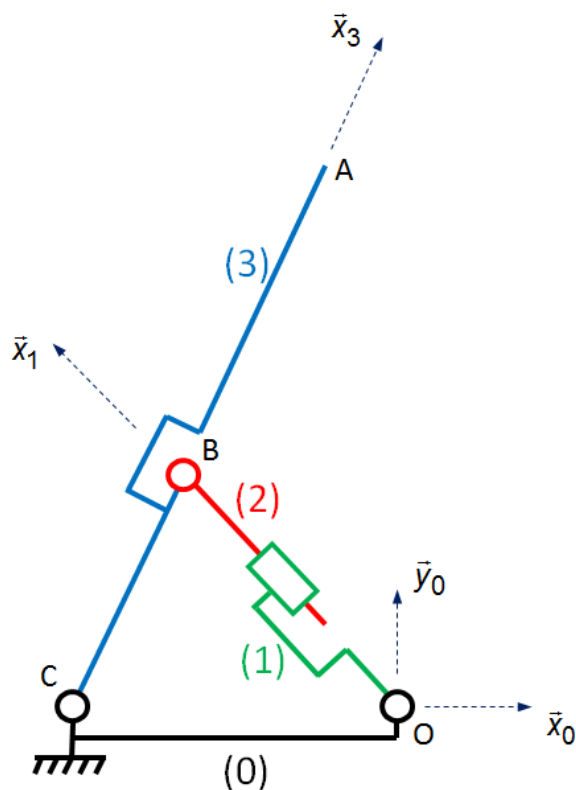


## Exercice 133 – Schéma cinématique – Camion benne

On s'intéresse à un camion benne, dont une photo et un schéma cinématique sont donnés ci-dessous.



Ce système est constitué de quatre solides :

- le châssis 0, de repère associé  $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ;
- le corps 1, d'un des deux vérins, de repère associé  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  tel que  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ;
- la tige 2, d'un des deux vérins, de repère associé  $\mathcal{R}_2(B; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  tel que  $\vec{OB} = \lambda \vec{x}_1$ ;
- la benne 3 de repère associé  $\mathcal{R}_3(C; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  tel que  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$ .

Pour éviter toute collision, il est nécessaire de maîtriser parfaitement à chaque instant la position du point A, fixe dans la benne 3, par rapport au repère associé au sol.

**Objectif** Appréhender le schéma cinématique en vue d'une étude géométrique ultérieure.

**Question 1** Sur le schéma cinématique, repasser chaque solide d'une couleur différente. Repérer les liaisons et les lister sur un graphe des liaisons. Préciser le paramètre de mouvement associé à chaque liaison.

**Question 2** Réaliser les figures de changement de base, et en déduire le vecteur vitesse angulaire associé à chacune d'entre elles.

**Question 3** Que dire des bases  $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ ? En déduire  $\Omega(2/1)$  et  $\Omega(2/0)$ .

## Exercice 132 – TEC – Clever INFOS MAN-QUANTES?

### Première correction

Afin de répondre au critère du cahier des charges concernant la précision statique du système, on choisit de placer un intégrateur comme premier correcteur :

$$H_r(p) = \frac{K_i}{p}.$$

**Question 1** On donne sur le Cahier Réponses le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $FTBO_2(p)$  du système asservi pour  $K_i = 1$  et telle que  $M(p) = FTBO_2(p) \cdot e(p)$ . Déterminer, en expliquant clairement la méthode employée, la valeur de  $K_i$  qui permet d'obtenir la dynamique souhaitée.

On donne en annexe page 8 la définition d'un correcteur à avance de phase.

**Question 2** Combien de correcteurs à avance de phase réglés pour apporter chacun  $50^\circ$  au maximum faudrait-il incorporer dans le régulateur pour satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges?

On souhaite réaliser une simulation du comportement temporel du système ainsi corrigé pour un passage de  $0$  à  $45^\circ$  de l'habitable en  $0,75$  s. Le signal de consigne est donné sur la Figure Figure 1. Le logiciel de simulation ne possède pas de bloc de signal d'entrée correspondant à ce type de fonction, mais il est possible d'utiliser des blocs de type « rampe » possédant les critères :

- pente de la rampe;
- instant de départ de la rampe.

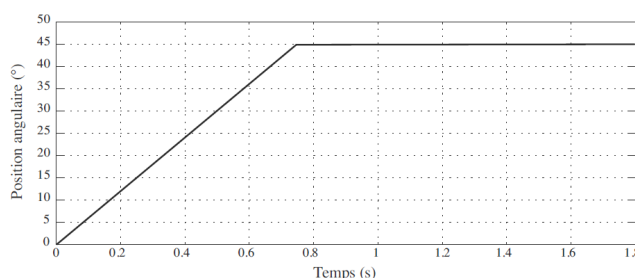


FIGURE 1 – Signal de consigne pour une simulation d'une rotation de  $0$  à  $45^\circ$  en  $0,75$  s

**Question 3** Donner les paramètres à entrer dans les 2 blocs de type « rampes » et préciser l'opération mathématique à effectuer entre les deux blocs afin d'obtenir le signal présenté sur la Figure 1.

La réponse obtenue par la simulation est présentée sur la Figure 2.

**Question 4** Quels sont les critères non satisfaits ?

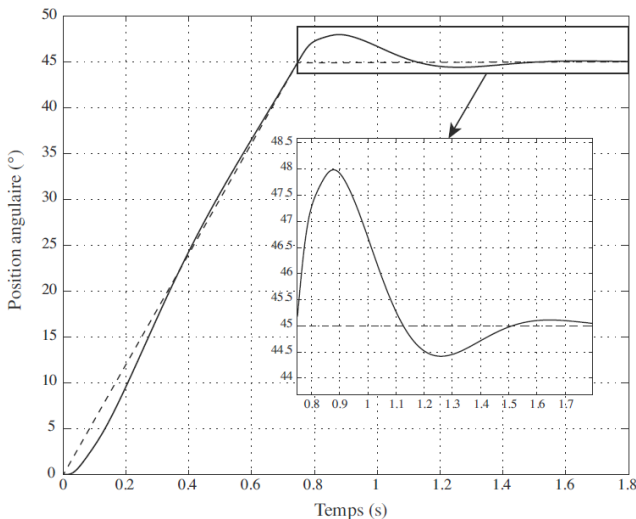


FIGURE 2 – Résultat de la simulation du passage de 0 à 45° en 0,75 s

\*

Deuxième correction

Plusieurs réglages du correcteur précédent ont été réalisés mais aucun n'a pu apporter satisfaction quant aux différents critères du cahier des charges. Le problème de fond ici est lié au fait que la pulsation de coupure  $\omega_V$  du mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin est inférieure à la pulsation à 0 dB souhaitée pour garantir une dynamique suffisante du système bouclé. On souhaite donc augmenter la valeur de la pulsation de coupure  $\omega_V$  afin de garantir au moins deux décades d'écart avec la pulsation à 0 dB de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

**Question 5** Quelle valeur de diamètre du vérin permet de vérifier la condition précédente. Cette valeur est-elle réaliste ?

