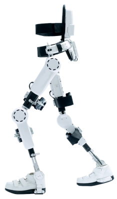
TD 01



Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec TSI 2017

Savoirs et compétences :

- *Res2.C12 : loi entrée – sortie géométrique;*
- *Res2.C12.SF1 : déterminer la loi entrée - sortie géométrique d'une chaîne cinématique;*
- *Res2.C15 : loi entrée – sortie cinématique;*
- *Res2.C15.SF1 : déterminer les relations de fermeture de la chaîne cinématique.*

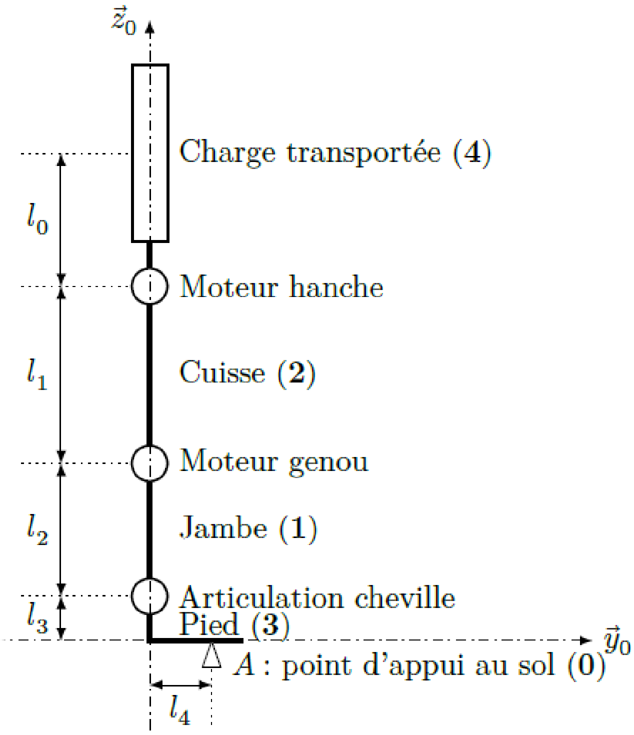
Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

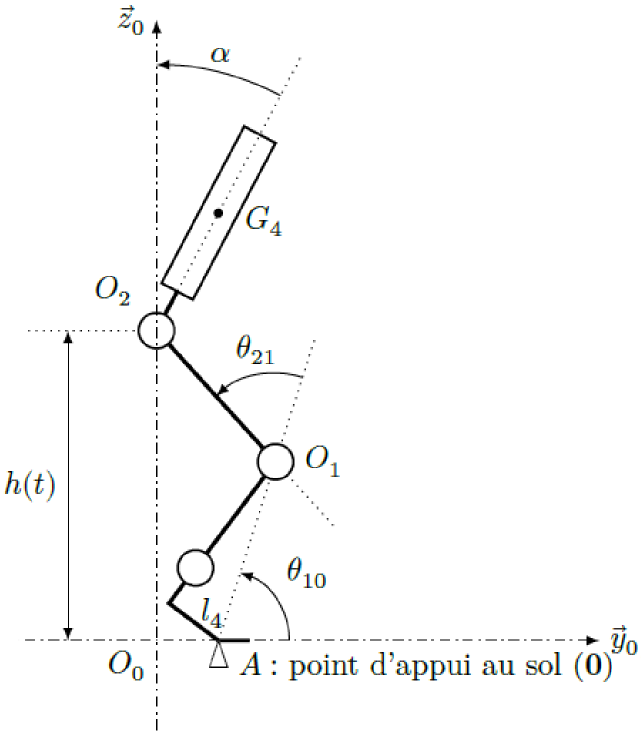
Objectif Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Élaboration du modèle géométrique direct et du modèle articulaire inverse

