Application 4 – Corrigé

Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric)

Centrale MP 2004

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C34 : chaînes de solides;*
- *Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;*
- *Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;*

Mise en situation

Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »

Détermination de la motorisation

Objectif L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

Question 1 *Déterminer la fréquence de rotation du moteur ω en fonction de la vitesse de déplacement V de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum ω_{maxi} que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.*

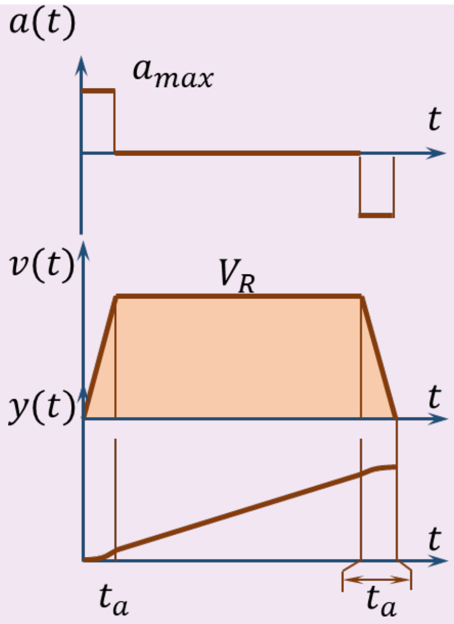
Correction

On a $V = \omega \dfrac{p_v}{2\pi}$ et donc $\omega_{\text{maxi}} = V_R \dfrac{2\pi}{p_v}$.

Application numérique : $\omega_{\text{maxi}} = 0,15 \dfrac{2\pi}{6\cdot 10^{-3}} = 157\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} = 1500\,\text{tr}\,\text{min}^{-1}$.

Question 2 *Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement y de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.*

Correction



L'accélération $a_{\max}$ est donnée par $a_{\max} = \dfrac{V_R}{t_a} = \dfrac{0,15}{0,4} = 0{,}375\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Les distances parcourues correspondent à l'aire sous la courbe du profil de vitesse. La distance d'accélération et de décélération sont données par $d_a = \dfrac{1}{2} V_R t_a = \dfrac{1}{2} 0,15 \times 0,4 = 0{,}03\,\mathrm{m}$.

En conséquence, la distance à parcourir à vitesse constante est $d_c = 0,8 - 2 \times 0,03 = 0{,}74\,\mathrm{m}$. Le temps pour parcourir cette distance est $t_c = \dfrac{d_c}{V_R} = \dfrac{0,74}{0,15} = 4{,}13\,\mathrm{s}$.

Solution sans assistance

Question 3 *Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée $\mathscr{E}_c(\Sigma/0)$, du système isolé. Mettre $\mathscr{E}_c(\Sigma/0)$ sous la forme : $\mathscr{E}_c(\Sigma/0) = \dfrac{1}{2} M_e V^2$. Donner l'expression littérale de la masse équivalente M_e et faire l'application numérique.*

Correction

Calcul de l'énergie cinétique : $\mathscr{E}_c(\Sigma/0) = \dfrac{1}{2}(J_R + J_V)\left(V \dfrac{2\pi}{p_v}\right)^2 + \dfrac{1}{2} M V^2 = \dfrac{1}{2}\left((J_R + J_V)\dfrac{4\pi^2}{p_v^2} + M\right) V^2$.

On a donc $M_e = (J_R + J_V)\dfrac{4\pi^2}{p_v^2} + M = \left(2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}\right)\dfrac{4\pi^2}{(6 \times 10^{-3})^2} + 130 = \left(2,6 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-4}\right)\dfrac{4\pi^2}{(6 \times 10^{-3})^2} + 150 = 547\,\mathrm{kg}$.

Question 4 *En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C.*

Correction

- On isole Σ.
- Bilan des puissances intérieures : liaisons parfaites $\mathscr{P}_{\text{int}} = 0$.
- Bilan des puissances extérieures :
  - $\mathscr{P}(\text{pes} \rightarrow \text{Asc.}/0) = -M g V$;
  - $\mathscr{P}(\text{mot} \rightarrow \text{Asc.}/0) = C\omega$.
- Calcul de l'énergie cinétique : $\mathscr{E}_c(\Sigma/0) = \dfrac{1}{2} M_e V^2$

On applique le théorème de l'énergie cinétique : $M_e V \dot{V} = C \dfrac{V 2\pi}{p_v} - M g V$ et donc $M_e \dot{V} = C \dfrac{2\pi}{p_v} - M g$. Au final, $C = \dfrac{p_v}{2\pi}\left(M_e \dot{V} + M g\right)$.

