

## TD 3



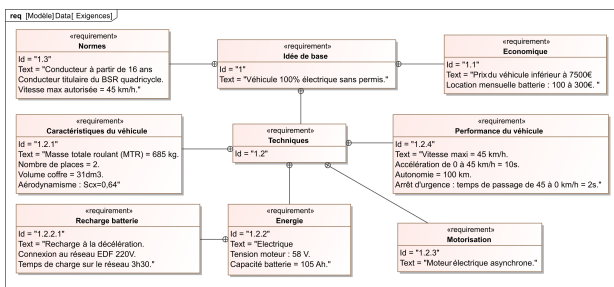
## Renault Twizy ★

Concours Commun Mines Ponts 2017

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

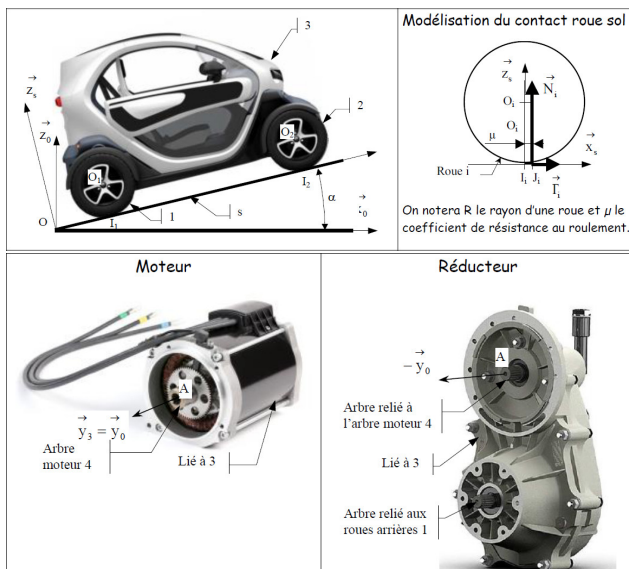
## Mise en situation



## Choix du motoréducteur

**Objectif** Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.



## Hypothèses générales :

- le vecteur  $\vec{z}_0$  est vertical ascendant et on notera  $g$  l'accélération de la pesanteur;
- le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est galiléen; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est sup-

posé rester dans le plan de symétrie de la voiture  $(O, \vec{z}_s, \vec{x}_s)$ ;

- toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- les roues roulent sans glisser sur le sol en  $I_i$ ;
- le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  est identique pour tous les contacts roue – sol :  $\mu = 3e - 3m$ .  
On pose  $\vec{I}_i \vec{J}_i = \mu \vec{x}_s$ , avec  $\mu > 0$  si le déplacement du véhicule est suivant  $+\vec{x}_s$ ;
- les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés; seules les roues arrière sont motrices.

**Actions mécaniques** Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est :  $\{\mathcal{F}(s \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{array}{c} T_i \vec{x}_s + N_i \vec{z}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{J_i}$  avec  $J_i \in (O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$  et  $i = 1$  (roues arrières) ou 2 (roues avant). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que  $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_0 \end{array} \right\}_-$ .

## Masses et inerties :

- le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe  $(A, \vec{y}_0)$  :  $J_m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- le moment d'inertie d'une roue autour de son axe  $(O_i, \vec{y}_0)$  :  $J_R = 0,1 \text{ kg m}^2$ ;
- la masse du véhicule en charge :  $m = 685 \text{ kg}$ ;
- le centre de gravité du véhicule en charge sera noté  $G$ ;
- les autres inerties seront négligées.

**Grandeurs cinématiques** : Soit  $\omega_m$  la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3,  $\omega_{13}$  la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et  $\omega_{23}$  la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera  $r$  le rapport de transmission du réducteur tel que  $\omega_m = r \omega_{13}$ . On appellera  $\vec{V}(G \in 3/0) = \vec{V}_{3/0} = v \vec{x}_s$  la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon  $R = 280 \text{ mm}$ .

## Choix de l'ensemble moto-réducteur

## Équation de mouvement du véhicule

**Objectif** Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

## Notations :

- puissance extérieure des actions mécaniques du solide  $i$  sur le solide  $j$  dans le mouvement de  $i$  par rapport à 0 :  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/0)$ ;
- puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide  $i$  et le solide  $j$  :  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ;
- énergie cinétique du solide  $i$  dans son mouvement par rapport à 0 :  $\mathcal{E}_c(i/0)$ .

