

## Exercice 189 – TEC – Clever

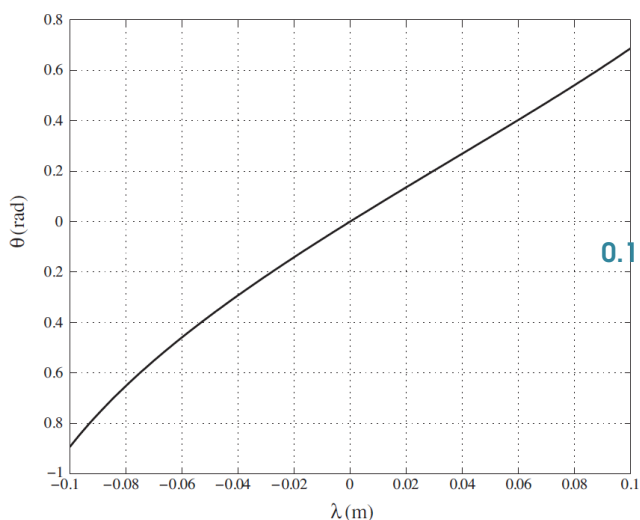
On cherche à déterminer la masse équivalente  $M_{eq}$  ramenée à la tige du vérin, de l'ensemble habitacle et mécanisme de transformation de mouvement actionnés par le vérin. Pour cela, on adopte les hypothèses suivantes :

- le référentiel associé au châssis 0 du véhicule Clever est supposé galiléen (ceci revient à supposer le châssis fixe par rapport au référentiel lié à la route durant la phase d'inclinaison);
- la puissance dissipée engendrée par l'inclinaison de l'habitacle au niveau du contact roue/sol est négligée;
- les liaisons sont supposées parfaites.

Le modèle cinématique adopté est précisé par le schéma cinématique de la 2, ainsi que les données géométriques et les paramètres de mouvement. On note  $m$  la masse de l'habitacle et  $J_1 = 175 \text{ kgm}^2$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O, \vec{y}_0)$ . Les caractéristiques utiles des vérins sont données en annexe.

**Question 1** Exprimer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides  $\{1, 4, 5\}$  en fonction des paramètres cinématiques  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\lambda}$ .

Pour simplifier la suite de l'étude, on se place autour de la position non-inclinée de l'habitacle. On définit alors le paramètre angulaire  $\theta$  tel que  $\theta = \theta_1 - \theta_{10}$ . La figure du Cahier Réponses donne l'évolution du paramètre  $\theta$  en fonction de  $\lambda$ . On cherche à linéariser cette fonction sous la forme  $\theta = T\lambda$ .



**Question 2** Déterminer une valeur numérique approximative de  $T$ .

Les valeurs numériques de  $R$  et  $T$  étant proches on prendra pour la suite du sujet :  $R = T = 7,5 \text{ rad m}^{-1}$ .

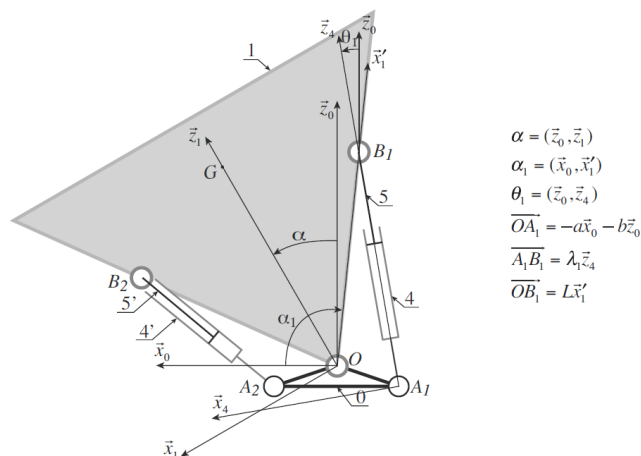


FIGURE 1 – Schéma cinématique du modèle mécanique adopté

**Question 3** Exprimer la masse équivalente  $M_{eq}$  ramenée à la tige du vérin en fonction des caractéristiques cinétiques des pièces et des paramètres géométriques en précisant clairement la méthode utilisée pour définir cette grandeur. À partir des données de l'Annexe A, montrer que les termes d'inertie liés aux 2 vérins sont faibles par rapport à celui associé à l'habitacle.

**Question 4** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $\{1, 4, 5\}$  en négligeant les termes dus aux puissances des poids de 4 et 5. Écrire le résultat sous la forme :  $F_v + k_g \lambda = M_{eq} \ddot{\lambda}$  en donnant l'expression du paramètre  $k_g$ . Appliquer la transformation de Laplace à l'équation précédente et compléter le schéma-blocs du Cahier Réponses dans lequel la variable  $V(p)$  correspond à  $\mathcal{L}(\lambda(t))$ .

## Exercice 189 – TEC – Clever INFOS MAN-QUANTES

### Première correction

Afin de répondre au critère du cahier des charges concernant la précision statique du système, on choisit de placer un intégrateur comme premier correcteur :

$$H_r(p) = \frac{K_i}{p}.$$

**Question 1** On donne sur le Cahier Réponses le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $FTBO_2(p)$  du système asservi pour  $K_i = 1$  et telle que  $M(p) = FTBO_2(p) \cdot \varepsilon(p)$ . Déterminer, en expliquant clairement la méthode employée, la valeur de  $K_i$  qui permet d'obtenir la dynamique souhaitée.

On donne en annexe page 8 la définition d'un correcteur à avance de phase.

**Question 2** Combien de correcteurs à avance de phase réglés pour apporter chacun  $50^\circ$  au maximum faudrait-il incorporer dans le régulateur pour satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges ?

On souhaite réaliser une simulation du comportement temporel du système ainsi corrigé pour un passage de  $0$  à  $45^\circ$  de l'habitacle en  $0,75$  s. Le signal de consigne est donné sur la Figure Figure 2. Le logiciel de simulation ne possède pas de bloc de signal d'entrée correspondant à ce type de fonction, mais il est possible d'utiliser des blocs de type « rampe » possédant les critères :

- pente de la rampe ;
- instant de départ de la rampe.

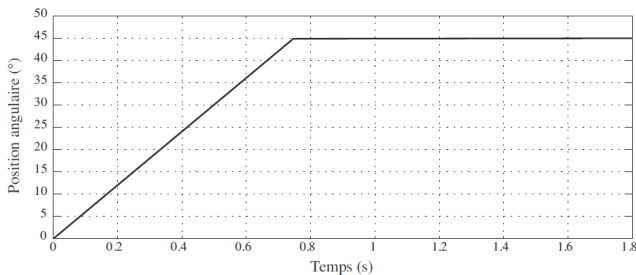


FIGURE 2 – Signal de consigne pour une simulation d'une rotation de  $0$  à  $45^\circ$  en  $0,75$  s

**Question 3** Donner les paramètres à entrer dans les 2 blocs de type « rampes » et préciser l'opération mathématique à effectuer entre les deux blocs afin d'obtenir le signal présenté sur la Figure 2.

La réponse obtenue par la simulation est présentée sur la Figure 3.

**Question 4** Quels sont les critères non satisfaits ?

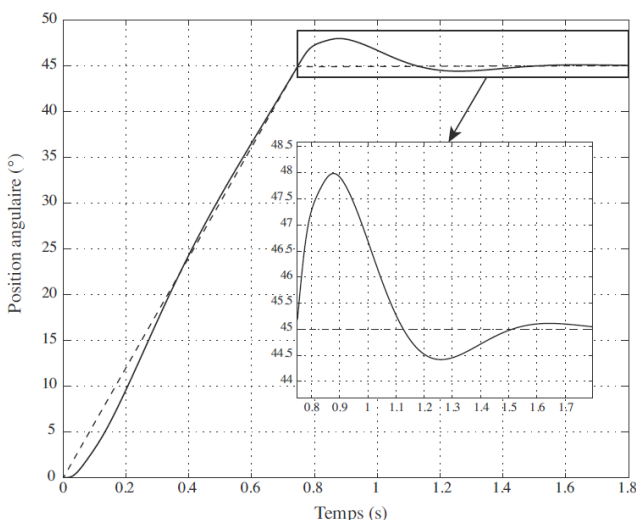


FIGURE 3 – Résultat de la simulation du passage de  $0$  à  $45^\circ$  en  $0,75$  s

## Deuxième correction

Plusieurs réglages du correcteur précédent ont été réalisés mais aucun n'a pu apporter satisfaction quant aux

différents critères du cahier des charges. Le problème de fond ici est lié au fait que la pulsation de coupure  $\omega_v$  du mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin est inférieure à la pulsation à  $0$  dB souhaitée pour garantir une dynamique suffisante du système bouclé. On souhaite donc augmenter la valeur de la pulsation de coupure  $\omega_v$  afin de garantir au moins deux décades d'écart avec la pulsation à  $0$  dB de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

**Question 5** Quelle valeur de diamètre du vérin permet de vérifier la condition précédente. Cette valeur est-elle réaliste ?

On décide alors de remédier à ce problème par un filtre électronique du second ordre de type Notch de fonction de transfert :

$$H_N(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_n}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}{1 + \frac{2\xi_d}{\omega_d}p + \frac{p^2}{\omega_d^2}}$$

Le réglage optimum du correcteur doit compenser parfaitement le mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin. Pour cela, on effectue un essai afin d'identifier les caractéristiques de ce mode. Aucun réglage spécifique du débit de fuite n'a été réalisé, la compensation du mode rendant inutile cette étape.

Une tension de consigne  $u_e(t) = 0,02u(t)$  (avec  $u(t)$  l'échelon unitaire) est envoyée en entrée du servodistributeur. Une génératrice tachymétrique, dont le comportement est modélisé par un gain pur  $K_{gt} = 2 \text{ V rad}^{-1} \text{ s}$ , mesure la vitesse de rotation de l'habitacle. Cette tension est notée  $m_\omega(t)$ . Le résultat de cet essai est donné sur la Figure de la question 24 du Cahier Réponses.

**Question 6** Compléter sur le Cahier Réponses le schéma-blocs représentant cet essai et déterminer la fonction de transfert  $H_{\text{essai}}$  telle que :  $M_\Omega(p) = H_{\text{essai}}(p)U_e(p)$ .

**Question 7** En vous aidant du graphe de la Figure Figure 4, déterminer les valeurs numériques expérimentales de  $\omega_v$  et  $\xi_v$  à partir de la courbe obtenue expérimentalement tracée sur le Cahier Réponses.

**Question 8** Quels inconvénients sur le comportement réel du système peuvent découler de cette méthode consistant à vouloir compenser le mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin par ce type de filtre électronique ?

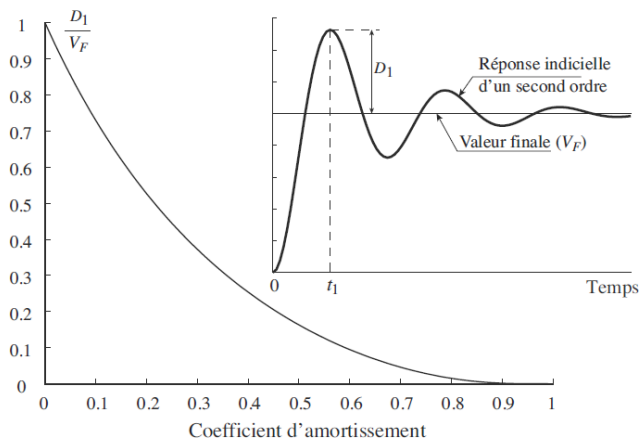


FIGURE 4 – Évolution du premier dépassement relatif à la valeur finale en fonction du coefficient d'amortissement (pour une fonction de transfert du second ordre)

On suppose par la suite que le numérateur du filtre Notch compense parfaitement le mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin. On adopte les caractéristiques suivantes pour le dénominateur :

- $\omega_d = 1000 \text{ rad s}^{-1}$  ;
- $\xi_d = 1$ .

Afin de satisfaire le critère de précision statique du cahier des charges on place un premier correcteur de type intégrateur non unitaire de fonction de transfert :

$$H_{\text{cor2}}(p) = \frac{K_\Omega}{p}.$$

La valeur de  $K_\Omega$  est déterminée afin d'obtenir une pulsation à 0 dB de la fonction de transfert en boucle ouverte de  $65 \text{ rad s}^{-1}$ . Le diagramme de Bode de cette fonction de transfert est donné sur la Figure III.5. On complète le régulateur par un correcteur à avance de phase de fonction de transfert :  $H_{\text{av}}(p) = K_{\text{av}} \frac{1 + a_{\text{av}} \tau_{\text{av}} p}{1 + \tau_{\text{av}} p}$  avec  $a_{\text{av}} > 1$ .

On donne en annexe page 8 la définition d'un correcteur à avance de phase.

**Question 9** Déterminer les valeurs approximatives des paramètres  $a_{\text{av}}$ ,  $\tau_{\text{av}}$  et  $K_{\text{av}}$  qui permettent de satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges tout en conservant une pulsation à 0 dB de  $65 \text{ rad s}^{-1}$ .

Le régulateur étant a priori optimisé, on réalise un essai de validation du comportement temporel de l'inclinaison de l'habitacle, le véhicule étant à l'arrêt. Le calculateur envoie un signal de consigne représentant l'évolution de la position angulaire souhaitée (de 0 à 45° en 0,75 s). La tension délivrée par le capteur angulaire est récupérée par un convertisseur analogique-numérique afin de tracer sur un ordinateur l'évolution temporelle de l'inclinaison de l'habitacle mesurée en degrés. Les deux courbes sont données sur la Figure 6.

**Question 10** Quels sont les critères du cahier des charges validés ?

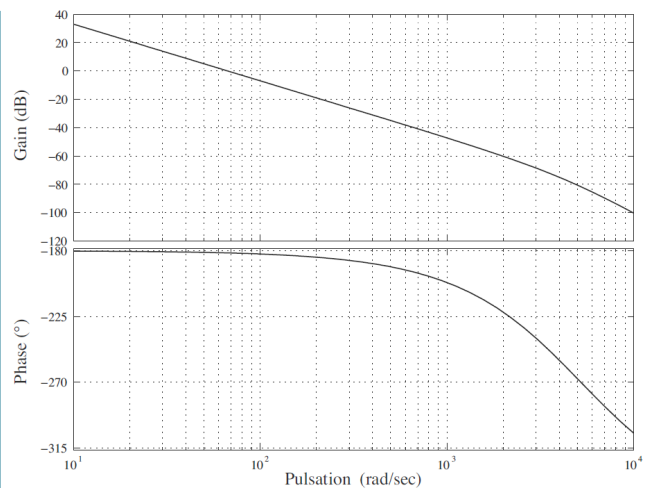


FIGURE 5 – Diagramme de Bode de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte après correction Intégrale

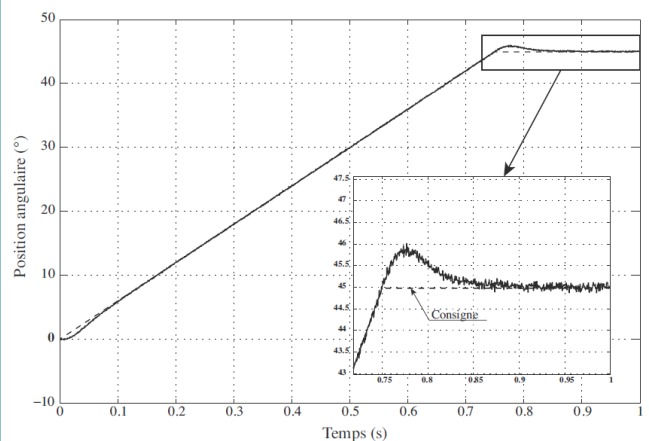
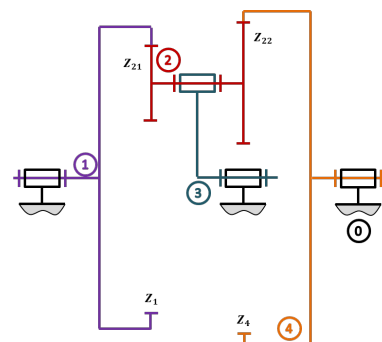


FIGURE 6 – Essai de validation : passage de 0 à 45° en 0,75 s

## Exercice 1 ?? – Train épicycloïdal

Soit le train épicycloïdal suivant.

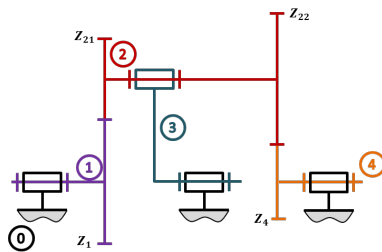


**Question 1** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

**Question 2** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

## Exercice 1 ?? – Train épicycloïdal

Soit le train épicycloïdal suivant.