Question 5 *En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire P_0 de ce moteur.*

Correction
Le couple maximal est nécessaire en phase d'accélération.
$C_{\text{Max}} = \dfrac{p_v}{2\pi}\left(M_e \dot{V} + M g\right)$
$= \dfrac{6\times 10^{-3}}{2\pi}(547\times 0,15 + 130\times 9,81) = 1,4\,\text{Nm}$.
La puissance nécessaire est alors $P_0 = C_{\text{Max}}\cdot \omega_{\text{maxi}} = 1,4\times 157 = 222\,\text{W}$.

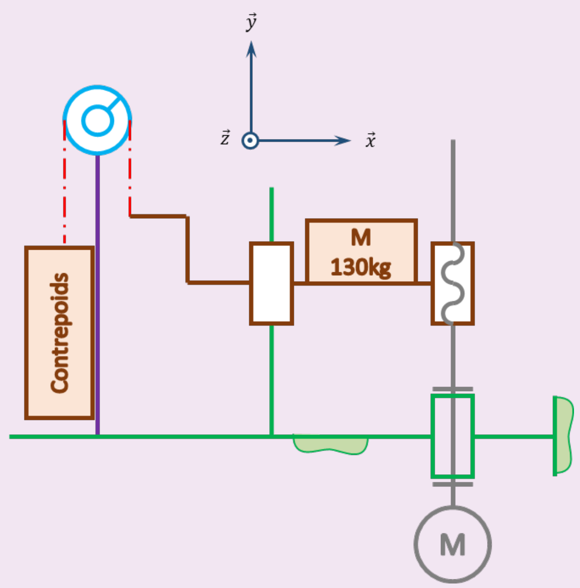
Question 6 *En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.*

Correction
Le rendement n'a vraiment de sens qu'en régime permanent. Ici, le rendement va nous permettre de majorer la puissance motrice nécessaire. On a $P = \dfrac{222}{0,3} = 740\,\text{W}$.

Cas d'une motorisation assistée par un contrepoids

Question 7 *Faire un schéma de principe de ce dispositif.*

Correction



Question 8 *Donner l'expression littérale de la masse équivalente M'_e et faire l'application numérique.*

Correction
En prenant un contrepoids de même masse que l'ascenseur et en négligeant l'inertie de la poulie, le contrepoids se déplaçant à la même vitesse que l'ascenseur (mais dans un sens opposé), on a $M'_e = (J_R + J_V)\dfrac{4\pi^2}{p_v^2} + 2M$, soit $M'_e = 677\,\text{kg}$

Question 9 *En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de V et/ou de ses dérivées, ω et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de C.*

Correction
Par rapport au TEC effectué précédemment, il faut ajouter la puissance des actions de pesanteurs sur le contrepoids. Cette puissance est opposée à la puissance des actions de pesanteur sur l'ascenseur. $C = \dfrac{p_v}{2\pi} M'_e \dot{V}$.

Question 10 *En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur.*

Correction
$C_{\text{Max}} = 0{,}24\,\text{N m}$, $P_0 = 38\,\text{W}$.

Question 11 *En déduire la puissance nécessaire P du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.*

Correction
Avec les mêmes précautions que précédemment, $P = 127\,\text{W}$.

Question 12 *Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique $9\times 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^3$. L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section $0,2\times 0,1\,\text{m}^2$ et de hauteur $1{,}4\,\text{m}$. Cette solution est-elle envisageable ?*

