

Dernière mise à jour	Actions dynamiques des liaisons et équations différentielles du mouvement	Denis DEFAUCHY
27/03/2017		TP - Correction

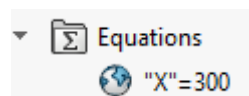
Récapitulatif de mes valeurs

Attention : démonter le galet afin de limiter les frottements et mettre en garde les élèves sur la possibilité pour la lisse de taper si elle part à plus de 90°

Élément à modéliser	Forme de la formule	Constantes à déterminer
Couple de gravité	$C_g(\theta, X) = (A + BX) \cos \theta$	$\begin{cases} A = 26,0222 \text{ (N.m)} \\ B = 25,1627 \text{ (N)} \end{cases}$
Couple ressort	$C_r(\theta) = k(\theta - \theta_0)$	$\begin{cases} k = -0,4105610 \text{ (Nm/°)} \\ \theta_0 = 99,2925 \text{ (°)} \end{cases}$
Inertie de la lisse	$J(X) = aX^2 + bX + c$	$\begin{cases} a = 2,565 \text{ (kg)} \\ b = 0,2565 \text{ (kg.m)} \\ c = 1,977963 \text{ (kg.m}^2\text{)} \end{cases}$
Frottements	$C_f = -\text{signe}(\dot{\theta}) C_{fs} + C_{fv} \dot{\theta}$	$\begin{cases} C_{fs} = 0,26 \text{ (N.m)} \\ C_{fv} = 0,451 \text{ (N.m.s.r}d^{-1}\text{)} \end{cases}$

Attention : il faut encore affiner C_{fs}

Dans le modèle SW fourni, il suffit pour faire varier X dans l'onglet « Equations » en cliquant droit sur le paramètre « X=... » dans l'arbre, puis éditer les équations, et changer la valeur...



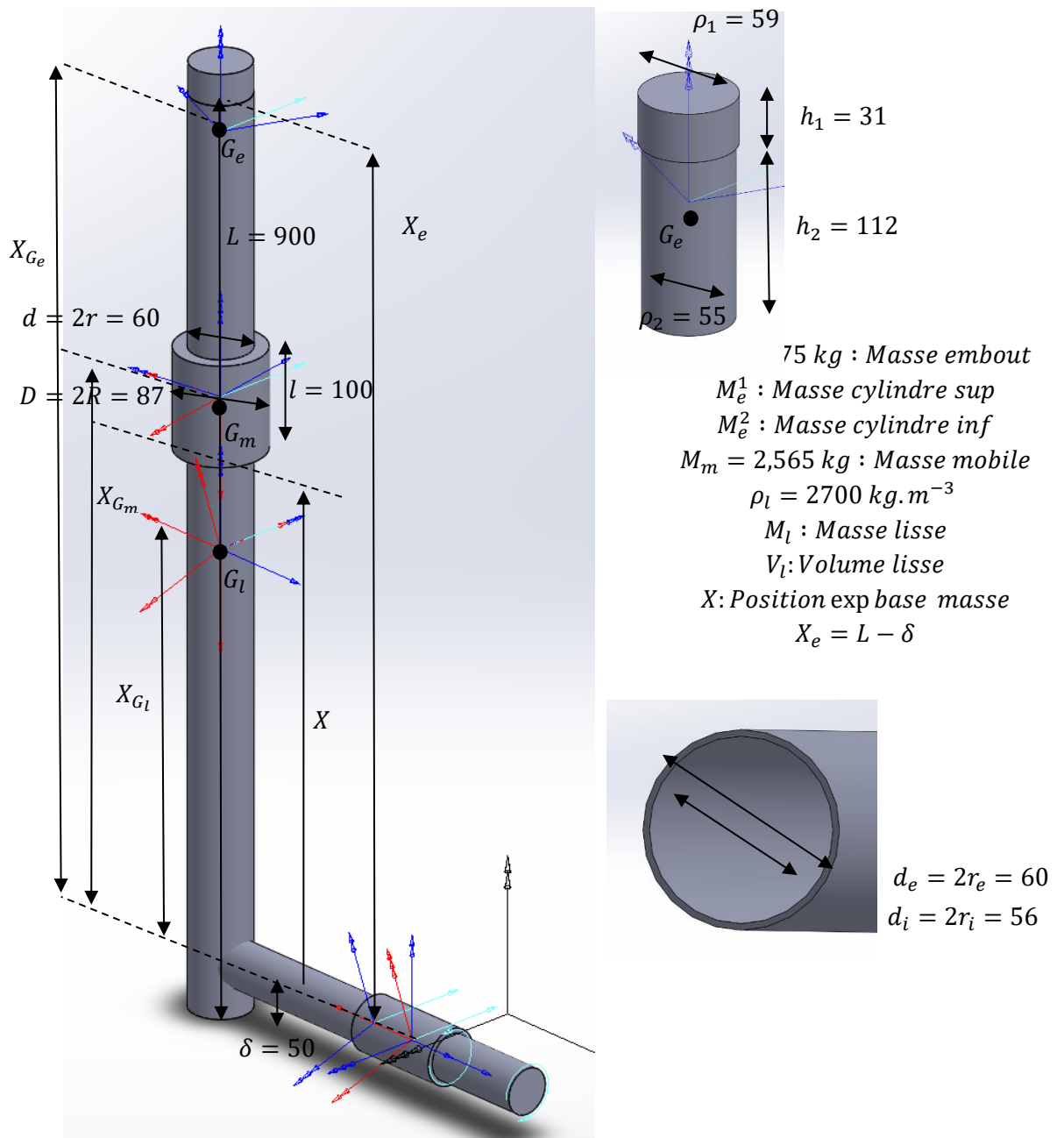
Calage angulaire répondant au CDC	$\theta_0 = 111,99 \text{ (°)} \pm 0,01^\circ$
-----------------------------------	--

