

Application

Application 01 – Pompe à pistons axiaux

E. Durif

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SFI : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

Présentation

Nous prendrons comme exemple dans ce cours, la pompe à pistons axiaux. Nous avons retenu une modélisation avec 4 classes d'équivalence y compris le bâti :

- 0 : bâti;
- 1 : barillet;
- 2 : piston;
- 3 : poussoir.

On note n le nombre de classes d'équivalence hors bâti (ici $n = 3$). Dans cette étude, on se place directement dans la base $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ qui est en rotation par rapport à la base $B_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ autour de l'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ avec le paramètre de rotation θ . Le plateau inclinable est supposé fixe au cours du temps. On lui associe le repère $R_{0*} = (\vec{x}_{0*}, \vec{y}_{0*}, \vec{z}_{0*})$ qui est en rotation par rapport au repère $R_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ autour de l'axe \vec{y}_0 avec le paramètre angulaire α . On introduit le repère $R_{1*} = (\vec{x}_{1*}, \vec{y}_{1*}, \vec{z}_{1*})$ directement obtenu à partir de R_{0*} par une rotation autour de \vec{z}_{0*} et d'angle θ . On donne également : $\vec{AB} = L_1 \vec{z}_0$, $\vec{BC} = -R \vec{x}_1$, $\vec{CD} = \lambda \vec{z}_1$, $\vec{DE} = h \vec{z}_{1*}$.

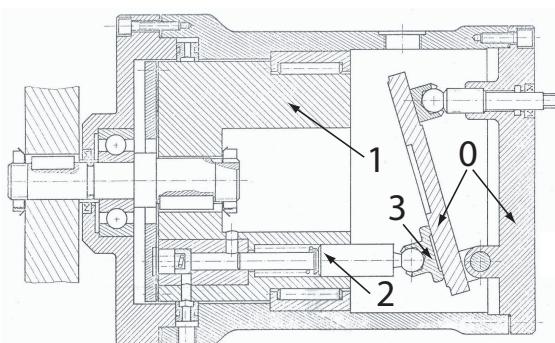


Schéma technologique d'une pompe à pistons axiaux

Les liaisons entre les différentes classes d'équivalence permettent de modéliser le système avec le schéma cinématique ci-après.

- Les liaisons sont parfaites : sans frottements ni jeux.
- Le poids et les effets d'inerties sont négligés.
- On introduit une action de pression s'exerçant sur le piston 2 assimilable à un glisseur d'axe central (C, \vec{z}_1) et qui a pour résultante en effort : $\vec{F}_p = F_p \vec{z}_1$

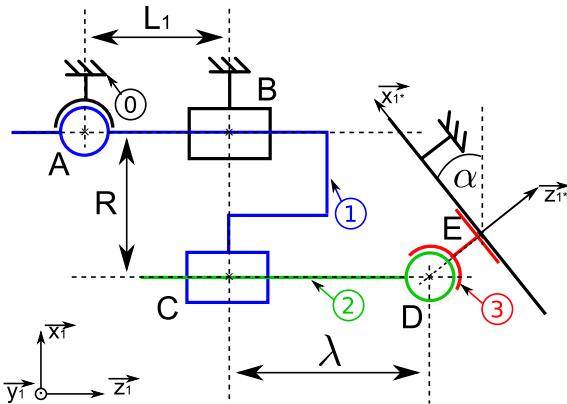


Schéma cinématique d'une pompe à pistons axiaux

Etude préliminaire

Question 1 Tracer le graphe de structure du mécanisme.

Question 2 En utilisant les formules globales de l'hyperstatisme, déterminer le degré d'hyperstatisme en utilisant la méthode statique puis la méthode cinématique.

Étude statique

Question 3 Isoler successivement les pièces 1, 2 puis 3 et réaliser le PFS en B, C et D.

Question 4 Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

Étude cinématique

Question 5 Écrire les fermetures de chaînes associées au mécanisme.

Question 6 Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

Hyperstatisme

Question 7 Proposer des conditions géométriques permettant d'assurer l'assemblage du système.

Question 8 Proposer une modèle isostatique cinématiquement équivalent.

Objectifs

- La résolution statique a pour but de déterminer les actions dans les liaisons mécaniques. Cette résolution pourra alors ensuite permettre un dimensionnement des différentes liaisons.
- Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypertstaticité en vue de d'estimer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.

