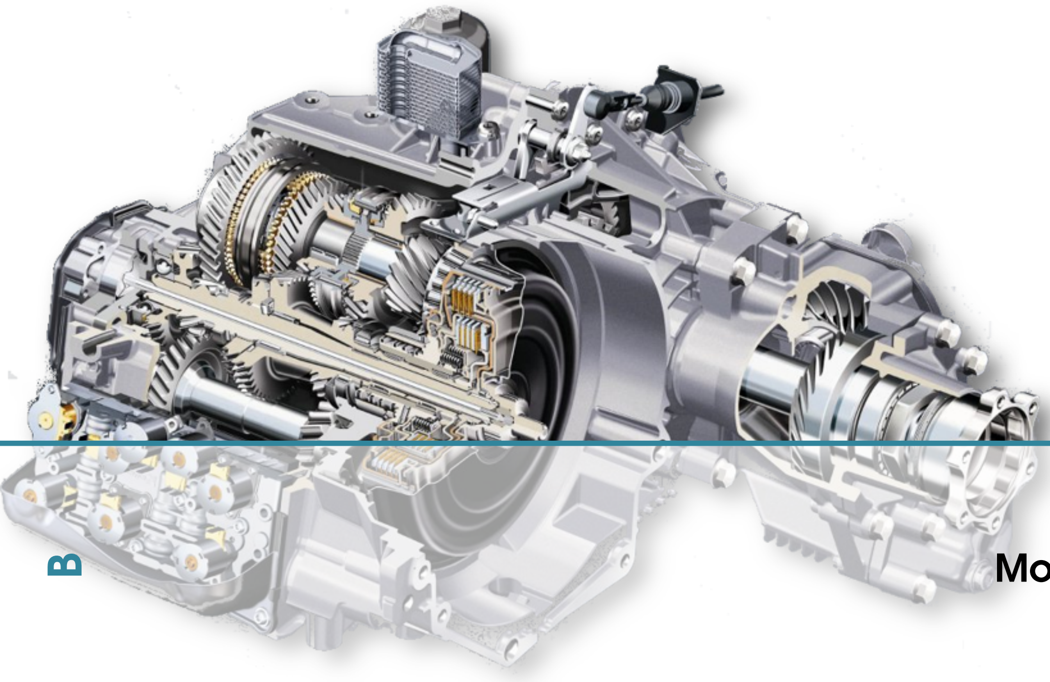


http://www.engineworld.fr/les-boites-robotisees-a-double-embrayage-22/

B

Modéliser

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

PSI⋆ – MP

B2
Proposer un modèle de connaissance et de comportement

1.1 Proposer un modèle de connaissance et de comportement

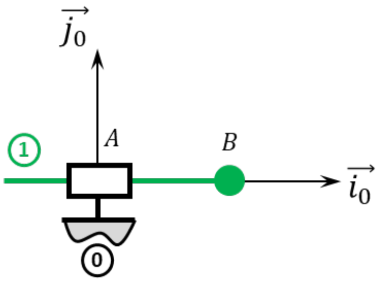
1.1.1 Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides

Exercice 1 – Mouvement T – ⋆

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_0}$.



Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.*

Question 2 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

Indications :
1. .
2. $x_B(t) = \lambda(t)$.

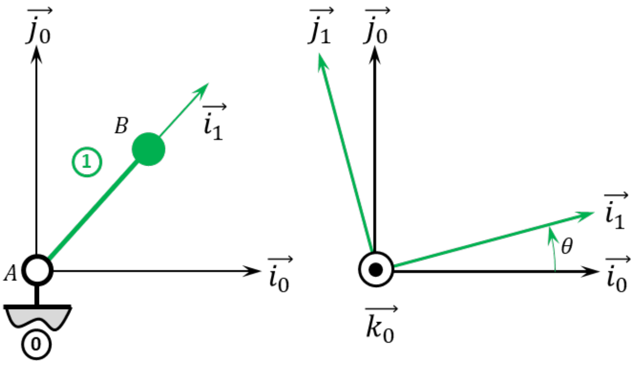
Corrigé voir 26.

Exercice 2 – Mouvement R ⋆

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\overrightarrow{i_1}$ avec $R = 20\,\text{mm}$.



Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.*

Question 2 *Quelle est la trajectoire du point B appartenant à **1** par rapport à **0**.*

Question 3 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

Indications :
1. .
2. .
3. $x_B(t) = R\cos\theta(t)$ et $y_B(t) = R\sin\theta(t)$.

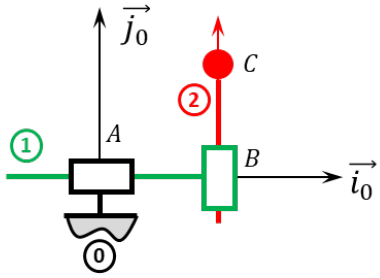
Corrigé voir 35.

Exercice 3 – Mouvement TT – ⋆

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{BC} = \mu(t)\overrightarrow{j_0}$.



Question 1 *Quel est le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

Question 2 *Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On souhaite que le point C réalise un cercle de centre A et de rayon $R = 10\,\text{cm}$ à la vitesse $v = 0{,}01\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

Question 3 *Donner la relation liant $\theta(t)$, v et R.*

Par ailleurs la vitesse du point C est donnée par $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\text{d}}{\text{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$.

Question 4 *Donner les expressions de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de v, R et du temps.*

Question 5 *En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$, $\mu(t)$ et la trajectoire générée.*

Indications :
1. .
2. $x_C(t) = \lambda(t)$ et $y_C(t) = \mu(t)$.
3. $\theta(t) = \dfrac{v}{R}t$.
4. $\lambda(t) = R\cos\left(\dfrac{v}{R}t\right)$, $\mu(t) = R\sin\left(\dfrac{v}{R}t\right)$.
5. .

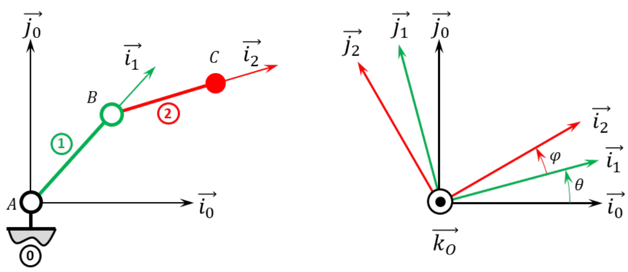
Corrigé voir 28.

Exercice 4 – Mouvement RR ⋆

C2-05

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\overrightarrow{i_1}$ avec $R = 20\,\text{mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L\overrightarrow{i_2}$ avec $L = 15\,\text{mm}$.



Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.*

Question 2 *Donner l'équation du mouvement du point C dans son mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On souhaite que le point C réalise un segment entre les points $[-25, 25]$ et $[25, 25]$ à la vitesse linéaire v.

Question 3 *Donner la durée du mouvement si C se déplace à vitesse quelconque.*

Question 4 *Donner l'équation paramétrique que doit suivre le point C.*

Question 5 *Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0{,}01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.*

Question 6 *En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\varphi(t)$ et la trajectoire générée.*

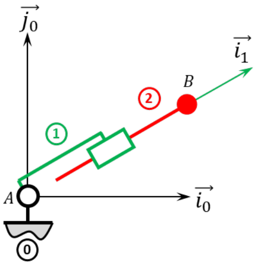
Corrigé voir 29.

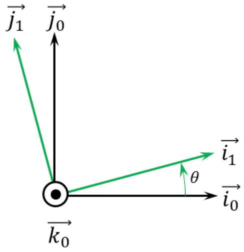
Exercice 5 – Mouvement RT ⋆

C2-05

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_1}$.





Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point B.*

Question 2 *Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point B dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On souhaite que le point B réalise un segment entre les points $[-25, 25]$ et $[25, 25]$.

Question 3 *Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\lambda(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0{,}01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\lambda(t)$ et la trajectoire générée.*

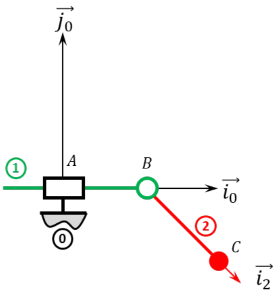
Corrigé voir 30.

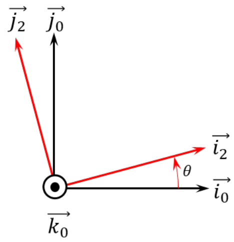
Exercice 6 – Mouvement RT ⋆

C2-05

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{BC} = R\overrightarrow{i_2}$ avec $R = 30\,\mathrm{mm}$.





Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point B.*

Question 2 *Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point B dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On souhaite que le point B réalise un segment entre les points $[-25, 25]$ et $[25, 25]$.

Question 3 *Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\lambda(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0{,}01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\lambda(t)$ et la trajectoire générée.*

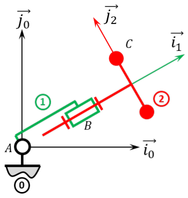
Corrigé voir 31.

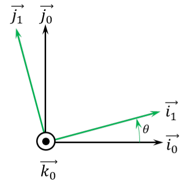
Exercice 7 – Mouvement RR 3D ⋆⋆

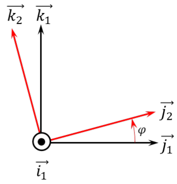
C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BC} = \ell\overrightarrow{i_2} + r\overrightarrow{j_2}$. On note $R + \ell = L = 20\,\mathrm{mm}$ et $r = 10\,\mathrm{mm}$.







Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.*

Question 2 *Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

> Indications :
> 1. .
> 2. $x_C(t) = (R+\ell)\cos\theta - r\cos\varphi\sin\theta$, $y_C(t) = (R+\ell)\sin\theta + r\cos\varphi\cos\theta$, $z_C(t) = r\sin\varphi$.

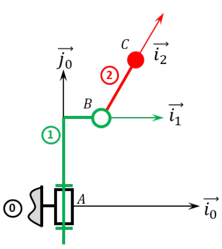
Corrigé voir 32.

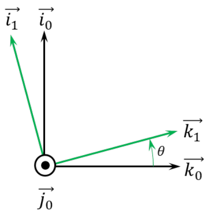
Exercice 8 – Mouvement RR 3D ⋆⋆

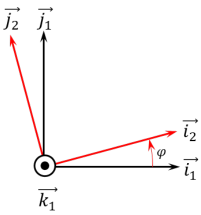
C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = H\overrightarrow{j_1} + R\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BC} = L\overrightarrow{i_2}$. On a $H = 20\,\mathrm{mm}$, $R = 20\,\mathrm{mm}$, $L = 10\,\mathrm{mm}$.







Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.*

Question 2 *Donner l'équation de mouvement du point C dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

> Indications
> 1. Tore.
> 2. $x_C(t) = R\cos\theta + L\cos\varphi\cos\theta$, $y_C(t) = H + L\sin\varphi$, $z_C(t) = -R\sin\theta - L\cos\varphi\sin\theta$.

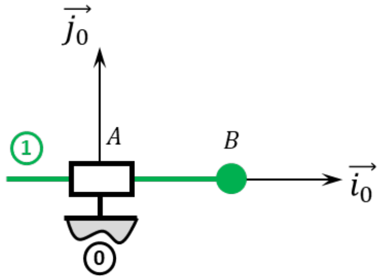
Modéliser

Corrigé voir 41.

Exercice 9 – Mouvement T – ⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_0}$.



Question 1 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(1/0)\}$ au point B.*

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$.*

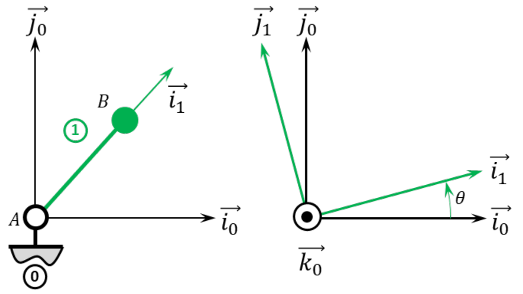
Indications :
1. $\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$.
2. $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = \ddot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_0}$.

Corrigé voir 34.

Exercice 10 – Mouvement R ⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\,\overrightarrow{i_1}$ avec $R = 20\,\text{mm}$.



Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ par dérivation vectorielle.*

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ par une autre méthode.*

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(1/0)\}$ au point B.*

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$.*

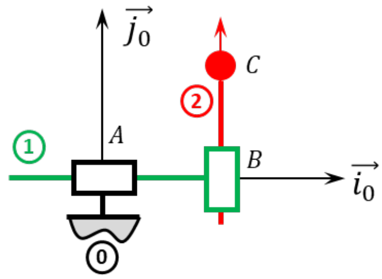
Indications :
1. $\overrightarrow{V(B,1/0)} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$.
2. $\overrightarrow{V(B,1/0)} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$.
3. $\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} \\ R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_{B}$.
4. $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_1}$.

Corrigé voir 35.

Exercice 11 – Mouvement TT – ⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{BC} = \mu(t)\,\overrightarrow{j_0}$.



Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.*

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

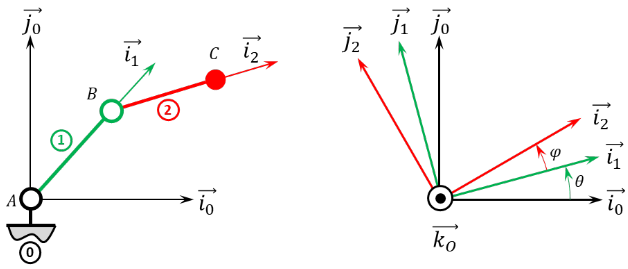
Indications :
1. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t)\,\overrightarrow{j_0}$.
2. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_0} + \dot{\mu}(t)\,\overrightarrow{j_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$.
3. $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_0} + \ddot{\mu}(t)\,\overrightarrow{j_0}$.

Corrigé voir 36.

Exercice 12 – Mouvement RR ⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\,\overrightarrow{i_1}$ avec $R = 20\,\text{mm}$ et $\overrightarrow{BC} = L\,\overrightarrow{i_2}$ avec $L = 15\,\text{mm}$.



Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition.*

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

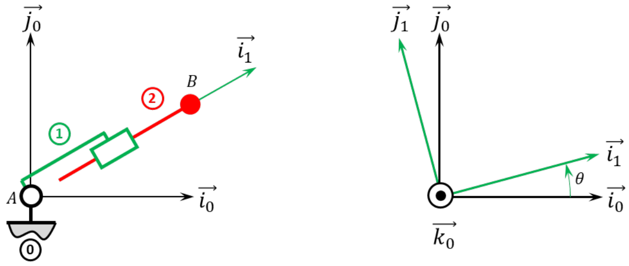
Indications :
1. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + L\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{j_2}$.
2. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = L\dot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2} + \dot{\theta}\left(L\,\overrightarrow{j_2} + R\,\overrightarrow{j_1}\right)$ (c'est la même :)).
3. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{k_0} \\ R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + L\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{j_2} \end{array} \right\}_{C}$.
4. $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_1} + L\left(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}\right)\overrightarrow{j_2} - L\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)^2\overrightarrow{i_2}$.

Corrigé voir 37.

Exercice 13 – Mouvement RT ⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_1}$.



Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$ par composition.*

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point B.*

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

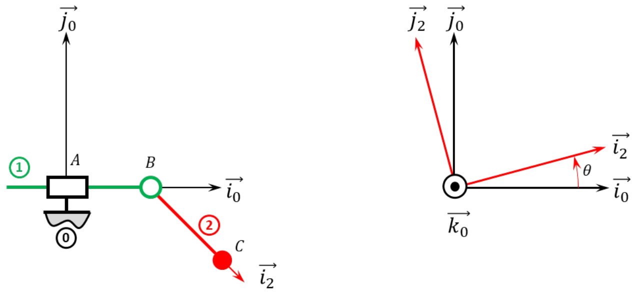
Indications :
1. $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.
2. $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.
3. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_B$.
4. $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \left(\ddot{\lambda}(t) - \lambda(t)\dot{\theta}(t)^2\right)\overrightarrow{i_1} + \left(\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t) + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{j_1}$.

Corrigé voir 38.

Exercice 14 – Mouvement RT ⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{BC} = R\overrightarrow{i_2}$ avec $R = 30$ mm.



Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.*

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

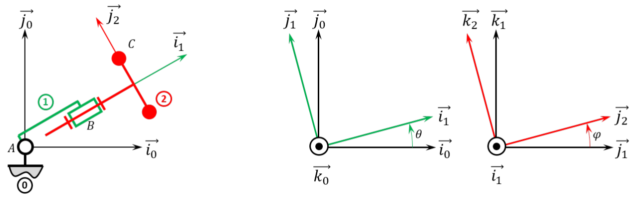
Indications :
1. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\dot{\theta}\overrightarrow{j_2}$.
2. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} \\ \overrightarrow{V(C,2/0)} \end{array} \right\}_C$.
3. $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\left(\ddot{\theta}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{i_2}\right)$.

Corrigé voir 39.

Exercice 15 – Mouvement RR 3D ⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BC} = \ell\overrightarrow{i_2} + r\overrightarrow{j_2}$. On note $R + \ell = L = 20$ mm et $r = 10$ mm.



Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition.*

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

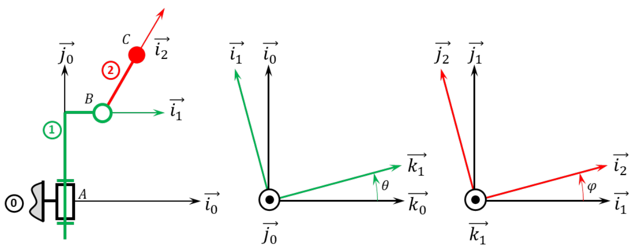
Indications :
1. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = (R+\ell)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} - r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}$.
2. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2} - r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + \ell\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} + R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.
3. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_1} \\ (R+\ell)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} - r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2} \end{array} \right\}_C$.
4. $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = (R+\ell)\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - (R+\ell)\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1} - r\ddot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\overrightarrow{i_1} - r\dot{\theta}^2\cos\varphi\overrightarrow{j_1} + r\ddot{\varphi}\overrightarrow{k_2} + r\dot{\varphi}\left(\dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{i_1} - \dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}\right)$.

Corrigé voir 32.

Exercice 16 – Mouvement RR 3D ⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = H\overrightarrow{j_1} + R\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BC} = L\overrightarrow{i_2}$. On a $H = 20$ mm, $r = 5$ mm, $L = 10$ mm.



Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition du vecteur vitesse.*

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

Indications :
1. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = -R\dot{\theta}\overrightarrow{k_1} + L\left(-\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}\right)$.
2. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = L\dot{\varphi}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}\left(R\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\overrightarrow{k_1}\right)$.
3. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}\overrightarrow{k_2} + \dot{\theta}\overrightarrow{j_0} \\ L\dot{\varphi}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}\left(R\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\overrightarrow{k_1}\right) \end{array} \right\}_C$.
4. $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = L\ddot{\varphi}\overrightarrow{j_2} + L\dot{\varphi}\left(\dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{k_1} - \dot{\theta}\overrightarrow{i_2}\right) - \ddot{\theta}\left(R\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\overrightarrow{k_1}\right) - \dot{\theta}\left(R\dot{\theta}\overrightarrow{i_1} + L\cos\varphi\dot{\theta}\overrightarrow{i_1} - L\dot{\varphi}\sin\varphi\overrightarrow{k_1}\right)$.

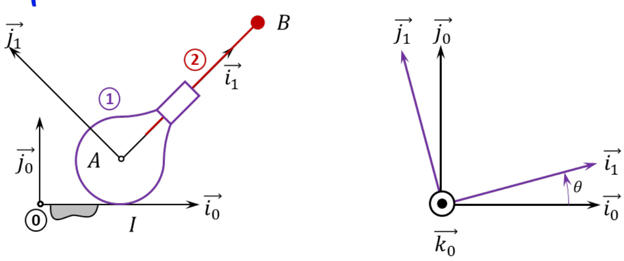
Corrigé voir 41.

Exercice 17 – Mouvement RT – RSG ⋆⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{IA} = R\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_1}$. De plus $R = 15$ mm. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I.

Modéliser



Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$.*

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point B.*

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

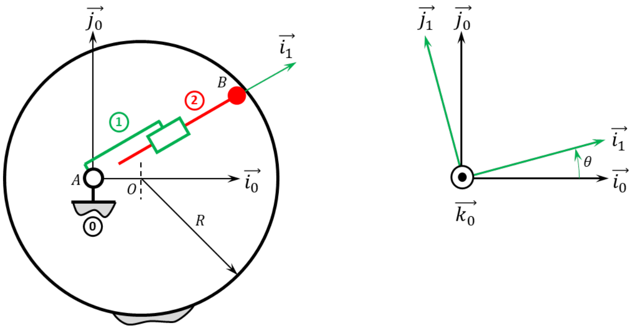
> Indications :
> 1. $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_1} + \dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right)$.
> 2. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_1} + \dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right) \end{array}\right\}_B$.
> 3. $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + \ddot{\theta}(t)\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right) + \dot{\theta}(t)\left(\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_1} - \lambda(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{i_1}\right)$.

Corrigé voir 42.

Exercice 18 – Pompe à palettes ⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AO} = e\,\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_1}$. De plus $e = 10\,\text{mm}$ et $R = 20\,\text{mm}$. Le contact entre **0** et **2** en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme $\dot{\lambda}_+(t) = -e\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) - \dfrac{e^2\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{e^2\cos^2\theta(t) - e^2 + R^2}}$ (voir exercice 62 – à vérifier).

Question 1 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point B.*

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

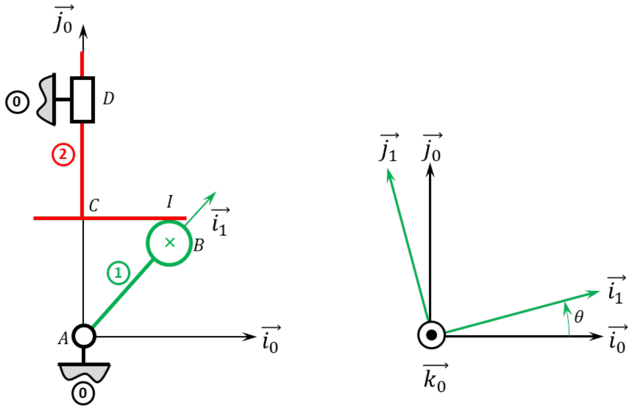
> Indications :
> 1. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} \end{array}\right\}_B$.
> 2. $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + 2\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} + \lambda(t)\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} - \lambda(t)\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{i_1}$.

Corrigé voir 43.

Exercice 19 – Pompe à piston axial ⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = e\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BI} = R\,\overrightarrow{j_0}$. De plus, $e = 10\,\text{mm}$ et $R = 20\,\text{mm}$. Le contact entre **1** et **2** en B est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre **0** et **2**.



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme $\lambda(t) = e\sin\theta + R$ ou encore $\dot{\lambda}(t) = e\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$ (voir exercice 63).

Question 1 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

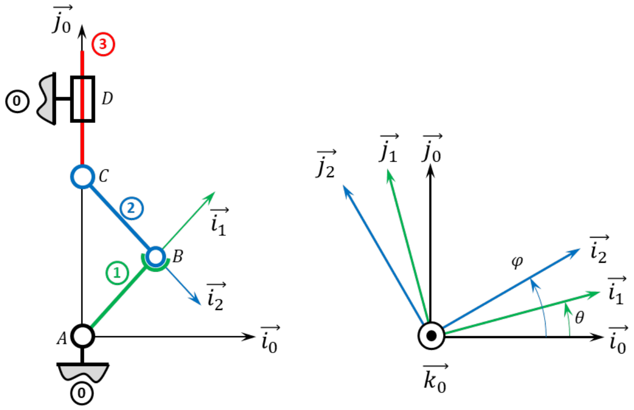
> Indications :
> 1. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0} \end{array}\right\}_C$.
> 2. $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0}$.

Corrigé voir 44.

Exercice 20 – Système bielle manivelle ⋆

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{CB} = L\,\overrightarrow{i_2}$. De plus, $R = 10\,\text{mm}$ et $L = 20\,\text{mm}$.



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme $\lambda(t) = \pm\sqrt{L^2 - R^2\cos^2\theta(t)} + R\sin\theta(t)$ et $\dot{\lambda}(t) = \pm\left(\dfrac{R^2\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2\cos^2\theta(t)}}\right) + \dot{\theta}(t)R\cos\theta(t)$. (à vérifier – voir exercice 64).

Question 1 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point B.* On commence par calculer $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(B,1/0)}$.

- **Méthode 1 – dérivation vectorielle :** $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[AB\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\,\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

- **Méthode 2 – formule de changement de point :** $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = -R\,\overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\theta}\,t\,\overrightarrow{k_0}$ $= R\dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{j_1}$.

On a alors, $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0} \\ R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_B$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ *et au point* C.

On a, $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0} \end{array} \right\}_C$.

Par ailleurs, on peut remarquer que $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/0)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/0)} = R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} + L\overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0} = R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} - L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2}$.

On a donc nécessairement $\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0} = R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} - L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2}$

$\Rightarrow \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0} = R\dot{\theta}(t)\left(\cos\theta(t)\overrightarrow{j_0} - \sin\theta(t)\overrightarrow{i_0}\right) - L\dot{\varphi}(t)\left(\cos\varphi(t)\overrightarrow{j_0} - \sin\varphi(t)\overrightarrow{i_0}\right)$.

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) + L\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) \\ \dot{\lambda}(t) = R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) - L\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) = L\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) \\ \dot{\lambda}(t) - R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) = L\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \tan\varphi(t) = \frac{R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)}{\dot{\lambda}(t) - R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)}$$

Il resterait à supprimer $\varphi(t)$ pour (espérons-le) retomber sur la loi entrée-sortie cinématique.

Question 3 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.

$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = R\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} - R\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{i_1}$.

Question 4 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.

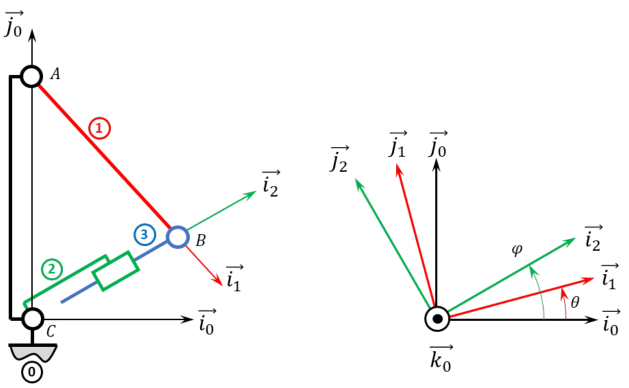
$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0}$.

Corrigé voir 45.

Exercice 21 – Système de transformation de mouvement ⋆

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{CA} = H\,\overrightarrow{j_0}$. De plus, $R = 30$ mm et $H = 40$ mm.



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 65).

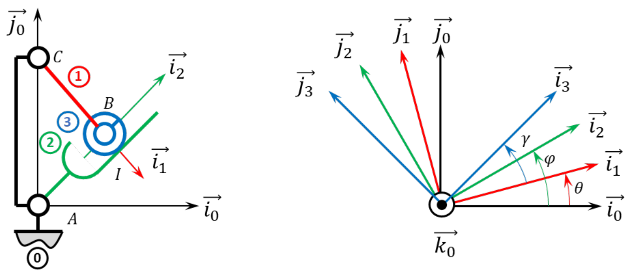
Question 1 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(3/0)\}$ *au point* B.

Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(B,3/0)}$.

Corrigé voir 46.

Exercice 22 – Barrière Sympact ⋆⋆

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.** Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB} = R\,\overrightarrow{i_1}$. De plus, $H = 120$ mm, $R = 40$ mm $BI = 10$ mm.



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 66).

