

B

Sciences

Modéliser | Industrielles de  
l'Ingénieur

PSI\* - MP

## B2 Proposer un modèle de connaissance et de comportement

1.1	A1 – Analyser les exigences	2
1.2	A2 – Définir les frontières de l'analyse	2
1.3	A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurale	2
1.3.1	Associer les fonctions aux constituants . . . . .	2
1.3.2	Caractériser un constituant de la chaîne d'information . . . . .	3
1.4	A4 – Analyser les performances et les écarts	4
1.5	A5 – Analyser un compromis produit-procédés-matériaux	5
1.6	A1 – Analyser les exigences	6
1.7	A2 – Définir les frontières de l'analyse	6
1.8	A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurale	6
1.8.1	Caractériser un constituant de la chaîne d'information . . . . .	6
1.9	A4 – Analyser les performances et les écarts	6
1.10	A5 – Analyser un compromis produit-procédés-matériaux	6
1.10.1	Modéliser un convertisseur électromécanique . . . . .	6

## 1.1 A1 – Analyser les exigences

## 1.2 A2 – Définir les frontières de l'analyse

## 1.3 A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle

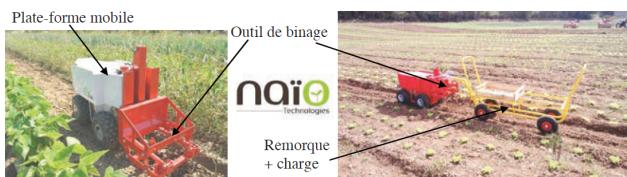
### 1.3.1 Associer les fonctions aux constituants

#### Exercice 1 – Robot de maraîchage Oz 440 \*

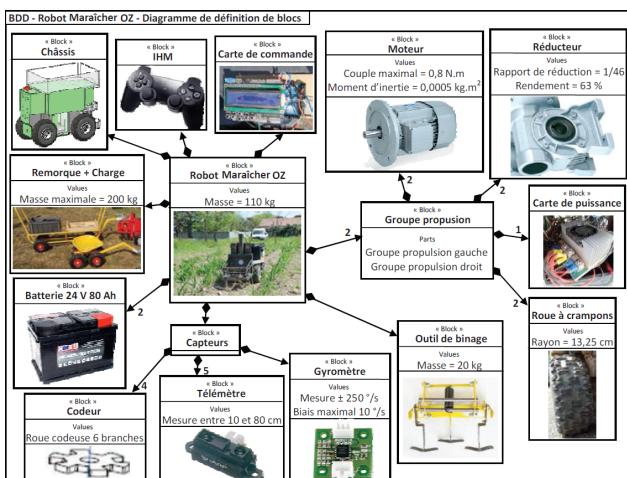
A3-01

Pas de corrigé pour cet exercice.

Le robot de maraîchage Oz 440 développé par la société Naïo Technologies est un outil autonome agricole, alliant robustesse et écologie, capable d'assister les maraîchers dans les tâches les plus pénibles comme le transport de charges lors des récoltes et le désherbage mécanique à l'aide d'un outil de binage.



Ce robot est constitué d'une plate-forme mobile électrique à 4 roues motrices sur laquelle sont fixés divers outils et capteurs. La figure 1 donne la structure du robot sous la forme d'un diagramme de définition de blocs (BDD) avec les propriétés principales de chaque constituant, utiles pour la résolution du problème.



de pouvoir utiliser ce robot régulièrement, sans perte de temps, permet de toujours avoir un sol parfaitement biné et ainsi de diminuer les effets d'évaporation de l'eau.

**Question 1** À l'aide du diagramme de définition de blocs disponible, réaliser le diagramme correspondant à la chaîne fonctionnelle de l'ensemble groupe propulsion droit du robot.

Corrigé voir 1.

#### Exercice 2 – Système de levage à multiples colonnes \*

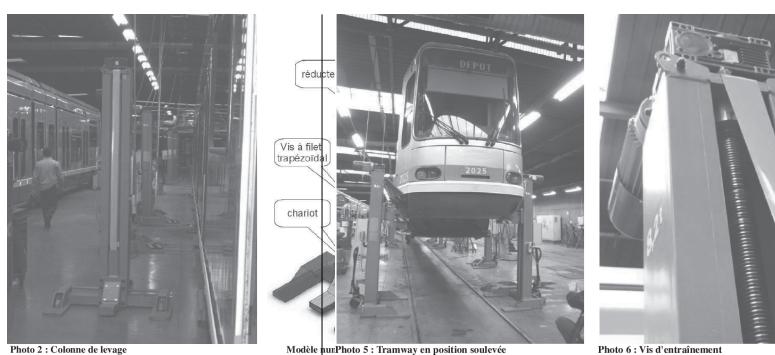
A3-01

Pas de corrigé pour cet exercice.

Les sociétés de transports publics des grandes agglomérations gèrent des réseaux comportant des bus et/ou des tramways. Ces sociétés possèdent des centres de maintenance ayant en charge l'entretien et la réparation de leurs véhicules. On s'intéresse ici à la maintenance de tramways sur rails de type TFS (Tramway Français Standard).

Le système de levage est constitué d'une armoire de commande (nommée PC) munie d'un pupitre de commande, d'un API (Automate Programmable Industriel), de relais et cartes de commande pour moteurs. Cette PC peut gérer jusqu'à 10 colonnes de levage. Ces colonnes de levage sont des unités indépendantes mobiles que l'on peut déplacer manuellement grâce à des roues escamotables. Elles sont constituées d'un chariot de levage guidé par 4 galets roulant à l'intérieur d'une colonne (rails en tôle pliée).

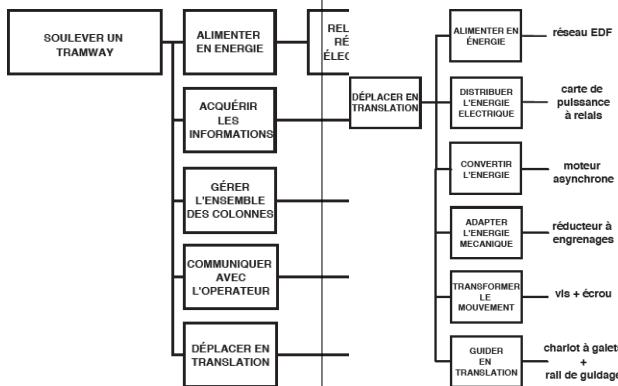
L'entraînement du chariot se fait par une vis à filet trapézoïdal, mise en rotation par un moto-réducteur-frein asynchrone. On met en place les colonnes au niveau de la plate forme du tramway à soulever, aux endroits prévus à cet effet.



Pour soulever un tramway de 45 tonnes et de 30 mètres de long, le service de maintenance utilise 8 colonnes de levage d'une capacité unitaire maximale de

8,2 tonnes commandées simultanément. Lorsque les colonnes sont en place, on démarre le cycle de levage : l'opérateur peut choisir un fonctionnement manuel ou automatique. En mode automatique, on affiche sur le pupitre la consigne de hauteur à atteindre, la PC pilote alors chaque moteur des 8 colonnes jusqu'à ce que cette hauteur soit atteinte. Chaque colonne est équipée d'un codeur incrémental informant la PC de la position du chariot de levage de la colonne. Pour un fonctionnement en toute sécurité, il faut assurer une certaine horizontalité du tramway soulevé : l'ensemble des points de levage doit être compris entre deux plans parallèles distants de 20 mm au maximum (coplanéité).

Le développement sous forme de FAST de la fonction principale FP.1 (plus simplement écrite « Soulever un tramway ») est donné ci-après.



**Question 1** Vous ne connaissez pas le diagramme FAST (je le sais). Quel(s) diagramme(s) SysML pourriez-vous utiliser pour remplacer les diagrammes « FAST ».

**Question 2** Réaliser la chaîne fonctionnelle du système de levage étudié.

Corrigé voir 2.

### Exercice 3 – Escalier mécanique\*

A3-01

Pas de corrigé pour cet exercice.

### 1.3.2 Caractériser un constituant de la chaîne d'information

#### Exercice 4 – Le banc balafre \*

A3-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

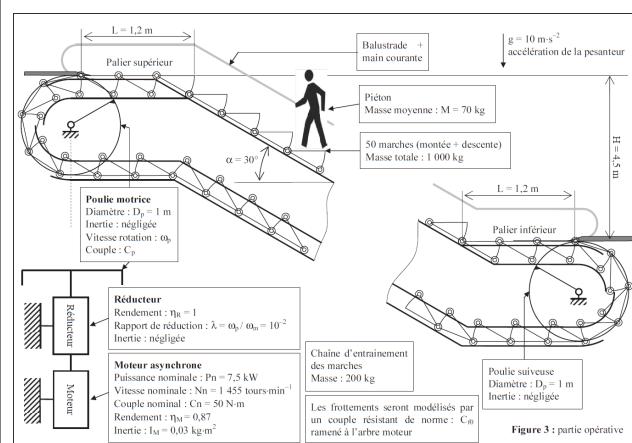
Entre autres contrôles de la chaîne d'acquisition, le superviseur vérifie que la mesure des efforts se fait correctement : au niveau des actionneurs piézoélectriques et au niveau du joint testé. Les capteurs de force utilisés sur le système sont analogiques. Afin de simplifier le traitement et l'interprétation de ces forces, on utilise un amplificateur de charges à plusieurs canaux (voir figure 3.1).

Un escalier mécanique (figure 1), appelé aussi escalier roulant ou Escalator (nom déposé par la société Otis), est un élévateur adapté au transport de personnes. Sa fonction principale est de faciliter le déplacement des piétons entre deux points de différentes hauteurs.

Depuis son invention en 1892 (à New York) par l'américain Jesse W. Reno, le système n'a pas cessé d'évoluer pour s'adapter aux nouvelles contraintes économiques, environnementales et sécuritaires.



L'entraînement du chariot se fait par une vis à filet trapézoïdal, mise en rotation par un moto-réducteur-frein asynchrone. On met en place les colonnes au niveau de la plateforme du tramway à soulever, aux endroits prévus à cet effet.



**Question 1** En analysant le schéma de principe de la figure précédente, proposer une chaîne fonctionnelle de l'escalier mécanique.

Corrigé voir 3.



FIGURE 1.1 – Amplificateur de charge à plusieurs canaux KISTLER.

Cet amplificateur possède deux options qui sont utilisées sur le banc Balafré :

- l'amplificateur de sommation pour le calcul analogique des forces et moments résultants;
- un convertisseur Analogique/Numérique pour faire le traitement des données (algorithme de contrôle).

Dans l'algorithme de contrôle, la valeur d'effort de chaque actionneur est comparée à la valeur théorique de la consigne effectuée pour le contrôle. Si un écart trop grand est constaté, l'algorithme de contrôle émet un signal d'erreur (Controle=2). Pour cette mesure, on considère qu'une résolution inférieure à 10 N est nécessaire. La conversion analogique/numérique se fait ici sur 12 bits. La mesure de l'effort se fait sur la plage de -20 à 20 kN. Les données techniques utiles sont rassemblées sur la figure 2.5.

Le capteur de force (voir figure 2.6) utilisé est un capteur KISTLER 9167A, permettant de mesurer des efforts dans trois directions. Pour la mesure de l'effort développé par les actionneurs, seule la direction Z est utilisée, et la sensibilité du capteur dans cette direction est  $4,2 \text{ pC N}^{-1}$ . Le synoptique de la figure 2.7 présente la structure interne de l'amplificateur de charge.

Ladungsverstärker	Amplificateur de charge	Charge amplifier
Anzahl Messkanäle	Nombr de canaux de mesure	Number of measuring channels
Messbereich	Gamme de mesure	Measuring range
Sensorempfindlichkeit	Sensibilité du capteur	Sensor sensitivity
Massstab	Echelle	Scale
Ausgangsspannung	Tension de sortie	Output voltage
Ausgangstrom (kurzschlussicher)	Courant de sortie (protégé contre les court-circuits)	Output current (short-circuit protected)
Ausgangsimpedanz	Impédance de sortie	Output impedance
Frequenzbereich (-3dB, Filter off)	Gamme de fréquence (-3dB, Filter off)	Frequency band (-3dB, Filter off)
Tiefpassfilter	Filtre passe-bas	Low-pass filter
Balanciert 2-pol., B-stufig 10, 30, 100 ... (-3dB)	Balanciert 2-pôles, à 8 stades 10, 30, 100 ... (-3dB)	Balanciert 2-pôle, 8 stages 10, 30, 100 ... (-3dB)
Zeitkonstante	Constante de temps	Time constant
Hochpassfilter, Medium Short	Filtre passe-haut Long Medium Short	High-pass filter Long Medium Short
Linearität	Linéarité	Linearity
Messfehler	Erreur de mesure	Measuring error
$\pm 99,9 \text{ pC FS}$ $\pm 100 \text{ pC FS}$	$\pm 99,9 \text{ pC FS}$ $\pm 100 \text{ pC FS}$	$\pm 3\%$ $\pm 1\%$
Ausgangsstörsignal	Interférence à la sortie	Output interference
Drift (Leckstrom MOSFET) bei 25 °C	Dérive (courant d'entrée MOSFET) à 25 °C	Drift (input current MOSFET) at 25 °C
		$\text{mV}_{\text{rms}}$ $\text{pC/s}$

FIGURE 1.2 – Amplificateur de charge à plusieurs canaux KISTLER.



Type 9167A... / 9168A...

FIGURE 1.3 – Capteur de force KISTLER 9167A.

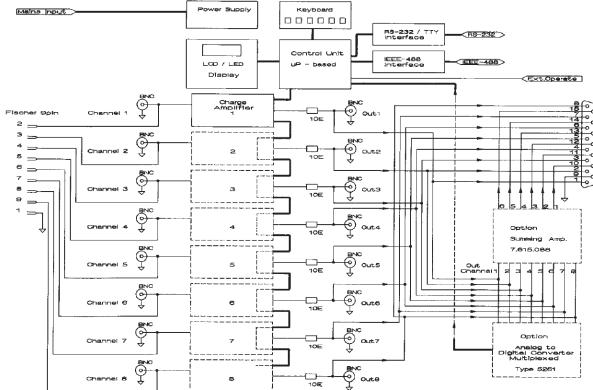


FIGURE 1.4 – Synoptique de la structure interne de l'amplificateur de charge.

**Question 1** Sur le synoptique de la figure 2.7, on peut lire « Analog to Digital Converter Multiplexed ». Que signifie le terme multiplexé utilisé ici ?

**Question 2** Compte tenu de la sensibilité du capteur et de l'étendue des valeurs à mesurer, déterminer la gamme de mesure à régler sur l'amplificateur de charge.

**Question 3** En utilisant la documentation technique de l'amplificateur de charge, déterminer la plage de variation de la tension de sortie de l'amplificateur. En déduire le quantum de la conversion analogique numérique, puis la résolution de la mesure. Conclure vis-à-vis de la résolution demandée.

Corrigé voir 6.

### Exercice 5 – Capteurs \*

#### A3-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Donner le rôle et le principe de fonctionnement (schémas) des capteurs suivants :

- génératrice tachymétrique;
- potentiomètre rotatif;
- codeur incrémental;
- codeur absolu.

Corrigé voir 7.

## 1.4 A4 – Analyser les performances et les écarts

## 1.5 A5 – Analyser un compromis produit-procédés-matériaux

Modéliser

## 1.6 A1 – Analyser les exigences

## 1.7 A2 – Définir les frontières de l'analyse

## 1.8 A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle

### 1.8.1 Caractériser un constituant de la chaîne d'information

#### Exercice 6 – Le banc balafré \*

**A3-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Sur le synoptique de la figure 2.7, on peut lire « Analog to Digital Converter Multiplexed ». Que signifie le terme multiplexé utilisé ici ?

**Question 2** Compte tenu de la sensibilité du capteur et de l'étendue des valeurs à mesurer, déterminer la gamme de mesure à régler sur l'amplificateur de charge.

**Question 3** En utilisant la documentation technique de l'amplificateur de charge, déterminer la plage de variation de la tension de sortie de l'amplificateur. En déduire le quantum de la conversion analogique numérique, puis la résolution de la mesure. Conclure vis-à-vis de la résolution demandée.

#### Exercice 7 – Capteurs \*

**A3-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Donner le rôle et le principe de fonctionnement (schémas) des capteurs suivants :

- génératrice tachymétrique;
- potentiomètre rotatif;
- codeur incrémental;
- codeur absolu.

## 1.9 A4 – Analyser les performances et les écarts

## 1.10 A5 – Analyser un compromis produit-procédés-matériaux

### 1.10.1 Modéliser un convertisseur électromécanique

#### Exercice 8 – Le banc balafré \*

**Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Objectif** L'objectif est de valider les exigences suivantes.

- 1.01 – Couple résistant : le couple résistant exercé par le film d'eau sur le joint (rotor) à  $6000 \text{ tr min}^{-1}$  est estimé à  $C_{\text{res}} = 300 \text{ Nm}$ .
- 1.02 – Vitesse de rotation : la vitesse cible NC (vitesse de rotation du rotor de joint) doit pouvoir être réglée à une valeur choisie entre  $5000 \text{ tr min}^{-1}$  et  $7000 \text{ tr min}^{-1}$ .
- 1.03 – Loi de commande : la mise en rotation doit se faire à accélération constante pendant une durée n'excédant par  $T_{\text{acc}} = 5 \text{ s}$ .

Nous allons modéliser le moteur asynchrone Leroy Somer PLS-280-MP. Ceci va nous permettre de déterminer sa caractéristique de couple. Cette caractéristique sera utilisée dans les parties suivantes et nous permettra dans cette partie de déterminer la fréquence de commande du moteur pour la phase de mesure en régime stationnaire.

Données et hypothèses :

- le réseau d'alimentation électrique fournit une tension  $230/400 \text{ V}$  en  $50 \text{ Hz}$ ;

- la plaque signalétique du moteur est donnée en figure Figure 3.1;
- on négligera les pertes fer et les pertes mécaniques dans le moteur;
- les pertes Joule statoriques sont également négligées.

<b>LEROY SOMER</b>		<b>MOT. 3 ~ PLS 280 MP2 B3</b>	<b>N° 905027 00LC01</b>	<b>kg: 930</b>
<b>IP 23S IK 08</b>	<b>I cl.</b>	<b>F</b>	<b>°C</b>	<b>S</b>
<b>V</b>	<b>Hz</b>	<b>min<sup>-1</sup></b>	<b>kW</b>	<b>% cosφ</b>
400 △	100	5916	132	0.87
MOTEURS LEROY SOMER				<b>d/h</b>
TP111B				232
<b>DE</b>	6014HC5C3		<b>cm<sup>3</sup></b>	
<b>NDE</b>	6014HC5C3		<b>cm<sup>3</sup></b>	

FIGURE 1.5 – Plaque signalétique du moteur PLS-280-MP

**Question 1** En utilisant les informations de la plaque signalétique, montrer que le moteur possède  $p = 1$  paire de pôles.

**Question 2** À partir de la plaque signalétique, en détaillant les calculs, déterminer le glissement en fonctionnement nominal  $g_N$  ainsi que le couple utile nominal  $C_{uN}$ .

On donne sur la figure Figure 2.5 le modèle équivalent ramené au stator d'une phase du moteur.  $L_0$  représente l'inductance de magnétisation et  $L_c$  l'inductance des fuites totales d'une phase (rotorique ramenée au stator et stator). On note  $g$  le glissement. On rappelle que la puissance dissipée dans la résistance  $R/g$  correspond à la puissance transmise du stator au rotor. Cette puissance peut être décomposée en une résistance  $R$  correspondant aux pertes Joule dans le rotor en série avec une résistance  $R(1-g)/g$  correspondant à la puissance électromécanique fournie au rotor.

**R** Ce modèle est celui du bobinage couplé en triangle. La tension  $U_S$  représente la tension entre phases, c'est-à-dire, vue de l'extérieur, la tension composée de valeur nominale 400 V. Le courant  $i_S$  représente le courant dans chaque phase statorique. La notation conventionnelle  $j_S$  pour ce courant n'est pas utilisée ici pour éviter toute confusion avec les notations des nombres complexes.

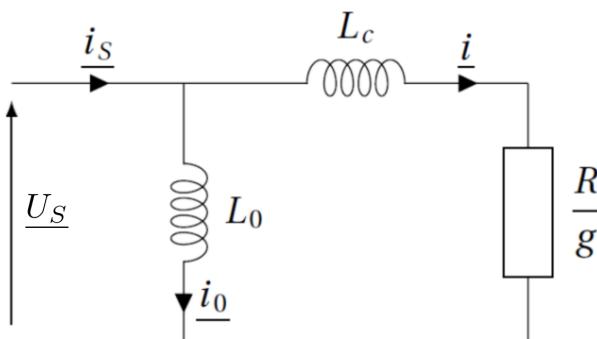


FIGURE 1.6 – Modèle équivalent ramené au stator d'une phase du moteur

**Question 3** Exprimer la puissance électromécanique  $P_{EM}$  fournie au rotor en fonction de  $U_S$  (valeur efficace de la tension  $U_S$ ), de la résistance  $R$ , du glissement  $g$  de l'inductance  $L_c$  et de la pulsation d'alimentation  $\omega$  du moteur.

**Question 4** Exprimer la puissance électromécanique  $P_{EM}$  en fonction du couple électromagnétique  $C_{EM}$  et de la vitesse de rotation  $\Omega$  de l'arbre moteur.

**Question 5** Exprimer la vitesse de rotation  $\Omega$  de l'arbre en fonction du glissement  $g$  et de la vitesse de synchronisme  $\Omega_S$ . En déduire l'expression du couple électromagnétique  $C_{EM}$  en fonction de  $U_S^2$ ,  $\omega$ ,  $g$ ,  $R$ ,  $L_c$ , et  $p$  (le nombre de paires de pôles par phase).

**Question 6** En précisant bien vos hypothèses, justifier que l'expression du couple utile disponible sur l'arbre

$$\text{moteur est } C_u = \frac{3pU_S^2}{\omega} \cdot \frac{\frac{R}{g}}{\left(\frac{R}{g}\right)^2 + (L_c \omega)^2}.$$

À l'aide de cette équation, on obtient la figure Figure 2.6 qui représente l'allure de la courbe de couple en fonction de la vitesse de rotation  $N$  de l'arbre moteur.

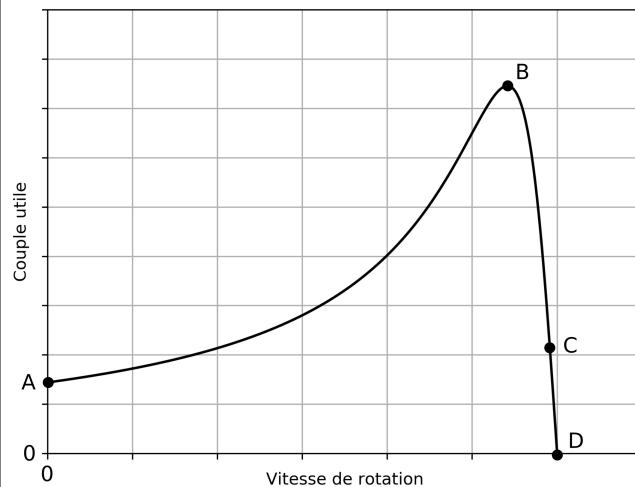


FIGURE 1.7 – Allure de la courbe de couple utile du moteur en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre

**Question 7** À l'aide des points A, B, C et D, identifier sur cette courbe le point de fonctionnement nominal, le démarrage du moteur, le point de synchronisme, la zone de fonctionnement instable du moteur.

Le constructeur précise le rapport du couple maximal sur couple nominal :  $C_M/C_N = 3,5$ . On rappelle que le couple utile est maximal pour une valeur du glissement telle que  $R/g = L_c \omega$ . **Question 8** En déduire l'expression de  $L_c$  en fonction de  $p$ ,  $U_S$ ,  $C_M$  et  $\omega$  et faire l'application numérique.

**Question 9** Que peut-on dire de  $R/g$  par rapport à  $L_c \omega$  au voisinage du point de fonctionnement nominal ? En déduire l'expression de  $R$  en fonction du couple nominal  $C_N$ , du glissement nominal  $g_N$ , de  $p$ ,  $U_S$  et de  $\omega$ .

**R** On fera l'application numérique en prenant  $g_N = 1,4 \times 10^{-2}$  et  $C_N = 213 \text{ Nm}$ .

Le variateur utilisé pour la commande du moteur fonctionne en  $U_S/f$  constant. À l'aide des valeurs calculées précédemment, on a tracé sur la figure Figure 2.7 les courbes de couple utile en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs de fréquence de commande.

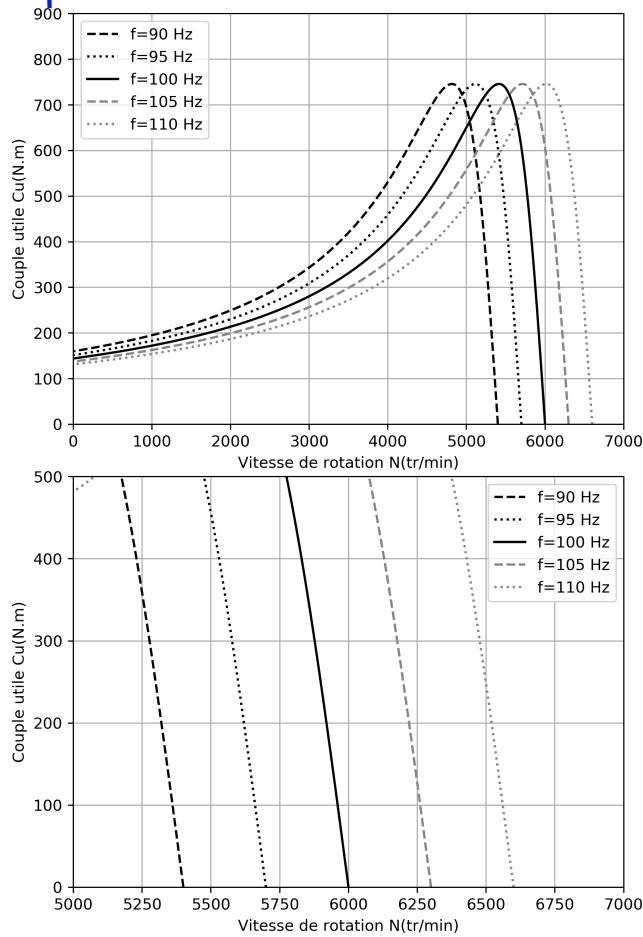
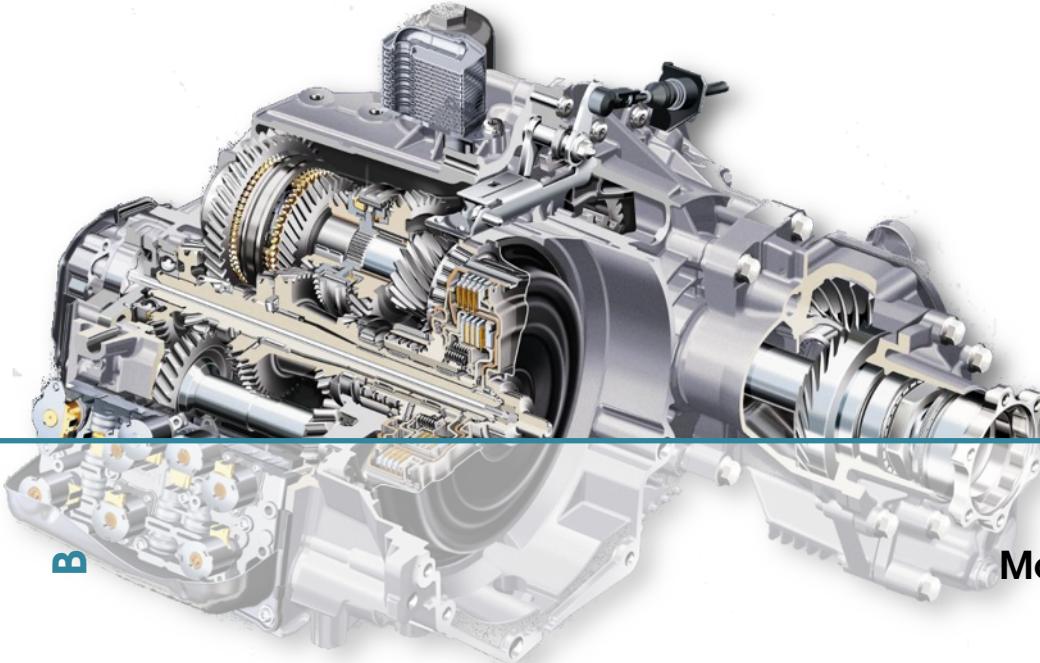


FIGURE 1.8 – Évolution du couple utile en fonction de la vitesse de rotation pour des fréquences de commande de 90 Hz à 110 Hz.

**Question 10** Déterminer quelle fréquence doit être imposée par le variateur pour maintenir une vitesse de  $6000 \text{ tr min}^{-1}$  en présence d'un couple résistant correspondant au couple  $C_{\text{res}} = 300 \text{ Nm}$  défini par l'exigence 1.01 du cahier des charges.

Corrigé voir 164.



B

Sciences

Modéliser | Industrielles de  
l'Ingénieur

PSI\* - MP

## B2

### Proposer un modèle de connaissance et de comportement

<b>2.1</b>	<b>B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser</b>	<b>11</b>
<b>2.2</b>	<b>B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement</b>	<b>11</b>
2.2.1	B2-04 – Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert . . . . .	11
2.2.2	B2-06 – Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle . . . . .	11
2.2.3	B2-07 – Modéliser un système par schéma-blocs. . . . .	12
2.2.4	Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables . . . . .	16
2.2.5	Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique . . . . .	19
2.2.6	B2-13 – Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides	24
2.2.7	Modéliser une action mécanique . . . . .	31
2.2.8	Décrire le comportement d'un système séquentiel . . . . .	34
2.2.9	Modéliser un convertisseur électromécanique . . . . .	35
<b>2.3</b>	<b>B3 – Valider un modèle</b>	<b>37</b>
<b>2.4</b>	<b>B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser</b>	<b>38</b>
<b>2.5</b>	<b>B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement</b>	<b>38</b>
2.5.1	B2-04 – Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert . . . . .	38
2.5.2	B2-06 – Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle . . . . .	39
2.5.3	B2-07 – Modéliser un système par schéma-blocs. . . . .	39
2.5.4	Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables . . . . .	43
2.5.5	Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique . . . . .	44
2.5.6	B2-13 – Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides	50
2.5.7	Modéliser une action mécanique . . . . .	60
2.5.8	Décrire le comportement d'un système séquentiel . . . . .	61
2.5.9	Modéliser un convertisseur électromécanique . . . . .	62
<b>2.6</b>	<b>B3 – Valider un modèle</b>	<b>63</b>

## 2.1 B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser

## 2.2 B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement

### 2.2.1 B2-04 – Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert

#### Exercice 9 – Moteur à courant continu\*

B2-04

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ ;
- $e(t) = K\omega(t)$ ;
- $c(t) = Ki(t)$ ;
- $c(t) - f\omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$ .

**Question 1** Exprimer la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}.$$

**Question 2** Préciser l'ordre et la classe de  $H$ .

**Question 3** Mettre  $H(p)$  sous forme canonique.

**Question 4** Donner les caractéristiques de la fonction de transfert.

**Question 5** Vérifier l'homogénéité des différentes constantes.

Éléments de corrigé :

1.  $H(p) = \frac{K_m}{K_m^2 + (R + Lp)(Jp + f)}$ .
2. Ordre 2, classe 0.
3.  $H(p) = \frac{\frac{K_m}{K_m^2 + Rf}}{1 + \frac{(RJ + Lf)}{K_m^2 + Rf}p + \frac{LJ}{K_m^2 + Rf}p^2}$ .
4.  $K = \frac{K_m}{K_m^2 + Rf}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_m^2 + Rf}{LJ}}$ ,  $\xi = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ(K_m^2 + Rf)}}$ .

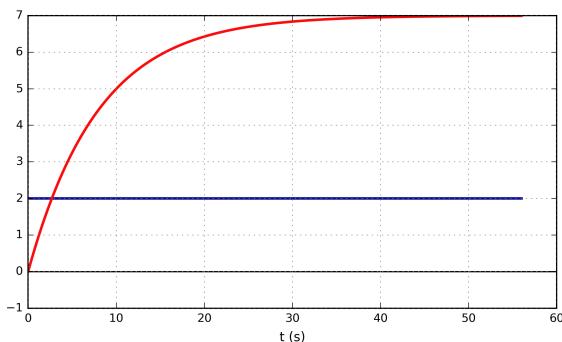
Corrigé voir 87.

### 2.2.2 B2-06 – Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle

#### Exercice 10 – Identification temporelle \*

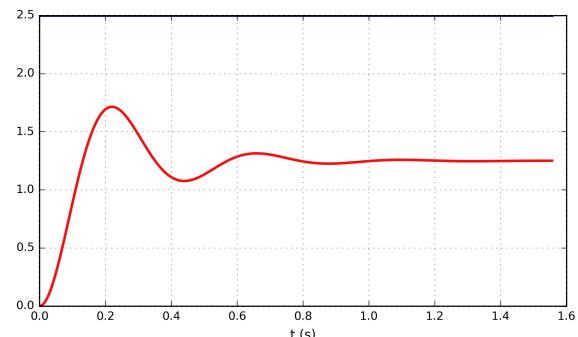
B2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit la réponse à un échelon.



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert du système.

Soit la réponse à un échelon d'amplitude 2,5.



**Question 2** Déterminer la fonction de transfert du système.

Corrigé voir 88.

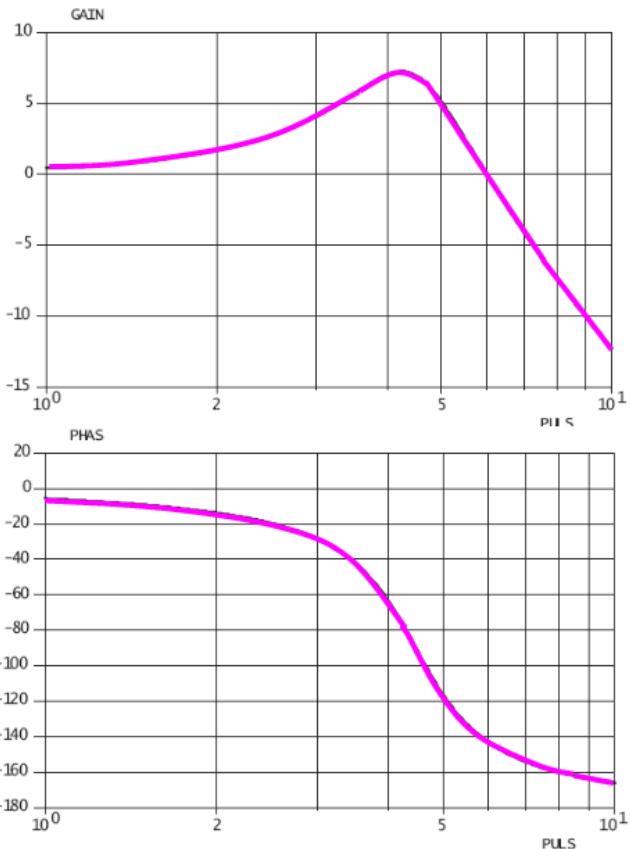
#### Exercice 11 – Identification \*

B2-06

Pas de corrigé pour cet exercice.

D'après Florestan Mathurin.

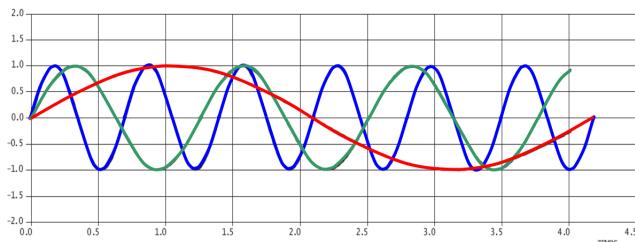
Soit un système dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



**Question 1** Tracer le diagramme de Bode asymptotique.

**Question 2** Identifier le type de la fonction de transfert et ses valeurs remarquables.

Le diagramme temporel ci-dessous présente 3 signaux d'entrée sinusoïdaux.



**Question 3** Déterminer les périodes et les pulsations de chacun des signaux.

**Question 4** En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.

Corrigé voir 89.

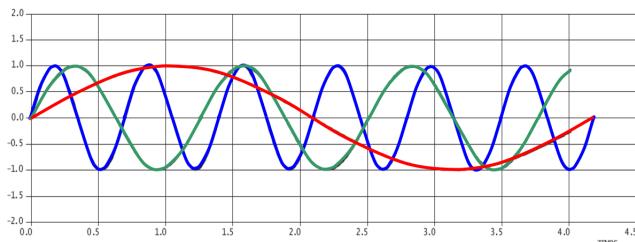
### Exercice 12 – Identification \*

B2-06

Pas de corrigé pour cet exercice.

D'après Florestan Mathurin.

Le diagramme temporel ci-dessous présente 3 signaux d'entrée sinusoïdaux.



**Question 1** Déterminer les périodes et les pulsations de chacun des signaux.

**Question 2** En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.

2.2.3

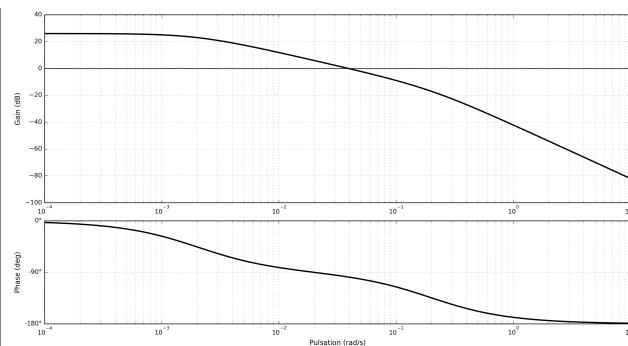
Corrigé voir 90.

### Exercice 13 – Identification \*

B2-06

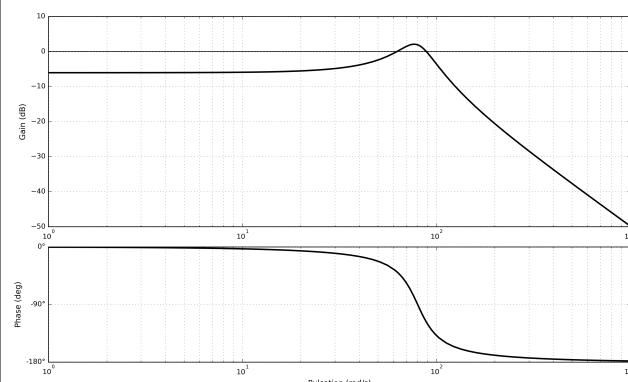
Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit la réponse fréquentielle suivante.



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert du système.

Soit la réponse fréquentielle suivante.



**Question 2** Déterminer la fonction de transfert du système.

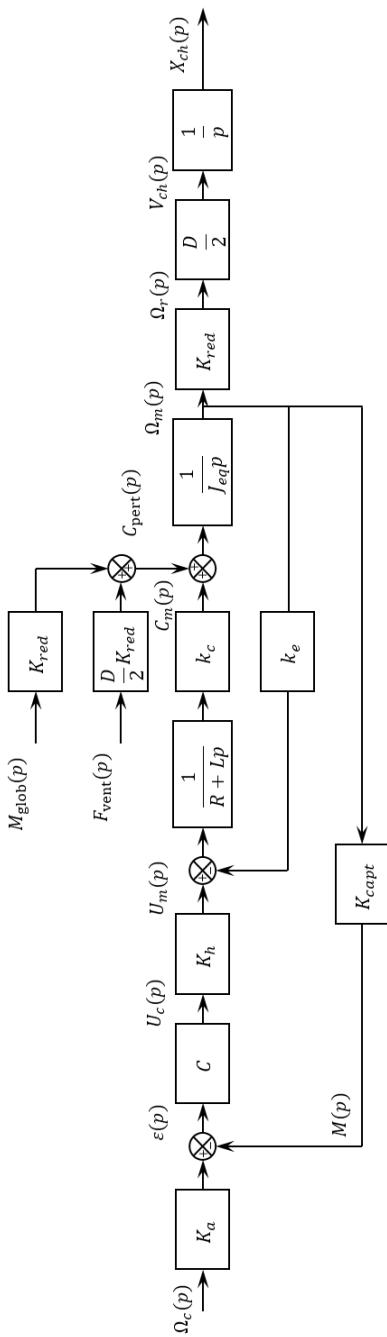
Corrigé voir 91.

### B2-07 – Modéliser un système par schéma-blocs.

### Exercice 14 – La Seine Musicale\*

B2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma-blocs suivant.



**Question 1** En considérant que la perturbation  $C_{pert}(p)$  est nulle, déterminer  $H_f(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$  sous forme canonique.

**Question 2** Exprimer la fonction de transfert  $H_r(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$  en la mettant sous la forme :  $H_r(p) = -\frac{\alpha(1+\tau p)}{1+\gamma p+\delta p^2}$ . Exprimer  $\alpha, \tau, \gamma$  et  $\delta$  en fonction des différents paramètres de l'étude.

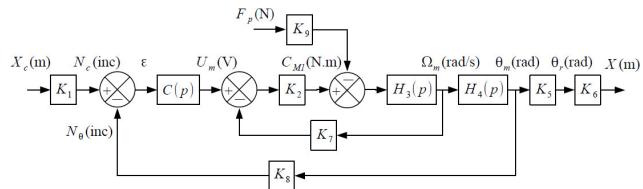
**Question 3** Exprimer  $X_{ch}(p)$  en fonction de  $\Omega_m(p)$  et  $C_{pert}(p)$ .

Corrigé voir 92.

### Exercice 15 – Machine de rééducation SysReeduc \*

#### B2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

On propose une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :  $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$  et  $C_{M1}(t) = k_t i(t)$ .

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

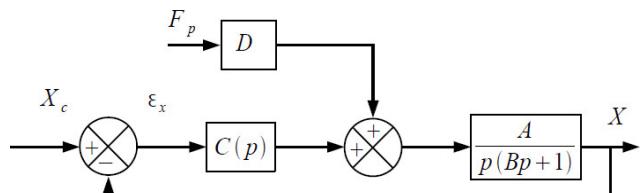
$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec :  $M$  la masse du chariot et  $m$  la masse du support de pied,  $\rho_1 = \frac{1}{10}$  le rapport de réduction du réducteur,  $r = 46,1$  mm le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie,  $C_{M1}(t)$  le couple délivré par le moteur et  $F_p(t)$  l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$  et  $K_9$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera  $A, B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$  et  $K_8$ .

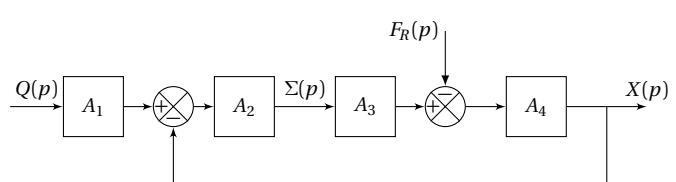


Corrigé voir 93.

### Exercice 16 – Quille pendulaire\*

#### B2-07

Le comportement d'un vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$  (a);
- $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$  (b).

On a :

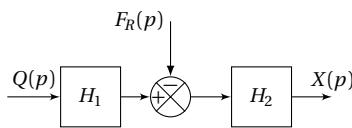
- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$  : débit d'alimentation du vérin [ $m^3 s^{-1}$ ];
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$  : différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$  : position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$  : composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

Les constantes sont les suivantes :

- $S$  : section du vérin [ $m^2$ ];
- $k$  : raideur mécanique du vérin [ $N m^{-1}$ ];
- $V$  : volume d'huile de référence [ $m^3$ ];
- $B$  : coefficient de compressibilité de l'huile [ $N m^{-2}$ ];
- $M$  : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg];
- $\lambda$  : coefficient de frottement visqueux [ $N m^{-1} s$ ].

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

### Question 3

Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

Corrigé voir 93.

## Exercice 17 – Moteur à courant continu\*

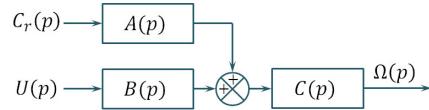
### B2-07

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ ;
- $e(t) = K\omega(t)$ ;
- $c(t) = Ki(t)$ ;
- $c(t) + c_r(t) - f\omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$ .

**Question 1** Réaliser le schéma-blocs.

**Question 2** Mettre le schéma-blocs sous la forme suivante.



Éléments de corrigé :

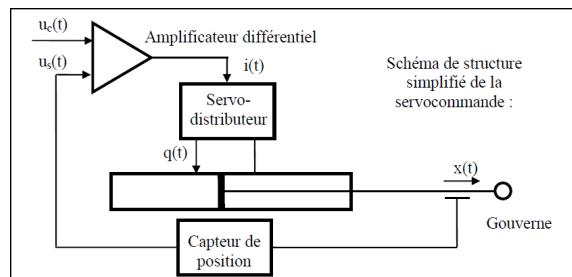
1. .
2.  $A(p) = R + Lp, B(p) = K, C(p) = \frac{1}{K^2 + (f + Jp)(R + Lp)}$   
(plusieurs réponses possibles).

Corrigé voir 95.

## Exercice 18 – Vérin\*

### B2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

On donne le schéma de principe d'une servocommande.



Les différentes équations temporelles qui modélisent le fonctionnement d'une servocommande sont :

- un amplificateur différentiel défini par :  $u_c(t) = \frac{i(t)}{K_a} + u_s(t)$ ;
- débit dans le vérin dans le cas d'une hypothèse de fluide incompressible  $q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt}$ ;
- capteur de position :  $u_s(t) = K_c \cdot x(t)$ ;
- le servo-distributeur est un composant de la chaîne de commande conçu pour fournir un débit hydraulique  $q(t)$  proportionnel au courant de commande  $i(t)$ . (Attention, valable uniquement en régime permanent.) Le constructeur fournit sa fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1 + Tp}$$

où  $K_d$  est le gain du servo-distributeur et  $T$  sa constante de temps.

**Question 1** Réaliser le schéma-blocs.

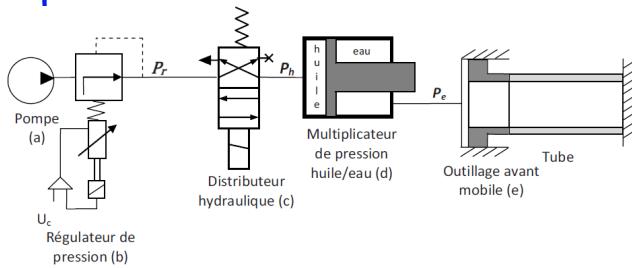
Corrigé voir 96.

## Exercice 19 – Banc d'épreuve hydraulique \*

### B2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

Analyse de la fonction technique « mettre le tube sous pression ».

Un schéma hydraulique simplifié est donné figure suivante.



### Mise en place du modèle

Les équations du débit sont :

$$Q_e(t) = S_e \frac{dz(t)}{dt} - \frac{V_{e0}}{B_e} \frac{dP_e(t)}{dt}$$

et

$$Q_h(t) = S_h \frac{dz(t)}{dt} + \frac{V_{h0}}{B_h} \frac{dP_h(t)}{dt}.$$

En appliquant le théorème de la résultante dynamique selon  $\vec{z}$  sur le piston du multiplicateur, on a :  $M\ddot{z}(t) = S_h p_h(t) - S_e p_e(t) - Mg - f\dot{z}(t)$ .

**Question 1** Démontrer que la relation précédente reliant  $Z(p)$ ,  $P_e(p)$ ,  $P_h(p)$ , et  $Poids(p) = Mg/p$ , transformées de Laplace de  $z(t)$ ,  $P_e(t)$ ,  $P_h(t)$  et du poids perçu comme une perturbation. Les conditions initiales sont supposées nulles.

On note :

- $L(t)$  la position de l'équipage mobile repérée par rapport à sa position initiale;
- $V_t(t)$  le volume du tube;
- $F_t(t)$  l'effort du tube sur l'équipage mobile, avec  $F_t(t) = -rL(t)$ .

On néglige les variations de volume du tube dues à ses déformations. L'équation du débit s'écrit alors :

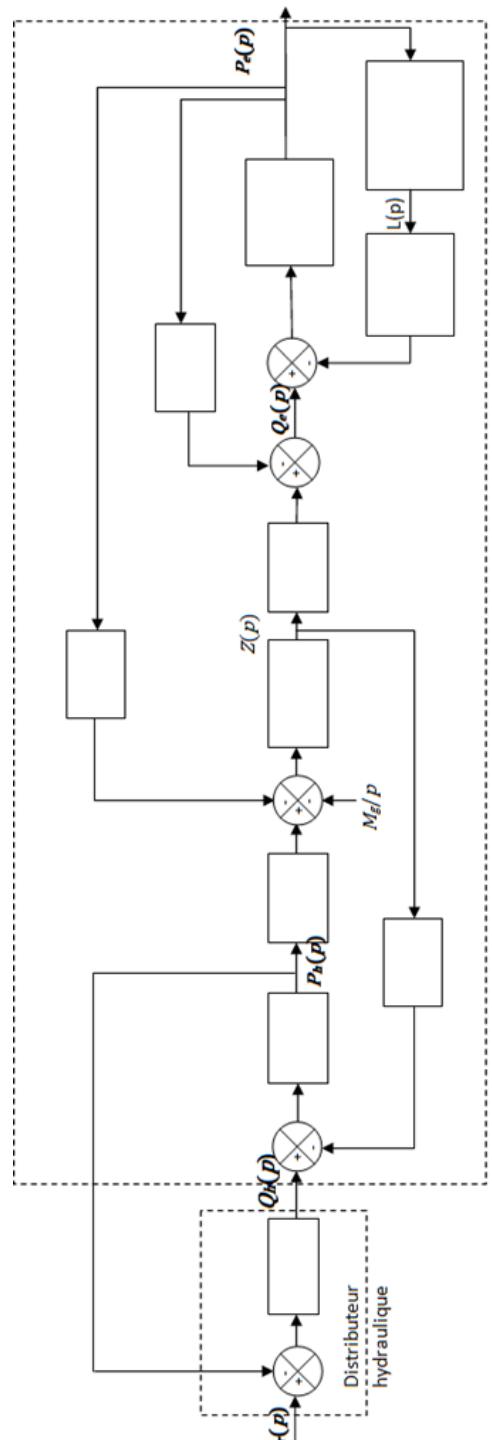
$$Q_e(t) = (S_a - S_b) \frac{dL(t)}{dt} + \frac{V_t}{B_e} \frac{dP_e(t)}{dt}.$$

L'équation du mouvement de l'équipage mobile est donnée par :

$$m\ddot{L}(t) = -rL(t) + (S_a - S_b)p_e(t) - f'L(t).$$

**Question 2** En déduire, en tenant compte de l'équation du débit, deux équations liant  $L(p)$ ,  $P_e(p)$  et  $Q_e(p)$ , transformées de Laplace de  $L(t)$ ,  $P_e(t)$  et  $Q_e(t)$ . Les conditions initiales sont supposées nulles.

**Question 3** Compléter le schéma-blocs de l'ensemble (sans le distributeur hydraulique), l'entrée étant la pression d'huile régulée  $P_r(p)$  et la sortie la pression d'épreuve dans le tube  $P_e(p)$ .



Zone à compléter

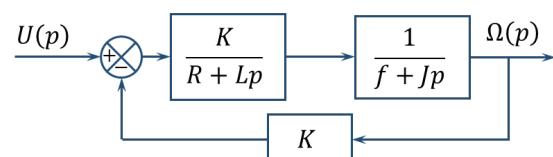
Corrigé voir 96.

### Exercice 20 – Fonctions de transfert\*

B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma-blocs suivant.



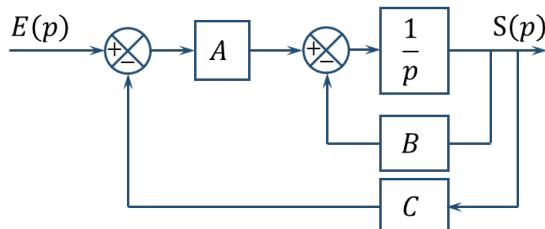
**Question 1** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique

et exprimer les paramètres caractéristiques.

Corrigé voir 100.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Soit le schéma-blocs suivant.



**Question 3** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramétrés caractéristiques.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramétrés caractéristiques.

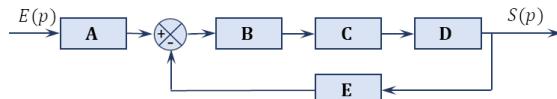
Corrigé voir 98.

### Exercice 21 – Calcul de FTBO\*

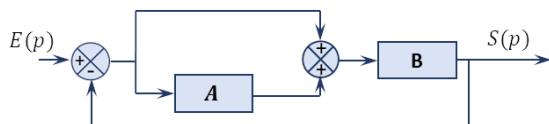
B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

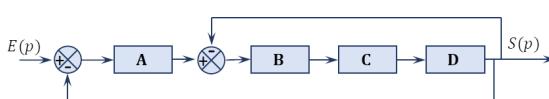


**Question 2** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

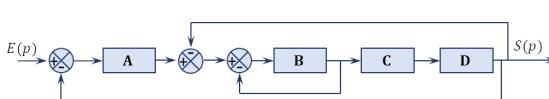


**Question 3** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

2.2.4



**Question 4** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

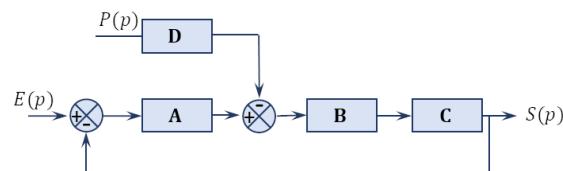


### Exercice 22 – Calcul de FTBO\*

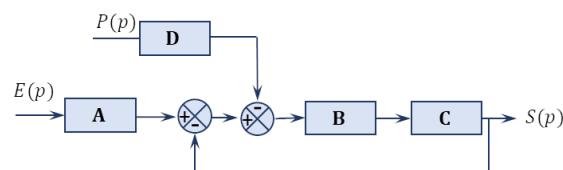
B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

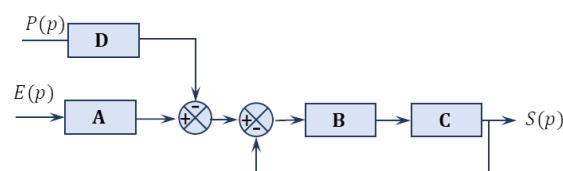
**Question 1** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



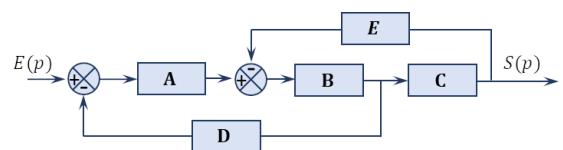
**Question 2** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



**Question 3** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



**Question 4** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



Corrigé voir 100.

Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables

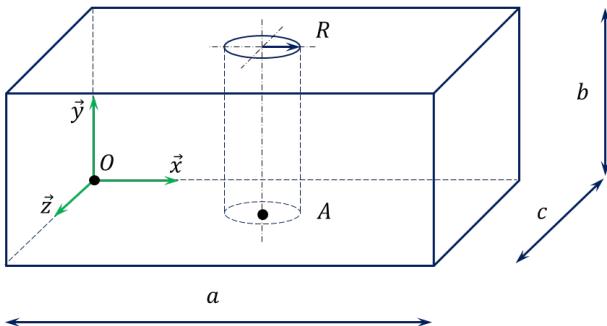
### Exercice 23 – Parallélépipède\*

B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$  avec  $A = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right)$  et  $C = m\frac{R^2}{2}$ .

La matrice d'inertie d'un parallélépipède de cotés  $a$ ,  $b$  et  $c$  et de masse  $m$  est donnée en son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec  $A = m \frac{b^2 + c^2}{12}$ ,  $B = m \frac{a^2 + c^2}{12}$ ,  $C = m \frac{a^2 + b^2}{12}$ .

Soit la pièce suivante.



On pose  $\overrightarrow{OA} = \frac{a}{2} \vec{x} + \frac{c}{2} \vec{z}$ .

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$ , en  $A$  puis  $O$ .

Corrigé voir 101.

### Exercice 24 – Parallélépipède percé\*

**B2-10** Pas de corrigé pour cet exercice.

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de masse  $m$  est donnée en

son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

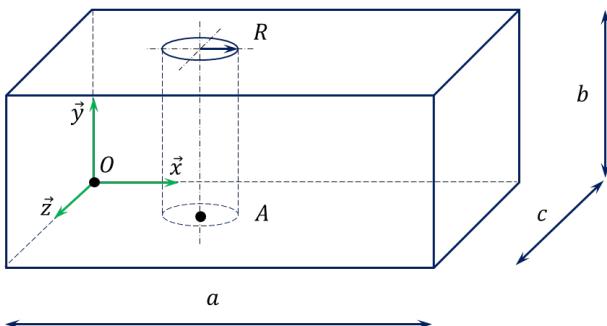
$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

La matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle de cotés  $a$ ,  $b$  et  $c$  et de masse  $m$  est donnée en son

centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \frac{b^2 + c^2}{12}, B = m \frac{a^2 + c^2}{12}, C = m \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Soit la pièce suivante.



On pose  $\overrightarrow{OA} = \frac{a}{3} \vec{x} + \frac{c}{2} \vec{z}$ .

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$ , en  $A$  puis  $O$ .

Corrigé voir 102.

### Exercice 25 – Cylindre percé \*

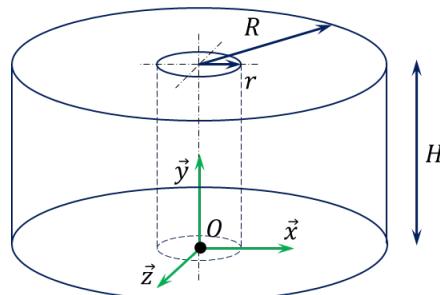
**B2-10** Pas de corrigé pour cet exercice.

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de masse  $m$  est donnée en

son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

Soit la pièce suivante.



$$\text{On pose } \overrightarrow{OA} = -\frac{R}{2} \vec{x}.$$

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$  puis en  $O$ .

Corrigé voir 103.

### Exercice 26 – Cylindre percé \*

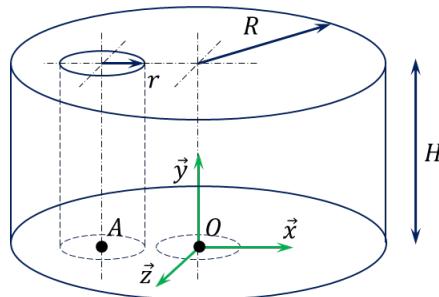
**B2-10** Pas de corrigé pour cet exercice.

La matrice d'inertie d'un cylindre d'axe  $(G, \vec{k})$  de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  et de masse  $m$  est donnée en

son centre d'inertie par  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  avec

$$A = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \text{ et } C = m \frac{R^2}{2}.$$

Soit la pièce suivante.



