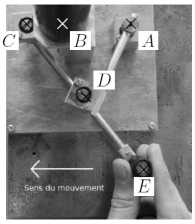
TD 1



Interface maître et esclave d'un robot

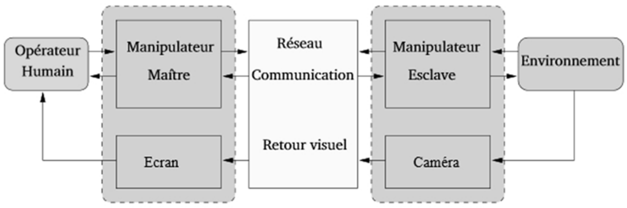
CCP PSI 2015

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C34 : chaînes de solides ;*
- *Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle ;*
- *Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle ;*

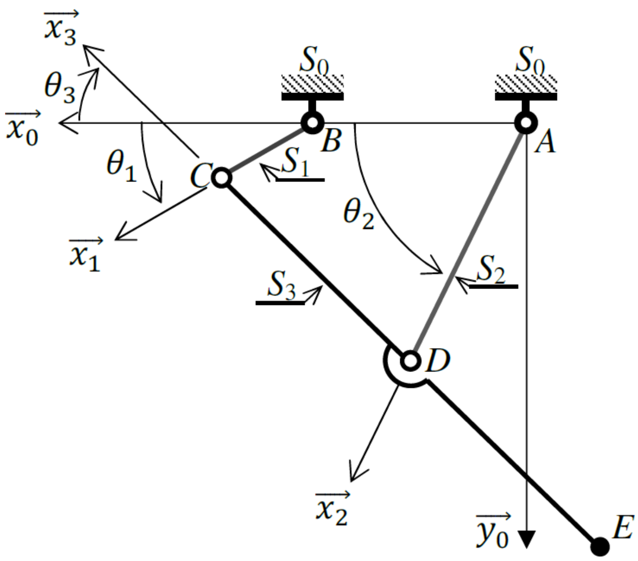
Mise en situation

La téléopération consiste à mettre en relation deux manipulateurs appelés communément maître et esclave. Le manipulateur maître permet au chirurgien de donner sa consigne de déplacement à l'aide d'un levier de commande tandis que l'esclave l'exécute au contact de l'environnement (l'organe à opérer). Les deux sous-systèmes échangent des informations de déplacement et d'effort au travers d'un ou plusieurs canaux de communication. Un retour visuel est également mis en place en parallèle à ce dispositif.

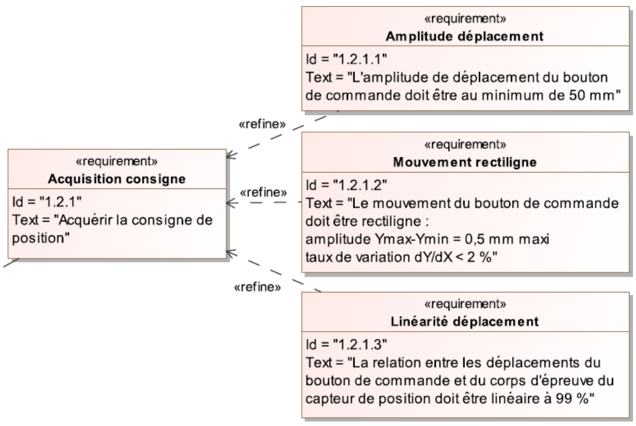


Modélisation de l'interface maître

Ce mécanisme est constitué de 4 barres reliées par des liaisons pivots.



Objectif Vérifier que les exigences « Amplitude déplacement » (id 1.2.1.1), « Mouvement rectiligne » (id 1.2.1.2), « Linéarité déplacement » (id 1.2.1.3) peuvent être satisfaites par le mécanisme de HOEKEN.

