

**Modéliser le comportement des systèmes mécaniques dans le but d'établir une loi de comportement en utilisant les méthodes énergétiques.**

Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur

## Cours

### Chapitre 1 Approche énergétique

**Savoirs et compétences :**

- Mod2.C16 : torseur cinétique
- Mod2.C17 : torseur dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Objectif de la modélisation . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Puissance</b>	<b>2</b>
2.1	Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel . . . . .	2
2.2	Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide	2
2.3	Puissance d'actions mutuelles entre deux solides . . . . .	2
2.4	Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Travail</b>	<b>3</b>
3.1	Définition . . . . .	3
3.2	Travail conservatif . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Énergie cinétique</b>	<b>4</b>
4.1	Définition . . . . .	4
4.2	Propriétés . . . . .	4
4.3	Énergie cinétique équivalente . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Théorème de l'énergie cinétique</b>	<b>5</b>
5.1	Introduction . . . . .	5
5.2	Énoncé pour un solide . . . . .	5
5.3	Énoncé pour un ensemble de solides . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Notion de rendement énergétique</b>	<b>5</b>
6.1	Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle . . . . .	5
6.2	Détermination d'une puissance dissipée . . . . .	6

# 1 Introduction

## 1.1 Objectif de la modélisation

Dans ce chapitre nous aborderons les notions de **puissance**, **travail**, et **énergie**. Ces notions sont fondamentales pour :

- dimensionner des composants d'une chaîne d'énergie en terme de puissance transmissible;
- déterminer des équations de mouvement pour prévoir les performances d'un système;
- estimer le rendement d'une chaîne complète d'énergie.

## 2 Puissance

### 2.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

**Définition** On définit la **puissance d'une action mécanique extérieure** à un ensemble matériel ( $E$ ) en mouvement par rapport à un référentiel  $R$  subissant une densité d'effort  $\vec{f}(M)$  (où  $M$  est un point courant de ( $E$ )) comme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \overrightarrow{V(M \in E/R)} dV.$$

**R** On appellera **puissance galiléenne**, la puissance d'un ensemble matériel ( $E$ ) en mouvement dans un **référentiel galiléen**  $R_g$  :  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ .

**!** **Dimensions et homogénéité.**

- Une puissance est une **grandeur scalaire** s'exprimant en *Watt*.
- Elle est homogène à un produit entre un effort et une vitesse et peut donc s'exprimer en unité SI en  $\text{Nms}^{-1}$ .
- Historiquement on a utilisé longtemps les « chevaux » ou « cheval vapeur » (1 ch = 736 W).

**Propriété — Calcul des actions mécaniques s'appliquant sur un ensemble  $E$ .** On considère un ensemble matériel  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$ .

Dans la pratique pour calculer la puissance totale des actions mécaniques s'appliquant sur  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  il faut sommer toutes les puissances s'appliquant sur les  $S_i$  venant de l'extérieur de  $E$  :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \sum_{\forall S_i \in E} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_i/R).$$

### 2.2 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide

**Définition — Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ( $S$ ).** La **puissance d'une action mécanique extérieure** à un solide ( $S$ ) en mouvement dans un référentiel  $R$  peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit ( $S$ ) et le torseur cinématique du mouvement de  $S$  dans le référentiel  $R$ .

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}.$$

**!** On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point**.

**R**

- Le comoment des torseurs est défini par  $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \end{array} \right\}_p \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S/R)} \\ \overrightarrow{V(P \in S/R)} \end{array} \right\}_p$   
 $= \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P \in S/R)} + \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}.$
- Lorsque le torseur cinématique de  $S/R$  est un couple (mouvement de translation) alors en tout point  $A$  la puissance est alors donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{V(P \in S/R)} \forall P.$
- Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)} \forall P.$

### 2.3 Puissance d'actions mutuelles entre deux solides

**Définition — Puissance d'actions mutuelles entre deux solides.** Soient deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) distincts, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $R_g$ , et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. La **puissance des actions mutuelles** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ), dans leur mouvement par rapport au repère  $R$ , est :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R_g) = \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/R_g) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1/R_g).$$

La **puissance des actions mutuelles** entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) **est indépendante du repère  $R$** . Ainsi,

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2/R) = \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2).$$

R

- On peut parler parfois de **puissance des inter-efforts**.
- Pour un ensemble  $E$ , on peut exprimer l'ensemble de la puissance des inter-effort comme la puissance intérieure à l'ensemble  $E$  :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j).$$

## 2.4 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

**Définition — Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons.** Si deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}.$$

La **liaison parfaite** si et seulement si quel que soit le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre  $S_1$  et  $S_2$  est nulle**.