Question 1 *En utilisant la condition de roulement sans glissement au point* I, *déterminer* $\gamma(t)$ *et* $\dot{\gamma}(t)$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(3/2)\}$ *au point* B.

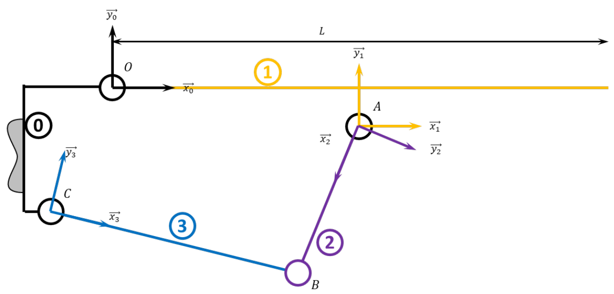
Corrigé voir 47.

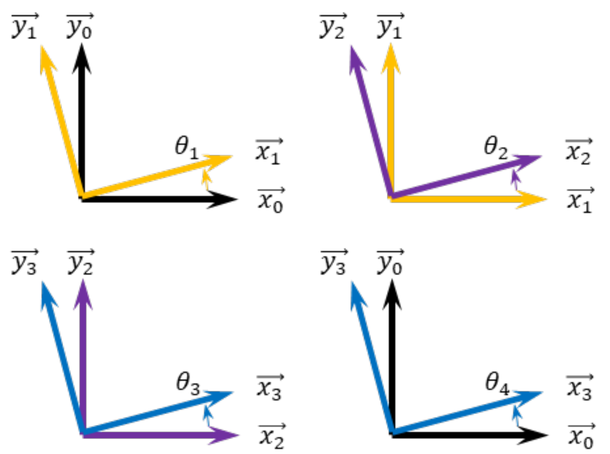
Exercice 23 – Système 4 barres ⋆⋆⋆

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

On a :

- $\overrightarrow{OA} = a\,\overrightarrow{x_1} - f\,\overrightarrow{y_1}$ avec $a = 355$ mm et $f = 13$ mm ;
- $\overrightarrow{AB} = b\,\overrightarrow{x_2}$ avec $b = 280$ mm ;
- $\overrightarrow{BC} = -c\,\overrightarrow{x_3}$ avec $c = 280$ mm ;
- $\overrightarrow{OC} = -d\,\overrightarrow{x_0} - e\,\overrightarrow{y_0}$ avec $d = 89{,}5$ mm et $e = 160$ mm ;





Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 69). On définit le point G tel que $\overrightarrow{OG} = L\overrightarrow{x_1}$.

Question 1 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ *au point* G.

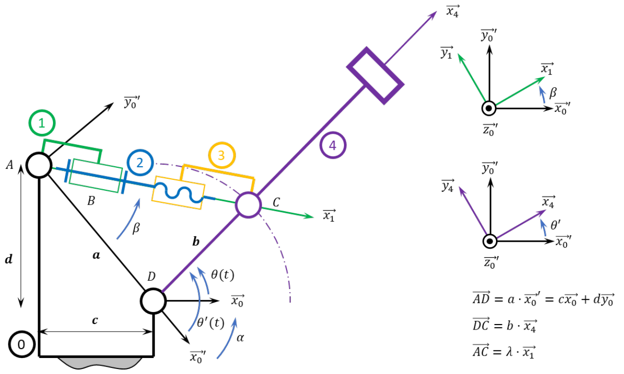
Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(G,1/0)}$.

Corrigé voir 48.

Exercice 24 – Maxpid ★★★

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs $a = 107{,}1$ mm, $b = 80$ mm, $c = 70$ mm, $d = 80$ mm. Le pas de la vis est de 4 mm.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 70).

On définit le point G tel que $\overrightarrow{OG} = L\overrightarrow{x_4}$.

Question 1 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathcal{V}(4/0)\}$ *au point* G.

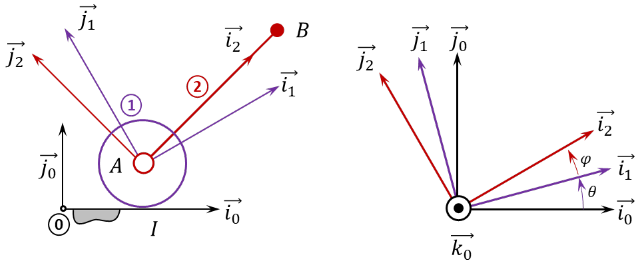
Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(G,4/0)}$.

Corrigé voir 49.

Exercice 25 – Mouvement RR – RSG ★★

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{IA} = R\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{AB} = L\overrightarrow{i_2}$. De plus $R = 15$ mm. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I.



Question 1 *Déterminer* $\overrightarrow{V(B,2/0)}$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ *au point* B.

Question 3 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.

Indications (à vérifier...) :

1. $\overrightarrow{V(B,2/0)} = L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} + \dot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right)$.
2. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \left(\dot{\varphi}(t)+\dot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{k_0}\\ L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} + \dot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right)\end{array}\right\}_B$.
3. $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = L\ddot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} - L\dot{\varphi}(t)\left(\dot{\varphi}(t)+\dot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{i_2} + \ddot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right) - L\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{i_1}$.

Corrigé voir 50.

1.1.2 Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides

Exercice 26 – Mouvement T – ⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.*

1 est en translation de direction $\overrightarrow{i_0}$ par rapport à **0**.

Question 2 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AB}=\lambda(t)\overrightarrow{i_0}$. La trajectoire du point B est donc donnée par $\begin{cases} x_B(t)=\lambda(t)\\ y_B(t)=0\\ z_B(t)=0\end{cases}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{z_0}\right)$.

Exercice 27 – Mouvement R ⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.* **1** est en rotation de centre A et d'axe $\overrightarrow{k_0}$ par rapport à **0**.

Question 2 *Quelle est la trajectoire du point B appartenant à **1** par rapport à **0**.* B est est en rotation par rapport à **0** (cercle de centre A et de rayon R).

Question 3 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AB}=R\overrightarrow{i_1}=R\cos\theta\overrightarrow{i_0}+R\sin\theta\overrightarrow{j_0}$. La trajectoire du point B est donc donnée par $\begin{cases} x_B(t)=R\cos\theta(t)\\ y_B(t)=R\sin\theta(t)\\ z_B(t)=0\end{cases}$

dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{z_0}\right)$.

Exercice 28 – Mouvement TT – ⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

Le point C a un mouvement quelconque dans le plan $\left(A,\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0}\right)$.

Question 2 *Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AC}=\lambda(t)\overrightarrow{i_0}+\mu(t)\overrightarrow{j_0}$ et donc, on a directement $\begin{cases} x_C(t)=\lambda(t)\\ y_C(t)=\mu(t)\\ z_C(t)=0\end{cases}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{k_0}\right)$.

On souhaite que le point C réalise un cercle de centre A et de rayon $R=10\,\text{cm}$ à la vitesse $v=0{,}01\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

Question 3 *Donner la relation liant $\theta(t)$, v et R.*

Par ailleurs la vitesse du point C est donnée par $\overrightarrow{V(C,2/0)}=\dfrac{\text{d}}{\text{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0}=R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$.

On a $v=R\dot{\theta}(t)$. Par intégration, $\theta(t)=\dfrac{v}{R}t$ (avec $\theta(t)=0\,\text{rad}$ pour $t=0\,\text{s}$).

Question 4 *Donner les expressions de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de v, R et du temps.*

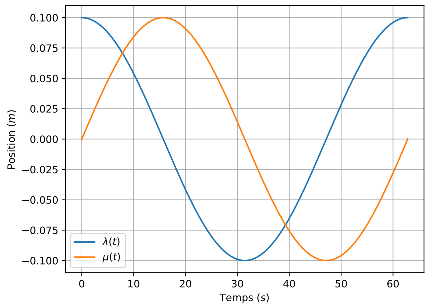
Exprimons la trajectoire du point C : $\overrightarrow{AC}=R\overrightarrow{e_r}=R\cos\theta(t)\overrightarrow{i_0}+R\sin\theta(t)\overrightarrow{j_0}$. Par identification $\lambda(t)=R\cos\theta(t)$ et $\mu(t)=R\sin\theta(t)$.

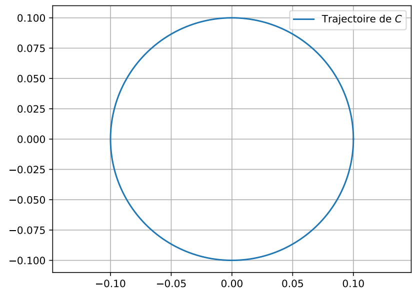
Au final, $\begin{cases}\lambda(t)=R\cos\left(\dfrac{v}{R}t\right)\\ \mu(t)=R\sin\left(\dfrac{v}{R}t\right)\end{cases}$.

Question 5 *En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$, $\mu(t)$ et la trajectoire générée.*

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
R = 0.1 # m
v = 0.01 # m.s-1

# Temps pour faire un tour
T = 2*m.pi*R/v

les_t = np.linspace(0,T,200)
les_lambda = R*np.cos(v/R*les_t)
les_mu = R*np.sin(v/R*les_t)
plt.grid()
plt.plot(les_t,les_lambda,label="$\\lambda(t)$")
```

```
plt.plot(les_t,les_mu,label="$\\mu(t)$")
plt.xlabel("Temps␣($s$)")
plt.ylabel("Position␣($m$)")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_01_c.pdf")
plt.cla()

plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.plot(les_lambda,les_mu,label="Trajectoire␣de␣$C$")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_02_c.pdf")
```





Exercice 29 – Mouvement RR ⋆

C2-05

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.*

Le point C peut atteindre tous les points situés compris entre deux cercles de rayon 5 mm et de rayon 25 mm.

Question 2 *Donner l'équation du mouvement du point C dans son mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AC} = R\,\overrightarrow{i_1} + L\,\overrightarrow{i_2}$. On projetant ce vecteur dans le repère $\mathcal{R}_A i_0 j_0 k_0$ on a

$\overrightarrow{AC} = R\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{j_0}\right) + L\left(\cos\left(\theta+\varphi\right)\overrightarrow{i_0} + \sin\left(\theta+\varphi\right)\overrightarrow{j_0}\right)$. On a donc : $\left\{\begin{array}{l} x_C(t) = R\cos\theta + L\cos\left(\theta+\varphi\right) \\ y_C(t) = R\sin\theta + L\sin\left(\theta+\varphi\right) \\ z_C(t) = 0 \end{array}\right.$

dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{k_0}\right)$.

Question 3 *Donner la durée du mouvement si C se déplace à vitesse quelconque.*

Distance à parcourir : 0,05 m. Durée du parcours : $T = \dfrac{0,05}{v}$.

Question 4 *Donner l'équation paramétrique que doit suivre le point C.*

$\forall t \in \left[0, \dfrac{0,05}{v}\right]$, $y_C(t) = 0,025$. Pour $t = 0$, $x_C(0) = -0,025$. On a alors $x_C(t) = -0,025 + v\,t$.

Au final, $\forall t \in \left[0, \dfrac{0,05}{v}\right]$, $\left\{\begin{array}{l} x_C(t) = -0,025 + v\,t \\ y_C(t) = 0,025 \\ z_C(t) = 0 \end{array}\right.$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{k_0}\right)$.

Question 5 *Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v =$ 0,01 m s^{-1}.*

Afin que le point C suive un segment, il faut donc que $\left\{\begin{array}{l} -0,025 + v\,t = R\cos\theta + L\cos\left(\theta+\varphi\right) \\ 0,025 = R\sin\theta + L\sin\left(\theta+\varphi\right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -0,025 + v\,t - R\cos\theta = L\cos\left(\theta+\varphi\right) \\ 0,025 - R\sin\theta = L\sin\left(\theta+\varphi\right) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(-0,025 + v\,t - R\cos\theta\right)^2 = L^2\cos^2\left(\theta+\varphi\right) \\ \left(0,025 - R\sin\theta\right)^2 = L^2\sin^2\left(\theta+\varphi\right) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left(-0,025 + v\,t - R\cos\theta\right)^2 + \left(0,025 - R\sin\theta\right)^2 = L^2$

$\Rightarrow 0,025^2 + v^2t^2 + R^2\cos^2\theta - 2\times 0,025 v\,t + 2R\cos\theta - v\,t\,R\cos\theta + 0,025^2 + R^2\sin^2\theta - 2\times 0,025 R\sin\theta = L^2$

$\Rightarrow (2 - v\,t)\cos\theta - 2\times 0,025\sin\theta = \dfrac{L^2}{R} - \dfrac{2\times 0,025^2}{R} - \dfrac{v^2t^2}{R} - R + 2\times 0,025\dfrac{v\,t}{R}$

Équation trigonométrique de la forme $a\cos x + b\sin x = c$.

Il y a donc une solution analytique. On peut aussi résoudre l'équation numériquement.

Une fois $\theta(t)$ déterminée, on a $0,025 - R\sin\theta = L\sin\left(\theta+\varphi\right) \Rightarrow \arcsin\left(\dfrac{0,025 - R\sin\theta(t)}{L}\right) - \theta(t) = \varphi(t)$

Question 6 *En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\varphi(t)$ et la trajectoire générée.*

Exercice 30 – Mouvement RT ⋆

C2-05

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point B.*

Question 2 *Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point B dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On souhaite que le point B réalise un segment entre les points $[-25,25]$ et $[25,25]$.

Question 3 *Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\lambda(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v =$* $0,01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\lambda(t)$ et la trajectoire générée.*

Exercice 31 – Mouvement RT ⋆

C2-05

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point B.*

Question 2 *Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point B dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On souhaite que le point B réalise un segment entre les points $[-25,25]$ et $[25,25]$.

Question 3 *Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\lambda(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v =$* $0,01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\lambda(t)$ et la trajectoire générée.*

Exercice 32 – Mouvement RR 3D ⋆⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.* Ça ressemble à un tore, mais c'est pas vraiment un tore :) (aussi bien l'intérieur que l'extérieur...)...

Question 2 *Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = R\,\overrightarrow{i_1} + \ell\,\overrightarrow{i_2} + r\,\overrightarrow{j_2}$. Soit $\overrightarrow{AC} = (R+\ell)\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{j_0}\right) + r\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{j_1} + \sin\varphi\,\overrightarrow{k_1}\right) = (R+\ell)\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{j_0}\right) + r\left(\cos\varphi\left(\cos\theta\,\overrightarrow{j_0} - \sin\theta\,\overrightarrow{i_0}\right) + \sin\varphi\,\overrightarrow{k_0}\right)$.

On a donc : $\left\{\begin{array}{l} x_C(t) = (R+\ell)\cos\theta - r\cos\varphi\sin\theta \\ y_C(t) = (R+\ell)\sin\theta + r\cos\varphi\cos\theta \\ z_C(t) = r\sin\varphi \end{array}\right.$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{k_0}\right)$.

Exercice 33 – Mouvement RR 3D ⋆⋆

C2-05

B2-13

Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.* Le point C peut décrire un tore de grand rayon R et de petit rayon L (surface torique uniquement, pas l'intérieur du tore).

Question 2 *Donner l'équation de mouvement du point C dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AC} = H\,\overrightarrow{j_1} + R\,\overrightarrow{i_1} + L\,\overrightarrow{i_2} = H\,\overrightarrow{j_0} + R\cos\theta\,\overrightarrow{i_0} - R\sin\theta\,\overrightarrow{k_0} + L\cos\varphi\,\overrightarrow{i_1} + L\sin\varphi\,\overrightarrow{j_1} = H\,\overrightarrow{j_0} + R\cos\theta\,\overrightarrow{i_0} - R\sin\theta\,\overrightarrow{k_0} + L\cos\varphi\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i_0} - \sin\theta\,\overrightarrow{k_0}\right) + L\sin\varphi\,\overrightarrow{j_0}$.

On a donc : $\left\{\begin{array}{l} x_C(t) = R\cos\theta + L\cos\varphi\cos\theta \\ y_C(t) = H + L\sin\varphi \\ z_C(t) = -R\sin\theta - L\cos\varphi\sin\theta \end{array}\right.$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{k_0}\right)$.

Exercice 34 – Mouvement T – ⋆

B2-13

Question 1 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(1/0)\}$ au point B.*

$\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_0} \end{array}\right\}_{\forall P}$.

$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_0}$.

Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$.

$\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,1/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_0}$.

Exercice 35 – Mouvement R ⋆

B2-13

Modéliser

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ par dérivation vectorielle.*
$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\,\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0}$. Or $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)}\wedge\overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{0} + \dot\theta\,\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{i_1} = \dot\theta\,\overrightarrow{j_1}$.
D'où $\overrightarrow{V(B,1/0)} = R\dot\theta\,\overrightarrow{j_1}$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ par une autre méthode.*
$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} - R\,\overrightarrow{i_1}\wedge\dot\theta\,\overrightarrow{k_0} = R\dot\theta\,\overrightarrow{j_1}$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(1/0)\}$ au point B.*
On a directement $\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{c}\dot\theta\,\overrightarrow{k_0}\\ R\dot\theta\,\overrightarrow{j_1}\end{array}\right\}_B$.

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$.*
$\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,1/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = R\ddot\theta\,\overrightarrow{j_1} - R\dot\theta^2\,\overrightarrow{i_1}$. (En effet, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)}\wedge\overrightarrow{j_1} = \overrightarrow{0} + \dot\theta\,\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{j_1} = -\dot\theta\,\overrightarrow{i_1}$.)

Exercice 36 – Mouvement TT – ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.*

Par dérivation vectorielle, on a : $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot\lambda(t)\,\overrightarrow{i_0} + \dot\mu(t)\,\overrightarrow{j_0}$.

Par composition du torseur cinématique, on a : $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{BC}\right]_{\mathscr{R}_1} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0}$
$= \dot\lambda(t)\,\overrightarrow{i_0} + \dot\mu(t)\,\overrightarrow{j_0}$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*
$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \dot\lambda(t)\,\overrightarrow{i_0} + \dot\mu(t)\,\overrightarrow{j_0}\end{array}\right\}_{\forall P}$.

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*
$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot\lambda(t)\,\overrightarrow{i_0} + \ddot\mu(t)\,\overrightarrow{j_0}$.

Exercice 37 – Mouvement RR ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*
$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathscr{R}_0} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{BC}\right]_{\mathscr{R}_0} = R\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} + L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = R\dot\theta\,\overrightarrow{j_1} + L\left(\dot\theta+\dot\varphi\right)\overrightarrow{j_2}$.
(Avec $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)}\wedge\overrightarrow{i_2} = \left(\dot\theta+\dot\varphi\right)\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{i_2} = \left(\dot\theta+\dot\varphi\right)\overrightarrow{j_2}$).

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition.*
On a $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)}$.
$\overrightarrow{V(C,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/1)} = -L\,\overrightarrow{i_2}\wedge\dot\varphi\,\overrightarrow{k_0} = L\dot\varphi\,\overrightarrow{j_2}$.
$\overrightarrow{V(C,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \left(-L\,\overrightarrow{i_2} - R\,\overrightarrow{i_1}\right)\wedge\dot\theta\,\overrightarrow{k_0} = \dot\theta\left(L\,\overrightarrow{j_2} + R\,\overrightarrow{j_1}\right)$.
Au final, $\overrightarrow{V(C,2/0)} = L\dot\varphi\,\overrightarrow{j_2} + \dot\theta\left(L\,\overrightarrow{j_2} + R\,\overrightarrow{j_1}\right)$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*
$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \{\mathscr{V}(2/1)\} + \{\mathscr{V}(1/0)\}$. Pour sommer les torseurs, il faut écrire les vecteurs vitesses au même point, ici en C.
$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c}\left(\dot\theta+\dot\varphi\right)\overrightarrow{k_0}\\ R\dot\theta\,\overrightarrow{j_1} + L\left(\dot\theta+\dot\varphi\right)\overrightarrow{j_2}\end{array}\right\}_C$

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\dot\theta\,\overrightarrow{j_1} + L\left(\dot\theta+\dot\varphi\right)\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0}$.
De plus, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)}\wedge\overrightarrow{j_1} = \dot\theta\,\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{j_1} = -\dot\theta\,\overrightarrow{i_1}$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)}\wedge\overrightarrow{j_2} =$
$\left(\dot\theta+\dot\varphi\right)\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{j_2} = -\left(\dot\theta+\dot\varphi\right)\overrightarrow{i_2}$.
On a donc $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = R\ddot\theta\,\overrightarrow{j_1} - R\dot\theta^2\,\overrightarrow{i_1} + L\left(\ddot\theta+\ddot\varphi\right)\overrightarrow{j_2} - L\left(\dot\theta+\dot\varphi\right)^2\overrightarrow{i_2}$.

Exercice 38 – Mouvement RT ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*
$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\lambda(t)\,\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot\lambda(t)\,\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot\theta(t)\,\overrightarrow{j_1}$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$ par composition.*

$\overrightarrow{V(B,2/0)}=\overrightarrow{V(B,2/1)}+\overrightarrow{V(B,1/0)}$.

$\forall P$, $\overrightarrow{V(P,2/1)}=\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}$.

Par ailleurs $\overrightarrow{V(B,1/0)}=\overrightarrow{V(A,1/0)}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)}=-\lambda(t)\overrightarrow{i_1}\wedge\dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0}=\lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

Au final, $\overrightarrow{V(B,2/0)}=\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point B.*

$$\{\mathscr{V}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0}\\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}\end{array}\right\}_B.$$

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}=\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}-\lambda(t)\dot{\theta}(t)^2\overrightarrow{i_1}=\left(\ddot{\lambda}(t)-\lambda(t)\dot{\theta}(t)^2\right)\overrightarrow{i_1}+\left(\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{j_1}.$$

Exercice 39 – Mouvement RT ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.*

Méthode 1 – Dérivation vectorielle

$$\overrightarrow{V(C,2/0)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathscr{R}_0}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{BC}\right]_{\mathscr{R}_0}=\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0}+R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0}=\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0}+R\dot{\theta}\overrightarrow{j_2}$$

Méthode 2 – Composition du torseur cinématique

$\overrightarrow{V(C,2/0)}=\overrightarrow{V(C,2/1)}+\overrightarrow{V(C,1/0)}$

Pour tout point P, $\overrightarrow{V(P,1/0)}=\dot{\lambda}\overrightarrow{i_0}$.

$\overrightarrow{V(C,2/1)}=\overrightarrow{V(B,2/1)}+\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/1)}=-R\overrightarrow{i_2}\wedge\dot{\theta}\overrightarrow{k_0}=R\dot{\theta}\overrightarrow{j_2}$.

On a donc $\overrightarrow{V(C,2/0)}=\dot{\lambda}\overrightarrow{i_0}+R\dot{\theta}\overrightarrow{j_2}$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

$$\{\mathscr{V}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(2/0)}=\dot{\theta}\overrightarrow{k_0}\\ \overrightarrow{V(C,2/0)}=\dot{\lambda}\overrightarrow{i_0}+R\dot{\theta}\overrightarrow{j_2}\end{array}\right\}_C.$$

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}=\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0}+R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\theta}\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0}=\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0}+R\left(\ddot{\theta}\overrightarrow{j_2}-\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_2}\right).$$

Exercice 40 – Mouvement RR 3D ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

$$\overrightarrow{V(C,2/0)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\overrightarrow{i_1}+\ell\overrightarrow{i_2}+r\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0}.$$

Calculons :

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0}=\overrightarrow{\Omega(1/0)}\wedge\overrightarrow{i_1}=\dot{\theta}\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{i_1}=\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0}=\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$ ($\overrightarrow{i_1}=\overrightarrow{i_2}$).