**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

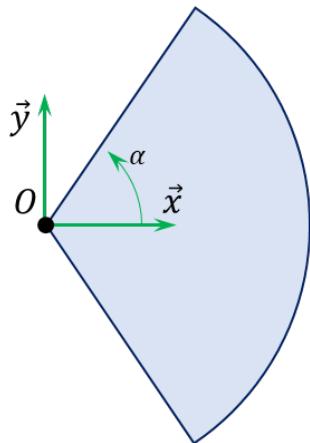
**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$  puis en  $O$ .

Corrigé voir 104.

### Exercice 27 – Disque \*\*

**B2-10** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit un secteur de disque de rayon  $R$ , d'épaisseur négligeable et de masse surfacique  $\mu$ .



**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

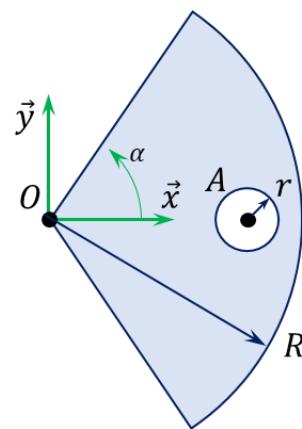
**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $O$ .

Corrigé voir 105.

### Exercice 28 – Disque \*\*

**B2-10** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit un secteur de disque de rayon  $R$ , d'épaisseur négligeable et de masse surfacique  $\mu$ . Il est percé d'un trou de rayon  $r$  tel que  $\overrightarrow{OA} = \frac{3}{4}R\overrightarrow{x}$ .



**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

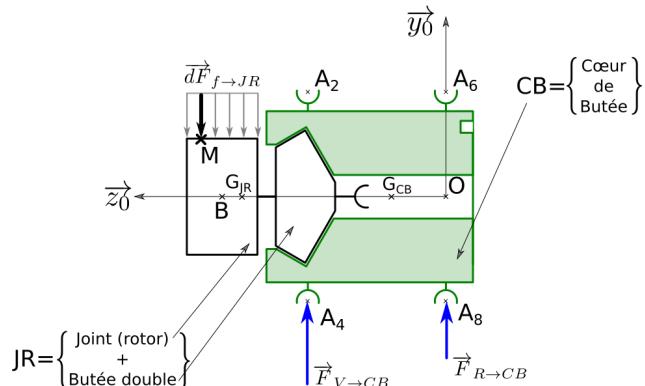
**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $O$ .

Corrigé voir 106.

### Exercice 29 – Banc Balafre \*

**B2-10** Pas de corrigé pour cet exercice.

La figure suivante représente le paramétrage permettant de modéliser les actions mécaniques s'exerçant sur l'ensemble  $S = \{JR + CB\}$ . On nommera  $G$  le centre d'inertie de l'ensemble  $S$ .



#### Données et hypothèses

- On note  $\overrightarrow{BM} = z\overrightarrow{z_0} + R_j\overrightarrow{u}(\theta)$  où  $R_j$  est le rayon du joint avec  $R_j = 175$  mm;
- la longueur du joint est  $L_j = 150$  mm. La position du point  $B$ , centre du joint est  $\overrightarrow{OB} = z_B\overrightarrow{z_0}$  avec  $z_B = 425$  mm;
- Le coeur de butée a une masse  $M_{CB} = 40$  kg et la position de son centre d'inertie  $G_{CB}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB}\overrightarrow{z_0}$  avec  $L_{CB} = 193$  mm;
- L'ensemble  $JR = \{\text{Joint(rotor)} + \text{Butée double}\}$  a une masse  $M_{JR} = 100$  kg et la position de son centre d'inertie  $G_{JR}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{JR}} = L_{JR}\overrightarrow{z_0}$  avec  $L_{JR} = 390$  mm. On notera  $I_{G_{JR}}(JR) = \begin{pmatrix} A_{JR} & -F_{JR} & -E_{JR} \\ -F_{JR} & B_{JR} & -D_{JR} \\ -E_{JR} & -D_{JR} & C_{JR} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{JR}}$  la matrice d'inertie de

- l'ensemble  $JR$  au point  $G_{JR}$  exprimée dans une base  $\mathcal{B}_{JR} = (\vec{x}_{JR}, \vec{y}_{JR}, \vec{z}_0)$  liée à  $JR$ ;
- Les positions des points  $A_4$  et  $A_8$  sont paramétrées par  $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \vec{z}_0 - R_{CB} \vec{y}_0$  et  $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \vec{y}_0$  avec  $z_4 = 280\text{ mm}$  et  $R_{CB} = 150\text{ mm}$ .

**Question 1** Déterminer l'expression de la coordonnée  $z_G$  de  $\overrightarrow{OG}$  selon  $\vec{z}_0$ . Faire l'application numérique.

**Question 2** Sachant que l'ensemble  $JR$  possède une symétrie de révolution par rapport à  $(O, \vec{z}_0)$ , simplifier la matrice d'inertie  $I_{G_{JR}}(JR)$ .

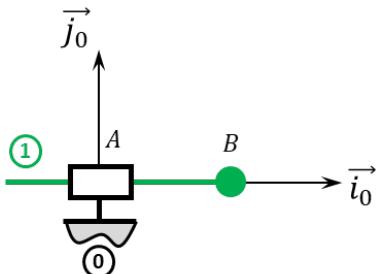
Corrigé voir 107.

### 2.2.5 Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique

#### Exercice 30 – Mouvement T – \*

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On note  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\lambda = 10\text{ mm}$ .

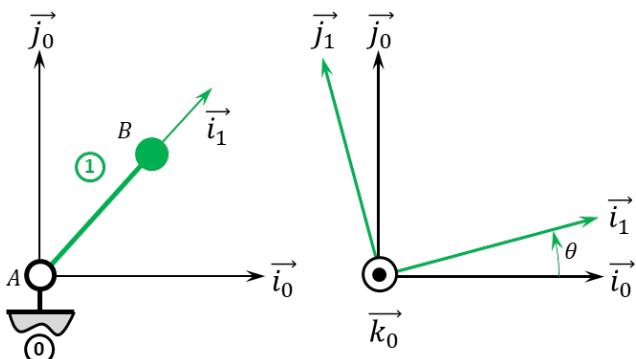
**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\lambda = -20\text{ mm}$ .

Corrigé voir 108.

#### Exercice 31 – Mouvement R \*

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20\text{ mm}$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ .

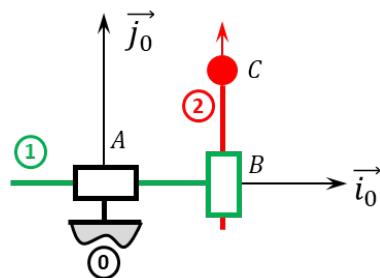
**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \pi \text{ rad}$ .

Corrigé voir 109.

#### Exercice 32 – Mouvement TT – \*

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On note  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\lambda = 10\text{ mm}$  et  $\mu = 10\text{ mm}$ .

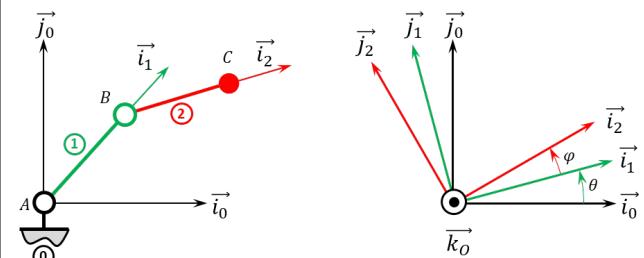
**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\lambda = 20\text{ mm}$  et  $\mu = 10\text{ mm}$ .

Corrigé voir 110.

#### Exercice 33 – Mouvement RR \*

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20\text{ mm}$  et  $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$  avec  $L = 15\text{ mm}$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$  et  $\varphi = \pi \text{ rad}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$  et  $\varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ .

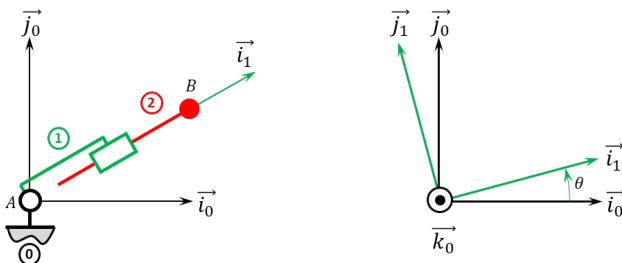
**Question 4** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  rad et  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$  rad.

Corrigé voir 111.

### Exercice 34 – Mouvement RT \*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_1}$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  rad et  $\lambda(t) = 20$  mm.

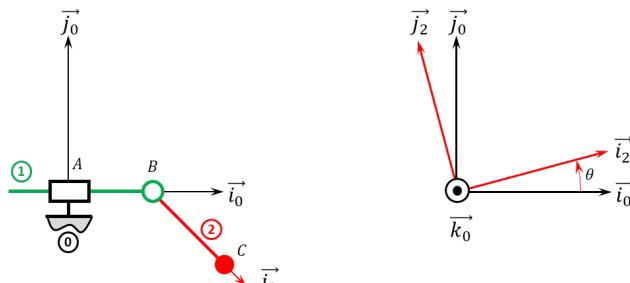
**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  rad et  $\lambda(t) = -20$  mm.

Corrigé voir 112.

### Exercice 35 – Mouvement RT \*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_0}$  et  $\overrightarrow{BC} = R \overrightarrow{i_2}$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  rad et  $\lambda(t) = 20$  mm.

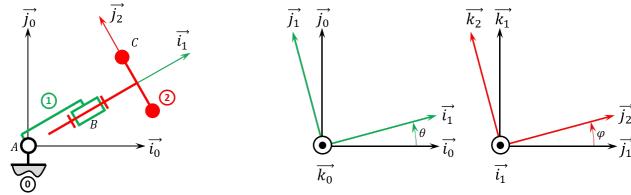
**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  rad et  $\lambda(t) = -20$  mm.

Corrigé voir 113.

### Exercice 36 – Mouvement RR 3D \*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \overrightarrow{i_1}$  et  $\overrightarrow{BC} = \ell \overrightarrow{i_2} + r \overrightarrow{j_2}$ . On note  $R + \ell = L = 20$  mm et  $r = 10$  mm.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

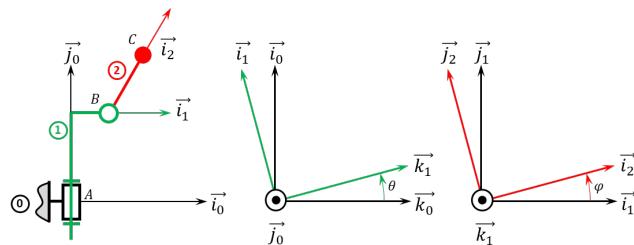
**Question 2** Retracer le schéma cinématique en 3D pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$  rad et  $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}$  rad.

Corrigé voir 114.

### Exercice 37 – Mouvement RR 3D \*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = H \overrightarrow{j_1} + R \overrightarrow{i_1}$  et  $\overrightarrow{BC} = L \overrightarrow{i_2}$ . On a  $H = 20$  mm,  $r = 5$  mm,  $L = 10$  mm.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

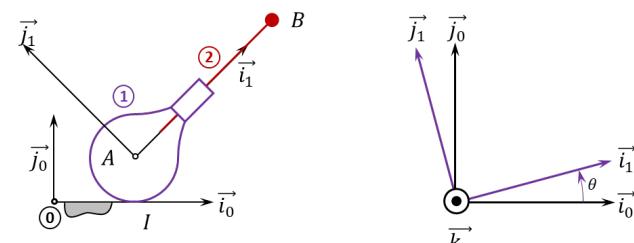
**Question 2** Retracer le schéma cinématique en 3D pour  $\theta(t) = \pi$  rad et  $\varphi(t) = -\frac{\pi}{4}$  rad.

Corrigé voir 115.

### Exercice 38 – Mouvement RT – RSG \*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{IA} = R \overrightarrow{j_0}$  et  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_1}$ . De plus  $R = 15$  mm.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0$  rad et  $\lambda(t) = 20$  mm. On notera  $I_1$  le point de contact entre  $\mathbf{0}$  et  $\mathbf{I}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$  rad et  $\lambda(t) = 30$  mm. On notera  $I_2$  le point de

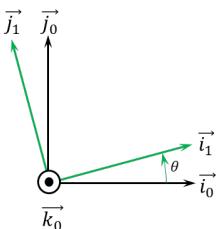
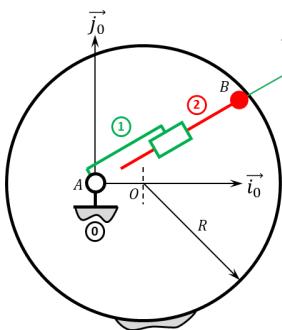
contact entre **0** et **1**. On précisera la position des points  $I_{0,0}$  et  $I_{0,1}$ , points résultants de la rupture de contact lors du passage de  $\theta(t)$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

Corrigé voir 116.

### Exercice 39 – Pompe à palettes \*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AO} = e \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus  $e = 10 \text{ mm}$  et  $R = 20 \text{ mm}$ . Le contact entre **0** et **2** en **B** est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0 \text{ rad}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \pi \text{ rad}$ .

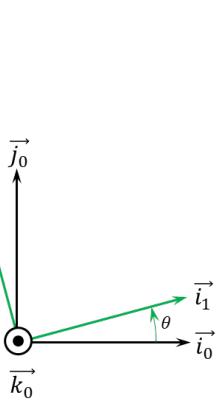
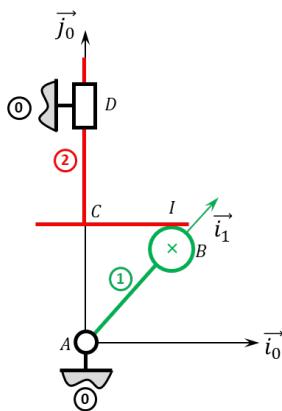
**Question 4** En déduire la course de la pièce **2**.

Corrigé voir 117.

### Exercice 40 – Pompe à pistons radiaux \*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = e \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BI} = R \vec{j}_0$ . De plus,  $e = 10 \text{ mm}$  et  $R = 20 \text{ mm}$ . Le contact entre **1** et **2** en **B** est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre **0** et **2**.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0 \text{ rad}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

**Question 4** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

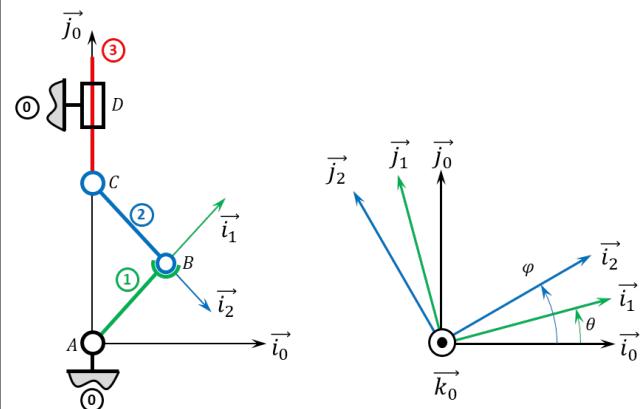
**Question 5** En déduire la course de la pièce **2**.

Corrigé voir 118.

### Exercice 41 – Système bielle manivelle \*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{CB} = L \vec{i}_2$ . De plus,  $R = 10 \text{ mm}$  et  $L = 20 \text{ mm}$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

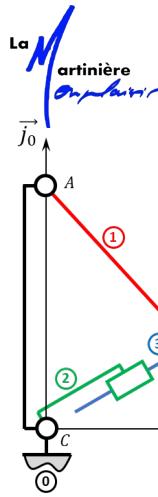
**Question 4** En déduire la course de la pièce **3**.

Corrigé voir 119.

### Exercice 42 – Système de transformation de mouvement \*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{CA} = H \vec{j}_0$ . De plus,  $R = 30 \text{ mm}$  et  $H = 40 \text{ mm}$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$  rad.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0$  rad.

**Question 4** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = -\frac{\pi}{2}$  rad.

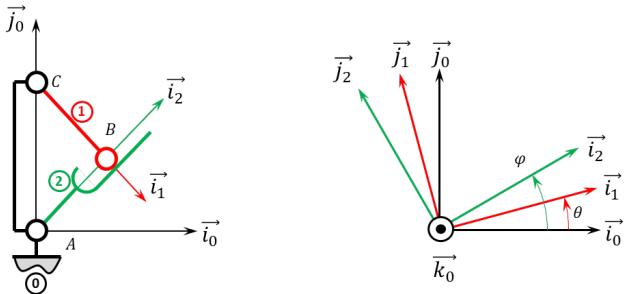
**Question 5** En déduire la course de la pièce 3.

Corrigé voir 120.

### Exercice 43 – Barrière Sympact \*\*

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = H \overrightarrow{j_0}$  et  $\overrightarrow{CB} = R \overrightarrow{i_1}$ . De plus,  $H = 120$  mm et  $R = 40$  mm.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$  rad.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 75^\circ$ .

**Question 4** Dans l'hypothèse où la pièce 1 peut faire des tours complets, quelle doit être la longueur minimale de la pièce 2.

**Question 5** Dans l'hypothèse où la pièce 2 fait 12 cm, quel sera le débattement maximal de la pièce 1.

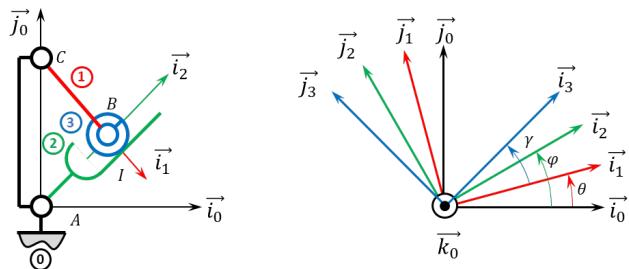
Indications :

1. .
2. .
3. .
4. 160 mm.
5. 160,8°.

Corrigé voir 151.

### Exercice 44 – Barrière Sympact \*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice. Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = H \overrightarrow{j_0}$  et  $\overrightarrow{CB} = R \overrightarrow{i_1}$ . De plus,  $H = 120$  mm,  $R = 40$  mm  $BI = 10$  mm.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$  rad.

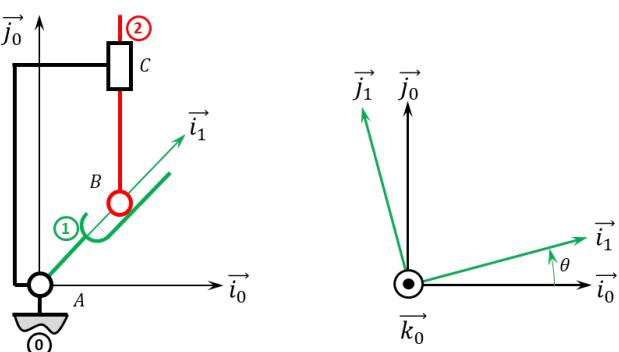
**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = -\frac{\pi}{2}$  rad.

Corrigé voir 151.

### Exercice 45 – Poussoir \*\*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = L \overrightarrow{i_0} + H \overrightarrow{j_0}$ . De plus,  $H = 120$  mm,  $L = 40$  mm.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{4}$  rad.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = -\frac{\pi}{4}$  rad.

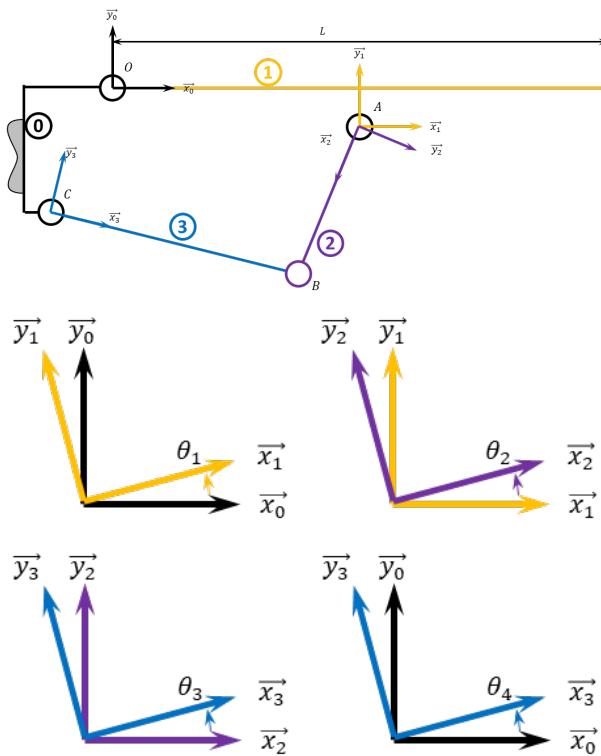
Corrigé voir 123.

### Exercice 46 – Système 4 barres \*\*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

On a :

- $\overrightarrow{OA} = a \overrightarrow{x_1} - f \overrightarrow{y_1}$  avec  $a = 355$  mm et  $f = 13$  mm;
- $\overrightarrow{AB} = b \overrightarrow{x_2}$  avec  $b = 280$  mm;
- $\overrightarrow{BC} = -c \overrightarrow{x_3}$  avec  $c = 280$  mm;
- $\overrightarrow{OC} = -d \overrightarrow{x_0} - e \overrightarrow{y_0}$  avec  $d = 89,5$  mm et  $e = 160$  mm;



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta_1(t) = 0$  rad.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta_1(t) = -\frac{\pi}{2}$  rad.

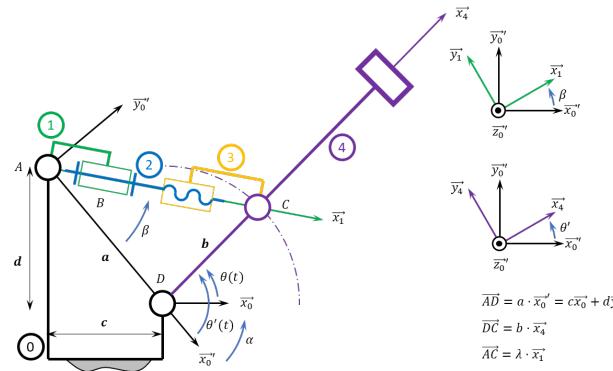
**Question 4** En déduire la course angulaire ( $\theta_4$ ) de la pièce 3.

Corrigé voir 124.

### Exercice 47 – Maxpid \*\*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs  $a = 107,1$  mm,  $b = 80$  mm,  $c = 70$  mm,  $d = 80$  mm. Le pas de la vis est de 4 mm.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0$  rad.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$  rad.

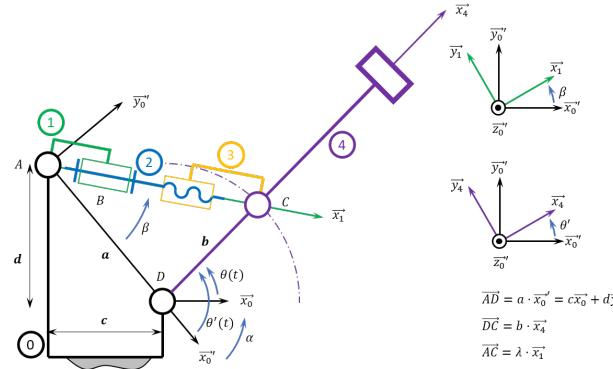
**Question 4** En déduire la course de  $\lambda$ .

Corrigé voir 126.

### Exercice 48 – Maxpid \*\*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs  $a = 107,1$  mm,  $b = 80$  mm,  $c = 70$  mm,  $d = 80$  mm. Le pas de la vis est de 4 mm.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0$  rad.

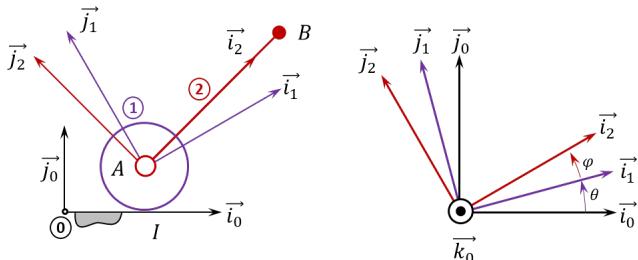
**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$  rad.

**Question 4** En déduire la course de  $\lambda$ .

Corrigé voir 126.

**Exercice 49 – Mouvement RR – RSG \*\***
**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{IA} = R \vec{j}_0$  et  $\vec{AB} = L \vec{i}_1$ . De plus  $R = 15 \text{ mm}$ .


**2.2.6**
**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0 \text{ rad}$  et  $\varphi(t) = 0 \text{ rad}$ . On notera  $I_0$  le point de contact entre **0** et **1**.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  et  $\varphi(t) = 0 \text{ rad}$ . On notera  $I_1$  le point de contact entre **0** et **1**. On précisera la position des points  $I_{0,0}$  et  $I_{0,1}$ , points résultants de la rupture de contact lors du passage de  $\theta(t)$  de  $0$  à  $\frac{\pi}{2}$ .

**Question 4** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  et  $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

Corrigé voir 127.

**Exercice 50 – Tabouret \*\***
**B2-12**

Pas de corrigé pour cet exercice.


**Question 1** Proposer un schéma cinématique permettant de modéliser la liaison entre l'assise et le sol.

Corrigé voir 128.

**Exercice 51 – Tabouret \*\***
**B2-12**

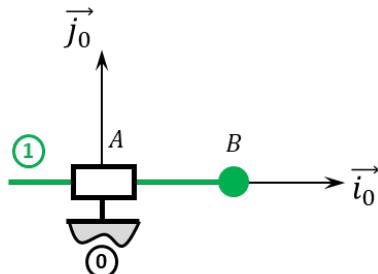
Pas de corrigé pour cet exercice.


**Question 1** Proposer 3 schémas cinématiques permettant de modéliser les contacts entre le sol et le tabouret.

Corrigé voir 129.

**B2-13 – Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides**
**Exercice 52 – Mouvement T – \***
**C2-05**
**B2-13**

Soit le mécanisme suivant. On note  $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ .


**Question 1** Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.

**Question 2** Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **1** par rapport à **0**.

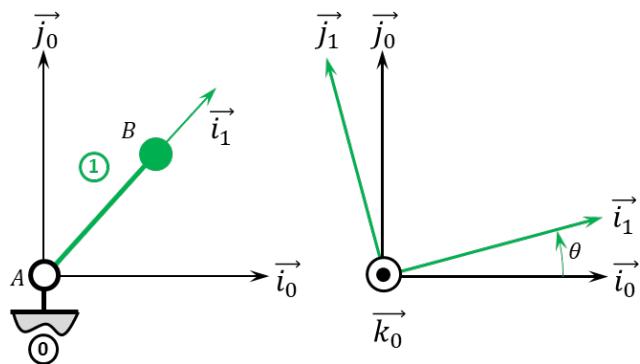
Indications :

- 1.
2.  $x_B(t) = \lambda(t)$ .

Corrigé voir 130.

**Exercice 53 – Mouvement R \***
**C2-05**
**B2-13**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20 \text{ mm}$ .



**Question 1** Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.

Corrigé voir 132.

**Question 2** Quelle est la trajectoire du point **B** appartenant à **1** par rapport à **0**.

**Question 3** Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **1** par rapport à **0**.

Indications :

1. .
2. .
3.  $x_B(t) = R \cos \theta(t)$  et  $y_B(t) = R \sin \theta(t)$ .

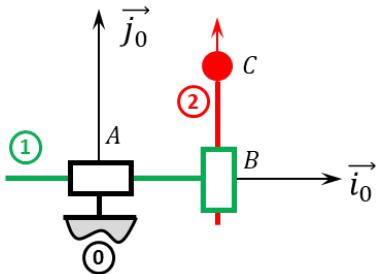
Corrigé voir 139.

### Exercice 54 – Mouvement TT – \*

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$ .



**Question 1** Quel est le mouvement de **2** par rapport à **0**.

**Question 2** Donner l'équation du mouvement du point **C** dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.

On souhaite que le point **C** réalise un cercle de centre **A** et de rayon  $R = 10\text{ cm}$  à la vitesse  $v = 0,01\text{ m s}^{-1}$ .

**Question 3** Donner la relation liant  $\theta(t)$ ,  $v$  et  $R$ .

Par ailleurs la vitesse du point **C** est donnée par  $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ .

**Question 4** Donner les expressions de  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$  permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de  $v$ ,  $R$  et du temps.

**Question 5** En utilisant Python, tracer  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$  et la trajectoire générée.

Indications :

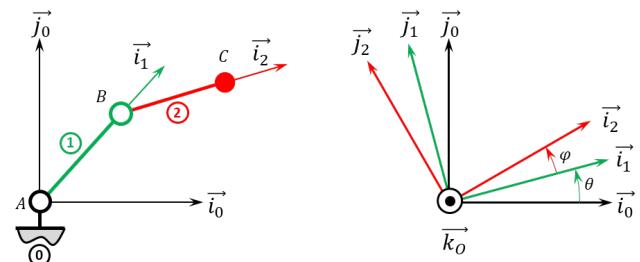
1. .
2.  $x_C(t) = \lambda(t)$  et  $y_C(t) = \mu(t)$ .
3.  $\theta(t) = \frac{v}{R} t$ .
4.  $\lambda(t) = R \cos\left(\frac{v}{R} t\right)$ ,  $\mu(t) = R \sin\left(\frac{v}{R} t\right)$ .
5. .

### Exercice 55 – Mouvement RR \*

C2-05

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20\text{ mm}$  et  $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$  avec  $L = 15\text{ mm}$ .



**Question 1** Donner l'ensemble des positions accessibles par le point **C**.

**Question 2** Donner l'équation du mouvement du point **C** dans son mouvement de **2** par rapport à **0**.

On souhaite que le point **C** réalise un segment entre les points  $[-25, 25]$  et  $[25, 25]$  à la vitesse linéaire  $v$ .

**Question 3** Donner la durée du mouvement si **C** se déplace à vitesse quelconque.

**Question 4** Donner l'équation paramétrique que doit suivre le point **C**.

**Question 5** Donner les expressions de  $\theta(t)$  et  $\varphi(t)$  permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse  $v = 0,01\text{ m s}^{-1}$ .

**Question 6** En utilisant Python, tracer  $\theta(t)$ ,  $\varphi(t)$  et la trajectoire générée.

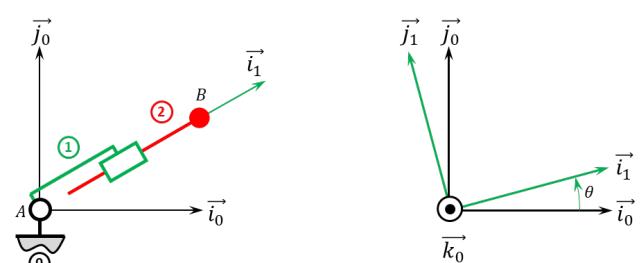
Corrigé voir 133.

### Exercice 56 – Mouvement RT \*

C2-05

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ .



**Question 1** Donner l'ensemble des positions accessibles par le point B.

**Question 2** Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point B dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point B réalise un segment entre les points  $[-25, 25]$  et  $[25, 25]$ .

**Question 3** Donner les expressions de  $\theta(t)$  et  $\lambda(t)$  permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse  $v = 0,01 \text{ m s}^{-1}$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\theta(t)$ ,  $\lambda(t)$  et la trajectoire générée.

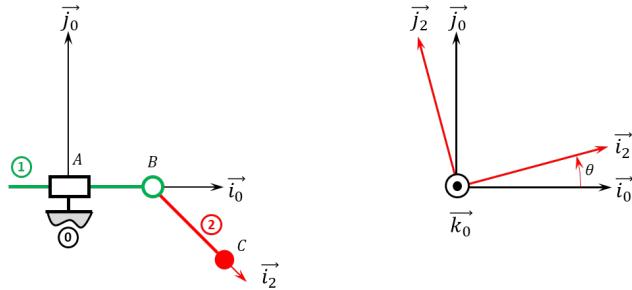
Corrigé voir 134.

### Exercice 57 – Mouvement RT \*

C2-05

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{BC} = R \vec{i}_2$  avec  $R = 30 \text{ mm}$ .



**Question 1** Donner l'ensemble des positions accessibles par le point B.

**Question 2** Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point B dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point B réalise un segment entre les points  $[-25, 25]$  et  $[25, 25]$ .

**Question 3** Donner les expressions de  $\theta(t)$  et  $\lambda(t)$  permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse  $v = 0,01 \text{ m s}^{-1}$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\theta(t)$ ,  $\lambda(t)$  et la trajectoire générée.

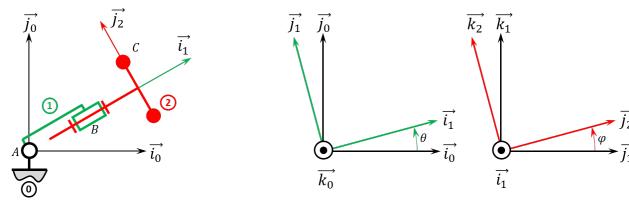
Corrigé voir 135.

### Exercice 58 – Mouvement RR 3D \*\*

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = \ell \vec{i}_2 + r \vec{j}_2$ . On note  $R + \ell = L = 20 \text{ mm}$  et  $r = 10 \text{ mm}$ .



**Question 1** Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.

**Question 2** Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

Indications :

1. .
2.  $x_C(t) = (R + \ell) \cos \theta - r \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y_C(t) = (R + \ell) \sin \theta + r \cos \varphi \cos \theta$ ,  $z_C(t) = r \sin \varphi$ .

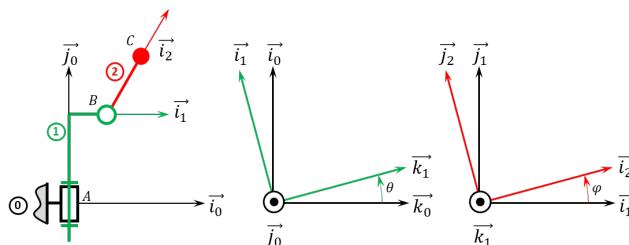
Corrigé voir 136.

### Exercice 59 – Mouvement RR 3D \*\*

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ . On a  $H = 20 \text{ mm}$ ,  $R = 20 \text{ mm}$ ,  $L = 10 \text{ mm}$ .



**Question 1** Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.

**Question 2** Donner l'équation de mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

Indications

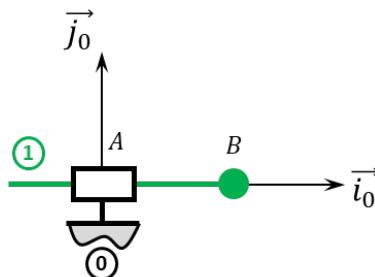
1. Tore.
2.  $x_C(t) = R \cos \theta + L \cos \varphi \cos \theta$ ,  $y_C(t) = H + L \sin \varphi$ ,  $z_C(t) = -R \sin \theta - L \cos \varphi \sin \theta$ .

Corrigé voir 145.

### Exercice 60 – Mouvement T – \*

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ .



**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  au point B.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$ .

Indications :

$$1. \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$$

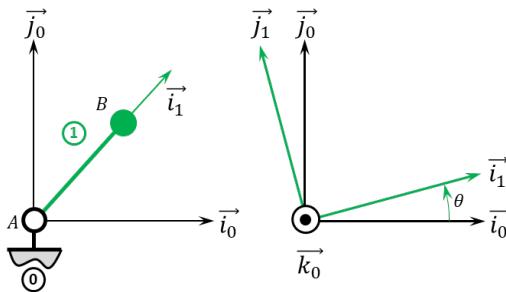
$$2. \overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0.$$

Corrigé voir 138.

### Exercice 61 – Mouvement R \*

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20 \text{ mm}$ .



**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(B,1/0)}$  par dérivation vectorielle.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(B,1/0)}$  par une autre méthode.

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  au point B.

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)}$ .

Indications :

$$1. \overrightarrow{V(B,1/0)} = R \dot{\theta} \vec{j}_1.$$

$$2. \overrightarrow{V(B,1/0)} = R \dot{\theta} \vec{j}_1.$$

$$3. \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B$$

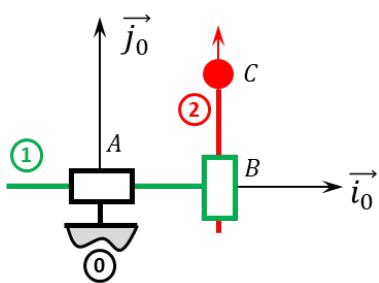
$$4. \overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = R \ddot{\theta} \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{i}_1.$$

Corrigé voir 139.

### Exercice 62 – Mouvement TT – \*

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$ .



**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(C,2/0)}$  par dérivation vectorielle ou par composition.

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$ .

Indications :

$$1. \overrightarrow{V(C,2/0)} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0.$$

$$2. \{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$$

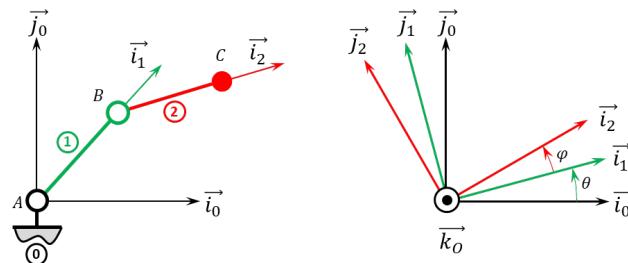
$$3. \overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \ddot{\mu}(t) \vec{j}_0.$$

Corrigé voir 140.

### Exercice 63 – Mouvement RR \*

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20 \text{ mm}$  et  $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$  avec  $L = 15 \text{ mm}$ .



**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(C,2/0)}$  par dérivation vectorielle.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(C,2/0)}$  par composition.

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$ .

Indications :

$$1. \overrightarrow{V(C,2/0)} = R \dot{\theta} \vec{j}_1 + L(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{j}_2.$$

$$2. \overrightarrow{V(C,2/0)} = L \dot{\varphi} \vec{j}_2 + \dot{\theta}(\vec{j}_2 + R \vec{j}_1) \quad (\text{c'est la même :}).$$

$$3. \{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta} \vec{j}_1 + L(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{j}_2 \end{array} \right\}_C$$

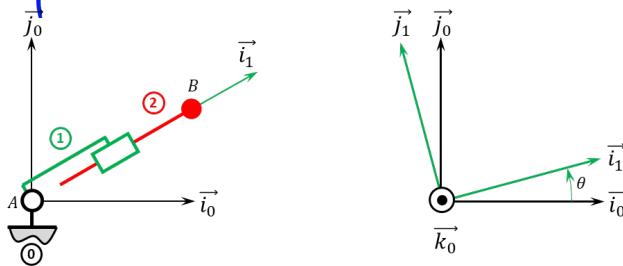
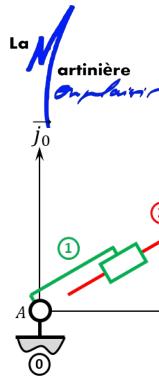
$$4. \overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = R \ddot{\theta} \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{i}_1 + L(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \vec{j}_2 - L(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \vec{i}_2.$$

Corrigé voir 141.

### Exercice 64 – Mouvement RT \*

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ .



**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(B,2/0)}$  par dérivation vectorielle.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(B,2/0)}$  par composition.

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point B.

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$ .

Indications :

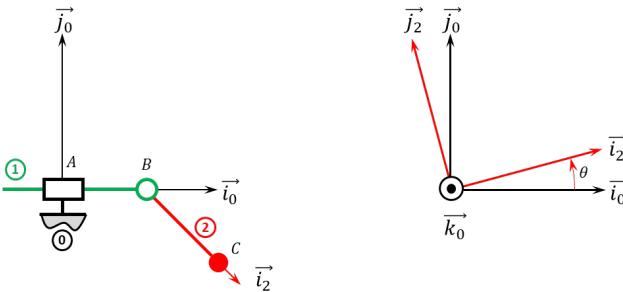
1.  $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$ .
2.  $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$ .
3.  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}(t) \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B$ .
4.  $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = (\ddot{\lambda}(t) - \lambda(t) \dot{\theta}(t)^2) \vec{i}_1 + (\dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t) + \lambda(t) \ddot{\theta}(t)) \vec{j}_1$ .

Corrigé voir 142.

### Exercice 65 – Mouvement RT \*

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{BC} = R \vec{i}_2$  avec  $R = 30 \text{ mm}$ .



**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(C,2/0)}$  par dérivation vectorielle ou par composition.

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$ .

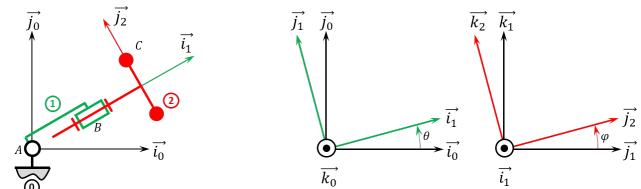
Indications :

1.  $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R \dot{\theta} \vec{j}_2$ .
2.  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 \\ \dot{\theta} \vec{k}_2 \\ \overline{\mathcal{V}(2/0)} = \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ \overline{\mathcal{V}(C,2/0)} \end{array} \right\}_C$ .
3.  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R(\dot{\theta} \vec{j}_2 - \dot{\theta}^2 \vec{i}_2)$ .

### Exercice 66 – Mouvement RR 3D \*

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = \ell \vec{i}_2 + r \vec{j}_2$ . On note  $R + \ell = L = 20 \text{ mm}$  et  $r = 10 \text{ mm}$ .



**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(C,2/0)}$  par dérivation vectorielle.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(C,2/0)}$  par composition.

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$ .

Indications :

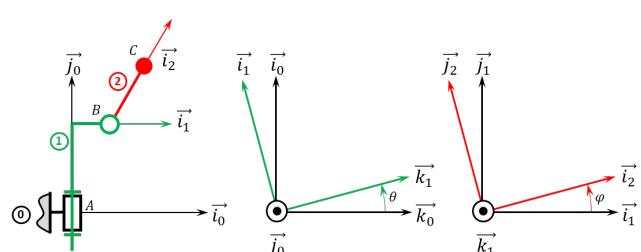
1.  $\overrightarrow{V(C,2/0)} = (R + \ell) \dot{\theta} \vec{j}_1 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2$ .
2.  $\overrightarrow{V(C,2/0)} = r \dot{\varphi} \vec{k}_2 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + \ell \dot{\theta} \vec{j}_1 + R \dot{\theta} \vec{j}_1$ .
3.  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_2 + \dot{\varphi} \vec{i}_1 \\ (R + \ell) \dot{\theta} \vec{j}_1 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2 \end{array} \right\}_C$ .
4.  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = (R + \ell) \dot{\theta} \vec{j}_1 - (R + \ell) \dot{\theta}^2 \vec{i}_1 - r \ddot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{i}_1 - r \dot{\theta}^2 \cos \varphi \vec{j}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2 + r \dot{\varphi} (\dot{\theta} \sin \varphi \vec{i}_1 - \dot{\varphi} \vec{j}_2)$ .

Corrigé voir 136.

### Exercice 67 – Mouvement RR 3D \*

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ . On a  $H = 20 \text{ mm}$ ,  $r = 5 \text{ mm}$ ,  $L = 10 \text{ mm}$ .



**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(C,2/0)}$  par dérivation vectorielle.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(C,2/0)}$  par composition du vecteur vitesse.

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

**Question 4** Déterminer  $\overline{\Gamma(C,2/0)}$ .

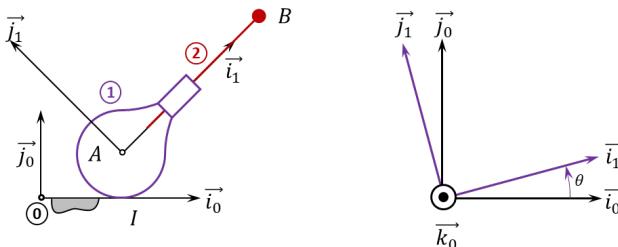
Indications :

1.  $\overline{V(C,2/0)} = -R\dot{\theta}\vec{k}_1 + L(-\dot{\theta}\cos\varphi\vec{k}_1 + \dot{\varphi}\vec{j}_2)$ .
2.  $\overline{V(C,2/0)} = L\dot{\varphi}\vec{j}_2 - \dot{\theta}(R\vec{k}_1 + L\cos\varphi\vec{k}_1)$ .
3.  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}\vec{k}_2 + \dot{\theta}\vec{j}_0 \\ L\dot{\varphi}\vec{j}_2 - \dot{\theta}(R\vec{k}_1 + L\cos\varphi\vec{k}_1) \end{array} \right\}_C$ .
4.  $\overline{\Gamma(C,2/0)} = L\dot{\varphi}\vec{j}_2 + L\dot{\varphi}(\dot{\theta}\sin\varphi\vec{k}_1 - \dot{\theta}\vec{i}_2) - \dot{\theta}(R\vec{k}_1 + L\cos\varphi\vec{k}_1) - \dot{\theta}(R\dot{\theta}\vec{i}_1 + L\cos\varphi\dot{\theta}\vec{i}_1 - L\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{k}_1)$ .

Corrigé voir 145.

**Exercice 68 – Mouvement RT – RSG \*\***
**B2-13**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{IA} = R\vec{j}_0$  et  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\vec{i}_1$ . De plus  $R = 15\text{ mm}$ . On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point  $I$ .


**Question 1** Déterminer  $\overline{V(B,2/0)}$ .

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point  $B$ .

**Question 3** Déterminer  $\overline{\Gamma(B,2/0)}$ .

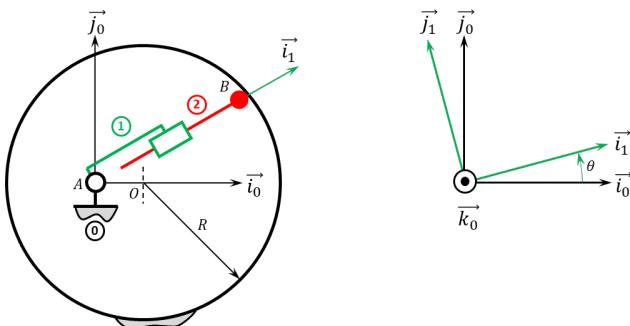
Indications :

1.  $\overline{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}\vec{i}_1 + \dot{\theta}(\lambda(t)\vec{j}_1 - R\vec{i}_0)$ .
2.  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}\vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}\vec{i}_1 + \dot{\theta}(\lambda(t)\vec{j}_1 - R\vec{i}_0) \end{array} \right\}_B$ .
3.  $\overline{\Gamma(B,2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\vec{i}_1 + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\vec{j}_1 + \ddot{\theta}(t)(\lambda(t)\vec{j}_1 - R\vec{i}_0) + \dot{\theta}(t)(\dot{\lambda}(t)\vec{j}_1 - \lambda(t)\dot{\theta}\vec{i}_1)$ .

Corrigé voir 146.

**Exercice 69 – Pompe à palettes \***
**B2-13**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AO} = e\vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\vec{i}_1$ . De plus  $e = 10\text{ mm}$  et  $R = 20\text{ mm}$ . Le contact entre  $0$  et  $2$  en  $B$  est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme  $\lambda_+(t) = -e\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) - \frac{e^2\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{e^2\cos^2\theta(t) - e^2 + R^2}}$  (voir exercice 285 – à vérifier).

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point  $B$ .

**Question 2** Déterminer  $\overline{\Gamma(B,2/0)}$ .

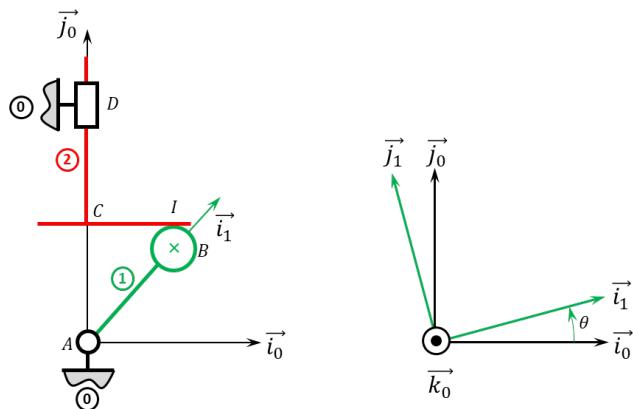
Indications :

1.  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}(t)\vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}(t)\vec{i}_1 + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\vec{j}_1 \end{array} \right\}_B$ .
2.  $\overline{\Gamma(B,2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\vec{i}_1 + 2\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\vec{j}_1 + \lambda(t)\ddot{\theta}(t)\vec{j}_1 - \lambda(t)\dot{\theta}^2(t)\vec{i}_1$ .

Corrigé voir 147.

**Exercice 70 – Pompe à piston axial \***
**B2-13**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = e\vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BI} = R\vec{j}_0$ . De plus,  $e = 10\text{ mm}$  et  $R = 20\text{ mm}$ . Le contact entre  $1$  et  $2$  en  $B$  est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre  $0$  et  $2$ .



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme  $\lambda(t) = e\sin\theta + R$  ou encore  $\dot{\lambda}(t) = e\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$  (voir exercice 286).

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point  $C$ .

**Question 2** Déterminer  $\overline{\Gamma(C,2/0)}$ .

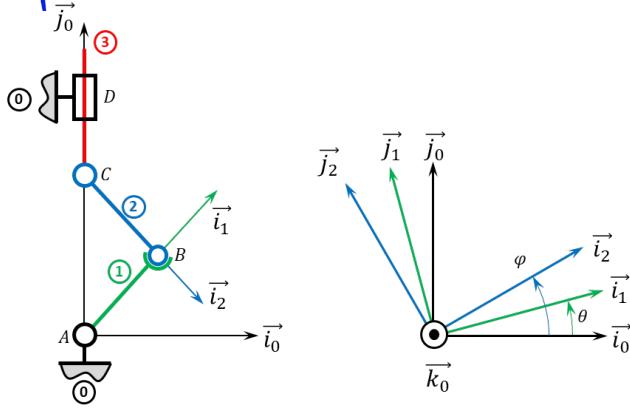
Indications :

1.  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t)\vec{j}_0 \end{array} \right\}_C$ .
2.  $\overline{\Gamma(C,2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\vec{j}_0$ .

Corrigé voir 148.

**Exercice 71 – Système bielle manivelle \***
**B2-13** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R\vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{CB} = L\vec{i}_2$ . De plus,  $R = 10\text{ mm}$  et  $L = 20\text{ mm}$ .



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme  $\lambda(t) = \pm\sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)} + R \sin \theta(t)$  et  $\dot{\lambda}(t) = \pm\left(\frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)}}\right) + \dot{\theta}(t) R \cos \theta(t)$ . (à vérifier – voir exercice 287).

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point B.

On commence par calculer  $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(B,1/0)}$ .

- Méthode 1 – dérivation vectorielle :**  $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \frac{d}{dt} [AB]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$ .

- Méthode 2 – formule de changement de point :**  $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = -R \vec{i}_1 \wedge \dot{\theta} t \vec{k}_0 = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$ .

On a alors,  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 \end{Bmatrix}_B$ .

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  et au point C.

On a,  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 \end{Bmatrix}_C$ .

Par ailleurs, on peut remarquer que  $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/0)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/0)} = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 + L \vec{i}_2 \wedge \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 - L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2$ .

On a donc nécessairement  $\dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 - L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2$

$$\Rightarrow \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 = R \dot{\theta}(t) (\cos \theta(t) \vec{j}_0 - \sin \theta(t) \vec{i}_0) - L \dot{\varphi}(t) (\cos \varphi(t) \vec{j}_0 - \sin \varphi(t) \vec{i}_0).$$

On a donc :

$$\begin{cases} 0 = -R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + L \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ \dot{\lambda}(t) = R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) - L \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) = L \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ \dot{\lambda}(t) - R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) = L \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) \end{cases} \Rightarrow \tan \varphi(t) = \frac{R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)}{\dot{\lambda}(t) - R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)}$$

Il resterait à supprimer  $\varphi(t)$  pour (espérons-le) retomber sur la loi entrée-sortie cinématique.

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$ .

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(B,2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1]_{\mathcal{R}_0} = R \ddot{\theta}(t) \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2(t) \vec{i}_1.$$

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$ .

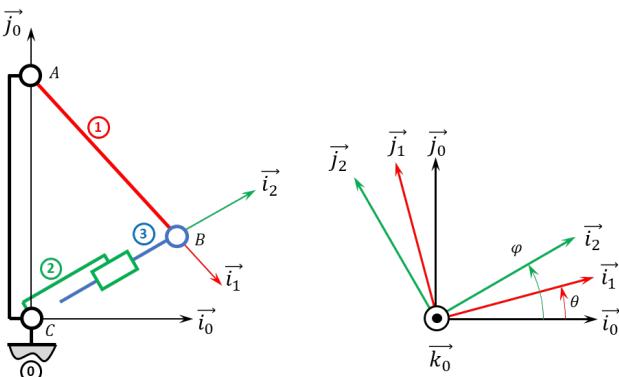
$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(C,2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{j}_0.$$

Corrigé voir 149.

### Exercice 72 – Système de transformation de mouvement \*

**B2-13** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{CA} = H \vec{j}_0$ . De plus,  $R = 30 \text{ mm}$  et  $H = 40 \text{ mm}$ .



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme \*\*\* (voir exercice 288).

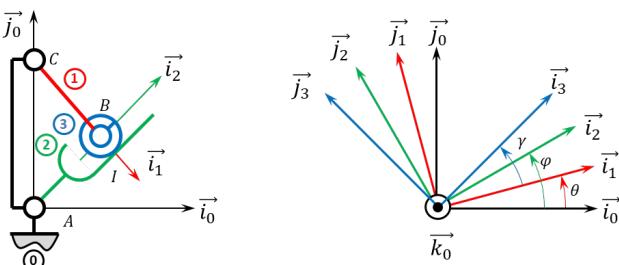
**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(3/0)\}$  au point B.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B,3/0)}$ .

Corrigé voir 150.

### Exercice 73 – Barrière Sympact \*\*

**B2-13** Pas de corrigé pour cet exercice. Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = H \vec{j}_0$  et  $\overrightarrow{CB} = R \vec{i}_1$ . De plus,  $H = 120 \text{ mm}$ ,  $R = 40 \text{ mm}$   $BI = 10 \text{ mm}$ .



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme \*\*\* (voir exercice 289).

**Question 1** En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer  $\gamma(t)$  et  $\dot{\gamma}(t)$ .

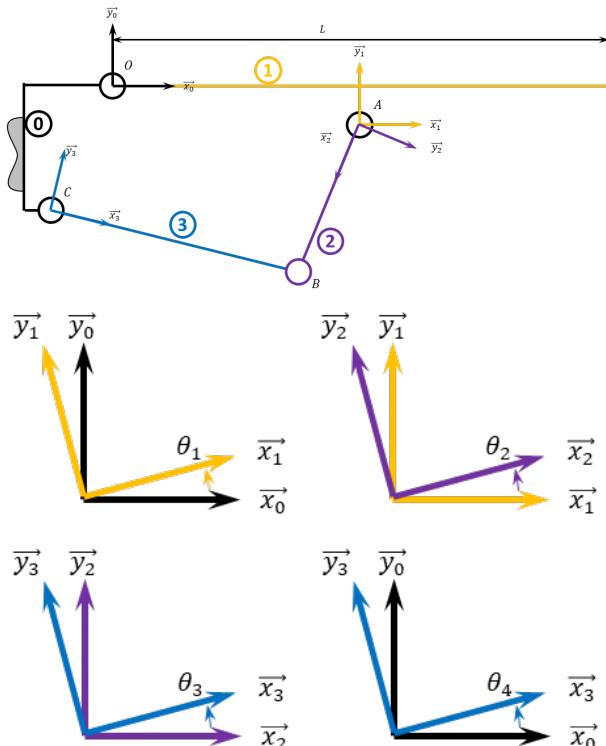
**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(3/2)\}$  au point B.

Corrigé voir 151.

**Exercice 74 – Système 4 barres \*\*\***
**B2-13** Pas de corrigé pour cet exercice.

On a :

- $\vec{OA} = a \vec{x}_1 - f \vec{y}_1$  avec  $a = 355$  mm et  $f = 13$  mm;
- $\vec{AB} = b \vec{x}_2$  avec  $b = 280$  mm;
- $\vec{BC} = -c \vec{x}_3$  avec  $c = 280$  mm;
- $\vec{OC} = -d \vec{x}_0 - e \vec{y}_0$  avec  $d = 89,5$  mm et  $e = 160$  mm;



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme \*\*\* (voir exercice 292). On définit le point  $G$  tel que  $\vec{OG} = L \vec{x}_1$ .

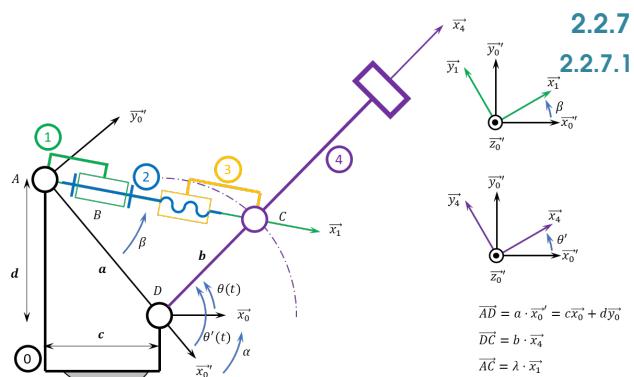
**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  au point  $G$ .

**Question 2** Déterminer  $\overline{\Gamma(G, 1/0)}$ .

Corrigé voir 152.

**Exercice 75 – Maxpid \*\*\***
**B2-13** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs  $a = 107,1$  mm,  $b = 80$  mm,  $c = 70$  mm,  $d = 80$  mm. Le pas de la vis est de 4 mm.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme \*\*\* (voir exercice 293).

On définit le point  $G$  tel que  $\vec{OG} = L \vec{x}_4$ .

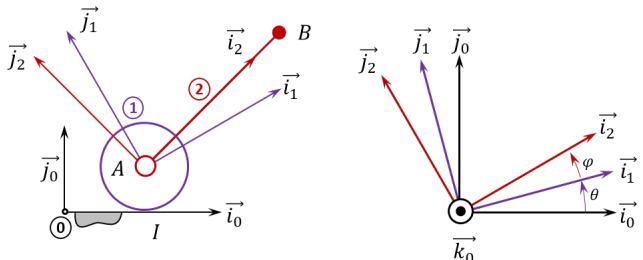
**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(4/0)\}$  au point  $G$ .

**Question 2** Déterminer  $\overline{\Gamma(G, 4/0)}$ .

Corrigé voir 153.

**Exercice 76 – Mouvement RR – RSG \*\***
**B2-13**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{IA} = R \vec{j}_0$  et  $\vec{AB} = L \vec{i}_2$ . De plus  $R = 15$  mm. On fait l'hypothèse de mouvement sans glissement au point  $I$ .


**Question 1** Déterminer  $\overline{V(B, 2/0)}$ .

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point  $B$ .