Bilan des actions mécanique pour chacune des classes d'équivalence

Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 1

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point B :

- Action de 0 sur 1 en A :**

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1A})\} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & 0 \\ Y_{A01} & 0 \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & L_1 Y_{A01} \\ Y_{A01} & -L_1 X_{A01} \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

- Action de 0 sur 1 en B :**

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1B})\} = \begin{Bmatrix} X_{B01} & L_{B01} \\ Y_{B01} & M_{B01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

- Action de 2 sur 1 en C :**

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & -R Y_{21} \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

0.0.1 Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 2

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point C :

- Action de 3 sur 2 en D :**

$$\{\mathcal{T}(S_3 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{32} & -\lambda Y_{32} \\ Y_{32} & \lambda X_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- Action de 1 sur 2 en C :**

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} -X_{21} & -L_{21} \\ -Y_{21} & -M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- Action de la pression en C :**

$$\{\mathcal{T}(\text{pression} \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_p & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

0.0.2 Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 3

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point D :

- Action de 2 sur 3 en D :**

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} = \begin{Bmatrix} -X_{32} & 0 \\ -Y_{32} & 0 \\ -Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1}$$

- Action de 0 sur 3 en E :**

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_{1*}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{array} \right\}_{D,R_{1*}} \\
 &= \left\{ \begin{array}{cc} Z_{03} \sin(\alpha) & L_{03} \cos(\alpha) \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} \cos(\alpha) & -L_{03} \sin(\alpha) \end{array} \right\}_{D,R_1}
 \end{aligned}$$

0.1 Résolution d'un système linéaire homogène

En appliquant successivement le principe fondamental de la statique pour chacun des trois ensemble on obtient un système de 18 équations :

(1)résultante suivant \vec{x}_1	$X_{A01} + X_{B01} + X_{C21} = 0$
(2)résultante suivant \vec{y}_1	$Y_{A01} + Y_{B01} + Y_{C21} = 0$
(3)résultante suivant \vec{z}_1	$Z_{A01} = 0$
(4)moment suivant (B, \vec{x}_1)	$L_1 Y_{A01} + L_{B01} + L_{C21} = 0$
(5)moment suivant (B, \vec{y}_1)	$-L_1 X_{A01} + M_{B01} + M_{C21} = 0$
(6)moment suivant (B, \vec{z}_1)	$-R Y_{C21} = 0$
(7)résultante suivant \vec{x}_1	$X_{D32} - X_{C21} = 0$
(8)résultante suivant \vec{y}_1	$Y_{D32} - Y_{C21} = 0$
(9)résultante suivant \vec{z}_1	$Z_{D32} + F_p = 0$
(10)moment suivant (C, \vec{x}_1)	$-\lambda Y_{D32} - L_{C21} = 0$
(11)moment suivant (C, \vec{y}_1)	$\lambda X_{D32} - M_{C21} = 0$
(12)moment suivant (C, \vec{z}_1)	$0 = 0$
(13)résultante suivant \vec{x}_1	$-X_{D32} + Z_{E03} \sin(\alpha) = 0$
(14)résultante suivant \vec{y}_1	$-Y_{D32} = 0$
(15)résultante suivant \vec{z}_1	$-Z_{D32} + Z_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(16)moment suivant $D\vec{x}_1$	$L_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(17)moment suivant $D\vec{y}_1$	$M_{E03} = 0$
(18)moment suivant $D\vec{z}_1$	$-M_{E03} \sin(\alpha) = 0$

0.2 Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

Bilan de l'approche statique

- On obtient alors un système de $E_s = 18$ équations statiques.
- La modélisation comporte $I_s = 17$ inconnues statiques.
- Certaines de ces équations ne sont pas significatives, elles correspondent aux mobilités cinématiques du mécanisme :
 - Équation (12) “ $0 = 0$ ” : mobilité de rotation de piston autour de (C, \vec{z}_1) .
 - Les équations (6) (8) et (14) sont équivalentes à deux équations libres : mobilité de rotation du bâillet autour de (B, \vec{z}_1) .
 - Équation (18) liée à (17) : rotation du poussoir autour de (E, \vec{z}_{1*}) .

Le système possède alors **3 mobilités cinématiques** ($m_c = 3$).