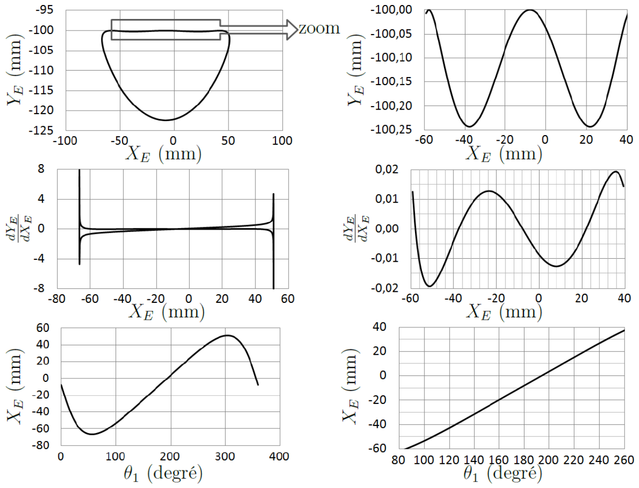


- Solide S_0, repère $\mathcal{R}_0\left(A;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{AB}=L_0\overrightarrow{x_0}$ avec $L_0=50\,\text{mm}$.
- Solide S_1, repère $\mathcal{R}_1\left(B;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{BC}=L_1\overrightarrow{x_1}$ avec $L_1=25\,\text{mm}$, $\theta_1=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)$.
- Solide S_2, repère $\mathcal{R}_2\left(A;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{AD}=L_2\overrightarrow{x_2}$ avec $L_2=62{,}5\,\text{mm}$, $\theta_2=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_2}\right)$.
- Solide S_3, repère $\mathcal{R}_3\left(C;\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DC}=L_2\overrightarrow{x_3}$ avec $\theta_3=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_3}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_3}\right)$.

Question 1 *Donner une relation algébrique reliant les paramètres L_0, L_1, L_2, θ_1 et θ_3.*

Question 2 *De même, exprimer le vecteur position du point E ($\overrightarrow{AE}$) dans la base du repère $\mathcal{R}_0$ en fonction de L_0, L_1, L_2, θ_1 et θ_3.*

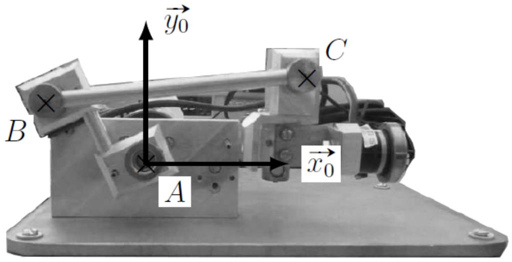
La résolution analytique du système d'équations permettant d'obtenir le déplacement du point E en fonction de l'angle de rotation θ_1 du moteur et des différentes longueurs du mécanisme n'étant pas triviale, seuls les résultats d'une simulation numérique seront analysés.

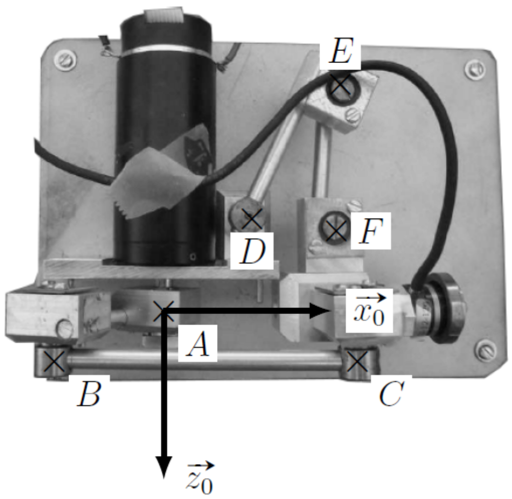


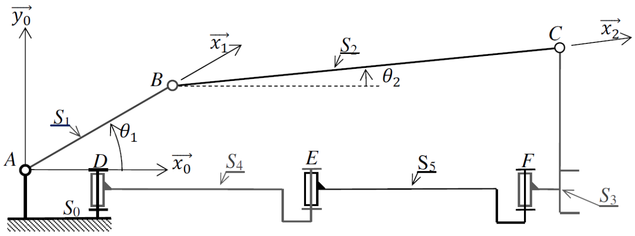
Question 3 *Vérifier, à l'aide des figures précédentes, que le déplacement du point E est compatible avec les exigences « Amplitude déplacement » (id 1.2.1.1) et « Mouvement rectiligne » (id 1.2.1.2) sur l'intervalle* $X_E \in [-60\,\text{mm}; 40\,\text{mm}]$.

Question 4 *Proposer, à partir de la dernière figure, une démarche permettant de vérifier l'exigence « Linéarité déplacement » (id 1.2.1.3) sur l'intervalle* $X_E \in [-60\,\text{mm}; 40\,\text{mm}]$.

