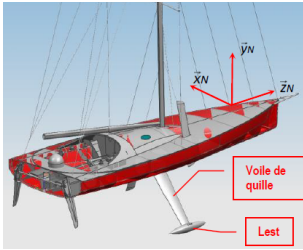


TD 2



Quille pendulaire ★

Concours Commun Mines Ponts 2014

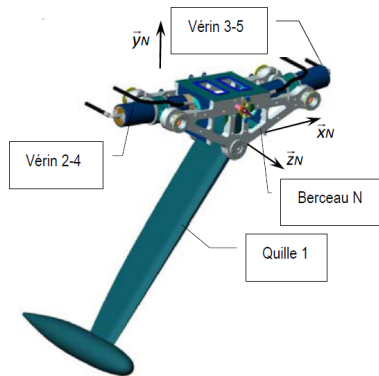
Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



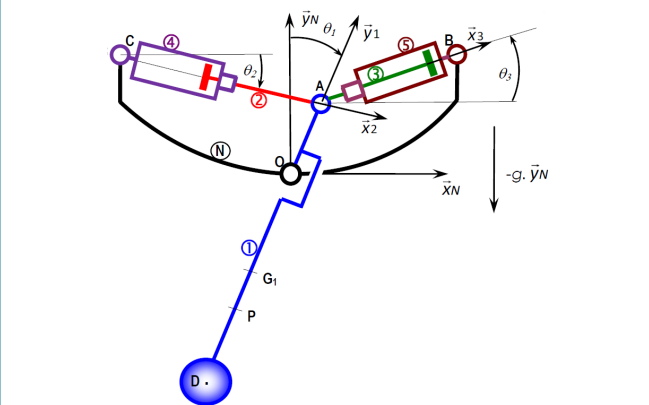
Modèle volumique 3D

Objectif L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

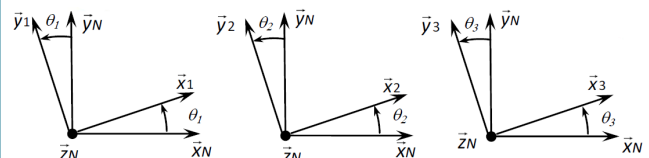
Hypothèses

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Le bateau est à l'arrêt et son repère R_N est galiléen.
- Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que : $F_{h2} > 0$ et $F_{h3} = 0$. Le vérin 2-4 est alors moteur et le vérin 3-5 est libre (F_{h2} désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2; on a donc $-F_{h2}$ qui agit sur 4).
- Le mouvement du fluide dans les diverses canalisation s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures suivantes.



Modèle 2D



Paramétrage

Données géométriques, massiques et inertielles

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= R \vec{y}_1; \vec{CA} = x_{24}(t) \vec{x}_2; \\ \vec{AB} &= x_{35}(t) \vec{x}_3, \\ \text{• Solide 1, masse } M_1, \text{ centre d'inertie } G_1, \\ \vec{OG}_1 &= -L_1 \vec{y}_1, I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_N)}. \\ \text{• Solide 2, masse } M_2, \text{ centre d'inertie } G_2, \\ \vec{AG}_2 &= -L_2 \vec{x}_2, I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}. \\ \text{• Solide 3, masse } M_3 &= \\ \vec{M}_2, \text{ centre d'inertie } G_3, \\ \vec{AG}_3 &= L_2 \vec{x}_3, I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}. \\ \text{• Solide 4, masse } M_4, \text{ centre d'inertie } C, I_C(4) &= \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}. \\ \text{• Solide 5, masse } M_5, \text{ centre d'inertie } B, I_B(5) &= \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}. \end{aligned}$$

Actions mécaniques

$$\begin{aligned} \text{• Action de pression de l'huile sur 2 : } \{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} &= \left\{ \begin{matrix} F_{h2} \vec{x}_2 \\ 0 \end{matrix} \right\}_C \\ \text{• Action de pression de l'huile sur 3 : } \{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} &= \left\{ \begin{matrix} -F_{h3} \vec{x}_3 \\ 0 \end{matrix} \right\}_B \end{aligned}$$

- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}$ avec $k > 0$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \vec{x}_3 \\ 0 \end{array} \right\}$ avec $k > 0$.
- Action hydrodynamique de l'eau sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_p \vec{z}_1 + F_t \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_p$ avec $\vec{OP} = -h \vec{y}_1$.

Vecteurs vitesse

Question 1 Tracer le graphe de liaisons.