Pour résoudre ce système on se retrouve donc avec $r_s = 15$ équations significatives (rang du système d'équations statiques r_s) pour $I_s = 17$ inconnues. Nous avons donc un déficit de 2 équations ou encore 2 inconnues statiques de trop pour résoudre le problème. Le système est donc **hypercontraint**. On dit que la modélisation du système est **hyperstatique d'ordre 2**

$$h = I_s - r_s = I_s - (E_s - m_c) \quad (1)$$

1 Étude cinématique

1.1 Objectifs

- La résolution cinématique a pour but de déterminer les caractéristiques cinématiques au niveau de toutes les liaisons de la chaîne.
- Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypostaticité en vue de déterminer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.

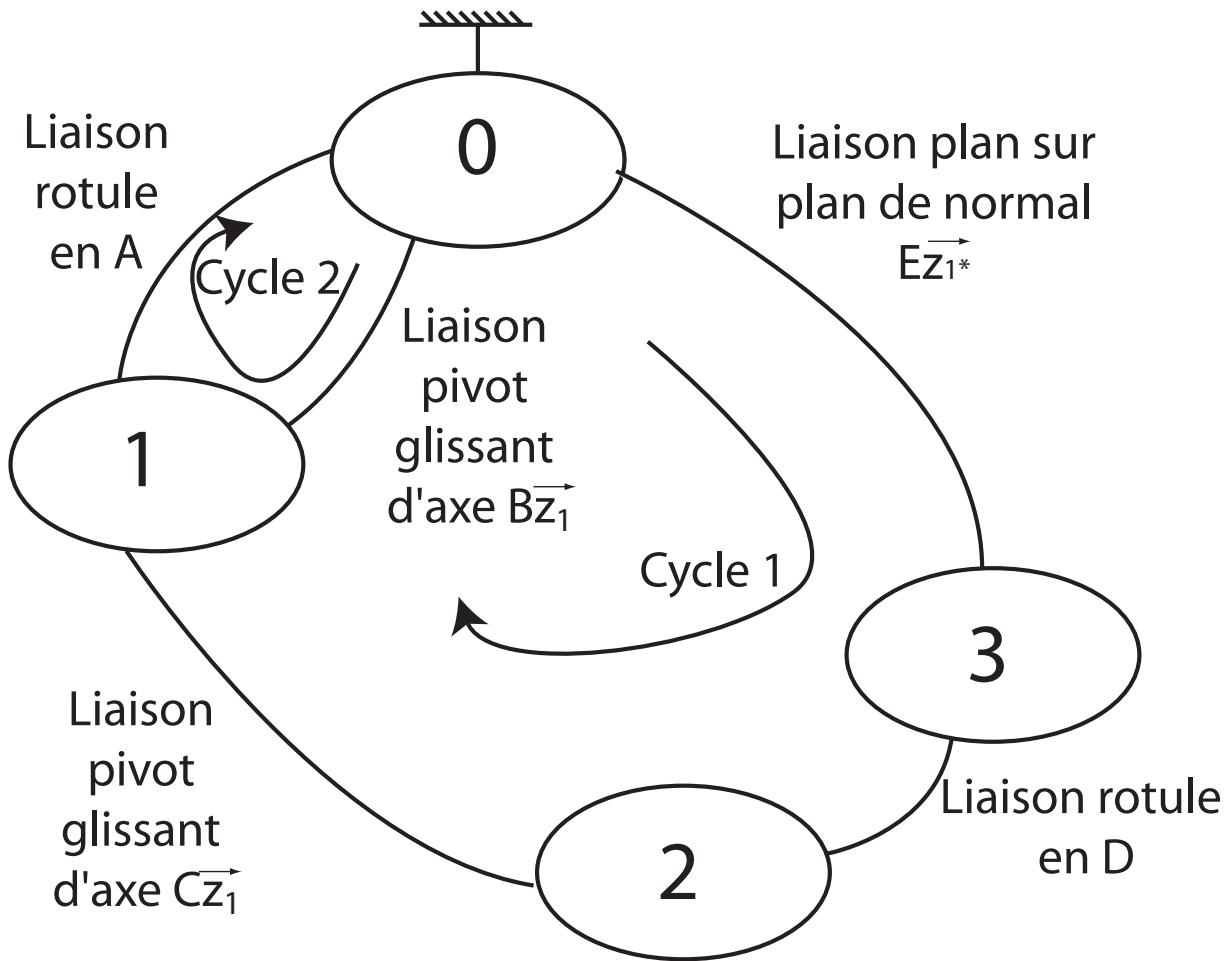
- Elle permet enfin de déterminer la loi entrée-sortie cinématique du mécanisme.

