

## Exercice 189 – TEC – Clever

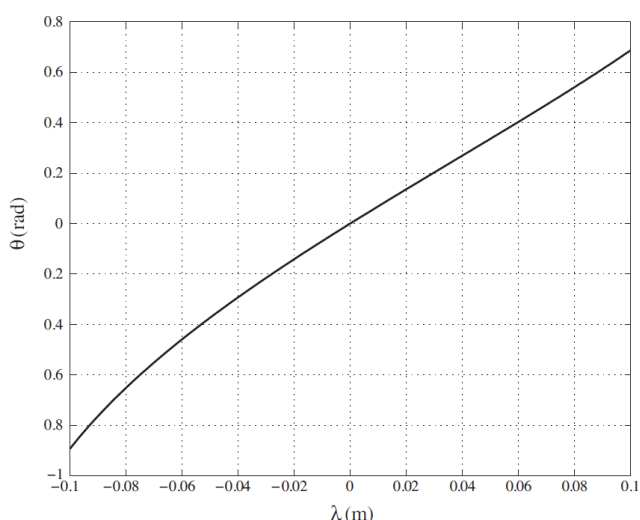
On cherche à déterminer la masse équivalente  $M_{eq}$  ramenée à la tige du vérin, de l'ensemble habitacle et mécanisme de transformation de mouvement actionnés par le vérin. Pour cela, on adopte les hypothèses suivantes :

- le référentiel associé au châssis 0 du véhicule Clever est supposé galiléen (ceci revient à supposer le châssis fixe par rapport au référentiel lié à la route durant la phase d'inclinaison);
- la puissance dissipée engendrée par l'inclinaison de l'habitacle au niveau du contact roue/sol est négligée;
- les liaisons sont supposées parfaites.

Le modèle cinématique adopté est précisé par le schéma cinématique de la 2, ainsi que les données géométriques et les paramètres de mouvement. On note  $m$  la masse de l'habitacle et  $J_1 = 175 \text{ kgm}^2$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O, \vec{y}_0)$ . Les caractéristiques utiles des vérins sont données en annexe.

**Question 1** Exprimer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides  $\{1,4,5\}$  en fonction des paramètres cinématiques  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\lambda}$ .

Pour simplifier la suite de l'étude, on se place autour de la position non-inclinée de l'habitacle. On définit alors le paramètre angulaire  $\theta$  tel que  $\theta = \theta_1 - \theta_{10}$ . La figure du Cahier Réponses donne l'évolution du paramètre  $\theta$  en fonction de  $\lambda$ . On cherche à linéariser cette fonction sous la forme  $\theta = T\lambda$ .



**Question 2** Déterminer une valeur numérique approximative de  $T$ .

Les valeurs numériques de  $R$  et  $T$  étant proches on prendra pour la suite du sujet :  $R = T = 7,5 \text{ rad m}^{-1}$ .

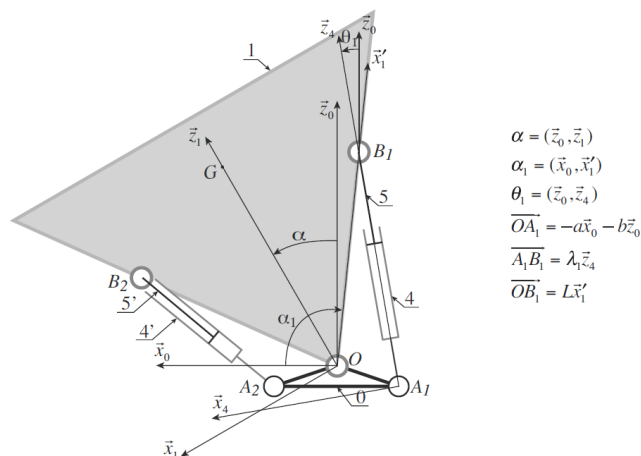


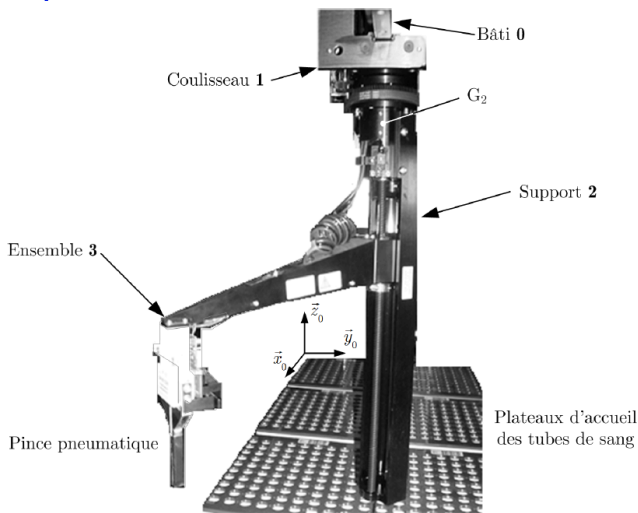
FIGURE 1 – Schéma cinématique du modèle mécanique adopté

**Question 3** Exprimer la masse équivalente  $M_{eq}$  ramenée à la tige du vérin en fonction des caractéristiques cinétiques des pièces et des paramètres géométriques en précisant clairement la méthode utilisée pour définir cette grandeur. À partir des données de l'Annexe A, montrer que les termes d'inertie liés aux 2 vérins sont faibles par rapport à celui associé à l'habitacle.