Modélisation de l'interface esclave







Solide	Repère associé	Paramètres géométriques	Paramètres dynamiques
S_0 (bâti)	$\mathcal{R}_0(A, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$		
S_1 (barre AB + rotor moteur)	$\mathcal{R}_1(A, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_0})$	$\overrightarrow{AB} = L_1\,\vec{x_1}$ avec $L_1 = 35\,\text{mm}$ $\theta_1 = (\vec{x_0}, \vec{x_1}) = (\vec{y_0}, \vec{y_1})$	Inertie équivalente ramenée à l'axe $(A, \vec{z_0})$: $I_1 = 5{,}7\times10^{-5}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ Frottement fluide entre rotor et stator : $f_v = 1{,}6\times10^{-3}\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ Masse négligée
S_2 (barre BC)	$\mathcal{R}_2(B, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_0})$	$\overrightarrow{BC} = L_2\,\vec{x_2}$ avec $L_2 = 80\,\text{mm}$ $\theta_2 = (\vec{x_0}, \vec{x_2}) = (\vec{y_0}, \vec{y_2})$	Masse et inertie négligées
S_3 (organe terminal)	$\mathcal{R}_3(C, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$	$\overrightarrow{AC} = L_3\cdot\vec{y_0} + x_s(t)\cdot\vec{x_0}$ avec $L_3 = 25\,\text{mm}$	Masse : $M_3 = 0{,}1\,\text{kg}$
S_4 (barre DE)			Masse et inertie négligées
S_5 (barre EF)			Masse et inertie négligées

Objectif Modéliser le comportement dynamique de l'interface esclave de façon à évaluer son comportement au sein d'une boucle d'asservissement.

On note $\{\mathcal{T}(\text{mot} \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m\,\vec{z} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'expression, dans la base $\mathcal{B}_0$ du torseur de l'action mécanique exercée par le moteur sur le solide S_1 et l'accélération de la pesanteur sera représentée par le vecteur $\vec{g} = -g\,\vec{y_0}$.

Question 5 *Tracer le graphe des liaisons du dispositif esclave. Précisier les actions mécaniques extéreiures Donner le degré d'hyperstatisme de la modélisation de ce mécanisme.*

Question 6 *Proposer une modification simple pour le rendre isostatique.*

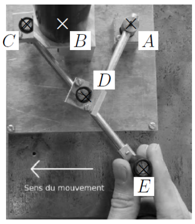
Question 7 *Montrer que le mouvement de* S_3/S_0 *ne peut être qu'une translation de direction* $\vec{x_0}$.

Question 8 *En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'équation de mouvement liant les paramètres* C_m, $\dot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_1$, $\dot{x}_s$, $\ddot{x}_s$, f_v, M_3 *et* I_1.

Question 9 *La relation géométrique liant les paramètres* x_s *et* θ_1 *n'étant pas triviale, on propose de la linéariser autour du point de fonctionnement par l'expression* $\theta_1(t) \simeq \alpha x_s(t)$ *avec* $\alpha = -30\,\text{m}^{-1}$. *En déduire l'équation différentielle liant les paramètres* C_m, $\dot{x}_s$, $\ddot{x}_s$, f_v, M_3, I_1 *et* α.

Question 10 *Donner, dans les conditions d'Heaviside et sous forme canonique, la fonction de transfert modélisant le comportement dynamique du manipulateur esclave :* $H(p) = \dfrac{X_s(p)}{C_m(p)}$ *sachant que* $X_s(p) = \mathcal{L}[x_s(t)]$ *et* $C_m(p) = \mathcal{L}[c_m(t)]$. *Faire l'application numérique.*

TD 1 – Corrigé



Interface maître et esclave d'un robot

CCP PSI 2015

Savoirs et compétences :

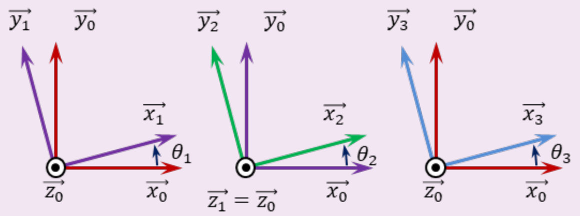
- *Mod2.C34 : chaînes de solides;*
- *Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;*
- *Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;*

Mise en situation

Modélisation de l'interface maître

Question 1 *Donner une relation algébrique reliant les paramètres L_0, L_1, L_2, θ_1 et θ_3.*

Correction



En réalisant une fermeture géométrique on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0}$.

On a alors, $L_0\overrightarrow{x_0}+L_1\overrightarrow{x_1}-L_2\overrightarrow{x_3}-L_2\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{0}$.

$\Leftrightarrow L_0\overrightarrow{x_0}+L_1\left(\cos\theta_1\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_1\overrightarrow{y_0}\right)-L_2\left(\cos\theta_3\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_3\overrightarrow{y_0}\right)-L_2\left(\cos\theta_2\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_2\overrightarrow{y_0}\right)=\overrightarrow{0}$.