## Question 1

- Écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliqué au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes;
- déterminer explicitement les différentes puissances extérieures;
- déterminer explicitement les différentes puissances intérieures;
- déterminer explicitement les énergies cinétiques;
- en déduire une équation faisant intervenir  $C_m$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $v$ ,  $\omega_m$ ,  $\omega_{1/0}$ ,  $\omega_{2/0}$  ..... ;
- expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.

**Question 2** À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer  $(N_1 + N_2)$ . Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.

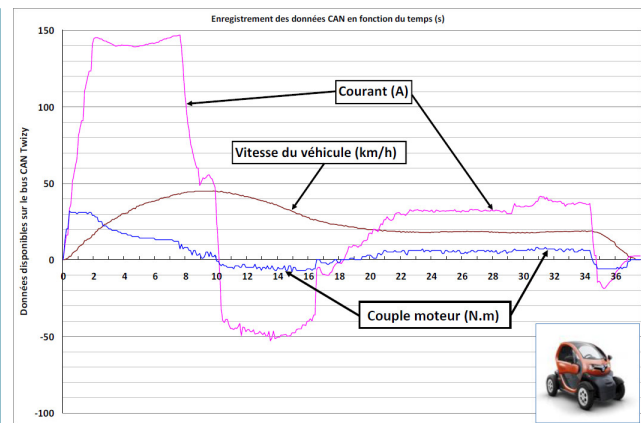
**Question 3** Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre  $(v, \omega_{10})$ ,  $(v, \omega_{20})$  et  $(\omega_m, \omega_{10})$ . Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme  $\frac{r C_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$  avec  $F_r(t)$  fonction de  $m$ ,  $\mu$ ,  $g$ ,  $R$  et  $\alpha$  et  $M_{eq}$  fonction  $m$ ,  $J_m$ ,  $J_R$ ,  $R$  et  $r$ .

**Détermination du coefficient de résistance au roulement  $\mu$**

**Objectif** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  suite à une expérimentation.

**Question 4** En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

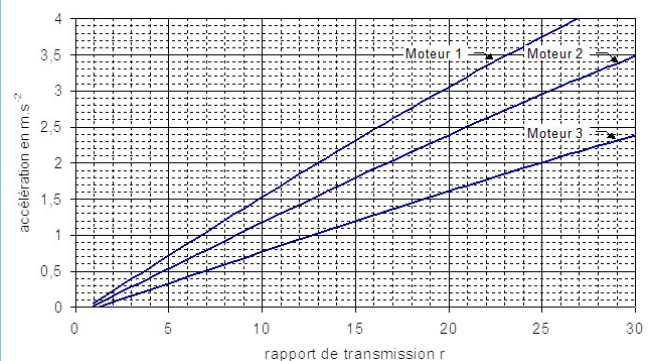
- justifier dans quelle phase se placer;
- définir la variable mesurée;
- définir les hypothèses nécessaires;
- énoncer les équations utilisées pour déterminer  $\mu$ .



## Choix du moto-réducteur

**Objectif** Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale  $\frac{dv(t)}{dt}$  du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission  $r$  issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies ci-dessous.



**Question 5** Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission  $r_{\min}$  pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.

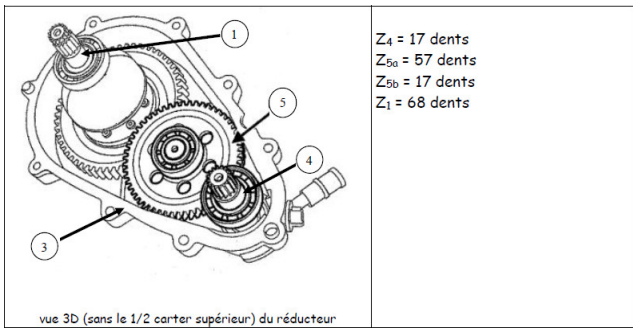
**Question 6** Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission  $r_{\max}$  qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.

**Question 7** À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

## Validation du choix constructeur du moto-réducteur

**Objectif** Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

**Question 8** À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission  $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$  et conclure.



