

## Application 4



### Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric)

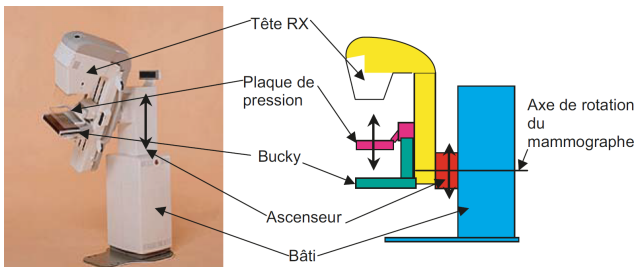
Centrale MP 2004

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;

### Mise en situation

Le mammographe est utilisé pour rechercher la présence d'une tumeur dans un sein. Il est constitué des éléments génériques suivants.



Un ascenseur en liaison glissière de direction verticale par rapport à la partie fixe du mammographe (bâti). Cette mobilité permet d'adapter le mammographe à la taille de la patiente. L'ascenseur supporte les éléments suivants : la « tête RX » qui permet d'émettre les rayons X et un collimateur qui permet de contrôler le faisceau afin d'optimiser le cliché. Le réglage angulaire de la tête RX est réalisé par un pivotement autour de l'axe de rotation du mammographe. La tête RX est donc en liaison pivot par rapport à l'ascenseur.

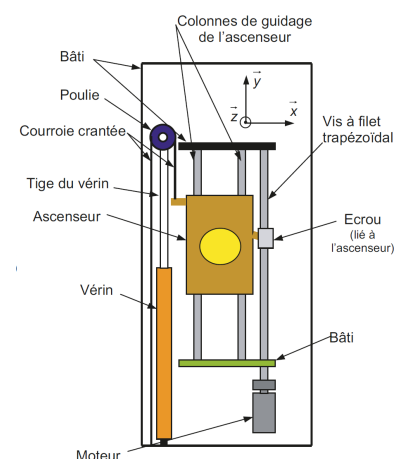
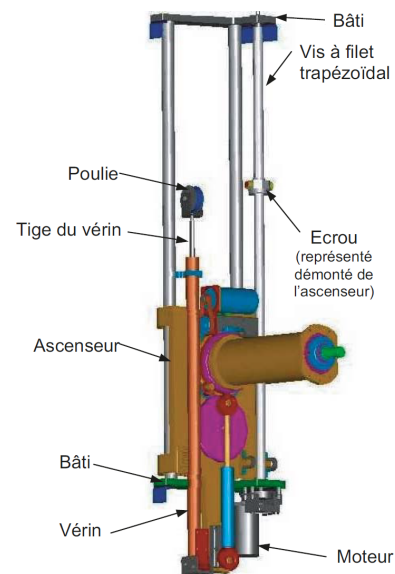
Le « bucky » sert de surface d'appui au sein et de support au film ou au capteur d'images. Le réglage angulaire du bucky est réalisé par un pivotement autour de l'axe de rotation du mammographe. Le bucky est en liaison pivot par rapport à l'ascenseur.

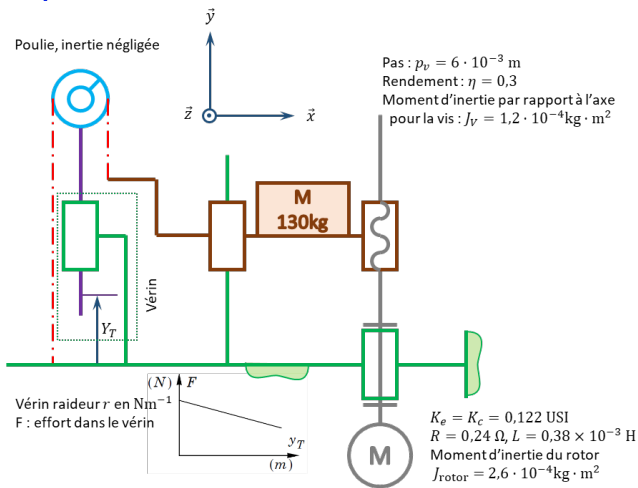
La « plaque de pression » permet de comprimer le sein et de le maintenir en position afin d'avoir une meilleure qualité de l'image. Elle fait l'objet d'une liaison glissière par rapport au bucky. À noter que les réglages angulaires des deux liaisons pivots sont indépendants. On peut, par exemple, faire tourner la tête sans faire tourner le bucky.

**Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »**

Le mammographe doit être adapté à la taille de la patiente en faisant monter ou descendre l'ascenseur. La liaison glissière de l'ascenseur par rapport à la partie fixe du mammographe est réalisée par un guidage sur deux

barres parallèles fixées sur le bâti. Le déplacement de l'ascenseur est obtenu à partir d'un moteur électrique qui entraîne en rotation une vis. La rotation de la vis entraîne ensuite l'écrou sur lequel est fixé l'ascenseur. Un vérin à gaz permet d'assister le moteur lors de la montée de l'ascenseur par l'intermédiaire d'une poulie montée à l'extrémité de la tige du vérin à gaz et d'une courroie crantée. Une des extrémités de la courroie est fixée sur le bâti du mammographe et l'autre extrémité est liée à l'ascenseur.





## Détermination de la motorisation

**Objectif** L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

Faire monter ou descendre l'ascenseur	
Critères	Niveaux
Ne pas stresser la patiente en déplaçant trop rapidement l'ascenseur : limiter la vitesse de déplacement rapide	$V_R = 0,15 \text{ m s}^{-1}$
Ne pas blesser la patiente lors de l'approche du bucky : respecter une vitesse lente $V_L$ lors de l'accostage	$V_L = 0,02 \text{ m s}^{-1}$
Respecter une course de réglage de la position de l'ascenseur	course = 0,8 m $\delta_{\text{course}} = \pm 10^{-3} \text{ m}$
Atteindre rapidement la vitesse de déplacement rapide $V_R$ : respecter la durée $t_a$ de la phase d'accélération constante	$t_a = 0,4 \text{ s (mini)}$

**Question 1** Déterminer la fréquence de rotation du moteur  $\omega$  en fonction de la vitesse de déplacement  $V$  de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\text{max}}$  que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

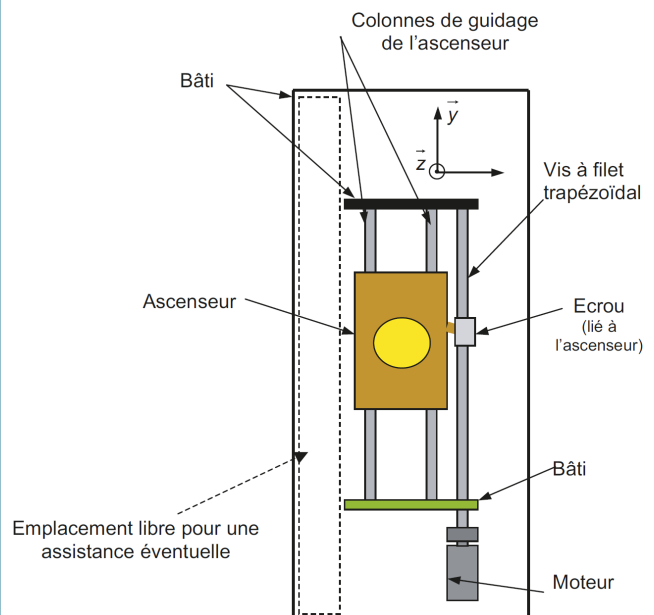
Pour déterminer les performances minimales du moteur, on étudie la phase de montée de l'ascenseur définie par :

- départ en position basse ( $y = 0$  à l'instant  $t = 0$ ) ;
- mise en mouvement ascendant de l'ascenseur à accélération constante  $a$  pour atteindre la vitesse  $V_R$  rapide en respectant les contraintes du cahier des charges ;
- arrêt de l'ascenseur à la position  $y = 0,8 \text{ m}$  (la phase de décélération est telle que la décélération est constante et sa durée égale à  $t_a$ ).