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$

R

- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solide  $S_1$  et  $S_2$ . Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.
- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

## 3 Travail

### 3.1 Définition

**Définition — Travail.** Le travail entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  d'une action mécanique s'exerçant sur un ensemble matériel  $E$  dans son mouvement par rapport au repère  $R$  est donné par :

$$W_{t_1}^{t_2}(\text{ext} \rightarrow E/R) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) dt.$$

R

On peut également définir le travail élémentaire par :

$$dW(\text{ext} \rightarrow E/R) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) dt.$$

- Le travail est une grandeur scalaire.
- L'unité de travail est le **Joule**.
- Le travail est homogène au **produit entre une force et une distance**.

### 3.2 Travail conservatif

**Définition — Travail conservatif.** On dit que le **travail est conservatif** (noté  $W_{c,t_1}^{t_2}(\text{ext} \rightarrow E/R)$ ) s'il est indépendant du chemin suivi pour passer de l'état initial (instant  $t_1$ ) à l'état final (instant  $t_2$ ). Dans ce cas là il existe une grandeur appelée énergie potentielle de l'action mécanique extérieure à  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  qui vérifie :

$$dW_c(\text{ext} \rightarrow E/R) = -dE_p(\text{ext} \rightarrow E/R) \quad \text{avec} \quad dW_c(\text{ext} \rightarrow E/R) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) dt.$$

On peut également l'écrire sous la forme :

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R) = -\frac{dE_p(\text{ext} \rightarrow E/R)}{dt}.$$

R

- On dit que la puissance à travail conservatif dérive d'une énergie potentielle (au signe près).
- L'énergie potentielle est une primitive de la puissance. Elle est donc définie à une constante près arbitraire.

### 3.2.1 Énergie potentielle de la pesanteur

**Définition — Énergie potentielle de la pesanteur.** L'énergie potentielle associée à l'action de la pesanteur sur un ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  dans son mouvement par rapport à  $R$  est donnée par :

$$E_p(g \rightarrow E/R) = m g z_G + k.$$

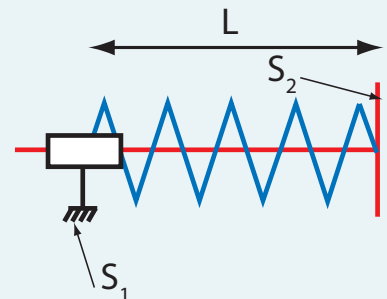
Où  $z_G$  correspond à la position du centre de gravité  $G$  de  $S$  suivant la verticale ascendante  $\vec{z}$  (colinéaire au champs de pesanteur  $\vec{g}$ ) et  $k$  une constante.

### 3.2.2 Énergie potentielle associée à un ressort

**Définition — Énergie potentielle associée à un ressort.**

L'énergie potentielle associée à l'action d'un ressort  $r$  de raideur  $K$  et de longueur à vide  $L_0$  situé entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$  dans son mouvement par rapport à  $R$  est donnée par :

$$E_p(r \rightarrow S_1, S_2/R) = \frac{K}{2}(L - L_0)^2 + k \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$



## 4 Énergie cinétique

### 4.1 Définition

**Définition — Énergie cinétique.** On définit l'énergie cinétique  $E_c$  d'un système matériel  $S$  en mouvement dans un référentiel  $R$  comme la somme des carrés de la vitesse en chaque point courant  $P$  de  $S$  pondéré de la masse élémentaire :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} (\vec{V}(P/R))^2 dm.$$

### 4.2 Propriétés

**Propriété — Expression avec les comoments.** L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(S/R) \} \otimes \{ \sigma(S/R) \}.$$

!

Il faudra bien veiller à ce que chacun des torseurs soit exprimé en un même point.

