

**Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement en utilisant les méthodes énergétiques.**

**Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur**

## Cours

### Chapitre 1 Approche énergétique

*Savoirs et compétences :*

- Mod2.C16 : torseur cinétique
- Mod2.C17 : torseur dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Objectif de la modélisation . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Puissance</b>	<b>2</b>
2.1	Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel . . . . .	2
2.2	Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide	2
2.3	Puissance d'actions mutuelles entre deux solides . . . . .	2
2.4	Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Travail</b>	<b>3</b>
3.1	Définition . . . . .	3
3.2	Travail conservatif . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Énergie cinétique</b>	<b>4</b>
4.1	Définition . . . . .	4
4.2	Propriétés . . . . .	4
4.3	Énergie cinétique équivalente . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Théorème de l'énergie cinétique</b>	<b>5</b>
5.1	Introduction . . . . .	5
5.2	Énoncé pour un solide . . . . .	5
5.3	Énoncé pour un ensemble de solides . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Notion de rendement énergétique</b>	<b>5</b>
6.1	Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle . . . . .	5
6.2	Détermination d'une puissance dissipée . . . . .	6
1		82

# 1 Introduction

## 1.1 Objectif de la modélisation

Dans ce chapitre nous aborderons les notions de **puissance**, **travail**, et **énergie**. Ces notions sont fondamentales pour :

- dimensionner des composants d'une chaîne d'énergie en terme de puissance transmissible;
- déterminer des équations de mouvement pour prévoir les performances d'un système;
- estimer le rendement d'une chaîne complète d'énergie.

# 2 Puissance

## 2.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

**Définition** On définit la **puissance d'une action mécanique extérieure** à un ensemble matériel ( $E$ ) en mouvement par rapport à un référentiel  $R$  subissant une densité d'effort  $\vec{f}(M)$  (où  $M$  est un point courant de ( $E$ )) comme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \overline{V}(M \in E/R) dV.$$

(R) On appellera **puissance galiléenne**, la puissance d'un ensemble matériel ( $E$ ) en mouvement dans un **référentiel galiléen**  $R_g : \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ .

! **Dimensions et homogénéité.**

- Une puissance est une **grandeur scalaire** s'exprimant en *Watt*.
- Elle est homogène à un produit entre un effort et une vitesse et peut donc s'exprimer en unité SI en  $\text{Nms}^{-1}$ .
- Historiquement on a utilisé longtemps les « chevaux » ou « cheval vapeur » (1 ch = 736 W).

**Propriété — Calcul des actions mécaniques s'appliquant sur un ensemble  $E$ .** On considère un ensemble matériel  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$ .

Dans la pratique pour calculer la puissance totale des actions mécaniques s'appliquant sur  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  il faut sommer toutes les puissances s'appliquant sur les  $S_i$  venant de l'extérieur de  $E$  :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \sum_{\forall S_i \in E} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_i/R).$$

## 2.2 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide

**Définition — Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ( $S$ ).** La **puissance d'une action mécanique extérieure** à un solide ( $S$ ) en mouvement dans un référentiel  $R$  peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit ( $S$ ) et le torseur cinématique du mouvement de  $S$  dans le référentiel  $R$ .

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}.$$

(!) On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point**.

(R)

- Le comoment des torseurs est défini par  $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)}}{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \right\}_P \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(S/R)}}{\overrightarrow{V(P \in S/R)}} \right\}_P$   
 $= \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P \in S/R)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}.$
- Lorsque le torseur cinématique de  $S/R$  est un couple (mouvement de translation) alors en tout point  $A$  la puissance est alors donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P \in S/R)} \forall P$ .
- Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)} \forall P$ .

## 2.3 Puissance d'actions mutuelles entre deux solides

**Définition — Puissance d'actions mutuelles entre deux solides.** Soient deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) distincts, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $R_g$ , et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. **La puissance des actions mutuelles entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ )**, dans leur mouvement par rapport au repère  $R$ , est :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2 / R_g) = \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2 / R_g) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1 / R_g).$$

**La puissance des actions mutuelles** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) **est indépendante du repère  $R$** . Ainsi,

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2 / R) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2).$$

R

- On peut parler parfois de **puissance des inter-efforts**.
- Pour un ensemble  $E$ , on peut exprimer l'ensemble de la puissance des inter-effort comme la puissance intérieure à l'ensemble  $E$  :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j).$$

## 2.4 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

**Définition — Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons.** Si deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2 / S_1)\}.$$

La **liaison parfaite** si et seulement si quel que soit le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre  $S_1$  et  $S_2$  est nulle**.

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$

R

- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solide  $S_1$  et  $S_2$ . Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.
- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

## 3 Travail

### 3.1 Définition

**Définition — Travail.** Le travail entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  d'une action mécanique s'exerçant sur un ensemble matériel  $E$  dans son mouvement par rapport au repère  $R$  est donné par :

$$W_{t_1}^{t_2}(\text{ext} \rightarrow E / R) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E / R) dt.$$

R

On peut également définir le travail élémentaire par :

$$dW(\text{ext} \rightarrow E / R) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E / R) dt.$$

- Le travail est une grandeur scalaire.
- L'unité de travail est le **Joule**.
- Le travail est homogène au **produit entre une force et une distance**.

### 3.2 Travail conservatif

**Définition — Travail conservatif.** On dit que le **travail est conservatif** (noté  $W_c^{t_2}_{t_1}(\text{ext} \rightarrow E / R)$ ) s'il est indépendant du chemin suivi pour passer de l'état initial (instant  $t_1$ ) à l'état final (instant  $t_2$ ). Dans ce cas là il existe une grandeur appelée énergie potentielle de l'action mécanique extérieure à  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  qui vérifie :

$$dW_c(\text{ext} \rightarrow E / R) = -dE_p(\text{ext} \rightarrow E / R) \quad \text{avec} \quad dW_c(\text{ext} \rightarrow E / R) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E / R) dt.$$

On peut également l'écrire sous la forme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = -\frac{dE_p(\text{ext} \rightarrow E/R)}{dt}.$$

(R)

- On dit que la puissance à travail conservatif dérive d'une énergie potentielle (au signe près).
- L'énergie potentielle est une primitive de la puissance. Elle est donc définie à une constante près arbitraire.