En projetant dans la base $\mathscr{B}_0$, on a :

$$\begin{cases} L_0+L_1\cos\theta_1-L_2\cos\theta_3-L_2\cos\theta_2=0 \\ L_1\sin\theta_1-L_2\sin\theta_3-L_2\sin\theta_2=0 \end{cases}$$

Il faut supprimer θ_2 :

$$\begin{cases} L_0+L_1\cos\theta_1-L_2\cos\theta_3=L_2\cos\theta_2 \\ L_1\sin\theta_1-L_2\sin\theta_3=L_2\sin\theta_2 \end{cases}$$

En passant les expressions au carré et en les sommant, on a :

$(L_0+L_1\cos\theta_1-L_2\cos\theta_3)^2+(L_1\sin\theta_1-L_2\sin\theta_3)^2=L_2^2$

Question 2 *De même, exprimer le vecteur position du point E ($\overrightarrow{AE}$) dans la base du repère $\mathscr{R}_0$ en fonction de L_0, L_1, L_2, θ_1 et θ_3.*

Correction

On a $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}$ et donc $\overrightarrow{AE}=L_0\overrightarrow{x_0}+L_1\overrightarrow{x_1}-2L_2\overrightarrow{x_3}$.

$\overrightarrow{AE}=L_0\overrightarrow{x_0}+L_1\left(\cos\theta_1\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_1\overrightarrow{y_0}\right)-2L_2\left(\cos\theta_3\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_3\overrightarrow{y_0}\right)$.

Et $\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix} L_0+L_1\cos\theta_1-2L_2\cos\theta_3 \\ L_1\sin\theta_1-2L_2\sin\theta_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}_0}$

Question 3 *Vérifier, à l'aide des figures précédentes, que le déplacement du point E est compatible avec les exigences « Amplitude déplacement » (id 1.2.1.1) et « Mouvement rectiligne » (id 1.2.1.2) sur l'intervalle $X_E\in$* [−60 mm; 40 mm].

Correction

- Amplitude déplacement de 50 mm minimum : OK (amplitude de 100 mm).
- Mouvement rectiligne d'une amplitude $\Delta Y=0{,}5$ mm maximum : OK (amplitude de 0,25 mm).
- Mouvement rectiligne d'une amplitude taux de variation $\dfrac{\mathrm{d}Y_E}{\mathrm{d}X_E}<2\,\%$: OK (amplitude de ±2 %).

Question 4 *Proposer, à partir de la dernière figure, une démarche permettant de vérifier l'exigence « Linéarité déplacement » (id 1.2.1.3) sur l'intervalle $X_E\in$* [−60 mm; 40 mm].

Correction

Il serait possible de faire une régression linéaire sur l'intervalle [−60 mm; 40 mm] et de vérifier que le coefficient de corrélation est supérieur à 0,99.

Modélisation de l'interface esclave

Objectif Modéliser le comportement dynamique de l'interface esclave de façon à évaluer son comportement au sein d'une boucle d'asservissement.

Question 5 *Tracer le graphe des liaisons du dispositif esclave. Préciser les actions mécaniques extéreiures Donner le degré d'hyperstatisme de la modélisation de ce mécanisme.*

Correction

Méthode statique
- Nombre de mobilité : $m = 1$.
- Nombre d'inconnues : 6 liaisons pivot. $I_S = 30$.
- Nombre d'équations : 5 solides. $E_S = 30$.
- $h = m - E_S + I_S = 1 - 30 + 30 = 1$.

Méthode cinématique
- Nombre de mobilité : $m = 1$.
- Nombre d'inconnues : 6 liaisons pivot. $I_c = 6$.
- Nombre d'équations : 1 cycle. $E_c = 6$.
- $h = m - I_c + E_c = 1 - 6 + 6 = 1$.

Question 6 *Proposer une modification simple pour le rendre isostatique.*

Correction
Pour rendre le système isostatique il faudrait ajouter une inconnue cinématique sans ajouter de mobilité. On peut par exemple remplacer une des liaison pivot par une liaison sphérique à doigt.

Question 7 *Montrer que le mouvement de S_3/S_0 ne peut être qu'une translation de direction $\overrightarrow{x_0}$.*

Correction

D'une part, $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \overrightarrow{\Omega(3/2)} + \overrightarrow{\Omega(2/1)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\theta}_{30}\overrightarrow{z_0}$ (pivots parallèles d'axe $\overrightarrow{z_0}$).

D'autre part, $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \overrightarrow{\Omega(3/5)} + \overrightarrow{\Omega(5/4)} + \overrightarrow{\Omega(4/0)} = \dot{\theta}'_{30}\overrightarrow{y_0}$ (pivots parallèles d'axe $\overrightarrow{y_0}$).

