Activation 1 – Corrigé

Activation – Pompe à pistons axiaux

É. Durif

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C34 : chaînes de solides.*

Bilan des actions mécanique pour chacune des classes d'équivalence

Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 1

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point B :

- **Action de 0 sur 1 en A :**

$$\{\mathscr{T}(S_0 \rightarrow S_{1A})\} = \left\{\begin{array}{cc} X_{A01} & 0 \\ Y_{A01} & 0 \\ Z_{A01} & 0 \end{array}\right\}_{A,R_1} = \left\{\begin{array}{cc} X_{A01} & L_1\, Y_{A01} \\ Y_{A01} & -L_1\, X_{A01} \\ Z_{A01} & 0 \end{array}\right\}_{B,R_1}$$

- **Action de 0 sur 1 en B :**

$$\{\mathscr{T}(S_0 \rightarrow S_{1B})\} = \left\{\begin{array}{cc} X_{B01} & L_{B01} \\ Y_{B01} & M_{B01} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{B,R_1}$$

- **Action de 2 sur 1 en C :**

$$\{\mathscr{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{\begin{array}{cc} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{C,R_1} = \left\{\begin{array}{cc} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & -R\, Y_{21} \end{array}\right\}_{B,R_1}$$

Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 2

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point C :

- **Action de 3 sur 2 en D :**

$$\{\mathscr{T}(S_3 \rightarrow S_2)\} = \left\{\begin{array}{cc} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{array}\right\}_{D,R_1} = \left\{\begin{array}{cc} X_{32} & -\lambda\, Y_{32} \\ Y_{32} & \lambda\, X_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{array}\right\}_{C,R_1}$$

- **Action de 1 sur 2 en C :**

$$\{\mathscr{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \left\{\begin{array}{cc} -X_{21} & -L_{21} \\ -Y_{21} & -M_{21} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{C,R_1}$$

- **Action de la pression en C :**

$$\{\mathscr{T}(\text{pression} \rightarrow S_2)\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_p & 0 \end{array}\right\}_{C,R_1}$$

Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 3

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point D :

- **Action de 2 sur 3 en D :**

$$\{\mathscr{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} = \left\{\begin{array}{cc} -X_{32} & 0 \\ -Y_{32} & 0 \\ -Z_{32} & 0 \end{array}\right\}_{D,R_1}$$

- **Action de 0 sur 3 en E :**

$$\{\mathscr{T}(S0\rightarrow S3)\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{array}\right\}_{C,R_{1*}} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{array}\right\}_{D,R_{1*}} = \left\{\begin{array}{cc} Z_{03}\sin(\alpha) & L_{03}\cos(\alpha) \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03}\cos(\alpha) & -L_{03}\sin(\alpha) \end{array}\right\}_{D,R_1}$$

Résolution d'un système linéaire homogène

En appliquant successivement le principe fondamental de la statique pour chacun des trois ensemble on obtient un système de 18 équations :