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0}=\overrightarrow{\Omega(2/0)}\wedge\overrightarrow{j_2}=\left(\dot{\theta}\overrightarrow{k_0}+\dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}\right)\wedge\overrightarrow{j_2}=\dot{\theta}\overrightarrow{k_1}\wedge\overrightarrow{j_2}+\dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}\wedge\overrightarrow{j_2}=-\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1}+\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}$.

On a donc, $\overrightarrow{V(C,2/0)}=(R+\ell)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}-r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1}+r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition.*

On a $\overrightarrow{V(C,2/0)}=\overrightarrow{V(C,2/1)}+\overrightarrow{V(C,1/0)}$.

- $\overrightarrow{V(C,2/1)}$: on passe par B car B est le centre de la pivot entre 2 et 1 et que $\overrightarrow{V(B,2/1)}=\overrightarrow{0}$. $\overrightarrow{V(C,2/1)}=\overrightarrow{V(B,2/1)}+\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/1)}=\left(-\ell\overrightarrow{i_2}-r\overrightarrow{j_2}\right)\wedge\dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}$
  $=-\ell\overrightarrow{i_2}\wedge\dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}-r\overrightarrow{j_2}\wedge\dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}$.
  $=r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}$.
- $\overrightarrow{V(C,1/0)}$: on passe par A car A est le centre de la pivot entre 1 et 0 et que $\overrightarrow{V(A,1/0)}=\overrightarrow{0}$ est nul. $\overrightarrow{V(C,1/0)}=\overrightarrow{V(A,1/0)}+\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)}$
  $=\left(-r\overrightarrow{j_2}-\ell\overrightarrow{i_2}-R\overrightarrow{i_1}\right)\wedge\dot{\theta}\overrightarrow{k_1}$
  $=-r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1}+\ell\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}+R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$

Au final, $\overrightarrow{V(C,2/0)}=r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}-r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1}+\ell\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}+R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \dot{\theta}\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_1} \\ (R+\ell)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} - r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2} \end{array}\right\}_C$$

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(R+\ell)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} - r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

Calculons :

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta}\overrightarrow{i_1}$.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{k_2} = \left(\dot{\theta}\overrightarrow{k_0} + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}\right) \wedge \overrightarrow{k_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{k_2} + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_2} \wedge \overrightarrow{k_2} = \dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{i_1} - \dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}$.

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = (R+\ell)\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - (R+\ell)\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1} - r\ddot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\overrightarrow{i_1} - r\dot{\theta}^2\cos\varphi\overrightarrow{j_1} + r\ddot{\varphi}\overrightarrow{k_2} + r\dot{\varphi}\left(\dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{i_1} - \dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}\right)$.

Exercice 41 – Mouvement RR 3D ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.* $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[H\overrightarrow{j_1} + R\overrightarrow{i_1} + L\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0}$.

Calculons :

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_0}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{0}$;
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{i_1} = -\dot{\theta}\overrightarrow{k_1}$;
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{i_2} = \left(\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}\right) \wedge \overrightarrow{i_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{i_2} + \dot{\varphi}\overrightarrow{k_2} \wedge \overrightarrow{i_2} = -\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}$.

On a donc $\overrightarrow{V(C,2/0)} = -R\dot{\theta}\overrightarrow{k_1} + L\left(-\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}\right)$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition du vecteur vitesse.* $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)}$.

- Pour calculer $\overrightarrow{V(C,2/1)}$, passons par B car $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{0}$: $\overrightarrow{V(C,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)}$ $= -L\overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi}\overrightarrow{k_2} = L\dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}$.
- Pour calculer $\overrightarrow{V(C,1/0)}$, passons par A car $\overrightarrow{V(A,1/0)} = \overrightarrow{0}$: $\overrightarrow{V(C,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)}$ $= -\left(H\overrightarrow{j_1} + R\overrightarrow{i_1} + L\overrightarrow{i_2}\right) \wedge \dot{\theta}\overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta}\left(R\overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{j_1} + L\overrightarrow{i_2} \wedge \overrightarrow{j_1}\right) = -\dot{\theta}\left(R\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\overrightarrow{k_1}\right)$.

Au final, $\overrightarrow{V(C,2/0)} = L\dot{\varphi}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}\left(R\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\overrightarrow{k_1}\right)$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \dot{\varphi}\overrightarrow{k_2} + \dot{\theta}\overrightarrow{j_0} \\ L\dot{\varphi}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}\left(R\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\overrightarrow{k_1}\right) \end{array}\right\}_C.$$

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\dot{\varphi}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}\left(R\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\overrightarrow{k_1}\right)\right]_{\mathscr{R}_0}.$$

Calculons :

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = \left(\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{k_1}\right) \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{j_2} + \dot{\theta}\overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{k_1} - \dot{\theta}\overrightarrow{i_2}$.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot{\theta}\overrightarrow{i_1}$.

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = L\ddot{\varphi}\overrightarrow{j_2} + L\dot{\varphi}\left(\dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{k_1} - \dot{\theta}\overrightarrow{i_2}\right) - \ddot{\theta}\left(R\overrightarrow{k_1} + L\cos\varphi\overrightarrow{k_1}\right) - \dot{\theta}\left(R\dot{\theta}\overrightarrow{i_1} + L\cos\varphi\dot{\theta}\overrightarrow{i_1} - L\dot{\varphi}\sin\varphi\overrightarrow{k_1}\right)$.

Exercice 42 – Mouvement RT – RSG ⋆⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$.*

$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)}$.

D'une part, $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \dot{\lambda}\overrightarrow{i_1}$.

D'autre part, en utilisant le roulement sans glissement en I, $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(I,1/0)} + \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} + \left(-\lambda(t)\overrightarrow{i_1} - R\overrightarrow{j_0}\right) \wedge \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} = -\dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{k_0} + R\overrightarrow{j_0} \wedge \overrightarrow{k_0}\right) = \dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right)$.

Au final, $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}\overrightarrow{i_1} + \dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right)$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.*

$$\{\mathcal{V}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0}\\ \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_1}+\dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1}-R\,\overrightarrow{i_0}\right)\end{array}\right\}_B.$$

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0}=\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}+\ddot{\theta}(t)\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1}-R\,\overrightarrow{i_0}\right)+\dot{\theta}(t)\left(\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_1}-\lambda(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{i_1}\right).$$

Exercice 43 – Pompe à palettes ⋆

B2-13

Question 1 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.*

En utilisant la décomposition du vecteur cinématique, on a : $\overrightarrow{V(B,2/0)}=\overrightarrow{V(B,2/1)}+\overrightarrow{V(B,1/0)}$.

- $\overrightarrow{V(B,2/1)}=\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}$.
- $\overrightarrow{V(B,1/0)}=\overrightarrow{V(A,1/0)}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)}=-\lambda(t)\overrightarrow{i_1}\wedge\dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0}=\lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0}\\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}\end{array}\right\}_B.$$

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0}=\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}+\lambda(t)\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}-\lambda(t)\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{i_1}.$$

Exercice 44 – Pompe à piston axial ⋆

B2-13

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme $\lambda(t)=e\sin\theta+R$ ou encore $\dot{\lambda}(t)=e\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$ (voir exercice 63).

Question 1 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.* $\{\mathcal{V}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0}\end{array}\right\}_C$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.* $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}=\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0}$.

Exercice 45 – Système bielle manivelle ⋆

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme $\lambda(t)=\pm\sqrt{L^2-R^2\cos^2\theta(t)}+R\sin\theta(t)$ et $\dot{\lambda}(t)=\pm\left(\dfrac{R^2\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{L^2-R^2\cos^2\theta(t)}}\right)+\dot{\theta}(t)R\cos\theta(t)$. (à vérifier – voir exercice 64).

Question 1 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.* On commence par calculer $\overrightarrow{V(B,2/0)}=\overrightarrow{V(B,2/1)}+\overrightarrow{V(B,1/0)}=\overrightarrow{V(B,1/0)}$.

- **Méthode 1 – dérivation vectorielle :** $\overrightarrow{V(B,1/0)}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[AB\right]_{\mathcal{R}_0}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\,\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0}=R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.
- **Méthode 2 – formule de changement de point :** $\overrightarrow{V(B,1/0)}=\overrightarrow{V(A,1/0)}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)}=-R\,\overrightarrow{i_1}\wedge\dot{\theta}\,t\,\overrightarrow{k_0}=R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

On a alors, $\{\mathcal{V}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0}\\ R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}\end{array}\right\}_B$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ et au point C.*

On a, $\{\mathcal{V}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0}\\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0}\end{array}\right\}_C$.

Par ailleurs, on peut remarquer que $\overrightarrow{V(C,2/0)}=\overrightarrow{V(B,2/0)}+\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/0)}=R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}+L\,\overrightarrow{i_2}\wedge\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0}=R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}-L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2}$.

On a donc nécessairement $\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0}=R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}-L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2}$

$\Rightarrow \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0}=R\dot{\theta}(t)\left(\cos\theta(t)\overrightarrow{j_0}-\sin\theta(t)\overrightarrow{i_0}\right)-L\dot{\varphi}(t)\left(\cos\varphi(t)\overrightarrow{j_0}-\sin\varphi(t)\overrightarrow{i_0}\right)$.

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l}0=-R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)+L\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t)\\ \dot{\lambda}(t)=R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)-L\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)=L\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t)\\ \dot{\lambda}(t)-R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)=L\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\tan\varphi(t)=\dfrac{R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)}{\dot{\lambda}(t)-R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)}$$

Il resterait à supprimer $\varphi(t)$ pour (espérons-le) retomber sur la loi entrée-sortie cinématique.

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathcal{R}_0}=R\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}-R\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{i_1}.$$

Modéliser

Question 4 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.
$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0}$.

Exercice 46 – Système de transformation de mouvement ⋆

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 65).

Question 1 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(3/0)\}$ *au point* B.

Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(B,3/0)}$.

Exercice 47 – Barrière Sympact ⋆⋆

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 66).

Question 1 *En utilisant la condition de roulement sans glissement au point* I, *déterminer* $\gamma(t)$ *et* $\dot{\gamma}(t)$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(3/2)\}$ *au point* B.

Exercice 48 – Système 4 barres ⋆⋆⋆

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 69). On définit le point G tel que $\overrightarrow{OG} = L\overrightarrow{x_1}$.

Question 1 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(1/0)\}$ *au point* G.

Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(G,1/0)}$.

Exercice 49 – Maxpid ⋆⋆⋆

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Par ailleurs $a = 107{,}1\,\mathrm{mm}$, $b = 80\,\mathrm{mm}$, $c = 70\,\mathrm{mm}$, $d = 80\,\mathrm{mm}$. Le pas de la vis est de 4 mm.
Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme *** (voir exercice 70).
On définit le point G tel que $\overrightarrow{OG} = L\overrightarrow{x_4}$.

Question 1 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(4/0)\}$ *au point* G.

Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(G,4/0)}$.

Exercice 50 – Mouvement RR – RSG ⋆⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer* $\overrightarrow{V(B,2/0)}$. En utilisant la décomposition du vecteur vitesse : $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)}$.

- **Calcul de** $\overrightarrow{V(B,2/1)}$ **:** $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{V(A,2/1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)}$. 2 et 1 étant en pivot d'axe $\left(A, \overrightarrow{k_0}\right)$, on a $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{0} - L\overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0} = L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2}$.