Remarque : à partir de $\theta_0 = 99,39 \text{ (°)} \pm 0,01^\circ$, la barrière remonte

Dernière mise à jour	Actions dynamiques des liaisons et	Denis DEFAUCHY
27/03/2017	équations différentielles du mouvement	TP - Correction

Schéma de définition des variables

Dimensions en mm :



Dernière mise à jour	Actions dynamiques des liaisons et	Denis DEFAUCHY
27/03/2017	équations différentielles du mouvement	TP - Correction

Détermination du couple de gravité

$$X_{G_l} = \frac{L}{2} - \delta$$

$$X_{G_e} = X_e + \frac{\frac{h_1}{2} M_e^1 - \frac{h_2}{2} M_e^2}{M_e^1 + M_e^2} = X_e + \frac{\frac{h_1}{2} V_e^1 - \frac{h_2}{2} V_e^2}{V_e^1 + V_e^2} = X_e + \frac{\frac{h_1}{2} V_e^1 - \frac{h_2}{2} V_e^2}{V_e}$$

$$M_l = \rho_l V_l$$

$$X_{G_m} = X + \frac{l}{2}$$

$$M = -[M_e X_{G_e} + M_l X_{G_l} + M_m X_{G_m}] g \cos \theta$$

$$M = -\left[M_e X_{G_e} + M_l X_{G_l} + M_m \left(X + \frac{l}{2}\right)\right] g \cos \theta$$

$$M = -\left[M_e X_{G_e} + M_l X_{G_l} + M_m \frac{l}{2} + M_m X\right] g \cos \theta$$

$$M = -\left[\left[M_e X_{G_e} + M_l X_{G_l} + M_m \frac{l}{2}\right] g + M_m g X\right] \cos \theta$$

$$M = [A + BX] \cos \theta$$

$$A = \left[M_e X_{G_e} + M_l X_{G_l} + M_m \frac{l}{2}\right] g$$

$$B = M_m g$$

$$\begin{cases} A = 26,0222 \text{ (N.m)} \\ B = 25,1627 \text{ (N)} \end{cases}$$

On pourrait valider ces coefficients avec SW en comparant par exemple l'angle d'équilibre moyen de la lisse réel à l'angle obtenu en simulation, je ne l'ai pas fait ni demandé dans le sujet.

Sinon, passer par la résultante de l'action de la gravité et la position du centre de gravité.

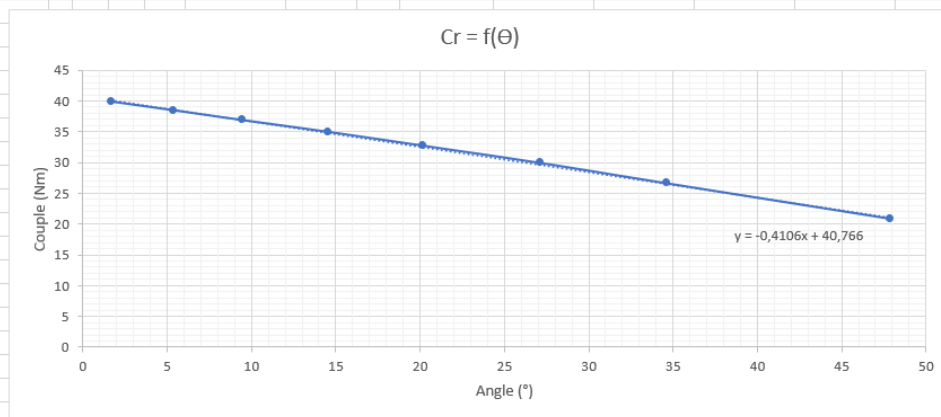
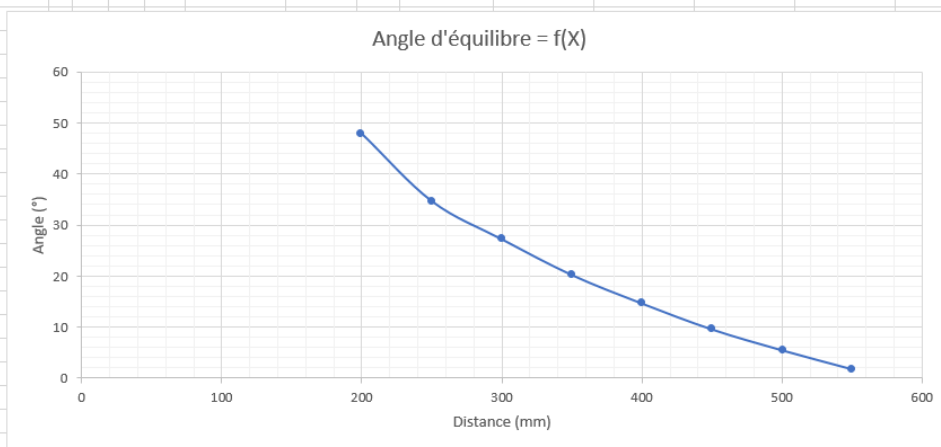
Dernière mise à jour	Actions dynamiques des liaisons et	Denis DEFAUCHY
27/03/2017	équations différentielles du mouvement	TP - Correction

Identification de la formule du couple du ressort

$$C_r(\theta) = C_g(X_{eq}, \theta_{eq})$$

J'ai réalisé des expériences sur 10 secondes. J'ai essayé de faire tenir la lisse en équilibre pour différentes positions de la masse en me plaçant aux extrémités de la zone d'équilibre. J'ai alors pris comme angle d'équilibre le milieu entre les deux valeurs extrêmes. Tout est dans l'Excel fourni.