**Question 1** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

**Question 2** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

## Exercice 189 – Schéma-Blocs et FT

On considère l'asservissement angulaire d'un axe numérique. On note  $\Delta\theta_1$  la grandeur asservie.

### Hypothèses, notations et paramétrage

- Les conditions initiales sont nulles.
- L'équation du mouvement de l'axe est donnée par :  $\Delta C_1(t) = J \frac{d^2 \Delta\theta_1(t)}{dt^2} - k_1 \frac{r'_9}{r_0} h_2 \Delta F_x(t)$  avec  $J = 1,98 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$ ,  $k_1 \frac{r'_9}{r_0} = 0,00717$ ,  $h_2 = 0,2 \text{ m}$ .
- Le couple moteur  $\Delta C_1(t)$  est fourni par une machine à courant continu modélisée par les équations suivantes :  $u_1(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + R i_1(t) + e_1(t)$ ,  $e_1(t) = k_e \frac{d\Delta\theta_1(t)}{dt}$ ,  $\Delta C_1(t) = k_t i_1(t)$  avec  $u_1(t)$  la tension aux bornes du moteur,  $i_1(t)$  l'intensité traversant le moteur et  $e_1(t)$  la force contre électromotrice, avec  $R = 2,07 \Omega$ ,  $k_t = 0,0525 \text{ N mA}^{-1}$ ,  $k_e = 0,0525 \text{ V s rad}^{-1}$ .
- On fait l'hypothèse que l'influence de l'inductance  $L$  est négligeable sur les performances attendues, soit  $L = 0 \text{ H}$ .
- La consigne est notée  $\Delta\theta_{c1}(t)$ .

Le cahier des charges sélectif conduit à choisir un correcteur associant une anticipation (via la présence de  $\sigma_4$  dans la relation suivante) et une correction PID. La tension de commande du moteur est donnée par :  $U_1(p) = (\Delta\theta_{c1}(p) - \Delta\theta_1(p)) \left( \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{p} \right) - \sigma_3 p \Delta\theta_1(p) + \sigma_4 \Delta\theta_{c1}(p)$  avec  $\Delta\theta_{c1}(p)$  la consigne de position angulaire exprimée dans le domaine symbolique.

**Question 1** Compléter le schéma bloc du document réponse (forme littérale des fonctions de transfert).

Pour la suite, on considère la perturbation nulle ( $\Delta F_x(p) = 0$ ).

**Question 2** À partir de ce schéma-blocs, en notant  $H_{processus}(p) = \frac{\Delta\theta_1(p)}{U_1(p)} = \frac{K}{p(1+\tau p)}$ , exprimer  $K$  et  $\tau$  en fonction des données de l'énoncé, puis les calculer numériquement.

**Question 3** Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée, sous forme canonique, notée  $B_F(p) = \frac{\Delta\theta_1(p)}{\Delta\theta_{c1}(p)}$  en fonction de  $K$ ,  $\tau$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  et  $\sigma_4$ .

$$\text{On pose } B'_F(p) = \frac{p - z_0}{(p - p_2)(p - p_1)}.$$

**Question 4** Déterminer  $K'$  tel que  $B_F(p) = K' B'_F(p)$ ,  $K'$  étant un gain constant.

**Question 5** Exprimer les paramètres  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  de la relation du PID en fonction de  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $K$  et  $\tau$ .

Pour information, en poursuivant le calcul, on trouve  $\sigma_4 = \frac{\tau}{K} \left( \frac{p_1^2 p_2}{z_0} - (p_1^2 + 2p_1 p_2) \right)$ .

Le réglage des paramètres du correcteur se fait en fixant judicieusement les pôles et le zéro de  $F(p)$  :

- $p_1$  est choisi pour correspondre au mode d'un système du second ordre. En notant  $z$  le coefficient d'amortissement et  $\omega_0$  la pulsation propre, l'expression retenue pour  $p_1$  est  $p_1 = -z\omega_0$ ;
- $p_2$  est une constante choisie négative. Il sera admis sans justification que  $p_2 = -10$ ;
- $z_0$  est choisi de manière à compenser le pôle  $p_2$ .

Afin d'assurer le non dépassement de la réponse indicielle, tout en assurant un temps de réponse le plus faible possible, on choisit de prendre  $z = 1$  et  $t_{r5\%} = 35 \text{ ms}$ , ce qui implique la relation  $\omega_0 t_{r5\%} = 5$ .

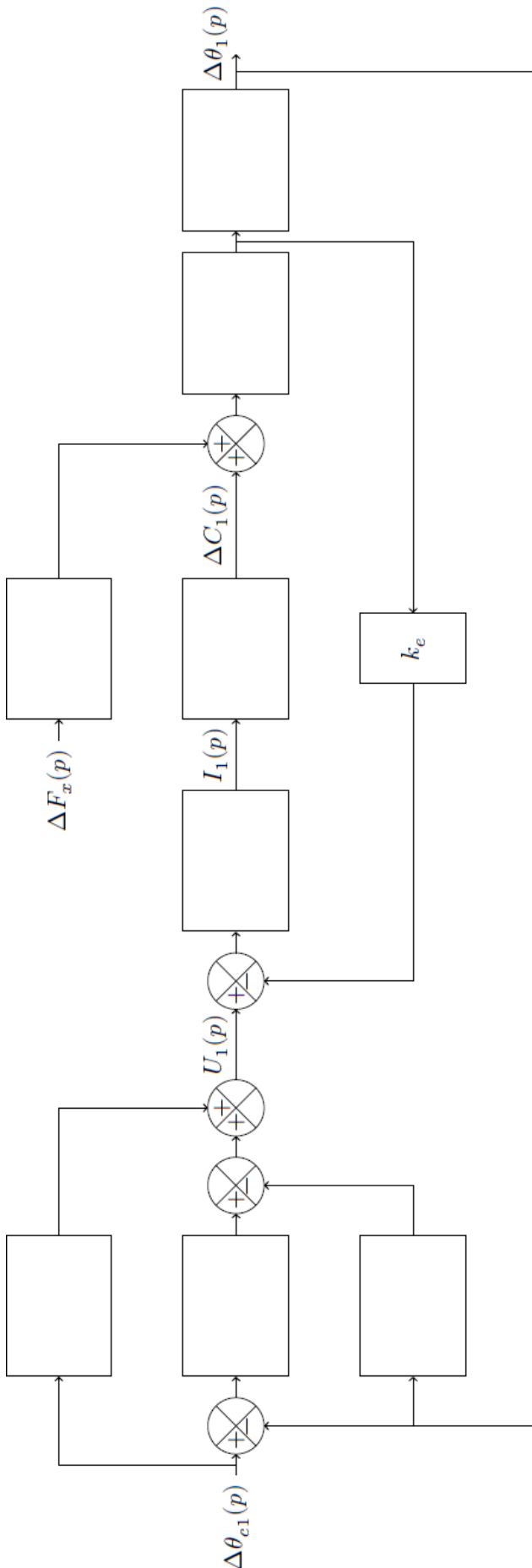
**Question 6** Donner les valeurs numériques de  $p_1$  et de  $z_0$ . En déduire les valeurs numériques des paramètres  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  de la loi de commande.

**Question 7** Le système est-il stable avec le réglage précédent? Justifier sans calcul.

Pour information, on a  $\sigma_4 = -2,23 \text{ V rad}^{-1}$ .

**Question 8** Vérifier, en justifiant la réponse et sans calcul, si les exigences 1.2.2.1, 1.2.2.2 et 1.1.1 sont respectées :

- 1.2.2.1 : l'écart statique en réponse à un échelon doit être nul;
- 1.2.2.2 : aucun dépassement;
- 1.1.1 : l'écart en régime permanent dû à une perturbation en échelon doit être nul.



## Exercice 189 – SLCI – Numérique

**Objectif** Compléter la loi de commande afin de limiter la sensibilité du système aux bruits de mesure.

Le moteur retenu possède les caractéristiques suivantes : tension nominale de 42 V, couple maximal en fonctionnement de 113 mN m. De plus, lorsque la vitesse de rotation de l'arbre moteur est nulle, pour des raisons techniques, la valeur absolue du couple moteur ne doit pas excéder 10 % du couple maximal, soit 11,3 mN m en réponse aux sollicitations dues aux bruits de mesure. Le dimensionnement de la loi de commande effectué à la partie précédente ne prend pas en compte tous les phénomènes indésirables susceptibles de dégrader les performances du système étudié. L'un d'entre eux est le bruit de mesure du capteur de position angulaire des axes moteurs. Le signal brut issu du capteur est de nature analogique. Pour qu'il soit exploitable par le ordinateur, ce signal est numérisé. On obtient alors une image de la position sous la forme d'un ensemble de points. On note  $T_e$  la période d'échantillonnage. On note  $f_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  la valeur d'une fonction continue  $f(t)$  prise au  $k^{\text{e}}$  échantillonnage, c'est-à-dire que  $f_k = f(kT_e)$ . En sortie du convertisseur analogique/numérique, seules les valeurs  $f_k$  pour  $k$  entier sont disponibles. Pour l'axe 1,  $\Delta\theta_1(t)$  est l'angle en sortie du moteur et  $s_k$  est la grandeur numérisée de la position angulaire mesurée. L'imperfection de la chaîne de mesure implique la présence d'une composante aléatoire sur chaque valeur de  $s_k$  image de l'angle  $\delta\theta_1(t)$ , en plus de la composante non aléatoire. Chaque valeur  $s_k$  peut donc se décomposer sous la forme d'une somme d'une composante non aléatoire notée  $s_k^b$ , de variance  $\text{var}(s_k^b)$  identique pour tout  $k$ . De plus,  $s_{k-1}^b$  sont des variables aléatoires indépendantes.

La loi de commande (II.2) est, en pratique, réalisée numériquement. Sa discrétisation conduit à la forme suivante :

$$u_{1k} = \sigma_1 \cdot (s_{ck} - s_k) + \sigma_2 \cdot h(s_{ck} - s_k) - \sigma_3 g(s_k) + \sigma_4 s_{ck}.$$

avec

- $s_{ck}$  la valeur au  $k^{\text{e}}$  instant de l'image de la consigne;
- $h(s_{ck} - s_k)$  une fonction permettant d'approcher l'intégrale d'une grandeur numérisée;
- $g(s_k)$  une fonction permettant d'approcher la dérivée d'une grandeur numérisée;
- $u_{1k}$  la tension de commande du moteur prise au  $k^{\text{e}}$  instant.

Le schéma fonctionnel pour la prise en compte des bruits de mesure est donné figure 10. Pour simplifier, la perturbation due à la réaction du tissu humain sur l'outil n'est pas prise en compte. On suppose que le CNA (Convertisseur Numérique Analogique) n'a pas d'influence sur l'étude menée.

### Modèle utilisé pour la simulation

Ainsi, une simulation a été réalisée pour une consigne en échelon de position nulle ( $\forall k \in \mathbb{N}, s_{ck} = 0$ ) pour visualiser l'impact du bruit de mesure de l'axe 1. De plus, chaque terme  $s_k^b$  est modélisé par une variable aléatoire



suivant une loi normale de moyenne nulle et d'écart type  $3,3 \times 10^{-4}$  rad, soit une variance de  $1,1 \times 10^{-7} \text{ rad}^2$ . La période d'échantillonnage est  $T_e = 100 \mu\text{s}$ .

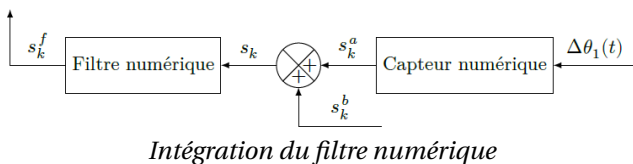
Résultats de la simulation, impact du bruit de mesure

**Question 1** En justifiant, expliquer pourquoi il est nécessaire de filtrer le bruit de mesure en observant les courbes de tension de commande, puis du couple moteur.

**Question 2** En observant la courbe représentative de  $\Delta\theta_1(t)$  de la figure 11, justifier pourquoi les imperfections de la chaîne de mesure n'influencent pas la position angulaire  $\Delta\theta_1(t)$ .

**Question 3** En utilisant les équations du moteur (II.1) et en se plaçant à un point de fonctionnement stabilisé, c'est-à-dire à vitesse nulle, déterminer la valeur numérique maximale (en valeur absolue) de la tension à ne pas dépasser pour que le couple n'excède pas 11,3 mN m en valeur absolue.

Afin de limiter les effets néfastes du bruit de mesure sur le système, un filtre numérique est intégré dans la chaîne de mesure, cf figure 12.



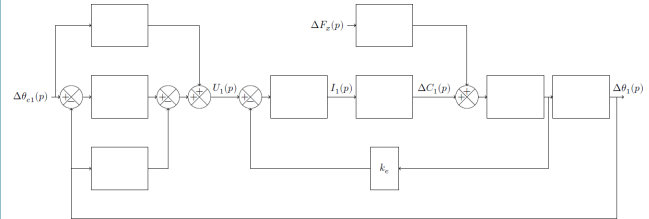
On note  $s_k^f$  la valeur filtrée au  $k$  instant. L'objectif de l'étude qui suit est de limiter la variation de tension engendrée par le bruit de mesure en dimensionnant le filtre. Seul l'impact du bruit est étudié, donc on considère la consigne de position nulle, et au vu des résultats de simulation, on fera dans ce cas l'hypothèse que  $\Delta\theta_1(t) = 0$  rad, ce qui implique  $\forall k \in \mathbb{N}, s_k^a = 0$ . La question précédente a permis de déterminer une valeur absolue maximale de la tension à ne pas dépasser. On admettra que ce résultat impose alors une variance maximale de  $0,02 \text{ V}^2$  pour  $u_{1k}$ . Le filtre numérique retenu est l'équivalent d'un filtre passe-bas analogique du premier ordre, de constante de temps  $T_f$  et de gain statique unitaire.

**Question 4** Dans le cas d'une réalisation analogique du filtre, donner la relation entre  $s^f(t)$ ,  $s(t)$  et  $T_f$ , sous la forme d'une équation différentielle. En déduire l'expression de  $s_k^f$  en fonction de  $s_k$ ,  $s_{k-1}^f$ ,  $T_f$  et  $T_e$  dans le cas d'une réalisation numérique. On retiendra la formule suivante pour la dérivée discrète correspondant à la dérivée continue d'une fonction temporelle  $f(t)$  à l'instant  $t = kT_e$  :  $\frac{f_k - f_{k-1}}{T_e}$  où  $T_e$  est la période d'échantillonnage.

On rappelle que si  $x$  et  $y$  sont des variables aléatoires de variance  $\text{var}(x)$  et  $\text{var}(y)$  respectivement,  $a$  et  $b$  des nombres réels, alors on a :  $\text{var}(ax + b) = a^2 \text{var}(x)$   $\text{var}(x + y) = \text{var}(x) + \text{var}(y) + 2\text{cov}(x, y)$ .

Si les deux variables aléatoires sont indépendantes, alors  $\text{cov}(x, y) = 0$ . L'estimation de la variance du signal filtré, notée  $\text{var}(s_k^f)$ , est nécessaire pour dimensionner le filtre. Plusieurs centaines de simulations ont mon-

tré que l'évolution de  $\text{var}(s_k^f)$  en fonction de  $k$  reste similaire à celle montrée à la figure 13. Pour un nombre d'échantillons suffisamment important, la variance devient constante et sa valeur dépend de  $T_f$ .



**Question 5** Quelle approximation peut-on faire concernant  $\text{var}(s_k^f)$  et  $\text{var}(s_{k-1}^f)$ ? Justifier la réponse.

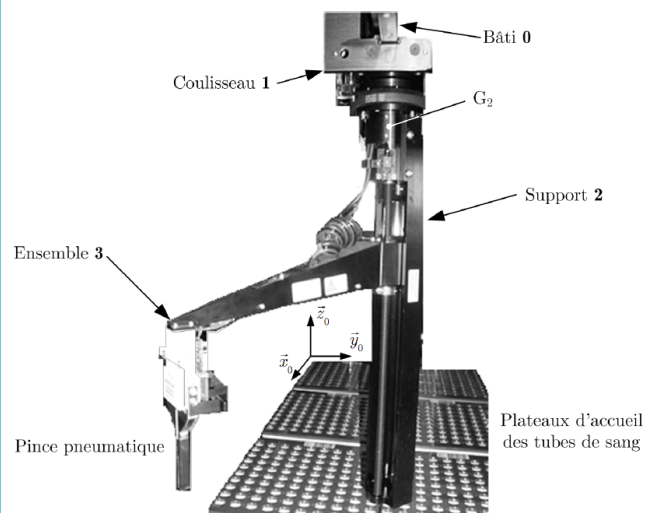
**Question 6** Exprimer alors  $\text{var}(s_k^f)$  en fonction de  $\text{var}(s_k)$ ,  $T_f$  et  $T_e$ .