### 3.2.1 Énergie potentielle de la pesanteur

**Définition — Énergie potentielle de la pesanteur.** L'énergie potentielle associée à l'action de la pesanteur sur un ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  dans son mouvement par rapport à  $R$  est donnée par :

$$E_p(g \rightarrow E/R) = m g z_G + k.$$

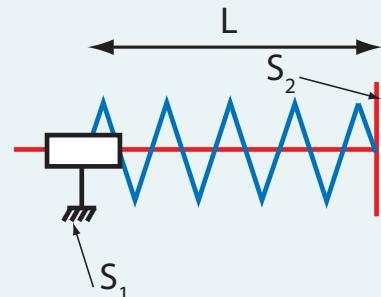
Où  $z_G$  correspond à la position du centre de gravité  $G$  de  $S$  suivant la verticale ascendante  $\vec{z}$  (colinéaire au champs de pesanteur  $\vec{g}$ ) et  $k$  une constante.

### 3.2.2 Énergie potentielle associée à un ressort

**Définition — Énergie potentielle associée à un ressort.**

L'énergie potentielle associée à l'action d'un ressort  $r$  de raideur  $K$  et de longueur à vide  $L_0$  situé entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$  dans son mouvement par rapport à  $R$  est donnée par :

$$E_p(r \rightarrow S_1, S_2/R) = \frac{K}{2}(L - L_0)^2 + k \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$



## 4 Énergie cinétique

### 4.1 Définition

**Définition — Énergie cinétique.** On définit l'énergie cinétique  $E_c$  d'un système matériel  $S$  en mouvement dans un référentiel  $R$  comme la somme des carrés de la vitesse en chaque point courant  $P$  de  $S$  pondéré de la masse élémentaire :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} (\vec{V}(P/R))^2 dm.$$

### 4.2 Propriétés

**Propriété — Expression avec les comoments.** L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \{\mathcal{V}(S/R)\} \otimes \{\sigma(S/R)\}.$$

!

Il faudra bien veiller à ce que chacun des torseurs soit exprimé en un même point.

**Propriété — Cas particuliers.**

- Solide  $S$  de masse  $M$  de centre d'inertie  $G$  en mouvement de **translation** par rapport à  $R$  :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} M \overrightarrow{V(G \in S/R)}^2.$$

- Solide  $S$  de moment d'inertie  $I_{Oz}(S)$  en mouvement de rotation par rapport à l'**axe fixe** ( $O, \vec{z}$ ) par rapport  $R$  :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} I_{Oz}(S) \overrightarrow{\Omega(S/R)}^2.$$

### 4.3 Énergie cinétique équivalente

**Définition — Énergie cinétique équivalente.** Lorsqu'un problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et pour simplifier les calculs, on peut exprimer l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$  en fonction d'un seul paramètre cinématique. On peut alors écrire  $E_c(E/R)$

- avec **son inertie équivalente**  $J_{\text{eq}}(E)$  (en  $\text{kg m}^2$ ) rapportée à un paramètre de rotation  $\dot{\theta}(t)$ :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} J_{\text{eq}}(E) \dot{\theta}^2.$$

- avec **sa masse équivalente**  $M_{\text{eq}}(E)$  (en kg) rapportée à un paramètre de translation  $\dot{x}(t)$ :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} M_{\text{eq}}(E) \dot{x}^2.$$

## 5 Théorème de l'énergie cinétique

### 5.1 Introduction

Le théorème de l'énergie cinétique est la traduction du Principe Fondamental de la Dynamique d'un point de vue énergétique.

### 5.2 Énoncé pour un solide

**Théorème — Théorème de l'énergie cinétique.** La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_g$  est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à  $S$ . Soit :

$$\frac{dE_c(S/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{S} \rightarrow S/R_g).$$

### 5.3 Énoncé pour un ensemble de solides

**Théorème — Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides.** Soit  $(E)$  un ensemble de  $n$  solide ( $S_1, S_2, \dots, S_n$ ) en mouvement par rapport à un repère galiléen  $R_g$ . Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{dE_c(E/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j / R_g) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) + \mathcal{P}_{\text{int}}(E).$$

Avec :

- $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$  la puissance intérieure à  $E$  qui est nulle s'il n'y a pas d'apport d'énergie interne ni de dissipation (liaisons parfaites) ;
- $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ , la puissance galiléenne de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_g$ .

(R)

- Dans le théorème de l'énergie cinétique, contrairement au principe fondamental de la dynamique, on tient compte de la puissance des actions mutuelles donc internes à l'ensemble matériel  $E$  que l'on considère.
- Ce théorème permet d'obtenir une seule équation scalaire. Cette méthode est donc moins riche que le principe fondamental de la dynamique mais permet d'obtenir quasiment directement les équations de mouvements.
- Pour obtenir une équation de mouvement (ie éliminer les inconnues en actions mécaniques) il faut alors combiner d'autres équations issues des théorèmes généraux de la dynamique.

## 6 Notion de rendement énergétique

### 6.1 Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle

Une étude dynamique d'une chaîne fonctionnelle peut se décomposer en deux parties :

- en **régime permanent** (variation d'énergie cinétique négligeable) : étude des effets dissipatifs pour estimer une puissance nominale des actionneurs ;
- en **régime transitoire** : évaluation du complément de puissance pour permettre au système de fonctionner.

