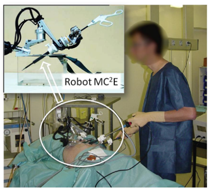
Application 1



Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

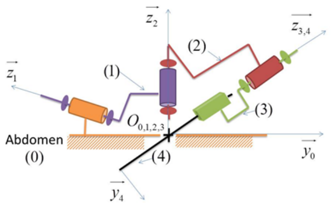
Savoirs et compétences :

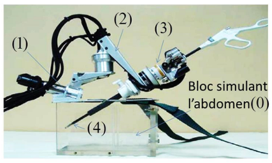
- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Mise en situation

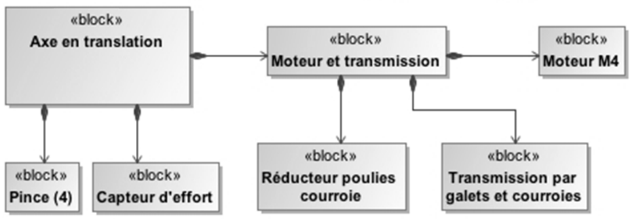
Le robot MC²E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.





Les blocs permettant de réaliser le mouvement de translation sont présentés ci-dessous.



Pour cela un moto réducteur entraîne via 3 systèmes poulie-courroie 3 galets qui entraînent la pince. 3 autres galets permettent de guider la pince. Au total 6 galets permettent d'entraîner et guider la pince par adhérence. Le premier étage de poulie-courroie permet de réduire la vitesse du moteur. Les deux autres étages ont un rapport de réduction unitaire (voir figure au verso).

Objectif Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

Équation de mouvement

Hypothèses

- La compensation de la pesanteur est parfaitement réalisée (système non étudié dans le cadre de cet exercice). On ne tiendra pas compte des actions mécaniques dues à la pesanteur par la suite.
- Les axes de rotation du MC²E sont asservis en position. En conséquence, les repères liés aux solides **(1)**, **(2)** et **(3)** seront supposés fixes par rapport au repère lié au bâti **(0)** dont le repère associé est supposé galiléen.
- L'instrument chirurgical est vertical.
- Toutes les courroies sont inextensibles et il n'y a pas de glissement entre les galets et les courroies.
- Tous les galets G_i ont même rayon noté $\mathcal{R}_g$ et roulent sans glisser sur la pince **(4)** au niveau des points I_1 à I_6.
- La poulie réceptrice est liée à un pignon. Ce pignon entraîne un deuxième pignon de même rayon primitif pour assurer la transmission de puissance. Il n'y a pas de glissement en leur point de contact.

Remarque : Dans la suite, toutes les vitesses sont définies par rapport au bâti **(0)**.

Modélisation simplifiée du problème

- La vitesse de rotation du rotor moteur M4 par rapport à son stator fixe (lié au bâti **(0)**) est notée $\omega_m(t)\overrightarrow{x_0}$ où $\omega_m(t)=\dfrac{\mathrm{d}\theta_m(t)}{\mathrm{d}t}$ (vitesse de rotation avant réduction de rapport r).
- La poulie motrice a un rayon R_i et tourne à la vitesse $\omega_i(t)$ (vitesse de rotation après réduction de rapport r).
- La poulie réceptrice a un rayon R_e et tourne à la vitesse $\omega_e(t)$.
- Les deux pignons en contact ont même rayon primitif, supposé égal à R_e.
- Le couple du stator sur le rotor moteur M4 est noté $\overrightarrow{C_m}=C_m\overrightarrow{x_0}$.
- L'action mécanique qu'exerce le ressort sur la pince (4) est modélisable par un glisseur noté $\{\mathcal{T}(\text{ressort}\rightarrow 4)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{ressort}\rightarrow 4)}=-kz(t)\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{O_4}$ où O_4 est le point de contact entre la pince **(4)** et le ressort, k la raideur du ressort et $z(t)$ la variation de position de l'extrémité de **(4)** autour de la position d'équilibre.

- On note $\overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} = v(t)\overrightarrow{z_0} = \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{z_0}$.
- Les masses des courroies sont négligées.