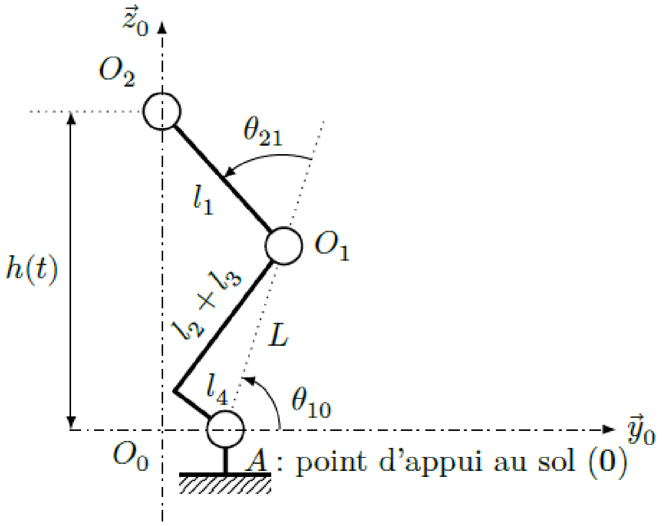
Objectif Élaborer la commande du moteur pilotant le genou à partir d'un mouvement défini dans l'espace opérationnel puis converti dans l'espace articulaire.

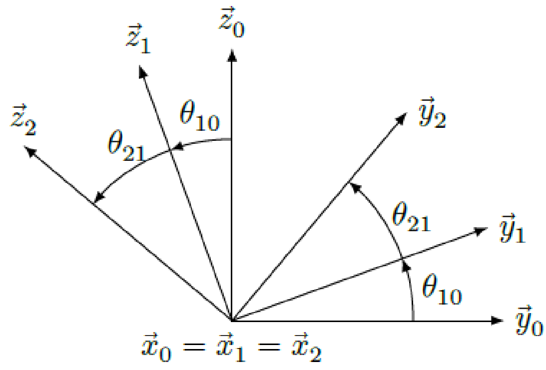
L'étude se limite au passage de la position accroupie à la position relevée de l'exosquelette. Lors de ce passage, le point O_2 est en mouvement de translation verticale suivant la direction $\left(O_0, \overrightarrow{z_0}\right)$ et sa vitesse de déplacement évolue selon une loi trapézoïdale. Un modèle plan de la chaîne cinématique ouverte représente la partie inférieure de l'exosquelette en position debout et fléchie.





On donne le paramétrage du modèle proposé.





Hypothèses :

- le référentiel lié au repère $\mathcal{R}_0\left(A;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ est galiléen et est fixe par rapport à la terre ;
- le point O_2 représentant la hanche se déplace verticalement selon la direction $\left(O_0,\overrightarrow{z_0}\right)$;
- l'angle α entre la charge transportée et la verticale $\overrightarrow{z_0}$ reste constant ;
- le point d'appui A du pied sur le sol est considéré fixe par rapport à la terre ;
- lors du mouvement étudié la jambe (1) reste perpendiculaire au pied (3).

Données :

- $\theta_{10}=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)=\left(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_1}\right)$;
- $\theta_{21}=\left(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2}\right)=\left(\overrightarrow{z_1},\overrightarrow{z_2}\right)$;
- $\alpha=$ constante ;
- $L=\sqrt{(l_2+l_3)^2+l_4^2}$.

Question 1 *Déterminer littéralement les coordonnées opérationnelles l_4 et $h(t)$ en fonction des coordonnées articulaires θ_{10}, θ_{21} et des paramètres dimensionnels L et l_1.*

Correction On a $\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2O_0}+\overrightarrow{O_0A}=\overrightarrow{0}$ soit $L\overrightarrow{y_1}+l_1\overrightarrow{y_2}-h(t)\overrightarrow{z_0}+l_4\overrightarrow{y_0}=\overrightarrow{0}$. En projetant sur $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$ on a :

$$\begin{cases} L\cos\theta_{10}+l_1\cos(\theta_{10}+\theta_{21})+l_4=0 \\ L\sin\theta_{10}+l_1\sin(\theta_{10}+\theta_{21})-h(t)=0 \end{cases}$$

En projetant sur $\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{z_1}$ on a :

$$\begin{cases} L+l_1\cos\theta_{21}-h(t)\sin\theta_{10}+l_4\cos\theta_{10}=0 \\ l_1\sin\theta_{21}-h(t)\cos\theta_{10}-l_4\sin\theta_{10}=0 \end{cases}$$