	X		XGm		Angle eq		Couple eq	Caractéristiques du ressort		
	mm	m	mm	m	°	rd	Nm	a=k		
A 26,0222	200	0,2	250	0,25	47,88	0,84	20,83	-0,4105610	Nm/°	
B 25,1627	250	0,3	300	0,3	34,64	0,60	26,59	-23,5234	Nm/rd	
	300	0,3	350	0,35	27,18	0,47	29,87	b	40,77	Nm
	350	0,4	400	0,4	20,17	0,35	32,69	C(0)	40,77	Nm
	400	0,4	450	0,45	14,58	0,25	34,93	C0=C(90)	3,82	Nm
	450	0,5	500	0,5	9,51	0,17	36,83	θ0=-b/a	99,2925	°
	500	0,5	550	0,55	5,41	0,09	38,43		1,73298	rd
	550	0,6	600	0,6	1,70	0,03	39,84			



On considère que le ressort agit sur la barrière en suivant une loi linéaire du type :

$$C = \pm k(\theta - \theta_0) = \pm(k\theta - k\theta_0) = \pm(a\theta + b)$$

$$a = k$$

$$b = -a\theta_0 \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{b}{a}$$

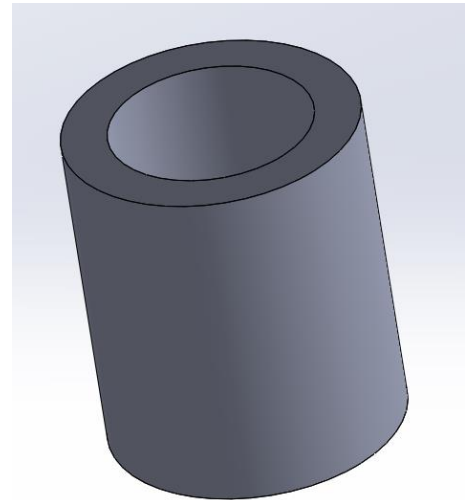
On définit C_0 comme le couple lorsque la barrière est verticale.

Expérimenté	Constructeur
$\begin{cases} k = -0,4105610 \text{ (Nm/°)} \\ \theta_0 = 99,2925 \text{ (°)} \\ C_0 = 3,80 \text{ Nm} \end{cases}$	$\begin{cases} k = 0,405 \text{ Nm/°} \\ C_0 = 4,5 \text{ Nm} \end{cases}$

Dernière mise à jour	Actions dynamiques des liaisons et	Denis DEFAUCHY
27/03/2017	équations différentielles du mouvement	TP - Correction

Calcul de l'inertie

Masse mobile de révolution sur \vec{x} (longueur 100 mm):



$$I(G, m) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}^B ; \quad A = \int_V (y^2 + z^2) dm \quad ; \quad B = C = \frac{A}{2} + \int_V x^2 dm$$

$$M_m = \rho_m l \pi (R^2 - r^2)$$

$$A = \int_V (y^2 + z^2) dm = \int_V r^2 dm = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_r^R \int_0^{2\pi} r^2 r dr d\theta dx = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_r^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$A = \rho L \frac{(R^4 - r^4)}{4} 2\pi = \rho L \pi (R^2 - r^2) \frac{(R^2 + r^2)}{2} = M_c \frac{R^2 + r^2}{2}$$

$$\int_V x^2 dm = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx \int_r^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(R^2 - r^2)}{2} 2\pi = \rho \frac{2L^3}{8} \frac{(R^2 - r^2)}{6} 2\pi$$

$$= \rho L \pi (R^2 - r^2) \frac{L^2}{12} = M_c \frac{L^2}{12}$$

$$B = C = \frac{A}{2} + \int_V x^2 dm = M_m \frac{(R^2 + r^2)}{4} + M_m \frac{L^2}{12} = M_m \left(\frac{L^2}{12} + \frac{(R^2 + r^2)}{4} \right)$$

$$I(G, m) = \begin{bmatrix} M_c \frac{R^2 + r^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & M_c \left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2 + r^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & M_c \left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2 + r^2}{4} \right) \end{bmatrix}^B$$

$$i = 2, 4$$

Avec les données :

$$I_m^G = M_m \left(\frac{l^2}{12} + \frac{R^2 + r^2}{4} \right)$$

$$I_m^O = I_m^G + M_m * X_{Gm}^2$$

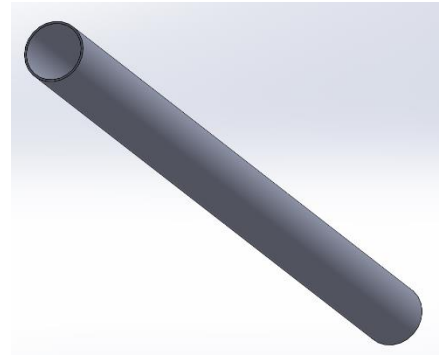
Dernière mise à jour	Actions dynamiques des liaisons et équations différentielles du mouvement	Denis DEFAUCHY
27/03/2017		TP - Correction

