

**Modélisation des chaînes de solides dans le but de déterminer les contraintes géométriques dans les mécanismes.**

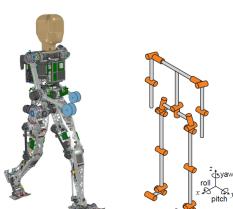
**Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur**

## Cours

### Chapitre 2 Hyperstatisme

*Savoirs et compétences :*

- Mod2.C34 : chaînes de solides ;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle ;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle ;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme ;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.



*Robot humanoïde Lola*



*Simulateur de vol Lockheed Martin*

1	Degrés de mobilité	2
2	Hyperstatisme	2
2.1	Définition . . . . .	2
2.2	Le système est hyperstatique... et alors ? . . . . .	2
1		42

## 1 Degrés de mobilité

**Définition — Mobilité cinématique.** On appelle  $m_c = m_u + m_i$  le **degrés de mobilité cinématique** d'une liaison ou d'un mécanisme, avec :

- $m_u$  : le nombre de mobilités dites **utile**;
- $m_i$  : le nombre de mobilités dites **interne**.

Pour une liaison seule :

- $m_c = 0$  : liaison complète ou rigide;
- $m_c > 0$  : liaison mobile à  $m_c$  degrés de liberté.

(R)

Dans un mécanisme, une mobilité utile est une mobilité **recherchée dans la fonction du mécanisme**. On différenciera **seulement** les mobilités utiles **indépendantes**. Si une relation existe, par exemple, entre un mouvement d'entrée et un mouvement de sortie, alors cela sera considéré comme une seule mobilité.

Les mobilités internes sont des mobilités indépendantes résiduelles à l'intérieur du mécanisme.

**Méthode** Les mobilités utiles et internes peuvent être déterminées intuitivement. Cependant, il est possible de déterminer le nombre de mobilités analytiquement.

### Méthode cinématique

Il faut commencer par écrire la (ou les) fermetures de chaînes cinématiques. Une fermeture de chaîne permet d'écrire un système de 6 équations. On note  $r_c$  le rang du système d'équations cinématiques.

On a alors  $m_c = I_c - r_c$ .

### Méthode statique

Il faut commencer par appliquer le PFS à chacune des pièces du système. Un PFS permet d'écrire un système de 6 équations. On note  $r_s$  le rang du système d'équations statiques.

On a alors  $m_c = E_S - r_s$ .

## 2 Hyperstatisme

### 2.1 Définition

On appelle  $h$  le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme. Il traduit l'impossibilité à résoudre un problème de mécanique, par la redondance abusive des liaisons.

**Définition — Degrés d'hyperstatisme.** On peut définir le degré d'hyperstatisme par :

#### Méthode cinématique

$$h = m_c - I_c + E_c$$

#### Méthode statique

$$h = m_c - E_S + I_s$$

- $h = 0$  : liaison ou mécanisme **isostatique**;
- $h > 0$  : liaison ou mécanisme **hyperstatique**.

**Définition — Notations.**  $I_c$  et  $I_s$  sont respectivement les **nombres d'inconnues cinématiques et statiques** d'un système et ils dépendent du type de modélisation (2D ou 3D).

#### Méthode cinématique

On rappelle que le **nombre cyclomatique**  $\gamma$  est tel que  $\gamma = L - S + 1$  ( $S$  nombre de classes d'équivalence et  $L$  le nombre de liaisons).

On note  $E_c$  le nombre d'équations cinématique :

- en 3D :  $E_c = 6\gamma$ ;
- en 2D :  $E_c = 3\gamma$ .

#### Méthode statique

$E_s$  est le nombre d'équations statique :

- en 3D :  $E_s = 6(S - 1)$ ;
- en 2D :  $E_s = 3(S - 1)$ .

- (R)
- Un système en **chaîne ouverte** est toujours **isostatique**.
  - Une liaison hélicoïdale a 5 inconnues statiques et 1 inconnue cinématique.

### 2.2 Le système est hyperstatique... et alors ?

Tout d'abord, d'un point de vue calcul mécanique, l'intérêt d'un système isostatique est qu'il est possible de calculer les efforts dans chacune des liaisons. Un système isostatique sera de plus facile à assembler car le positionnement des pièces les unes avec les autres est « unique ».

Pour les systèmes hyperstatiques, il n'est pas possible de connaître chacun des efforts. En revanche, la détermination des lois de mouvement des systèmes reste possible. Les systèmes hyperstatiques sont plus rigides que des systèmes isostatiques mais nécessitent de prendre des précautions au montage ou à la fabrication des pièces :

- les dimensions des pièces fabriquées doivent être maîtrisées;
- du jeu doit être prévu pour garantir l'assemblage;
- des dispositifs de réglage peuvent être proposés.

Un système hyperstatique peut donc être plus cher à réaliser, mais peut être plus rigide et d'une plus grande durée de vie.

Pour calculer les efforts dans un système hyperstatique, plusieurs solutions sont possibles : on peut par exemple faire des hypothèses sur une répartition d'efforts.

**Méthode — Conditions de montage.** Pour déterminer les conditions de montage, il est possible d'exploiter les équations  $0 = 0$  issues des fermetures de chaînes cinématiques. En effet, le nombre d'équations  $0 = 0$  correspond au degré d'hyperstatisme.

- une équation de type  $0 = 0$  issue de la fermeture des vecteurs taux de rotation impose de spécifier un parallélisme;
- une équation de type  $0 = 0$  issue de la fermeture des vecteurs vitesse impose de spécifier une distance.

Il est parfois demandé de diminuer le degré d'hyperstatisme d'un système. Pour cela, il faut rajouter des degrés de liberté à certaines liaisons, sans pour autant modifier le comportement du système.

## Activation 1

### Activation – Pompe à pistons axiaux

É. Durif

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides.

#### Présentation

Nous prendrons comme exemple dans ce cours, la pompe à pistons axiaux. Nous avons retenu une modélisation avec 4 classes d'équivalence y compris le bâti :

- 0 : bâti;
- 1 : barillet;
- 2 : piston;
- 3 : poussoir.

On note  $n$  le nombre de classes d'équivalence hors bâti (ici  $n = 3$ ). Dans cette étude, on se place directement dans la base  $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  qui est en rotation par rapport à la base  $B_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour de l'axe  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$  avec le paramètre de rotation  $\theta$ . Le plateau inclinable est supposé fixe au cours du temps. On lui associe le repère  $R_{0*} = (\vec{x}_{0*}, \vec{y}_{0*}, \vec{z}_{0*})$  qui est en rotation par rapport au repère  $R_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour de l'axe  $\vec{y}_0$  avec le paramètre angulaire  $\alpha$ . On introduit le repère  $R_{1*} = (\vec{x}_{1*}, \vec{y}_{1*}, \vec{z}_{1*})$  directement obtenu à partir de  $R_{0*}$  par une rotation autour de  $\vec{z}_{0*}$  et d'angle  $\theta$ . On donne également :  $\overrightarrow{AB} = L_1 \vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{BC} = -R \vec{x}_1$ ,  $\overrightarrow{CD} = \lambda \vec{z}_1$ ,  $\overrightarrow{DE} = h \vec{z}_{1*}$ .

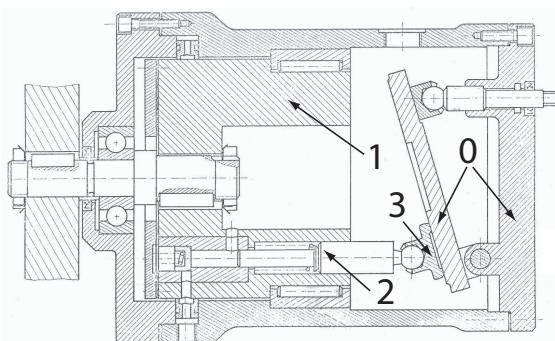


Schéma technologique d'une pompe à pistons axiaux

Les liaisons entre les différentes classes d'équivalence permettent de modéliser le système avec le schéma cinématique ci-après.

- Les liaisons sont parfaites : sans frottements ni jeux.
- Le poids et les effets d'inerties sont négligés.
- On introduit une action de pression s'exerçant sur le piston 2 assimilable à un glisseur d'axe central ( $C, \vec{z}_1$ ) et qui a pour résultante en effort :  $\vec{F}_p = F_p \vec{z}_1$

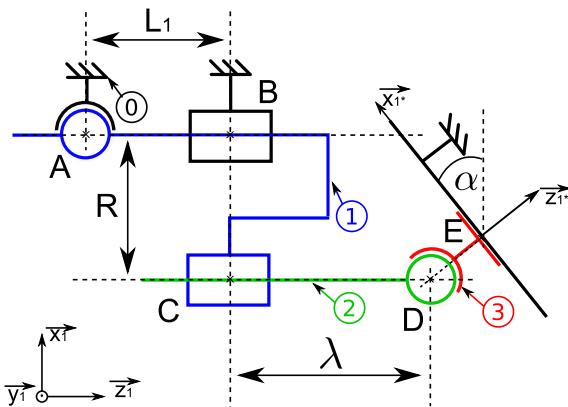


Schéma cinématique d'une pompe à pistons axiaux

#### Etude préliminaire

**Question 1** Tracer le graphe de structure du mécanisme.

**Question 2** En utilisant les formules globales de l'hyperstatisme, déterminer le degré d'hyperstatisme en utilisant la méthode statique puis la méthode cinématique.

#### Etude statique

**Question 3** Isoler successivement les pièces 1, 2 puis 3 et réaliser le PFS en B, C et D.

**Question 4** Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

#### Etude cinématique

**Question 5** Écrire les fermetures de chaînes associées au mécanisme.

**Question 6** Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

#### Hyperstatisme

**Question 7** Proposer des conditions géométriques permettant d'assurer l'assemblage du système.

**Question 8** Proposer une modèle isostatique cinématiquement équivalent.

## Objectifs

- La résolution statique a pour but de déterminer les actions dans les liaisons mécaniques. Cette résolution pourra alors ensuite permettre un dimensionnement des différentes liaisons.
- Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypostaticité en vue de d'estimer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.

## Bilan des actions mécanique pour chacune des classes d'équivalence

### Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 1

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point  $B$  :

- Action de 0 sur 1 en A :**

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1A})\} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & 0 \\ Y_{A01} & 0 \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & L_1 Y_{A01} \\ Y_{A01} & -L_1 X_{A01} \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

- Action de 0 sur 1 en B :**

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1B})\} = \begin{Bmatrix} X_{B01} & L_{B01} \\ Y_{B01} & M_{B01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

- Action de 2 sur 1 en C :**

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & -R Y_{21} \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

### Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 2

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point  $C$  :

- Action de 3 sur 2 en D :**

$$\{\mathcal{T}(S_3 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{32} & -\lambda Y_{32} \\ Y_{32} & \lambda X_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- Action de 1 sur 2 en C :**

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} -X_{21} & -L_{21} \\ -Y_{21} & -M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- Action de la pression en C :**

$$\{\mathcal{T}(\text{pression} \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_p & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

### Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 3

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point  $D$  :

- Action de 2 sur 3 en D :**

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} = \begin{Bmatrix} -X_{32} & 0 \\ -Y_{32} & 0 \\ -Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1}$$

- Action de 0 sur 3 en E :**

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3)\} &= \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_{1*}} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_{1*}} \end{aligned}$$

$$= \begin{Bmatrix} Z_{03} \sin(\alpha) & L_{03} \cos(\alpha) \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} \cos(\alpha) & -L_{03} \sin(\alpha) \end{Bmatrix}_{D,R_1}$$

### Résolution d'un système linéaire homogène

En appliquant successivement le principe fondamental de la statique pour chacun des trois ensemble on obtient un système de 18 équations :

(1)résultante suivant $\vec{x}_1$	$X_{A01} + X_{B01} + X_{C21} = 0$
(2)résultante suivant $\vec{y}_1$	$Y_{A01} + Y_{B01} + Y_{C21} = 0$
(3)résultante suivant $\vec{z}_1$	$Z_{A01} = 0$
(4)moment suivant $(B, \vec{x}_1)$	$L_1 Y_{A01} + L_{B01} + L_{C21} = 0$
(5)moment suivant $(B, \vec{y}_1)$	$-L_1 X_{A01} + M_{B01} + M_{C21} = 0$
(6)moment suivant $(B, \vec{z}_1)$	$-R Y_{C21} = 0$
(7)résultante suivant $\vec{x}_1$	$X_{D32} - X_{C21} = 0$
(8)résultante suivant $\vec{y}_1$	$Y_{D32} - Y_{C21} = 0$
(9)résultante suivant $\vec{z}_1$	$Z_{D32} + F_p = 0$
(10)moment suivant $(C, \vec{x}_1)$	$-\lambda Y_{D32} - L_{C21} = 0$
(11)moment suivant $(C, \vec{y}_1)$	$\lambda X_{D32} - M_{C21} = 0$
(12)moment suivant $(C, \vec{z}_1)$	$0 = 0$
(13)résultante suivant $\vec{x}_1$	$-X_{D32} + Z_{E03} \sin(\alpha) = 0$
(14)résultante suivant $\vec{y}_1$	$-Y_{D32} = 0$
(15)résultante suivant $\vec{z}_1$	$-Z_{D32} + Z_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(16)moment suivant $D \vec{x}_1$	$L_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(17)moment suivant $D \vec{y}_1$	$M_{E03} = 0$
(18)moment suivant $D \vec{z}_1$	$-M_{E03} \sin(\alpha) = 0$

### Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

Bilan de l'approche statique

- On obtient alors un système de  $E_s = 18$  équations statiques.
- La modélisation comporte  $I_s = 17$  inconnues statiques.
- Certaines de ces équations ne sont pas significatives, elles correspondent aux mobilités cinématiques du mécanisme :
  - Équation (12) “ $0 = 0$ ” : mobilité de rotation de piston autour de  $(C, \vec{z}_1)$ .
  - Les équations (6) (8) et (14) sont équivalentes à deux équations libres : mobilité de rotation du bâillet autour de  $(B, \vec{z}_1)$ .
  - Équation (18) liée à (17) : rotation du poussoir autour de  $(E, \vec{z}_{1*})$ .

Le système possède alors 3 mobilités cinématiques ( $m_c = 3$ ).

Pour résoudre ce système on se retrouve donc avec  $r_s = 15$  équations significatives (rang du système d'équations statiques  $r_s$ ) pour  $I_s = 17$  inconnues. Nous avons donc un déficit de 2 équations ou encore 2 inconnues statiques de trop pour résoudre le problème. Le système est donc hypercontraint. **On dit que la modélisation du système est hyperstatique d'ordre 2**

$$h = I_s - r_s = I_s - (E_s - m_c) \quad (1)$$

### Étude cinématique

#### Objectifs

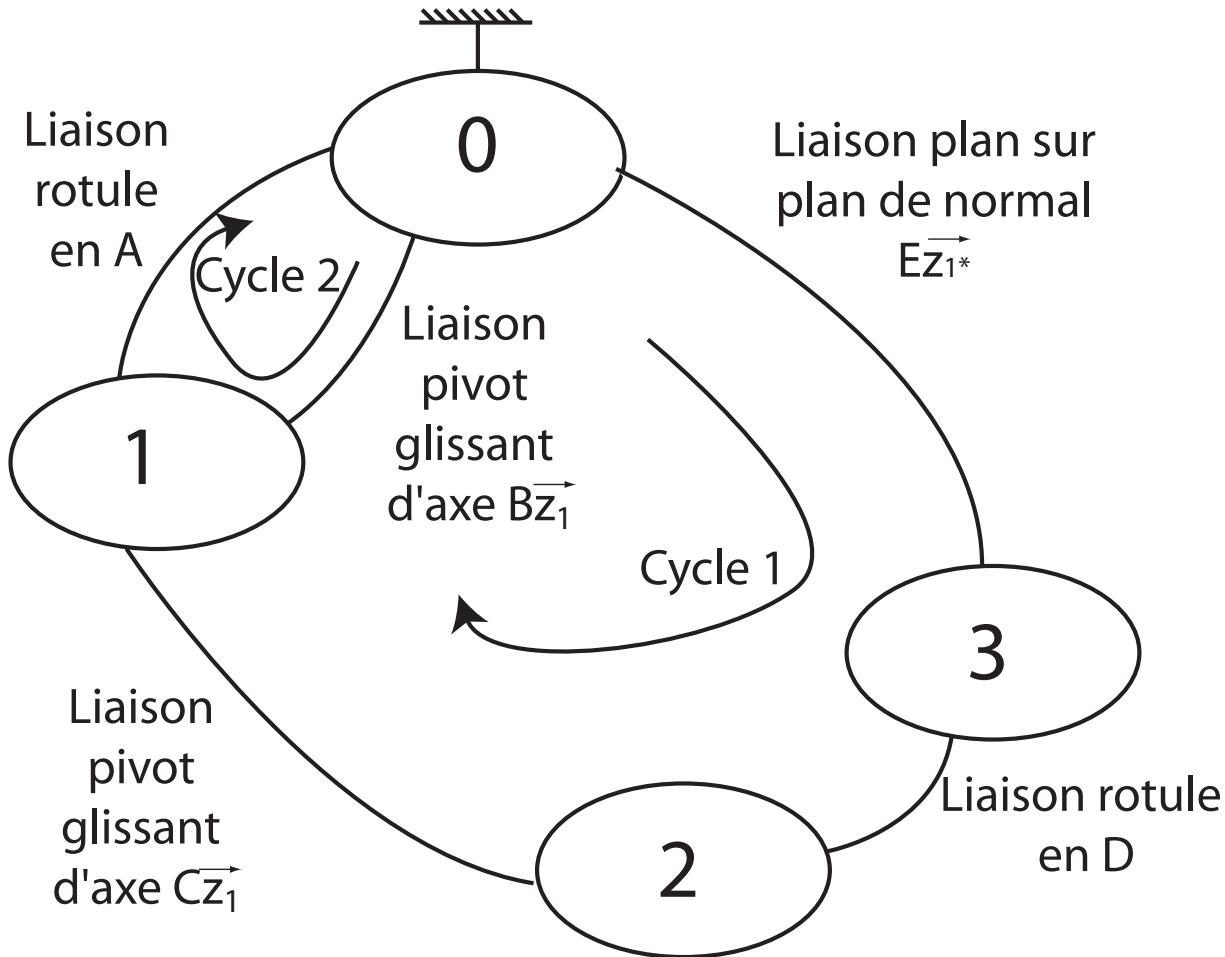
- La résolution cinématique a pour but de déterminer les caractéristiques cinématiques au niveau de toutes les liaisons de la chaîne.
- Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypertstaticité en vue de déterminer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.
- Elle permet enfin de déterminer la loi entrée-sortie cinématique du mécanisme.

#### Démarche

Le graphe de liaison donné ci-après montre que le mécanisme possède deux chaînes fermées :

- Chaîne 1 : {0–3–2–1–0}.
- Chaîne 2 : {0–1–0}.

L'approche cinématique consiste à écrire pour chaque chaîne la fermeture cinématique à l'aide des torseurs.



