

## Exercice 189 – TEC – Clever

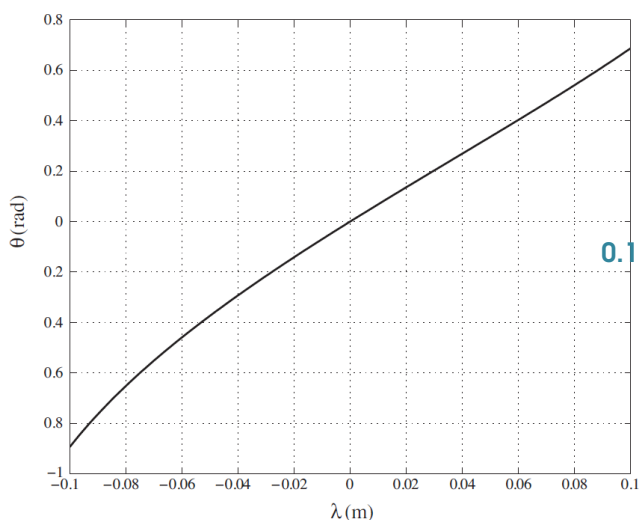
On cherche à déterminer la masse équivalente  $M_{eq}$  ramenée à la tige du vérin, de l'ensemble habitacle et mécanisme de transformation de mouvement actionnés par le vérin. Pour cela, on adopte les hypothèses suivantes :

- le référentiel associé au châssis 0 du véhicule Clever est supposé galiléen (ceci revient à supposer le châssis fixe par rapport au référentiel lié à la route durant la phase d'inclinaison);
- la puissance dissipée engendrée par l'inclinaison de l'habitacle au niveau du contact roue/sol est négligée;
- les liaisons sont supposées parfaites.

Le modèle cinématique adopté est précisé par le schéma cinématique de la 2, ainsi que les données géométriques et les paramètres de mouvement. On note  $m$  la masse de l'habitacle et  $J_1 = 175 \text{ kgm}^2$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O, \vec{y}_0)$ . Les caractéristiques utiles des vérins sont données en annexe.

**Question 1** Exprimer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides  $\{1, 4, 5\}$  en fonction des paramètres cinématiques  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\lambda}$ .

Pour simplifier la suite de l'étude, on se place autour de la position non-inclinée de l'habitacle. On définit alors le paramètre angulaire  $\theta$  tel que  $\theta = \theta_1 - \theta_{10}$ . La figure du Cahier Réponses donne l'évolution du paramètre  $\theta$  en fonction de  $\lambda$ . On cherche à linéariser cette fonction sous la forme  $\theta = T\lambda$ .



**Question 2** Déterminer une valeur numérique approximative de  $T$ .

Les valeurs numériques de  $R$  et  $T$  étant proches on prendra pour la suite du sujet :  $R = T = 7,5 \text{ rad m}^{-1}$ .

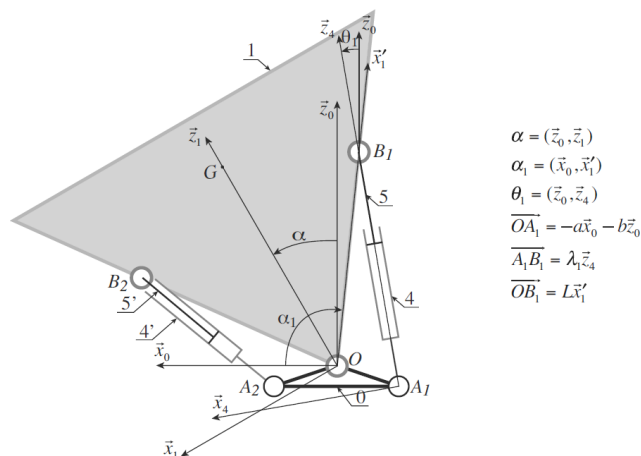


FIGURE 1 – Schéma cinématique du modèle mécanique adopté

**Question 3** Exprimer la masse équivalente  $M_{eq}$  ramenée à la tige du vérin en fonction des caractéristiques cinétiques des pièces et des paramètres géométriques en précisant clairement la méthode utilisée pour définir cette grandeur. À partir des données de l'Annexe A, montrer que les termes d'inertie liés aux 2 vérins sont faibles par rapport à celui associé à l'habitacle.

**Question 4** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $\{1, 4, 5\}$  en négligeant les termes dus aux puissances des poids de 4 et 5. Écrire le résultat sous la forme :  $F_v + k_g \lambda = M_{eq} \ddot{\lambda}$  en donnant l'expression du paramètre  $k_g$ . Appliquer la transformation de Laplace à l'équation précédente et compléter le schéma-blocs du Cahier Réponses dans lequel la variable  $V(p)$  correspond à  $\mathcal{L}(\lambda(t))$ .

## Exercice 189 – TEC – Clever INFOS MAN-QUANTES

### Première correction

Afin de répondre au critère du cahier des charges concernant la précision statique du système, on choisit de placer un intégrateur comme premier correcteur :

$$H_r(p) = \frac{K_i}{p}.$$

**Question 1** On donne sur le Cahier Réponses le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $FTBO_2(p)$  du système asservi pour  $K_i = 1$  et telle que  $M(p) = FTBO_2(p) \cdot \varepsilon(p)$ . Déterminer, en expliquant clairement la méthode employée, la valeur de  $K_i$  qui permet d'obtenir la dynamique souhaitée.

On donne en annexe page 8 la définition d'un correcteur à avance de phase.

**Question 2** Combien de correcteurs à avance de phase réglés pour apporter chacun  $50^\circ$  au maximum faudrait-il incorporer dans le régulateur pour satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges ?

On souhaite réaliser une simulation du comportement temporel du système ainsi corrigé pour un passage de  $0$  à  $45^\circ$  de l'habitacle en  $0,75$  s. Le signal de consigne est donné sur la Figure Figure 2. Le logiciel de simulation ne possède pas de bloc de signal d'entrée correspondant à ce type de fonction, mais il est possible d'utiliser des blocs de type « rampe » possédant les critères :

- pente de la rampe ;
- instant de départ de la rampe.

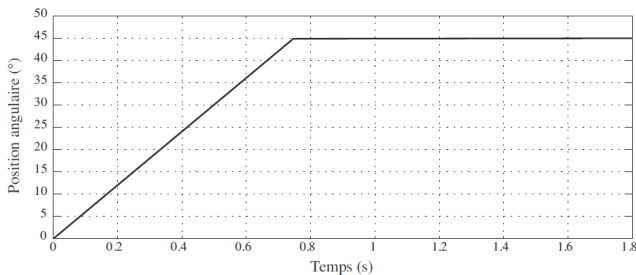


FIGURE 2 – Signal de consigne pour une simulation d'une rotation de  $0$  à  $45^\circ$  en  $0,75$  s

**Question 3** Donner les paramètres à entrer dans les 2 blocs de type « rampes » et préciser l'opération mathématique à effectuer entre les deux blocs afin d'obtenir le signal présenté sur la Figure 2.

La réponse obtenue par la simulation est présentée sur la Figure 3.

**Question 4** Quels sont les critères non satisfaits ?

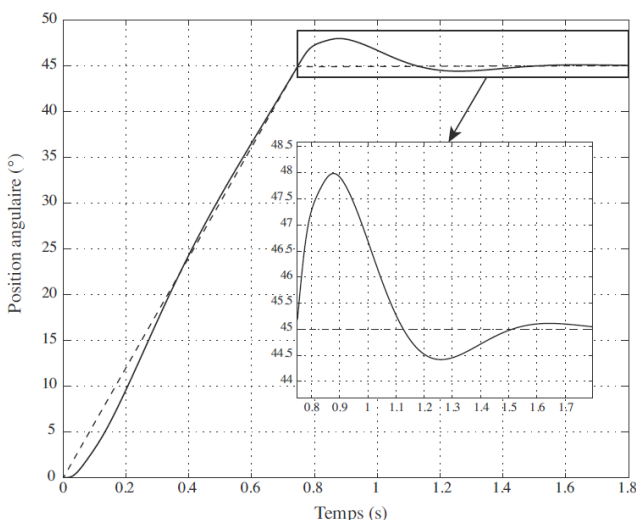


FIGURE 3 – Résultat de la simulation du passage de  $0$  à  $45^\circ$  en  $0,75$  s

## 0.2 Deuxième correction

Plusieurs réglages du correcteur précédent ont été réalisés mais aucun n'a pu apporter satisfaction quant aux

différents critères du cahier des charges. Le problème de fond ici est lié au fait que la pulsation de coupure  $\omega_v$  du mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin est inférieure à la pulsation à  $0$  dB souhaitée pour garantir une dynamique suffisante du système bouclé. On souhaite donc augmenter la valeur de la pulsation de coupure  $\omega_v$  afin de garantir au moins deux décades d'écart avec la pulsation à  $0$  dB de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

**Question 5** Quelle valeur de diamètre du vérin permet de vérifier la condition précédente. Cette valeur est-elle réaliste ?