Lisse de révolution sur \vec{x} :

$$M_l = \rho_l L \pi (r_e^2 - r_i^2)$$

$$I_l^G = M_l \left(\frac{L^2}{12} + \frac{r_e^2 + r_i^2}{4} \right)$$

$$I_l^O = I_l^G + M_l * \left(\frac{L}{2} \right)^2$$



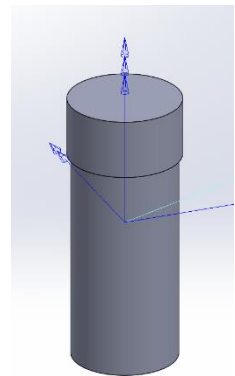
Gros cylindre poids fixe :

$$M_{e1} = \rho_e h_1 \pi \left(\frac{\rho_1}{2} \right)^2$$

$$I_{e1}^{G1} = M_{e1} \left(\frac{h_1^2}{12} + \frac{\left(\frac{\rho_1}{2} \right)^2}{4} \right)$$

$$I_{e1}^O = I_{e1}^{G1} + M_{e1} * X_{G_{e1}}$$

$$X_{G_{e1}} = X_e + \frac{h_1}{2}$$



Petit cylindre poids fixe :

$$M_{e2} = \rho_e h_2 \pi \left(\frac{\rho_2}{2} \right)^2$$

$$I_{e2}^{G2} = M_{e2} \left(\frac{h_2^2}{12} + \frac{\left(\frac{\rho_2}{2} \right)^2}{4} \right)$$

$$I_{e2}^O = I_{e2}^{G2} + M_{e2} * X_{G_{e2}}$$

$$X_{G_{e2}} = X_e - \frac{h_2}{2}$$

On néglige inertie axe + pièce de guidage du galet

$$I_O = I_m^O + I_l^O + I_e^O = I_{em}^O + I_m^O = I_{em}^O + I_m^G + M_m X_{G_m}^2 = I_{em}^O + I_m^G + M_m \left(X + \frac{l}{2} \right)^2$$

$$I_{em}^O = I_l^O + I_e^O$$

$$I_O = I_{em}^O + I_m^G + M_m X^2 + M_m \left(\frac{l}{2} \right)^2 + M_m X l$$

$$I_O = M_m X^2 + l M_m X + \left[I_{em}^O + I_m^G + M_m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_O = a X^2 + b X + c$$

$$\begin{cases} a = M_m \\ b = l M_m \\ c = I_{em}^O + I_m^G + M_m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \end{cases}$$

Dernière mise à jour	Actions dynamiques des liaisons et équations différentielles du mouvement	Denis DEFAUCHY
27/03/2017		TP - Correction

Masse mobile			Lisse			Embout gros cylindre			Masse bout petit cylindre		
Mm	2,565	kg	L	0,9	m	Me1	0,65	kg	Me2	2,03	kg
l	0,1	m	ri	0,028	m	h1	0,031	m	h2	0,112	m
r	0,03	m	re	0,03	m	p1	0,059	m	p2	0,055	m
R	0,0435	m	MI	0,88555214	kg	IG1e1	0,00019234	kg.m ²	I2Ge2	0,00250435	kg.m ²
lgm	0,00392803	kg.m ²	lgl	0,06014759	kg.m ²	XGe1	0,87	m	XGe2	0,79	m
Delta	0,05	m	XGl	0,4	m	IOe1	0,48424989	kg.m ²	IOe2	1,28153675	kg.m ²
X	0,4	m	lol	0,20183593	kg.m ²			loe	1,76578664		
XGm	0,45	m									
IOm	0,52334053	kg.m ²									

IOem	1,96762257
------	------------

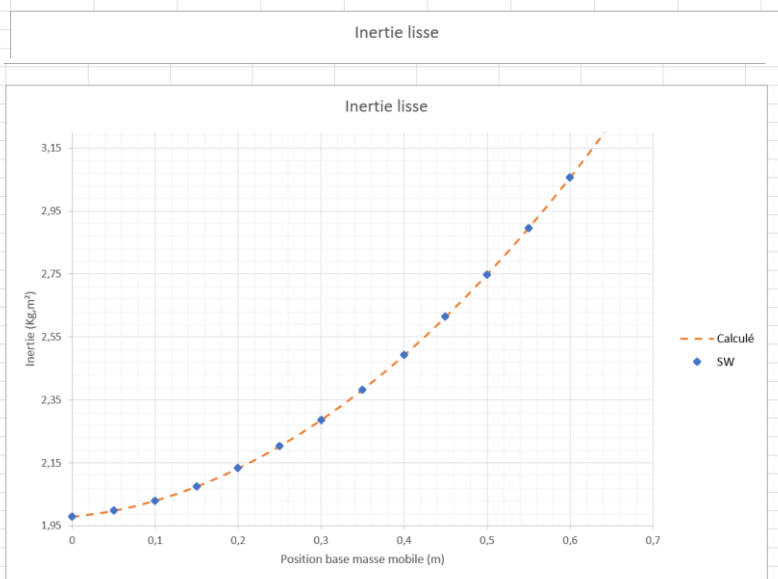
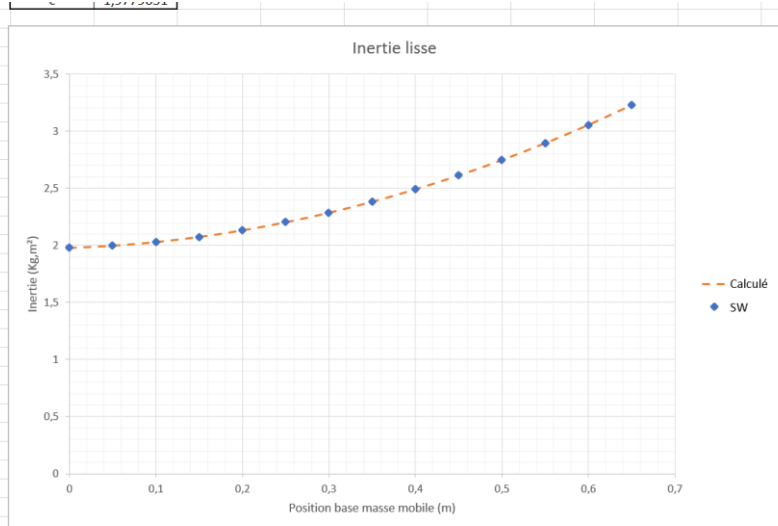
a	2,565
b	0,2565
c	1,9779631

