Activation 2

Télécabine à stabilité accrue : le funitel

Mines Ponts PSI – 2003

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Mise en situation

Une télécabine est un système de transport de personnes permettant un changement d'altitude important dans une zone d'accès difficile, généralement en montagne.

Les télécabines sont tractées par un câbles mis en mouvement par un ensemble motorisation. Afin de procéder à une évaluation de la puissance nécessaire à l'entrainement du câble, on prendra comme modèle une ligne rectiligne supportée par 9 pylônes (voir figure au verso).

Le guidage des brins de câble est réalisé par des palonniers à galets fixés sur les pylônes, pour lesquels le contact peut être modélisé par un appui avec frottement sec avec un coefficient de frottement $f = 0,03$. 2 brins permettent l'ascension de la cabine, 2 brins permettent la descente. Cette donnée, associée à un calcul numérique des actions de contact des brins de câble sur les palonniers, a permis une estimation à 400 kW des pertes par frottement au niveau de ces palonniers (puissance galiléenne des actions des palonniers sur les brins de câble). L'action du vent sur une face d'une cabine est modélisable par une pression uniforme p : $p = \frac{1}{2}\rho V_a^2$ avec p en pascal, $\rho = 1,3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ masse volumique de l'air, V_a module de la vitesse relative de l'air par rapport à la cabine en m/s.

Objectif On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de $0,15\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$. On se place à l'instant ou la vitesse de $7,2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse $V_e = 30\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

Question 1 *Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée E_{c_T}, des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de M_c, M_p, μ, L, V, D_P et I_M.*

Question 2 *Déterminer la puissance galiléenne, notée P_p, des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de M_p, V, h, g et L.*

Question 3 *Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée P_v des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de ρ, S_f, V, V_e et $\alpha = \arcsin(h/L)$.*

Question 4 *En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée P_T pour l'entrainement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de 1560 kW, commentez vos résultats par rapport à cette valeur.*

Sur la ligne, les cabines se déplacent à $V = 7,2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. En gare, pour permettre l'embarquement et le débarquement des passagers, la vitesse maximum de la cabine doit être de $v_0 = 0,3\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Lors de leur circulation en gare, les cabines sont donc libérées des brins de câble,.On envisagera une accélération constante des cabines de $a = 1,3\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

Question 5 *Quelle est alors la durée t de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur x (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de a, v_0, t et V. Pour que l'accélération de $1,3\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ permette le lancement des cabines de $v_0 = 0,3\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ à $V = 7,2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$, l'application numérique donne environ : $x = 20\,\text{m}$.*

1. $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}\left(4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M\frac{4}{D_p^2}\right)V^2 \simeq 6,7\,\text{MJ}$.
2. $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = -8M_p g V \sin\alpha = -359\,289\,\text{W}$.
3. $\mathcal{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -16 S_f \rho V^2 V_e \cos\alpha = -218\,677\,\text{W}$.
4. $P_T = 1266\,\text{kW}$.
5. $\tau = \frac{V - v_0}{a} = 5,3\,\text{s}$ et $x = \tau \cdot \frac{1}{2}(V + v_0) = 19,875\,\text{m}$.