On décide alors de remédier à ce problème par un filtre électronique du second ordre de type Notch de fonction de transfert :

$$H_N(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_n}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}{1 + \frac{2\xi_d}{\omega_d}p + \frac{p^2}{\omega_d^2}}$$

Le réglage optimum du correcteur doit compenser parfaitement le mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin. Pour cela, on effectue un essai afin d'identifier les caractéristiques de ce mode. Aucun réglage spécifique du débit de fuite n'a été réalisé, la compensation du mode rendant inutile cette étape.

Une tension de consigne  $u_e(t) = 0,02u(t)$  (avec  $u(t)$  l'échelon unitaire) est envoyée en entrée du servodistributeur. Une génératrice tachymétrique, dont le comportement est modélisé par un gain pur  $K_{gt} = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$ , mesure la vitesse de rotation de l'habitacle. Cette tension est notée  $m_\omega(t)$ . Le résultat de cet essai est donné sur la Figure de la question 24 du Cahier Réponses.

**Question 6** Compléter sur le Cahier Réponses le schéma-blocs représentant cet essai et déterminer la fonction de transfert  $H_{\text{essai}}$  telle que :  $M_\Omega(p) = H_{\text{essai}}(p)U_e(p)$ .

**Question 7** En vous aidant du graphe de la Figure Figure 3, déterminer les valeurs numériques expérimentales de  $\omega_v$  et  $\xi_v$  à partir de la courbe obtenue expérimentalement tracée sur le Cahier Réponses.

**Question 8** Quels inconvénients sur le comportement réel du système peuvent découler de cette méthode consistant à vouloir compenser le mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin par ce type de filtre électronique ?

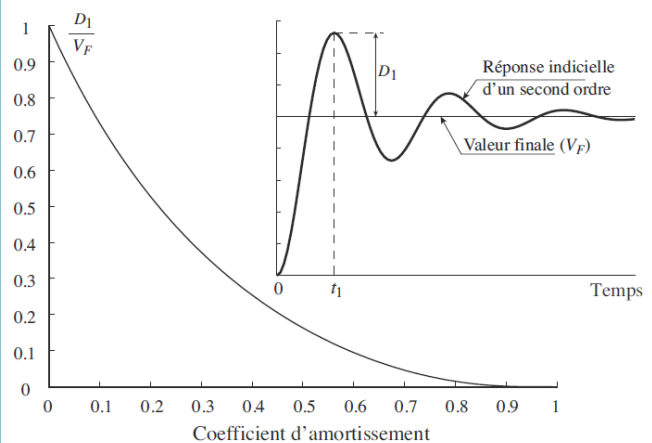


FIGURE 3 – Évolution du premier dépassement relatif à la valeur finale en fonction du coefficient d'amortissement (pour une fonction de transfert du second ordre)

On suppose par la suite que le numérateur du filtre Notch compense parfaitement le mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin. On adopte les caractéristiques suivantes pour le dénominateur :

- $\omega_d = 1000 \text{ rad s}^{-1}$  ;
- $\xi_d = 1$ .

Afin de satisfaire le critère de précision statique du cahier des charges on place un premier correcteur de type intégrateur non unitaire de fonction de transfert :

$$H_{\text{cor2}}(p) = \frac{K_\Omega}{p}$$

La valeur de  $K_\Omega$  est déterminée afin d'obtenir une pulsation à 0 dB de la fonction de transfert en boucle ouverte de  $65 \text{ rad s}^{-1}$ . Le diagramme de Bode de cette fonction de transfert est donné sur la Figure III.5. On complète le régulateur par un correcteur à avance de phase de fonction de transfert :  $H_{\text{av}}(p) = K_{\text{av}} \frac{1 + a_{\text{av}}\tau_{\text{av}}p}{1 + \tau_{\text{av}}p}$  avec  $a_{\text{av}} > 1$ .

On donne en annexe page 8 la définition d'un correcteur à avance de phase.

**Question 9** Déterminer les valeurs approximatives des paramètres  $a_{\text{av}}$ ,  $\tau_{\text{av}}$  et  $K_{\text{av}}$  qui permettent de satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges tout en conservant une pulsation à 0 dB de  $65 \text{ rad s}^{-1}$ .

Le régulateur étant a priori optimisé, on réalise un essai de validation du comportement temporel de l'inclinaison.

son de l'habitacle, le véhicule étant à l'arrêt. Le calculateur envoie un signal de consigne représentant l'évolution de la position angulaire souhaitée (de 0 à 45° en 0,75 s). La tension délivrée par le capteur angulaire est récupérée par un convertisseur analogique-numérique afin de tracer sur un ordinateur l'évolution temporelle de l'inclinaison de l'habitacle mesurée en degrés. Les deux courbes sont données sur la Figure 5.

**Question 10** Quels sont les critères du cahier des charges validés ?

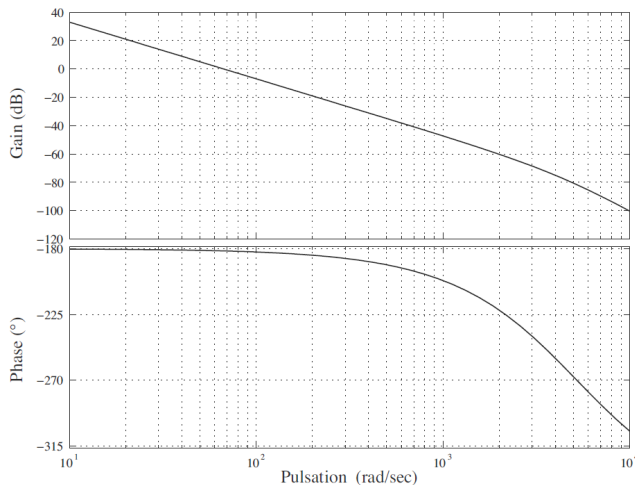


FIGURE 4 – Diagramme de Bode de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte après correction Intégrale