Données

- I_m, moment d'inertie de l'arbre moteur par rapport à son axe de rotation.
- I_r, moment d'inertie du réducteur par rapport à son axe de rotation de sortie.
- I_i, moment d'inertie de la poulie, de rayon R_i, par rapport à son axe de rotation.
- I_e, moment d'inertie de la poulie, de rayon R_e, par rapport à son axe de rotation.
- I_p, moment d'inertie de chaque pignon, de rayon R_e, par rapport à son axe de rotation.
- I_g, moment d'inertie de chaque galet G_i, de rayon R_g, par rapport à son axe de rotation.
- m_4, masse de la pince **(4)**.
- $r = \dfrac{\omega_i(t)}{\omega_m(t)}$, rapport de réduction constant du motoréducteur.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J\dfrac{\mathrm{d}^2\theta_m(t)}{\mathrm{d}t^2} = C_m(t) - C_e(t)$ avec :

- J, inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur ;
- $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

Travail demandé

Question 1 *Déterminer la relation entre $v(t)$ et $\omega_m(t)$. Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre $z(t)$ et $\theta_m(t)$.*

Question 2 *Réaliser le graphe de structure associé à la translation de la pince.*

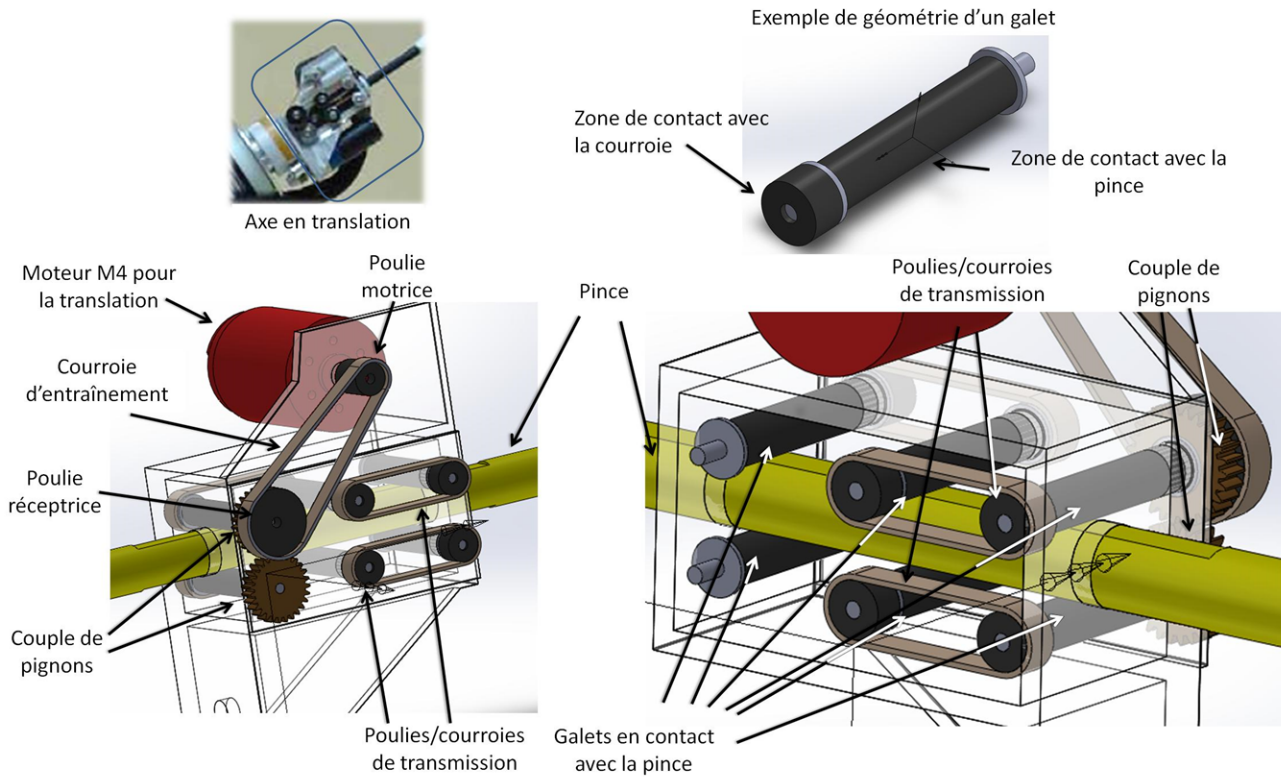
Question 3 *Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à **(0)**. Définir l'inertie équivalente J ramenée sur l'axe du moteur M4 en fonction, notamment, des moments d'inertie, de m_4 et des données géométriques.*