x	XGm	lom	lo tot
0	0,05	0,0103	1,9779631
0,05	0,1	0,0296	1,9972006
0,1	0,15	0,0616	2,0292631
0,15	0,2	0,1065	2,0741506
0,2	0,25	0,1642	2,1318631
0,25	0,3	0,2348	2,2024006
0,3	0,35	0,3181	2,2857631
0,35	0,4	0,4143	2,3819506
0,4	0,45	0,5233	2,4909631
0,45	0,5	0,6452	2,6128006
0,5	0,55	0,7798	2,7474631
0,55	0,6	0,9273	2,8949506
0,6	0,65	1,0876	3,0552631
0,65	0,7	1,2608	3,2284006

Inertie SW: lxx	
0	1,97927
0,05	1,99851
0,1	2,03057
0,15	2,07546
0,2	2,13317
0,25	2,20371
0,3	2,28707
0,35	2,38326
0,4	2,49227
0,45	2,61411
0,5	2,74877
0,55	2,89626
0,6	3,05657
0,65	3,22971

0,55	2,89626
0,6	3,05657
0,65	3,22971

Je n'ai pas triché :) Ca colle presque parfaitement !!!
Ma formule est donc juste
La différence vient de l'inertie de l'axe que je n'ai pas prise en compte dans mon calcul
Améliorations: prendre en compte cet axe sous SW et la pièce qui guide le gilet



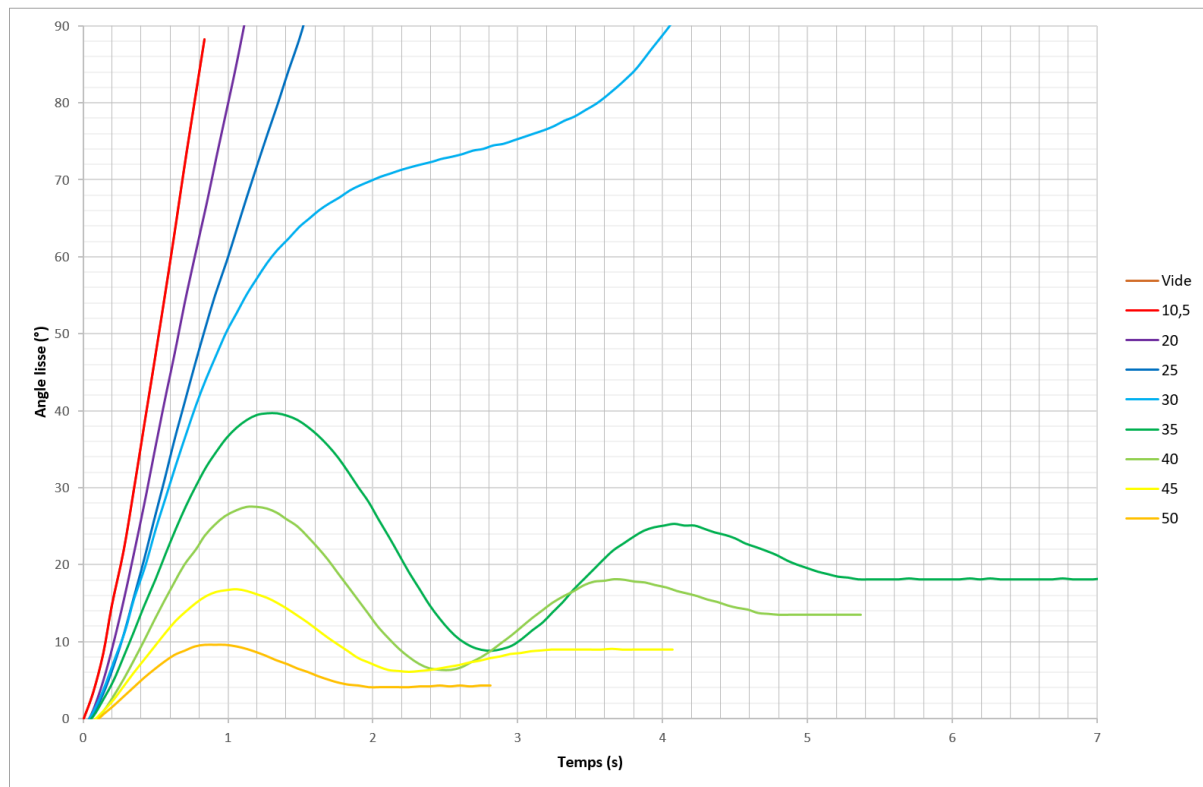
L'inertie calculée et l'inertie obtenue avec SW sont parfaitement les mêmes, à la différence près que sous SW, j'ai l'inertie de l'axe en plus, que je n'ai pas prise en compte dans mon calcul.