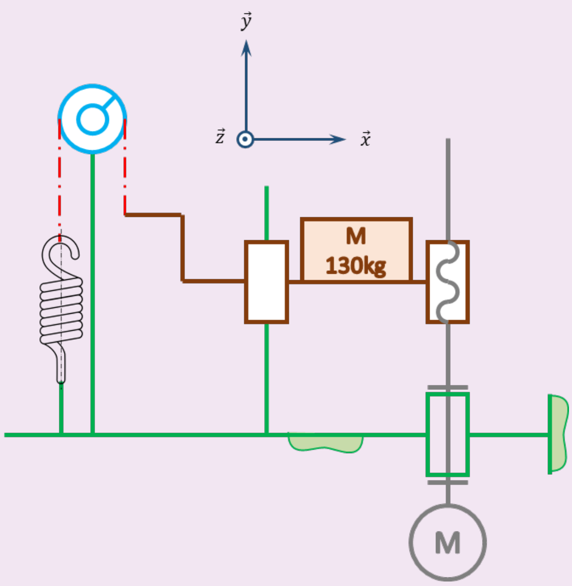
Correction
Au vu de la section disponible, la hauteur du contrepoids sera de $\dfrac{130}{0,1\times 0,2\times 9\times 10^3} = 0{,}72\,\text{m}$. Le contrepoids doit pouvoir se déplacer de $0{,}8\,\text{m}$ soit un encombrement total de $1{,}52\,\text{m}$ supérieur à $1{,}4\,\text{m}$ disponible.

Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

Question 13 *Faire un schéma de principe du dispositif.*

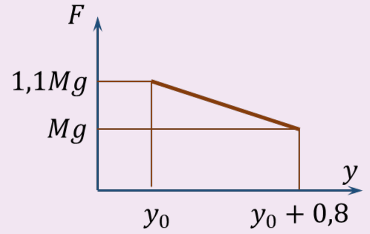
Correction



Question 14 *L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum $F_{c\,maxi}$ qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement y de l'ascenseur.*

Correction
La course maximale est de $0{,}8\,\text{m}$. La charge à compenser correspond au poids de l'ascenseur soit Mg. Lorsque l'ascenseur sera en bas, y sera minimal et le ressort sera tendu. L'effort sera donc maximal, soit $1,1Mg$. Lorsque l'ascenseur sera en haut, y sera maximal et le ressort sera « au repos ». L'effort doit compenser le poids. La raideur

doit être de la forme $k = \dfrac{1,1Mg - Mg}{0,8} = \dfrac{0,1 \times 130 \times 9,81}{0,8} \simeq 159,4\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.



Question 15 *La longueur du ressort est-elle compatible avec l'emplacement disponible ?*

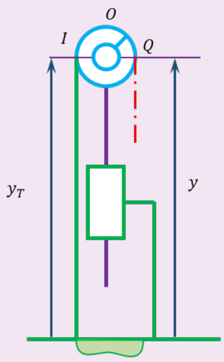
Correction
Dans les conditions proposées ci-dessus, on a $d = 9,7 \times 10^{-4}\sqrt[3]{1,1 \times Mg} = 0,011\,\mathrm{m}$. Le nombre de spires serait alors $n = 872$. Si les spires sont jointives, on a une longueur de ressort minimale de $d\,n = 9,47\,\mathrm{m}$ ce qui dépasse très largement les dimensions de la machine.

Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

Question 16 *Déterminer la relation existant entre le déplacement y de l'ascenseur et le déplacement y_T de la tige du vérin. En déduire la course Δy_T nécessaire de la tige du vérin à gaz.*

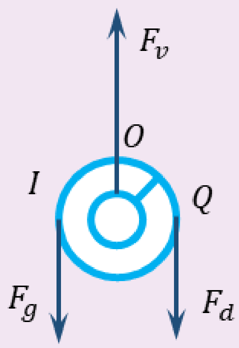
Correction

En utilisant le roulement sans glissement de la poulie par rapport à la courroie en I on montre que $y_T = \dfrac{1}{2}y$.



Question 17 *Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté F_c. C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existant entre l'effort F développé par le vérin et l'effort de compensation F_c. En déduire l'effort minimum F_{mini} développé par le vérin.*

Correction



Si on néglige la masse de la poulie, on peut appliquer le PFS (à la place du PFD).

- On isole la poulie de rayon R.
- La poulie est soumise au brin de gauche, au brin de droite et à l'effort du vérin.
- TMS en O, centre de la pivot : $F_g R - R F_d = 0$ soit $F_g = F_d$.
- TRS : $2F_d + F_v = 0$.

En reprenant les notations de la question, on a $2F_c = F$. Comme au minimum, $F_c = Mg$, on a donc $F_{\text{mini}} = 2Mg = 2550{,}6\,\text{N}$.

Question 18 *Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.*

Correction

Soit D le diamètre du vérin et d le diamètre de la tige.

