

## Application 1

### Activation – Pompe à pistons axiaux

É. Durif

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides.

#### Présentation

Nous prendrons comme exemple dans ce cours, la pompe à pistons axiaux. Nous avons retenu une modélisation avec 4 classes d'équivalence y compris le bâti :

- 0 : bâti;
- 1 : barillet;
- 2 : piston;
- 3 : poussoir.

On note  $n$  le nombre de classes d'équivalence hors bâti (ici  $n = 3$ ). Dans cette étude, on se place directement dans la base  $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  qui est en rotation par rapport à la base  $B_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour de l'axe  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$  avec le paramètre de rotation  $\theta$ . Le plateau inclinable est supposé fixe au cours du temps. On lui associe le repère  $R_{0*} = (\vec{x}_{0*}, \vec{y}_{0*}, \vec{z}_{0*})$  qui est en rotation par rapport au repère  $R_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour de l'axe  $\vec{y}_0$  avec le paramètre angulaire  $\alpha$ . On introduit le repère  $R_{1*} = (\vec{x}_{1*}, \vec{y}_{1*}, \vec{z}_{1*})$  directement obtenu à partir de  $R_{0*}$  par une rotation autour de  $\vec{z}_{0*}$  et d'angle  $\theta$ . On donne également :  $\overrightarrow{AB} = L_1 \vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{BC} = -R \vec{x}_1$ ,  $\overrightarrow{CD} = \lambda \vec{z}_1$ ,  $\overrightarrow{DE} = h \vec{z}_{1*}$ .

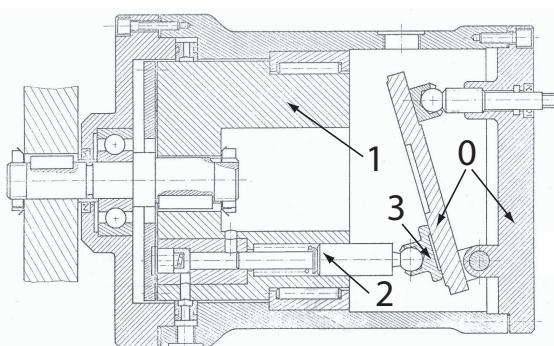


Schéma technologique d'une pompe à pistons axiaux

Les liaisons entre les différentes classes d'équivalence permettent de modéliser le système avec le schéma cinématique ci-après.

- Les liaisons sont parfaites : sans frottements ni jeux.
- Le poids et les effets d'inerties sont négligés.
- On introduit une action de pression s'exerçant sur le piston 2 assimilable à un glisseur d'axe central ( $C, \vec{z}_1$ ) et qui a pour résultante en effort :  $\vec{F}_p = F_p \vec{z}_1$

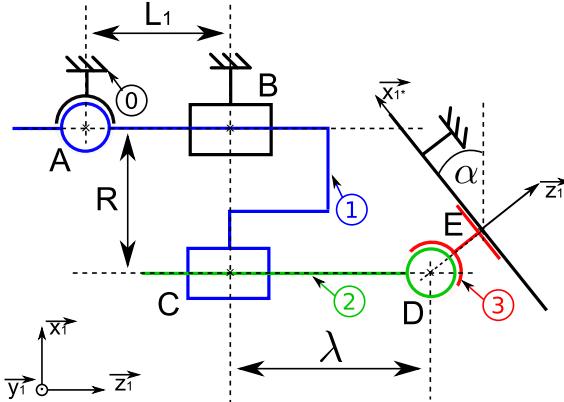


Schéma cinématique d'une pompe à pistons axiaux

#### Etude préliminaire

**Question 1** Tracer le graphe de structure du mécanisme.

**Question 2** En utilisant les formules globales de l'hyperstatisme, déterminer le degré d'hyperstatisme en utilisant la méthode statique puis la méthode cinématique.

#### Etude statique

**Question 3** Isoler successivement les pièces 1, 2 puis 3 et réaliser le PFS en B, C et D.

**Question 4** Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

#### Etude cinématique

**Question 5** Écrire les fermetures de chaînes associées au mécanisme.

**Question 6** Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

#### Hyperstatisme

**Question 7** Proposer des conditions géométriques permettant d'assurer l'assemblage du système.

**Question 8** Proposer une modèle isostatique cinématiquement équivalent.

## Objectifs

- La résolution statique a pour but de déterminer les actions dans les liaisons mécaniques. Cette résolution pourra alors ensuite permettre un dimensionnement des différentes liaisons.
- Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypertstaticité en vue de d'estimer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.