Question 4 *Effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures à ce même ensemble. Préciser l'expression analytique de chaque puissance.*

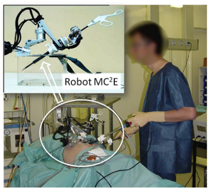
Question 5 *Par l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à **(0)**, déterminer l'expression du terme $C_e(t)$ en fonction des données du problème et de $\theta_m(t)$.*

Corrigé résumé

1. $v(t) = R_g r \dfrac{R_i}{R_e}\omega_m(t)$ et $z(t) = R_g r \dfrac{R_i}{R_e}\theta_m(t)$.
2. .
3. $J = I_m + (I_r + I_i) r^2 + \left(I_e + 2I_p + 6I_g\right)\left(\dfrac{R_i}{R_e} r\right)^2 + m_4\left(R_g r \dfrac{R_i}{R_e}\right)^2$.
4. $\mathscr{P}\left(\text{res} \rightarrow 4/\mathscr{R}_g\right) = -k z(t)\dfrac{R_g r R_i}{R_e}\omega_m(t)$, $\mathscr{P}\left(\text{mot} \rightarrow 4/\mathscr{R}_g\right) = C_m \omega_m(t)$, $\mathscr{P}\left(\text{pes} \rightarrow E/\mathscr{R}_g\right) = 0$ et $\mathscr{P}_{\text{int}}(E) = 0$.
5. $C_e(t) = k\left(R_g r \dfrac{R_i}{R_e}\right)^2 \theta_m(t)$.



Application 1 – Corrigé



Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC^{2}E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Mise en situation

Objectif Modéliser l'équation de mouvement et la caractériser en fonction des actions mécaniques extérieures, du couple moteur et des grandeurs cinétiques appropriées.

Équation de mouvement

Travail demandé

Question 1 *Déterminer la relation entre $v(t)$ et $\omega_m(t)$. Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation entre $z(t)$ et $\theta_m(t)$.*

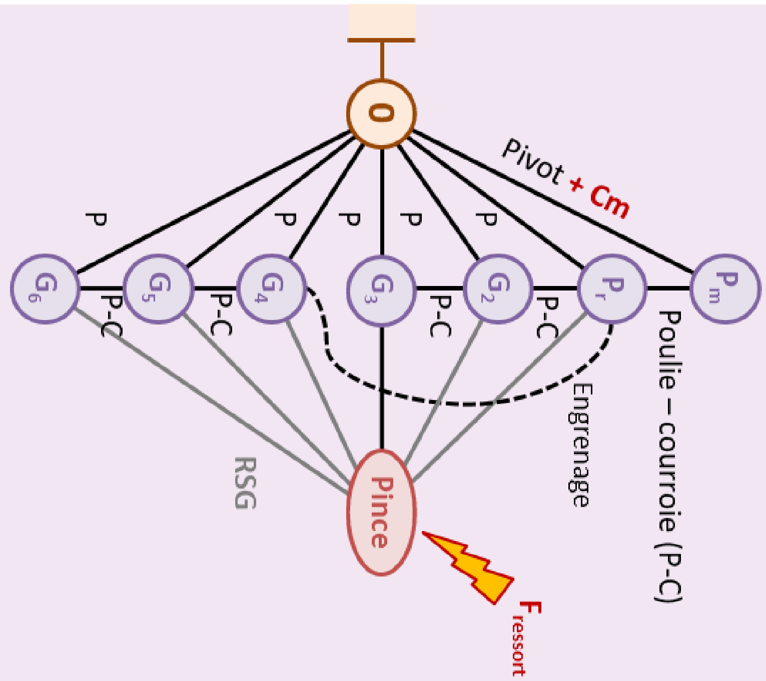
Correction

On a $\omega_i(t) = r\omega_m(t)$. De plus $\dfrac{\omega_e(t)}{\omega_i(t)} = \dfrac{R_i}{R_e} \Longleftrightarrow \omega_e(t) = \dfrac{R_i}{R_e}\omega_i(t)$ et donc : $\omega_e(t) = \dfrac{R_i}{R_e} r\omega_m(t)$.

