

Modéliser

Sciences

Industrielles de
l'Ingénieur

PSI★ – MP

B2

Proposer un modèle de connaissance et de comportement

chapter.1

1.1 Proposer un modèle de connaissance et de comportement 2

1.1.1 Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides . . . 2

1.1.2 Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides . . . 9

section.1.2section.1.3subsection.1.3.1section.1.4section.1.5subsection.1.5.1

1.1 Proposer un modèle de connaissance et de comportement

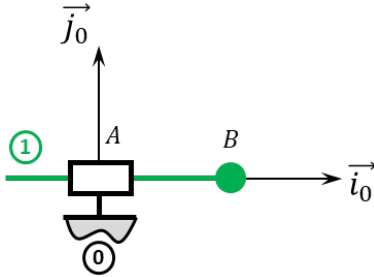
1.1.1 Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides

Exercice 1 – Mouvement T – *

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$.



Question 1 Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

Question 2 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

Indications :

1. .
2. $x_B(t) = \lambda(t)$.

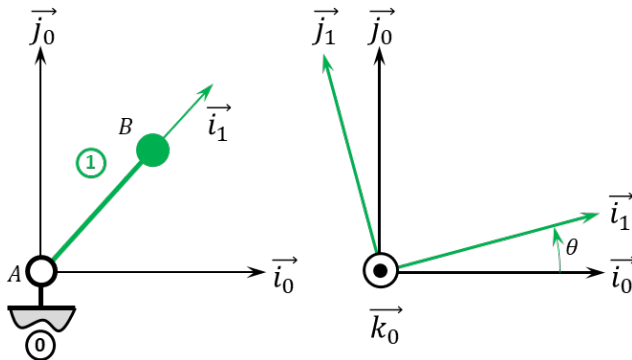
Corrigé voir 26.

Exercice 2 – Mouvement R *

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$.



Question 1 Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

Question 2 Quelle est la trajectoire du point B appartenant à 1 par rapport à 0.

Question 3 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

Indications :

1. .
2. .
3. $x_B(t) = R \cos \theta(t)$ et $y_B(t) = R \sin \theta(t)$.

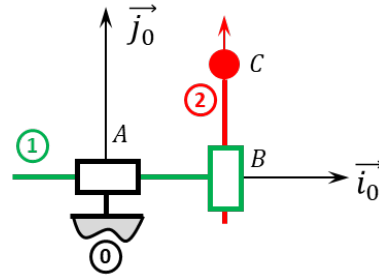
Corrigé voir 35.

Exercice 3 – Mouvement TT – *

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$.



Question 1 Quel est le mouvement de 2 par rapport à 0.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point C réalise un cercle de centre A et de rayon $R = 10 \text{ cm}$ à la vitesse $v = 0,01 \text{ ms}^{-1}$.

Question 3 Donner la relation liant $\theta(t)$, v et R .

Par ailleurs la vitesse du point C est donnée par $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$.

Question 4 Donner les expressions de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de v , R et du temps.

Question 5 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$, $\mu(t)$ et la trajectoire générée.

Indications :

1. .
2. $x_C(t) = \lambda(t)$ et $y_C(t) = \mu(t)$.
3. $\theta(t) = \frac{v}{R} t$.
4. $\lambda(t) = R \cos\left(\frac{v}{R} t\right)$, $\mu(t) = R \sin\left(\frac{v}{R} t\right)$.
5. .

Corrigé voir 28.

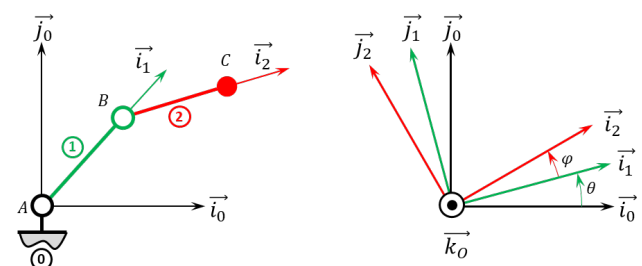
Exercice 4 – Mouvement RR *

C2-05

B2-13

Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ avec $L = 15 \text{ mm}$.



Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans son mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point C réalise un segment entre les points $[-25, 25]$ et $[25, 25]$ à la vitesse linéaire v .

Question 3 Donner la durée du mouvement si C se déplace à vitesse quelconque.

Question 4 Donner l'équation paramétrique que doit suivre le point C.

Question 5 Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0,01 \text{ ms}^{-1}$.

Question 6 En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\varphi(t)$ et la trajectoire générée.

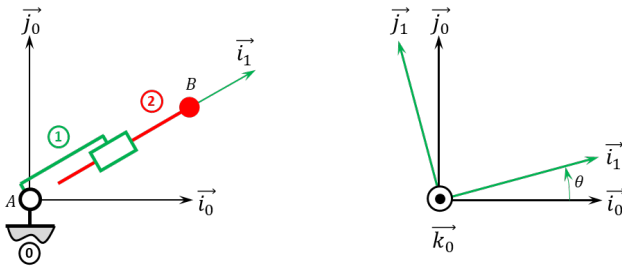
Corrigé voir 29.

Exercice 5 – Mouvement RT *

C2-05

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$.



Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point B.

Question 2 Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point B dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point B réalise un segment entre les points $[-25, 25]$ et $[25, 25]$.

Question 3 Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\lambda(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0,01 \text{ ms}^{-1}$.

Question 4 En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\lambda(t)$ et la trajectoire générée.

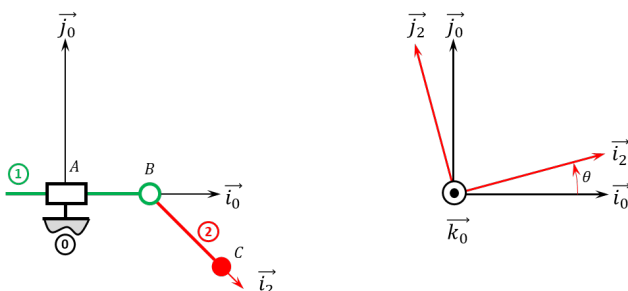
Corrigé voir 30.

Exercice 6 – Mouvement RT *

C2-05

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\overrightarrow{BC} = R \vec{i}_2$ avec $R = 30 \text{ mm}$.



Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point B.

Question 2 Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point B dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point B réalise un segment entre les points $[-25, 25]$ et $[25, 25]$.

Question 3 Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\lambda(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0,01 \text{ ms}^{-1}$.

Question 4 En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\lambda(t)$ et la trajectoire générée.

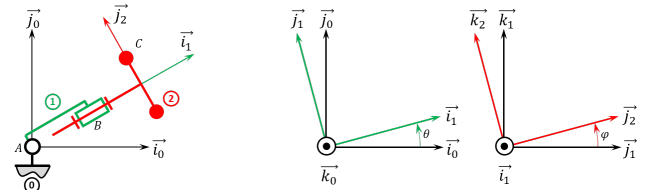
Corrigé voir 31.

Exercice 7 – Mouvement RR 3D **

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = \ell \vec{i}_2 + r \vec{j}_2$. On note $R + \ell = L = 20 \text{ mm}$ et $r = 10 \text{ mm}$.



Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

Indications :

1. .
2. $x_C(t) = (R + \ell) \cos \theta - r \cos \varphi \sin \theta$, $y_C(t) = (R + \ell) \sin \theta + r \cos \varphi \cos \theta$, $z_C(t) = r \sin \varphi$.

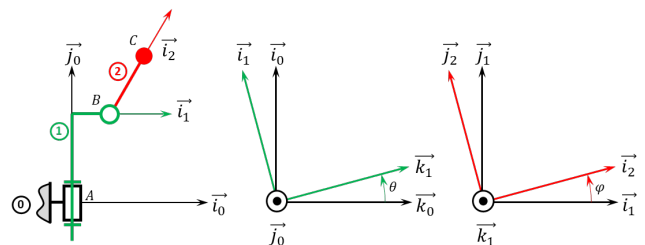
Corrigé voir 32.

Exercice 8 – Mouvement RR 3D **

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$. On a $H = 20 \text{ mm}$, $R = 20 \text{ mm}$, $L = 10 \text{ mm}$.



Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.

Question 2 Donner l'équation de mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

Indications

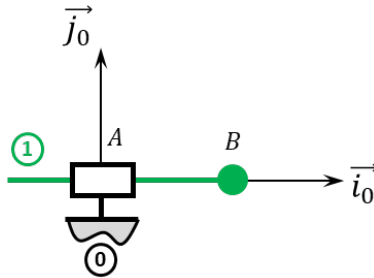
1. Tore.
2. $x_C(t) = R \cos \theta + L \cos \varphi \cos \theta$, $y_C(t) = H + L \sin \varphi$, $z_C(t) = -R \sin \theta - L \cos \varphi \sin \theta$.

Corrigé voir 41.

Exercice 9 – Mouvement T – *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$.



Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(B, 1/0)$.

Indications :

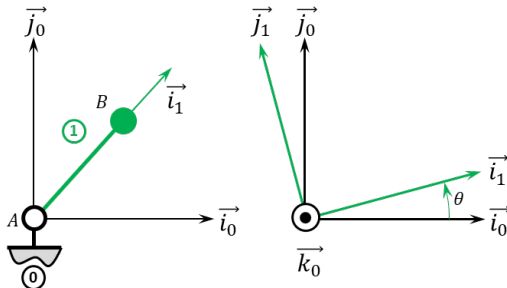
1. $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \lambda(t) \vec{i}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$.
2. $\overrightarrow{\Gamma}(B, 1/0) = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0$.

Corrigé voir 34.

Exercice 10 – Mouvement R – *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V}(B, 1/0)$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V}(B, 1/0)$ par une autre méthode.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(B, 1/0)$.

Indications :

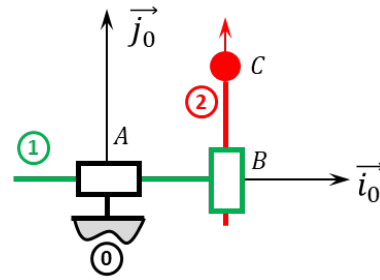
1. $\overrightarrow{V}(B, 1/0) = R \dot{\theta} \vec{j}_1$.
2. $\overrightarrow{V}(B, 1/0) = R \dot{\theta} \vec{j}_1$.
3. $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B$.
4. $\overrightarrow{\Gamma}(B, 1/0) = R \ddot{\theta} \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{i}_1$.

Corrigé voir 35.

Exercice 11 – Mouvement TT – *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$ par dérivation vectorielle ou par composition.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0)$.

Indications :

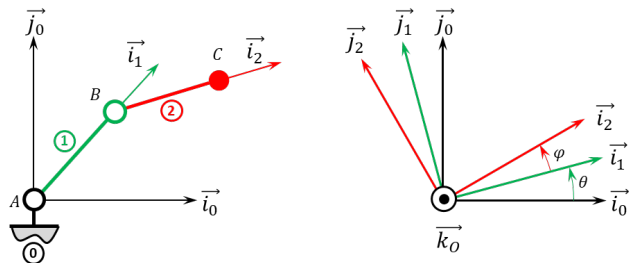
1. $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = \lambda(t) \vec{i}_0 + \mu(t) \vec{j}_0$.
2. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \lambda(t) \vec{i}_0 + \mu(t) \vec{j}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$.
3. $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0) = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \ddot{\mu}(t) \vec{j}_0$.

Corrigé voir 36.

Exercice 12 – Mouvement RR – *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ avec $R = 20 \text{ mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ avec $L = 15 \text{ mm}$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$ par composition.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0)$.

Indications :

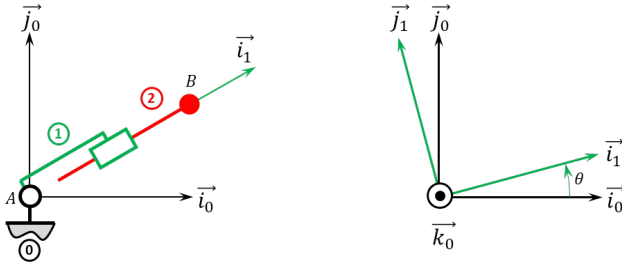
1. $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = R \dot{\theta} \vec{j}_1 + L (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{j}_2$.
2. $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = L \dot{\varphi} \vec{j}_2 + \dot{\theta} (L \vec{j}_2 + R \vec{j}_1)$ (c'est la même :)).
3. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta} \vec{j}_1 + L (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{j}_2 \end{array} \right\}_C$.
4. $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0) = R \ddot{\theta} \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{i}_1 + L (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \vec{j}_2 - L (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \vec{i}_2$.

Corrigé voir 37.

Exercice 13 – Mouvement RT – *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$ par composition.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$.

Indications :

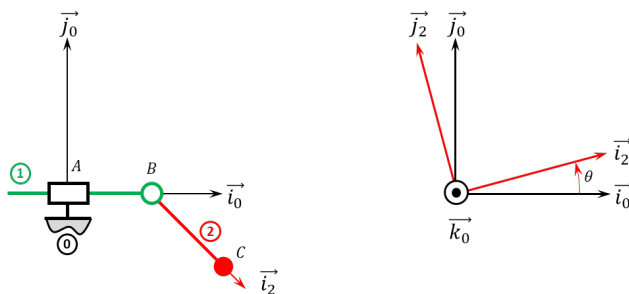
- $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$.
- $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$.
- $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B$.
- $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} = (\dot{\lambda}(t) - \lambda(t) \dot{\theta}(t)^2) \vec{i}_1 + (\dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t) + \lambda(t) \ddot{\theta}(t)) \vec{j}_1$.

Corrigé voir 38.