On admettra que la relation entre  $\text{var}(s_k^f)$  et  $\text{var}(u_{1k})$  en utilisant la loi de commande avec les paramètres du correcteur dimensionné dans la partie précédente est, pour tout  $k$ ,  $\text{var}(u_{1k}) = n_0 \text{var}(s_k^f)$  avec  $n_0 = 6337147$ .

**Question 7** Donner l'expression littérale de  $T_f$ , puis calculer sa valeur en secondes qui permet d'assurer une variance du signal de commande  $\text{var}(u_{1k}) \leq 0,02 \text{ V}^2$ . On rappelle les valeurs suivantes :  $\text{var}(s_k) = 1,1 \times 10^{-7} \text{ rad}^2$ ,  $T_e = 1 \times 10^{-4} \text{ s}$ .

## Exercice 189 – PFD

Le bras implanté sur le système ADVIA WorkCell R, est motorisé selon trois « axes » asservis (appelés « Axe 1 », « Axe 2 » et « Axe 3 » dans la suite) assurant les mouvements de type translation / rotation / translation.



Le bras est constitué de trois solides indéformables : Coulisseau 1, Support 2 et Ensemble bras + pince + tube 3. Les mouvements autorisés entre ces solides sont associés aux trois axes du bras manipulateur et sont paramétrés de la façon suivante.

Mouvements	Axe N° 1	Axe N° 2	Axe N° 3
Pièces considérées	0 et 1	1 et 2	2 et 3
Mouvements	Translation de direction $\vec{x}_0$	Rotation d'axe $(G_2, \vec{z}_0)$	Translation de direction $\vec{z}_0$
Paramètres	$x$	$\theta$	$z$
Amplitudes	$-1 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$	$-\pi/2 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi/2 \text{ rad}$	$0 \leq z \leq 0,3 \text{ m}$

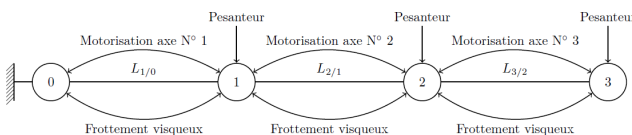
Les amplitudes sont définies depuis la position de référence du bras, dans laquelle il se place après la prise d'origine. Les trois solides ont les caractéristiques suivantes.

Caractéristiques cinétiques	Coulisseau 1	Support 2	Ensemble bras + pince + tube 3
Masses	$m_1$	$m_2$	$m_3$
Centres de gravité $G_i$	$OG_1 = x \vec{x}_0$	$OG_2 = x \vec{x}_0 + d_1 \vec{z}_0$	$OG_3 = x \vec{x}_0 + (d_1 + z) \vec{z}_0 + (d_2 + d) \vec{x}_1$
Moments d'inertie	sans objet	$J_2$ selon l'axe $(G_2, \vec{z}_0)$	$J_3$ selon l'axe $(G_3, \vec{z}_0)$

L'orientation de la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  par rapport à la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est définie par  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ . Valeurs numériques :  $d_1 = 0,2\text{ m}$ ,  $d_2 + d = 0,35\text{ m}$ . Pour chacun des trois axes motorisés, une action mécanique et un frottement visqueux équivalents de l'actionneur  $[M_i]$  associé à l'axe  $i$  sont définis au niveau de la liaison correspondante.

Grandeurs équivalentes rapportées à l'axe	Axe N° 1	Axe N° 2	Axe N° 3
Action mécanique de l'actionneur $[M_i]$ sur l'axe	$F_{M1}$ (en N)	$C_{M2}$ (en N · m)	$F_{M3}$ (en N)
Frottement visqueux	$b_1$ (en N · s · m <sup>-1</sup> )	$f_2$ (en N · m · s · rad <sup>-1</sup> )	$b_3$ (en N · s · m <sup>-1</sup> )

Le « graphe des liaisons et des efforts » (encore appelé « graphe d'analyse ») du modèle mécanique du bras est proposé figure suivante.



**Question 1** Proposer une stratégie d'isolements et de calculs à mettre en œuvre pour déterminer les expressions des actions mécaniques  $F_{M1}$ ,  $C_{M2}$  et  $F_{M3}$  (générées par les actionneurs  $[M_i]$  associés aux trois axes) : on indiquera, l'ensemble isolé, le théorème à utiliser (avec éventuellement le point de calcul) et la direction de projection en justifiant clairement le choix de la méthode adoptée.

À partir de la stratégie d'isolements établie, on obtient les deux équations différentielles suivantes pour les expressions des efforts  $F_{M1}$  et  $F_{M3}$  :

- équation (E1) :  $F_{M1} = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + b_1 \dot{x} - m_3(d_2 + d)(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)$  ;
- équation (E3) :  $F_{M3} = m_3 \ddot{z} + b_3 \dot{z} - m_3 g$ .

**Question 2** Montrer que l'équation différentielle (E2) reliant le couple  $C_{M2}$ , l'angle  $\theta$ , le déplacement  $x$  et leurs dérivées successives est de la forme  $C_{M2} = A\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + C\ddot{x}$  où les termes  $A$ ,  $B$  et  $C$  seront exprimés en fonction des termes  $m_3$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $d_2$ ,  $d$ ,  $f_2$  et  $\theta$ . Les différentes étapes du calcul seront précisément indiquées.

Les évolutions dynamiques associées au bras motorisé lorsque les trois actionneurs sont commandés simultanément sont donc décrites par les trois équations différentielles obtenues précédemment.

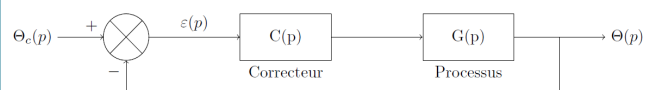
**Question 3** À partir des équations précédentes, justifier que les mouvements de deux des axes sont couplés. Le couplage des mouvements peut créer des accélérations transitoires importantes pouvant induire un risque de débordement du sang du tube saisi par la pince en extrémité du bras à trois degrés de liberté.

## Exercice 189 – Correcteur proportionnel

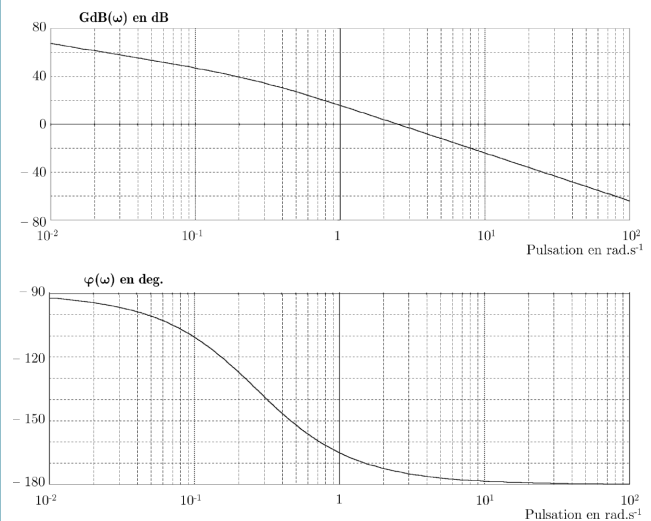
**Objectif** Cette étude a pour objectif de synthétiser les paramètres des correcteurs à implanter afin d'éviter le renversement d'un tube lors de sa mise en place dans le plateau. Dans cette partie, seule la synthèse du correcteur dédié à la commande de l'actionneur  $[M_2]$  associé à l'axe 2 est abordée.

Axe N° 2 (rotation du support 2 par rapport au coulisseau 1)	
Débattement angulaire assuré par l'actionneur $[M_2]$	$90^\circ$
Vitesse maximale de rotation	$40^\circ \cdot \text{s}^{-1}$
Stabilité de l'axe	$M\varphi > 45^\circ$
Amortissement de l'axe	Dépassements transitoires $< 10\%$
Précision de positionnement de l'axe	Écart inférieur à $1^\circ$ en régime stationnaire et en réponse à un échelon
Rapidité de l'axe	Pulsation au gain unité : $\omega_u \geq 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Le correcteur à action proportionnelle est défini par la fonction de transfert suivante :  $C(p) = K$ . On prendra comme Fonction de Transfert de la commande d'axe, la fonction  $G(p) = \frac{K_2}{p(1 + \tau p)}$  et comme architecture de commande le schéma bloc à retour unitaire de la figure suivante.



On fournit le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $G(p)$ .



**Question 1** Justifier, à partir de ce diagramme, que le système en boucle fermée est stable.

**Question 2** Déterminer la valeur de l'écart en régime stationnaire pour un échelon de consigne d'amplitude  $\theta_0$ . Conclure quant au respect du cahier des charges.

Afin de respecter le temps d'exécution, le cahier des charges impose que la pulsation au gain unité de la boucle ouverte  $\omega_u$  soit au moins égale à  $4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

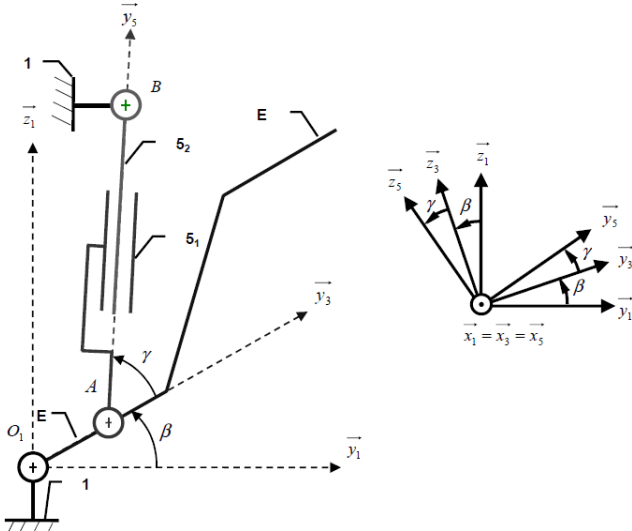
**Question 3** Déterminer la valeur minimale du gain  $K$  du correcteur à action proportionnelle assurant la validation du critère de performance en rapidité. En déduire la valeur de la marge de phase  $M\varphi$  pour cette valeur de  $K$ . Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Exercice 189 – Géométrie – Vérins



**Objectif** Déterminer la course des vérins en fonction de l'amplitude du mouvement ainsi que la pression maximale  $p_{\max}$  dans le circuit hydraulique.

Le modèle cinématique retenu est défini sur la figure suivante.



Le mécanisme est constitué :

- du poutre central fixe 1 : repère associé  $\mathcal{R}_1 = (O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- de l'ensemble  $E = \{\text{bras d'articulation avant } 4 + \text{poutre avant } 3 + \text{roues avant}\}$  : repère associé  $\mathcal{R}_3 = (O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  avec  $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_3) = (\vec{z}_1, \vec{z}_3)$ ;
- du vérin 5 constitué du corps  $5_1$  et de la tige  $5_2$  : repère associé  $\mathcal{R}_5 = (A; \vec{x}_1, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  avec  $\gamma = (\vec{y}_3, \vec{y}_5) = (\vec{z}_3, \vec{z}_5)$ ;
- du vérin 6 non représenté car ayant le même comportement que le vérin 5.

Paramétrage :  $\vec{O_1A} = d_4 \vec{y}_3$ ;  $\vec{AB} = \lambda \vec{y}_5$ ;  $\vec{O_1B} = d_1 \vec{y}_1 + h_1 \vec{z}_1$ .

Valeurs numériques :  $d_4 = 70 \text{ mm}$ ;  $h_1 = 292 \text{ mm}$ ;  $d_1 = 76 \text{ mm}$ ;  $\beta \in [-45^\circ; +30^\circ]$ .

**Question 1** Exprimer  $\lambda$  en fonction de  $d_1$ ,  $h_1$ ,  $d_4$  et  $\beta$ .

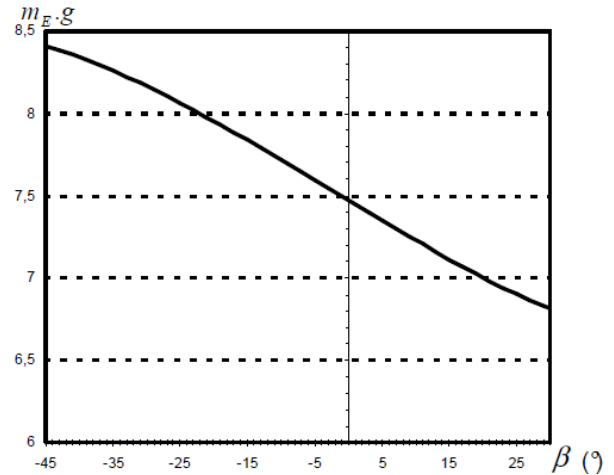
**Question 2** Calculer les valeurs numériques d'élongation minimale  $\lambda_{\min}$ , maximale  $\lambda_{\max}$  ainsi que la course du vérin 5.

L'objectif suivant est d'évaluer les pressions maximales s'exerçant dans le circuit hydraulique dans la configuration d'essai décrite précédemment à savoir :

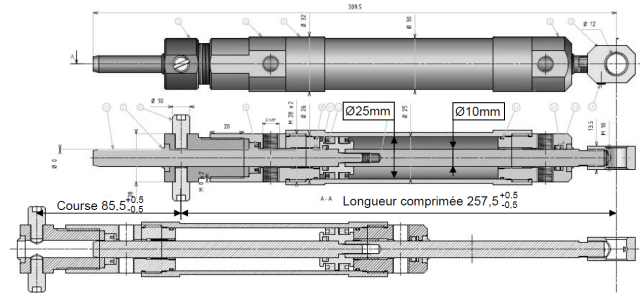
- le poutre central 1 est fixe et placé parallèlement au sol;
- les podes avant 3 et arrière 2 ne sont pas en contact avec le sol et un angle de tangage est alors imposé aux podes avant et arrière par rapport au poutre central.

Sur la figure suivante, l'évolution du rapport entre les efforts exercés par les vérins avant 5 et 6 et le poids de l'ensemble E a été tracée en fonction de l'angle de tangage  $\beta$ . La masse de l'ensemble E est  $m_E = 60 \text{ kg}$ .

$$F_{\text{vérin 5}} + F_{\text{vérin 6}}$$



**Question 3** À partir du tracé précédent et du plan du vérin, déterminer la valeur de la différence de pression maximale  $\Delta P_{\max}$  entre les deux chambres des vérins avant 5 et 6.



La pression minimale dans le circuit hydraulique est supposée constante et égale à  $p_0$  ( $p_0 = 1 \text{ bar}$ ). Des limiteurs de pression tarés à 150 bars sont placés en sortie du distributeur 4/3.

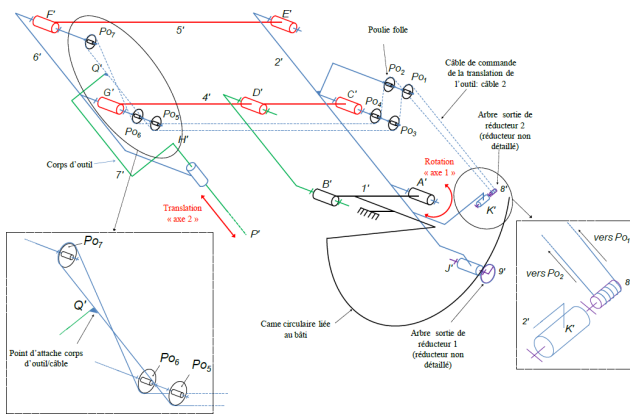
**Question 4** Déterminer l'expression de la pression maximale  $p_{\max}$  dans le circuit hydraulique en fonction de  $p_0$  et  $\Delta P_{\max}$ . Réaliser l'application numérique.

## Exercice 189 – PFD – Robot chirurgical

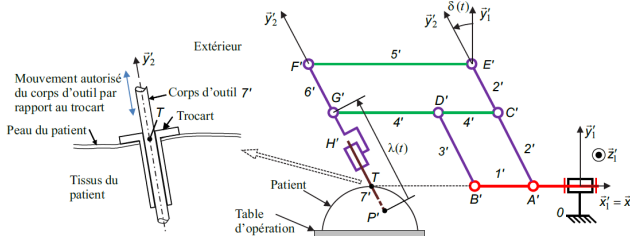
**Objectif** Déterminer les équations du mouvement du bras esclave sous la  $A \vec{q} + B \vec{\dot{q}} + C \vec{\ddot{q}} = \vec{F}$ .

