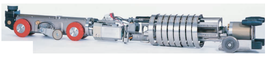
TD 4 – Corrigé



Robot de dépose de fibres optiques

Mines Ponts – PSI – 2004

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Présentation

Objectif Enfin des mouvements des bras, on doit avoir $\delta = 14°$ et $\dot{\delta} \leq 50°.\text{s}^{-1}$.

Hypothèses

Repères et paramétrage

Cahier des charges

Modélisation dynamique

Question 1 *Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble* $\Sigma = \{1+2+3+4\}$.

Correction Pour calculer l'énergie cinétique de l'ensemble seule la masse de la tige 1 est prise en compte.
$2\,E_c(\Sigma/R_0) = \{\sigma(\Sigma/R_0)\} \otimes \{\mathscr{V}(\Sigma/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega}(1/0)\\ \overrightarrow{V}(G_1,1/0)\end{array}\right\}_{G_1} \otimes \left\{\begin{array}{c} m_1\,\overrightarrow{V}(G_1,1/0)\\ \overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0)\end{array}\right\}_{G_1} = m_1\left(\overrightarrow{V}(G_1,1/0)\right)^2 + \overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0)\cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0)$.

- Vecteur de taux de rotation de 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\delta}\,\overrightarrow{z_0}$.
- Vitesse du point G_1 appartenant à 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{V}(G_1,1/0) = \overrightarrow{V}(I,1/0) + \overrightarrow{G_1I_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = -\left(R\,\overrightarrow{y_0} + \frac{L_1}{2}\overrightarrow{x_1}\right) \wedge \dot{\delta}\,\overrightarrow{z_0} = -R\,\dot{\delta}\,\overrightarrow{x_0} + \frac{L_1}{2}\,\dot{\delta}\,\overrightarrow{y_1}$.
- Caractéristiques d'inertie de la tige 1 : la tige 1 supposée unidimensionnelle présente naturellement des symétries matérielles suivant des plans contenant $\overrightarrow{x_1}$. Les produits d'inertie sont donc nuls. Le moment d'inertie en G_1 suivant $\overrightarrow{z_0}$ est $C_1 = \frac{m_1\,L_1^2}{12}$.
- Moment cinétique en G_1 de 1 par rapport à 0 : $\overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0) = \overline{\overline{I}}_{G_1}(1)\cdot\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \frac{m_1\,L_1^2}{12}\,\dot{\delta}\,\overrightarrow{z_0}$.
- On en déduit $E_c(1/0)$: $E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) = \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{\delta}^2\left(R^2 + \frac{L_1^2}{4} + R\,L_1\,\sin\delta\right) + \frac{m_1\,L_1^2}{12}\,\dot{\delta}^2$
  $= \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{\delta}^2\left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\,L_1\sin\delta\right)$.

Question 2 *Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur* Σ.

Correction $\mathscr{P}(\text{ext}\rightarrow\Sigma/0) = \mathscr{P}(\text{pesanteur}\rightarrow\Sigma/0) + \mathscr{P}(\text{contact en E}\rightarrow\Sigma/0) + \mathscr{P}(\text{contact en I}\rightarrow\Sigma/0)$

- Actions de la pesanteur :
  $\mathscr{P}(\text{pes}\rightarrow\Sigma/0) = \mathscr{P}(\text{pes}\rightarrow 1/0) = \{\mathscr{T}(\text{pes}\rightarrow 1)\}\otimes\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{c}-m_1\,g\,\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G_1} \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega}(1/0\\ \overrightarrow{V}(G_1,1/0)\end{array}\right\}_{G_1}$
  $= -m_1\,g\,\overrightarrow{y_0}\cdot\overrightarrow{V}(G_1,1/0) = -m_1\,g\,\frac{L_1}{2}\dot{\delta}\,\cos\delta$.
- Actions du contact en I entre 0 et 4 (*le contact se fait par roulement sans glissement*) :
  $\mathscr{P}(\text{contact en I}\rightarrow\Sigma/0) = \{\mathscr{T}(0\rightarrow 4)\}\otimes\{\mathscr{V}(4/0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R}_{04}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_I \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega}(4/0)\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_I = 0$.
- Actions du contact en E entre 0 et 2 (*le contact se fait sans frottement*) :
  $\mathscr{P}(\text{contact en E}\rightarrow\Sigma/0) = \{\mathscr{T}(0\rightarrow 2)\}\otimes\{\mathscr{V}(4/0)\} = \left\{\begin{array}{c}R_{02}\,\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_E \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega}(2/0)\\ \overrightarrow{V}(E,2/0)\end{array}\right\}_E = R_{02}\,\overrightarrow{y_0}\cdot\overrightarrow{V}(E,2/0) = 0$.