**Définition — Rendement d'une chaîne fonctionnelle.** Le rendement se définit **en régime permanent** comme la puissance utile sur la puissance d'entrée d'une chaîne fonctionnelle :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})}.$$

- $\eta \in [0, 1]$ ;
- $\mathcal{P}(\text{entrée}) > 0$  définit la puissance fournie par l'actionneur **en régime permanent**;
- $\mathcal{P}(\text{utile}) > 0$  définit la puissance fournie à l'aval d'une chaîne fonctionnelle (effecteur par exemple) **en régime permanent**.

**Propriété — Rendement global d'une chaîne d'énergie.** Le **rendement global** d'une chaîne d'énergie comportant  $n$  éléments de rendements  $\eta_i$  est donné par :

$$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i \leq 1.$$

Chacun des rendements successifs  $\eta_i$  étant au plus égale à 1, le rendement global est nécessairement inférieur ou égal au plus mauvais rendement.

## 6.2 Détermination d'une puissance dissipée

**Propriété — Estimation des dissipations.** On peut évaluer en régime permanent les pertes ou puissance dissipée à partir de la connaissance du rendement  $\eta$  :

$$\mathcal{P}(\text{dissipée}) = (1 - \eta) \cdot \mathcal{P}(\text{entrée}).$$

## Références

[1] Émilien Durif, *Approche énergétique des systèmes*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.

## Activation 1



### Activation – Système de dépose de composants électroniques

Émilien Durif – E3A PSI 2011

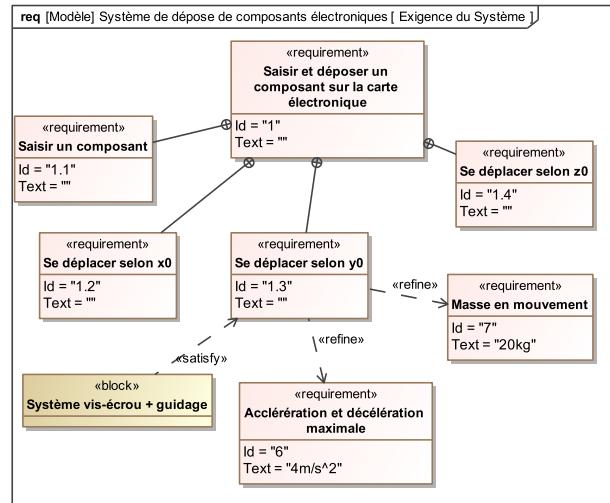
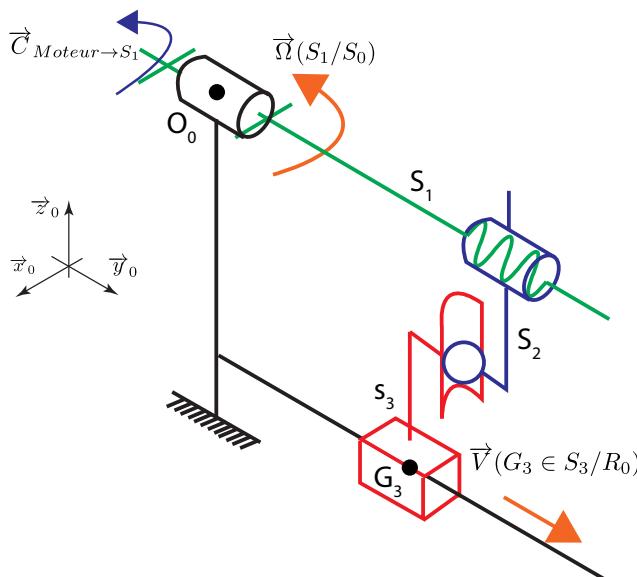
Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée  $\vec{y}_0$ ) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement « vis-écrou ».

#### Hypothèses :

- le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
- les solides seront supposés indéformables;
- on notera  $J_1$  le moment d'inertie du solide 1 (composé d'une vis à billes et de l'arbre moteur) selon l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  :  $J_1 = I_{(O_0, \vec{y}_0)}(S_1)$ ;
- on note  $M_3$  et  $G_3$  respectivement la masse et le centre d'inertie du solide  $S_3$ ;
- la position de  $G_3$  est définie par  $\overrightarrow{O_0 G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement) sauf la glissière entre  $S_0$  et  $S_3$  (Coefficient de frottement noté  $\mu$ ) et la pivot entre  $S_0$  et  $S_1$  (couple résistant noté  $C_r$ );
- seul l'action de pesanteur sur  $S_3$  sera supposée non négligeable.



- $S_0$  : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti.
- $S_1$  : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur.
- $S_2$  : écrou de la vis à billes (inertie négligeable).
- $S_3$  : chariot supportant la tête de dépose (masse  $M_3$ ).

#### Données numériques associées au système :

- Coefficient de frottement dans la liaison glissière (rail + patin à billes) :  $\mu = 0,1$ .
- Pas de la vis à billes :  $p = 20\text{ mm}$ .
- Diamètre de la vis à billes :  $D = 25\text{ mm}$ .
- Moment d'inertie de la vis à billes suivant l'axe  $\vec{y}_0$  :  $I_b = 2,15 \times 10^{-4}\text{ kg m}^2$ .
- Couple résistant sur la vis due à son guidage (palières + joints) :  $C_r = 3\text{ Nm}$ .
- $l$ , longueur libre de la vis – entre deux palières – (mm) :  $1000\text{ mm}$ .
- Caractéristiques du moteur d'axe (puissance, vitesse maxi, inertie) :
  - couple maximal,  $C_{\max} = 21,2\text{ Nm}$ ;
  - fréquence de rotation maximale,  $N_m = 6000\text{ tr/min}$ ;
  - moment d'inertie du rotor du moteur suivant l'axe  $\vec{y}_0$ ,  $I_m = 1,6 \times 10^{-4}\text{ kg m}^2$ .