Exercice 14 – Mouvement RT *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ et $\overrightarrow{BC} = R \vec{i}_2$ avec $R = 30$ mm.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$.

Indications :

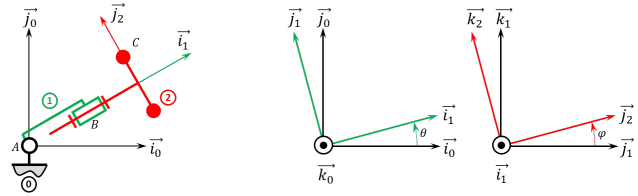
- $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R \dot{\theta} \vec{j}_2$.
- $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 \\ \dot{\theta} \vec{k}_0 \end{array} \right\}_C$.
- $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R (\ddot{\theta} \vec{j}_2 - \dot{\theta}^2 \vec{i}_2)$.

Corrigé voir 39.

Exercice 15 – Mouvement RR 3D *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = \ell \vec{i}_2 + r \vec{j}_2$. On note $R + \ell = L = 20$ mm et $r = 10$ mm.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par composition.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$.

Indications :

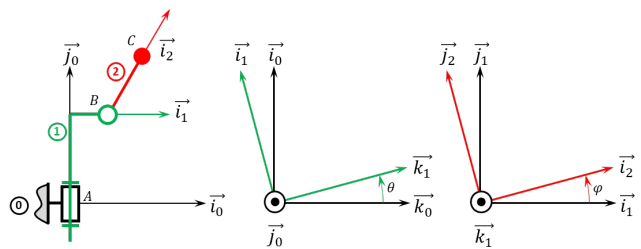
- $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = (R + \ell) \dot{\theta} \vec{j}_1 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2$.
- $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = r \dot{\varphi} \vec{k}_2 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + \ell \dot{\theta} \vec{j}_1 + R \dot{\theta} \vec{j}_1$.
- $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{i}_1 \\ (R + \ell) \dot{\theta} \vec{j}_1 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2 \end{array} \right\}_C$.
- $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = (R + \ell) \ddot{\theta} \vec{j}_1 - (R + \ell) \dot{\theta}^2 \vec{i}_1 - r \ddot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\theta} \sin \varphi \vec{i}_1 - r \dot{\theta}^2 \cos \varphi \vec{j}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2 + r \dot{\varphi} (\dot{\theta} \sin \varphi \vec{i}_1 - \dot{\varphi} \vec{j}_2)$.

Corrigé voir 32.

Exercice 16 – Mouvement RR 3D *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$. On a $H = 20$ mm, $r = 5$ mm, $L = 10$ mm.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par dérivation vectorielle.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par composition du vecteur vitesse.

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$.

Indications :

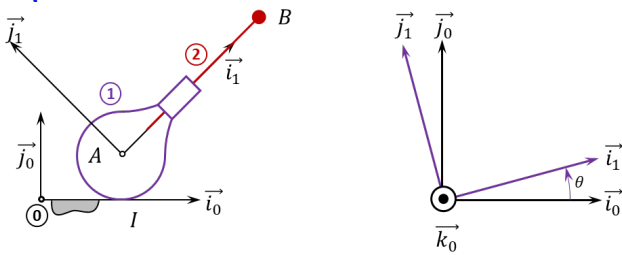
- $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = -R \dot{\theta} \vec{k}_1 + L (-\dot{\theta} \cos \varphi \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{j}_2)$.
- $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = L \dot{\varphi} \vec{j}_2 - \dot{\theta} (R \vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1)$.
- $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi} \vec{k}_2 + \dot{\theta} \vec{j}_0 \\ L \dot{\varphi} \vec{j}_2 - \dot{\theta} (R \vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1) \end{array} \right\}_C$.
- $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = L \ddot{\varphi} \vec{j}_2 + L \dot{\varphi} (\dot{\theta} \sin \varphi \vec{k}_1 - \dot{\theta} \vec{i}_2) - \ddot{\theta} (R \vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1) - \dot{\theta} (R \dot{\theta} \vec{i}_1 + L \cos \varphi \dot{\theta} \vec{i}_1 - L \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{k}_1)$.

Corrigé voir 41.

Exercice 17 – Mouvement RT – RSG **

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{IA} = R \vec{j}_0$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$. De plus $R = 15$ mm. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$.

Indications :

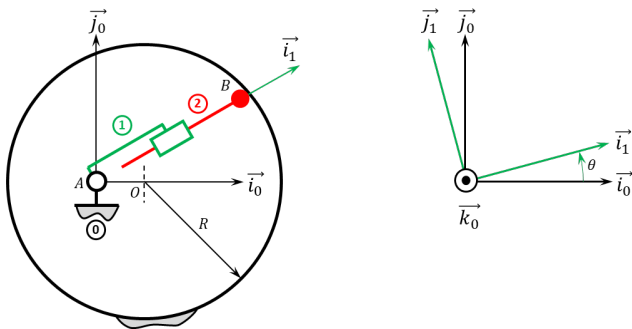
- $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \dot{\lambda} \vec{i}_1 + \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0)$.
- $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{i}_1 + \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) \end{array} \right\}_B$.
- $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta} \vec{j}_1 + \ddot{\theta}(t) (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) + \dot{\theta}(t) (\dot{\lambda}(t) \vec{j}_1 - \lambda(t) \dot{\theta} \vec{i}_1)$.

Corrigé voir 42.

Exercice 18 – Pompe à palettes *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AO} = e \vec{i}_0$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$. De plus $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre 0 et 2 en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme $\dot{\lambda}_+(t) = -e \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) - \frac{e^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}}$ (voir exercice 62 – à vérifier).

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$.

Indications :

- $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \dot{\theta}(t) \lambda(t) \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B$.
- $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + 2 \dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 + \lambda(t) \ddot{\theta}(t) \vec{j}_1 - \lambda(t) \dot{\theta}^2(t) \vec{i}_1$.

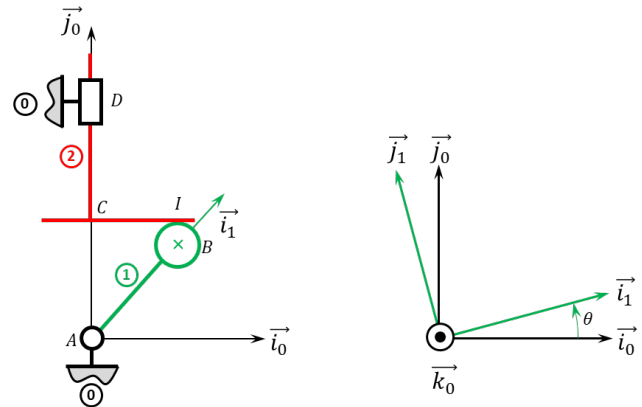
Corrigé voir 43.

Exercice 19 – Pompe à piston axial *

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = e \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BI} = R \vec{j}_0$. De plus, $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre

1 et 2 en B est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre 0 et 2.



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme $\lambda(t) = e \sin \theta + R$ ou encore $\dot{\lambda}(t) = e \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$ (voir exercice 63).

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$.

Indications :

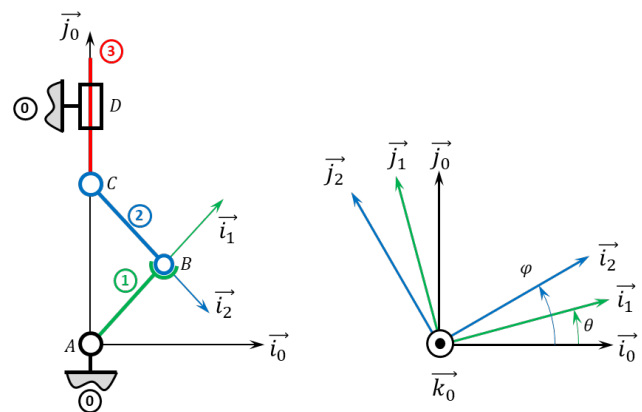
- $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 \end{array} \right\}_C$.
- $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0$.

Corrigé voir 44.

Exercice 20 – Système bielle manivelle *

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{CB} = L \vec{i}_2$. De plus, $R = 10 \text{ mm}$ et $L = 20 \text{ mm}$.



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme $\lambda(t) = \pm \sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)} + R \sin \theta(t)$ et $\dot{\lambda}(t) = \pm \left(\frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)}} \right) + \dot{\theta}(t) R \cos \theta(t)$. (à vérifier – voir exercice 64).

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B. On commence par calculer $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{V(B, 1/0)} = \overrightarrow{V(B, 1/0)}$.

• **Méthode 1 – dérivation vectorielle :** $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [AB]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$.

• **Méthode 2 – formule de changement de point :**

$$\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \overrightarrow{V(A, 1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \Omega(1/0) = -R \vec{i}_1 \wedge \dot{\theta} t \vec{k}_0 \\ = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1.$$

$$\text{On a alors, } \{\mathcal{V}(2/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 \end{Bmatrix}_B.$$

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ et au point C.

$$\text{On a, } \{\mathcal{V}(2/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 \end{Bmatrix}_C.$$

$$\text{Par ailleurs, on peut remarquer que } \overrightarrow{V(C, 2/0)} = \overrightarrow{V(B, 2/0)} + \overrightarrow{CB} \wedge \Omega(2/0) = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 + L \vec{i}_2 \wedge \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 \\ = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 - L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2.$$

$$\text{On a donc nécessairement } \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 - L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2$$

$$\Rightarrow \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 = R \dot{\theta}(t) (\cos \theta(t) \vec{j}_0 - \sin \theta(t) \vec{i}_0) - L \dot{\varphi}(t) (\cos \varphi(t) \vec{j}_0 - \sin \varphi(t) \vec{i}_0).$$

On a donc :

$$\begin{cases} 0 = -R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + L \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ \dot{\lambda}(t) = R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) - L \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) = L \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ \dot{\lambda}(t) - R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) = L \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi(t) = \frac{R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)}{\dot{\lambda}(t) - R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)}$$

Question 3 Déterminer $\Gamma(B, 2/0)$.

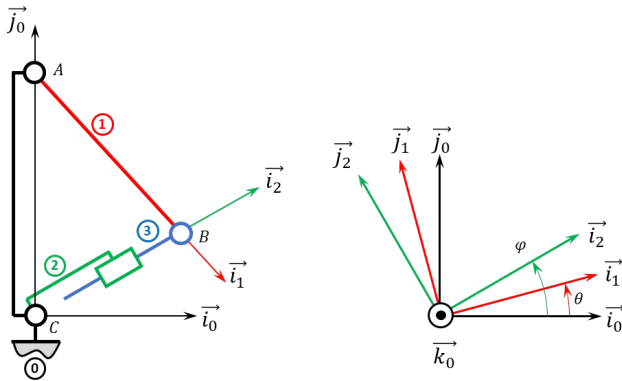
Question 4 Déterminer $\Gamma(C, 2/0)$.

Corrigé voir 45.

Exercice 21 – Système de transformation de mouvement *

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{CA} = H \vec{j}_0$. De plus, $R = 30 \text{ mm}$ et $H = 40 \text{ mm}$.



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 65).

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(3/0)\}$ au point B.

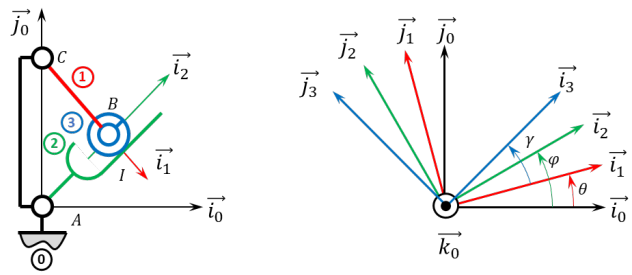
Question 2 Déterminer $\Gamma(B, 3/0)$.

Corrigé voir 46.

Exercice 22 – Barrière Sympact **

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H \vec{j}_0$ et $\overrightarrow{CB} = R \vec{i}_1$. De plus, $H = 120 \text{ mm}$, $R = 40 \text{ mm}$ et $BI = 10 \text{ mm}$.



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 66).

Question 1 En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer $\gamma(t)$ et $\dot{\gamma}(t)$.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(3/2)\}$ au point B.

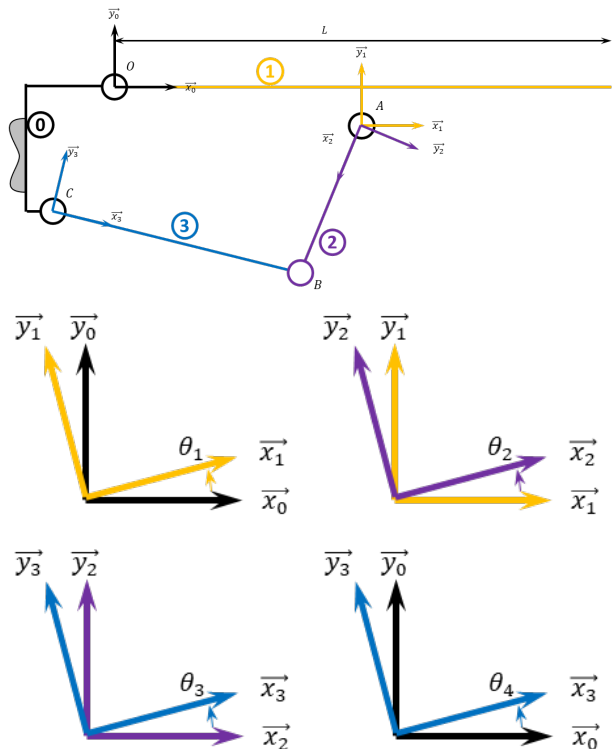
Corrigé voir 47.