Graphe de structure de la pompe

### Fermeture de chaîne cinématique

#### Chaîne cinématique 1

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en  $C$  :

- $\{\mathcal{V}(3/0)\}$  :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}(3/0)\} &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array} \right\}_{E,R_{1*}} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array} \right\}_{D,R_{1*}} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & u_{30} \cos(\alpha) & u_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} & -u_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) & 0 \end{array} \right\}_{D,R_1} \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & u_{30} \cos(\alpha) - \lambda r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} & -u_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1} \end{aligned}$$

- $\{\mathcal{V}(3/2)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{c} p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \end{array} \right\}_{D,R_1} = \left\{ \begin{array}{c} p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \end{array} \right\}_{C,R_1} = \left\{ \begin{array}{c} p_{32} & -\lambda q_{32} \\ q_{32} & \lambda p_{32} \\ r_{32} & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(2/1)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & w_{21} \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R \\ r_{B10} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

### Chaine cinématique 2

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \{\mathcal{V}(1_B/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en  $A$  :

- $\{\mathcal{V}(1_A/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \begin{Bmatrix} p_{A10} & 0 \\ q_{A10} & 0 \\ r_{A10} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(1_B/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1_B/0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & w_{B10} \end{Bmatrix}_{A,R_1}$$

### Résolution

On écrit alors la fermeture cinématique pour chaque fermeture cinématique. Cela donnera 12 équation pour 13 inconnues avec les deux fermetures de chaînes :

$$\{\mathcal{V}_{(1/0)}^A\} - \{\mathcal{V}_{(1/0)}^B\} = \{0\}$$

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} - \{\mathcal{V}(3/0)\} = \{0\}$$

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (3) & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (7) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (9) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ (10) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & \lambda \sin(\alpha) & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ (11) & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ (12) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_{A10} \\ q_{A10} \\ r_{A10} \\ r_{B10} \\ w_{B10} \\ u_{30} \\ v_{30} \\ r_{30} \\ p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \\ r_{21} \\ w_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

#### Approche cinématique

- Avec deux cycles fermés, on obtient alors un système de  $E_c = 12$  équations.
- La modélisation comporte  $I_c = 13$  inconnues cinématiques.
- Le rang du système vaut  $r_c = 10$  car deux équations ((4) et (5)) donnent “ $0 = 0$ ” et ne sont donc pas significatives.
- Le nombre d'équations non-significatives correspond directement à l'**hyperstaticité** (ici  $h = 2$ )

- La mobilité cinématique se définit comme la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques ( $I_c$ ) et le nombre d'équations significatives ( $r_c$ ) : **ici**  $m_c = 3$

$$m_c = I_c - r_c = I_c - (E_c - h). \quad (2)$$

## Hyperstatisme

### Degrés de mobilité

**Définition — Mobilité cinématique.** On appelle  $m_c = m_u + m_i$  le **degrés de mobilité cinématique** d'une liaison ou d'un mécanisme, avec :

- $m_u$  : le nombre de mobilités dites **utile**,
- $m_i$  : le nombre de mobilités dites **interne**.

Pour une liaison seule :

- $m_c = 0$  : liaison complète ou rigide,
- $m_c > 0$  : liaison mobile à  $m_c$  degrés de liberté.

(R)

Dans un mécanisme, une mobilité utile est une mobilité **recherchée dans la fonction du mécanisme**. On différenciera **seulement** les mobilités utiles **indépendantes**. Si une relation existe, par exemple, entre un mouvement d'entrée et un mouvement de sortie, alors cela sera considéré comme une seule mobilité.

Les mobilités internes sont des mobilités indépendantes résiduelles à l'intérieur du mécanisme.

## Activation 1 – Corrigé

## Activation – Pompe à pistons axiaux

É. Durif

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides.

## Présentation

Nous prendrons comme exemple dans ce cours, la pompe à pistons axiaux. Nous avons retenu une modélisation avec 4 classes d'équivalence y compris le bâti :

- 0 : bâti;
- 1 : barillet;
- 2 : piston;
- 3 : poussoir.

On note  $n$  le nombre de classes d'équivalence hors bâti (ici  $n = 3$ ). Dans cette étude, on se place directement dans la base  $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  qui est en rotation par rapport à la base  $B_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour de l'axe  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$  avec le paramètre de rotation  $\theta$ . Le plateau inclinable est supposé fixe au cours du temps. On lui associe le repère  $R_{0*} = (\vec{x}_{0*}, \vec{y}_{0*}, \vec{z}_{0*})$  qui est en rotation par rapport au repère  $R_O = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  autour de l'axe  $\vec{y}_0$  avec le paramètre angulaire  $\alpha$ . On introduit le repère  $R_{1*} = (\vec{x}_{1*}, \vec{y}_{1*}, \vec{z}_{1*})$  directement obtenu à partir de  $R_{0*}$  par une rotation autour de  $\vec{z}_{0*}$  et d'angle  $\theta$ . On donne également :  $\overrightarrow{AB} = L_1 \vec{z}_0$ ,  $\overrightarrow{BC} = -R \vec{x}_1$ ,  $\overrightarrow{CD} = \lambda \vec{z}_1$ ,  $\overrightarrow{DE} = h \vec{z}_{1*}$ .

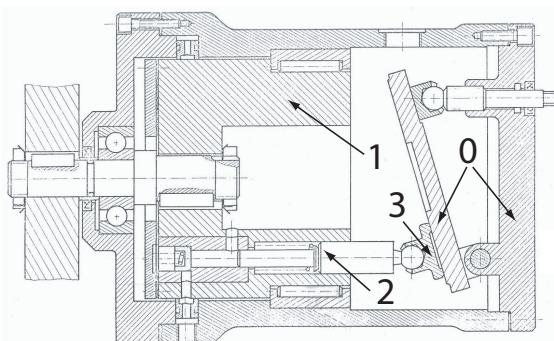


Schéma technologique d'une pompe à pistons axiaux

Les liaisons entre les différentes classes d'équivalence permettent de modéliser le système avec le schéma cinématique ci-après.

- Les liaisons sont parfaites : sans frottements ni jeux.
- Le poids et les effets d'inerties sont négligés.
- On introduit une action de pression s'exerçant sur le piston 2 assimilable à un glisseur d'axe central ( $C, \vec{z}_1$ ) et qui a pour résultante en effort :  $\vec{F}_p = F_p \vec{z}_1$

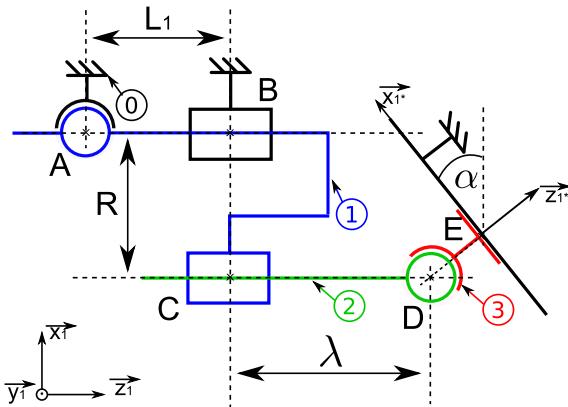


Schéma cinématique d'une pompe à pistons axiaux

## Etude préliminaire

**Question 1** Tracer le graphe de structure du mécanisme.

**Question 2** En utilisant les formules globales de l'hyperstatisme, déterminer le degré d'hyperstatisme en utilisant la méthode statique puis la méthode cinématique.

## Etude statique

**Question 3** Isoler successivement les pièces 1, 2 puis 3 et réaliser le PFS en B, C et D.

**Question 4** Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

## Etude cinématique

**Question 5** Écrire les fermetures de chaînes associées au mécanisme.

**Question 6** Écrire le système d'équations. Conclure sur le rang du système d'équations et sur l'hyperstatisme du système mécanique.

## Hyperstatisme

**Question 7** Proposer des conditions géométriques permettant d'assurer l'assemblage du système.

**Question 8** Proposer une modèle isostatique cinématiquement équivalent.

## Objectifs

- La résolution statique a pour but de déterminer les actions dans les liaisons mécaniques. Cette résolution pourra alors ensuite permettre un dimensionnement des différentes liaisons.
- Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypostaticité en vue de d'estimer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.

## Bilan des actions mécanique pour chacune des classes d'équivalence

### Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 1

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point  $B$  :

- Action de 0 sur 1 en A :**

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1A})\} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & 0 \\ Y_{A01} & 0 \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & L_1 & Y_{A01} \\ Y_{A01} & -L_1 & X_{A01} \\ Z_{A01} & 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

- Action de 0 sur 1 en B :**

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1B})\} = \begin{Bmatrix} X_{B01} & L_{B01} \\ Y_{B01} & M_{B01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

- Action de 2 sur 1 en C :**

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & -R Y_{21} \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

### Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 2

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point  $C$  :

- Action de 3 sur 2 en D :**

$$\{\mathcal{T}(S_3 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{32} & -\lambda Y_{32} \\ Y_{32} & \lambda X_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- Action de 1 sur 2 en C :**

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} -X_{21} & -L_{21} \\ -Y_{21} & -M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- Action de la pression en C :**

$$\{\mathcal{T}(\text{pression} \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_p & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

### Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 3

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point  $D$  :

- Action de 2 sur 3 en D :**

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} = \begin{Bmatrix} -X_{32} & 0 \\ -Y_{32} & 0 \\ -Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1}$$

- Action de 0 sur 3 en E :**

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3)\} &= \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_{1*}} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_{1*}} \end{aligned}$$

$$= \begin{Bmatrix} Z_{03} \sin(\alpha) & L_{03} \cos(\alpha) \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} \cos(\alpha) & -L_{03} \sin(\alpha) \end{Bmatrix}_{D,R_1}$$

### Résolution d'un système linéaire homogène

En appliquant successivement le principe fondamental de la statique pour chacun des trois ensemble on obtient un système de 18 équations :

(1)résultante suivant $\vec{x}_1$	$X_{A01} + X_{B01} + X_{C21} = 0$
(2)résultante suivant $\vec{y}_1$	$Y_{A01} + Y_{B01} + Y_{C21} = 0$
(3)résultante suivant $\vec{z}_1$	$Z_{A01} = 0$
(4)moment suivant $(B, \vec{x}_1)$	$L_1 Y_{A01} + L_{B01} + L_{C21} = 0$
(5)moment suivant $(B, \vec{y}_1)$	$-L_1 X_{A01} + M_{B01} + M_{C21} = 0$
(6)moment suivant $(B, \vec{z}_1)$	$-R Y_{C21} = 0$
(7)résultante suivant $\vec{x}_1$	$X_{D32} - X_{C21} = 0$
(8)résultante suivant $\vec{y}_1$	$Y_{D32} - Y_{C21} = 0$
(9)résultante suivant $\vec{z}_1$	$Z_{D32} + F_p = 0$
(10)moment suivant $(C, \vec{x}_1)$	$-\lambda Y_{D32} - L_{C21} = 0$
(11)moment suivant $(C, \vec{y}_1)$	$\lambda X_{D32} - M_{C21} = 0$
(12)moment suivant $(C, \vec{z}_1)$	$0 = 0$
(13)résultante suivant $\vec{x}_1$	$-X_{D32} + Z_{E03} \sin(\alpha) = 0$
(14)résultante suivant $\vec{y}_1$	$-Y_{D32} = 0$
(15)résultante suivant $\vec{z}_1$	$-Z_{D32} + Z_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(16)moment suivant $D \vec{x}_1$	$L_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(17)moment suivant $D \vec{y}_1$	$M_{E03} = 0$
(18)moment suivant $D \vec{z}_1$	$-M_{E03} \sin(\alpha) = 0$

### Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

Bilan de l'approche statique

- On obtient alors un système de  $E_s = 18$  équations statiques.
- La modélisation comporte  $I_s = 17$  inconnues statiques.
- Certaines de ces équations ne sont pas significatives, elles correspondent aux mobilités cinématiques du mécanisme :
  - Équation (12) “ $0 = 0$ ” : mobilité de rotation de piston autour de  $(C, \vec{z}_1)$ .
  - Les équations (6) (8) et (14) sont équivalentes à deux équations libres : mobilité de rotation du bâillet autour de  $(B, \vec{z}_1)$ .
  - Équation (18) liée à (17) : rotation du poussoir autour de  $(E, \vec{z}_{1*})$ .

Le système possède alors 3 mobilités cinématiques ( $m_c = 3$ ).

Pour résoudre ce système on se retrouve donc avec  $r_s = 15$  équations significatives (rang du système d'équations statiques  $r_s$ ) pour  $I_s = 17$  inconnues. Nous avons donc un déficit de 2 équations ou encore 2 inconnues statiques de trop pour résoudre le problème. Le système est donc hypercontraint. **On dit que la modélisation du système est hyperstatique d'ordre 2**

$$h = I_s - r_s = I_s - (E_s - m_c) \quad (3)$$

### Étude cinématique

#### Objectifs

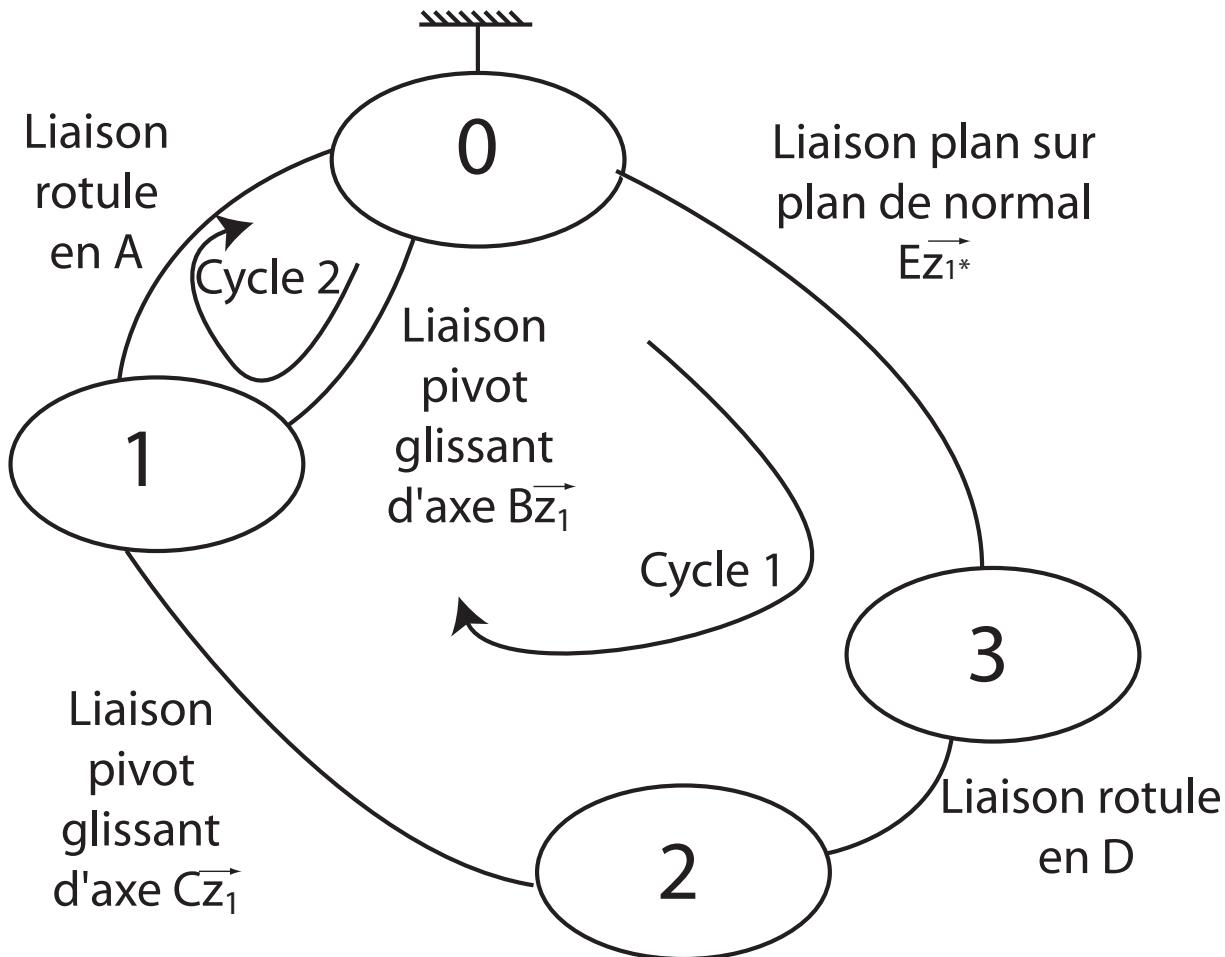
- La résolution cinématique a pour but de déterminer les caractéristiques cinématiques au niveau de toutes les liaisons de la chaîne.
- Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypertstaticité en vue de déterminer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.
- Elle permet enfin de déterminer la loi entrée-sortie cinématique du mécanisme.

#### Démarche

Le graphe de liaison donné ci-après montre que le mécanisme possède deux chaînes fermées :

- Chaîne 1 : {0–3–2–1–0}.
- Chaîne 2 : {0–1–0}.

L'approche cinématique consiste à écrire pour chaque chaîne la fermeture cinématique à l'aide des torseurs.



Graphe de structure de la pompe

### Fermeture de chaîne cinématique

#### Chaîne cinématique 1

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en C :

- $\{\mathcal{V}(3/0)\}$  :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}(3/0)\} &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array} \right\}_{E,R_{1*}} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{array} \right\}_{D,R_{1*}} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & u_{30} \cos(\alpha) & u_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} & -u_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) & 0 \end{array} \right\}_{D,R_1} \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & u_{30} \cos(\alpha) - \lambda r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} & -u_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1} \end{aligned}$$

- $\{\mathcal{V}(3/2)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{c} p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \end{array} \right\}_{D,R_1} = \left\{ \begin{array}{c} p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \end{array} \right\}_{C,R_1} = \left\{ \begin{array}{c} p_{32} & -\lambda q_{32} \\ q_{32} & \lambda p_{32} \\ r_{32} & 0 \end{array} \right\}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(2/1)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & w_{21} \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R \\ r_{B10} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

### Chaine cinématique 2

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \{\mathcal{V}(1_B/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en  $A$  :

- $\{\mathcal{V}(1_A/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \begin{Bmatrix} p_{A10} & 0 \\ q_{A10} & 0 \\ r_{A10} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(1_B/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1_B/0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & w_{B10} \end{Bmatrix}_{A,R_1}$$

### Résolution

On écrit alors la fermeture cinématique pour chaque fermeture cinématique. Cela donnera 12 équation pour 13 inconnues avec les deux fermetures de chaînes :

$$\{\mathcal{V}_{(1/0)}^A\} - \{\mathcal{V}_{(1/0)}^B\} = \{0\}$$

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} - \{\mathcal{V}(3/0)\} = \{0\}$$

$$(1) \quad \left( \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \begin{Bmatrix} p_{A10} \\ q_{A10} \\ r_{A10} \\ r_{B10} \\ w_{B10} \\ u_{30} \\ v_{30} \\ r_{30} \\ p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \\ r_{21} \\ w_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

#### Approche cinématique

- Avec deux cycles fermés, on obtient alors un système de  $E_c = 12$  équations.
- La modélisation comporte  $I_c = 13$  inconnues cinématiques.
- Le rang du système vaut  $r_c = 10$  car deux équations ((4) et (5)) donnent “ $0 = 0$ ” et ne sont donc pas significatives.
- Le nombre d'équations non-significatives correspond directement à l'**hyperstaticité** (ici  $h = 2$ )

- La mobilité cinématique se définit comme la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques ( $I_c$ ) et le nombre d'équations significatives ( $r_c$ ) : **ici**  $m_c = 3$

$$m_c = I_c - r_c = I_c - (E_c - h). \quad (4)$$

## Hyperstatisme

### Degrés de mobilité

**Définition — Mobilité cinématique.** On appelle  $m_c = m_u + m_i$  le **degrés de mobilité cinématique** d'une liaison ou d'un mécanisme, avec :

- $m_u$  : le nombre de mobilités dites **utile**,
- $m_i$  : le nombre de mobilités dites **interne**.

Pour une liaison seule :

- $m_c = 0$  : liaison complète ou rigide,
- $m_c > 0$  : liaison mobile à  $m_c$  degrés de liberté.

