .
- Les deux pignons en contact ont même rayon primaire, supposé égal à  $R_e$ .
- Le couple du stator sur le rotor moteur M4 est noté  $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$ .
- L'action mécanique qu'exerce le ressort sur la pince (4) est modélisable par un glisseur noté  $\{\mathcal{T}(\text{ressort} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{ressort} \rightarrow 4) = -kz(t)\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_4}$

où  $O_4$  est le point de contact entre la pince (4) et le ressort,  $k$  la raideur du ressort et  $z(t)$  la variation de position de l'extrémité de (4) autour de la position d'équilibre.

- On note  $\overrightarrow{V(O_4 \rightarrow 4/0)} = v(t) \overrightarrow{z_0} = \frac{dz(t)}{dt} \overrightarrow{z_0}$ .
- Les masses des courroies sont négligées.

**Données**

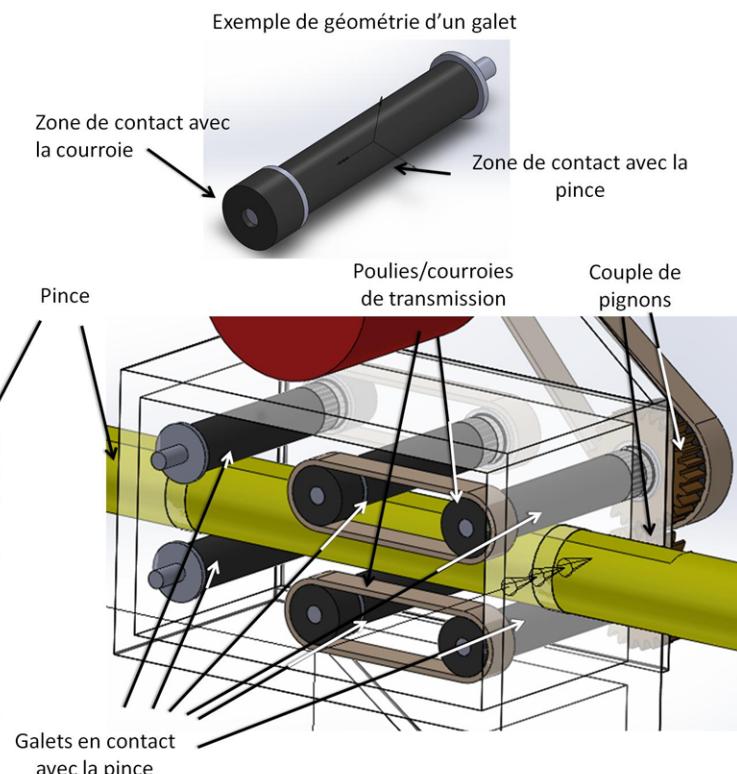
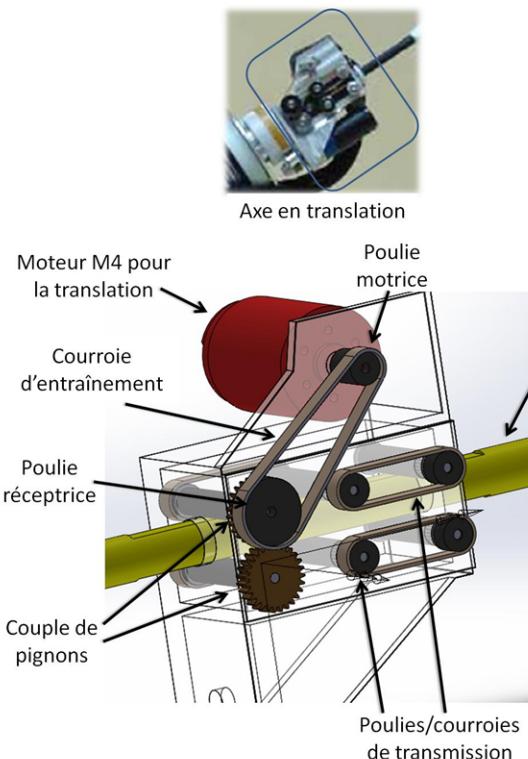
- $I_m$ , moment d'inertie de l'arbre moteur par rapport à son axe de rotation.
- $I_r$ , moment d'inertie du réducteur par rapport à son axe de rotation de sortie.
- $I_i$ , moment d'inertie de la poulie, de rayon  $R_i$ , par rapport à son axe de rotation.
- $I_e$ , moment d'inertie de la poulie, de rayon  $R_e$ , par rapport à son axe de rotation.
- $I_p$ , moment d'inertie de chaque pignon, de rayon  $R_e$ , par rapport à son axe de rotation.
- $I_g$ , moment d'inertie de chaque galet  $G_i$ , de rayon  $R_g$ , par rapport à son axe de rotation.
- $m_4$ , masse de la pince (4).
- $r = \frac{\omega_i(t)}{\omega_m(t)}$ , rapport de réduction constant du moteur/réducteur.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$  avec :

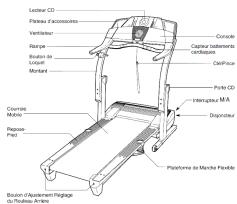
- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

**Travail demandé**

**Question 1** Déterminer la relation entre  $v(t)$  et  $\omega_m(t)$ .  
Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre  $z(t)$  et  $\theta_m(t)$ .



