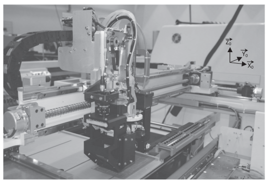
Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement en utilisant les méthodes énergétiques.

Chapitre 1 – Approche énergétique

Activation 1



Activation – Système de dépose de composants électroniques

Émilien Durif – E3A PSI 2011

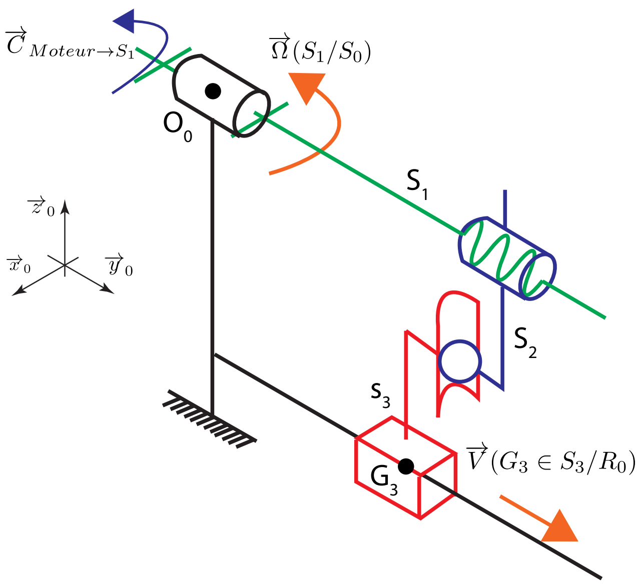
Savoirs et compétences :

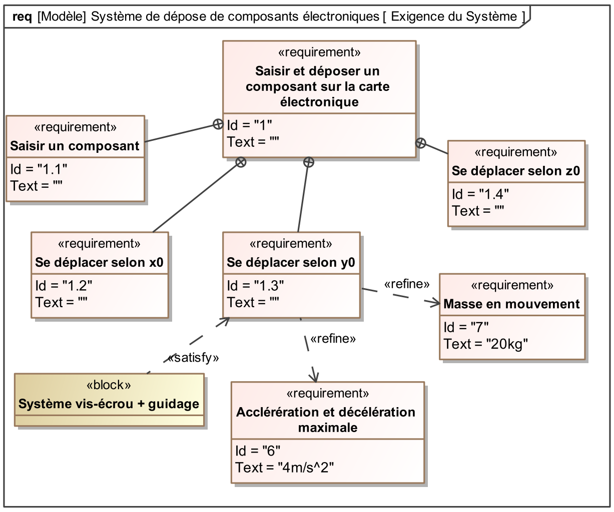
- ❒ *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée $\overrightarrow{y_0}$) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « *vis-écrou* ».

Hypothèses :

- le référentiel associé au repère $R_0 = \left(O_0; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ est supposé galiléen;
- les solides seront supposés indéformables;
- on notera J_1 le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe $\left(O_0, \overrightarrow{y_0}\right)$: $J_1 = I_{\left(O_0, \overrightarrow{y_0}\right)}(S_1)$;
- on note M_3 et G_3 respectivement la masse et le centre d'inertie du solide S_3 ;
- la position de G_3 est définie par $\overrightarrow{O_0G_3} = y \cdot \overrightarrow{y_0} + z \cdot \overrightarrow{z_0}$
- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre S_0 et S_3 (Coefficient de frottement noté μ) et la pivot entre S_0 et S_1 (couple résistant noté C_r) ;
- seul l'action de pesanteur sur S_3 sera supposée non négligeable.





- S_0 : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
- S_1 : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
- S_2 : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
- S_3 : chariot supportant la tête de dépose (masse M_3).

Données numériques associées au système :

- Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) : $\mu = 0,1$.
- Pas de la vis à billes : $p = 20\,\text{mm}$.
- Diamètre de la vis à billes : $D = 25\,\text{mm}$.
- Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe $\overrightarrow{y_0}$: $I_v = 2,15 \times 10^{-4}\,\text{kg m}^2$.
- Couple résistant sur la vis due à son guidage (paliers + joints) : $C_r = 3\,\text{Nm}$.
- l, longueur libre de la vis – entre deux paliers – (mm) : 1000 mm.
- Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :
  - couple maximal, $C_{max} = 21{,}2\,\text{Nm}$;
  - fréquence de rotation maximale, $N_m = 6000\,\text{tr/min}$;
  - moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe $\overrightarrow{y_0}$, $I_m = 1{,}6 \times 10^{-4}\,\text{kg m}^2$.