**Objectif** L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur) :

- couple moteur transmis à  $S_1$  :  $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow S_1} \cdot \vec{y}_0 = C_m(t)$ ;
  - vitesse de rotation de  $S_1$  :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{\theta}(t)$ ;
- à celles liées à l'effecteur (tête de dépose  $S_3$ ) :
- masse :  $M_3$ ;
  - cinématique de  $S_3$  :  $\vec{a}(G_3 R_0) \cdot \vec{y}_0 = \ddot{y}(t)$ .

On considère l'ensemble  $E = \{S_1 + S_2 + S_3\}$ .

**Question 1** Construire le graphe des liaisons modélisant le système entier.

**Question 2** Déterminer l'expression de  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$  en fonction de puissances extérieures élémentaires (on ne développera pas les calculs explicitement pour l'instant).

**Question 3** Calculer  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$  en fonction des données du problème.

**Question 4** Calculer l'ensemble des puissances des actions mutuelles dans les liaisons pour l'ensemble  $E$  :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$ .

**Question 5** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$

**Question 6** Déterminer la mobilité du système.

**Question 7** Déterminer une relation entre les paramètres cinématiques du problème.

**Question 8** Déterminer l'inertie équivalente de  $E$  ramenée à la rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  et du para-

mètre  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 9** Déterminer la masse équivalente de  $E$  ramené à la translation selon la direction  $\vec{y}_0$  et du paramètre  $\dot{y}(t)$ .

**Question 10** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $E$ .

**Question 11** Déterminer des équations supplémentaires issues des théorèmes généraux pour déterminer l'équation de mouvement du système permettant de relier  $C_m$  à  $y(t)$ .

**Question 12** Déterminer le couple moteur à fournir dans le cas le plus défavorable (accélération maximale).

On cherche à déterminer en régime permanent les pertes au niveaux de la liaison hélicoïdale entre  $S_1$  et  $S_2$ . On considère donc les actions mécaniques de frottement nulles partout ailleurs dans le système global. On introduit alors un rendement  $\eta$  défini en régime permanent et donc à variation d'énergie cinétique négligeable.

**Question 13** En considérant le système  $E_1 = \{S_1 + S_2\}$ , définir le rendement.

**Question 14** On définit la puissance dissipée comme la puissance des inter-effort entre  $S_1$  et  $S_2$ . En appliquant un théorème de l'énergie cinétique à  $S_2/R_0$  et  $S_1/R_0$  en régime permanent donner l'expression des puissances dissipées dans la liaison hélicoïdale.

On donne :

- Rendement  $\eta$  dans la liaison hélicoïdale :  $\eta = 0,8$ ;

**Question 15** Déterminer dans ces conditions les dissipations.

## Application 1



### Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

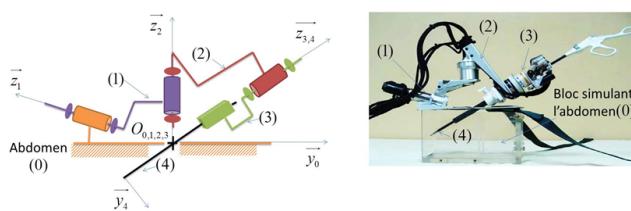
Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

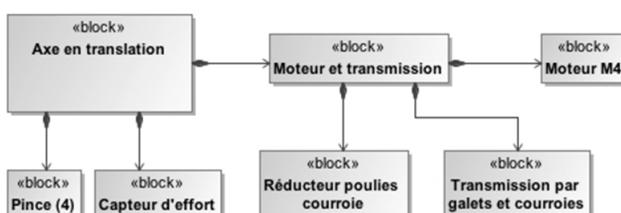
#### Mise en situation

Le robot MC<sup>2</sup>E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.



Les blocs permettant de réaliser le mouvement de translation sont présentés ci-dessous.



Pour cela un moteur réducteur entraîne via 3 systèmes poulie-courroie 3 galets qui entraînent la pince. 3 autres galets permettent de guider la pince. Au total 6 galets permettent d'entraîner et guider la pince par adhérence. Le premier étage de poulie-courroie permet de réduire la vitesse du moteur. Les deux autres étages ont un rapport de réduction unitaire (voir figure au verso).

**Objectif** Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

#### Équation de mouvement

##### Hypothèses

- La compensation de la pesanteur est parfaitement réalisée (système non étudié dans le cadre de cet exercice). On ne tiendra pas compte des actions mécaniques dues à la pesanteur par la suite.
- Les axes de rotation du MC<sup>2</sup>E sont asservis en position. En conséquence, les repères liés aux solides (1), (2) et (3) seront supposés fixes par rapport au repère lié au bâti (0) dont le repère associé est supposé galiléen.
- L'instrument chirurgical est vertical.
- Toutes les courroies sont inextensibles et il n'y a pas de glissement entre les galets et les courroies.
- Tous les galets  $G_i$  ont même rayon noté  $\mathcal{R}_g$  et roulent sans glisser sur la pince (4) au niveau des points  $I_1$  à  $I_6$ .
- La poulie réceptrice est liée à un pignon. Ce pignon entraîne un deuxième pignon de même rayon primaire pour assurer la transmission de puissance. Il n'y a pas de glissement en leur point de contact.

Remarque : Dans la suite, toutes les vitesses sont définies par rapport au bâti (0).