On décide alors de remédier à ce problème par un filtre électronique du second ordre de type Notch de fonction de transfert :

$$H_N(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_n}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}{1 + \frac{2\xi_d}{\omega_d}p + \frac{p^2}{\omega_d^2}}$$

Le réglage optimum du correcteur doit compenser parfaitement le mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin. Pour cela, on effectue un essai afin d'identifier les caractéristiques de ce mode. Aucun réglage spécifique du débit de fuite n'a été réalisé, la compensation du mode rendant inutile cette étape.

Une tension de consigne  $u_e(t) = 0,02u(t)$  (avec  $u(t)$  l'échelon unitaire) est envoyée en entrée du servodistributeur. Une génératrice tachymétrique, dont le comportement est modélisé par un gain pur  $K_{gt} = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$ , mesure la vitesse de rotation de l'habitacle. Cette tension est notée  $m_\omega(t)$ . Le résultat de cet essai est donné sur la Figure de la question 24 du Cahier Réponses.

**Question 6** Compléter sur le Cahier Réponses le schéma-blocs représentant cet essai et déterminer la fonction de transfert  $H_{\text{essai}}$  telle que :  $M_\Omega(p) = H_{\text{essai}}(p)U_e(p)$ .

**Question 7** En vous aidant du graphe de la Figure Figure 4, déterminer les valeurs numériques expérimentales de  $\omega_v$  et  $\xi_v$  à partir de la courbe obtenue expérimentalement tracée sur le Cahier Réponses.

**Question 8** Quels inconvénients sur le comportement réel du système peuvent découler de cette méthode consistant à vouloir compenser le mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin par ce type de filtre électronique ?

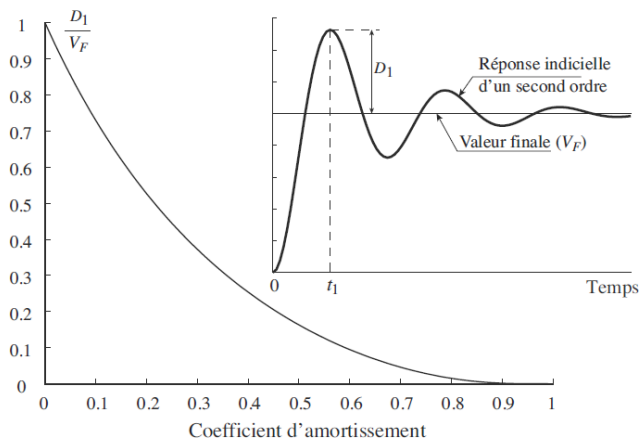


FIGURE 4 – Évolution du premier dépassement relatif à la valeur finale en fonction du coefficient d'amortissement (pour une fonction de transfert du second ordre)

On suppose par la suite que le numérateur du filtre Notch compense parfaitement le mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin. On adopte les caractéristiques suivantes pour le dénominateur :

- $\omega_d = 1000 \text{ rad s}^{-1}$  ;
- $\xi_d = 1$ .

Afin de satisfaire le critère de précision statique du cahier des charges on place un premier correcteur de type intégrateur non unitaire de fonction de transfert :

$$H_{\text{cor2}}(p) = \frac{K_\Omega}{p}.$$

La valeur de  $K_\Omega$  est déterminée afin d'obtenir une pulsation à 0 dB de la fonction de transfert en boucle ouverte de  $65 \text{ rad s}^{-1}$ . Le diagramme de Bode de cette fonction de transfert est donné sur la Figure III.5. On complète le régulateur par un correcteur à avance de phase de fonction de transfert :  $H_{\text{av}}(p) = K_{\text{av}} \frac{1 + a_{\text{av}} \tau_{\text{av}} p}{1 + \tau_{\text{av}} p}$  avec  $a_{\text{av}} > 1$ .

On donne en annexe page 8 la définition d'un correcteur à avance de phase.

**Question 9** Déterminer les valeurs approximatives des paramètres  $a_{\text{av}}$ ,  $\tau_{\text{av}}$  et  $K_{\text{av}}$  qui permettent de satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges tout en conservant une pulsation à 0 dB de  $65 \text{ rad s}^{-1}$ .

Le régulateur étant a priori optimisé, on réalise un essai de validation du comportement temporel de l'inclinaison de l'habitacle, le véhicule étant à l'arrêt. Le calculateur envoie un signal de consigne représentant l'évolution de la position angulaire souhaitée (de 0 à 45° en 0,75 s). La tension délivrée par le capteur angulaire est récupérée par un convertisseur analogique-numérique afin de tracer sur un ordinateur l'évolution temporelle de l'inclinaison de l'habitacle mesurée en degrés. Les deux courbes sont données sur la Figure 6.

**Question 10** Quels sont les critères du cahier des charges validés ?

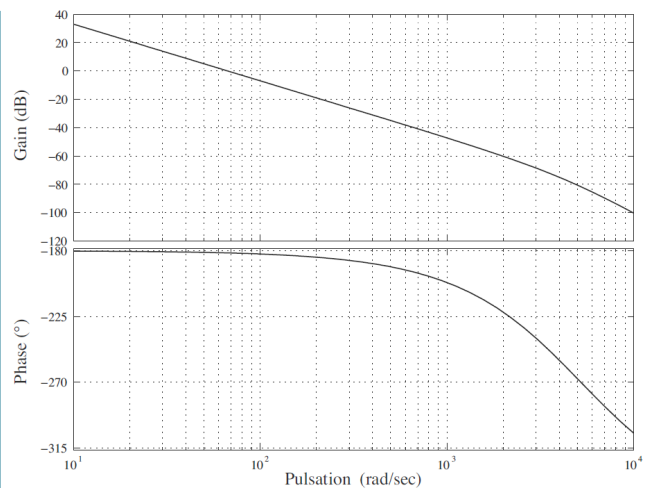


FIGURE 5 – Diagramme de Bode de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte après correction Intégrale

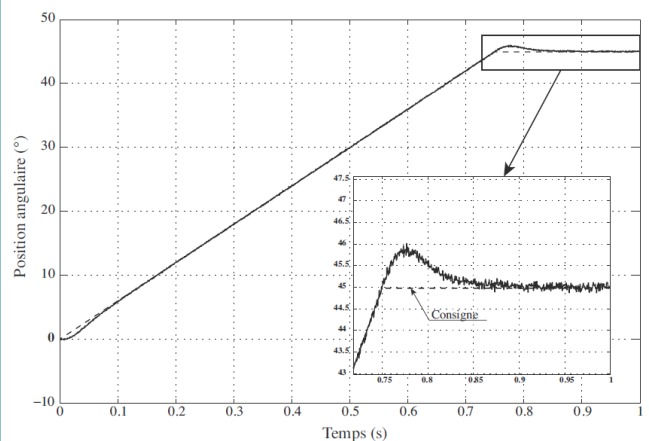
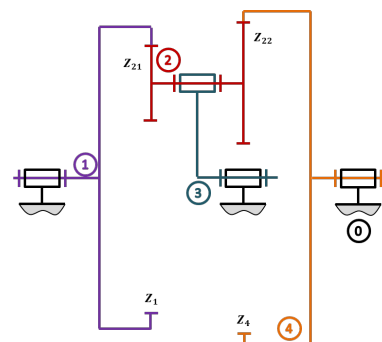


FIGURE 6 – Essai de validation : passage de 0 à 45° en 0,75 s

## Exercice 1 ?? – Train épicycloïdal

Soit le train épicycloïdal suivant.

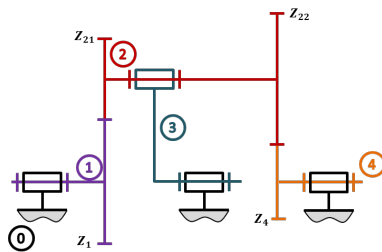


**Question 1** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

**Question 2** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

## Exercice 1 ?? – Train épicycloïdal

Soit le train épicycloïdal suivant.