## Application 2



### Application 02

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie

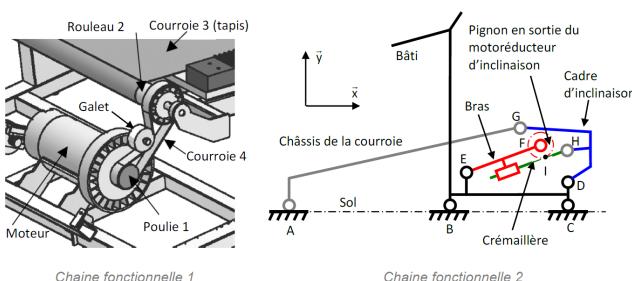
**Savoirs et compétences :**

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

On s'intéresse à un tapis de course dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. L'utilisateur court sur une courroie mobile qui est entraînée dans le sens inverse de la course. La vitesse de déplacement de la courroie mobile est réglable pour permettre au coureur de rester sur place. Le système propose un large choix de mode de fonctionnement cependant l'étude sera limitée à l'utilisation du programme de contrôle de la fréquence cardiaque. Avec ce programme, le système ajuste automatiquement la vitesse et l'inclinaison du tapis afin d'obtenir une fréquence cardiaque préréglée.

Le programme de contrôle de la fréquence cardiaque fonctionne de la façon suivante :

- dans un premier temps, le système commence par augmenter la vitesse de déplacement de la courroie mobile via la chaîne fonctionnelle 1 pour atteindre la fréquence cardiaque préréglée;
- si la vitesse maximale ne suffit pas, le tapis de course s'incline via la chaîne fonctionnelle 2 pour augmenter encore l'effort.



Extrait du cahier des charges :

Exigences	Critères	Niveaux
1.1. Le système doit permettre au coureur de courir avec une fréquence cardiaque prédéfinie	Vitesse de course Pente Masse utilisateur	De 0 à 19 Km/h par incrément de 0,1Km/h De 0% à 14% par incrément de 0,5% 115 Kg maxi

Hypothèses et données :

- on se place dans le cas où le tapis est réglé à l'horizontale;
- la courroie 3, d'épaisseur négligeable, s'enroule sans glisser sur le rouleau 2. Le rayon d'enroulement de la courroie 3 sur le rouleau 2 est  $R_e = 24,5 \text{ mm}$ . La poulie 2 est liée au rouleau 2.
- la courroie 4, d'épaisseur négligeable, s'enroule sans glisser sur les poulies 1 et 2, ainsi que sur le

galet. Les rayons primitifs de la poulie motrice 1 et de la poulie 2 sont respectivement  $R_{p1} = 27 \text{ mm}$  et  $R_{p2} = 44 \text{ mm}$ ;

- une étude préliminaire a montré que la présence d'un coureur de 115 kg entraîne un effort résistant tangentiel  $T_{\text{coureur} \rightarrow 3} = 230 \text{ N}$  sur la courroie 3;
- l'inertie équivalente des pièces en mouvement ramenée sur l'arbre moteur est  $I_{eq} = 0,1 \text{ kgm}^2$ ;
- le rendement global du système mécanique est  $\eta = 0,9$ .

**Objectif** Valider le choix de la motorisation de la chaîne fonctionnelle 1 vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 1** Déterminer la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m$  en rad/s en fonction de la vitesse de déplacement  $V_{30}$  en m/s de la courroie 3. En déduire la vitesse maximale du moteur  $\omega_{m \max}$  lorsque la courroie se déplace à la vitesse maximale indiquée dans le cahier des charges.

**Question 2** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  nécessaire pour mettre en mouvement la courroie 3 en régime permanent.

**Question 3** Déterminer la puissance développée par le moteur lorsque le coureur de 115 kg court en régime établi à 19 km/h. Le système possède un moteur courant continu ayant les caractéristiques ci-dessous.