**Question 4** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $\{1,4,5\}$  en négligeant les termes dus aux puissances des poids de 4 et 5. Écrire le résultat sous la forme :  $F_v + k_g \lambda = M_{eq} \ddot{\lambda}$  en donnant l'expression du paramètre  $k_g$ . Appliquer la transformation de Laplace à l'équation précédente et compléter le schéma-blocs du Cahier Réponses dans lequel la variable  $V(p)$  correspond à  $\mathcal{L}(\lambda(t))$ .

## Exercice 189 – PFD

Le bras implanté sur le système ADVIA WorkCell R, est motorisé selon trois « axes » asservis (appelés « Axe 1 », « Axe 2 » et « Axe 3 » dans la suite) assurant les mouvements de type translation / rotation / translation.



Le bras est constitué de trois solides indéformables : Coulisseau 1, Support 2 et Ensemble bras + pince + tube 3. Les mouvements autorisés entre ces solides sont associés aux trois axes du bras manipulateur et sont paramétrés de la façon suivante.

Mouvements	Axe N° 1	Axe N° 2	Axe N° 3
Pièces considérées	0 et 1	1 et 2	2 et 3
Mouvements	Translation de direction $\vec{x}_0$	Rotation d'axe $(G_2, \vec{z}_0)$	Translation de direction $\vec{z}_0$
Paramètres	$x$	$\theta$	$z$
Amplitudes	$-1 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$	$-\pi/2 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi/2 \text{ rad}$	$0 \leq z \leq 0,3 \text{ m}$

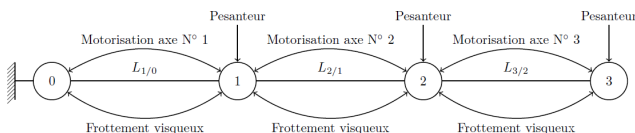
Les amplitudes sont définies depuis la position de référence du bras, dans laquelle il se place après la prise d'origine. Les trois solides ont les caractéristiques suivantes.

Caractéristiques cinétiques	Coulisseau 1	Support 2	Ensemble bras + pince + tube 3
Masses	$m_1$	$m_2$	$m_3$
Centres de gravité $G_i$	$\vec{OG}_1 = x \vec{x}_0$	$\vec{OG}_2 = x \vec{x}_0 + d_1 \vec{z}_0$	$\vec{OG}_3 = x \vec{x}_0 + (d_1 + z) \vec{z}_0 + (d_2 + d) \vec{x}_1$
Moments d'inertie	sans objet	$J_2$ selon l'axe $(G_2, \vec{z}_0)$	$J_3$ selon l'axe $(G_3, \vec{z}_0)$

L'orientation de la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  par rapport à la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est définie par  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ . Valeurs numériques :  $d_1 = 0,2 \text{ m}$ ,  $d_2 + d = 0,35 \text{ m}$ . Pour chacun des trois axes motorisés, une action mécanique et un frottement visqueux équivalents de l'actionneur  $[M_i]$  associé à l'axe  $i$  sont définis au niveau de la liaison correspondante.

Grandeurs équivalentes rapportées à l'axe	Axe N° 1	Axe N° 2	Axe N° 3
Action mécanique de l'actionneur $[M_i]$ sur l'axe	$F_{M1}$ (en N)	$C_{M2}$ (en N · m)	$F_{M3}$ (en N)
Frottement visqueux	$b_1$ (en N · s · m <sup>-1</sup> )	$f_2$ (en N · m · s · rad <sup>-1</sup> )	$b_3$ (en N · s · m <sup>-1</sup> )

Le « graphe des liaisons et des efforts » (encore appelé « graphe d'analyse ») du modèle mécanique du bras est proposé figure suivante.



**Question 1** Proposer une stratégie d'isollements et de calculs à mettre en œuvre pour déterminer les expressions des actions mécaniques  $F_{M1}$ ,  $C_{M2}$  et  $F_{M3}$  (générées par les actionneurs  $[M_i]$  associés aux trois axes) : on indiquera, l'ensemble isolé, le théorème à utiliser (avec éventuellement le point de calcul) et la direction de projection en justifiant clairement le choix de la méthode adoptée.

À partir de la stratégie d'isollements établie, on obtient les deux équations différentielles suivantes pour les expressions des efforts  $F_{M1}$  et  $F_{M3}$  :

- équation (E1) :  $F_{M1} = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + b_1 \dot{x} - m_3(d_2 + d)(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)$ ;
- équation (E3) :  $F_{M3} = m_3 \ddot{z} + b_3 \dot{z} - m_3 g$ .