**Question 1** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

**Question 2** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

## Exercice 189 – Schéma-Blocs et FT

On considère l'asservissement angulaire d'un axe numérique. On note  $\Delta\theta_1$  la grandeur asservie.

### Hypothèses, notations et paramétrage

- Les conditions initiales sont nulles.
- L'équation du mouvement de l'axe est donnée par :  $\Delta C_1(t) = J \frac{d^2 \Delta\theta_1(t)}{dt^2} - k_1 \frac{r'_9}{r_0} h_2 \Delta F_x(t)$  avec  $J = 1,98 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$ ,  $k_1 \frac{r'_9}{r_0} = 0,00717$ ,  $h_2 = 0,2 \text{ m}$ .
- Le couple moteur  $\Delta C_1(t)$  est fourni par une machine à courant continu modélisée par les équations suivantes :  $u_1(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + R i_1(t) + e_1(t)$ ,  $e_1(t) = k_e \frac{d\Delta\theta_1(t)}{dt}$ ,  $\Delta C_1(t) = k_t i_1(t)$  avec  $u_1(t)$  la tension aux bornes du moteur,  $i_1(t)$  l'intensité traversant le moteur et  $e_1(t)$  la force contre électromotrice, avec  $R = 2,07 \Omega$ ,  $k_t = 0,0525 \text{ N mA}^{-1}$ ,  $k_e = 0,0525 \text{ V s rad}^{-1}$ .
- On fait l'hypothèse que l'influence de l'inductance  $L$  est négligeable sur les performances attendues, soit  $L = 0 \text{ H}$ .
- La consigne est notée  $\Delta\theta_{c1}(t)$ .

Le cahier des charges sélectif conduit à choisir un correcteur associant une anticipation (via la présence de  $\sigma_4$  dans la relation suivante) et une correction PID. La tension de commande du moteur est donnée par :  $U_1(p) = (\Delta\theta_{c1}(p) - \Delta\theta_1(p)) \left( \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{p} \right) - \sigma_3 p \Delta\theta_1(p) + \sigma_4 \Delta\theta_{c1}(p)$  avec  $\Delta\theta_{c1}(p)$  la consigne de position angulaire exprimée dans le domaine symbolique.

**Question 1** Compléter le schéma bloc du document réponse (forme littérale des fonctions de transfert).

Pour la suite, on considère la perturbation nulle ( $\Delta F_x(p) = 0$ ).

**Question 2** À partir de ce schéma-blocs, en notant  $H_{processus}(p) = \frac{\Delta\theta_1(p)}{U_1(p)} = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$ , exprimer  $K$  et  $\tau$  en fonction des données de l'énoncé, puis les calculer numériquement.

**Question 3** Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée, sous forme canonique, notée  $B_F(p) = \frac{\Delta\theta_1(p)}{\Delta\theta_{c1}(p)}$  en fonction de  $K$ ,  $\tau$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  et  $\sigma_4$ .

$$\text{On pose } B'_F(p) = \frac{p - z_0}{(p - p_2)(p - p_1)}.$$

**Question 4** Déterminer  $K'$  tel que  $B_F(p) = K' B'_F(p)$ ,  $K'$  étant un gain constant.

**Question 5** Exprimer les paramètres  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  de la relation du PID en fonction de  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $K$  et  $\tau$ .

Pour information, en poursuivant le calcul, on trouve  $\sigma_4 = \frac{\tau}{K} \left( \frac{p_1^2 p_2}{z_0} - (p_1^2 + 2p_1 p_2) \right)$ .

Le réglage des paramètres du correcteur se fait en fixant judicieusement les pôles et le zéro de  $F(p)$  :

- $p_1$  est choisi pour correspondre au mode d'un système du second ordre. En notant  $z$  le coefficient d'amortissement et  $\omega_0$  la pulsation propre, l'expression retenue pour  $p_1$  est  $p_1 = -z\omega_0$ ;
- $p_2$  est une constante choisie négative. Il sera admis sans justification que  $p_2 = -10$ ;
- $z_0$  est choisi de manière à compenser le pôle  $p_2$ .

Afin d'assurer le non dépassement de la réponse indicielle, tout en assurant un temps de réponse le plus faible possible, on choisit de prendre  $z = 1$  et  $t_{r5\%} = 35 \text{ ms}$ , ce qui implique la relation  $\omega_0 t_{r5\%} = 5$ .

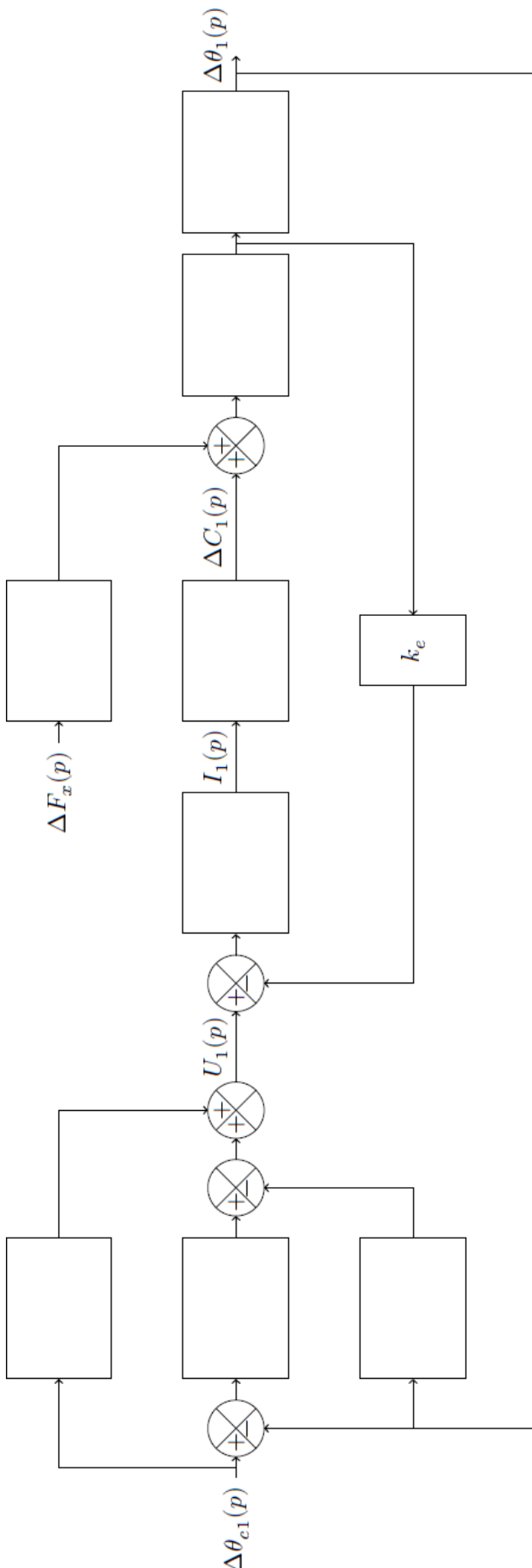
**Question 6** Donner les valeurs numériques de  $p_1$  et de  $z_0$ . En déduire les valeurs numériques des paramètres  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  de la loi de commande.

**Question 7** Le système est-il stable avec le réglage précédent? Justifier sans calcul.

Pour information, on a  $\sigma_4 = -2,23 \text{ V rad}^{-1}$ .

**Question 8** Vérifier, en justifiant la réponse et sans calcul, si les exigences 1.2.2.1, 1.2.2.2 et 1.1.1 sont respectées :

- 1.2.2.1 : l'écart statique en réponse à un échelon doit être nul;
- 1.2.2.2 : aucun dépassement;
- 1.1.1 : l'écart en régime permanent dû à une perturbation en échelon doit être nul.