- **Calcul de** $\overrightarrow{V(B,1/0)}$ **:** $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(I,1/0)} + \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} - L\overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0}$. En utilisant l'hypothèse de roulement sans glissement : $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \left(-L\overrightarrow{i_1} - R\overrightarrow{j_0}\right) \wedge \dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0} = \dot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right)$.

Au final, $\overrightarrow{V(B,2/0)} = L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} + \dot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right)$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ *au point* B. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \left(\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{k_0} \\ L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} + \dot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right) \end{array}\right\}_B$.

Question 3 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.
$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}$
$= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right)\right]_{\mathscr{R}_0}$
$= L\ddot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} - L\dot{\varphi}(t)\left(\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{i_2} + \ddot{\theta}(t)\left(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right) - L\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{i_1}$.

1.2 Proposer une démarche de résolution

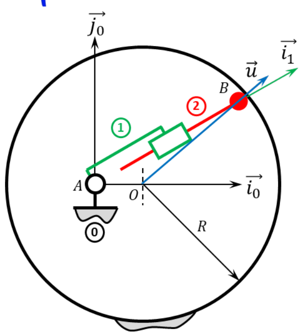
1.3 Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

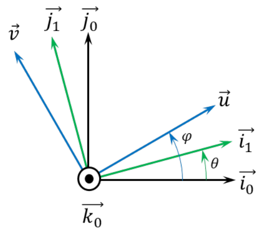
1.3.1 Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques

Exercice 51 – Pompe à piston radial ⋆

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AO} = e\,\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_1}$. De plus $e = 10\,\mathrm{mm}$ et $R = 20\,\mathrm{mm}$. Le contact entre **0** et **2** en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).





Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*
Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*
Question 3 *En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*
Question 4 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*
On prendra une section de piston **2** de $1\,\text{cm}^2$ et une fréquence de rotation de $\dot{\theta}(t) = 2\pi\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. **Question** 5 *Exprimer le débit instantané de la pompe.*
Question 6 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ et $e = 15\,\text{mm}$.*
Question 7 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ pour une pompe à 5 pistons (5 branches **1+2**).*

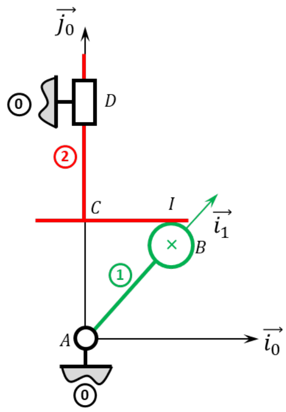
Indications (à vérifier...) :
1. .
2. $\lambda(t) = e\cos\theta(t) \pm \sqrt{e^2\cos^2\theta(t) - e^2 + R^2}$.
3. .
4. $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$.
5. .

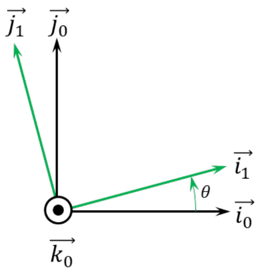
Corrigé voir 62.

Exercice 52 – Pompe à piston axial ⋆

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = e\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BI} = R\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t)\,\overrightarrow{j_0}$. De plus, $e = 10\,\text{mm}$ et $R = 20\,\text{mm}$. Le contact entre **1** et **2** en B est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre **0** et **2**.





Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*
Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*
Question 3 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*
Question 4 *On note S la section du piston **2**. Exprimer le débit instantané de la pompe.*

Question 5 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ et $R = 10\,\text{mm}$ ainsi que pour $e = 20\,\text{mm}$ et $R = 5\,\text{mm}$. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, la section du piston est donnée par $S = 1\,\text{cm}^2$.*

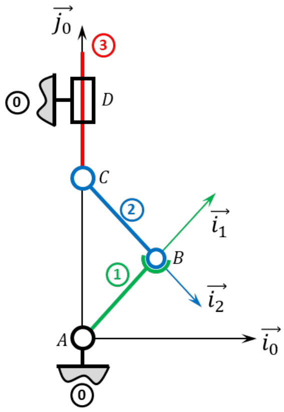
Indications :
1. .
2. $e\sin\theta + R - \lambda(t) = 0$.
3. $\dot{\lambda}(t) = e\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$.
4. $q(t) = eS\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$.
5. .

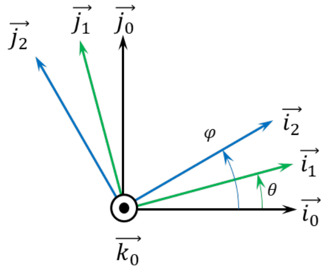
Corrigé voir 63.

Exercice 53 – Système bielle manivelle ⋆⋆

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\,\overrightarrow{i_1}$, $\overrightarrow{CB} = L\,\overrightarrow{i_2}$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t)\,\overrightarrow{j_0}$.





Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*
Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*
Question 3 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*
Question 4 *En utilisant Python, tracer la vitesse du piston en fonction du temps. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, on prendra $R = 10\,\text{mm}$ et $L = 20\,\text{mm}$* puis $L = 30\,\text{mm}$.
Question 5 *En utilisant Python, tracer l'accélération du piston en fonction du temps en utilisant les mêmes valeurs que dans la question précédente. On utilisera une dérivation numérique.*

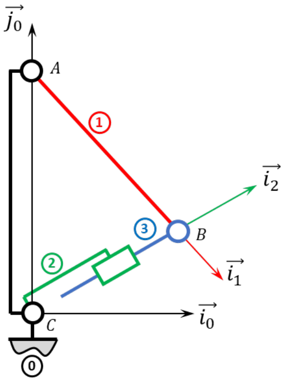
Indications :
1. .
2. $\lambda(t) = \pm\sqrt{L^2 - R^2\cos^2\theta(t)} + R\sin\theta(t)$.
3. $\dot{\lambda}(t) = \pm\left(\dfrac{R^2\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2\cos^2\theta(t)}}\right) + \dot{\theta}(t)R\cos\theta(t)$.
4. .
5. .

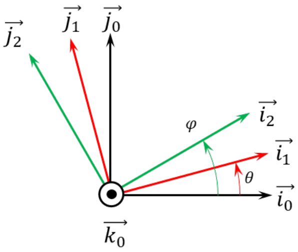
Corrigé voir 64.

Exercice 54 – Pompe oscillante ⋆

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{CA} = H\,\overrightarrow{j_0}$. De plus, $R = 40\,\text{mm}$ et $H = 60\,\text{mm}$. Par ailleurs, on note $\overrightarrow{CB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_2}$.





Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

Question 4 *Exprimer le débit instantané de la pompe.*

Question 5 *En utilisant Python, donner le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour un piston de diamètre $D = 10\,\text{mm}$.*

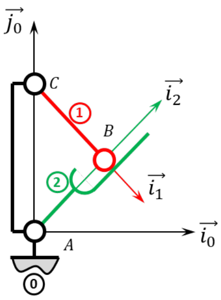
> Indications :
> 1. .
> 2. $\lambda(t) = \pm\sqrt{R^2 + H^2 + 2HR\sin\theta(t)}$
> 3. $\dot{\lambda}(t) = \frac{1}{2}\left(-2HR\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\right)\left(R^2 + H^2 + 2HR\sin\theta(t)\right)^{-\frac{1}{2}}$
> 4. $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$
> 5. .

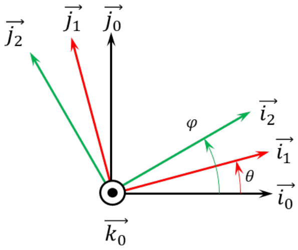
Corrigé voir 65.

Exercice 55 – Barrière Sympact ⋆

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB} = R\,\overrightarrow{i_1}$. De plus, $H = 120\,\text{mm}$ et $R = 40\,\text{mm}$.





Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

> Indications :
> 1. .
> 2. $\tan\varphi(t) = \dfrac{R\sin\theta(t) + h}{R\cos\theta(t)}$.
> 3. $\dot{\varphi}(t) = \dfrac{R\dot{\theta}(t)(R + h\sin\theta(t))}{R^2 + h^2 + 2Rh\sin\theta(t)}$.
> 4. .

Corrigé voir 66.

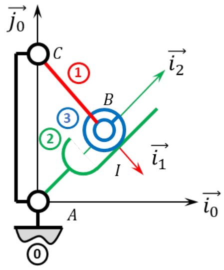
Exercice 56 – Barrière Sympact avec galet ⋆⋆

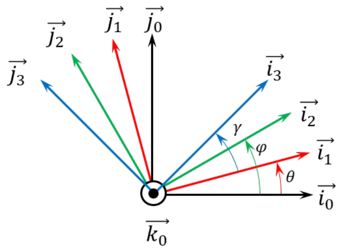
B2-13

C2-05

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB} = R\,\overrightarrow{i_1}$. De plus, $H = 120\,\text{mm}$ et $R = 40\,\text{mm}$.





Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

Question 4 *En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer $\gamma(t)$ et $\dot{\gamma}(t)$.*

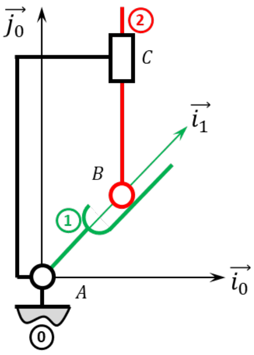
Question 5 *En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

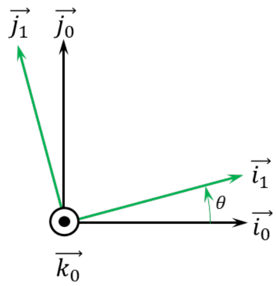
Corrigé voir 67.

Exercice 57 – Poussoir ⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = L\,\overrightarrow{i_0} + H\,\overrightarrow{j_0}$, $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BC} = \mu(t)\,\overrightarrow{j_0}$. De plus, $H = 120\,\text{mm}$, $L = 40\,\text{mm}$.





Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\mu(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\mu}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\mu}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

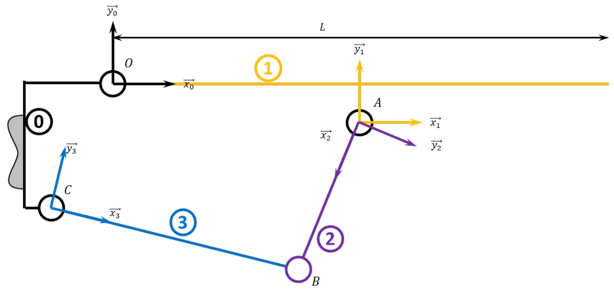
Corrigé voir 68.

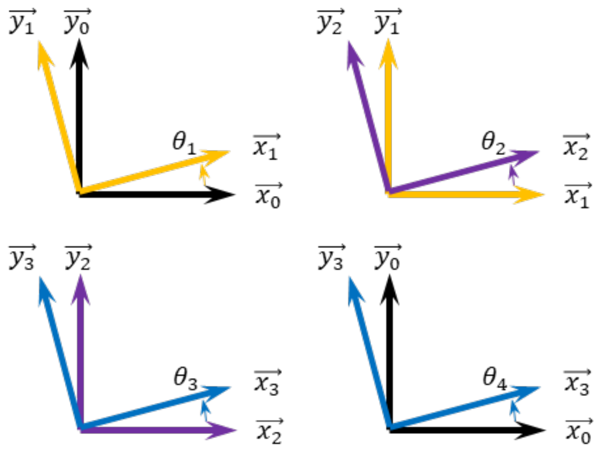
Exercice 58 – Système 4 barres ⋆⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

On a :

- $\overrightarrow{OA} = a\,\overrightarrow{x_1} - f\,\overrightarrow{y_1}$ avec $a = 355\,\text{mm}$ et $f = 13\,\text{mm}$;
- $\overrightarrow{AB} = b\,\overrightarrow{x_2}$ avec $b = 280\,\text{mm}$;
- $\overrightarrow{BC} = -c\,\overrightarrow{x_3}$ avec $c = 280\,\text{mm}$;
- $\overrightarrow{OC} = -d\,\overrightarrow{x_0} - e\,\overrightarrow{y_0}$ avec $d = 89{,}5\,\text{mm}$ et $e = 160\,\text{mm}$;





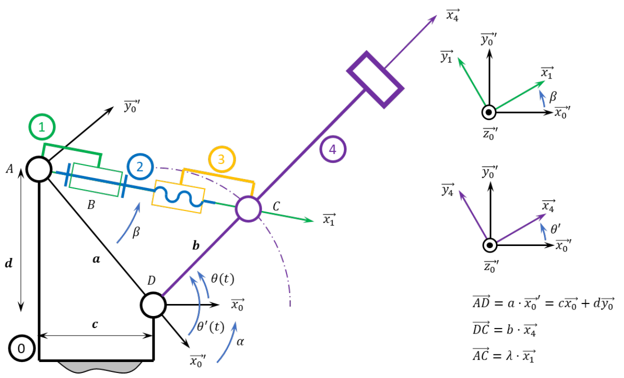
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*
Question 2 *Exprimer $\theta_1(t)$ en fonction de $\theta_4(t)$.*
Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$.*
Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Corrigé voir 69.

Exercice 59 – Maxpid ★★★

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs $a = 107{,}1\,\text{mm}$, $b = 80\,\text{mm}$, $c = 70\,\text{mm}$, $d = 80\,\text{mm}$. Le pas de la vis est de $4\,\text{mm}$.

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*
Question 2 *Exprimer $\theta(t)$ en fonction de $\lambda(t)$.*
Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\dot{\lambda}(t)$.*
Question 4 *Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$, vitesse de rotation du rotor moteur **2** par rapport au stator **1**.*
Question 5 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **2** par rapport à **1** est de 500 tours par minute.*

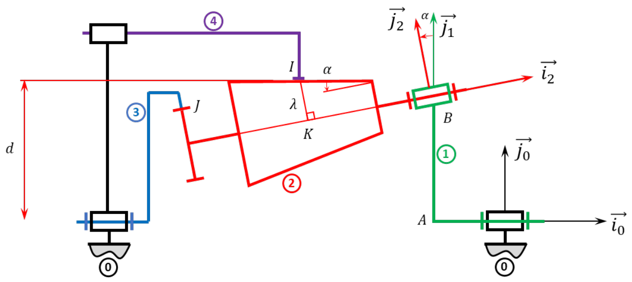
Corrigé voir 70.

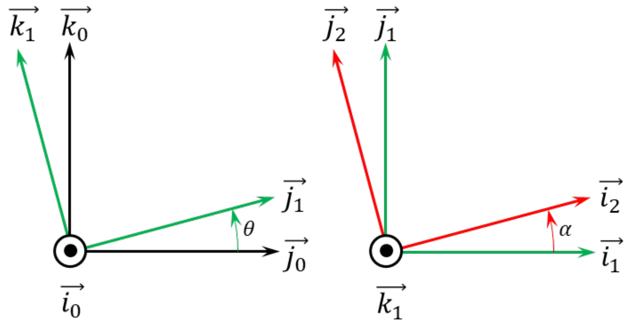
Exercice 60 – Variateur de Graham[1] ★★★

D'après ressources de Michel Huguet.

B2-13
C2-05
C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le schéma suivant.





On note $\overrightarrow{AJ} = -L\,\overrightarrow{i_0} + \dfrac{d_3}{2}\overrightarrow{j_2}$ et $\overrightarrow{KJ} = -\ell\,\overrightarrow{i_2} + \dfrac{d_2}{2}\overrightarrow{j_2}$.

Soit $\mathcal{R} = \left(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$ un repère lié au bâti **0** du variateur. L'arbre moteur **1** et l'arbre récepteur **3** ont une liaison pivot d'axe $\left(A, \overrightarrow{i_0}\right)$ avec le bâti **0**. On pose $\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \omega_1\,\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \omega_3\,\overrightarrow{i_0}$.

Soit $\mathcal{R}_1 = \left(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$ et $\mathcal{R}_2 = \left(B; \overrightarrow{i_2}, \overrightarrow{j_2}, \overrightarrow{k_1}\right)$ deux repères liés respectivement à **1** et **2** tels que $\overrightarrow{AB}$ ait même direction que $\overrightarrow{j_1}$. On pose $\alpha = \left(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{i_2}\right)$ constant.

Le satellite **2** a une liaison pivot d'axe $\left(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{i_2}\right)$ avec **1**. **2** est un tronc de cône de révolution d'axe $\left(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{i_2}\right)$ de demi angle au sommet α. On pose $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \omega\,\overrightarrow{i_2}$.

La génératrice de **2** du plan $\left(O, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_1}\right)$ la plus éloignée de l'axe $\left(O, \overrightarrow{i_0}\right)$ est parallèle à $\overrightarrow{i_0}$. Notons d sa distance à l'axe $\left(O, \overrightarrow{i_0}\right)$.

2 roule sans glisser au point I, sur une couronne **4**, immobile par rapport à **0** pendant le fonctionnement. Le réglage du rapport de variation s'obtient en déplaçant **4** suivant l'axe $\left(O, \overrightarrow{i_0}\right)$.

Soit K le centre de la section droite du tronc de cône passant par I. On pose $\overrightarrow{BI} = \lambda\,\overrightarrow{j_2}$. À l'extrémité de **2** est fixée une roue dentée de n dents, d'axe $\left(B, \overrightarrow{i_2}\right)$, qui engrène avec une couronne dentée intérieure d'axe $\left(A, \overrightarrow{i_0}\right)$, de n_2 dents, liée à **3**.

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

1. Les éventuelles erreur de texte font partie intégrante de la difficulté :).

Question 2 *En exprimant que **2** roule sans glisser sur **4** au point I, déterminer ω en fonction de ω_1, d et λ.*

Question 3 *Quelle relation obtient-on entre ω_1, ω_3 et ω en exprimant l'engrènement des deux roues dentées? (c'est à dire que **2** et **3** roulent sans glisser l'un sur l'autre en J).*

Question 4 *En déduire le rapport de variation $\dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ, d_2, d_3 et d.*

Question 5 *Tracer la courbe représentative du rapport de variation $\dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ, sachant que $\dfrac{n}{n_3} = \dfrac{d_1}{d_3}$, $d = 55\,\text{mm}$ et que λ varie entre $\lambda_{mini} = 12\,\text{mm}$ et la valeur $\lambda_{maxi} = 23\,\text{mm}$.*

Corrigé voir 72.

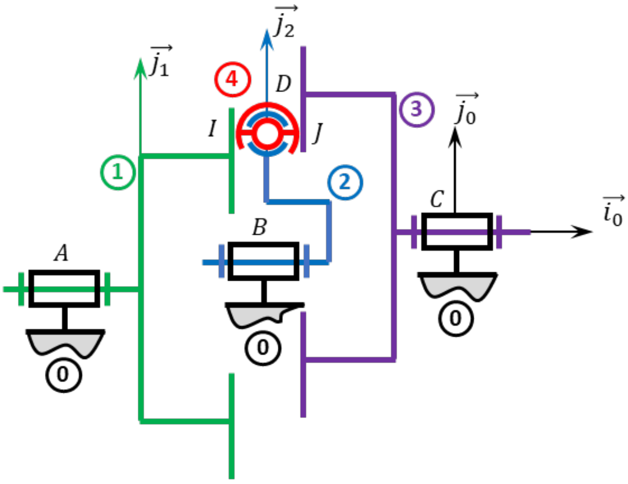
Exercice 61 – Variateur à billes ⋆⋆⋆⋆⋆⋆

B2-13

C2-05

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le schéma suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer la loi entrée – sortie.*

Corrigé voir 72.

1.4 Proposer une démarche de résolution

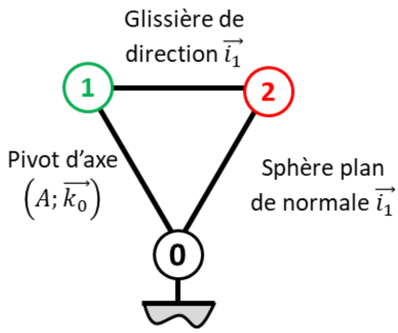
1.5 Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

1.5.1 Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques

Exercice 62 – Pompe à piston radial ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

On a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{0}$ soit $-e\,\overrightarrow{i_0}+\lambda\,\overrightarrow{i_1}-R\,\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow -e\,\overrightarrow{i_0}+\lambda(t)\cos\theta(t)\,\overrightarrow{i_0}+\lambda(t)\sin\theta(t)\,\overrightarrow{j_0}-R\cos\varphi(t)\,\overrightarrow{i_0}-R\sin\varphi(t)\,\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

En projetant les expressions sur $\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{j_0}$, on a : $\begin{cases}-e+\lambda(t)\cos\theta(t)-R\cos\varphi(t)=0\\ \lambda(t)\sin\theta(t)-R\sin\varphi(t)=0\end{cases}$

On cherche à supprimer $\varphi(t)$; donc
$\begin{cases}-e+\lambda(t)\cos\theta(t)=R\cos\varphi(t)\\ \lambda(t)\sin\theta(t)=R\sin\varphi(t)\end{cases}$.

En élevant au carré les expressions et en sommant, on obtient $R^2=(-e+\lambda(t)\cos\theta(t))^2+\lambda(t)^2\sin^2\theta(t) \Rightarrow R^2=(-e+\lambda(t)\cos\theta(t))^2+\lambda(t)^2\sin^2\theta(t)$

$\Rightarrow R^2=e^2-2e\lambda(t)\cos\theta(t)+\lambda(t)^2$.

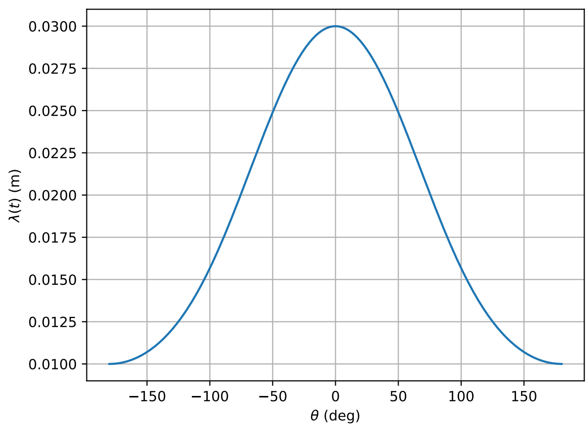
Résolution de l'équation : $\lambda(t)^2-2e\lambda(t)\cos\theta(t)+e^2-R^2=0$.

On a $\Delta=(-2e\cos\theta(t))^2-4\left(e^2-R^2\right)=4e^2\cos^2\theta(t)-4e^2+4R^2$.

On a donc

$$\lambda(t)=\frac{2e\cos\theta(t)\pm\sqrt{4e^2\cos^2\theta(t)-4e^2+4R^2}}{2}$$
$$=e\cos\theta(t)\pm\sqrt{e^2\cos^2\theta(t)-e^2+R^2}$$

Question 3 *En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.* On garde la solution positive et obtient la courbe suivante.



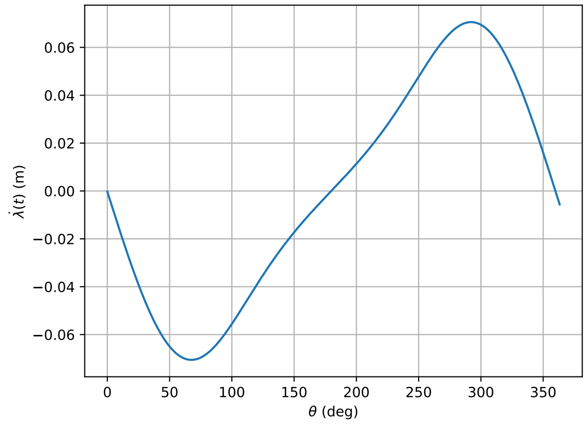
Question 4 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

En dérivant l'expression précédente, on a $\dot{\lambda}_+(t)=-e\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)+\dfrac{1}{2}\left(e^2\cos^2\theta(t)\right)'\left(e^2\cos^2\theta(t)-e^2+R^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

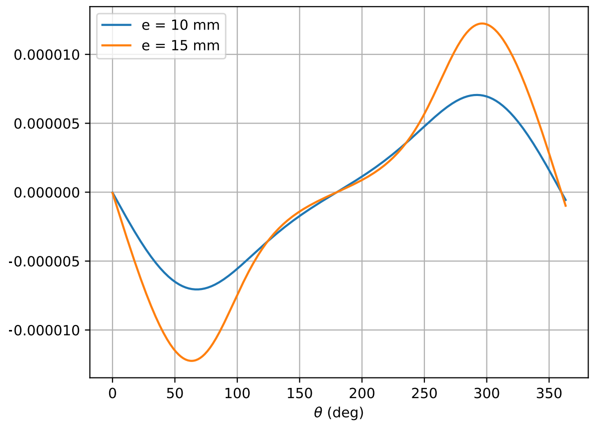
$$=-e\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)-\frac{e^2\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{e^2\cos^2\theta(t)-e^2+R^2}}.$$

À revoir

Modéliser



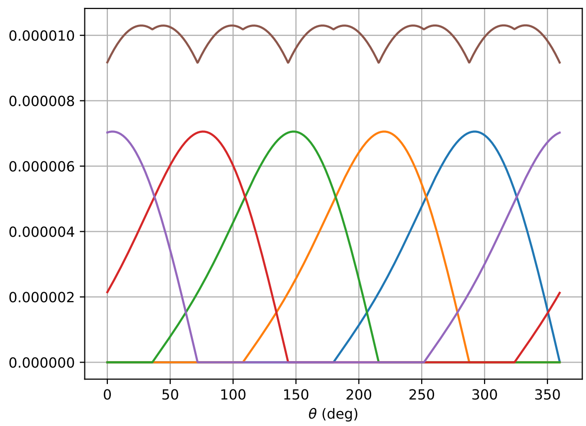
Question 5 *Exprimer le débit instantané de la pompe.*
Le débit instantané de la pompe est donné par $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$.
Question 6 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ et $e = 15\,\text{mm}$.*



Question 7 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ pour une pompe à 5 pistons (5 branches **1+2**).*