#### Modélisation simplifiée du problème

- La vitesse de rotation du rotor moteur M4 par rapport à son stator fixe (lié au bâti (0)) est notée  $\omega_m(t)\vec{x}_0$  où  $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$  (vitesse de rotation avant réduction de rapport  $r$ ).
- La poulie motrice a un rayon  $R_i$  et tourne à la vitesse  $\omega_i(t)$  (vitesse de rotation après réduction de rapport  $r$ ).
- La poulie réceptrice a un rayon  $R_e$  et tourne à la vitesse  $\omega_e(t)$ .
- Les deux pignons en contact ont même rayon primaire, supposé égal à  $R_e$ .
- Le couple du stator sur le rotor moteur M4 est noté  $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$ .
- L'action mécanique qu'exerce le ressort sur la pince (4) est modélisable par un glisseur noté  $\{\mathcal{T}(\text{ressort} \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{ressort} \rightarrow 4) = -kz(t)\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_4}$

où  $O_4$  est le point de contact entre la pince (4) et le ressort,  $k$  la raideur du ressort et  $z(t)$  la variation de position de l'extrémité de (4) autour de la position d'équilibre.

- On note  $\overrightarrow{V(O_4 \rightarrow 4/0)} = v(t) \overrightarrow{z_0} = \frac{dz(t)}{dt} \overrightarrow{z_0}$ .
- Les masses des courroies sont négligées.

**Données**

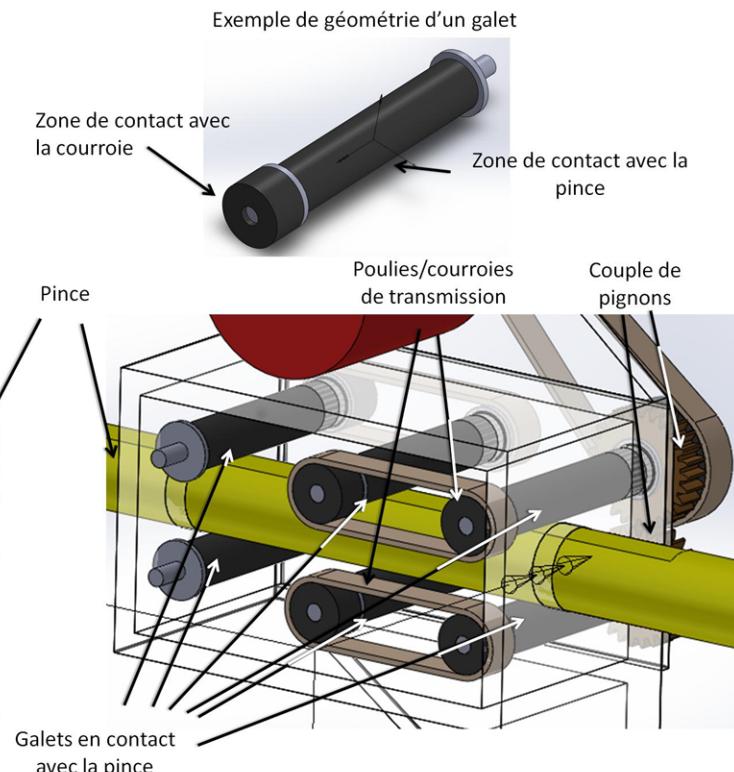
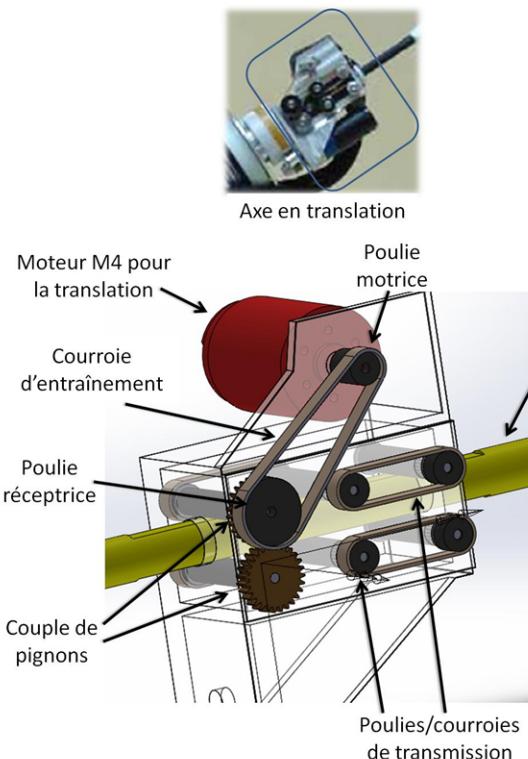
- $I_m$ , moment d'inertie de l'arbre moteur par rapport à son axe de rotation.
- $I_r$ , moment d'inertie du réducteur par rapport à son axe de rotation de sortie.
- $I_i$ , moment d'inertie de la poulie, de rayon  $R_i$ , par rapport à son axe de rotation.
- $I_e$ , moment d'inertie de la poulie, de rayon  $R_e$ , par rapport à son axe de rotation.
- $I_p$ , moment d'inertie de chaque pignon, de rayon  $R_e$ , par rapport à son axe de rotation.
- $I_g$ , moment d'inertie de chaque galet  $G_i$ , de rayon  $R_g$ , par rapport à son axe de rotation.
- $m_4$ , masse de la pince (4).
- $r = \frac{\omega_i(t)}{\omega_m(t)}$ , rapport de réduction constant du moteur/réducteur.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante :  $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$  avec :

- $J$ , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;
- $C_e(t)$ , couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

**Travail demandé**

**Question 1** Déterminer la relation entre  $v(t)$  et  $\omega_m(t)$ .  
Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre  $z(t)$  et  $\theta_m(t)$ .