1.2 Démarche

Le graphe de liaison donné ci-après montre que le mécanisme possède deux chaînes fermées :

- Chaîne 1 : {0 – 3 – 2 – 1 – 0}.
- Chaîne 2 : {0 – 1 – 0}.

L'approche cinématique consiste à écrire pour chaque chaîne la fermeture cinématique à l'aide des torseurs.



Graphe de structure de la pompe

1.3 Fermeture de chaîne cinématique

1.3.1 Chaîne cinématique 1

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en C :

- $\{\mathcal{V}(3/0)\}$:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}(3/0)\} &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array} \right\}_{E,R_{1*}} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array} \right\}_{D,R_{1*}} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & u_{30} \cos(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) \end{array} \right\}_{D,R_1} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & u_{30} \cos(\alpha) - \lambda r_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(3/2)\}$:

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{32} & 0 \\ q_{32} & 0 \\ r_{32} & 0 \end{array} \right\}_{D,R_1} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{32} & -\lambda q_{32} \\ q_{32} & \lambda p_{32} \\ r_{32} & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(2/1)\}$:

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & w_{21} \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(1/0)\}$:

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & 0 \end{array} \right\}_{B,R_1} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -R r_{B10} \\ r_{B10} & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

1.3.2 Chaine cinématique 2

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \{\mathcal{V}(1_B/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en A :

- $\{\mathcal{V}(1_A/0)\}$:

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{A10} & 0 \\ q_{A10} & 0 \\ r_{A10} & 0 \end{array} \right\}_{A,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(1_B/0)\}$:

$$\{\mathcal{V}(1_B/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & w_{B10} \end{array} \right\}_{A,R_1}$$

1.4 Résolution

On écrit alors la fermeture cinématique pour chaque fermeture cinématique. Cela donnera 12 équation pour 13 inconnues avec les deux fermetures de chaînes :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(1/0)}^A \right\} - \left\{ \mathcal{V}_{(1/0)}^B \right\} = \{0\}$$

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} - \{\mathcal{V}(3/0)\} = \{0\}$$

$$\begin{array}{l}
 (1) \\
 (2) \\
 (3) \\
 (4) \\
 (5) \\
 (6) \\
 (7) \\
 (8) \\
 (9) \\
 (10) \\
 (11) \\
 (12)
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccccccccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & \lambda \sin(\alpha) & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} p_{A10} \\ q_{A10} \\ r_{A10} \\ r_{B10} \\ w_{B10} \\ u_{30} \\ v_{30} \\ r_{30} \\ p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \\ r_{21} \\ w_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.5 Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

1.5.1 Approche cinématique

- Avec deux cycles fermés, on obtient alors un système de $E_c = 12$ équations.
- La modélisation comporte $I_c = 13$ inconnues cinématiques.
- Le rang du système vaut $r_c = 10$ car deux équations ((4) et (5)) donnent “0=0” et ne sont donc pas significatives.
- Le nombre d'équations non-significatives correspond directement à l'**hyperstaticité** (ici $h = 2$)
- La mobilité cinématique se définit comme la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques (I_c) et le nombre d'équations significatives (r_c) : **ici** $m_c = 3$

$$m_c = I_c - r_c = I_c - (E_c - h). \quad (2)$$

2 Hyperstatisme

2.1 Degrés de mobilité

Définition — Mobilité cinématique. On appelle $m_c = m_u + m_i$ le **degrés de mobilité cinématique** d'une liaison ou d'un mécanisme, avec :

- m_u : le nombre de mobilités dites **utile**,
- m_i : le nombre de mobilités dites **interne**.

Pour une liaison seule :

- $m_c = 0$: liaison complète ou rigide,
- $m_c > 0$: liaison mobile à m_c degrés de liberté.

(R)

Dans un mécanisme, une mobilité utile est une mobilité **recherchée dans la fonction du mécanisme**. On différenciera **seulement** les mobilités utiles **indépendantes**. Si une relation existe, par exemple, entre un mouvement d'entrée et un mouvement de sortie, alors cela sera considéré comme une seule mobilité.

Les mobilités internes sont des mobilités indépendantes résiduelles à l'intérieur du mécanisme.