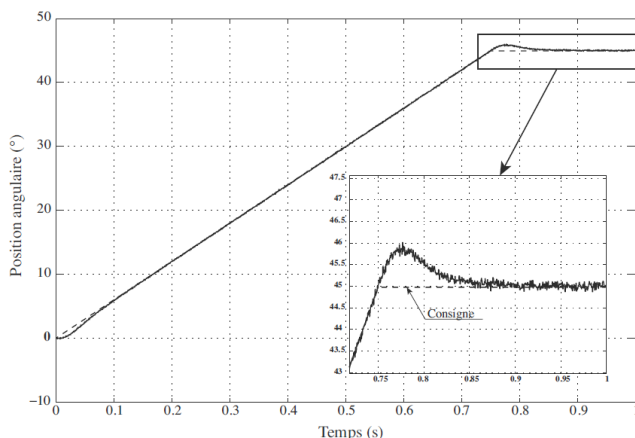
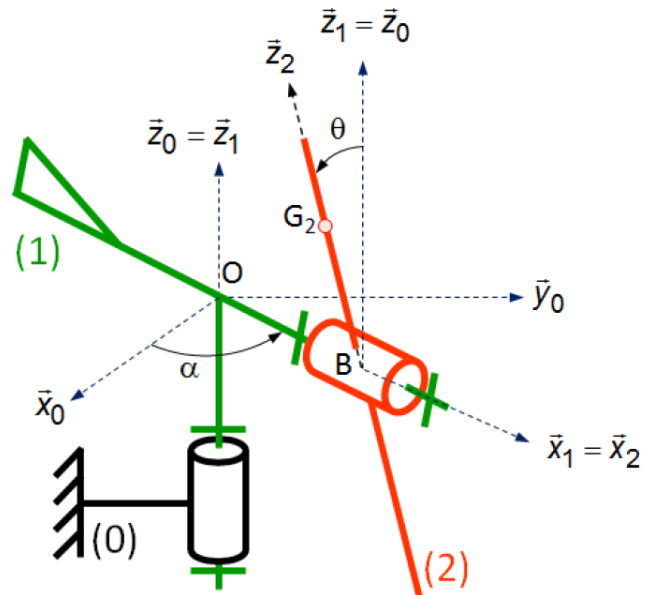


FIGURE 5 – Essai de validation : passage de 0 à 45° en 0,75 s

## Exercice 131 – Cinématique – Éolienne

On s'intéresse à une éolienne pour particulier de puissance 18 kW (comparée aux éoliennes industrielles dont le diamètre du rotor peut atteindre 125 m et qui fournissent 5 MW). On donne ci-dessous, la photo et la représentation sous forme de schéma cinématique de cette éolienne.



Ce système est constitué de trois solides :

- le mâle 0, de repère associé  $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , fixe par rapport au sol tel que l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  soit dirigé suivant la verticale ascendante ;
- le corps 1, de repère associé  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , en mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  par rapport au mâle 0 tel que  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$  et  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  ;
- les pâles 2, de repère associé  $\mathcal{R}_2(B; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , en mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  par rapport au corps 1 tel que  $\vec{OB} = b \vec{x}_1$  ( $b$  constant),  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$  et  $\theta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ .

Si un corps étranger percute une pale au point de l'endommager, alors un « balourd » se crée (le centre de gravité  $G_2$  des pâles n'est plus sur l'axe de rotation des pâles), et des effets dynamiques (vibrations) peuvent apparaître et être à l'origine d'effort qui vont user anormalement certaines pièces du système. Nous poserons la position du centre de gravité  $G_2$  des pâles 2 définie par  $\vec{BG}_2 = c \vec{z}_2$  ( $c$  constant).

**Objectif** Appréhender le schéma cinématique en vue d'une étude ultérieure de dynamique.

**Question 1** Sur le schéma cinématique, repasser chaque solide d'une couleur différente. Repérer les liaisons et les lister sur un graphe des liaisons. Préciser le paramètre de mouvement associé à chaque liaison.

**Question 2** Réaliser les figures de changement de base, et en déduire le vecteur vitesse angulaire associé à chacune d'entre elles.

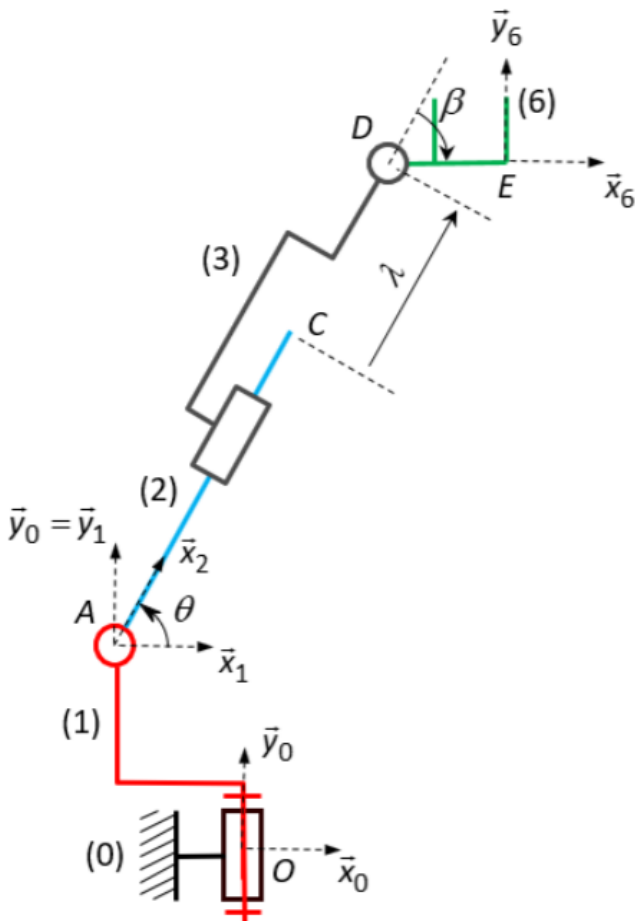
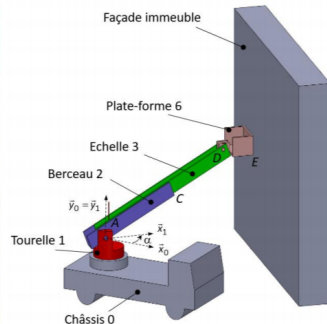
**Question 3** En déduire  $\overline{\Omega(2/0)}$ .

**Question 4** Décrire le mouvement de 2/1. Préciser, puis tracer sur le schéma cinématique les trajectoires  $T_{G_2 \in 2/1}$  et  $T_{B_2 \in 2/1}$ .