Trois mouvements de l'outil existent :

- la rotation du corps de l'outil 7' par rapport à 6', autour de  $(T, \vec{y}_2')$ , ce mouvement ne sera pas étudié ici;
- la rotation du corps d'outil 7' par rapport au bâti 0 autour de  $(T, \vec{z}_0')$ . La transmission de ce mouvement de l'actionneur dédié jusqu'à 7' est assurée par la structure globale étudiée aux questions précédentes, associée à une came circulaire liée au bâti sur laquelle roule sans glisser le galet 9' ;
- la translation du corps d'outil 7' par rapport au porte-outil 6'. La transmission de ce mouvement de l'actionneur dédié jusqu'à 7' est assurée par un système complexe de câbles donné dans la figure suivante.

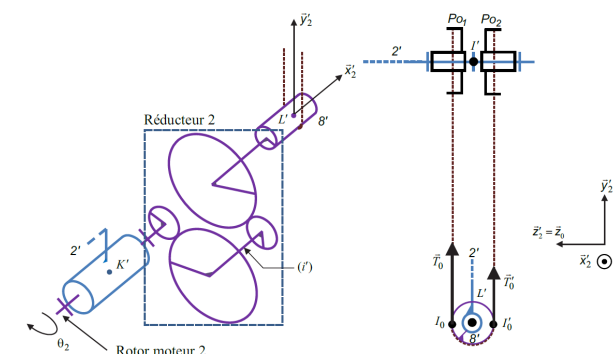


Les trois degrés de liberté du corps d'outil sont obtenus au moyen de la structure retenue (figures précédente et suivante) à laquelle deux axes asservis sont associés. Avec cette structure, une variation de l'angle  $\delta(t)$  n'entraîne pas une variation de  $\lambda(t)$ . Les deux axes sont donc indépendants géométriquement.



Les équations du mouvement des axes 1 et 2 sont nécessaires pour réaliser une synthèse des correcteurs. Dans le cadre de ce sujet, on se limite à la détermination de l'équation du mouvement de l'axe 2 (décrivant l'évolution de la grandeur  $\lambda(t)$ ).

La figure suivante montre le détail du moto-réducteur 2. Pour simplifier, on considère que le câble est enroulé sur un demi-tour du tambour 8'.  $\theta_2$  est l'angle du rotor du moteur par rapport à son stator 2'.



Moto-réducteur (les deux liaisons pivot entre l'arbre intermédiaire (i') d'une part, puis entre l'arbre de sortie du réducteur lié au tambour 8' d'autre part et le solide 2' sont omises)

- Le repère  $\mathcal{R}_0$  est supposé galiléen. La verticale ascendante est  $\vec{y}_0$ .
- Le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison d'un solide  $i$  sur un solide  $j$ , réduit en un point  $M$ , est noté :  $\{\mathcal{T}(i \rightarrow j)\} =$

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(i \rightarrow j)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(M, i \rightarrow j) \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_{M, \mathcal{R}_0}$$

- Le torseur dynamique d'un solide  $i$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ , réduit en un point  $M$ , est noté :  $\{\mathcal{D}(i/j)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_d(i/j)} \\ \delta(M, i/j) \end{array} \right\}_M$
- La force exercée par le tissu humain sur le corps d'outil 7' est modélisée par le glisseur  $(P', \vec{F}_e)$  avec  $\vec{F}_e = F_x(t)\vec{x}_2' + F_y(t)\vec{y}_2'$ .
- L'effort du corps d'outil 7' sur le câble est modélisé par le glisseur  $(Q', \vec{F})$ ,  $Q'$  étant le point d'attache entre le corps d'outil 7' et le câble avec  $\vec{F} = F(t)\vec{y}_2'$ .
- L'action de la pesanteur sur 7' est négligée devant les efforts mis en jeu.
- $H'$  est le centre d'inertie de 7',  $m_7'$  sa masse et  $\overrightarrow{P'H'} = l_0 \vec{y}_2'$ .
- L'action du moteur 2 (utilisé pour le mouvement de translation de l'outil correspondant à l'« axe 2 ») est modélisée par un couple pur :  $\overrightarrow{C_{m2}} = C_{m2}(t)\vec{x}_2'$ .
- On note  $\overrightarrow{C_{red}} = C_{red}\vec{x}_2'$ , le couple moteur ramené à l'arbre de sortie du réducteur 2 solidaire de 8'. Une étude préalable a permis d'obtenir la relation  $C_{red} = \frac{C_{m2}}{k_2}$  ( $k_2$  étant le rapport de transmission du réducteur).
- Les actions mécaniques du câble sur 8' sont modélisées par deux glisseurs en  $I_0$  et  $I_0'$  :  $(I_0, \vec{T}_0)$  et  $(I_0', \vec{T}_0')$  avec  $\vec{T}_0 = \left(T_t + \frac{F(t)}{2}\right)\vec{y}_2'$  et  $\vec{T}_0' = \left(T_t - \frac{F(t)}{2}\right)\vec{y}_2'$  où  $T_t$  représente la valeur algébrique de la pré-tension dans les câbles pour assurer qu'ils soient tendus constamment en cours d'opération, quelle que soit la valeur de  $F(t)$ .
- Le rendement du réducteur est supposé unitaire. Le moment d'inertie du rotor du moteur 2 et des pièces du réducteur 2 sont négligées. La masse des câbles est négligée.

On se propose en premier lieu de déterminer l'expression du couple moteur  $C_{m2}(t)$  en fonction de  $F_y(t)$  et des paramètres du problème tel que

$$C_{m2}(t) = v_1 \left( F_y(t) + m_7' \left( \frac{d^2 \lambda(t)}{dt^2} + v_2 \left( \frac{d\delta(t)}{dt} \right) \right) \right)$$

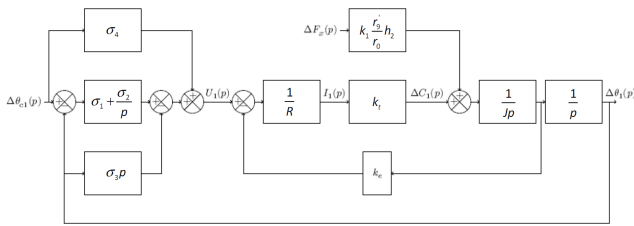
où  $v_1$  et  $v_2$  sont des termes à expliciter en fonction de  $k_2$ ,  $r_8'$ ,  $l_0$ ,  $h_2$  et  $\lambda$ . Le tableau du document réponse donne en partie la démarche de résolution.

**Question 1** Compléter le tableau du document réponse et justifier, sur la copie, le choix du théorème utilisé (équation scalaire) associé à chaque isolement, sans faire aucun calcul.

**Question 2** Mettre en œuvre la démarche proposée pour chaque isolement en détaillant les calculs et exprimer littéralement  $v_1$  et  $v_2$  de l'expression de  $C_{m2}(t)$  donnée plus haut.

## Exercice 189 – SLCI – Calculs

On donne le schéma-blocs suivant.

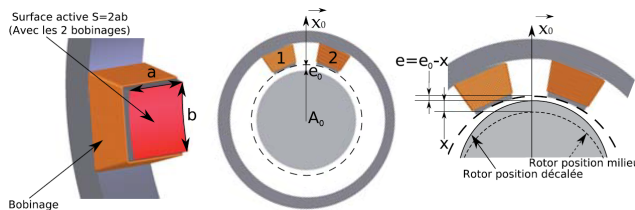


**Question 1** Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée, sous forme canonique, notée  $B_F(p) = \frac{\Delta\theta_1(p)}{\Delta\theta_{c1}(p)}$ .

## Exercice 189 – Modélisation

### Modélisation du comportement d'un couple d'électro-aimants

L'étude porte sur un seul couple d'électro-aimants.



Lorsque le bobinage, enroulé autour de fines plaques en fer doux, est alimenté par un courant  $I$ , un champ magnétique  $B$  apparaît dans l'entrefer entre l'électro-aimant et le rotor, tel que  $N \cdot I = \frac{2e}{\mu_0} B$ .

Ce champ magnétique permet de créer un effort exercé par l'électro-aimant sur le rotor, dans l'axe de l'électro-aimant, tel que  $F = \frac{B^2 S}{2\mu_0}$  où  $S = ab$  est la surface active du couple d'électro-aimants.

### Spécifications de fonctionnement

- L'échauffement maximal des bobinages impose une intensité maximale telle que  $I_{\max} = 5A$ .
- Le champ magnétique maximal dans un matériau ferro-magnétique est limité à  $B_{\max} = 1,8T$ .

Données numériques :

- nombre de spires :  $N = 200$  spires ;
- perméabilité magnétique du vide  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H m^{-1}$  ;
- valeur moyenne  $e_0$  de l'entrefer  $e_0 = 0,2 mm$  ;
- diamètre de l'arbre  $d = 50 mm$  ;
- surface active  $S = 300 mm^2$ .

On note  $\vec{F} = F \vec{x}_0$  l'effort exercé par le couple des électro-aimants sur le rotor selon  $\vec{x}_0$ .

**Question 1** Montrer que le couple des deux électro-aimants permet d'assurer l'effort maximal transmissible tout en respectant les spécifications de fonctionnement.

Un déplacement  $x$ , tel que  $\vec{A_0 A} = x \vec{x}_0$ , de l'arbre par rapport au stator conduit à une modification de l'effort exercé  $F$ . On note  $e_0$  l'entrefer initial pour  $x = 0$  tel que  $e = e_0 - x$ .

**Question 2** Déterminer l'expression de l'effort  $F$  en fonction de  $x$ , de  $I$  et de paramètres géométriques. Peut-on

exercer un effort  $\vec{F}$  suivant  $-\vec{x}_0$  en modifiant  $I$  ou  $e$  ? Déterminer la valeur numérique de la constante  $\gamma$  telle que  $F = \gamma \frac{I^2}{e^2}$ .

### Modélisation d'un palier magnétique actif

Les couples d'électro-aimants sont associés par paires diamétralement opposées. On ne s'intéresse ici qu'au contrôle de la position du rotor selon  $\vec{x}_0$  réalisé par les électro-aimants 1, 2, 5 et 6. Pour simplifier :

- le couple des électro-aimants 1 et 2 crée un effort de norme  $F_1$  sur le rotor,
- le couple des électro-aimants 5 et 6 crée un effort de norme  $F_2$  sur le rotor.

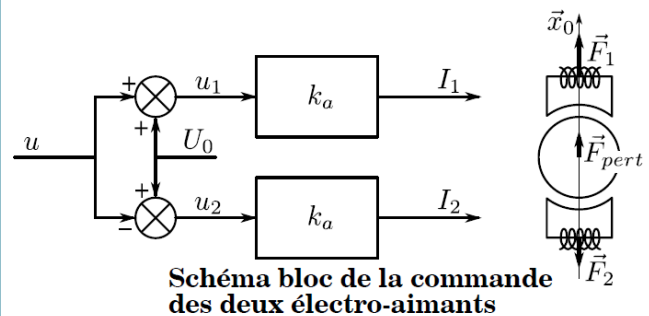


Schéma bloc de la commande des deux électro-aimants

On a :

- $\vec{F}_1 = (F_0 + dF_1) \vec{x}_0$  ;
- $\vec{F}_2 = -(F_0 + dF_2) \vec{x}_0$  ;
- $I_1 = I_0 + dI_1$  ;
- $I_2 = I_0 + dI_2$  ;
- $u = 0 + du$  ;
- $x = 0 + dx$ .

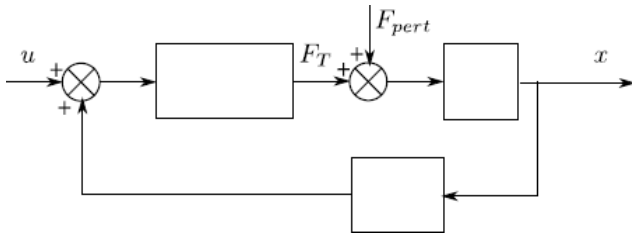
Le point de fonctionnement de chaque couple d'électro-aimants est caractérisé par  $x = 0$ ,  $I = I_0$  et  $F = F_0$  (voir figure 12). On admet que le comportement se traduit par un effort dirigé de l'axe du rotor vers l'électro-aimant tel que  $F_1 = \gamma \frac{I_1^2}{e_1^2}$  et  $F_2 = \gamma \frac{I_2^2}{e_2^2}$  avec  $\gamma = 2 \times 10^{-6} Nm^2 A^{-2}$ .

On note  $\vec{F}_{\text{pert}} = F_{\text{pert}} \vec{x}_0$  un effort perturbateur s'exerçant sur le rotor.

**Question 3** On note désormais  $\vec{F}_T = F_T \vec{x}_0$  l'effort total exercé par les deux couples d'électro-aimants. Montrer que l'expression linéarisée de  $F_T$  peut s'écrire en fonction de  $u$  et  $x$  sous la forme  $F_T = \frac{4\gamma k_a^2 U_0^2}{e_0^2} \left( \frac{u}{U_0} + \frac{x}{e_0} \right)$ .

En première approximation, la masse  $m = 10kg$  du rotor se répartit équitablement au centre de chaque palier magnétique radial. Ceci revient à étudier le comportement dynamique d'une masse ponctuelle (masse  $m/2$ ) placée au centre de chaque palier magnétique radial.

**Question 4** Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la masse ponctuelle (de masse  $m/2$ ) et en déduire une relation entre  $F_T$ ,  $F_{\text{pert}}$  et  $x$ . Compléter le schéma-blocs du palier magnétique ayant pour entrée la tension  $u$  et pour sortie la position  $x$ , et faisant apparaître l'effort perturbateur  $F_{\text{pert}}$ .



**Question 5** Déterminer la fonction de transfert  $H_{PM} = \frac{X(p)}{U(p)}$ . Le système est-il stable? Justifier.

1.  $F = 2F_1 = 357 \text{ N}$ .

2.  $F = \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{8(e_0 - x)^2}$ ,  $\gamma = 1,9 \times 10^{-6} \text{ Nm}^2 \text{ A}^{-2}$ .

3. ...

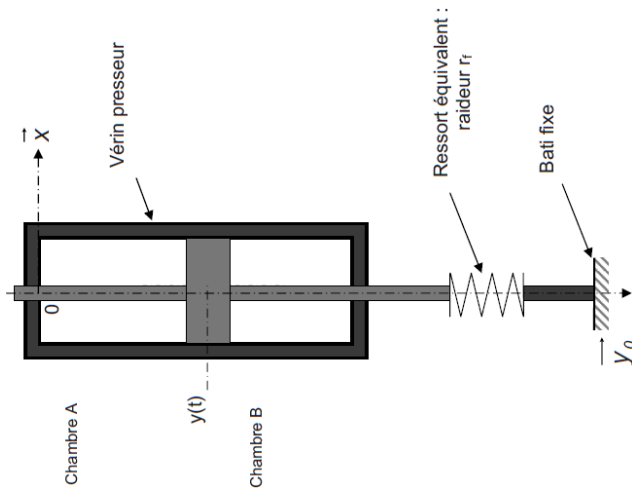
4. ...

5.  $H_{PM} = \frac{8e_0 \gamma k_a^2 U_0}{m p^2 e_0^3 - 8 \gamma k_a^2 U_0^2}$ .

## Exercice 189 – Modélisation

On suppose que l'action mécanique de la pesanteur sur l'ensemble mobile est égale à l'action mécanique de compression du ressort à vide. Cela implique que la norme de l'action mécanique du ressort à prendre en compte est :  $F_{\text{ressort}} = r_f y(t)$ .

Le modèle retenu est donc le suivant (la verticale descendante est suivant  $\vec{y}_0$ ).

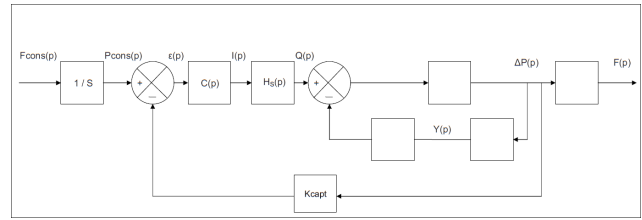


On note  $M$  la masse l'ensemble mobile en translation et  $y(t)$  la position du piston de la tige du vérin selon l'axe  $\vec{y}_0$ .