Question 2 Exprimer les vitesses suivantes :

- $V(G_1 \in 1/N)$ en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles;
- $V(G_2 \in 2/N)$ en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, x_{24} et des paramètres géométriques utiles;
- $V(G_3 \in 3/N)$ en fonction de $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$, $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$, x_{35} et des paramètres géométriques utiles;
- $V(A \in 2/4)$ en fonction de $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$.

Energie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note $\mathcal{E}_c(i/N)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N .

Question 3 Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

- $\mathcal{E}_c(1/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles;
- $\mathcal{E}_c(2/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, $x_{24}(t)$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
- $\mathcal{E}_c(4/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

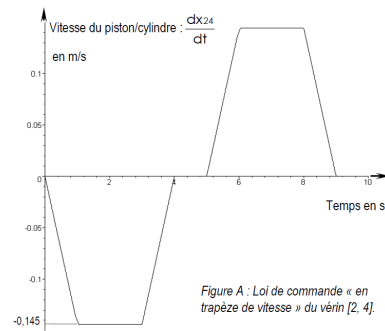
Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 Recenser, puis exprimer les puissances galiléennes non nulles (notées $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E . Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

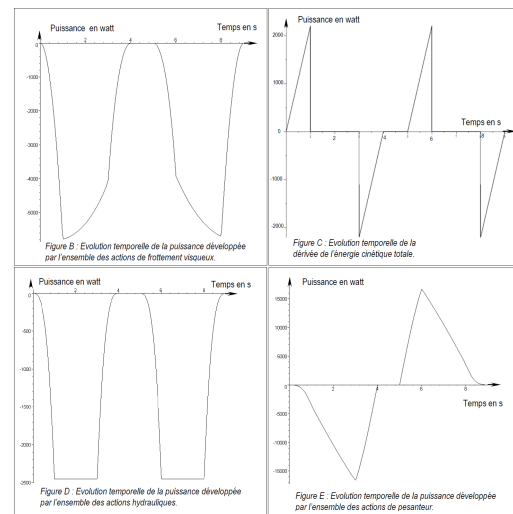
Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les

notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position $\theta_1 = 0$ à la position $\theta_1 = 45^\circ$ en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position $\theta_1 = 0$ en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.



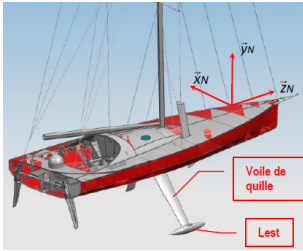
Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure suivante.



Question 7 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0$ s, $t = 1$ s, $t = 3$ s et $t = 4$ s. Sur cet intervalle $[0, 4]$ s, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Question 8 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

ID 2



Quille pendulaire ***

Concours Commun Mines Ponts 2014

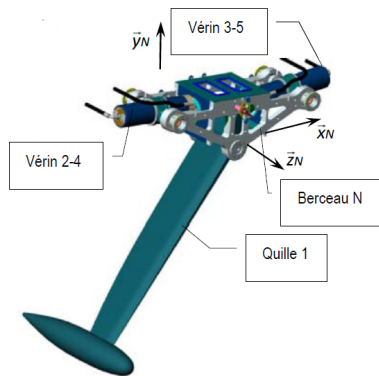
Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal \vec{z}_N . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_N) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



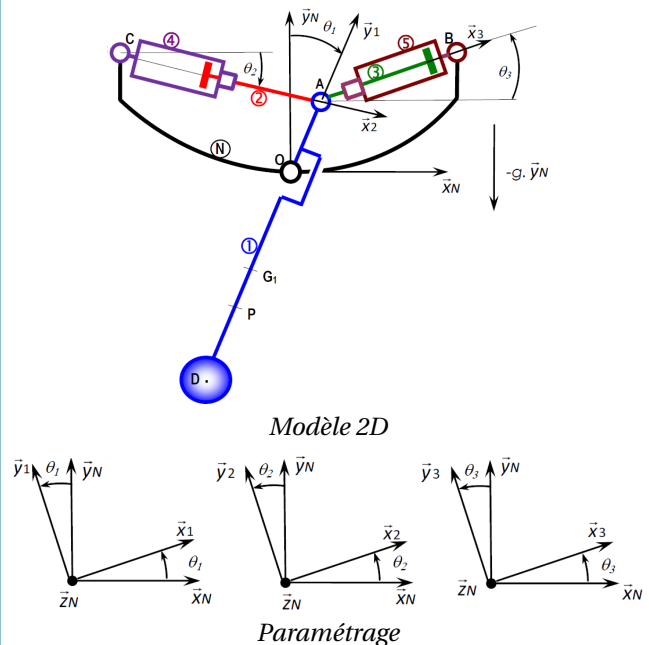
Modèle volumique 3D

Objectif L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Hypothèses

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Le bateau est à l'arrêt et son repère R_N est galiléen.
- Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que : $F_{h2} > 0$ et $F_{h3} = 0$. Le vérin 2-4 est alors moteur et le vérin 3-5 est libre (F_{h2} désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2; on a donc $-F_{h2}$ qui agit sur 4).
- Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures suivantes.