Objectif L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :
- couple moteur transmis à S_1 : $\overrightarrow{C}_{\text{Moteur}\rightarrow S_1}\cdot\overrightarrow{y_0}=C_m(t)$;
- vitesse de rotation de S_1 : $\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0)\cdot\overrightarrow{y_0}=\dot{\theta}(t)$;

à celles liées à l'effecteur (tête de dépose S_3) :
- masse : M_3;
- cinématique de S_3 : $\overrightarrow{a}(G_3R_0)\cdot\overrightarrow{y_0}=\ddot{y}(t)$.

On considère l'ensemble $E=\{S_1+S_2+S_3\}$.

Question 1 *Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.*

Question 2 *Déterminer l'expression de $\mathscr{P}(ext\rightarrow E/R_g)$ en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).*

Question 3 *Calculer $\mathscr{P}(ext\rightarrow E/R_0)$ en fonction des données du problème.*

Question 4 *Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble E : $\mathscr{P}_{int}(E)$.*

Question 5 *Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à R_0*

Question 6 *Déterminer la mobilité du système.*

Question 7 *Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.*

Question 8 *Déterminer l'inertie équivalente de E ramenée à la rotation autour de l'axe $\left(O_0,\overrightarrow{y_0}\right)$ et du paramètre $\dot{\theta}(t)$.*

Question 9 *Déterminer la masse équivalente de E ramené à la translation selon la direction $\overrightarrow{y_0}$ et du paramètre $\dot{y}(t)$.*

Question 10 *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E.*

Question 11 *Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier C_m à $y(t)$.*

Question 12 *Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).*

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre S_1 et S_2. On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement η défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

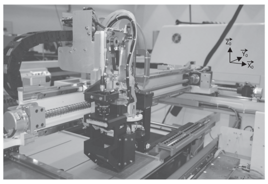
Question 13 *En considérant le système $E_1=\{S_1+S_2\}$, définir le rendement.*

Question 14 *On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre S_1 et S_2. En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à S_2/R_0 et S_1/R_0 en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.*

On donne :
- Rendement η dans la liaison hélicoïdale : $\eta=0,8$;

Question 15 *Déterminer dans ces conditions les dissipations.*

Activation 1 – Corrigé



Activation – Système de dépose de composants électroniques

Émilien Durif – E3A PSI 2011

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Question 1 *Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.*

Correction

Question 2 *Déterminer l'expression de $\mathcal{P}(ext \to E/R_g)$ en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).*

Correction

$$\mathcal{P}(\text{ext} \to E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \to S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur } \to S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \to S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \to S_3/R_0)$$

Question 3 *Calculer $\mathcal{P}(ext \to E/R_0)$ en fonction des données du problème.*

Correction On a :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \to E/R_g) = \mathcal{P}(S_0 \to S_1/R_0) + \mathcal{P}(\text{Moteur} \to S_1/R_0) + \mathcal{P}(S_0 \to S_3/R_0) + \mathcal{P}(\text{poids} \to S_3/R_0)$$

- $\mathcal{P}(S_0 \to S_1/R_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \to S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c} X_{01}\cdot\overrightarrow{x_0} + Y_{01}\cdot\overrightarrow{y_0} + Z_{01}\cdot\overrightarrow{z_0} \\ L_{01}\cdot\overrightarrow{x_0} \pm C_r\cdot\overrightarrow{y_0} + N_{01}\cdot\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_{O_0} \otimes \left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}(t)\cdot\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{O_0} = \pm C_r\cdot\dot{\theta}(t).$
  Le signe de la composante suivant $\overrightarrow{y_0}$ dépendra du sens du mouvement de S_1/S_0.
- $\mathcal{P}(\text{Moteur} \to S_1/R_0) = \{\mathcal{T}(\text{Moteur} \to S_1)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0} \\ C_m\cdot\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}_{-} \otimes \left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}(t)\cdot\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{O_0} = C_m\cdot\dot{\theta}(t).$
- $\mathcal{P}(S_0 \to S_3/R_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \to S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c} X_{03}\cdot\overrightarrow{x_0} \pm Y_{03}\cdot\overrightarrow{y_0} + Z_{03}\cdot\overrightarrow{z_0} \\ L_{03}\cdot\overrightarrow{x_0} + M_{03}\cdot\overrightarrow{y_0} + N_{03}\cdot\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_{-} \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0} \\ \dot{y}(t)\cdot\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}_{-} = \pm Y_{03}\cdot\dot{y}(t).$
- $\mathcal{P}(\text{Poids} \to S_3/R_0) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \to S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/R_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0} \\ -M_3\cdot g\cdot\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_{G_3} \otimes \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0} \\ \dot{y}(t)\cdot\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}_{G_3} = 0.$

$$\mathcal{P}(\text{ext} \to E/R_0) = (C_m \pm C_r)\cdot\dot{\theta}(t) \pm Y_{03}\cdot\dot{y}(t)$$