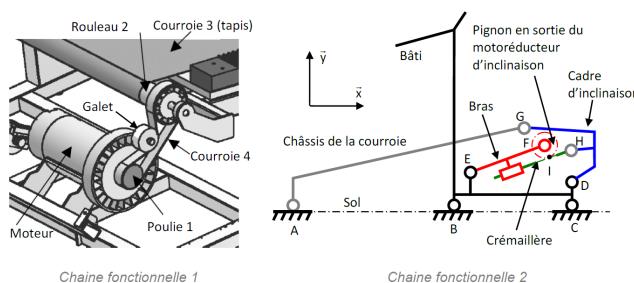
## Application 2



On s'intéresse à un tapis de course dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. L'utilisateur court sur une courroie mobile qui est entraînée dans le sens inverse de la course. La vitesse de déplacement de la courroie mobile est réglable pour permettre au coureur de rester sur place. Le système propose un large choix de mode de fonctionnement cependant l'étude sera limitée à l'utilisation du programme de contrôle de la fréquence cardiaque. Avec ce programme, le système ajuste automatiquement la vitesse et l'inclinaison du tapis afin d'obtenir une fréquence cardiaque préréglée.

Le programme de contrôle de la fréquence cardiaque fonctionne de la façon suivante :

- dans un premier temps, le système commence par augmenter la vitesse de déplacement de la courroie mobile via la chaîne fonctionnelle 1 pour atteindre la fréquence cardiaque préréglée;
- si la vitesse maximale ne suffit pas, le tapis de course s'incline via la chaîne fonctionnelle 2 pour augmenter encore l'effort.



Extrait du cahier des charges :

Exigences	Critères	Niveaux
1.1. Le système doit permettre au coureur de courir avec une fréquence cardiaque prédéfinie	Vitesse de course Pente Masse utilisateur	De 0 à 19 Km/h par incrément de 0,1Km/h De 0 % à 14 % par incrément de 0,5% 115 Kg maxi

Hypothèses et données :

- on se place dans le cas où le tapis est réglé à l'horizontale;
- la courroie 3, d'épaisseur négligeable, s'enroule sans glisser sur le rouleau 2. Le rayon d'enroulement de la courroie 3 sur le rouleau 2 est  $R_e = 24,5 \text{ mm}$ . La poulie 2 est liée au rouleau 2.
- la courroie 4, d'épaisseur négligeable, s'enroule sans glisser sur les poulies 1 et 2, ainsi que sur le

## Application 02

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

galet. Les rayons primitifs de la poulie motrice 1 et de la poulie 2 sont respectivement  $R_{p1} = 27 \text{ mm}$  et  $R_{p2} = 44 \text{ mm}$ ;

- une étude préliminaire a montré que la présence d'un coureur de 115 kg entraîne un effort résistant tangentiel  $T_{\text{coureur} \rightarrow 3} = 230 \text{ N}$  sur la courroie 3;
- l'inertie équivalente des pièces en mouvement ramenée sur l'arbre moteur est  $I_{eq} = 0,1 \text{ kgm}^2$ ;
- le rendement global du système mécanique est  $\eta = 0,9$ .

**Objectif** Valider le choix de la motorisation de la chaîne fonctionnelle 1 vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 1** Déterminer la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m$  en rad/s en fonction de la vitesse de déplacement  $V_{30}$  en m/s de la courroie 3. En déduire la vitesse maximale du moteur  $\omega_{m \max}$  lorsque la courroie se déplace à la vitesse maximale indiquée dans le cahier des charges.

**Question 2** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  nécessaire pour mettre en mouvement la courroie 3 en régime permanent.

**Question 3** Déterminer la puissance développée par le moteur lorsque le coureur de 115 kg court en régime établi à 19 km/h. Le système possède un moteur courant continu ayant les caractéristiques ci-dessous.

Puissance nominale $P_n = 1840 \text{ W}$	Tension nominale $U_n = 130 \text{ V}$
Constante de vitesse $K_E = 0,33 \text{ V}/(\text{rad.s}^{-1})$	
Courant nominal $I_n = 17,6 \text{ A}$	
Constante de couple $K_T = 0,33 \text{ N.m/A}$	
Résistance d'induit $R = 1,1 \text{ Ohm}$	

**Question 4** Conclure quant au bon dimensionnement du moteur vis-à-vis des performances attendues.

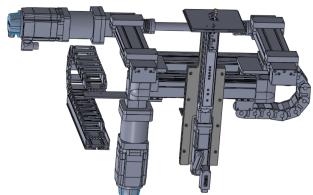
### Éléments de correction

$$1. \omega_m = \frac{R_{p2}}{R_{p1}} \frac{V_{30}}{R_e} \text{ et } \omega_{m \max} = 351 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$2. C_m = \frac{1}{\eta} \left( T_{\text{coureur} \rightarrow 3} R_e \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \right).$$

$$3. P(0 \rightarrow 1/0) = \frac{1}{0,9} \left( T R_e \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \right) \omega_{\max} = 1349 \text{ W}.$$

4. ...

**TD 1****Système de dépose de poudre**

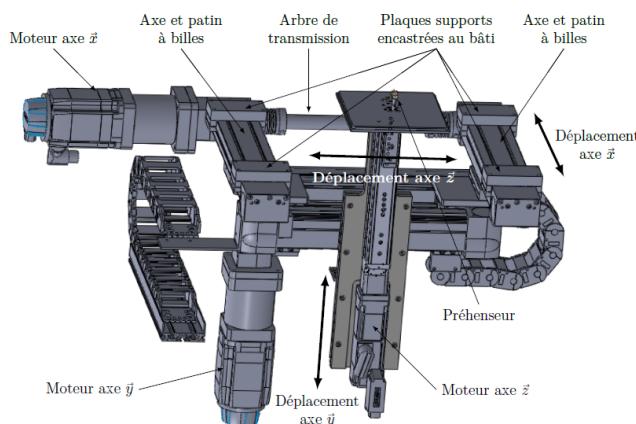
Concours Centrale Supelec – TSI 2016

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

**Mise en situation**

On s'intéresse à un système permettant de créer des motifs sur de la poudre de maquillage compactée. Le poste de pulvérisation est en partie constitué d'un robot cartésien 3 axes permettant de déplacer des godets de poudre compactée (grâce à un préhenseur) en dessous de la buse de pulvérisation.