$$J(X) = aX^2 + bX + c ; \quad \begin{cases} a = M_m \\ b = lM_m \\ c = I_{em}^0 + I_m^G + M_m \left(\frac{l}{2}\right)^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = 2,565 \text{ (kg)} \\ b = 0,2565 \text{ (kg.m)} \\ c = 1,977963 \text{ (kg.m}^2\text{)} \end{cases}$$

Dernière mise à jour	Actions dynamiques des liaisons et équations différentielles du mouvement	Denis DEFAUCHY
27/03/2017		TP - Correction

Tracé des réponses expérimentales de la lisse

Après avoir fait évoluer la lisse pour différentes positions de la masse, j'ai exporté les mesures sur Excel et recalé chaque courbe puis tracé :



Inversion pour résolution numérique

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \theta(t+dt) = \theta(t) + dt \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{dt^2}{2} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + o(dt^2) \\ \theta(t-dt) = \theta(t) - dt \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{dt^2}{2} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + o(dt^2) \end{cases} \\
 &\Rightarrow \theta(t+dt) + \theta(t-dt) = 2\theta(t) + dt^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \\
 &\Rightarrow \frac{d^2(\theta(t))}{dt^2} = \frac{\theta(t+dt) + \theta(t-dt) - 2\theta(t)}{dt^2} \\
 &\ddot{\theta}(t) = \frac{\theta(t+dt) + \theta(t-dt) - 2\theta(t)}{dt^2} \\
 &\theta(t+dt) = \ddot{\theta}(t)dt^2 + 2\theta(t) - \theta(t-dt)
 \end{aligned}$$

Dernière mise à jour	Actions dynamiques des liaisons et équations différentielles du mouvement	Denis DEFAUCHY
27/03/2017		TP - Correction

Identification des frottements secs

En exploitant mes mesures initiales d'équilibre qui balayaient la zone d'équilibre, j'ai calculé la somme des couples $C_g + C_r$ qui en théorie n'est nulle qu'à l'équilibre.

J'ai donc calcul cette somme sur les deux extrémités de l'intervalle d'équilibre pour différentes positions de la masse.

J'espérais avoir un couple positif, l'autre négatif, mais en fait non et c'est normal.

En effet, C_r est une approximation obtenue à l'aide de mesures. Et comme C_{fs} est assez petit, les erreurs se cumulent.

Finalement, j'ai choisi de mesurer la différence des couples en position d'équilibre basse et haute et de diviser cette plage par 2.

J'ai ensuite fait la moyenne des valeurs pour chaque position de masse :

$$C_{fs} = 0,26 \text{ (N.m)}$$

X		θ Min eq		θ Max eq		Delta θ	θ Milieu		Milieu			Min			Max			(Min - Max)/2
mm	m	°	rd	°	rd	°	°	rd	Cp	Cr	Cp+Cr	Cp	Cr	Cp+Cr	Cp	Cr	Cp+Cr	
200	0,2	46,26	0,81	49,49	0,86	3,23	47,88	0,84	-20,83	21,11	0,28	-21,47	21,77	0,30	-20,17	20,45	0,27	0,01
250	0,25	32,92	0,57	36,35	0,63	3,43	34,64	0,60	-26,59	26,55	-0,04	-27,12	27,25	0,13	-26,03	25,84	-0,18	0,15
300	0,3	25,08	0,44	29,27	0,51	4,19	27,18	0,47	-29,87	29,61	-0,26	-30,41	30,47	0,06	-29,28	28,75	-0,54	0,30
350	0,35	18,45	0,32	21,88	0,38	3,43	20,17	0,35	-32,69	32,49	-0,21	-33,04	33,19	0,15	-32,32	31,78	-0,54	0,34
400	0,4	13,14	0,23	16,02	0,28	2,88	14,58	0,25	-34,93	34,78	-0,15	-35,14	35,37	0,23	-34,69	34,19	-0,50	0,36
450	0,45	8,29	0,14	10,72	0,19	2,43	9,51	0,17	-36,83	36,86	0,03	-36,96	37,36	0,41	-36,69	36,36	-0,33	0,37
500	0,5	4,42	0,08	6,39	0,11	1,97	5,41	0,09	-38,43	38,55	0,11	-38,49	38,95	0,46	-38,36	38,14	-0,22	0,34
550	0,55	1,19	0,02	2,2	0,04	1,01	1,70	0,03	-39,84	40,07	0,23	-39,85	40,28	0,42	-39,83	39,86	0,03	0,20
																		0,26

Permet de vérifier que c'est logique

Du fait des explications précédentes, une légère incertitude plane sur ce coefficient.