**Question 2** Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement  $y$  de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

## Solution sans assistance

On souhaite déterminer le couple moteur. Pour cela on propose d'appliquer le théorème de l'énergie-puissance au système isolé  $\Sigma$  (rotor du moteur + vis + ascenseur) en mouvement par rapport au bâti supposé galiléen.



On notera :

- $\vec{g} = -g \vec{y}$  l'accélération de la pesanteur. On prendra  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  ;
- $C$  le couple exercé par le stator sur le rotor du moteur.

**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ , du système isolé. Mettre  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$  sous la forme :  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$ . Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M_e$  et faire l'application numérique.

**Question 4** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Question 5** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire  $P_0$  de ce moteur.

**Question 6** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

## Cas d'une motorisation assistée par un contre-poids

Le dispositif d'assistance a pour rôle de diminuer le couple moteur en compensant le poids de l'ascenseur. L'emplacement disponible, pour ce dispositif, est celui occupé par le vérin à gaz, voir figures précédentes.

Dans cette solution un contre-poids est choisi pour compenser exactement le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti et d'inertie négligeable. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre au contre-poids.

**Question 7** Faire un schéma de principe de ce dispositif.

**Question 8** Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M'_e$  et faire l'application numérique.

**Question 9** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Question 10** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{Max}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur.

**Question 11** En déduire la puissance nécessaire  $P$  du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

**Question 12** Le contre-poids sera réalisé dans un alliage de masse volumique  $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section  $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$  et de hauteur 1,4 m. Cette solution est-elle envisageable?

## Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

**Question 13** Faire un schéma de principe du dispositif.

**Question 14** L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum  $F_{c \text{ maxi}}$  qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement  $y$  de l'ascenseur.

L'emplacement disponible ne permet pas de placer un ressort de diamètre nominal  $D$  supérieur à 0,1 m. Le ressort de traction sera réalisé dans un acier allié de résistance élastique au glissement  $R_{eg} = 560 \text{ MPa}$  et de module de Coulomb  $G = 82000 \text{ MPa}$ . On prendra un coefficient de sécurité  $s = 2$ . Pour que le ressort résiste

à l'effort maximal  $F_{c \text{ maxi}}$ , il doit avoir un diamètre  $d \geq \sqrt[3]{\frac{8F_{c \text{ maxi}}Ds}{\pi R_{eg}}}$ , c'est-à-dire  $d \geq 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{F_{c \text{ maxi}}}$ .

Pour obtenir un ressort de raideur  $r$  il faut un nombre de spires  $n = \frac{Gd^4}{8D^3r}$ , c'est-à-dire  $n \simeq 10^{13} \frac{d^4}{r}$ .

**Question 15** La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible?

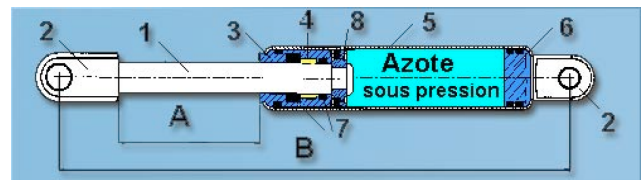
## Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

Le schéma de principe de ce dispositif a été donné précédemment. Le corps du vérin est lié au bâti. Une poulie crantée est en liaison pivot avec l'extrémité de la tige du vérin. Une courroie crantée s'enroule (un demi-tour) sur la poulie et est liée au bâti à une de ses extrémités. L'autre extrémité de la courroie est liée à l'ascenseur.