$$\begin{array}{rc}
(1)\text{résultante suivant}\overrightarrow{x_1} & X_{A01}+X_{B01}+X_{C21}=0 \\
(2)\text{résultante suivant}\overrightarrow{y_1} & Y_{A01}+Y_{B01}+Y_{C21}=0 \\
(3)\text{résultante suivant}\overrightarrow{z_1} & Z_{A01}=0 \\
(4)\text{moment suivant}\left(B,\overrightarrow{x_1}\right) & L_1\ Y_{A01}+L_{B01}+L_{C21}=0 \\
(5)\text{moment suivant}\left(B,\overrightarrow{y_1}\right) & -L_1\ X_{A01}+M_{B01}+M_{C21}=0 \\
(6)\text{moment suivant}\left(B,\overrightarrow{z_1}\right) & -R\ Y_{C21}=0 \\
(7)\text{résultante suivant}\overrightarrow{x_1} & X_{D32}-X_{C21}=0 \\
(8)\text{résultante suivant}\overrightarrow{y_1} & Y_{D32}-Y_{C21}=0 \\
(9)\text{résultante suivant}\overrightarrow{z_1} & Z_{D32}+F_p=0 \\
(10)\text{moment suivant}\left(C,\overrightarrow{x_1}\right) & -\lambda\ Y_{D32}-L_{C21}=0 \\
(11)\text{moment suivant}\left(C,\overrightarrow{y_1}\right) & \lambda\ X_{D32}-M_{C21}=0 \\
(12)\text{moment suivant}\left(C,\overrightarrow{z_1}\right) & 0=0 \\
(13)\text{résultante suivant}\overrightarrow{x_1} & -X_{D32}+Z_{E03}\sin(\alpha)=0 \\
(14)\text{résultante suivant}\overrightarrow{y_1} & -Y_{D32}=0 \\
(15)\text{résultante suivant}\overrightarrow{z_1} & -Z_{D32}+Z_{E03}\cos(\alpha)=0 \\
(16)\text{moment suivant}D\,\overrightarrow{x_1} & L_{E03}\cos(\alpha)=0 \\
(17)\text{moment suivant}D\,\overrightarrow{y_1} & M_{E03}=0 \\
(18)\text{moment suivant}D\,\overrightarrow{z_1} & -M_{E03}\sin(\alpha)=0
\end{array}$$

Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

Bilan de l'approche statique

- On obtient alors un système de $E_s=18$ **équations statiques**.
- La modélisation comporte $I_s=17$ **inconnues statiques**.
- Certaines de ces équations ne sont pas significatives, elles correspondent aux mobilités cinématiques du mécanisme :
  - Équation (12) **"$0=0$"** : *mobilité de rotation de piston autour de* $\left(C,\overrightarrow{z_1}\right)$.
  - Les équations (6) (8) et (14) sont équivalentes à deux équations libres : *mobilité de rotation du barillet autour de* $\left(B,\overrightarrow{z_1}\right)$.
  - Équation (18) liée à (17) : *rotation du poussoir autour de* $\left(E,\overrightarrow{z_{1*}}\right)$.

  Le système possède alors **3 mobilités cinématiques** ($m_c=3$).
  Pour résoudre ce système on se retrouve donc avec $r_S=15$ **équations significatives** (rang du système d'équations statiques r_s) pour $I_S=17$ **inconnues**. Nous avons donc un déficit de **2 équations** ou encore 2 inconnues statiques de trop pour résoudre le problème. Le système est donc **hypercontraint**. **On dit que la modélisation du système est hyperstatique d'ordre 2**

$$\boxed{h=I_s-r_s=I_s-(E_s-m_c)} \tag{1}$$

Étude cinématique

Objectifs

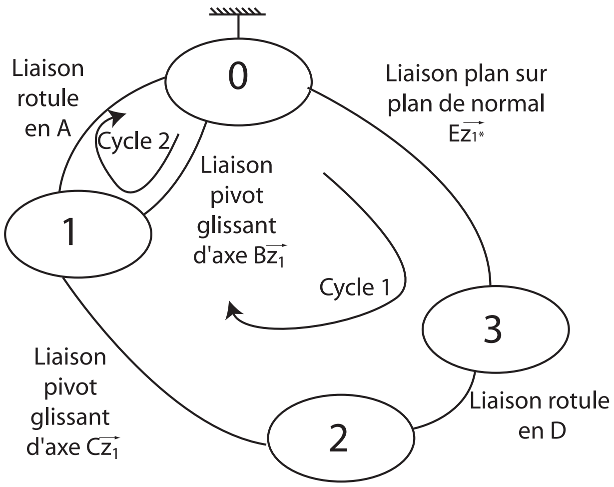
- La résolution cinématique a pour but de déterminer les caractéristiques cinématiques au niveau de toutes les liaisons de la chaîne.
- Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypertstaticité en vue de déterminer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.
- Elle permet enfin de déterminer la loi entrée-sortie cinématique du mécanisme.