**Question 3** Déterminer  $\overline{\Gamma(B, 2/0)}$ .

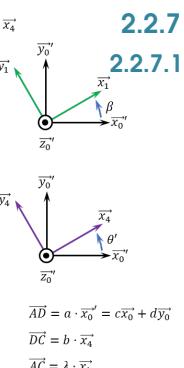
Indications (à vérifier...):

1.  $\overline{V(B, 2/0)} = L \dot{\phi}(t) \vec{j}_2 + \dot{\theta}(t) (L \vec{j}_1 - R \vec{i}_0)$ .
2.  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(2/0) = (\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t)) \vec{k}_0 \\ L \dot{\phi}(t) \vec{j}_2 + \dot{\theta}(t) (L \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) \end{array} \right\}_B$ .
3.  $\overline{\Gamma(B, 2/0)} = L \ddot{\phi}(t) \vec{j}_2 - L \dot{\phi}(t) (\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t)) \vec{i}_2 + \ddot{\theta}(t) (L \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) - L \dot{\theta}^2(t) \vec{i}_1$ .

Corrigé voir 154.

**Modéliser une action mécanique**
**Passage du modèle local au modèle global**
**Exercice 77 – La Seine Musicale \***
**B2-14** Pas de corrigé pour cet exercice.

On choisit de représenter une demi-voie, de repère  $\mathcal{R}_v(O; \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z})$ , par une portion de demi-sphère (Figure 2.1). On pourra remarquer qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre les repères  $\mathcal{R}_{C_G}(C_G; \vec{x}_{C_G}, \vec{y}_{C_G}, \vec{z})$  et  $\mathcal{R}_v(O; \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z})$ , associé à la demi-voie. On rappelle que  $\vec{OC}_G = R \vec{y}_{C_G}$ , avec  $R$  le rayon moyen de la voie de roulement.



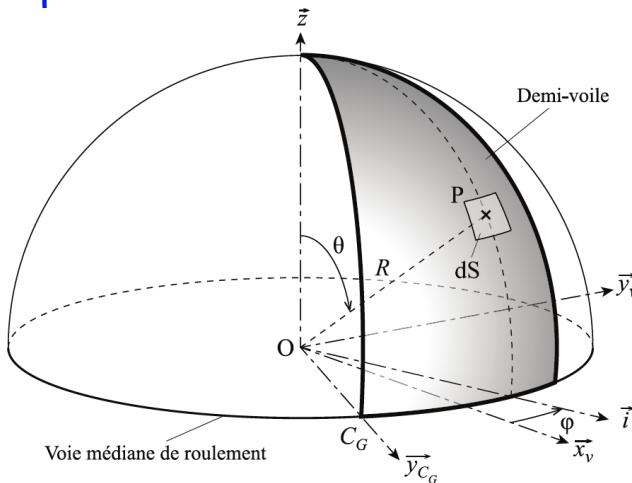


FIGURE 2.1 – Paramétrage de la surface totale et élémentaire en coordonnées sphériques de la demi-voile

La figure Figure 2.2 présente l'orientation du vent par rapport au plan de symétrie de la demi-voile dans le plan  $(\vec{x}_v, \vec{y}_v)$ . La densité d'effort surfacique du vent sur la demi-voile, pour une vitesse de  $9 \text{ m s}^{-1}$ , est noté  $\vec{f}_{\text{vent}} = f \vec{u}$  avec  $f = 54,7 \text{ N m}^{-2}$ , l'orientation de  $\vec{u}$  étant définie par l'angle constant  $\alpha = (\vec{x}_v, \vec{u})$ .

La base associée au système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  est  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ . La position du point  $P$  appartenant à la demi-voile est définie par  $\overrightarrow{OP} = R \vec{e}_r$  avec  $R$  le rayon moyen de la voie de roulement ( $R = 22,75 \text{ m}$ ). L'angle azimutal  $\varphi$  évolue entre  $-\frac{\pi}{8}$  et  $\frac{\pi}{8}$  et l'élévation  $\theta$  évolue entre  $0$  et  $\frac{\pi}{2}$ . On précise que, dans le cas présenté Figure 2.1, la surface élémentaire en coordonnées sphériques est notée  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ .

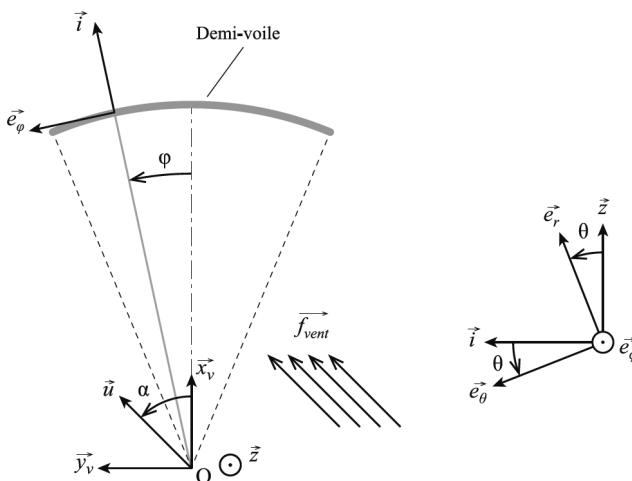


FIGURE 2.2 – Paramétrage angulaire

**Question 1** Exprimer l'effort élémentaire du vent sur la demi-voile s'appliquant au point  $P$  sur la surface  $dS$ , noté  $d\vec{F}_{\text{vent}}$ .

**Question 2** Déterminer par intégration l'expression du moment de l'action mécanique du vent selon l'axe

$(O, \vec{z})$ ,  $\vec{M}(O, \text{vent} \rightarrow \text{demi-voile}) \cdot \vec{z}$  s'opposant à la rotation de la voile autour de l'axe  $(O, \vec{z})$  en fonction de  $R$ ,  $f$  et  $\alpha$ .

**Question 3** On définit  $F_{\text{vent}}$  tel que  $\overrightarrow{OC_G} \wedge F_{\text{vent}} \vec{x}_{C_G}$ .

$\vec{z} = \vec{M}(O, \text{vent} \rightarrow \text{demi-voile}) \cdot \vec{z}$ . En déduire l'expression de  $F_{\text{vent}}$  l'effort du vent au point  $C_G$  s'opposant au déplacement du chariot central.

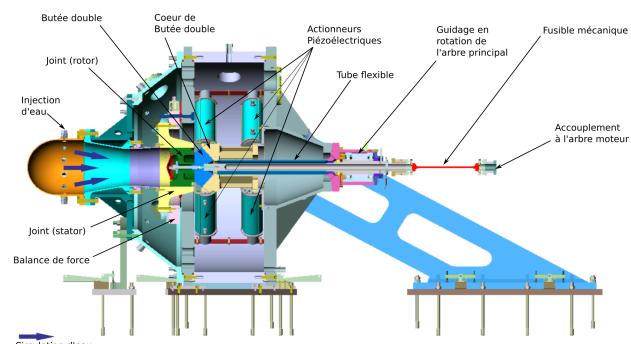
Afin de modéliser le déplacement de la voile dans le cas le plus défavorable, on souhaite déterminer la valeur maximale de  $|F_{\text{vent}}|$ .

**Question 4** Pour quelle valeur de  $\alpha$  cet effort est-il maximal? Déterminer la valeur maximale de  $|F_{\text{vent}}|$ .

Corrigé voir 155.

### Exercice 78 – Banc Balafre \*

**B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.** La figure suivante représente le paramétrage permettant de modéliser les actions mécaniques s'exerçant sur l'ensemble  $S = \{JR + CB\}$ . On nommera  $G$  le centre d'inertie de l'ensemble  $S$ .



#### Données et hypothèses

- On note  $\vec{BM} = z \vec{z}_0 + R_J \vec{u}(\theta)$  où  $R_J$  est le rayon du joint avec  $R_J = 175 \text{ mm}$ ;
- la longueur du joint est  $L_J = 150 \text{ mm}$ . La position du point  $B$ , centre du joint est  $\overrightarrow{OB} = z_B \vec{z}_0$  avec  $z_B = 425 \text{ mm}$ ;
- Le coeur de butée a une masse  $M_{CB} = 40 \text{ kg}$  et la position de son centre d'inertie  $G_{CB}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB} \vec{z}_0$  avec  $L_{CB} = 193 \text{ mm}$ ;
- Les positions des points  $A_4$  et  $A_8$  sont paramétrées par  $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \vec{z}_0 - R_{CB} \vec{y}_0$  et  $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \vec{y}_0$  avec  $z_4 = 280 \text{ mm}$  et  $R_{CB} = 150 \text{ mm}$ .

On souhaite déterminer la résultante des actions de pression du fluide sur le joint (rotor). On rappelle qu'un élément de surface  $dS$  autour d'un point  $M$  sur une surface cylindrique de rayon  $R_J$  s'exprime  $dS = R_J d\theta dz$ .

**Question 1** Exprimer au point  $M$  le torseur  $\{dT_{f \rightarrow J_R}\}$  de l'action de pression du fluide sur un élément de surface  $dS$  joint en fonction de  $p(t)$ ,  $dS$  et  $\vec{u}(\theta)$ .

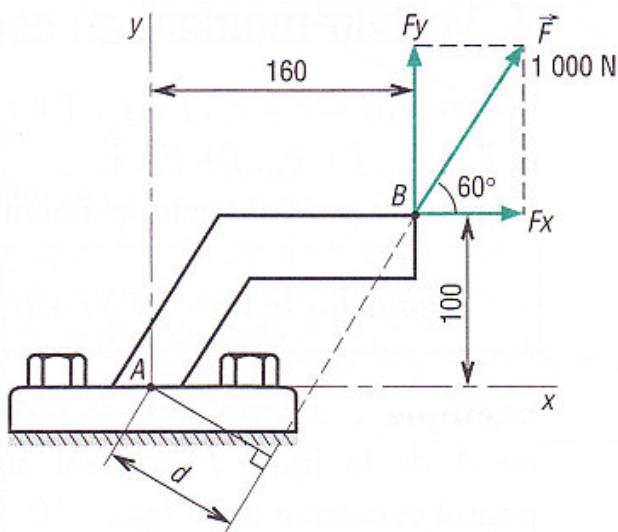
**Question 2** En déduire l'expression en  $B$  du torseur  $\{T_{f \rightarrow J_R}\}$  de l'action de pression du fluide sur l'ensemble du

Corrigé voir 156.

### 2.2.7.2 Modéliser une action mécanique – Modèle global

#### Exercice 79 – Calcul de moment\*

B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.



Question 1 Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, F)}$ .

Question 2 Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, F)}$ .

Corrigé voir 157.

#### Exercice 80 – Calcul de moment\*

B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.

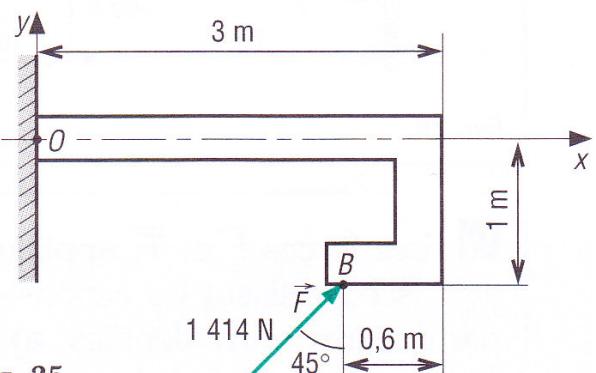


Fig. 25

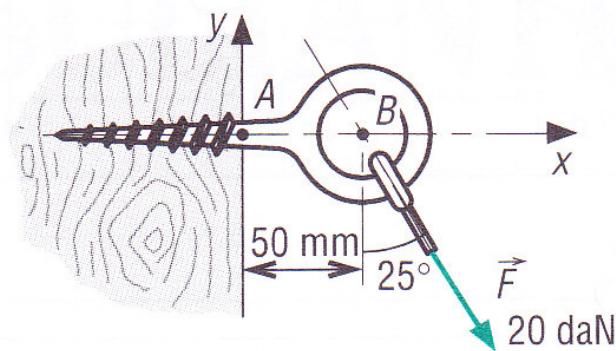
Question 1 Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, F)}$ .

Question 2 Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, F)}$ .

Corrigé voir 158.

#### Exercice 81 – Calcul de moment\*

B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.



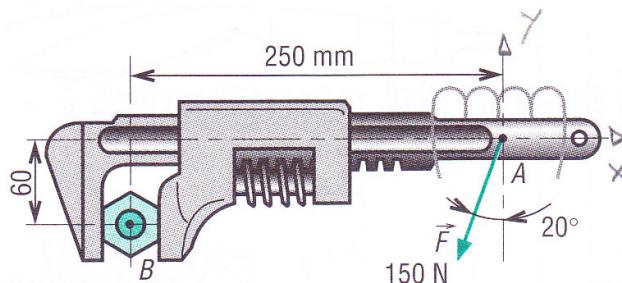
Question 1 Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, F)}$ .

Question 2 Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, F)}$ .

Corrigé voir ??.

#### Exercice 82 – Calcul de moment\*

B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.



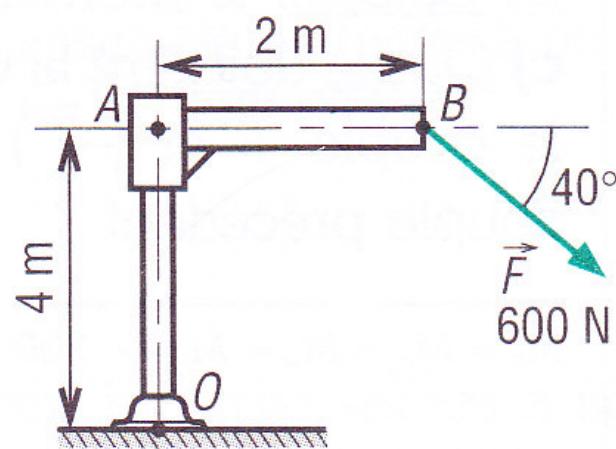
Question 1 Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, F)}$ .

Question 2 Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, F)}$ .

Corrigé voir 160.

#### Exercice 83 – Calcul de moment\*

B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.



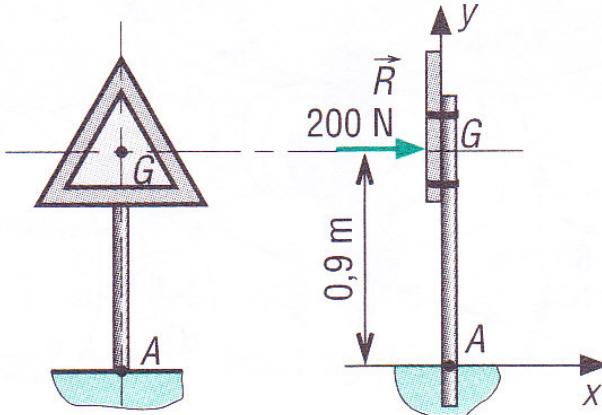
**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{M}(B, \overrightarrow{F})$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{M}(O, \overrightarrow{F})$ .

Corrigé voir 161.

### Exercice 84 – Calcul de moment\*

B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.



**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{M}(G, \overrightarrow{R})$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{M}(A, \overrightarrow{R})$ .

Corrigé voir 162.

### 2.2.8 Décrire le comportement d'un système séquentiel

#### Exercice 85 – Le banc balafre \*

B2-17 Pas de corrigé pour cet exercice.

Pendant un essai, les actionneurs sont commandés axe par axe (c'est-à-dire par groupes de deux actionneurs piézoélectriques) grâce à un module d'électronique de puissance  $2 \times 10\text{kVA}$ . Ainsi, quatre modules sont installés dans l'armoire de commande. Les actionneurs sont commandés pour générer ce que l'on appelle des « rafales » : ils produisent les vibrations avec les caractéristiques voulues par l'opérateur, pendant une durée qui dépend de l'objectif de l'essai en cours.

**Objectif** Nous allons modéliser la façon dont la commande du système doit être programmée afin de protéger les composants vis-à-vis de problèmes de surchauffe.

Afin de protéger les composants, le système de commande doit imposer des périodes de temporisation pour favoriser le refroidissement des actionneurs et amplificateurs. Les amplificateurs de puissance ne doivent pas être utilisés en continu pendant plus de  $\text{timeout} = 10\text{s}$ . Le superviseur ne doit pas autoriser de temps de rafale supérieur à  $t_{\max} = 31\text{s}$ . À chaque période supérieure à timeout, il est nécessaire de temporiser le système pendant 1 s et pour une durée de rafale supérieure à  $t_{\max}$ , il

est nécessaire de temporiser pendant 3 s. Le diagramme d'état du superviseur du banc Balafre est présenté sur la figure 3.1.

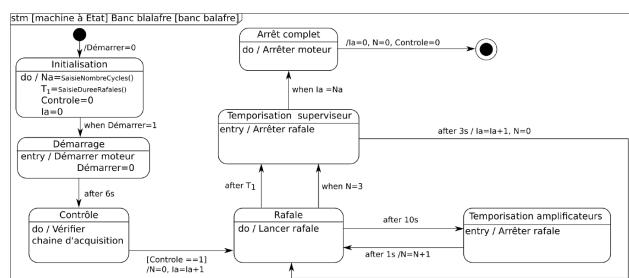
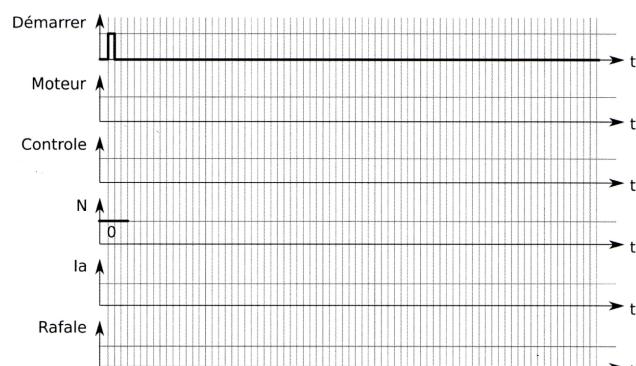


FIGURE 2.3 – Diagramme d'état du superviseur du banc Balafre.

Les variables suivantes permettent de réaliser le suivi d'un processus de mesure :

- Démarrer est une variable booléenne. Elle devient vraie, lorsque l'opérateur a saisi le nombre  $Na$  de cycles qu'il souhaite réaliser et la durée  $T_1$  de chaque cycle, et qu'il a validé sa saisie.
- Moteur est une variable qui vaut 1 lorsque le moteur a atteint sa vitesse de consigne (supposée non nulle, la vitesse nulle n'étant pas une consigne d'intérêt pratique pour le banc d'essais). Quand Moteur a atteint la valeur 1, seul le retour à l'arrêt peut modifier l'état de cette variable en la faisant repasser à 0. On considère qu'il faut 5 s pour atteindre la vitesse de consigne ou revenir à l'arrêt.
- Controle est une variable qui décrit le résultat des contrôles de la chaîne d'acquisition :
  - Controle=0 si les contrôles n'ont pas été effectués;
  - Controle=1 si les contrôles sont terminés et que tout est en ordre de marche;
  - Controle=2 si les contrôles ont détecté une anomalie.
- Rafale est une variable qui vaut 1 si une rafale est en cours, et 0 sinon.

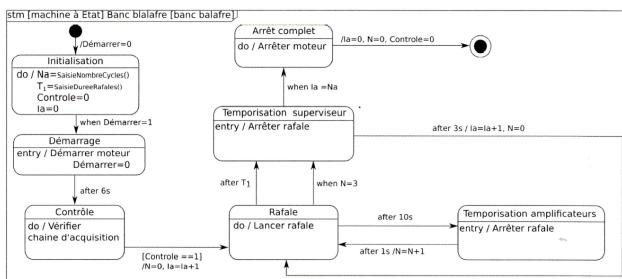
**Question 1** On souhaite réaliser un cycle de rafale de huit secondes. En suivant le diagramme d'état de la figure 3.1, et en supposant que le contrôle soit réalisé en 1 seconde et conclue à ce que tout soit en ordre de marche, compléter le chronogramme.



Pour un fonctionnement sûr de l'installation, le sys-

tème doit arrêter les moteurs si les contrôles détectent une anomalie.

**Question 2** Modifier le diagramme d'état ci-dessous pour prendre en compte ce cas de figure.



Corrigé voir 163.

## 2.2.9 Modéliser un convertisseur électromécanique

### Exercice 86 – Le banc balafré \*

**Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Objectif** L'objectif est de valider les exigences suivantes.

- 1.01 – Couple résistant : le couple résistant exercé par le film d'eau sur le joint (rotor) à  $6000 \text{ tr min}^{-1}$  est estimé à  $C_{\text{res}} = 300 \text{ Nm}$ .
- 1.02 – Vitesse de rotation : la vitesse cible NC (vitesse de rotation du rotor de joint) doit pouvoir être réglée à une valeur choisie entre  $5000 \text{ tr min}^{-1}$  et  $7000 \text{ tr min}^{-1}$ .
- 1.03 – Loi de commande : la mise en rotation doit se faire à accélération constante pendant une durée n'excédant par  $T_{\text{acc}} = 5 \text{ s}$ .

Nous allons modéliser le moteur asynchrone Leroy Somer PLS-280-MP. Ceci va nous permettre de déterminer sa caractéristique de couple. Cette caractéristique sera utilisée dans les parties suivantes et nous permettra dans cette partie de déterminer la fréquence de commande du moteur pour la phase de mesure en régime stationnaire.

Données et hypothèses :

- le réseau d'alimentation électrique fournit une tension 230/400 V en 50 Hz;
- la plaque signalétique du moteur est donnée en figure Figure 3.1 ;
- on négligera les pertes fer et les pertes mécaniques dans le moteur ;
- les pertes Joule statoriques sont également négligées.

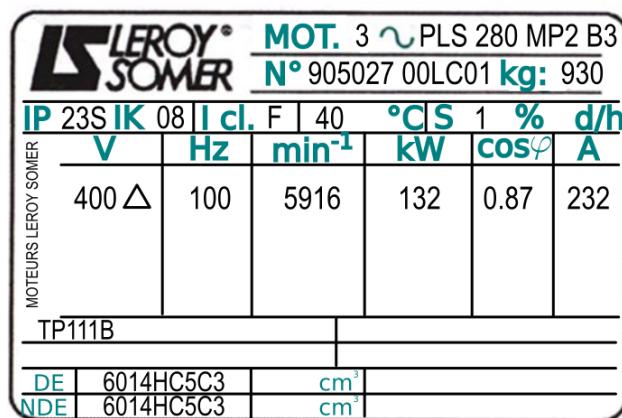


FIGURE 2.4 – Plaque signalétique du moteur PLS-280-MP

Modéliser

**Question 1** En utilisant les informations de la plaque signalétique, montrer que le moteur possède  $p = 1$  paire de pôles.

**Question 2** À partir de la plaque signalétique, en détaillant les calculs, déterminer le glissement en fonctionnement nominal  $g_N$  ainsi que le couple utile nominal  $C_{uN}$ .

On donne sur la figure Figure 2.5 le modèle équivalent ramené au stator d'une phase du moteur.  $L_0$  représente l'inductance de magnétisation et  $L_c$  l'inductance des fuites totales d'une phase (rotorique ramenée au stator et stator). On note  $g$  le glissement. On rappelle que la puissance dissipée dans la résistance  $R/g$  correspond à la puissance transmise du stator au rotor. Cette puissance peut être décomposée en une résistance  $R$  correspondant aux pertes Joule dans le rotor en série avec une résistance  $R(1-g)/g$  correspondant à la puissance électromécanique fournie au rotor.



Ce modèle est celui du bobinage couplé en triangle. La tension  $U_s$  représente la tension entre phases, c'est-à-dire, vue de l'extérieur, la tension composée de valeur nominale 400 V. Le courant  $i_s$  représente le courant dans chaque phase statorique. La notation conventionnelle  $j_s$  pour ce courant n'est pas utilisée ici pour éviter toute confusion avec les notations des nombres complexes.

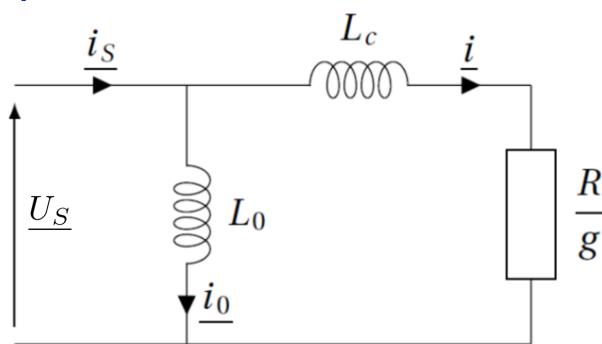


FIGURE 2.5 – Modèle équivalent ramené au stator d'une phase du moteur

**Question 3** Exprimer la puissance électromécanique  $P_{EM}$  fournie au rotor en fonction de  $U_S$  (valeur efficace de la tension  $U_S$ ), de la résistance  $R$ , du glissement  $g$  de l'inductance  $L_c$  et de la pulsation d'alimentation  $\omega$  du moteur.

**Question 4** Exprimer la puissance électromécanique  $P_{EM}$  en fonction du couple électromagnétique  $C_{EM}$  et de la vitesse de rotation  $\Omega$  de l'arbre moteur.

**Question 5** Exprimer la vitesse de rotation  $\Omega$  de l'arbre en fonction du glissement  $g$  et de la vitesse de synchronisme  $\Omega_s$ . En déduire l'expression du couple électromagnétique  $C_{EM}$  en fonction de  $U_s^2$ ,  $\omega$ ,  $g$ ,  $R$ ,  $L_c$ , et  $p$  (le nombre de paires de pôles par phase).

**Question 6** En précisant bien vos hypothèses, justifier que l'expression du couple utile disponible sur l'arbre

$$\text{moteur est } C_u = \frac{3pU_s^2}{\omega} \cdot \frac{\frac{R}{g}}{\left(\frac{R}{g}\right)^2 + (L_c \omega)^2}.$$

À l'aide de cette équation, on obtient la figure Figure 2.6 qui représente l'allure de la courbe de couple en fonction de la vitesse de rotation  $N$  de l'arbre moteur.

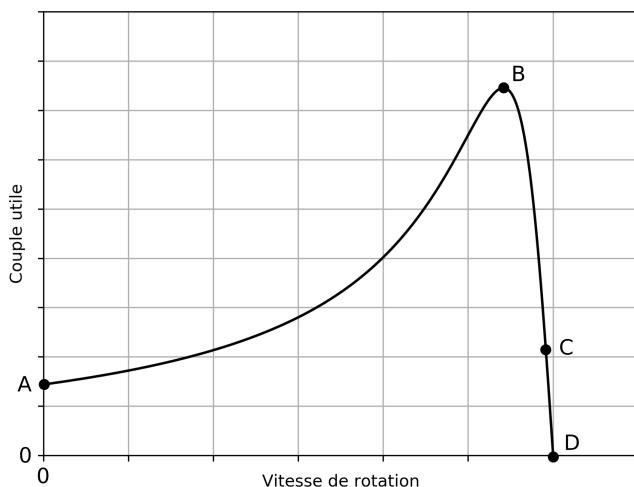


FIGURE 2.6 – Allure de la courbe de couple utile du moteur en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre

**Question 7** À l'aide des points A, B, C et D, identifier sur cette courbe le point de fonctionnement nominal, le démarrage du moteur, le point de synchronisme, la zone de fonctionnement instable du moteur.

Le constructeur précise le rapport du couple maximal sur couple nominal :  $C_M/C_N = 3,5$ . On rappelle que le couple utile est maximal pour une valeur du glissement telle que  $R/g = L_c \omega$ . **Question 8** En déduire l'expression de  $L_c$  en fonction de  $p$ ,  $U_s$ ,  $C_M$  et  $\omega$  et faire l'application numérique.

**Question 9** Que peut-on dire de  $R/g$  par rapport à  $L_c \omega$  au voisinage du point de fonctionnement nominal ? En déduire l'expression de  $R$  en fonction du couple nominal  $C_N$ , du glissement nominal  $g_N$ , de  $p$ ,  $U_s$  et de  $\omega$ .

**R** On fera l'application numérique en prenant  $g_N = 1,4 \times 10^{-2}$  et  $C_N = 213 \text{ Nm}$ .

Le variateur utilisé pour la commande du moteur fonctionne en  $U_s/f$  constant. À l'aide des valeurs calculées précédemment, on a tracé sur la figure Figure 2.7 les courbes de couple utile en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs de fréquence de commande.

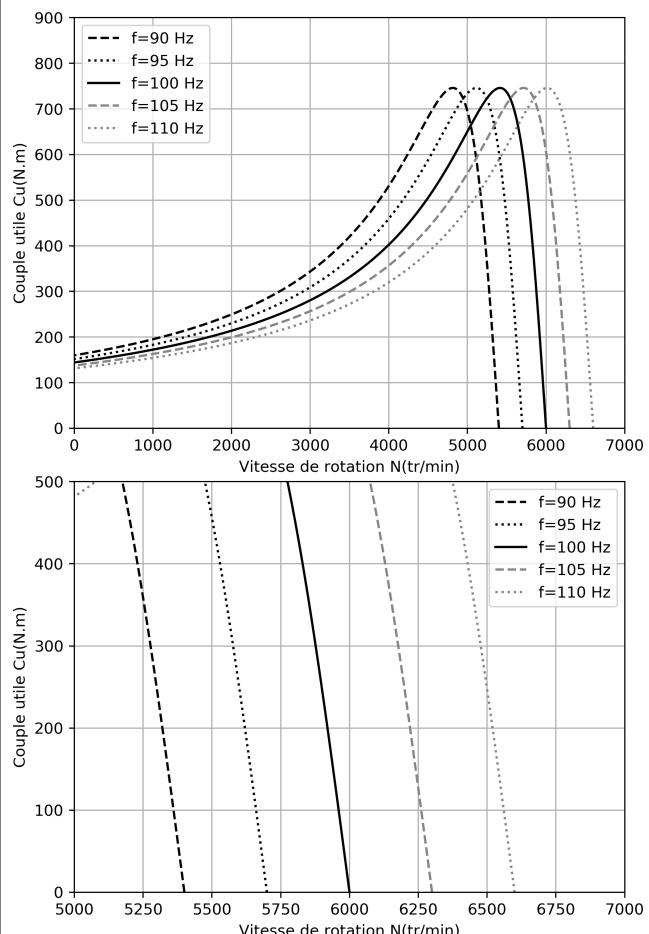


FIGURE 2.7 – Évolution du couple utile en fonction de la vitesse de rotation pour des fréquences de commande de 90 Hz à 110 Hz.

**Question 10** Déterminer quelle fréquence doit être imposée par le variateur pour maintenir une vitesse de 6000  $\text{tr min}^{-1}$  en présence d'un couple résistant correspondant au couple  $C_{\text{res}} = 300 \text{ Nm}$  défini par l'exigence 1.01 du cahier des charges.

Corrigé voir 164.

## 2.3 B3 – Valider un modèle

Modéliser

## 2.4 B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser

## 2.5 B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement

### 2.5.1 B2-04 – Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert

**Exercice 87 – Moteur à courant continu\***

#### B2-04

**Question 1** Exprimer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$ .

En passant les équations dans le domaine de Laplace, on a :

- $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p)$ ;
- $E(p) = K_m\Omega(p)$ ;
- $C(p) = K_m I(p)$ ;
- $C(p) - f\Omega(p) = Jp\Omega(p) \Leftrightarrow C(p) = \Omega(p)(Jp + f)$ .

**Vous devez savoir qu'un moteur à courant continu est piloté en tension ( $U(p)$ ) et qu'en sortie on observe le taux de rotation ( $\Omega(p)$ ).**

En ne conservant que  $U(p)$  et  $\Omega(p)$ , on a donc  $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p) \Leftrightarrow U(p) = K_m\Omega(p) + (R + Lp)\frac{C(p)}{K_m} \Leftrightarrow U(p) = K_m\Omega(p) + (R + Lp)\frac{\Omega(p)(Jp + f)}{K_m} \Leftrightarrow U(p) = \left( K_m + (R + Lp)\frac{(Jp + f)}{K_m} \right) \Omega(p) \Leftrightarrow U(p) = \frac{K_m^2 + (R + Lp)(Jp + f)}{K_m} \Omega(p)$ .

On a donc  $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{K^2 + (R + Lp)(Jp + f)}$ .

**Question 2** Préciser l'ordre et la classe de  $H$ .

$H$  est d'ordre 2 et de classe 0 car on ne peut pas mettre de  $p$  en facteur. Le terme de plus haut degré du dénominateur est de degré 2.

**Question 3** Mettre  $H(p)$  sous forme canonique.

$$H(p) = \frac{K_m}{K_m^2 + Rf + (RJ + Lf)p + LJp^2} \Leftrightarrow H(p) = \frac{\frac{K_m}{K_m^2 + Rf}}{1 + \frac{(RJ + Lf)}{K_m^2 + Rf}p + \frac{LJ}{K_m^2 + Rf}p^2}.$$

**Question 4** Donner les caractéristiques de la fonction de transfert.

En identifiant avec la forme canonique standard,  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$  soit  $K = \frac{K_m}{K_m^2 + Rf}$ ,  $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{(RJ + Lf)}{K_m^2 + Rf}$  et  $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{LJ}{K_m^2 + Rf}$ .

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{LJ}{K_m^2 + Rf}.$$

$$\text{Au final, } K = \frac{K_m}{K_m^2 + Rf}, \omega_0 = \sqrt{\frac{K_m^2 + Rf}{LJ}}, \xi = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ(K_m^2 + Rf)}}.$$

**Question 5** Vérifier l'homogénéité des différentes constantes.

Le gain doit être en  $\text{rads}^{-1}\text{V}^{-1}$ .

D'une part,  $[K_m] = \text{N mA}^{-1}$ . D'autre part,  $[K_m] = \text{V rad}^{-1}\text{s}$ . On a donc  $\text{V rad}^{-1}\text{s} = \text{N mA}^{-1}$ . (On pourrait aussi le montrer par une analyse dimensionnelle...)

De plus  $[R] = \Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}}$  et  $[f] = \text{N m rad}^{-1}\text{s}$ .

$$\text{On a donc } [K] = \frac{\text{N mA}^{-1}}{(\text{N mA}^{-1})^2 + \text{N m rad}^{-1}\text{s} \times \text{VA}^{-1}} = \frac{1}{\text{N mA}^{-1} + \text{rad}^{-1}\text{sV}} = \frac{1}{\text{rad}^{-1}\text{sV}} = \text{rad s}^{-1}\text{V}^{-1}.$$

La pulsation propre doit être en  $\text{s}^{-1}$  ou  $\text{rad s}^{-1}$ .

On a vu que  $[K_m^2] = [Rf]$ . De plus  $[L] = H = \text{VsA}^{-1}$  et  $[J] = \text{Nm rad}^{-1}\text{s}^2$  (PFD).

$$[\omega_0] = \sqrt{\frac{\text{N}^2 \text{m}^2 \text{A}^{-2}}{\text{VsA}^{-1} \times \text{Nm rad}^{-1}\text{s}^2}} = \sqrt{\frac{\text{N m rad}}{\text{VsAs}^2}}. \text{ Or, } W = \text{N m rad s}^{-1} = \text{VA}.$$

$$\text{On a alors } [\omega_0] = \sqrt{\frac{\text{N m rad s}^{-1}}{\text{Vs}^2\text{A}}} = \sqrt{\frac{1}{\text{s}^2}} = \text{s}^{-1}.$$

Enfin,  $\xi$  est sans unité... à vérifier :)

## 2.5.2 B2-06 – Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle

### Exercice 88 – Identification temporelle \*

**B2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la fonction de transfert du système.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert du système.

### Exercice 89 – Identification \*

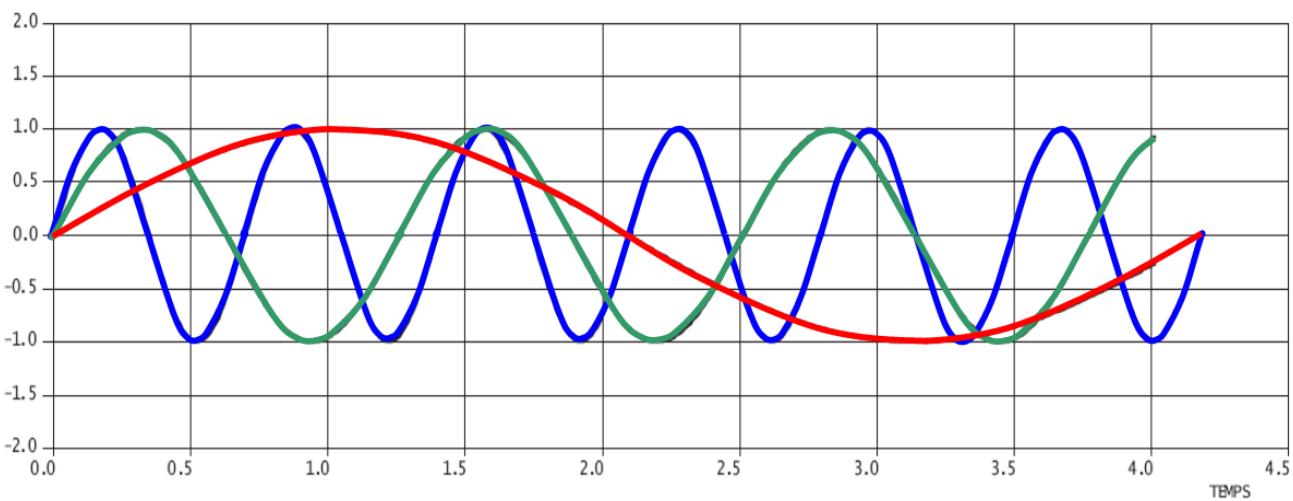
**B2-06**

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le diagramme de Bode asymptotique.

**Question 2** Identifier le type de la fonction de transfert et ses valeurs remarquables.

Le diagramme temporel ci-dessous présente 3 signaux d'entrée sinusoïdaux.



**Question 3** Déterminer les périodes et les pulsations de chacun des signaux.

**Question 4** En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.

### Exercice 90 – Identification \*

**B2-06**

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer les périodes et les pulsations de chacun des signaux.

**Question 2** En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.

### Exercice 91 – Identification \*

**B2-06**

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la fonction de transfert du système.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert du système.

## 2.5.3 B2-07 – Modéliser un système par schéma-blocs.

### Exercice 92 – La Seine Musicale\*

**B2-07** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** En considérant que la perturbation  $C_{pert}(p)$  est nulle, déterminer  $H_f(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$  sous forme canonique.

**Question 2** Exprimer la fonction de transfert  $H_r(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$  en la mettant sous la forme :  $H_r(p) = -\frac{\alpha(1+\tau p)}{1+\gamma p+\delta p^2}$ . Exprimer  $\alpha, \tau, \gamma$  et  $\delta$  en fonction des différents paramètres de l'étude.

**Question 3** Exprimer  $X_{ch}(p)$  en fonction de  $\Omega_m(p)$  et  $C_{pert}(p)$ .

### Exercice 93 – Machine de rééducation SysReeduc \*

**B2-07** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$  et  $K_9$ .

On a :

- $u_m(t) = e(t) + R i(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + R I(p)$  et  $C_{M1}(p) = k_t I(p)$  donc  $K_2 = \frac{k_t}{R}$  ;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$  et donc  $K_7 = k_e$  ;
- $(M+m)r \rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M+m)r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$  et donc  $K_9 = \rho_1 r$  et  $H_3(p) = \frac{1}{(M+m)r^2 \rho_1^2 p}$  ;
- $H_4(p)$  permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et  $H_4(p) = \frac{1}{p}$  ;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit  $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$  ;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement  $K_5 = \rho_1$  et  $K_6 = r$  (à convertir en mètres) ;
- enfin,  $K_1$  convertit des mètres en incrément.  $X_c$  est la consigne que doit respectée  $X$ . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc  $\varepsilon = 0$  et  $X = X_c$  soit  $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8 \theta_m = K_1 X_C - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$ . Au final,  $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système  $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$  et  $K_8$ .

### Exercice 94 – Quille pendulaire\*

**B2-07**

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace :  $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$  et  $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$ .

En utilisant le schéma-blocs, on a  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$ .

Par ailleurs  $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{V}{2B}p} = Q(p)\frac{2B}{Vp} - X(p)\frac{S2B}{V}$ . On a donc  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$  soit  $A_1 = \frac{2B}{Vp}\frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}$ .

On a aussi  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$ . Par ailleurs,  $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$ . On a donc :  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$  et  $A_3 = S$ .

Au final,  $A_1 = \frac{1}{Sp}$ ,  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .

**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

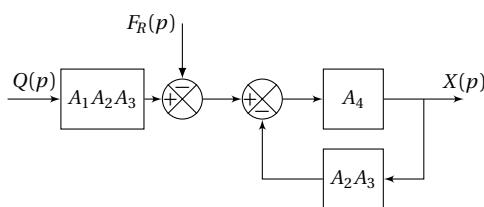
**Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes** On a  $X(p) = (H_1 Q(p) - F_R(p)) H_2(p)$ .

Par ailleurs, on a vu que  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3 \Sigma(p))$  et  $\Sigma(p) = A_2(A_1 Q(p) - X(p))$ .

On a donc  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3 A_2(A_1 Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2 A_3 A_4) = A_4(-F_R(p) + A_3 A_2 A_1 Q(p))$ . On a donc  $H_1(p) = A_1 A_2 A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2 A_3 A_4}$ .

**Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs** Revient à utiliser la méthode précédente.

**Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs** Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$$A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S \text{ et } A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}.$$

$$\text{En faisant le calcul on obtient : } H_1(p) = \frac{2BS}{pV} \text{ et } H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}.$$

### Question 3

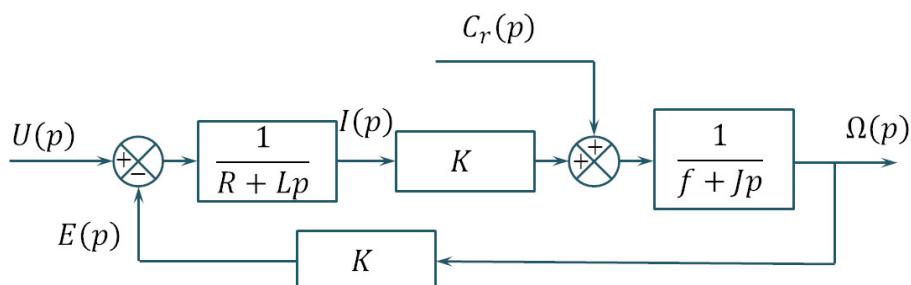
Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

$$\text{Dans ce cas, } \frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p) H_2(p) \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda p V + k V + 2BS^2)}.$$

### Exercice 95 – Moteur à courant continu\*

B2-07

**Question 1** Réaliser le schéma-blocs.



**Question 2** Mettre le schéma-blocs sous la forme suivante.

En utilisant le schéma-blocs proposé, on a  $\Omega(p) = (C_r(p)A(p) + U(p)B(p))C(p)$ .

$$\text{D'autre part, } \Omega(p) = \left( C_r(p) + \frac{K}{R+Lp} (U(p) - K\Omega(p)) \right) \frac{1}{f+Jp}.$$

$$\text{On a donc } (f+Jp)\Omega(p) = C_r(p) + U(p) \frac{K}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow (f+Jp)\Omega(p) + \frac{K^2}{R+Lp}\Omega(p) = C_r(p) + U(p) \frac{K}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow \left( (f+Jp) + \frac{K^2}{R+Lp} \right) \Omega(p) = C_r(p) + U(p) \frac{K}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow \frac{K^2 + (f+Jp)(R+Lp)}{R+Lp} \Omega(p) = C_r(p) + U(p) \frac{K}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow \Omega(p) = \left( C_r(p) + U(p) \frac{K}{R+Lp} \right) \frac{R+Lp}{K^2 + (f+Jp)(R+Lp)}.$$

Dès lors plusieurs schéma-blocs peuvent répondre à la question. Par exemple,  $A(p) = 1$ ,  $B(p) = \frac{K}{R+Lp}$ ,

$$C(p) = \frac{R+Lp}{K^2 + (f+Jp)(R+Lp)}.$$

En poursuivant, on a aussi :  $\Omega(p) = (C_r(p)(R+Lp) + U(p)K) \frac{1}{K^2 + (f+Jp)(R+Lp)}$ .

$$\text{On a donc aussi, } A(p) = R+Lp, B(p) = K, C(p) = \frac{1}{K^2 + (f+Jp)(R+Lp)}$$

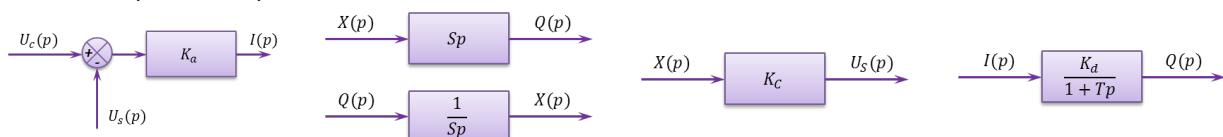
### Exercice 96 – Vérin\*

**B2-07** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le schéma-blocs.

On a :

- $U_c(p) = \frac{1}{K_a} I(p) + U_s(p)$
- $Q(p) = Sp X(p)$
- $U_S(p) = K_C \cdot X(p)$
- $F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1+Tp}$



### Exercice 97 – Banc d'épreuve hydraulique \*

**B2-07** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déduire de la relation précédente l'équation reliant  $Z(p)$ ,  $P_e(p)$ ,  $P_h(p)$ , et  $\text{Poids}(p) = Mg/p$ , transformées de Laplace de  $z(t)$ ,  $P_e(t)$ ,  $P_h(t)$  et du poids perçu comme une perturbation. Les conditions initiales sont supposées nulles.

**Correction**  $M p^2 Z(p) = S_h P_h(p) - S_e P_e(p) t - \frac{Mg}{p} - f p Z(p)$

**Question 2** En déduire, en tenant compte de l'équation du débit, deux équations liant  $L(p)$ ,  $P_e(p)$  et  $Q_e(p)$ , transformées de Laplace de  $L(t)$ ,  $P_e(t)$  et  $Q_e(t)$ .

**Correction**  $Q_e(p) = (S_a - S_b)p L(p) + \frac{V_t}{B_e} p P_e(p)$

Les conditions initiales sont supposées nulles.

**Question 3** Compléter le schéma-blocs de l'ensemble (sans le distributeur hydraulique), l'entrée étant la pression d'huile régulée  $P_r(p)$  et la sortie la pression d'épreuve dans le tube  $P_e(p)$ .

### Correction

#### Exercice 98 – Fonctions de transfert\*

B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

**Question 3** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

#### Exercice 99 – Calcul de FTBO\*

B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

**Question 2** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

**Question 3** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

**Question 4** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

#### Exercice 100 – Calcul de FTBO\*

B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

**Question 2** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

**Question 3** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

**Question 4** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

#### 2.5.4 Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables

##### Exercice 101 – Parallélépipède\*

B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en G, en A puis O.

##### Exercice 102 – Parallélépipède percé\*

B2-10 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$ , en  $A$  puis  $O$ .

### Exercice 103 – Cylindre percé \*

**B2-10** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$  puis en  $O$ .

### Exercice 104 – Cylindre percé \*

**B2-10** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $G$  puis en  $O$ .

### Exercice 105 – Disque \*\*

**B2-10** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $O$ .

### Exercice 106 – Disque \*\*

**B2-10** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la position du centre d'inertie  $G$  du solide.

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie du solide en  $O$ .

### Exercice 107 – Banc Balafre \*

**B2-10** Pas de corrigé pour cet exercice.

#### Données et hypothèses

- On note  $\overrightarrow{BM} = z \overrightarrow{z_0} + R_J \overrightarrow{u}(\theta)$  où  $R_J$  est le rayon du joint avec  $R_J = 175\text{ mm}$ ;
- la longueur du joint est  $L_J = 150\text{ mm}$ . La position du point  $B$ , centre du joint est  $\overrightarrow{OB} = z_B \overrightarrow{z_0}$  avec  $z_B = 425\text{ mm}$ ;
- Le coeur de butée a une masse  $M_{CB} = 40\text{ kg}$  et la position de son centre d'inertie  $G_{CB}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB} \overrightarrow{z_0}$  avec  $L_{CB} = 193\text{ mm}$ ;
- L'ensemble  $JR = \{\text{Joint(rotor)} + \text{Butée double}\}$  a une masse  $M_{JR} = 100\text{ kg}$  et la position de son centre d'inertie  $G_{JR}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{JR}} = L_{JR} \overrightarrow{z_0}$  avec  $L_{JR} = 390\text{ mm}$ . On notera  $I_{G_{JR}}(JR) = \begin{pmatrix} A_{JR} & -F_{JR} & -E_{JR} \\ -F_{JR} & B_{JR} & -D_{JR} \\ -E_{JR} & -D_{JR} & C_{JR} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{JR}}$

la matrice d'inertie de l'ensemble  $JR$  au point  $G_{JR}$  exprimée dans une base  $\mathcal{B}_{JR} = (\overrightarrow{x_{JR}}, \overrightarrow{y_{JR}}, \overrightarrow{z_0})$  liée à  $JR$ ;

- Les positions des points  $A_4$  et  $A_8$  sont paramétrées par  $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \overrightarrow{z_0} - R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  et  $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  avec  $z_4 = 280\text{ mm}$  et  $R_{CB} = 150\text{ mm}$ .

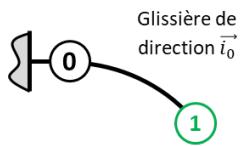
**Question 1** Déterminer l'expression de la coordonnée  $z_G$  de  $\overrightarrow{OG}$  selon  $\overrightarrow{z_0}$ . Faire l'application numérique.

**Question 2** Sachant que l'ensemble  $JR$  possède une symétrie de révolution par rapport à  $(O, \overrightarrow{z_0})$ , simplifier la matrice d'inertie  $I_{G_{JR}}(JR)$ .

### 2.5.5 Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique

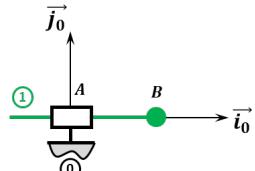
#### Exercice 108 – Mouvement T – \*

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.



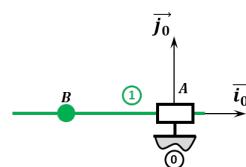
**Question 2** Retracer le

schéma cinématique pour  $\lambda = 10 \text{ mm}$ .



**Question 3** Retracer le

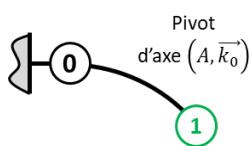
schéma cinématique pour  $\lambda = -20 \text{ mm}$ .



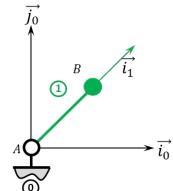
### Exercice 109 – Mouvement R \*

B2-12

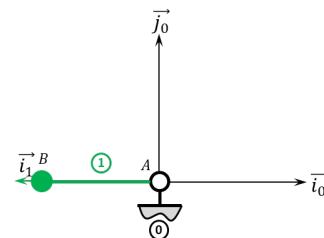
**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.



**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ .



**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \pi \text{ rad}$ .



### Exercice 110 – Mouvement TT – \*

B2-12

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

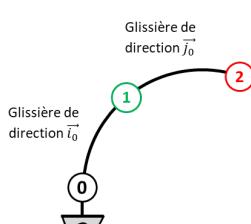


schéma cinématique pour  $\lambda = 10 \text{ mm}$  et  $\mu = 10 \text{ mm}$ .

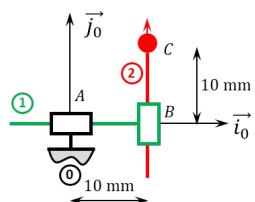
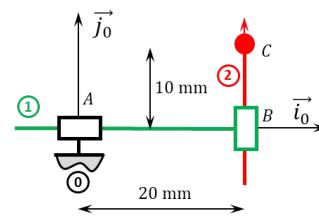


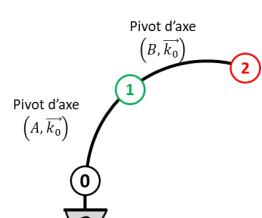
schéma cinématique pour  $\lambda = 20 \text{ mm}$  et  $\mu = 10 \text{ mm}$ .



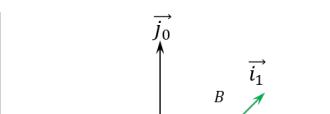
### Exercice 111 – Mouvement RR \*

B2-12

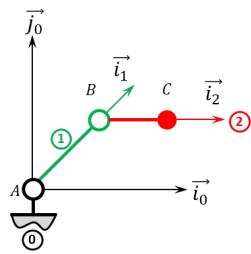
**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.



**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$  et  $\varphi = \pi \text{ rad}$ .

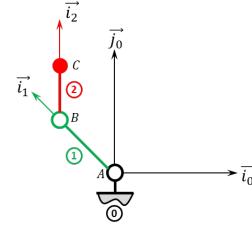


**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  rad et  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$  rad.



et  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$  rad.

**Question 4** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  rad



### Exercice 112 – Mouvement RT \*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  rad et  $\lambda(t) = 20$  mm.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{-\pi}{4}$  rad et  $\lambda(t) = -20$  mm.

### Exercice 113 – Mouvement RT \*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  rad et  $\lambda(t) = 20$  mm.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{-\pi}{4}$  rad et  $\lambda(t) = -20$  mm.

### Exercice 114 – Mouvement RR 3D \*\*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique en 3D pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$  rad et  $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}$  rad.

### Exercice 115 – Mouvement RR 3D \*\*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique en 3D pour  $\theta(t) = \pi$  rad et  $\varphi(t) = -\frac{\pi}{4}$  rad.

### Exercice 116 – Mouvement RT – RSG \*\*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0$  rad et  $\lambda(t) = 20$  mm. On notera  $I_1$  le point de contact entre 0 et 1.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$  rad et  $\lambda(t) = 30$  mm. On notera  $I_2$  le point de contact entre 0 et 1. On précisera la position des points  $I_{0,0}$  et  $I_{0,1}$ , points résultants de la rupture de contact lors du passage de  $\theta(t)$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

### Exercice 117 – Pompe à palettes \*\*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0 \text{ rad}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \pi \text{ rad}$ .

**Question 4** En déduire la course de la pièce 2.

### Exercice 118 – Pompe à pistons radiaux \*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0 \text{ rad}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

**Question 4** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

**Question 5** En déduire la course de la pièce 2.

### Exercice 119 – Système bielle manivelle \*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

**Question 4** En déduire la course de la pièce 3.

### Exercice 120 – Système de transformation de mouvement \*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0 \text{ rad}$ .

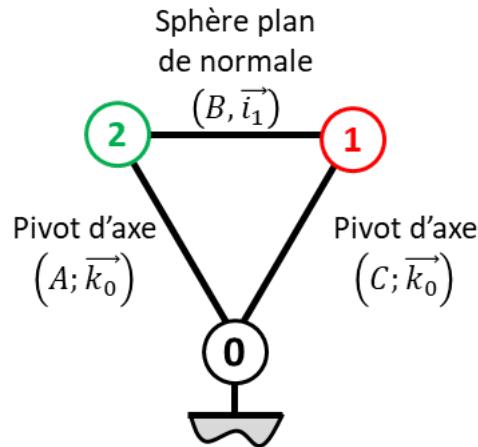
**Question 4** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

**Question 5** En déduire la course de la pièce 3.

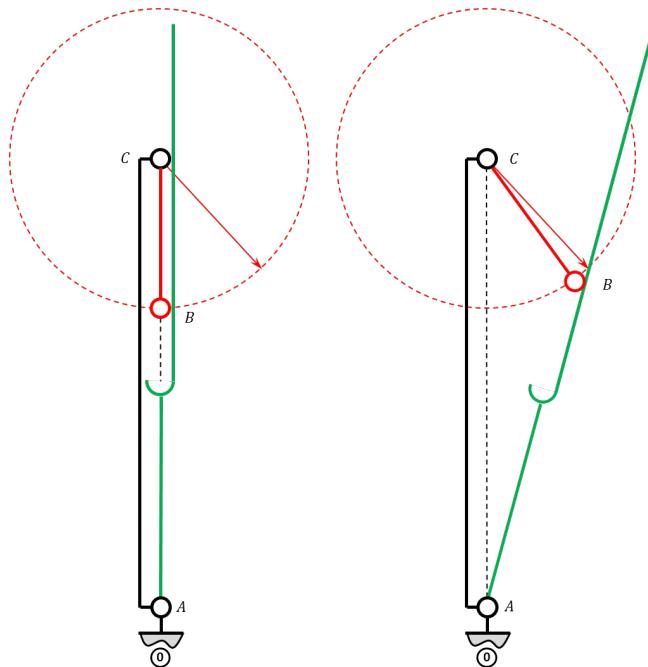
### Exercice 121 – Barrière Sympact \*\*

**B2-12**

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.



**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$  rad.

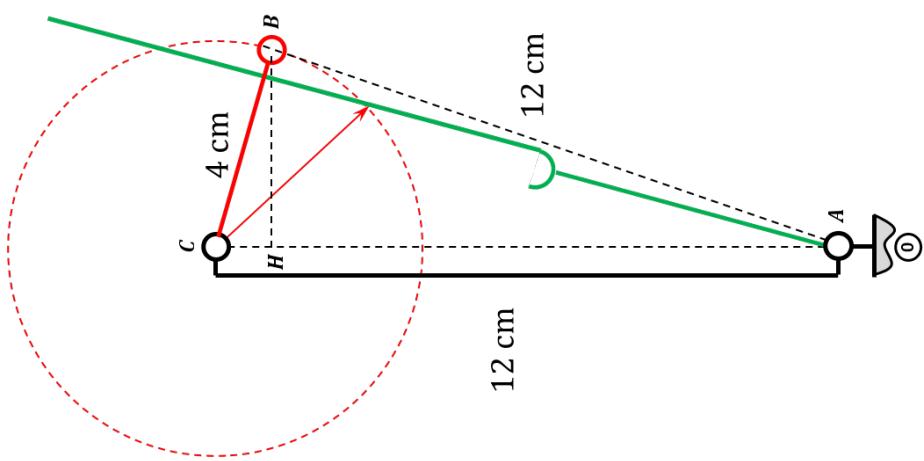


**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 75^\circ$ .

**Question 4** Dans l'hypothèse où la pièce **1** peut faire des tours complets, quelle doit être la longueur minimale de la pièce **2**.

Dans cas, dans le pire des cas, A, B et C sont alignés (avec B au-dessus de C). Il faut donc  $AB = AC + CB = 160$  mm.

**Question 5** Dans l'hypothèse où la pièce **2** fait 12 cm, quel sera le débattement maximal de la pièce **1**.  
Comme je suis paresseux, j'ai réalisé la construction avec geogebra. On mesure  $160,8^\circ$ .



### Exercice 122 – Barrière Sympact \*\*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$  rad.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = -\frac{\pi}{2}$  rad.

### Exercice 123 – Pousoir \*\*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{4}$  rad.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = -\frac{\pi}{4}$  rad.

### Exercice 124 – Système 4 barres \*\*\*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta_1(t) = 0$  rad.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta_1(t) = -\frac{\pi}{2}$  rad.