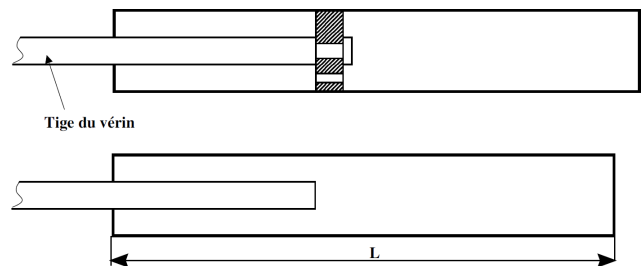
**Question 16** Déterminer la relation existant entre le déplacement  $y$  de l'ascenseur et le déplacement  $y_T$  de la tige du vérin. En déduire la course  $\Delta y_T$  nécessaire de la tige du vérin à gaz.

**Question 17** Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté  $F_c$ . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existant entre l'effort  $F$  développé par le vérin et l'effort de compensation  $F_c$ . En déduire l'effort minimum  $F_{\text{mini}}$  développé par le vérin.

Le vérin à gaz est présenté sur le dessin ci-dessous.



**Question 18** Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.



**Question 19** Compte tenu des efforts on prédimensionne la tige du vérin à un diamètre  $d = 15 \times 10^{-3} \text{ m}$ . On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée  $p_2$ .

Dans la gamme de vérin à gaz on choisit le vérin de diamètre le plus grand  $D = 57 \times 10^{-3}$  m. L'espace disponible permet de placer un vérin dont la chambre a une longueur maximale  $L = 1$  m. Soient  $p_1$ ,  $F_1$ ,  $V_1$  la pression, l'effort de poussée du vérin et le volume de gaz dans le vérin pour la position ascenseur en bas et  $p_2$ ,  $F_{\text{mini}}$ ,  $V_2$  pour la position ascenseur en haut. Pour cette position, la tige du vérin est complètement sortie.

**Question 20** Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de  $F_1$ ,  $F_{\text{mini}}$  et  $\Delta y_T$ . Exprimer  $F_{\text{mini}}$  en fonction de  $p_2$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer  $F_1$  en fonction de  $p_1$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur  $r$  de ce vérin à gaz en fonction de  $F_{\text{mini}}$ ,  $d$ ,  $D$ ,  $L$  et  $\Delta y_T$ .

**Question 21** On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur  $L$  et calculer la raideur  $r$ .

On prendra  $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$  pour la suite du problème.

**Question 22** Déterminer l'effort maximal  $F_{\text{Maxi}}$  développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de  $F$ .

**Question 23** Déterminer la relation  $F = F(y_T)$ .

On considérera dans cette question que l'effort de

compensation  $F_c$  est constant.

**Question 24** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $a$ ,  $M_e$ ,  $F_c$ ,  $M$ ...

**Question 25** Exprimer ensuite  $a$  en fonction de  $C$ ,  $M_e$ ,  $F_c$ ,  $M$ ...

**Question 26** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur (prendre  $F_c = 1300 \text{ N}$ ).

**Question 27** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

### Synthèse

**Question 28** On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante?

Application 4 –  
Corrigé

## Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric)

Centrale MP 2004

Savoirs et compétences :

- ☐ Mod2.C34 : chaînes de solides;
- ☐ Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- ☐ Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;

## Mise en situation

**Analyse de la fonction de service :** « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »

## Détermination de la motorisation

**Objectif** L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

**Question 1** Déterminer la fréquence de rotation du moteur  $\omega$  en fonction de la vitesse de déplacement  $V$  de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\max i}$  que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