Exercice 23 – Système 4 barres ***

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

On a :

- $\overrightarrow{OA} = a \vec{x}_1 - f \vec{y}_1$ avec $a = 355 \text{ mm}$ et $f = 13 \text{ mm}$;
- $\overrightarrow{AB} = b \vec{x}_2$ avec $b = 280 \text{ mm}$;
- $\overrightarrow{BC} = -c \vec{x}_3$ avec $c = 280 \text{ mm}$;
- $\overrightarrow{OC} = -d \vec{x}_0 - e \vec{y}_0$ avec $d = 89,5 \text{ mm}$ et $e = 160 \text{ mm}$;



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 69). On définit le point G tel que $\overrightarrow{OG} = L \vec{x}_1$.

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point G.

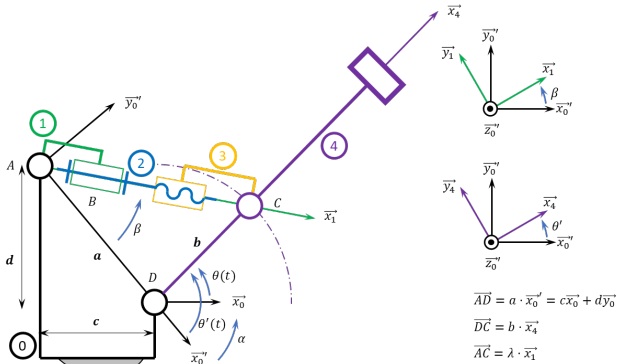
Question 2 Déterminer $\Gamma(G, 1/0)$.

Corrigé voir 48.

Exercice 24 – Maxpid ***

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs $a = 107,1 \text{ mm}$, $b = 80 \text{ mm}$, $c = 70 \text{ mm}$, $d = 80 \text{ mm}$. Le pas de la vis est de 4 mm.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 70).

On définit le point G tel que $\overrightarrow{OG} = L \vec{x}_4$.

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(4/0)\}$ au point G.

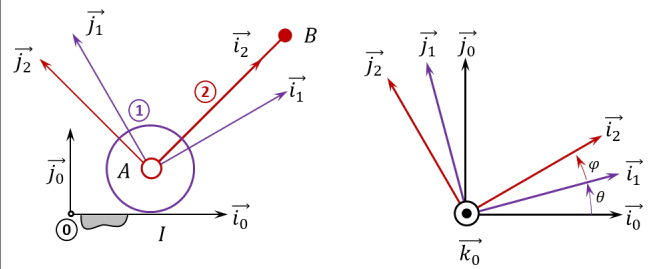
Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(G, 4/0)$.

Corrigé voir 49.

Exercice 25 – Mouvement RR – RSG **

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{IA} = R \vec{j}_0$ et $\overrightarrow{AB} = L \vec{i}_2$. De plus $R = 15 \text{ mm}$. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I.



Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V}(B, 2/0)$.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(B, 2/0)$.

Indications (à vérifier...) :

- $\overrightarrow{V}(B, 2/0) = L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2 + \dot{\theta}(t) (L \vec{j}_1 - R \vec{i}_0)$.
- $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}(2/0) = (\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t)) \vec{k}_0 \\ L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2 + \dot{\theta}(t) (L \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) \end{array} \right\}_B$.
- $\overrightarrow{\Gamma}(B, 2/0) = L \ddot{\varphi}(t) \vec{j}_2 - L \dot{\varphi}(t) (\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t)) \vec{i}_2 + \ddot{\theta}(t) (L \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) - L \dot{\theta}^2(t) \vec{i}_1$.

Corrigé voir 50.

1.1.2 Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides

Exercice 26 – Mouvement T – *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.

1 est en translation de direction \vec{i}_0 par rapport à **0**.

Question 2 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **1** par rapport à **0**.

On a $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$. La trajectoire du point **B** est donc donnée par
$$\begin{cases} x_B(t) = \lambda(t) \\ y_B(t) = 0 \\ z_B(t) = 0 \end{cases} \quad \text{dans le repère } (A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{z}_0).$$

Exercice 27 – Mouvement R – *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**. **1** est en rotation de centre **A** et d'axe \vec{k}_0 par rapport à **0**.

Question 2 Quelle est la trajectoire du point **B** appartenant à **1** par rapport à **0**. **B** est en rotation par rapport à **0** (cercle de centre **A** et de rayon **R**).

Question 3 Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **1** par rapport à **0**.

On a $\vec{AB} = R \vec{i}_1 = R \cos \theta \vec{i}_0 + R \sin \theta \vec{j}_0$. La trajectoire du point **B** est donc donnée par
$$\begin{cases} x_B(t) = R \cos \theta(t) \\ y_B(t) = R \sin \theta(t) \\ z_B(t) = 0 \end{cases}$$

dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{z}_0)$.

Exercice 28 – Mouvement TT – *

C2-05

B2-13

Question 1 Quel est le mouvement de **2** par rapport à **0**.

Le point **C** a un mouvement quelconque dans le plan $(A, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point **C** dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.

On a $\vec{AC} = \lambda(t) \vec{i}_0 + \mu(t) \vec{j}_0$ et donc, on a directement
$$\begin{cases} x_C(t) = \lambda(t) \\ y_C(t) = \mu(t) \\ z_C(t) = 0 \end{cases} \quad \text{dans le repère } (A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0).$$

On souhaite que le point **C** réalise un cercle de centre **A** et de rayon $R = 10 \text{ cm}$ à la vitesse $v = 0,01 \text{ m.s}^{-1}$.

Question 3 Donner la relation liant $\theta(t)$, v et R .

Par ailleurs la vitesse du point **C** est donnée par $\vec{V}(C, 2/0) = \frac{d}{dt} [\vec{AC}]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$.

On a $v = R \dot{\theta}(t)$. Par intégration, $\theta(t) = \frac{v}{R} t$ (avec $\theta(t) = 0 \text{ rad}$ pour $t = 0 \text{ s}$).

Question 4 Donner les expressions de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de v , R et du temps.

Exprimons la trajectoire du point **C** : $\vec{AC} = R \vec{e}_r = R \cos \theta(t) \vec{i}_0 + R \sin \theta(t) \vec{j}_0$. Par identification $\lambda(t) = R \cos \theta(t)$ et $\mu(t) = R \sin \theta(t)$.

Au final,
$$\begin{cases} \lambda(t) = R \cos\left(\frac{v}{R} t\right) \\ \mu(t) = R \sin\left(\frac{v}{R} t\right) \end{cases}.$$

Question 5 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$, $\mu(t)$ et la trajectoire générée.

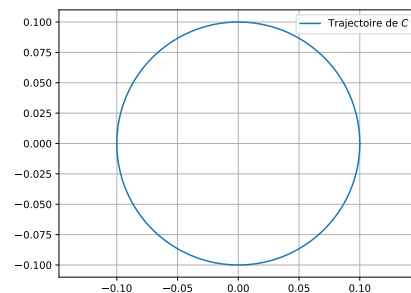
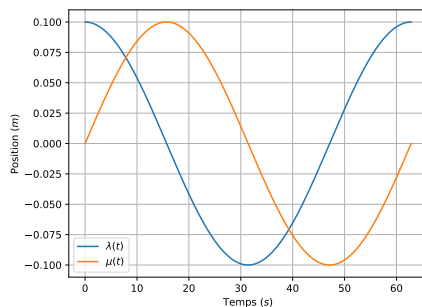
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
R = 0.1 # m
v = 0.01 # m.s-1

# Temps pour faire un tour
T = 2*m.pi*R/v

les_t = np.linspace(0, T, 200)
les_lambda = R*np.cos(v/R*les_t)
les_mu = R*np.sin(v/R*les_t)
plt.grid()
plt.plot(les_t, les_lambda, label="$\\lambda(t)$")
```

```
plt.plot(les_t, les_mu, label="$\\mu(t)$")
plt.xlabel("Temps_($s$)")
plt.ylabel("Position_($m$)")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_01_c.pdf")
plt.cla()

plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.plot(les_lambda, les_mu, label="Trajectoire_de_($C$)")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_02_c.pdf")
```



Exercice 29 – Mouvement RR ★

C2-05

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.

Le point C peut atteindre tous les points situés compris entre deux cercles de rayon 5 mm et de rayon 25 mm.

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans son mouvement de 2 par rapport à 0.

On a $\vec{AC} = R \vec{i}_1 + L \vec{i}_2$. On projetant ce vecteur dans le repère $\mathcal{R}_A i_0 j_0 k_0$ on a

$$\vec{AC} = R(\cos \theta \vec{i}_0 + \sin \theta \vec{j}_0) + L(\cos(\theta + \varphi) \vec{i}_0 + \sin(\theta + \varphi) \vec{j}_0). \text{ On a donc : } \begin{cases} x_C(t) = R \cos \theta + L \cos(\theta + \varphi) \\ y_C(t) = R \sin \theta + L \sin(\theta + \varphi) \\ z_C(t) = 0 \end{cases}$$

dans le repère $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$.

Question 3 Donner la durée du mouvement si C se déplace à vitesse quelconque.

Distance à parcourir : 0,05 m. Durée du parcours : $T = \frac{0,05}{v}$.

Question 4 Donner l'équation paramétrique que doit suivre le point C.

$\forall t \in \left[0, \frac{0,05}{v}\right]$, $y_C(t) = 0,025$. Pour $t = 0$, $x_C(0) = -0,025$. On a alors $x_C(t) = -0,025 + vt$.

$$\text{Au final, } \forall t \in \left[0, \frac{0,05}{v}\right], \begin{cases} x_C(t) = -0,025 + vt \\ y_C(t) = 0,025 \\ z_C(t) = 0 \end{cases} \text{ dans le repère } (A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0).$$

Question 5 Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0,01 \text{ ms}^{-1}$.

Afin que le point C suive un segment, il faut donc que $\begin{cases} -0,025 + vt = R \cos \theta + L \cos(\theta + \varphi) \\ 0,025 = R \sin \theta + L \sin(\theta + \varphi) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,025 + vt - R \cos \theta = L \cos(\theta + \varphi) \\ 0,025 - R \sin \theta = L \sin(\theta + \varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-0,025 + vt - R \cos \theta)^2 = L^2 \cos^2(\theta + \varphi) \\ (0,025 - R \sin \theta)^2 = L^2 \sin^2(\theta + \varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-0,025 + vt - R \cos \theta)^2 + (0,025 - R \sin \theta)^2 = L^2$$

$$\Rightarrow 0,025^2 + v^2 t^2 + R^2 \cos^2 \theta - 2 \times 0,025 vt + 2R \cos \theta - vt R \cos \theta + 0,025^2 + R^2 \sin^2 \theta - 2 \times 0,025 R \sin \theta = L^2$$

$$\Rightarrow (2 - vt) \cos \theta - 2 \times 0,025 \sin \theta = \frac{L^2}{R} - \frac{2 \times 0,025^2}{R} - \frac{v^2 t^2}{R} - R + 2 \times 0,025 \frac{vt}{R}$$

Équation trigonométrique de la forme $a \cos x + b \sin x = c$.

Il y a donc une solution analytique. On peut aussi résoudre l'équation numériquement.

Une fois $\theta(t)$ déterminée, on a $0,025 - R \sin \theta = L \sin(\theta + \varphi) \Rightarrow \arcsin\left(\frac{0,025 - R \sin \theta(t)}{L}\right) - \theta(t) = \varphi(t)$

Question 6 En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\varphi(t)$ et la trajectoire générée.

Exercice 30 – Mouvement RT *

C2-05

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point B.

Question 2 Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point B dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point B réalise un segment entre les points $[-25, 25]$ et $[25, 25]$.

Question 3 Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\lambda(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0,01 \text{ ms}^{-1}$.

Question 4 En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\lambda(t)$ et la trajectoire générée.

Exercice 31 – Mouvement RT *

C2-05

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point B.

Question 2 Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point B dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point B réalise un segment entre les points $[-25, 25]$ et $[25, 25]$.

Question 3 Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\lambda(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0,01 \text{ ms}^{-1}$.

Question 4 En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\lambda(t)$ et la trajectoire générée.

Exercice 32 – Mouvement RR 3D **

C2-05

B2-13

Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C. Ça ressemble à un tore, mais c'est pas vraiment un tore :) (aussi bien l'intérieur que l'extérieur...)

Question 2 Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On a $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = R \vec{i}_1 + \ell \vec{i}_2 + r \vec{j}_2$. Soit $\vec{AC} = (R + \ell)(\cos \theta \vec{i}_0 + \sin \theta \vec{j}_0) + r(\cos \varphi \vec{j}_1 + \sin \varphi \vec{k}_1) = (R + \ell)(\cos \theta \vec{i}_0 + \sin \theta \vec{j}_0) + r(\cos \varphi (\cos \theta \vec{j}_0 - \sin \theta \vec{i}_0) + \sin \varphi \vec{k}_0)$.

On a donc :
$$\begin{cases} x_C(t) = (R + \ell) \cos \theta - r \cos \varphi \sin \theta \\ y_C(t) = (R + \ell) \sin \theta + r \cos \varphi \cos \theta \\ z_C(t) = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{dans le repère } (A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0).$$

Exercice 33 – Mouvement RR 3D **

C2-05

B2-13

Question 1 Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C. Le point C peut décrire un tore de grand rayon R et de petit rayon L (surface torique uniquement, pas l'intérieur du tore).

Question 2 Donner l'équation de mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On a $\vec{AC} = H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1 + L \vec{i}_2 = H \vec{j}_0 + R \cos \theta \vec{i}_0 - R \sin \theta \vec{k}_0 + L \cos \varphi \vec{i}_1 + L \sin \varphi \vec{j}_1 = H \vec{j}_0 + R \cos \theta \vec{i}_0 - R \sin \theta \vec{k}_0 + L \cos \varphi (\cos \theta \vec{i}_0 - \sin \theta \vec{k}_0) + L \sin \varphi \vec{j}_0$.

On a donc :
$$\begin{cases} x_C(t) = R \cos \theta + L \cos \varphi \cos \theta \\ y_C(t) = H + L \sin \varphi \\ z_C(t) = -R \sin \theta - L \cos \varphi \sin \theta \end{cases} \quad \text{dans le repère } (A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0).$$

Exercice 34 – Mouvement T – *

B2-13

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 \end{array} \right\}_{\substack{P \\ \vee P}}$$

$$\overline{V(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overline{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0.$$

Question 2 Déterminer $\overline{\Gamma(B, 1/0)}$.

$$\overline{\Gamma(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overline{V(B, 1/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0.$$

Exercice 35 – Mouvement R *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 1/0)}$ par dérivation vectorielle.

$$\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_0}. \text{ Or } \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{0} + \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}.$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{V(B, 1/0)} = R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}.$$

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 1/0)}$ par une autre méthode.

$$\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \overrightarrow{V(A, 1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} - R \overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} = R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}.$$

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point B.

$$\text{On a directement } \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \\ R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_B.$$

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(B, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(B, 1/0)}]_{\mathcal{R}_0} = R \ddot{\theta} \overrightarrow{j_1} - R \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_1}. \text{ (En effet, } \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_1}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_1}]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \overrightarrow{0} + \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta} \overrightarrow{i_1}.)$$

Exercice 36 – Mouvement Π – *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.

$$\text{Par dérivation vectorielle, on a : } \overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0}.$$

$$\text{Par composition du torseur cinématique, on a : } \overrightarrow{V(C, 2/0)} = \overrightarrow{V(C, 2/1)} + \overrightarrow{V(C, 1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_1} + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0}.$$

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0} \end{array} \right\}_{\forall P}.$$

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(C, 2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + \ddot{\mu}(t) \overrightarrow{j_0}.$$

Exercice 37 – Mouvement RR – *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par dérivation vectorielle.

$$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_0} = R \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_0} + L \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + L (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2}.$$

$$\text{(Avec } \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{i_2} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_2} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2}.)$$

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par composition.

$$\text{On a } \overrightarrow{V(C, 2/0)} = \overrightarrow{V(C, 2/1)} + \overrightarrow{V(C, 1/0)}.$$

$$\overrightarrow{V(C, 2/1)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = -L \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{k_0} = L \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2}.$$

$$\overrightarrow{V(C, 1/0)} = \overrightarrow{V(A, 1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = (-L \overrightarrow{i_2} - R \overrightarrow{i_1}) \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} = \dot{\theta} (L \overrightarrow{j_2} + R \overrightarrow{j_1}).$$

$$\text{Au final, } \overrightarrow{V(C, 2/0)} = L \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2} + \dot{\theta} (L \overrightarrow{j_2} + R \overrightarrow{j_1}).$$

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$. Pour sommer les torseurs, il faut écrire les vecteurs vitesses au même point, ici en C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{k_0} \\ R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + L (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2} \end{array} \right\}_C$$

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(C, 2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + L (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_0}.$$

$$\text{De plus, } \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_1}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_1}]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta} \overrightarrow{i_1} \text{ et } \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_2} = -(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{i_2}.$$

$$\text{On a donc } \overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = R \ddot{\theta} \overrightarrow{j_1} - R \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_1} + L (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \overrightarrow{j_2} - L (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \overrightarrow{i_2}.$$

Exercice 38 – Mouvement RT – *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$ par dérivation vectorielle.

$$\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\lambda(t) \overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1} + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1}.$$

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$ par composition.

$$\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{V(B, 1/0)}.$$

$$\forall P, \overrightarrow{V(P, 2/1)} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1}.$$

$$\text{Par ailleurs } \overrightarrow{V(B, 1/0)} = \overrightarrow{V(A, 1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = -\lambda(t) \overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\theta}(t) \overrightarrow{k_0} = \lambda(t) \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1}.$$

$$\text{Au final, } \overrightarrow{V(B, 2/0)} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1} + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1}.$$

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}(t) \overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1} + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_B.$$

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V(B, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + \dot{\lambda}(t) \ddot{\theta} \overrightarrow{j_1} - \lambda(t) \dot{\theta}(t)^2 \overrightarrow{i_1} = (\ddot{\lambda}(t) - \lambda(t) \dot{\theta}(t)^2) \overrightarrow{i_1} + (\dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t) + \dot{\lambda}(t) \ddot{\theta}(t)) \overrightarrow{j_1}.$$

Exercice 39 – Mouvement RT *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.

Méthode 1 – Dérivation vectorielle

$$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_2}$$

Méthode 2 – Composition du torseur cinématique

$$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \overrightarrow{V(C, 2/1)} + \overrightarrow{V(C, 1/0)}$$

$$\text{Pour tout point } P, \overrightarrow{V(P, 1/0)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{i_0}.$$

$$\overrightarrow{V(C, 2/1)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = -R \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} = R \dot{\theta} \overrightarrow{j_2}.$$

$$\text{On a donc } \overrightarrow{V(C, 2/0)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{i_0} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_2}.$$

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\Omega}(2/0) = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \\ \overrightarrow{V(C, 2/0)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{i_0} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_2} \end{array} \right\}_C.$$

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(C, 2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R \frac{d}{dt} [\dot{\theta} \overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R (\ddot{\theta} \overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_2}).$$

Exercice 40 – Mouvement RR 3D *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par dérivation vectorielle.