## TD 3 – Corrigé



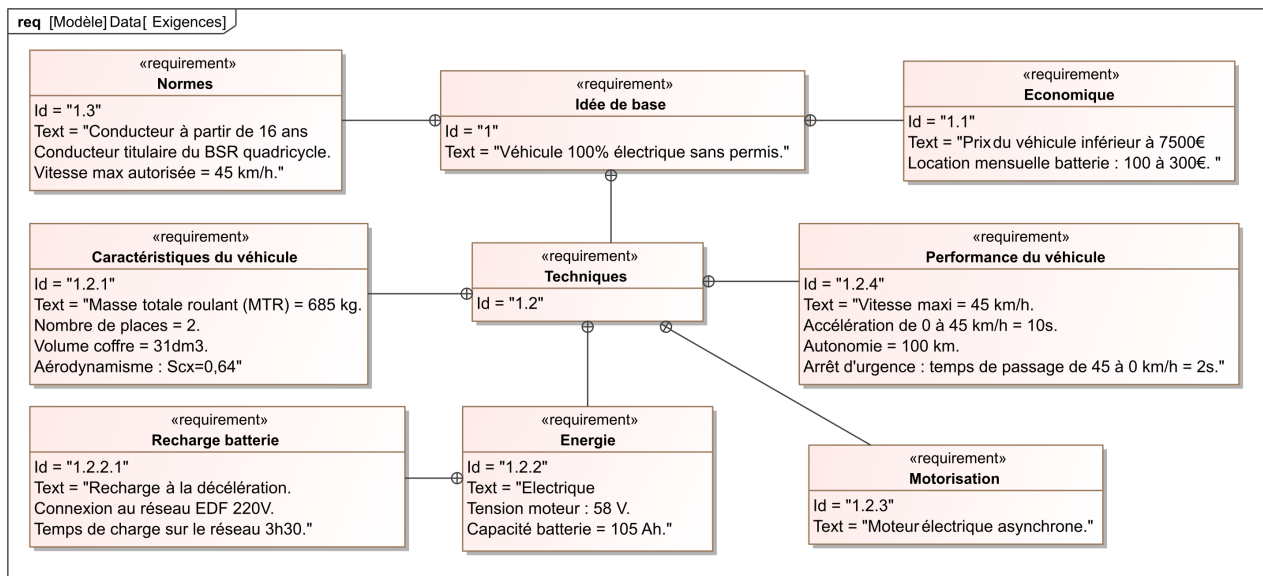
## Renault Twizy ★

Concours Commun Mines Ponts 2017

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

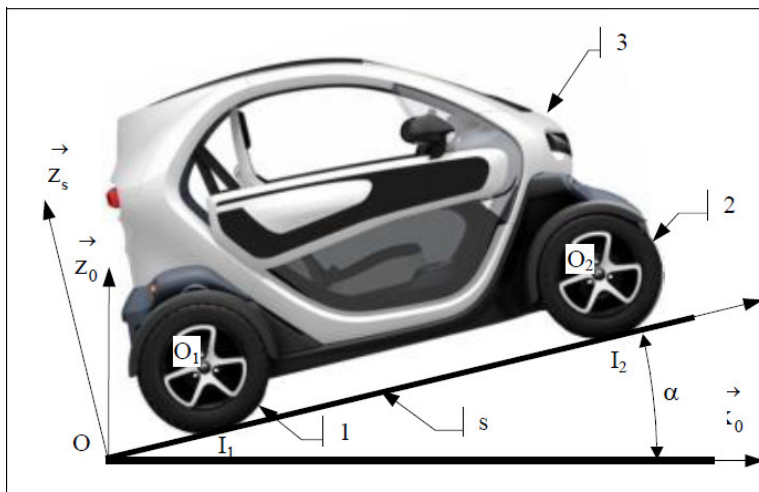
## Mise en situation



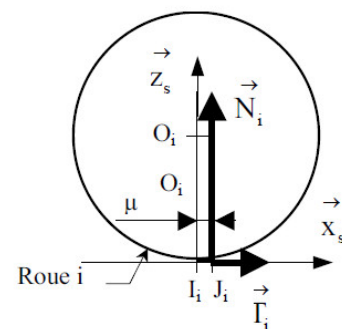
## Choix du motoréducteur

**Objectif** Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

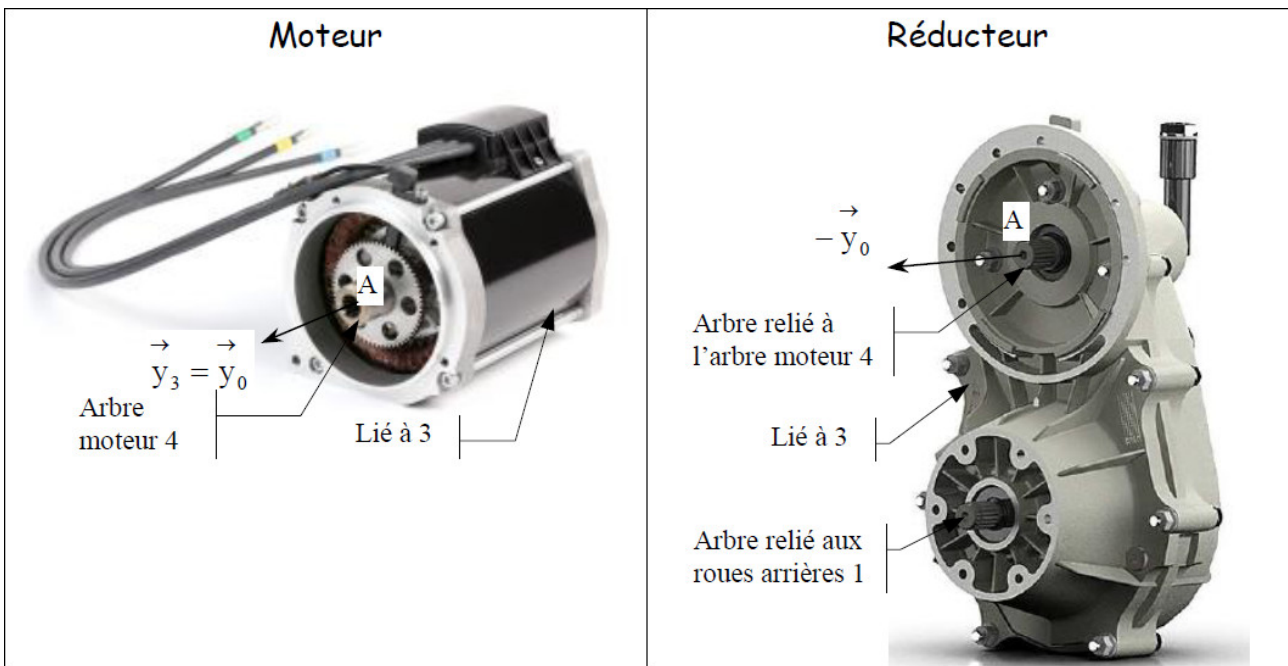
On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.



## Modélisation du contact roue sol



On notera  $R$  le rayon d'une roue et  $\mu$  le coefficient de résistance au roulement.



### Hypothèses générales :

- le vecteur  $\vec{z}_0$  est vertical ascendant et on notera  $g$  l'accélération de la pesanteur;
- le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est galiléen; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est supposé rester dans le plan de symétrie de la voiture  $(O, \vec{z}_s, \vec{x}_s)$ ;
- toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- les roues roulent sans glisser sur le sol en  $I_i$ ;
- le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  est identique pour tous les contacts roue – sol :  $\mu = 3e - 3m$ . On pose  $\vec{T}_i \vec{J}_i = \mu \vec{x}_s$ , avec  $\mu > 0$  si le déplacement du véhicule est suivant  $+\vec{x}_s$ ;
- les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés; seules les roues arrière sont motrices.

**Actions mécaniques** Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est :

$$\{\mathcal{F}(s \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{array}{c} T_i \vec{x}_s + N_i \vec{z}_s \\ 0 \end{array} \right\}_{J_i} \text{ avec } J_i \in (O, \vec{x}_s, \vec{y}_s) \text{ et } i = 1 \text{ (roues arrières) ou } 2 \text{ (roues avant). Le moteur permet}$$

$$\text{d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que } \{\mathcal{F}(3 \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_0 \end{array} \right\}_-$$

### Masses et inerties :

- le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe  $(A, \vec{y}_0)$  :  $J_m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- le moment d'inertie d'une roue autour de son axe  $(O_i, \vec{y}_0)$  :  $J_R = 0,1 \text{ kg m}^2$ ;
- la masse du véhicule en charge :  $m = 685 \text{ kg}$ ;
- le centre de gravité du véhicule en charge sera noté  $G$ ;
- les autres inerties seront négligées.