(R)

Dans un mécanisme, une mobilité utile est une mobilité **recherchée dans la fonction du mécanisme**. On différenciera **seulement** les mobilités utiles **indépendantes**. Si une relation existe, par exemple, entre un mouvement d'entrée et un mouvement de sortie, alors cela sera considéré comme une seule mobilité.

Les mobilités internes sont des mobilités indépendantes résiduelles à l'intérieur du mécanisme.

## Application 1

### Application 01

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides ;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle ;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle ;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme ;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

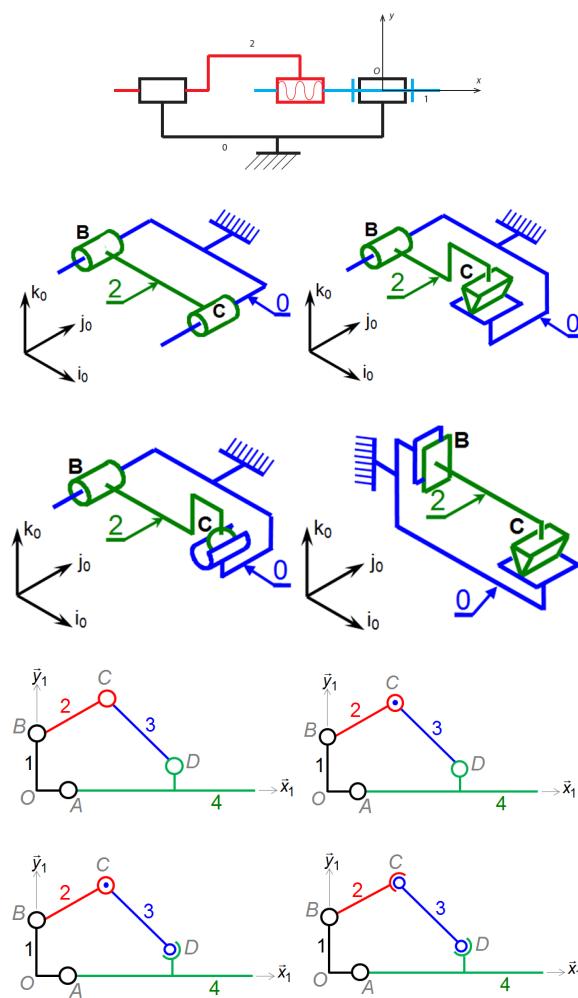
#### Exercice 1 – Applications directes

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie.

**Question 1** Pour chacun des mécanismes suivants, déterminer le degré d'hyperstatisme.

**Question 2** Lorsque le modèle est hyperstatique, proposer :

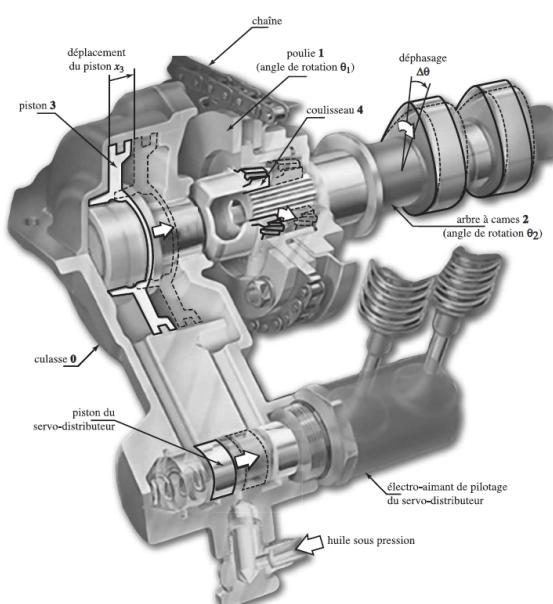
- des conditions d'assemblage (intuitivement) ;
- un modèle isostatique.



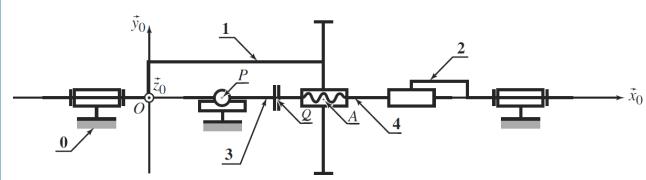
#### Exercice 2 – Déphasage d'arbre à cames

Banque PTSIA – 2008.

L'optimisation d'un moteur 4 temps passe (entre autre) par une bonne maîtrise des lois de levée des soupapes. Il est ainsi possible de positionner entre la poulie 1 (entraînée par le vilebrequin via une chaîne) et l'arbre à came 2 un système permettant de créer un déphasage entre ces pièces.



On propose ci-dessous un modèle cinématique du système de déphasage. On retrouve la culasse 0, la poulie d'entraînement 1, l'arbre à cames 2, le piston 3 et le coulisseau 4.



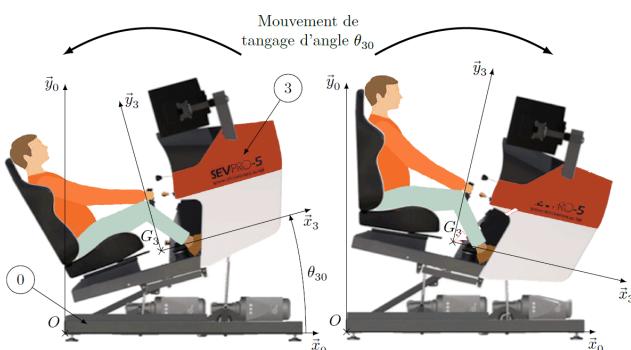
**Question 1** Établir le graphe des liaisons du mécanisme.

**Question 2** Déterminer le degré d'hyperstatisme en précisant la démarche utilisée. (On utilisera la méthode cinématique et la méthode statique).

### Exercice 3 – Simulateur de vol pour la formation de pilotes en aéroclub

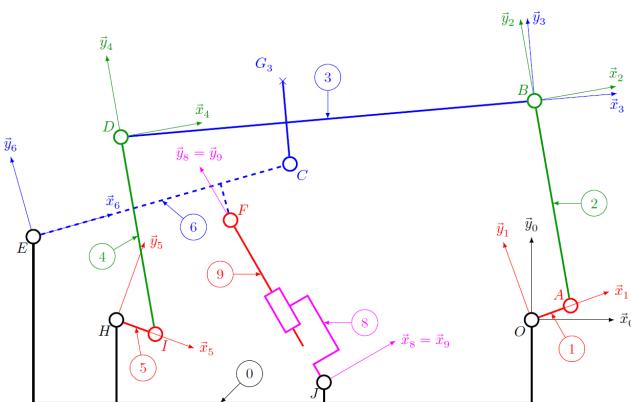
Centrale Supelec 2017 – PSI.

On s'intéresse à un simulateur de vol à plate-forme dynamique. Deux moteurs permettent d'assurer le mouvement de tangage. Ils entraînent respectivement les liaisons pivots de centres  $H$  et  $O$ .



On propose le modèle plan suivant (la pièce 6 est en traits pointillés pour la démarquer des autres pièces).

**Question 1** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.

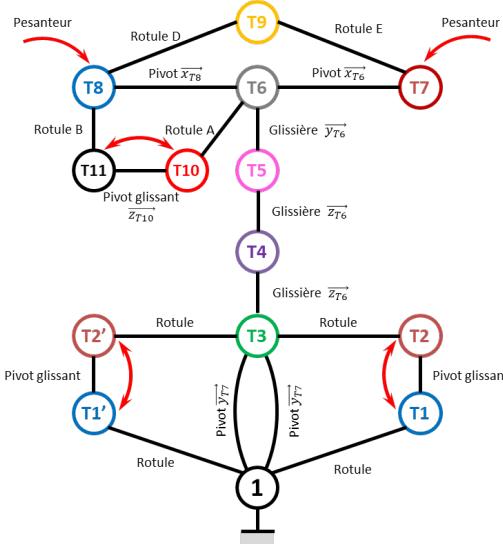
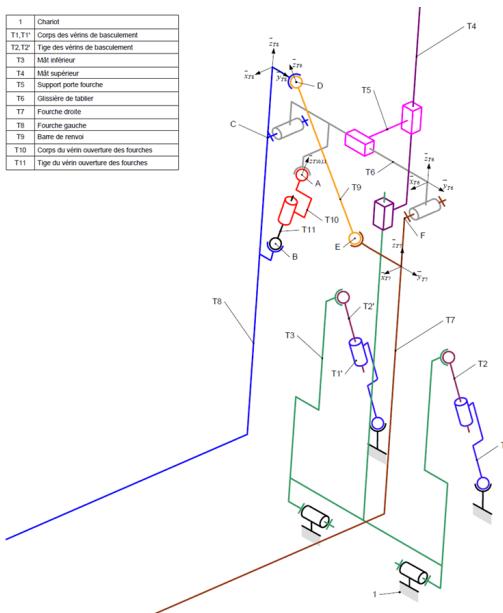


### Exercice 4 – Chariot élévateur de bateaux

On donne le schéma cinématique et le graphe de liaisons associés au chariot élévateur de bateaux.

**Question 1** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle.

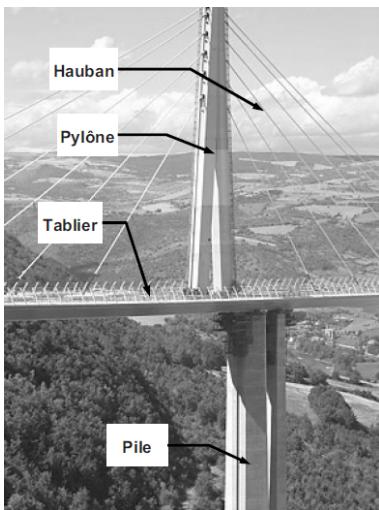
1	Chariot
T1, T2	Corps des vérins de basculement
T2, T2'	Tige des vérins de basculement
T3	Mât inférieur
T4	Mât supérieur
T5	Support porte tâcher
T6	Glissière de tablier
T7	Tâcher de tablier
T8	Fusée de roue
T9	Bâme de remont
T10	Corps du vérin ouverture des fentes
T11	Tige du vérin ouverture des fentes



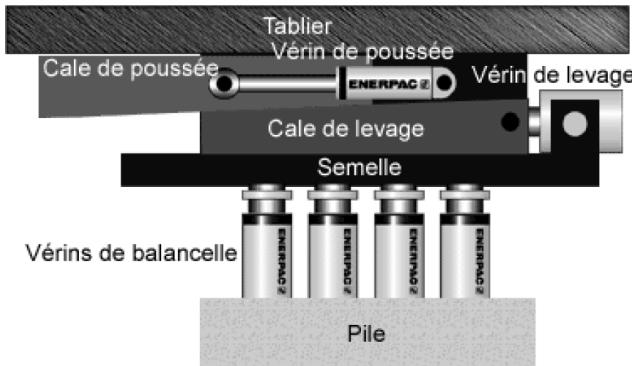
### Exercice 5 – Pousseur de tablier

Banque PT 2008 – SIC.

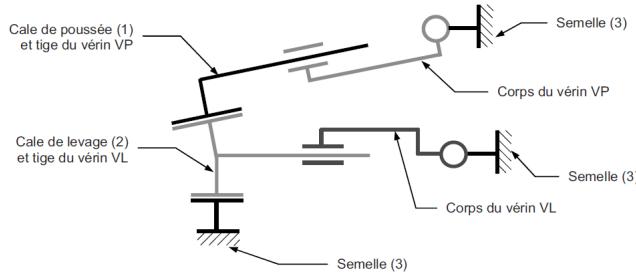
Une technique pour construire un pont et de commencer par ériger les piles définitives en béton et les piles temporaires en acier. On peut alors assembler tronçon par tronçon, les 2 tabliers sur la terre ferme et enfin pousser les deux parties du tablier assemblées sur les piles afin de réaliser la jonction. Cette opération de poussée est réalisée à l'aide de systèmes hydrauliques nommés « pousseurs de tablier ».



Le pousseur de tablier est soutenu par plusieurs vérins de balancelle verticaux (non étudiés) qui assurent le positionnement de la semelle afin que la cale de poussée soit parallèle et à la bonne distance du plan inférieur du tablier.



On suppose dans cette partie, que l'angle que fait le plan supérieur de la cale de levage avec l'horizontale est petit. Ce qui revient à considérer que les contacts dans les liaisons planes sont maintenus durant tout le mouvement. Une première étude conduit à la modélisation suivante.



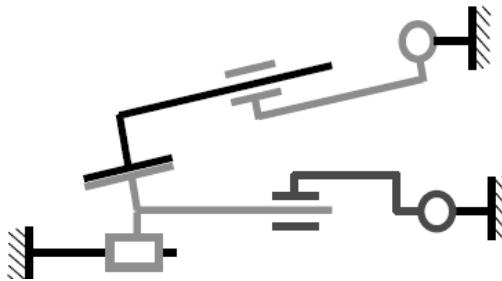
**Question 1** Proposer un modèle pour tenir compte de l'hypothèse des angles « petits ».

**Question 2** Estimer le degré de mobilité du modèle proposé.

**Question 3** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.

**Question 4** Proposer des modifications pour rendre le système isostatique. Faire un nouveau schéma cinématique tenant compte de ces modifications.

**Question 5** Le constructeur a fait le choix de mettre une liaison glissière de direction horizontale à la place de la liaison plane entre la cale de levage (2) et la semelle (3) (figure 6). Qu'est-ce qui justifie un tel choix? Comment peut-on rendre ce modèle isostatique?

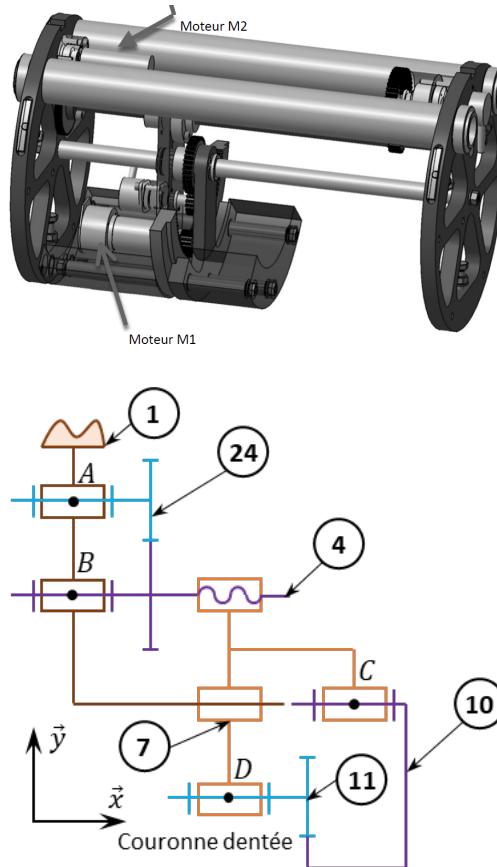


### Exercice 6 – Planeur sous marin

Banque PT 2012 – SIC.

Le planeur sous-marin est un dispositif autonome développé par l'IFREMER dont le but est de réaliser des mesures océanographiques. Il ressemble à un mini sous-marin qui plane en dents de scie vers un point prédéfini. Il remonte régulièrement à la surface afin de communiquer avec son opérateur par satellite afin d'envoyer les données acquises pendant sa plongée pour évaluer sa dérive due aux courants.

Dans le but de modifier l'orientation et l'équilibrage du planeur, l'apartie centrale du planeur comporte un dispositif qui permet de positionner le centre de gravité axialement 24 et radialement 11.



**Question 1** Réaliser le graphe de liaison associé au schéma cinématique minimal proposé. Identifier le nombre de mobilités.

On supposera que la liaison entre deux roues dentées

est une liaison ponctuelle.

**Question 2** Déterminer le degré d'hyperstatisme. Si celui-ci est non nul, indiquer la ou les contraintes géométriques associées.

**Application 01****Application 1 – Corrigé****Savoirs et compétences :**

- Mod2.C34 : chaînes de solides ;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle ;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle ;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme ;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

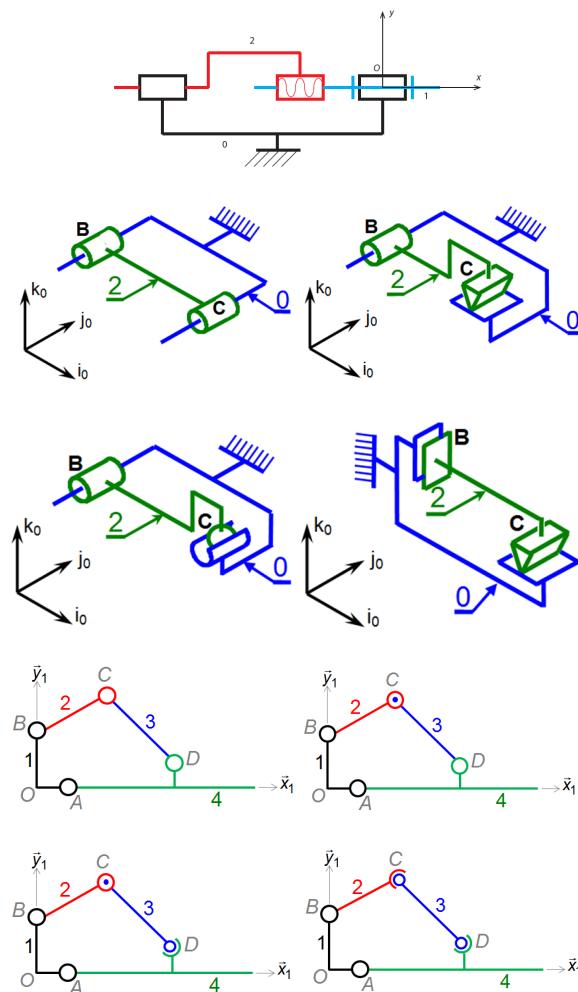
**Exercice 1 – Applications directes**

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie.

**Question 1** Pour chacun des mécanismes suivants, déterminer le degré d'hyperstatisme.

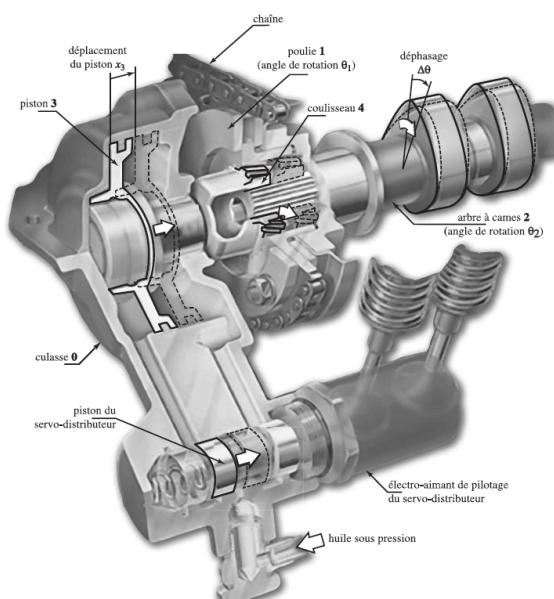
**Question 2** Lorsque le modèle est hyperstatique, proposer :

- des conditions d'assemblage (intuitivement) ;
- un modèle isostatique.

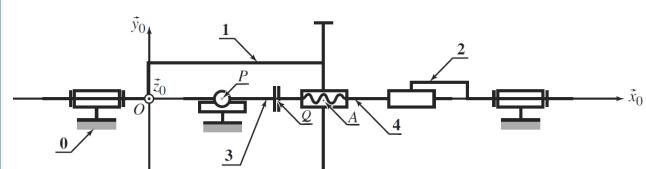
**Exercice 2 – Déphasage d'arbre à cames**

Banque PTSIA – 2008.