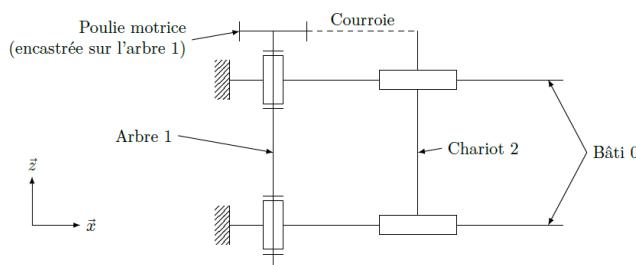


**Objectif** L'objectif est de valider le choix du moteur effectué par le concepteur du système.

Le cahier des charges impose que la vitesse maximale du chariot sur l'axe  $\vec{x}$  soit de  $V_{\max} = 0,45 \text{ m s}^{-1}$  et que l'accélération maximale du chariot soit de  $\gamma_{\max} = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

**Travail demandé**

La transmission est réalisée de la façon suivante. L'arbre 1 est entraîné par un moto-réducteur dont le rapport de réduction est noté  $r$ .

**Notations**

- $\Omega$  : vitesse de rotation du moteur;
- $C_m$  : le couple exercé par le moteur;
- $r = n_{\text{axe poulie}} / n_{\text{moteur}} = \frac{1}{10}$  : rapport de réduction du réducteur entre le moteur et les poulies;
- $M_2 = 25 \text{ kg}$  : masse de l'ensemble mobile 2;
- $\phi = 28,65 \text{ mm}$  est le diamètre primitif des poulies;
- l'inertie des courroies est négligée;
- $J_m = 1,2 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$  : moment d'inertie de l'arbre moteur;
- $J_1 = 4 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$  : moment d'inertie de l'arbre 1;
- $C_r = 0,15 \text{ Nm}$  : couple de frottements secs dans les liaisons ramené à l'arbre moteur;
- $\mu = 0,001 \text{ N m s rad}^{-1}$  : coefficient de frottements visqueux dans les liaisons ramené à l'arbre moteur.

**Question 1** Déterminer la vitesse maximale de rotation du moteur  $\Omega_{\max}$ . Faire l'application numérique.

**Question 2** Déterminer l'accélération maximale du moteur  $\dot{\Omega}_{\max}$ . Faire l'application numérique.

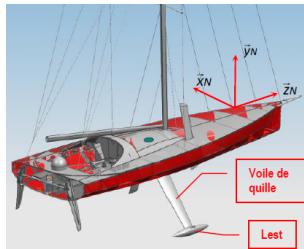
**Question 3** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile dans son mouvement le long de l'axe  $\vec{x}$  par rapport au bâti notée  $\mathcal{E}_c$  (ensemble/0). En déduire l'inertie équivalente  $J$  de l'ensemble mobile rapportée à l'arbre du moteur. Faire l'application numérique.

**Question 4** Établir l'expression du couple moteur maximal exercé par le moteur sur l'arbre moteur noté  $C_{\max}$ . Faire l'application numérique.

**Question 5** Donner l'expression de la puissance mécanique maximale que devra fournir le moteur électrique. Faire l'application numérique.

Le concepteur du système a choisi un moteur synchrone de vitesse nominale de  $3000 \text{ tr min}^{-1}$  et de puissance utile  $0,47 \text{ kW}$ .

**Question 6** Valider le choix du moteur en le justifiant. Argumenter la présence éventuelle d'écart entre la puissance mécanique maximale calculée et la puissance nominale du moteur choisi.

**TD 2****Quille pendulaire \***

Concours Commun Mines Ponts 2014

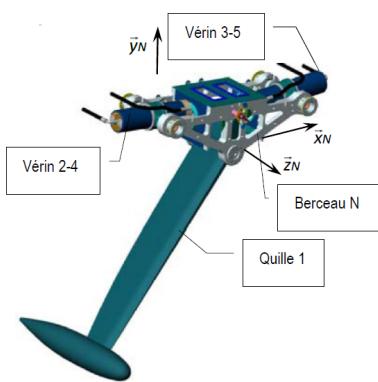
**Savoirs et compétences :**

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

**Mise en situation**

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe ( $O, \vec{z}_N$ ) avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



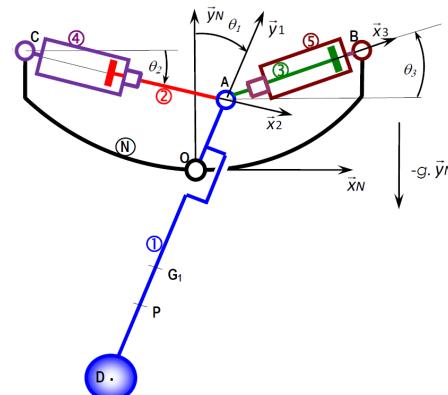
Modèle volumique 3D

**Objectif** L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

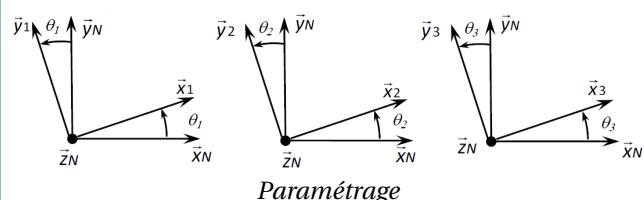
**Hypothèses**

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Le bateau est à l'arrêt et son repère  $R_N$  est galiléen.
- Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que :  $F_{h2} > 0$  et  $F_{h3} = 0$ . Le vérin 2-4 est alors moteur et le vérin 3-5 est libre ( $F_{h2}$  désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2; on a donc  $-F_{h2}$  qui agit sur 4).
- Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures suivantes.