Données géométriques, massiques et inertielles

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= R \vec{y}_1; \vec{CA} = x_{24}(t) \vec{x}_2; \\ \vec{AB} &= x_{35}(t) \vec{x}_3, \\ \text{Solide 1, masse } M_1, \text{ centre d'inertie } G_1, \\ \vec{OG}_1 &= -L_1 \vec{y}_1, I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_N)}, \\ \text{Solide 2, masse } M_2, \text{ centre d'inertie } G_2, \\ \vec{AG}_2 &= -L_2 \vec{x}_2, I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}, \\ \text{Solide 3, masse } M_3 = \\ \vec{M}_2, \text{ centre d'inertie } G_3, \\ \vec{AG}_3 &= L_2 \vec{x}_3, I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}, \\ \text{Solide 4, masse } M_4, \text{ centre d'inertie } C, I_C(4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}, \\ \text{Solide 5, masse } M_5, \text{ centre d'inertie } B, I_B(5) = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}. \end{aligned}$$

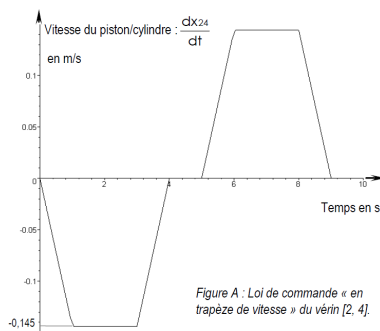
Actions mécaniques

- Action de pression de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} F_{h2} \vec{x}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_C$
- Action de pression de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} -F_{h3} \vec{x}_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_B$

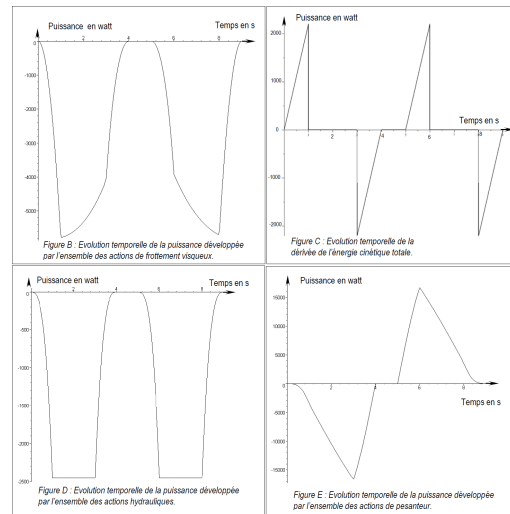
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 : $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ avec $k > 0$.
- Action hydrodynamique de l'eau sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_p \vec{z}_1 + F_t \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$ avec $\vec{OP} = -h \vec{y}_1$.

Question 1 Exprimer la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction des données du problème. La méthode sera précisément décrite. Chacun des termes seront calculés. Il n'est pas demandé d'écrire la relation finale.

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position $\theta_1 = 0$ à la position $\theta_1 = 45^\circ$ en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position $\theta_1 = 0$ en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.



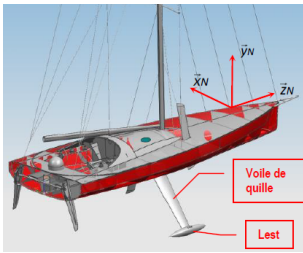
Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure suivante.



Question 2 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0$ s, $t = 1$ s, $t = 3$ s et $t = 4$ s. Sur cet intervalle $[0, 4]$ s, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Question 3 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

TD 2 – Corrigé



Quille pendulaire *

Concours Commun Mines Ponts 2014

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

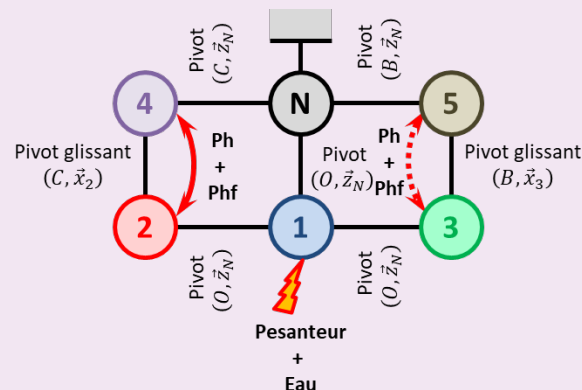
Mise en situation

Objectif L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

Vecteurs vitesse

Question 1 Tracer le graphe de liaisons.

