Exercice 1 – Mouvement RT ⋆

B2-14

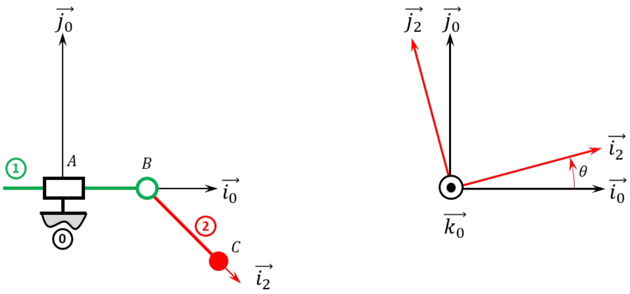
[redacted]

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{BC} = R\overrightarrow{i_2}$ avec $R = 30\,\text{mm}$. De plus :

- $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de **1**, on note m_1 la masse de **1** ;
- $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2 la masse de **2**.

Un vérin électrique positionné entre **0** et **1** permet d'actionner le solide **1**. Un moteur électrique positionné entre **1** et **2** permet d'actionner le solide **2**.

L'accélération de la pesanteur est donnée par $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{j_0}$.



Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*

Question 2 *Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de **1** et de **2** par rapport à $\mathcal{R}_0$.*

Corrigé voir 4.

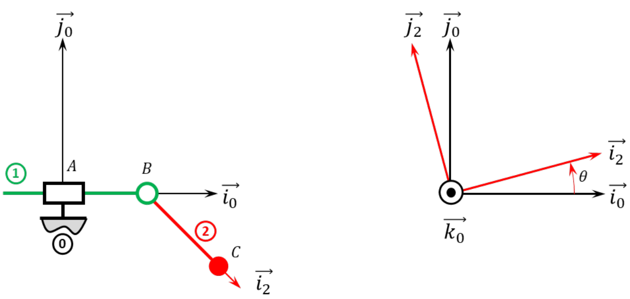
Exercice 2 – Mouvement RT ⋆

C2-08

C2-09

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{BC} = R\overrightarrow{i_2}$ avec $R = 30\,\text{mm}$. De plus :

- $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de **1**, on note m_1 la masse de **1** et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2 la masse de **2** et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.



Question 1 *Exprimer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(2/0)\}$ en B.*

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \overrightarrow{i_0}$*

Indications :

1. $\{\mathscr{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\left(\ddot{\theta}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{i_2}\right) \\ C_1\ddot{\theta}\overrightarrow{k_1} + R\left(-\sin\theta\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{k_0} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{k_2}\right) \end{array} \right\}_B$.
2. $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \overrightarrow{i_0} = m_1\ddot{\lambda}(t) + m_2\left(\ddot{\lambda}(t) - R\left(\ddot{\theta}\sin\theta(t) + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\right)$.

Corrigé voir 5.

Exercice 3 – Mouvement RT ⋆

C2-09 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

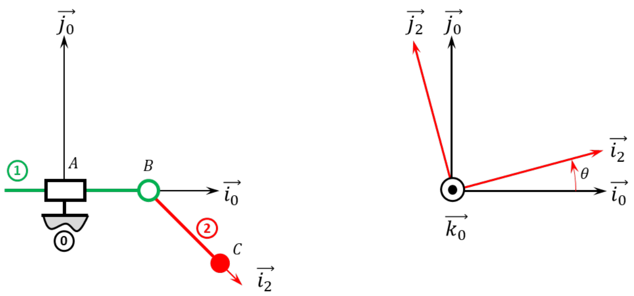
Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{BC} = R\overrightarrow{i_2}$ avec $R = 30\,\text{mm}$. De plus :

- $G_1 = B$ désigne le centre d'inertie de **1**, on note m_1 la masse de **1** et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- $G_2 = C$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2 la masse de **2** et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.

Un vérin électrique positionné entre **0** et **1** permet d'actionner le solide **1**. Un moteur électrique positionné entre **1** et **2** permet d'actionner le solide **2**.