## Correction

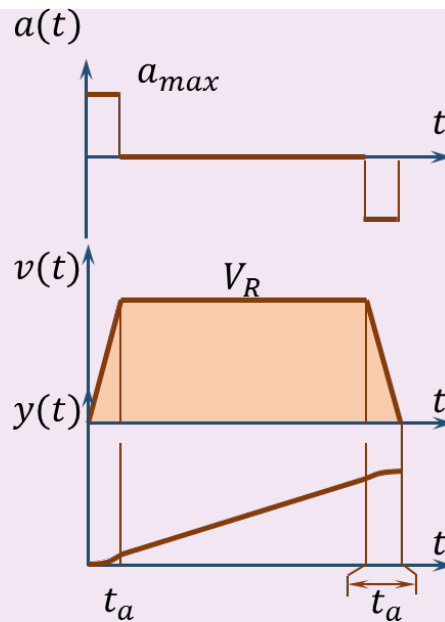
On a  $V = \omega \frac{p_v}{2\pi}$  et donc  $\omega_{\max i} = V_R \frac{2\pi}{p_v}$ .

Application numérique :  $\omega_{\max i} = 0,15 \frac{2\pi}{6 \cdot 10^{-3}} = 157 \text{ rad s}^{-1} = 1500 \text{ tr min}^{-1}$ .

**Question 2** Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement  $y$  de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

## Correction





L'accélération  $a_{\max}$  est donnée par  $a_{\max} = \frac{V_R}{t_a} = \frac{0,15}{0,4} = 0,375 \text{ ms}^{-2}$ .

Les distances parcourues correspondent à l'aire sous la courbe du profil de vitesse. La distance d'accélération et de décélération sont données par  $d_a = \frac{1}{2} V_R t_a = \frac{1}{2} 0,15 \times 0,4 = 0,03 \text{ m}$ .

En conséquence, la distance à parcourir à vitesse constante est  $d_c = 0,8 - 2 \times 0,03 = 0,74 \text{ m}$ . Le temps pour parcourir cette distance est  $t_c = \frac{d_c}{V_R} = \frac{0,74}{0,15} = 4,93 \text{ s}$ .

### Solution sans assistance

**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ , du système isolé. Mettre  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$  sous la forme :  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$ . Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M_e$  et faire l'application numérique.

#### Correction

Calcul de l'énergie cinétique :  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} (J_R + J_V) \left( V \frac{2\pi}{p_v} \right)^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} \left( (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + M \right) V^2$ .

On a donc  $M_e = (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + M = (2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}) \frac{4\pi^2}{(6 \times 10^{-3})^2} + 130 = (2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}) \frac{4\pi^2}{(6 \times 10^{-3})^2} + 130 = 547 \text{ kg}$ .

**Question 4** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

#### Correction

- On isole  $\Sigma$ .
- Bilan des puissances intérieures : liaisons parfaites  $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$ .
- Bilan des puissances extérieures :
  - $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow \text{Asc.}/0) = -MgV$  ;
  - $\mathcal{P}(\text{mot} \rightarrow \text{Asc.}/0) = C\omega$ .
- Calcul de l'énergie cinétique :  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$

On applique le théorème de l'énergie cinétique :  $M_e V \dot{V} = C \frac{V 2\pi}{p_v} - MgV$  et donc  $M_e \dot{V} = C \frac{2\pi}{p_v} - Mg$ . Au final,  $C = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg)$ .

**Question 5** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire  $P_0$  de ce moteur.

**Correction**

Le couple maximal est nécessaire en phase d'accélération.

$$C_{\text{Max}} = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + Mg)$$

$$= \frac{6 \times 10^{-3}}{2\pi} (547 \times 0,15 + 130 \times 9,81) = 1,4 \text{ Nm.}$$

La puissance nécessaire est alors  $P_0 = C_{\text{Max}} \cdot \omega_{\text{maxi}} = 1,4 \times 157 = 222 \text{ W.}$