**Question 2** Montrer que l'équation différentielle (E2) reliant le couple  $C_{M2}$ , l'angle  $\theta$ , le déplacement  $x$  et leurs dérivées successives est de la forme  $C_{M2} = A\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + C\ddot{x}$  où les termes  $A$ ,  $B$  et  $C$  seront exprimés en fonction des termes  $m_3$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $d_2$ ,  $d$ ,  $f_2$  et  $\theta$ . Les différentes étapes du calcul seront précisément indiquées.

Les évolutions dynamiques associées au bras motorisé lorsque les trois actionneurs sont commandés simultanément sont donc décrites par les trois équations différentielles obtenues précédemment.

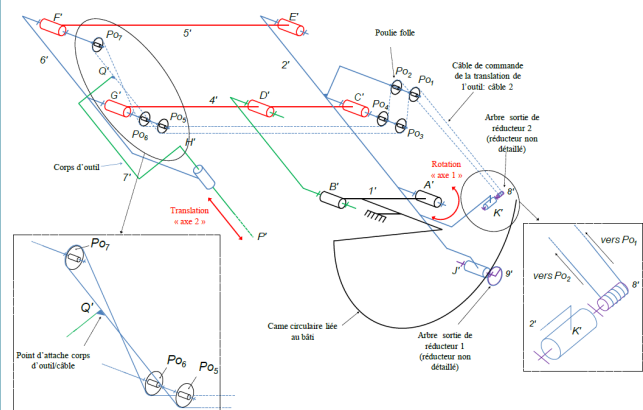
**Question 3** À partir des équations précédentes, justifier que les mouvements de deux des axes sont couplés. Le couplage des mouvements peut créer des accélérations transitoires importantes pouvant induire un risque de débordement du sang du tube saisi par la pince en extrémité du bras à trois degrés de liberté.

## Exercice 189 – PFD – Robot chirurgical

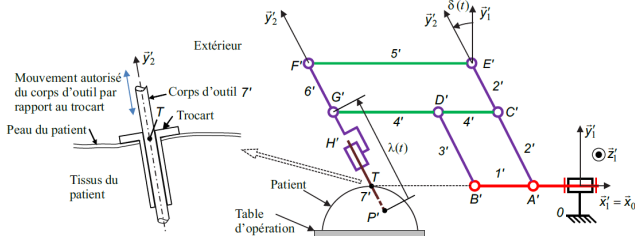
**Objectif** Déterminer les équations du mouvement du bras esclave sous la  $A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = \vec{F}$ .

Trois mouvements de l'outil existent :

- la rotation du corps de l'outil 7' par rapport à 6', autour de  $(T, \vec{y}_2')$ , ce mouvement ne sera pas étudié ici ;
- la rotation du corps d'outil 7' par rapport au bâti 0 autour de  $(T, \vec{z}_0)$ . La transmission de ce mouvement de l'actionneur dédié jusqu'à 7' est assurée par la structure globale étudiée aux questions précédentes, associée à une came circulaire liée au bâti sur laquelle roule sans glisser le galet 9' ;
- la translation du corps d'outil 7' par rapport au porte-outil 6'. La transmission de ce mouvement de l'actionneur dédié jusqu'à 7' est assurée par un système complexe de câbles donné dans la figure suivante.

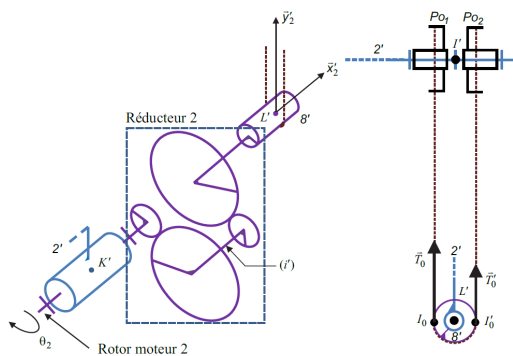


Les trois degrés de liberté du corps d'outil sont obtenus au moyen de la structure retenue (figures précédente et suivante) à laquelle deux axes asservis sont associés. Avec cette structure, une variation de l'angle  $\delta(t)$  n'entraîne pas une variation de  $\lambda(t)$ . Les deux axes sont donc indépendants géométriquement.



Les équations du mouvement des axes 1 et 2 sont nécessaires pour réaliser une synthèse des correcteurs. Dans le cadre de ce sujet, on se limite à la détermination de l'équation du mouvement de l'axe 2 (décrivant l'évolution de la grandeur  $\lambda(t)$ ).

La figure suivante montre le détail du moto-réducteur 2. Pour simplifier, on considère que le câble est enroulé sur un demi-tour du tambour 8'.  $\theta_2$  est l'angle du rotor du moteur par rapport à son stator 2'.