L'optimisation d'un moteur 4 temps passe (entre autre) par une bonne maîtrise des lois de levée des soupapes. Il est ainsi possible de positionner entre la poulie 1 (entraînée par le vilebrequin via une chaîne) et l'arbre à came 2 un système permettant de créer un déphasage entre ces pièces.



On propose ci-dessous un modèle cinématique du système de déphasage. On retrouve la culasse 0, la poulie d'entraînement 1, l'arbre à cames 2, le piston 3 et le coulisseau 4.



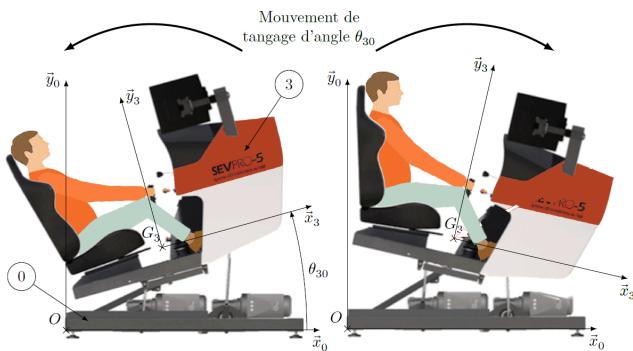
**Question 1** Établir le graphe des liaisons du mécanisme.

**Correction**

**Question 2** Déterminer le degré d'hyperstatisme en précisant la démarche utilisée. (On utilisera la méthode cinématique et la méthode statique).

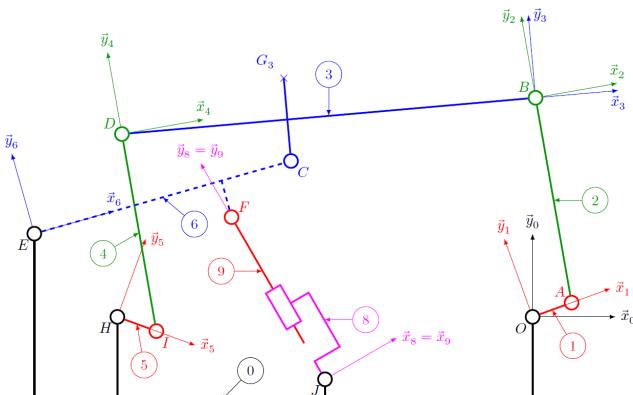
**Correction**
**Exercice 3 – Simulateur de vol pour la formation de pilotes en aéroclub**
*Centrale Supelec 2017 – PSI.*

On s'intéresse à un simulateur de vol à plate-forme dynamique. Deux moteurs permettent d'assurer le mouvement de tangage. Ils entraînent respectivement les liaisons pivots de centres  $H$  et  $O$ .



On propose le modèle plan suivant (la pièce 6 est en traits pointillés pour la démarquer des autres pièces).

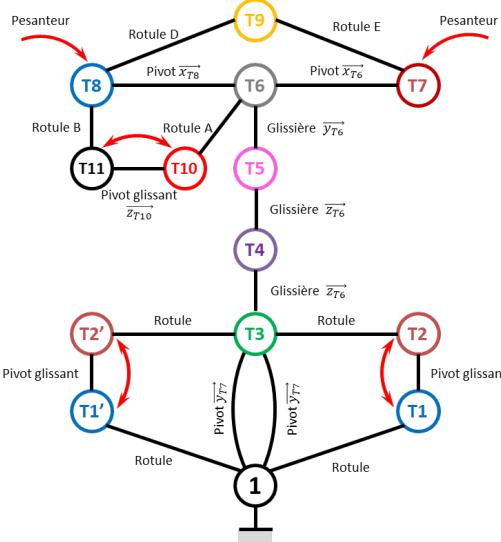
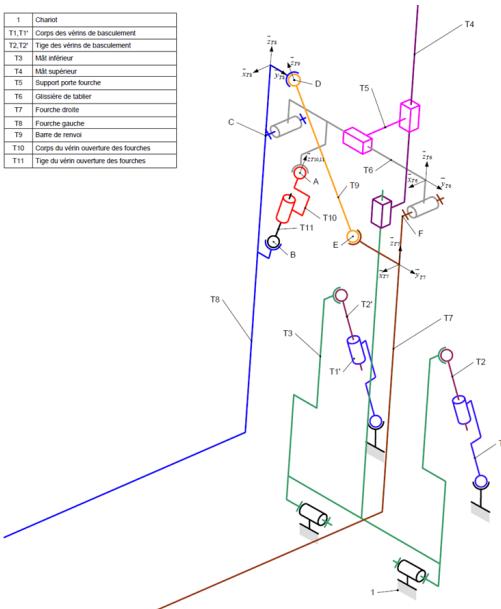
**Question 1** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.


**Exercice 4 – Chariot élévateur de bateaux**

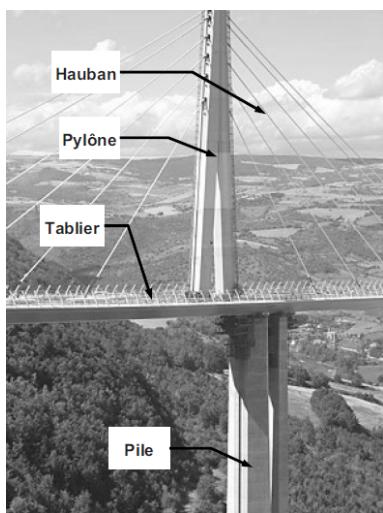
On donne le schéma cinématique et le graphe de liaisons associés au chariot élévateur de bateaux.

**Question 1** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle.

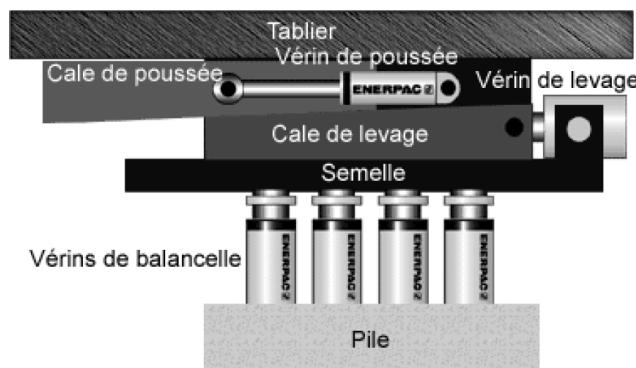
1	Chariot
T1, T2	Corps des vérins de basculement
T2, T2'	Tige des vérins de basculement
T3	Mât inférieur
T4	Mât supérieur
T5	Support porte tâche
T6	Glissière de tablier
T7	Fourche de roue
T8	Pneu de roue
T9	Bâme de remonté
T10	Corps du vérin ouverture des fourches
T11	Tige du vérin ouverture des fourches


**Exercice 5 – Pousseur de tablier**
*Banque PT 2008 – SIC.*

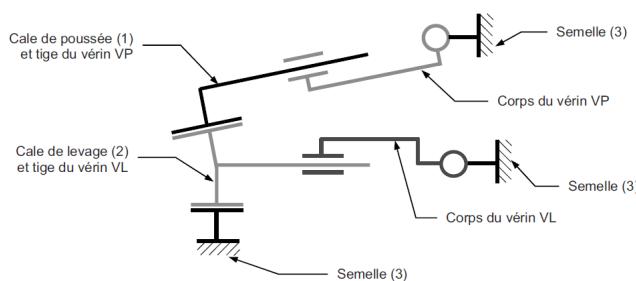
Une technique pour construire un pont et de commencer par ériger les piles définitives en béton et les piles temporaires en acier. On peut alors assembler tronçon par tronçon, les 2 tabliers sur la terre ferme et enfin pousser les deux parties du tablier assemblées sur les piles afin de réaliser la jonction. Cette opération de poussée est réalisée à l'aide de systèmes hydrauliques nommés « pousseurs de tablier ».



Le pousseur de tablier est soutenu par plusieurs vérins de balancelle verticaux (non étudiés) qui assurent le positionnement de la semelle afin que la cale de poussée soit parallèle et à la bonne distance du plan inférieur du tablier.



On suppose dans cette partie, que l'angle que fait le plan supérieur de la cale de levage avec l'horizontale est petit. Ce qui revient à considérer que les contacts dans les liaisons planes sont maintenus durant tout le mouvement. Une première étude conduit à la modélisation suivante.



**Question 1** Proposer un modèle pour tenir compte de l'hypothèse des angles « petits ».

**Correction**

**Question 2** Estimer le degré de mobilité du modèle proposé.

**Correction**

**Question 3** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.

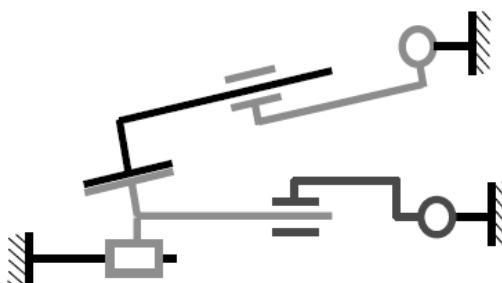
**Correction**

**Question 4** Proposer des modifications pour rendre le système isostatique. Faire un nouveau schéma cinématique tenant compte de ces modifications.

**Correction**

**Question 5** Le constructeur a fait le choix de mettre une liaison glissière de direction horizontale à la place de la liaison plane entre la cale de levage (2) et la semelle (3) (figure 6). Qu'est-ce qui justifie un tel choix? Comment peut-on rendre ce modèle isostatique?

**Correction**

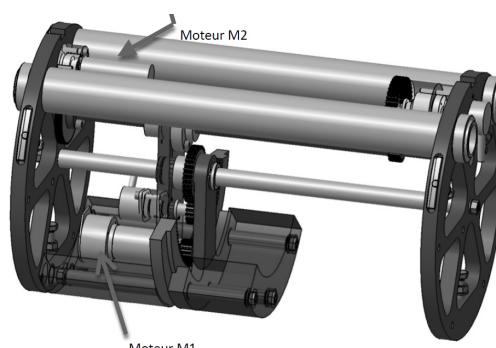


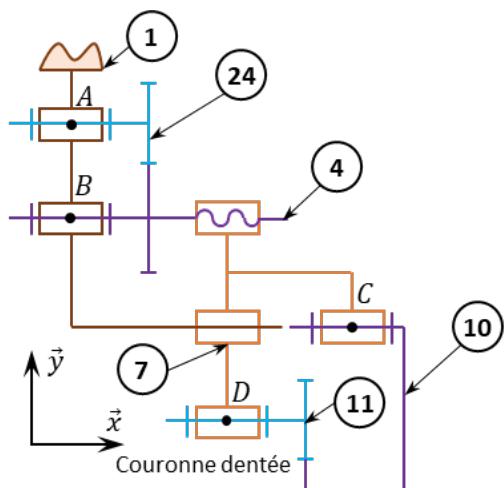
### Exercice 6 – Planeur sous marin

Banque PT 2012 – SIC.

Le planeur sous-marin est un dispositif autonome développé par l'IFREMER dont le but est de réaliser des mesures océanographiques. Il ressemble à un mini sous-marin qui plane en dents de scie vers un point prédefini. Il remonte régulièrement à la surface afin de communiquer avec son opérateur par satellite afin d'envoyer les données acquises pendant sa plongée pour évaluer sa dérive due aux courants.

Dans le but de modifier l'orientation et l'équilibrage du planeur, l'apartie centrale du planeur comporte un dispositif qui permet de positionner le centre de gravité axialement 24 et radialement 11.





**Question 1** Réaliser le graphe de liaison associé au schéma cinématique minimal proposé. Identifier le nombre de mobilités.

**Correction**

On supposera que la liaison entre deux roues dentées est une liaison ponctuelle.

**Question 2** Déterminer le degré d'hyperstatisme. Si celui-ci est non nul, indiquer la ou les contraintes géométriques associées.

**Correction**

## Application 1



### Suspension de l'AddBike

Agrégation Sciences Industrielles de l'Ingénieur – 2018

#### Savoirs et compétences :

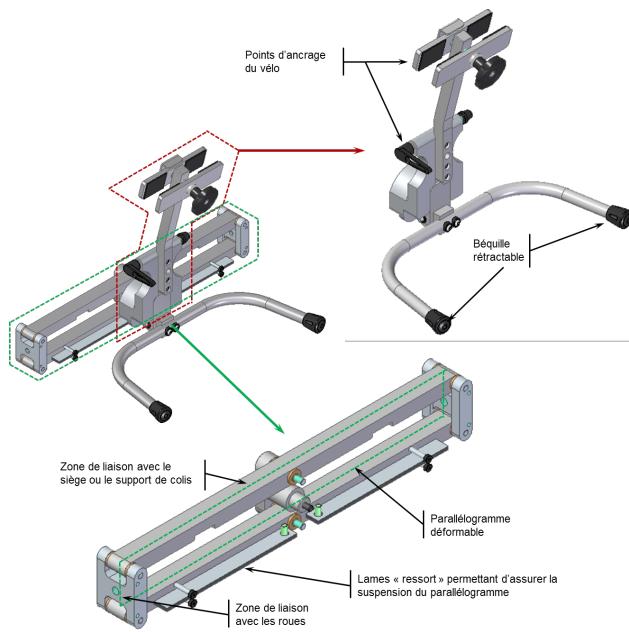
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle ;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle ;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme ;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

#### Présentation

L'Add-Bike est un système pouvant s'adapter à tous types de vélo et doit permettre de transporter des marchandises (colis ou courses du quotidien) ou des enfants.

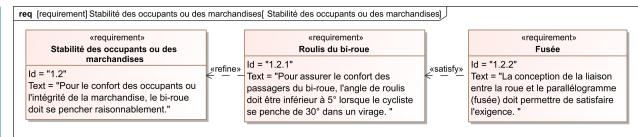


Il est équipé d'un système de suspension permettant de limiter le mouvement de roulis dans les virages.

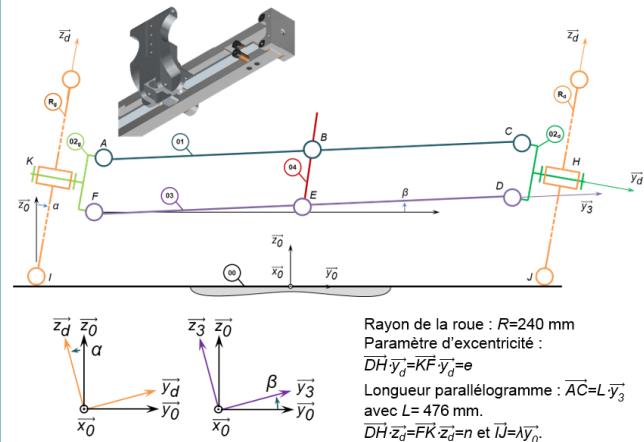


#### Exigence 1.2 : Stabilité des occupants et des marchandises

**Objectif** Pour assurer la stabilité des occupants du bi-roue, il est nécessaire de déterminer les conditions géométriques permettant de limiter l'angle de roulis (exigence 1.2.1). Ainsi, cet angle roulis ne doit pas dépasser  $\beta = 5^\circ$  lorsque le cycliste penche le mât vertical de  $\alpha = 30^\circ$ .



Pour pouvoir tourner, le cycliste penche le mât vertical 04 par l'intermédiaire du guidon, ce qui conduit à la déformation du parallélogramme  $ACDF$  donné dans la figure suivante et à la rotation des roues autour de l'axe horizontal longitudinal  $\vec{x}_0$ . Lors de la déformation du parallélogramme, les bielles 01 et 03 ne restent pas parfaitement horizontales ; le passager assis dans le siège lié à la bielle 03, subit donc du roulis, c'est-à-dire un pivotement autour de l'axe horizontal longitudinal  $\vec{x}_0$ .



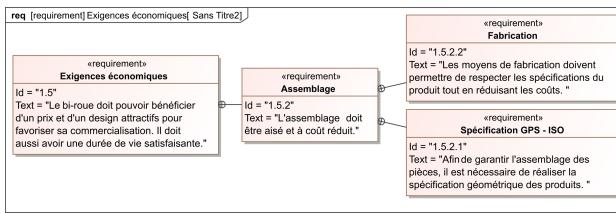
L'angle  $\beta$  correspond à l'angle de roulis des bielles 01 et 03.

**Question 1** En réalisant une fermeture géométrique, déterminer la relation liant l'angle  $\beta$  et l'excentricité  $e$  des fusées 02g et 02d.

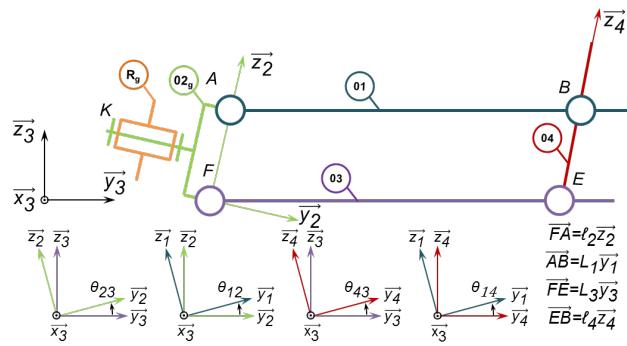
**Question 2** En déduire une valeur de l'excentricité  $e$  permettant de valider l'exigence 1.2.1.

## Exigence 1.5 : Exigences économiques – Assemblage

**Objectif** Afin de pouvoir vendre son produit à un prix attractif, la start-up doit pouvoir fabriquer et assembler son produit à un coût satisfaisant. Une maîtrise des coûts passe par la maîtrise des spécifications garantissant l'assemblage du système et par des coûts de fabrication réduits. Les objectifs sont ici de : spécifier des conditions géométriques sur les dimensions de la bielle inférieure (03) à partir des conditions de fonctionnement.



**Question 3** Après avoir fait un graphe de structure et sans tenir compte des roues et de leurs liaisons au sol, donner le degré d'hyperstatisme du modèle cinématique suivant.



**Question 4** Donner les torseurs cinématiques  $\{\mathcal{V}(2/3)\}$ ,  $\{\mathcal{V}(1/2)\}$ ,  $\{\mathcal{V}(4/3)\}$ ,  $\{\mathcal{V}(1/4)\}$ .

**Question 5** En utilisant une fermeture de chaîne cinématique, donner le système d'équations liant les différentes variables.

**Question 6** En déduire les conditions géométriques à imposer sur la bielle (03) afin de satisfaire l'assemblage du mécanisme.

### Synthèse

**Question 7** Conclure sur les méthodes qui ont permis de répondre aux exigences 1.4 et 1.5.

## Application 1 – Corrigé



### Suspension de l'AddBike

Agrégation Sciences Industrielles de l'Ingénieur – 2018

#### Savoirs et compétences :

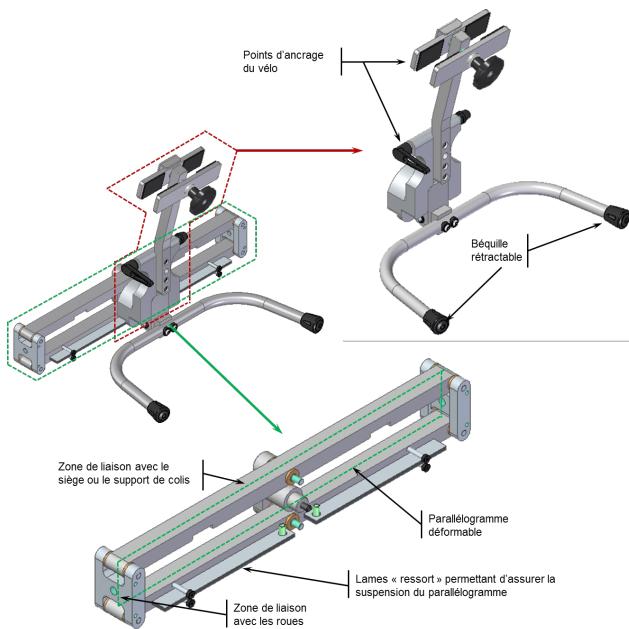
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle ;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle ;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme ;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

#### Présentation

L'Add-Bike est un système pouvant s'adapter à tous types de vélo et doit permettre de transporter des marchandises (colis ou courses du quotidien) ou des enfants.