Dernière mise à jour	Actions dynamiques des liaisons et équations différentielles du mouvement	Denis DEFAUCHY
27/03/2017		TP - Correction

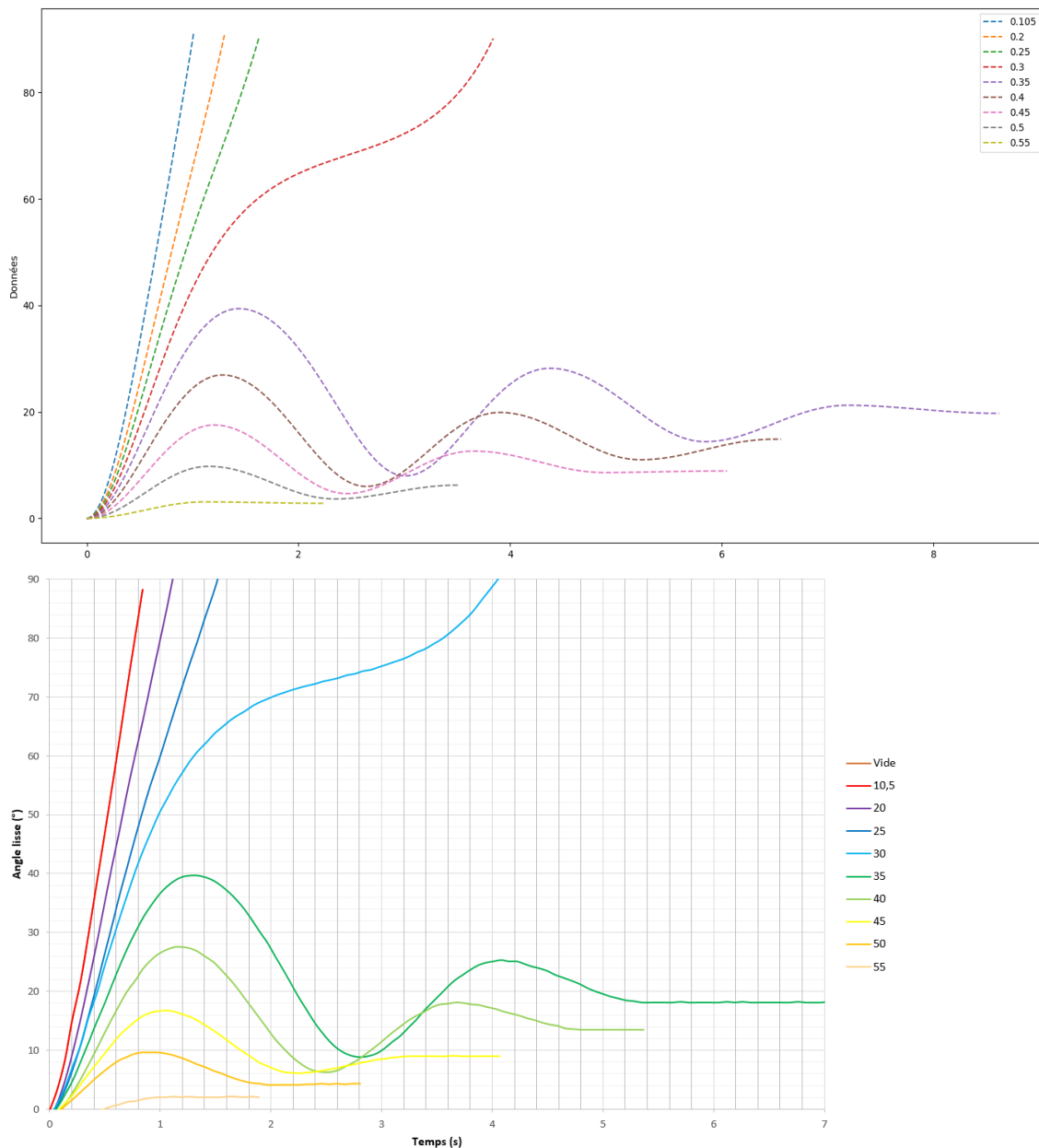
Résolution Python & Frottements fluides

La résolution a lieu tant que l'angle ne dépasse pas 90°, que le temps ne dépasse pas 10 secondes, et surtout, il a fallu trouver un critère d'arrêt lié aux frottements secs. En effet, quand la lisse s'arrête dans la réalité, sous python, le couple de frottement sec opposé au mouvement crée des oscillations. J'étudie les changements de signe de la vitesse, dès qu'il y en a 3 d'affilée, on arrête.

En recalant à tâtons le coefficient de frottements visqueux, je trouve :