$$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \overrightarrow{i_1} + \ell \overrightarrow{i_2} + r \overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_0}.$$

Calculons :

$$\bullet \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}.$$

$$\bullet \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{i_2}.$$

$$\bullet \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = (\dot{\theta} \overrightarrow{k_0} + \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1}) \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{j_2} + \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{j_2} = -\dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2}.$$

$$\text{On a donc, } \overrightarrow{V(C, 2/0)} = (R + \ell) \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} - r \dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + r \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2}.$$

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$ par composition.

$$\text{On a } \overrightarrow{V(C, 2/0)} = \overrightarrow{V(C, 2/1)} + \overrightarrow{V(C, 1/0)}.$$

$$\bullet \overrightarrow{V(C, 2/1)} : \text{ on passe par } B \text{ car } B \text{ est le centre de la pivot entre 2 et 1 et que } \overrightarrow{V(B, 2/1)} = \overrightarrow{0}. \overrightarrow{V(C, 2/1)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = (-\ell \overrightarrow{i_2} - r \overrightarrow{j_2}) \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1}$$

$$= -\ell \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1} - r \overrightarrow{j_2} \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1}.$$

$$= r \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2}.$$

$$\bullet \overrightarrow{V(C, 1/0)} : \text{ on passe par } A \text{ car } A \text{ est le centre de la pivot entre 1 et 0 et que } \overrightarrow{V(A, 1/0)} = \overrightarrow{0} \text{ est nul. } \overrightarrow{V(C, 1/0)} = \overrightarrow{V(A, 1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)}$$

$$= (-r \overrightarrow{j_2} - \ell \overrightarrow{i_2} - R \overrightarrow{i_1}) \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{k_1}$$

$$= -r \dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + \ell \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}$$

$$\text{Au final, } \overrightarrow{V(C, 2/0)} = r \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2} - r \dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + \ell \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}.$$

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{i}_1 \\ (R+\ell)\dot{\theta} \vec{j}_1 - r\dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r\dot{\varphi} \vec{k}_2 \end{array} \right\}_C$$

Question 4 Déterminer $\overline{\Gamma(C, 2/0)}$.

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma(C, 2/0)} &= \frac{d}{dt} \left[\overline{V(C, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[(R+\ell)\dot{\theta} \vec{j}_1 - r\dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r\dot{\varphi} \vec{k}_2 \right]_{\mathcal{R}_0} \end{aligned}$$

Calculons :

- $\frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = \overline{\Omega(1/0)} \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{j}_1$.
- $\frac{d}{dt} [\vec{j}_1]_{\mathcal{R}_0} = \overline{\Omega(1/0)} \wedge \vec{j}_1 = \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{j}_1 = -\dot{\theta} \vec{i}_1$.
- $\frac{d}{dt} [\vec{k}_2]_{\mathcal{R}_0} = \overline{\Omega(2/0)} \wedge \vec{k}_2 = (\dot{\theta} \vec{k}_0 + \dot{\varphi} \vec{i}_1) \wedge \vec{k}_2 = \dot{\theta} \vec{k}_1 \wedge \vec{k}_2 + \dot{\varphi} \vec{i}_2 \wedge \vec{k}_2 = \dot{\theta} \sin \varphi \vec{i}_1 - \dot{\varphi} \vec{j}_2$.

$$\overline{\Gamma(C, 2/0)} = (R+\ell)\dot{\theta} \vec{j}_1 - (R+\ell)\dot{\theta}^2 \vec{i}_1 - r\dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r\dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{i}_1 - r\dot{\theta}^2 \cos \varphi \vec{j}_1 + r\dot{\varphi} \vec{k}_2 + r\dot{\varphi} (\dot{\theta} \sin \varphi \vec{i}_1 - \dot{\varphi} \vec{j}_2).$$

Exercice 41 – Mouvement RR 3D *

B2-13

Question 1 Déterminer $\overline{V(C, 2/0)}$ par dérivation vectorielle. $\overline{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overline{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1 + L \vec{i}_2]_{\mathcal{R}_0}$.

Calculons :

- $\frac{d}{dt} [\vec{j}_0]_{\mathcal{R}_0} = \vec{0}$;
- $\frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = \overline{\Omega(1/0)} \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{j}_1 \wedge \vec{i}_1 = -\dot{\theta} \vec{k}_1$;
- $\frac{d}{dt} [\vec{i}_2]_{\mathcal{R}_0} = \overline{\Omega(2/0)} \wedge \vec{i}_2 = (\dot{\theta} \vec{j}_1 + \dot{\varphi} \vec{k}_2) \wedge \vec{i}_2 = \dot{\theta} \vec{j}_1 \wedge \vec{i}_2 + \dot{\varphi} \vec{k}_2 \wedge \vec{i}_2 = -\dot{\theta} \cos \varphi \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{j}_2$.

$$\text{On a donc } \overline{V(C, 2/0)} = -R\dot{\theta} \vec{k}_1 + L(-\dot{\theta} \cos \varphi \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{j}_2).$$

Question 2 Déterminer $\overline{V(C, 2/0)}$ par composition du vecteur vitesse. $\overline{V(C, 2/0)} = \overline{V(C, 2/1)} + \overline{V(C, 1/0)}$.

- Pour calculer $\overline{V(C, 2/1)}$, passons par B car $\overline{V(B, 2/1)} = \vec{0}$: $\overline{V(C, 2/1)} = \overline{V(B, 2/1)} + \overline{CB} \wedge \overline{\Omega(2/1)} = \overline{CB} \wedge \overline{\Omega(2/1)} = -L \vec{i}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{k}_2 = L \dot{\varphi} \vec{j}_2$.
- Pour calculer $\overline{V(C, 1/0)}$, passons par A car $\overline{V(A, 1/0)} = \vec{0}$: $\overline{V(C, 1/0)} = \overline{V(A, 1/0)} + \overline{CA} \wedge \overline{\Omega(1/0)} = \overline{CA} \wedge \overline{\Omega(1/0)} = -(H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1 + L \vec{i}_2) \wedge \dot{\theta} \vec{j}_1 = -\dot{\theta} (R \vec{i}_1 \wedge \vec{j}_1 + L \vec{i}_2 \wedge \vec{j}_1) = -\dot{\theta} (R \vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1)$.

$$\text{Au final, } \overline{V(C, 2/0)} = L \dot{\varphi} \vec{j}_2 - \dot{\theta} (R \vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1).$$

Question 3 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} \vec{k}_2 + \dot{\theta} \vec{j}_0 \\ L \dot{\varphi} \vec{j}_2 - \dot{\theta} (R \vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1) \end{array} \right\}_C$$

Question 4 Déterminer $\overline{\Gamma(C, 2/0)}$.

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma(C, 2/0)} &= \frac{d}{dt} \left[\overline{V(C, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{d}{dt} [L \dot{\varphi} \vec{j}_2 - \dot{\theta} (R \vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1)]_{\mathcal{R}_0}. \end{aligned}$$

Calculons :

- $\frac{d}{dt} [\vec{j}_2]_{\mathcal{R}_0} = \overline{\Omega(2/0)} \wedge \vec{j}_2 = (\dot{\theta} \vec{j}_1 + \dot{\theta} \vec{k}_1) \wedge \vec{j}_2 = \dot{\theta} \vec{j}_1 \wedge \vec{j}_2 + \dot{\theta} \vec{k}_1 \wedge \vec{j}_2 = \dot{\theta} \sin \varphi \vec{k}_1 - \dot{\theta} \vec{i}_2$.
- $\frac{d}{dt} [\vec{k}_1]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \vec{i}_1$.

$$\overline{\Gamma(C, 2/0)} = L \dot{\varphi} \vec{j}_2 + L \dot{\varphi} (\dot{\theta} \sin \varphi \vec{k}_1 - \dot{\theta} \vec{i}_2) - \dot{\theta} (R \vec{k}_1 + L \cos \varphi \vec{k}_1) - \dot{\theta} (R \dot{\theta} \vec{i}_1 + L \cos \varphi \dot{\theta} \vec{i}_1 - L \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{k}_1).$$

Exercice 42 – Mouvement RT – RSG **

B2-13

Question 1 Déterminer $\overline{V(B, 2/0)}$.

$$\overline{V(B, 2/0)} = \overline{V(B, 2/1)} + \overline{V(B, 1/0)}.$$

$$\text{D'une part, } \overline{V(B, 2/1)} = \dot{\lambda} \vec{i}_1.$$

$$\text{D'autre part, en utilisant le roulement sans glissement en I, } \overline{V(B, 1/0)} = \overline{V(I, 1/0)} + \overline{BI} \wedge \overline{\Omega(1/0)} = \vec{0} + (-\lambda(t) \vec{i}_1 - R \vec{j}_0) \wedge \dot{\theta} \vec{k}_0 = -\dot{\theta} (\lambda(t) \vec{i}_1 \wedge \vec{k}_0 + R \vec{j}_0 \wedge \vec{k}_0) = \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0).$$

$$\text{Au final, } \overline{V(B, 2/0)} = \dot{\lambda} \vec{i}_1 + \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0).$$

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{i}_1 + \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) \end{array} \right\}_B.$$

Question 3 Déterminer $\vec{\Gamma}(B, 2/0)$.

$$\vec{\Gamma}(B, 2/0) = \frac{d}{dt} [\vec{V}(B, 2/0)]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta} \vec{j}_1 + \ddot{\theta}(t) (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) + \dot{\theta}(t) (\dot{\lambda}(t) \vec{j}_1 - \lambda(t) \dot{\theta} \vec{i}_1).$$

Exercice 43 – Pompe à palettes *

B2-13

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.

En utilisant la décomposition du vecteur cinématique, on a : $\vec{V}(B, 2/0) = \vec{V}(B, 2/1) + \vec{V}(B, 1/0)$.

- $\vec{V}(B, 2/1) = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1$.
- $\vec{V}(B, 1/0) = \vec{V}(A, 1/0) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = -\lambda(t) \vec{i}_1 \wedge \dot{\theta}(t) \vec{k}_0 = \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t) \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B.$$

Question 2 Déterminer $\vec{\Gamma}(B, 2/0)$.

$$\vec{\Gamma}(B, 2/0) = \frac{d}{dt} [\vec{V}(B, 2/0)]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 + \lambda(t) \ddot{\theta}(t) \vec{j}_1 - \lambda(t) \dot{\theta}^2(t) \vec{i}_1.$$

Exercice 44 – Pompe à piston axial *

B2-13

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme $\lambda(t) = e \sin \theta + R$ ou encore $\dot{\lambda}(t) = e \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$ (voir exercice 63).

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 \end{array} \right\}_C$.

Question 2 Déterminer $\vec{\Gamma}(C, 2/0)$. $\vec{\Gamma}(C, 2/0) = \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0$.

Exercice 45 – Système bielle manivelle *

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme $\lambda(t) = \pm \sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)} + R \sin \theta(t)$ et $\dot{\lambda}(t) = \pm \left(\frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)}} \right) + \dot{\theta}(t) R \cos \theta(t)$. (à vérifier – voir exercice 64).

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B. On commence par calculer $\vec{V}(B, 2/0) = \vec{V}(B, 2/1) + \vec{V}(B, 1/0) = \vec{V}(B, 1/0)$.

- **Méthode 1 – dérivation vectorielle :** $\vec{V}(B, 1/0) = \frac{d}{dt} [AB]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$.
- **Méthode 2 – formule de changement de point :** $\vec{V}(B, 1/0) = \vec{V}(A, 1/0) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = -R \vec{i}_1 \wedge \dot{\theta}(t) \vec{k}_0 = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$.

$$\text{On a alors, } \{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B.$$

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ et au point C.

$$\text{On a, } \{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 \end{array} \right\}_C.$$

Par ailleurs, on peut remarquer que $\vec{V}(C, 2/0) = \vec{V}(B, 2/0) + \vec{CB} \wedge \vec{\Omega}(2/0) = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 + L \vec{i}_2 \wedge \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 - L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2$.

$$\text{On a donc nécessairement } \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 - L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2 \\ \Rightarrow \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 = R \dot{\theta}(t) (\cos \theta(t) \vec{j}_0 - \sin \theta(t) \vec{i}_0) - L \dot{\varphi}(t) (\cos \varphi(t) \vec{j}_0 - \sin \varphi(t) \vec{i}_0).$$

On a donc :

$$\begin{cases} 0 = -R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + L \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ \dot{\lambda}(t) = R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) - L \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) = L \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ \dot{\lambda}(t) - R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) = L \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi(t) = \frac{R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)}{\dot{\lambda}(t) - R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)}$$

Question 3 Déterminer $\vec{\Gamma}(B, 2/0)$.

Question 4 Déterminer $\vec{\Gamma}(C, 2/0)$.

Exercice 46 – Système de transformation de mouvement *

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 65).

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(3/0)\}$ au point B.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(B, 3/0)$.

Exercice 47 – Barrière Sympact **

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 66).

Question 1 En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer $\gamma(t)$ et $\dot{\gamma}(t)$.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(3/2)\}$ au point B.

Exercice 48 – Système 4 barres ***

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 69). On définit le point G tel que $\overrightarrow{OG} = L \vec{x}_1$.

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point G.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(G, 1/0)$.

Exercice 49 – Maxpidd ***

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Par ailleurs $a = 107,1 \text{ mm}$, $b = 80 \text{ mm}$, $c = 70 \text{ mm}$, $d = 80 \text{ mm}$. Le pas de la vis est de 4 mm.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 70).

On définit le point G tel que $\overrightarrow{OG} = L \vec{x}_4$.

Question 1 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(4/0)\}$ au point G.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(G, 4/0)$.

Exercice 50 – Mouvement RR – RSG **

B2-13

Question 1 Déterminer $\overrightarrow{V}(B, 2/0)$. En utilisant la décomposition du vecteur vitesse : $\overrightarrow{V}(B, 2/0) = \overrightarrow{V}(B, 2/1) + \overrightarrow{V}(B, 1/0)$.

- **Calcul de $\overrightarrow{V}(B, 2/1)$:** $\overrightarrow{V}(B, 2/1) = \overrightarrow{V}(A, 2/1) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/1)$. 2 et 1 étant en pivot d'axe $\left(A, \vec{k}_0\right)$, on a $\overrightarrow{V}(B, 2/1) = \vec{0} - L \vec{i}_2 \wedge \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 = L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2$.