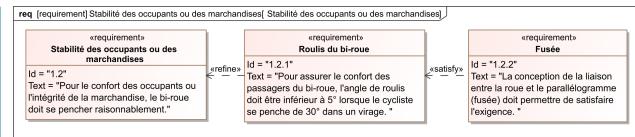


Il est équipé d'un système de suspension permettant de limiter le mouvement de roulis dans les virages.

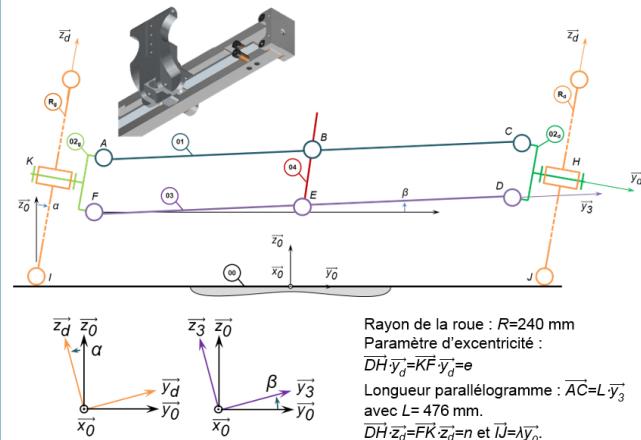


#### Exigence 1.2 : Stabilité des occupants et des marchandises

**Objectif** Pour assurer la stabilité des occupants du bi-roue, il est nécessaire de déterminer les conditions géométriques permettant de limiter l'angle de roulis (exigence 1.2.1). Ainsi, cet angle roulis ne doit pas dépasser  $\beta = 5^\circ$  lorsque le cycliste penche le mât vertical de  $\alpha = 30^\circ$ .



Pour pouvoir tourner, le cycliste penche le mât vertical 04 par l'intermédiaire du guidon, ce qui conduit à la déformation du parallélogramme  $ACDF$  donné dans la figure suivante et à la rotation des roues autour de l'axe horizontal longitudinal  $\vec{x}_0$ . Lors de la déformation du parallélogramme, les bielles 01 et 03 ne restent pas parfaitement horizontales ; le passager assis dans le siège lié à la bielle 03, subit donc du roulis, c'est-à-dire un pivotement autour de l'axe horizontal longitudinal  $\vec{x}_0$ .



L'angle  $\beta$  correspond à l'angle de roulis des bielles 01 et 03.

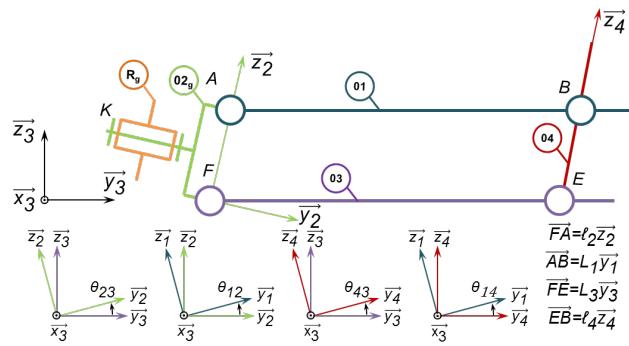
**Question 1** En réalisant une fermeture géométrique, déterminer la relation liant l'angle  $\beta$  et l'excentricité  $e$  des fusées 02g et 02d.

**Question 2** En déduire une valeur de l'excentricité  $e$  permettant de valider l'exigence 1.2.1.

#### Correction

## Exigence 1.5 : Exigences économiques – Assemblage

**Objectif** Afin de pouvoir vendre son produit à un prix attractif, la start-up doit pouvoir fabriquer et assembler son produit à un coût satisfaisant. Une maîtrise des coûts passe par la maîtrise des spécifications garantissant l'assemblage du système et par des coûts de fabrication réduits. Les objectifs sont ici de : spécifier des conditions géométriques sur les dimensions de la bielle inférieure (03) à partir des conditions de fonctionnement.



**Question 4** Donner les torseurs cinématiques  $\{\mathcal{V}(2/3)\}$ ,  $\{\mathcal{V}(1/2)\}$ ,  $\{\mathcal{V}(4/3)\}$ ,  $\{\mathcal{V}(1/4)\}$ .

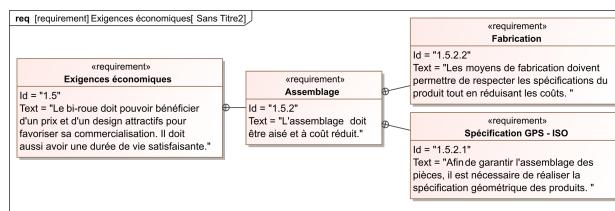
**Correction**

**Question 5** En utilisant une fermeture de chaîne cinématique, donner le système d'équations liant les différentes variables.

**Correction**

**Question 6** En déduire les conditions géométriques à imposer sur la bielle (03) afin de satisfaire l'assemblage du mécanisme.

**Correction**



**Question 3** Après avoir fait un graphe de structure et sans tenir compte des roues et de leurs liaisons au sol, donner le degré d'hyperstatisme du modèle cinématique suivant.

**Correction**

**Synthèse**

**Question 7** Conclure sur les méthodes qui ont permis de répondre aux exigences 1.4 et 1.5.

**Correction**

## TD 2

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

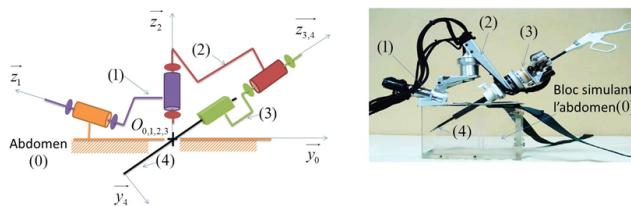
## Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

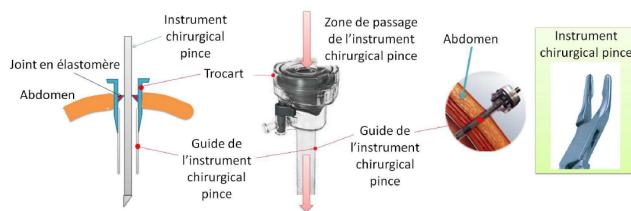
## Mise en situation

Le robot MC<sup>2</sup>E est utilisé par des chirurgiens en tant que troisième main lors de l'ablation de la vésicule biliaire. La cinématique du robot permet de garantir que le point d'insertion des outils chirurgicaux soit fixe dans le référentiel du patient.

Le robot est constitué de 3 axes de rotations permettant de mettre en position une pince. La pince est animée d'un mouvement de translation permettant de tirer la vésicule pendant que le chirurgien la détache du foie.



On appelle trocart la pièce qui fait l'interface avec l'abdomen du patient et qui va guider l'ensemble des instruments.



La figure au verso donne un extrait du cahier des charges.

## Travail demandé

On s'intéresse à la phase de vie pendant laquelle la pince est introduite dans le trocart au travers d'un guide (étanche). Une phase de calibration du robot démarre ensuite.

## Objectif

- Modéliser la liaison entre l'abdomen et la pince (4) en analysant la chaîne ouverte de solides du robot.
- Analyser les conséquences de la fermeture de la chaîne par la liaison peau-trocart.

Dans cette phase, la pince du MC<sup>2</sup>E est dans l'abdomen du patient, via le trocart. On souhaite étudier ici quelques aspects de la géométrie et de la cinématique du robot liés notamment à la nécessité que le point d'incision  $O_0 = O_{0,1,2,3}$  soit un point fixe.

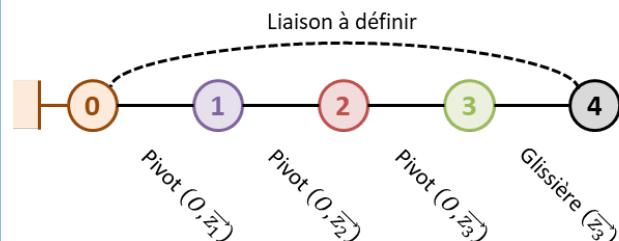
Le torseur cinématique du solide (i) par rapport au solide (j), réduit en  $P$ , sera noté :

$$\{\mathcal{V}(i/j)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(i/j)} \\ V(P \in i/j) \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_{xij} & V_{xij} \\ \omega_{yij} & V_{yij} \\ \omega_{zij} & V_{zij} \end{array} \right\}_{P, \vec{x_k}, \vec{y_k}, \vec{z_k}} .$$

## Hypothèses

- L'abdomen (0) est supposé fixe.
- La pince (4) est déjà introduite dans l'abdomen (0) du patient.
- Il n'y a pas encore de contact avec l'organe.

On donne le graphe des liaisons du mécanisme ainsi modélisé.



La liaison entre la pince (4) et l'abdomen (0) n'est pas définie ici car elle est complexe : elle est notamment imposée par la forme du trocart, que l'on suppose lié à l'abdomen du patient. On va dans un premier temps considérer la chaîne ouverte de solides allant de (0) à (4) par l'intermédiaire des trois liaisons pivot et de la liaison glissière.

**Question 1** On considère la chaîne ouverte de solides (0+1+2+3+4). Par la méthode de votre choix, définir le torseur cinématique de la liaison équivalente 4/0 noté  $\{\mathcal{V}^{eq}(4/0)\}$ . En déduire la mobilité cinématique  $m_c$  de cette chaîne de solides.

On envisage deux modélisations pour la liaison entre la pince (4) et la peau de l'abdomen par l'intermédiaire du trocart :

- modélisation 1 : liaison sphère-cylindre en  $O_0$  d'axe  $(O_0, \vec{z}_3)$ ;

- modélisation 2 : liaison libre : pas de liaison entre le bâti et la pince.

**Question 2** Dans le cadre des deux modélisations retenues, quels sont alors le degré d'hyperstatisme et la mobilité cinématique de la chaîne fermée. Compléter le tableau du document réponse concernant les implications du modèle retenu sur le robot et les interactions patient / robot. Quelle modélisation vous paraît la plus proche de la réalité? Argumenter votre réponse.

	Liaison linéaire annulaire	Liaison libre
$m_c =$		
$h =$		
Efforts au point d'insertion*		
Facilité de montage?*		
Rigidité du robot*		

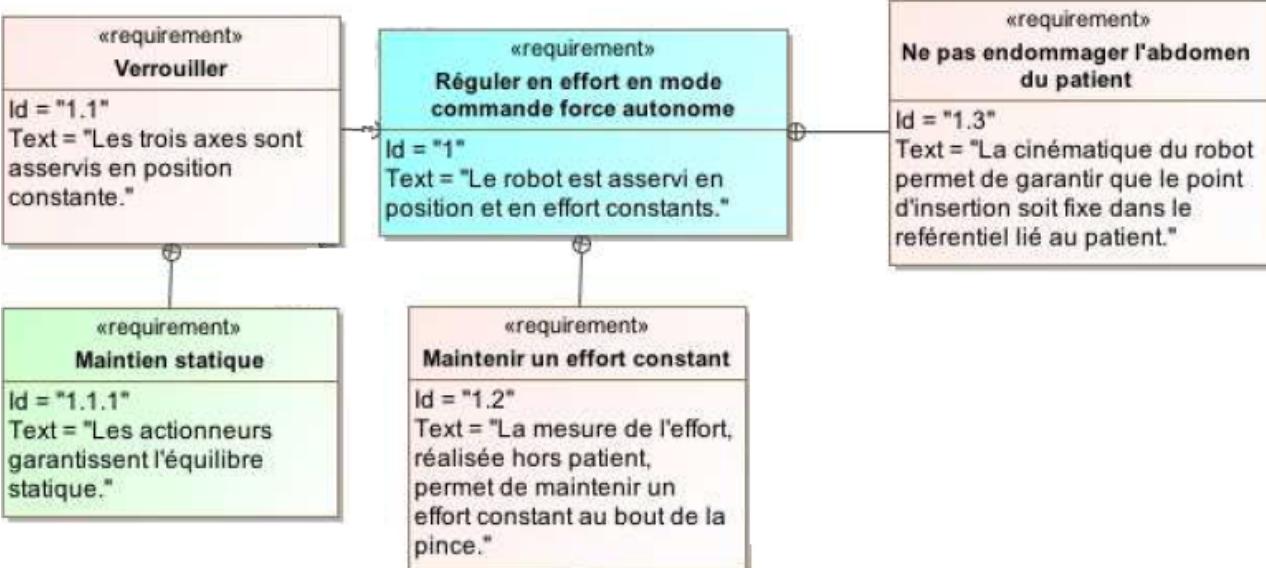
\* : Remplir par oui ou non

### Retour sur le cahier des charges

**Question 3** Quelle exigence le mécanisme utilisé permet-il de satisfaire? Expliquer en 2 lignes comment cette exigence est satisfaite.

#### Corrigé résumé

- Liaison sphère cylindre d'axe ( $O, \vec{z}_3$ ).
- Cas 1 :  $m_c = 4, h = 2$ . Cas 2 :  $m_c = 4, h = 0$ .
- Exigence 1.3.



## TD 2 – Corrigé

Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

## Mise en situation

## Travail demandé

On s'intéresse à la phase de vie pendant laquelle la pince est introduite dans le trocart au travers d'un guide (étanche). Une phase de calibration du robot démarre ensuite.

## Objectif

- Modéliser la liaison entre l'abdomen et la pince (4) en analysant la chaîne ouverte de solides du robot.
- Analyser les conséquences de la fermeture de la chaîne par la liaison peau-trocart.

**Question 1** On considère la chaîne ouverte de solides (0+1+2+3+4). Par la méthode de votre choix, définir le torseur cinématique de la liaison équivalente 4/0 noté {V<sup>eq</sup>(4/0)}. En déduire la mobilité cinématique  $m_c$  de cette chaîne de solides.

## Correction

Les 4 solides étant en série, on a  $\{V^{eq}(4/0)\} = \{V(4/3)\} + \{V(3/2)\} + \{V(2/1)\} + \{V(1/0)\}$ . O étant le point de concours de chacun des axes, les torseurs des liaisons pivots sont tous de la forme :  $\{V(i/i-1)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_i \vec{z}_i \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$ . De plus,  $\{V(4/3)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \lambda \vec{z}_3 \end{Bmatrix}_O$ . Au final,  $\{V^{eq}(4/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 + \dot{\theta}_3 \vec{z}_3 \\ \lambda \vec{z}_3 \end{Bmatrix}_O$ .

Il s'agit d'une liaison sphère-cylindre (linéaire annulaire) d'axe  $(O, \vec{z}_3)$ . En conséquences  $m_c = 4$ .

**Question 2** Dans le cadre des deux modélisations retenues, quels sont alors le degré d'hyperstatisme et la mobilité cinématique de la chaîne fermée. Compléter le tableau du document réponse concernant les implications du modèle retenu sur le robot et les interactions patient / robot. Quelle modélisation vous paraît la plus proche de la réalité? Ar-

gumenter votre réponse.

## Correction

	Liaison linéaire annulaire	Liaison libre
$m_c =$	4	4
$h =$	$m - I_c + E_c = 4 - (4+4) + 6 = 2$ $m - E_s + I_s = 4 - 24 + 22 = 2$	0 (Chaîne ouverte) 0 (Chaîne ouverte)
Efforts au point d'insertion*	Oui (à cause de l'hyperstatisme)	Non
Facilité de montage?*	Non (à cause de l'hyperstatisme)	Oui
Rigidité du robot*	Oui...	Oui...

\* : Remplir par oui ou non

Les réponses données dans le tableau sont qualitative et critiquable... L'hyperstatisme impose des contraintes dans la fabrication l'assemblage du robot qui peuvent se traduire par des efforts à «vaincre» lors de l'assemblage ou de la mise en position du robot.

Un système hyperstatique est réputé plus rigide qu'un système isostatique. Cependant, lorsqu'un système est isostatique, sans jeu et avec des frottements, on peut aussi le considérer comme étant rigide...

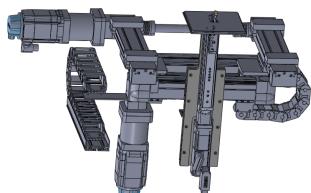
## Retour sur le cahier des charges

**Question 3** Quelle exigence le mécanisme utilisé permet-il de satisfaire? Expliquer en 2 lignes comment cette exigence est satisfaite.

## Correction

La structure du robot permet de satisfaire l'exigence 1.3 : « Ne pas endommager l'abdomen du patient ». En effet, le fait que les axes des 3 pivots s'intersectent en un point permet d'avoir un seul point d'entrée de la pince dans l'abdomen. Ainsi, on diminue les risques de « blesser » davantage le patient lors de l'opération de la vésicule.

## TD 3



### Système de dépose de poudre

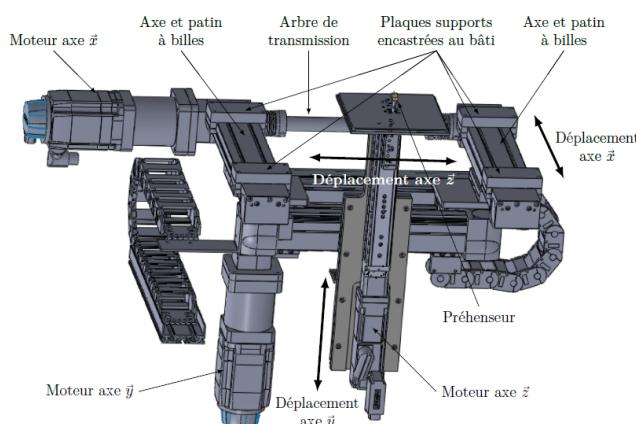
Concours Centrale Supelec – TSI 2016

**Savoirs et compétences :**

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

### Mise en situation

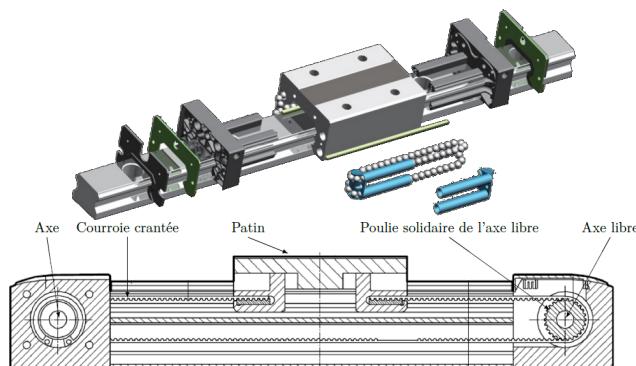
On s'intéresse à un système permettant de créer des motifs sur de la poudre de maquillage compactée. Le poste de pulvérisation est en partie constitué d'un robot cartésien 3 axes permettant de déplacer des godets de poudre compactée (grâce à un préhenseur) en dessous de la buse de pulvérisation.