## Bilan des actions mécanique pour chacune des classes d'équivalence

### Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 1

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point  $B$  :

- Action de 0 sur 1 en A :**

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1A})\} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & 0 \\ Y_{A01} & 0 \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & L_1 Y_{A01} \\ Y_{A01} & -L_1 X_{A01} \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

- Action de 0 sur 1 en B :**

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1B})\} = \begin{Bmatrix} X_{B01} & L_{B01} \\ Y_{B01} & M_{B01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

- Action de 2 sur 1 en C :**

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & -R Y_{21} \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

### 0.0.1 Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 2

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point  $C$  :

- Action de 3 sur 2 en D :**

$$\{\mathcal{T}(S_3 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{32} & -\lambda Y_{32} \\ Y_{32} & \lambda X_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- Action de 1 sur 2 en C :**

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} -X_{21} & -L_{21} \\ -Y_{21} & -M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- Action de la pression en C :**

$$\{\mathcal{T}(\text{pression} \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_p & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

### 0.0.2 Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 3

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point  $D$  :

- Action de 2 sur 3 en D :**

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} = \begin{Bmatrix} -X_{32} & 0 \\ -Y_{32} & 0 \\ -Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1}$$

- Action de 0 sur 3 en E :**

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3)\} &= \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_{1*}} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_{1*}} \end{aligned}$$

$$= \begin{Bmatrix} Z_{03} \sin(\alpha) & L_{03} \cos(\alpha) \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} \cos(\alpha) & -L_{03} \sin(\alpha) \end{Bmatrix}_{D,R_1}$$

## 0.1 Résolution d'un système linéaire homogène

En appliquant successivement le principe fondamental de la statique pour chacun des trois ensemble on obtient un système de 18 équations :

(1)résultante suivant $\vec{x}_1$	$X_{A01} + X_{B01} + X_{C21} = 0$
(2)résultante suivant $\vec{y}_1$	$Y_{A01} + Y_{B01} + Y_{C21} = 0$
(3)résultante suivant $\vec{z}_1$	$Z_{A01} = 0$
(4)moment suivant $(B, \vec{x}_1)$	$L_1 Y_{A01} + L_{B01} + L_{C21} = 0$
(5)moment suivant $(B, \vec{y}_1)$	$-L_1 X_{A01} + M_{B01} + M_{C21} = 0$
(6)moment suivant $(B, \vec{z}_1)$	$-R Y_{C21} = 0$
(7)résultante suivant $\vec{x}_1$	$X_{D32} - X_{C21} = 0$
(8)résultante suivant $\vec{y}_1$	$Y_{D32} - Y_{C21} = 0$
(9)résultante suivant $\vec{z}_1$	$Z_{D32} + F_p = 0$
(10)moment suivant $(C, \vec{x}_1)$	$-\lambda Y_{D32} - L_{C21} = 0$
(11)moment suivant $(C, \vec{y}_1)$	$\lambda X_{D32} - M_{C21} = 0$
(12)moment suivant $(C, \vec{z}_1)$	$0 = 0$
(13)résultante suivant $\vec{x}_1$	$-X_{D32} + Z_{E03} \sin(\alpha) = 0$
(14)résultante suivant $\vec{y}_1$	$-Y_{D32} = 0$
(15)résultante suivant $\vec{z}_1$	$-Z_{D32} + Z_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(16)moment suivant $D \vec{x}_1$	$L_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(17)moment suivant $D \vec{y}_1$	$M_{E03} = 0$
(18)moment suivant $D \vec{z}_1$	$-M_{E03} \sin(\alpha) = 0$

## 0.2 Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

Bilan de l'approche statique

- On obtient alors un système de  $E_s = 18$  équations statiques.
- La modélisation comporte  $I_s = 17$  inconnues statiques.
- Certaines de ces équations ne sont pas significatives, elles correspondent aux mobilités cinématiques du mécanisme :
  - Équation (12) “ $0 = 0$ ” : mobilité de rotation de piston autour de  $(C, \vec{z}_1)$ .
  - Les équations (6) (8) et (14) sont équivalentes à deux équations libres : mobilité de rotation du bâillet autour de  $(B, \vec{z}_1)$ .
  - Équation (18) liée à (17) : rotation du poussoir autour de  $(E, \vec{z}_{1*})$ .