**Question 1** À partir de la figure précédente et par la méthode de votre choix, déterminer l'équation différentielle liant  $y(t)$  et ses dérivées par rapport au temps,  $M$ ,  $v$ ,  $r_f$ ,  $S$  et  $\Delta p(t)$ .

**Question 2** En supposant les conditions initiales nulles, exprimer dans le domaine de Laplace l'équation établie à la question précédente. En déduire la fonction de transfert  $H(p) = \frac{Y(p)}{P(p)}$ .

**Question 3** À partir de la fonction de transfert  $H(p)$  et de l'équation établie précédemment, compléter le schéma-blocs suivant.



**Question 4** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

1.  $-v \frac{dy(t)}{dt} - r_f y(t) + S \Delta p(t) = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$ .

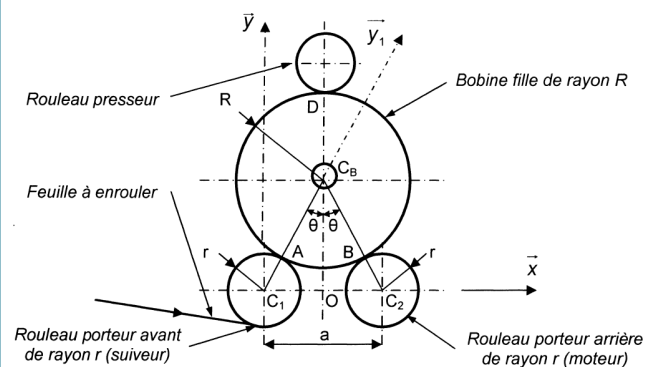
2.  $H(p) = \frac{\frac{S}{r_f}}{1 + \frac{v}{r_f} p + \frac{M}{r_f} p^2}$ .

3. ...

4.  $H_{BO}(p) = \frac{K_S}{1 + T_S p} C(p) K_{capt} \frac{\frac{2B}{Vp} \left( 1 + \frac{v}{r_f} p + \frac{M}{r_f} p^2 \right)}{1 + \frac{2BS^2}{Vr_f} + \frac{v}{r_f} p + \frac{M}{r_f} p^2}$

## Exercice 189 – Modélisation

La figure suivante représente une bobine fille et des rouleaux porteurs.



### Notations

- $C_B$  : centre de la bobine fille de rayon  $R$ .
- $C_1$  : centre du rouleau porteur avant de rayon  $r$ .
- $C_2$  : centre du rouleau porteur arrière de rayon  $r$ .
- $A$  : point de contact entre le rouleau porteur avant et la bobine fille.
- $B$  : point de contact entre le rouleau porteur arrière et la bobine fille.
- $O$  : point milieu entre  $C_1$  et  $C_2$ .
- $a$  : entraxe entre les deux rouleaux porteurs.
- $R$  : rayon de la bobine fille.
- $L$  : longueur de la bobine fille.
- $R_M$  : rayon du mandrin.
- $F$  : force appliquée par le rouleau presseur sur la bobine fille.
- $T$  : tension de la feuille exprimée au point  $A$ .
- $P_B$  : poids de la bobine;

- $R_A$  : effort du rouleau porteur avant sur la bobine fille.
- $R_B$  : effort du rouleau porteur arrière sur la bobine fille.
- $C_M$  : couple d'entraînement appliqué au rouleau arrière (moteur).
- $r$  : rayon du rouleau porteur arrière et du rouleau porteur avant.
- $f = \tan \varphi = 0,3$  : coefficient de frottement du rouleau porteur / papier.
- $\rho_v = 800 \text{ kg m}^{-3}$  : masse volumique du papier.

### Hypothèses

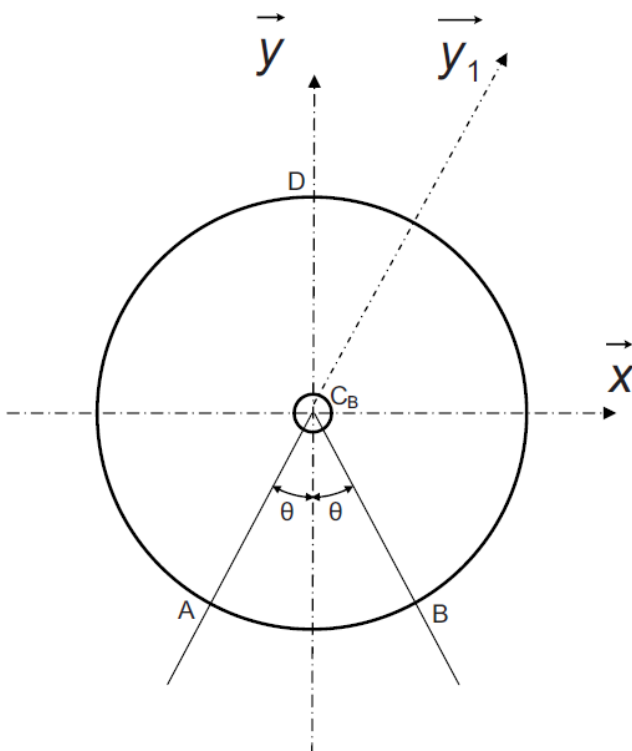
L'élasticité longitudinale de la feuille de papier est supposée négligeable. Les inerties des deux rouleaux porteurs autour de leur axe sont négligeables devant la masse de la bobine. La bobine fille tourne à vitesse constante. L'étude est faite en se plaçant aux conditions limites d'adhérence. On souhaite dans un premier temps, établir la loi de variation temporelle de l'effort presseur nécessaire à l'obtention d'une densité constante.

**Question 1** En considérant que l'empilement des feuilles sur la bobine est homogène, donner l'expression littérale du poids de la bobine. Tracer l'allure de la courbe du poids de la bobine en fonction de son rayon :  $P_B = f(R)$ .

**Question 2** Faire l'application numérique pour une bobine fille de taille maximale.

**Question 3** À partir de la figure précédente en isolant la bobine fille, déterminer une relation vectorielle liant l'effort presseur  $\vec{F}(t)$ ,  $\vec{R}_A$ ,  $\vec{R}_B$ ,  $\vec{P}_B$  et  $\vec{T}$ .

**Question 4** En isolant la bobine fille, représenter sur le document suivant les actions mécaniques au point A et au point B.



**Question 5** En utilisant l'hypothèse sur l'inertie des rouleaux, montrer que l'on peut écrire le couple moteur du rouleau porteur arrière sous la forme  $C_M = r T_B$ , avec  $T_B$  composante tangentielle de l'action  $R_B$ .

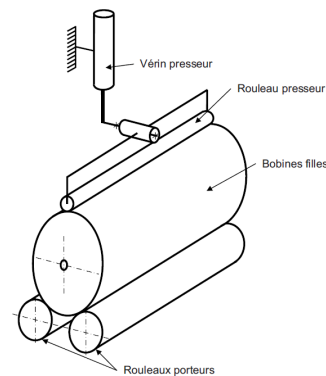
**Question 6** Déterminer l'expression de la tension de la feuille  $T$ .

**Question 7** En projetant la relation vectorielle de la question 4 sur  $\vec{y}$ , donner l'expression de l'effort presseur  $F$  en fonction de  $T$ ,  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $P_B$ ,  $\varphi$  et  $\theta$ .

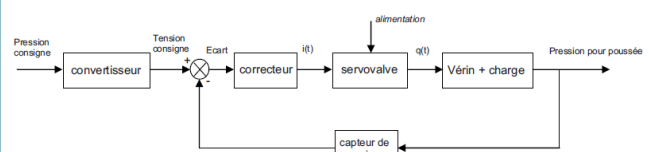
1.  $P_B = \rho_v \pi (R^2 - R_M^2) L g$ .
2.  $P_B = 101\,764 \text{ N}$ .
3.  $\vec{F} + \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{P}_B + \vec{T} = \vec{0}$ .
4. ...
5.  $C_m = r R_B$ .
6.  $T = \frac{R_B \sin(\varphi + \theta) - R_A \sin \theta}{\cos \theta}$
7.  $F = -P_B + R_A \cos \theta + R_B \cos(\varphi + \theta) - (R_B \sin(\varphi + \theta) - R_A \sin \theta) \tan \theta$ .

## Exercice 189 – Modélisation

Le vérin du système presseur est implanté entre le bâti fixe de la machine et le support du rouleau presseur.

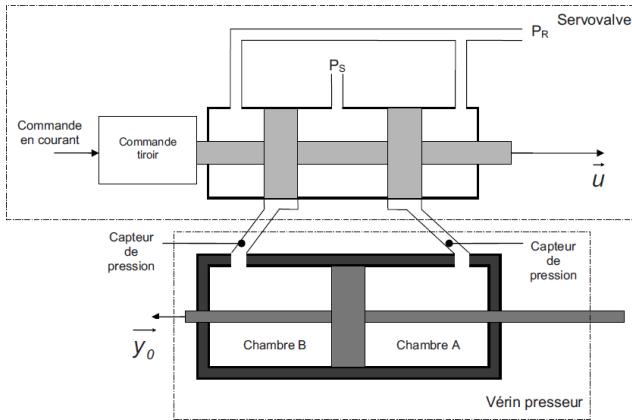


L'asservissement en effort de ce système est réalisé par une servovalve qui permet de réguler la pression et le débit du fluide d'alimentation des vérins. Un système de capteurs de pression permet d'assurer la mesure pour cet asservissement. La figure suivante donne la chaîne fonctionnelle de cet asservissement en effort.



La figure suivante présente un schéma simplifié du système hydraulique au niveau de la servovalve.





### Notation

- $P_S$  : pression de service;
- $P_R$  : pression de refoulement;
- $p_A(t)$  et  $p_B(t)$  : pression dans les chambres A et B du vérin;
- $V_A$  et  $V_B$  : volume des chambres A et B du vérin;
- $q_A(t)$  et  $q_B(t)$  : débit d'alimentation des chambres A et B du vérin;
- $\nu$  : coefficient de frottement visqueux de l'huile;
- $S$  : section utile du piston du vérin;
- $f(t)$  : effort développé par le vérin;
- $i(t)$  : commande de courant de la servovalve;
- $y(t)$  : position du piston de la tige du vérin selon l'axe  $\vec{y}_0$ .

Pour l'ensemble du sujet, les variables de Laplace seront notées en majuscule, et les variables temporelles seront en minuscule. Exemple  $L[f(t)] = F(p)$ .

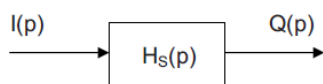
### Fonctionnement

Par une commande en courant  $i(t)$  positive, on déplace le tiroir dans le sens de  $\vec{u}$  positif. La pression dans la chambre A va alors augmenter et celle dans la chambre B va diminuer. La différence de pression ( $p_A(t) - p_B(t)$ ) génère alors un déplacement de la tige du vérin dans le sens de  $\vec{y}_0$  positif.

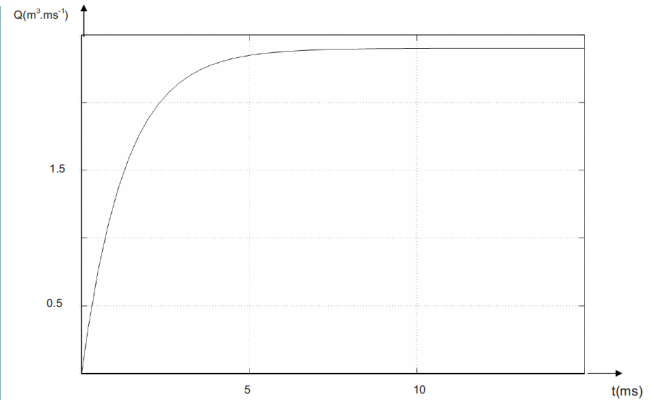
### Hypothèses de travail

- L'huile est supposée compressible, cela se traduit par la relation suivante :  $\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta p}{B}$  avec  $v$  volume du fluide,  $p$  pression du fluide,  $B$  module de compressibilité;
- Le distributeur a un comportement symétrique ce qui implique qu'au repos, en l'absence de charge, la pression dans chaque chambre est supposée égale à  $P_S/2$ .

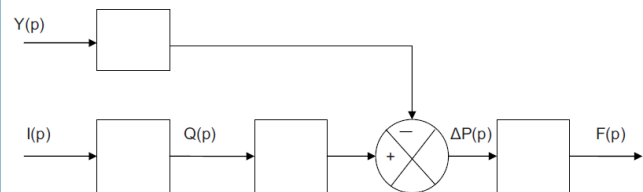
### Modélisation de la servovalve



Un essai constructeur en réponse indicielle unitaire sur la servovalve donne la caractéristique suivante.



**Question 1** Donner les valeurs caractéristiques  $K_S$  et  $T_S$  de la servovalve. Vous préciserez les valeurs numériques ainsi que les unités. Compléter le bloc correspondant sur le schéma-blocs.



### Approche simplifiée : modélisation du vérin seul

Le débit étant faible, on négligera la viscosité de l'huile dans cette partie.

**Question 2** Donner, dans le domaine temporel, l'expression littérale de l'effort développé par le vérin.

**Question 3** En supposant les conditions initiales nulles, exprimer dans le domaine de Laplace l'équation établie à la question précédente. Compléter alors le schéma-blocs.

On donne l'expression littérale du débit  $q_A(t)$  dans la chambre A du vérin :  $q_A(t) = S \frac{dy(t)}{dt} + \frac{V_A}{B} \frac{dp_A(t)}{dt}$ .

Le premier terme de cette expression  $S \frac{dy(t)}{dt}$  correspond au débit engendré par le déplacement du piston du vérin. Le deuxième terme  $\frac{V_A}{B} \frac{dp_A(t)}{dt}$  est dû à la compressibilité du fluide.

**Question 4** Déterminer l'expression littérale reliant le débit  $q_B(t)$ , la pression  $p_B(t)$  dans la chambre B, le déplacement de la tige  $y(t)$ , et les paramètres du système.

On suppose pour la suite de l'étude que le vérin se trouve au voisinage de sa position médiane, ce qui permet de supposer que  $V_A = V_B = V$ . De plus, on pose  $p_A(t) - p_B(t) = \Delta p(t)$  et  $q_A(t) = -q_B(t) = q(t)$ .

**Question 5** À partir des nouvelles données et des expressions précédentes, déterminer la relation littérale liant  $p(t)$ ,  $y(t)$ ,  $q(t)$ , et les paramètres du système.

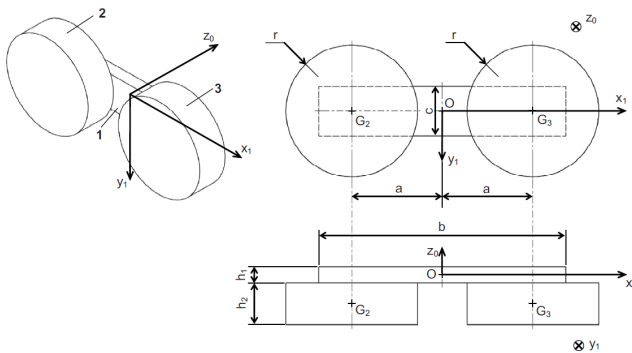
**Question 6** En supposant les conditions initiales nulles, exprimer dans le domaine de Laplace l'équation précédente. Compléter alors le schéma bloc du document réponse DR4.

1.  $K_S = 2,4 \text{ m}^3 \text{ ms}^{-1} \text{ A}^{-1}$  et  $T_S = 1,5 \text{ ms}$ .
2.  $f(t) = (p_A(t) - p_B(t))S$ .

3.  $F(p) = (P_A(p) - P_B(p))S = \Delta(p)S.$
4.  $q_B(t) = -S \frac{dy(t)}{dt} + \frac{V_B}{B} \frac{dp_B(t)}{dt}$
5.  $q(t) = S \frac{dy(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\Delta p(t)}{dt}$
6.  $Q(p) = SpY(p) + \frac{V}{2B} \Delta P(p)$

## Exercice 189 – Modélisation

Les galets 2 et 3 sont de masses identiques  $m_2$  et de centres d'inertie respectifs  $G_2$  et  $G_3$ . Le balancier 1 est de masse  $m_1$  et de centre d'inertie  $O$  (la tige de  $G_3H$  étant de masse négligeable). La géométrie simplifiée, adoptée pour la détermination préalable des caractéristiques d'inertie, est décrite sur la figure suivante. Les solides 1, 2 et 3 sont supposés homogènes.



**Question 1** Donner la forme de la matrice d'inertie du solide 1 au point  $O$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On justifiera la réponse.