**Question 5** Décrire le mouvement de 1/0. Préciser, puis tracer sur le schéma cinématique les trajectoires  $T_{B \in 1/0}$ ,  $T_{O \in 1/0}$  et  $T_{G_2 \in 1/0}$ .

## Exercice 130 – Géométrie – EPAS

On s'intéresse à une Échelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle (voir vidéo sur site internet). Ce système, conçu et commercialisé par la société CAMIVA, est monté sur le châssis d'un camion de pompiers et permet de déplacer une plate-forme, pouvant recevoir deux personnes et un brancard (charge maxi 270 kg), le plus rapidement possible et en toute sécurité.



Le système est représenté, dans la situation particulière  $\alpha = 0$ , sous forme de schéma cinématique ci-contre. Ce système est constitué de quatre solides, listés ci-dessous avec leur repère associé :

- châssis 0,  $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ;
- tourelle 1,  $\mathcal{R}_1 = (A; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  tel que  $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$ ;
- berceau 2,  $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ ;
- échelle 3,  $\mathcal{R}_3 = (D; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  tel que  $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_2$ ;

- plate-forme 6,  $\mathcal{R}_6 = (E; \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$  tel que  $\vec{z}_6 = \vec{z}_2$ .
- On donne les paramètres de mouvement :  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ ,  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ ,  $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_6)$ ,  $\vec{CD} = \lambda \vec{x}_2$ .

On donne les dimensions caractéristiques :  $\vec{OA} = a \vec{x}_1 + b \vec{y}_1$ ,  $\vec{AC} = c \vec{x}_2$ ,  $\vec{DE} = e \vec{x}_6$ .

L'étude se fait pendant la phase de dressage. Pendant cette phase, la tourelle 1 est fixe par rapport au châssis 0 ( $\alpha = \text{cte}$ ) et le berceau 2 s'incline de plus en plus alors que l'échelle 3 se déploie. On suppose que le châssis 0 est ancré sur le sol parfaitement horizontal grâce aux bras de stabilisation.

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges :

- exigence 1 : pendant la phase de dressage, la plate-forme 6 doit rester en permanence horizontale afin d'assurer la sécurité des personnes qui sont embarquées.
- exigence 2 : lors d'une intervention, le point E à l'extrémité de la plate-forme 6 doit se déplacer verticalement le long de la façade d'un immeuble ( $L = \text{cte}$  et  $y$  variable au cours du temps).

**Objectif** Déterminer la loi de commande en position de chacune des chaînes d'énergie-puissance afin de respecter les exigences du cahier des charges.

**Question 1** Sur le schéma cinématique, repasser chaque solide d'une couleur différente.

**Question 2** Réaliser le graphe des liaisons. Préciser le paramètre de mouvement associé à chaque liaison. Préciser les éventuelles égalités de base.

**Question 3** Réaliser les figures de changement de base illustrant les paramètres de mouvement angulaires.

**Question 4** Préciser en le justifiant, le mouvement de 6/1, afin de respecter l'exigence Ex1 du cahier des charges. Que peut-on dire de la base  $\mathcal{B}_6 = (\vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$ ? Donner la relation entre  $\beta$  et  $\gamma$  afin de garantir ce mouvement?

**Question 5** Donner, en fonction des paramètres de mouvements et des dimensions caractéristiques du mécanisme, l'expression du vecteur position  $\vec{AE}$  du point E dans le repère 1.

**Question 6** Donner, en fonction de  $L$  et  $y$ , une autre expression de ce vecteur lorsque l'exigence Ex2 est respectée.

**Question 7** En déduire deux relations mathématiques, traduisant l'exigence Ex2 du cahier des charges, qui lient les paramètres de mouvement, les dimensions caractéristiques,  $L$  et  $y$ .

**Question 8** Donner alors les lois de commande en position  $\lambda = f(y)$  puis  $\theta = f(y)$ . Conclure.

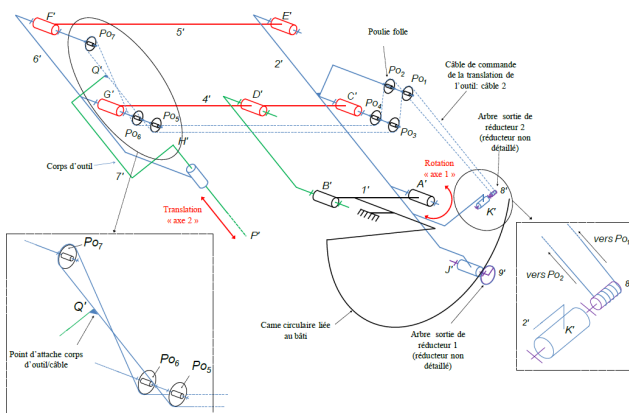
## Exercice 129 – PFD – Robot chirurgical

**Objectif** Déterminer les équations du mouvement du bras esclave sous la  $A \vec{q} + B \dot{\vec{q}} + C \ddot{\vec{q}} = \vec{F}$ .

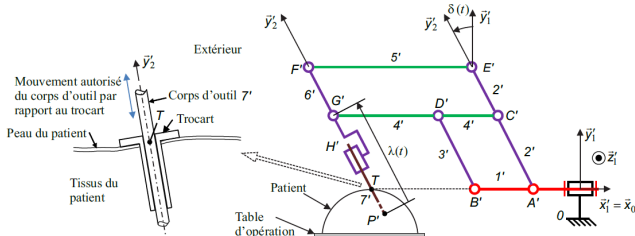


Trois mouvements de l'outil existent :

- la rotation du corps de l'outil 7' par rapport à 6', autour de  $(T, \vec{y}_2')$ , ce mouvement ne sera pas étudié ici;
- la rotation du corps d'outil 7' par rapport au bâti 0 autour de  $(T, \vec{z}_0')$ . La transmission de ce mouvement de l'actionneur dédié jusqu'à 7' est assurée par la structure globale étudiée aux questions précédentes, associée à une came circulaire liée au bâti sur laquelle roule sans glisser le galet 9';
- la translation du corps d'outil 7' par rapport au porte-outil 6'. La transmission de ce mouvement de l'actionneur dédié jusqu'à 7' est assurée par un système complexe de câbles donné dans la figure suivante.