**Grandeurs cinématiques :** Soit  $\omega_m$  la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3,  $\omega_{13}$  la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et  $\omega_{23}$  la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera  $r$  le rapport de transmission du réducteur tel que  $\omega_m = r \omega_{13}$ . On appellera  $\vec{V}(G \in 3/0) = \vec{V}_{3/0} = v \vec{x}_s$  la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon  $R = 280 \text{ mm}$ .

### Choix de l'ensemble moto-réducteur

#### Équation de mouvement du véhicule

**Objectif** Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

### Notations :

- puissance extérieure des actions mécaniques du solide  $i$  sur le solide  $j$  dans le mouvement de  $i$  par rapport à 0 :  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/0)$ ;
- puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide  $i$  et le solide  $j$  :  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ;
- énergie cinétique du solide  $i$  dans son mouvement par rapport à 0 :  $\mathcal{E}_c(i/0)$ .

### Question 1



- Écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliqué au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes;
- déterminer explicitement les différentes puissances extérieures;
- déterminer explicitement les différentes puissances intérieures;
- déterminer explicitement les énergies cinétiques;
- en déduire une équation faisant intervenir  $C_m$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $v$ ,  $\omega_m$ ,  $\omega_{1/0}$ ,  $\omega_{2/0}$  .....;
- expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.

### Correction

On isole l'ensemble du véhicule, et on a :

- $\mathcal{E}_c(E/0) = \mathcal{E}_c(1/0) + \mathcal{E}_c(2/0) + \mathcal{E}_c(3/0) + \mathcal{E}_c(4/0)$ ;
- $\mathcal{P}(\vec{E} \rightarrow E/0) = \mathcal{P}(0 \rightarrow 1/0) + \mathcal{P}(0 \rightarrow 2/0) + \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/0)$ ;
- $\mathcal{P}_{\text{int, Liaisons}} = \mathcal{P}(1 \leftrightarrow 3) + \mathcal{P}(3 \leftrightarrow 2) + \mathcal{P}(2 \leftrightarrow 4)$  car les liaisons à l'intérieur de l'isolement sont parfaites;
- $\mathcal{P}_{\text{moteur}} = \mathcal{P}(3 \leftrightarrow 4) = \{\mathcal{F}(3 \rightarrow 4)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/3)\} = C_m \omega_{4/3}$ ;
- au final :  $\frac{d\mathcal{E}_c(1/0)}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_c(2/0)}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_c(3/0)}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_c(4/0)}{dt} = \mathcal{P}(0 \rightarrow 1/0) + \mathcal{P}(0 \rightarrow 2/0) + \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/0) + C_m \omega_{4/3}$

Calcul des puissances extérieures :

- $\mathcal{P}(0 \rightarrow 1/0) = \{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{matrix} T_1 \vec{x}_s + N_1 \vec{z}_s \\ 0 \end{matrix} \right\}_{J_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} \omega_{1/0} \vec{y}_0 \\ V(I_1 \in 1/0) + \vec{J}_1 I_1 \wedge \omega_{1/0} \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_{J_1}$   
 $= \left\{ \begin{matrix} T_1 \vec{x}_s + N_1 \vec{z}_s \\ 0 \end{matrix} \right\}_{J_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} \omega_{1/0} \vec{y}_0 \\ -\mu \vec{x}_s \wedge \omega_{1/0} \vec{y}_s \end{matrix} \right\}_{J_1} = \left\{ \begin{matrix} T_1 \vec{x}_s + N_1 \vec{z}_s \\ 0 \end{matrix} \right\}_{J_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} \omega_{1/0} \vec{y}_0 \\ -\mu \omega_{1/0} \vec{z}_s \end{matrix} \right\}_{J_1}$   
 $= -\mu \omega_{1/0} N_1$ .
- $\mathcal{P}(0 \rightarrow 2/0) = \{\mathcal{F}(0 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/0)\} = -\mu \omega_{2/0} N_2$ .
- $\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 3/0) = \{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 3)\} \otimes \{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{matrix} -mg \vec{z}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_G \otimes \left\{ \begin{matrix} 0 \\ v \vec{x}_s \end{matrix} \right\}_G = -m v g \sin \alpha$ .