Correction



Question 2 Exprimer les vitesses suivantes :

1. $\overrightarrow{V(G_1 \in 1/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres géométriques utiles;
2. $\overrightarrow{V(G_2 \in 2/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, x_{24} et des paramètres géométriques utiles;
3. $\overrightarrow{V(G_3 \in 3/N)}$ en fonction de $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$, $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$, x_{35} et des paramètres géométriques utiles;
4. $\overrightarrow{V(A \in 2/4)}$ en fonction de $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$.

Correction

1. $\overrightarrow{V(G_1 \in 1/N)} = \overrightarrow{V(O \in 1/N)} + \overrightarrow{G_1 O} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/N)} = L_1 \overrightarrow{y_1} \wedge \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} = L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}$.
2. $\overrightarrow{V(G_2 \in 2/N)} = \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(R \overrightarrow{y_1} - L_2 \overrightarrow{x_2})}{dt} \right]_{R_N} = -R \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} - L_2 \dot{\theta}_2 \overrightarrow{y_2}$.

$$\begin{aligned} \text{On a aussi } \overrightarrow{V(G_2 \in 2/N)} &= \left[\frac{d(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(x_{24}(t)\overrightarrow{x_2} - L_2\overrightarrow{x_2})}{dt} \right]_{R_N} = \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2(x_{24}(t) - L_2)\overrightarrow{y_2}. \\ 3. \overrightarrow{V(G_3 \in 3/N)} &= \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(R\overrightarrow{y_1} + L_2\overrightarrow{x_3})}{dt} \right]_{R_N} = -R\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1} + L_2\dot{\theta}_3\overrightarrow{y_3}. \\ \text{On a aussi } \overrightarrow{V(G_3 \in 3/N)} &= \left[\frac{d(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG_3})}{dt} \right]_{R_N} = \left[\frac{d(-x_{35}(t)\overrightarrow{x_3} + L_2\overrightarrow{x_3})}{dt} \right]_{R_N} = -\dot{x}_{35}(t)\overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}_3(-x_{35}(t) + L_2)\overrightarrow{y_3}. \\ 4. \overrightarrow{V(A \in 2/4)} &= \left[\frac{d\overrightarrow{CA}}{dt} \right]_{R_4} = \left[\frac{d(x_{24}(t)\overrightarrow{x_2})}{dt} \right]_{R_4} = \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}. \end{aligned}$$

Energie cinétique

Soit E l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note $\mathcal{E}_c(i/N)$ l'énergie cinétique de i dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_N .

Question 3 Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

- $\mathcal{E}_c(1/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles;
- $\mathcal{E}_c(2/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$, $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$, $x_{24}(t)$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
- $\mathcal{E}_c(4/N)$, en fonction de $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ et des paramètres inertiels et géométriques utiles.

Correction

$$\begin{aligned} 1. \mathcal{E}_c(1/N) &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(1/N) \} \otimes \{ \sigma(1/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega}(1/N)}{\overrightarrow{V}(G_1 \in 1/N)} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \frac{M_1 \overrightarrow{V}(G_1 \in 1/N)}{\sigma(G_1, 1/N)} \right\}_{G_1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N}}{L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}} \right\}_{G_1} \otimes \\ &\left\{ \frac{M_1 L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1}}{\dot{\theta}_1 (-D_1 \overrightarrow{y_N} + C_1 \overrightarrow{z_N})} \right\}_{G_1} = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 (-D_1 \overrightarrow{y_N} + C_1 \overrightarrow{z_N}) \cdot \overrightarrow{z_N} + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2) = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 C_1 + M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (C_1 + M_1 L_1^2). \\ 2. \mathcal{E}_c(2/N) &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(2/N) \} \otimes \{ \sigma(2/N) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega}(2/N)}{\overrightarrow{V}(G_2 \in 2/N)} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \frac{M_2 \overrightarrow{V}(G_2 \in 2/N)}{\sigma(G_2, 2/N)} \right\}_{G_2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_N}}{\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2(x_{24}(t) - L_2)\overrightarrow{y_2}} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \frac{M_2 (\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2(x_{24}(t) - L_2)\overrightarrow{y_2})}{\dot{\theta}_2 B_2 \overrightarrow{z_N}} \right\}_{G_1} \\ &= \frac{1}{2} (B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2(x_{24}(t) - L_2)\overrightarrow{y_2})^2) = \frac{1}{2} (B_2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 (\dot{x}_{24}(t)^2 + \dot{\theta}_2^2 (x_{24}(t) - L_2)^2)). \\ 3. \mathcal{E}_c(4/N) &= \frac{1}{2} C_4 \dot{\theta}_2^2. \end{aligned}$$