### Exercice 189 – SLCI – Numérique

**Objectif** Compléter la loi de commande afin de limiter la sensibilité du système aux bruits de mesure.

Le moteur retenu possède les caractéristiques suivantes : tension nominale de 42 V, couple maximal en fonctionnement de 113 mN m. De plus, lorsque la vitesse de rotation de l'arbre moteur est nulle, pour des raisons techniques, la valeur absolue du couple moteur ne doit pas excéder 10 % du couple maximal, soit 11,3 mN m en réponse aux sollicitations dues aux bruits de mesure. Le dimensionnement de la loi de commande effectué à la partie précédente ne prend pas en compte tous les phénomènes indésirables susceptibles de dégrader les performances du système étudié. L'un d'entre eux est le bruit de mesure du capteur de position angulaire des axes moteurs. Le signal brut issu du capteur est de nature analogique. Pour qu'il soit exploitable par le calculateur, ce signal est numérisé. On obtient alors une image de la position sous la forme d'un ensemble de points. On note  $T_e$  la période d'échantillonnage. On note  $f_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  la valeur d'une fonction continue  $f(t)$  prise au  $k^{\text{e}}$  échantillonnage, c'est-à-dire que  $f_k = f(k T_e)$ . En sortie du convertisseur analogique/numérique, seules les valeurs  $f_k$  pour  $k$  entier sont disponibles. Pour l'axe 1,  $\Delta\theta_1(t)$  est l'angle en sortie du moteur et  $s_k$  est la grandeur numérisée de la position angulaire mesurée. L'imperfection de la chaîne de mesure implique la présence d'une composante aléatoire sur chaque valeur de  $s_k$  image de l'angle  $\delta\theta_1(t)$ , en plus de la composante non aléatoire. Chaque valeur  $s_k$  peut donc se décomposer sous la forme d'une somme d'une composante non aléatoire notée  $s_k^b$ , de variance  $\text{var}(s_k^b)$  identique pour tout  $k$ . De plus,  $s_{k-1}^b$  sont des variables aléatoires indépendantes.

La loi de commande (II.2) est, en pratique, réalisée numériquement. Sa discrétisation conduit à la forme suivante :

$$u_{1k} = \sigma_1 \cdot (s_{ck} - s_k) + \sigma_2 \cdot h(s_{ck} - s_k) - \sigma_3 g(s_k) + \sigma_4 s_{ck}.$$

avec

- $s_{ck}$  la valeur au  $k^{\text{e}}$  instant de l'image de la consigne;
- $h(s_{ck} - s_k)$  une fonction permettant d'approcher l'intégrale d'une grandeur numérique;
- $g(s_{ck})$  une fonction permettant d'approcher la dérivée d'une grandeur numérique;
- $u_{1k}$  la tension de commande du moteur prise au  $k^{\text{e}}$  instant.

Le schéma fonctionnel pour la prise en compte des bruits de mesure est donné figure 10. Pour simplifier, la perturbation due à la réaction du tissu humain sur l'outil n'est pas prise en compte. On suppose que le CNA (Convertisseur Numérique Analogique) n'a pas d'influence sur l'étude menée.

### Modèle utilisé pour la simulation

Ainsi, une simulation a été réalisée pour une consigne en échelon de position nulle ( $\forall k \in \mathbb{N}, s_{ck} = 0$ ) pour visualiser l'impact du bruit de mesure de l'axe 1. De plus, chaque terme  $s_k^b$  est modélisé par une variable aléatoire



suivant une loi normale de moyenne nulle et d'écart type  $3,3 \times 10^{-4}$  rad, soit une variance de  $1,1 \times 10^{-7}$  rad<sup>2</sup>. La période d'échantillonnage est  $T_e = 100 \mu\text{s}$ .

Résultats de la simulation, impact du bruit de mesure

**Question 1** En justifiant, expliquer pourquoi il est nécessaire de filtrer le bruit de mesure en observant les courbes de tension de commande, puis du couple moteur.

**Question 2** En observant la courbe représentative de  $\Delta\theta_1(t)$  de la figure 11, justifier pourquoi les imperfections de la chaîne de mesure n'influencent pas la position angulaire  $\Delta\theta_1(t)$ .

**Question 3** En utilisant les équations du moteur (II.1) et en se plaçant à un point de fonctionnement stabilisé, c'est-à-dire à vitesse nulle, déterminer la valeur numérique maximale (en valeur absolue) de la tension à ne pas dépasser pour que le couple n'excède pas 11,3 mN m en valeur absolue.

Afin de limiter les effets néfastes du bruit de mesure sur le système, un filtre numérique est intégré dans la chaîne de mesure, cf figure 12.

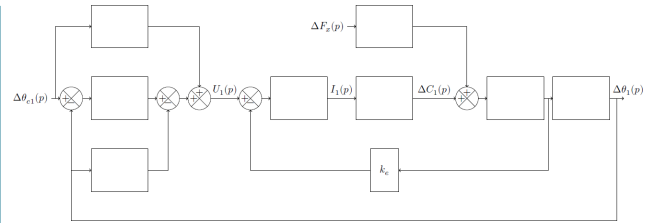
#### Intégration du filtre numérique

On note  $s_k^f$  la valeur filtrée au  $k$  instant. L'objectif de l'étude qui suit est de limiter la variation de tension engendrée par le bruit de mesure en dimensionnant le filtre. Seul l'impact du bruit est étudié, donc on considère la consigne de position nulle, et au vu des résultats de simulation, on fera dans ce cas l'hypothèse que  $\Delta\theta_1(t) = 0$  rad, ce qui implique  $\forall k \in \mathbb{N}, s_k^a = 0$ . La question précédente a permis de déterminer une valeur absolue maximale de la tension à ne pas dépasser. On admettra que ce résultat impose alors une variance maximale de  $0,02 \text{ V}^2$  pour  $u_{1k}$ . Le filtre numérique retenu est l'équivalent d'un filtre passe-bas analogique du premier ordre, de constante de temps  $T_f$  et de gain statique unitaire.

**Question 4** Dans le cas d'une réalisation analogique du filtre, donner la relation entre  $s^f(t)$ ,  $s(t)$  et  $T_f$ , sous la forme d'une équation différentielle. En déduire l'expression de  $s_k^f$  en fonction de  $s_k$ ,  $s_{k-1}^f$ ,  $T_f$  et  $T_e$  dans le cas d'une réalisation numérique. On retiendra la formule suivante pour la dérivée discrète correspondant à la dérivée continue d'une fonction temporelle  $f(t)$  à l'instant  $t = kT_e$  :  $\frac{f_k - f_{k-1}}{T_e}$  où  $T_e$  est la période d'échantillonnage.

On rappelle que si  $x$  et  $y$  sont des variables aléatoires de variance  $\text{var}(x)$  et  $\text{var}(y)$  respectivement,  $a$  et  $b$  des nombres réels, alors on a :  $\text{var}(ax + b) = a^2 \text{var}(x)$   $\text{var}(x + y) = \text{var}(x) + \text{var}(y) + 2\text{cov}(x, y)$ .

Si les deux variables aléatoires sont indépendantes, alors  $\text{cov}(x, y) = 0$ . L'estimation de la variance du signal filtré, notée  $\text{var}(s_k^f)$ , est nécessaire pour dimensionner le filtre. Plusieurs centaines de simulations ont montré que l'évolution de  $\text{var}(s_k^f)$  en fonction de  $k$  reste similaire à celle montrée à la figure 13. Pour un nombre d'échantillons suffisamment important, la variance devient constante et sa valeur dépend de  $T_f$ .



**Question 5** Quelle approximation peut-on faire concernant  $\text{var}(s_k^f)$  et  $\text{var}(s_{k-1}^f)$ ? Justifier la réponse.

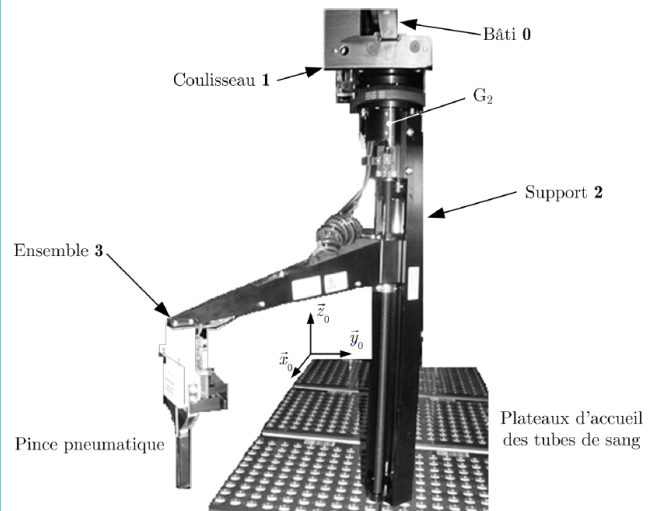
**Question 6** Exprimer alors  $\text{var}(s_k^f)$  en fonction de  $\text{var}(s_k)$ ,  $T_f$  et  $T_e$ .