Le système possède alors 3 mobilités cinématiques ( $m_c = 3$ ).

Pour résoudre ce système on se retrouve donc avec  $r_s = 15$  équations significatives (rang du système d'équations statiques  $r_s$ ) pour  $I_s = 17$  inconnues. Nous avons donc un déficit de 2 équations ou encore 2 inconnues statiques de trop pour résoudre le problème. Le système est donc hypercontraint. **On dit que la modélisation du système est hyperstatique d'ordre 2**

$$h = I_s - r_s = I_s - (E_s - m_c) \quad (1)$$

## 1 Étude cinématique

### 1.1 Objectifs

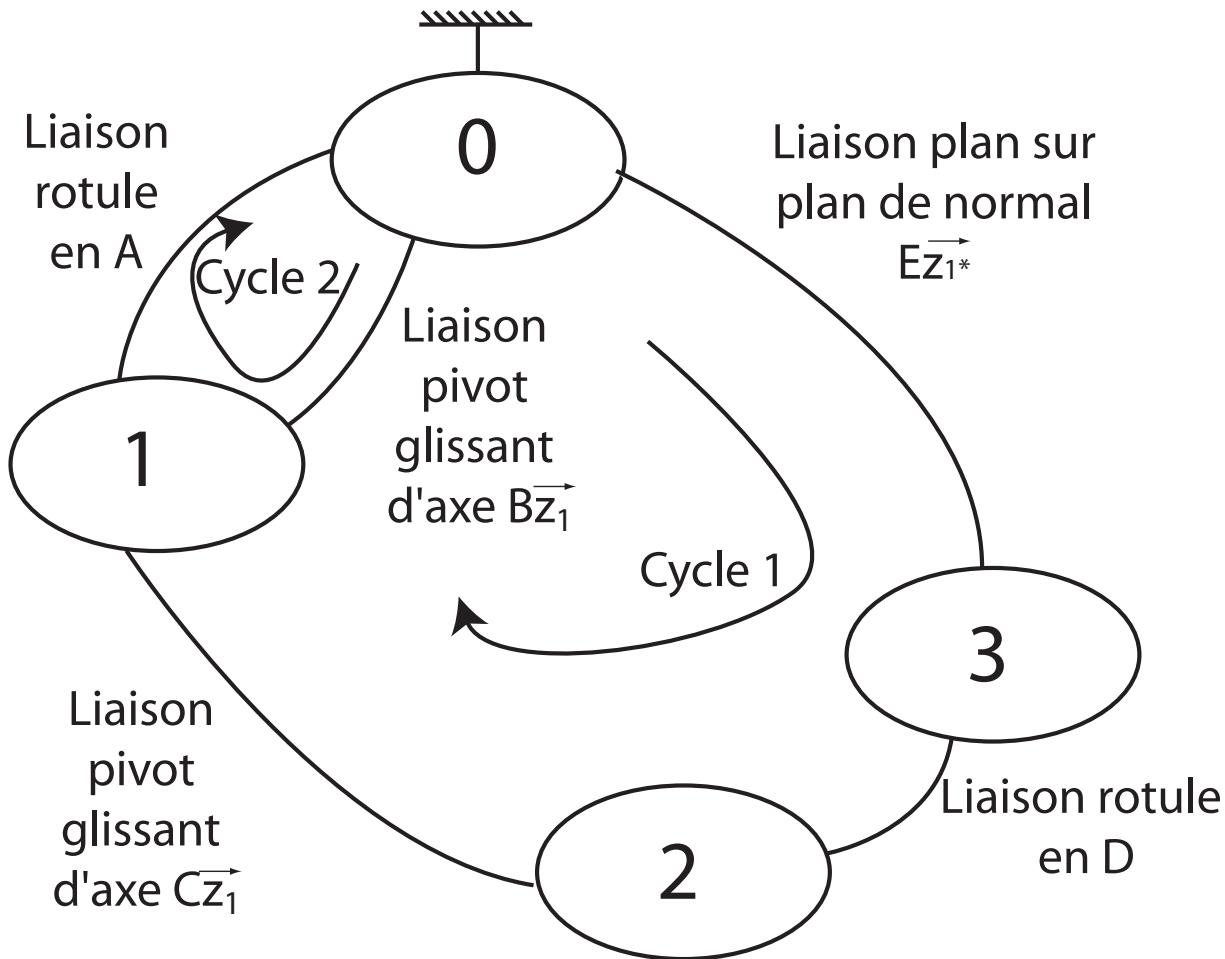
- La résolution cinématique a pour but de déterminer les caractéristiques cinématiques au niveau de toutes les liaisons de la chaîne.
- Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypertstaticité en vue de déterminer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.
- Elle permet enfin de déterminer la loi entrée-sortie cinématique du mécanisme.