**Question 4** En déduire la course angulaire ( $\theta_4$ ) de la pièce 3.

### Exercice 125 – Maxpid \*\*\*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

Par ailleurs  $a = 107,1$  mm,  $b = 80$  mm,  $c = 70$  mm,  $d = 80$  mm. Le pas de la vis est de 4 mm.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0$  rad.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$  rad.

**Question 4** En déduire la course de  $\lambda$ .

### Exercice 126 – Maxpid \*\*\*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

Par ailleurs  $a = 107,1$  mm,  $b = 80$  mm,  $c = 70$  mm,  $d = 80$  mm. Le pas de la vis est de 4 mm.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0 \text{ rad}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

**Question 4** En déduire la course de  $\lambda$ .

### Exercice 127 – Mouvement RR – RSG \*\*

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0 \text{ rad}$  et  $\varphi(t) = 0 \text{ rad}$ . On notera  $I_0$  le point de contact entre **0** et **1**.

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  et  $\varphi(t) = 0 \text{ rad}$ . On notera  $I_1$  le point de contact entre **0** et **1**. On précisera la position des points  $I_{0,0}$  et  $I_{0,1}$ , points résultants de la rupture de contact lors du passage de  $\theta(t)$  de  $0$  à  $\frac{\pi}{2}$ .

**Question 4** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  et  $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

### Exercice 128 – Tabouret \*\*

**B2-12**

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Proposer un schéma cinématique permettant de modéliser la liaison entre l'assise et le sol.

### Exercice 129 – Tabouret \*\*

**B2-12**

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Proposer 3 schémas cinématiques permettant de modéliser les contacts entre le sol et le tabouret.

### 2.5.6 B2-13 – Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides

#### Exercice 130 – Mouvement T – \*

**C2-05**

**B2-13**

**Question 1** Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.

**1** est en translation de direction  $\vec{i}_0$  par rapport à **0**.

**Question 2** Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **1** par rapport à **0**.

On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ . La trajectoire du point **B** est donc donnée par  $\begin{cases} x_B(t) = \lambda(t) \\ y_B(t) = 0 \\ z_B(t) = 0 \end{cases}$  dans le repère  $(A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{z}_0)$ .

#### Exercice 131 – Mouvement R \*

**C2-05**

**B2-13**

**Question 1** Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.

**1** est en rotation de centre **A** et d'axe  $\vec{k}_0$  par rapport à **0**.

**Question 2** Quelle est la trajectoire du point **B** appartenant à **1** par rapport à **0**.

**B** est en rotation par rapport à **0** ( cercle de centre **A** et de rayon **R**).

**Question 3** Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point **B**, point appartenant à **1** par rapport à **0**.

On a  $\overrightarrow{AB} = R \overrightarrow{i_1} = R \cos \theta \overrightarrow{i_0} + R \sin \theta \overrightarrow{j_0}$ . La trajectoire du point  $B$  est donc donnée par  $\begin{cases} x_B(t) = R \cos \theta(t) \\ y_B(t) = R \sin \theta(t) \\ z_B(t) = 0 \end{cases}$

dans le repère  $(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{z_0})$ .

### Exercice 132 – Mouvement TT – \*

C2-05

B2-13

**Question 1** Quel est le mouvement de **2** par rapport à **0**.

Le point  $C$  a un mouvement quelconque dans le plan  $(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$ .

**Question 2** Donner l'équation du mouvement du point  $C$  dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.

On a  $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \overrightarrow{i_0} + \mu(t) \overrightarrow{j_0}$  et donc, on a directement  $\begin{cases} x_C(t) = \lambda(t) \\ y_C(t) = \mu(t) \\ z_C(t) = 0 \end{cases}$  dans le repère  $(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0})$ .

On souhaite que le point  $C$  réalise un cercle de centre  $A$  et de rayon  $R = 10 \text{ cm}$  à la vitesse  $v = 0,01 \text{ ms}^{-1}$ .

**Question 3** Donner la relation liant  $\theta(t)$ ,  $v$  et  $R$ .

Par ailleurs la vitesse du point  $C$  est donnée par  $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta} \overrightarrow{e_\theta}$ .

On a  $v = R \dot{\theta}(t)$ . Par intégration,  $\theta(t) = \frac{v}{R} t$  (avec  $\theta(t) = 0 \text{ rad}$  pour  $t = 0 \text{ s}$ ).

**Question 4** Donner les expressions de  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$  permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de  $v$ ,  $R$  et du temps.

Exprimons la trajectoire du point  $C$  :  $\overrightarrow{AC} = R \overrightarrow{e_r} = R \cos \theta(t) \overrightarrow{i_0} + R \sin \theta(t) \overrightarrow{j_0}$ . Par identification  $\lambda(t) = R \cos \theta(t)$  et  $\mu(t) = R \sin \theta(t)$ .

Au final,  $\begin{cases} \lambda(t) = R \cos\left(\frac{v}{R} t\right) \\ \mu(t) = R \sin\left(\frac{v}{R} t\right) \end{cases}$ .

**Question 5** En utilisant Python, tracer  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$  et la trajectoire générée.

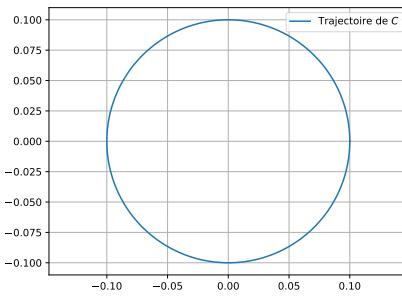
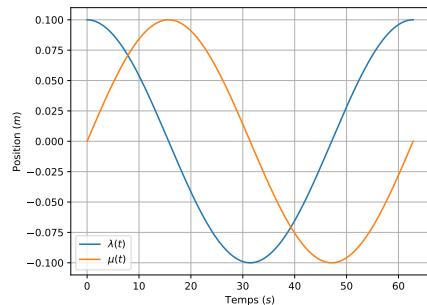
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
R = 0.1 # m
v = 0.01 # m.s-1

# Temps pour faire un tour
T = 2*m.pi*R/v

les_t = np.linspace(0, T, 200)
les_lambda = R*np.cos(v/R*les_t)
les_mu = R*np.sin(v/R*les_t)
plt.grid()
plt.plot(les_t, les_lambda, label="$\lambda(t)$")
plt.plot(les_t, les_mu, label="$\mu(t)$")
plt.xlabel("Temps ($s$)")
plt.ylabel("Position ($m$)")
plt.legend()
# plt.show()
plt.savefig("03_TT_01_c.pdf")
plt.cla()

plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.plot(les_lambda, les_mu, label="Trajectoire de $C$")
plt.legend()
# plt.show()
```