On admettra que la relation entre  $\text{var}(s_k^f)$  et  $\text{var}(u_{1k})$  en utilisant la loi de commande avec les paramètres du correcteur dimensionné dans la partie précédente est, pour tout  $k$ ,  $\text{var}(u_{1k}) = n_0 \text{var}(s_k^f)$  avec  $n_0 = 6337147$ .

**Question 7** Donner l'expression littérale de  $T_f$ , puis calculer sa valeur en secondes qui permet d'assurer une variance du signal de commande  $\text{var}(u_{1k}) \leq 0,02 \text{ V}^2$ . On rappelle les valeurs suivantes :  $\text{var}(s_k) = 1,1 \times 10^{-7} \text{ rad}^2$ ,  $T_e = 1 \times 10^{-4} \text{ s}$ .

#### Exercice 189 – PFD

Le bras implanté sur le système ADVIA WorkCell R, est motorisé selon trois « axes » asservis (appelés « Axe 1 », « Axe 2 » et « Axe 3 » dans la suite) assurant les mouvements de type translation / rotation / translation.



Le bras est constitué de trois solides indéformables : Coulisseau 1, Support 2 et Ensemble bras + pince + tube 3. Les mouvements autorisés entre ces solides sont associés aux trois axes du bras manipulateur et sont paramétrés de la façon suivante.

Mouvements	Axe N° 1	Axe N° 2	Axe N° 3
Pièces considérées	0 et 1	1 et 2	2 et 3
Mouvements	Translation de direction $\vec{x}_0$	Rotation d'axe $(G_2, \vec{z}_0)$	Translation de direction $\vec{z}_0$
Paramètres	$x$	$\theta$	$z$
Amplitudes	$-1 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$	$-\pi/2 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi/2 \text{ rad}$	$0 \leq z \leq 0,3 \text{ m}$

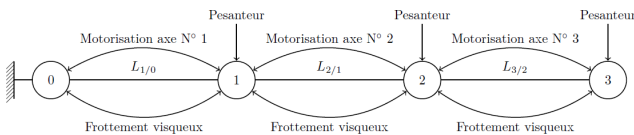
Les amplitudes sont définies depuis la position de référence du bras, dans laquelle il se place après la prise d'origine. Les trois solides ont les caractéristiques suivantes.

Caractéristiques cinétiques	Coulisseau 1	Support 2	Ensemble bras + pince + tube 3
Masses	$m_1$	$m_2$	$m_3$
Centres de gravité $G_i$	$\vec{OG}_1 = x \vec{x}_0$	$\vec{OG}_2 = x \vec{x}_0 + d_1 \vec{z}_0$	$\vec{OG}_3 = x \vec{x}_0 + (d_1 + z) \vec{z}_0 + (d_2 + d) \vec{x}_1$
Moments d'inertie	sans objet	$J_2$ selon l'axe $(G_2, \vec{z}_0)$	$J_3$ selon l'axe $(G_3, \vec{z}_0)$

L'orientation de la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  par rapport à la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est définie par  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ . Valeurs numériques :  $d_1 = 0,2\text{m}$ ,  $d_2 + d = 0,35\text{m}$ . Pour chacun des trois axes motorisés, une action mécanique et un frottement visqueux équivalents de l'actionneur  $[M_i]$  associé à l'axe  $i$  sont définis au niveau de la liaison correspondante.

Grandeurs équivalentes rapportées à l'axe	Axe N° 1	Axe N° 2	Axe N° 3
Action mécanique de l'actionneur $[M_i]$ sur l'axe	$F_{M1}$ (en N)	$C_{M2}$ (en N · m)	$F_{M3}$ (en N)
Frottement visqueux	$b_1$ (en N · s · m <sup>-1</sup> )	$f_2$ (en N · m · s · rad <sup>-1</sup> )	$b_3$ (en N · s · m <sup>-1</sup> )

Le « graphe des liaisons et des efforts » (encore appelé « graphe d'analyse ») du modèle mécanique du bras est proposé figure suivante.



**Question 1** Proposer une stratégie d'isollements et de calculs à mettre en œuvre pour déterminer les expressions des actions mécaniques  $F_{M1}$ ,  $C_{M2}$  et  $F_{M3}$  (générées par les actionneurs  $[M_i]$  associés aux trois axes) : on indiquera, l'ensemble isolé, le théorème à utiliser (avec éventuellement le point de calcul) et la direction de projection en justifiant clairement le choix de la méthode adoptée.

À partir de la stratégie d'isollements établie, on obtient les deux équations différentielles suivantes pour les expressions des efforts  $F_{M1}$  et  $F_{M3}$  :

- équation (E1) :  $F_{M1} = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + b_1 \dot{x} - m_3(d_2 + d)(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)$  ;
- équation (E3) :  $F_{M3} = m_3 \ddot{z} + b_3 \dot{z} - m_3 g$ .

**Question 2** Montrer que l'équation différentielle (E2) reliant le couple  $C_{M2}$ , l'angle  $\theta$ , le déplacement  $x$  et leurs dérivées successives est de la forme  $C_{M2} = A\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + C\ddot{x}$  où les termes  $A$ ,  $B$  et  $C$  seront exprimés en fonction des termes  $m_3$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $d_2$ ,  $d$ ,  $f_2$  et  $\theta$ . Les différentes étapes du calcul seront précisément indiquées.

Les évolutions dynamiques associées au bras motorisé lorsque les trois actionneurs sont commandés simultanément sont donc décrites par les trois équations différentielles obtenues précédemment.

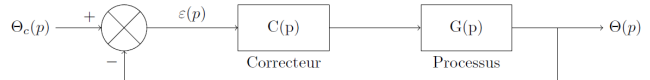
**Question 3** À partir des équations précédentes, justifier que les mouvements de deux des axes sont couplés. Le couplage des mouvements peut créer des accélérations transitoires importantes pouvant induire un risque de débordement du sang du tube saisi par la pince en extrémité du bras à trois degrés de liberté.

## Exercice 189 – Correcteur proportionnel

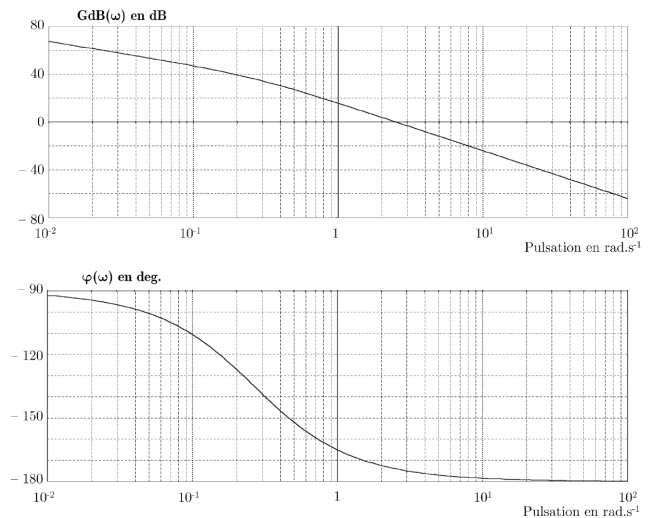
**Objectif** Cette étude a pour objectif de synthétiser les paramètres des correcteurs à implanter afin d'éviter le renversement d'un tube lors de sa mise en place dans le plateau. Dans cette partie, seule la synthèse du correcteur dédié à la commande de l'actionneur  $[M_2]$  associé à l'axe 2 est abordée.

Axe N° 2 (rotation du support 2 par rapport au coulisseau 1)	
Débattement angulaire assuré par l'actionneur $[M_2]$	$90^\circ$
Vitesse maximale de rotation	$40^\circ \cdot \text{s}^{-1}$
Stabilité de l'axe	$M\varphi > 45^\circ$
Amortissement de l'axe	Dépassements transitoires $< 10\%$
Précision de positionnement de l'axe	Écart inférieur à $1^\circ$ en régime stationnaire et en réponse à un échelon
Rapidité de l'axe	Pulsation au gain unité : $\omega_u \geq 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Le correcteur à action proportionnelle est défini par la fonction de transfert suivante :  $C(p) = K$ . On prendra comme Fonction de Transfert de la commande d'axe, la fonction  $G(p) = \frac{K_2}{p(1 + \tau p)}$  et comme architecture de commande le schéma bloc à retour unitaire de la figure suivante.



On fournit le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $G(p)$ .



**Question 1** Justifier, à partir de ce diagramme, que le système en boucle fermée est stable.

**Question 2** Déterminer la valeur de l'écart en régime stationnaire pour un échelon de consigne d'amplitude  $\theta_0$ . Conclure quant au respect du cahier des charges.