 - **Calcul de $\overrightarrow{V}(B, 1/0)$:** $\overrightarrow{V}(B, 1/0) = \overrightarrow{V}(I, 1/0) + \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \vec{0} - L \vec{i}_1 \wedge \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0$. En utilisant l'hypothèse de roulement sans glissement : $\overrightarrow{V}(B, 1/0) = (-L \vec{i}_1 - R \vec{j}_0) \wedge \dot{\theta}(t) \vec{k}_0 = \dot{\theta}(t) (L \vec{j}_1 - R \vec{i}_0)$.
- Au final, $\overrightarrow{V}(B, 2/0) = L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2 + \dot{\theta}(t) (L \vec{j}_1 - R \vec{i}_0)$.

Question 2 Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}(2/0) = (\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t)) \vec{k}_0 \\ L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2 + \dot{\theta}(t) (L \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) \end{array} \right\}_B$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(B, 2/0)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma}(B, 2/0) &= \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V}(B, 2/0) \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{d}{dt} [L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt} [\dot{\theta}(t) (L \vec{j}_1 - R \vec{i}_0)]_{\mathcal{R}_0} \\ &= L \ddot{\varphi}(t) \vec{j}_2 - L \dot{\varphi}(t) (\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t)) \vec{i}_2 + \ddot{\theta}(t) (L \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) - L \dot{\theta}^2(t) \vec{i}_1. \end{aligned}$$

1.2 Proposer une démarche de résolution

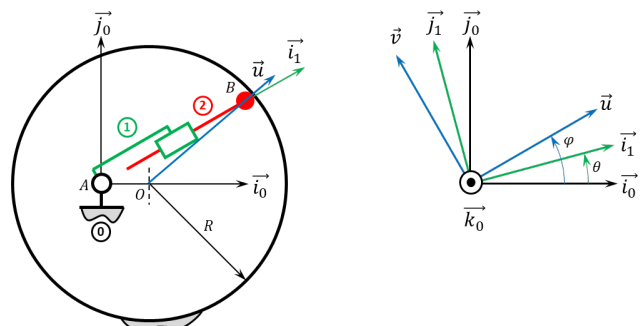
1.3 Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

1.3.1 Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques

Exercice 51 – Pompe à piston radial *

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AO} = e \vec{i}_0$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$. De plus $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre 0 et 2 en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 4 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

On prendra une section de piston **2** de 1 cm^2 et une fréquence de rotation de $\dot{\theta}(t) = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$. **Question 5** Exprimer le débit instantané de la pompe.

Question 6 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10 \text{ mm}$ et $e = 15 \text{ mm}$.

Question 7 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10 \text{ mm}$ pour une pompe à 5 pistons (5 branches 1+2).

Indications (à vérifier...) :

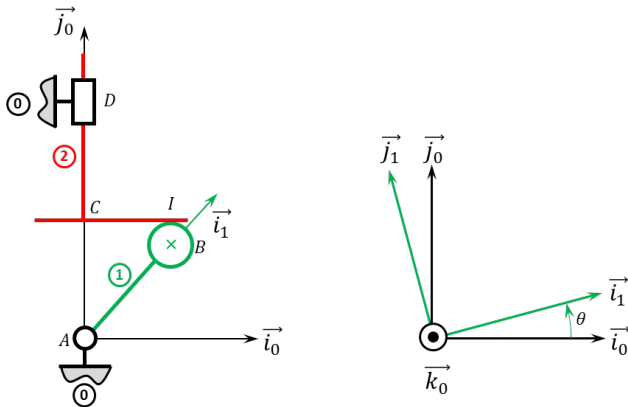
1. .
2. $\lambda(t) = e \cos \theta(t) \pm \sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}$.
3. .
4. $q(t) = S \dot{\lambda}(t)$.
5. .

Corrigé voir 62.

Exercice 52 – Pompe à piston axial *

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = e \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{BI} = R \vec{j}_0$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \vec{j}_0$. De plus, $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 20 \text{ mm}$. Le contact entre **1** et **2** en B est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre **0** et **2**.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

Question 4 On note S la section du piston **2**. Exprimer le débit instantané de la pompe.

Question 5 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10 \text{ mm}$ et $R = 10 \text{ mm}$ ainsi que pour $e = 20 \text{ mm}$ et $R = 5 \text{ mm}$. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$, la section du piston est donnée par $S = 1 \text{ cm}^2$.

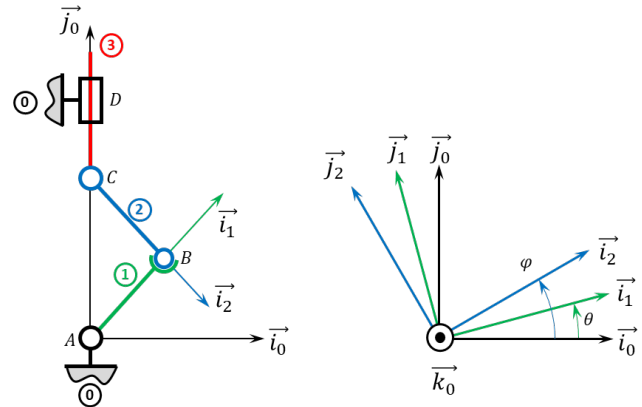
Indications :

1. .
2. $e \sin \theta + R - \lambda(t) = 0$.
3. $\dot{\lambda}(t) = e \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$.
4. $q(t) = e S \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$.
5. .

Exercice 53 – Système bielle manivelle **

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$, $\overrightarrow{CB} = L \vec{i}_2$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \vec{j}_0$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

Question 4 En utilisant Python, tracer la vitesse du piston en fonction du temps. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$, on prendra $R = 10 \text{ mm}$ et $L = 20 \text{ mm}$ puis $L = 30 \text{ mm}$.

Question 5 En utilisant Python, tracer l'accélération du piston en fonction du temps en utilisant les mêmes valeurs que dans la question précédente. On utilisera une dérivation numérique.

Indications :

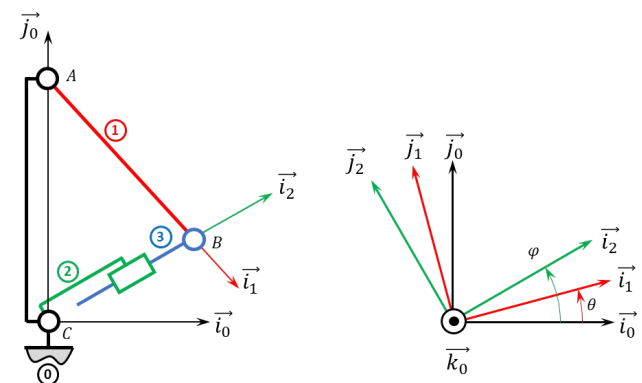
1. .
2. $\lambda(t) = \pm \sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)} + R \sin \theta(t)$.
3. $\dot{\lambda}(t) = \pm \left(\frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)}} \right) + \dot{\theta}(t) R \cos \theta(t)$.
4. .
5. .

Corrigé voir 64.

Exercice 54 – Pompe oscillante *

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ et $\overrightarrow{CA} = H \vec{j}_0$. De plus, $R = 40 \text{ mm}$ et $H = 60 \text{ mm}$. Par ailleurs, on note $\overrightarrow{CB} = \lambda(t) \vec{i}_2$.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

Question 4 Exprimer le débit instantané de la pompe.

Question 5 En utilisant Python, donner le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour un piston de diamètre $D = 10$ mm.

Indications :

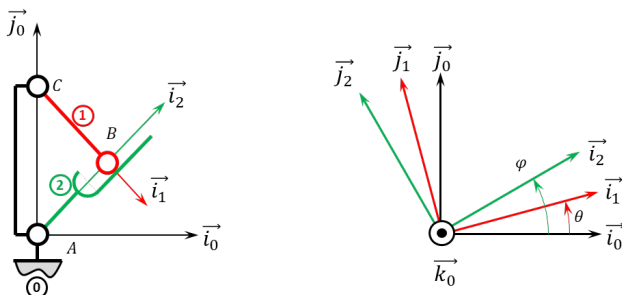
1. .
2. $\lambda(t) = \pm \sqrt{R^2 + H^2 + 2HR \sin \theta(t)}$
3. $\dot{\lambda}(t) = \frac{1}{2} (-2HR \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)) (R^2 + H^2 + 2HR \sin \theta(t))^{-\frac{1}{2}}$
4. $q(t) = S \dot{\lambda}(t)$
5. .

Corrigé voir 65.

Exercice 55 – Barrière Sympact *

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H \overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB} = R \overrightarrow{i_1}$. De plus, $H = 120$ mm et $R = 40$ mm.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

Question 4 En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Indications :

1. .
2. $\tan \varphi(t) = \frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)}$
3. $\dot{\varphi}(t) = \frac{R \dot{\theta}(t) (R + h \sin \theta(t))}{R^2 + h^2 + 2Rh \sin \theta(t)}$
4. .

Corrigé voir 66.

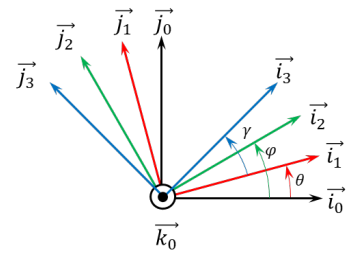
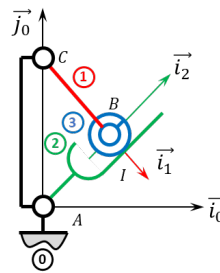
Exercice 56 – Barrière Sympact avec galet **

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H \overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB} = R \overrightarrow{i_1}$. De plus, $H = 120$ mm et $R = 40$ mm.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

Question 4 En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer $\gamma(t)$ et $\dot{\gamma}(t)$.

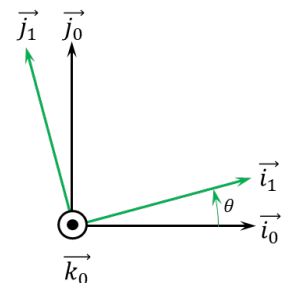
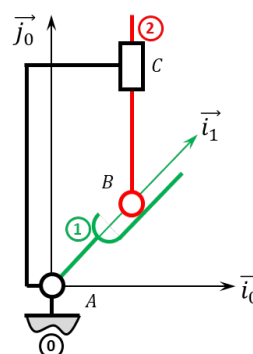
Question 5 En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Corrigé voir 67.

Exercice 57 – Poussoir *

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = L \overrightarrow{i_0} + H \overrightarrow{j_0}$, $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \overrightarrow{j_0}$. De plus, $H = 120$ mm, $L = 40$ mm.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\mu(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\mu}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

Question 4 En utilisant Python, tracer $\dot{\mu}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Corrigé voir 68.

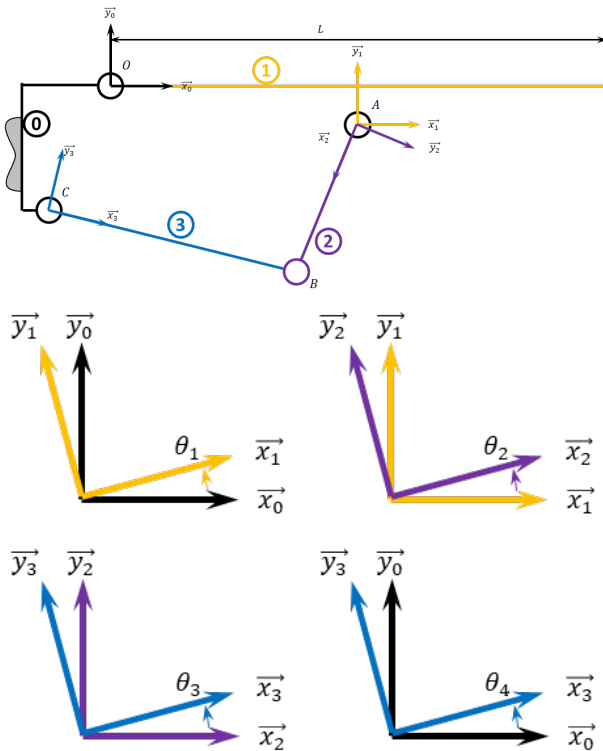
Exercice 58 – Système 4 barres **

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

On a :

- $\overrightarrow{OA} = a \overrightarrow{x_1} - f \overrightarrow{y_1}$ avec $a = 355$ mm et $f = 13$ mm;
- $\overrightarrow{AB} = b \overrightarrow{x_2}$ avec $b = 280$ mm;
- $\overrightarrow{BC} = -c \overrightarrow{x_3}$ avec $c = 280$ mm;
- $\overrightarrow{OC} = -d \overrightarrow{x_0} - e \overrightarrow{y_0}$ avec $d = 89,5$ mm et $e = 160$ mm;

Corrigé voir 70.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\theta_1(t)$ en fonction de $\theta_4(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$.

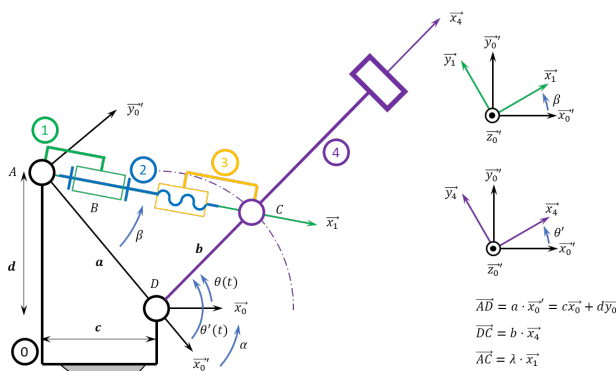
Question 4 En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Corrigé voir 69.

Exercice 59 – Maxpid ***

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs $a = 107,1 \text{ mm}$, $b = 80 \text{ mm}$, $c = 70 \text{ mm}$, $d = 80 \text{ mm}$. Le pas de la vis est de 4 mm.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\theta(t)$ en fonction de $\lambda(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\dot{\lambda}(t)$.

Question 4 Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$, vitesse de rotation du rotor moteur 2 par rapport au stator 1.

Question 5 En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 2 par rapport à 1 est de 500 tours par minute.

1. Les éventuelles erreur de texte font partie intégrante de la difficulté :).

Exercice 60 – Variateur de Graham^{1***}

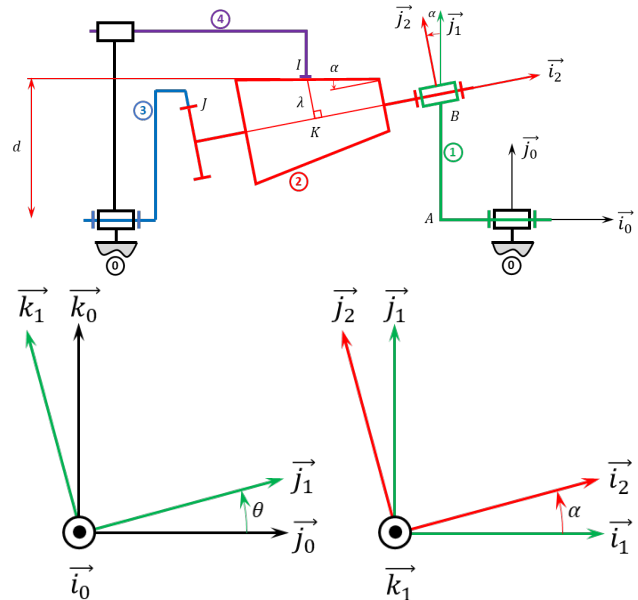
D'après ressources de Michel Huguet.

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



On note $\vec{AJ} = -L \vec{i}_0 + \frac{d_3}{2} \vec{j}_2$ et $\vec{KJ} = -\ell \vec{i}_2 + \frac{d_2}{2} \vec{j}_2$.

Soit $\mathcal{R} = (A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ un repère lié au bâti 0 du variateur. L'arbre moteur 1 et l'arbre récepteur 3 ont une liaison pivot d'axe (A, \vec{i}_0) avec le bâti 0. On pose $\overline{\Omega(1/0)} = \omega_1 \vec{i}_0$ et $\overline{\Omega(3/0)} = \omega_3 \vec{i}_0$.

Soit $\mathcal{R}_1 = (A; \vec{i}_0, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ et $\mathcal{R}_2 = (B; \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_1)$ deux repères liés respectivement à 1 et 2 tels que \vec{AB} ait même direction que \vec{j}_1 . On pose $\alpha = (\vec{i}_1, \vec{i}_2)$ constant.

Le satellite 2 a une liaison pivot d'axe (B, \vec{i}_2) avec 1. 2 est un tronc de cône de révolution d'axe (B, \vec{i}_2) de demi angle au sommet α . On pose $\overline{\Omega(S_2/S_1)} = \omega \vec{i}_2$.

La génératrice de 2 du plan $(O, \vec{i}_0, \vec{j}_1)$ la plus éloignée de l'axe (O, \vec{i}_0) est parallèle à \vec{i}_0 . Notons d sa distance à l'axe (O, \vec{i}_0) .

2 roule sans glisser au point I, sur une couronne 4, immobile par rapport à 0 pendant le fonctionnement. Le réglage du rapport de variation s'obtient en déplaçant 4 suivant l'axe (O, \vec{i}_0) .

Soit K le centre de la section droite du tronc de cône passant par I. On pose $B\vec{I} = \lambda \vec{j}_2$. À l'extrémité de 2 est fixée une roue dentée de n dents, d'axe (B, \vec{i}_2) , qui engrène avec une couronne dentée intérieure d'axe (A, \vec{i}_0) , de n_2 dents, liée à 3.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 En exprimant que 2 roule sans glisser sur 4 au point I, déterminer ω en fonction de ω_1 , d et λ .

Question 3 Quelle relation obtient-on entre ω_1 , ω_3 et ω en exprimant l'engrènement des deux roues dentées? (c'est à dire que 2 et 3 roulent sans glisser l'un sur l'autre en J).

Question 4 En déduire le rapport de variation $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ , d_2 , d_3 et d .

Question 5 Tracer la courbe représentative du rapport de variation $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ , sachant que $\frac{n}{n_3} = \frac{d_1}{d_3}$, $d = 55 \text{ mm}$ et que λ varie entre $\lambda_{\min} = 12 \text{ mm}$ et la valeur $\lambda_{\max} = 23 \text{ mm}$.

Corrigé voir 72.

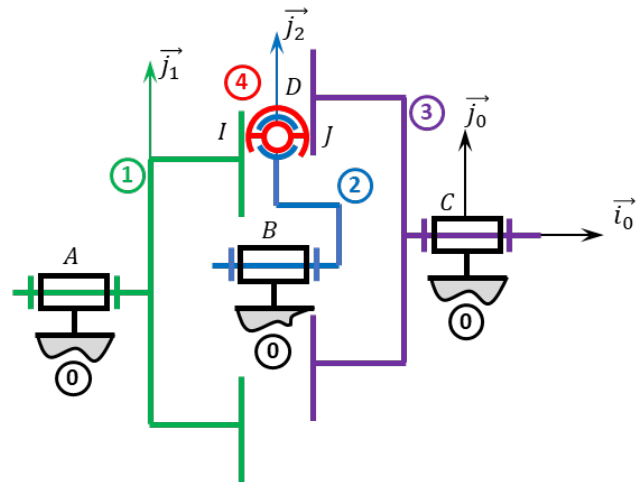
Exercice 61 – Variateur à billes *****

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer la loi entrée – sortie.

Corrigé voir 72.

1.4 Proposer une démarche de résolution

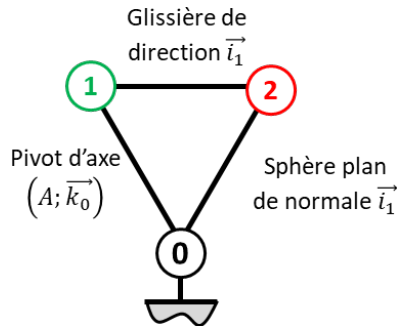
1.5 Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

1.5.1 Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques

Exercice 62 – Pompe à piston radial *

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

On a $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}$ soit $-e \vec{i}_0 + \lambda \vec{i}_1 - R \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow -e \vec{i}_0 + \lambda(t) \cos \theta(t) \vec{i}_0 + \lambda(t) \sin \theta(t) \vec{j}_0 - R \cos \varphi(t) \vec{i}_0 - R \sin \varphi(t) \vec{j}_0 = \vec{0}$.

En projetant les expressions sur \vec{i}_0 et \vec{j}_0 , on a :
$$\begin{cases} -e + \lambda(t) \cos \theta(t) - R \cos \varphi(t) = 0 \\ \lambda(t) \sin \theta(t) - R \sin \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

On cherche à supprimer $\varphi(t)$; donc

$$\begin{cases} -e + \lambda(t) \cos \theta(t) = R \cos \varphi(t) \\ \lambda(t) \sin \theta(t) = R \sin \varphi(t) \end{cases}$$

En élevant au carré les expressions et en sommant, on obtient $R^2 = (-e + \lambda(t) \cos \theta(t))^2 + \lambda(t)^2 \sin^2 \theta(t) \Rightarrow R^2 = (-e + \lambda(t) \cos \theta(t))^2 + \lambda(t)^2 \sin^2 \theta(t)$

$$\Rightarrow R^2 = e^2 - 2e\lambda(t) \cos \theta(t) + \lambda(t)^2$$

Résolution de l'équation : $\lambda(t)^2 - 2e\lambda(t) \cos \theta(t) + e^2 - R^2 = 0$.

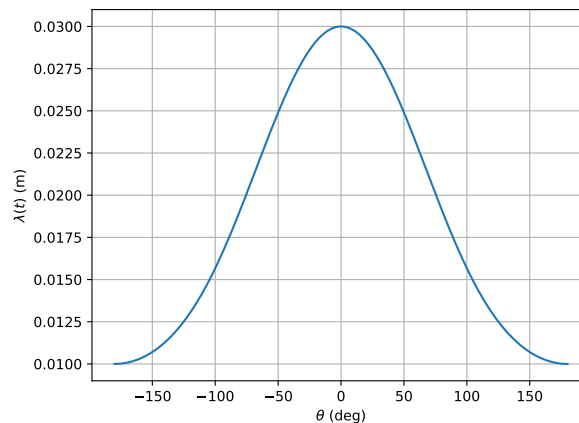
$$\text{On a } \Delta = (-2e \cos \theta(t))^2 - 4(e^2 - R^2) = 4e^2 \cos^2 \theta(t) - 4e^2 + 4R^2$$

On a donc

$$\lambda(t) = \frac{2e \cos \theta(t) \pm \sqrt{4e^2 \cos^2 \theta(t) - 4e^2 + 4R^2}}{2}$$

$$= e \cos \theta(t) \pm \sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}$$

Question 3 En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$. On garde la solution positive et obtient la courbe suivante.

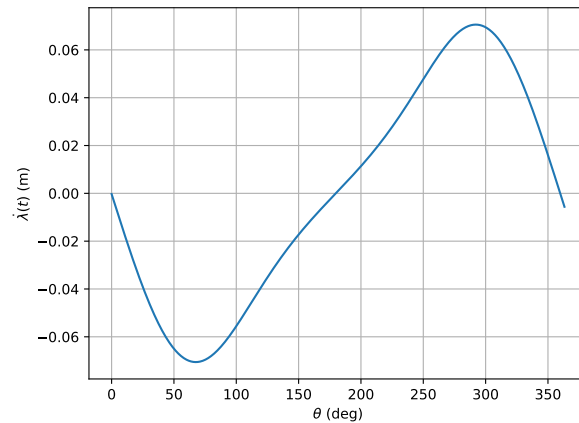


Question 4 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

En dérivant l'expression précédente, on a $\dot{\lambda}_+(t) = -e\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \frac{1}{2} (e^2 \cos^2 \theta(t))' (e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= -e\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) - \frac{e^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}}$$

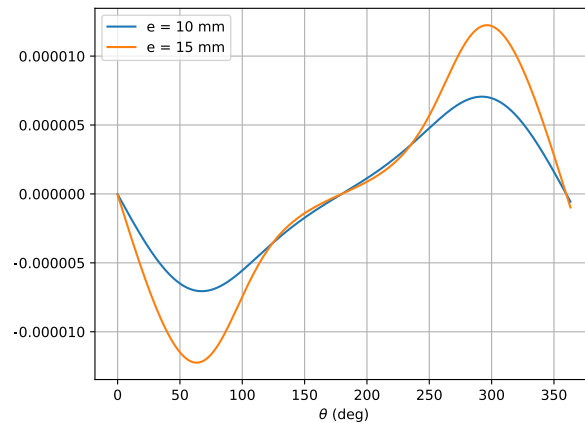
À revoir



Question 5 Exprimer le débit instantané de la pompe.

Le débit instantané de la pompe est donné par $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$.

Question 6 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10$ mm et $e = 15$ mm.



Question 7 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10$ mm pour une pompe à 5 pistons (5 branches 1+2).

