

## Application 3 – Corrigé



## Chariot élévateur à bateaux

X – ENS – PSI – 2012

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

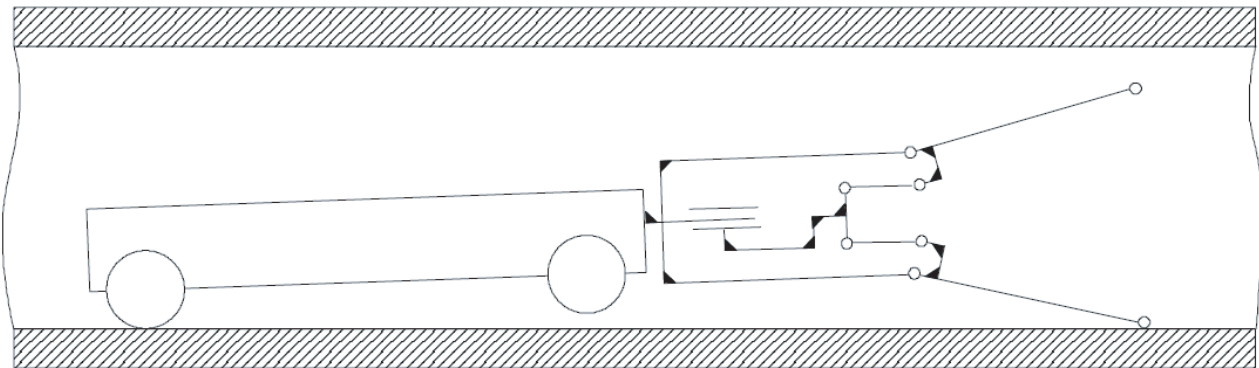
## Robot de pose de fibres optiques

## Présentation

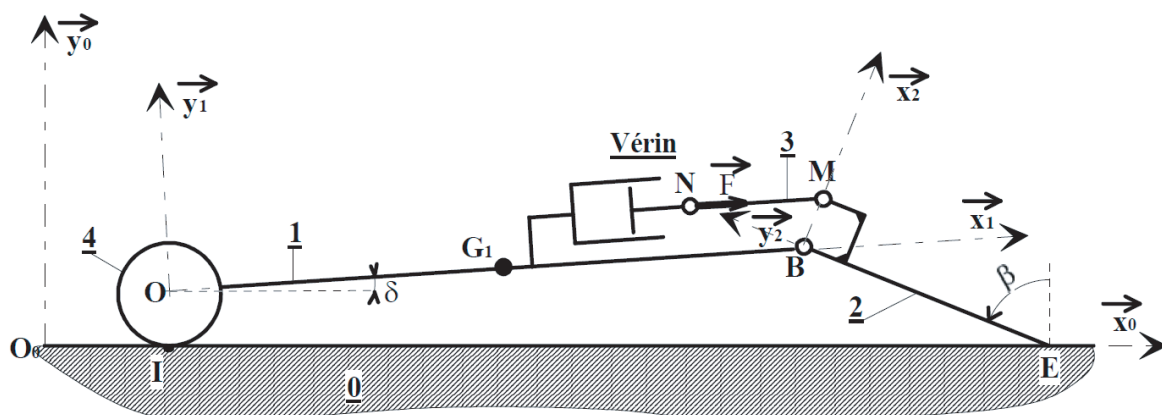
L'objet de cette étude est un robot permettant la pose d'arceaux métalliques pour l'installation de réseaux souterrains de télécommunication par fibres optiques.

**Objectif** Enfin des mouvements des bras, on doit avoir  $\delta = 14^\circ$  et  $\dot{\delta} \leq 50^\circ \cdot s^{-1}$ .

De façon à pouvoir dérouler les arceaux métalliques, le chariot est centré dans la canalisation à l'aide de quatre bras actionnés par un vérin hydraulique.



Afin de valider le choix du vérin, et donc sa puissance, il faut déterminer l'action  $F$  du vérin qui permettra au robot de se positionner correctement dans la canalisation. A l'instant où un anneau métallique doit être installé, les roues du train arrière sont bloquées par rapport au chariot. Sous l'effet d'un vérin, les bras inférieurs vont soulever le robot qui va pivoter sur son train arrière. La fin du positionnement sera assurée lorsque les roulettes des bras supérieurs viendront en contact avec la paroi de la canalisation. A un instant  $t$ , le système est modélisé selon le schéma ci-dessous :



## Hypothèses

L'étude dynamique est à faire dans le plan de symétrie longitudinale du robot.