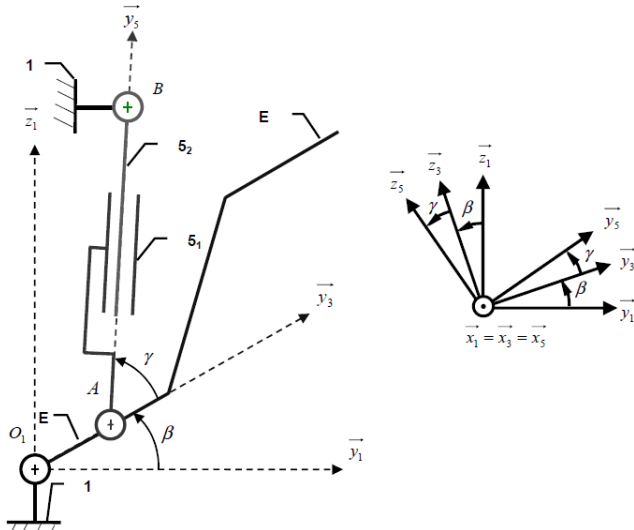
Afin de respecter le temps d'exécution, le cahier des charges impose que la pulsation au gain unité de la boucle ouverte  $\omega_u$  soit au moins égale à  $4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Question 3** Déterminer la valeur minimale du gain  $K$  du correcteur à action proportionnelle assurant la validation du critère de performance en rapidité. En déduire la valeur de la marge de phase  $M\varphi$  pour cette valeur de  $K$ . Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Exercice 189 – Géométrie – Vérins

**Objectif** Déterminer la course des vérins en fonction de l'amplitude du mouvement ainsi que la pression maximale  $p_{\max}$  dans le circuit hydraulique.

Le modèle cinématique retenu est défini sur la figure suivante.



Le mécanisme est constitué :

- du poutre central fixe 1 : repère associé  $\mathcal{R}_1 = (O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- de l'ensemble  $E = \{\text{bras d'articulation avant 4} + \text{poutre avant 3} + \text{roues avant}\}$  : repère associé  $\mathcal{R}_3 = (O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  avec  $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_3) = (\vec{z}_1, \vec{z}_3)$ ;
- du vérin 5 constitué du corps 5\_1 et de la tige 5\_2 : repère associé  $\mathcal{R}_5 = (A; \vec{x}_1, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  avec  $\gamma = (\vec{y}_3, \vec{y}_5) = (\vec{z}_3, \vec{z}_5)$ ;
- du vérin 6 non représenté car ayant le même comportement que le vérin 5.

Paramétrage :  $\vec{O_1A} = d_4 \vec{y}_3$ ;  $\vec{AB} = \lambda \vec{y}_5$ ;  $\vec{O_1B} = d_1 \vec{y}_1 + h_1 \vec{z}_1$ .

Valeurs numériques :  $d_4 = 70 \text{ mm}$ ;  $h_1 = 292 \text{ mm}$ ;  $d_1 = 76 \text{ mm}$ ;  $\beta \in [-45^\circ; +30^\circ]$ .

**Question 1** Exprimer  $\lambda$  en fonction de  $d_1$ ,  $h_1$ ,  $d_4$  et  $\beta$ .

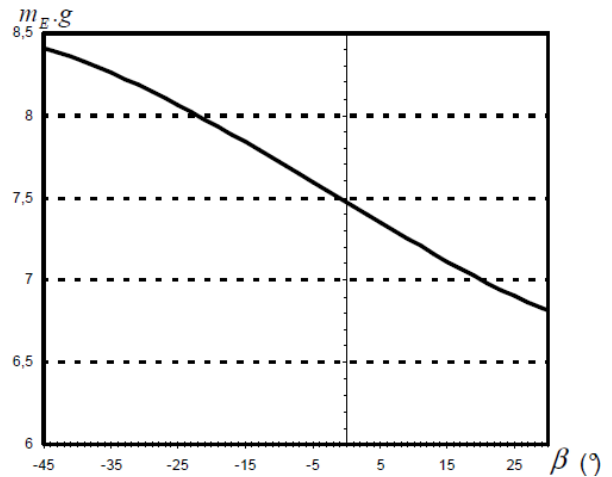
**Question 2** Calculer les valeurs numériques d'élongation minimale  $\lambda_{\min}$ , maximale  $\lambda_{\max}$  ainsi que la course du vérin 5.

L'objectif suivant est d'évaluer les pressions maximales s'exerçant dans le circuit hydraulique dans la configuration d'essai décrite précédemment à savoir :

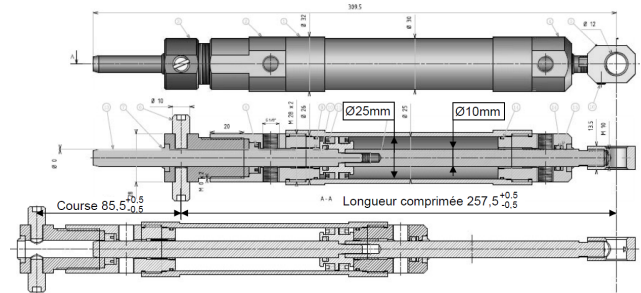
- le poutre central 1 est fixe et placé parallèlement au sol;
- les podes avant 3 et arrière 2 ne sont pas en contact avec le sol et un angle de tangage est alors imposé aux podes avant et arrière par rapport au poutre central.

Sur la figure suivante, l'évolution du rapport entre les efforts exercés par les vérins avant 5 et 6 et le poids de l'ensemble E a été tracée en fonction de l'angle de tangage  $\beta$ . La masse de l'ensemble E est  $m_E = 60 \text{ kg}$ .

$$F_{\text{vérin 5}} + F_{\text{vérin 6}}$$



**Question 3** À partir du tracé précédent et du plan du vérin, déterminer la valeur de la différence de pression maximale  $\Delta P_{\max}$  entre les deux chambres des vérins avant 5 et 6.



La pression minimale dans le circuit hydraulique est supposée constante et égale à  $p_0$  ( $p_0 = 1 \text{ bar}$ ). Des limiteurs de pression tarés à 150 bars sont placés en sortie du distributeur 4/3.

**Question 4** Déterminer l'expression de la pression maximale  $p_{\max}$  dans le circuit hydraulique en fonction de  $p_0$  et  $\Delta P_{\max}$ . Réaliser l'application numérique.

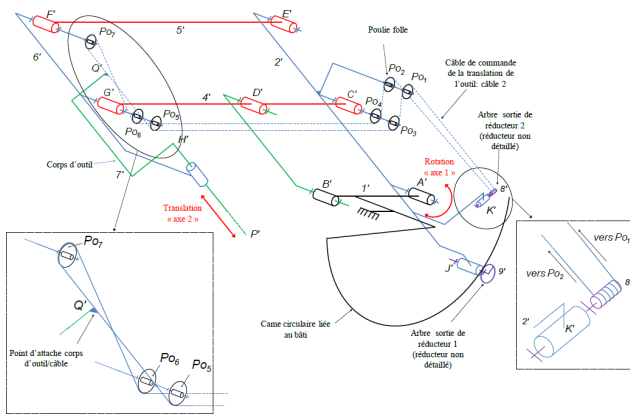
## Exercice 189 – PFD – Robot chirurgical

**Objectif** Déterminer les équations du mouvement du bras esclave sous la  $A \vec{q} + B \vec{q} + C \vec{q} = \vec{F}$ .

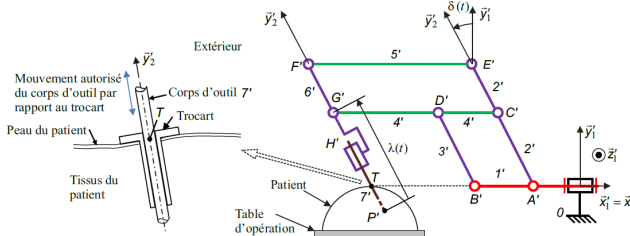
Trois mouvements de l'outil existent :

- la rotation du corps de l'outil 7' par rapport à 6', autour de  $(T, \vec{y}_2')$ , ce mouvement ne sera pas étudié ici;
- la rotation du corps d'outil 7' par rapport au bâti 0 autour de  $(T, \vec{z}_0)$ . La transmission de ce mouvement de l'actionneur dédié jusqu'à 7' est assurée par la structure globale étudiée aux questions précédentes, associée à une came circulaire liée au bâti sur laquelle roule sans glisser le galet 9' ;
- la translation du corps d'outil 7' par rapport au porte-outil 6'. La transmission de ce mouvement de l'actionneur dédié jusqu'à 7' est assurée par un système complexe de câbles donné dans la figure suivante.