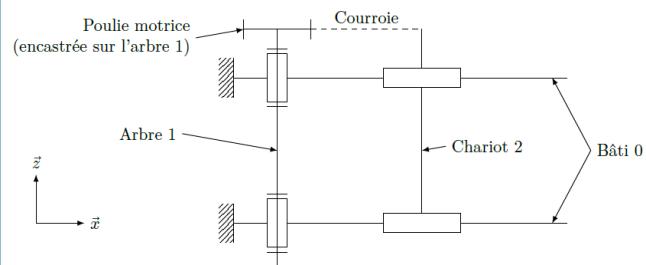
**Objectif** L'objectif de cette partie est de proposer un modèle du mécanisme constituant le déplacement de l'axe  $\vec{x}$  et de justifier certains choix technologiques.

Le préhenseur repose sur des plaques support qui le lient en liaison encastrement au bâti. Les rails guidant le préhenseur suivant l'axe  $\vec{x}$  supportent les autres rails guidant les déplacement du préhenseur suivant les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ .

Le guidage est réalisé par deux axes munis de patins à billes.



Le moteur actionnant l'axe  $\vec{x}$  est lié à un réducteur qui entraîne deux ensembles poulies-courroies. Les poulies motrices sont guidées chacune par deux roulements à billes. Les deux poulies motrices sont liées par un arbre de transmission (Arbre 1). La figure suivante représente le schéma cinématique de l'ensemble.

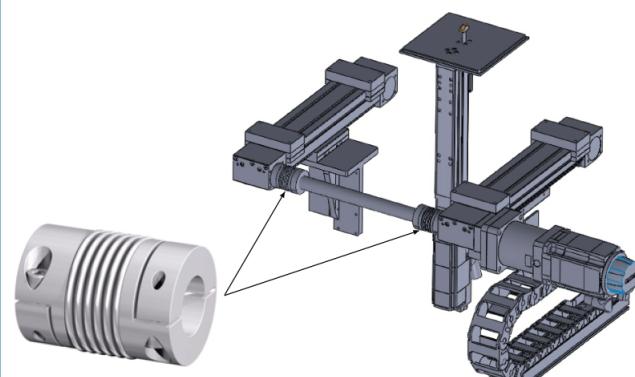


### Travail demandé

La courroie étant un élément déformable, on n'en tiendra pas compte dans l'étude suivante.

**Question 1** Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison entre les solides 0 et 1.

Pour lever l'hyperstatisme de cette liaison, le constructeur a mis en place deux soufflets métalliques en les implantant de part et d'autre de l'arbre de transmission (figure suivante).



Un soufflet métallique est un joint d'accouplement autorisant des défauts d'alignement radiaux, axiaux et angulaires. Ainsi, pour un soufflet liant deux solides  $S_1$  et  $S_2$  positionné en un point  $P$  et dont l'axe du soufflet est  $(P, \vec{u}')$ :

- le torseur statique transmissible est de la forme
 
$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{P(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})};$$
- le torseur cinématique du mouvement de  $S_1$  par rapport à  $S_2$  est de la forme  $\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & v_{x12} \\ q_{12} & v_{y12} \\ r_{12} & v_{z12} \end{array} \right\}_{P(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}.$

L'introduction des deux soufflets métalliques impose de décomposer l'arbre 1 de la question 1 en 3 solides distincts  $1_A$ ,  $1_B$  et  $1_C$ , le solide  $1_B$  étant lié aux deux solides  $1_A$  et  $1_C$  par les deux soufflets métalliques.

**Question 2** *Tracer le nouveau graphe de liaisons en tenant compte de l'introduction des deux soufflets métalliques.*

**Question 3** *Déterminer en le justifiant le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé en question précédente.*

**Question 4** *En déduire le degré d'hyperstatisme du système avec ses deux soufflets métalliques.*

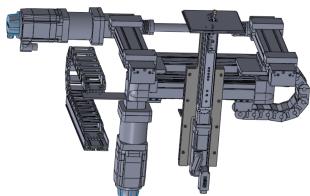
### Retour sur le cahier des charges

**Question 5** *Conclure en justifiant l'utilisation des soufflets.*

#### Corrigé résumé

1.  $h = 5$ .
2. ...
3.  $m = 6$ .
4.  $h = 0$ .
5. ...

## TD 3 – Corrigé



## Système de dépose de poudre

Concours Centrale Supelec – TSI 2016

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

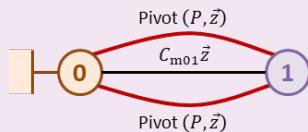
## Mise en situation

**Objectif** L'objectif de cette partie est de proposer un modèle du mécanisme constituant le déplacement de l'axe  $\vec{x}$  et de justifier certains choix technologiques.

## Travail demandé

**Question 1** Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison entre les solides 0 et 1.

## Correction



## Méthode cinématique :

- mobilité utile :  $m_u = 1$ ;
- mobilité interne :  $m_i = 0$ ;
- nombre de cycles :  $\gamma = 1$ ;
- nombre d'équations cinématiques :  $E_c = 6\gamma = 6$ ;
- nombres d'inconnues cinématiques :  $I_c = 2 \cdot 1 = 2$ .

Au final :  $h = m - I_c + E_c = 1 - 2 + 6 = 5$ .

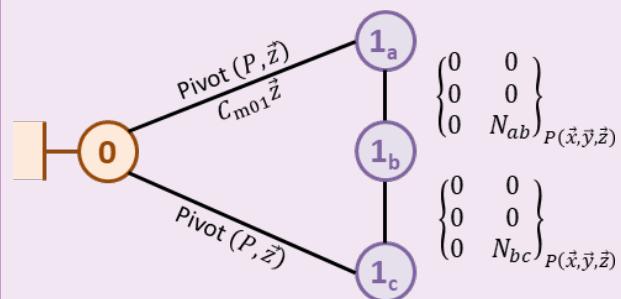
## Méthode statique

- mobilité utile :  $m_u = 1$ ;
- mobilité interne :  $m_i = 0$ ;
- nombre d'équations cinématiques :  $E_s = 6(p - 1) = 6(2 - 1) = 6$ ;
- nombres d'inconnues cinématiques :  $I_s = 2 \cdot 5 = 10$ .

Au final :  $h = m - E_s + I_s = 1 - 6 + 10 = 5$ .

**Question 2** Tracer le nouveau graphe de liaisons en tenant compte de l'introduction des deux soufflets métalliques.

## Correction



**Question 3** Déterminer en le justifiant le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé en question précédente.

## Correction

En réalisant une fermeture cinématique, on a  $\{\mathcal{V}(1_a/0)\} + \{\mathcal{V}(1_b/1_a)\} + \{\mathcal{V}(1_c/1_b)\} = \{\mathcal{V}(1_c/0)\}$ . Les torseurs étant considérés écrits au même point  $P$ , on a :

$$\begin{cases} p_{ba} + p_{cb} = 0 \\ q_{ba} + q_{cb} = 0 \\ r_{ao} = r_{co} \end{cases} \quad \begin{cases} v_{xba} + v_{xcb} = 0 \\ v_{yba} + v_{ycb} = 0 \\ v_{zba} + v_{zcb} = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de rang 6 avec 12 inconnues. On a donc  $m = I_c - r_c = 12 - 6 = 6$ .

**Question 4** En déduire le degré d'hyperstatisme du système avec ses deux soufflets métalliques.

## Correction

On a  $h = m - I_c + E_c = 6 - 12 + 6 = 0$ .

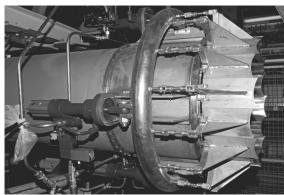
## Retour sur le cahier des charges

**Question 5** Conclure en justifiant l'utilisation des soufflets.

## Correction

Le soufflet permet donc de rendre le système isostatique. Il est ainsi possible de monter le système sans avoir à imposer des contraintes géométriques sur le mécanisme.

## TD 4



### Tuyère à ouverture variable

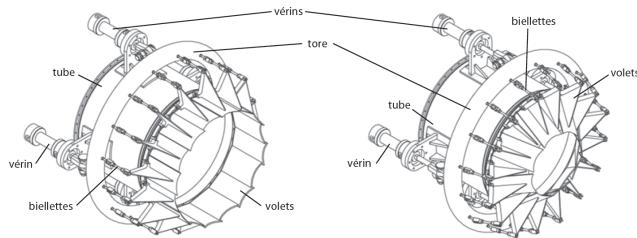
Banque PT – SIA 2011

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

### Mise en situation

Dans le but de calibrer un banc d'essai de turboréacteur, les ingénieurs de la DGA (Direction Générale de l'Armement) a conçu une tuyère à ouverture variable afin de se substituer au turboréacteur.

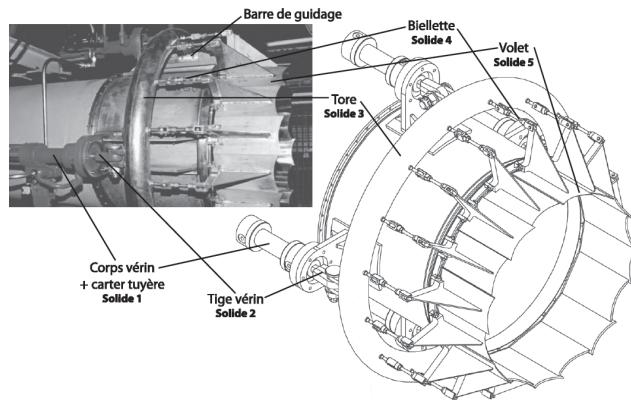


**Objectif** L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Le mouvement de chacun des volets doit être identique. Pour cela, les exigences suivantes doivent être vérifiées :

- le mouvement de rotation des volets autour d'un axe orthogonal à l'axe de la veine fluide doit respecter les exigences suivantes :
  - position de l'axe de rotation : orthogonal;
  - débattement angulaire :  $40^\circ \pm 0,5^\circ$ ;
  - précision angulaire :  $0,2^\circ$ ;
- commande simultanée des 16 volets :
  - interface unique en liaison glissière par rapport à la tuyère;
  - nombre d'actionneurs : minimum;
  - rigidité globale :  $\Delta x < 0,2 \text{ mm}$ ;
  - temps de montée en vitesse : inférieur à 0,1 s.
- adaptation aux efforts aérodynamiques :
  - résistance : 50% de la limite élastique;
  - déformation : compatible avec la précision.

La figure suivante présente les éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude.



Pour synchroniser la commande des volets, on a adopté une solution consistant à les relier à une pièce unique en forme de tore entourant la tuyère et dont le déplacement assure la commande de tous les volets simultanément. Le tore repose sur deux barres de guidage fixées dans la partie supérieure du carter et parallèles à l'axe de la tuyère. Il est actionné par quatre vérins hydrauliques. On cherche, dans cette partie, à valider le critère d'appréciation sur la rigidité globale de la structure de commande des volets à interface unique.

Les notations adoptées sont les suivantes.

La base orthonormée directe liée au solide  $i$  :  $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ . Le torseur cinématique du mouvement possible par une liaison  $L_k$ , d'un solide  $j$  par rapport à un solide  $i$  (ou par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_i$  lié à celui-ci) réduit en  $A$ , sera noté  $\{\mathcal{V}_k\} = \left\{ \begin{array}{l} p_k \vec{x} + q_k \vec{y} + r_k \vec{z} \\ u_k \vec{x} + v_k \vec{y} + w_k \vec{z} \end{array} \right\}_A$  où  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est une base orthonormée associée à la liaison  $L_k$ .

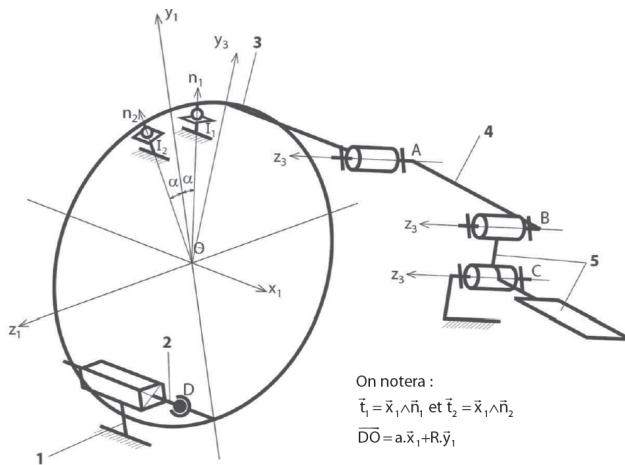
Le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison  $L_k$  du solide  $i$  sur le solide  $j$ , réduit en  $A$  sera noté  $\{\mathcal{T}_k\} = \left\{ \begin{array}{l} X_k \vec{x} + Y_k \vec{y} + Z_k \vec{z} \\ L_k \vec{x} + M_k \vec{y} + N_k \vec{z} \end{array} \right\}_A$  où  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est une base orthonormée associée à la liaison  $L_k$ .

### Étude d'une commande avec un seul actionneur

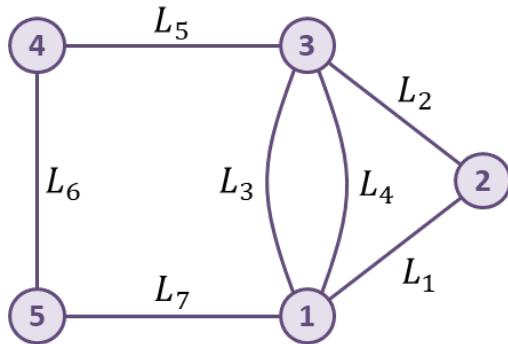
**Objectif** On cherche, dans un premier temps, à estimer la capacité d'une structure composée d'un seul vérin à transmettre le mouvement attendu.

On précise que le solide 2 représente la tige du vérin

et que les liaisons en  $I_1$  et  $I_2$  représentent les contacts du tore 3 avec les deux barres sur lesquelles il repose.



**Question 1** Compléter le graphe de structure.



**Question 2** Le modèle proposé est-il isostatique ?

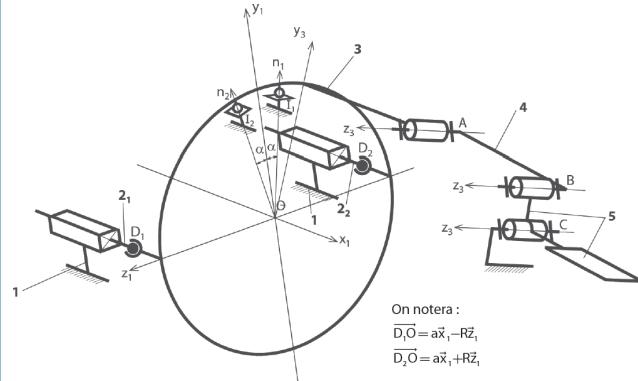
**Question 3** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq34}$  aux deux liaisons  $L_3$  et  $L_4$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq34}$ .

**Question 4** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq12}$  aux deux liaisons  $L_1$  et  $L_2$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq12}$ .

**Question 5** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq12}$  aux deux liaisons  $L_{eq34}$  et  $L_{eq12}$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq}$ . Justifier que la commande avec un seul vérin ne satisfait pas le cahier des charges.

## Étude d'une commande avec deux actionneurs

**Objectif** On cherche, dans un deuxième temps, à estimer la capacité d'une structure composée de deux vérins à transmettre le mouvement attendu.



**Question 6** À partir du graphe de structure (graphe des liaisons) et en vous inspirant des résultats trouvés précédemment déterminer la liaison équivalente  $L_{eq1}$  aux liaisons  $L_{11}$ ,  $L_{21}$  et la liaison équivalente  $L_{eq2}$  aux liaisons  $L_{12}$  et  $L_{22}$  entre les solides 1 et 3.

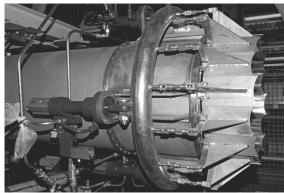
**Question 7** Déterminer par la méthode de votre choix, la liaison équivalente  $L'_{eq1}$  aux deux liaisons  $L_{eq34}$ ,  $L_{eq1}$  et  $L_{eq2}$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}'_{eq}$  puis le torseur cinématique cinématique  $\mathcal{V}'_{eq}$ . Le cahier des charges est-il vérifié pour une commande avec deux vérins ?

## Étude de la structure adoptée par le constructeur

**Objectif** On cherche finalement à estimer la capacité de réalisation d'une structure composée des quatre vérins.

**Question 8** Pour des raisons d'encombrement des vérins et de capacité à fournir les actions mécaniques de poussée, le bureau d'étude a finalement choisi de commander le tore avec 4 vérins pour obtenir la liaison glissière comme liaison équivalente entre les solides 1 et 3. Quel est, dans ces conditions, le degré d'hyperstatisme du groupe de liaisons initial réalisant la liaison glissière ? Vous expliquerez brièvement, mais clairement votre raisonnement. Que pensez-vous de ce résultat sur la capacité de réalisation de cette structure ?

### TD 4 – Corrigé



#### Tuyère à ouverture variable

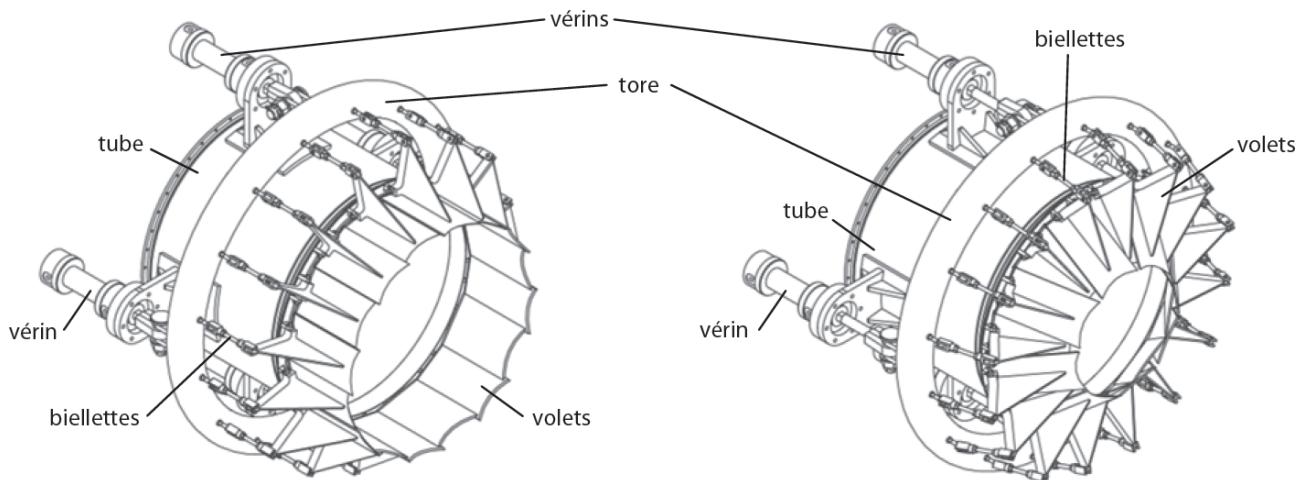
Banque PT – SIA 2011

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

### Mise en situation

Dans le but de calibrer un banc d'essai de turboréacteur, les ingénieurs de la DGA (Direction Générale de l'Armement) a conçu une tuyère à ouverture variable afin de se substituer au turboréacteur.