Question 2 *Déterminer le modèle articulaire inverse θ_{10} et θ_{21} en fonction de l_1, l_4, L et $h(t)$.*

Correction Pour exprimer θ_{10}, on peut utiliser le premier système d'équation :

$$\begin{cases} L\cos\theta_{10}+l_4=-l_1\cos(\theta_{10}+\theta_{21}) \\ L\sin\theta_{10}-h(t)=-l_1\sin(\theta_{10}+\theta_{21}) \end{cases}$$

En élevant les expressions au carré, on a alors : $l_1^2=(L\cos\theta_{10}+l_4)^2+(L\sin\theta_{10}-h(t))^2 \Leftrightarrow l_1^2=L^2+l_4^2+h(t)^2+2Ll_4\cos\theta_{10}-2Lh(t)\sin\theta_{10}$

$$\Leftrightarrow \frac{l_1^2-L^2-l_4^2-h(t)^2}{2L}=l_4\cos\theta_{10}-h(t)\sin\theta_{10}$$

En utilisant l'indication, on a :

$$\frac{l_4}{\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}\cos\theta_{10}+\frac{-h(t)}{\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}\sin\theta_{10}=\frac{l_1^2-L^2-l_4^2-h(t)^2}{2L\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}$$

En conséquence, on pose $\cos\varphi = \dfrac{l_4}{\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{-h(t)}{\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}$. En conséquences $\tan\varphi = \dfrac{-h(t)}{l_4}$.

Par suite, $\cos\left(\theta_{10}-\varphi\right) = \dfrac{l_1^2-L^2-l_4^2-h(t)^2}{2L\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}$. On a donc $\theta_{10} = \arccos\left(\dfrac{l_1^2-L^2-l_4^2-h(t)^2}{2L\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}\right)+\varphi$.

Au final,

$$\theta_{10} = \arccos\left(\frac{l_1^2-L^2-l_4^2-h(t)^2}{2L\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}\right)+\arctan\left(\frac{-h(t)}{l_4}\right).$$

Pour exprimer θ_{21} on réutilise le premier système d'équations : $\left\{\begin{array}{l} L\cos\theta_{10} = -l_1\cos(\theta_{10}+\theta_{21})-l_4 \\ L\sin\theta_{10} = -l_1\sin(\theta_{10}+\theta_{21})+h(t)\end{array}\right.$

On a alors $L^2 = l_1^2+l_4^2+2l_1l_4\cos(\theta_{10}+\theta_{21})+h(t)^2-2h(t)l_1\sin(\theta_{10}+\theta_{21})$ On a a alors :

Méthode Lorsqu'on a une équation de la forme $A\cos\theta_{10}+B\sin\theta_{10} = C$. On peut normer cette équation en la mettant sous la forme $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\theta_{10}+\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\theta_{10} = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$. On pose alors $\cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. On a alors $\cos\left(\theta_{10}-\varphi\right) = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Élaboration du modèle cinématique

Objectif En vue de dimensionner le moteur du genou, déterminer la vitesse articulaire en fonction de la vitesse opérationnelle.

Question 3 *Déterminer à partir du modèle articulaire inverse la vitesse angulaire θ_{21} en fonction de $h(t)$, $\dot{h}(t)$, l_1, L et $\sin\theta_{21}$.*

Correction

Un modèle multiphysique a permis de déterminer les conditions suivantes correspondant à la vitesse maximale : $t = 1.5\,\text{s}$, $h(t=1,5) = 0.829\,\text{m}$, $\dot{h}(t=1,5) = 0.422\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ et $\theta_{21} = 55,9°$. Les longueurs l_1 et L valent respectivement 43.1 cm et 51.8 cm. Le réducteur de vitesse utilisé a un rapport de réduction égal à $r = \dfrac{1}{120}$.

Question 4 *Déterminer la valeur maximale de la vitesse angulaire $\dot{\theta}_{21}$ et rad s^{-1} puis celle de la fréquence de rotation d'un moteur de genou en tr min^{-1}.*

Correction

Éléments de corrigé :

1. ...