Calcul des énergies cinétiques :

- $\mathcal{E}_c(1/0) = \frac{1}{2} \cdot 2J_r \omega_{1/0}^2 = J_r \omega_{1/0}^2$  (masse des roues négligée);
- $\mathcal{E}_c(2/0) = J_r \omega_{1/0}^2$ ;
- $\mathcal{E}_c(3/0) = \frac{1}{2} m v^2$ ;
- $\mathcal{E}_c(4/0) = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2$  (masse du rotor négligée).

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$4J_r \omega_{1/0} \dot{\omega}_{1/0} + m v \dot{v} + J_m \omega_m \dot{\omega}_m = -\mu \omega_{1/0} N_1 - \mu \omega_{2/0} N_2 - m v g \sin \alpha + C_m \omega_{4/3}.$$

Cette équation dépend des efforts dans les roues. Ce n'est donc pas une équation de mouvement.

**Question 2** À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer  $(N_1 + N_2)$ . Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.

### Correction

Pour exprimer  $(N_1 + N_2)$  on peut isoler  $E$  et appliquer le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{z}_s$ . On a :

$$N_1 + N_2 + (-mg \vec{z}_0) \cdot \vec{z}_s = \overrightarrow{\Gamma(G \in E/0)} \cdot \vec{z}_s \Rightarrow N_1 + N_2 - mg \cos \alpha = 0$$

Et donc :

$$4J_r \omega_{1/0} \dot{\omega}_{1/0} + m v \dot{v} + J_m \omega_m \dot{\omega}_m = -\mu \omega_{1/0} mg \cos \alpha - m v g \sin \alpha + C_m \omega_{4/3}.$$

**Question 3** Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre  $(v, \omega_{1/0})$ ,  $(v, \omega_{2/0})$  et  $(\omega_m, \omega_{1/0})$ . Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme  $\frac{r C_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$  avec  $F_r(t)$  fonction de  $m, \mu, g, R$  et  $\alpha$  et  $M_{eq}$  fonction  $m, J_m, J_r, R$  et  $r$ .

### Correction

En faisant l'hypothèse de roulement sans glissement en  $I_1$  et  $I_2$  on montre que  $v = R \omega_{1/0} = R \omega_{2/0}$ . De plus,  $r \omega_{1/0} = \omega_m$  (défini ainsi dans le sujet).

On a donc :

$$4J_r \frac{v}{R} \frac{\dot{v}}{R} + m v \dot{v} + J_m \frac{r v}{R} \frac{\dot{v} r}{R} = -\mu \frac{v}{R} m g \cos \alpha - m v g \sin \alpha + C_m \frac{r v}{R}$$

$$\Leftrightarrow \dot{v} \left( \frac{4J_r}{R^2} + m + \frac{J_m r^2}{R^2} \right) = -\mu \frac{1}{R} m g \cos \alpha - m g \sin \alpha + C_m \frac{r}{R}.$$

En conséquences,  $M = \frac{4J_r}{R^2} + m + \frac{J_m r^2}{R^2}$  et  $F_r(t) = m g \left( \mu \frac{1}{R} \cos \alpha + \sin \alpha \right)$