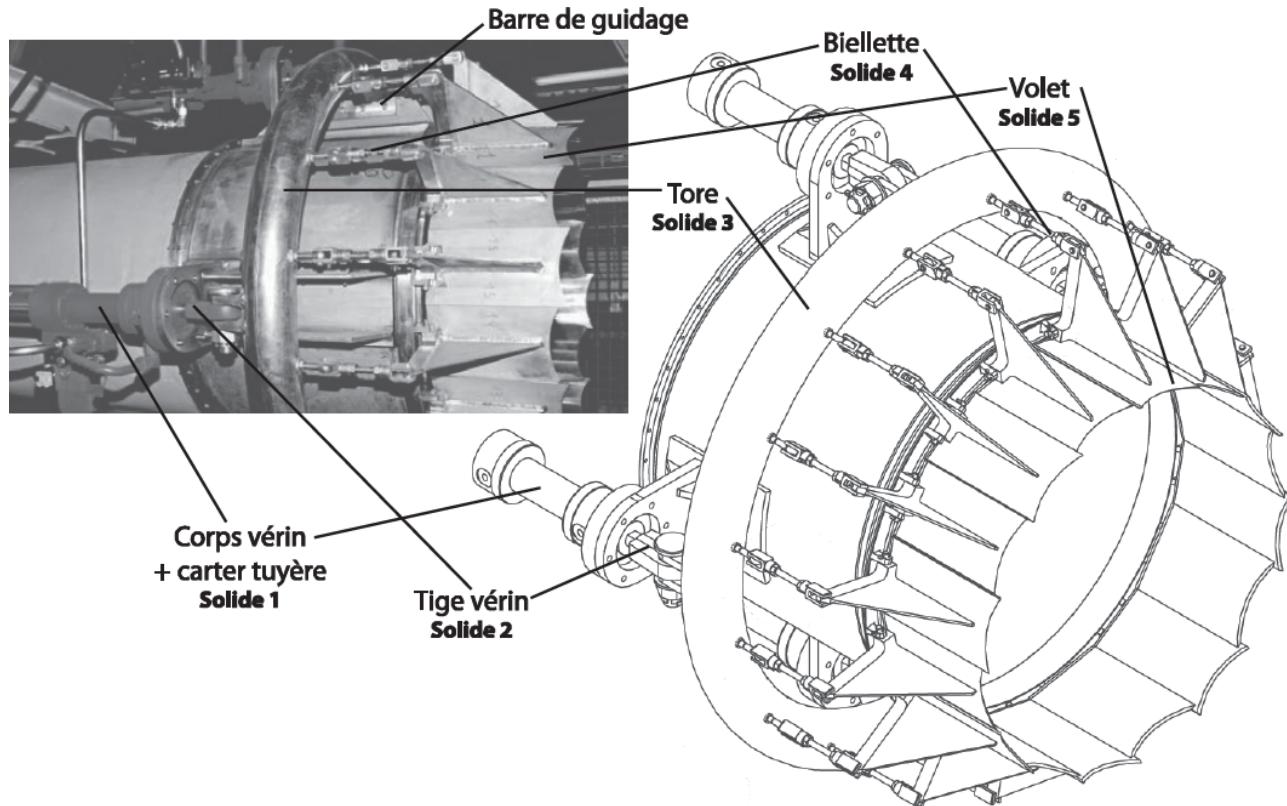


**Objectif** L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Le mouvement de chacun des volets doit être identique. Pour cela, les exigences suivantes doivent être vérifiées :

- le mouvement de rotation des volets autour d'un axe orthogonal à l'axe de la veine fluide doit respecter les exigences suivantes :
  - position de l'axe de rotation : orthogonal;
  - débattement angulaire :  $40^\circ \pm 0,5^\circ$ ;
  - précision angulaire :  $0,2^\circ$ ;
- commande simultanée des 16 volets :
  - interface unique en liaison glissière par rapport à la tuyère;
  - nombre d'actionneurs : minimum;
  - rigidité globale :  $\Delta x < 0,2 \text{ mm}$ ;
  - temps de montée en vitesse : inférieur à 0,1 s.
- adaptation aux efforts aérodynamiques :
  - résistance : 50% de la limite élastique;
  - déformation : compatible avec la précision.

La figure suivante présente les éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude.



Pour synchroniser la commande des volets, on a adopté une solution consistant à les relier à une pièce unique en forme de tore entourant la tuyère et dont le déplacement assure la commande de tous les volets simultanément. Le tore repose sur deux barres de guidage fixées dans la partie supérieure du carter et parallèles à l'axe de la tuyère. Il est actionné par quatre vérins hydrauliques. On cherche, dans cette partie, à valider le critère d'appréciation sur la rigidité globale de la structure de commande des volets à interface unique.

Les notations adoptées sont les suivantes.

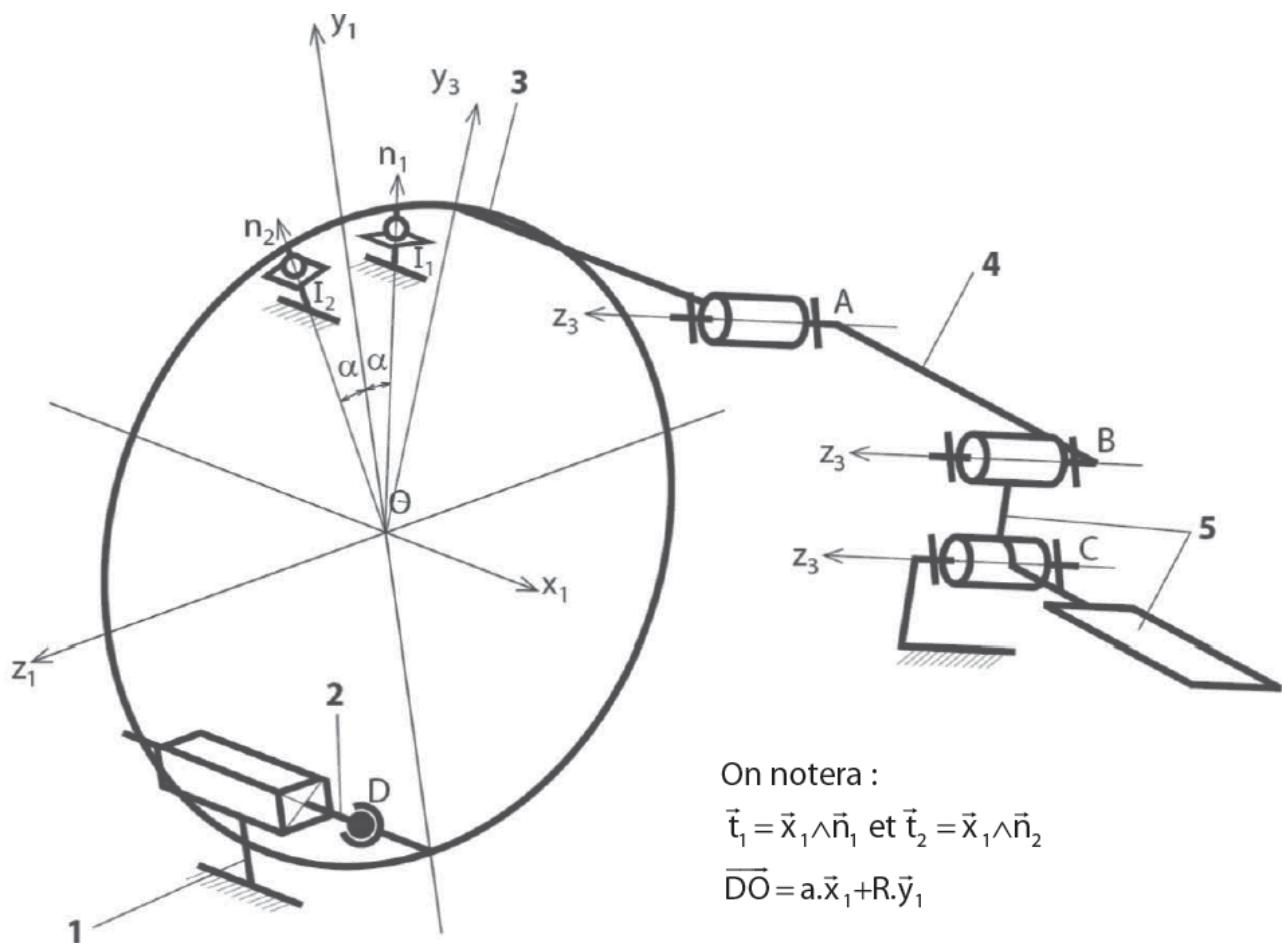
La base orthonormée directe liée au solide  $i$  :  $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ . Le torseur cinématique du mouvement possible par une liaison  $L_k$ , d'un solide  $j$  par rapport à un solide  $i$  (ou par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_i$  lié à celui-ci) réduit en  $A$ , sera noté  $\{\gamma_k\} = \left\{ \begin{array}{l} p_k \vec{x} + q_k \vec{y} + r_k \vec{z} \\ u_k \vec{x} + v_k \vec{y} + w_k \vec{z} \end{array} \right\}_A$  où  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est une base orthonormée associée à la liaison  $L_k$ .

Le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison  $L_k$  du solide  $i$  sur le solide  $j$ , réduit en  $A$  sera noté  $\{\mathcal{F}_k\} = \left\{ \begin{array}{l} X_k \vec{x} + Y_k \vec{y} + Z_k \vec{z} \\ L_k \vec{x} + M_k \vec{y} + N_k \vec{z} \end{array} \right\}_A$  où  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est une base orthonormée associée à la liaison  $L_k$ .

### Étude d'une commande avec un seul actionneur

**Objectif** On cherche, dans un premier temps, à estimer la capacité d'une structure composée d'un seul vérin à transmettre le mouvement attendu.

On précise que le solide 2 représente la tige du vérin et que les liaisons en  $I_1$  et  $I_2$  représentent les contacts du tore 3 avec les deux barres sur lesquelles il repose.



On notera :

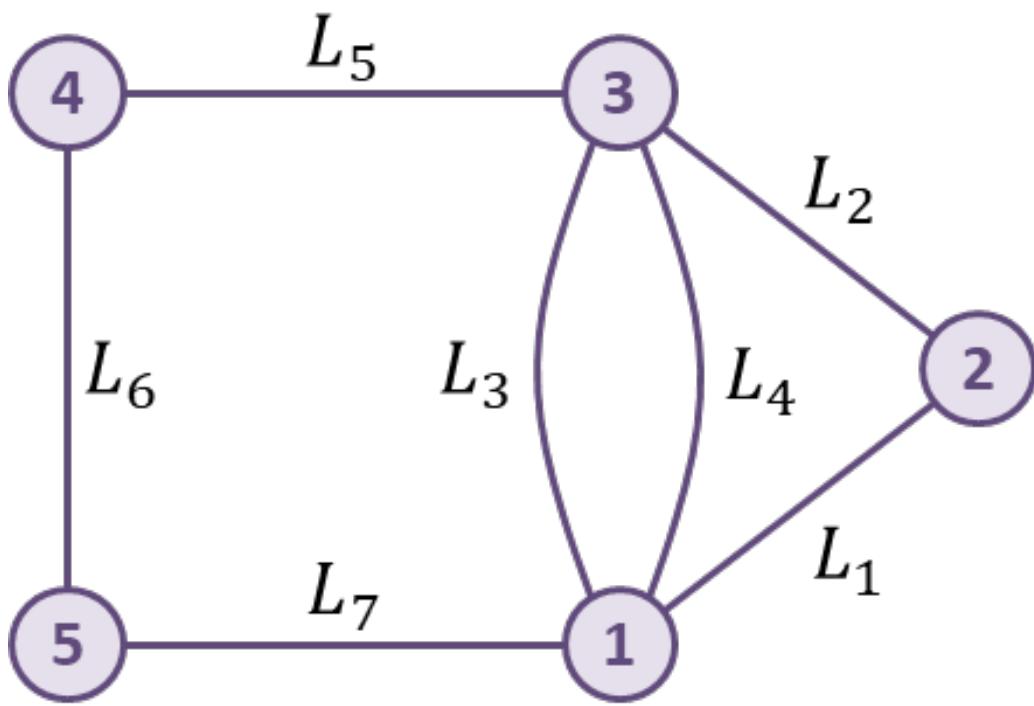
$$\vec{t}_1 = \vec{x}_1 \wedge \vec{n}_1 \text{ et } \vec{t}_2 = \vec{x}_1 \wedge \vec{n}_2$$

$$\overrightarrow{DO} = a \cdot \vec{x}_1 + R \cdot \vec{y}_1$$

**Question 1** Compléter le graphe de structure.

#### Correction

Liaison	Caractéristique	Torceur cinématique	Torseur statique
$L_1$	Glissière de direction $\vec{x}_1$	$\begin{Bmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}$
$L_2$	Rotule de centre $D$ $\vec{x}_1$	$\begin{Bmatrix} p_2 & 0 \\ q_2 & 0 \\ r_2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}$
$L_3$	Sphère–plan de normale $(I_1, \vec{n}_1)$	$\begin{Bmatrix} p_3 & u_3 \\ q_3 & 0 \\ r_3 & w_3 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
$L_4$	Sphère–plan de normale $(I_2, \vec{n}_2)$	$\begin{Bmatrix} p_4 & u_4 \\ q_4 & 0 \\ r_4 & w_4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
$L_5$	Pivot $(A, \vec{z}_3)$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_5 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_5 & L_5 \\ Y_5 & M_5 \\ Z_5 & 0 \end{Bmatrix}$
$L_6$	Pivot $(B, \vec{z}_3)$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_6 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_6 & L_6 \\ Y_6 & M_6 \\ Z_6 & 0 \end{Bmatrix}$
$L_7$	Pivot $(C, \vec{z}_3)$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_7 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_7 & L_7 \\ Y_7 & M_7 \\ Z_7 & 0 \end{Bmatrix}$



**Question 2** Le modèle proposé est-il isostatique ?

**Question 3** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq34}$  aux deux liaisons  $L_3$  et  $L_4$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq34}$ .

**Correction**

Les liaisons sont en parallèles, on privilégie donc la méthode statique :  $\mathcal{F}_{eq34} = \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1_{L_3})\} + \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1_{L_4})\}$

$$\mathcal{F}_{eq34} = \left\{ \begin{array}{c} Y_3 \vec{n}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_O + \left\{ \begin{array}{c} Y_4 \vec{n}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} Y_3 \vec{n}_1 + Y_4 \vec{n}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_O.$$

$\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  ne sont pas colinéaires.  $\vec{x}_1$  est orthogonal à  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ . La liaison est donc une sphère cylindre d'axe  $(O, \vec{x}_1)$ .

**Question 4** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq12}$  aux deux liaisons  $L_1$  et  $L_2$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq12}$ .

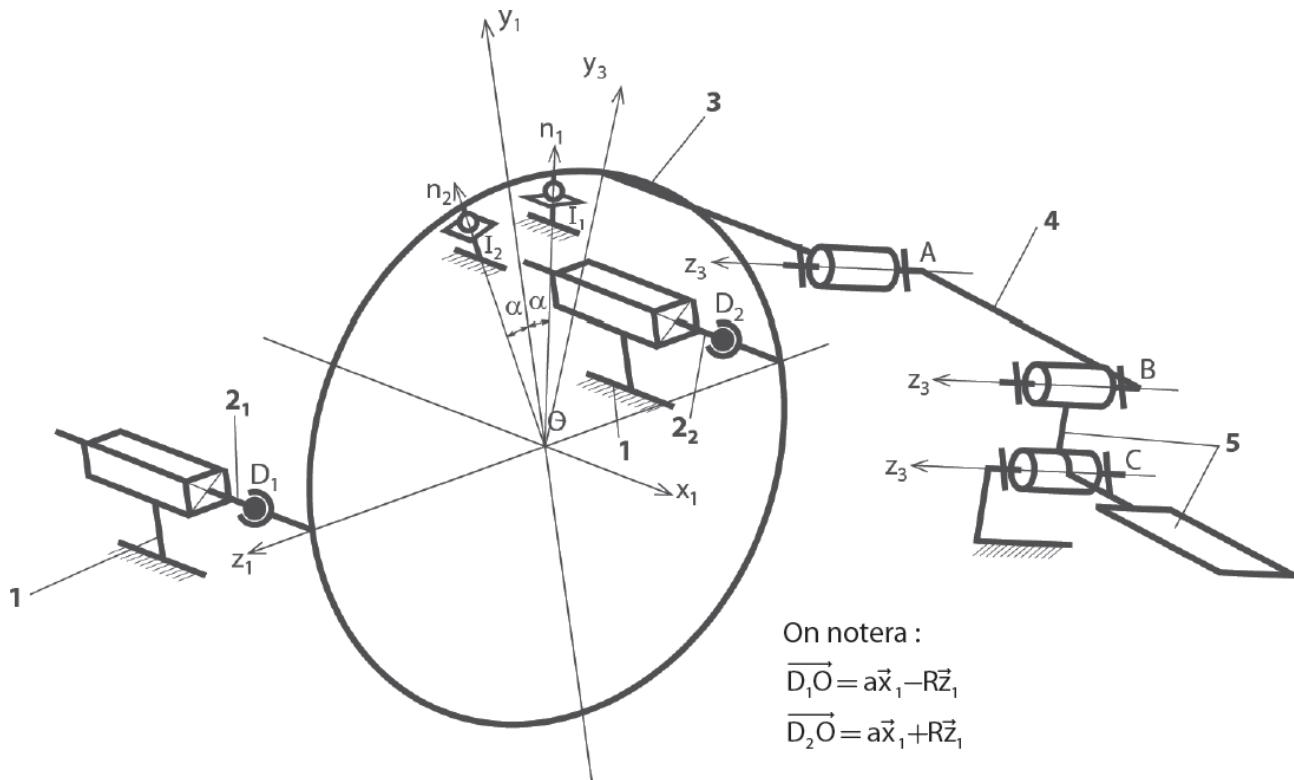
**Correction**

**Question 5** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq12}$  aux deux liaisons  $L_{eq34}$  et  $L_{eq12}$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq}$ . Justifier que la commande avec un seul vérin ne satisfait pas le cahier des charges.

**Correction**

### Étude d'une commande avec deux actionneurs

**Objectif** On cherche, dans un deuxième temps, à estimer la capacité d'une structure composée de deux vérins à transmettre le mouvement attendu.



**Question 6** À partir du graphe de structure (graphe des liaisons) et en vous inspirant des résultats trouvés précédemment déterminer la liaison équivalente  $L_{eq1}$  aux liaisons  $L_{11}$ ,  $L_{21}$  et la liaison équivalente  $L_{eq2}$  aux liaisons  $L_{12}$  et  $L_{22}$  entre les solides 1 et 3.

**Correction**

**Question 7** Déterminer par la méthode de votre choix, la liaison équivalente  $L'_{eq1}$  aux deux liaisons  $L_{eq34}$ ,  $L_{eq1}$  et  $L_{eq2}$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}'_{eq}$  puis le torseur cinématique cinématique  $\mathcal{V}'_{eq}$ . Le cahier des charges est-il vérifié pour une commande avec deux vérins?

**Correction**

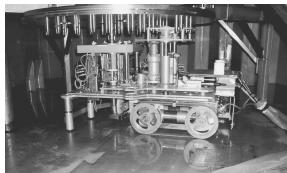
### Étude de la structure adoptée par le constructeur

**Objectif** On cherche finalement à estimer la capacité de réalisation d'une structure composée des quatre vérins.

**Question 8** Pour des raisons d'encombrement des vérins et de capacité à fournir les actions mécaniques de poussée, le bureau d'étude a finalement choisi de commander le tore avec 4 vérins pour obtenir la liaison glissière comme liaison équivalente entre les solides 1 et 3. Quel est, dans ces conditions, le degré d'hyperstatisme du groupe de liaisons initial réalisant la liaison glissière? Vous expliquerez brièvement, mais clairement votre raisonnement. Que pensez-vous de ce résultat sur la capacité de réalisation de cette structure?