Moto-réducteur (les deux liaisons pivot entre l'arbre intermédiaire ( $i'$ ) d'une part, puis entre l'arbre de sortie du réducteur lié au tambour 8' d'autre part et le solide 2' sont omises)

- Le repère  $\mathcal{R}_0$  est supposé galiléen. La verticale ascendante est  $\vec{y}_0$ .
- La force exercée par le tissu humain sur le corps d'outil 7' est modélisée par le glisseur  $(P', \vec{F}_e)$  avec  $\vec{F}_e = F_x(t)\vec{x}_2 + F_y(t)\vec{y}_2$ .
- L'effort du corps d'outil 7' sur le câble est modélisé par le glisseur  $(Q', \vec{F})$ ,  $Q'$  étant le point d'attache entre le corps d'outil 7' et le câble avec  $\vec{F} = F(t)\vec{y}_2$ .
- L'action de la pesanteur sur 7' est négligée devant les efforts mis en jeu.
- $H'$  est le centre d'inertie de 7',  $m_7'$  sa masse et  $\vec{P}'H' = l_0\vec{y}_2'$ .
- L'action du moteur 2 (utilisé pour le mouvement de translation de l'outil correspondant à l'« axe 2 ») est modélisée par un couple pur :  $\vec{C}_{m2} = C_{m2}(t)\vec{x}_2'$ .
- On note  $\vec{C}_{red} = C_{red}\vec{x}_2'$ , le couple moteur ramené à l'arbre de sortie du réducteur 2 solidaire de 8'. Une étude préalable a permis d'obtenir la relation  $C_{red} = \frac{C_{m2}}{k_2}$  ( $k_2$  étant le rapport de transmission du réducteur).

- Les actions mécaniques du câble sur 8' sont modélisées par deux glisseurs en  $I_0$  et  $I_0'$  :  $(I_0, \vec{T}_0)$  et  $(I_0', \vec{T}_0')$  avec  $\vec{T}_0 = \left(T_t + \frac{F(t)}{2}\right)\vec{y}_2'$  et  $\vec{T}_0' = \left(T_t - \frac{F(t)}{2}\right)\vec{y}_2'$  où  $T_t$  représente la valeur algébrique de la pré-tension dans les câbles pour assurer qu'ils soient tendus constamment en cours d'opération, quelle que soit la valeur de  $F(t)$ .
- Le rendement du réducteur est supposé unitaire. Le moment d'inertie du rotor du moteur 2 et des pièces du réducteur 2 sont négligées. La masse des câbles est négligée.

On se propose en premier lieu de déterminer l'expression du couple moteur  $C_{m2}(t)$  en fonction de  $F_y(t)$  et des paramètres du problème tel que

$$C_{m2}(t) = v_1 \left( F_y(t) + m_7' \left( \frac{d^2 \lambda(t)}{dt^2} + v_2 \left( \frac{d\delta(t)}{dt} \right) \right) \right)$$

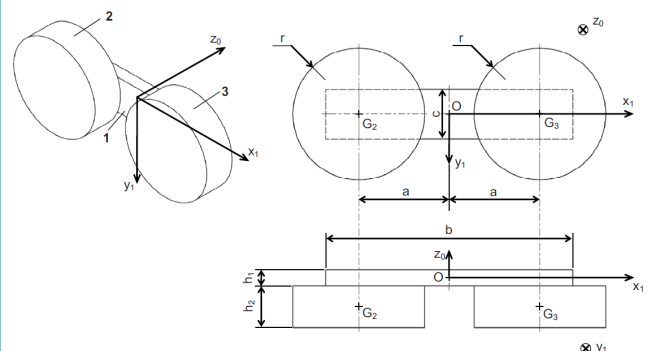
où  $v_1$  et  $v_2$  sont des termes à expliciter en fonction de  $k_2$ ,  $r_8'$ ,  $l_0$ ,  $h_2$  et  $\lambda$ . Le tableau du document réponse donne en partie la démarche de résolution.

**Question 1** Compléter le tableau du document réponse et justifier, sur la copie, le choix du théorème utilisé (équation scalaire) associé à chaque isolement, sans faire aucun calcul.

**Question 2** Mettre en œuvre la démarche proposée pour chaque isolement en détaillant les calculs et exprimer littéralement  $v_1$  et  $v_2$  de l'expression de  $C_{m2}(t)$  donnée plus haut.

## Exercice 189 – Modélisation

Les galets 2 et 3 sont de masses identiques  $m_2$  et de centres d'inertie respectifs  $G_2$  et  $G_3$ . Le balancier 1 est de masse  $m_1$  et de centre d'inertie  $O$  (la tige de  $G_3H$  étant de masse négligeable). La géométrie simplifiée, adoptée pour la détermination préalable des caractéristiques d'inertie, est décrite sur la figure suivante. Les solides 1, 2 et 3 sont supposés homogènes.



**Question 1** Donner la forme de la matrice d'inertie du solide 1 au point  $O$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On justifiera la réponse.

**Question 2** Exprimer littéralement le moment d'inertie  $C_1$  du solide 1 par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  en fonction de la masse  $m_1$  et de ses dimensions.

**Question 3** Donner la forme de la matrice d'inertie du solide 2 au point  $G_2$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ . On justifiera la réponse.