```
plt.savefig("03_TT_02_c.pdf")
```



### Exercice 133 – Mouvement RR \*

C2-05

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Donner l'ensemble des positions accessibles par le point C.

Le point C peut atteindre tous les points situés compris entre deux cercles de rayon 5 mm et de rayon 25 mm.

**Question 2** Donner l'équation du mouvement du point C dans son mouvement de 2 par rapport à 0.

On a  $\overrightarrow{AC} = R \overrightarrow{i_1} + L \overrightarrow{i_2}$ . On projetant ce vecteur dans le repère  $\mathcal{R}_A i_0 j_0 k_0$  on a

$$\overrightarrow{AC} = R(\cos \theta \overrightarrow{i_0} + \sin \theta \overrightarrow{j_0}) + L(\cos(\theta + \varphi) \overrightarrow{i_0} + \sin(\theta + \varphi) \overrightarrow{j_0}). \text{ On a donc : } \begin{cases} x_C(t) = R \cos \theta + L \cos(\theta + \varphi) \\ y_C(t) = R \sin \theta + L \sin(\theta + \varphi) \\ z_C(t) = 0 \end{cases}$$

dans le repère  $(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0})$ .

**Question 3** Donner la durée du mouvement si C se déplace à vitesse quelconque.

Distance à parcourir : 0,05 m. Durée du parcours :  $T = \frac{0,05}{v}$ .

**Question 4** Donner l'équation paramétrique que doit suivre le point C.

$\forall t \in \left[0, \frac{0,05}{v}\right], y_C(t) = 0,025$ . Pour  $t = 0$ ,  $x_C(0) = -0,025$ . On a alors  $x_C(t) = -0,025 + vt$ .

$$\text{Au final, } \forall t \in \left[0, \frac{0,05}{v}\right], \begin{cases} x_C(t) = -0,025 + vt \\ y_C(t) = 0,025 \\ z_C(t) = 0 \end{cases} \text{ dans le repère } (A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}).$$

**Question 5** Donner les expressions de  $\theta(t)$  et  $\varphi(t)$  permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse  $v = 0,01 \text{ ms}^{-1}$ .

$$\begin{aligned} &\text{Afin que le point C suive un segment, il faut donc que } \begin{cases} -0,025 + vt = R \cos \theta + L \cos(\theta + \varphi) \\ 0,025 = R \sin \theta + L \sin(\theta + \varphi) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -0,025 + vt - R \cos \theta = L \cos(\theta + \varphi) \\ 0,025 - R \sin \theta = L \sin(\theta + \varphi) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (-0,025 + vt - R \cos \theta)^2 = L^2 \cos^2(\theta + \varphi) \\ (0,025 - R \sin \theta)^2 = L^2 \sin^2(\theta + \varphi) \end{cases} \\ &\Rightarrow (-0,025 + vt - R \cos \theta)^2 + (0,025 - R \sin \theta)^2 = L^2 \\ &\Rightarrow 0,025^2 + v^2 t^2 + R^2 \cos^2 \theta - 2 \times 0,025 v t + 2 R \cos \theta - v t R \cos \theta + 0,025^2 + R^2 \sin^2 \theta - 2 \times 0,025 R \sin \theta = L^2 \\ &\Rightarrow \frac{L^2}{R} - \frac{2 \times 0,025^2}{R} - \frac{v^2 t^2}{R} - R + 2 \times 0,025 \frac{v t}{R} \end{aligned}$$

Équation trigonométrique de la forme  $a \cos x + b \sin x = c$ .

Il y a donc une solution analytique. On peut aussi résoudre l'équation numériquement.

Une fois  $\theta(t)$  déterminée, on a  $0,025 - R \sin \theta = L \sin(\theta + \varphi) \Rightarrow \arcsin\left(\frac{0,025 - R \sin \theta(t)}{L}\right) - \theta(t) = \varphi(t)$

**Question 6** En utilisant Python, tracer  $\theta(t)$ ,  $\varphi(t)$  et la trajectoire générée.

### Exercice 134 – Mouvement RT \*

C2-05

**B2-13** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Donner l'ensemble des positions accessibles par le point  $B$ .

**Question 2** Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point  $B$  dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.

On souhaite que le point  $B$  réalise un segment entre les points  $[-25, 25]$  et  $[25, 25]$ .

**Question 3** Donner les expressions de  $\theta(t)$  et  $\lambda(t)$  permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse  $v = 0,01 \text{ m s}^{-1}$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\theta(t)$ ,  $\lambda(t)$  et la trajectoire générée.

**Exercice 135 – Mouvement RT \***
**C2-05**
**B2-13** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Donner l'ensemble des positions accessibles par le point  $B$ .

**Question 2** Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point  $B$  dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.

On souhaite que le point  $B$  réalise un segment entre les points  $[-25, 25]$  et  $[25, 25]$ .

**Question 3** Donner les expressions de  $\theta(t)$  et  $\lambda(t)$  permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse  $v = 0,01 \text{ m s}^{-1}$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\theta(t)$ ,  $\lambda(t)$  et la trajectoire générée.

**Exercice 136 – Mouvement RR 3D \*\***
**C2-05**
**B2-13**

**Question 1** Donner l'ensemble des positions accessibles par le point  $C$ .

Ça ressemble à un tore, mais c'est pas vraiment un tore :) (aussi bien l'intérieur que l'extérieur...)...

**Question 2** Donner l'équation du mouvement du point  $C$  dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.

On a  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = R \overrightarrow{i}_1 + \ell \overrightarrow{i}_2 + r \overrightarrow{j}_2$ . Soit  $\overrightarrow{AC} = (R + \ell)(\cos \theta \overrightarrow{i}_0 + \sin \theta \overrightarrow{j}_0) + r(\cos \varphi \overrightarrow{j}_1 + \sin \varphi \overrightarrow{k}_1) = (R + \ell)(\cos \theta \overrightarrow{i}_0 + \sin \theta \overrightarrow{j}_0) + r(\cos \varphi (\cos \theta \overrightarrow{j}_0 - \sin \theta \overrightarrow{i}_0) + \sin \varphi \overrightarrow{k}_0)$ .

$$\text{On a donc : } \begin{cases} x_C(t) = (R + \ell) \cos \theta - r \cos \varphi \sin \theta \\ y_C(t) = (R + \ell) \sin \theta + r \cos \varphi \cos \theta \\ z_C(t) = r \sin \varphi \end{cases} \text{ dans le repère } (A; \overrightarrow{i}_0, \overrightarrow{j}_0, \overrightarrow{k}_0).$$

**Exercice 137 – Mouvement RR 3D \*\***
**C2-05**
**B2-13**

**Question 1** Donner l'ensemble des positions accessibles par le point  $C$ .

Le point  $C$  peut décrire un tore de grand rayon  $R$  et de petit rayon  $L$  (surface torique uniquement, pas l'intérieur du tore).

**Question 2** Donner l'équation de mouvement du point  $C$  dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.

On a  $\overrightarrow{AC} = H \overrightarrow{j}_1 + R \overrightarrow{i}_1 + L \overrightarrow{i}_2 = H \overrightarrow{j}_1 + R \cos \theta \overrightarrow{i}_0 - R \sin \theta \overrightarrow{k}_0 + L \cos \varphi \overrightarrow{i}_1 + L \sin \varphi \overrightarrow{j}_1 = H \overrightarrow{j}_1 + R \cos \theta \overrightarrow{i}_0 - R \sin \theta \overrightarrow{k}_0 + L \cos \varphi (\cos \theta \overrightarrow{i}_0 - \sin \theta \overrightarrow{k}_0) + L \sin \varphi \overrightarrow{j}_0$ .

$$\text{On a donc : } \begin{cases} x_C(t) = R \cos \theta + L \cos \varphi \cos \theta \\ y_C(t) = H + L \sin \varphi \\ z_C(t) = -R \sin \theta - L \cos \varphi \sin \theta \end{cases} \text{ dans le repère } (A; \overrightarrow{i}_0, \overrightarrow{j}_0, \overrightarrow{k}_0).$$

**Exercice 138 – Mouvement T – \***
**B2-13**

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  au point B.

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}.$$

$$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0.$$

**Question 2** Déterminer  $\overline{\Gamma(B,1/0)}$ .

$$\overline{\Gamma(B,1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(B,1/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0.$$

**Exercice 139 – Mouvement R \***

B2-13

**Question 1** Déterminer  $\overline{V(B,1/0)}$  par dérivation vectorielle.

$$\overline{V(B,1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0}. \text{ Or } \frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_1} + \overline{\Omega(1/0)} \wedge \vec{i}_1 = \vec{0} + \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{j}_1.$$

D'où  $\overline{V(B,1/0)} = R \dot{\theta} \vec{j}_1$ .

**Question 2** Déterminer  $\overline{V(B,1/0)}$  par une autre méthode.

$$\overline{V(B,1/0)} = \overline{V(A,1/0)} + \overline{BA} \wedge \overline{\Omega(1/0)} = \vec{0} - R \vec{i}_1 \wedge \dot{\theta} \vec{k}_0 = R \dot{\theta} \vec{j}_1.$$

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  au point B.

$$\text{On a directement } \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B.$$

**Question 4** Déterminer  $\overline{\Gamma(B,1/0)}$ .

$$\overline{\Gamma(B,1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(B,1/0)}]_{\mathcal{R}_0} = R \ddot{\theta} \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{i}_1. \text{ (En effet, } \frac{d}{dt} [\vec{j}_1]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\vec{j}_1]_{\mathcal{R}_1} + \overline{\Omega(1/0)} \wedge \vec{j}_1 = \vec{0} + \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{j}_1 = -\dot{\theta} \vec{i}_1.)$$

**Exercice 140 – Mouvement TT – \***

B2-13

**Question 1** Déterminer  $\overline{V(C,2/0)}$  par dérivation vectorielle ou par composition.

$$\text{Par dérivation vectorielle, on a : } \overline{V(C,2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0.$$

$$\text{Par composition du torseur cinématique, on a : } \overline{V(C,2/0)} = \overline{V(C,2/1)} + \overline{V(C,1/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_1} + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0.$$

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}.$$

**Question 3** Déterminer  $\overline{\Gamma(C,2/0)}$ .

$$\overline{\Gamma(C,2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(C,2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \ddot{\mu}(t) \vec{j}_0.$$

**Exercice 141 – Mouvement RR \***

B2-13

**Question 1** Déterminer  $\overline{V(C,2/0)}$  par dérivation vectorielle.

$$\overline{V(C,2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_0} = R \frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} + L \frac{d}{dt} [\vec{i}_2]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta} \vec{j}_1 + L(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{j}_2.$$

$$(\text{Avec } \frac{d}{dt} [\vec{i}_2]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\vec{i}_2]_{\mathcal{R}_2} + \overline{\Omega(2/0)} \wedge \vec{i}_2 = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{k}_0 \wedge \vec{i}_2 = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{j}_2).$$

**Question 2** Déterminer  $\overline{V(C,2/0)}$  par composition.

On a  $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)}$ .  
 $\overrightarrow{V(C,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = -L \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{k_0} = L \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2}$ .  
 $\overrightarrow{V(C,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = (-L \overrightarrow{i_2} - R \overrightarrow{i_1}) \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} = \dot{\theta} (L \overrightarrow{j_2} + R \overrightarrow{j_1})$ .  
 Au final,  $\overrightarrow{V(C,2/0)} = L \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2} + \dot{\theta} (L \overrightarrow{j_2} + R \overrightarrow{j_1})$ .

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$ . Pour sommer les torseurs, il faut écrire les vecteurs vitesses au même point, ici en C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{k_0} \\ R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + L(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2} \end{array} \right\}_C$$

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$ .

$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{V(C,2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} \left[ R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + L(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{j_2} \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

De plus,  $\frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{j_1} \right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{j_1} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta} \overrightarrow{i_1}$  et  $\frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{j_2} \right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{j_2} \right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_2} = -(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \overrightarrow{i_2}$ .

On a donc  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = R \ddot{\theta} \overrightarrow{j_1} - R \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_1} + L(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \overrightarrow{j_2} - L(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \overrightarrow{i_2}$ .

**Exercice 142 – Mouvement RT \***

B2-13

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(B,2/0)}$  par dérivation vectorielle.

$$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{AB} \right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} \left[ \lambda(t) \overrightarrow{i_1} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1} + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1}.$$

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(B,2/0)}$  par composition.

$$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)}.$$

$$\forall P, \overrightarrow{V(P,2/1)} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1}.$$

$$\text{Par ailleurs } \overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = -\lambda(t) \overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\theta}(t) \overrightarrow{k_0} = \lambda(t) \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1}.$$

$$\text{Au final, } \overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1} + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1}.$$

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point B.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}(t) \overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1} + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_B.$$

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$ .

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{V(B,2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} - \lambda(t) \dot{\theta}(t)^2 \overrightarrow{i_1} = (\ddot{\lambda}(t) - \lambda(t) \dot{\theta}(t)^2) \overrightarrow{i_1} + (\dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t) + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t)) \overrightarrow{j_1}.$$

**Exercice 143 – Mouvement RT \***

B2-13

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(C,2/0)}$  par dérivation vectorielle ou par composition.

### Méthode 1 – Dérivation vectorielle

$$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{AC} \right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{AB} \right]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{BC} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{i_2} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_2}$$

### Méthode 2 – Composition du torseur cinématique

$$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)}$$

$$\text{Pour tout point } P, \overrightarrow{V(P,1/0)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{i_0}.$$

$$\overrightarrow{V(C,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = -R \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} = R \dot{\theta} \overrightarrow{j_2}.$$

$$\text{On a donc } \overrightarrow{V(C,2/0)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{i_0} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_2}.$$

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \\ \overrightarrow{V(C,2/0)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{i_0} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_2} \end{array} \right\}_C.$$

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$ .

$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{V(C,2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R \frac{d}{dt} \left[ \dot{\theta} \overrightarrow{j_2} \right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R (\ddot{\theta} \overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_2}).$$

**Exercice 144 – Mouvement RR 3D \***

B2-13

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(C,2/0)}$  par dérivation vectorielle.

$$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{AC} \right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} \left[ R \overrightarrow{i_1} + \ell \overrightarrow{i_2} + r \overrightarrow{j_2} \right]_{\mathcal{R}_0}.$$

Calculons :

- $\frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{i_1} \right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}$ .
- $\frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{i_2} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} (\overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{i_2})$ .
- $\frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{j_2} \right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = (\dot{\theta} \overrightarrow{k_0} + \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1}) \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{j_2} + \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{j_2} = -\dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2}$ .

On a donc,  $\overrightarrow{V(C,2/0)} = (R + \ell) \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} - r \dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + r \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2}$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(C,2/0)}$  par composition.

On a  $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)}$ .

- $\overrightarrow{V(C,2/1)} :$  on passe par  $B$  car  $B$  est le centre de la pivot entre 2 et 1 et que  $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{0}$ .  $\overrightarrow{V(C,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = (-\ell \overrightarrow{i_2} - r \overrightarrow{j_2}) \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1} = -\ell \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1} - r \overrightarrow{j_2} \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1} = r \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2}$ .
- $\overrightarrow{V(C,1/0)} :$  on passe par  $A$  car  $A$  est le centre de la pivot entre 1 et 0 et que  $\overrightarrow{V(A,1/0)} = \overrightarrow{0}$  est nul.  $\overrightarrow{V(C,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = (-r \overrightarrow{j_2} - \ell \overrightarrow{i_2} - R \overrightarrow{i_1}) \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{k_1} = -r \dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + \ell \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}$

Au final,  $\overrightarrow{V(C,2/0)} = r \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2} - r \dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + \ell \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}$ .

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1} \\ (R + \ell) \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} - r \dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + r \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2} \end{array} \right\}_C$$

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} &= \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{V(C,2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ (R + \ell) \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} - r \dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + r \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2} \right]_{\mathcal{R}_0} \end{aligned}$$

Calculons :

- $\frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{i_1} \right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}$ .
- $\frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{j_1} \right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta} \overrightarrow{i_1}$ .
- $\frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{k_2} \right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{k_2} = (\dot{\theta} \overrightarrow{k_0} + \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1}) \wedge \overrightarrow{k_2} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{k_2} + \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{k_2} = \dot{\theta} \sin \varphi \overrightarrow{i_1} - \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2}$ .

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = (R + \ell) \ddot{\theta} \overrightarrow{j_1} - (R + \ell) \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_1} - r \ddot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + r \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi \overrightarrow{i_1} - r \dot{\theta}^2 \cos \varphi \overrightarrow{j_1} + r \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2} + r \dot{\varphi} (\dot{\theta} \sin \varphi \overrightarrow{i_1} - \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2})$ .

**Exercice 145 – Mouvement RR 3D \***

B2-13

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(C,2/0)}$  par dérivation vectorielle.

$$\overline{V(C,2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [H \overrightarrow{j_1} + R \overrightarrow{i_1} + L \overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_0}.$$

Calculons :

- $\frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_0}]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{0};$
- $\frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_0} = \overline{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{i_1} = -\dot{\theta} \overrightarrow{k_1};$
- $\frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_0} = \overline{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{i_2} = (\dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2}) \wedge \overrightarrow{i_2} = \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{i_2} + \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2} \wedge \overrightarrow{i_2} = -\dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2}.$

On a donc  $\overline{V(C,2/0)} = -R\dot{\theta} \overrightarrow{k_1} + L(-\dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2}).$

**Question 2** Déterminer  $\overline{V(C,2/0)}$  par composition du vecteur vitesse.

$$\overline{V(C,2/0)} = \overline{V(C,2/1)} + \overline{V(C,1/0)}.$$

- Pour calculer  $\overline{V(C,2/1)}$ , passons par B car  $\overline{V(B,2/1)} = \overrightarrow{0} : \overline{V(C,2/1)} = \overline{V(B,2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overline{\Omega(2/1)} = \overrightarrow{CB} \wedge \overline{\Omega(2/1)} = -L \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2} = L\dot{\varphi} \overrightarrow{j_2}.$
- Pour calculer  $\overline{V(C,1/0)}$ , passons par A car  $\overline{V(A,1/0)} = \overrightarrow{0} : \overline{V(C,1/0)} = \overline{V(A,1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overline{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{CA} \wedge \overline{\Omega(1/0)} = -(\overrightarrow{H j_1} + \overrightarrow{R i_1} + \overrightarrow{L i_2}) \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta} (\overrightarrow{R i_1} \wedge \overrightarrow{j_1} + \overrightarrow{L i_2} \wedge \overrightarrow{j_1}) = -\dot{\theta} (R \overrightarrow{k_1} + L \cos \varphi \overrightarrow{k_1}).$

Au final,  $\overline{V(C,2/0)} = L\dot{\varphi} \overrightarrow{j_2} - \dot{\theta} (R \overrightarrow{k_1} + L \cos \varphi \overrightarrow{k_1}).$

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2} + \dot{\theta} \overrightarrow{j_0} \\ L\dot{\varphi} \overrightarrow{j_2} - \dot{\theta} (R \overrightarrow{k_1} + L \cos \varphi \overrightarrow{k_1}) \end{array} \right\}_C.$$

**Question 4** Déterminer  $\overline{\Gamma(C,2/0)}$ .

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma(C,2/0)} &= \frac{d}{dt} [\overline{V(C,2/0)}]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{d}{dt} [L\dot{\varphi} \overrightarrow{j_2} - \dot{\theta} (R \overrightarrow{k_1} + L \cos \varphi \overrightarrow{k_1})]_{\mathcal{R}_0}. \end{aligned}$$

Calculons :

- $\frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_0} = \overline{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = (\dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2}) \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{j_2} + \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2} \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot{\theta} \sin \varphi \overrightarrow{k_1} - \dot{\theta} \overrightarrow{i_2}.$
- $\frac{d}{dt} [\overrightarrow{k_1}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \overrightarrow{i_1}.$

$$\overline{\Gamma(C,2/0)} = L\ddot{\varphi} \overrightarrow{j_2} + L\dot{\varphi} (\dot{\theta} \sin \varphi \overrightarrow{k_1} - \dot{\theta} \overrightarrow{i_2}) - \dot{\theta} (R \overrightarrow{k_1} + L \cos \varphi \overrightarrow{k_1}) - \dot{\theta} (R \dot{\theta} \overrightarrow{i_1} + L \cos \varphi \dot{\theta} \overrightarrow{i_1} - L\dot{\varphi} \sin \varphi \overrightarrow{k_1}).$$

### Exercice 146 – Mouvement RT – RSG \*\*

B2-13

**Question 1** Déterminer  $\overline{V(B,2/0)}$ .

$$\overline{V(B,2/0)} = \overline{V(B,2/1)} + \overline{V(B,1/0)}.$$

D'une part,  $\overline{V(B,2/1)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{i_1}.$

D'autre part, en utilisant le roulement sans glissement en I,  $\overline{V(B,1/0)} = \overline{V(I,1/0)} + \overrightarrow{BI} \wedge \overline{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} + (-\lambda(t) \overrightarrow{i_1} - R \overrightarrow{j_0}) \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} = -\dot{\theta} (\lambda(t) \overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{k_0} + R \overrightarrow{j_0} \wedge \overrightarrow{k_0}) = \dot{\theta} (\lambda(t) \overrightarrow{j_1} - R \overrightarrow{i_0}).$

$$\text{Au final, } \overline{V(B,2/0)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{i_1} + \dot{\theta} (\lambda(t) \overrightarrow{j_1} - R \overrightarrow{i_0}).$$

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point B.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda} \overrightarrow{i_1} + \dot{\theta} (\lambda(t) \overrightarrow{j_1} - R \overrightarrow{i_0}) \end{array} \right\}_B.$$

**Question 3** Déterminer  $\overline{\Gamma(B,2/0)}$ .

$$\overline{\Gamma(B,2/0)} = \frac{d}{dt} [\overline{V(B,2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} + \ddot{\theta}(t) (\lambda(t) \overrightarrow{j_1} - R \overrightarrow{i_0}) + \dot{\theta}(t) (\dot{\lambda}(t) \overrightarrow{j_1} - \lambda(t) \dot{\theta} \overrightarrow{i_1}).$$

### Exercice 147 – Pompe à palettes \*

B2-13

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point B.

En utilisant la décomposition du vecteur cinématique, on a :  $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)}$ .

- $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1}$ .
  - $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = -\lambda(t) \overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\theta}(t) \overrightarrow{k_0} = \lambda(t) \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1}$ .
- $$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}(t) \overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1} + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_B.$$

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$ .

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{V(B,2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1} + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1} + \lambda(t) \ddot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1} - \lambda(t) \dot{\theta}^2(t) \overrightarrow{i_1}.$$

### Exercice 148 – Pompe à piston axial \*

B2-13

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme  $\lambda(t) = e \sin \theta + R$  ou encore  $\dot{\lambda}(t) = e \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$  (voir exercice 286).

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{j_0} \end{array} \right\}_C.$$

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$ .

$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{j_0}.$$

### Exercice 149 – Système bielle manivelle \*

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme  $\lambda(t) = \pm \sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)} + R \sin \theta(t)$  et  $\dot{\lambda}(t) = \pm \left( \frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)}} \right) + \dot{\theta}(t) R \cos \theta(t)$ . (à vérifier – voir exercice 287).

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point B.

On commence par calculer  $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(B,1/0)}$ .

• **Méthode 1 – dérivation vectorielle :**  $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \frac{d}{dt} [AB]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1}$ .

• **Méthode 2 – formule de changement de point :**  $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = -R \overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\theta} t \overrightarrow{k_0} = R \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1}$ .

$$\text{On a alors, } \{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}(t) \overrightarrow{k_0} \\ R \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_B.$$

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  et au point C.

$$\text{On a, } \{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}(t) \overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{j_0} \end{array} \right\}_C.$$

Par ailleurs, on peut remarquer que  $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/0)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/0)} = R \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1} + L \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi}(t) \overrightarrow{k_0} = R \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1} - L \dot{\varphi}(t) \overrightarrow{j_2}$ .

On a donc nécessairement  $\dot{\lambda}(t) \overrightarrow{j_0} = R \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1} - L \dot{\varphi}(t) \overrightarrow{j_2}$

$$\Rightarrow \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{j_0} = R \dot{\theta}(t) \left( \cos \theta(t) \overrightarrow{j_0} - \sin \theta(t) \overrightarrow{i_0} \right) - L \dot{\varphi}(t) \left( \cos \varphi(t) \overrightarrow{j_0} - \sin \varphi(t) \overrightarrow{i_0} \right).$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + L \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ \dot{\lambda}(t) = R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) - L \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) = L \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ \dot{\lambda}(t) - R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) = L \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \tan \varphi(t) = \frac{R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)}{\dot{\lambda}(t) - R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)}$$

Il resterait à supprimer  $\varphi(t)$  pour (espérons-le) retomber sur la loi entrée-sortie cinématique.

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$ .

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{V(B,2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} \left[ R \dot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1} \right]_{\mathcal{R}_0} = R \ddot{\theta}(t) \overrightarrow{j_1} - R \dot{\theta}^2(t) \overrightarrow{i_1}.$$

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$ .

$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{V(C,2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{j_0}.$$

**Exercice 150 – Système de transformation de mouvement \***

**B2-13** Pas de corrigé pour cet exercice.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme \*\*\* (voir exercice 288).

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(3/0)\}$  au point B.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B,3/0)}$ .

**Exercice 151 – Barrière Sympact \*\***

**B2-13** Pas de corrigé pour cet exercice.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme \*\*\* (voir exercice 289).

**Question 1** En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer  $\gamma(t)$  et  $\dot{\gamma}(t)$ .

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(3/2)\}$  au point B.

**Exercice 152 – Système 4 barres \*\*\***

**B2-13** Pas de corrigé pour cet exercice.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme \*\*\* (voir exercice 292). On définit le point G tel que  $\overrightarrow{OG} = L\overrightarrow{x_1}$ .

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  au point G.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(G,1/0)}$ .

**Exercice 153 – Maxpid \*\*\***

**B2-13** Pas de corrigé pour cet exercice.

Par ailleurs  $a = 107,1 \text{ mm}$ ,  $b = 80 \text{ mm}$ ,  $c = 70 \text{ mm}$ ,  $d = 80 \text{ mm}$ . Le pas de la vis est de 4 mm.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme \*\*\* (voir exercice 293).

On définit le point G tel que  $\overrightarrow{OG} = L\overrightarrow{x_4}$ .

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(4/0)\}$  au point G.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(G,4/0)}$ .

**Exercice 154 – Mouvement RR – RSG \*\***

**B2-13**

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(B,2/0)}$ .

En utilisant la décomposition du vecteur vitesse :  $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)}$ .

- Calcul de  $\overrightarrow{V(B,2/1)}$  :**  $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{V(A,2/1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)}$ . 2 et 1 étant en pivot d'axe  $(A, \overrightarrow{k_0})$ , on a  $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{0} - L\overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0} = L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2}$ .
- Calcul de  $\overrightarrow{V(B,1/0)}$  :**  $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(I,1/0)} + \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} - L\overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0}$ . En utilisant l'hypothèse de roulement sans glissement :  $\overrightarrow{V(B,1/0)} = (-L\overrightarrow{i_1} - R\overrightarrow{j_0}) \wedge \dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0} = \dot{\theta}(t)(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0})$ .

Au final,  $\overrightarrow{V(B,2/0)} = L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} + \dot{\theta}(t)(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0})$ .

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point B.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = (\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t))\overrightarrow{k_0} \\ L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} + \dot{\theta}(t)(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}) \end{array} \right\}_B$$

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} &= \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{V(B,2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} \right]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt} \left[ \dot{\theta}(t)(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}) \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= L\ddot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2} - L\dot{\varphi}(t)(\dot{\varphi}(t) + \dot{\theta}(t))\overrightarrow{i_2} + \dot{\theta}(t)(L\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}) - L\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{i_1}. \end{aligned}$$

## 2.5.7 Modéliser une action mécanique

### 2.5.7.1 Passage du modèle local au modèle global

#### Exercice 155 – La Seine Musicale \*

B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Exprimer l'effort élémentaire du vent sur la demi-voile s'appliquant au point  $P$  sur la surface  $dS$ , noté  $\overrightarrow{dF}_{vent}$ .

**Question 2** Déterminer par intégration l'expression du moment de l'action mécanique du vent selon l'axe  $(O, \vec{z})$ ,  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, vent \rightarrow demi-voile)} \cdot \vec{z}$  s'opposant à la rotation de la voile autour de l'axe  $(O, \vec{z})$  en fonction de  $R$ ,  $f$  et  $a$ .

**Question 3** On définit  $F_{vent}$  tel que  $(\overrightarrow{OC_G} \wedge \overrightarrow{F_{vent}}) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{\mathcal{M}(O, vent \rightarrow demi-voile)} \cdot \vec{z}$ . En déduire l'expression de  $F_{vent}$  l'effort du vent au point  $C_G$  s'opposant au déplacement du chariot central.

**Question 4** Pour quelle valeur de  $a$  cet effort est-il maximal ? Déterminer la valeur maximale de  $|F_{vent}|$ .

#### Exercice 156 – Banc Balafre \*

B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.

##### Données et hypothèses

- On note  $\overrightarrow{BM} = z \vec{z}_0 + R_J \vec{u}(\theta)$  où  $R_J$  est le rayon du joint avec  $R_J = 175$  mm ;
- la longueur du joint est  $L_J = 150$  mm. La position du point  $B$ , centre du joint est  $\overrightarrow{OB} = z_B \vec{z}_0$  avec  $z_B = 425$  mm ;
- Le coeur de butée a une masse  $M_{CB} = 40$  kg et la position de son centre d'inertie  $G_{CB}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB} \vec{z}_0$  avec  $L_{CB} = 193$  mm ;
- Les positions des points  $A_4$  et  $A_8$  sont paramétrées par  $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \vec{z}_0 - R_{CB} \vec{y}_0$  et  $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \vec{y}_0$  avec  $z_4 = 280$  mm et  $R_{CB} = 150$  mm.

On souhaite déterminer la résultante des actions de pression du fluide sur le joint (rotor). On rappelle qu'un élément de surface  $dS$  autour d'un point  $M$  sur une surface cylindrique de rayon  $R_J$  s'exprime  $dS = R_J d\theta dz$ .

**Question 1** Exprimer au point  $M$  le torseur  $\{dT_{f \rightarrow J_R}\}$  de l'action de pression du fluide sur un élément de surface  $dS$  joint en fonction de  $p(t)$ ,  $dS$  et  $\vec{u}(\theta)$ .

**Question 2** En déduire l'expression en  $B$  du torseur  $\{T_{f \rightarrow J_R}\}$  de l'action de pression du fluide sur l'ensemble du joint.

### 2.5.7.2 Modéliser une action mécanique – Modèle global

#### Exercice 157 – Calcul de moment\*

B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, F)}$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, F)}$ .

#### Exercice 158 – Calcul de moment\*

B2-14 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, F)}$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, F)}$ .

**Exercice 159 – Calcul de moment\***

**B2-14** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, \vec{F})}$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \vec{F})}$ .

**Exercice 160 – Calcul de moment\***

**B2-14** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \vec{F})}$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, \vec{F})}$ .

**Exercice 161 – Calcul de moment\***

**B2-14** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, \vec{F})}$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(O, \vec{F})}$ .

**Exercice 162 – Calcul de moment\***

**B2-14** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(G, \vec{R})}$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \vec{R})}$ .

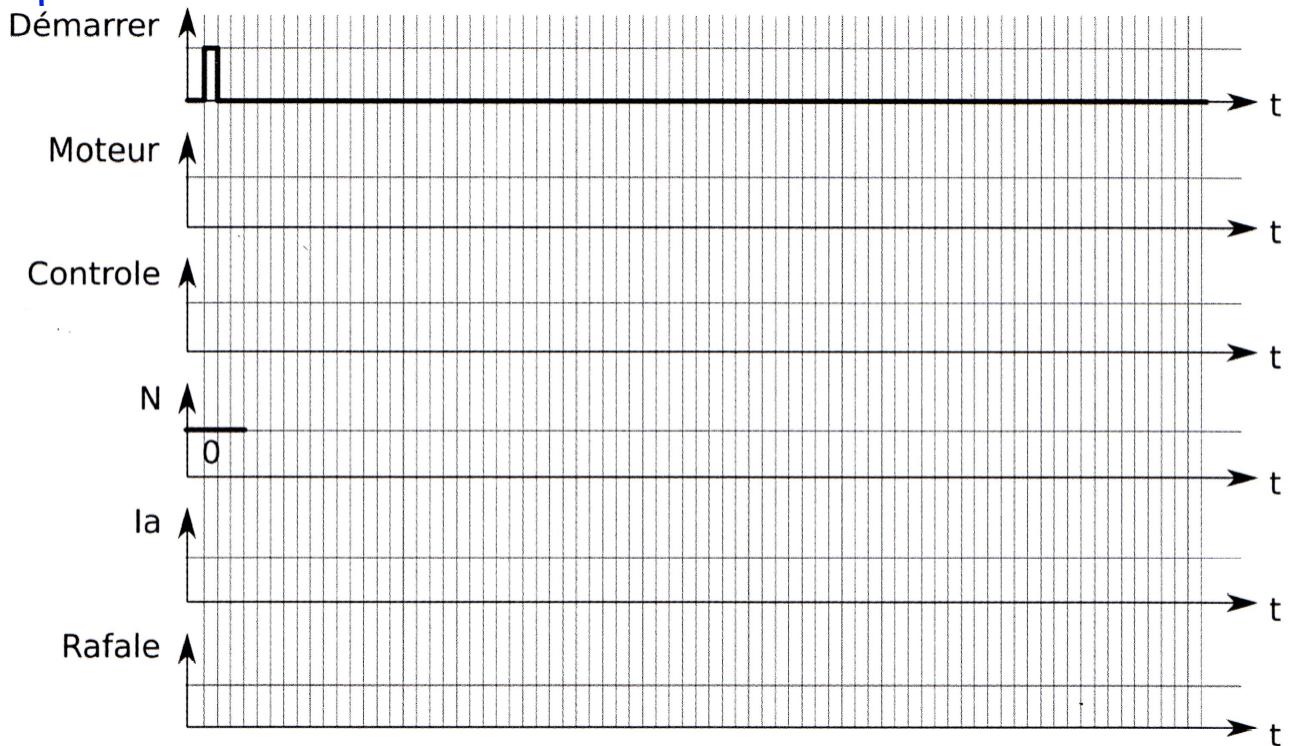
**2.5.8 Décrire le comportement d'un système séquentiel**
**Exercice 163 – Le banc balafré \***

**B2-17** Pas de corrigé pour cet exercice.

Les variables suivantes permettent de réaliser le suivi d'un processus de mesure :

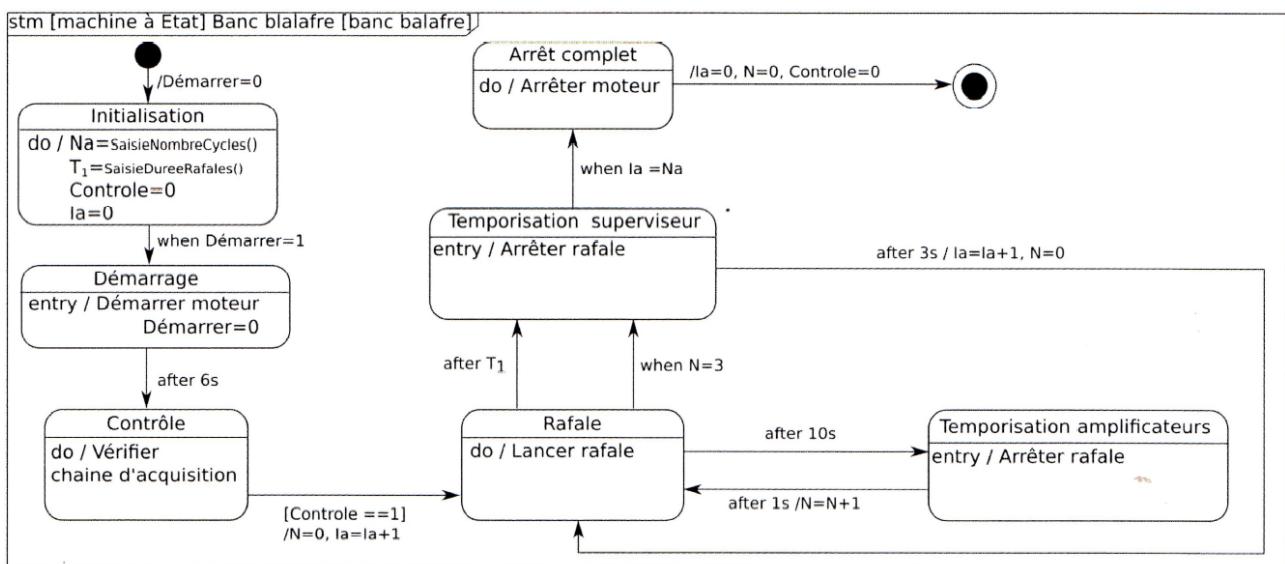
- Démarrer est une variable booléenne. Elle devient vraie, lorsque l'opérateur a saisi le nombre  $Na$  de cycles qu'il souhaite réaliser et la durée  $T_1$  de chaque cycle, et qu'il a validé sa saisie.
- Moteur est une variable qui vaut 1 lorsque le moteur a atteint sa vitesse de consigne (supposée non nulle, la vitesse nulle n'étant pas une consigne d'intérêt pratique pour le banc d'essais). Quand Moteur a atteint la valeur 1, seul le retour à l'arrêt peut modifier l'état de cette variable en la faisant repasser à 0. On considère qu'il faut 5 s pour atteindre la vitesse de consigne ou revenir à l'arrêt.
- Contrôle est une variable qui décrit le résultat des contrôles de la chaîne d'acquisition :
  - Contrôle=0 si les contrôles n'ont pas été effectués;
  - Contrôle=1 si les contrôles sont terminés et que tout est en ordre de marche;
  - Contrôle=2 si les contrôles ont détecté une anomalie.
- Rafale est une variable qui vaut 1 si une rafale est en cours, et 0 sinon.

**Question 1** On souhaite réaliser un cycle de rafale de huit secondes. En suivant le diagramme d'état de la figure 3.1, et en supposant que le contrôle soit réalisé en 1 seconde et conclue à ce que tout soit en ordre de marche, compléter le chronogramme.



Pour un fonctionnement sûr de l'installation, le système doit arrêter les moteurs si les contrôles détectent une anomalie.

**Question 2** Modifier le diagramme d'état ci-dessous pour prendre en compte ce cas de figure.



## 2.5.9 Modéliser un convertisseur électromécanique

**Exercice 164 – Le banc balafré \***

**Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Question 1** En utilisant les informations de la plaque signalétique, montrer que le moteur possède  $p = 1$  paire de pôles.

**Question 2** À partir de la plaque signalétique, en détaillant les calculs, déterminer le glissement en fonctionnement nominal  $g_N$  ainsi que le couple utile nominal  $C_{uN}$ .

**Question 3** Exprimer la puissance électromécanique  $P_{EM}$  fournie au rotor en fonction de  $U_S$  (valeur efficace de

la tension  $U_S$ ), de la résistance  $R$ , du glissement  $g$  de l'inductance  $L_c$  et de la pulsation d'alimentation  $\omega$  du moteur.

**Question 4** Exprimer la puissance électromécanique  $P_{EM}$  en fonction du couple électromagnétique  $C_{EM}$  et de la vitesse de rotation  $\Omega$  de l'arbre moteur.

**Question 5** Exprimer la vitesse de rotation  $\Omega$  de l'arbre en fonction du glissement  $g$  et de la vitesse de synchronisme  $\Omega_S$ . En déduire l'expression du couple électromagnétique  $C_{EM}$  en fonction de  $U_S^2$ ,  $\omega$ ,  $g$ ,  $R$ ,  $L_c$ , et  $p$  (le nombre de paires de pôles par phase).

**Question 6** En précisant bien vos hypothèses, justifier que l'expression du couple utile disponible sur l'arbre moteur est  $C_u = \frac{3pU_S^2}{\omega} \cdot \frac{\frac{R}{g}}{\left(\frac{R}{g}\right)^2 + (L_c \omega)^2}$ .

**Question 7** À l'aide des points A, B, C et D, identifier sur cette courbe le point de fonctionnement nominal, le démarrage du moteur, le point de synchronisme, la zone de fonctionnement instable du moteur.

**Question 8** En déduire l'expression de  $L_c$  en fonction de  $p$ ,  $U_S$ ,  $C_M$  et  $\omega$  et faire l'application numérique.

**Question 9** Que peut-on dire de  $R/g$  par rapport à  $L_c \omega$  au voisinage du point de fonctionnement nominal ? En déduire l'expression de  $R$  en fonction du couple nominal  $C_N$ , du glissement nominal  $g_N$ , de  $p$ ,  $U_S$  et de  $\omega$ .

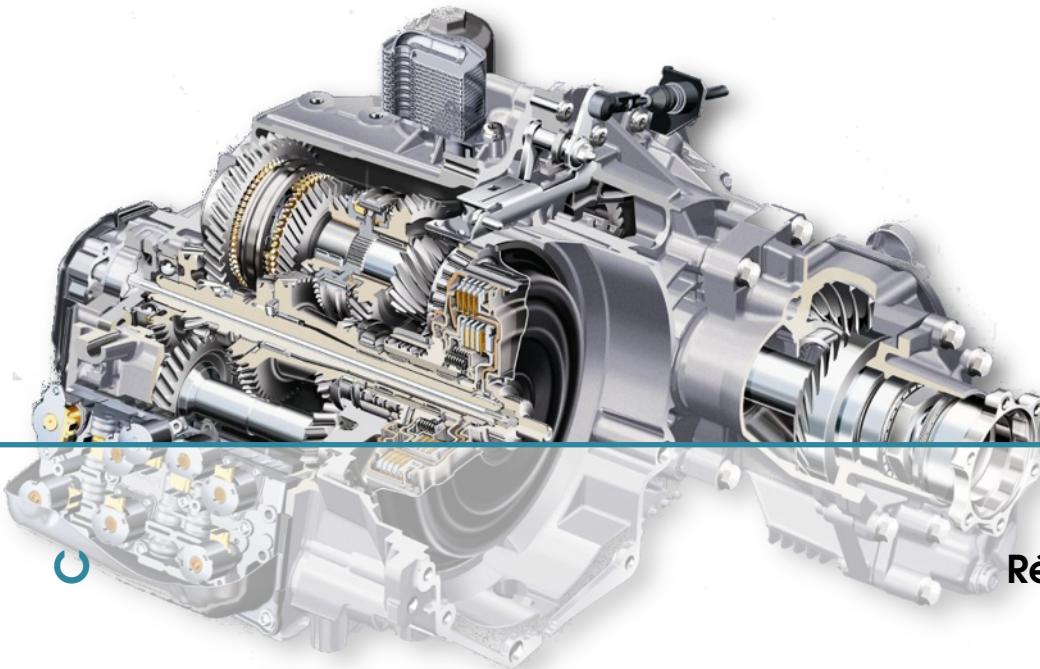
**Question 10** Déterminer quelle fréquence doit être imposée par le variateur pour maintenir une vitesse de 6000 tr min<sup>-1</sup> en présence d'un couple résistant correspondant au couple  $C_{res} = 300$  Nm défini par l'exigence 1.01 du cahier des charges.

## 2.6 B3 – Valider un modèle



## **Chapitre 3**

# **Résoudre**



Sciences

Résoudre | Industrielles de  
l'Ingénieur

## C2

Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

<b>3.1</b>	<b>C1 – Proposer une démarche de résolution</b>	<b>68</b>
3.1.1	C1-05 – Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement – PFS . . . . .	68
3.1.2	Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement – PFD . . . . .	72
<b>3.2</b>	<b>C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique</b>	<b>74</b>
3.2.1	Déterminer la réponse fréquentielle . . . . .	74
3.2.2	C2-03 – Déterminer les performances d'un système asservi	75
3.2.3	C2-06 – Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques . . . . .	78
3.2.4	C2-06 – Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques . . . . .	83
3.2.5	C2-07 – Déterminer les actions mécaniques en statique	89
3.2.6	Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé. . . . .	91
3.2.7	Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé. . . . .	94
3.2.8	Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus . . . . .	95
3.2.9	Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus – TEC . . . . .	98
<b>3.3</b>	<b>C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique</b>	<b>104</b>
<b>3.4</b>	<b>C1 – Proposer une démarche de résolution</b>	<b>105</b>
3.4.1	C1-05 – Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement – PFS . . . . .	105
3.4.2	Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement – PFD . . . . .	108
<b>3.5</b>	<b>C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique</b>	<b>110</b>
3.5.1	Déterminer la réponse fréquentielle . . . . .	110
3.5.2	C2-03 – Déterminer les performances d'un système asservi	110
3.5.3	C2-06 – Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques . . . . .	115
3.5.4	C2-06 – Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques . . . . .	127
3.5.5	C2-07 – Déterminer les actions mécaniques en statique	133
3.5.6	Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé. . . . .	135
3.5.7	Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé. . . . .	138
3.5.8	Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus – Lois de mouvement 1D . . . . .	138
3.5.9	Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus . . . . .	143
3.5.10	Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus – TEC . . . . .	144
<b>3.6</b>	<b>C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique</b>	<b>148</b>

### 3.1 C1 – Proposer une démarche de résolution

#### 3.1.1 C1-05 – Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement – PFS

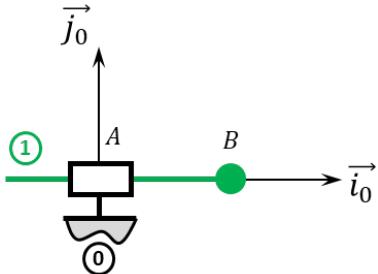
##### Exercice 165 – Mouvement T – \*

B2-14

B2-15

C1-05

Soit le mécanisme suivant. On note  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ . On note  $m_1$  la masse du solide 1. On note  $G$  le centre d'inertie de 1 tel que  $\overrightarrow{BG} = \ell \vec{j}_1$ . La pesanteur est telle que  $\vec{g} = -g \vec{i}_0$ . Un vérin pneumatique positionné entre 1 et 0 permet de maintenir 1 en équilibre.



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le vérin pour maintenir 1 en équilibre.

Indications :

1. .
2.  $\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \vec{j}_1 + Z_{01} \vec{k}_1 \\ L_{01} \vec{i}_1 + M_{01} \vec{j}_1 + N_{01} \vec{k}_1 \end{array} \right\}_A$ ,  
 $\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{i}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_G$ ,  $\{\mathcal{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_v \vec{i}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_G$ .
3.  $\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \vec{j}_1 \\ N_{01} \vec{k}_1 \end{array} \right\}_A$ ,  $\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{i}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_G$ ,  $\{\mathcal{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_v \vec{i}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_G$ .
4. TRS suivant  $\vec{i}_0$ .

Corrigé voir 258.

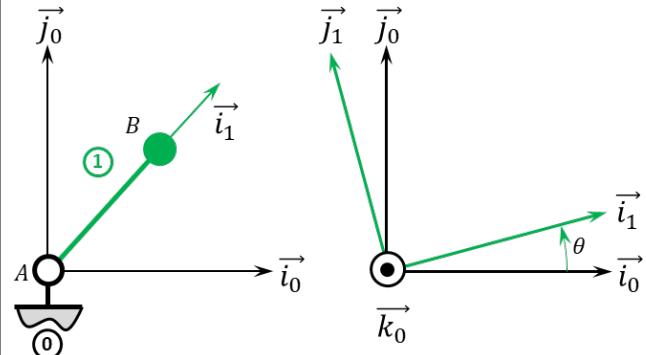
##### Exercice 166 – Mouvement R – \*

B2-14

B2-15

C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20\text{mm}$ . La liaison pivot est motorisée par un moteur dont l'action mécanique sur 1 est donnée par  $\overrightarrow{C_m} = C_m \vec{k}_0$ . On note  $m_1$  la masse du solide 1 et  $B$  son centre d'inertie. La pesanteur est telle que  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le moteur pour maintenir 1 en équilibre.

Indications :

1. .
2.  $\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_1 + Y_{01} \vec{j}_1 + Z_{01} \vec{k}_1 \\ L_{01} \vec{i}_1 + M_{01} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_A$ ,  
 $\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_B$ ,  $\{\mathcal{F}(\text{Mot} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_A$ .
3.  $\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_1 + Y_{01} \vec{j}_1 \\ M_{01} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_A$ ,  $\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_B$ ,  $\{\mathcal{F}(\text{Mot} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_A$ .
4. TMS en A en projection sur  $\vec{k}_0$ .

Corrigé voir 321.

##### Exercice 167 – Mouvement TT – \*

B2-14

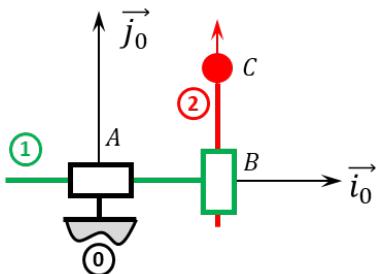
B2-15

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On note  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$ .  $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1, et  $m_1$  sa masse.  $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2 et  $m_2$  sa masse.

Un vérin électrique positionné entre **0** et **1** permet de maintenir **1** en équilibre. Un vérin électrique positionné entre **1** et **2** permet de maintenir **2** en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts que doivent développer chacun des vérins pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir 260.

### Exercice 168 – Mouvement RR \*

B2-14

B2-15

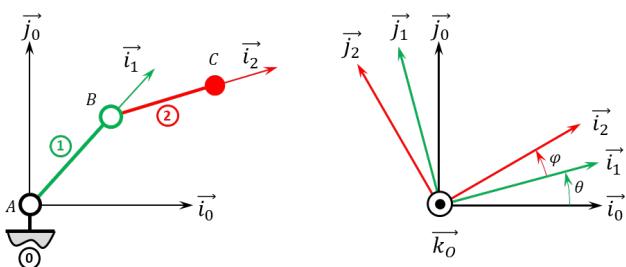
**C1-05** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20 \text{ mm}$  et  $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$  avec  $L = 15 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de **1** et  $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}R \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de **1**;
- $G_2$  désigne le centre d'inertie de **2** et  $\overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{2}L \vec{i}_2$ , on note  $m_2$  la masse de **2**.

Un moteur électrique positionné entre **0** et **1** permet de maintenir **1** en équilibre. Un moteur électrique positionné entre **1** et **2** permet de maintenir **2** en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer les couples que doivent développer chacun des moteurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir 261.

### Exercice 169 – Mouvement RT \*

B2-14

B2-15

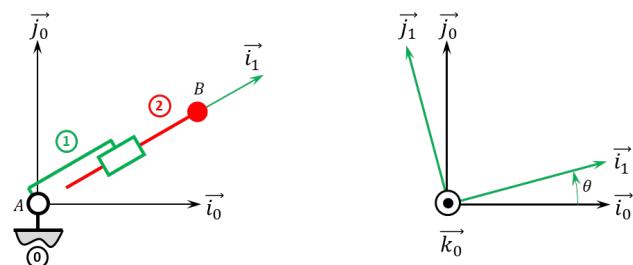
**C1-05** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de **1** et  $\overrightarrow{AG_1} = L_1 \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de **1**;
- $G_2 = B$  désigne le centre d'inertie de **2**, on note  $m_2$  la masse de **2**.

Un moteur électrique positionné entre **0** et **1** permet de maintenir **1** en équilibre. Un vérin électrique positionné entre **1** et **2** permet de maintenir **2** en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer le couple et l'effort que doivent développer chacun des actionneurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir 262.

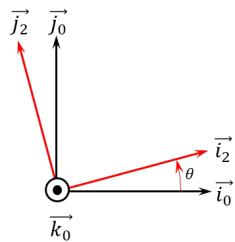
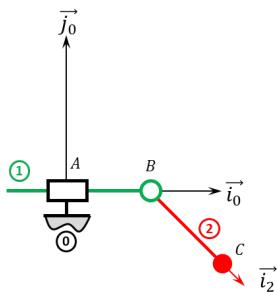
**Exercice 170 – Mouvement RT \***
**B2-14**
**B2-15**
**C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_0}$  et  $\overrightarrow{BC} = R \overrightarrow{i_2}$  avec  $R = 30 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1, on note  $m_1$  la masse de 1;
- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2, on note  $m_2$  la masse de 2.

Un vérin électrique positionné entre 0 et 1 permet de maintenir 1 en équilibre. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet de maintenir 2 en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer le couple et l'effort que doivent développer chacun des actionneurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir 263.

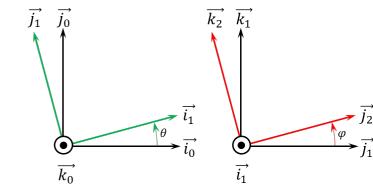
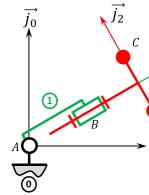
**Exercice 171 – Mouvement RR 3D \*\***
**B2-14**
**C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \overrightarrow{i_1}$  et  $\overrightarrow{BC} = \ell \overrightarrow{i_2} + r \overrightarrow{j_2}$ . On note  $R + \ell = L = 20 \text{ mm}$  et  $r = 10 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1, on note  $m_1$  la masse de 1;
- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2 tel que  $\overrightarrow{BG_2} = \ell \overrightarrow{i_2}$ , on note  $m_2$  la masse de 2.

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet de maintenir 1 en équilibre. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet de maintenir 2 en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Proposer une démarche permettant de déterminer le couple et l'effort que doivent développer chacun des actionneurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir 264.

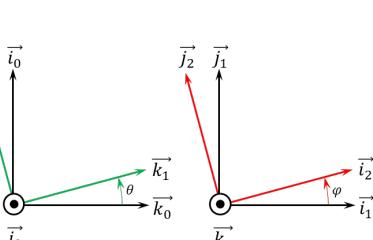
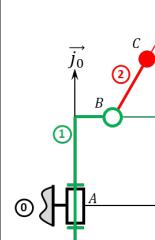
**Exercice 172 – Mouvement RR 3D \*\***
**B2-14**
**C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = H \overrightarrow{j_1} + R \overrightarrow{i_1}$  et  $\overrightarrow{BC} = L \overrightarrow{i_2}$ . On a  $H = 20 \text{ mm}$ ,  $r = 5 \text{ mm}$ ,  $L = 10 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1 tel que  $\overrightarrow{AG_1} = H \overrightarrow{j_1}$ , on note  $m_1$  la masse de 1;
- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2, on note  $m_2$  la masse de 2.

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet de maintenir 1 en équilibre. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet de maintenir 2 en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

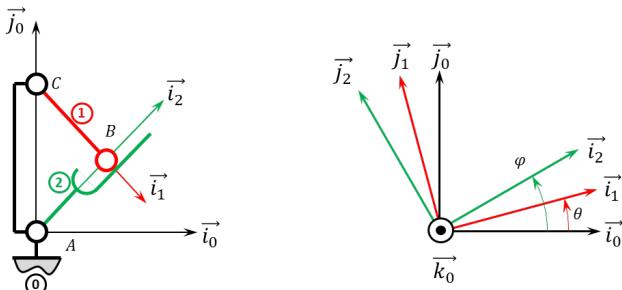
**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Proposer une démarche permettant de déterminer le couple et l'effort que doivent développer chacun des actionneurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir 276.

**Exercice 173 – Barrière Sympact \*\***
**C1-05** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = H \overrightarrow{j_0}$  et  $\overrightarrow{CB} = R \overrightarrow{i_1}$ . De plus,  $H = 120 \text{ mm}$  et  $R = 40 \text{ mm}$ .



On néglige la pesanteur sur la pièce 1.

On note  $\{\mathcal{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$  l'action mécanique du moteur sur la pièce 1.

On note  $\{\mathcal{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_r \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$  l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce 2. Le raideur du ressort est telle qu'il exerce un couple de  $45 \text{ Nm}$  pour un angle de rotation  $100^\circ$ . On considère que le couple est nul lorsque la pièce 2 est à la verticale ( $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$ ). Il est au maximum lorsque  $\varphi_f = 0$ .

On note  $\{\mathcal{F}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -Mg \overrightarrow{j_0} \\ 0 \end{array} \right\}_{\forall G}$  avec  $\overrightarrow{AG} = L \overrightarrow{i_2}$ .

**Question 1** Réaliser un graphe d'analyse.

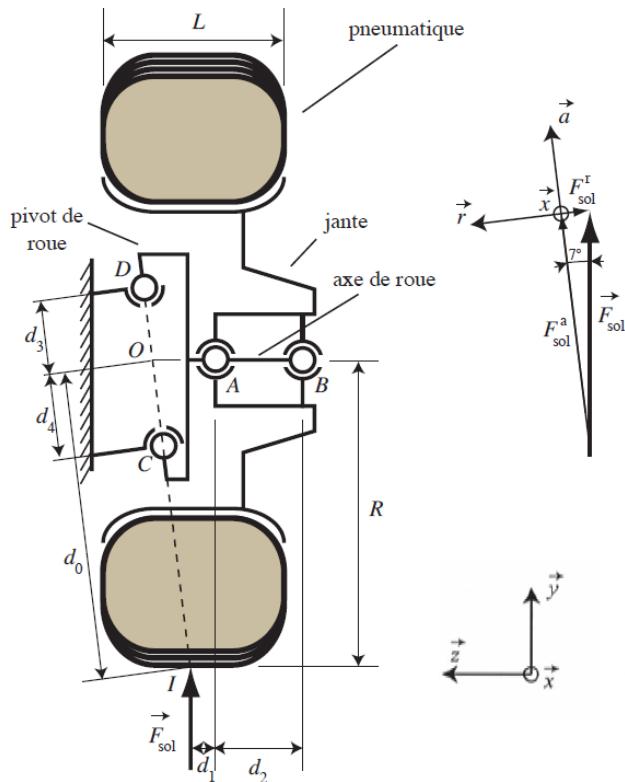
**Question 2** Expliciter  $C_r$  en fonction des différents constantes ( $k, \varphi_o, \varphi_f$ ) et celles qui vous sembleraient utile.

**Question 3** Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.

Corrigé voir 266.

**Exercice 174 – Suspension automobile \*\***
**B2-14**
**C1-05** Pas de corrigé pour cet exercice.

On s'intéresse à la liaison entre l'axe de la roue et le châssis du véhicule. Les notations adoptées seront les suivantes :  $F_C^a$  (respectivement  $F_C^r, F_C^x$ ) désignera la composante suivant  $\overrightarrow{a}$  (respectivement  $\overrightarrow{r}, \overrightarrow{x}$ ) de l'effort extérieur exercé en C. On procédera de même pour le point D.



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

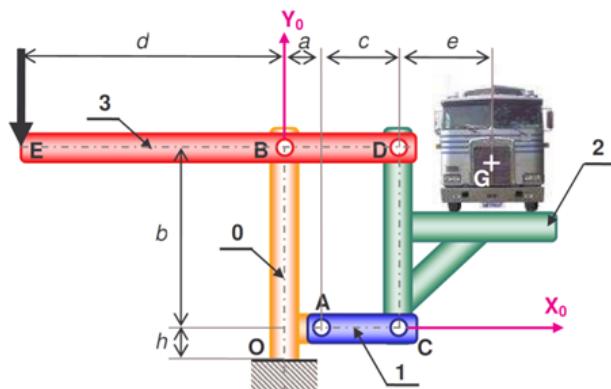
**Question 2** Peut-on résoudre complètement le système ? Pourquoi ?

Corrigé voir 267.

**Exercice 175 – Pèse camion \*\***
**C1-05** Pas de corrigé pour cet exercice.

On considère un bâti 0 auquel est attaché le repère  $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{x_0}; \overrightarrow{y_0}; \overrightarrow{z_0})$ . Le champ de pesanteur est  $g = -g \overrightarrow{y_0}$ . La barre 1 est liée au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe (A,  $\overrightarrow{z_0}$ ). Le plateau porte camion 2 est lié à la barre 1 par une liaison pivot parfaite d'axe (C,  $\overrightarrow{z_0}$ ). Le levier 3 est lié au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe (B,  $\overrightarrow{z_0}$ ). Ce levier est également lié au plateau 2 par une liaison pivot parfaite d'axe (D,  $\overrightarrow{z_0}$ ). Le camion 4, de centre de masse G et de masse M inconnue, repose sur le plateau 2. L'action mécanique connue est caractérisée par :

$$\{\text{ext} \rightarrow 3\} = \left\{ \begin{array}{l} -F \overrightarrow{y_0} \\ 0 \end{array} \right\}_E.$$



**Question 1** Tracer le graphe de structure. Définir le nombre d'inconnues statiques.

**Question 2** Donner la stratégie permettant de déterminer la valeur de  $F$  en fonction de  $M$ .

Corrigé voir 268.

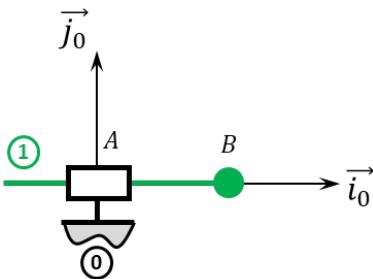
### 3.1.2 Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement – PFD

#### Exercice 176 – Mouvement T – \*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On note  $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ . On note  $m_1$  la masse du solide 1. On note  $G$  le centre d'inertie de 1 tel que  $\vec{BG} = \ell \vec{j}_1$ . La pesanteur est telle que  $\vec{g} = -g \vec{i}_0$ . Un vérin électrique positionné entre 1 et 0 permet d'actionner la pièce 1. On souhaite prendre en compte les frottements secs dans la liaison glissière.



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer la loi du mouvement de 1 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

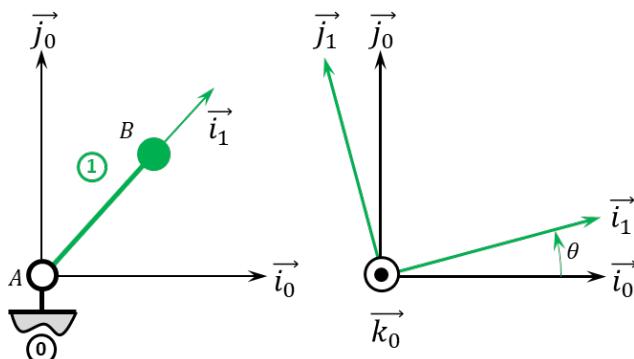
Corrigé voir 269.