Dans le premier cas, on a, dans la chambre droite, $F_d = +p\pi\dfrac{D^2-d^2}{4}$ et $F_g = -p\pi\dfrac{D^2}{4}$. La résultante des forces est donc $F_g + F_d = -p\pi\dfrac{d^2}{4}$.

Dans le second cas, l'effort est $-p\pi\dfrac{d^2}{4}$. Les deux modèle sont donc équivalent.

Question 19 *Compte tenu des efforts on pré-dimensionne la tige du vérin à un diamètre $d = 15\times 10^{-3}$ m. On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée p_2.*

Correction

On a $p_2 = \dfrac{F_{\text{mini}}}{\dfrac{\pi d^2}{4}} = 14\,433\,443\,\text{Pa}$ soient 144 bars.

Question 20 *Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de F_1, F_{mini} et Δ_{y_T}. Exprimer F_{mini} en fonction de p_2 et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer F_1 en fonction de p_1 et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur r de ce vérin à gaz en fonction de F_{mini}, d, D, L et Δ_{y_T}.*

Correction

- $r = \dfrac{F_1 - F_{\text{mini}}}{\Delta y_T}$.
- $F_{\text{mini}} = p_2\dfrac{\pi d^2}{4}$, $F_1 = p_1\dfrac{\pi d^2}{4}$.
- On a $p_1 V_1 = p_2 V_2 \Leftrightarrow F_{\text{mini}} V_1 = F_1 V_2 \Leftrightarrow F_{\text{mini}}\dfrac{V_1}{V_2} = F_1$. D'où $r = \dfrac{F_{\text{mini}}\dfrac{V_1}{V_2} - F_{\text{mini}}}{\Delta y_T}\,F_{\text{mini}}\dfrac{\dfrac{V_1}{V_2}-1}{\Delta y_T}$.

Par ailleurs, $V_1 - V_2 = \Delta y_T\dfrac{\pi d^2}{4}$; donc $V_2 = L\dfrac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T\dfrac{\pi d^2}{4}$.

On a donc $r = F_{\text{mini}}\dfrac{\dfrac{V_1-V_2}{V_2}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}}\dfrac{\dfrac{\Delta y_T\dfrac{\pi d^2}{4}}{L\dfrac{\pi D^2}{4} - \Delta y_T\dfrac{\pi d^2}{4}}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}}\dfrac{\dfrac{\Delta y_T d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}}{\Delta y_T} = F_{\text{mini}}\dfrac{d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}$

Question 21 *On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur L et calculer la raideur r.*

Correction

Pour avoir la raideur la plus faible, il faut la longueur la plus grande soit 1 m. $r = F_{\text{mini}}\dfrac{d^2}{LD^2 - \Delta y_T d^2}$

On prendra $r = 180\,\text{N}\,\text{m}^{-1}$ pour la suite du problème.

Question 22 *Déterminer l'effort maximal F_{Maxi} développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de F.*

Correction
$F_{\text{Maxi}} = F_{\text{Mini}} + r\Delta y_T = 2550 + 180,4 = 2622\,\text{N}$.
La variation d'effort est de $\dfrac{72}{2550} \simeq 3\,\%$.

Question 23 *Déterminer la relation $F = F(y_T)$.*

Correction
$F = 2622 - r\,y_T$.

On considérera dans cette question que l'effort de compensation F_c est constant.

Question 24 *En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de C en fonction de a, M_e, F_c, M...*

Correction
En reprenant l'expression précédente et en ajoutant l'effort de la courroie F_c (de sens opposé au poids), on a $C = \dfrac{p_v}{2\pi}\left(M_e\dot{V} + Mg - F_c\right)$.

Question 25 *Exprimer ensuite a en fonction de C, M_e, F_c, M ...*

Correction
On a $a = \dot{V}$ et $a = \dfrac{1}{M_e}\left(\dfrac{2\pi C}{p_v} + F_c - Mg\right)$.

Question 26 *En déduire la valeur du couple maximum C_{Max} que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance P_0 nécessaire de ce moteur (prendre $F_c = 1300\,\text{N}$).*

Correction
On reprend l'expression de C et on a $C = 0{,}22\,\text{Nm}$. $P_0 = 34{,}4\,\text{W}$

Question 27 *En déduire la puissance P nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut $\eta = 0,3$.*

Correction
$P = 115\,\text{W}$

Synthèse

Question 28 *On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges ? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante ?*

Correction