Enfin, $v(t) = R_g\omega_e(t) = R_g r\dfrac{R_i}{R_e}\omega_m(t)$. Les conditions initiales étant nulles, $z(t) = R_g r\dfrac{R_i}{R_e}\theta_m(t)$.

Question 2 *Réaliser le graphe de structure associé à la translation de la pince.*

Correction



Question 3 *Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à **(0)**. Définir l'inertie équivalente J ramenée sur l'axe du moteur M4 en fonction, notamment, des moments d'inertie, de m_4 et des données géométriques.*

Correction

Tous les solides sont en mouvement « simples » par rapport au référentiel galiléen. On a :

$$\mathscr{E}_c\left(E/\mathscr{R}_g\right)=\frac{1}{2}I_m\omega_m(t)^2+\frac{1}{2}(I_r+I_i)\omega_i(t)^2+\frac{1}{2}\left(I_e+2I_p+6I_g\right)\omega_e(t)^2+\frac{1}{2}m_4v(t)^2$$

$$\mathscr{E}_c\left(E/\mathscr{R}_g\right)=\frac{1}{2}I_m\omega_m(t)^2+\frac{1}{2}(I_r+I_i)(r\omega_m(t))^2+\frac{1}{2}\left(I_e+2I_p+6I_g\right)\left(\frac{R_i}{R_e}r\omega_m(t)\right)^2+\frac{1}{2}m_4\left(R_g r\frac{R_i}{R_e}\omega_m(t)\right)^2$$

$$\mathscr{E}_c\left(E/\mathscr{R}_g\right)=\frac{1}{2}\left(I_m+(I_r+I_i)r^2+\left(I_e+2I_p+6I_g\right)\left(\frac{R_i}{R_e}r\right)^2+m_4\left(R_g r\frac{R_i}{R_e}\right)^2\right)\omega_m(t)^2$$

On a donc $J=I_m+(I_r+I_i)r^2+\left(I_e+2I_p+6I_g\right)\left(\frac{R_i}{R_e}r\right)^2+m_4\left(R_g r\frac{R_i}{R_e}\right)^2$.

Question 4 *Effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures à ce même ensemble. Préciser l'expression analytique de chaque puissance.*

Correction

On isole l'ensemble.
Bilan des puissances extérieures

- Action du ressort : $\mathscr{P}\left(\text{ressort}\rightarrow 4/\mathscr{R}_g\right)=-kz(t)v(t)=-kz(t)R_g r\frac{R_i}{R_e}\omega_m(t)$.
- Action du moteur : $\mathscr{P}\left(\text{moteur}\rightarrow 4/\mathscr{R}_g\right)=C_m\omega_m(t)$.
- Action de la pesanteur : $\mathscr{P}\left(\text{pesanteur}\rightarrow E/\mathscr{R}_g\right)=0$ (La pesanteur est compensée par un système de compensation).

Bilan des puissances intérieures Toutes les liaisons étant supposées parfaites, $\mathscr{P}_{\text{int}}(E)=0$.

Question 5 *Par l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à **(0)**, déterminer l'expression du terme $C_e(t)$ en fonction des données du problème et de $\theta_m(t)$.*

Correction

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique on a : $J\dot{\omega_m}(t)\omega_m(t) = -kz(t)R_g r \dfrac{R_i}{R_e}\omega_m(t) + C_m\omega_m(t) \Rightarrow$ $J\dot{\omega}_m(t) = -k\left(R_g r \dfrac{R_i}{R_e}\right)^2 \theta_m(t) + C_m$.

En utilisant l'équation différentielle du mouvement on a alors : $C_e(t) = k\left(R_g r \dfrac{R_i}{R_e}\right)^2 \theta_m(t)$.

Cycle 06