Question 4 *Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble E : $\mathcal{P}_{int}(E)$.*

Correction

- D'après le graphe des liaisons : $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \mathcal{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) + \mathcal{P}(S_2 \longleftrightarrow S_3)$.
- Calcul de $\mathcal{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) == \{\mathcal{T}(S_1 \to S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{\begin{array}{c} X_{12}\overrightarrow{x_0} + Y_{12}\overrightarrow{y_0} + Z_{12}\overrightarrow{z_0} \\ L_{12}\overrightarrow{x_0} + M_{12}\overrightarrow{y_0} + N_{12}\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_{O_0} \otimes \left\{\begin{array}{c} q_{21}\overrightarrow{y_0} \\ v_{12}\cdot\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}_{O_0} =$ $Y_{12}\cdot v_{12} + q_{21}\cdot M_{12}$. Or, $\left\{\begin{array}{l} M_{12} = -\frac{p}{2\pi}Y_{12} \\ v_{12} = \frac{p}{2\pi}q_{21}\end{array}\right.$. D'où : $\mathcal{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) = Y_{12}\cdot v_{12} + q_{21}\cdot M_{12} = \frac{p}{2\pi}\left[Y_{12}\cdot q_{21} - q_{21}\cdot Y_{12}\right] = 0.$
- Calcul de $\mathcal{P}(S_2 \longleftrightarrow S_3) = \{\mathcal{T}(S_2 \to S_3)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_3/S_2)\} = \left\{\begin{array}{c} A \\ X_{23}\overrightarrow{x}_0 + Y_{23}\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}_{\overrightarrow{0}} \otimes \left\{\begin{array}{c} A \\ p_{32}\overrightarrow{x}_0 + q_{32}\overrightarrow{y}_0 + r_{32}\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_{w_{32}\cdot\overrightarrow{z_0}}$ $= 0.$
- On en déduit donc : $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0$.

Question 5 *Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à R_0*

Correction

- Énergie cinétique de l'ensemble dans son mouvement par rapport à R_0 :

$$E_c(E/R_0)=E_c(1/R_0)+E_c(2/R_0)+E_c(3/R_0)$$

- Énergie cinétique de 1 dans son mouvement par rapport à R_0 : $E_c(1/R_0)=\dfrac{1}{2}\{\sigma(1/R_0)\}\otimes\{\mathscr{V}(1/R_0)\}=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{*}\\ \overline{\overline{I}}_{O_0}(S_1)\cdot\dot{\theta}(t)\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}_{O_0}\otimes\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}(t)\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{O_0}=\frac{1}{2}\left[\dot{\theta}^2\overline{\overline{I}}_{O_0}(S_1)\cdot\overrightarrow{y}_0\cdot\overrightarrow{y}_0\right]=\frac{1}{2}J_1\cdot\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}(I_m+I_v)\cdot\dot{\theta}^2$.
- Énergie cinétique de 2 dans son mouvement par rapport à R_0 : $E_c(2/R_0)=\frac{1}{2}\{\sigma(2/R_0)\}\otimes\{\mathscr{V}(2/R_0)\}=0$ car l'inertie de 2 est négligeable.
- Énergie cinétique de 3 dans son mouvement par rapport à R_0 : $E_c(3/R_0)=\frac{1}{2}\{\sigma(3/R_0)\}\otimes\{\mathscr{V}(3/R_0)\}=\left\{\begin{array}{c}-\\ M_3\cdot\dot{y}(t)\cdot\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}_{\overrightarrow{0}}\otimes\left\{\begin{array}{c}-\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{\dot{y}(t)\cdot\overrightarrow{y_0}}=\frac{1}{2}M_3\cdot\dot{y}^2(t)$.
- L'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble E : $E_c(E/R_0)=\frac{1}{2}\left[(I_m+I_v)\cdot\dot{\theta}^2(t)+M_3\cdot\dot{y}^2(t)\right]$.

Question 6 *Déterminer la mobilité du système.*

Correction Ici la mobilité vaut 1.

Question 7 *Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.*

Correction Par une fermeture cinématique on pourrait montrer : $\dot{y}(t)=-\frac{p}{2\pi}\dot{\theta}(t)$.

Question 8 *Déterminer l'inertie équivalente de E ramenée à la rotation autour de l'axe $\left(O_0,\overrightarrow{y_0}\right)$ et du paramètre $\dot{\theta}(t)$.*

Correction $E_c(E/R_0)=\frac{1}{2}\left[(I_m+I_v)\cdot\dot{\theta}^2(t)+M_3\cdot\dot{y}^2(t)\right]=\frac{1}{2}\left[(I_m+I_v)+M_3\cdot\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\right]\cdot\dot{\theta}^2(t)$ d'où, $J_{\text{eq}}(E)=(I_m+I_v)+M_3\cdot\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2$.