#### Exercice 177 – Mouvement R \*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20\text{ mm}$ . La liaison pivot est motorisée par un moteur modélisée dont l'action mécanique sur 1 est donnée par  $\vec{C_m} = C_m \vec{k}_0$ . On note  $m_1$  la masse du solide 1 et  $B$  son centre d'inertie. La pesanteur est telle que  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer la loi du mouvement de 1 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

Corrigé voir 270.

#### Exercice 178 – Mouvement TT – \*

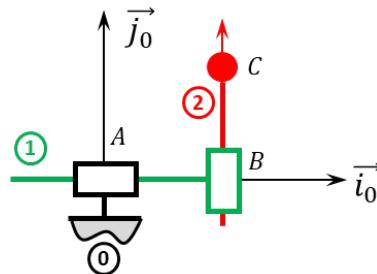
B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On note  $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\vec{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$ .  $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1, et  $m_1$  sa masse.  $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2 et  $m_2$  sa masse.

Un vérin électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un vérin électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les lois de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

Corrigé voir 271.

#### Exercice 179 – Mouvement RR \*

B2-14

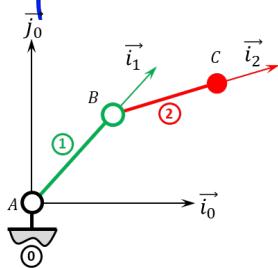
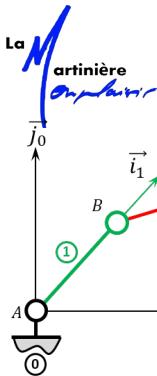
C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20\text{ mm}$  et  $\vec{BC} = L \vec{i}_2$  avec  $L = 15\text{ mm}$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de 1 et  $\vec{AG}_1 = \frac{1}{2} R \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de 1;
- $G_2$  désigne le centre d'inertie de 2 et  $\vec{BG}_2 = \frac{1}{2} L \vec{i}_2$ , on note  $m_2$  la masse de 2.

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



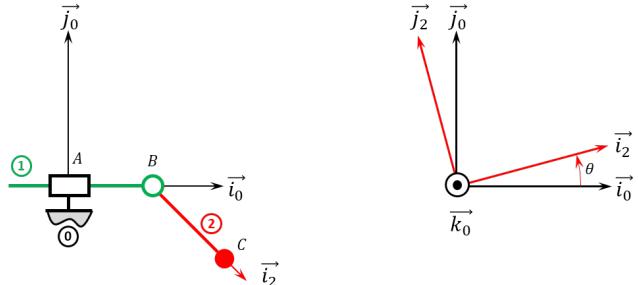
**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2, on note  $m_2$  la masse de 2.

Un vérin électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



Corrigé voir 272.

### Exercice 180 – Mouvement RT \*

B2-14

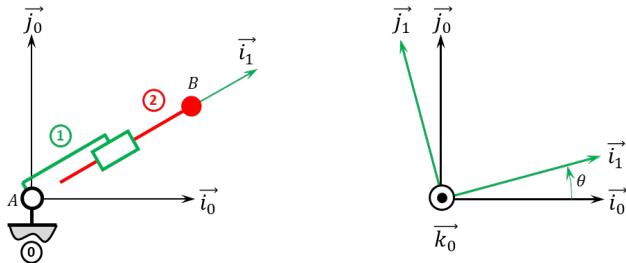
**C1-05** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de 1 et  $AG_1 = L_1 \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de 1;
- $G_2 = B$  désigne le centre d'inertie de 2, on note  $m_2$  la masse de 2.

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un vérin électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

Corrigé voir 273.

### Exercice 181 – Mouvement RT \*

B2-14

**C1-05**

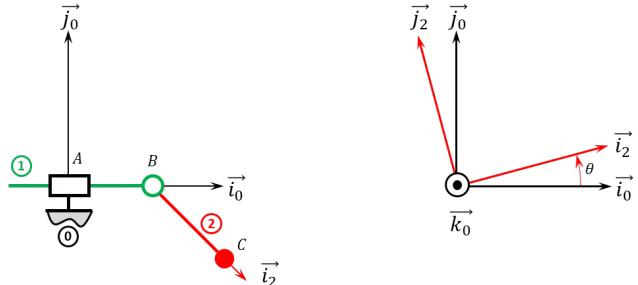
Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{BC} = R \vec{i}_2$  avec  $R = 30\text{ mm}$ . De plus :

- $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1, on note  $m_1$  la masse de 1;

- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2, on note  $m_2$  la masse de 2.

Un vérin électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

Corrigé voir 274.

### Exercice 182 – Mouvement RR 3D \*\*

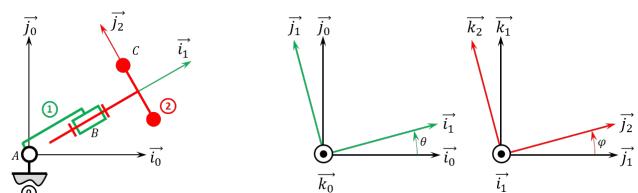
B2-14

**C1-05** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = \ell \vec{i}_2 + r \vec{j}_2$ . On note  $R + \ell = L = 20\text{ mm}$  et  $r = 10\text{ mm}$ . De plus :

- $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1, on note  $m_1$  la masse de 1;
- $G_2$  désigne le centre d'inertie de 2 tel que  $\overrightarrow{BG_2} = \ell \vec{i}_2$ , on note  $m_2$  la masse de 2.

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2. L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

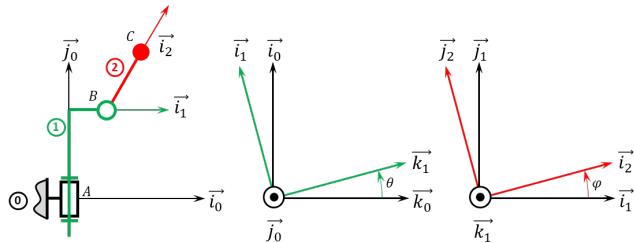
Corrigé voir 275.

**Exercice 183 – Mouvement RR 3D \*\***
**B2-14**
**C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ . On a  $H = 20 \text{ mm}$ ,  $R = 5 \text{ mm}$ ,  $L = 10 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de **1** tel que  $\overrightarrow{AG_1} = H \vec{j}_1$ , on note  $m_1$  la masse de **1**;
- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de **2**, on note  $m_2$  la masse de **2**.

Un moteur électrique positionné entre **0** et **1** permet d'actionner le solide **1**. Un moteur électrique positionné entre **1** et **2** permet d'actionner le solide **2**. L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les lois de mouvement de **1** et de **2** par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

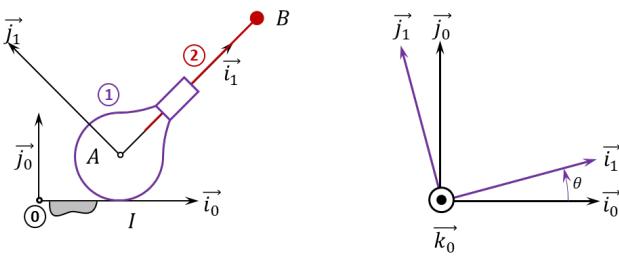
Corrigé voir 276.

**Exercice 184 – Mouvement RT – RSG \*\***
**B2-14**
**C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{IA} = R \vec{j}_0$  et  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus  $R = 15 \text{ mm}$ . On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point **I**. De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de **1** tel que  $\overrightarrow{AG_1} = -\ell \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de **1**;
- $G_2 = B$  désigne le centre d'inertie de **2**, on note  $m_2$  la masse de **2**.

Un ressort exerce une action mécanique entre les points **A** et **B**.



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les lois de mouvement de **1** et de **2** par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

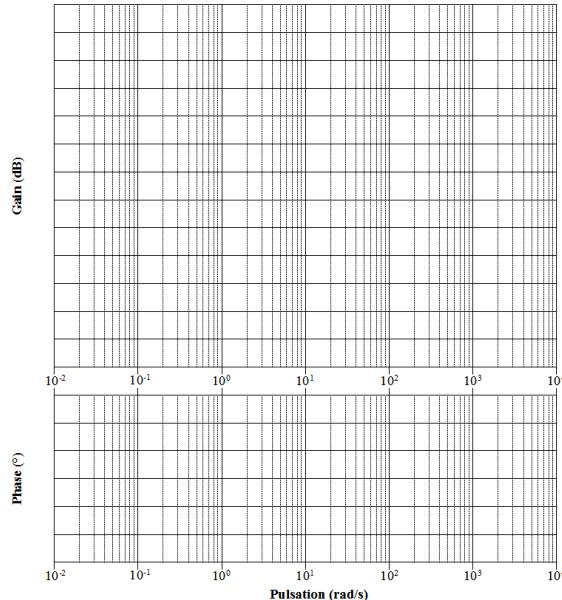
Corrigé voir 277.

## 3.2 C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

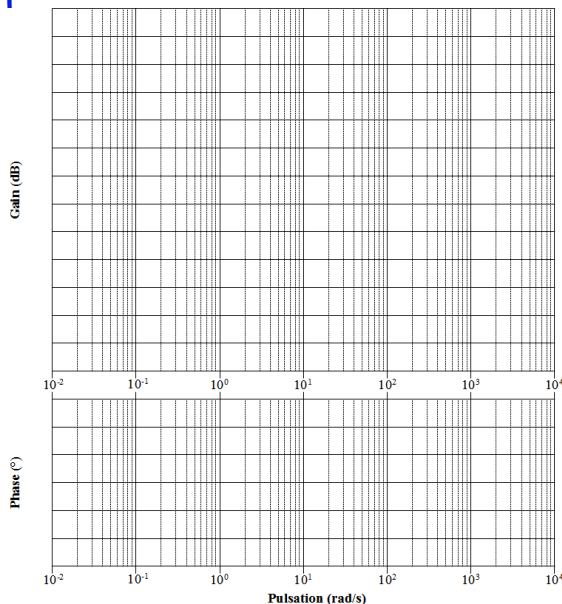
### 3.2.1 Déterminer la réponse fréquentielle

**Exercice 185 – Ecart\***
**C2-02 Pas de corrigé pour cet exercice.**

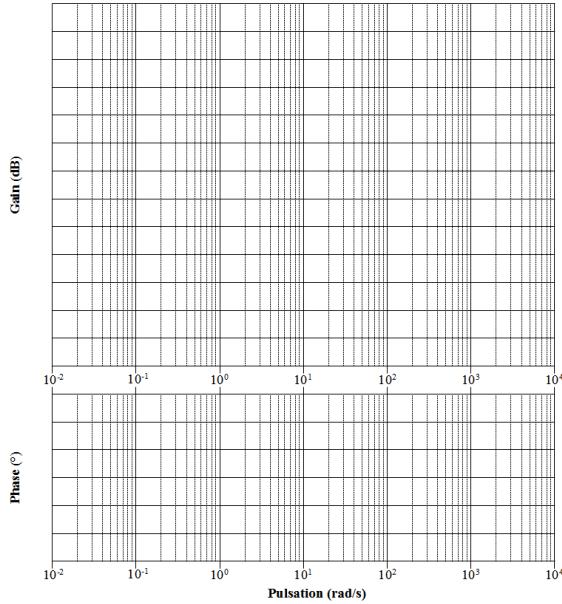
**Question 1** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :  $F_1(p) = \frac{15}{1 + 10p}$ .



**Question 2** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :  $F_2(p) = \frac{10}{(1 + 10p)(10 + p)}$ .



**Question 3** Tracer le diagramme de Bode [solution](#) fonction de transfert suivante :  $F_3(p) = \frac{40}{p(1+300p)}$ .

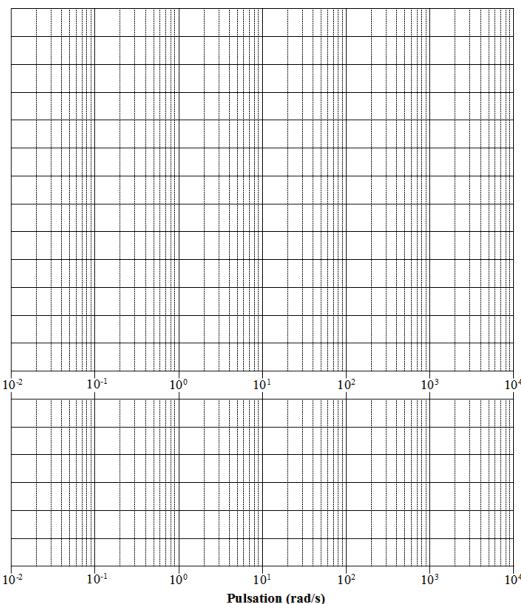


Corrigé voir 279.

### Exercice 186 – Ecart\*

**C2-02** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :  $F_1(p) = \frac{200}{p(1+20p+100p^2)}$ .



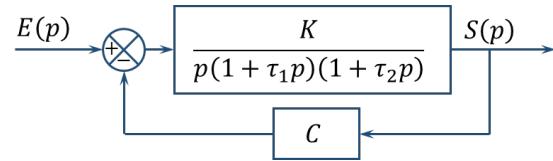
Corrigé voir 279.

### C2-03 – Déterminer les performances d'un système asservi

#### Exercice 187 – Valeur finale\*

##### C2-03

Soit le schéma-blocs suivant.



**Question 1** Déterminer la valeur finale de  $s(t)$  lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude  $E_0$ .

**Question 2** En déduire la valeur de l'erreur statique.

**Question 3** Déterminer la valeur finale de  $s(t)$  lorsque l'entrée est une rampe de pente  $k$ .

**Question 4** En déduire la valeur de l'erreur de traînage.

**Question 5** Qu'en est-il si  $C = 1$  ?

Éléments de corrigé :

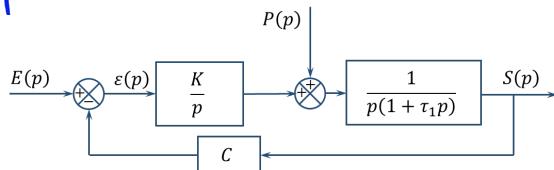
1.  $s_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+CK} = \frac{E_0}{C}$ .
2.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = E_0 - \frac{E_0}{C}$ .
3.  $s_\infty = \infty$ .
4.  $\epsilon_v = \infty$ .
5.  $\epsilon_v = \frac{k}{K}$ .

Corrigé voir 280.

### Exercice 188 – Ecart\*

**C2-03** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma-blocs suivant.



**Question 1** Exprimer  $\epsilon(p)$  en fonction de  $E(p)$  et  $P(p)$ .

**Question 2** Évaluer la valeur finale de  $\epsilon(t)$  lorsque  $E(p)$  est un échelon d'amplitude  $E_0$  et  $P(p)$  est un échelon d'amplitude  $P_0$ .

**Question 3** Évaluer la valeur finale de  $\epsilon(t)$  lorsque  $E(p)$  est un échelon d'amplitude  $E_0$  et  $P(p)$  est une rampe de pente  $P_0$ .

**Question 4** Évaluer la valeur finale de  $\epsilon(t)$  lorsque  $E(p)$  est une rampe de pente  $E_0$  et  $P(p)$  est un échelon d'amplitude  $P_0$ .

**Question 5** Évaluer la valeur finale de  $\epsilon(t)$  lorsque  $E(p)$  est une rampe de pente  $E_0$  et  $P(p)$  est une rampe de pente  $P_0$ .

Corrigé voir 281.

### 3.2.2.1 Stabilité des systèmes

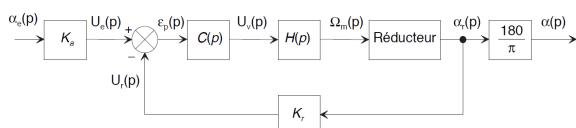
#### Exercice 189 – Palettisation – Stabilité\*

##### C2-03

###### Pas de corrigé pour cet exercice.

Une boucle de position est représentée ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{30}{1 + 5 \times 10^{-3} p}$ ;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$  : gain du capteur de position;
- $K_a$  : gain de l'adaptateur du signal de consigne  $\alpha_e(t)$ ;
- $N = 200$  : rapport de transmission du réducteur (la réduction est donc de  $1/N$ ).
- le signal de consigne  $\alpha_e(t)$  est exprimé en degré;
- le correcteur  $C(p)$  est à action proportionnelle de gain réglable  $K_c$ .



On montre que  $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{Np}$ , que  $k_a = \frac{\pi}{180} k_r$  et que la FTBO est donnée par  $T(p) = \frac{k_{BO}}{p(1 + \tau_m p)}$  ( $k_{BO} = \frac{k_c k_m k_r}{N}$ ).

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ . **Question**

**1** Déterminer la valeur de  $k_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

**Question 2** En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

**Question 3** Déterminer l'écart de position.

Éléments de corrigé :

1.  $k_{BO} = \sqrt{2} \tau_m$ .
2.  $k_c = \frac{\sqrt{2} N}{\tau_m k_m k_r} = 471,1$ .
3.  $\epsilon_s = 0$ .

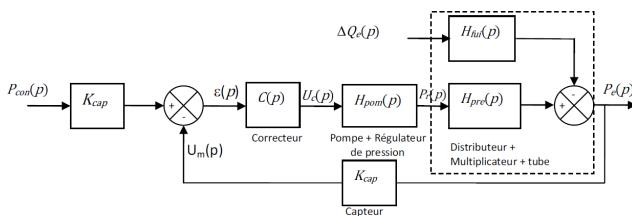
Corrigé voir 282.

#### Exercice 190 – Banc hydraulique \*

##### C2-03

###### Pas de corrigé pour cet exercice.

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression.



$P_{con}(p)$  : pression de consigne d'eau dans le tube (Pa)

$P_e(p)$  : pression d'eau dans le tube (Pa)  
 $U_c(p)$  : tension de commande du régulateur de pression (V)

$P_r(p)$  : pression d'huile régulée (Pa)  
 $\Delta Q_e(p)$  : débit de fuite ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )  
 $U_m(p)$  : tension de mesure du capteur (V)

Hypothèses :

- L'ensemble de mise sous pression tube + distributeur + multiplicateur de pression est défini par les transmittances suivantes :  $H_{pre}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$  et  $H_{fui}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$  avec  $K_m = 3,24$ ;  $K_f = 2,55 \times 10^{10} \text{ Pa m}^{-3} \text{ s}$ ;  $T_1 = 10 \text{ s}$ .
- L'ensemble pompe+régulateur de pression est modélisé par la fonction de transfert :  $H_{pom}(p) = \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p}$  avec  $K_{pom} = 1,234 \times 10^7 \text{ Pa/V}$ ;  $T_2 = 5 \text{ s}$ .
- Le capteur est modélisé par un gain pur :  $K_{cap} = 2,5 \times 10^{-8} \text{ V/Pa}$ .

La pression de consigne est de  $P_{con} = 800$  bars et les débits de fuite sont estimés à  $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ .

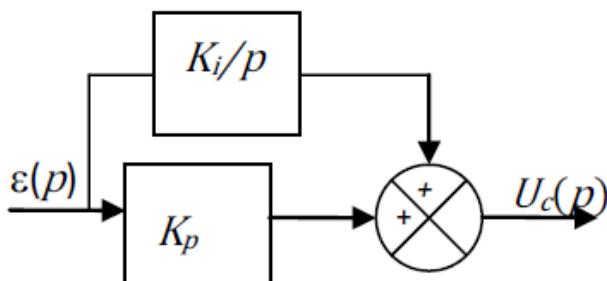
Le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant.

Stabilité :	marge de phase de $60^\circ$ marge de gain de 12 dB
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40$ s
Précision :	erreur statique < 5% soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\epsilon_{con} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\epsilon_{pert} < 40$ bars
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation :  $t_e \cdot \omega_{0dB} = 3$  où  $\omega_{0dB}$  désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et  $t_e$  le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$ , temps du 1er maximum si le dépassement est supérieur à 5 %,
- $t_e = t_R$ , temps de réponse à 5 % si le dépassement est nul ou inférieur à 5 %.

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma bloc ci-dessous.



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $C(p)$  de ce correcteur.

**Question 2** Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients  $K_i$  et  $K_p$ . 3.2.2.2

**Question 3** Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité ? Justifier.

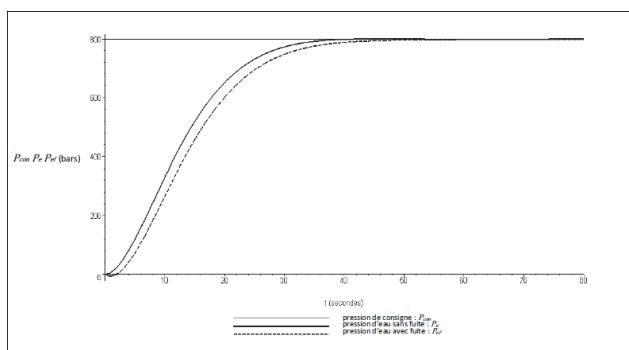
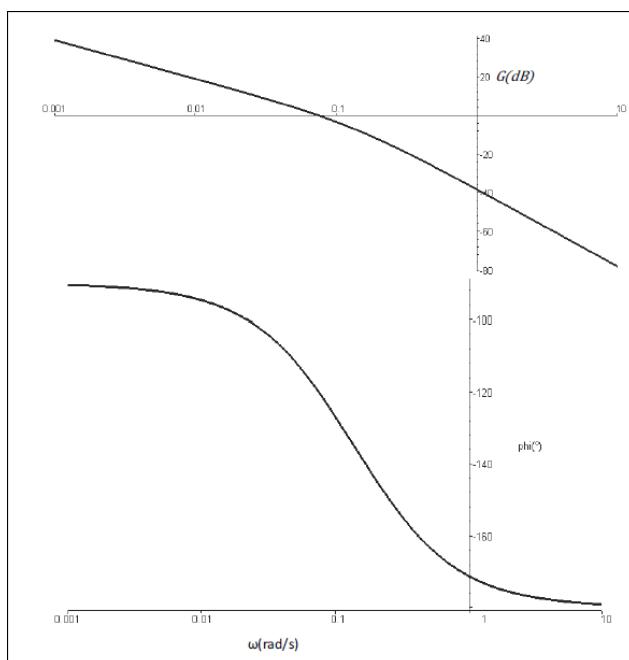
**Question 4** Quelle valeur faut-il donner à  $\omega_{0dB}$  pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges ?

**Question 5** Déterminer alors le rapport  $T = \frac{K_p}{K_i}$  pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

**Question 6** En déduire les valeurs de  $K_i$  et  $K_p$  qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment. On donne sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.

**Question 7** La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges ? Justifier.



Corrigé voir 284.

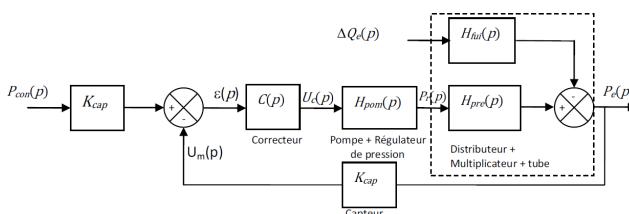
### Précision des systèmes

#### Exercice 191 – Banc hydraulique \*

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression.



$P_{con}(p)$  : pression de consigne d'eau dans le tube (Pa)

$P_e(p)$  : pression d'eau dans le tube (Pa)

$U_c(p)$  : tension de commande du régulateur de pression (V)

$P_r(p)$  : pression d'huile régulée (Pa)

$\Delta Q_e(p)$  : débit de fuite ( $m^3 s^{-1}$ )

$U_m(p)$  : tension de mesure du capteur (V)

Hypothèses :

- L'ensemble de mise sous pression tube + distributeur + multiplicateur de pression est défini par les transmittances suivantes :  $H_{\text{pre}}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$  et  $H_{\text{fui}}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$  avec  $K_m = 3,24$ ;  $K_f = 2,55 \times 10^{10} \text{ Pam}^{-3} \text{ s}$ ;  $T_1 = 10 \text{ s}$ .
- L'ensemble pompe+régulateur de pression est modélisé par la fonction de transfert :  $H_{\text{pom}}(p) = \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p}$  avec  $K_{\text{pom}} = 1,234 \times 10^7 \text{ Pa/V}$ ;  $T_2 = 5 \text{ s}$ .
- Le capteur est modélisé par un gain pur :  $K_{\text{cap}} = 2,5 \times 10^{-8} \text{ V/Pa}$ .

La pression de consigne est de  $P_{\text{con}} = 800 \text{ bars}$  et les débits de fuite sont estimés à  $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ . 3.2.3

Le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant.

Stabilité :	marge de phase de $60^\circ$ marge de gain de $12 \text{ dB}$
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40 \text{ s}$
Précision :	erreur statique < 5% soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\varepsilon_{\text{con}} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\varepsilon_{\text{pert}} < 40 \text{ bars}$
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation :  $t_e \cdot \omega_{0\text{dB}} = 3$  où  $\omega_{0\text{dB}}$  désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et  $t_e$  le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$ , temps du 1er maximum si le dépassement est supérieur à 5 %,
- $t_e = t_R$ , temps de réponse à 5 % si le dépassement est nul ou inférieur à 5 %.

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

**Question 1** Déterminer, en fonction de  $K_p$ ,  $\varepsilon_{\text{con}}$  définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne  $P_{\text{con}}$  de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

**Question 2** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{\text{con}}$  à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

**Question 3** Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de  $K_p$  la fonction de transfert en régulation définie par :  $H_{\text{pert}}(p) = \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)}$ . En déduire, en fonction de  $K_p$ ,  $\varepsilon_{\text{pert}}$  définie comme l'erreur statique pour une perturbation  $\Delta Q_e$  de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

**Question 4** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{\text{pert}}$  à la valeur spécifiée au cahier des charges.

**Question 5** Proposer un réglage de  $K_p$  pour vérifier le critère d'amortissement. Conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

Éléments de corrigé :

- $\varepsilon_{\text{con}} \% = \frac{1}{1 + K_p K_m K_{\text{pom}} K_{\text{cap}}} ;$
- $K_p > 19;$
- $\varepsilon_{\text{pert}} = \Delta Q_e \frac{K_f}{1 + K_{\text{cap}} K_p K_m K_{\text{pom}}} ;$
- $K_p > 2,19.$
- $K_p < 0,125$ . Il est impossible de vérifier les trois conditions avec un correcteur proportionnel.

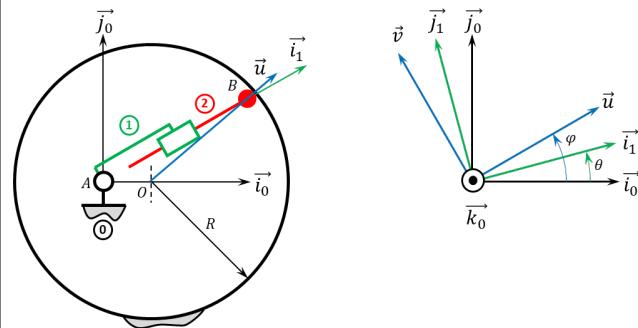
Corrigé voir 284.

## C2-06 – Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques

### Exercice 192 – Pompe à piston radial \*

#### C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AO} = e \overrightarrow{i}_0$  et  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i}_1$ . De plus  $e = 10 \text{ mm}$  et  $R = 20 \text{ mm}$ . Le contact entre **0** et **2** en **B** est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** En utilisant Python, tracer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 4** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

On prendra une section de piston **2** de  $1 \text{ cm}^2$  et une fréquence de rotation de  $\dot{\theta}(t) = \pi \times 2 \text{ rad s}^{-1}$ . **Question 5** Exprimer le débit instantané de la pompe.

**Question 6** En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour  $e = 10 \text{ mm}$  et  $e = 15 \text{ mm}$ .

**Question 7** En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour  $e = 10 \text{ mm}$  pour une pompe à 5 pistons (5 branches **1+2**).

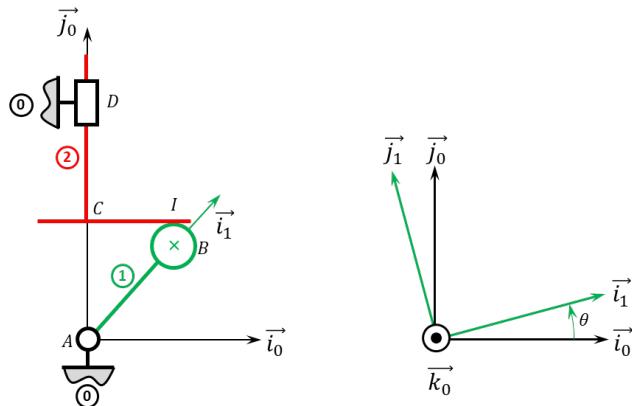
Indications (à vérifier...):

1. .
2.  $\lambda(t) = e \cos \theta(t) \pm \sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}$ .
3. .
4.  $q(t) = S \dot{\lambda}(t)$ .
5. .

Corrigé voir 285.

**Exercice 193 – Pompe à piston axial \***
**C2-06**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = e \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BI} = R \vec{j}_0$  et  $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \vec{j}_0$ . De plus,  $e = 10 \text{ mm}$  et  $R = 20 \text{ mm}$ . Le contact entre 1 et 2 en B est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre 0 et 2.


**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** On note  $S$  la section du piston 2. Exprimer le débit instantané de la pompe.

**Question 5** En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour  $e = 10 \text{ mm}$  et  $R = 10 \text{ mm}$  ainsi que pour  $e = 20 \text{ mm}$  et  $R = 5 \text{ mm}$ . La fréquence de rotation est  $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$ , la section du piston est donnée par  $S = 1 \text{ cm}^2$ .

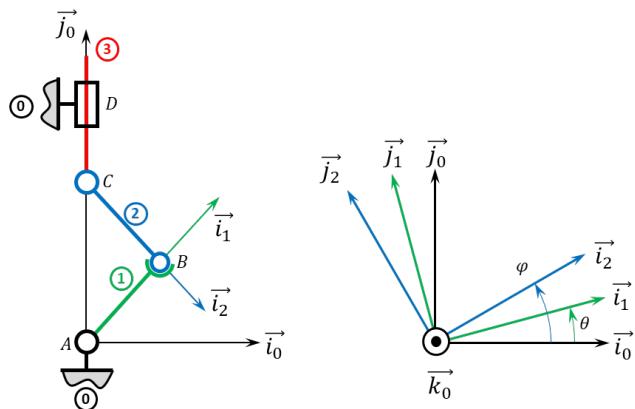
Indications :

1. .
2.  $e \sin \theta + R - \lambda(t) = 0$ .
3.  $\dot{\lambda}(t) = e \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$ .
4.  $q(t) = e S \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$ .
5. .

Corrigé voir 286.

**Exercice 194 – Système bielle manivelle \*\***
**C2-06**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ ,  $\overrightarrow{CB} = L \vec{i}_2$  et  $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \vec{j}_0$ .


**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer la vitesse du piston en fonction du temps. La fréquence de rotation est  $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$ , on prendra  $R = 10 \text{ mm}$  et  $L = 20 \text{ mm}$  puis  $L = 30 \text{ mm}$ .

**Question 5** En utilisant Python, tracer l'accélération du piston en fonction du temps en utilisant les mêmes valeurs que dans la question précédente. On utilisera une dérivation numérique.

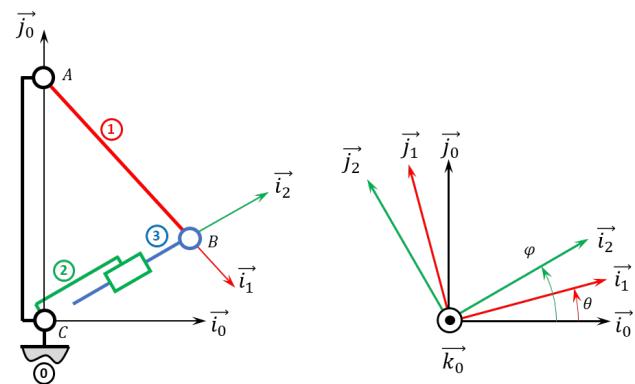
Indications :

1. .
2.  $\lambda(t) = \pm \sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)} + R \sin \theta(t)$ .
3.  $\dot{\lambda}(t) = \pm \left( \frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)}} \right) + \dot{\theta}(t) R \cos \theta(t)$ .
4. .
5. .

Corrigé voir 287.

**Exercice 195 – Pompe oscillante \***
**C2-06**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{CA} = H \vec{j}_0$ . De plus,  $R = 40 \text{ mm}$  et  $H = 60 \text{ mm}$ . Par ailleurs, on note  $\overrightarrow{CB} = \lambda(t) \vec{i}_2$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** Exprimer le débit instantané de la pompe.

**Question 5** En utilisant Python, donner le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour un piston de diamètre  $D = 10\text{ mm}$ .

Indications :

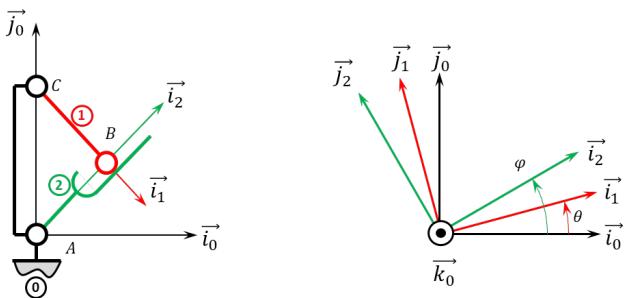
1. .
2.  $\lambda(t) = \pm \sqrt{R^2 + H^2 + 2HR \sin \theta(t)}$
3.  $\dot{\lambda}(t) = \frac{1}{2} (-2HR\dot{\theta}(t) \cos \theta(t)) (R^2 + H^2 + 2HR \sin \theta(t))^{-\frac{1}{2}}$
4.  $q(t) = S\lambda(t)$
5. .

Corrigé voir 288.

### Exercice 196 – Barrière Sympact \*

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = H \overrightarrow{j_0}$  et  $\overrightarrow{CB} = R \overrightarrow{i_1}$ . De plus,  $H = 120\text{ mm}$  et  $R = 40\text{ mm}$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\varphi(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Indications :

1. .
2.  $\tan \varphi(t) = \frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)}$ .
3.  $\dot{\varphi}(t) = \frac{R\dot{\theta}(t)(R + h \sin \theta(t))}{R^2 + h^2 + 2Rh \sin \theta(t)}$ .
4. .

Corrigé voir 289.

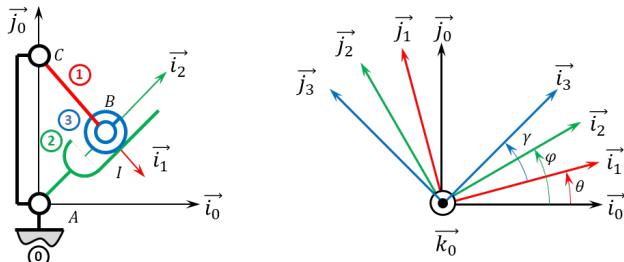
### Exercice 197 – Barrière Sympact avec galet \*\*

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = H \overrightarrow{j_0}$  et  $\overrightarrow{CB} = R \overrightarrow{i_1}$ . De plus,  $H = 120\text{ mm}$  et  $R = 40\text{ mm}$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\varphi(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer  $\gamma(t)$  et  $\dot{\gamma}(t)$ .

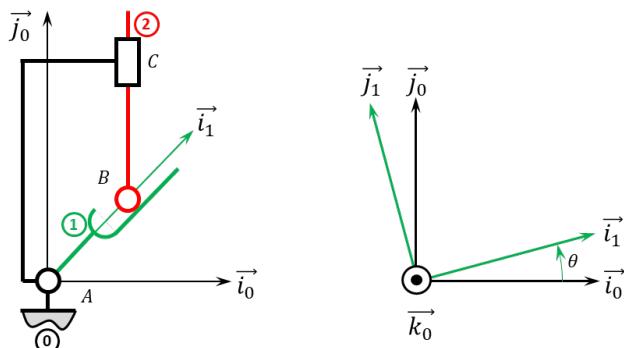
**Question 5** En utilisant Python, tracer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Corrigé voir 290.

### Exercice 198 – Poussoir \*

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = L \overrightarrow{i_0} + H \overrightarrow{j_0}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_1}$  et  $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \overrightarrow{j_0}$ . De plus,  $H = 120\text{ mm}$ ,  $L = 40\text{ mm}$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\mu(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\mu}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\dot{\mu}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

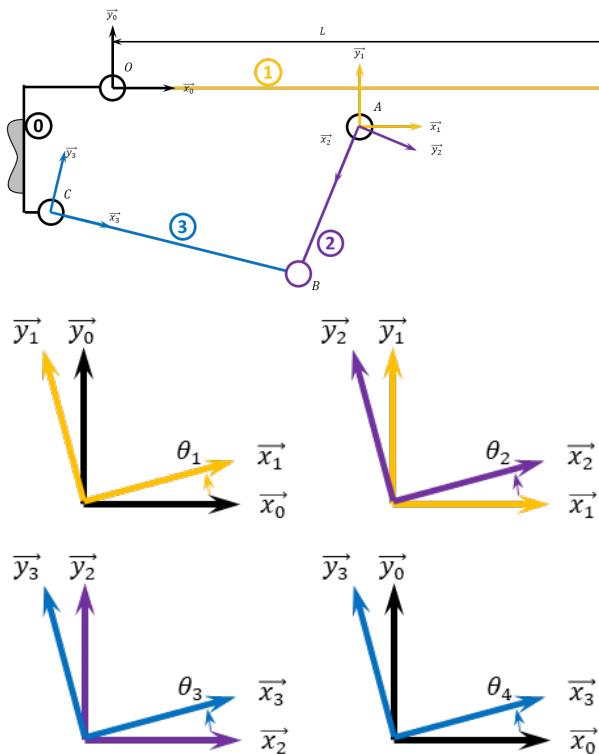
Corrigé voir 291.

### Exercice 199 – Système 4 barres \*\*

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

On a :

- $\overrightarrow{OA} = a \vec{x}_1 - f \vec{y}_1$  avec  $a = 355 \text{ mm}$  et  $f = 13 \text{ mm}$ ;
- $\overrightarrow{AB} = b \vec{x}_2$  avec  $b = 280 \text{ mm}$ ;
- $\overrightarrow{BC} = -c \vec{x}_3$  avec  $c = 280 \text{ mm}$ ;
- $\overrightarrow{OC} = -d \vec{x}_0 - e \vec{y}_0$  avec  $d = 89,5 \text{ mm}$  et  $e = 160 \text{ mm}$ ;



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\theta_1(t)$  en fonction de  $\theta_4(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\theta}_1(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}_4(t)$ .

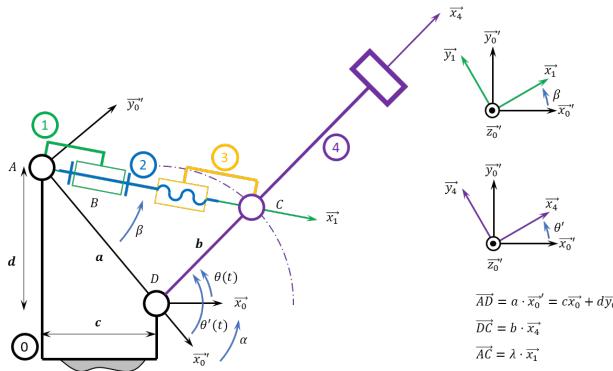
**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\dot{\theta}_1(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}_4(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Corrigé voir 292.

### Exercice 200 – Maxpid \*\*\*

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs  $a = 107,1 \text{ mm}$ ,  $b = 80 \text{ mm}$ ,  $c = 70 \text{ mm}$ ,  $d = 80 \text{ mm}$ . Le pas de la vis est de 4 mm.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\theta(t)$  en fonction de  $\lambda(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\dot{\lambda}(t)$ .

**Question 4** Exprimer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\omega(t)$ , vitesse de rotation du rotor moteur 2 par rapport au stator 1.

**Question 5** En utilisant Python, tracer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\omega(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 2 par rapport à 1 est de 500 tours par minute.

Corrigé voir 293.

### Exercice 201 – Variateur de Graham 1\*\*\*

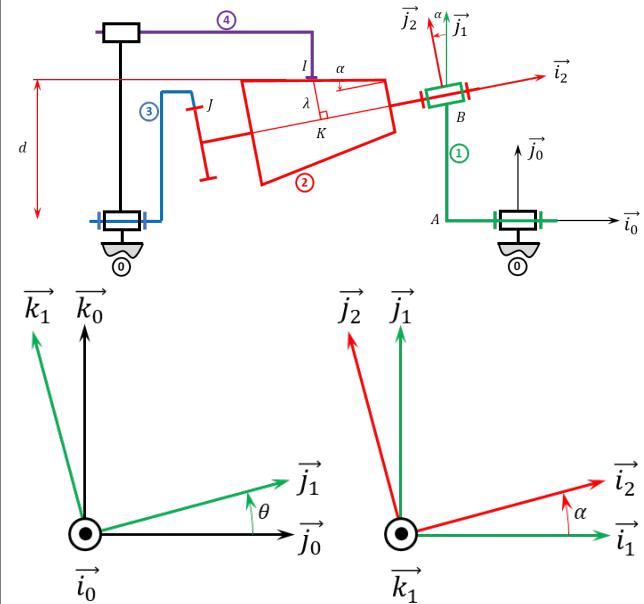
D'après ressources de Michel Huguet.

**B2-13**

**C2-05**

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



1. Les éventuelles erreurs de texte font partie intégrante de la difficulté :).

On note  $\overrightarrow{AJ} = -L \overrightarrow{i_0} + \frac{d_3}{2} \overrightarrow{j_2}$  et  $\overrightarrow{KJ} = -\ell \overrightarrow{i_2} + \frac{d_2}{2} \overrightarrow{j_2}$ .

Soit  $\mathcal{R} = \left( A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0} \right)$  un repère lié au bâti **0** du variateur. L'arbre moteur **1** et l'arbre récepteur **3** ont une liaison pivot d'axe  $(A, \overrightarrow{i_0})$  avec le bâti **0**. On pose  $\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \omega_1 \overrightarrow{i_0}$  et  $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \omega_3 \overrightarrow{i_0}$ .

Soit  $\mathcal{R}_1 = \left( A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1} \right)$  et  $\mathcal{R}_2 = \left( B; \overrightarrow{i_2}, \overrightarrow{j_2}, \overrightarrow{k_1} \right)$  deux repères liés respectivement à 1 et 2 tels que  $\overrightarrow{AB}$  ait même direction que  $\overrightarrow{j_1}$ . On pose  $\alpha = \left( \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{i_2} \right)$  constant.

Le satellite **2** a une liaison pivot d'axe  $(\vec{B}, \vec{i}_2)$  avec  
**1. 2** est un tronc de cône de révolution d'axe  $(\vec{B}, \vec{i}_2)$  de  
demi angle au sommet  $\alpha$ . On pose  $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \omega \vec{i}_2$ .

La génératrice de **2** du plan  $(O, \vec{i}_0, \vec{j}_1)$  la plus éloignée de l'axe  $(O, \vec{i}_0)$  est parallèle à  $\vec{i}_0$ . Notons  $d$  sa distance à l'axe  $(O, \vec{i}_0)$

**2** roule sans glisser au point  $I$ , sur une couronne **4**, immobile par rapport à **0** pendant le fonctionnement. Le réglage du rapport de variation s'obtient en déplaçant **4** suivant l'axe  $(O, \vec{i}_0)$ .

Soit  $K$  le centre de la section droite du tronc de cône passant par  $I$ . On pose  $\overline{BI} = \lambda j_2$ . À l'extrémité de **2** est fixée une roue dentée de  $n$  dents, d'axe  $(B, \overrightarrow{i_2})$ , qui engrène avec une couronne dentée intérieure d'axe  $(A, \overrightarrow{i_0})$ , de  $n_2$  dents, liée à **3**.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** En exprimant que  $2$  roule sans glisser sur  $4$  au point  $I$ , déterminer  $\omega$  en fonction de  $\omega_1$ ,  $d$  et  $\lambda$ .

**Question 3** Quelle relation obtient-on entre  $\omega_1$ ,  $\omega_3$  et  $\omega$  en exprimant l'engrènement des deux roues dentées ? (c'est à dire que **2** et **3** roulent sans glisser l'un sur l'autre en I).

**Question 4** En déduire le rapport de variation  $\frac{\omega_3}{\omega_1}$  du mécanisme en fonction de  $\lambda$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  et  $d$ .

**Question 5** Tracer la courbe représentative du rapport de variation  $\frac{\omega_3}{\omega_1}$  du mécanisme en fonction de  $\lambda$ , sachant que  $\frac{n}{n_3} = \frac{d_1}{d_3}$ ,  $d = 55 \text{ mm}$  et que  $\lambda$  varie entre  $\lambda_{\min} = 12 \text{ mm}$  et la valeur  $\lambda_{\max} = 23 \text{ mm}$ .

Corrigé voir 295.

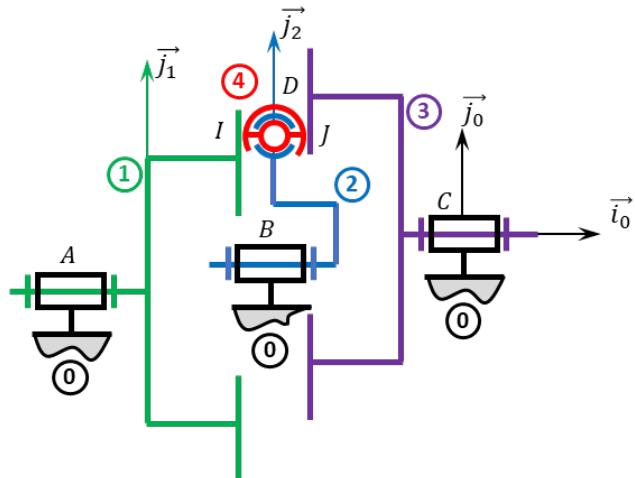
### **Exercice 202 – Variateur à billes**

B2-13

C2-05

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer la loi entrée – sortie.

Corrigé voir 295.

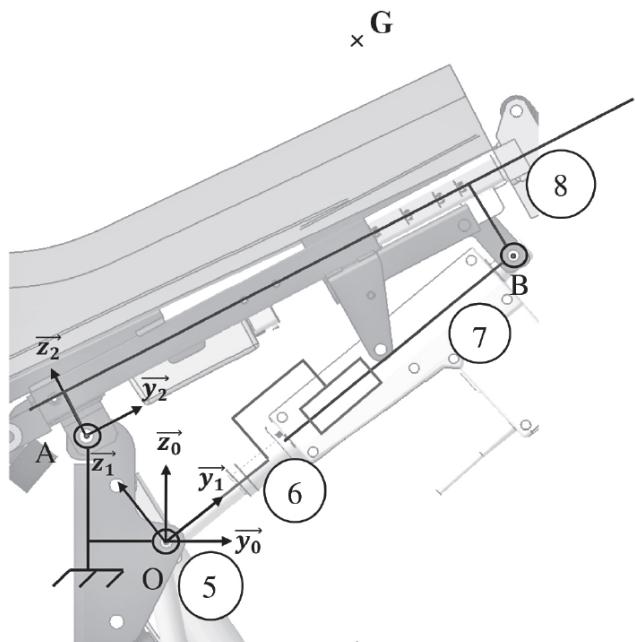
### **Exercice 203 – Fauteuil Roulant \***

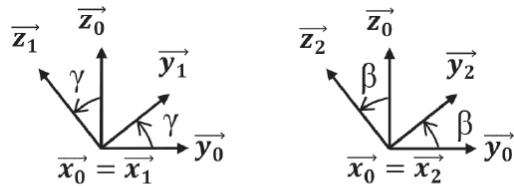
B2-13

C2-05

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

On s'intéresse au système de basculement de l'assise d'un système de fauteuil roulant.





$$\overrightarrow{OA} = -a \cdot \vec{y}_0 + b \cdot \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{OB} = \lambda(t) \cdot \vec{y}_1$$

$$\overrightarrow{AB} = l_1 \cdot \vec{y}_2 - d_1 \cdot \vec{z}_2$$

$$\overrightarrow{AG} = l_2 \cdot \vec{y}_2 + d_2 \cdot \vec{z}_2$$

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer les relations issues de la fermeture géométrique liant les paramètres  $\gamma$ ,  $\beta$  et  $\lambda(t)$ .

**Question 3** En déduire l'expression de  $\gamma$  en fonction de  $\beta$ .

Corrigé voir 296.

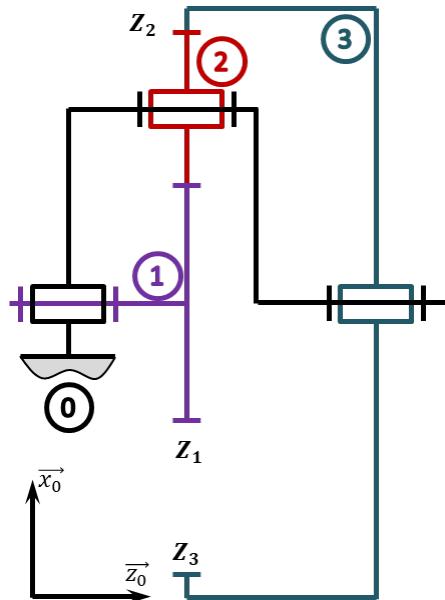
### 3.2.4 C2-06 – Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques

**Exercice 204 – Train simple \***

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

**Question 3** Donner une relation géométrique entre  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$  permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages.

ment du train d'engrenages.

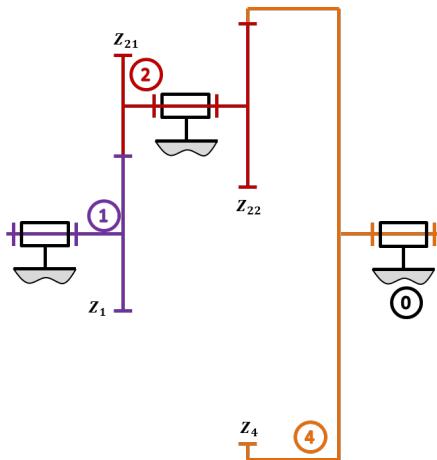
Corrigé voir 308.

**Exercice 205 – Train simple \***

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

**Question 3** Donner une relation géométrique entre  $Z_1$ ,  $Z_{21}$ ,  $Z_{22}$  et  $Z_4$  permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages (on fera l'hypothèse que toutes les roues dentées ont le même module).

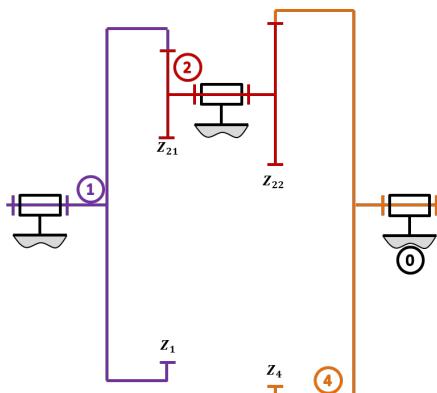
Corrigé voir 298.

**Exercice 206 – Train simple \***

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.

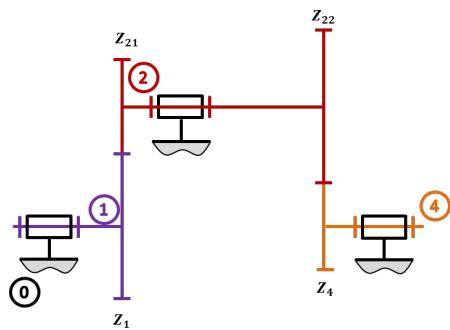


**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

**Exercice 207 – Train simple \***
**A3-05**
**C2-06**

Soit le train d'engrenages suivant.



Corrigé voir 299.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

Corrigé voir 300.

**Exercice 208 – Cheville robot NAO\***
**A3-05**
**C2-06**

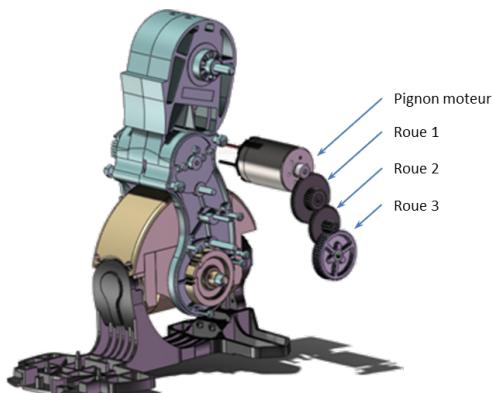
On s'intéresse ici à la cheville NAO. On cherche à savoir si, à partir du moteur retenu par le constructeur, la chaîne de transmission de puissance permet de vérifier les exigences suivantes :

- exigence 1.1.1.1 : la vitesse de roulis doit être inférieure à 42 tr/min;
- exigence 1.1.1.2 : la vitesse de tangage doit être inférieure à 60 tr/min.

La fréquence de rotation des moteurs permettant chacun des deux mouvements est de 8300 tr/min.

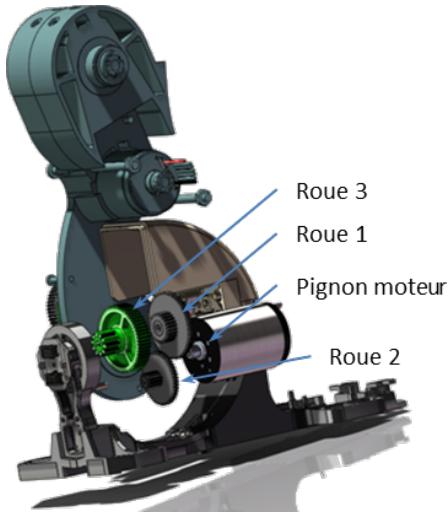
Pour la chaîne de transmission de tangage on donne le nombre de dents et le module de chaque roue dentée :

- pignon moteur :  $Z_m = 20, M_m = 0,3$ ;
- grand pignon 1 :  $Z_1 = 80, M_1 = 0,3$ ;
- petit pignon 1 :  $Z'_1 = 25, M'_1 = 0,4$ ;
- grand pignon 2 :  $Z_2 = 47, M_2 = 0,4$ ;
- petit pignon 2 :  $Z'_2 = 12, M'_2 = 0,4$ ;
- grand pignon 3 :  $Z_3 = 58, M_3 = 0,4$ ;
- petit pignon 3 :  $Z'_3 = 10, M'_3 = 0,7$ ;
- roue de sortie :  $Z_T = 36, M_T = 0,7$ .



Pour la chaîne de transmission du roulis on donne le nombre de dents et le module de chaque roue dentée :

- pignon moteur :  $Z_m = 13, M_m = 0,3$ ;
- grand pignon 1 :  $Z_1 = 80, M_1 = 0,3$ ;
- petit pignon 1 :  $Z'_1 = 25, M'_1 = 0,4$ ;
- grand pignon 2 :  $Z_2 = 47, M_2 = 0,4$ ;
- petit pignon 2 :  $Z'_2 = 12, M'_2 = 0,4$ ;
- grand pignon 3 :  $Z_3 = 58, M_3 = 0,4$ ;
- petit pignon 3 :  $Z'_3 = 10, M'_3 = 0,7$ ;
- roue de sortie 3 :  $Z_R = 36, M_R = 0,7$ .


**Question 1** Quels doivent être les rapports de réductions des transmissions par engrenage afin de respecter les exigences 1.1.1.1 et 1.1.1.2 ?

**Question 2** Dans le cas de l'axe de tangage, remplir le tableau suivant :

**Question 3** Dans le cas de l'axe de tangage, déterminer le diamètre de chaque roue dentée.

**Question 4** Dans le cas de l'axe de tangage, réaliser le schéma cinématique minimal.

**Question 5** Calculer le rapport de transmission de la chaîne de transmission de l'axe de tangage ? L'exigence 1.1.1.2 est-elle respectée ? Si non, quelle(s) solution(s) de remédiation pourrait-on proposer ?

**Question 6** Calculer le rapport de transmission de la chaîne de transmission de l'axe de roulis ? L'exigence 1.1.1.1 est-elle respectée ? Si non, quelle(s) solution(s) de remédiation pourrait-on proposer ?

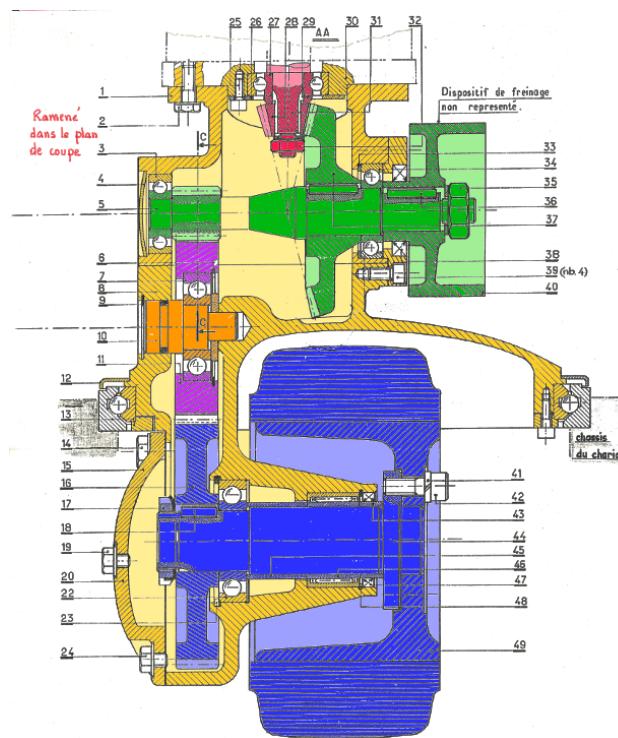
Corrigé voir 301.

**Exercice 209 – Train simple \***
*D'après Florestan Mathurin.*
**A3-05**
**C2-06**

On s'intéresse au réducteur équipant la roue arrière motrice et directionnelle d'un chariot élévateur de manutention automoteur à conducteur non porté.

**Données :**  $z_{27} = 16$  dents,  $z_{35} = 84$  dents,  $z_5 = 14$  dents,  $z_{11} = 56$  dents,  $z_{16} = 75$  dents.

**Question 1** Identifier les classes d'équivalence cinématique sur le dessin d'ensemble.



**Question 2** Construire le schéma cinématique du réducteur dans le même plan que le dessin.

**Question 3** Compléter le tableau donnant les caractéristiques des roues et pignons.

Repère de la roue	Module $m$ (mm)	Nombre de dents $Z$	Diamètre primitif $D$ (mm)
27			
35	1,5		
5			
11	1,5		
16			

**Question 4** Après avoir proposé un paramétrage, indiquer dans quel sens tourne la roue si le moteur 28 (31) tourne dans le sens positif.

**Question 5** Pour une vitesse de 1500 tr/min en sortie de moteur, déterminer la vitesse de rotation de la roue. Le diamètre de la roue est de 150 mm. Quelle est la vitesse du véhicule?

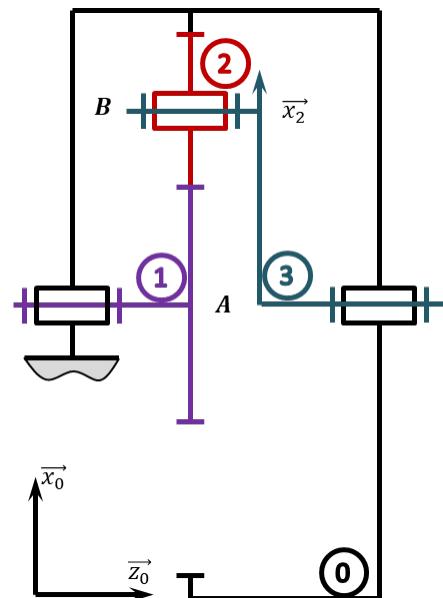
Corrigé voir 302.

**Exercice 210 – Train simple \***

A3-05

C2-06

Soit le train épicycloïdal suivant.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

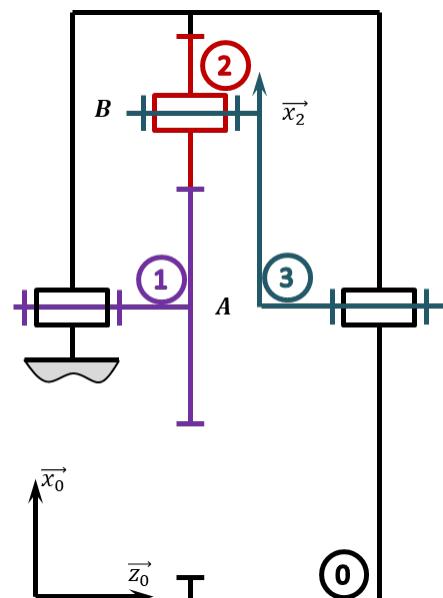
Corrigé voir 303.

**Exercice 211 – Train simple \***

A3-05

C2-06

Soit le train épicycloïdal suivant.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

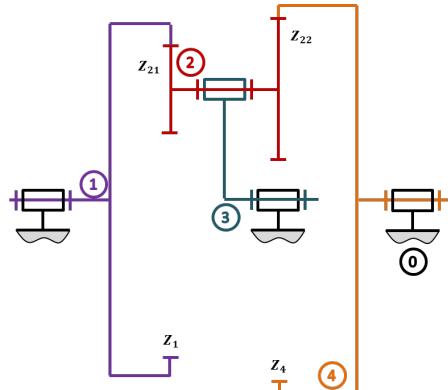
**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

Corrigé voir 304.

**Exercice 212 – Train simple \***
**A3-05**
**C2-06**

Soit le train épicycloïdal suivant.


**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

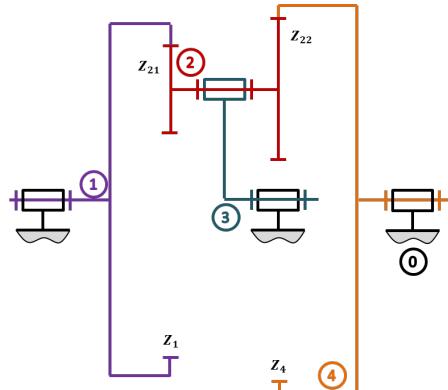
**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

Corrigé voir 305.

**Exercice 213 – Train simple \***
**A3-05**
**C2-06**

Soit le train d'engrenages suivant.


**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

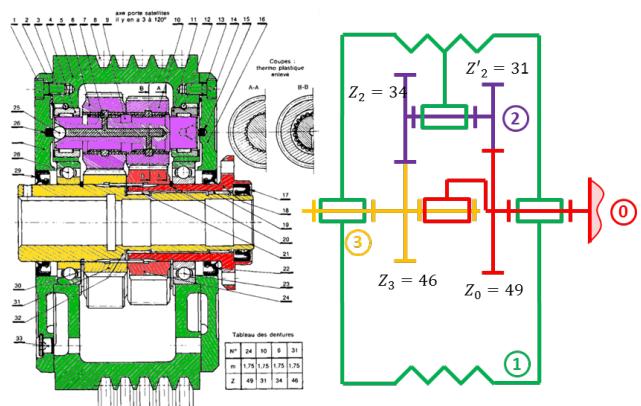
**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

Corrigé voir 306.

**Exercice 214 – Poule Redex \*** D'après ressources de Stéphane Genouël.

**A3-05**
**C2-06**

Soit le train d'engrenages suivant.

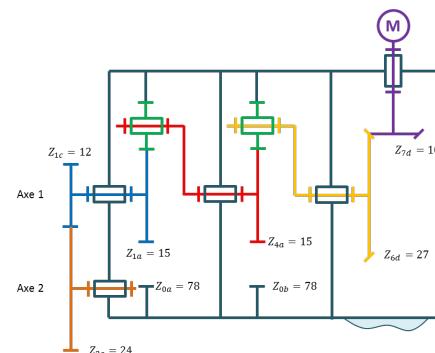

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer littéralement, en fonction des nombres de dents, la loi E/S du système (c'est-à-dire le rapport de transmission).

Corrigé voir 307.

**Exercice 215 – Train simple \***
**A3-05**
**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

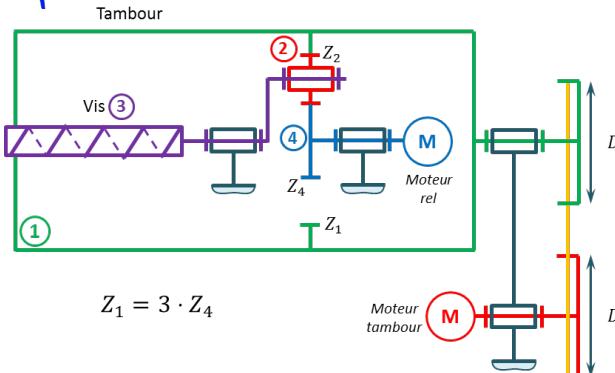
Soit le système de transmission suivant.


**Question 1** Donner les rapports de chacun des 4 étages de réduction.

Corrigé voir 308.

**Exercice 216 – Centrifugeuse des boues \***
**A3-05**
**C2-06**

La chaîne cinématique est représentée sur la figure suivante.



La séquence de lancement de la centrifugeuse se déroule en trois phases :

- mise en marche du premier moteur  $M_{\text{tambour}}$  jusqu'à ce que le tambour 1 atteigne sa vitesse de consigne de 2 000 tours/min. Le moteur  $M_{\text{rel}}$  est à l'arrêt;
- mise en marche du deuxième moteur  $M_{\text{rel}}$  jusqu'à ce que la vitesse différentielle de 2 tours/min soit atteinte entre le tambour 1 et la vis 3. La vis 3 tourne ainsi plus vite que le tambour 1;
- la boue liquide est ensuite introduite.

**Question 1** Déterminer la fréquence de rotation de la vis (par rapport au bâti) lors de la phase de lancement.

Corrigé voir 309.

**Exercice 217 – Train simple \*** D'après documentation E Mazet.

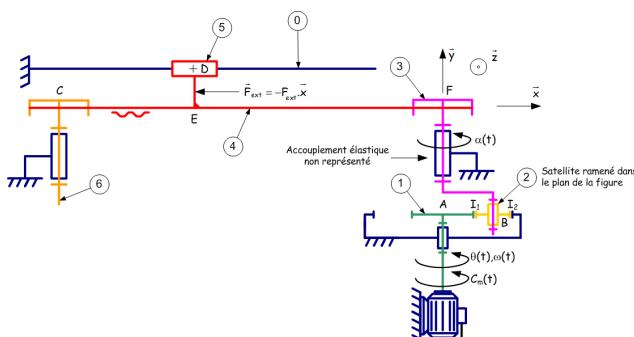
A3-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

On s'intéresse à la chaîne de transmission de puissance du Control'X dont un modèle est donné dans la figure ci-dessous.

On note :

- 0** : le bâti auquel est encastré une couronne de rayon primitif  $R_b$  ;
- 1** : le pignon de sortie du moteur de rayon primitif  $R_m$  ;
- 2** : un des 3 satellites du réducteur épicycloïdal de rayon primitif  $R_s$  ;
- 3** : le porte-satellite auquel est encastré une poulie de rayon  $R_p$  ;
- 4** : le chariot de masse  $M$  encastré à la courroie **4** considérée inextensible. On note  $v = V(D, 5/0) \cdot \vec{y}$  ;
- 5** : la seconde poulie de rayon  $R_p$  ;



**Question 1** Déterminer la relation entre  $\omega(1/0)$  et  $v$ .

Corrigé voir 310.

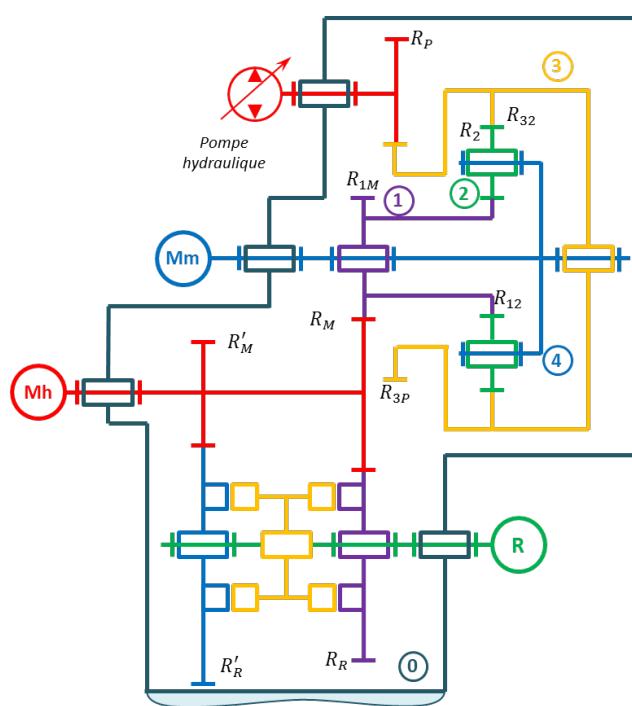
**Exercice 218 – Train simple \***

A3-05

C2-06

On s'intéresse à la chaîne de transmission de puissance d'un tracteur Fendt. Cette dernière est composée d'un moteur (et d'une pompe) hydraulique (Mh) ainsi que d'un moteur thermique MAN (Mm).

Le moteur MAN a pour but de fournir de la puissance à la pompe hydraulique et au tracteur (récepteur R). On donne ci-dessous le schéma de la transmission.



Les rayons des pignons sont les suivants :  $R_{12} = 60$ ,  $R_{1M} = 33$ ,  $R_2 = 30$ ,  $R_{32} = 120$ ,  $R_{3P} = 54$ ,  $R_M = 54$ ,  $R'_M = 48$ ,  $R_R = 42$ ,  $R'_R = 48$ .

Une étude antérieure a permis d'établir que  $\frac{\omega(\text{Ph}/0)}{\omega(\text{Mh}/0)} = \frac{2y}{x}$  avec  $x \in [0, 71; 1]$  et  $y \in [0; 1]$ .

La fréquence de rotation du moteur Man est de 1900 tr/min.

**Question 1** Déterminer la relation entre  $\omega(1/0)$ ,  $\omega(3/0)$  et  $\omega(4/0)$ .

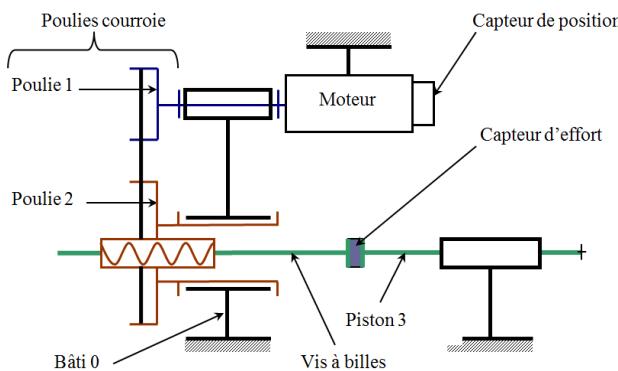
**Question 2** Montrer que la relation entre la rotation du moteur hydraulique et le moteur Man peut se mettre sous la forme :  $\frac{\omega(\text{Mh}/0)}{\omega(\text{Mm}/0)} = -\frac{Ax}{BR_p y + Cx}$  où on explicitera A, B et C.

Corrigé voir 311.

**Exercice 219 – Système vis-écrou \*** D'après ressources Pole Chateaubriand – Joliot-Curie.

**A3-05**
**C2-06**

Soit la chaîne de transmission suivante.



Le schéma du restituteur actif est donné ci-dessous. Le pas de la vis est  $p_v = 10 \text{ mm}$ . Le diamètre de la poulie 2 est le double de celui de la poulie 1.

**Question 1** Sur le schéma cinématique, repasser chaque solide d'une couleur différente.

**Question 2** Réaliser la chaîne d'énergie-puissance partielle en définissant les noms des transmetteurs et les grandeurs d'entrée et de sortie cinématiques.

**Question 3** Définir la loi entrée-sortie entre la vitesse de translation du piston 3 et la vitesse de rotation du moteur 1.

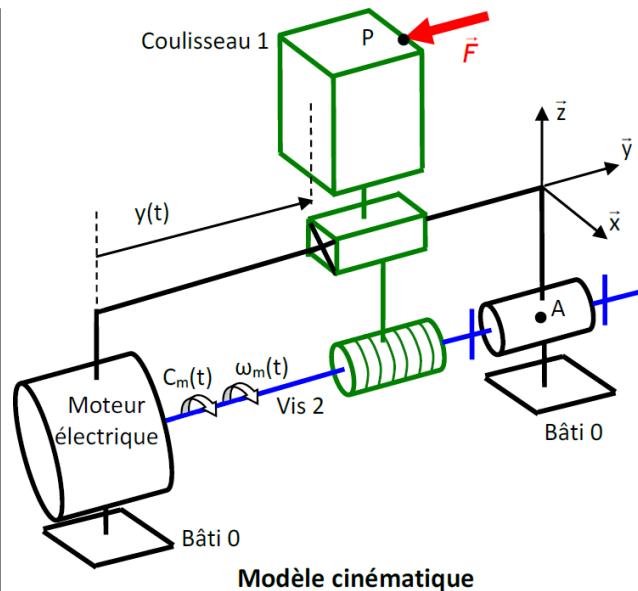
Corrigé voir 312.

**Exercice 220 – Train simple \*** D'après ressources Pole Chateaubriand – Joliot-Curie.

**A3-05**
**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

L'usinage est une opération de transformation d'un produit par enlèvement de matière. Cette opération est à la base de la fabrication de produits dans les industries mécaniques. La génération d'une surface par enlèvement de matière est obtenue grâce à un outil muni d'au moins une arête coupante. Les différentes formes de pièces sont obtenues par des translations et des rotations de l'outil par rapport à la pièce.

On s'intéresse ici à l'axe Y qui met en mouvement le coulisseau 1, sur lequel est fixée l'outil, par rapport au bâti 0. Le coulisseau 1 est mis en mouvement par un moteur électrique qui délivre un couple moteur  $C_m(t)$ .



On note  $p$  le pas de vis.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

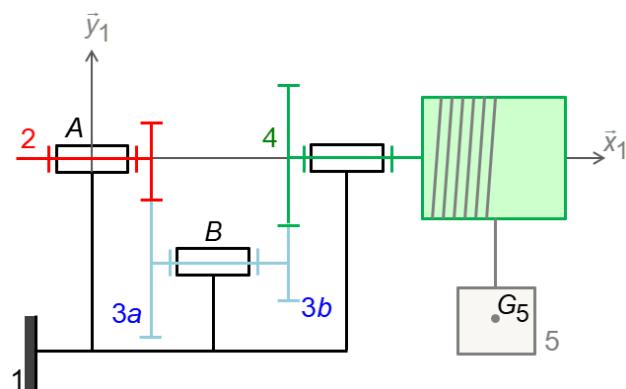
**Question 2** Définir la loi entrée-sortie entre la vitesse de translation du coulisseau et la vitesse de rotation du moteur.

Corrigé voir 313.

**Exercice 221 – Treuil de levage \*** D'après ressources Pole Chateaubriand – Joliot-Curie.

**A3-05**
**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

On s'intéresse à un treuil dont le modèle cinématique est donné ci-dessous.



On note  $Z_2$  le nombre de dents de la roue dentée de l'arbre 2. On note l'arbre intermédiaire 3 et  $Z_{3a}$  et  $Z_{3b}$  les nombres de dents de ses deux roues dentées. On note  $R$  le rayon du tambour 4 sur lequel s'enroule sans glisser un câble et  $Z_4$  le nombre de dents de sa roue dentée.

**Question 1** Déterminer la relation entre  $v_{51}$  la vitesse de déplacement de la charge par rapport au bâti et  $\omega_{21}$  la vitesse de rotation du moteur.

**Question 2** On note  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $J_4$  l'inertie des pièces 2, 3 et 5. On note  $M_5$  la masse du solide 5. Donner la masse

équivalente ramenée « à la translation » de la masse. Donner l'inertie équivalente ramenée à l'arbre d'entrée 2.

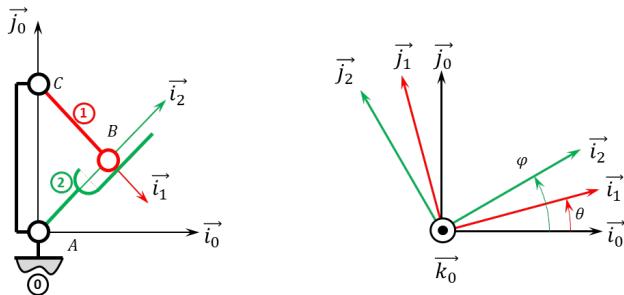
Corrigé voir 314.

### 3.2.5 C2-07 – Déterminer les actions mécaniques en statique

#### Exercice 222 – Barrière Sympact \*\*

**Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = H \vec{j}_0$  et  $\overrightarrow{CB} = R \vec{i}_1$ . De plus,  $H = 120 \text{ mm}$  et  $R = 40 \text{ mm}$ .



On néglige la pesanteur sur la pièce 1.

On note  $\{\mathcal{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$  l'action mécanique du moteur sur la pièce 1.

On note  $\{\mathcal{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_r \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$  l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce 2. Le raideur du ressort est telle qu'il exerce un couple de  $45 \text{ Nm}$  pour un angle de rotation  $100^\circ$ . On considère que le couple est nul lorsque la pièce 2 est à la verticale ( $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$ ). Il est au maximum lorsque  $\varphi_f = 0$ .

On note  $\{\mathcal{F}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \vec{j}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{\forall G}$  avec  $\overrightarrow{AG} = L \vec{i}_2$ .

**Question 1** Réaliser un graphe d'analyse.

**Question 2** Expliciter  $C_r$  en fonction des différents constantes ( $k$ ,  $\varphi_o$ ,  $\varphi_f$ ) et celles qui vous sembleraient utile.

**Question 3** Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.

**Question 4** Mettre en œuvre une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.

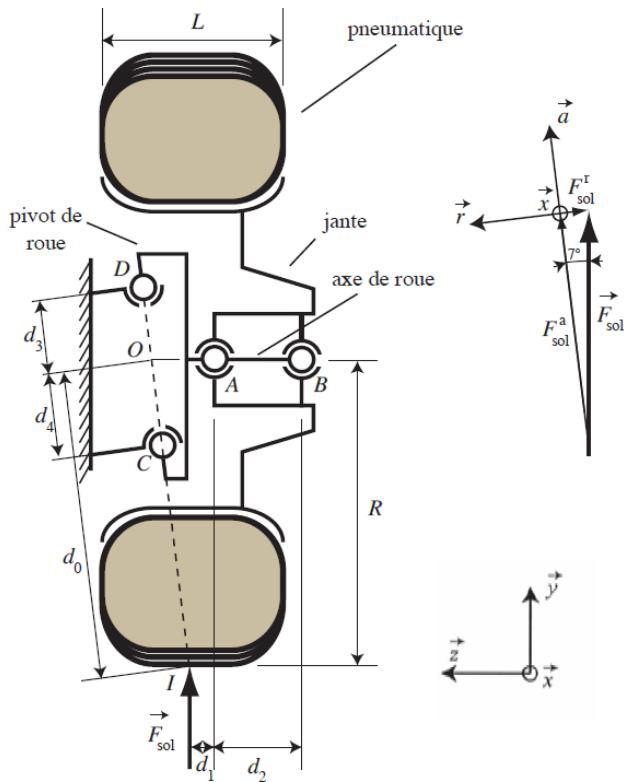
**Question 5** Tracer une courbe Python.

Corrigé voir 315.

#### Exercice 223 – Suspension automobile \*\*

**C2-07** Pas de corrigé pour cet exercice.

On s'intéresse à la liaison entre l'axe de la roue et le châssis du véhicule. Les notations adoptées seront les suivantes :  $F_C^a$  (respectivement  $F_C^r$ ,  $F_C^x$ ) désignera la composante suivant  $\vec{a}$  (respectivement  $\vec{r}$ ,  $\vec{x}$ ) de l'effort extérieur exercé en  $C$ . On procédera de même pour le point  $D$ .



**Question 1** En isolant l'ensemble {pneumatique + jante + axe de roue}, écrire les équations issues du principe fondamental de la statique appliquée au point  $C$ , en projection sur les axes de la base ( $\vec{a}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{x}$ ) en fonction des composantes  $F_{sol}^a$  et  $F_{sol}^r$  et des dimensions  $d_0$ ,  $d_3$  et  $d_4$ .

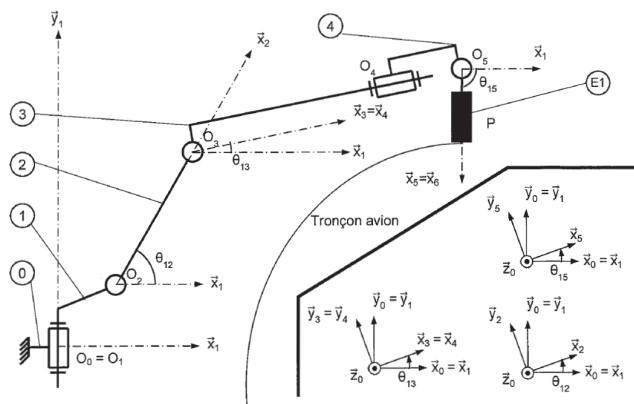
**Question 2** Résoudre littéralement le système.

Corrigé voir 316.

#### Exercice 224 – Suspension automobile \*\*

**C2-07** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Objectif** L'objectif est de déterminer le couple articulaire C12 à appliquer sur le bras 2 afin de garantir l'effort de perçage et l'effort presseur.



**Hypothèses :**

- l'étude est réalisée pour une demi couture orbitale (couture supérieure) ;
- le repère  $\mathcal{R}_0(O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  sera supposé galiléen ;
- $\vec{y}_0$  est l'axe vertical ascendant et  $\vec{g} = -g \vec{y}_0$  avec  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  ;
- toutes les liaisons sont supposées parfaites.

**\*Repérage et paramétrage**

Le repère associé à l'embase fixe (0) est le repère  $\mathcal{R}_0(O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ,  $\vec{y}_0$  étant l'axe vertical ascendant.

L'embase de rotation (1), en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{y}_1)$ , par rapport au bâti (0), a pour repère associé le repère  $\mathcal{R}_1(O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  tel que  $O_0 = O_1$ ,  $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$ ,  $\vec{y}_0 = \vec{y}_1$ ,  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ .

Le bras (2), en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{z}_2)$  par rapport à l'embase de rotation (1), a pour repère associé le repère  $\mathcal{R}_2(O_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  tel que  $\overrightarrow{O_1 O_2} = L_1 \vec{x}_1 + L_2 \vec{y}_1$ ,  $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$  et  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \theta_{12}$ .

Le bras (3), en liaison pivot d'axe  $(O_3, \vec{z}_3)$  par rapport au bras (2), a pour repère associé le repère  $\mathcal{R}_3(O_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  tel que  $\overrightarrow{O_2 O_3} = L_3 \vec{x}_2$ ,  $\vec{z}_1 = \vec{z}_3$  et  $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = \theta_{13}$ .

Le bras (4), en liaison pivot d'axe  $(O_4, \vec{x}_4)$  par rapport au bras (3), a pour repère associé le repère  $\mathcal{R}_4(O_4; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  tel que  $\overrightarrow{O_3 O_4} = L_4 \vec{x}_3 + l_5 \vec{y}_3$ ,  $\vec{x}_3 = \vec{x}_4$  et  $(\vec{y}_3, \vec{y}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4) = \theta_{34}$ .

L'ensemble (E1) composé du bras (5), du poignet et de l'outil, en liaison pivot d'axe  $(O_5, \vec{z}_5)$  par rapport au bras (4), a pour repère associé le repère  $\mathcal{R}_5(O_5; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  tel que  $\overrightarrow{O_4 O_5} = L_5 \vec{x}_4$ ,  $\vec{z}_1 = \vec{z}_5$  et  $(\vec{x}_4, \vec{x}_5) = (\vec{y}_4, \vec{y}_5) = \theta_{15}$ .

La masse du bras (2) est notée  $M_2$  et la position du centre de gravité est définie par  $\overrightarrow{O_2 G_2} = \frac{1}{2} L_3 \vec{x}_2$ .

La masse du bras (3) et du bras (4) est notée  $M_{34}$  et la position du centre de gravité est définie par  $\overrightarrow{O_3 G_3} = \frac{1}{3} L_4 \vec{x}_3 + L_5 \vec{y}_3$ .

La masse de l'ensemble (E1) est notée  $M_{E1}$  et la position du centre de gravité est définie par  $\overrightarrow{O_5 G_5} = L_7 \vec{x}_5$ .

L'extrémité de l'outil est définie par le point  $P$  défini par  $\overrightarrow{O_5 P} = L_8 \vec{x}_5$ .

Le torseur d'action mécanique lié au perçage sera noté :  $\{\mathcal{T}(\text{Tronçon (perçage)} \rightarrow E_1)\} = \begin{Bmatrix} -F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P, \mathcal{R}_5}$ .

Un effort presseur est de plus nécessaire pour le perçage optimal des deux tronçons. Le torseur d'action mécanique associé sera noté :  $\{\mathcal{T}(\text{Tronçon (presseur)} \rightarrow E_1)\} = \begin{Bmatrix} -P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P, \mathcal{R}_5} ..$

La rotation entre les solides (0) et (1) est supposée bloquée dans la suite du sujet.

**Question 1** Réaliser le graphe de structure de l'ensemble en précisant les liaisons.

**Question 2** Quel est l'ensemble  $\Sigma$  à isoler afin de

déterminer le couple  $C_{12}$ .

**Question 3** Réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures appliquées à  $\Sigma$  et écrire les éléments de réduction de chaque torseur d'actions mécaniques.

**Question 4** Quel théorème doit-être appliqué et sur quel axe de projection, pour déterminer le couple  $C_{12}$  ?

La configuration correspondant à la position extrême supérieure de la couture orbitale correspond aux angles suivants :  $\theta_{12} = 60^\circ$ ,  $\theta_{13} = -4^\circ$ ,  $\theta_{15} = -90^\circ$ .

Dans la suite de l'étude, l'angle  $\theta_{13}$  sera considéré nul.

**Question 5** Déterminer l'équation littérale du couple  $C_{12}$  en fonction de  $g$ ,  $F$ ,  $P$ ,  $M_2$ ,  $M_{34}$ ,  $M_{E1}$ ,  $L_3$ ,  $L_4$ ,  $L_5$ ,  $L_6$ ,  $L_7$ ,  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{15}$ .

Les valeurs du robot considéré sont :

- $M_2 = 264 \text{ kg}$ ,  $M_{34} = 430 \text{ kg}$ ,  $M_{E1} = 2150 \text{ kg}$ ,  $P = 150 \text{ N}$ ;
- $L_1 = 0,405 \text{ m}$ ,  $L_2 = 0,433 \text{ m}$ ,  $L_3 = 1,075 \text{ m}$ ,  $L_4 = 1,762 \text{ m}$ ,  $L_5 = 0,165 \text{ m}$ ,  $L_6 = 0,250 \text{ m}$ ,  $L_7 = 0,550 \text{ m}$ ,  $L_8 = 0,750 \text{ m}$ .

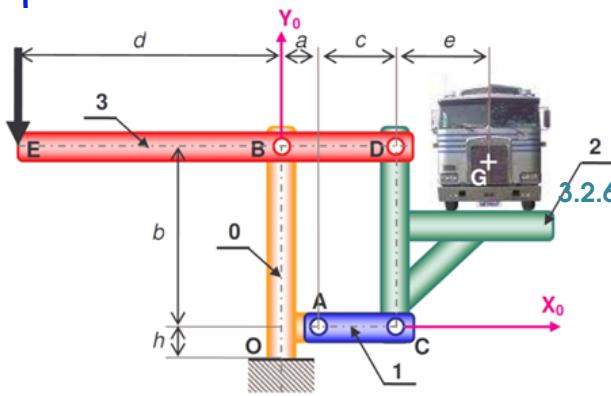
**Question 6** Déterminer alors la valeur du couple  $C_{12}$ .

La valeur limite supérieure du couple  $C_{12}$  est fixée par le constructeur à 9000 Nm. **Question 7** Le choix du robot permettra-t-il de garantir les conditions d'assemblage dans cette position ? Justifier la réponse.

Corrigé voir 317.

**Exercice 225 – Pèse camion \*\***
**C2-07** Pas de corrigé pour cet exercice.

On considère un bâti 0 auquel est attaché le repère  $\mathcal{R} = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Le champ de pesanteur est  $g = -g \vec{y}_0$ . La barre 1 est liée au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(A, \vec{z}_0)$ . Le plateau porte camion 2 est lié à la barre 1 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(C, \vec{z}_0)$ . Le levier 3 est lié au bâti 0 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(B, \vec{z}_0)$ . Ce levier est également lié au plateau 2 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(D, \vec{z}_0)$ . Le camion 4, de centre de masse  $G$  et de masse  $M$  inconnue, repose sur le plateau 2. L'action mécanique connue est caractérisée par :  $\{\text{ext} \rightarrow 3\} = \begin{Bmatrix} -F \vec{y}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_E$ .



**Question 1** Déterminer la relation entre  $F$  et  $M$ . Que dire de la position du camion sur la plate-forme?

**Question 2** Déterminer les actions mécaniques dans toutes les liaisons.

Corrigé voir 318.

### Exercice 226 – Détermination des efforts dans une structure étayée \*\*

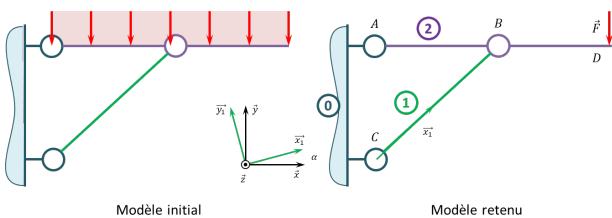
**C2-07** Pas de corrigé pour cet exercice.

Lors de la démolition d'une partie de la gare de Lyon Part-Dieu (en 2018), des étais ont été posés afin de soutenir la structure supérieure.



Dans le but de dimensionner les étais, il est nécessaire de déterminer les actions mécanique dans chacune des liaisons.

Pour cela, on utilise la modélisation suivante.



$$\text{On a } \overrightarrow{AB} = a \overrightarrow{x}, \overrightarrow{BD} = b \overrightarrow{x} \text{ et } \overrightarrow{CB} = L \overrightarrow{x_1}.$$

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).

**Question 2** Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

**Question 3** Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de  $F$ .

Éléments de corrigé :

$$3. \quad X_{02} = -F \frac{a+b}{a \tan \alpha}, \quad F_{01} = F \frac{a+b}{a \sin \alpha}, \quad Y_{02} = -\frac{b}{a} F.$$

Corrigé voir 319.

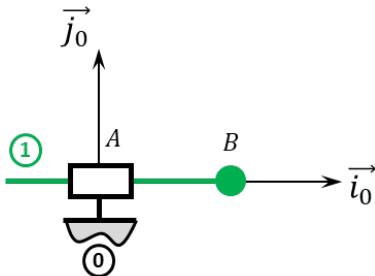
**Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.**

### Exercice 227 – Mouvement T – \*

**C2-08**

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On note  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_0}$ . On note  $m_1$  la masse du solide et  $I_B(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$ .



**Question 1** Exprimer le torseur cinétique  $\{\mathcal{C}(1/0)\}$  en  $B$ .

**Question 2** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en  $B$  puis en  $A$ .

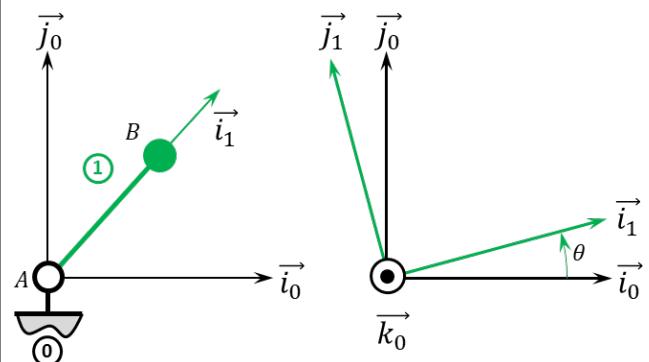
Corrigé voir 320.

### Exercice 228 – Mouvement R \*

**C2-08**

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \overrightarrow{i_1}$  avec  $R = 20 \text{ mm}$ . On note  $m_1$  la masse du solide 1,  $B$  son centre d'inertie et  $I_G(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$ .



#### Méthode 1 – Déplacement du torseur dynamique

**Question 1** Exprimer le torseur cinétique  $\{\mathcal{C}(1/0)\}$  en  $B$ .

**Question 2** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en  $B$  puis en  $A$ .

### Méthode 2 – Calcul en $A$

**Question 3** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en  $B$  puis en  $A$ .

### Massé ponctuelle

On fait maintenant l'hypothèse que la masse est ponctuelle et concentrée en  $B$ .

**Question 4** Exprimer le torseur cinétique  $\{\mathcal{C}(1/0)\}$  en  $B$ .

**Question 5** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en  $B$  puis en  $A$ .

Corrigé voir 321.

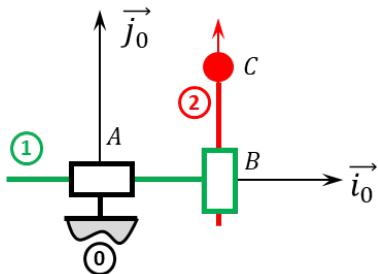
### Exercice 229 – Mouvement TT – \*

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On note  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$ . De plus :

- $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de **1**, on note  $m_1$  sa masse et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de **2**, on note  $m_2$  sa masse et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .



**Question 1** Exprimer les torseurs cinétiques  $\{\mathcal{C}(1/0)\}$  et  $\{\mathcal{C}(2/0)\}$ .

**Question 2** Exprimer les torseurs dynamiques  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  et  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$  en  $B$ .

**Question 3** En déduire  $\{\mathcal{D}(1+2/0)\}$  en  $B$ .

Corrigé voir 322.

### Exercice 230 – Mouvement RR \*

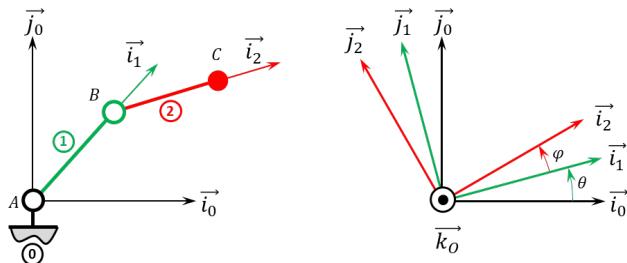
C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20 \text{ mm}$  et  $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$  avec  $L = 15 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de **1** et  $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}R \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de **1** et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;

- $G_2$  désigne le centre d'inertie de **2** et  $\overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{2}L \vec{i}_2$ , on note  $m_2$  la masse de **2** et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .



**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en  $A$ .

**Question 2** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$  en  $B$ .

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0$

Corrigé voir 323.

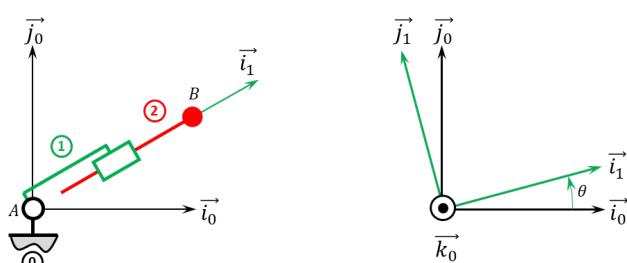
### Exercice 231 – Mouvement RT \*

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ . De plus :

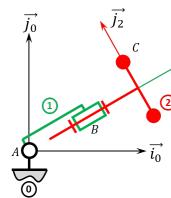
- $G_1$  désigne le centre d'inertie de **1** et  $\overrightarrow{AG_1} = L_1 \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de **1** et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- $G_2 = B$  désigne le centre d'inertie de **2**, on note  $m_2$  la masse de **2** et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .



**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en  $A$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\delta}(A, 1+2/0) \cdot \vec{k}_0$

Corrigé voir 324.



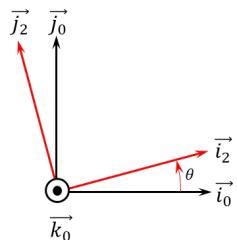
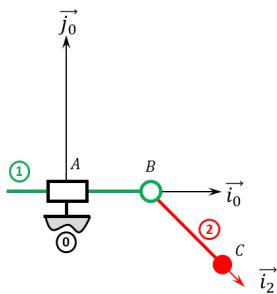
### Exercice 232 – Mouvement RT \*

C2-08

C2-09

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{BC} = R \vec{i}_2$  avec  $R = 30 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1, on note  $m_1$  la masse de 1 et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2, on note  $m_2$  la masse de 2 et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .



**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$  en B.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{R_d}(1+2/0) \cdot \vec{i}_0$

Indications :

$$1. \quad \{\mathcal{D}(2/0)\} = \left\{ \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R(\dot{\theta} \vec{j}_2 - \dot{\theta}^2 \vec{i}_2) \right. \\ \left. + C_1 \dot{\theta} \vec{k}_1 + R(-\sin \theta \ddot{\lambda}(t) \vec{k}_0 + R \ddot{\theta} \vec{k}_2) \right\}_B.$$

$$2. \quad \overrightarrow{R_d}(1+2/0) \cdot \vec{i}_0 = m_1 \ddot{\lambda}(t) + m_2 (\ddot{\lambda}(t) - R(\dot{\theta} \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2 \cos \theta)).$$

Corrigé voir 325.

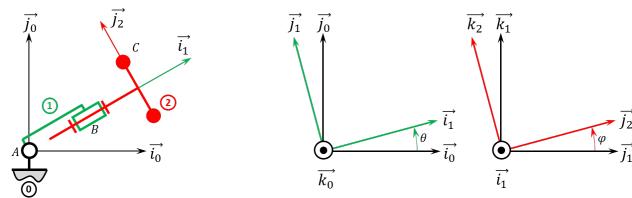
### Exercice 233 – Mouvement RR 3D \*\*

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = \ell \vec{i}_2 + r \vec{j}_2$ . On note  $R + \ell = L = 20 \text{ mm}$  et  $r = 10 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1, on note  $m_1$  la masse de 1 et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2 tel que  $\overrightarrow{BG_2} = \ell \vec{i}_2$ , on note  $m_2$  la masse de 2 et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .



**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$  en B.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\delta}(A, 1+2/0) \cdot \vec{k}_0$

Corrigé voir 326.

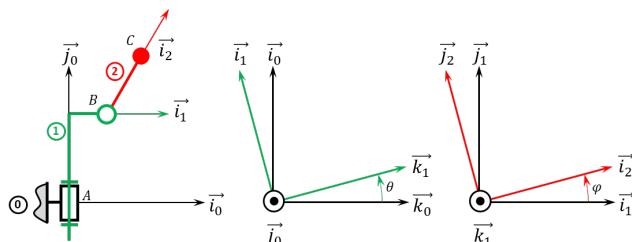
### Exercice 234 – Mouvement RR 3D \*\*

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ . On a  $H = 20 \text{ mm}$ ,  $r = 5 \text{ mm}$ ,  $L = 10 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de 1 tel que  $\overrightarrow{AG_1} = H \vec{j}_1$ , on note  $m_1$  la masse de 1 et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2, on note  $m_2$  la masse de 2 et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .



**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$  en B.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\delta}(A, 1+2/0) \cdot \vec{j}_0$

Corrigé voir 328.

### Exercice 235 – Mouvement RT – RSG \*\*

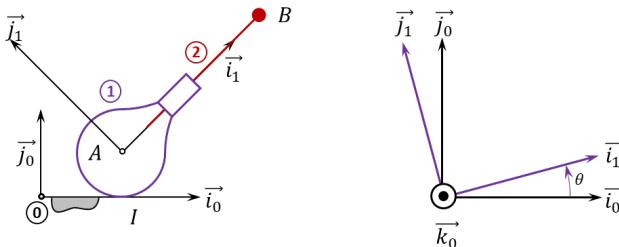
C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{IA} = R \vec{j}_0$  et  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus  $R = 15 \text{ mm}$ . On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I. De plus :

- $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1 tel que  $\overrightarrow{AG_1} = -\ell \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de 1 et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;

- $G_2 = B$  désigne le centre d'inertie de **2**, on note  $m_2$  la masse de **2** et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .



**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \vec{i}_1$

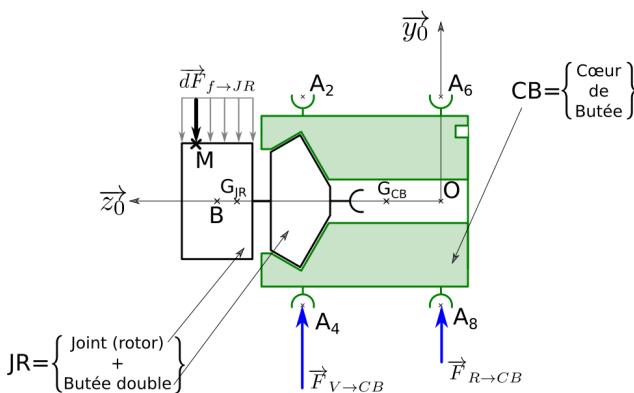
**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(I, 1+2/0)} \cdot \vec{k}_0$

Corrigé voir 328.