**Question 4** Exprimer littéralement le moment d'inertie  $C'_2$  du solide 2 par rapport à l'axe  $(G_2, \vec{z}_0)$ , en fonction de la masse  $m_2$  et de ses dimensions.

**Question 5** Exprimer littéralement le moment d'inertie  $C'_2$  du solide 2 par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  en fonction de la masse  $m_2$  et de ses dimensions.

$$1. I_O(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}.$$

$$2. C_1 = \frac{m_1}{12} (b^2 + c^2).$$

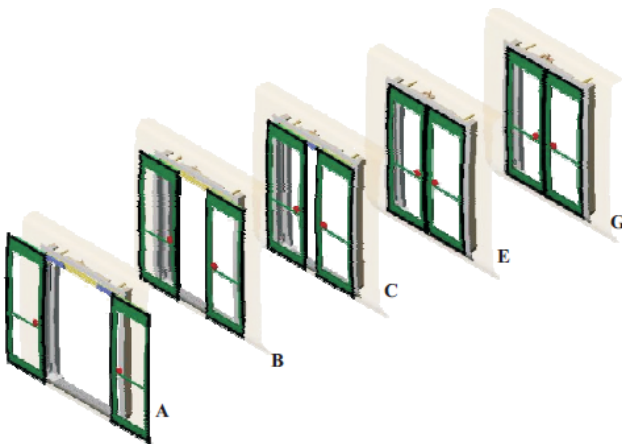
$$3. I_{G_2}(1) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}.$$

$$4. C'_2 = m_2 \frac{r^2}{2}.$$

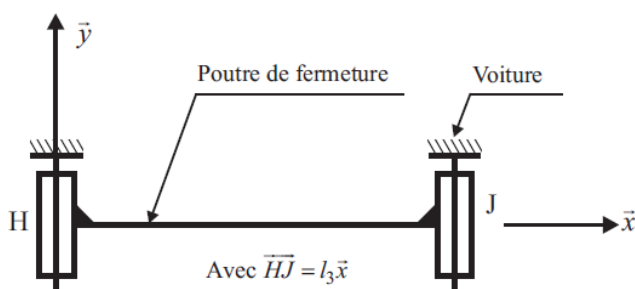
$$5. C_2 = m_2 \left( \frac{r^2}{2} + a^2 \right).$$

## Exercice 189 – Modélisation

Pour respecter les exigences du cahier des charges, les vantaux doivent avoir un mouvement de translation de direction  $\vec{y}$  par rapport à la voiture.



Ce mouvement est assuré par le guidage de la poutre de fermeture grâce à deux boîtes à galets placées aux points  $H$  et  $J$  de la figure suivante qui donne le modèle retenu pour chacune d'elles.



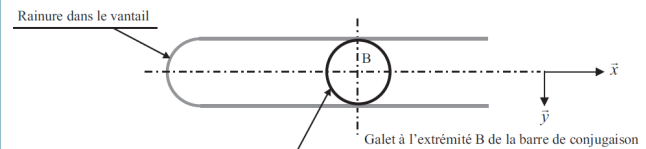
**Objectif** L'objet de cette partie est de trouver la liaison équivalente à l'association de ces deux liaisons.

**Question 1** Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce modèle. En déduire les contraintes géométriques à satisfaire lors de la réalisation.

**Question 2** Proposer une liaison élémentaire cinématiquement équivalente à ces deux liaisons et exprimer son torseur cinématique caractéristique.

**Question 3** Proposer et justifier un modèle pour la liaison élémentaire au point qui rende la liaison résultante isostatique.

Le document réponse représente les schémas cinématiques du mécanisme pour les trois étapes de fonctionnement.