Question 9 *Déterminer la masse équivalente de E ramené à la translation selon la direction $\overrightarrow{y_0}$ et du paramètre $\dot{y}(t)$.*

Correction $E_c(E/R_0)=\frac{1}{2}\left[(I_m+I_v)\cdot\dot{\theta}^2(t)+M_3\cdot\dot{y}^2(t)\right]=\frac{1}{2}\left[(I_m+I_v)\cdot\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2+M_3\right]\cdot\dot{y}^2(t)$ d'où, $M_{\text{eq}}(E)=(I_m+I_v)\cdot\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2+M_3$.

Question 10 *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E.*

Correction En combinant les résultats des différentes questions précédentes, on obtient : $M_{\text{eq}}\cdot\dot{y}(t)\cdot\ddot{y}(t)=(C_m\pm C_r)\cdot\dot{\theta}(t)\pm Y_{03}\cdot\dot{y}(t)+0$.

On peut postuler un sens de déplacement : $\dot{y}(t)>0$, ainsi $\dot{\theta}=-\frac{2\pi}{p}\dot{y}(t)<0$, $C_r>0$, $Y_{03}<0$: $M_{\text{eq}}\cdot\dot{y}(t)\cdot\ddot{y}(t)=\left[-(C_m+C_r)\cdot\frac{2\pi}{p}+Y_{03}\right]\cdot\dot{y}(t)$

Question 11 *Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier C_m à $y(t)$.*

Correction Il faut éliminer le paramètre Y_{03}. Pour cela on peut écrire le théorème de la résultante dynamique appliqué à S_3 en projection selon $\overrightarrow{z_0}$: $Z_{03}-M_3\cdot g=0$.

Or la loi de Coulomb donne (avec $Z_{03}>0$ et $Y_{03}<0$) : $Y_{03}=-\mu\cdot Z_{03}=-\mu\cdot M_3\cdot g$.

Ainsi l'équation de mouvement obtenue est (en éliminant $\dot{y}(t)\neq 0$) : $\boxed{M_{\text{eq}}\cdot\ddot{y}(t)=-(C_m+C_r)\cdot\dfrac{2\pi}{p}-\mu\cdot M_3\cdot g}$.

Question 12 *Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).*

Correction

$$C_m = -\frac{p}{2\pi}\left[M_{\text{eq}}\ddot{y}_{\max} + M_3 \cdot g \cdot \mu\right] - C_r = -\frac{p}{2\pi}M_3\left(\ddot{y}_{\max} + g \cdot \mu\right) - \left(I_m + I_v\right)\frac{2\pi}{p}\ddot{y}_{\max} - C_r$$

L'application numérique donne : $C_m = -3,79 N \cdot m$

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre S_1 et S_2. On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement η défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

Question 13 *En considérant le système $E_1 = \{S_1 + S_2\}$, définir le rendement.*

Correction

$$\eta = \frac{\mathscr{P}(\text{utile})}{\mathscr{P}(\text{entrée})} = \frac{\mathscr{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0)}{\mathscr{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)}$$

Question 14 *On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre S_1 et S_2. En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à S_2/R_0 et S_1/R_0 en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.*

Correction

- Expression de $\mathscr{P}(\text{dissipée})$: $\mathscr{P}(\text{dissipée}) = -\mathscr{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = -(\mathscr{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) + \mathscr{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0))$;
- TEC appliqué à S_2/R_0 en régime permanent : $\mathscr{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_0) = -\mathscr{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0)$;
- TEC appliqué à S_1/R_0 en régime permanent : $\mathscr{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = -\mathscr{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_0)$
- en combinant ces équations on obtient $\mathscr{P}(\text{dissipée})$: $\mathscr{P}(\text{dissipée}) = -(-\mathscr{P}(S_3 \rightarrow S_2/R_0) - \mathscr{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0))$ $= -\mathscr{P}(S_2 \rightarrow S_3/R_0) + \mathscr{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = \left(1-\eta\right)\mathscr{P}(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0)$.

On donne :

- Rendement η dans la liaison hélicoïdale : $\eta = 0,8$;

Question 15 *Déterminer dans ces conditions les dissipations.*

Correction $\mathscr{P}(\text{dissipée}) = C_{\max} \cdot \dot{\theta}_{\max} \cdot \left(\eta - 1\right) = 21,2 \times 6000\frac{2\pi}{60} \cdot \left(1-\eta\right) = 2664\,\text{W}$