```
def plot_debit5p():
    plt.cla()
    w = 2*m.pi # rad/s (1tr/s)
    les_t = np.linspace(0,6,6000)
    les_theta = w*les_t

    # Calcul de la vitesse instantanée des pistons.
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap_bis(les_t, les_lambda)
    les_lambdap = np.array(les_lambdap)

    S= 1e-4 # Surface en m2

    # 5 courbes de débit décalées d'un cinquième de tour
    les_q1 = S*les_lambdap
    les_q2 = S*les_lambdap[200:]
    les_q3 = S*les_lambdap[400:]
    les_q4 = S*les_lambdap[600:]
    les_q5 = S*les_lambdap[800:]

    # On conserve que les valeurs que sur un tour
    les_q1 = les_q1[:1000]
    les_q2 = les_q2[:1000]
    les_q3 = les_q3[:1000]
```

```
les_q4 = les_q4[:1000]
les_q5 = les_q5[:1000]
plt.grid()

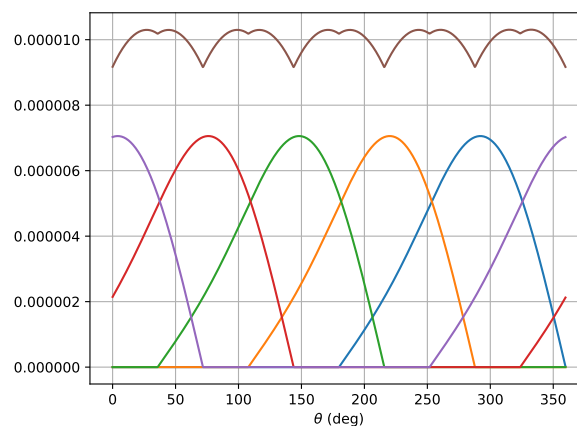
les_t = les_t[:1000]
les_theta = les_theta[:1000]

plt.xlabel("$\\theta$ (deg)")
plt.ylabel("Débit instantané $m^3s^{-1}$")

# On conserve que les valeurs positives (débit)
for i in range(len(les_q1)):
    if les_q1[i]<0:
        les_q1[i]=0
    if les_q2[i]<0:
        les_q2[i]=0
    if les_q3[i]<0:
        les_q3[i]=0
    if les_q4[i]<0:
        les_q4[i]=0
    if les_q5[i]<0:
        les_q5[i]=0

plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q1)
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q2)
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q3)
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q4)
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q5)

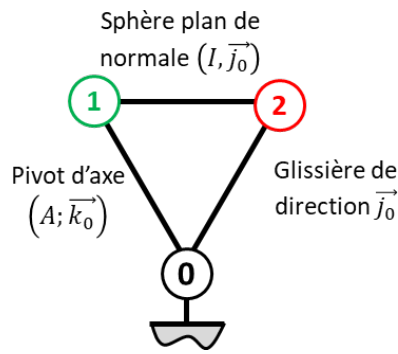
# Le débit instantané est la somme des contributions
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q1+les_q2+les_q3+les_q4+les_q5)
plt.show()
plt.savefig("10_05_c.pdf")
```



Exercice 63 – Pompe à piston axial *

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

En écrivant la fermeture géométrique, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$.

On a donc, $e \vec{i}_1 + R \vec{j}_0 + \mu \vec{i}_0 - \lambda(t) \vec{j}_0 = \overrightarrow{0}$. En projetant l'expression sur \vec{j}_0 (dans ce cas, l'expression suivant \vec{i}_0 n'est pas utile) : $e \sin \theta + R - \lambda(t) = 0$.

On a donc, $\lambda(t) = e \sin \theta + R$.

Question 3 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

En dérivant l'expression précédente, on a $\dot{\lambda}(t) = e \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$.

Question 4 On note S la section du piston 2. Exprimer le débit instantané de la pompe.

En notant $q(t)$ le débit instantané, $q(t) = e S \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$.

Question 5 En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10$ mm et $R = 10$ mm ainsi que pour $e = 20$ mm et $R = 5$ mm. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$, la section du piston est donnée par $S = 1 \text{ cm}^2$.

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""11_PompePistonAxial.py"""

__author__ = "Xavier_Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.02 # m
e = 0.01 # m

def calc_lambda(theta):
    res= e*np.sin(theta)+R

    return res

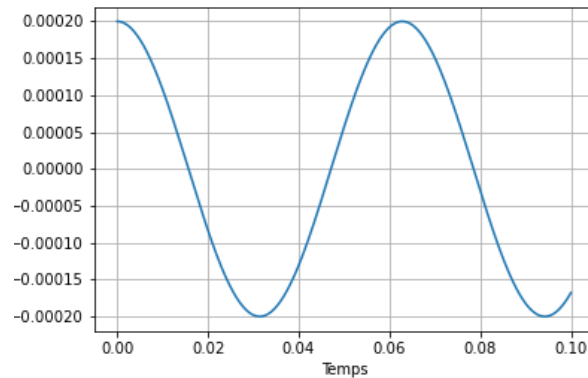
def calc_lambdap(theta,w):

    res = e*w*np.cos(theta)
    return res

def plot_debit():
    plt.cla()
    w = 100 # rad/s
    les_t = np.linspace(0,0.1,1000)
    les_theta = w*les_t
    global e
    S = 1e-4
    e = 20e-3
    les_q = e*S*w*np.cos(les_theta)
    plt.plot(les_t,les_q)
    plt.xlabel("Temps(s)")
    plt.ylabel("Débit_t({m}~3s^{-1})")
    plt.grid()
```

```
plt.savefig("11_02_c.png")
plt.show()
```

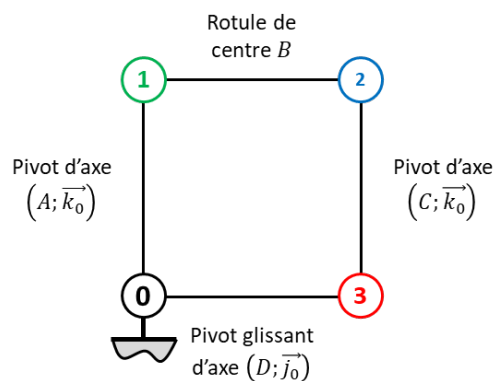
```
plot_debit()
```



Exercice 64 – Système bielle manivelle **

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

En réalisant une fermeture géométrique, on obtient $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow R \vec{i}_1 - L \vec{i}_2 - \lambda(t) \vec{j}_0 = \overrightarrow{0}$. On projette alors cette expression dans \mathcal{R}_0 :

$$\begin{cases} R \cos \theta(t) - L \cos \varphi(t) = 0 \\ R \sin \theta(t) - L \sin \varphi(t) - \lambda(t) = 0 \end{cases}$$

On cherche à éliminer $\varphi(t)$:

$$\begin{cases} R \cos \theta(t) = L \cos \varphi(t) \\ R \sin \theta(t) - \lambda(t) = L \sin \varphi(t) \end{cases}$$

En élevant au carré, on a donc

$$\begin{cases} R^2 \cos^2 \theta(t) = L^2 \cos^2 \varphi(t) \\ (R \sin \theta(t) - \lambda(t))^2 = L^2 \sin^2 \varphi(t) \end{cases}$$

En conséquence, $R^2 \cos^2 \theta(t) + (R \sin \theta(t) - \lambda(t))^2 = L^2$ et

$$(R \sin \theta(t) - \lambda(t))^2 = L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t) \Rightarrow \lambda(t) = \pm \sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)} + R \sin \theta(t).$$

Question 3 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

$$\dot{\lambda}(t) = \pm \left(\frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)}} \right) + \dot{\theta}(t) R \cos \theta(t)$$

Question 4 En utilisant Python, tracer la vitesse du piston en fonction du temps. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$, on prendra $R = 10 \text{ mm}$ et $L = 20 \text{ mm}$ puis $L = 30 \text{ mm}$.