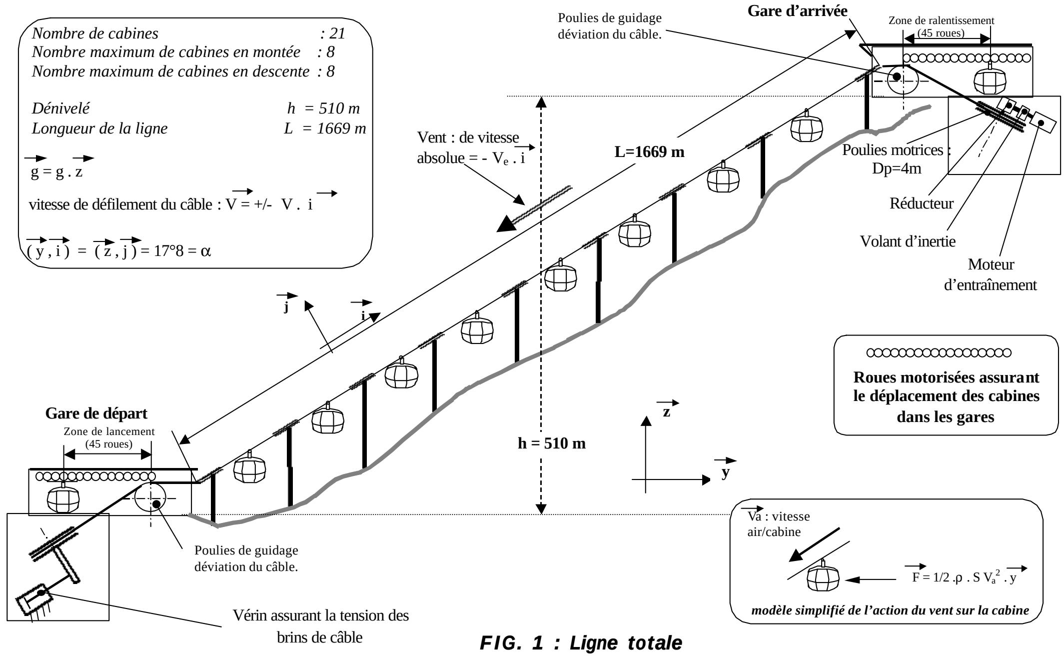


FIG. 1 : Ligne totale

Extrait du cahier des charges		Autres caractéristiques techniques	
Nombre de cabines	21	Masse d'une cabine vide	Mc=2500kg
Nombre maxi de cabines en montée	8	Surface latérale d'une cabine	Sl = 10m²
Nombre maxi de cabines en descente	8	Surface frontale d'une cabine	Sf = 7,1 m²
Nombre maxi de passagers par cabine et masse des passagers	26 Mp= 2080 kg	Masse linéique du câble	μ = 8,47 kg /m
Vitesse nominale de défilement du câble (identique en tous points de la ligne)	V = 7,2 m/s	Nombre de pylônes	9
Fréquence de rotation nominale du moteur d'entraînement	N = 1700 tr/min	Diamètre d'une poulie motrice :	D_P = 4m
Longueur de la ligne	L = 1669 m	Inertie* de l'ensemble de la motorisation ramenée sur l'axe des poulies motrices	$I_M = 575.10^3 m^2.kg$
Dénivelé	h = 510 m		

Activation 2 – Corrigé

Télécabine à stabilité accrue : le funitel

Mines Ponts PSI – 2003

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Mise en situation

Objectif On étudiera la situation suivante (qui correspond à la situation la plus défavorable) : redémarrage de l'installation après un incident avec une accélération de $0{,}15\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. On se place à l'instant ou la vitesse de $7{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ va être atteinte, 8 cabines chargées de passagers sont en montée, 8 cabines vides sont en descente et un vent de vitesse $V_e = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ souffle parallèlement à la ligne dans le sens de la descente.

Question 1 *Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée E_{c_T}, des 4 brins de câble, de l'ensemble des cabines sur la ligne et de la motorisation, en fonction de M_c, M_p, μ, L, V, D_P et I_M.*

Correction

- Énergie cinétique des 4 brins de câbles : $\mathscr{E}_c\,(\text{cables}/0) = \dfrac{1}{2}4L\mu V^2$.
- Énergie cinétique des 8 cabines montantes : $\mathscr{E}_c\,(C_m/0) = \dfrac{1}{2}8\left(M_c + M_p\right)V^2$.
- Énergie cinétique des 8 cabines descendantes : $\mathscr{E}_c\,(C_d/0) = \dfrac{1}{2}8M_c V^2$.
- Énergie cinétique de la motorisation : $\mathscr{E}_c\,(\mathrm{M}/0) = \dfrac{1}{2}I_M\omega_M^2$.