L'accélération de la pesanteur est donnée par $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{j_0}$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{\delta(B,2/0)} = C_1\ddot{\theta}\overrightarrow{k_1} + R\left(-\sin\theta\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{k_0} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{k_2}\right)$ et $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \overrightarrow{i_0} = m_1\ddot{\lambda}(t) + m_2\left(\ddot{\lambda}(t) - R\left(\ddot{\theta}\sin\theta(t) + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\right)$.



L'objectif est d'obtenir les lois de mouvement.

Question 1 *Appliquer le théorème du moment dynamique au solide **2** au point B en projection sur $\overrightarrow{k_0}$.*

Question 2 *Appliquer le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble **1+2** en projection sur $\overrightarrow{i_0}$*

Indications :

1. $C_m - m_2 g R\cos\theta(t) = C_1\ddot{\theta} + R\left(-\sin\theta\ddot{\lambda}(t) + R\ddot{\theta}\right)$;
2. $F_{\text{ver}} = m_1\ddot{\lambda}(t) + m_2\left(\ddot{\lambda}(t) - R\left(\ddot{\theta}\sin\theta(t) + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\right)$.

Corrigé voir 6.

Modéliser

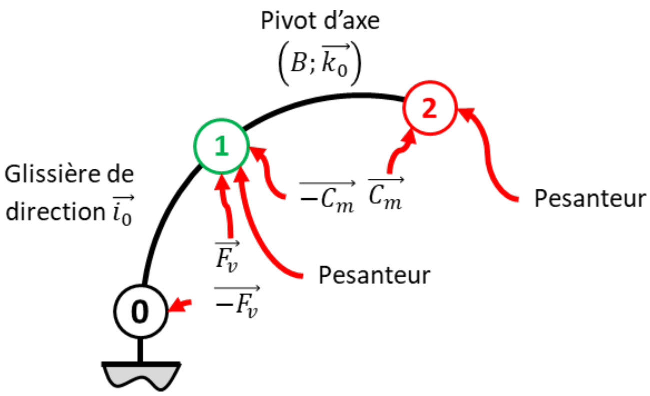
2

Exercice 4 – Mouvement RT ⋆

B2-14

[redacted]

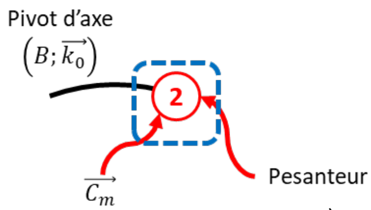
Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de **1** et de **2** par rapport à $\mathscr{R}_0$.*
Ce mécanisme présente deux degrés de liberté indépendants : $\lambda(t)$ et $\theta(t)$. Il est donc nécessaire d'écrire, dans le meilleur des cas, deux équations :

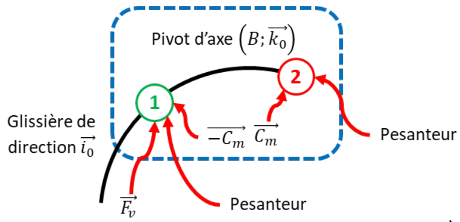
- une équation traduisant la mobilité de 2 par rapport à 1, soit TMD appliqué à 2 en B en projection sur $\overrightarrow{k_0}$;
- une équation traduisant la mobilité de 2+1 par rapport à 0, soit TRD appliqué à 1+2 en projection sur $\overrightarrow{i_0}$.

- **On isole 2.**
  - **BAME :**
    - actions de la liaison pivot $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\}$;
    - action du moteur $\{\mathscr{T}(\text{mot}\rightarrow 2)\}$;
    - action de la pesanteur $\{\mathscr{T}(\text{pes}\rightarrow 2)\}$.