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

Question 4 Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$) développées par les actions mécaniques intérieures à E en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Correction

Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
- $\mathcal{P}(4 \xleftrightarrow{\text{Ph}} 2) = \{ \mathcal{T}(4 \rightarrow 2) \} \otimes \{ \mathcal{V}(2/4) \} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R}(4 \rightarrow 2)}{\mathcal{M}(A, 4 \rightarrow 2)} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega}(2/4)}{\overrightarrow{V}(A \in 2/4)} \right\}_A$
 $= \left\{ \frac{\overrightarrow{R}(4 \rightarrow 2)}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\overrightarrow{V}(A \in 2/4)} \right\}_A = \left\{ \frac{F_{h2} \overrightarrow{x_2}}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}} \right\}_A = F_{h2} \dot{x}_{24};$
- $\mathcal{P}(4 \xleftrightarrow{\text{Phf}} 2) = \left\{ \frac{\overrightarrow{R}(4 \rightarrow 2)}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\overrightarrow{V}(A \in 2/4)} \right\}_A = \left\{ \frac{-k \dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}}{-} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{0}}{\dot{x}_{24}(t)\overrightarrow{x_2}} \right\}_A = -k \dot{x}_{24}^2(t);$

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{P}(3 \xleftrightarrow{\text{Ph}} 5) &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A \in 3/5)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_3} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3} \end{array} \right\}_A = F_h \dot{x}_{35}(t); \\ \bullet \mathcal{P}(3 \xleftrightarrow{\text{Phf}} 5) &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(5 \rightarrow 3)} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A \in 3/5)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -k \dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3} \\ - \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3} \end{array} \right\}_A = -k \dot{x}_{35}^2(t). \end{aligned}$$

Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

Question 5 Recenser, puis exprimer les puissances galiléennes non nulles (notées $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$) développées par les actions mécaniques extérieures à E. Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

Correction Bilan des puissances intérieures à l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5 :

- la puissance dissipée dans les liaisons est nulle car il n'y a pas de frottements;
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_1 g \overrightarrow{y_N} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} \\ \overrightarrow{V(G_1 \in 1/R_N)} = L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_{G_1}$
 $= -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{y_N} = -M_1 g L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1;$
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_2 g \overrightarrow{y_N} \\ 0 \end{array} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} \\ \dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2} \end{array} \right\}_{G_2}$
 $= -M_2 g \overrightarrow{y_N} \cdot (\dot{x}_{24}(t) \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \overrightarrow{y_2}) = -M_2 g \dot{x}_{24}(t) \sin \theta_2 - M_2 g \dot{\theta}_2 (x_{24}(t) - L_2) \cos \theta_2;$
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/R_N) = -M_3 g \overrightarrow{y_N} \cdot (-\dot{x}_{35}(t) \overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \overrightarrow{y_3})$
 $= -M_3 g (-\dot{x}_{35}(t) \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3 (-x_{35}(t) + L_2) \cos \theta_3);$
- $\mathcal{P}(\text{eau} \rightarrow 1/R_N) = \{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_N)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_p \overrightarrow{z_1} + F_t \overrightarrow{x_1} \\ 0 \end{array} \right\}_P \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_N} \\ h \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_P$
 $= F_t h \dot{\theta}_1;$

Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à E dans son mouvement par rapport à N. Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

Correction On a : $\mathcal{P}(\vec{E} \rightarrow E/R_N) + \sum \mathcal{P}(i \leftrightarrow j) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_N)}{dt}$

Question 7 Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants $t = 0 \text{ s}$, $t = 1 \text{ s}$, $t = 3 \text{ s}$ et $t = 4 \text{ s}$. Sur cet intervalle $[0, 4 \text{ s}]$, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

Correction D'après UPSTI. À 1 s, $2200 + 5800 + 2500 + 4000 = 14\,500 \text{ W}$ à 3 s $0 + 4000 + 2500 + 16000 = 22\,500 \text{ W}$
 Maximum à environ 22,5 kW. Le maximum est bien sur cet intervalle car le poids y est résistant (le poids est moteur sur $[5 \text{ s}; 8 \text{ s}]$).

Question 8 Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.

Correction D'après UPSTI. La différence est de 7,5 kW. Elle ne peut pas provenir des hypothèses faites (liaisons parfaites et RN galiléen). Elle provient certainement du fait que le système est surdimensionné pour pallier les erreurs de modélisation des actions de l'eau, le vieillissement de la quille avec les algues collées qui rajoutent du poids...