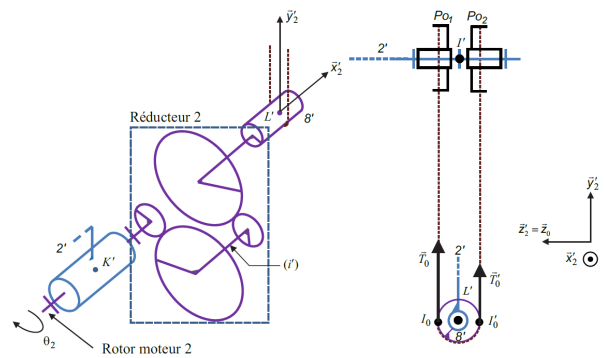


Les trois degrés de liberté du corps d'outil sont obtenus au moyen de la structure retenue (figures précédente et suivante) à laquelle deux axes asservis sont associés. Avec cette structure, une variation de l'angle  $\delta(t)$  n'entraîne pas une variation de  $\lambda(t)$ . Les deux axes sont donc indépendants géométriquement.



Les équations du mouvement des axes 1 et 2 sont nécessaires pour réaliser une synthèse des correcteurs. Dans le cadre de ce sujet, on se limite à la détermination de l'équation du mouvement de l'axe 2 (décrivant l'évolution de la grandeur  $\lambda(t)$ ).

La figure suivante montre le détail du moto-réducteur 2. Pour simplifier, on considère que le câble est enroulé sur un demi-tour du tambour 8'.  $\theta_2$  est l'angle du rotor du moteur par rapport à son stator 2'.



Moto-réducteur (les deux liaisons pivot entre l'arbre intermédiaire ( $i'$ ) d'une part, puis entre l'arbre de sortie du réducteur lié au tambour 8' d'autre part et le solide 2' sont omises)

- Le repère  $\mathcal{R}_0$  est supposé galiléen. La verticale ascendante est  $\vec{y}_0$ .
- La force exercée par le tissu humain sur le corps d'outil 7' est modélisée par le glisseur  $(P', \vec{F}_e)$  avec  $\vec{F}_e = F_x(t)\vec{x}_2' + F_y(t)\vec{y}_2'$ .
- L'effort du corps d'outil 7' sur le câble est modélisé par le glisseur  $(Q', \vec{F})$ ,  $Q'$  étant le point d'attache entre le corps d'outil 7' et le câble avec  $\vec{F} = F(t)\vec{y}_2'$ .
- L'action de la pesanteur sur 7' est négligée devant les efforts mis en jeu.
- $H'$  est le centre d'inertie de 7',  $m_7'$  sa masse et  $\vec{P'H'} = l_0\vec{y}_2'$ .
- L'action du moteur 2 (utilisé pour le mouvement de translation de l'outil correspondant à l'« axe 2 ») est modélisée par un couple pur :  $\vec{C}_{m2} = C_{m2}(t)\vec{x}_2'$ .
- On note  $\vec{C}_{red} = C_{red}\vec{x}_2'$ , le couple moteur ramené à l'arbre de sortie du réducteur 2 solidaire de 8'. Une étude préalable a permis d'obtenir la relation  $C_{red} = \frac{C_{m2}}{k_2}$  ( $k_2$  étant le rapport de transmission du réducteur).
- Les actions mécaniques du câble sur 8' sont modélisées par deux glisseurs en  $I_0$  et  $I_0'$  :  $(I_0, \vec{T}_0)$  et  $(I_0', \vec{T}_0')$  avec  $\vec{T}_0 = \left(T_t + \frac{F(t)}{2}\right)\vec{y}_2'$  et  $\vec{T}_0' = \left(T_t - \frac{F(t)}{2}\right)\vec{y}_2'$  où  $T_t$  représente la valeur algébrique de la pré-tension dans les câbles pour assurer qu'ils soient tendus constamment en cours d'opération, quelle que soit la valeur de  $F(t)$ .
- Le rendement du réducteur est supposé unitaire. Le moment d'inertie du rotor du moteur 2 et des pièces du réducteur 2 sont négligées. La masse des câbles est négligée.

On se propose en premier lieu de déterminer l'expression du couple moteur  $C_{m2}(t)$  en fonction de  $F_y(t)$  et des paramètres du problème tel que

$$C_{m2}(t) = v_1 \left( F_y(t) + m_7' \left( \frac{d^2 \lambda(t)}{dt^2} + v_2 \left( \frac{d\delta(t)}{dt} \right) \right) \right)$$

où  $v_1$  et  $v_2$  sont des termes à expliciter en fonction de  $k_2$ ,  $r_8'$ ,  $l_0$ ,  $h_2$  et  $\lambda$ . Le tableau du document réponse donne en partie la démarche de résolution.

**Question 1** Compléter le tableau du document réponse et justifier, sur la copie, le choix du théorème utilisé (équation)

tion scalaire) associé à chaque isolement, sans faire aucun calcul.

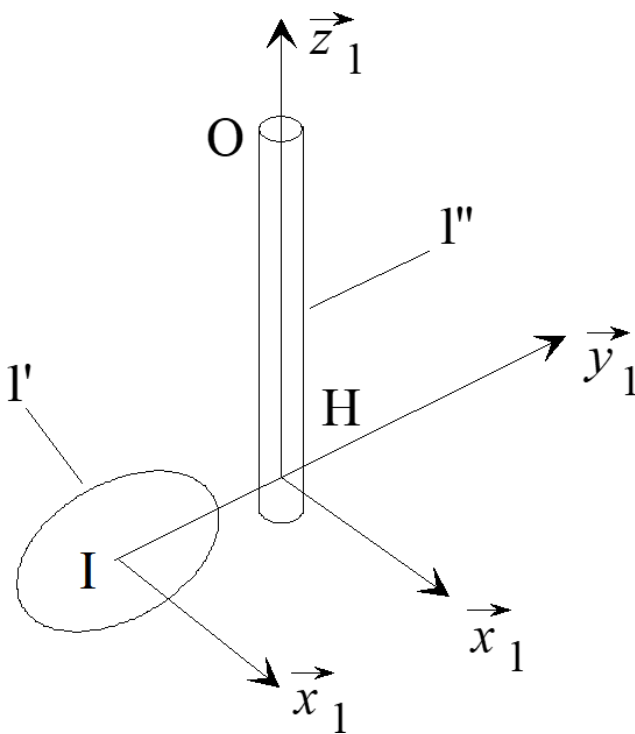
**Question 2** Mettre en œuvre la démarche proposée pour chaque isolement en détaillant les calculs et exprimer littéralement  $v_1$  et  $v_2$  de l'expression de  $C_{m2}(t)$  donnée plus haut.

## Exercice 128 – Matrice d'inertie

On considère que l'atterrisseur est constitué de deux solides en liaison encastrement :

- solide 1' : roue de centre  $I$ , de masse  $m_{1'}$ , assimilée à un fil de section négligeable formant un cercle de rayon  $r_{1'}$  dans le plan  $(I, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  avec  $\vec{z} = \vec{z}_1$  ;
- fourreau 1'' : tube plein homogène cylindrique d'axe  $\vec{HO}$ , de rayon  $r_{1''}$  et de masse  $m_{1''}$  ;

avec  $\vec{IH} = d\vec{y}_1$  et  $\vec{OH} \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}$ .