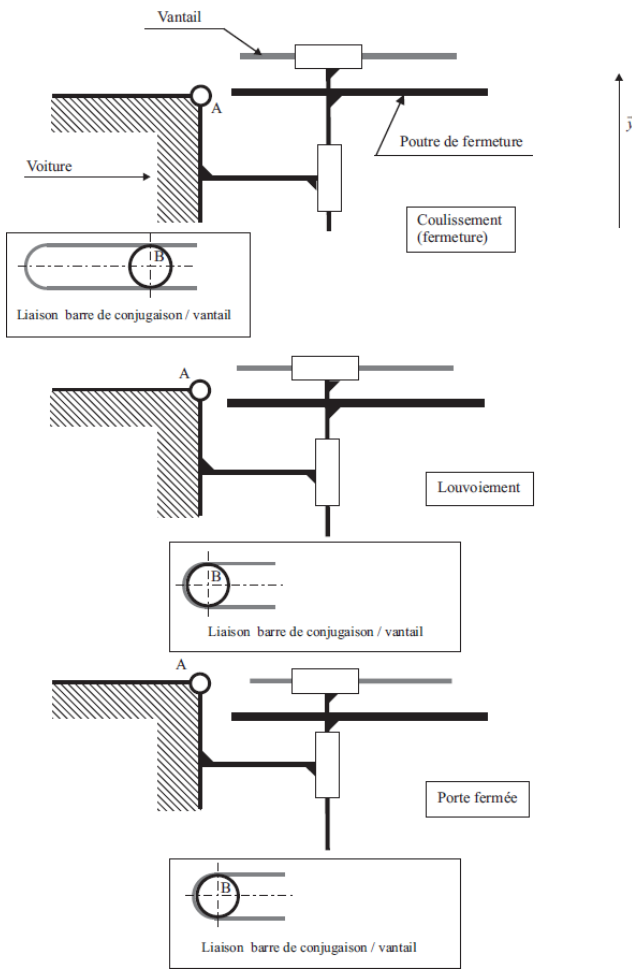


**Question 4** Compléter les schémas, en représentant la barre de conjugaison et en indiquant pour chaque étape la liaison équivalente entre la barre de conjugaison et le vantail.



- Pour la phase coulissement, la barre de conjugaison est parallèle à l'axe.
- Le galet de forme cylindrique est en liaison rotule (ou sphérique) avec la barre de conjugaison





1.  $h = 3$ , parallélisme des axes et entraxe.
2. Glissière de direction  $\vec{y}$ .
3. Liaison sphère plan de normale  $(J, \vec{z})$ .
4. ...

## Exercice 189 – Modélisation

**Objectif** Définir le modèle de commande qui sera utilisé pour l'étude et l'analyse du régulateur de la chaîne d'asservissement.

Pour des raisons de simplicité, l'étude du modèle sera faite uniquement pendant la phase de verrouillage. Bien que pendant cette phase, les déplacements de la porte se fassent suivant les deux directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , dans un souci d'obtenir des modèles de comportement simples, on supposera, au regard du dimensionnement adopté, que le déplacement suivant  $\vec{x}$  est négligeable dans la phase considérée. La validation de cette hypothèse ne rentrera pas dans le cadre de cette étude.

### Notations

- $I_S$  : moment d'inertie du stator du motoréducteur suivant l'axe  $(I, \vec{z}_1)$ .
- $I_R$  : moment d'inertie du rotor suivant  $(I, \vec{z}_1)$ .
- $M_y$  : ensemble des masses en déplacement suivant la direction  $\vec{y}$ .
- $N$  : rapport, supposé constant, entre les vitesses angulaires du rotor et du stator  $\Omega_{4/1} = N\Omega_{1/0}$ . On utili-

sera par la suite les notations suivantes  $\Omega_S = \Omega_{1/0}$  et  $\Omega_m = \Omega_{4/1}$ .

- $N_1(\theta_m)$  : rapport entre la vitesse d'un vantail par rapport à la voiture suivant  $\vec{y}$  et la vitesse du stator  $\Omega_S$ , soit  $V_y = N_1(\theta_m)\Omega_S$  où  $\theta_m$  désigne l'angle de rotation du rotor par rapport au stator.
- $C_m$  : couple moteur.
- $\vec{F}$  : force exercée par le(s) passager(s) suivant l'axe  $\vec{y}$  avec  $\vec{F} = F(t)\vec{y}$  (force due par exemple, à une « pression » exercée par les passagers en cas de surcharge).

On suppose que pendant les opérations d'ouverture/fermeture la voiture est immobile par rapport au sol dont tout repère  $\mathcal{R}_g$  qui lui est attaché est considéré comme galiléen.

**Question 1** Montrer que l'évolution de la vitesse de rotation du stator est régie par l'équation différentielle suivante :  $I_{eq}(\theta_m)\dot{\Omega}_S = AC_m - B(\theta_m)\Omega_m^2 - C(\theta_m)F$ . Exprimer  $I_{eq}(\theta_m)$ ,  $A$ ,  $B(\theta_m)$  et  $C(\theta_m)$  en fonction de  $I_S$ ,  $I_R$ ,  $M_y$ ,  $N$ ,  $N_1(\theta_m)$  et  $N'_1(\theta_m)$  où  $N'_1(\theta_m) = \frac{\partial N_1(\theta_m)}{\partial \theta_m}$ . On suppose que toutes les liaisons sont parfaites et que l'action de la pesanteur est négligée pour toutes les pièces.

L'objectif de cette question est de définir un modèle de comportement linéaire permettant de synthétiser un régulateur pour la chaîne d'asservissement du moteur. On note :

- $\Omega_{m0}$  la vitesse de rotation du moteur, supposée constante ;
- $\theta_{m0}(t)$  la position angulaire de l'arbre moteur.

La linéarisation sera effectuée en utilisant l'équation différentielle obtenue à la question précédente et les équations de comportement d'une machine à courant continu.

L'inductance d'induit sera négligée, soit  $L = 0$ . L'ensemble des relations nécessaire à la mise en place du modèle est :

- $I_{eq}(\theta_m)\dot{\Omega}_S = AC_m - B(\theta_m)\Omega_m^2 - C(\theta_m)F$ .
- $u(t) = R i_m(t) + K_e \Omega_m(t)$ ,
- $C_m(t) = K_c i_m(t)$ .