On a donc $\dot{\theta}_{30}\overrightarrow{z_0} = \dot{\theta}'_{30}\overrightarrow{y_0}$ et donc nécessairement $\dot{\theta}_{30} = \dot{\theta}'_{30} = 0$.

Le mouvement de 3/0 est donc une translation.

Question 8 *En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'équation de mouvement liant les paramètres C_m, $\dot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_1$, $\dot{x}_s$, $\ddot{x}_s$, f_v, M_3 et I_1.*

Correction
On isole $\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$.

Calcul de l'énergie cinétique : $\mathscr{E}_c(\Sigma/0) = \mathscr{E}_c(S_1/0) + \mathscr{E}_c(S_3/0)$ car les masses et les inerties des autres solides sont négligés. On a donc $\mathscr{E}_c(\Sigma/0) = \dfrac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^{\,2} + \dfrac{1}{2}M_3\overrightarrow{V(C\in 3/0)}^2$ (car le mouvement de 3/0 est une translation. $\overrightarrow{V(C\in 3/0)} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{AC}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}_s\overrightarrow{x_0}$.

Au final, $\mathscr{E}_c(\Sigma/0) = \dfrac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^{\,2} + \dfrac{1}{2}M_3\dot{x}_s^2$.

Bilan des puissances intérieures : il n'y a pas de frottements ; donc $\mathscr{P}_{\text{int}} = 0$.

Bilan des puissances extérieures :
- $\mathscr{P}(\text{pes} \rightarrow 3/=) Mg\overrightarrow{y_0}\cdot\dot{x}_s\overrightarrow{x_0} = 0$;
- $\mathscr{P}(0\rightarrow 1/0)_{\text{mot}} = C_m\dot{\theta}_1$;
- $\mathscr{P}(0\rightarrow 1/0)_{\text{frot}} = -f_v\dot{\theta}_1^2$.

Application du théorème de l'énergie cinétique : on a $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(\Sigma/0)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}_{\text{int}} + \mathscr{P}\left(\overline{\Sigma}\rightarrow\Sigma/0\right)$, et donc

$I_1\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1 + M_3\dot{x}_s\ddot{x}_s = C_m\dot{\theta}_1 - f_v\dot{\theta}_1^2$.

Question 9 *La relation géométrique liant les paramètres x_s et θ_1 n'étant pas triviale, on propose de la linéariser autour du point de fonctionnement par l'expression $\theta_1(t) \simeq \alpha x_s(t)$ avec $\alpha = -30\,\mathrm{m}^{-1}$. En déduire l'équation différentielle liant les paramètres C_m, $\dot{x}_s$, $\ddot{x}_s$, f_v, M_3, I_1 et α.*

Correction
On a directement $I_1\alpha\dot{x}_s(t)\alpha\ddot{x}_s(t) + M_3\dot{x}_s\ddot{x}_s(t) = C_m\alpha\dot{x}_s(t) - f_v\alpha^2\dot{x_s(t)}^2 \Leftrightarrow I_1\alpha^2\ddot{x}_s(t) + M_3\ddot{x}_s = C_m\alpha - f_v\alpha^2\dot{x}_s(t)$

Question 10 *Donner, dans les conditions d'Heaviside et sous forme canonique, la fonction de transfert modélisant le comportement dynamique du manipulateur esclave : $H(p) = \dfrac{X_s(p)}{C_m(p)}$ sachant que $X_s(p) = \mathscr{L}[x_s(t)]$ et $C_m(p) = \mathscr{L}[c_m(t)]$. Faire l'application numérique.*

Correction
En transformanr l'équation dans le domaine de Laplace, on a : $I_1\alpha^2p^2X_s(p) + M_3p^2X_s(p) = C_m(p)\alpha - f_v\alpha^2pX_s(p) \Leftrightarrow X_s(p)\left(I_1\alpha^2p^2 + M_3p^2 + f_v\alpha^2p\right) = C_m(p)\alpha \Leftrightarrow H(p) = \dfrac{\alpha}{p\left((I_1\alpha^2 + M_3)p + f_v\alpha^2\right)}. \Leftrightarrow H(p) = \dfrac{1/\left(f_v\alpha\right)}{p\left(\dfrac{I_1\alpha^2 + M_3}{f_v\alpha^2}p + 1\right)}$.

On a alors $K = -20,83$, $\tau = \dfrac{0,0513 + 0,1}{1,44} = 0{,}105\,\mathrm{s}$.