```
def plot_debit5p():
    plt.cla()
    w = 2*m.pi # rad/s (1tr/s)
    les_t = np.linspace(0,6,6000)
    les_theta = w*les_t

    # Calcul de la vitesse instantanée des pistons.
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda)
    les_lambdap = np.array(les_lambdap)

    S= 1e-4 # Surface en m2

    # 5 courbes de débit décalées d'un cinquième de tour
    les_q1 = S*les_lambdap
    les_q2 = S*les_lambdap[200:]
    les_q3 = S*les_lambdap[400:]
    les_q4 = S*les_lambdap[600:]
    les_q5 = S*les_lambdap[800:]

    # On conserve que les valeurs que sur un tour
    les_q1 = les_q1[:1000]
    les_q2 = les_q2[:1000]
    les_q3 = les_q3[:1000]
```

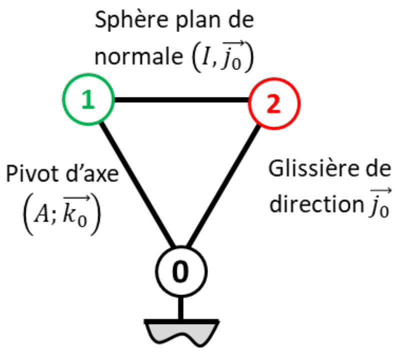
```
les_q4 = les_q4[:1000]
les_q5 = les_q5[:1000]
plt.grid()

les_t = les_t[:1000]
les_theta = les_theta[:1000]

plt.xlabel("$\\theta$␣(deg)")
plt.ylabel("Débit␣instantané␣$m^3s^{-1}$")

# On conserve que les valeurs positives (débit)
for i in range(len(les_q1)):
    if les_q1[i]<0:
        les_q1[i]=0
    if les_q2[i]<0:
        les_q2[i]=0
    if les_q3[i]<0:
        les_q3[i]=0
    if les_q4[i]<0:
        les_q4[i]=0
    if les_q5[i]<0:
        les_q5[i]=0

plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q1)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q2)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q3)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q4)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q5)

# Le débit instantané est la sommme des contributions
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q1+les_q2+les_q3+les_q4+les_q5)
#plt.show()
#plt.savefig("10_05_c.pdf")
```



Exercice 63 – Pompe à piston axial ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

En écrivant la fermeture géométrique, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$.

On a donc, $e\,\overrightarrow{i_1}+R\,\overrightarrow{j_0}+\mu\,\overrightarrow{i_0}-\lambda(t)\,\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$. En projetant l'expression sur $\overrightarrow{j_0}$ (dans ce cas, l'expression suivant $\overrightarrow{i_0}$ n'est pas utile) : $e\sin\theta+R-\lambda(t)=0$.

On a donc, $\lambda(t)=e\sin\theta+R$.

Question 3 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

En dérivant l'expression précédente, on a $\dot{\lambda}(t)=e\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$.

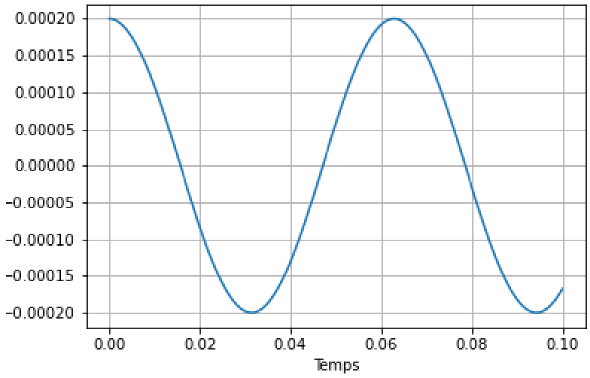
Question 4 *On note S la section du piston **2**. Exprimer le débit instantané de la pompe.*

En notant $q(t)$ le débit instantané, $q(t)=eS\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$.

Question 5 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e=10\,\text{mm}$ et $R=10\,\text{mm}$ ainsi que pour $e=20\,\text{mm}$ et $R=5\,\text{mm}$. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t)=100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, la section du piston est donnée par $S=1\,\text{cm}^2$.*

```python
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""11_PompePistonAxial.py"""

__author__ = "Xavier Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.02 # m
e = 0.01 # m

def calc_lambda(theta):
    res= e*np.sin(theta)+R

    return res

def calc_lambdap(theta,w):

    res = e*w*np.cos(theta)
    return res

def plot_debit():
    plt.cla()
    w = 100 # rad/s
    les_t = np.linspace(0,0.1,1000)
    les_theta = w*les_t
    global e
    S = 1e-4
    e = 20e-3
    les_q = e*S*w*np.cos(les_theta)
    plt.plot(les_t,les_q)
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Débit ($m^3s^{-1}$)")
    plt.grid()
```

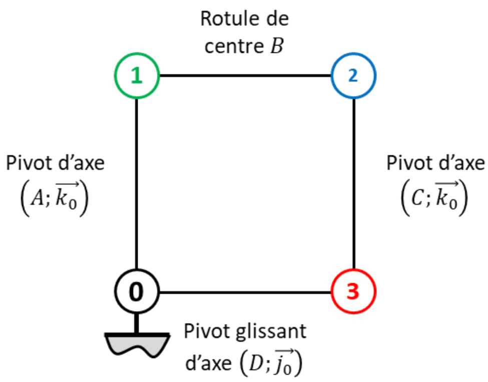
```
    plt.savefig("11_02_c.png")
    plt.show()

plot_debit()
```



Exercice 64 – Système bielle manivelle ⋆⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

En réalisant une fermeture géométrique, on obtient $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow R\,\overrightarrow{i_1}-L\,\overrightarrow{i_2}-\lambda(t)\,\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$. On projette alors cette expression dans $\mathscr{R}_0$:
$\left\{\begin{array}{l} R\cos\theta(t)-L\cos\varphi(t)=0 \\ R\sin\theta(t)-L\sin\varphi(t)-\lambda(t)=0 \end{array}\right.$.

On cherche à éliminer $\varphi(t)$:
$\left\{\begin{array}{l} R\cos\theta(t)=L\cos\varphi(t) \\ R\sin\theta(t)-\lambda(t)=L\sin\varphi(t) \end{array}\right.$.

En élevant au carré, on a donc
$\left\{\begin{array}{l} R^2\cos^2\theta(t)=L^2\cos^2\varphi(t) \\ \left(R\sin\theta(t)-\lambda(t)\right)^2=L^2\sin^2\varphi(t) \end{array}\right.$.

En conséquence, $R^2\cos^2\theta(t)+\left(R\sin\theta(t)-\lambda(t)\right)^2=L^2$ et
$\left(R\sin\theta(t)-\lambda(t)\right)^2=L^2-R^2\cos^2\theta(t) \Rightarrow \lambda(t)=\pm\sqrt{L^2-R^2\cos^2\theta(t)}+R\sin\theta(t)$.

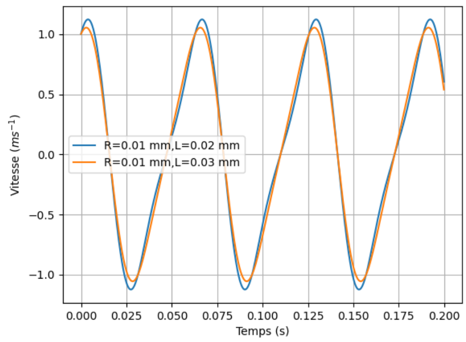
Question 3 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

$$\dot{\lambda}(t)=\pm\left(\frac{R^2\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{L^2-R^2\cos^2\theta(t)}}\right)+\dot{\theta}(t)R\cos\theta(t)$$

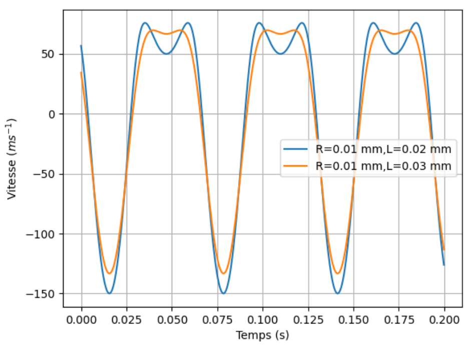
Question 4 *En utilisant Python, tracer la vitesse du piston en fonction du temps. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t)=100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, on prendra $R=10\,\mathrm{mm}$ et $L=20\,\mathrm{mm}$ puis $L=30\,\mathrm{mm}$.*

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""12_BielleManivelle.py"""
__author__ = "Xavier␣Pessoles"
```

```
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.01 # m
L = 0.03 # m
w = 100
def calc_lambda(theta):
    #res = R*np.sin(theta)
    #print(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))
    #res = res + np.sqrt(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))
    res = np.sqrt(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))+R*np.sin(theta)
    return res

def plot_lambda():
    les_theta=np.linspace(-2*np.pi,2*np.pi,1000)
    les_l = [calc_lambda(x) for x in les_theta]
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps␣(s)")
    plt.ylabel("Vitesse␣(${m}s^{-1}$)")
    plt.plot(les_theta,les_l,label=str("R=")+str(R)+"␣mm,"+str("L=")+str(L)+"␣mm")
    plt.legend()
    plt.show()

plot_lambda()
```



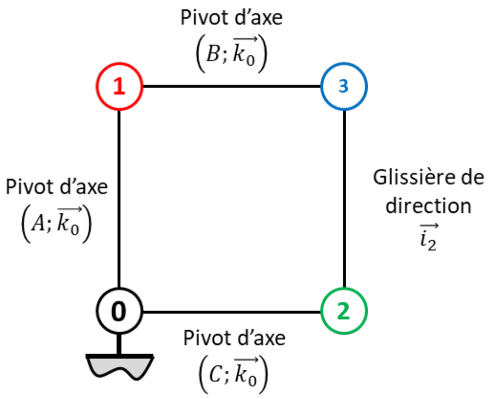
Question 5 *En utilisant Python, tracer l'accélération du piston en fonction du temps en utilisant les mêmes valeurs que dans la question précédente. On utilisera une dérivation numérique.*



Exercice 65 – Pompe oscillante ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

En réalisant une fermeture géométrique, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow R\,\overrightarrow{i_1}-\lambda(t)\,\overrightarrow{i_2}+H\,\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

En projetant cette expression dans le repère $\mathscr{R}_0$, on a $R\left(\cos\theta(t)\,\overrightarrow{i_0}+\sin\theta(t)\,\overrightarrow{j_0}\right)-\lambda(t)\left(\cos\varphi(t)\,\overrightarrow{i_0}+\sin\varphi(t)\,\overrightarrow{j_0}\right)+H\,\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

On obtient alors les équation scalaires suivantes : $\left\{\begin{array}{l} R\cos\theta(t)-\lambda(t)\cos\varphi(t)=0 \\ R\sin\theta(t)-\lambda(t)\sin\varphi(t)+H=0 \end{array}\right.$.