- **Théorème :** on applique le théorème du moment dynamique en B au solide **2** en projection sur $\overrightarrow{k_0}$: $C_{\text{mot}}+\overrightarrow{\mathscr{M}(B,\text{pes}\rightarrow 2)}\cdot\overrightarrow{k_0}=\overrightarrow{\delta(B,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}$.
- **Calcul de la composante dynamique :** considérons le cas où la matrice d'inertie est donnée en C. On a donc $\overrightarrow{\delta(C,2/0)}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[I_C(2)\overrightarrow{\Omega(2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}$. De plus, $\overrightarrow{\delta(B,2/0)}=\overrightarrow{\delta(C,2/0)}+\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{R_d(2/0)}$ et $\overrightarrow{R_d(2/0)}=m_2\overrightarrow{\Gamma(C\in 2/0)}$.

- **On isole 1+2.**
  - **BAME :**
    - actions de la liaison glissière $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\}$;
    - action de la pesanteur $\{\mathscr{T}(\text{pes}\rightarrow 1)\}$;
    - action de la pesanteur $\{\mathscr{T}(\text{pes}\rightarrow 2)\}$;
    - action du vérin $\{\mathscr{T}(\text{ver}\rightarrow 1)\}$;.



- **Théorème :** on applique le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble **1+2** en projection sur $\overrightarrow{i_0}$: $\overrightarrow{R(\text{ver}\rightarrow 1)}\cdot\overrightarrow{i_0}=\overrightarrow{R_d(1+2/0)}\cdot\overrightarrow{i_0}$.
- **Calcul de la composante dynamique :** $\overrightarrow{R_d(1+2/0)}=\overrightarrow{R_d(1/0)}+\overrightarrow{R_d(2/0)}=m_1\overrightarrow{\Gamma(G_1\in 1/0)}+m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2\in 2/0)}$.

Exercice 5 – Mouvement RT ⋆

C2-08

C2-09

Question 1 *Exprimer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}(2/0)\}$ en B.*

Expression de la résultante dynamique $\overrightarrow{R_d(2/0)}=m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2\in 2/0)}=m_2\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathscr{R}_0}=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathscr{R}_0}+\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{BC}\right]_{\mathscr{R}_0}=\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0}+R\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathscr{R}_0}=\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0}+R\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\theta}\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathscr{R}_0}=\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0}+R\left(\ddot{\theta}\overrightarrow{j_2}-\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_2}\right)$.

Méthode 1 : Calcul en $G_2=C$ puis déplacement du torseur dynamique

- Calcul du moment cinétique en G_2 : $G_2=C$ est le centre de gravité donc $\overrightarrow{\sigma(C,2/0)}=I_C(2)\dot\theta\overrightarrow{k_0}=C_1\dot\theta\overrightarrow{k_1}$.
- Calcul du moment dynamique en G_2 : $G_2=C$ est le centre de gravité donc $\overrightarrow{\delta(C,2/0)}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}=C_1\ddot\theta\overrightarrow{k_1}$.
- Calcul du moment dynamique en B : $\overrightarrow{\delta(B,2/0)}=\overrightarrow{\delta(C,2/0)}+\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{R_d(2/0)}=C_1\ddot\theta\overrightarrow{k_1}+R\overrightarrow{i_2}\wedge\left(\ddot\lambda(t)\overrightarrow{i_0}+R\left(\ddot\theta\overrightarrow{j_2}-\dot\theta^2\overrightarrow{i_2}\right)\right)$ $=C_1\ddot\theta\overrightarrow{k_1}+R\left(-\sin\theta\ddot\lambda(t)\overrightarrow{k_0}+R\ddot\theta\overrightarrow{k_2}\right)$.

Au final, on a donc $\{\mathscr{D}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{l} m_2\left(\ddot\lambda(t)\overrightarrow{i_0}+R\left(\ddot\theta\overrightarrow{j_2}-\dot\theta^2\overrightarrow{i_2}\right)\right)\\ C_1\ddot\theta\overrightarrow{k_1}+R\left(-\sin\theta\ddot\lambda(t)\overrightarrow{k_0}+R\ddot\theta\overrightarrow{k_2}\right)\end{array}\right\}_B$.

Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{R_d(1+2/0)}\cdot\overrightarrow{i_0}$

On a $\overrightarrow{R_d(1+2/0)}=\overrightarrow{R_d(1/0)}+\overrightarrow{R_d(2/0)}=m_1\ddot\lambda(t)\overrightarrow{i_0}+m_2\left(\ddot\lambda(t)\overrightarrow{i_0}+R\left(\ddot\theta\overrightarrow{j_2}-\dot\theta^2\overrightarrow{i_2}\right)\right)$. On projette alors sur $\overrightarrow{i_0}$, $\overrightarrow{R_d(1+2/0)}\cdot\overrightarrow{i_0}=m_1\ddot\lambda(t)+m_2\left(\ddot\lambda(t)-R\left(\ddot\theta\sin\theta(t)+\dot\theta^2\cos\theta\right)\right)$.

Exercice 6 – Mouvement RT ⋆

C2-09 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

L'objectif est d'obtenir les lois de mouvement.

Question 1 *Appliquer le théorème du moment dynamique au solide **2** au point B en projection sur* $\overrightarrow{k_0}$.

- **On isole 2.**
- **BAME :**
  - actions de la liaison pivot $\{\mathscr{T}(1\to2)\}$;
  - action de la pesanteur $\{\mathscr{T}(\text{pes}\to2)\}$. On a $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,2\to0)}\cdot\overrightarrow{k_0}=\overrightarrow{\mathscr{M}(G_2,2\to0)}\cdot\overrightarrow{k_0}+\left(\overrightarrow{BG_2}\wedge\left(-m_2g\overrightarrow{j_0}\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0}$ $=\left(R\overrightarrow{i_2}\wedge\left(-m_2g\overrightarrow{j_0}\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0}=-m_2gR\overrightarrow{i_0}\cdot\overrightarrow{i_2}=-m_2gR\cos\theta(t)$.
- **Théorème :** on applique le théorème du moment dynamique en B au solide **2** en projection sur $\overrightarrow{k_0}$: $C_m+\overrightarrow{\mathscr{M}(B,\text{pes}\to2)}\cdot\overrightarrow{k_0}=\overrightarrow{\delta(B,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}$. On a $\overrightarrow{\delta(B,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}=\left(C_1\ddot\theta\overrightarrow{k_1}+R\left(-\sin\theta\ddot\lambda(t)\overrightarrow{k_0}+R\ddot\theta\overrightarrow{k_2}\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0}=C_1\ddot\theta+R\left(-\sin\theta\ddot\lambda(t)+R\ddot\theta\right)$. Au final, $C_m-m_2gR\cos\theta(t)=C_1\ddot\theta+R\left(-\sin\theta\ddot\lambda(t)+R\ddot\theta\right)$.

Question 2 *Appliquer le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble **1+2** en projection sur* $\overrightarrow{i_0}$

- **On isole 1+2.**
- **BAME :**
  - actions de la liaison glissière $\{\mathscr{T}(0\to1)\}$;
  - action de la pesanteur $\{\mathscr{T}(\text{pes}\to1)\}$;
  - action de la pesanteur $\{\mathscr{T}(\text{pes}\to2)\}$;
  - action du vérin $\{\mathscr{T}(\text{ver}\to1)\}$.
- **Théorème :** on applique le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble **1+2** en projection sur $\overrightarrow{i_0}$: $\overrightarrow{R(\text{ver}\to1)}\cdot\overrightarrow{i_0}=\overrightarrow{R_d(1+2/0)}\cdot\overrightarrow{i_0}$. Au final, $F_{\text{ver}}=m_1\ddot\lambda(t)+m_2\left(\ddot\lambda(t)-R\left(\ddot\theta\sin\theta(t)+\dot\theta^2\cos\theta\right)\right)$.