**Correction**

## TD 5



## Système d'inspection pour tubes de guidage

Banque PT – SIA 2009

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

## Mise en situation

**Objectif** L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Les figures suivantes donnent quelques éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude. On y trouve notamment l'extrémité de la perche sur laquelle est fixée à la tête d'accrochage. La liaison démontable est réalisée par trois griffes pivotantes qui viennent se loger dans une gorge de la pièce insérée dans le corps de l'outil d'inspection. Le pivotement des griffes est commandé par une tige coulissant dans la perche sur toute sa longueur puisque la commande pneumatique ou manuelle est effectuée en haut de la perche, hors d'eau. On souhaite valider deux des critères d'appréciation :

- critère 1 : la commande par obstacle dans les deux sens (accrochage et décrochage);
- critère 2 : la durée de l'accrochage.

Les notations adoptées sont les suivantes.

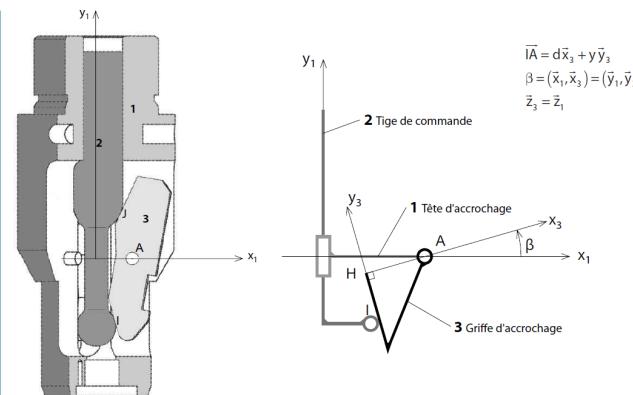
La base orthonormée directe liée au solide  $i$  est notée  $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ . Le torseur cinématique du mouvement d'un solide  $j$  par rapport à un solide  $i$  (ou par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_i$  lié à celui-ci), réduit en  $A$ , sera noté  $\{\mathcal{V}(j/i)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(j/i)}}{V(A \in j/i)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} p_{ji} \vec{x} + q_{ji} \vec{y} + r_{ji} \vec{z} \\ u_{ji} \vec{x} + v_{ji} \vec{y} + w_{ji} \vec{z} \end{array} \right\}_A$ .

Le torseur des actions mécaniques exercées par un solide  $i$  sur un solide  $j$ , réduit en  $A$  sera noté  $\{\{\mathcal{F}(i \rightarrow j)\}\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(i \rightarrow j)}}{\mathcal{M}(A, i \rightarrow j)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X_{ij} \vec{x} + Y_{ij} \vec{y} + Z_{ij} \vec{z} \\ L_{ij} \vec{x} + M_{ij} \vec{y} + N_{ij} \vec{z} \end{array} \right\}_A$ .

## Validation de la transmission du mouvement de commande

## Étude préliminaire d'un modèle simplifié

On adopte dans un premier temps, un modèle simplifié, pour une seule griffe, défini par le schéma cinématique donné dans la figure suivante.



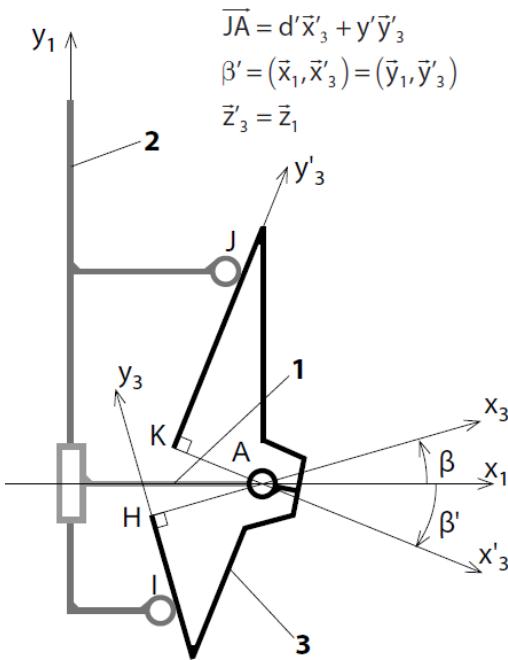
**Question 1** En considérant que le modèle est spatial, donner le graphe de structure (graphe des liaisons) associé au schéma cinématique proposé en précisant les éléments géométriques caractéristiques de chaque liaison puis la forme de leur torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(j/i)\}$ , c'est-à-dire l'expression des éléments de réduction en fonction des paramètres  $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij}, u_{ij}, v_{ij}$  et  $w_{ij}$  dans la base locale de la liaison.

**Question 2** Établir le système de six équations, en projection dans la base  $\mathcal{B}_3$  liée au solide 3, traduisant la fermeture cinématique du mécanisme, en fonction des paramètres cinématiques introduits à la question précédente et des paramètres géométriques définis sur la figure précédente.

**Question 3** Évaluer le rang du système d'équations obtenu et en déduire le degré de mobilité du mécanisme. On supposera que le paramètre cinématique d'entrée  $w_{21}$  est connu et que l'angle  $\beta$  est différent de zéro. Si on fait l'hypothèse que les liaisons sont parfaites, ce modèle est-il hyperstatique?

## Étude du modèle associé à la commande d'une griffe

Afin d'obtenir une commande par obstacle dans les deux sens de commande, le modèle est complété par une seconde liaison sphère-plan, telle que le schéma cinématique devienne celui de la figure suivante.

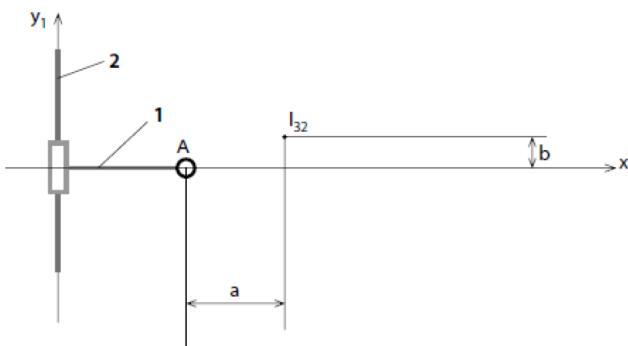


**Objectif** On cherche ici à montrer qu'il est impossible d'obtenir ce double contact avec la géométrie actuelle.

**Question 4** En vous appuyant sur les résultats précédents et en supposant que les angles  $\beta$  et  $\beta'$  sont différents de zéro, donner la valeur du degré de mobilité de ce modèle puis son degré d'hyperstatisme. Que concluez-vous de ces résultats? On notera  $\{\mathcal{V}(3/2)\}$  le torseur cinématique de la liaison sphère-plan de centre  $J$  dont on précisera la normale.

**Question 5** En supposant que les normales, à préciser, aux liaisons sphère-plan, de centres  $I$  et  $J$ , sont concourantes au point que l'on notera  $I_{32}$ , déterminer, en utilisant l'équivalence statique, la liaison équivalente entre les solides 3 et 2 au point  $I_{32}$ .

**Question 6** Compléter le schéma cinématique avec la liaison équivalente.



**Question 7** Calculer le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé et comparer cette valeur à celle trouvée à la question 4, en supposant les valeurs de  $a$  et  $b$  quelconques, définies par  $\vec{AI}_{32} = a \vec{x}_1 + b \vec{y}_1$ .

**Question 8** Indiquer à quelle condition sur  $a$  et/ou  $b$ , le degré de mobilité serait égal à 1. Commentez ce résultat en regard de l'objectif énoncé plus haut.

Les valeurs de  $a$  et  $b$  étant des fonctions du temps, on constate que la condition trouvée ne peut être réalisée à chaque instant du mouvement d'accrochage, en conservant, sur la pièce 3, deux rampes rectilignes pour les contacts ponctuels en  $I$  et  $J$ .

Une simulation informatique du mécanisme montre que si on décide de conserver la rampe rectiligne uniquement au contact en  $I$ , il est nécessaire d'avoir un profil bombé, donné sur la figure suivante, pour le contact en  $J$ .



**Question 9** Expliquer et effectuer, le tracé permettant de trouver exactement la position du point de contact  $J$ , entre la surface sphérique de la tige de commande et le profil bombé de la griffe, obtenu dans la position représentée.

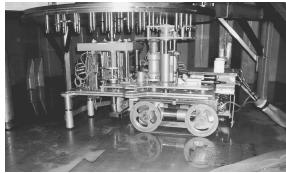
**Question 10** Le bureau d'étude a finalement décidé de conserver les deux rampes rectilignes repérées  $\Delta I$  et  $\Delta J$  sur la figure. Quelle conséquence a ce choix sur le fonctionnement du mécanisme d'accrochage? Peut-on valider le critère étudié de la FT 2.1.1?

#### Validation de la transmission de l'effort de commande

On souhaite vérifier que le mouvement de commande de la griffe est toujours possible. Pour cela, on se place dans la configuration du modèle simplifié donné figure 5 de l'Annexe 4. On suppose que seule la liaison sphère-plan de centre  $I$  n'est pas parfaite avec un coefficient de frottement au contact  $f$  de 0,2. On suppose négligeable le poids de la griffe 3 devant les actions mécaniques transmises. On précise que  $d = 10 \text{ mm}$  et que  $y$  varie entre 20 et 32 mm.

**Question 11** Préciser, en justifiant votre réponse, si un phénomène d'arc-boutement peut se produire au cours du mouvement de la griffe? Peut-on valider la solution proposée?

## TD 5 – Corrigé



## Système d'inspection pour tubes de guidage

Banque PT – SIA 2009

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

## Mise en situation

**Objectif** L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Les figures suivantes donnent quelques éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude. On y trouve notamment l'extrémité de la perche sur laquelle est fixée à la tête d'accrochage. La liaison démontable est réalisée par trois griffes pivotantes qui viennent se loger dans une gorge de la pièce insérée dans le corps de l'outil d'inspection. Le pivotement des griffes est commandé par une tige coulissant dans la perche sur toute sa longueur puisque la commande pneumatique ou manuelle est effectuée en haut de la perche, hors d'eau. On souhaite valider deux des critères d'appréciation :

- critère 1 : la commande par obstacle dans les deux sens (accrochage et décrochage);
- critère 2 : la durée de l'accrochage.

Les notations adoptées sont les suivantes.

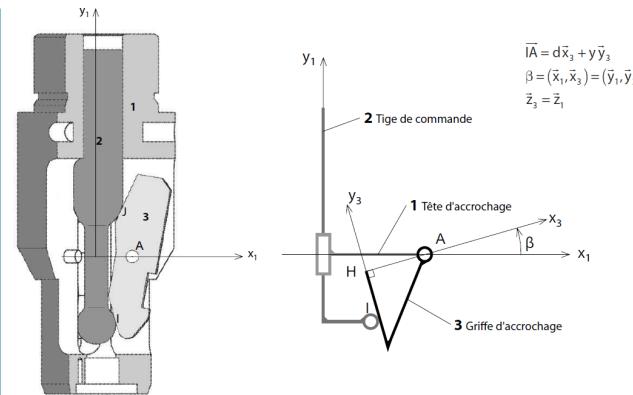
La base orthonormée directe liée au solide  $i$  est notée  $\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ . Le torseur cinématique du mouvement d'un solide  $j$  par rapport à un solide  $i$  (ou par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_i$  lié à celui-ci), réduit en  $A$ , sera noté  $\{\mathcal{V}(j/i)\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega(j/i)}}{V(A \in j/i)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} p_{ji} \vec{x} + q_{ji} \vec{y} + r_{ji} \vec{z} \\ u_{ji} \vec{x} + v_{ji} \vec{y} + w_{ji} \vec{z} \end{array} \right\}_A$ .

Le torseur des actions mécaniques exercées par un solide  $i$  sur un solide  $j$ , réduit en  $A$  sera noté  $\{\{\mathcal{F}(i \rightarrow j)\}\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{R(i \rightarrow j)}}{\mathcal{M}(A, i \rightarrow j)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X_{ij} \vec{x} + Y_{ij} \vec{y} + Z_{ij} \vec{z} \\ L_{ij} \vec{x} + M_{ij} \vec{y} + N_{ij} \vec{z} \end{array} \right\}_A$ .

## Validation de la transmission du mouvement de commande

## Étude préliminaire d'un modèle simplifié

On adopte dans un premier temps, un modèle simplifié, pour une seule griffe, défini par le schéma cinématique donné dans la figure suivante.



**Question 1** En considérant que le modèle est spatial, donner le graphe de structure (graphe des liaisons) associé au schéma cinématique proposé en précisant les éléments géométriques caractéristiques de chaque liaison puis la forme de leur torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(j/i)\}$ , c'est-à-dire l'expression des éléments de réduction en fonction des paramètres  $p_{ij}$ ,  $q_{ij}$ ,  $r_{ij}$ ,  $u_{ij}$ ,  $v_{ij}$  et  $w_{ij}$  dans la base locale de la liaison.

## Correction

**Question 2** Établir le système de six équations, en projection dans la base  $\mathcal{B}_3$  liée au solide 3, traduisant la fermeture cinématique du mécanisme, en fonction des paramètres cinématiques introduits à la question précédente et des paramètres géométriques définis sur la figure précédente.

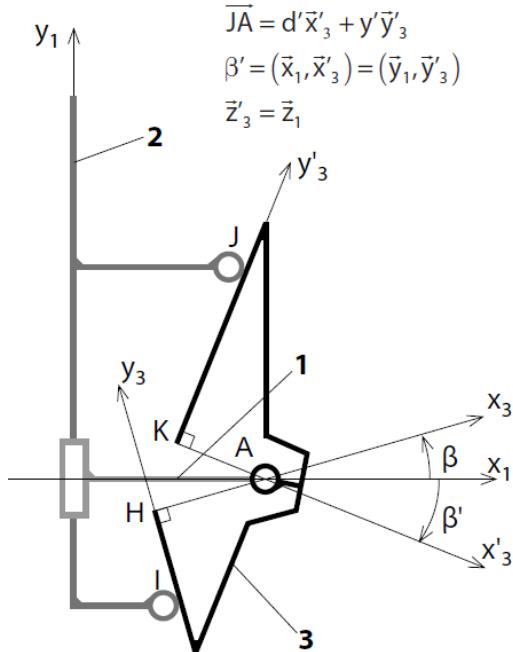
## Correction

**Question 3** Évaluer le rang du système d'équations obtenu et en déduire le degré de mobilité du mécanisme. On supposera que le paramètre cinématique d'entrée  $w_{21}$  est connu et que l'angle  $\beta$  est différent de zéro. Si on fait l'hypothèse que les liaisons sont parfaites, ce modèle est-il hyperstatique?

## Correction

## Étude du modèle associé à la commande d'une griffe

Afin d'obtenir une commande par obstacle dans les deux sens de commande, le modèle est complété par une seconde liaison sphère-plan, telle que le schéma cinématique devienne celui de la figure suivante.



**Objectif** On cherche ici à montrer qu'il est impossible d'obtenir ce double contact avec la géométrie actuelle.

**Question 4** En vous appuyant sur les résultats précédents et en supposant que les angles  $\beta$  et  $\beta'$  sont différents de zéro, donner la valeur du degré de mobilité de ce modèle puis son degré d'hyperstatisme. Que concluez-vous de ces résultats ? On notera  $\{\mathcal{V}(3/2)\}$  le torseur cinématique de la liaison sphère-plan de centre  $J$  dont on précisera la normale.

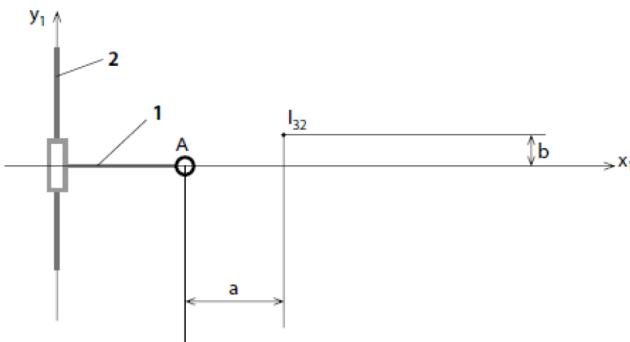
**Correction**

**Question 5** En supposant que les normales, à préciser, aux liaisons sphère-plan, de centres  $I$  et  $J$ , sont concourantes au point que l'on notera  $I_{32}$ , déterminer, en utilisant l'équivalence statique, la liaison équivalente entre les solides 3 et 2 au point  $I_{32}$ .

**Correction**

**Question 6** Compléter le schéma cinématique avec la liaison équivalente.

**Correction**



**Question 7** Calculer le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé et comparer cette valeur à celle trouvée à la question 4, en supposant les valeurs de  $a$  et  $b$  quelconques, définies par  $\vec{AI}_{32} = a \vec{x}_1 + b \vec{y}_1$ .

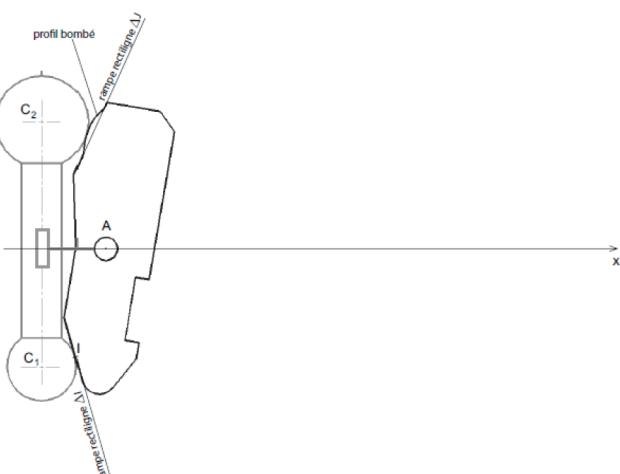
**Correction**

**Question 8** Indiquer à quelle condition sur  $a$  et/ou  $b$ , le degré de mobilité serait égal à 1. Commentez ce résultat en regard de l'objectif énoncé plus haut.

**Correction**

Les valeurs de  $a$  et  $b$  étant des fonctions du temps, on constate que la condition trouvée ne peut être réalisée à chaque instant du mouvement d'accrochage, en conservant, sur la pièce 3, deux rampes rectilignes pour les contacts ponctuels en  $I$  et  $J$ .

Une simulation informatique du mécanisme montre que si on décide de conserver la rampe rectiligne uniquement au contact en  $I$ , il est nécessaire d'avoir un profil bombé, donné sur la figure suivante, pour le contact en  $J$ .



**Question 9** Expliquer et effectuer, le tracé permettant de trouver exactement la position du point de contact  $J$ , entre la surface sphérique de la tige de commande et le profil bombé de la griffe, obtenu dans la position représentée.

**Correction**

**Question 10** Le bureau d'étude a finalement décidé de conserver les deux rampes rectilignes repérées  $\Delta I$  et  $\Delta J$  sur la figure. Quelle conséquence a ce choix sur le fonctionnement du mécanisme d'accrochage? Peut-on valider le critère étudié de la FT 2.1.1?

**Correction**

### Validation de la transmission de l'effort de commande

On souhaite vérifier que le mouvement de commande de la griffe est toujours possible. Pour cela, on se place dans la configuration du modèle simplifié donné figure

5 de l'Annexe 4. On suppose que seule la liaison sphère-plan de centre  $I$  n'est pas parfaite avec un coefficient de frottement au contact  $f$  de 0,2. On suppose négligeable le poids de la griffe 3 devant les actions mécaniques transmises. On précise que  $d = 10 \text{ mm}$  et que  $y$  varie entre 20 et 32 mm.

**Question 11** Préciser, en justifiant votre réponse, si un phénomène d'arc-boutement peut se produire au cours du mouvement de la griffe? Peut-on valider la solution proposée?

**Correction**