On note  $I_I(1') = \begin{pmatrix} A_{1'} & -E_{1'} & -E_{1'} \\ -E_{1'} & B_{1'} & -D_{1'} \\ -E_{1'} & -D_{1'} & C_{1'} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$  la

présentation la plus générale de l'opérateur d'inertie de la roue 1'.

**Question 1** En utilisant les propriétés géométriques de la pièce 1', donner une écriture générale simplifiée de  $I_I(1')$ .

**Question 2** Déterminer l'inertie du solide 1', par rapport à l'axe  $(I, \vec{z}_1)$  en fonction de  $m_{1'}$  et  $r_{1'}$ .

**Question 3** En déduire l'inertie du solide 1', par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_1)$  en fonction de  $d$ ,  $m_{1'}$  et  $r_{1'}$ .

**Question 4** Déterminer l'inertie du solide 1'', par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_1)$  en fonction de  $m_{1''}$  et  $r_{1''}$ .

**Question 5** En déduire l'inertie du solide  $1 = 1' \cup 1''$ , par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_1)$ .

$$1. I_I(1') = \begin{pmatrix} A_{1'} & 0 & 0 \\ 0 & C_{1'} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1'} \end{pmatrix}.$$

$$2. C_{1'} = \frac{m_{1'} r_{1'}^2}{2}.$$

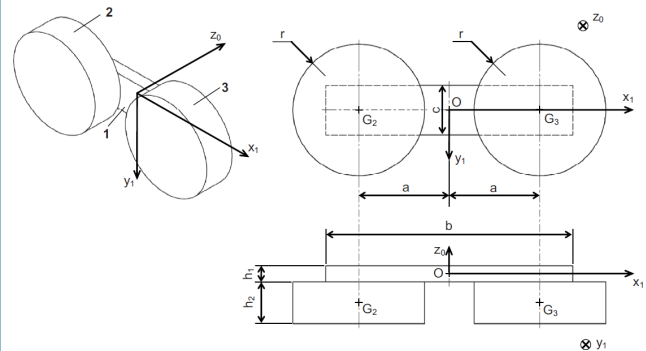
$$3. C_{1'}' = C_{1'} + m_{1'} d^2 = m_{1'} \left( \frac{r_{1'}^2}{2} + d^2 \right).$$

$$4. C_{1''} = \frac{m_{1''} r_{1''}^2}{2}.$$

$$5. J = \frac{m_{1''} r_{1''}^2}{2} + m_{1'} \left( \frac{r_{1'}^2}{2} + d^2 \right).$$

## Exercice 127 – Matrice d'inertie

Les galets 2 et 3 sont de masses identiques  $m_2$  et de centres d'inertie respectifs  $G_2$  et  $G_3$ . Le balancier 1 est de masse  $m_1$  et de centre d'inertie  $O$  (la tige de  $G_3H$  étant de masse négligeable). La géométrie simplifiée, adoptée pour la détermination préalable des caractéristiques d'inertie, est décrite sur la figure suivante. Les solides 1, 2 et 3 sont supposés homogènes.



**Question 1** Donner la forme de la matrice d'inertie du solide 1 au point O dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On justifiera la réponse.

**Question 2** Exprimer littéralement le moment d'inertie  $C_1$  du solide 1 par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  en fonction de la masse  $m_1$  et de ses dimensions.

**Question 3** Donner la forme de la matrice d'inertie du solide 2 au point  $G_2$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ . On justifiera la réponse.

**Question 4** Exprimer littéralement le moment d'inertie  $C_2'$  du solide 2 par rapport à l'axe  $(G_2, \vec{z}_0)$ , en fonction de la masse  $m_2$  et de ses dimensions.

**Question 5** Exprimer littéralement le moment d'inertie  $C_2'$  du solide 2 par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  en fonction de la masse  $m_2$  et de ses dimensions.

$$1. I_O(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}.$$

$$2. C_1 = \frac{m_1}{12} (b^2 + c^2).$$

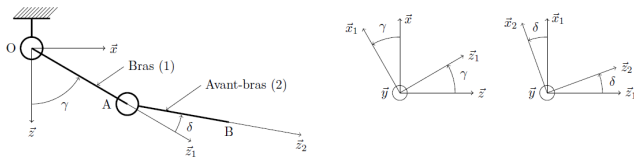
$$3. I_{G_2}(1) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}.$$

$$4. C_2' = m_2 \frac{r^2}{2}.$$

$$5. C_2 = m_2 \left( \frac{r^2}{2} + a^2 \right).$$

## Exercice 126 – Torseurs dynamiques – Or-thèse

Soit le système suivant composé d'un bras et d'un avant-bras.



Bâti		
Repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe, galiléen		
Bras (moteurs compris)		
Repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ Angle $\gamma = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ $\vec{y} = \vec{y}_1$	Longueur $l_1 = 350$ mm Masse $m_1 = 2,3$ kg Centre d'inertie $G_1$ tel que : $\vec{OG}_1 = \lambda_1 \vec{z}_1$ , $\lambda_1 = 50$ mm	Matrice d'inertie $I(G_1, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$ $A_1 = 2,4 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_1 = 2,3 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $D_1 = 2,1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Avant-bras		
Repère $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ Angle $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$	Longueur $l_2 = 270$ mm Masse $m_2 = 0,3$ kg Centre d'inertie $G_2$ tel que : $\vec{AG}_2 = \lambda_2 \vec{z}_2$ , $\lambda_2 = 135$ mm	Matrice d'inertie $I(G_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$ $A_2 = 1,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_2 = 1,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $D_2 = 4,3 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Question 1** Déterminer le torseur cinétique  $\{\mathcal{C}(\text{Bras}/0)\}$  au point O en utilisant deux méthodes différentes.

**Question 2** Déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(C/\text{Bras})\}_0$  au point O en utilisant deux méthodes différentes.