Le robot est modélisé par le schéma ci-dessus. Il comprend :

- une tige 1 de longueur  $OB = L_1$ , de section négligeable, de masse  $m_1$ , et de centre d'inertie  $G_1$ , tel que  $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L_1}{2} \overrightarrow{x_1}$  ;
- une roue 4, de centre  $O$ , de rayon  $R = 0,07m$ , de masse négligeable, qui correspond au train arrière. Cette roue est en liaison encastrement avec 1 ;
- un bras 2 constitué de deux éléments BE et BM tels que  $\overrightarrow{BE} = -a \overrightarrow{y_2}$  et  $\overrightarrow{BM} = b \overrightarrow{x_2}$ , de section et de masse négligeables ;
- une biellette 3 (NM) de masse négligeable et dont la direction au cours du mouvement est sensiblement celle de la tige 1 ;
- un vérin hydraulique de masse négligeable.

En I, le contact entre la roue 4 et la paroi 0 se fait par roulement sans glissement.

En E, le contact entre le bras 2 et la paroi 0 se fait sans frottement.

L'action  $\overrightarrow{F}$  du vérin sur la biellette 3a, à chaque instant, pour direction  $\overrightarrow{x_1}$  :

$$\overrightarrow{F} = F \overrightarrow{x_1}.$$

## Repères et paramétrage

- $R_0(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ , repère associée à la canalisation  $O$  et supposé galiléen.
- $R_1(O; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ , repère associé à la tige 1.
- $R_2(O; \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ , repère associé au bras 2.
- $\delta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$ .
- $\beta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2})$ .

## Cahier des charges

On désire avoir en fin de mouvement des bras, correspondant à  $\delta = 14^\circ$ , une vitesse  $\dot{\delta}$  inférieur à  $50^\circ/s$

## Modélisation dynamique

**Question 1** Donner l'expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble  $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$ .

**Correction** Pour calculer l'énergie cinétique de l'ensemble seule la masse de la tige 1 est prise en compte.

$$2 E_c(\Sigma/R_0) = \{\sigma(\Sigma/R_0)\} \otimes \{\mathcal{V}(\Sigma/R_0)\} = \left\{ \frac{G_1}{\Omega(1/0)} \right\}_{\overrightarrow{V}(G_1,1/0)} \otimes \left\{ \frac{G_1}{m_1 \overrightarrow{V}(G_1,1/0)} \right\}_{\overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0)} = m_1 \left( \overrightarrow{V}(G_1,1/0) \right)^2 + \overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0) \cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0).$$

- Vecteur de taux de rotation de 1 par rapport à 0 :  $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\delta} \overrightarrow{z_0}$ .
- Vitesse du point  $G_1$  appartenant à 1 par rapport à 0 :  $\overrightarrow{V}(G_1,1/0) = \overrightarrow{V}(I,1/0) + \overrightarrow{G_1 I} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = -(R \overrightarrow{y_0} + \frac{L_1}{2} \overrightarrow{x_1}) \wedge \dot{\delta} \overrightarrow{z_0} = -R \dot{\delta} \overrightarrow{x_0} + \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \overrightarrow{y_1}$ .
- Caractéristiques d'inertie de la tige 1 : la tige 1 supposée unidimensionnelle présente naturellement des symétries matérielles suivant des plans contenant  $\overrightarrow{x_1}$ . Les produits d'inertie sont donc nuls. Le moment d'inertie en  $G_1$  suivant  $\overrightarrow{z_0}$  est  $C_1 = \frac{m_1 L_1^2}{12}$ .
- Moment cinétique en  $G_1$  de 1 par rapport à 0 :  $\overrightarrow{\sigma}(G_1,1/0) = \overline{I}_{G_1}(1) \cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \frac{m_1 L_1^2}{12} \dot{\delta} \overrightarrow{z_0}$ .
- On en déduit  $E_c(1/0) : E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left( R^2 + \frac{L_1^2}{4} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{m_1 L_1^2}{12} \dot{\delta}^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left( R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right)$ .

**Question 2** Donner la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures agissant sur  $\Sigma$ .

**Correction**  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) = \mathcal{P}(\text{pesanteur} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0)$

- Actions de la pesanteur :

$$\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow \Sigma/0) = \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/0) = \{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{matrix} G_1 \\ -m_1 g \overrightarrow{y_0} \end{matrix} \right\}_{\overrightarrow{0}} \otimes \left\{ \frac{G_1}{\Omega(1/0)} \right\}_{\overrightarrow{V}(G_1,1/0)}$$

$$= -m_1 g \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{V}(G_1,1/0) = -m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta.$$

- Actions du contact en I entre 0 et 4 (le contact se fait par roulement sans glissement) :

$$\mathcal{P}(\text{contact en I} \rightarrow \Sigma/0) = \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 4)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{matrix} I \\ R_{04} \end{matrix} \right\}_{\overrightarrow{0}} \otimes \left\{ \frac{I}{\Omega(4/0)} \right\}_{\overrightarrow{0}} = 0.$$

- Actions du contact en E entre 0 et 2 (le contact se fait sans frottement) :

$$\mathcal{P}(\text{contact en E} \rightarrow \Sigma/0) = \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{matrix} E \\ R_{02} \overrightarrow{y_0} \end{matrix} \right\}_{\overrightarrow{0}} \otimes \left\{ \frac{E}{\Omega(2/0)} \right\}_{\overrightarrow{V}(E,2/0)} = R_{02} \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{V}(E,2/0) =$$

0.