### Détermination du coefficient de résistance au roulement $\mu$

**Objectif** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  suite à une expérimentation.

**Question 4** En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

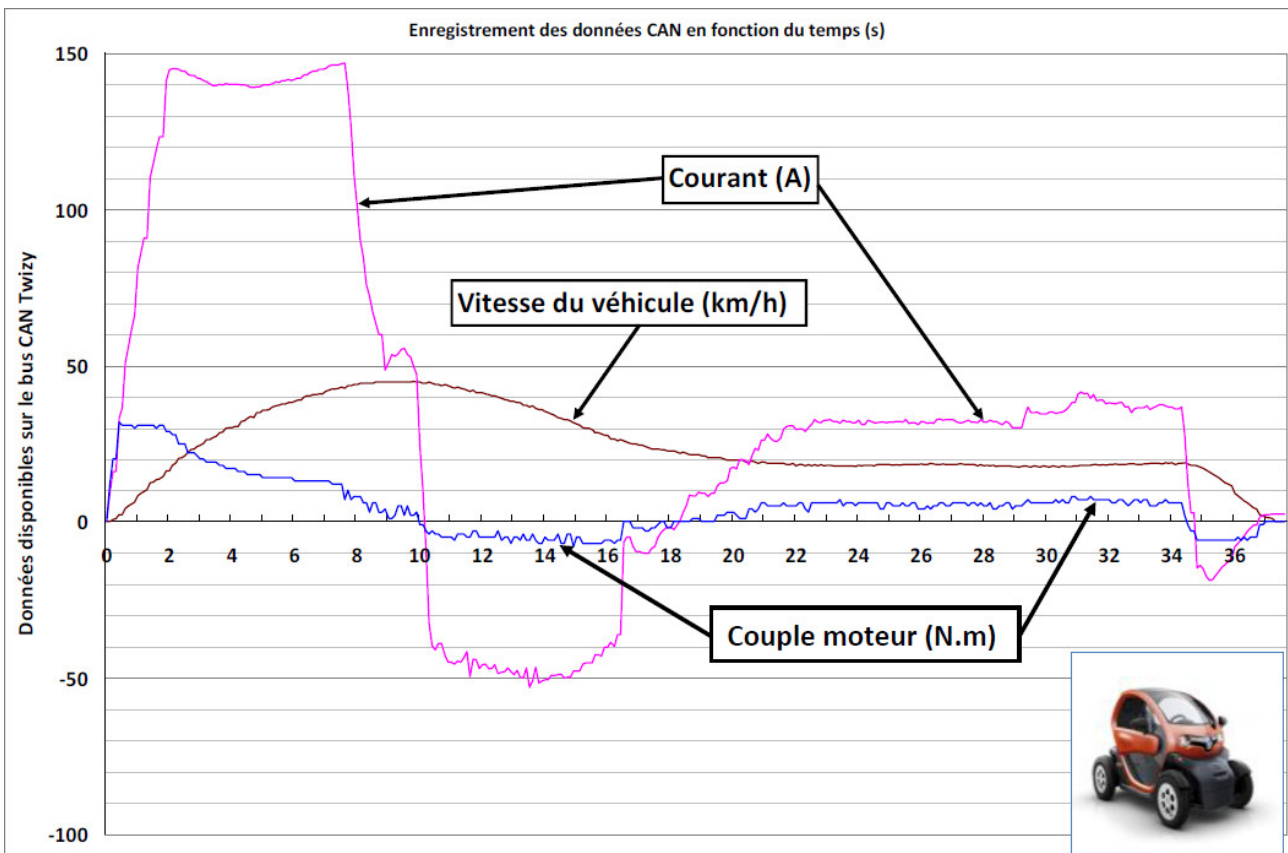
- justifier dans quelle phase se placer ;
- définir la variable mesurée ;
- définir les hypothèses nécessaires ;
- énoncer les équations utilisées pour déterminer  $\mu$ .

### Correction

En se plaçant à vitesse constante, on a  $\frac{r C_m(t)}{R} - F_r(t) = 0$ . Si le sol est horizontal, on a  $\alpha = 0$  et  $F_r(t) = m g \frac{\mu}{R}$ .

Ainsi,  $\frac{r C_m(t)}{R} - m g \frac{\mu}{R} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{r C_m(t)}{m g}$ .

En réalisant l'application numérique lorsque la vitesse est constante, on a  $m = 685 \text{ kg}$ ,  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ,  $C_m(t) = 5 \text{ Nm}$ .