### Exercice 236 – Banc Balafre \*

**C2-08** Pas de corrigé pour cet exercice.

La figure suivante représente le paramétrage permettant de modéliser les actions mécaniques s'exerçant sur l'ensemble  $S = \{JR + CB\}$ . On nommera  $G$  le centre d'inertie de l'ensemble  $S$ .



#### Données et hypothèses

- On note  $\overrightarrow{BM} = z \overrightarrow{z_0} + R_J \overrightarrow{u}(\theta)$  où  $R_J$  est le rayon du joint avec  $R_J = 175$  mm;
- la longueur du joint est  $L_J = 150$  mm. La position du point  $B$ , centre du joint est  $\overrightarrow{OB} = z_B \overrightarrow{z_0}$  avec  $z_B = 425$  mm;
- Le coeur de butée a une masse  $M_{CB} = 40$  kg et la position de son centre d'inertie  $G_{CB}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB} \overrightarrow{z_0}$  avec  $L_{CB} = 193$  mm;
- L'ensemble  $JR = \{\text{Joint(rotor)} + \text{Butée double}\}$  à une masse  $M_{JR} = 100$  kg et la position de son centre d'inertie  $G_{JR}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{JR}} = L_{JR} \overrightarrow{z_0}$  avec  $L_{JR} = 390$  mm. On notera  $I_{G_{JR}}(JR) = \begin{pmatrix} A_{JR} & -F_{JR} & -E_{JR} \\ -F_{JR} & B_{JR} & -D_{JR} \\ -E_{JR} & -D_{JR} & C_{JR} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{JR}}$  la matrice d'inertie de l'ensemble  $JR$  au point  $G_{JR}$  exprimée dans une base  $\mathcal{B}_{JR} = (\overrightarrow{x_{JR}}, \overrightarrow{y_{JR}}, \overrightarrow{z_0})$  liée à  $JR$ ;

- Les positions des points  $A_4$  et  $A_8$  sont paramétrées par  $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \overrightarrow{z_0} - R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  et  $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  avec  $z_4 = 280$  mm et  $R_{CB} = 150$  mm.

Pour simplifier l'étude, on s'intéresse au mouvement généré uniquement dans le plan  $(y_0, z_0)$ , lorsque les actionneurs 4 et 8 sont commandés en phase, et en opposition de phase avec les actionneurs 2 et 6. Pendant ce mouvement, les actionneurs 1, 3, 5 et 7 sont laissés libres. On considérera donc qu'ils n'ont aucune action sur le coeur de butée.

**Question 1** Décrire la nature du mouvement obtenu pour le coeur de butée  $CB$  par rapport au bâti 0 dans ces conditions.

Les actionneurs sont utilisés uniquement pendant les phases de mesure. L'ensemble  $JR$  a donc un mouvement de rotation uniforme par rapport au coeur de butée. On donne les torseurs cinématiques (exprimés dans le repère lié au bâti  $(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ ) :  $\{\mathcal{V}(JR/CB)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(JR/CB)} = \Omega \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_{JR}}$  avec  $\Omega$  constante.  $\{\mathcal{V}(CB/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ v(t) \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{G_{CB}}$ .

La fonction  $v(t)$  représente la vitesse de translation du coeur de butée par rapport au bâti. On peut donc relier  $v(t)$  aux déplacements  $y(t) = y_4(t) = y_8(t)$  provoqués en  $A_4$  et  $A_8$  par les actionneurs 4 et 8. On isole l'ensemble  $S = \{JR + CB\}$  afin de quantifier les efforts dans les actionneurs.

**Question 2** Exprimer  $v(t)$  en fonction de  $y(t)$ .

**Question 3** Déterminer l'expression en  $G_{CB}$  du torseur dynamique de  $CB$  par rapport au bâti 0 (fixé au sol et donc considéré comme un référentiel galiléen).

**Question 4** Déterminer l'expression en  $G_{JR}$  du torseur dynamique de  $JR$  par rapport au bâti 0 (fixé au sol et donc considéré comme un référentiel galiléen).

**Question 5** Exprimer alors en  $G$  le torseur dynamique de l'ensemble  $S$  par rapport à 0 en fonction de  $\dot{v}(t)$ ,  $M_{CB}$  et  $M_{JR}$ .

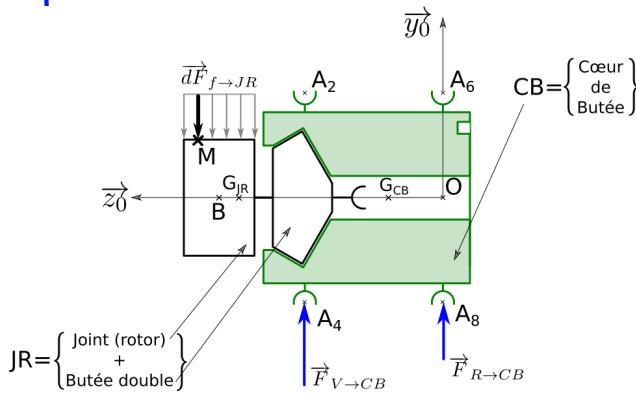
Corrigé voir 329.

#### Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.

### Exercice 237 – Banc Balafre \*

**C2-08** Pas de corrigé pour cet exercice.

La figure suivante représente le paramétrage permettant de modéliser les actions mécaniques s'exerçant sur l'ensemble  $S = \{JR + CB\}$ . On nommera  $G$  le centre d'inertie de l'ensemble  $S$ .


**Données et hypothèses**

- On note  $\overrightarrow{BM} = z \overrightarrow{z_0} + R_J \overrightarrow{u}(\theta)$  où  $R_J$  est le rayon du joint avec  $R_J = 175$  mm;
- la longueur du joint est  $L_J = 150$  mm. La position du point  $B$ , centre du joint est  $\overrightarrow{OB} = z_B \overrightarrow{z_0}$  avec  $z_B = 425$  mm;
- Le coeur de butée a une masse  $M_{CB} = 40$  kg et la position de son centre d'inertie  $G_{CB}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB} \overrightarrow{z_0}$  avec  $L_{CB} = 193$  mm;
- L'ensemble  $JR = \{\text{Joint(rotor)} + \text{Butée double}\}$  a une masse  $M_{JR} = 100$  kg et la position de son centre d'inertie  $G_{JR}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{JR}} = L_{JR} \overrightarrow{z_0}$  avec  $L_{JR} = 390$  mm. On notera  $I_{G_{JR}}(JR) = \begin{pmatrix} A_{JR} & -F_{JR} & -E_{JR} \\ -F_{JR} & B_{JR} & -D_{JR} \\ -E_{JR} & -D_{JR} & C_{JR} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{JR}}$  la matrice d'inertie de l'ensemble  $JR$  au point  $G_{JR}$  exprimée dans une base  $\mathcal{B}_{JR} = (\overrightarrow{x_{JR}}, \overrightarrow{y_{JR}}, \overrightarrow{z_0})$  liée à  $JR$ ;
- Les positions des points  $A_4$  et  $A_8$  sont paramétrées par  $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \overrightarrow{z_0} - R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  et  $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  avec  $z_4 = 280$  mm et  $R_{CB} = 150$  mm.

Pour simplifier l'étude, on s'intéresse au mouvement généré uniquement dans le plan  $(y_0, z_0)$ , lorsque les actionneurs 4 et 8 sont commandés en phase, et en opposition de phase avec les actionneurs 2 et 6. Pendant ce mouvement, les actionneurs 1, 3, 5 et 7 sont laissés libres. On considérera donc qu'ils n'ont aucune action sur le coeur de butée.

**Question 1** Décrire la nature du mouvement obtenu pour le coeur de butée CB par rapport au bâti 0 dans ces conditions.

Les actionneurs sont utilisés uniquement pendant les phases de mesure. L'ensemble  $JR$  a donc un mouvement de rotation uniforme par rapport au coeur de butée. On donne les torseurs cinématiques (exprimés dans le repère lié au bâti  $(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ ) :

$$\{\mathcal{V}(JR/CB)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(JR/CB)} = \Omega \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_{JR}} \quad \text{avec } \Omega \text{ constante. } \{\mathcal{V}(CB/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ v(t) \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{G_{CB}}$$

La fonction  $v(t)$  représente la vitesse de translation du coeur de butée par rapport au bâti. On peut donc relier  $v(t)$  aux déplacements  $y(t) = y_4(t) = y_8(t)$  provoqués en  $A_4$  et  $A_8$  par les actionneurs 4 et 8. On isole l'ensemble  $S = \{JR + CB\}$  afin de quantifier les efforts dans les actionneurs.

On considérera l'expression suivante pour le torseur dynamique de  $S$  par rapport à 0 :  $\{\mathcal{D}(S/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M \dot{v} \overrightarrow{y_0} \\ 0 \end{array} \right\}_G$  où  $M = 140$  kg.

**Question 2** Exprimer le torseur  $\{T_{V \rightarrow CB}\}$  (actionneurs 2 et 4 sur CB) au point  $A_4$  en fonction de  $F_V$  et le torseur  $\{T_{R \rightarrow CB}\}$  (actionneurs 6 et 8 sur CB) au point  $A_8$  en fonction de  $F_R$ .

**Question 3** En expliquant clairement chaque étape de la démarche utilisée, montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_V = M \frac{z_G}{z_4} \dot{v}(t) + 2p(t)R_J L_J \frac{z_B}{z_4} \\ F_R = M \left( 1 - \frac{z_G}{z_4} \right) \dot{v}(t) + 2p(t)R_J L_J \left( 1 - \frac{z_B}{z_4} \right) \end{array} \right.$$

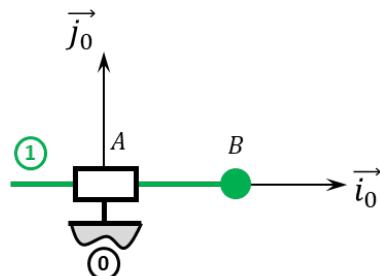
**Question 4** En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer les actionneurs les plus sollicités par le mouvement en phase : actionneurs du plan avant (2 et 4) ou du plan arrière (6 et 8).

Corrigé voir 330.

**Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus**
**Exercice 238 – Mouvement T – \***

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On note  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_0}$ . On note  $m_1$  la masse du solide 1. On note  $G$  le centre d'inertie de 1 tel que  $\overrightarrow{BG} = \ell \overrightarrow{j_1}$ . La pesanteur est telle que  $\overrightarrow{g} = -g \overrightarrow{i_0}$ . Un vérin positionné entre 1 et 0 permet d'actionner la pièce 1. On souhaite prendre en compte les frottements secs dans la liaison glissière.



**Question 1** Dans le but d'obtenir la loi de mouvement, appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide 1 en projection sur  $\overrightarrow{i_0}$ .

Corrigé voir 336.

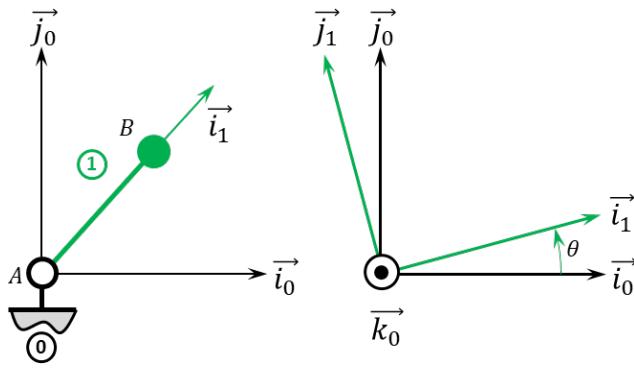
**Exercice 239 – Mouvement R \***

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \overrightarrow{i_1}$  avec  $R = 20$  mm. La liaison pivot est motorisée par un moteur modélisé dont l'action mécanique sur 1 est donnée par  $\overrightarrow{C_m} = C_m \overrightarrow{k_0}$ . On note  $m_1$  la masse du solide 1 et  $B$  son centre d'inertie. La pesanteur est telle que  $\overrightarrow{g} = -g \overrightarrow{j_0}$ . On

note  $m_1$  la masse du solide 1,  $B$  son centre d'inertie et

$$I_G(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}.$$



**Question 1** Dans le but d'obtenir la loi de mouvement, appliquer le théorème du moment dynamique au solide 1 au point A en projection sur  $\vec{k}_0$ .

Corrigé voir 337.

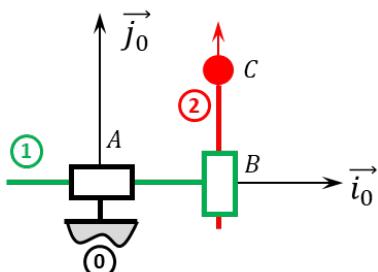
### Exercice 240 – Mouvement TT – \*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On note  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$ .  $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1, et  $m_1$  sa masse et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$ ;  $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2 et  $m_2$  sa masse et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .

Un vérin électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un vérin électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide 2 en projection sur  $\vec{j}_0$  puis le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble 1+2 en projection sur  $\vec{i}_0$

Corrigé voir 338.

### Exercice 241 – Mouvement RR \*

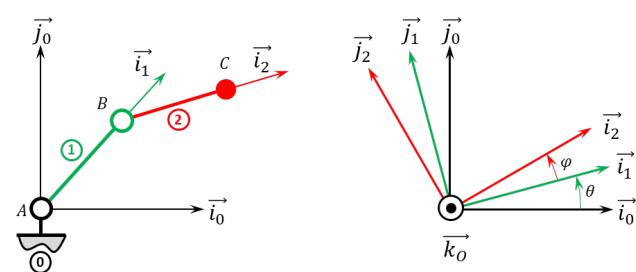
**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20 \text{ mm}$  et  $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$  avec  $L = 15 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de 1 et  $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} R \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de 1 et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$ ;
- $G_2$  désigne le centre d'inertie de 2 et  $\overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{2} L \vec{i}_2$ , on note  $m_2$  la masse de 2 et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème du moment dynamique au solide 2 au point B en projection sur  $\vec{k}_0$  puis le théorème du moment dynamique à l'ensemble 1+2 au point A en projection sur  $\vec{k}_0$

Corrigé voir 339.

### Exercice 242 – Mouvement RT \*

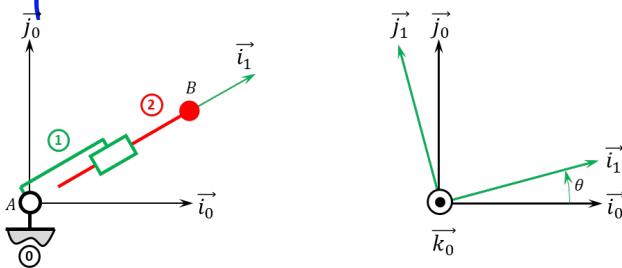
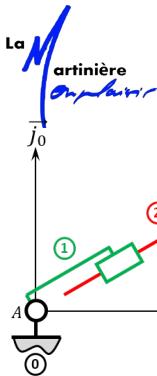
**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de 1 et  $\overrightarrow{AG_1} = L_1 \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de 1 et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$ ;
- $G_2 = B$  désigne le centre d'inertie de 2, on note  $m_2$  la masse de 2 et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un vérin électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



Indications :

1.  $C_m - m_2 g R \cos \theta(t) = C_1 \ddot{\theta} + R(-\sin \theta \ddot{\lambda}(t) + R \ddot{\theta})$ ;
2.  $F_{ver} = m_1 \ddot{\lambda}(t) + m_2(\ddot{\lambda}(t) - R(\dot{\theta} \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2 \cos \theta))$ .

Corrigé voir 341.

**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide 2 en projection sur  $\vec{i}_1$  puis le théorème du moment dynamique à l'ensemble 1+2 au point A en projection sur  $\vec{k}_0$

Corrigé voir 340.

### Exercice 243 – Mouvement RT \*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{BC} = R \vec{i}_2$  avec  $R = 30 \text{ mm}$ . De plus :

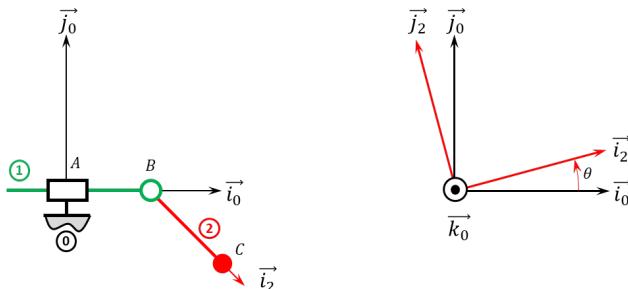
- $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1, on note  $m_1$  la masse de 1 et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2, on note  $m_2$  la masse de 2 et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .

Un vérin électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .

Par ailleurs,

$$\delta(B, 2/0) = C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_1 + R(-\sin \theta \ddot{\lambda}(t) \vec{k}_0 + R \ddot{\theta} \vec{k}_2) \quad \text{et} \\ R_d(1+2/0) \cdot \vec{i}_0 = m_1 \ddot{\lambda}(t) + m_2(\ddot{\lambda}(t) - R(\dot{\theta} \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2 \cos \theta))$$



L'objectif est d'obtenir les lois de mouvement.

**Question 1** Appliquer le théorème du moment dynamique au solide 2 au point B en projection sur  $\vec{k}_0$ .

**Question 2** Appliquer le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble 1+2 en projection sur  $\vec{i}_0$

### Exercice 244 – Mouvement RR 3D \*\*

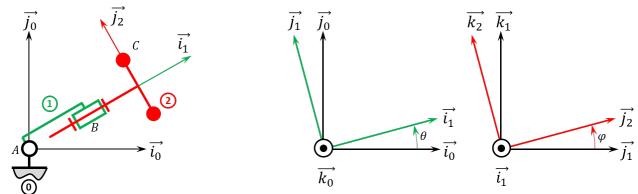
**B2-14**

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = \ell \vec{i}_2 + r \vec{j}_2$ . On note  $R + \ell = L = 20 \text{ mm}$  et  $r = 10 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1, on note  $m_1$  la masse de 1 et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2 tel que  $\overrightarrow{BG_2} = \ell \vec{i}_2$ , on note  $m_2$  la masse de 2 et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet d'actionner le solide 1. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet d'actionner le solide 2. L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème du moment dynamique au solide 2 au point A en projection sur  $\vec{i}_1$  puis le théorème du moment dynamique à l'ensemble 1+2 au point A en projection sur  $\vec{k}_0$

Corrigé voir 342.

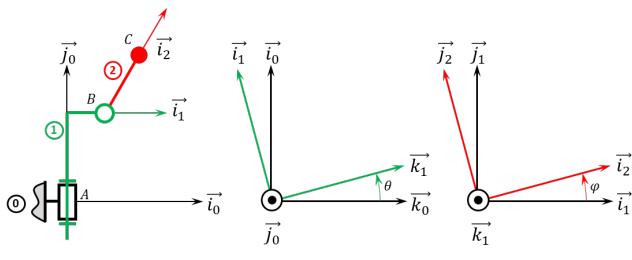
### Exercice 245 – Mouvement RR 3D \*\*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = H \vec{j}_1 + R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = L \vec{i}_2$ . On a  $H = 20 \text{ mm}$ ,  $r = 5 \text{ mm}$ ,  $L = 10 \text{ mm}$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de 1 tel que  $\overrightarrow{AG_1} = H \vec{j}_1$ , on note  $m_1$  la masse de 1 et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2, on note  $m_2$  la masse de 2 et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .

Un moteur électrique positionné entre **0** et **1** permet d'actionner le solide **1**. Un moteur électrique positionné entre **1** et **2** permet d'actionner le solide **2**. L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème du moment dynamique au solide **2** au point **B** en projection sur  $\vec{k}_1$  puis le théorème du moment dynamique à l'ensemble **1+2** au point **A** en projection sur  $\vec{j}_0$

Corrigé voir 343.

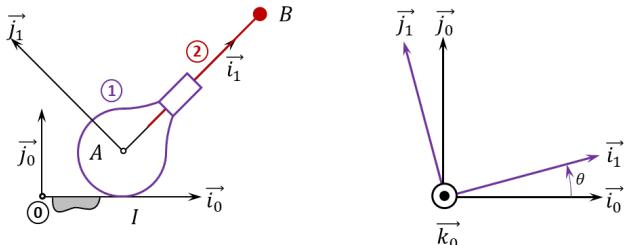
### Exercice 246 – Mouvement RT – RSG \*\*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{IA} = R \vec{j}_0$  et  $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus  $R = 15 \text{ mm}$ . On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point **I**. De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de **1** tel que  $\vec{AG}_1 = -\ell \vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de **1** et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  ;
- $G_2 = B$  désigne le centre d'inertie de **2**, on note  $m_2$  la masse de **2** et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ .

Un ressort exerce une action mécanique entre les points **A** et **B**.



L'objectif est d'obtenir les lois de mouvement.

**Question 1** Appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide **2** en projection sur  $\vec{i}_1$

**Question 2** Appliquer le théorème du moment dynamique à l'ensemble **1+2** au point **I** en projection sur  $\vec{k}_0$ .

Corrigé voir 344.

**Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus – TEC**

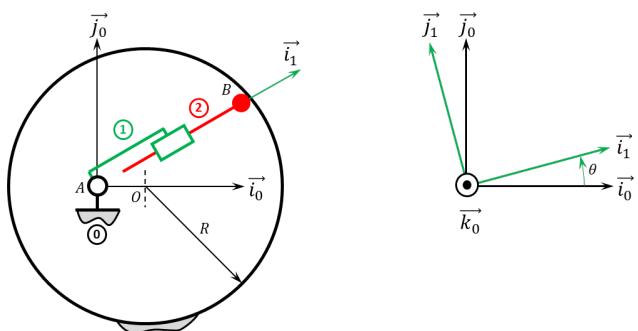
### Exercice 247 – Pompe à palettes \*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{AO} = e \vec{i}_0$  et  $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus  $e = 10 \text{ mm}$  et  $R = 20 \text{ mm}$ . Le contact entre **0** et **2** en **B** est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe). De plus, on note :

- $G_1 = A$  le centre d'inertie du solide **1**,  $m_1$  sa masse et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$  sa matrice d'inertie;
- $G_2$  le centre d'inertie du solide **2** tel que  $\vec{BG}_2 = -\ell \vec{i}_1$ ,  $m_2$  sa masse et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$  sa matrice d'inertie.

On note  $C_m k_0$  le couple moteur agissant sur le solide **1**,  $F_h \vec{i}_1$  l'action du fluide sur **2** (le fluide agissant sur les solides **1** et **2**). L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 285.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble **1+2**.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble **1+2**.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1+2/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Corrigé voir 345.

### Exercice 248 – Pompe à pistons radiaux \*

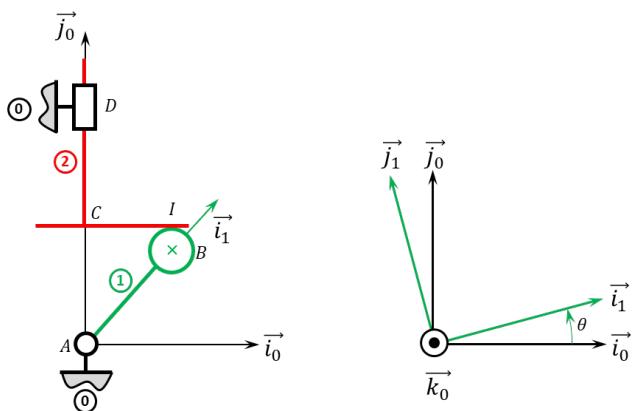
**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{AB} = e \vec{i}_1$  et  $\vec{BI} = R \vec{j}_0$  et  $\vec{AC} = \lambda(t) \vec{j}_0$ . De plus,  $e = 10 \text{ mm}$  et  $R = 20 \text{ mm}$ . Le

contact entre **1** et **2** en **B** est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre **0** et **2**. De plus, on note :

- $G_1 = B$  le centre d'inertie du solide **1**,  $m_1$  sa masse et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$  sa matrice d'inertie;
- $G_2$  le centre d'inertie du solide **2** tel que  $\overrightarrow{CG_2} = \ell \overrightarrow{j_0}$ ,  $m_2$  sa masse et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$  sa matrice d'inertie.

On note  $C_m \overrightarrow{k_0}$  le couple moteur agissant sur le solide **1**,  $F_h \overrightarrow{j_0}$  l'action du fluide sur **2** (le fluide agissant sur les solides **1** et **2**) et  $F_r \overrightarrow{j_0}$  l'action du ressort sur **2** (un ressort étant positionné entre les solides **0** et **2** afin d'assurer le maintien du contact entre **1** et **2** en **I**). L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\overrightarrow{g} = -g \overrightarrow{j_0}$ .



On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 286.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble **1+2**.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble **1+2**.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1+2/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Corrigé voir 346.

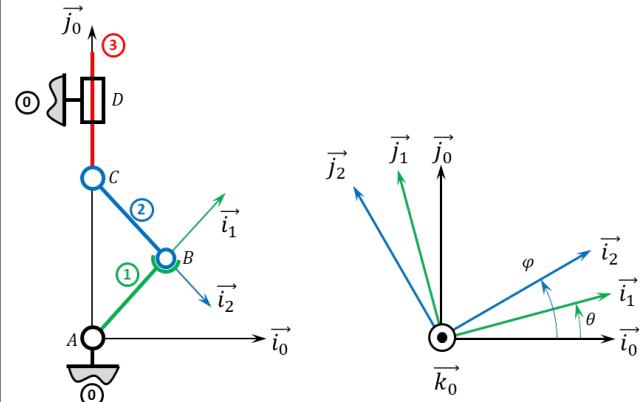
### Exercice 249 – Système bielle manivelle \*\*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \overrightarrow{i_1}$ ,  $\overrightarrow{CB} = L \overrightarrow{i_2}$  et  $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \overrightarrow{j_0}$ . De plus, on note :

- $G_1 = A$  le centre d'inertie du solide **1**,  $m_1$  sa masse et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$  sa matrice d'inertie;
- $G_2$  le centre d'inertie du solide **2** tel que  $\overrightarrow{CG_2} = \frac{L}{2} \overrightarrow{i_2}$ ,  $m_2$  sa masse et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$  sa matrice d'inertie;
- $G_3$  le centre d'inertie du solide **3** tel que  $\overrightarrow{CG_3} = L_3 \overrightarrow{j_0}$ ,  $m_3$  sa masse et  $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$  sa matrice d'inertie.

On note  $C_m \overrightarrow{k_0}$  le couple moteur agissant sur le solide **1**,  $F_h \overrightarrow{j_0}$  l'action du fluide sur **3**. L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\overrightarrow{g} = -g \overrightarrow{j_0}$ .



On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 287.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble **1+2+3**.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble **1+2+3**.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1+2+3/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Corrigé voir 347.

### Exercice 250 – Pompe oscillante \*

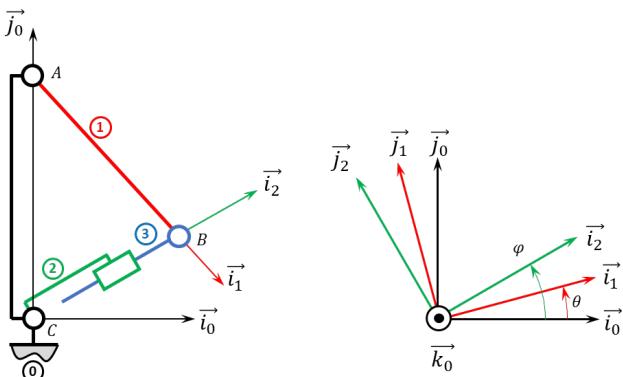
**C2-09**

Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \overrightarrow{i_1}$  et  $\overrightarrow{CA} = H \overrightarrow{j_0}$ . De plus,  $R = 10 \text{ mm}$  et  $H = 60 \text{ mm}$ . Par ailleurs, on note  $\overrightarrow{CB} = \lambda(t) \overrightarrow{i_2}$ . De plus, on note :

- $G_1$  le centre d'inertie du solide 1 tel que  $\overrightarrow{AG_1} = \frac{R}{2} \vec{i}_1$ ,  
 $m_1$  sa masse et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$  sa matrice d'inertie;
- $G_2$  le centre d'inertie du solide 2 tel que  $\overrightarrow{CG_2} = \ell \vec{i}_2$ ,  
 $m_2$  sa masse et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$  sa matrice d'inertie;
- $G_3$  le centre d'inertie du solide 3 tel que  $\overrightarrow{BG_3} = -a \vec{i}_2$ ,  $m_3$  sa masse et  $I_{G_3}(2) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$  sa matrice d'inertie.

On note  $C_m \vec{k}_0$  le couple moteur agissant sur le solide 2,  $F_h \vec{i}_2$  l'action du fluide sur 3 (le fluide agissant sur les solides 2 et 3). L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 288.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble 1+2+3.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble 1+2+3.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1+2+3/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Corrigé voir 348.

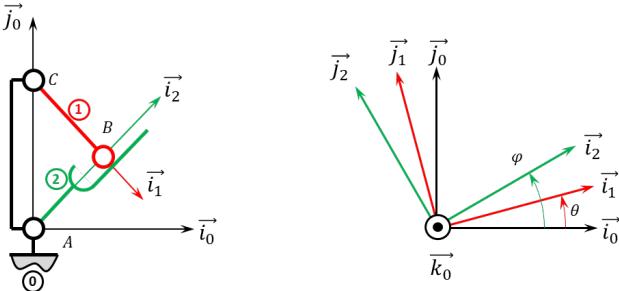
### Exercice 251 – Barrière Sympact \*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = H \vec{j}_0$  et  $\overrightarrow{CB} = R \vec{i}_1$ . De plus,  $H = 120 \text{ mm}$  et  $R = 40 \text{ mm}$ . De plus, on note :

- $G_1$  le centre d'inertie du solide 1 tel que  $\overrightarrow{CG_1} = \frac{R}{2} \vec{i}_1$ ,  
 $m_1$  sa masse et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$  sa matrice d'inertie;
- $G_2$  le centre d'inertie du solide 2 tel que  $\overrightarrow{G_2} = a \vec{i}_2 + b \vec{j}_2$ ,  $m_2$  sa masse et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$  sa matrice d'inertie.

On note  $C_m \vec{k}_0$  le couple moteur agissant sur le solide 1 et  $C_r \vec{k}_0$  le couple exercé par un ressort de torsion agissant sur les solides 0 et 2. L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 289.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble 1+2.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble 1+2.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1+2/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Corrigé voir 349.

### Exercice 252 – Barrière Sympact avec galet \*\*

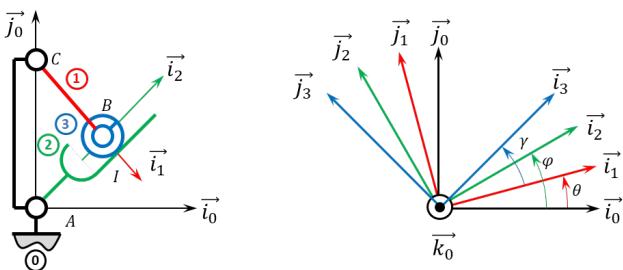
**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = H \vec{j}_0$  et  $\overrightarrow{CB} = R \vec{i}_1$ . De plus,  $H = 120 \text{ mm}$  et  $R = 40 \text{ mm}$ . De plus, on note :

- $G_1$  le centre d'inertie du solide 1 tel que  $\overrightarrow{CG_1} = \frac{R}{2} \vec{i}_1$ ,  
 $m_1$  sa masse et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$  sa matrice d'inertie;

- $G_2$  le centre d'inertie du solide 2 tel que  $\vec{G}_2 = a \vec{i}_2 + b \vec{j}_2$ ,  $m_2$  sa masse et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$  sa matrice d'inertie;
- $G_3 = B$  le centre d'inertie du solide 3,  $m_3$  sa masse et  $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$  sa matrice d'inertie.

On note  $C_m \vec{k}_0$  le couple moteur agissant sur le solide 1 et  $C_r \vec{k}_0$  le couple exercé par un ressort de torsion agissant sur les solides 0 et 2. L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 290.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble 1+2+3.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble 1+2+3.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1+2+3/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Corrigé voir 350.

### Exercice 253 – Poussoir \*

**C2-09**

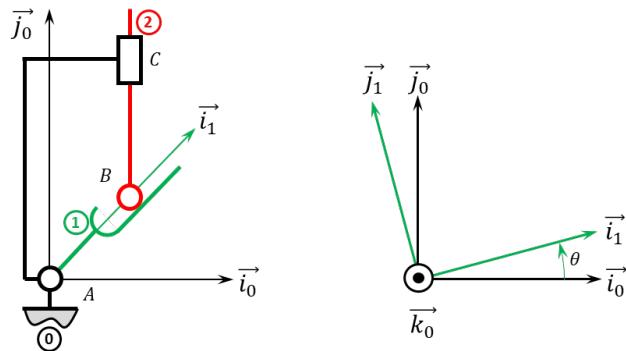
Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{AC} = L \vec{i}_0 + H \vec{j}_0$ ,  $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$  et  $\vec{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$ . De plus,  $H = 120 \text{ mm}$ ,  $L = 40 \text{ mm}$ . De plus, on note :

- $G_1$  le centre d'inertie du solide 1 tel que  $\vec{AG}_1 = R \vec{i}_1$ ,  $m_1$  sa masse et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$  sa matrice d'inertie;

- $G_2$  le centre d'inertie du solide 2 tel que  $\vec{CG}_2 = -\ell b \vec{j}_0$ ,  $m_2$  sa masse et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$  sa matrice d'inertie.

On note  $C_m \vec{k}_0$  le couple moteur agissant sur le solide 1 et  $F_h \vec{j}_0$  l'action d'un fluide sur le solide 2. L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 291.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble 1+2.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble 1+2.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1+2/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Corrigé voir 351.

### Exercice 254 – Système 4 barres \*\*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

On a :

- $\vec{OA} = a \vec{x}_1 - f \vec{y}_1$  avec  $a = 355 \text{ mm}$  et  $f = 13 \text{ mm}$ ;
- $\vec{AB} = b \vec{x}_2$  avec  $b = 280 \text{ mm}$ ;
- $\vec{BC} = -c \vec{x}_3$  avec  $c = 280 \text{ mm}$ ;
- $\vec{OC} = -d \vec{x}_0 - e \vec{y}_0$  avec  $d = 89,5 \text{ mm}$  et  $e = 160 \text{ mm}$ .

De plus, on note :

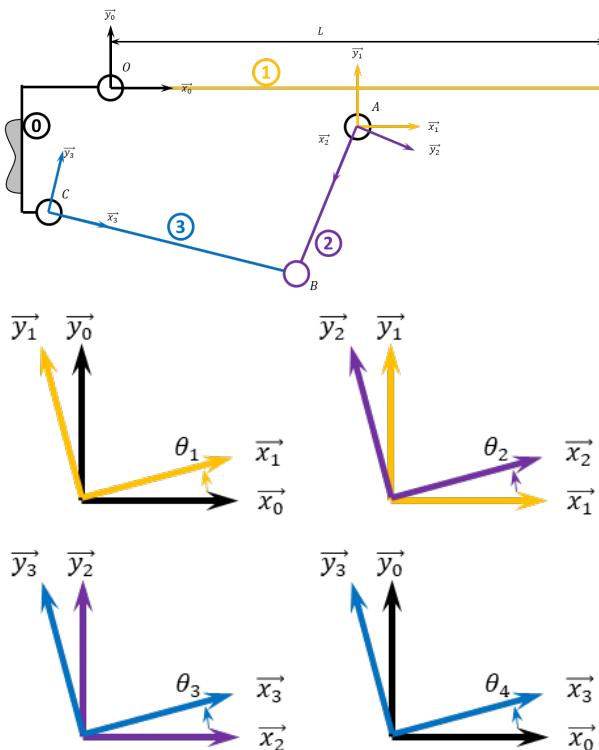
- $G_1$  le centre d'inertie du solide 1 tel que  $\vec{OG}_1 = L \vec{x}_1$ ,  $m_1$  sa masse et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$  sa matrice d'inertie;
- $G_2$  le centre d'inertie du solide 2 tel que  $\vec{AG}_2 = \frac{b}{2} \vec{x}_2$ ,

$m_2$  sa masse et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$  sa matrice d'inertie;

- $G_3$  le centre d'inertie du solide 3 tel que  $\overrightarrow{CG_3} = \frac{c}{2} \overrightarrow{x_3}$ ,

$$m_3 \text{ sa masse et } I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3} \text{ sa matrice d'inertie}$$

On note  $C_m k_0$  le couple moteur agissant sur le solide 1. L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{z}_0$ .



On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 292.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble  $1+2+3$ .

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble  $1+2+3$ .

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1 + 2 + 3/0)$ .

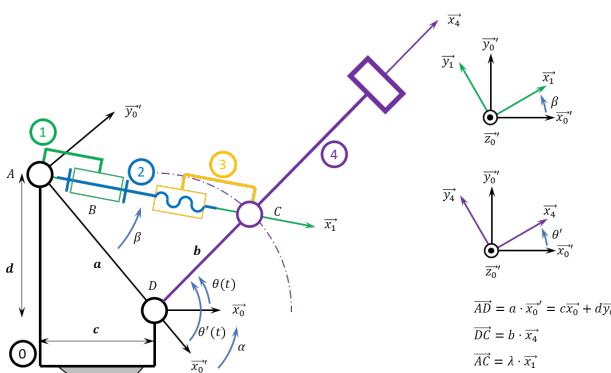
**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Corrigé voir 352.

### **Exercice 255 – Maxpid ★★**

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs  $a = 107,1\text{ mm}$ ,  $b = 80\text{ mm}$ ,  $c = 70\text{ mm}$ ,  $d = 80\text{ mm}$ . Le pas de la vis est de  $4\text{ mm}$ . De plus, on note :

- $G_1 = B$  le centre d'inertie du solide 1,  $m_1$  sa masse et  $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$  sa matrice d'inertie;
  - $G_2$  le centre d'inertie du solide 2 tel que  $\overrightarrow{BG_2} = L\overrightarrow{x_1}$ ,  $m_2$  sa masse et  $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$  sa matrice d'inertie;
  - $G_3 = C$  le centre d'inertie du solide 3,  $m_3$  sa masse et  $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$  sa matrice d'inertie;
  - $G_4$  le centre d'inertie du solide 4 tel que  $\overrightarrow{DG_4} = L_4\overrightarrow{x_4}$ ,  $m_4$  sa masse et  $I_{G_4}(4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_4}$  sa matrice d'inertie;

On note  $C_m \vec{k}_0$  le couple moteur agissant sur le solide 1. L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{y}_0$ . On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 292.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble  $1+2+3+4$ .

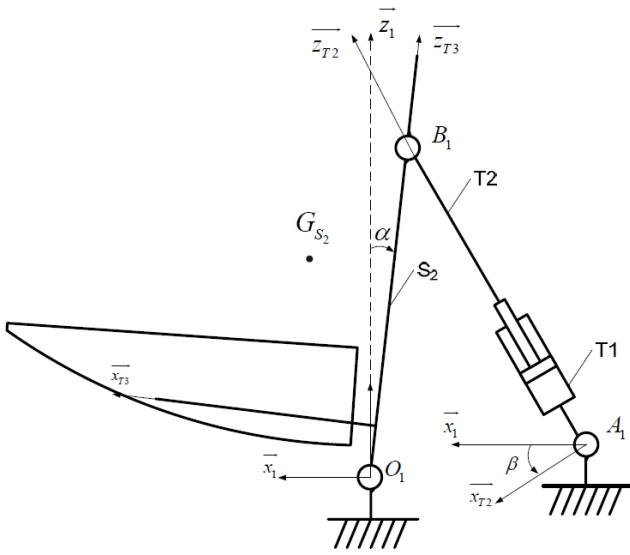
**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble  $1+2+3+4$ .

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1+2+3+4/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

**Exercice 256 – Chariot élévateur de bateaux \*\***

L'objectif est d'obtenir un modèle dynamique du mécanisme de basculement à partir de la modélisation plane proposée sur la figure suivante.



Les solides pris en compte pour l'étude sont :

- l'ensemble  $S_2 = \{T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, B\}$  en liaison pivot d'axe ( $O_1, \vec{y}_0$ ) par rapport au chariot 1 de centre de gravité  $G_{S_2}$ . Le moment d'inertie de l'ensemble  $S_2$  par rapport à l'axe sera  $(G_{S_2}, \vec{y}_1)$  noté  $J_{S_2}$  et sa masse  $m_{S_2}$ . La liaison pivot entre l'ensemble  $S_2$  et le chariot génère un couple résistant  $\vec{C}_\mu = -\mu \dot{\alpha} \vec{y}_0$  et  $\overrightarrow{O_1 O_{G_{S_2}}} = x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T_3}$ ;
- un vérin équivalent  $V = \{T_1, T_2\}$  dont la tige est en liaison pivot d'axe ( $A_1, \vec{y}_0$ ) par rapport au chariot 1 et le corps en liaison pivot d'axe ( $B_1, \vec{y}_0$ ) par rapport à l'ensemble  $S_2$ . La masse et l'inertie du vérin sont négligées. Le vérin développe un effort au cours du mouvement qui sera noté  $\vec{F}_V = p(t) S \vec{z}_{T_2}$  où  $p(t)$  est la différence de pression entre les deux chambres du vérin.

On pose  $\overrightarrow{A_1 B_1} = (\lambda_0 + \lambda) \vec{z}_{T_2}$ . Le paramétrage est tel que si  $\alpha = 0$  alors  $\lambda = 0$ .

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle  $\alpha$  est petit, montrer que  $\alpha(t)$  et  $p(t)$  sont liés par l'équation différentielle suivante :  $J_{eq} \ddot{\alpha}(t) + \mu \dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2} g x_{G_{S_2}}$ . Exprimer  $J_{eq}$ .

Corrigé voir 354.

### Exercice 257 – Banc Balafre\*

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Objectif** L'objectif est de valider les exigences suivantes.

- 2.01 – Couple résistant : le couple résistant exercé par le film d'eau sur le joint (rotor) à  $7000 \text{ tr min}^{-1}$  est estimé à  $C_{\text{res}} = 100 \text{ N m}$ .
- 2.02 – loi de commande La vitesse cible maximale  $N_C^{\max} = 7000 \text{ tr min}^{-1}$  doit être atteinte en moins de  $T_{\text{acc}} = 5 \text{ s}$ .
- 2.03 – Risque de décrochage : le couple maximal demandé au moteur en fonctionnement doit rester inférieur à  $C_u^{\max} / s = 570 \text{ N m}$  où  $C_u^{\max} = 740 \text{ N m}$  et  $s = 1,3$  est un coefficient de sécurité.

Sans cette partie, nous allons vérifier que le moteur modélisé dans la partie précédente permet de répondre à l'exigence 2.02 concernant la loi de commande. Nous allons également mettre en évidence la nécessité de réaliser un asservissement de la vitesse du moteur.

Données et hypothèses :

- pendant toute la phase de mise en rotation de la ligne d'arbre, on considérera pour simplifier l'étude, que le couple résistant sur le joint (rotor) est constant et égal à  $C_{\text{res}}$  ;
- le moteur étant commandé à  $U_S/f$  constant, on considérera que le couple moteur (noté  $C_m$ ) est constant pendant la phase d'accélération ;
- le rendement de la liaison pivot réalisée par le palier hydrostatique (double butée) est  $\eta_b = 0,95$  ;
- le rendement de la liaison pivot réalisée par les roulements à billes est  $\eta_b = 0,9$  ;
- le moment d'inertie du rotor moteur est  $J_{\text{mot}} = 1,15 \text{ kg m}^2$  ;
- le moment d'inertie de l'accouplement à l'arbre moteur est négligé ;
- plusieurs solutions technologiques (différentes formes internes et différents matériaux) seront testées pour la nouvelle géométrie de joint. Le moment d'inertie maximal du joint (rotor) selon l'axe de rotation est  $J_{\text{joint}} = 0,92 \text{ kg m}^2$  ;
- le moment d'inertie de l'ensemble bda = { butée double + arbre + fusible mécanique } selon l'axe de rotation est  $J_{bda} = 0,092 \text{ kg m}^2$ .

On considère l'ensemble de la ligne d'arbre (voir figure

Figure 3.1)  $\Sigma = \{\text{arbre moteur} + \text{accouplement} + \text{fusible mécanique} + \dots\}$

On notera  $\Omega$  la vitesse de rotation  $\Omega(\Sigma/0)$  de la ligne d'arbre par rapport au bâti 0, et  $J_\Sigma$  le moment d'inertie de  $\Sigma$  par rapport à l'axe de rotation du moteur.

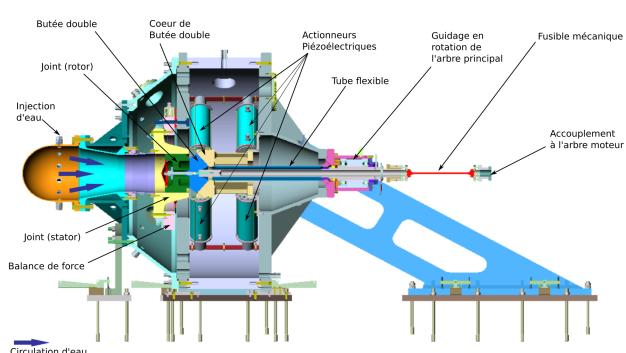


FIGURE 3.1 – Représentation en coupe du banc BALAFRE

**Question 1** Exprimer le moment d'inertie  $J_{\Sigma}$  en fonction des données fournies et calculer sa valeur numérique.

**Question 2** Exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble  $\Sigma$  par rapport au bâti (noté 0) du banc (fixé au sol).

**Question 3** Exprimer la puissance des actions mécaniques extérieures sur  $\Sigma$  dans le mouvement de  $\Sigma$  par rapport à 0.

**Question 4** Exprimer la puissance perdue  $P_{pertes}$  dans les roulements à billes et dans la butée hydrostatique.

**Question 5** Exprimer le théorème de l'énergie cinétique appliquée au mouvement de  $\Sigma$  par rapport à 0. En déduire l'expression de  $\frac{d\Omega}{dt}$  en fonction de  $C_m$ ,  $C_{res}$ ,  $\eta_r$ ,  $\eta_r$  et  $J_{\Sigma}$ .

**Question 6** En explicitant clairement les hypo-

thèses utilisées, expliquer pourquoi l'accélération peut être considérée constante pendant la mise en mouvement de la ligne d'arbre.

**Question 7** Déterminer la valeur minimale d'accélération  $\alpha_{min}$  compatible avec le tableau des exigences 2.

**Question 8** En déduire la valeur de couple moteur nécessaire pendant cette phase d'accélération.

En cas de perturbation de vitesse sur la ligne d'arbre pendant la phase d'accélération, il peut se produire un phénomène instable au niveau du film liquide à l'intérieur du joint testé. Ceci peut se traduire par une perturbation de couple pouvant aller jusqu'à une valeur  $C_p = 100 \text{ Nm}$ .

**Question 9** Déterminer alors la valeur de  $C_m$  pour le scénario le plus défavorable.

Corrigé voir 355.

### 3.3 C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique

### 3.4 C1 – Proposer une démarche de résolution

#### 3.4.1 C1-05 – Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement – PFS

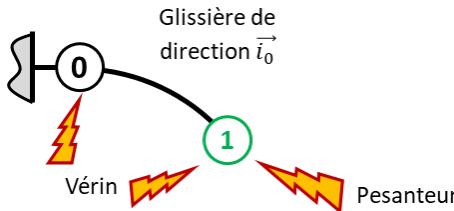
**Exercice 258 – Mouvement T – \***

B2-14

B2-15

C1-05

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

$$\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \vec{j}_1 + Z_{01} \vec{k}_1 \\ L_{01} \vec{i}_1 + M_{01} \vec{j}_1 + N_{01} \vec{k}_1 \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{i}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

$$\{\mathcal{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_v \vec{i}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

$$\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} \vec{j}_1 \\ N_{01} \vec{k}_1 \end{array} \right\}_A, \{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{i}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G, \{\mathcal{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} F_v \vec{i}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G.$$

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le vérin pour maintenir 1 en équilibre.

Mouvement de translation. On isole 1 et on applique le théorème de la résultante statique en projection suivant  $\vec{i}_0$ .

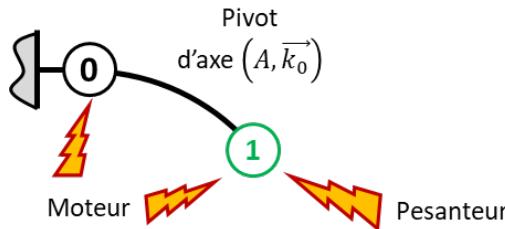
**Exercice 259 – Mouvement R \***

B2-14

B2-15

C1-05

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

$$\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_1 + Y_{01} \vec{j}_1 + Z_{01} \vec{k}_1 \\ L_{01} \vec{i}_1 + M_{01} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_A, \{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B, \{\mathcal{F}(\text{Mot} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_A.$$

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

$$\{\mathcal{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} \vec{i}_1 + Y_{01} \vec{j}_1 \\ M_{01} \vec{j}_1 \end{array} \right\}_A, \{\mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B, \{\mathcal{F}(\text{Mot} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_A.$$

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le moteur pour maintenir 1 en équilibre.

On isole 1 et on réalise un théorème du moment statique en A en projection sur  $\vec{k}_0$ .

**Exercice 260 – Mouvement TT – \***

B2-14

B2-15

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts que doivent développer chacun des vérins pour maintenir le mécanisme en équilibre.

**Exercice 261 – Mouvement RR \***

B2-14

B2-15

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer les couples que doivent développer chacun des moteurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

**Exercice 262 – Mouvement RT \***

B2-14

B2-15

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer le couple et l'effort que doivent développer chacun des actionneurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

**Exercice 263 – Mouvement RT \***

B2-14

B2-15

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer le couple et l'effort que doivent développer chacun des actionneurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

### Exercice 264 – Mouvement RR 3D \*\*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Proposer une démarche permettant de déterminer le couple et l'effort que doivent développer chacun des actionneurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

### Exercice 265 – Mouvement RR 3D \*\*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Proposer une démarche permettant de déterminer le couple et l'effort que doivent développer chacun des actionneurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

### Exercice 266 – Barrière Sympact \*\*

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

On néglige la pesanteur sur la pièce 1.

On note  $\{\mathcal{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$  l'action mécanique du moteur sur la pièce 1.

On note  $\{\mathcal{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_r \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$  l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce 2. Le raideur du ressort est telle qu'il exerce un couple de 45 Nm pour un angle de rotation  $100^\circ$ . On considère que le couple est nul lorsque la pièce 2 est à la verticale ( $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$ ). Il est au maximum lorsque  $\varphi_f = 0$ .

On note  $\{\mathcal{F}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall G}$  avec  $\vec{AG} = L \vec{i}_2$ .

**Question 1** Réaliser un graphe d'analyse.

**Question 2** Expliciter  $C_r$  en fonction des différents constantes ( $k, \varphi_o, \varphi_f$ ) et celles qui vous sembleraient utile.

**Question 3** Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.

### Exercice 267 – Suspension automobile \*\*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Peut-on résoudre complètement le système ? Pourquoi ?

### Exercice 268 – Pèse camion \*\*

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe de structure. Définir le nombre d'inconnues statiques.

**Question 2** Donner la stratégie permettant de déterminer la valeur de  $F$  en fonction de  $M$ .

### 3.4.2 Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement – PFD

#### Exercice 269 – Mouvement T – \*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer la loi du mouvement de **1** par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

#### Exercice 270 – Mouvement R \*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer la loi du mouvement de **1** par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

#### Exercice 271 – Mouvement TT – \*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les lois de mouvement de **1** et de **2** par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

#### Exercice 272 – Mouvement RR \*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les lois de mouvement de **1** et de **2** par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

#### Exercice 273 – Mouvement RT \*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

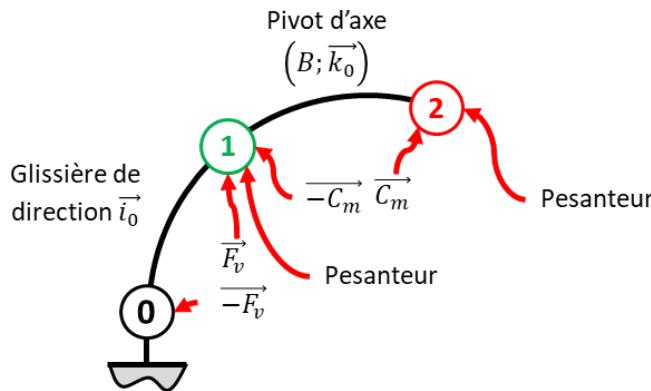
**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les lois de mouvement de **1** et de **2** par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

#### Exercice 274 – Mouvement RT \*

B2-14

C1-05

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.



**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

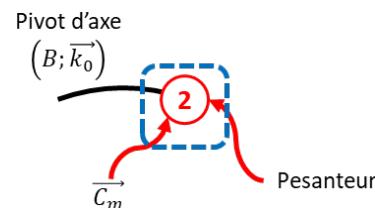
Ce mécanisme présente deux degrés de liberté indépendants :  $\lambda(t)$  et  $\theta(t)$ . Il est donc nécessaire d'écrire, dans le meilleur des cas, deux équations :

- une équation traduisant la mobilité de 2 par rapport à 1, soit TMD appliquée à 2 en  $B$  en projection sur  $\vec{k}_0$  ;
- une équation traduisant la mobilité de 2+1 par rapport à 0, soit TRD appliquée à 1+2 en projection sur  $\vec{i}_0$  .

• **On isole 2.**

• **BAME :**

- actions de la liaison pivot  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}$ ;
- action du moteur  $\{\mathcal{T}(\text{mot} \rightarrow 2)\}$ ;
- action de la pesanteur  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\}$ .

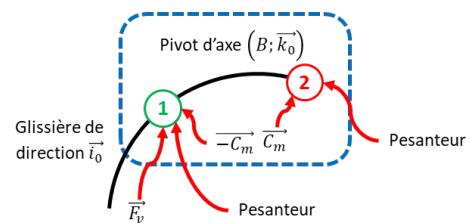


- **Théorème :** on applique le théorème du moment dynamique en  $B$  au solide 2 en projection sur  $\vec{k}_0$  :  $C_{\text{mot}} + \mathcal{M}(B, \text{pes} \rightarrow 2) \cdot \vec{k}_0 = \vec{\delta}(B, 2/0) \cdot \vec{k}_0$ .
- **Calcul de la composante dynamique :** considérons le cas où la matrice d'inertie est donnée en  $C$ . On a donc  $\overline{\delta(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overline{\sigma(C, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} \left[ I_C(2) \overline{\Omega(2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0}$ . De plus,  $\overline{\delta(B, 2/0)} = \overline{\delta(C, 2/0)} + \overline{BC} \wedge \overline{R_d(2/0)}$  et  $\overline{R_d(2/0)} = m_2 \overline{\Gamma(C, 2/0)}$ .

• **On isole 1+2.**

• **BAME :**

- actions de la liaison glissière  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$ ;
- action de la pesanteur  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\}$ ;
- action de la pesanteur  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\}$ ;
- action du vérin  $\{\mathcal{T}(\text{ver} \rightarrow 1)\}$  ;



- **Théorème :** on applique le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble 1+2 en projection sur  $\vec{i}_0$  :  $\overline{R(\text{ver} \rightarrow 1)} \cdot \vec{i}_0 = \overline{R_d(1+2/0)} \cdot \vec{i}_0$ .
- **Calcul de la composante dynamique :**  $\overline{R_d(1+2/0)} = \overline{R_d(1/0)} + \overline{R_d(2/0)} = m_1 \overline{\Gamma(G_1, 1/0)} + m_2 \overline{\Gamma(G_2, 2/0)}$ .

**Exercice 275 – Mouvement RR 3D \*\***

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

**Exercice 276 – Mouvement RR 3D \*\***

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

### Exercice 277 – Mouvement RT – RSG \*\*

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de 1 et de 2 par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

## 3.5 C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

### 3.5.1 Déterminer la réponse fréquentielle

#### Exercice 278 – Ecart\*

C2-02 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :  $F_1(p) = \frac{15}{1+10p}$ .

**Question 2** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :  $F_2(p) = \frac{10}{(1+10p)(10+p)}$ .

**Question 3** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :  $F_3(p) = \frac{40}{p(1+300p)}$ .

#### Exercice 279 – Ecart\*

C2-02 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :  $F_1(p) = \frac{200}{p(1+20p+100p^2)}$ .

### 3.5.2 C2-03 – Déterminer les performances d'un système asservi

#### Exercice 280 – Valeur finale\*

C2-03

**Question 1** Déterminer la valeur finale de  $s(t)$  lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude  $E_0$ .

On a  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{CK}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)}} = \frac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p) + CK}$ . En conséquence,  $S(p) = E(p) \cdot \frac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p) + CK}$ .  
 $s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p)H(p)$ . Dans le cas où  $E(p)$  est un échelon, on a  $E(p) = \frac{E_0}{p}$  et donc  
 $s_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \frac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p) + CK} = \frac{E_0}{C}$ .

**Question 2** En déduire la valeur de l'erreur statique.

L'erreur statique est donnée par  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = E_0 - \frac{E_0}{C}$ .

**Question 3** Déterminer la valeur finale de  $s(t)$  lorsque l'entrée est une rampe de pente  $k$ .

On a maintenant  $E(p) = \frac{k}{p^2}$ . On a donc et donc  $s_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{k}{p^2} \frac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p) + CK}$  et  $s_\infty = \infty$ .

**Question 4** En déduire la valeur de l'erreur de traînage.

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{k}{p^2} - \frac{k}{p^2} \frac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p) + CK} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k}{p} \left( 1 - \frac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p) + CK} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k}{p} \frac{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p) + CK - K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p) + CK} = +\infty \end{aligned}$$

**Question 5** Qu'en est-il si  $C = 1$  ?

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k}{p} \frac{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK - K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + CK} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k}{p} \frac{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + K} = \lim_{p \rightarrow 0} k \frac{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + K} = \frac{k}{K}.$$

### Exercice 281 – Ecart\*

**C2-03** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $E(p)$  et  $P(p)$ .

**Question 2** Évaluer la valeur finale de  $\varepsilon(t)$  lorsque  $E(p)$  est un échelon d'amplitude  $E_0$  et  $P(p)$  est un échelon d'amplitude  $P_0$ .

**Question 3** Évaluer la valeur finale de  $\varepsilon(t)$  lorsque  $E(p)$  est un échelon d'amplitude  $E_0$  et  $P(p)$  est une rampe de pente  $P_0$ .

**Question 4** Évaluer la valeur finale de  $\varepsilon(t)$  lorsque  $E(p)$  est une rampe de pente  $E_0$  et  $P(p)$  est un échelon d'amplitude  $P_0$ .

**Question 5** Évaluer la valeur finale de  $\varepsilon(t)$  lorsque  $E(p)$  est une rampe de pente  $E_0$  et  $P(p)$  est une rampe de pente  $P_0$ .

### 3.5.2.1 Stabilité des systèmes

### Exercice 282 – Palettisation – Stabilité\*

**C2-03**

Pas de corrigé pour cet exercice.

On montre que  $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{Np}$ , que  $k_a = \frac{\pi}{180} k_r$  et que la FTBO est donnée par  $T(p) = \frac{k_{BO}}{p(1+\tau_m p)}$  ( $k_{BO} = \frac{k_c k_m k_r}{N}$ ).

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ . **Question 1** Déterminer la valeur de  $k_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

**Question 2** En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

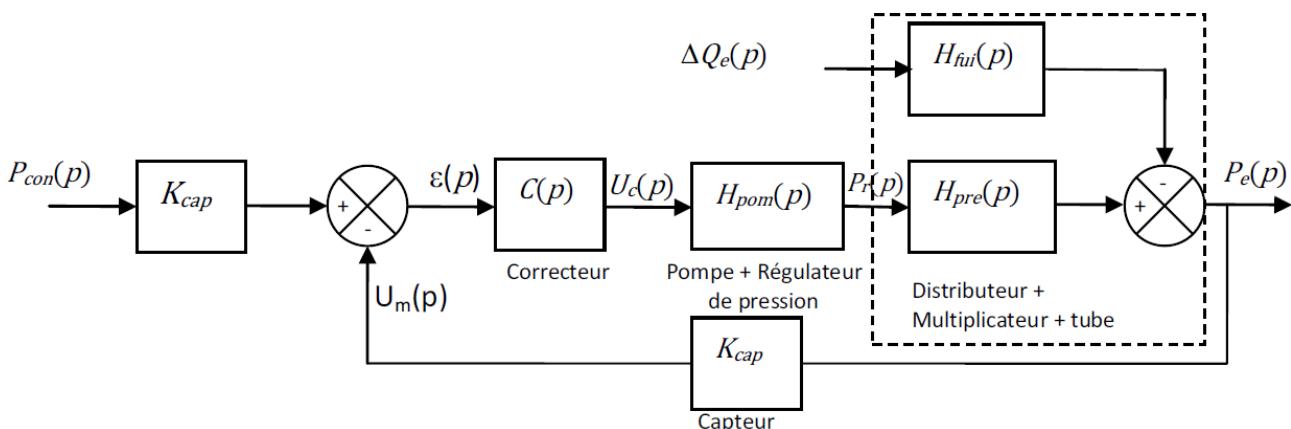
**Question 3** Déterminer l'écart de position.

### Exercice 283 – Banc hydraulique \*

**C2-03**

Pas de corrigé pour cet exercice.

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression.



- $P_{\text{con}}(p)$ : pression de consigne d'eau dans le tube (Pa)  
 $P_e(p)$ : pression d'eau dans le tube (Pa)  
 $U_c(p)$ : tension de commande du régulateur de pression (V)  
 $P_r(p)$ : pression d'huile régulée (Pa)  
 $\Delta Q_e(p)$ : débit de fuite ( $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ )  
 $U_m(p)$ : tension de mesure du capteur (V)

Hypothèses :

- L'ensemble de mise sous pression tube + distributeur + multiplicateur de pression est défini par les transmissions suivantes :  $H_{\text{pre}}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$  et  $H_{\text{fui}}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$  avec  $K_m = 3,24$ ;  $K_f = 2,55 \times 10^{10} \text{ Pa m}^{-3} \text{ s}$ ;  $T_1 = 10 \text{ s}$ .
- L'ensemble pompe+régulateur de pression est modélisé par la fonction de transfert :  $H_{\text{pom}}(p) = \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p}$  avec  $K_{\text{pom}} = 1,234 \times 10^7 \text{ Pa/V}$ ;  $T_2 = 5 \text{ s}$ .
- Le capteur est modélisé par un gain pur :  $K_{\text{cap}} = 2,5 \times 10^{-8} \text{ V/Pa}$ .

La pression de consigne est de  $P_{\text{con}} = 800 \text{ bars}$  et les débits de fuite sont estimés à  $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ .

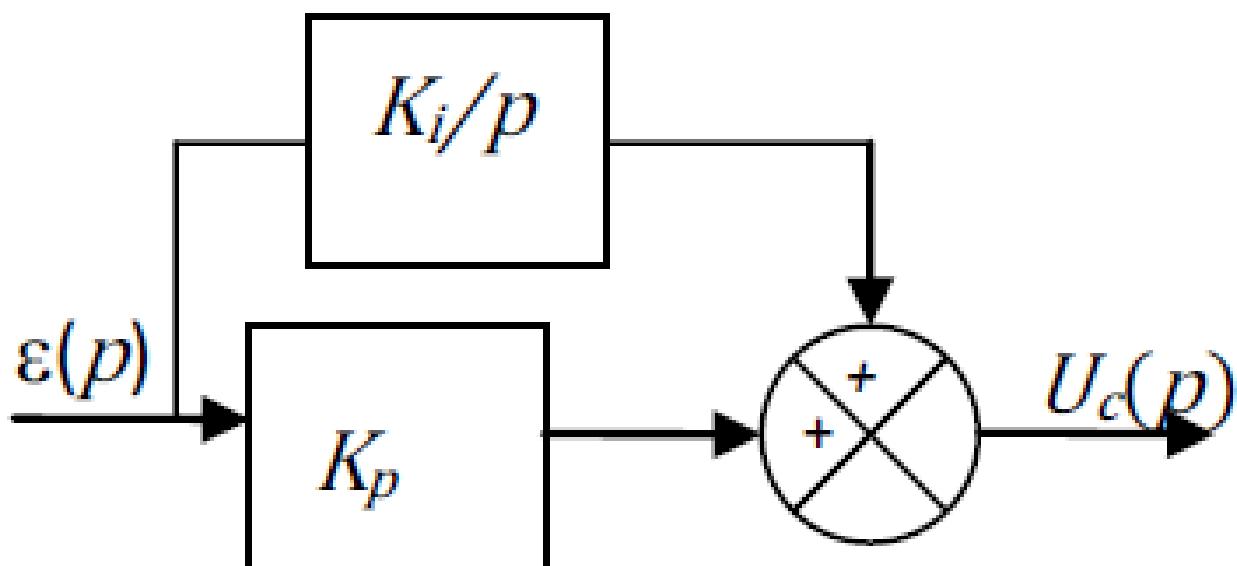
Le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant.

Stabilité :	marge de phase de $60^\circ$ marge de gain de 12 dB
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40 \text{ s}$
Précision :	erreur statique < 5% soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\varepsilon_{\text{con}} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\varepsilon_{\text{pert}} < 40 \text{ bars}$
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation :  $t_e \cdot \omega_{0\text{dB}} = 3$  où  $\omega_{0\text{dB}}$  désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et  $t_e$  le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$ , temps du 1er maximum si le dépassement est supérieur à 5 %,
- $t_e = t_R$ , temps de réponse à 5 % si le dépassement est nul ou inférieur à 5 %.

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma bloc ci-dessous.



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $C(p)$  de ce correcteur.

**Question 2** Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients  $K_i$  et  $K_p$ .

**Question 3** Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité? Justifier.

**Question 4** Quelle valeur faut-il donner à  $\omega_{0dB}$  pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges?

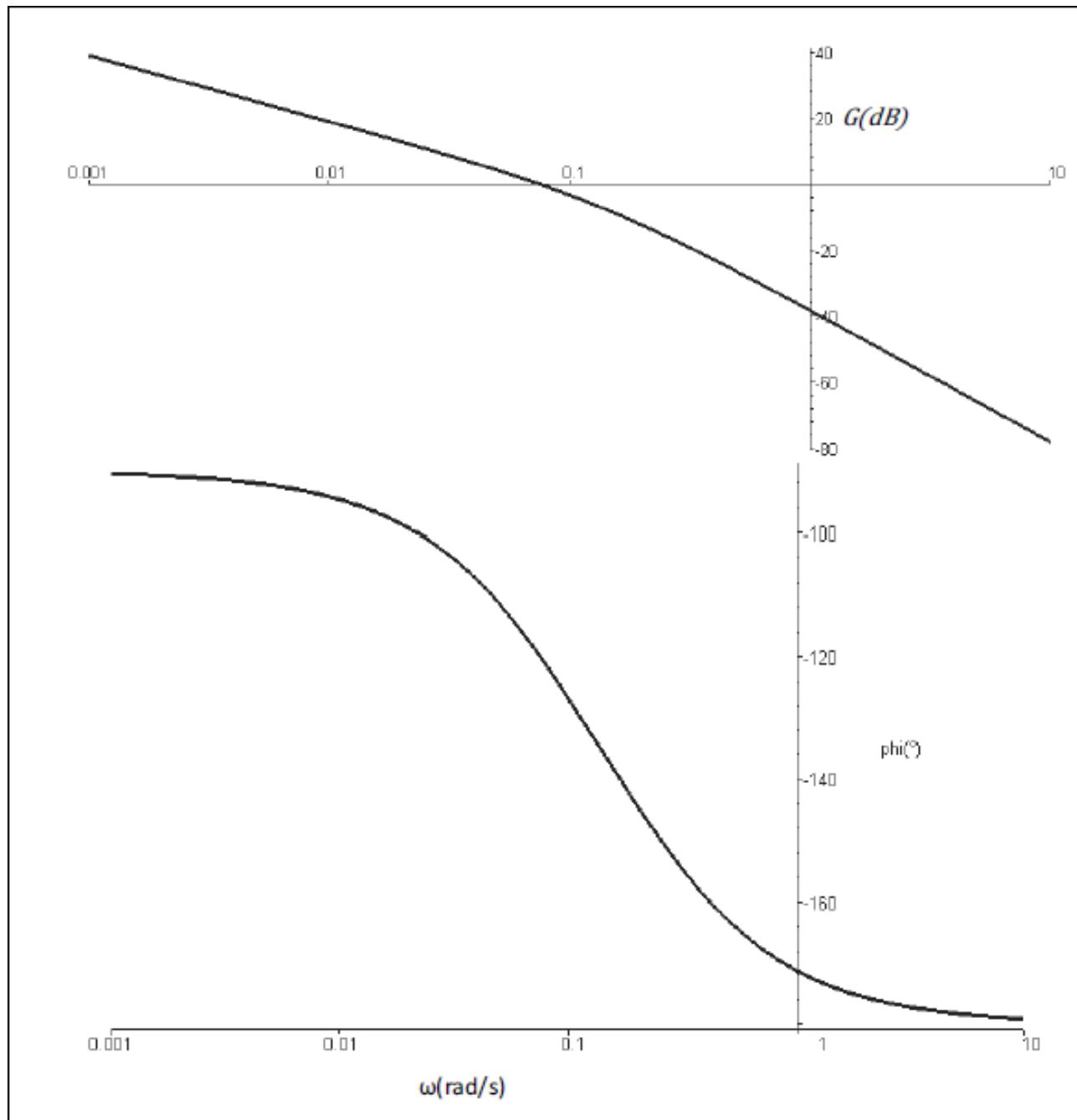
**Question 5** Déterminer alors le rapport  $T = \frac{K_p}{K_i}$  pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

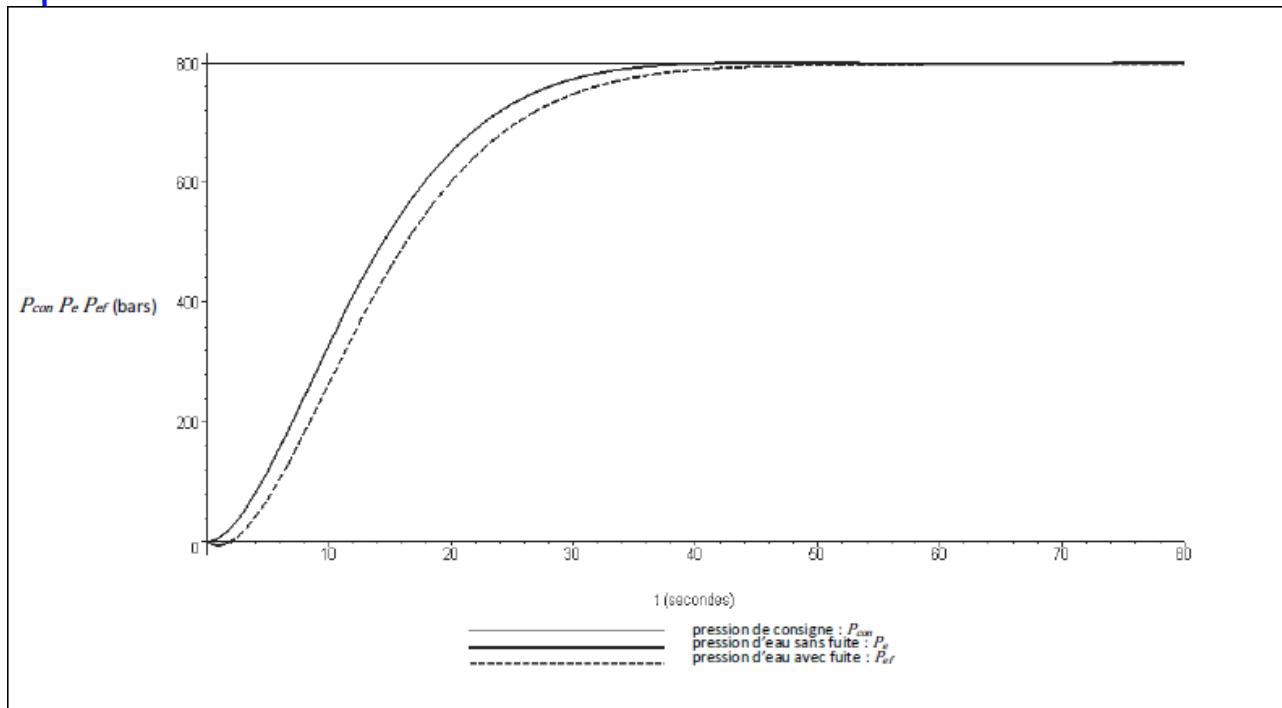
**Question 6** En déduire les valeurs de  $K_i$  et  $K_p$  qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment. On donne sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.

**Question 7** La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges? Justifier.

Résoudre





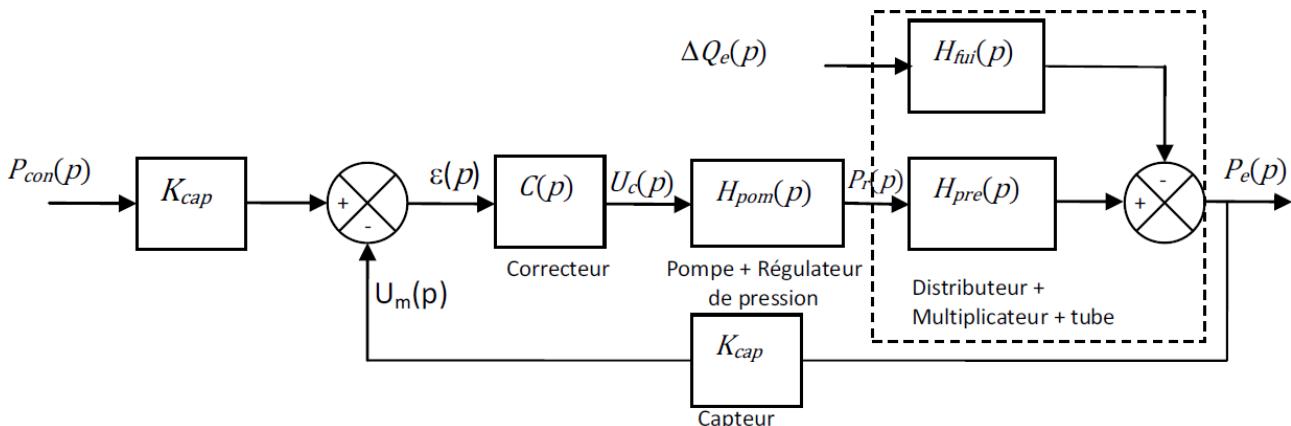
### 3.5.2.2 Précision des systèmes

#### Exercice 284 – Banc hydraulique \*

C2-03

**Pas de corrigé pour cet exercice.**

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression.



$P_{\text{con}}(p)$ : pression de consigne d'eau dans le tube (Pa)

$P_e(p)$ : pression d'eau dans le tube (Pa)

$U_c(p)$ : tension de commande du régulateur de pression (V)

$P_r(p)$ : pression d'huile régulée (Pa)

$\Delta Q_e(p)$ : débit de fuite ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )

$U_m(p)$ : tension de mesure du capteur (V)

Hypothèses :

- L'ensemble de mise sous pression tube + distributeur + multiplicateur de pression est défini par les transmissions suivantes :  $H_{\text{pre}}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$  et  $H_{\text{fui}}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$  avec  $K_m = 3,24$ ;  $K_f = 2,55 \times 10^{10} \text{ Pa m}^{-3} \text{ s}$ ;  $T_1 = 10 \text{ s}$ .
- L'ensemble pompe+régulateur de pression est modélisé par la fonction de transfert :  $H_{\text{pom}}(p) = \frac{K_{\text{pom}}}{1 + T_2 p}$  avec  $K_{\text{pom}} = 1,234 \times 10^7 \text{ Pa/V}$ ;  $T_2 = 5 \text{ s}$ .
- Le capteur est modélisé par un gain pur :  $K_{\text{cap}} = 2,5 \times 10^{-8} \text{ V/Pa}$ .

La pression de consigne est de  $P_{\text{con}} = 800$  bars et les débits de fuite sont estimés à  $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ .

Le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant.

Stabilité :	marge de phase de $60^\circ$ marge de gain de 12 dB
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40$ s
Précision :	erreur statique $< 5\%$ soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\epsilon_{\text{con}} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\epsilon_{\text{pert}} < 40$ bars
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation :  $t_e \cdot \omega_{0\text{dB}} = 3$  où  $\omega_{0\text{dB}}$  désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et  $t_e$  le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$ , temps du 1er maximum si le dépassement est supérieur à 5 %,
- $t_e = t_R$ , temps de réponse à 5 % si le dépassement est nul ou inférieur à 5 %.

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

**Question 1** Déterminer, en fonction de  $K_p$ ,  $\epsilon_{\text{con}}$  définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne  $P_{\text{con}}$  de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

**Question 2** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\epsilon_{\text{con}}$  à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

**Question 3** Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de  $K_p$  la fonction de transfert en régulation définie par :  $H_{\text{pert}}(p) = \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)}$ . En déduire, en fonction de  $K_p$ ,  $\epsilon_{\text{pert}}$  définie comme l'erreur statique pour une perturbation  $\Delta Q_e$  de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

**Question 4** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\epsilon_{\text{pert}}$  à la valeur spécifiée au cahier des charges.

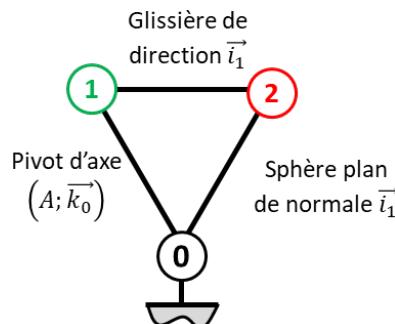
**Question 5** Proposer un réglage de  $K_p$  pour vérifier le critère d'amortissement. Conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

### 3.5.3 C2-06 – Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques

#### Exercice 285 – Pompe à piston radial \*

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.



**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

On a  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0}$  soit  $-e \overrightarrow{i_0} + \lambda \overrightarrow{i_1} - R \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow -e \overrightarrow{i_0} + \lambda(t) \cos \theta(t) \overrightarrow{i_0} + \lambda(t) \sin \theta(t) \overrightarrow{j_0} - R \cos \varphi(t) \overrightarrow{i_0} - R \sin \varphi(t) \overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$ .

En projetant les expressions sur  $\overrightarrow{i_0}$  et  $\overrightarrow{j_0}$ , on a :  $\begin{cases} -e + \lambda(t) \cos \theta(t) - R \cos \varphi(t) = 0 \\ \lambda(t) \sin \theta(t) - R \sin \varphi(t) = 0 \end{cases}$

On cherche à supprimer  $\varphi(t)$ ; donc

$$\begin{cases} -e + \lambda(t) \cos \theta(t) = R \cos \varphi(t) \\ \lambda(t) \sin \theta(t) = R \sin \varphi(t) \end{cases}.$$

En élevant au carré les expressions et en sommant, on obtient  $R^2 = (-e + \lambda(t) \cos \theta(t))^2 + \lambda(t)^2 \sin^2 \theta(t) \Rightarrow R^2 = (-e + \lambda(t) \cos \theta(t))^2 + \lambda(t)^2 \sin^2 \theta(t)$

$$\Rightarrow R^2 = e^2 - 2e\lambda(t) \cos \theta(t) + \lambda(t)^2.$$

Résolution de l'équation :  $\lambda(t)^2 - 2e\lambda(t) \cos \theta(t) + e^2 - R^2 = 0$ .

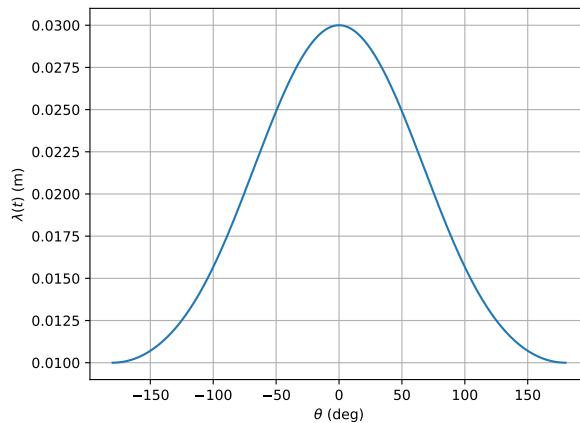
$$\text{On a } \Delta = (-2e \cos \theta(t))^2 - 4(e^2 - R^2) = 4e^2 \cos^2 \theta(t) - 4e^2 + 4R^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{2e \cos \theta(t) \pm \sqrt{4e^2 \cos^2 \theta(t) - 4e^2 + 4R^2}}{2} \\ &= e \cos \theta(t) \pm \sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2} \end{aligned}$$

**Question 3** En utilisant Python, tracer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

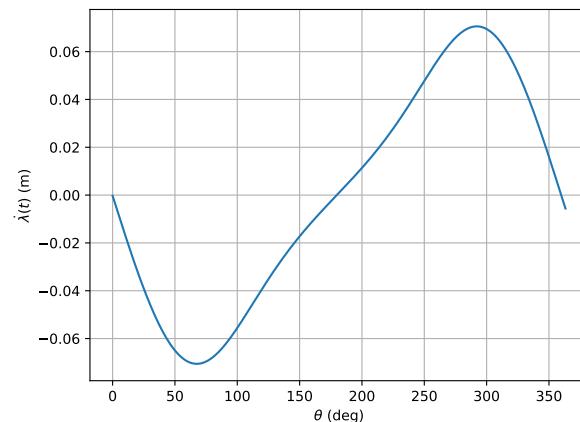
On garde la solution positive et obtient la courbe suivante.



**Question 4** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

$$\begin{aligned} \text{En dérivant l'expression précédente, on a } \dot{\lambda}_+(t) &= -e \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \frac{1}{2} (e^2 \cos^2 \theta(t))' (e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -e \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) - \frac{e^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}}. \end{aligned}$$

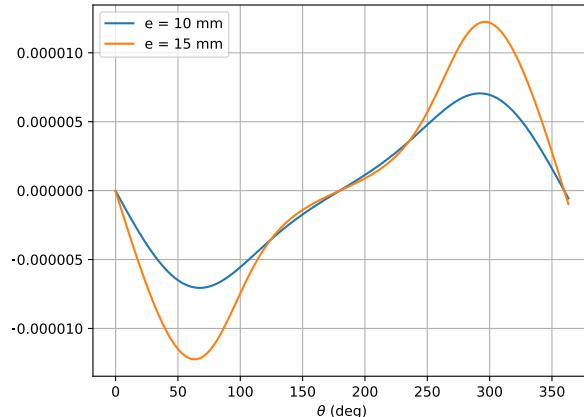
À revoir



**Question 5** Exprimer le débit instantané de la pompe.

Le débit instantané de la pompe est donné par  $q(t) = S \dot{\lambda}(t)$ .

**Question 6** En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour  $e = 10\text{ mm}$  et  $e = 15\text{ mm}$ .



**Question 7** En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour  $e = 10\text{ mm}$  pour une pompe à 5 pistons (5 branches 1+2).