**Question 6** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

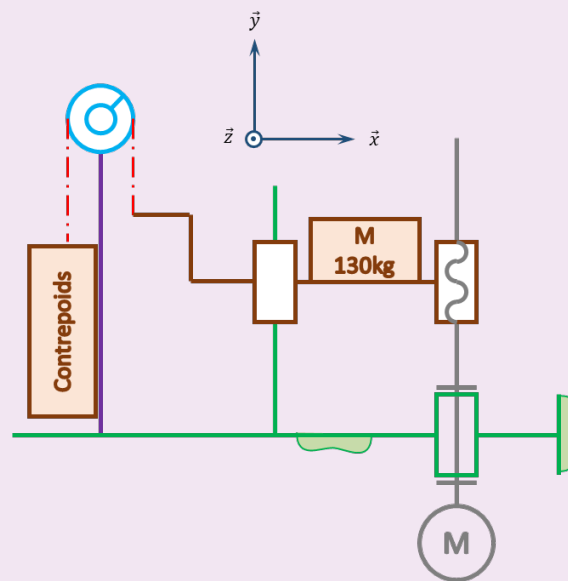
**Correction**

**Le rendement n'a vraiment de sens qu'en régime permanent.** Ici, le rendement va nous permettre de majorer la puissance motrice nécessaire. On a  $P = \frac{222}{0,3} = 740 \text{ W.}$

**Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids**

**Question 7** Faire un schéma de principe de ce dispositif.

**Correction**



**Question 8** Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M'_e$  et faire l'application numérique.

**Correction**

En prenant un contrepoids de même masse que l'ascenseur et en négligeant l'inertie de la poulie, le contrepoids se déplaçant à la même vitesse que l'ascenseur (mais dans un sens opposé), on a  $M'_e = (J_R + J_V) \frac{4\pi^2}{p_v^2} + 2M$ , soit  $M'_e = 677 \text{ kg}$

**Question 9** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Correction**

Par rapport au TEC effectué précédemment, il faut ajouter la puissance des actions de pesanteurs sur le contrepoids. Cette puissance est opposée à la puissance des actions de pesanteur sur l'ascenseur.  $C = \frac{p_v}{2\pi} M'_e \dot{V}$ .

**Question 10** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{Max}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur.

**Correction**

$C_{Max} = 0,24 \text{ Nm}$ ,  $P_0 = 38 \text{ W}$ .

**Question 11** En déduire la puissance nécessaire  $P$  du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

**Correction**

Avec les mêmes précautions que précédemment,  $P = 127 \text{ W}$ .

**Question 12** Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique  $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section  $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$  et de hauteur  $1,4 \text{ m}$ . Cette solution est-elle envisageable ?

**Correction**

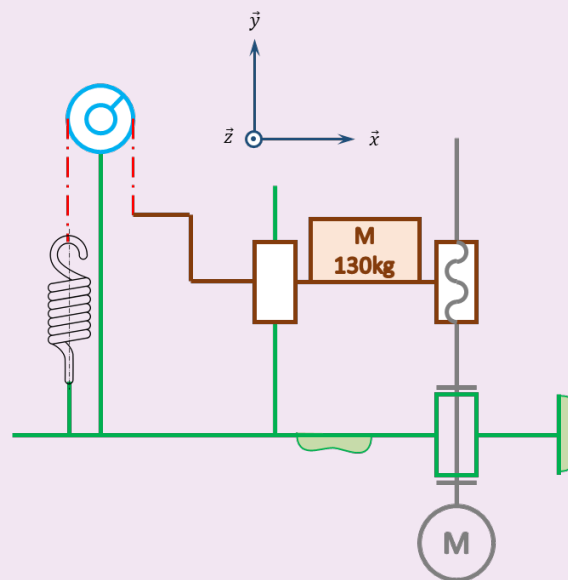
Au vu de la section disponible, la hauteur du contrepoids sera de  $\frac{130}{0,1 \times 0,2 \times 9 \times 10^3} = 0,72 \text{ m}$ . Le contrepoids doit pouvoir se déplacer de  $0,8 \text{ m}$  soit un encombrement total de  $1,52 \text{ m}$  supérieur à  $1,4 \text{ m}$  disponible.

### Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

**Question 13** Faire un schéma de principe du dispositif.

**Correction**



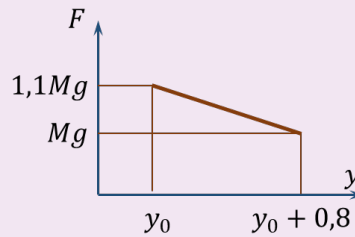
**Question 14** L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum  $F_{c \text{ maxi}}$  qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement  $y$  de l'ascenseur.

**Correction**

La course maximale est de  $0,8 \text{ m}$ . La charge à compenser correspond au poids de l'ascenseur soit  $Mg$ . Lorsque l'ascenseur sera en bas,  $y$  sera minimal et le ressort sera tendu. L'effort sera donc maximal, soit  $1,1Mg$ . Lorsque l'ascenseur sera en haut,  $y$  sera maximal et le ressort sera « au repos ». L'effort doit compenser le poids. La raideur



doit être de la forme  $k = \frac{1,1Mg - Mg}{0,8} = \frac{0,1 \times 130 \times 9,81}{0,8} \simeq 159,4 \text{ N m}^{-1}$ .



**Question 15** La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible?

**Correction**

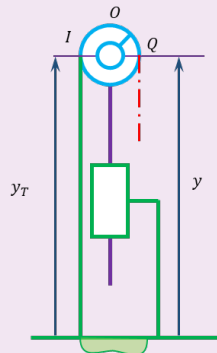
Dans les conditions proposées ci-dessus, on a  $d = 9,7 \times 10^{-4} \sqrt{1,1 \times Mg} = 0,011 \text{ m}$ . Le nombre de spires serait alors  $n = 872$ . Si les spires sont jointives, on a une longueur de ressort minimale de  $dn = 9,47 \text{ m}$  ce qui dépasse très largement les dimensions de la machine.

**Assistance à l'aide d'un vérin à gaz**

**Question 16** Déterminer la relation existant entre le déplacement  $y$  de l'ascenseur et le déplacement  $y_T$  de la tige du vérin. En déduire la course  $\Delta y_T$  nécessaire de la tige du vérin à gaz.

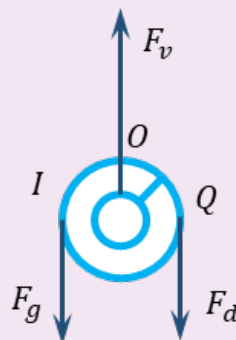
**Correction**

En utilisant le roulement sans glissement de la poulie par rapport à la courroie en  $I$  on montre que  $y_T = \frac{1}{2} y$ .



**Question 17** Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté  $F_c$ . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existant entre l'effort  $F$  développé par le vérin et l'effort de compensation  $F_c$ . En déduire l'effort minimum  $F_{\min}$  développé par le vérin.

**Correction**



Si on néglige la masse de la poulie, on peut appliquer le PFS (à la place du PFD).

- On isole la poulie de rayon  $R$ .
- La poulie est soumise au brin de gauche, au brin de droite et à l'effort du vérin.
- TMS en O, centre de la pivot :  $F_g R - R F_d = 0$  soit  $F_g = F_d$ .
- TRS :  $2F_d + F_v = 0$ .

En reprenant les notations de la question, on a  $2F_c = F$ . Comme au minimum,  $F_c = Mg$ , on a donc  $F_{\text{mini}} = 2Mg = 2550,6\text{N}$ .

**Question 18** Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.

**Correction**

Soit  $D$  le diamètre du vérin et  $d$  le diamètre de la tige.

Dans le premier cas, on a, dans la chambre droite,  $F_d = +p\pi \frac{D^2 - d^2}{4}$  et  $F_g = -p\pi \frac{D^2}{4}$ . La résultante des forces est donc  $F_g + F_d = -p\pi \frac{d^2}{4}$ .