**Propriété — Cas particuliers.**

- Solide  $S$  de masse  $M$  de centre d'inertie  $G$  en mouvement de **translation** par rapport à  $R$  :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} M \overline{V(G \in S/R)}^2.$$

- Solide  $S$  de moment d'inertie  $I_{Oz}(S)$  en mouvement de rotation par rapport à l'axe fixe  $(O, \vec{z})$  par rapport  $R$  :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} I_{O_z}(S) \overline{\Omega(S/R)}^2.$$

### 4.3 Énergie cinétique équivalente

**Définition — Énergie cinétique équivalente.** Lorsqu'un problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et pour simplifier les calculs, on peut exprimer l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$  en fonction d'un seul paramètre cinématique. On peut alors écrire  $E_c(E/R)$

- avec son **inertie équivalente**  $J_{eq}(E)$  (en  $\text{kg m}^2$ ) rapportée à un paramètre de rotation  $\dot{\theta}(t)$  :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} J_{eq}(E) \dot{\theta}^2.$$

- avec sa **masse équivalente**  $M_{eq}(E)$  (en  $\text{kg}$ ) rapportée à un paramètre de translation  $\dot{x}(t)$  :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} M_{eq}(E) \dot{x}^2.$$

## 5 Théorème de l'énergie cinétique

### 5.1 Introduction

Le théorème de l'énergie cinétique est la traduction du Principe Fondamental de la Dynamique d'un point de vue énergétique.

### 5.2 Énoncé pour un solide

**Théorème — Théorème de l'énergie cinétique.** La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_g$  est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à  $S$ . Soit :

$$\frac{dE_c(S/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{S} \rightarrow S/R_g).$$

### 5.3 Énoncé pour un ensemble de solides

**Théorème — Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides.** Soit  $(E)$  un ensemble de  $n$  solide  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$  en mouvement par rapport à un repère galiléen  $R_g$ . Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{dE_c(E/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j/R_g) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g) + \mathcal{P}_{\text{int}}(E).$$

Avec :

- $\mathcal{P}_{\text{int}}(E)$  la puissance intérieure à  $E$  qui est nulle s'il n'y a pas d'apport d'énergie interne ni de dissipation (liaisons parfaites) ;
- $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow E/R_g)$ , la puissance galiléenne de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_g$ .

R

- Dans le théorème de l'énergie cinétique, contrairement au principe fondamental de la dynamique, on tient compte de la puissance des actions mutuelles donc internes à l'ensemble matériel  $E$  que l'on considère.
- Ce théorème permet d'obtenir une seule équation scalaire. Cette méthode est donc moins riche que le principe fondamental de la dynamique mais permet d'obtenir quasiment directement les équations de mouvements.
- Pour obtenir une équation de mouvement (*ie* éliminer les inconnues en actions mécaniques) il faut alors combiner d'autres équations issues des théorèmes généraux de la dynamique.

## 6 Notion de rendement énergétique

### 6.1 Définition du rendement d'une chaîne fonctionnelle

Une étude dynamique d'une chaîne fonctionnelle peut se décomposer en deux parties :

- en **régime permanent** (variation d'énergie cinétique négligeable) : étude des effets dissipatifs pour estimer une puissance nominale des actionneurs ;
- en **régime transitoire** : évaluation du complément de puissance pour permettre au système de fonctionner.

**Définition — Rendement d'une chaîne fonctionnelle.** Le rendement se définit **en régime permanent** comme la puissance utile sur la puissance d'entrée d'une chaîne fonctionnelle :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}(\text{utile})}{\mathcal{P}(\text{entrée})}.$$

- $\eta \in [0, 1]$ ;
- $\mathcal{P}(\text{entrée}) > 0$  définit la puissance fournie par l'actionneur **en régime permanent** ;
- $\mathcal{P}(\text{utile}) > 0$  définit la puissance fournie à l'aval d'une chaîne fonctionnelle (effecteur par exemple) **en régime permanent**.

**Propriété — Rendement global d'une chaîne d'énergie.** Le **rendement global** d'une chaîne d'énergie comportant  $n$  éléments de rendements  $\eta_i$  est donné par :

$$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i \leq 1.$$

Chacun des rendements successifs  $\eta_i$  étant au plus égale à 1, le rendement global est nécessairement inférieur ou égal au plus mauvais rendement.

## 6.2 Détermination d'une puissance dissipée

**Propriété — Estimation des dissipations.** On peut évaluer en régime permanent les pertes ou puissance dissipée à partir de la connaissance du rendement  $\eta$  :

$$\mathcal{P}(\text{dissipée}) = (1 - \eta) \cdot \mathcal{P}(\text{entrée}).$$

## Références

[1] Émilien Durif, *Approche énergétique des systèmes*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.