Modèle 2D



Paramétrage

**Données géométriques, massiques et inertielles**

- $$\overrightarrow{OA} = R \vec{y}_1; \overrightarrow{CA} = x_{24}(t) \vec{x}_2;$$
- $$\overrightarrow{AB} = x_{35}(t) \vec{x}_3,$$
- Solide 1, masse  $M_1$ , centre d'inertie  $G_1$ ,  $\overrightarrow{OG_1} = -L_1 \vec{y}_1$ ,  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_N)}$ .
  - Solide 2, masse  $M_2$ , centre d'inertie  $G_2$ ,  $\overrightarrow{AG_2} = -L_2 \vec{x}_2$ ,  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)}$ .
  - Solide 3, masse  $M_3$ ,

- $$\overrightarrow{AG_3} = L_2 \vec{x}_3, I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)}.$$
- Solide 4, masse  $M_4$ , centre d'inertie  $C$ ,  $I_C(4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_N)}$ .
  - Solide 5, masse  $M_5$ , centre d'inertie  $B$ ,  $I_B(5) = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_N)}$ .

**Actions mécaniques**

- Action de pression de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{h2} \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_C$ .
- Action de pression de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_{h3} \vec{x}_3 \\ 0 \end{array} \right\}_B$ .

- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action hydraulique de l'eau sur 1 :  $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_p \vec{z}_1 + F_t \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$  avec  $\overrightarrow{OP} = -h \vec{y}_1$ .

## Vecteurs vitesse

**Question 1** Tracer le graphe de liaisons.

**Question 2** Exprimer les vitesses suivantes :

- $\vec{V}(G_1 \in 1/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres géométriques utiles;
- $\vec{V}(G_2 \in 2/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}$  et des paramètres géométriques utiles;
- $\vec{V}(G_3 \in 3/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$ ,  $x_{35}$  et des paramètres géométriques utiles;
- $\vec{V}(A \in 2/4)$  en fonction de  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ .

## Energie cinétique

Soit  $E$  l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note  $\mathcal{E}_c(i/N)$  l'énergie cinétique de  $i$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_N$ .

**Question 3** Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

- $\mathcal{E}_c(1/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres inertIELS et géométriques utiles;
- $\mathcal{E}_c(2/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}(t)$  et des paramètres inertIELS et géométriques utiles.
- $\mathcal{E}_c(4/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$  et des paramètres inertIELS et géométriques utiles.

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

**Question 4** Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ) développées par les actions mécaniques intérieures à  $E$  en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

**Question 5** Recenser, puis exprimer les puissances galiliennes non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$ ) développées par les actions mécaniques extérieures à  $E$ . Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

**Question 6** Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à  $E$  dans son mouvement par rapport à  $N$ . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les

notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position  $\theta_1 = 0$  à la position  $\theta_1 = 45^\circ$  en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position  $\theta_1 = 0$  en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

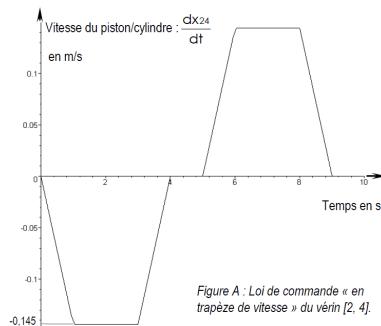


Figure A : Loi de commande « en trapèze de vitesse » du vérin [2, 4].

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure suivante.

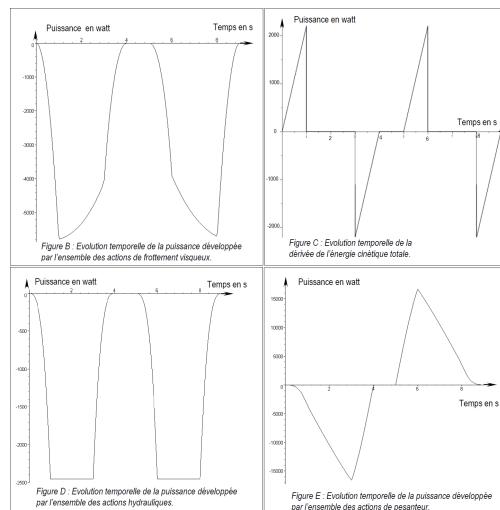


Figure B : Evolution temporelle de la puissance développée par l'ensemble des actions de frottement visqueux.

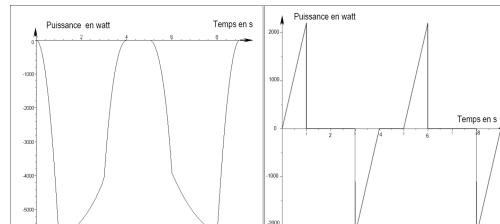


Figure C : Evolution temporelle de la dérivée de l'énergie cinétique totale.

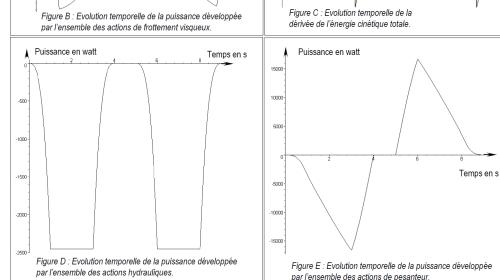


Figure D : Evolution temporelle de la puissance développée par l'ensemble des actions hydrauliques.



Figure E : Evolution temporelle de la puissance développée par l'ensemble des actions de pesanteur.

**Question 7** Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants  $t = 0\text{s}$ ,  $t = 1\text{s}$ ,  $t = 3\text{s}$  et  $t = 4\text{s}$ . Sur cet intervalle  $[0, 4\text{s}]$ , évaluer, en  $\text{kW}$ , la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

**Question 8** Le constructeur indique une puissance motrice installée sur son bateau de  $30\text{ kW}$ . Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.