**Question 2** Exprimer littéralement le moment d'inertie  $C_1$  du solide 1 par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  en fonction de la masse  $m_1$  et de ses dimensions.

**Question 3** Donner la forme de la matrice d'inertie du solide 2 au point  $G_2$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ . On justifiera la réponse.

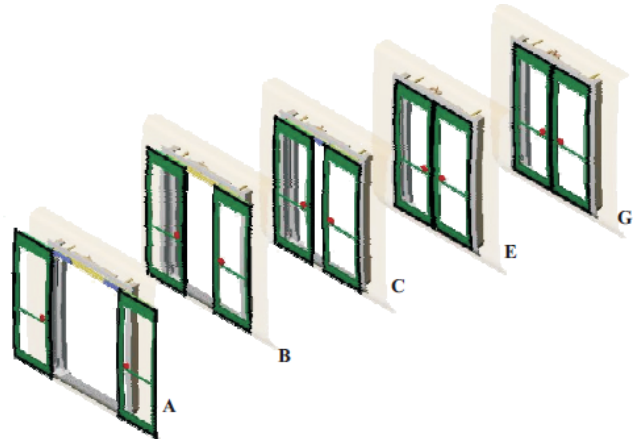
**Question 4** Exprimer littéralement le moment d'inertie  $C'_2$  du solide 2 par rapport à l'axe  $(G_2, \vec{z}_0)$ , en fonction de la masse  $m_2$  et de ses dimensions.

**Question 5** Exprimer littéralement le moment d'inertie  $C'_2$  du solide 2 par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  en fonction de la masse  $m_2$  et de ses dimensions.

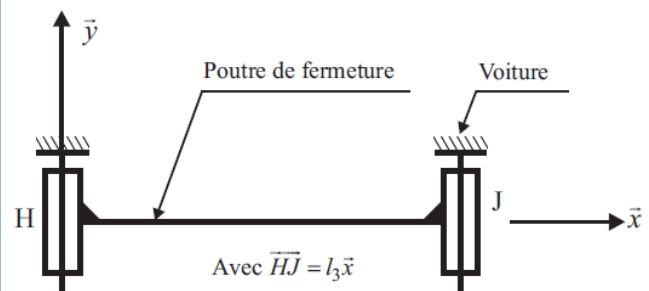
1.  $I_O(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}$ .
2.  $C_1 = \frac{m_1}{12} (b^2 + c^2).$
3.  $I_{G_2}(1) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}$ .
4.  $C'_2 = m_2 \frac{r^2}{2}.$
5.  $C_2 = m_2 \left( \frac{r^2}{2} + a^2 \right).$

## Exercice 189 – Modélisation

Pour respecter les exigences du cahier des charges, les vantaux doivent avoir un mouvement de translation de direction  $\vec{y}$  par rapport à la voiture.



Ce mouvement est assuré par le guidage de la poutre de fermeture grâce à deux boîtes à galets placées aux points  $H$  et  $J$  de la figure suivante qui donne le modèle retenu pour chacune d'elles.



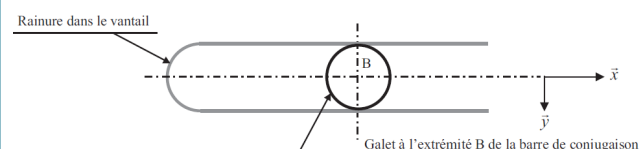
**Objectif** L'objet de cette partie est de trouver la liaison équivalente à l'association de ces deux liaisons.

**Question 1** Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce modèle. En déduire les contraintes géométriques à satisfaire lors de la réalisation.

**Question 2** Proposer une liaison élémentaire cinématiquement équivalente à ces deux liaisons et exprimer son torseur cinématique caractéristique.

**Question 3** Proposer et justifier un modèle pour la liaison élémentaire au point qui rende la liaison résultante isostatique.

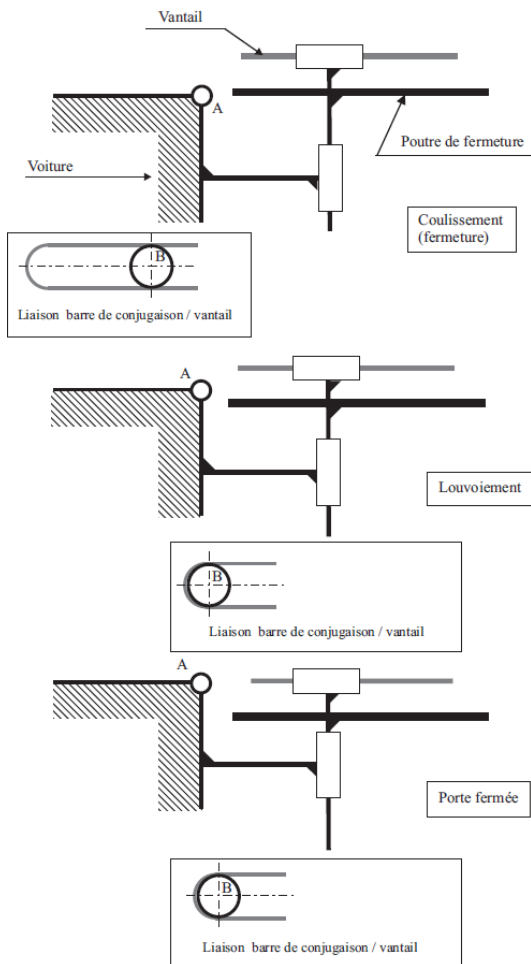
Le document réponse représente les schémas cinématiques du mécanisme pour les trois étapes de fonctionnement.



**Question 4** Compléter les schémas, en représentant la barre de conjugaison et en indiquant pour chaque étape la liaison équivalente entre la barre de conjugaison et le vantail.

R

- Pour la phase coulissement, la barre de conjugaison est parallèle à l'axe.
- Le galet de forme cylindrique est en liaison rotule (ou sphérique) avec la barre de conjugaison

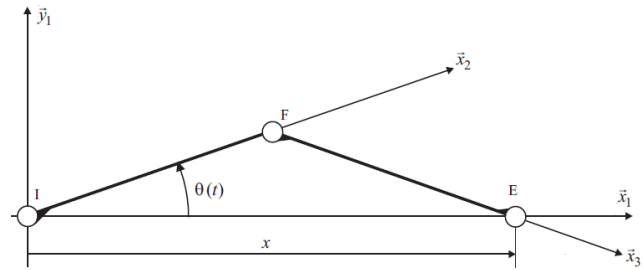


1.  $h = 3$ , parallélisme des axes et entraxe.
2. Glissière de direction  $\vec{y}$ .
3. Liaison sphère plan de normale  $(J, \vec{z})$ .
4. ...

## Exercice 189 – Modélisation

**Objectif** Respecter les normes de sécurité : l'effort de pincement doit être inférieur à 150 N.

Le système de verrouillage doit maintenir la porte fermée sous l'action des passagers et des actions dues aux différences de pressions induites par le système de climatisation. Un calcul préalable a établi que ces actions peuvent être modélisées par une force  $\vec{F}$  basculeur→bielle appliquée au point E, en position porte verrouillée. Le modèle du dispositif retenu est donné sur la figure suivante.



Soit le repère  $\mathcal{R}_1(I; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  tel que  $\vec{x}_1$  soit colinéaire à  $\vec{IE}$  dans toutes les configurations de la bielle de verrouillage FE et du bras IF lié au « stator » du motoréducteur. Les notations retenues sont celles définies sur la figure 4, les liaisons entre la bielle de verrouillage et le basculeur et entre le stator et la poutre de fermeture sont respectivement une liaison pivot d'axe  $(E, \vec{z}_1)$  et une liaison pivot d'axe  $(I, \vec{z}_1)$ .  $(I, \vec{x}_2)$  est lié au stator et tel que  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \theta(t)$ ,  $(F, \vec{x}_3)$  est lié à la bielle de verrouillage et tel que  $\vec{x}_3$  soit colinéaire à  $\vec{FE}$ . Pendant la phase de verrouillage,  $\theta(t)$  varie quand le stator du moto réducteur tourne par rapport à la poutre de fermeture. La vitesse angulaire sera notée  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\vec{IF} = \ell_1 \vec{x}_2$  et  $\vec{FE} = \ell_2 \vec{x}_3$ ; par construction  $\ell_1 \neq \ell_2$ .

**Question 1** Exprimer  $x(t)$  en fonction de  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  et  $\theta(t)$  sous la forme  $x(t) = \lambda_1(t)\ell_1 + \lambda_2(t)\ell_2$ .

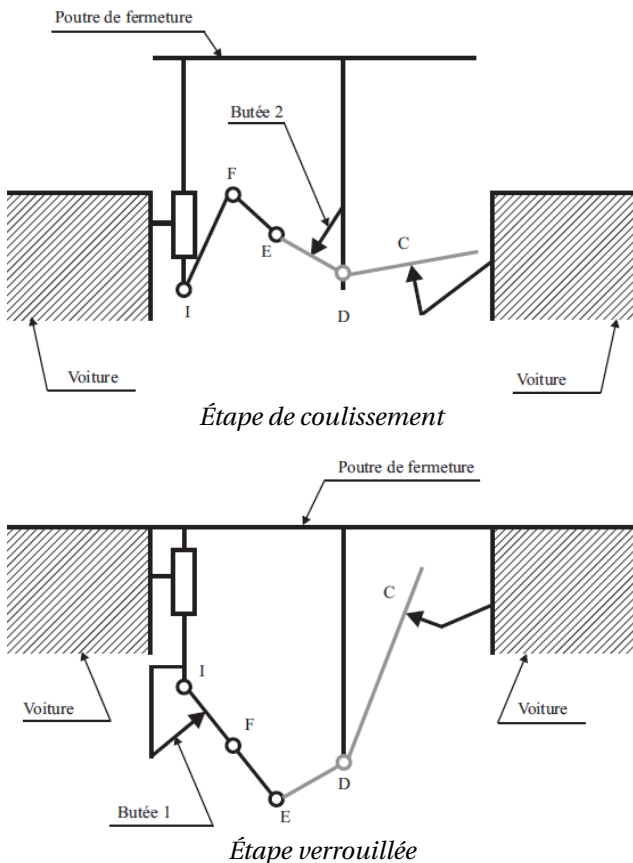
**Question 2** Exprimer la vitesse  $\dot{x}$  du point E appartenant au basculeur dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_1$  en fonction de  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ ,  $\theta(t)$  et  $\dot{\theta}(t)$  sous la forme  $A(\theta)\dot{x} = B(\theta)\dot{\theta}$ .

**Question 3** Montrer qu'il existe une valeur de  $\theta$  pour laquelle le basculeur ne pourra fournir aucune puissance au système. Expliquer pourquoi cette position est instable.

**Question 4** Un tel mécanisme est appelé mécanisme à genouillère. Existe-t-il dans le système de fermeture d'autres cas d'utilisation de ce principe? Dans l'affirmative, indiquer pour chacun, les trois points considérés et le mouvement qui est bloqué.

**Question 5** Expliquer quelle est la fonction des butées 1 et 2 (figures suivantes) et préciser en la justifiant, leur position de réglage?

**Question 6** Expliquer la pertinence de cette solution à empêcher l'ouverture des vantaux quelle que soit la poussée des passagers. Conclure quant à la satisfaction de l'exigence.



1.  $x(t) = \ell_1 \cos \theta + \ell_2 \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta}$ .
2.  $A = \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta}$ ,  $B = -\ell_1 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} - \ell_2 r^2 \sin \theta \cos \theta$ .
3.  $\theta = 0^\circ$ .
4. ...
5. ...

## Exercice 189 – Modélisation

**Objectif** Déterminer les relations entrée/sortie du réducteur qui seront utilisées pour établir les modèles nécessaires aux études portant sur la chaîne d'asservissement.

Vérifier que le temps de fermeture des vantaux est inférieur à 3 s.

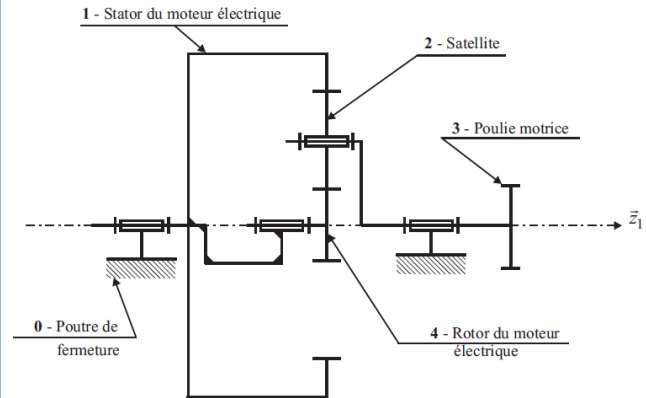
La commande de la chaîne de motorisation est organisée autour de l'asservissement de la vitesse du moteur dont la consigne est une fonction de la position de la porte (cet asservissement sera étudié par la suite). Aussi, afin d'élaborer la consigne de vitesse du moteur, il est nécessaire de connaître sa vitesse de rotation, comparativement à la vitesse du vantail, pendant les différentes phases de fonctionnement. La figure suivante donne le schéma cinématique du moto-réducteur du système étudié. Il comporte :

- un « stator » noté 1, en rotation par rapport à la poutre de fermeture à la vitesse  $\Omega_{1/0} \vec{z}_1$  et lié à une couronne dentée de  $Z_1$  dents.
- un satellite noté 2 en rotation à la vitesse  $\Omega_{2/3} \vec{z}_1$  et comportant  $Z_2$  dents,
- une poulie motrice notée 3 en rotation à la vitesse  $\Omega_{3/0} \vec{z}_1$ , de diamètre  $\Phi_p$  et entraînant la courroie,

- un rotor 4 noté en rotation  $\Omega_{4/0} \vec{z}_1$  à la vitesse et comportant  $Z_4$  dents.

On notera la vitesse du moteur (vitesse angulaire du rotor par rapport au stator)  $\Omega_m = \Omega_{4/1}$ .

Pour des raisons de clarté, on ne considérera que la vitesse d'un seul vantail par rapport à la poutre de fermeture.



### Étape de louvoiemment

Pendant la phase de louvoiemment, pour une vitesse du vantail par rapport à la poutre de fermeture de  $\|\vec{V}_{\text{vantail/poutre}}\| = 0,5 \text{ m s}^{-1}$ , la vitesse de rotation du moteur passe par un maximum. À cet instant, la vitesse de translation de la poutre de fermeture par rapport à la voiture suivant  $\vec{y}$  est de  $0,15 \text{ m s}^{-1}$ ; ce qui donne une vitesse de rotation du stator  $\|\Omega_{1/0} \vec{z}_1\| = 7,3 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 1** Déterminer l'expression de la vitesse du moteur en fonction  $\Omega_m$  en fonction de  $\Omega_{1/0}$ ,  $\Omega_{3/0}$ ,  $Z_1$  et  $Z_4$ .

**Question 2** Effectuer l'application numérique et vérifier la conformité au cahier des charges du moteur :  $\omega_{\max} = 1000 \text{ tr min}^{-1}$ .

Application numérique :  $\Phi_p = 80 \text{ mm}$ ,  $Z_1 = 60$  dents,  $Z_4 = 10$  dents.

### Étape de verrouillage

**Question 3** Déterminer l'expression de la vitesse du moteur  $\Omega_m$  en fonction de  $\Omega_{1/0}$ ,  $Z_1$ ,  $Z_4$ .

### Étape de coulissement

Pendant la phase de coulissement, la vitesse des vantaux par rapport à la poutre de fermeture est égale à  $\vec{V}_{\text{vantail/poutre}} = v \vec{x}$ .

**Question 4** Donner l'expression de la vitesse du moteur  $\Omega_m$  en fonction de  $v$ ,  $\Phi_p$ ,  $Z_1$ ,  $Z_4$ .

**Question 5** En supposant que les phases de louvoiemment et de verrouillage ont une durée totale de 1,5 s, vérifier que la vitesse maximale du moteur, permet d'assurer le temps de fermeture exigé par le cahier des charges.

On rappelle que pendant l'étape de coulissement l'écartement des vantaux passe de 1300 mm à 200 mm.

1.  $\Omega_m = \Omega_{4/1} = (\Omega_{3/0} - \Omega_{1/0}) \frac{Z_1 + Z_4}{Z_4}$ .
2.  $\Omega_m = \Omega_{4/1} = 348 \text{ tr min}^{-1}$ .
3.  $\Omega_m = \Omega_{4/1} = (-\Omega_{1/0}) \frac{Z_1 + Z_4}{Z_4}$ .