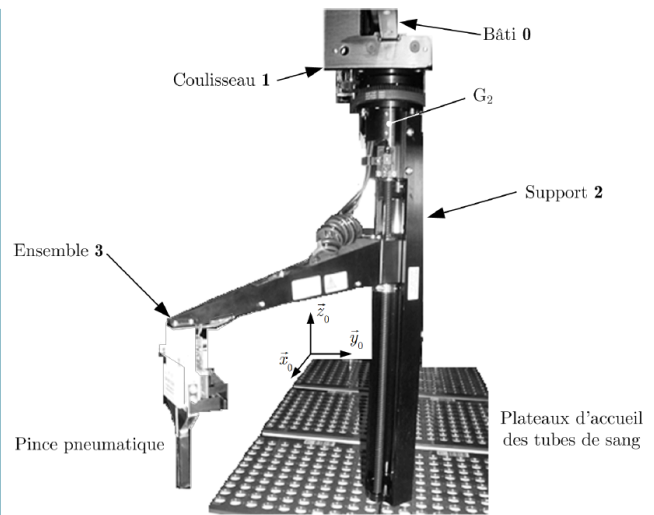
**Question 3** Déterminer le torseur cinétique  $\{\mathcal{C}(\text{Avant-Bras}/0)\}$  au point O en utilisant deux méthodes différentes.

**Question 4** Déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(\text{Avant-Bras}/0)\}$  au point O en utilisant deux méthodes différentes.

**Question 5** Déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(\text{Bras}+\text{Avant-Bras}/0)\}$  au point O en utilisant deux méthodes différentes.

## Exercice 125 – PFD

Le bras implanté sur le système ADVIA WorkCell R, est motorisé selon trois « axes » asservis (appelés « Axe 1 », « Axe 2 » et « Axe 3 » dans la suite) assurant les mouvements de type translation / rotation / translation.



Le bras est constitué de trois solides indéformables : Coulisseau 1, Support 2 et Ensemble bras + pince + tube 3. Les mouvements autorisés entre ces solides sont associés aux trois axes du bras manipulateur et sont paramétrés de la façon suivante.

Mouvements	Axe N° 1	Axe N° 2	Axe N° 3
Pièces considérées	0 et 1	1 et 2	2 et 3
Mouvements	Translation de direction $\vec{x}_0$	Rotation d'axe $(G_2, \vec{z}_0)$	Translation de direction $\vec{z}_0$
Paramètres	$x$	$\theta$	$z$
Amplitudes	$-1 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$	$-\pi/2 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi/2 \text{ rad}$	$0 \leq z \leq 0,3 \text{ m}$

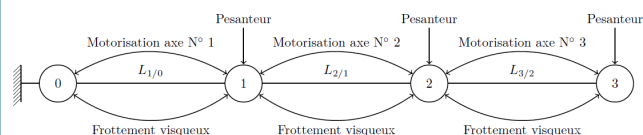
Les amplitudes sont définies depuis la position de référence du bras, dans laquelle il se place après la prise d'origine. Les trois solides ont les caractéristiques suivantes.

Caractéristiques cinétiques	Coulisseau 1	Support 2	Ensemble bras + pince + tube 3
Masses	$m_1$	$m_2$	$m_3$
Centres de gravité $G_i$	$\vec{OG}_1 = x \vec{x}_0$	$\vec{OG}_2 = x \vec{x}_0 + d_1 \vec{z}_0$	$\vec{OG}_3 = x \vec{x}_0 + (d_1 + z) \vec{z}_0 + (d_2 + d) \vec{x}_1$
Moments d'inertie	sans objet	$J_2$ selon l'axe $(G_2, \vec{z}_0)$	$J_3$ selon l'axe $(G_3, \vec{z}_0)$

L'orientation de la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  par rapport à la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est définie par  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ . Valeurs numériques :  $d_1 = 0,2 \text{ m}$ ,  $d_2 + d = 0,35 \text{ m}$ . Pour chacun des trois axes motorisés, une action mécanique et un frottement visqueux équivalents de l'actionneur  $[M_i]$  associé à l'axe  $i$  sont définis au niveau de la liaison correspondante.

Grandeurs équivalentes rapportées à l'axe	Axe N° 1	Axe N° 2	Axe N° 3
Action mécanique de l'actionneur $[M_i]$ sur l'axe	$F_{M1}$ (en N)	$C_{M2}$ (en N · m)	$F_{M3}$ (en N)
Frottement visqueux	$b_1$ (en N · s · m <sup>-1</sup> )	$f_2$ (en N · m · s · rad <sup>-1</sup> )	$b_3$ (en N · s · m <sup>-1</sup> )

Le « graphe des liaisons et des efforts » (encore appelé « graphe d'analyse ») du modèle mécanique du bras est proposé figure suivante.



**Question 1** Proposer une stratégie d'isollements et de calculs à mettre en œuvre pour déterminer les expressions des actions mécaniques  $F_{M1}$ ,  $C_{M2}$  et  $F_{M3}$  (générées par les actionneurs  $[M_i]$  associés aux trois axes) : on indiquera, l'ensemble isolé, le théorème à utiliser (avec éventuellement le point de calcul) et la direction de projection en justifiant clairement le choix de la méthode adoptée.

À partir de la stratégie d'isollements établie, on obtient les deux équations différentielles suivantes pour les expressions des efforts  $F_{M1}$  et  $F_{M3}$  :

- équation (E1) :  $F_{M1} = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + b_1 \dot{x} - m_3(d_2 + d)(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)$ ;
- équation (E3) :  $F_{M3} = m_3 \ddot{z} + b_3 \dot{z} - m_3 g$ .

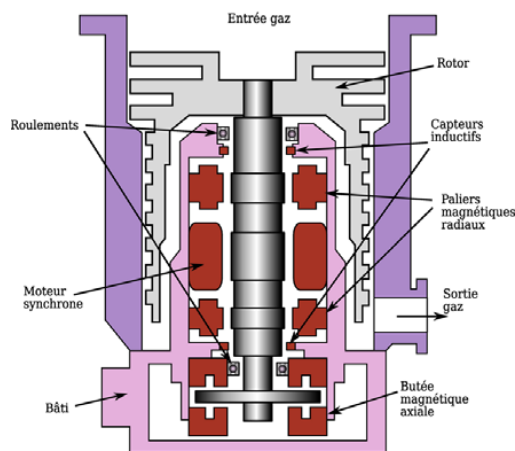
**Question 2** Montrer que l'équation différentielle (E2) reliant le couple  $C_{M2}$ , l'angle  $\theta$ , le déplacement  $x$  et leurs dérivées successives est de la forme  $C_{M2} = A\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + C\ddot{x}$  où les termes  $A$ ,  $B$  et  $C$  seront exprimés en fonction des termes  $m_3$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $d_2$ ,  $d$ ,  $f_2$  et  $\theta$ . Les différentes étapes du calcul seront précisément indiquées.