Puissance nominale $P_n = 1840 \text{ W}$	Tension nominale $U_n = 130 \text{ V}$
Constante de vitesse $K_E = 0,33 \text{ V/(rad.s}^{-1}\text{)}$	
Courant nominal $I_n = 17,6 \text{ A}$	
Constante de couple $K_T = 0,33 \text{ N.m/A}$	
Résistance d'induit $R = 1,1 \text{ Ohm}$	

**Question 4** Conclure quant au bon dimensionnement du moteur vis-à-vis des performances attendues.

#### Éléments de correction

$$1. \omega_m = \frac{R_{p2}}{R_{p1}} \frac{V_{30}}{R_e} \text{ et } \omega_{m \max} = 351 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$2. C_m = \frac{1}{\eta} \left( T_{\text{coureur} \rightarrow 3} R_e \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \right).$$

$$3. P(0 \rightarrow 1/0) = \frac{1}{0,9} \left( T R_e \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \right) \omega_{\max} = 1349 \text{ W}.$$

4. ...

## Application 3



### Chariot élévateur à bateaux

X – ENS – PSI – 2012

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

#### Présentation

Le chariot élévateur , objet de cette étude, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

- du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage;
- du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépose du bateau.



#### Phase de levage du bateau

**Objectif** Permettre au conducteur de charger et décharger le bateau en toute sécurité :

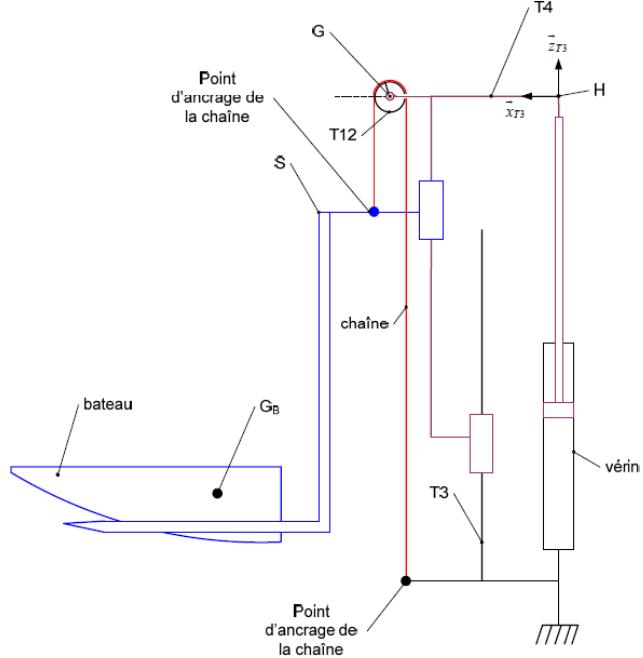
- req 102 : vitesse de levage en charge :  $0,33 \text{ m s}^{-1}$  ;
- req 103 : temps pour atteindre la vitesse de levage en charge : 0,4 s.

Dans cette partie, on considère que le chariot est à l'arrêt et que le levage est le seul mouvement actif. Le modèle retenu pour cette étude est le schéma de principe de la suivante. En raison de la symétrie du tablier par rapport à son plan médian vertical, le modèle d'étude peut se ramener à un système comprenant un seul vérin, une seule chaîne et une seule poulie. L'actionneur est un vérin hydraulique dont le corps est en liaison encastrement avec le mât inférieur. La tige est solidaire du mât supérieur. Le levage de l'ensemble  $S = \{T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}\}$  est obtenu à l'aide d'une chaîne présentant un point d'ancrage sur le mât inférieur et un point d'ancrage sur l'ensemble  $S$ . Cette chaîne roule sans glisser sur le pignon  $T_{12}$  qui est en liaison pivot par rapport au mât supérieur. Le bateau étant à l'arrêt en position basse, le conducteur actionne le levage du bateau. L'effort de poussée fourni par le vérin est  $F_V$  (considéré comme constant). On note  $I_{T_{12}}$  le moment d'inertie de la poulie  $T_{12}$  par rapport à son axe

de rotation,  $R_{T_{12}}$  son rayon. Sa masse est négligée. Les masses des différents solides sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

Solide	Masse
Ensemble (S)	$m_S$
Bateau (B)	$m_B$
Mât inférieur (T <sub>3</sub> )	$m_{T_3}$
Mât supérieur (T <sub>4</sub> )	$m_{T_4}$
Chaîne (C)	négligée

Les liaisons sont parfaites. La chaîne est non dissipative. Le repère  $\mathcal{R}_3$  peut être considéré comme un référentiel galiléen pour les conditions de l'étude. Les axes  $\overrightarrow{z_{T_3}}$  et  $\overrightarrow{z_0}$  sont confondus pour les conditions de l'étude.