**Question 3** Donner la puissance intérieure à  $\Sigma$ .

**Correction** • Les liaisons sont supposées comme parfaites donc :

$$\mathcal{P}_{liaisons}(\text{int} \rightarrow \Sigma) = 0.$$

- Action du vérin entre 1 et 3 :

$$\mathcal{P}_{\text{verin}}(\text{int} \rightarrow \Sigma) = \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 3)\} \otimes \{\mathcal{V}(3/1)\} = \left\{ \begin{matrix} N \\ F \end{matrix} \right\}_{\vec{0}} \otimes \left\{ \begin{matrix} N \\ 0 \end{matrix} \right\}_{\vec{V}(N,3/1)} = F \vec{V}(N,3/1) \cdot \vec{x}_1.$$

En appliquant la relation d'équiprojectivité au solide 1, on obtient :

$$\vec{V}(N,3/1) \cdot \vec{MN} = \vec{V}(M,3/1) \cdot \vec{MN}.$$

En considérant que  $\vec{MN}$  est porté par  $\vec{x}_1$  (hypothèse faite dans l'énoncé), on obtient :

$$\vec{V}(N,3/1) \cdot \vec{x}_1 = \vec{V}(M,3/1) \cdot \vec{x}_1 = (\vec{V}(M,3/2) + \vec{V}(M,2/1)) \cdot \vec{x}_1$$

$$= b(\dot{\beta} - \dot{\delta}) \cdot \vec{y}_2 \cdot \vec{x}_1 = -b(\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta).$$

On en déduit :

$$\mathcal{P}(\text{int} \rightarrow \Sigma) = -F b(\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta)$$

**Question 4** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $\Sigma$  pour déterminer l'équation de mouvement donnant une relation entre  $F$ ,  $\delta$ , et  $\beta$ .

**Correction** On applique alors le théorème de l'énergie cinétique à  $\Sigma$  par rapport au référentiel galiléen  $R_0$  :

$$\frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/R_0)) = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/0) + \mathcal{P}(\text{int} \rightarrow \Sigma).$$

Or,

$$\frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/R_0)) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}^2 \left( R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) \right] = m_1 \dot{\delta} \left[ \ddot{\delta} \left( R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 R L_1 \cos \delta \right]$$

Ainsi on obtient, l'équation :

$$m_1 \dot{\delta} \left[ \ddot{\delta} \left( R^2 + \frac{L_1^2}{3} + R L_1 \sin \delta \right) + \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 R L_1 \cos \delta \right] = -F b(\dot{\beta} - \dot{\delta}) \sin(\beta - \delta) - m_1 g \frac{L_1}{2} \dot{\delta} \cos \delta.$$

Des simulations pour différentes valeurs de  $F$  donnent les diagrammes (figure suivante) représentant l'évolution de  $\delta$  en fonction du temps.

**Question 5** Pour chaque diagramme, analyser le comportement du robot. Déterminer les vitesses  $\dot{\delta}$  en fin de course. En déduire les valeurs de  $F$  respectant le cahier des charges.

**Correction** •  $F = 700N$  : Le régime est fortement oscillant. Le système ne parvient pas à soulever le robot jusqu'à  $14^\circ$ . Celui-ci se comporte comme un oscillateur non amorti (le modèle est considéré sans frottement). Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.

- $F = 750N$  : Le système atteint les  $14^\circ$ . La pente à l'accostage vaut environ  $37.5^\circ/s$  ce qui est raisonnable vis-à-vis du cahier des charges. Cependant, le modèle utilisé pour trouver ce résultat utilise des liaisons parfaites, sans frottement. L'effort de  $700N$  étant insuffisant avec ce modèle parfait, il est possible qu'un effort de  $750N$  devienne insuffisant en réalité.

Cette valeur est théoriquement satisfaisante mais l'écart entre modèle et réalité risque de modifier la conclusion.

- $F = 800N$  : Le système atteint les  $14^\circ$ . La pente à l'accostage vaut environ  $45^\circ/s$  ce qui est inférieur à la limite de  $50^\circ/s$  imposée par le cahier des charges. L'effort est 15% supérieur à la valeur minimale nécessaire pour atteindre les  $14^\circ$  ce qui semble une marge suffisante pour vaincre les frottements non pris en compte dans le modèle.

Cette valeur est satisfaisante.

- $F = 950N$  : Le système atteint les  $14^\circ$ . La pente à l'accostage vaut environ  $75^\circ/s$  ce qui est supérieur à la limite de  $50^\circ/s$  imposée par le cahier des charges.

Cette valeur de l'effort n'est pas satisfaisante.