On a par ailleurs $V = \omega_M \cdot \dfrac{D_p}{2}$.

On a donc $\mathscr{E}_c\,(\Sigma/0) = \dfrac{1}{2}\left(4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M\dfrac{4}{D_p^2}\right)V^2$.

On a donc $M_{\text{eq}} = 4L\mu + 16M_c + 8M_p + I_M\dfrac{4}{D_p^2} = 4\times 1669 \times 8,47 + 16\times 2500 + 8\times 2080 + 575\times 10^3\dfrac{4}{16} = 256\,936\,\mathrm{kg}$ et $\mathscr{E}_c\,(\Sigma/0) = 6{,}7\,\mathrm{MJ}$.

Question 2 *Déterminer la puissance galiléenne, notée P_p, des actions de pesanteur sur l'installation en fonction de M_p, V, h, g et L.*

Correction

Les puissances de la pesanteur sur les cabines montantes s'exprime ainsi :

$$\mathscr{P}\,(\text{pes} \to C_m/0) = \{\mathscr{T}\,(\text{pes} \to C_m)\} \otimes \{\mathscr{V}\,(C_m/0)\} = 8\left\{\begin{array}{c} -\left(M_c+M_p\right)g\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_c} \otimes \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ V\overrightarrow{i} \end{array}\right\}_{G_c}$$

$= -8\left(M_c+M_p\right)gV\overrightarrow{z}\cdot\overrightarrow{i} = -8\left(M_c+M_p\right)gV\sin\alpha$.

Les puissances de la pesanteur sur les cabines descendantes s'exprime ainsi :

$$\mathscr{P}\,(\text{pes} \to C_d/0) = \{\mathscr{T}\,(\text{pes} \to C_d)\} \otimes \{\mathscr{V}\,(C_d/0)\} = 8\left\{\begin{array}{c} -M_c g\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_c} \otimes \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ -V\overrightarrow{i} \end{array}\right\}_{G_c} = 8M_c gV\overrightarrow{z}\cdot\overrightarrow{i}$$

$= 8M_c gV\sin\alpha$.

Remarque : la puissance de la pesanteur sur le câble sont opposées pour la partie montante et la partie descendante.

Ainsi, $\mathscr{P}(\text{pes} \rightarrow C_d + C_m/0) = 8M_c g V \sin\alpha - 8\left(M_c + M_p\right) g V \sin\alpha = -8M_p g V \sin\alpha = -359\,289\,\text{W}$.

Question 3 *Après avoir évalué la vitesse relative et l'action du vent sur une cabine en montée et une cabine en descente, déterminer la puissance galiléenne, notée P_v des actions du vent sur l'ensemble des cabines en fonction de ρ, S_f, V, V_e et $\alpha = \arcsin(h/L)$.*

Correction Le vent va dans le sens de la descente. En montée, $\overrightarrow{V(G_c \in \text{vent}/C_m)} = \overrightarrow{V(G_c \in \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c \in C_m/0)} = -V_e \overrightarrow{i} - V\overrightarrow{i}$.

En descente, $\overrightarrow{V(G_c \in \text{vent}/C_d)} = \overrightarrow{V(G_c \in \text{vent}/0)} - \overrightarrow{V(G_c \in C_d/0)} = -V_e \overrightarrow{i} + V\overrightarrow{i}$.

Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi : $p = \dfrac{1}{2}\rho V_a^2 = \dfrac{1}{2}\rho(-V-V_e)^2$ $\mathscr{P}(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathscr{T}(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathscr{V}(C_m/0)\} = 8\left\{\begin{array}{c} -pS_f\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_c} \otimes \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ V\overrightarrow{i} \end{array}\right\}_{G_c} = -8S_f V \dfrac{1}{2}\rho(V+V_e)^2\cos\alpha$.