Dans le second cas, l'effort est  $-p\pi \frac{d^2}{4}$ . Les deux modèles sont donc équivalents.

**Question 19** Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre  $d = 15 \times 10^{-3}\text{m}$ . On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée  $p_2$ .

**Correction**

On a  $p_2 = \frac{F_{\text{mini}}}{\pi \frac{d^2}{4}} = 14433443\text{Pa}$  soient 144 bars.

**Question 20** Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de  $F_1$ ,  $F_{\text{mini}}$  et  $\Delta y_T$ . Exprimer  $F_{\text{mini}}$  en fonction de  $p_2$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer  $F_1$  en fonction de  $p_1$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur  $r$  de ce vérin à gaz en fonction de  $F_{\text{mini}}$ ,  $d$ ,  $D$ ,  $L$  et  $\Delta y_T$ .

**Correction**

$$r = \frac{F_1 - F_{\text{mini}}}{\Delta y_T}.$$

$$F_{\text{mini}} = p_2 \frac{\pi d^2}{4}, F_1 = p_1 \frac{\pi d^2}{4}.$$

$$\text{On a } p_1 V_1 = p_2 V_2 \Leftrightarrow F_{\text{mini}} V_1 = F_1 V_2 \Leftrightarrow F_{\text{mini}} \frac{V_1}{V_2} = F_1. \text{ D'où } r = \frac{F_{\text{mini}} \frac{V_1}{V_2} - F_{\text{mini}}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}} \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\Delta y_T}.$$

$$\text{Par ailleurs, } V_1 - V_2 = \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}; \text{ donc } V_2 = L \frac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}.$$

$$\text{On a donc } r = F_{\text{mini}} \frac{\frac{V_1 - V_2}{V_2}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}} \frac{L \frac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T \frac{\pi d^2}{4}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}} \frac{\Delta y_T d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2} = F_{\text{mini}} \frac{d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}$$

**Question 21** On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur  $L$  et calculer la raideur  $r$ .

**Correction**

Pour avoir la raideur la plus faible, il faut la longueur la plus grande soit 1 m.  $r = F_{\text{mini}} \frac{d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}$

On prendra  $r = 180\text{Nm}^{-1}$  pour la suite du problème.

**Question 22** Déterminer l'effort maximal  $F_{\text{Maxi}}$  développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de  $F$ .

**Correction**

$$F_{\text{Maxi}} = F_{\text{Mini}} + r \Delta y_T = 2550 + 180,4 = 2622 \text{ N.}$$

La variation d'effort est de  $\frac{72}{2550} \simeq 3\%$ .

**Question 23** Déterminer la relation  $F = F(y_T)$ .

**Correction**

$$F = 2622 - r y_T.$$

On considérera dans cette question que l'effort de compensation  $F_c$  est constant.

**Question 24** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $a$ ,  $M_e$ ,  $F_c$ ,  $M$ ...

**Correction**

En reprenant l'expression précédente et en ajoutant l'effort de la courroie  $F_c$  (de sens opposé au poids), on a  $C = \frac{p_v}{2\pi} (M_e \dot{V} + M g - F_c)$ .

**Question 25** Exprimer ensuite  $a$  en fonction de  $C$ ,  $M_e$ ,  $F_c$ ,  $M$  ...

**Correction**

$$\text{On a } a = \dot{V} \text{ et } a = \frac{1}{M_e} \left( \frac{2\pi C}{p_v} + F_c - M g \right).$$

**Question 26** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur (prendre  $F_c = 1300 \text{ N}$ ).

**Correction**

On reprend l'expression de  $C$  et on a  $C = 0,22 \text{ Nm}$ .  $P_0 = 34,4 \text{ W}$

**Question 27** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

**Correction**

$$P = 115 \text{ W} < z$$

## Synthèse

**Question 28** On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges ? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante ?

**Correction**