4.  $\Omega_m = \Omega_{4/1} = \frac{2\nu(Z_4 + Z_1)}{\Phi_P Z_4}$ .
5.  $\Omega_m = 613 \text{ tr min}^{-1}$ .

## Exercice 189 – Modélisation

**Objectif** Définir le modèle de commande qui sera utilisé pour l'étude et l'analyse du régulateur de la chaîne d'asservissement.

Pour des raisons de simplicité, l'étude du modèle sera faite uniquement pendant la phase de verrouillage. Bien que pendant cette phase, les déplacements de la porte se fassent suivant les deux directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , dans un souci d'obtenir des modèles de comportement simples, on supposera, au regard du dimensionnement adopté, que le déplacement suivant  $\vec{x}$  est négligeable dans la phase considérée. La validation de cette hypothèse ne rentrera pas dans le cadre de cette étude.

### Notations

- $I_S$  : moment d'inertie du stator du motoréducteur suivant l'axe  $(I, \vec{z}_1)$ .
- $I_R$  : moment d'inertie du rotor suivant  $(I, \vec{z}_1)$ .
- $M_y$  : ensemble des masses en déplacement suivant la direction  $\vec{y}$ .
- $N$  : rapport, supposé constant, entre les vitesses angulaires du rotor et du stator  $\Omega_{4/1} = N\Omega_{1/0}$ . On utilisera par la suite les notations suivantes  $\Omega_S = \Omega_{1/0}$  et  $\Omega_m = \Omega_{4/1}$ .
- $N_1(\theta_m)$  : rapport entre la vitesse d'un vantail par rapport à la voiture suivant  $\vec{y}$  et la vitesse du stator  $\Omega_S$ , soit  $V_y = N_1(\theta_m)\Omega_S$  où  $\theta_m$  désigne l'angle de rotation du rotor par rapport au stator.
- $C_m$  : couple moteur.
- $\vec{F}$  : force exercée par le(s) passager(s) suivant l'axe  $\vec{y}$  avec  $\vec{F} = F(t)\vec{y}$  (force due par exemple, à une « pression » exercée par les passagers en cas de surcharge).

On suppose que pendant les opérations d'ouverture/fermeture la voiture est immobile par rapport au sol dont tout repère  $\mathcal{R}_g$  qui lui est attaché est considéré comme galiléen.

**Question 1** Montrer que l'évolution de la vitesse de rotation du stator est régie par l'équation différentielle suivante :  $I_{eq}(\theta_m)\dot{\Omega}_S = AC_m - B(\theta_m)\Omega_m^2 - C(\theta_m)F$ . Exprimer  $I_{eq}(\theta_m)$ ,  $A$ ,  $B(\theta_m)$  et  $C(\theta_m)$  en fonction de  $I_S$ ,  $I_R$ ,  $M_y$ ,  $N$ ,  $N_1(\theta_m)$  et  $N'_1(\theta_m)$  où  $N'_1(\theta_m) = \frac{\partial N_1(\theta_m)}{\partial \theta_m}$ . On suppose que toutes les liaisons sont parfaites et que l'action de la pesanteur est négligée pour toutes les pièces.

L'objectif de cette question est de définir un modèle de comportement linéaire permettant de synthétiser un régulateur pour la chaîne d'asservissement du moteur. On note :

- $\Omega_{m0}$  la vitesse de rotation du moteur, supposée constante ;
- $\theta_{m0}(t)$  la position angulaire de l'arbre moteur.

La linéarisation sera effectuée en utilisant l'équation différentielle obtenue à la question précédente et les équations

de comportement d'une machine à courant continu.

L'inductance d'induit sera négligée, soit  $L = 0$ . L'ensemble des relations nécessaire à la mise en place du modèle est :

- $I_{eq}(\theta_m)\dot{\Omega}_S = AC_m - B(\theta_m)\Omega_m^2 - C(\theta_m)F$ .
- $u(t) = Ri_m(t) + K_e\Omega_m(t)$ ,
- $C_m(t) = K_c i_m(t)$ .

**Question 2** Préciser les relations liant :

- le couple moteur  $C_{m0}(\theta_{m0})$ , la vitesse de rotation  $\Omega_{m0}$  et la force due à la poussée des passagers  $F(t) = F_0$  supposée constante en fonction de  $A$ ,  $B$  et  $C$  ;
- le couple moteur  $C_{m0}(\theta_{m0})$  à la tension  $U_0(\theta_{m0})$  aux bornes de l'induit en fonction de la vitesse du moteur  $\Omega_{m0}$  et des paramètres du moteur.

Soient les variations  $c_{m1}(t)$ ,  $\Omega_1(t)$ ,  $f_1(t)$  et  $u_1(t)$  autour du régime d'équilibre déterminé à la question précédente :  $C_m(t) = C_{m0}(\theta_{m0}) + c_{m1}(t)$ ,  $\Omega_m(t) = \Omega_{m0} + \Omega_1(t)$ ,  $F(t) = F_0 + f_1(t)$  et  $u(t) = U_0(\theta_{m0}) + u_1(t)$ .

**Question 3** Déterminer une équation différentielle, à paramètres variant dans le temps, décrivant l'évolution de la variation de vitesse du moteur  $\Omega_1$  autour du point de fonctionnement décrit par  $(\theta_{m0}, \Omega_{m0}, F_0, U_0)$ . Exprimer cette équation sous la forme :  $\tau(\theta_{m0})\dot{\Omega}_1(t) + \Omega_1(t) = K(\theta_{m0})u_1(t) - D(\theta_{m0})f_1(t)$ . Exprimer les paramètres  $\tau$ ,  $K$  et  $D$  en fonction de  $I_{eq}$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $N$ ,  $\Omega_{m0}$  et les paramètres du moteur.

La position  $\theta_{m0}$  de l'arbre moteur variant dans le temps, les coefficients de l'équation différentielle précédente peuvent être modélisés comme des paramètres incertains qu'il est possible d'écrire sous la forme d'une partie connue constante et d'une variation, soit :  $\tau(\theta_{m0}) = \tau_0(1 + \delta\tau)$ ,  $K(\theta_{m0}) = K_0(1 + \delta K)$  et  $D(\theta_{m0}) = D_0(1 + \delta d)$ .

**Question 4** En supposant en première approximation que les variations sont nulles, déterminer les fonctions de transfert  $\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)}$  et  $\frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  en les écrivant sous une forme canonique en fonction de  $\tau_0$ ,  $K_0$  et  $D_0$ .



L'analyse du comportement dû aux variations des paramètres ne fait pas partie de cette étude.

**Question 5** Montrer que la fonction de transfert  $\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)}$  peut être approchée sous la forme  $\frac{K_1}{p}$ . Préciser le domaine de validité et exprimer  $K_1$  en fonction de  $\tau_0$  et  $K_0$ .

1.  $I_{eq}(m) = I_S + I_R(N+1)^2 + M_y(N_1(\theta_m))^2$ ,  $A = N$ ,  $B = \frac{M_y N_1(\theta_m) N'_1(\theta_m)}{N}$  et  $C(\theta_m) = -N_1(\theta_m)$ .
2.  $AC_{m0} - B(\theta_{m0})\Omega_{m0}^2 - C(\theta_{m0})F_0 = 0$  et  $C_{m0}(t) = \frac{K_C}{R}(U_0 - K_e\Omega_{m0})$ .
3.  $\frac{RI_{eq}(\theta_m)}{N(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})}\dot{\Omega}_1 + \Omega_1 = \frac{AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0}}{AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0}}u_1 - \frac{RC(\theta_m)}{AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0}}f_1$ .
4.  $\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)} = \frac{K_0}{1 + \tau_0 p}$  et  $\frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)} = -\frac{D_0}{1 + \tau_0 p}$ .
5. ...



## Exercice 189 – Modélisation

**Objectif** Définir le modèle de commande qui sera utilisé pour l'étude et l'analyse du régulateur de la chaîne d'asservissement.

Pour des raisons de simplicité, l'étude du modèle sera faite uniquement pendant la phase de verrouillage. Bien que pendant cette phase, les déplacements de la porte se fassent suivant les deux directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , dans un souci d'obtenir des modèles de comportement simples, on supposera, au regard du dimensionnement adopté, que le déplacement suivant  $\vec{x}$  est négligeable dans la phase considérée. La validation de cette hypothèse ne rentrera pas dans le cadre de cette étude.

### Notations

- $I_S$  : moment d'inertie du stator du motoréducteur suivant l'axe  $(I, \vec{z}_1)$ .
- $I_R$  : moment d'inertie du rotor suivant  $(I, \vec{z}_1)$ .
- $M_y$  : ensemble des masses en déplacement suivant la direction  $\vec{y}$ .
- $N$  : rapport, supposé constant, entre les vitesses angulaires du rotor et du stator  $\Omega_{4/1} = N\Omega_{1/0}$ . On utilisera par la suite les notations suivantes  $\Omega_S = \Omega_{1/0}$  et  $\Omega_m = \Omega_{4/1}$ .
- $N_1(\theta_m)$  : rapport entre la vitesse d'un vantail par rapport à la voiture suivant  $\vec{y}$  et la vitesse du stator  $\Omega_S$ , soit  $V_y = N_1(\theta_m)\Omega_S$  où  $\theta_m$  désigne l'angle de rotation du rotor par rapport au stator.
- $C_m$  : couple moteur.
- $\vec{F}$  : force exercée par le(s) passager(s) suivant l'axe  $\vec{y}$  avec  $\vec{F} = F(t)\vec{y}$  (force due par exemple, à une « pression » exercée par les passagers en cas de surcharge).

On suppose que pendant les opérations d'ouverture/fermeture la voiture est immobile par rapport au sol dont tout repère  $\mathcal{R}_g$  qui lui est attaché est considéré comme galiléen.

**Question 1** Montrer que l'évolution de la vitesse de rotation du stator est régie par l'équation différentielle suivante :  $I_{eq}(\theta_m)\dot{\Omega}_S = AC_m - B(\theta_m)\Omega_m^2 - C(\theta_m)F$ . Exprimer  $I_{eq}(\theta_m)$ ,  $A$ ,  $B(\theta_m)$  et  $C(\theta_m)$  en fonction de  $I_S$ ,  $I_R$ ,  $M_y$ ,  $N$ ,  $N_1(\theta_m)$  et  $N'_1(\theta_m)$  où  $N'_1(\theta_m) = \frac{\partial N_1(\theta_m)}{\partial \theta_m}$ . On suppose que toutes les liaisons sont parfaites et que l'action de la pesanteur est négligée pour toutes les pièces.

L'objectif de cette question est de définir un modèle de comportement linéaire permettant de synthétiser un régulateur pour la chaîne d'asservissement du moteur. On note :

- $\Omega_{m0}$  la vitesse de rotation du moteur, supposée constante ;
- $\theta_m(t)$  la position angulaire de l'arbre moteur.

La linéarisation sera effectuée en utilisant l'équation différentielle obtenue à la question précédente et les équations de comportement d'une machine à courant continu.

L'inductance d'induit sera négligée, soit  $L = 0$ . L'ensemble des relations nécessaire à la mise en place du modèle est :

- $I_{eq}(\theta_m)\dot{\Omega}_S = AC_m - B(\theta_m)\Omega_m^2 - C(\theta_m)F$ .
- $u(t) = R i_m(t) + K_e \Omega_m(t)$ ,
- $C_m(t) = K_c i_m(t)$ .

**Question 2** Préciser les relations liant :

- le couple moteur  $C_{m0}(\theta_{m0})$ , la vitesse de rotation  $\Omega_{m0}$  et la force due à la poussée des passagers  $F(t) = F_0$  supposée constante en fonction de  $A$ ,  $B$  et  $C$  ;
- le couple moteur  $C_{m0}(\theta_{m0})$  à la tension  $U_0(\theta_{m0})$  aux bornes de l'induit en fonction de la vitesse du moteur  $\Omega_{m0}$  et des paramètres du moteur.

Soient les variations  $c_{m1}(t)$ ,  $\Omega_1(t)$ ,  $f_1(t)$  et  $u_1(t)$  autour du régime d'équilibre déterminé à la question précédente :  $C_m(t) = C_{m0}(\theta_{m0}) + c_{m1}(t)$ ,  $\Omega_m(t) = \Omega_{m0} + \Omega_1(t)$ ,  $F(t) = F_0 + f_1(t)$  et  $u(t) = U_0(\theta_{m0}) + u_1(t)$ .

**Question 3** Déterminer une équation différentielle, à paramètres variant dans le temps, décrivant l'évolution de la variation de vitesse du moteur  $\Omega_1$  autour du point de fonctionnement décrit par  $(\theta_{m0}, \Omega_{m0}, F_0, U_0)$ . Exprimer cette équation sous la forme :  $\tau(\theta_{m0})\dot{\Omega}_1(t) + \Omega_1(t) = K(\theta_{m0})u_1(t) - D(\theta_{m0})f_1(t)$ . Exprimer les paramètres  $\tau$ ,  $K$  et  $D$  en fonction de  $I_{eq}$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $N$ ,  $\Omega_{m0}$  et les paramètres du moteur.

La position  $\theta_{m0}$  de l'arbre moteur variant dans le temps, les coefficients de l'équation différentielle précédente peuvent être modélisés comme des paramètres incertains qu'il est possible d'écrire sous la forme d'une partie connue constante et d'une variation, soit :  $\tau(\theta_{m0}) = \tau_0(1 + \delta\tau)$ ,  $K(\theta_{m0}) = K_0(1 + \delta K)$  et  $D(\theta_{m0}) = D_0(1 + \delta d)$ .

**Question 4** En supposant en première approximation que les variations sont nulles, déterminer les fonctions de transfert  $\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)}$  et  $\frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)}$  en les écrivant sous une forme canonique en fonction de  $\tau_0$ ,  $K_0$  et  $D_0$ .

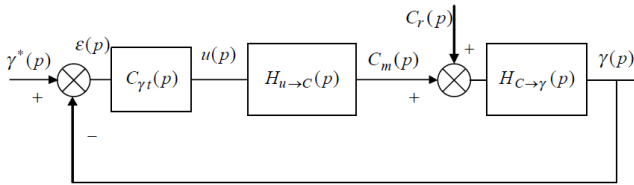
**R** L'analyse du comportement dû aux variations des paramètres ne fait pas partie de cette étude.

**Question 5** Montrer que la fonction de transfert  $\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)}$  peut être approchée sous la forme  $\frac{K_1}{p}$ . Préciser le domaine de validité et exprimer  $K_1$  en fonction de  $\tau_0$  et  $K_0$ .

- $I_{eq}(m) = I_S + I_R(N+1)^2 + M_y(N_1(\theta_m))^2$ ,  $A = N$ ,  $B = \frac{M_y N_1(\theta_m) N'_1(\theta_m)}{N}$  et  $C(\theta_m) = -N_1(\theta_m)$ .
- $AC_{m0} - B(\theta_{m0})\Omega_{m0}^2 - C(\theta_{m0})F_0 = 0$  et  $C_{m0}(t) = \frac{K_C}{R}(U_0 - K_e \Omega_{m0})$
- $\frac{R I_{eq}(\theta_m)}{N(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})}\dot{\Omega}_1 + \Omega_1 = \frac{AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0}}{AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0}}u_1 - \frac{RC(\theta_m)}{AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0}}f_1$
- $\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)} = \frac{K_0}{1 + \tau_0 p}$  et  $\frac{\Omega_1(p)}{F_1(p)} = -\frac{D_0}{1 + \tau_0 p}$ .
- ...

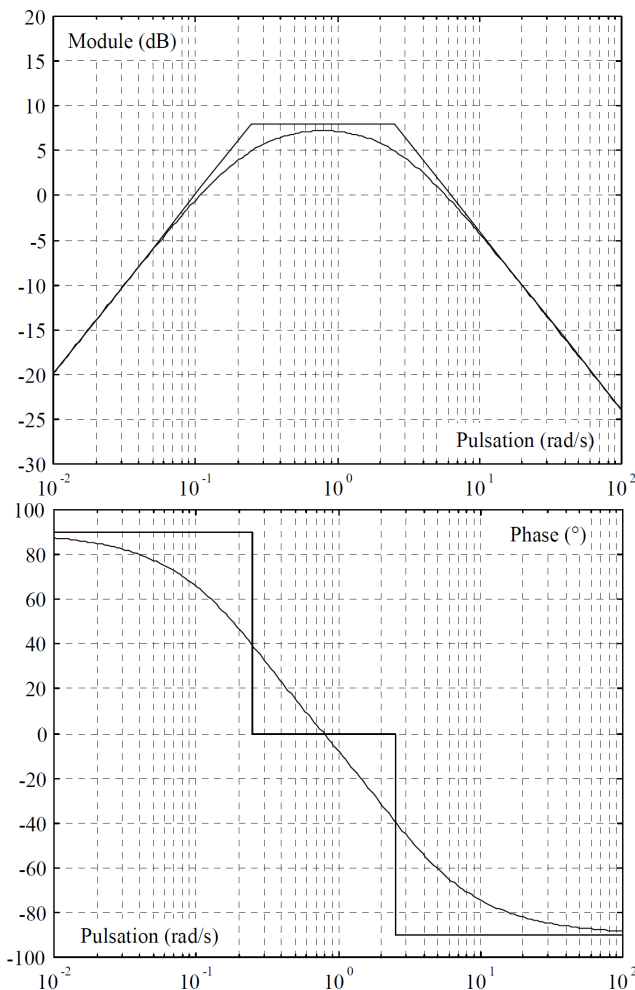
## Exercice 189 – Modélisation

Le schéma-bloc global de l'asservissement de l'accélération en phase de traction est représenté figure suivante.