Démarche

Le graphe de liaison donné ci-après montre que le mécanisme possède deux chaînes fermées :

- Chaîne 1 : $\{0-3-2-1-0\}$.
- Chaîne 2 : $\{0-1-0\}$.

L'approche cinématique consiste à écrire pour chaque chaine la fermeture cinématique à l'aide des torseurs.



Graphe de structure de la pompe

Fermeture de chaine cinématique

Chaine cinématique 1

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en C :

- $\{\mathcal{V}(3/0)\}$:

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array}\right\}_{E,R_{1*}} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array}\right\}_{D,R_{1*}} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & u_{30}\cos(\alpha) \\ r_{30}\sin(\alpha) & v_{30} \\ r_{30}\cos(\alpha) & -u_{30}\sin(\alpha) \end{array}\right\}_{D,R_1}$$

$$= \left\{\begin{array}{cc} 0 & u_{30}\cos(\alpha) - \lambda\, r_{30}\sin(\alpha) \\ r_{30}\sin(\alpha) & v_{30} \\ r_{30}\cos(\alpha) & -u_{30}\sin(\alpha) \end{array}\right\}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(3/2)\}$:

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{\begin{array}{cc} p_{32} & 0 \\ q_{32} & 0 \\ r_{32} & 0 \end{array}\right\}_{D,R_1} = \left\{\begin{array}{cc} p_{32} & -\lambda\, q_{32} \\ q_{32} & \lambda\, p_{32} \\ r_{32} & 0 \end{array}\right\}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(2/1)\}$:

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & w_{21} \end{array}\right\}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(1/0)\}$:

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & 0 \end{array}\right\}_{B,R_1} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -R\, r_{B10} \\ r_{B10} & 0 \end{array}\right\}_{C,R_1}$$

Chaine cinématique 2

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathscr{V}(1_A/0)\} = \{\mathscr{V}(1_B/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en A :

- $\{\mathscr{V}(1_A/0)\}$:

$$\{\mathscr{V}(1_A/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{A10} & 0 \\ q_{A10} & 0 \\ r_{A10} & 0 \end{array} \right\}_{A,R_1}$$

- $\{\mathscr{V}(1_B/0)\}$:

$$\{\mathscr{V}(1_B/0)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & w_{B10} \end{array} \right\}_{A,R_1}$$

Résolution

On écrit alors la fermeture cinématique pour chaque fermeture cinématique. Cela donnera 12 équation pour 13 inconnues avec les deux fermetures de chaines :

$$\left\{\mathscr{V}^A_{(1/0)}\right\} - \left\{\mathscr{V}^B_{(1/0)}\right\} = \{0\}$$

$$\{\mathscr{V}(3/2)\} + \{\mathscr{V}(2/1)\} + \{\mathscr{V}(1/0)\} - \{\mathscr{V}(3/0)\} = \{0\}$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \\ (11) \\ (12) \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & \lambda\sin(\alpha) & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} p_{A10} \\ q_{A10} \\ r_{A10} \\ r_{B10} \\ w_{B10} \\ u_{30} \\ v_{30} \\ r_{30} \\ p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \\ r_{21} \\ w_{21} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

Approche cinématique

- Avec deux cycles fermés, on obtient alors un système de $E_c = 12$ équations.
- La modélisation comporte $I_c = 13$ inconnues cinématiques.
- Le rang du système vaut $r_c = 10$ car deux équations ((4) et (5)) donnent **"0 = 0"** et ne sont donc pas significatives.
- Le nombre d'équations non-significatives correspond directement à l'**hyperstaticité** (ici $h = 2$)
- La mobilité cinématique se définit comme la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques (I_c) et le nombre d'équations significatives (r_c) : **ici** $mc = 3$

$$\boxed{m_c = I_c - r_c = I_c - (E_c - h).} \tag{2}$$