Question 3 *Donner la puissance intérieure à Σ.*

Correction
- Les liaisons sont supposées comme parfaites donc : $\mathcal{P}\left(1 \overset{\text{Pivot}}{\longleftrightarrow} 2\right) = \mathcal{P}\left(1 \overset{\text{Pivot Gl.}}{\longleftrightarrow} 3\right) = \mathcal{P}\left(3 \overset{\text{Pivot}}{\longleftrightarrow} 2\right) = 0$.
- Action du vérin entre 1 et 3 :
  $\mathcal{P}\left(1 \overset{\text{Vérin}}{\longleftrightarrow} 3\right) = \{\mathcal{T}(1 \to 3)\} \otimes \{\mathcal{V}(3/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_N \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V}(N,3/1) \end{array} \right\}_N = F\ \overrightarrow{V}(N,3/1) \cdot \overrightarrow{x_1}$.
  En considérant que $\overrightarrow{MN}$ est porté par $\overrightarrow{x_1}$ (hypothèse faite dans l'énoncé), on obtient :
  $\overrightarrow{V}(N,3/1) \cdot \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{V}(M,3/1) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{V}(M,3/2) + \overrightarrow{V}(M,2/1)\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{V}(B,2/1) + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = \left(-b\,\overrightarrow{x_2} \wedge \left(\dot{\beta} - \dot{\delta}\right)\overrightarrow{z_0}\right) \cdot \overrightarrow{x_1} = b\left(\dot{\beta} - \dot{\delta}\right) \overrightarrow{y_2} \cdot \overrightarrow{x_1} = -b\left(\dot{\beta} - \dot{\delta}\right)\sin(\beta - \delta)$.
  On en déduit : $\mathcal{P}\left(1 \overset{\text{Vérin}}{\longleftrightarrow} 3\right) = -F\ b\left(\dot{\beta} - \dot{\delta}\right)\sin(\beta - \delta)$.

Question 4 *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à Σ pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre F, δ, et β.*

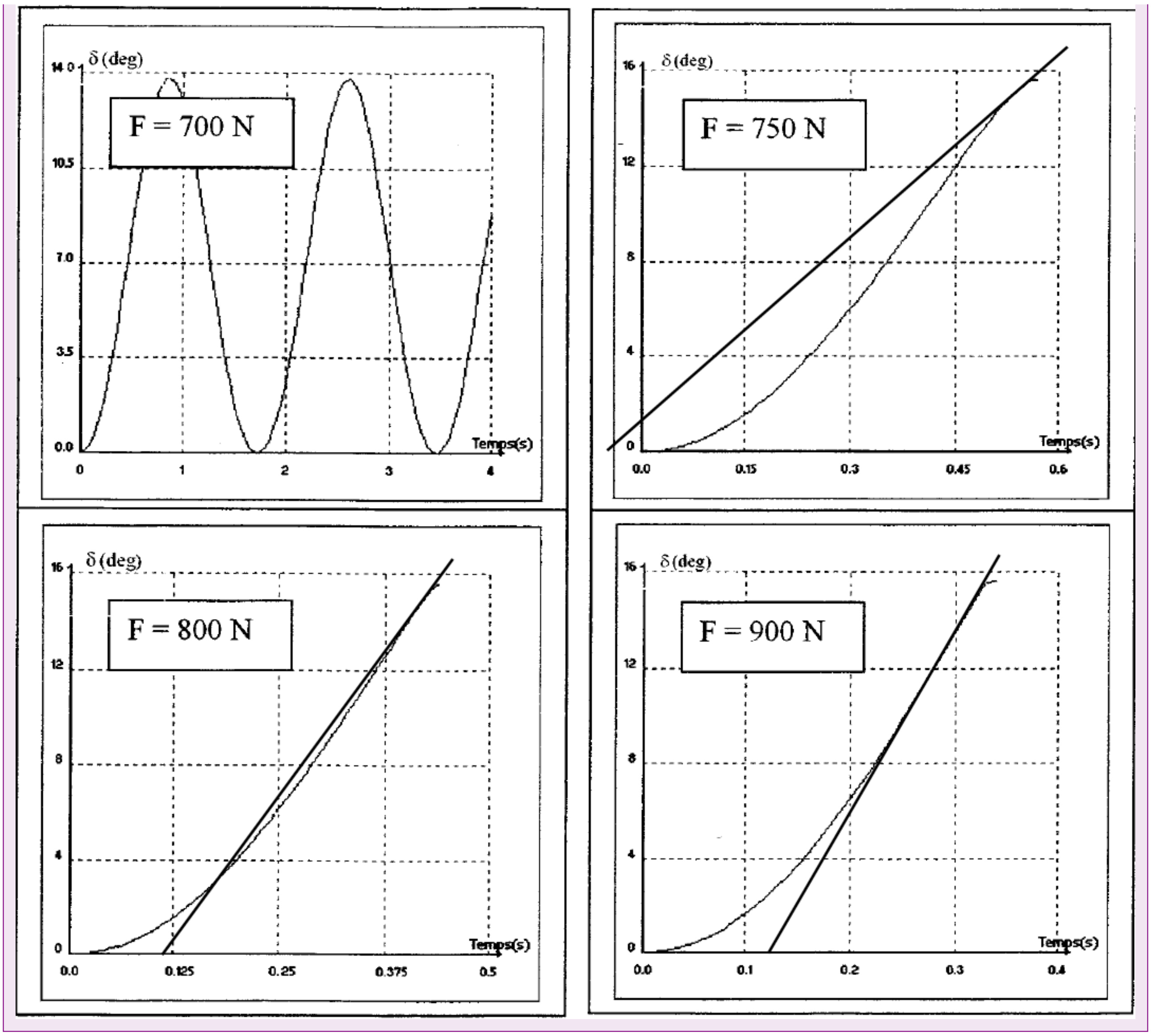
Correction On applique alors le théorème de l'énergie cinétique à Σ par rapport au référentiel galiléen R_0 :
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_c(\Sigma/R_0)\right) = \mathcal{P}(\text{ext} \to \Sigma/0) + \mathcal{P}_{\text{int}}(\Sigma)$.
Or, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_c(\Sigma/R_0)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\, m_1\, \dot{\delta}^2\left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\, L_1 \sin\delta\right)\right] = m_1\, \dot{\delta}\left[\ddot{\delta}\left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\, L_1 \sin\delta\right) + \frac{1}{2}\dot{\delta}^2\, R\, L_1 \cos\delta\right]$.
Ainsi on obtient, l'équation :