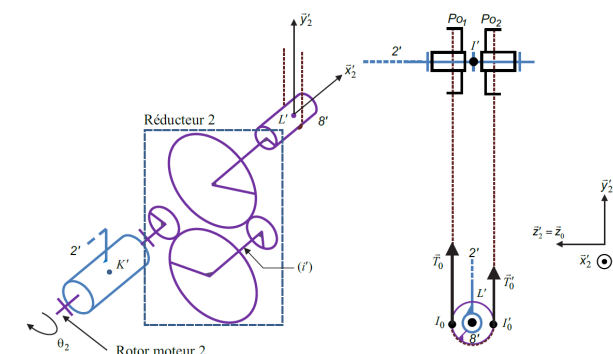


Les trois degrés de liberté du corps d'outil sont obtenus au moyen de la structure retenue (figures précédente et suivante) à laquelle deux axes asservis sont associés. Avec cette structure, une variation de l'angle  $\delta(t)$  n'entraîne pas une variation de  $\lambda(t)$ . Les deux axes sont donc indépendants géométriquement.



Les équations du mouvement des axes 1 et 2 sont nécessaires pour réaliser une synthèse des correcteurs. Dans le cadre de ce sujet, on se limite à la détermination de l'équation du mouvement de l'axe 2 (décrivant l'évolution de la grandeur  $\lambda(t)$ ).

La figure suivante montre le détail du moto-réducteur 2. Pour simplifier, on considère que le câble est enroulé sur un demi-tour du tambour 8'.  $\theta_2$  est l'angle du rotor du moteur par rapport à son stator 2'.



Moto-réducteur (les deux liaisons pivot entre l'arbre intermédiaire (i') d'une part, puis entre l'arbre de sortie du réducteur lié au tambour 8' d'autre part et le solide 2' sont omises)

- Le repère  $\mathcal{R}_0$  est supposé galiléen. La verticale ascendante est  $\vec{y}_0$ .
- Le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison d'un solide  $i$  sur un solide  $j$ , réduit en un point  $M$ , est noté :  $\{\mathcal{T}(i \rightarrow j)\} =$

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(i \rightarrow j)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(M, i \rightarrow j) \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_{M, \mathcal{R}_0}$$

- Le torseur dynamique d'un solide  $i$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ , réduit en un point  $M$ , est noté :  $\{\mathcal{D}(i/j)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(i/j)} \\ \delta(M, i/j) \end{array} \right\}_M$
- La force exercée par le tissu humain sur le corps d'outil 7' est modélisée par le glisseur  $(P', \vec{F}_e)$  avec  $\vec{F}_e = F_x(t)\vec{x}_2' + F_y(t)\vec{y}_2'$ .
- L'effort du corps d'outil 7' sur le câble est modélisé par le glisseur  $(Q', \vec{F})$ ,  $Q'$  étant le point d'attache entre le corps d'outil 7' et le câble avec  $\vec{F} = F(t)\vec{y}_2'$ .
- L'action de la pesanteur sur 7' est négligée devant les efforts mis en jeu.
- $H'$  est le centre d'inertie de 7',  $m_7'$  sa masse et  $\overrightarrow{P'H'} = l_0 \vec{y}_2'$ .
- L'action du moteur 2 (utilisé pour le mouvement de translation de l'outil correspondant à l'« axe 2 ») est modélisée par un couple pur :  $\overrightarrow{C_{m2}} = C_{m2}(t)\vec{x}_2'$ .
- On note  $\overrightarrow{C_{red}} = C_{red}\vec{x}_2'$ , le couple moteur ramené à l'arbre de sortie du réducteur 2 solidaire de 8'. Une étude préalable a permis d'obtenir la relation  $C_{red} = \frac{C_{m2}}{k_2}$  ( $k_2$  étant le rapport de transmission du réducteur).
- Les actions mécaniques du câble sur 8' sont modélisées par deux glisseurs en  $I_0$  et  $I_0'$  :  $(I_0, \vec{T}_0)$  et  $(I_0', \vec{T}_0')$  avec  $\vec{T}_0 = \left(T_t + \frac{F(t)}{2}\right)\vec{y}_2'$  et  $\vec{T}_0' = \left(T_t - \frac{F(t)}{2}\right)\vec{y}_2'$  où  $T_t$  représente la valeur algébrique de la pré-tension dans les câbles pour assurer qu'ils soient tendus constamment en cours d'opération, quelle que soit la valeur de  $F(t)$ .
- Le rendement du réducteur est supposé unitaire. Le moment d'inertie du rotor du moteur 2 et des pièces du réducteur 2 sont négligées. La masse des câbles est négligée.

On se propose en premier lieu de déterminer l'expression du couple moteur  $C_{m2}(t)$  en fonction de  $F_y(t)$  et des paramètres du problème tel que

$$C_{m2}(t) = v_1 \left( F_y(t) + m_7' \left( \frac{d^2 \lambda(t)}{dt^2} + v_2 \left( \frac{d\delta(t)}{dt} \right) \right) \right)$$

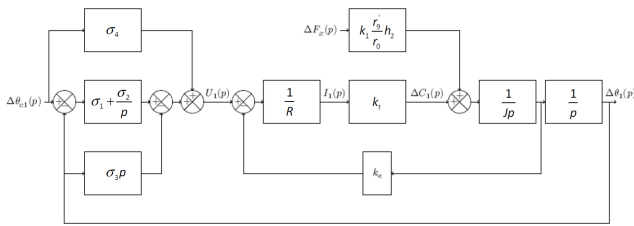
où  $v_1$  et  $v_2$  sont des termes à expliciter en fonction de  $k_2$ ,  $r_8'$ ,  $l_0$ ,  $h_2$  et  $\lambda$ . Le tableau du document réponse donne en partie la démarche de résolution.

**Question 1** Compléter le tableau du document réponse et justifier, sur la copie, le choix du théorème utilisé (équation scalaire) associé à chaque isolement, sans faire aucun calcul.

**Question 2** Mettre en œuvre la démarche proposée pour chaque isolement en détaillant les calculs et exprimer littéralement  $v_1$  et  $v_2$  de l'expression de  $C_{m2}(t)$  donnée plus haut.

## Exercice 189 – SLCI – Calculs

On donne le schéma-blocs suivant.

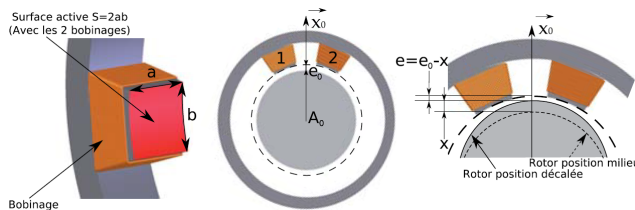


**Question 1** Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée, sous forme canonique, notée  $B_F(p) = \frac{\Delta\theta_1(p)}{\Delta\theta_{c1}(p)}$ .

## Exercice 189 – Modélisation

### Modélisation du comportement d'un couple d'électro-aimants

L'étude porte sur un seul couple d'électro-aimants.



Lorsque le bobinage, enroulé autour de fines plaques en fer doux, est alimenté par un courant  $I$ , un champ magnétique  $B$  apparaît dans l'entrefer entre l'électro-aimant et le rotor, tel que  $N \cdot I = \frac{2e}{\mu_0} B$ .

Ce champ magnétique permet de créer un effort exercé par l'électro-aimant sur le rotor, dans l'axe de l'électro-aimant, tel que  $F = \frac{B^2 S}{2\mu_0}$  où  $S = ab$  est la surface active du couple d'électro-aimants.

### Spécifications de fonctionnement

- L'échauffement maximal des bobinages impose une intensité maximale telle que  $I_{\max} = 5A$ .
- Le champ magnétique maximal dans un matériau ferro-magnétique est limité à  $B_{\max} = 1,8T$ .

Données numériques :

- nombre de spires :  $N = 200$  spires ;
- perméabilité magnétique du vide  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H m^{-1}$  ;
- valeur moyenne  $e_0$  de l'entrefer  $e_0 = 0,2 mm$  ;
- diamètre de l'arbre  $d = 50 mm$  ;
- surface active  $S = 300 mm^2$ .