Les puissances du vent sur les cabines montantes s'expriment ainsi : $p = \dfrac{1}{2}\rho V_a^2 = \dfrac{1}{2}\rho(V-V_e)^2$ $\mathscr{P}(\text{vent} \rightarrow C_m/0) = \{\mathscr{T}(\text{vent} \rightarrow C_m)\} \otimes \{\mathscr{V}(C_m/0)\} = 8\left\{\begin{array}{c} -pS_f\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_c} \otimes \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ -V\overrightarrow{i} \end{array}\right\}_{G_c} = 8S_f V \dfrac{1}{2}\rho(V-V_e)^2\cos\alpha$.

Au final, $\mathscr{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = 8S_f V \dfrac{1}{2}\rho\left((V-V_e)^2 - (V+V_e)^2\right)\cos\alpha = 8S_f V \dfrac{1}{2}\rho(-4VV_e)\cos\alpha$ $= -16S_f\rho V^2 V_e\cos\alpha$. On a donc $\mathscr{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) = -218\,677\,\text{W}$

Question 4 *En déduire une estimation de la puissance galiléenne nécessaire, notée P_T pour l'entrainement de la ligne entre les gares dans la situation étudiée. La puissance effectivement installée par le constructeur est de* 1560 kW, *commentez vos résultats par rapport à cette valeur.*

Correction On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(\Sigma/0)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\text{vent} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathscr{P}(\text{pes} \rightarrow C_m + C_d/0) + \mathscr{P}(\text{frottement} \rightarrow \Sigma/0) + \mathscr{P}(\text{moteur} \rightarrow \Sigma/0).$$

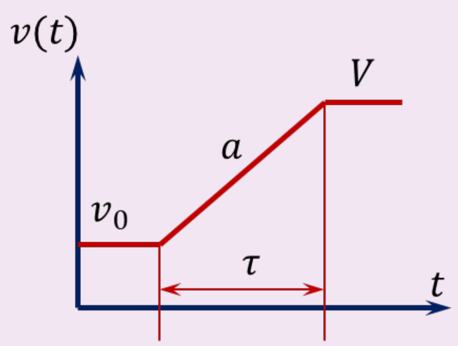
On a donc, en régime permanent : $0 = -229672 - 359289 - 400000 + P_T$ $P_T = 218677 + 359289 + 400000 = 977\,966\,\text{W} \simeq 1000\,\text{kW}$.

En tenant compte de l'accélération, on a $P_T = 1000\,\text{kW} + M_{\text{eq}} V\dot{V} = 1000\,\text{kW} + M_{\text{eq}}7{,}2 \cdot 0{,}15 \simeq 1266\,\text{kW}$.

Le surplus de puissance est nécessaire en cas de situation plus défavorable (plus de vent, dépassement du nombre de passagers...).

Question 5 *Quelle est alors la durée t de la phase d'accélération ? Exprimer la longueur x (en mètre) de la zone rectiligne en fonction de a, v_0, t et V. Pour que l'accélération de* $1{,}3\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ *permette le lancement des cabines de* $v_0 = 0{,}3\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ *à* $V = 7{,}2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$*, l'application numérique donne environ :* $x = 20\,\text{m}$.

Correction



On a $v(t) = at + k$. Par ailleurs, $v(t_2) = V = at_2 + k$ et $v(t_1) = v_0 = at_1 + k$. On a donc $V - v_0 = a\tau$ soit $\tau = \dfrac{V - v_0}{a} = \dfrac{6{,}9}{1{,}3} = 5{,}3\,\text{s}$.

La distance parcourue pendant la durée τ correspond à l'intégrale de la vitesse soir à l'aire sous la courbe. On a donc $x = \tau \cdot \dfrac{1}{2}(V + v_0) = 5{,}3 \times 0{,}5 \times 7{,}5 = 19{,}875\,\text{m}$.