On cherche à supprimer $\varphi(t)$, on va donc isoler la variable : $\left\{\begin{array}{l} \lambda(t)\cos\varphi(t)=R\cos\theta(t) \\ \lambda(t)\sin\varphi(t)=R\sin\theta(t)+H \end{array}\right. . \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda(t)^2\cos^2\varphi(t)=R^2\text{ c} \\ \lambda(t)^2\sin^2\varphi(t)=(R\text{ si} \end{array}\right.$

En sommant les expressions, on a : $\lambda(t)^2=R^2\cos^2\theta(t)+(R\sin\theta(t)+H)^2$.

Au final, $\lambda(t)^2=R^2+H^2+2HR\sin\theta(t)$ et

$\lambda(t)=\pm\sqrt{R^2+H^2+2HR\sin\theta(t)}$.

Question 3 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

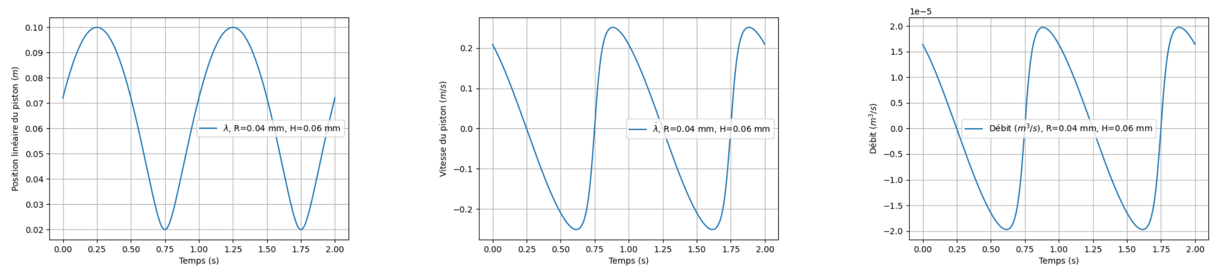
En dérivant l'expression obtenue à la question précédente, on obtient

$\dot{\lambda}(t)=\dfrac{1}{2}\left(-2HR\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\right)\left(R^2+H^2+2HR\sin\theta(t)\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Question 4 *Exprimer le débit instantané de la pompe.*

On note q le débit instantané de la pompe. On a $q(t)=S\dot{\lambda}(t)$ avec S la section du piston 3.

Question 5 *En utilisant Python, donner le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour un piston de diamètre $D=10\,\text{mm}$.*




```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""13_TransfoMouvement.py"""

__author__ = "Xavier␣Pessoles"
__email__ = "xpessoles@lamartin.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m

R = 0.04 # m
H = 0.06 # m
D = 10e-3 # 10 mm

w = 60 # tours /min
w = w*2*m.pi/60 # rad/s
```

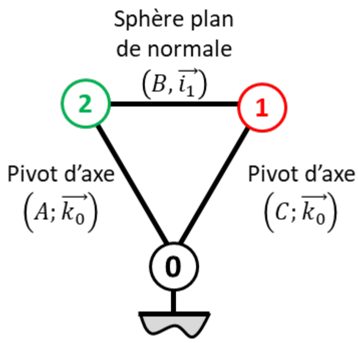
```python
def calc_lambda(theta):
    res = R*R+H*H+2*H*R*np.sin(theta)

    return np.sqrt(res)

def calc_lambdap(theta):
    res = -H*R*w*np.cos(theta)*np.power(R*R+H*H+2*H*R*np.sin(theta),-0.5)
    return np.sqrt(res)

def calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda):
    les_lambda_p = []
    for i in range(len(les_t)-1):
        les_lambda_p.append((les_lambda[i+1]-les_lambda[i])/(les_t[i+1]-les_t[i]))

    return les_lambda_p

def plot_lambda():
    les_t = np.linspace(0,2,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps␣(s)")
    plt.ylabel("Position␣linéaire␣du␣piston␣($m$)")
    plt.plot(les_t,les_lambda,label=str("$\\lambda$,␣R=")+str(R)+"␣mm,␣"+str("H=")+str(H)+"␣mm")
    plt.legend()
    plt.show()

def plot_lambdap():
    les_t = np.linspace(0,2,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps␣(s)")
    plt.ylabel("Vitesse␣du␣piston␣($m/s$)")
    #plt.plot(les_t,les_lambdap,label=str("$\dot{\\lambda}$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H
        )+" mm")

    les_lambdap_bis = calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda)
    plt.plot(les_t[:-1],les_lambdap_bis,label=str("$\dot{\\lambda}$,␣R=")+str(R)+"␣mm,␣"+str("H=
        ")+str(H)+"␣mm")

    plt.legend()
    plt.show()

def plot_debit():
    les_t = np.linspace(0,2,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps␣(s)")
    plt.ylabel("Débit␣($m^3/s$)")
    #plt.plot(les_t,les_lambdap,label=str("$\dot{\\lambda}$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H
        )+" mm")

    les_lambdap_bis = calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda)
    for i in range(len(les_lambdap_bis)):
        les_lambdap_bis[i]=les_lambdap_bis[i]*np.pi*D*D/4

    plt.plot(les_t[:-1],les_lambdap_bis,label=str("Débit␣($m^3/s$),␣R=")+str(R)+"␣mm,␣"+str("H="
        )+str(H)+"␣mm")

    plt.legend()
    plt.show()
```

```python
#plot_lambda()
#plot_lambdap()
plot_debit()
```

Exercice 66 – Barrière Sympact ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.* On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$ soit $\lambda(t)\overrightarrow{i_2}-R\overrightarrow{i_1}-h\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

En exprimant l'équation vectorielle dans le repère $\mathscr{R}_0$, on a $\lambda(t)\left(\cos\varphi(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\varphi(t)\overrightarrow{j_0}\right)-R\left(\cos\theta(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\theta(t)\overrightarrow{j_0}\right)-h\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

On a alors $\left\{\begin{array}{l}\lambda(t)\cos\varphi(t)-R\cos\theta(t)=0\\ \lambda(t)\sin\varphi(t)-R\sin\theta(t)-h=0\end{array}\right.$

soit $\left\{\begin{array}{l}\lambda(t)\cos\varphi(t)=R\cos\theta(t)\\ \lambda(t)\sin\varphi(t)=R\sin\theta(t)+h\end{array}\right.$.

En faisant le rapport des équations, on a donc : $\tan\varphi(t)=\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}$ (pour $\theta(t)\neq\dfrac{\pi}{2}\, mod \pi$).

Question 3 *Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.* On a : $\varphi(t)=\arctan\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)$.

Pour commencer, $(R\sin\theta(t)+h)'=R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$ et $(R\cos\theta(t))'=-R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)$.

De plus, $\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)'$

$$=\frac{R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)R\cos\theta(t)+R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)(R\sin\theta(t)+h)}{R^2\cos^2\theta(t)}$$

$$=\frac{R^2\dot{\theta}(t)\cos^2\theta(t)+R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)(R\sin\theta(t)+h)}{R^2\cos^2\theta(t)}$$

$$=\frac{R\dot{\theta}(t)\cos^2\theta(t)+R\sin^2\theta(t)\dot{\theta}(t)+h\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}$$

$$=\dot{\theta}(t)\frac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}.$$

Au final,

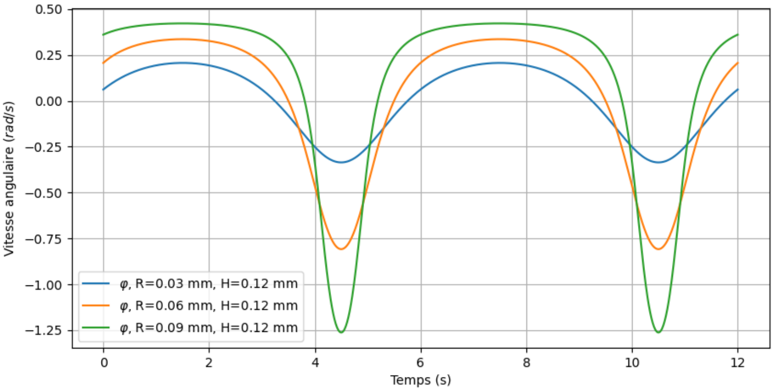
$$\dot{\varphi}(t)=\frac{\dot{\theta}(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{1+\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)^2}\quad\frac{\dot{\theta}(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{1+\dfrac{(R\sin\theta(t)+h)^2}{R^2\cos^2\theta(t)}}.$$

$$\dot{\varphi}(t)=R^2\cos^2\theta(t)\frac{\dot{\theta}(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{R^2\cos^2\theta(t)+\dfrac{(R\sin\theta(t)+h)^2}{R^2\cos^2\theta(t)}}=\frac{R\dot{\theta}(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2\cos^2\theta(t)+(R\sin\theta(t)+h)^2}.$$

$$\dot{\varphi}(t)=\frac{R\dot{\theta}(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2\cos^2\theta(t)+R^2\sin^2\theta(t)+h^2+2Rh\sin\theta(t)}=\frac{R\dot{\theta}(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2+h^2+2Rh\sin\theta(t)}.$$

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Modéliser




```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""14_Sympact.py"""

__author__ = "Xavier␣Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.03 # m
H = 0.12 # m
w = 10 # tours /min
w = 10*2*m.pi/60 # rad/s

def calc_phi(theta):
    num = R*np.sin(theta)+H
    den = R*np.cos(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def calc_phip(theta):
    num = R*w*(R+H*np.sin(theta))
    den = R*R+H*H+2*R*H*np.sin(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def plot_phi():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phi = calc_phi(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps␣(s)")
    plt.ylabel("Position␣angulaire␣($rad$)")
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phi,label=str("$\\varphi$,␣R=")+str(R)+"␣mm,␣"+str("H=")+str(H)+"␣mm")
    plt.legend()
    plt.show()


def plot_phip():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phip = calc_phip(les_theta)

    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps␣(s)")
    plt.ylabel("Vitesse␣angulaire␣($rad/s$)")
```

```
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phip,label=str("$\\varphi$,␣R=")+str(R)+"␣mm,␣"+str("H=")+str(H)+"␣mm")
    plt.legend()
    plt.show()

for R in [0.03,0.06,0.09]:
    plot_phip()
```

Exercice 67 – Barrière Sympact avec galet ⋆⋆

B2-13

C2-05

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

Question 4 *En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer $\gamma(t)$ et $\dot{\gamma}(t)$.*

Question 5 *En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Exercice 68 – Poussoir ⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\mu(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\mu}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\mu}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Exercice 69 – Système 4 barres ⋆⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\theta_1(t)$ en fonction de $\theta_4(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Exercice 70 – Maxpid ⋆⋆⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Par ailleurs $a = 107{,}1$ mm, $b = 80$ mm, $c = 70$ mm, $d = 80$ mm. Le pas de la vis est de 4 mm.

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.* **Question 2** *Exprimer $\theta(t)$ en fonction de $\lambda(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\dot{\lambda}(t)$.*

Question 4 *Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$, vitesse de rotation du rotor moteur **2** par rapport au stator **1**.*

Question 5 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **2** par rapport à **1** est de 500 tours par minute.*

Exercice 71 – Variateur de Graham⋆⋆⋆

D'après ressources de Michel Huguet.

B2-13

C2-05

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *En exprimant que **2** roule sans glisser sur **4** au point I, déterminer ω en fonction de ω_1, d et λ.*

Question 3 *Quelle relation obtient-on entre ω_1, ω_3 et ω en exprimant l'engrènement des deux roues dentées ? (c'est à dire que **2** et **3** roulent sans glisser l'un sur l'autre en J).*

Question 4 *En déduire le rapport de variation $\dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ, d_2, d_3 et d.*

Question 5 *Tracer la courbe représentative du rapport de variation $\dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ, sachant que $\dfrac{n}{n_3} = \dfrac{d_1}{d_3}$, $d = 55$ mm et que λ varie entre $\lambda_{mini} = 12$ mm et la valeur $\lambda_{maxi} = 23$ mm.*

Exercice 72 – Variateur à billes ⋆⋆⋆⋆⋆

B2-13

C2-05

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer la loi entrée – sortie.*