Les évolutions dynamiques associées au bras motorisé lorsque les trois actionneurs sont commandés simultanément sont donc décrites par les trois équations différentielles obtenues précédemment.

**Question 3** À partir des équations précédentes, justifier que les mouvements de deux des axes sont couplés. Le couplage des mouvements peut créer des accélérations transitoires importantes pouvant induire un risque de débordement du sang du tube saisi par la pince en extrémité du bras à trois degrés de liberté.

## Exercice 124 – Correcteurs

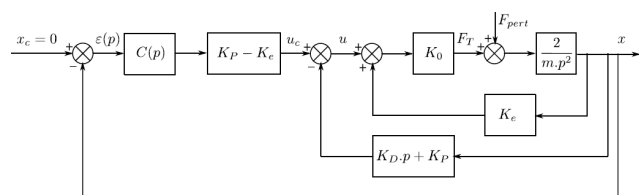
Les paliers magnétiques sont conçus, réalisés et montés par la société S2M. Deux paliers radiaux assurent le guidage radial de l'arbre. Un troisième palier assure le guidage axial. Un moteur électrique, placé entre les deux paliers radiaux, entraîne le rotor en rotation. Le guidage magnétique consiste à exercer des efforts sur l'arbre en générant un champ magnétique. Il n'y a donc aucun contact entre le bâti et l'arbre.



**Objectif** Déterminer la structure et les paramètres du correcteur à utiliser pour satisfaire les performances exigées.

Effort maximal transmissible sur chaque palier		$F = 300 \text{ N}$
Déplacement maximal autorisé		Jeu dans les paliers magnétiques de 0,2 mm
Stabilité de l'asservissement	Marge de phase	$60^\circ$
	Marge de gain	12 dB
Sensibilité aux perturbations	Amortissement	$\xi = 0,4$
	Bande passante à -3 dB	$\omega_{\max}/10$
	Déplacement en régime permanent vis-à-vis d'une perturbation constante	nul

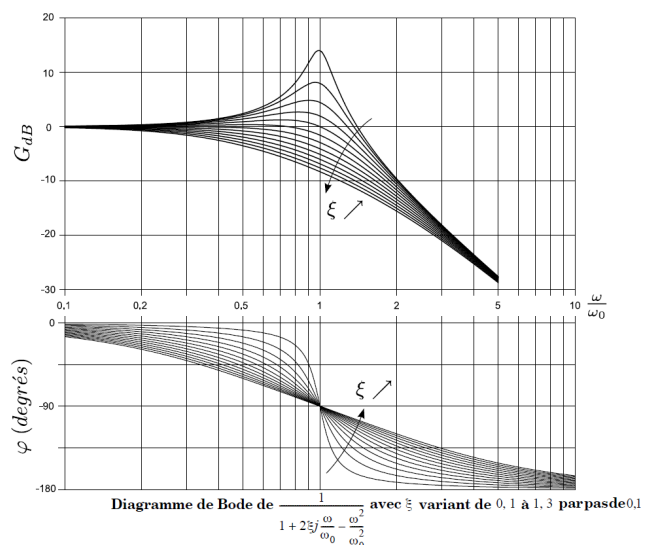
Afin de satisfaire les critères du cahier des charges, on envisage d'asservir un palier magnétique par un premier bouclage de stabilisation (retour  $K_D p + K_P$ ). Un second retour unitaire associé à un correcteur  $C(p)$  assure la régulation en position du palier. On utilisera par la suite les paramètres suivants :  $K_e = 5000 \text{ V m}^{-1}$ ,  $K_0 = 190 \text{ N m}^{-1}$ ,  $m = 10 \text{ kg}$ .



On considère dans un premier temps le système sans correction :  $C(p) = 1$ .

**Question 1** Déterminer la fonction de transfert de la boucle interne  $H_{PMI}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$ , en fonction de  $K_e$ ,  $K_0$ ,  $m$ ,  $K_P$  et  $K_D$ . Préciser les conditions sur  $K_D$  et  $K_P$  pour que  $H_{PMI}(p)$  soit stable en boucle ouverte

**Question 2** En considérant l'ensemble de l'asservissement, déterminer la fonction de transfert  $H_{pert}(p) = \frac{X(p)}{F_{pert}(p)}$ , puis calculer les valeurs de  $K_D$  et  $K_P$  permettant de respecter les spécifications du cahier des charges en terme de bande passante et d'amortissement (vous pourrez utiliser pour cette question l'abaque suivant).



**Question 3** Tracer l'allure des diagrammes de Bode asymptotique et réel de la fonction de transfert de la boucle interne  $H_{PMI}(p)$  et préciser la pulsation de coupure ainsi



que les marges de gain et de phase. Valider les critères de stabilité du cahier des charges.

Le palier est soumis à un effort bref mais violent, qui peut être modélisé par une perturbation d'effort en échelon d'amplitude  $F_G$ .

**Question 4** Conclure quant au critère de sensibilité vis-à-vis des perturbations.

Afin d'améliorer les performances du système, on utilise un correcteur de fonction de transfert :  $C(p) = K_i \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

**Question 5** Quelle performance est directement améliorée par ce correcteur ? (justifier votre réponse sans calcul).

**Question 6** Tracer l'allure du diagramme de Bode du correcteur en précisant les valeurs caractéristiques. Expliquer comment choisir  $K_i$  et  $T_i$  afin de conserver des marges de gain, de phase, et une pulsation de coupure proches de celles obtenues sans correction ( $C(p) = 1$ ). Proposer des

valeurs numériques.

On admet que le correcteur influe peu sur le temps de réponse et les dépassements lorsque les marges de stabilité et la pulsation de coupure sont conservées. On garde par conséquent les valeurs de  $K_P$  et  $K_D$  obtenues précédemment.

Conclusion : nous avons donc désormais dimensionné les deux boucles d'asservissement successives permettant d'obtenir les performances attendues du palier magnétique.

On recherche un modèle simple de l'effort du palier magnétique actif en fonction du déplacement de l'arbre, dans une gamme de vitesses de rotation raisonnables variant de 10 000 tr min<sup>-1</sup> à 30 000 tr min<sup>-1</sup>.

**Question 7** Déterminer la fonction de transfert  $K(p)$  telle que  $F_T(p) = K(p)X(p)$ . À partir de simplifications justifiées, montrer que dans la plage de fréquences considérée, l'effort  $F_T(t)$  peut s'écrire sous la forme d'un modèle ressort amortisseur  $F_T(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t)$  où vous préciserez les valeurs numériques de  $k$  et  $c$ . Comment évolue le modèle lorsque  $\omega$  augmente au delà de cette plage de fréquences ?