$$C_{fv} = 0,451 \text{ (N.m.s.rd}^{-1}\text{)}$$

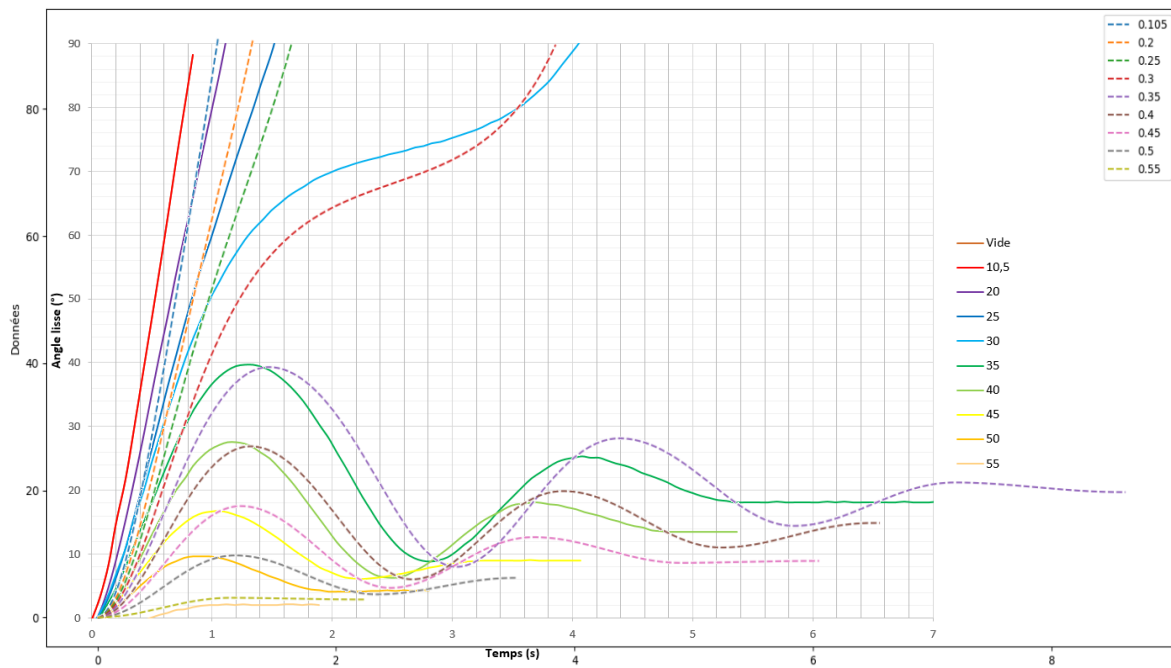
Précisons que ce coefficient a une grande influence sur le comportement transitoire observé pour la masse à 35 cm. J'ai donc réglé ce coefficient pour qu'à 35 cm sous Python, on observe le même comportement qu'en réel.



Ça colle pas trop mal ☺

Je ne suis pas exactement parti de 0 à chaque fois... Dommage

En les mettant l'une sur l'autre par transparence :

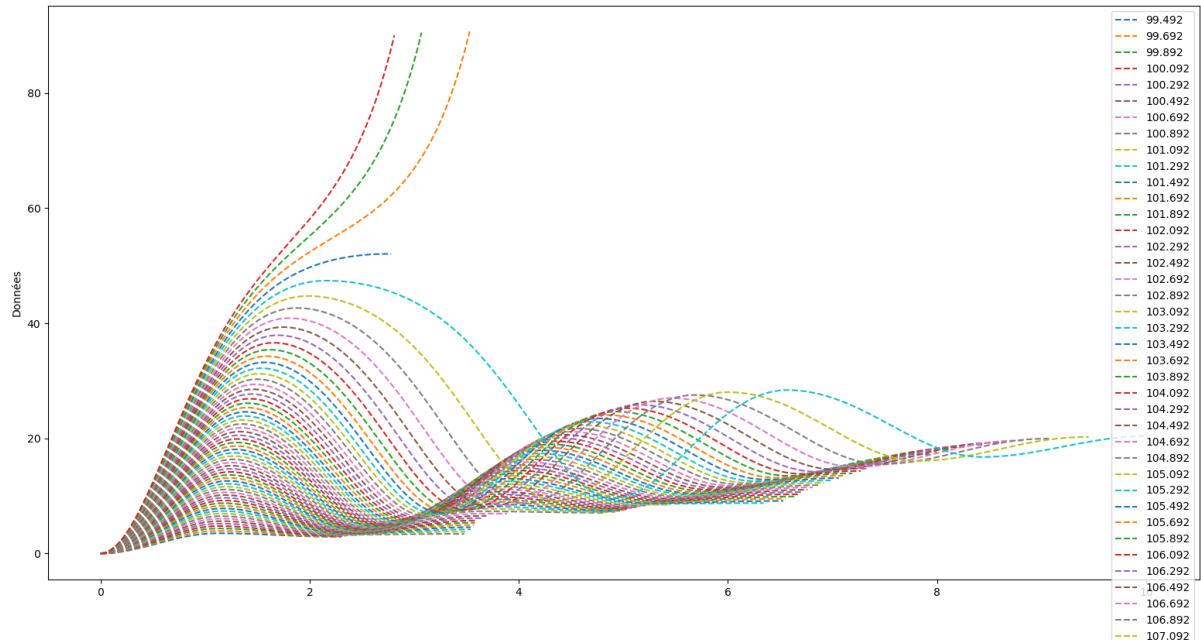


Dernière mise à jour	Actions dynamiques des liaisons et	Denis DEFAUCHY
27/03/2017	équations différentielles du mouvement	TP - Correction

Réponse à la problématique

On ajoute une boucle while au code qui permet de récupérer, pour différents calages incrémentés depuis le calage actuel, le temps de fin et l'angle de fin.

Il faut à la fois que l'angle dépasse 90 et que le temps soit inférieur au critère de 3 secondes.



Remarque : à partir de $\theta_0 = 99,39 (^{\circ}) \pm 0,01^{\circ}$, la barrière remonte

Le calage répondant au cahier des charges est :

$$\theta_0 = 111,99 (^{\circ}) \pm 0,01^{\circ}$$

Pour avoir cette précision, l'incrément d'angle est de $0,2^{\circ}$

Comportement final de la lisse :