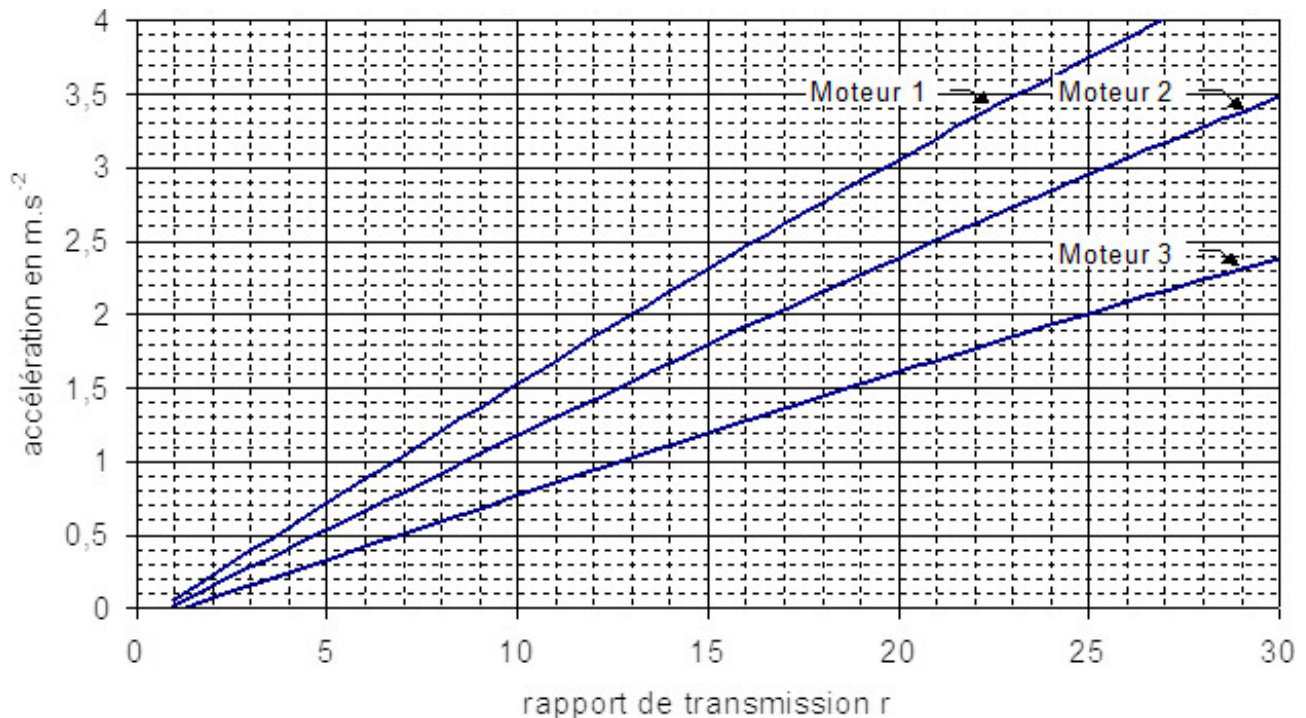


### Choix du moto-réducteur

**Objectif** Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale  $\frac{dv(t)}{dt}$  du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission  $r$  issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies

ci-dessous.



**Question 5** Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission  $r_{\min}$  pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.

**Correction**

**Question 6** Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission  $r_{\max}$  qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.

**Correction**

**Question 7** À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

**Correction**

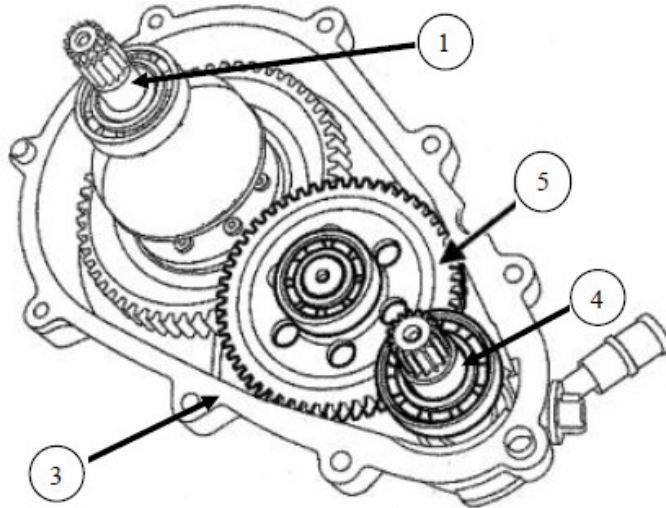
#### Validation du choix constructeur du moto-réducteur

**Objectif** Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

**Question 8** À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission  $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$  et conclure.

**Correction**





vue 3D (sans le 1/2 carter supérieur) du réducteur

$Z_4 = 17$  dents  
 $Z_{5a} = 57$  dents  
 $Z_{5b} = 17$  dents  
 $Z_1 = 68$  dents