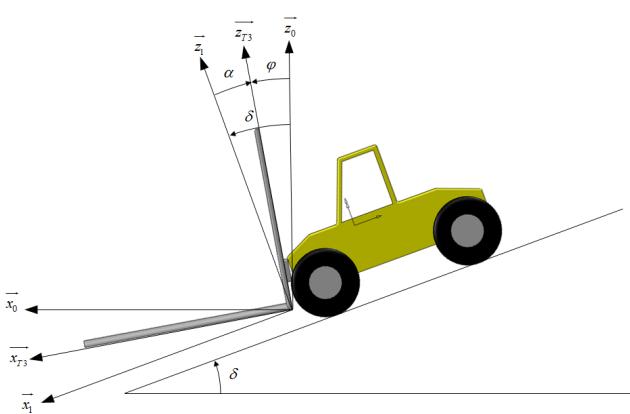
**Question 1** Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

#### Phase de déplacement

La zone de stockage des bateaux se situe nécessairement à une altitude supérieure à celle du quai de déchargement. Afin d'éviter le glissement du bateau lorsque le

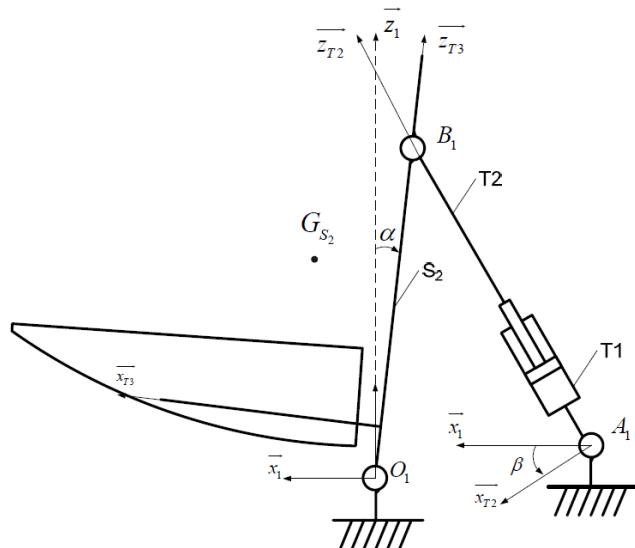
chariot descend une pente, un dispositif permet de maintenir les fourches horizontales durant le déplacement. Lors d'une phase de décélération, les fourches sont automatiquement inclinées vers l'arrière pour éviter le glissement du bateau. Ce mouvement, de faible amplitude, est assuré par l'asservissement des vérins d'inclinaison du tablier T1, T2 et T1', T2'. Ce dispositif présente l'avantage de prendre en charge de manière entièrement automatisée l'un des mouvements du tablier. Le conducteur peut alors charger et mettre à l'eau le bateau sans avoir à gérer manuellement le mouvement d'inclinaison. La figure suivante permet de définir :

- l'angle de basculement  $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}_{T3})$ ;
- l'angle de la pente  $\delta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ ;
- l'angle à asservir  $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{z}_{T3}) = \alpha + \delta$ .



**Question 2** Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle  $\varphi(t)$  qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches? Justifier.

Nous considérons dans cette partie que le seul mouvement actif est le basculement. L'objectif est d'obtenir un modèle dynamique du mécanisme de basculement à partir de la modélisation plane proposée sur la figure suivante.



Les solides pris en compte pour l'étude sont :

- l'ensemble  $S_2 = \{T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, B\}$  en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{y}_0)$  par rapport au chariot 1 de centre de gravité  $G_{S_2}$ . Le moment d'inertie de l'ensemble  $S_2$  par rapport à l'axe sera noté  $J_{S_2}$  et sa masse  $m_{S_2}$ . La liaison pivot entre l'ensemble  $S_2$  et le chariot génère un couple résistant  $\vec{C}_\mu = -\mu \dot{\alpha} \vec{y}_0$  et  $\overrightarrow{O_1 O_{G_2}} = x_{G_2} \vec{x}_{T3} + z_{G_2} \vec{z}_{T3}$ ;
- un vérin équivalent  $V = \{T_1, T_2\}$  dont la tige est en liaison pivot d'axe  $(A_1, \vec{y}_0)$  par rapport au chariot 1 et le corps en liaison pivot d'axe  $(B_1, \vec{y}_0)$  par rapport à l'ensemble  $S_2$ . La masse et l'inertie du vérin sont négligées. Le vérin développe un effort au cours du mouvement qui sera noté  $\vec{F}_V = p(t) S \vec{z}_{T2}$  où  $p(t)$  est la différence de pression entre les deux chambres du vérin.

On pose  $\overrightarrow{A_1 B_1} = (\lambda_0 + \lambda) \vec{z}_{T2}$ . Le paramétrage est tel que si  $\alpha = 0$  alors  $\lambda = 0$ .

**Question 3** En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle  $\alpha$  est petit, montrer que  $\alpha(t)$  et  $p(t)$  sont liés par l'équation différentielle suivante :  $J_{eq} \ddot{\alpha}(t) + \mu \dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2} g x_{G_2}$ . Exprimer  $J_{eq}$ .