$$\boxed{m_1\, \dot{\delta}\left[\ddot{\delta}\left(R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R\, L_1 \sin\delta\right) + \frac{1}{2}\dot{\delta}^2\, R\, L_1 \cos\delta\right] = -F\ b\left(\dot{\beta} - \dot{\delta}\right)\sin(\beta - \delta) - m_1\, g\, \frac{L_1}{2}\dot{\delta}\, \cos\delta.}$$

Des simulations pour différentes valeurs de F donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de δ en fonction du temps.

Question 5 *Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses $\dot{\delta}$ en fin de course. En déduire les valeurs de F respectant le cahier des charges.*

Correction
- $F = 700\,\text{N}$: le régime est fortement oscillant. Le système ne parvient pas à soulever le robot jusqu'à 14°. Celui-ci se comporte comme un oscillateur non amorti (le modèle est considéré sans frottement). Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.
- $F = 750\,\text{N}$: le système atteint les 14°. La pente à l'accostage vaut environ $37.5°/s$ ce qui est raisonnable vis-à-vis du cahier des charges. Cependant, le modèle utilisé pour trouver ce résultat utilise des liaisons parfaites, sans frottement. L'effort de 700 N étant insuffisant avec ce modèle parfait, il est possible qu'un effort de 750 N devienne insuffisant en réalité.
  Cette valeur est théoriquement satisfaisante mais l'écart entre modèle et réalité risque de modifier la conclusion.
- $F = 800\,\text{N}$: Le système atteint les 14° La pente à l'accostage vaut environ $45°/s$ ce qui est inférieur à la limite de $50°/s$ imposée par le cahier des charges. L'effort est 15% supérieur à la valeur minimale nécessaire pour atteindre les 14° ce qui semble une marge suffisante pour vaincre les frottements non pris en compte dans le modèle.
  Cette valeur est satisfaisante.
- $F = 950\,\text{N}$: Le système atteint les 14°. La pente à l'accostage vaut environ $75°/s$ ce qui est supérieur à la limite de $50°/s$ imposée par le cahier des charges.
  Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.


δ (deg)
F = 700 N
14.0
10.5
7.0
3.5
0.0
0
1
2
3
4
Temps(s)
δ (deg)
F = 750 N
16
12
8
4
0
0.0
0.15
0.3
0.45
0.6
Temps(s)
δ (deg)
F = 800 N
16
12
8
4
0
0.0
0.125
0.25
0.375
0.5
Temps(s)
δ (deg)
F = 900 N
16
12
8
4
0
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
Temps(s)

Cycle 06