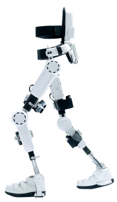
TD 01



Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec TSI 2017

Savoirs et compétences :

- *Res2.C12 : loi entrée – sortie géométrique;*
- *Res2.C12.SF1 : déterminer la loi entrée - sortie géométrique d'une chaîne cinématique;*
- *Res2.C15 : loi entrée – sortie cinématique;*
- *Res2.C15.SF1 : déterminer les relations de fermeture de la chaîne cinématique.*

Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

Objectif Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Élaboration du modèle géométrique direct et du modèle articulaire inverse

Objectif Élaborer la commande du moteur pilotant le genou à partir d'un mouvement défini dans l'espace opérationnel puis converti dans l'espace articulaire.

Question 1 *Déterminer littéralement les coordonnées opérationnelles l_4 et $h(t)$ en fonction des coordonnées articulaires θ_{10}, θ_{21} et des paramètres dimensionnels L et l_1.*

Correction On a $\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2O_0}+\overrightarrow{O_0A}=\overrightarrow{0}$ soit $L\overrightarrow{y_1}+l_1\overrightarrow{y_2}-h(t)\overrightarrow{z_0}+l_4\overrightarrow{y_0}=\overrightarrow{0}$. En projetant sur $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} L\cos\theta_{10}+l_1\cos(\theta_{10}+\theta_{21})+l_4=0 \\ L\sin\theta_{10}+l_1\sin(\theta_{10}+\theta_{21})-h(t)=0 \end{array}\right.$$

En projetant sur $\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{z_1}$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} L+l_1\cos\theta_{21}-h(t)\sin\theta_{10}+l_4\cos\theta_{10}=0 \\ l_1\sin\theta_{21}-h(t)\cos\theta_{10}-l_4\sin\theta_{10}=0 \end{array}\right.$$

Question 2 *Déterminer le modèle articulaire inverse θ_{10} et θ_{21} en fonction de l_1, l_4, L et $h(t)$.*

Correction Pour exprimer θ_{10}, on peut utiliser le premier système d'équation :

$$\left\{\begin{array}{l} L\cos\theta_{10}+l_4=-l_1\cos(\theta_{10}+\theta_{21}) \\ L\sin\theta_{10}-h(t)=-l_1\sin(\theta_{10}+\theta_{21}) \end{array}\right.$$

En élevant les expressions au carré, on a alors : $l_1^2=(L\cos\theta_{10}+l_4)^2+(L\sin\theta_{10}-h(t))^2 \Leftrightarrow l_1^2=L^2+l_4^2+h(t)^2+2Ll_4\cos\theta_{10}-2Lh(t)\sin\theta_{10}$

$\Leftrightarrow \dfrac{l_1^2-L^2-l_4^2-h(t)^2}{2L}=l_4\cos\theta_{10}-h(t)\sin\theta_{10}$

En utilisant l'indication, on a :

$$\frac{l_4}{\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}\cos\theta_{10}+\frac{-h(t)}{\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}\sin\theta_{10}=\frac{l_1^2-L^2-l_4^2-h(t)^2}{2L\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}$$

En conséquence, on pose $\cos\varphi=\dfrac{l_4}{\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}$ et $\sin\varphi=\dfrac{-h(t)}{\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}$. En conséquences $\tan\varphi=\dfrac{-h(t)}{l_4}$.

Par suite, $\cos\left(\theta_{10}-\varphi\right)=\dfrac{l_1^2-L^2-l_4^2-h(t)^2}{2L\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}$. On a donc $\theta_{10}=\arccos\left(\dfrac{l_1^2-L^2-l_4^2-h(t)^2}{2L\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}\right)+\varphi$.

Au final,

$$\theta_{10}=\arccos\left(\frac{l_1^2-L^2-l_4^2-h(t)^2}{2L\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}\right)+\arctan\left(\frac{-h(t)}{l_4}\right).$$

Pour exprimer θ_{21} on réutilise le premier système d'équations : $\begin{cases} -l_4=l_1\cos(\theta_{10}+\theta_{21})+L\cos\theta_{10} \\ h(t)=l_1\sin(\theta_{10}+\theta_{21})+L\sin\theta_{10}\end{cases}$

On a alors $l_4^2+h(t)^2=L^2+l_1^2+2l_1L(\cos\theta_{10}\cos(\theta_{10}+\theta_{21})+\sin(\theta_{10}+\theta_{21})\sin\theta_{10})$. En conséquences, $\dfrac{l_4^2+h(t)^2-L^2-l_1^2}{2l_1L}=$ $\cos\theta_{10}\cos(\theta_{10}+\theta_{21})+\sin(\theta_{10}+\theta_{21})\sin\theta_{10}=\cos(\theta_{10}+\theta_{21}-\theta_{10})$. D'où $\theta_{21}=\arccos\left(\dfrac{l_4^2+h(t)^2-L^2-l_1^2}{2l_1L}\right)$.

Élaboration du modèle cinématique

Objectif En vue de dimensionner le moteur du genou, déterminer la vitesse articulaire en fonction de la vitesse opérationnelle.

Question 3 *Déterminer à partir du modèle articulaire inverse la vitesse angulaire θ_{21} en fonction de $h(t)$, $\dot{h}(t)$, l_1, L et $\sin\theta_{21}$.*

Correction On a vu que $\cos\theta_{21}=\dfrac{l_4^2+h(t)^2-L^2-l_1^2}{2l_1L}$. En dérivant, on a donc $-\dot{\theta}_{21}\sin\theta_{21}=\dfrac{2\dot{h}(t)h(t)}{2l_1L}$. Au final, $\dot{\theta}_{21}=-\dfrac{\dot{h}(t)h(t)}{l_1L\sin\theta_{21}}$.

Question 4 *Déterminer la valeur maximale de la vitesse angulaire $\dot{\theta}_{21}$ et rad s^{-1} puis celle de la fréquence de rotation d'un moteur de genou en tr min^{-1}.*

Correction On a : $\dot{\theta}_{21}=-\dfrac{0,422\times 0,829}{0,431\times 0,518\sin(55,9)}\simeq -1.89\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Soit une fréquence de rotation du moteur de $2168\,\mathrm{tr\,min^{-1}}$.