On note  $\vec{F} = F \vec{x}_0$  l'effort exercé par le couple des électro-aimants sur le rotor selon  $\vec{x}_0$ .

**Question 1** Montrer que le couple des deux électro-aimants permet d'assurer l'effort maximal transmissible tout en respectant les spécifications de fonctionnement.

Un déplacement  $x$ , tel que  $\vec{A}_0 \vec{A} = x \vec{x}_0$ , de l'arbre par rapport au stator conduit à une modification de l'effort exercé  $F$ . On note  $e_0$  l'entrefer initial pour  $x = 0$  tel que  $e = e_0 - x$ .

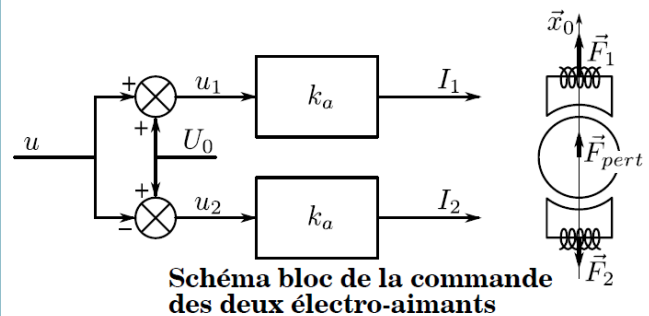
**Question 2** Déterminer l'expression de l'effort  $F$  en fonction de  $x$ , de  $I$  et de paramètres géométriques. Peut-on

exercer un effort  $\vec{F}$  suivant  $-\vec{x}_0$  en modifiant  $I$  ou  $e$  ? Déterminer la valeur numérique de la constante  $\gamma$  telle que  $F = \gamma \frac{I^2}{e^2}$ .

### Modélisation d'un palier magnétique actif

Les couples d'électro-aimants sont associés par paires diamétralement opposées. On ne s'intéresse ici qu'au contrôle de la position du rotor selon  $\vec{x}_0$  réalisé par les électro-aimants 1, 2, 5 et 6. Pour simplifier :

- le couple des électro-aimants 1 et 2 crée un effort de norme  $F_1$  sur le rotor,
- le couple des électro-aimants 5 et 6 crée un effort de norme  $F_2$  sur le rotor.



On a :

- $\vec{F}_1 = (F_0 + dF_1) \vec{x}_0$  ;
- $\vec{F}_2 = -(F_0 + dF_2) \vec{x}_0$  ;
- $I_1 = I_0 + dI_1$  ;
- $I_2 = I_0 + dI_2$  ;
- $u = 0 + du$  ;
- $x = 0 + dx$ .

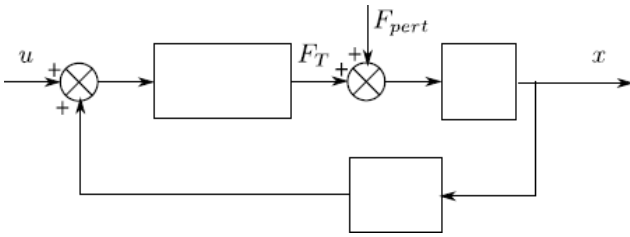
Le point de fonctionnement de chaque couple d'électro-aimants est caractérisé par  $x = 0$ ,  $I = I_0$  et  $F = F_0$  (voir figure 12). On admet que le comportement se traduit par un effort dirigé de l'axe du rotor vers l'électro-aimant tel que  $F_1 = \gamma \frac{I_1^2}{e_1^2}$  et  $F_2 = \gamma \frac{I_2^2}{e_2^2}$  avec  $\gamma = 2 \times 10^{-6} Nm^2 A^{-2}$ .

On note  $\vec{F}_{\text{pert}} = F_{\text{pert}} \vec{x}_0$  un effort perturbateur s'exerçant sur le rotor.

**Question 3** On note désormais  $\vec{F}_T = F_T \vec{x}_0$  l'effort total exercé par les deux couples d'électro-aimants. Montrer que l'expression linéarisée de  $F_T$  peut s'écrire en fonction de  $u$  et  $x$  sous la forme  $F_T = \frac{4\gamma k_a^2 U_0^2}{e_0^2} \left( \frac{u}{U_0} + \frac{x}{e_0} \right)$ .

En première approximation, la masse  $m = 10 kg$  du rotor se répartit équitablement au centre de chaque palier magnétique radial. Ceci revient à étudier le comportement dynamique d'une masse ponctuelle (masse  $m/2$ ) placée au centre de chaque palier magnétique radial.

**Question 4** Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la masse ponctuelle (de masse  $m/2$ ) et en déduire une relation entre  $F_T$ ,  $F_{\text{pert}}$  et  $x$ . Compléter le schéma-blocs du palier magnétique ayant pour entrée la tension  $u$  et pour sortie la position  $x$ , et faisant apparaître l'effort perturbateur  $F_{\text{pert}}$ .



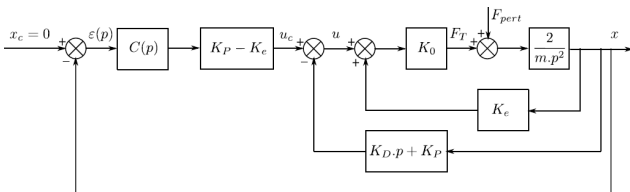
**Question 5** Déterminer la fonction de transfert  $H_{PM} = \frac{X(p)}{U(p)}$ . Le système est-il stable ? Justifier.

1.  $F = 2F_1 = 357 \text{ N}$ .
2.  $F = \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{8(e_0 - x)^2}$ ,  $\gamma = 1,9 \times 10^{-6} \text{ Nm}^2 \text{ A}^{-2}$ .
3. ...
4. ...
5.  $H_{PM} = \frac{8e_0 \gamma k_a^2 U_0}{m p^2 e_0^3 - 8\gamma k_a^2 U_0^2}$ .

## Exercice 189 – Modélisation

### Asservissement de position du palier magnétique actif

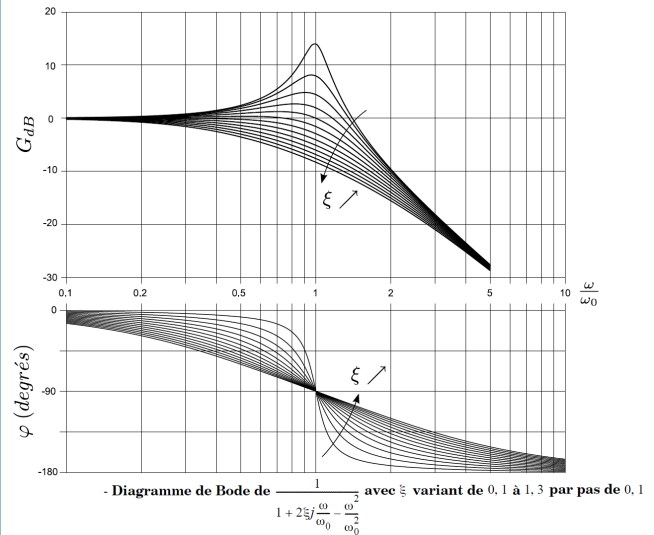
Afin de satisfaire les critères du cahier des charges, on envisage d'asservir le palier magnétique par un premier bouclage de stabilisation (retour  $K_D p + K_P$ ). Un second retour unitaire associé à un correcteur  $C(p)$  assure la régulation en position du palier.



On utilisera par la suite les paramètres suivants :  $K_e = 5000 \text{ V m}^{-1}$ ,  $K_0 = 190 \text{ N m}^{-1}$ ,  $m = 10 \text{ kg}$ . On considère dans un premier temps le système sans correction :  $C(p) = 1$ .

**Question 1** Déterminer la fonction de transfert de la boucle interne  $H_{PM1}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$ , en fonction de  $K_e$ ,  $K_0$ ,  $m$ ,  $K_P$  et  $K_D$ . Préciser les conditions sur  $K_P$  et  $K_D$  pour que soit stable en boucle ouverte.

**Question 2** En considérant l'ensemble de l'asservissement, déterminer la fonction de transfert  $H_{pert}(p) = \frac{X(p)}{F_{pert}(p)}$ , puis calculer les valeurs de  $K_D$  et  $K_P$  permettant de respecter les spécifications du cahier des charges en terme de bande passante et d'amortissement.



**Question 3**

**Question 4**

**Question 5**

**Question 6**

**Question 7**

1. ...
2. ...