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-
```

```
"""12_BielleManivelle.py"""
__author__ = "Xavier Pessoles"
```

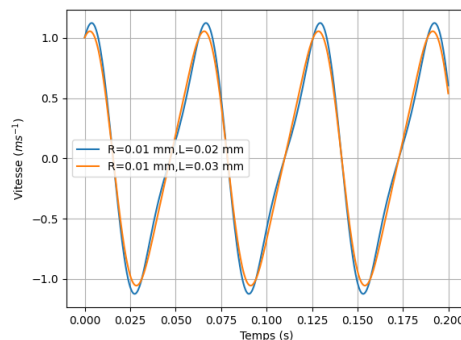
```
__email__ = "xpessoles.pts@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

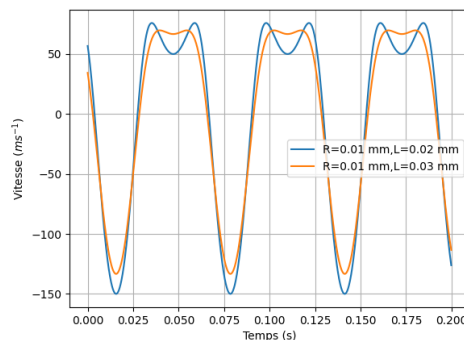
R = 0.01 # m
L = 0.03 # m
w = 100
def calc_lambda(theta):
    #res = R*np.sin(theta)
    #print(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))
    #res = res + np.sqrt(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))
    res = np.sqrt(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))+R*np.sin(theta)
    return res

def plot_lambda():
    les_theta=np.linspace(-2*np.pi,2*np.pi,1000)
    les_l = [calc_lambda(x) for x in les_theta]
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Vitesse (m.s-1)")
    plt.plot(les_theta,les_l,label=str("R=")+str(R)+"mm,"+str("L=")+str(L)+"mm")
    plt.legend()
    plt.show()

plot_lambda()
```



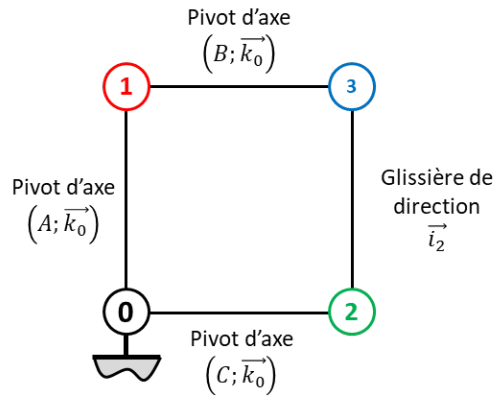
Question 5 En utilisant Python, tracer l'accélération du piston en fonction du temps en utilisant les mêmes valeurs que dans la question précédente. On utilisera une dérivation numérique.



Exercice 65 – Pompe oscillante *

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

En réalisant une fermeture géométrique, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow R \vec{i}_1 - \lambda(t) \vec{i}_2 + H \vec{j}_0 = \overrightarrow{0}$.

En projetant cette expression dans le repère \mathcal{R}_0 , on a $R(\cos \theta(t) \vec{i}_0 + \sin \theta(t) \vec{j}_0) - \lambda(t)(\cos \varphi(t) \vec{i}_0 + \sin \varphi(t) \vec{j}_0) + H \vec{j}_0 = \overrightarrow{0}$.

On obtient alors les équations scalaires suivantes :
$$\begin{cases} R \cos \theta(t) - \lambda(t) \cos \varphi(t) = 0 \\ R \sin \theta(t) - \lambda(t) \sin \varphi(t) + H = 0 \end{cases}$$

On cherche à supprimer $\varphi(t)$, on va donc isoler la variable :
$$\begin{cases} \lambda(t) \cos \varphi(t) = R \cos \theta(t) \\ \lambda(t) \sin \varphi(t) = R \sin \theta(t) + H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(t)^2 \cos^2 \varphi(t) = R^2 \cos^2 \theta(t) \\ \lambda(t)^2 \sin^2 \varphi(t) = (R \sin \theta(t) + H)^2 \end{cases}$$

En sommant les expressions, on a : $\lambda(t)^2 = R^2 \cos^2 \theta(t) + (R \sin \theta(t) + H)^2$.

Au final, $\lambda(t)^2 = R^2 + H^2 + 2HR \sin \theta(t)$ et

$\lambda(t) = \pm \sqrt{R^2 + H^2 + 2HR \sin \theta(t)}$.

Question 3 Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

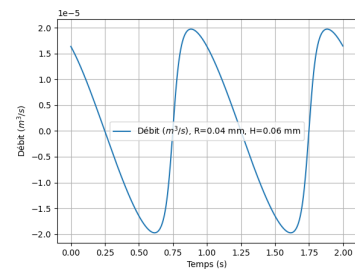
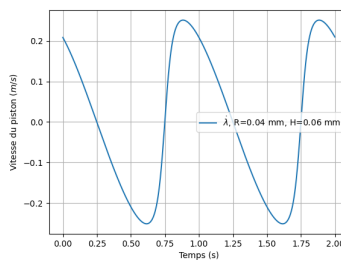
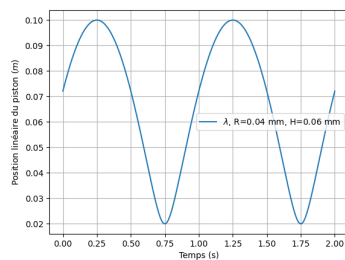
En dérivant l'expression obtenue à la question précédente, on obtient

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{1}{2} (-2HR \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)) (R^2 + H^2 + 2HR \sin \theta(t))^{-\frac{1}{2}}.$$

Question 4 Exprimer le débit instantané de la pompe.

On note q le débit instantané de la pompe. On a $q(t) = S \dot{\lambda}(t)$ avec S la section du piston 3.

Question 5 En utilisant Python, donner le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour un piston de diamètre $D = 10$ mm.



```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""13_TransfoMouvement.py"""

__author__ = "Xavier_Pessoles"
__email__ = "xpessoles@lamartin.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m

R = 0.04 # m
H = 0.06 # m
D = 10e-3 # 10 mm

w = 60 # tours /min
w = w*2*m.pi/60 # rad/s
```

```
def calc_lambda(theta):
    res = R*R+H*H+2*H*R*np.sin(theta)

    return np.sqrt(res)

def calc_lambdap(theta):
    res = -H*R*w*np.cos(theta)*np.power(R*R+H*H+2*H*R*np.sin(theta), -0.5)
    return np.sqrt(res)

def calc_lambdap_bis(les_t, les_lambda):
    les_lambda_p = []
    for i in range(len(les_t)-1):
        les_lambda_p.append((les_lambda[i+1]-les_lambda[i])/(les_t[i+1]-les_t[i]))

    return les_lambda_p

def plot_lambda():
    les_t = np.linspace(0,2,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Position linéaire du piston (m)")
    plt.plot(les_t, les_lambda, label=str("$\\lambda$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.legend()
    plt.show()

def plot_lambdap():
    les_t = np.linspace(0,2,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Vitesse du piston (m/s)")
    #plt.plot(les_t, les_lambdap, label=str("$\\dot{\\lambda}$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)
    #      )+" mm")

    les_lambdap_bis = calc_lambdap_bis(les_t, les_lambda)
    plt.plot(les_t[:-1], les_lambdap_bis, label=str("$\\dot{\\lambda}$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")
    #      )+" mm")

    plt.legend()
    plt.show()

def plot_debit():
    les_t = np.linspace(0,2,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Débit (m³/s)")
    #plt.plot(les_t, les_lambdap, label=str("$\\dot{\\lambda}$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)
    #      )+" mm")

    les_lambdap_bis = calc_lambdap_bis(les_t, les_lambda)
    for i in range(len(les_lambdap_bis)):
        les_lambdap_bis[i]=les_lambdap_bis[i]*np.pi*D*D/4

    plt.plot(les_t[:-1], les_lambdap_bis, label=str("Débit (m³/s), R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")
    #      )+" mm")

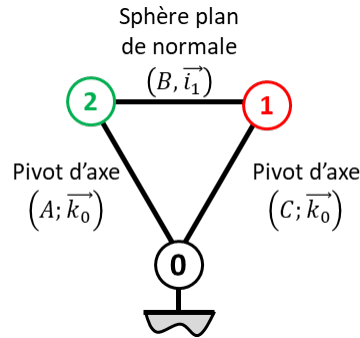
    plt.legend()
    plt.show()
```

```
#plot_lambda()
#plot_lambdap()
plot_debit()
```

Exercice 66 – Barrière Sympact *

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$. On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ soit $\lambda(t) \overrightarrow{i_2} - R \overrightarrow{i_1} - h \overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$.

En exprimant l'équation vectorielle dans le repère \mathcal{R}_0 , on a $\lambda(t) (\cos \varphi(t) \overrightarrow{i_0} + \sin \varphi(t) \overrightarrow{j_0}) - R (\cos \theta(t) \overrightarrow{i_0} + \sin \theta(t) \overrightarrow{j_0}) - h \overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$.

On a alors
$$\begin{cases} \lambda(t) \cos \varphi(t) - R \cos \theta(t) = 0 \\ \lambda(t) \sin \varphi(t) - R \sin \theta(t) - h = 0 \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} \lambda(t) \cos \varphi(t) = R \cos \theta(t) \\ \lambda(t) \sin \varphi(t) = R \sin \theta(t) + h \end{cases}$$

En faisant le rapport des équations, on a donc : $\tan \varphi(t) = \frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)}$ (pour $\theta(t) \neq \frac{\pi}{2} \text{ mod } \pi$).

Question 3 Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On a : $\varphi(t) = \arctan \left(\frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)} \right)$.

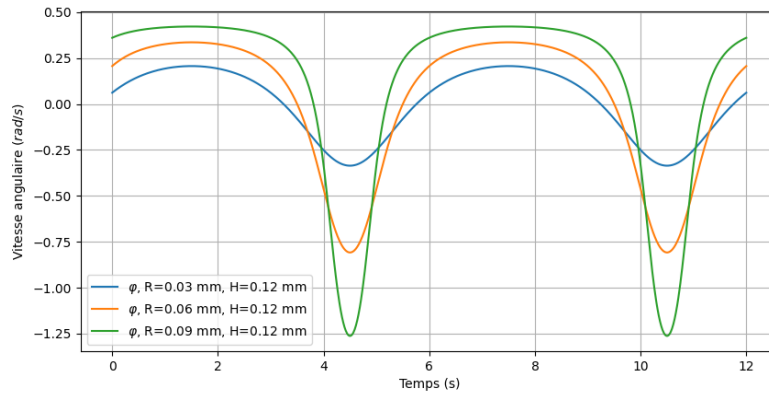
Pour commencer, $(R \sin \theta(t) + h)' = R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$ et $(R \cos \theta(t))' = -R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)$.

De plus,
$$\begin{aligned} & \left(\frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)} \right)' \\ &= \frac{R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) R \cos \theta(t) + R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) (R \sin \theta(t) + h)}{R^2 \cos^2 \theta(t)} \\ &= \frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos^2 \theta(t) + R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) (R \sin \theta(t) + h)}{R^2 \cos^2 \theta(t)} \\ &= \frac{R \dot{\theta}(t) \cos^2 \theta(t) + R \sin^2 \theta(t) \dot{\theta}(t) + h \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)} \\ &= \dot{\theta}(t) \frac{R + h \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}. \end{aligned}$$

Au final,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \frac{\dot{\theta}(t) \frac{R + h \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}}{1 + \left(\frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)} \right)^2} = \frac{\dot{\theta}(t) \frac{R + h \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}}{1 + \frac{(R \sin \theta(t) + h)^2}{R^2 \cos^2 \theta(t)}} \\ \dot{\varphi}(t) &= R^2 \cos^2 \theta(t) \frac{\dot{\theta}(t) \frac{R + h \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}}{R^2 \cos^2 \theta(t) + \frac{(R \sin \theta(t) + h)^2}{R^2 \cos^2 \theta(t)}} = \frac{R \dot{\theta}(t) (R + h \sin \theta(t))}{R^2 \cos^2 \theta(t) + (R \sin \theta(t) + h)^2} \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{R \dot{\theta}(t) (R + h \sin \theta(t))}{R^2 \cos^2 \theta(t) + R^2 \sin^2 \theta(t) + h^2 + 2Rh \sin \theta(t)} = \frac{R \dot{\theta}(t) (R + h \sin \theta(t))}{R^2 + h^2 + 2Rh \sin \theta(t)}. \end{aligned}$$

Question 4 En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.



```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""14_Sympact.py"""

__author__ = "Xavier_Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.03 # m
H = 0.12 # m
w = 10 # tours /min
w = 10*2*m.pi/60 # rad/s

def calc_phi(theta):
    num = R*np.sin(theta)+H
    den = R*np.cos(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def calc_phiip(theta):
    num = R*w*(R+H*np.sin(theta))
    den = R*R+H*H+2*R*H*np.sin(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def plot_phi():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phi = calc_phi(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Position angulaire ($rad$)")
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm",+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phi,label=str("$\\varphi$, R=")+str(R)+" mm",+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.legend()
    plt.show()

def plot_phiip():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phiip = calc_phiip(les_theta)

    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Vitesse angulaire ($rad/s$)")
```

```
#plt.plot(les_t, les_theta, label=str("\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
plt.plot(les_t, les_phi, label=str("\varphi$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
plt.legend()
plt.show()
```

```
for R in [0.03, 0.06, 0.09]:
    plot_phi()
```

Exercice 67 – Barrière Sympact avec galet **

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

Question 4 En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer $\gamma(t)$ et $\dot{\gamma}(t)$.

Question 5 En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Exercice 68 – Pousoir *

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\mu(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\mu}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.

Question 4 En utilisant Python, tracer $\dot{\mu}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Exercice 69 – Système 4 barres **

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer $\theta_1(t)$ en fonction de $\theta_4(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$.

Question 4 En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Exercice 70 – Maxpid ***

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Par ailleurs $a = 107,1$ mm, $b = 80$ mm, $c = 70$ mm, $d = 80$ mm. Le pas de la vis est de 4 mm.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons. Question 2 Exprimer $\theta(t)$ en fonction de $\lambda(t)$.

Question 3 Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\dot{\lambda}(t)$.

Question 4 Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$, vitesse de rotation du rotor moteur 2 par rapport au stator 1.

Question 5 En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 2 par rapport à 1 est de 500 tours par minute.

Exercice 71 – Variateur de Graham**

D'après ressources de Michel Huguet.

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 En exprimant que 2 roule sans glisser sur 4 au point I, déterminer ω en fonction de ω_1 , d et λ .

Question 3 Quelle relation obtient-on entre ω_1 , ω_3 et ω en exprimant l'engrènement des deux roues dentées ? (c'est à dire que 2 et 3 roulent sans glisser l'un sur l'autre en J).

Question 4 En déduire le rapport de variation $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ , d_2 , d_3 et d .

Question 5 Tracer la courbe représentative du rapport de variation $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ , sachant

que $\frac{n}{n_3} = \frac{d_1}{d_3}$, $d = 55$ mm et que λ varie entre $\lambda_{\min} = 12$ mm et la valeur $\lambda_{\max} = 23$ mm.

Exercice 72 – Variateur à billes *****

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer la loi entrée – sortie.