**Question 2** Préciser les relations liant :

- le couple moteur  $C_{m0}(\theta_{m0})$ , la vitesse de rotation  $\Omega_{m0}$  et la force due à la poussée des passagers  $F(t) = F_0$  supposée constante en fonction de  $A$ ,  $B$  et  $C$  ;
- le couple moteur  $C_{m0}(\theta_{m0})$  à la tension  $U_0(\theta_{m0})$  aux bornes de l'induit en fonction de la vitesse du moteur  $\Omega_{m0}$  et des paramètres du moteur.

Soient les variations  $c_{m1}(t)$ ,  $\Omega_1(t)$ ,  $f_1(t)$  et  $u_1(t)$  autour du régime d'équilibre déterminé à la question précédente :  $C_m(t) = C_{m0}(\theta_{m0}) + c_{m1}(t)$ ,  $\Omega_m(t) = \Omega_{m0} + \Omega_1(t)$ ,  $F(t) = F_0 + f_1(t)$  et  $u(t) = U_0(\theta_{m0}) + u_1(t)$ .

**Question 3** Déterminer une équation différentielle, à paramètres variant dans le temps, décrivant l'évolution de la variation de vitesse du moteur  $\Omega_1$  autour du point de fonctionnement décrit par  $(\theta_{m0}, \Omega_{m0}, F_0, U_0)$ . Exprimer cette équation sous la forme :  $\tau(\theta_{m0})\dot{\Omega}_1(t) + \Omega_1(t) = K(\theta_{m0})u_1(t) - D(\theta_{m0})f_1(t)$ . Exprimer les paramètres  $\tau$ ,  $K$  et  $D$  en fonction de  $I_{eq}$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $N$ ,  $\Omega_{m0}$  et les paramètres du moteur.

La position  $\theta_{m0}$  de l'arbre moteur variant dans le temps, les coefficients de l'équation différentielle précédente peuvent être modélisés comme des paramètres incertains qu'il est possible d'écrire sous la forme d'une partie connue constante et d'une variation, soit :  $\tau(\theta_{m0}) = \tau_0(1 + \delta t)$ ,  $K(\theta_{m0}) = K_0(1 + \delta K)$  et  $D(\theta_{m0}) = D_0(1 + \delta d)$ .

**Question 4** En supposant en première approximation que les variations sont nulles, déterminer les fonctions de transfert  $\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)}$  et  $\frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  en les écrivant sous une forme canonique en fonction de  $\tau_0$ ,  $K_0$  et  $D_0$ .

**R** L'analyse du comportement dû aux variations des paramètres ne fait pas partie de cette étude.

**Question 5** Montrer que la fonction de transfert  $\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)}$  peut être approchée sous la forme  $\frac{K_1}{p}$ . Préciser le domaine de validité et exprimer  $K_1$  en fonction de  $\tau_0$  et  $K_0$ .

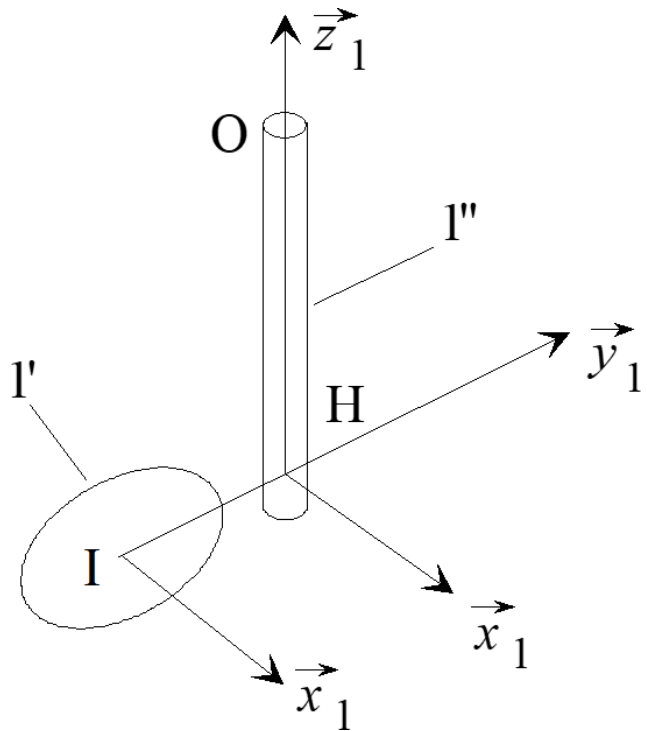
1.  $I_{eq}(m) = I_S + I_R(N+1)^2 + M_y(N_1(\theta_m))^2$ ,  $A = N$ ,  
 $B = \frac{M_y N_1(\theta_m) N_1'(\theta_m)}{N}$  et  $C(\theta_m) = -N_1(\theta_m)$ .
2.  $AC_{m0} - B(\theta_{m0})\Omega_{m0}^2 - C(\theta_{m0})F_0 = 0$  et  $C_{m0}(t) = \frac{K_C}{R}(U_0 - K_e\Omega_{m0})$
3.  $\frac{RI_{eq}(\theta_m)}{N(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})} \dot{\Omega}_1 + \Omega_1 = \frac{AK_c}{AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0}} u_1 - \frac{RC(\theta_m)}{AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0}}$
4.  $\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)} = \frac{K_0}{1 + \tau_0 p}$  et  $\frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)} = -\frac{D_0}{1 + \tau_0 p}$ .
5. ...