### 1.2 Démarche

Le graphe de liaison donné ci-après montre que le mécanisme possède deux chaînes fermées :

- Chaîne 1 : {0–3–2–1–0}.
- Chaîne 2 : {0–1–0}.

L'approche cinématique consiste à écrire pour chaque chaîne la fermeture cinématique à l'aide des torseurs.



Graphe de structure de la pompe

### 1.3 Fermeture de chaîne cinématique

#### 1.3.1 Chaîne cinématique 1

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en C :

- $\{\mathcal{V}(3/0)\}$  :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}(3/0)\} &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array} \right\}_{E,R_{1*}} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array} \right\}_{D,R_{1*}} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & u_{30} \cos(\alpha) & u_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} & -u_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) & 0 \end{array} \right\}_{D,R_1} \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & u_{30} \cos(\alpha) - \lambda r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} & -u_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1} \end{aligned}$$

- $\{\mathcal{V}(3/2)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{c} p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \end{array} \right\}_{D,R_1} = \left\{ \begin{array}{c} p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \end{array} \right\}_{C,R_1} = \left\{ \begin{array}{c} p_{32} & -\lambda q_{32} \\ q_{32} & \lambda p_{32} \\ r_{32} & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(2/1)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & w_{21} \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R \\ r_{B10} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

### 1.3.2 Chaine cinématique 2

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \{\mathcal{V}(1_B/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en  $A$  :

- $\{\mathcal{V}(1_A/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \begin{Bmatrix} p_{A10} & 0 \\ q_{A10} & 0 \\ r_{A10} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(1_B/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1_B/0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & w_{B10} \end{Bmatrix}_{A,R_1}$$

## 1.4 Résolution

On écrit alors la fermeture cinématique pour chaque fermeture cinématique. Cela donnera 12 équation pour 13 inconnues avec les deux fermetures de chaînes :

$$\{\mathcal{V}_{(1/0)}^A\} - \{\mathcal{V}_{(1/0)}^B\} = \{0\}$$

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} - \{\mathcal{V}(3/0)\} = \{0\}$$

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & \lambda \sin(\alpha) & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_{A10} \\ q_{A10} \\ r_{A10} \\ r_{B10} \\ w_{B10} \\ u_{30} \\ v_{30} \\ r_{30} \\ p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \\ r_{21} \\ w_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## 1.5 Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

### 1.5.1 Approche cinématique

- Avec deux cycles fermés, on obtient alors un système de  $E_c = 12$  équations.
- La modélisation comporte  $I_c = 13$  inconnues cinématiques.
- Le rang du système vaut  $r_c = 10$  car deux équations ((4) et (5)) donnent “ $0 = 0$ ” et ne sont donc pas significatives.
- Le nombre d'équations non-significatives correspond directement à l'**hyperstaticité** (ici  $h = 2$ )

- La mobilité cinématique se définit comme la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques ( $I_c$ ) et le nombre d'équations significatives ( $r_c$ ) : **ici**  $m_c = 3$

$$m_c = I_c - r_c = I_c - (E_c - h). \quad (2)$$

## 2 Hyperstatisme

### 2.1 Degrés de mobilité

**Définition — Mobilité cinématique.** On appelle  $m_c = m_u + m_i$  le **degrés de mobilité cinématique** d'une liaison ou d'un mécanisme, avec :

- $m_u$  : le nombre de mobilités dites **utile**,
- $m_i$  : le nombre de mobilités dites **interne**.

Pour une liaison seule :

- $m_c = 0$  : liaison complète ou rigide,
- $m_c > 0$  : liaison mobile à  $m_c$  degrés de liberté.

(R)

Dans un mécanisme, une mobilité utile est une mobilité **recherchée dans la fonction du mécanisme**. On différenciera **seulement** les mobilités utiles **indépendantes**. Si une relation existe, par exemple, entre un mouvement d'entrée et un mouvement de sortie, alors cela sera considéré comme une seule mobilité.

Les mobilités internes sont des mobilités indépendantes résiduelles à l'intérieur du mécanisme.