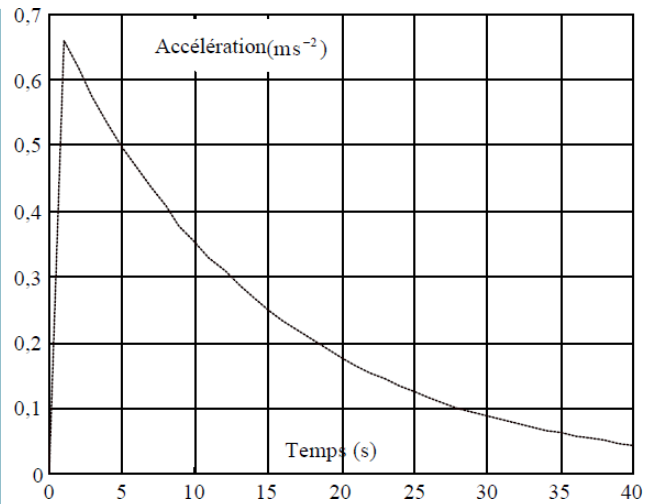


On adoptera par la suite les fonctions de transfert suivantes :  $H_{u \rightarrow c}(p) = \frac{40p}{(1+4p)(1+0,4p)}$  et  $H_{C \rightarrow \gamma}(p) = 0,00075$ .

**Question 1** La réponse fréquentielle du module et de la phase dans le plan de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure précédente pour  $C_{\gamma t}(p) = 300$  a été reportée ci-dessous. Analyser les performances du système asservi par  $C_{\gamma t}(p) = 300$  (pulsations de coupure à 0 dB et marges de phase et de gain).



La réponse  $\gamma(t)$  du système asservi par  $C_{\gamma t}(p) = 300$  à un échelon unité d'accélération  $\gamma^*(t)$  est reportée figure suivante.

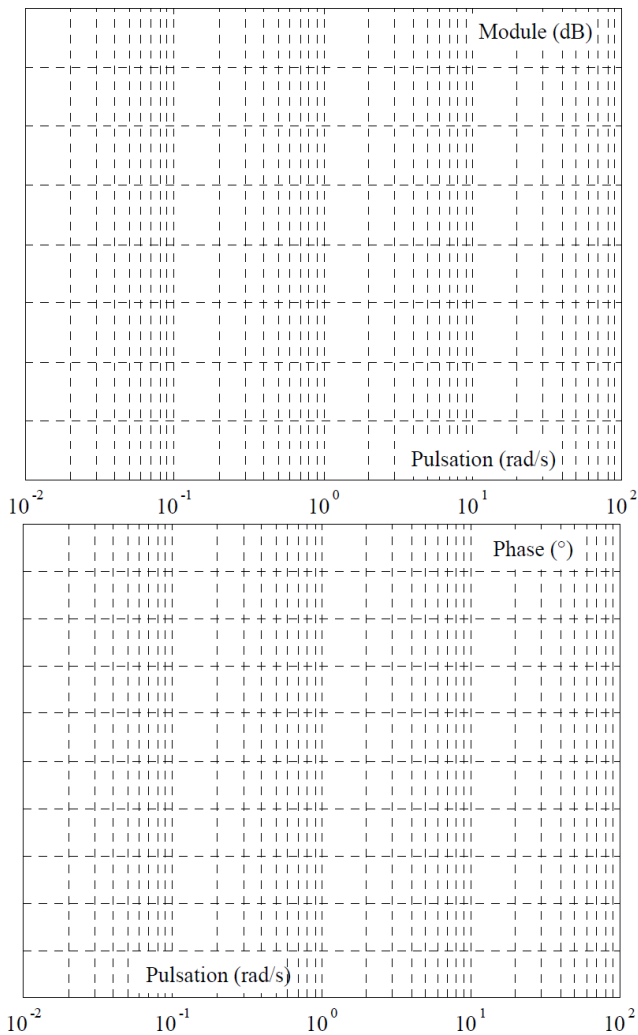


**Question 2** Sur le diagramme donnant le module de la fonction de transfert en boucle ouverte, dessiner en bleu l'allure asymptotique du module de la réponse fréquentielle de la boucle fermée d'accélération.

**Question 3** Justifier alors l'allure de la réponse indicielle de la figure précédente.

On souhaite conférer au système asservi une pulsation de coupure haute en boucle ouverte à 0 dB  $\omega_c = 2 \text{ rad s}^{-1}$ . On corrige la structure bouclée par le correcteur de type Proportionnel Intégral (P.I.) :  $C_{\gamma t}(p) = K \frac{1+10p}{10p}$ .

**Question 4** Construire en bleu dans le plan de Bode le module et la phase de la boucle ouverte corrigée incluant le correcteur  $C_{\gamma t}(p)$  avec  $K = 1$ . On donne  $20 \log(2) \simeq 6,0$  et  $20 \log(3) \simeq 9,5$ .



**Question 5** Déterminer le gain  $K$  de ce correcteur de façon à satisfaire la spécification sur la pulsation de coupure haute. On donne  $10^{2,1} \simeq 126$ ,  $10^{2,2} \simeq 158$ ,  $10^{2,3} \simeq 200$ .

**Question 6** En incluant le correcteur  $C_{\gamma t}(p)$  déterminé précédemment, calculer l'erreur en régime permanent pour une entrée  $\gamma^*(t)$  en échelon d'amplitude  $\gamma_0^*$  et un couple perturbateur  $C_r(t)$  en échelon d'amplitude  $C_{r0}^*$ .

**Question 7** Le résultat était-il prévisible dans le cadre de la correction envisagée? Justifier ce résultat par rapport à la forme de la fonction de transfert du système.

- $\omega_{c1} = 0,1 \text{ rad/s}$  et  $\omega_{c2} = 6 \text{ rad/s}$ ,  $MG = +\infty$ ,  $M\varphi = 110^\circ$ .
- ...
- ...
- ...
- ...
- $\varepsilon_\gamma = \frac{40K K_{C\gamma}}{10 + 40K K_{C\gamma}} \gamma_0^*$ ,  $\varepsilon_{\text{pert}} = \frac{K_{C \rightarrow \gamma}}{1 + 4K K_{C \rightarrow \gamma}} C_{r0}^*$ .
- ...

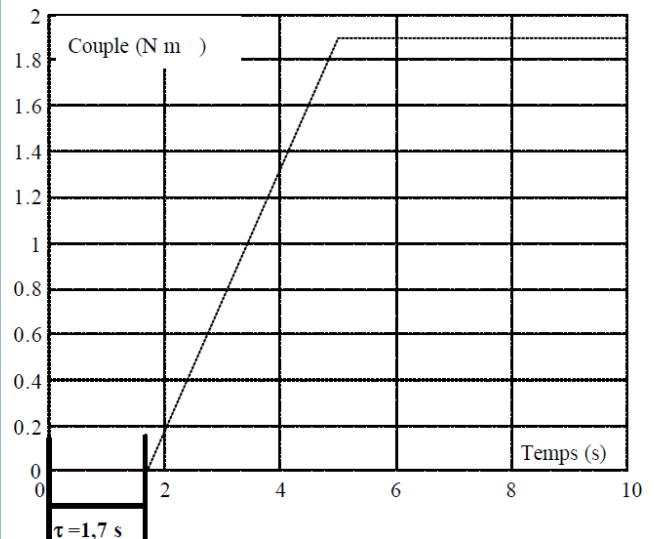
## Exercice 189 – Modélisation

La consigne d'effort de freinage du train est modulée en fonction de la charge du train. Les ordinateurs embarqués conjuguent le frein électrique et le frein mécanique

sur les motrices. Le frein électrique est prioritaire pour tout début de freinage à vitesse supérieure à  $15 \text{ km/h}$ ; en dessous de ce seuil, le frein mécanique devient indispensable. On s'intéresse dans cette partie au freinage mécanique uniquement.

Le freinage mécanique est réalisé par l'intermédiaire de blocs frein pneumatiques à semelles sur toutes les roues, sauf le bogie équipé de la roue phonique. Le circuit de frein mécanique est piloté par une électrovalve qui délivre vers le relais de pression une pression proportionnelle à son courant de commande. Ce relais de pression autorise, dans la même proportion, le passage de l'air provenant du réservoir auxiliaire à destination des blocs pneumatiques de freinage.

Sur la figure suivante se trouve reproduite l'évolution du couple de freinage mécanique en fonction du temps en réponse à une tension unitaire délivrée par l'électrovalve. On note par la suite  $C_f(t)$  cette évolution.

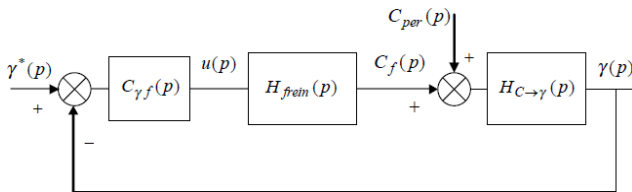


On constate que l'effet d'une demande de freinage initiée à l'instant  $t = 0 \text{ s}$  ne se manifeste qu'à partir de l'instant  $t = 1,7 \text{ s}$ . Le temps  $\tau = 1,7 \text{ s}$  est alors appelé retard pur du système.

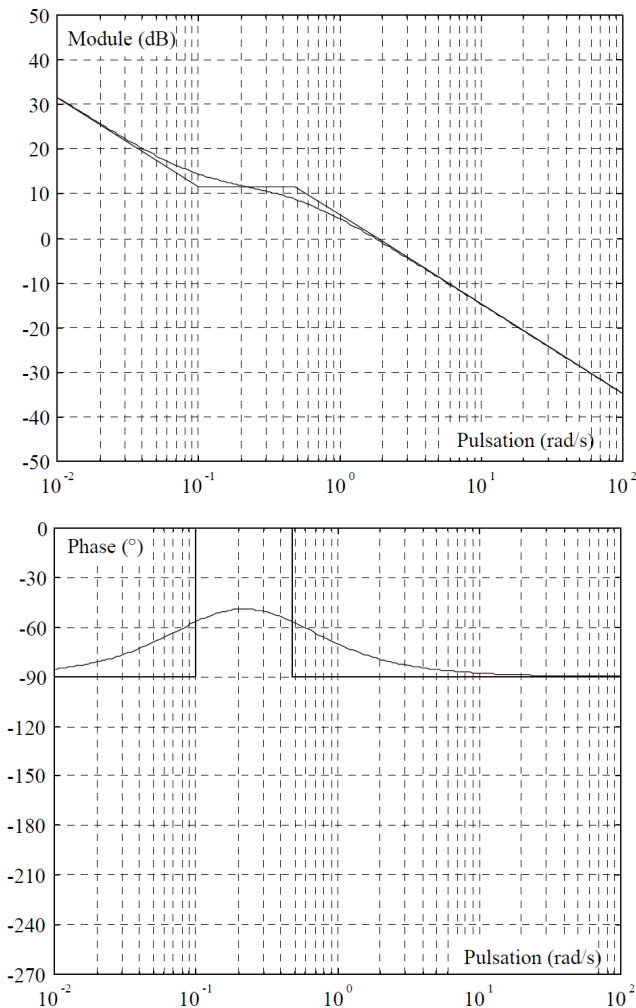
**Question 1** En décalant l'origine temporelle de la valeur du retard pur, déterminer la fonction de transfert du frein  $H'_{\text{frein}}(p)$  approchée sous la forme d'un système du premier ordre :  $H'_{\text{frein}}(p) = \frac{K_f}{1 + \tau_f p}$  où  $K_f$  et  $\tau_f$  seront déterminés à partir de la courbe de la figure précédente.

**Question 2** En déduire la fonction de transfert tenant compte du retard  $H_{\text{frein}}(p)$ . On donne la relation suivante entre la transformée de Laplace d'une fonction  $x$  non retardée et la transformée de Laplace de cette même fonction avec un retard  $t_0$  :  $\mathcal{L}(x(t - t_0)) = \mathcal{L}(x(t)) e^{-t_0 p}$ .

Le train étant sur une voie en pente, son poids induit un couple perturbateur  $C_{\text{per}}(t)$ . Le schéma-blocs global de l'asservissement de l'accélération en phase de freinage mécanique est alors représenté figure suivante. Dans un premier temps, le retard pur est négligé (le terme  $e^{-1,7p}$  n'est pas pris en compte).



Un correcteur  $C_{\gamma f}(p)$  de type P.I. (Proportionnel Intégral) a été élaboré avec cette hypothèse. On donne sur le document-réponse le tracé dans le plan de Bode de la réponse fréquentielle du module et de la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée.



**Question 3** Analyser les performances ainsi obtenues avec le correcteur P.I. (pulsation de coupure à 0 dB et marges de phase et de gain).

On cherche désormais à évaluer l'influence du retard pur sur le comportement de l'asservissement.

**Question 4** Compléter en bleu sur la figure le diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée en ajoutant désormais l'influence du retard pur.

**Question 5** Analyser les performances ainsi obtenues avec le correcteur P.I. (pulsation de coupure à 0 dB et marges de phase et de gain), en tenant compte du retard pur.

**Question 6** À partir de ces résultats, analyser l'impact du retard pur sur le comportement du système. Quelle(s) modification(s) du correcteur proposez-vous pour tenir compte de ce retard pur ?

1.  $H'_{\text{frein}}(p) = \frac{1,9}{1 + 3,3p}$ .
2.  $H_{\text{frein}}(p) = \frac{1,9}{1 + 3,3p} e^{-1,7p}$ .
3.  $M\varphi = 100^\circ$  et  $\omega_c = 2 \text{ rad s}^{-1}$ .
4. ...
5.  $M\varphi = -180^\circ$  et  $\omega_c = 2 \text{ rad s}^{-1}$  et  $MG = -4 \text{ dB}$ .
6. ...

## Exercice 189 – Modélisation

**Objectif** Vérifier les performances de l'asservissement d'inclinaison par rapport à la verticale.

Pour une utilisation confortable et sûre, le Segway doit satisfaire les performances énoncées dans le tableau extrait du cahier des charges.

Fonction de service	Critère	Niveau
FS2 : donner au conducteur une sensation de stabilité	Temps de réponse de 0 à 5 km/h	1 s maximum
	Dépassement d'inclinaison	< 30 %
	Inclinaison du châssis par rapport à la verticale	Nulle à convergence $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = 0$
FS3 : rester insensible aux perturbations provenant de la route	Hauteur de la marche de trottoir franchissable à 5 km/h	5 cm maximum
	Perturbations dues à la route, nature du sol (pavés, franchissement d'un trottoir, ...)	Plage de fréquences de 0 à 300 Hz

La régulation d'inclinaison du Segway® est réalisée par :

- un moto-réducteur qui permet de délivrer un couple  $C_m(t) = K_m u(t)$  où  $u(t)$  est une grandeur de commande et  $K_m = 24 \text{ N m V}^{-1}$  ;
- le système mécanique dont les équations, dans le cas où l'angle  $\alpha(t)$  n'est pas supposé constant, se met sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = \frac{1}{D} \left( B \ddot{\chi}(t) + 2 \frac{C_m(t)}{R} \right) \\ (DA - B^2) \ddot{\chi}(t) = 2 \left( \frac{B}{R} + D \right) C_m(t) + DC \chi(t) \end{cases}$$

avec  $\begin{cases} A = 90 \text{ kg m}^2 \\ B = 75 \text{ kg m} \\ C = 750 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \\ D = 125 \text{ kg} \\ R = 240 \text{ mm} \\ \chi(t) = \alpha(t) + \psi(t) \end{cases}$

**Question 1**

1. ...