## Exercice 189 – Modélisation

On considère que l'atterrisseur est constitué de deux solides en liaison encastrement :

- solide 1' : roue de centre  $I$ , de masse  $m_{1'}$ , assimilée à un fil de section négligeable formant un cercle de rayon  $r_{1'}$  dans le plan  $(I, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  avec  $\vec{z} = \vec{z}_1$  ;
- fourreau 1'' : tube plein homogène cylindrique d'axe  $\vec{HO}$ , de rayon  $r_{1''}$  et de masse  $m_{1''}$  ;

avec  $\vec{IH} = d\vec{y}_1$  et  $\vec{OH} \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}$ .



On note  $I_I(1') = \begin{pmatrix} A_{1'} & -F_{1'} & -E_{1'} \\ -F_{1'} & B_{1'} & -D_{1'} \\ -E_{1'} & -D_{1'} & C_{1'} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$  la représentation la plus générale de l'opérateur d'inertie de la roue 1'.

**Question 1** En utilisant les propriétés géométriques de la pièce 1', donner une écriture généralisée simplifiée de  $I_J(1')$ .

**Question 2** Déterminer l'inertie du solide 1', par rapport à l'axe  $(I, \vec{z}_1)$  en fonction de  $m_{1'}$  et  $r_{1'}$ .

**Question 3** En déduire l'inertie du solide 1', par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_1)$  en fonction de  $d$ ,  $m_{1'}$  et  $r_{1'}$ .

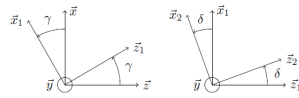
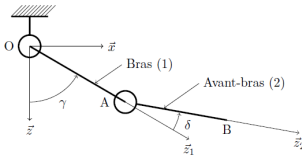
**Question 4** Déterminer l'inertie du solide 1'', par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_1)$  en fonction de  $m_{1''}$  et  $r_{1''}$ .

**Question 5** En déduire l'inertie du solide  $1 = 1' \cup 1''$ , par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_1)$ .

1.  $I_J(1') = \begin{pmatrix} A_{1'} & 0 & 0 \\ 0 & C_{1'} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1'} \end{pmatrix}$ .
2.  $C_{1'} = \frac{m_{1'} r_{1'}^2}{2}$ .
3.  $C_{1'}' = C_{1'} + m_{1'} d^2 = m_{1'} \left( \frac{r_{1'}^2}{2} + d^2 \right)$ .
4.  $C_{1''} = \frac{m_{1''} r_{1''}^2}{2}$ .
5.  $J = \frac{m_{1''} r_{1''}^2}{2} + m_{1'} \left( \frac{r_{1'}^2}{2} + d^2 \right)$ .

## Exercice 189 – Torseurs dynamiques – Or-thèse

Soit le système suivant composé d'un bras et d'un avant-bras.



Bâti		
Repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe, galiléen		
Bras (moteurs compris)		
Repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ Angle $\gamma = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ $\vec{y} = \vec{y}_1$	Longueur $l_1 = 350$ mm Masse $m_1 = 2,3$ kg Centre d'inertie $G_1$ tel que : $\vec{OG}_1 = \lambda_1 \vec{z}_1, \lambda_1 = 50$ mm	Matrice d'inertie $I(G_1, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$ $A_1 = 2,4 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_1 = 2,3 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $D_1 = 2,1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Avant-bras		
Repère $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ Angle $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$	Longueur $l_2 = 270$ mm Masse $m_2 = 0,3$ kg Centre d'inertie $G_2$ tel que : $\vec{AG}_2 = \lambda_2 \vec{z}_2, \lambda_2 = 135$ mm	Matrice d'inertie $I(G_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$ $A_2 = 1,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_2 = 1,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $D_2 = 4,3 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Question 1** Déterminer le torseur cinétique  $\{\mathcal{C}(Bras/0)\}$  au point O en utilisant deux méthodes différentes.

**Question 2** Déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(C/Bras)\}_0$  au point O en utilisant deux méthodes différentes.

**Question 3** Déterminer le torseur cinétique  $\{\mathcal{C}(Avant-Bras/0)\}$  au point O en utilisant deux méthodes différentes.

**Question 4** Déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(Avant-Bras/0)\}$  au point O en utilisant deux méthodes différentes.

**Question 5** Déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(Bras+Avant-Bras/0)\}$  au point O en utilisant deux méthodes différentes.