```
def plot_debit5p():
    plt.cla()
    w = 2*m.pi # rad/s (1tr/s)
    les_t = np.linspace(0,6,6000)
    les_theta = w*les_t

    # Calcul de la vitesse instantanée des pistons.
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda)
    les_lambdap = np.array(les_lambdap)

    S= 1e-4 # Surface en m2

    # 5 courbes de débit décalées d'un cinquième de tour
    les_q1 = S*les_lambdap
    les_q2 = S*les_lambdap[200 :]
    les_q3 = S*les_lambdap[400 :]
    les_q4 = S*les_lambdap[600 :]
    les_q5 = S*les_lambdap[800 :]

    # On conserve que les valeurs que sur un tour
    les_q1 = les_q1[:1000]
    les_q2 = les_q2[:1000]
    les_q3 = les_q3[:1000]
    les_q4 = les_q4[:1000]
    les_q5 = les_q5[:1000]
    plt.grid()

    les_t = les_t[:1000]
    les_theta = les_theta[:1000]

    plt.xlabel("$\theta$ (deg)")
    plt.ylabel("Débit instantané $\text{m}^3\text{s}^{-1}$")

    # On conserve que les valeurs positives (débit)
    for i in range(len(les_q1)):
        if les_q1[i]<0:
            les_q1[i]=0
        if les_q2[i]<0:
            les_q2[i]=0
        if les_q3[i]<0:
            les_q3[i]=0
        if les_q4[i]<0:
            les_q4[i]=0
        if les_q5[i]<0:
            les_q5[i]=0
```

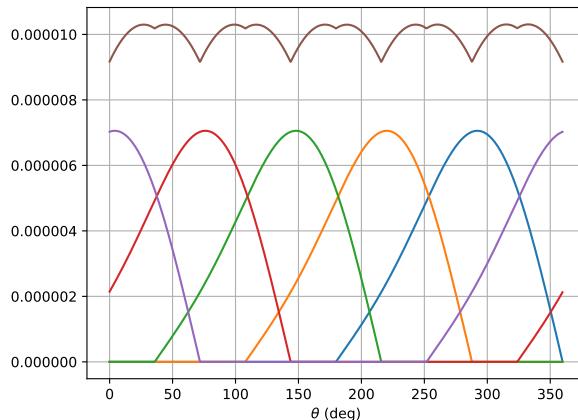
```

les_q3[i]=0
if les_q4[i]<0:
    les_q4[i]=0
if les_q5[i]<0:
    les_q5[i]=0

plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q1)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q2)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q3)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q4)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q5)

# Le débit instantané est la somme des contributions
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q1+les_q2+les_q3+les_q4+les_q5)
#plt.show()
# plt.savefig("10_05_c.pdf")

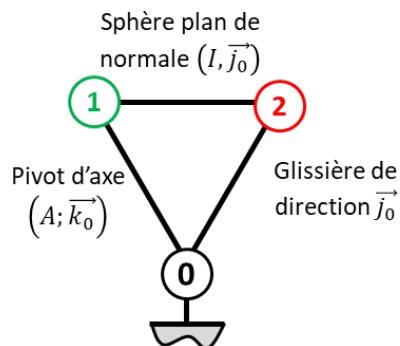
```



### Exercice 286 – Pompe à piston axial \*

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.



**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

En écrivant la fermeture géométrique, on a  $\vec{AB} + \vec{BI} + \vec{IC} + \vec{CA} = \vec{0}$ .

On a donc,  $e \vec{i}_1 + R \vec{j}_0 + \mu \vec{i}_0 - \lambda(t) \vec{j}_0 = \vec{0}$ . En projetant l'expression sur  $\vec{j}_0$  (dans ce cas, l'expression suivant  $\vec{i}_0$  n'est pas utile) :  $e \sin \theta + R - \lambda(t) = 0$ .

On a donc,  $\lambda(t) = e \sin \theta + R$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

En dérivant l'expression précédente, on a  $\dot{\lambda}(t) = e \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$ .

**Question 4** On note  $S$  la section du piston 2. Exprimer le débit instantané de la pompe.

En notant  $q(t)$  le débit instantané,  $q(t) = eS\dot{\theta}(t)\cos \theta(t)$ .

**Question 5** En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour  $e = 10\text{ mm}$  et  $R = 10\text{ mm}$  ainsi que pour  $e = 20\text{ mm}$  et  $R = 5\text{ mm}$ . La fréquence de rotation est  $\dot{\theta}(t) = 100\text{ rad s}^{-1}$ , la section du piston est donnée par  $S = 1\text{ cm}^2$ .

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""11_PompePistonAxial.py"""

__author__ = "Xavier Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.02 # m
e = 0.01 # m

def calc_lambda(theta):
    res= e*np.sin(theta)+R

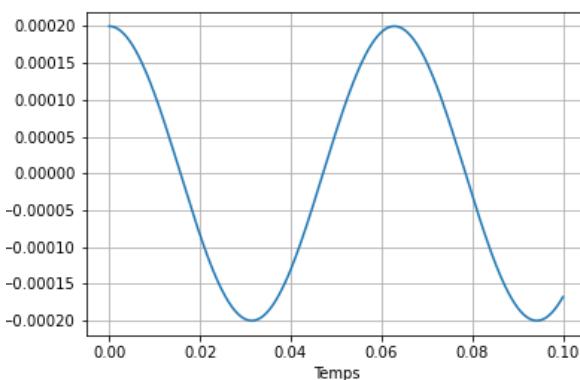
    return res

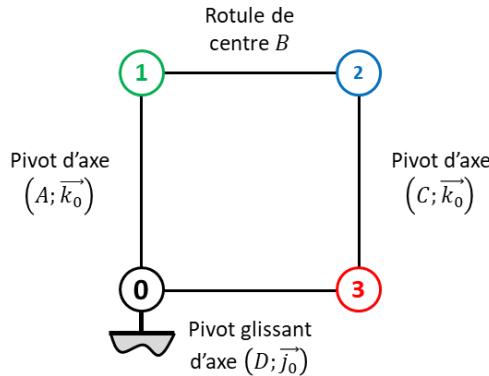
def calc_lambdap(theta,w):
    res = e*w*np.cos(theta)
    return res

def plot_debit():
    plt.cla()
    w = 100 # rad/s
    les_t = np.linspace(0,0.1,1000)
    les_theta = w*les_t
    global e
    S = 1e-4
    e = 20e-3
    les_q = e*S*w*np.cos(les_theta)
    plt.plot(les_t,les_q)
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Débit ($\text{m}^3\text{s}^{-1}$)")
    plt.grid()
    plt.savefig("11_02_c.png")
    plt.show()

plot_debit()
```

Résoudre



**Exercice 287 – Système bielle manivelle \*\***
**C2-06**
**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

En réalisant une fermeture géométrique, on obtient  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow R\overrightarrow{i_1} - L\overrightarrow{i_2} - \lambda(t)\overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$ . On projette alors cette expression dans  $\mathcal{R}_0$ :

$$\begin{cases} R \cos \theta(t) - L \cos \varphi(t) = 0 \\ R \sin \theta(t) - L \sin \varphi(t) - \lambda(t) = 0 \end{cases}.$$

On cherche à éliminer  $\varphi(t)$ :

$$\begin{cases} R \cos \theta(t) = L \cos \varphi(t) \\ R \sin \theta(t) - \lambda(t) = L \sin \varphi(t) \end{cases}.$$

En éllevant au carré, on a donc

$$\begin{cases} R^2 \cos^2 \theta(t) = L^2 \cos^2 \varphi(t) \\ (R \sin \theta(t) - \lambda(t))^2 = L^2 \sin^2 \varphi(t) \end{cases}.$$

En conséquence,  $R^2 \cos^2 \theta(t) + (R \sin \theta(t) - \lambda(t))^2 = L^2$  et  $(R \sin \theta(t) - \lambda(t))^2 = L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t) \Rightarrow \lambda(t) = \pm \sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)} + R \sin \theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

$$\dot{\lambda}(t) = \pm \left( \frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)}} \right) + \dot{\theta}(t) R \cos \theta(t)$$

**Question 4** En utilisant Python, tracer la vitesse du piston en fonction du temps. La fréquence de rotation est  $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$ , on prendra  $R = 10 \text{ mm}$  et  $L = 20 \text{ mm}$  puis  $L = 30 \text{ mm}$ .

```

#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""12_BielleManivelle.py"""
__author__ = "Xavier Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

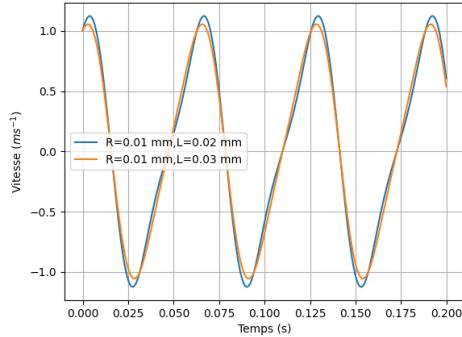
R = 0.01 # m
L = 0.03 # m
w = 100
def calc_lambda(theta):
    #res = R*np.sin(theta)
    #print(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))
    #res = res + np.sqrt(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))
    res = np.sqrt(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))+R*np.sin(theta)
    return res

```

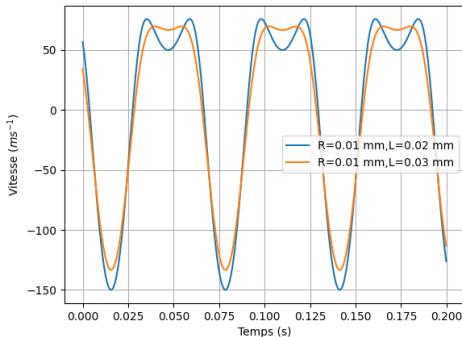
```

def plot_lambda():
    les_theta=np.linspace(-2*np.pi,2*np.pi,1000)
    les_l = [calc_lambda(x) for x in les_theta]
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Vitesse ($\{m\} s^{-1}$)")
    plt.plot(les_theta,les_l,label=str("R=")+str(R)+" mm,"+str("L=")+str(L)+" mm")
    plt.legend()
    plt.show()

plot_lambda()
    
```



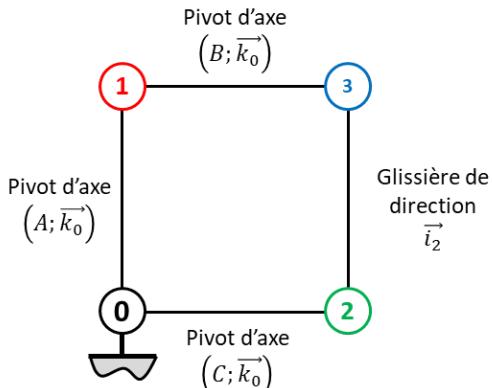
**Question 5** En utilisant Python, tracer l'accélération du piston en fonction du temps en utilisant les mêmes valeurs que dans la question précédente. On utilisera une dérivation numérique.



### Exercice 288 – Pompe oscillante \*

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.



**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

En réalisant une fermeture géométrique, on a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow R \overrightarrow{i_1} - \lambda(t) \overrightarrow{i_2} + H \overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$ .

En projetant cette expression dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , on a  $R(\cos \theta(t) \overrightarrow{i_0} + \sin \theta(t) \overrightarrow{j_0}) - \lambda(t)(\cos \varphi(t) \overrightarrow{i_0} + \sin \varphi(t) \overrightarrow{j_0}) + H \overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$ .

On obtient alors les équations scalaires suivantes :  $\begin{cases} R \cos \theta(t) - \lambda(t) \cos \varphi(t) = 0 \\ R \sin \theta(t) - \lambda(t) \sin \varphi(t) + H = 0 \end{cases}$ .

On cherche à supprimer  $\varphi(t)$ , on va donc isoler la variable :  $\begin{cases} \lambda(t) \cos \varphi(t) = R \cos \theta(t) \\ \lambda(t) \sin \varphi(t) = R \sin \theta(t) + H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(t)^2 \cos^2 \varphi(t) = R^2 \cos^2 \theta(t) \\ \lambda(t)^2 \sin^2 \varphi(t) = (R \sin \theta(t) + H)^2 \end{cases}$

En sommant les expressions, on a :  $\lambda(t)^2 = R^2 \cos^2 \theta(t) + (R \sin \theta(t) + H)^2$ .

Au final,  $\lambda(t)^2 = R^2 + H^2 + 2HR \sin \theta(t)$  et

$$\lambda(t) = \pm \sqrt{R^2 + H^2 + 2HR \sin \theta(t)}$$

**Question 3** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

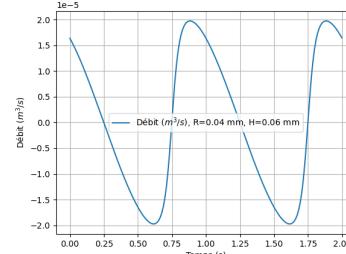
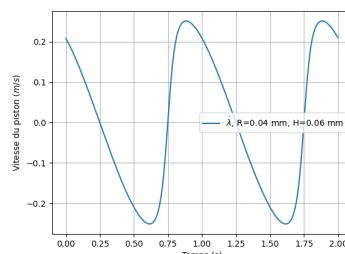
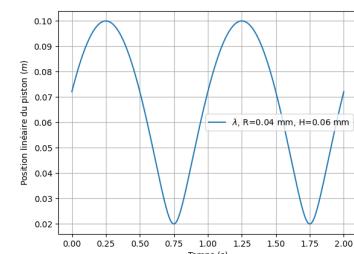
En dérivant l'expression obtenue à la question précédente, on obtient

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{1}{2} (-2HR\dot{\theta}(t)\cos \theta(t))(R^2 + H^2 + 2HR \sin \theta(t))^{-\frac{1}{2}}$$

**Question 4** Exprimer le débit instantané de la pompe.

On note  $q$  le débit instantané de la pompe. On a  $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$  avec  $S$  la section du piston 3.

**Question 5** En utilisant Python, donner le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour un piston de diamètre  $D = 10\text{ mm}$ .



```

#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""13_TransfoMouvement.py"""

__author__ = "Xavier Pessoles"
__email__ = "xpessoles@lamartin.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m

R = 0.04 # m
H = 0.06 # m
D = 10e-3 # 10 mm

w = 60 # tours /min
w = w*2*m.pi/60 # rad/s

def calc_lambda(theta):
    res = R*R+H*H+2*H*R*np.sin(theta)

    return np.sqrt(res)

def calc_lambdap(theta):
    res = -H*R*w*np.cos(theta)*np.power(R*R+H*H+2*H*R*np.sin(theta), -0.5)

    return np.sqrt(res)

```

```

def calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda):
    les_lambda_p = []
    for i in range(len(les_t)-1):
        les_lambda_p.append((les_lambda[i+1]-les_lambda[i])/(les_t[i+1]-les_t[i]))

    return les_lambda_p

def plot_lambda():
    les_t = np.linspace(0,2,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Position linéaire du piston ($m$)")
    plt.plot(les_t,les_lambda,label=str("$\lambda$, $R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm"))
    plt.legend()
    plt.show()

def plot_lambdap():
    les_t = np.linspace(0,2,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Vitesse du piston ($m/s$)")
    #plt.plot(les_t,les_lambdap,label=str("$\dot{\lambda}$, $R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm"))

    les_lambdap_bis = calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda)
    plt.plot(les_t[:-1],les_lambdap_bis,label=str("$\dot{\lambda}$, $R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm"))

    plt.legend()
    plt.show()

def plot_debit():
    les_t = np.linspace(0,2,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Débit ($m^3/s$)")
    #plt.plot(les_t,les_lambdap,label=str("$\dot{\lambda}$, $R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm"))

    les_lambdap_bis = calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda)
    for i in range(len(les_lambdap_bis)):
        les_lambdap_bis[i]=les_lambdap_bis[i]*np.pi*D*D/4

    plt.plot(les_t[:-1],les_lambdap_bis,label=str("Débit ($m^3/s$), $R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm"))

    plt.legend()
    plt.show()

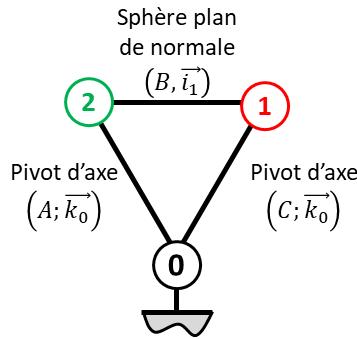
#plot_lambda()
#plot_lambdap()
plot_debit()

```

### Exercice 289 – Barrière Sympact \*

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.



**Question 2** Exprimer  $\varphi(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

On a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$  soit  $\lambda(t) \overrightarrow{i_2} - R \overrightarrow{i_1} - h \overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$ .

En exprimant l'équation vectorielle dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , on a  $\lambda(t) \left( \cos \varphi(t) \vec{i}_0 + \sin \varphi(t) \vec{j}_0 \right) - R \left( \cos \theta(t) \vec{i}_0 + \sin \theta(t) \vec{j}_0 \right) - h \vec{j}_0 = \vec{0}$ .

$$\text{On a alors } \begin{cases} \lambda(t) \cos \varphi(t) - R \cos \theta(t) = 0 \\ \lambda(t) \sin \varphi(t) - R \sin \theta(t) - h = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \lambda(t) \cos \varphi(t) = R \cos \theta(t) \\ \lambda(t) \sin \varphi(t) = R \sin \theta(t) + h \end{cases} .$$

En faisant le rapport des équations, on a donc :  $\tan \varphi(t) = \frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)}$  (pour  $\theta(t) \neq \frac{\pi}{2} \text{ mod } \pi$ ).

**Question 3** Exprimer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

$$\text{On a : } \varphi(t) = \arctan\left(\frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)}\right).$$

Pour commencer,  $(R \sin \theta(t) + h)' = R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$  et  $(R \cos \theta(t))' = -R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{De plus, } & \left( \frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)} \right)' \\
 &= \frac{R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) R \cos \theta(t) + R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) (R \sin \theta(t) + h)}{R^2 \cos^2 \theta(t)} \\
 &= \frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos^2 \theta(t) + R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) (R \sin \theta(t) + h)}{R^2 \cos^2 \theta(t)} \\
 &= \frac{R \dot{\theta}(t) \cos^2 \theta(t) + R \sin^2 \theta(t) \dot{\theta}(t) + h \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)} \\
 &= \dot{\theta}(t) \frac{R + h \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}.
 \end{aligned}$$

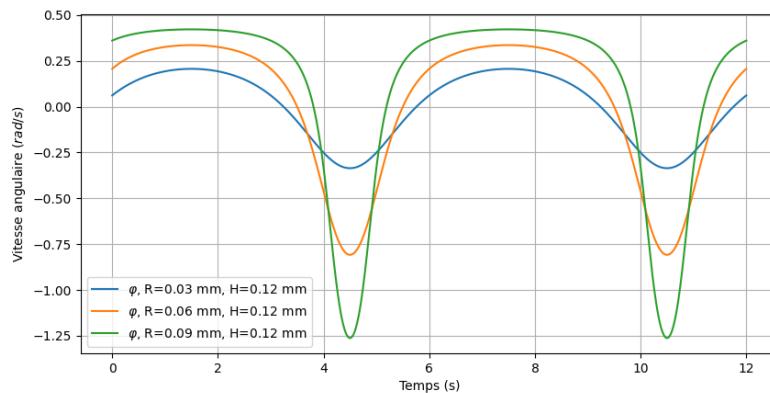
All final

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{\theta}(t) \frac{R + h \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}}{1 + \left( \frac{R \sin \theta(t) + h}{R \cos \theta(t)} \right)^2} \frac{\dot{\theta}(t) \frac{R + h \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}}{1 + \frac{(R \sin \theta(t) + h)^2}{R^2 \cos^2 \theta(t)}}.$$

$$\dot{\varphi}(t) = R^2 \cos^2 \theta(t) \frac{\dot{\theta}(t) \frac{R + h \sin \theta(t)}{R \cos^2 \theta(t)}}{R^2 \cos^2 \theta(t) + \frac{(R \sin \theta(t) + h)^2}{R^2 \cos^2 \theta(t)}} = \frac{R \dot{\theta}(t) (R + h \sin \theta(t))}{R^2 \cos^2 \theta(t) + (R \sin \theta(t) + h)^2}.$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{R \dot{\theta}(t) (R + h \sin \theta(t))}{R^2 \cos^2 \theta(t) + R^2 \sin^2 \theta(t) + h^2 + 2Rh \sin \theta(t)} = \frac{R \dot{\theta}(t) (R + h \sin \theta(t))}{R^2 + h^2 + 2Rh \sin \theta(t)}.$$

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.



```

#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""14_Sympact.py"""

__author__ = "Xavier Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.03 # m
H = 0.12 # m
w = 10 # tours /min
w = 10*2*m.pi/60 # rad/s

def calc_phi(theta):
    num = R*np.sin(theta)+H
    den = R*np.cos(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def calc_phi_p(theta):
    num = R*w*(R+H*np.sin(theta))
    den = R*R+H*H+2*R*H*np.sin(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def plot_phi():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phi = calc_phi(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Position angulaire ($rad$)")
    plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\theta$, R="+str(R)+" mm, H="+str(H)+" mm"))
    plt.plot(les_t,les_phi,label=str("$\varphi$, R="+str(R)+" mm, H="+str(H)+" mm"))
    plt.legend()
    plt.show()

def plot_phi_p():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phi_p = calc_phi_p(les_theta)

    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Vitesse angulaire ($rad/s$)")

```

```

plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\theta$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm")
plt.plot(les_t,les_phi,label=str("$\varphi$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm")
plt.legend()
plt.show()

for R in [0.03,0.06,0.09]:
    plot_phi()
    
```

**Exercice 290 – Barrière Sympact avec galet \*\***
**B2-13**
**C2-05**
**C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\varphi(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer  $\gamma(t)$  et  $\dot{\gamma}(t)$ .

**Question 5** En utilisant Python, tracer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

**Exercice 291 – Poussoir \***
**C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\mu(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\mu}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\dot{\mu}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

**Exercice 292 – Système 4 barres \*\***
**C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\theta_1(t)$  en fonction de  $\theta_4(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\theta}_1(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}_4(t)$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\dot{\theta}_1(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}_4(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

**Exercice 293 – Maxpid \*\*\***
**C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.**

Par ailleurs  $a = 107,1 \text{ mm}$ ,  $b = 80 \text{ mm}$ ,  $c = 70 \text{ mm}$ ,  $d = 80 \text{ mm}$ . Le pas de la vis est de 4 mm.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\theta(t)$  en fonction de  $\lambda(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\dot{\lambda}(t)$ .

**Question 4** Exprimer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\omega(t)$ , vitesse de rotation du rotor moteur 2 par rapport au stator 1.

**Question 5** En utilisant Python, tracer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\omega(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 2 par rapport à 1 est de 500 tours par minute.

### Exercice 294 – Variateur de Graham\*\*\*

D'après ressources de Michel Huguet.

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** En exprimant que 2 roule sans glisser sur 4 au point I, déterminer  $\omega$  en fonction de  $\omega_1$ , d et  $\lambda$ .

**Question 3** Quelle relation obtient-on entre  $\omega_1$ ,  $\omega_3$  et  $\omega$  en exprimant l'engrenement des deux roues dentées ? (c'est à dire que 2 et 3 roulent sans glisser l'un sur l'autre en J).

**Question 4** En déduire le rapport de variation  $\frac{\omega_3}{\omega_1}$  du mécanisme en fonction de  $\lambda$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  et d.

**Question 5** Tracer la courbe représentative du rapport de variation  $\frac{\omega_3}{\omega_1}$  du mécanisme en fonction de  $\lambda$ , sachant que  $\frac{n}{n_3} = \frac{d_1}{d_3}$ ,  $d = 55$  mm et que  $\lambda$  varie entre  $\lambda_{mini} = 12$  mm et la valeur  $\lambda_{maxi} = 23$  mm.

### Exercice 295 – Variateur à billes \*\*\*\*\*

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer la loi entrée – sortie.

### Exercice 296 – Fauteuil Roulant \*

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer les relations issues de la fermeture géométrique liant les paramètres  $\gamma$ ,  $\beta$  et  $\lambda(t)$ .

**Question 3** En déduire l'expression de  $\gamma$  en fonction de  $\beta$ .

### 3.5.4 C2-06 – Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques

#### Exercice 297 – Train simple \*

A3-05

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

On a  $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{Z_1}{Z_3}$ .

**Question 3** Donner une relation géométrique entre  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$  permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages.

On a  $Z_3 = 2Z_2 + Z_1$ .

### Exercice 298 – Train simple \*

**A3-05**

**C2-06**

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

On a  $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_4 Z_{21}}$ .

**Question 3** Donner une relation géométrique entre  $Z_1$ ,  $Z_{21}$ ,  $Z_{22}$  et  $Z_4$  permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages (on fera l'hypothèse que toutes les roues dentées ont le même module).

On a  $Z_1 + Z_{21} + Z_{22} = Z_4$ .

### Exercice 299 – Train simple \*

**A3-05**

**C2-06**

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

On a  $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_4 Z_{21}}$ .

### Exercice 300 – Train simple \*

**A3-05**

**C2-06**

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

On a  $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_4 Z_{21}}$ .

### Exercice 301 – Cheville robot NAO\*

**A3-05**

**C2-06**

**Question 1** Quels doivent être les rapports de réductions des transmissions par engrenage afin de respecter les exigences 1.1.1.1 et 1.1.1.2?

D'après le diagramme de définition des blocs et le diagramme des exigences, les rapports de transmission doivent être :

- pour l'axe de tangage :  $\frac{N_{\text{moteur}}}{N_{\text{Tangage}}} = 138,33$  au minimum;
- pour l'axe de roulis :  $\frac{N_{\text{moteur}}}{N_{\text{Roulis}}} = 197,61$  au minimum.

**Question 2** Dans le cas de l'axe de tangage, remplir le tableau suivant :

Roue dentée	Module	Nb dents	Diamètre (mm)
Pignon 03 20	0,3	20	6
Mobile Inf1 Roue	0,3	80	24
Mobile Inf1 Pignon	0,4	25	10
Mobile Inf2 Roue	0,4	47	18,8
Mobile Inf2 Pignon	0,4	12	4,8
Mobile Inf4 Roue	0,4	58	23,2
Mobile Inf4 Pignon	0,7	10	7
Roue de sortie	0,7	36	25,2

**Question 3** Dans le cas de l'axe de tangage, déterminer le diamètre de chaque roue dentée.

**Question 4** Dans le cas de l'axe de tangage, réaliser le schéma cinématique minimal.

**Question 5** Calculer le rapport de transmission de la chaîne de transmission de l'axe de tangage ? L'exigence 1.1.1.2 est-elle respectée ? Si non, quelle(s) solution(s) de remédiation pourrait-on proposer ?

$$R_T = (-1)^n \frac{80 \cdot 47 \cdot 58 \cdot 36}{20 \cdot 25 \cdot 12 \cdot 10} = 130,85$$

Ceci est inférieur à ce qui est préconisé par le cahier des charges.

Pour respecter le cahier des charges, on peut :

- choisir un autre moteur;
- changer le nombre de dents d'une des roues. Il suffirait pour cela que, par exemple, la roue de sortie comporte 39 dents.

**Question 6** Calculer le rapport de transmission de la chaîne de transmission de l'axe de roulis ? L'exigence 1.1.1.1 est-elle respectée ? Si non, quelle(s) solution(s) de remédiation pourrait-on proposer ?

Le rapport de transmission du second train est de 201,3 ce qui est compatible avec le cahier des charges.

### Exercice 302 – Train simple \*

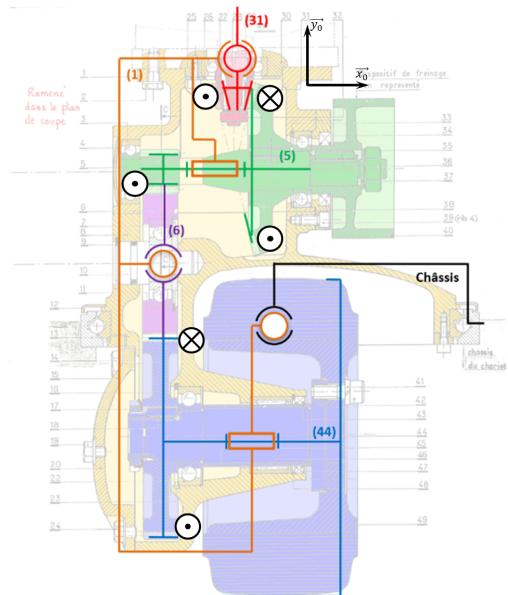
D'après Florestan Mathurin.

A3-05

C2-06

**Question 1** Identifier les classes d'équivalence cinématique sur le dessin d'ensemble.

**Question 2** Construire le schéma cinématique du réducteur dans le même plan que le dessin.



**Question 3** Compléter le tableau donnant les caractéristiques des roues et pignons.

Repère de la roue	Module $m$ (mm)	Nombre de dents $Z$	Diamètre primitif $D$ (mm)
27	1,5	16	24
35	1,5	84	126
5	1,5	14	21
11	1,5	56	84
16	1,5	75	112,5

**Question 4** Après avoir proposé un paramétrage, indiquer dans quel sens tourne la roue si le moteur 28 (31) tourne dans le sens positif.

Voir figure précédente. Si le moteur tourne dans le sens positif, la roue tourne dans le sens négatif.

**Question 5** Pour une vitesse de 1500 tr/min en sortie de moteur, déterminer la vitesse de rotation de la roue. Le diamètre de la roue est de 150 mm. Quelle est la vitesse du véhicule ?

Le rapport de réduction de la transmission est le suivant :  $k = \frac{Z_{27}Z_5Z_{11}}{Z_{35}Z_{11}Z_{16}} = \frac{16 \cdot 14}{84 \cdot 75} = 0,0355$

La vitesse de rotation de la roue est donc de  $53,33 \text{ tr min}^{-1}$  soit  $5,59 \text{ rad s}^{-1}$ . On en déduit la vitesse du véhicule :  $5,59 \times 0,15 = 0,84 \text{ m s}^{-1} \simeq 3 \text{ km h}^{-1}$ .

**Exercice 303 – Train simple \***

A3-05

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{30} - \omega_{10}} = -\frac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow \omega_{30} = -\frac{Z_1}{Z_0} \omega_{30} + \frac{Z_1}{Z_0} \omega_{10} \Leftrightarrow \omega_{30} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_0}\right) = \frac{Z_1}{Z_0} \omega_{10} \Leftrightarrow \omega_{30} = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} \omega_{10}.$$

## Exercice 304 – Train simple \*

A3-05

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

En bloquant le porte satellite, on a :  $\frac{\omega_{43}}{\omega_{13}} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$ . On a donc,  $\frac{\omega_{40} + \omega_{03}}{\omega_{10} + \omega_{03}} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \Leftrightarrow \omega_{40} + \omega_{03} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03})$   
 $\Leftrightarrow \omega_{40} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03}) - \omega_{03} \Leftrightarrow \omega_{40} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03}) + \omega_{30} \Leftrightarrow \omega_{40} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \omega_{30} \left(1 + \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)$ .

**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

$$0 = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \omega_{30} \left(1 + \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} = \omega_{30} \left(1 + \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}}{1 + \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4 + Z_1 Z_{22}}.$$

### Exercice 305 – Train simple \*

A3-05

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

En bloquant le porte satellite, on a :  $\frac{\omega_{43}}{\omega_{13}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$ . On a donc,  $\frac{\omega_{40} + \omega_{03}}{\omega_{10} + \omega_{03}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \Leftrightarrow \omega_{40} + \omega_{03} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03})$   
 $\Leftrightarrow \omega_{40} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} - \omega_{30}) + \omega_{30} \Leftrightarrow \omega_{40} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30}$ .

**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30} \Leftrightarrow \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} = -\left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30} \Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}}{\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} - 1} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_1 Z_{22} - Z_{21} Z_4}.$$

### Exercice 306 – Train simple \*

A3-05

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

En bloquant le porte satellite, on a :  $\frac{\omega_{43}}{\omega_{13}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$ . On a donc,  $\frac{\omega_{40} + \omega_{03}}{\omega_{10} + \omega_{03}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \Leftrightarrow \omega_{40} + \omega_{03} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03})$   
 $\Leftrightarrow \omega_{40} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} - \omega_{30}) + \omega_{30} \Leftrightarrow \omega_{40} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30}$ .

**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30} \Leftrightarrow \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} = -\left(1 - \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right) \omega_{30} \Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}}{\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} - 1} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_1 Z_{22} - Z_{21} Z_4}.$$

### Exercice 307 – Poulie Redex \* D'après ressources de Stéphane Genouël.

A3-05

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer littéralement, en fonction des nombres de dents, la loi E/S du système (c'est-à-dire le rapport de transmission).

On cherche  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ . En bloquant le porte satellite 1, on a  $\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = \frac{Z_0 Z_2}{Z'_2 Z_3}$ . En décomposant les vitesses, on a :  $\frac{\omega_{30} - \omega_{10}}{\omega_{10}} = -\frac{Z_0 Z_2}{Z'_2 Z_3} \Leftrightarrow \omega_{30} - \omega_{10} = -\frac{Z_0 Z_2}{Z'_2 Z_3} \omega_{10} \Leftrightarrow \omega_{30} = \left(1 - \frac{Z_0 Z_2}{Z'_2 Z_3}\right) \omega_{10} \Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = 1 - \frac{Z_0 Z_2}{Z'_2 Z_3}$ .  
AN :  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = 1 - \frac{49 \times 34}{31 \times 46} = -0,17$ .

**Exercice 308 – Train simple \***
**A3-05**
**C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Question 1** Donner les rapports de chacun des 4 étages de réduction.

**Exercice 309 – Centrifugeuse des boues \***
**A3-05**
**C2-06**

**Question 1** Déterminer la fréquence de rotation de la vis (par rapport au bâti) lors de la phase de lancement.

**Exercice 310 – Train simple \* D'après documentation F. Mazet.**
**A3-05**
**C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Question 1** Déterminer la relation entre  $\omega(1/0)$  et  $v$ .

**Exercice 311 – Train simple \***
**A3-05**
**C2-06**

**Question 1** Déterminer la relation entre  $\omega(1/0)$ ,  $\omega(3/0)$  et  $\omega(4/0)$ .

**Question 2** Montrer que la relation entre la rotation du moteur hydraulique et le moteur Man peut se mettre sous la forme :  $\frac{\omega(Mh/0)}{\omega(Mm/0)} = -\frac{Ax}{BR_p y + Cx}$  où on explicitera A, B et C.

On cherche une relation entre  $\omega_{Mh/0}$ ,  $\omega_{Ph/0}$  et  $\omega_{Mm/0}$  (avec Mm et 4 même classe d'équivalence). Pour cela, on va d'abord rechercher une relation entre  $\omega(3/0)$ ,  $\omega(4/0)$  et  $\omega(1/0)$ .

Bloquons le porte satellite 4, directement lié au moteur Mm. On est alors en présence d'un réducteur simple d'entrée  $\omega(1/4)$  et de sortie  $\omega(3/4)$ . On a donc :  $\frac{\omega(3/4)}{\omega(1/4)} = -\frac{R_{12}}{R_{32}}$ .

En libérant le porte satellite, on a donc :  $\frac{\omega(3/4)}{\omega(1/4)} = \frac{\omega(3/0) - \omega(4/0)}{\omega(1/0) - \omega(4/0)} = -\frac{R_{12}}{R_{32}} \Leftrightarrow R_{32}\omega(3/0) + R_{12}\omega(1/0) = \omega(4/0)(R_{12} + R_{32})$

On a donc,  $R_{32}\omega(3/0) + R_{12}\omega(1/0) = \omega(Mm/0)(R_{12} + R_{32})$ .

Par ailleurs,  $\frac{\omega(Ph/0)}{\omega(3/0)} = -\frac{R_{3P}}{R_P}$  et  $\frac{\omega(1/0)}{\omega(Mh/0)} = -\frac{R_M}{R_{1M}}$ .

On a donc,  $\frac{2y}{x}\omega(Mh/0) = -\omega(3/0)\frac{R_{3P}}{R_P} \Leftrightarrow \omega(3/0) = -\frac{2y}{x}\frac{R_P}{R_{3P}}\omega(Mh/0)$ .

En utilisant la relation du train épi : On a donc,  $-R_{32}\frac{2y}{x}\frac{R_P}{R_{3P}}\omega(Mh/0) - R_{12}\frac{R_M}{R_{1M}}\omega(Mh/0) = \omega(Mm/0)(R_{12} + R_{32}) \Leftrightarrow$

$\left(-R_{32}\frac{2y}{x}\frac{R_P}{R_{3P}} - R_{12}\frac{R_M}{R_{1M}}\right)\omega(Mh/0) = \omega(Mm/0)(R_{12} + R_{32})$ .

$\frac{\omega(Mh/0)}{\omega(Mm/0)} = -\frac{R_{12} + R_{32}}{R_{32}\frac{2y}{x}\frac{R_P}{R_{3P}} + R_{12}\frac{R_M}{R_{1M}}}$

$\frac{\omega(Mh/0)}{\omega(Mm/0)} = -\frac{(R_{12} + R_{32})R_{1M}R_{3P}x}{R_{32}2yR_P R_{1M} + R_{3P}xR_{12}R_M}$ . On a donc,  $A = (R_{12} + R_{32})R_{1M}R_{3P}$ ,  $B = R_{32}2R_{1M}$  et  $C = R_{3P}xR_{12}R_M$ .

**Attention, plusieurs solutions possibles, si on factorise le numérateur et le dénominateur par l'un ou l'autre des rayons.**

**Exercice 312 – Système vis-écrou \* D'après ressources Pole Chateaubriand – Joliot-Curie.**
**A3-05**
**C2-06**

**Question 1** Sur le schéma cinématique, repasser chaque solide d'une couleur différente.

**Question 2** Réaliser la chaîne d'énergie-puissance partielle en définissant les noms des transmetteurs et les grandeurs d'entrée et de sortie cinématiques.

**Question 3** Définir la loi entrée-sortie entre la vitesse de translation du piston 3 et la vitesse de rotation du moteur 1.

**Exercice 313 – Train simple** \* D'après ressources Pole Chateaubriand – Joliot-Curie.

A3-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Définir la loi entrée-sortie entre la vitesse de translation du coulisseau et la vitesse de rotation du moteur.

**Exercice 314 – Treuil de levage** \* D'après ressources Pole Chateaubriand – Joliot-Curie.

A3-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Déterminer la relation entre  $v_{51}$  la vitesse de déplacement de la charge par rapport au bâti et  $\omega_{21}$  la vitesse de rotation du moteur.

**Question 2** On note  $J_2, J_3, J_4$  l'inertie des pièces 2, 3 et 5. On note  $M_5$  la masse du solide 5. Donner la masse équivalente ramenée « à la translation » de la masse. Donner l'inertie équivalente ramenée à l'arbre d'entrée 2.

### 3.5.5 C2-07 – Déterminer les actions mécaniques en statique

**Exercice 315 – Barrière Sympact** \*\*

Pas de corrigé pour cet exercice.

On néglige la pesanteur sur la pièce 1.

On note  $\{\mathcal{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$  l'action mécanique du moteur sur la pièce 1.

On note  $\{\mathcal{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_r \vec{k}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$  l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce 2. Le raideur du ressort est telle qu'il exerce un couple de 45 Nm pour un angle de rotation 100°. On considère que le couple est nul lorsque la pièce 2 est à la verticale ( $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$ ). Il est au maximum lorsque  $\varphi_f = 0$ .

On note  $\{\mathcal{F}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall G}$  avec  $\overrightarrow{AG} = L \vec{i}_2$ .

**Question 1** Réaliser un graphe d'analyse.

**Question 2** Expliciter  $C_r$  en fonction des différents constantes ( $k, \varphi_o, \varphi_f$ ) et celles qui vous sembleraient utile.

**Question 3** Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.

**Question 4** Mettre en œuvre une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.

**Question 5** Tracer une courbe Python.

**Exercice 316 – Suspension automobile** \*\*

C2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** En isolant l'ensemble {pneumatique + jante + axe de roue}, écrire les équations issues du principe fondamental de la statique appliquée au point C, en projection sur les axes de la base ( $\vec{a}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{x}$ ) en fonction des composantes  $F_{sol}^a$  et  $F_{sol}^r$  et des dimensions  $d_0$ ,  $d_3$  et  $d_4$ .

**Question 2** Résoudre littéralement le système.

### Exercice 317 – Suspension automobile \*\*

C2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Réaliser le graphe de structure de l'ensemble en précisant les liaisons.

**Question 2** Quel est l'ensemble  $\Sigma$  à isoler afin de déterminer le couple  $C_{12}$ .

**Question 3** Réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures appliquées à  $\Sigma$  et écrire les éléments de réduction de chaque torseur d'actions mécaniques.

**Question 4** Quel théorème doit-être appliqué et sur quel axe de projection, pour déterminer le couple  $C_{12}$  ?

La configuration correspondant à la position extrême supérieure de la couture orbitale correspond aux angles suivants :  $\theta_{12} = 60^\circ$ ,  $\theta_{13} = -4^\circ$ ,  $\theta_{15} = -90^\circ$ .

Dans la suite de l'étude, l'angle  $\theta_{13}$  sera considéré nul.

**Question 5** Déterminer l'équation littérale du couple  $C_{12}$  en fonction de  $g$ ,  $F$ ,  $P$ ,  $M_2$ ,  $M_{34}$ ,  $M_{E1}$ ,  $L_3$ ,  $L_4$ ,  $L_5$ ,  $L_6$ ,  $L_7$ ,  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{15}$ .

Les valeurs du robot considéré sont :

- $M_2 = 264 \text{ kg}$ ,  $M_{34} = 430 \text{ kg}$ ,  $M_{E1} = 2150 \text{ kg}$ ,  $P = 150 \text{ N}$ ;
- $L_1 = 0,405 \text{ m}$ ,  $L_2 = 0,433 \text{ m}$ ,  $L_3 = 1,075 \text{ m}$ ,  $L_4 = 1,762 \text{ m}$ ,  $L_5 = 0,165 \text{ m}$ ,  $L_6 = 0,250 \text{ m}$ ,  $L_7 = 0,550 \text{ m}$ ,  $L_8 = 0,750 \text{ m}$ .

**Question 6** Déterminer alors la valeur du couple  $C_{12}$ .

La valeur limite supérieure du couple  $C_{12}$  est fixée par le constructeur à 9000 Nm. **Question 7** Le choix du robot permettra-t-il de garantir les conditions d'assemblage dans cette position ? Justifier la réponse.

### Exercice 318 – Pèse camion \*\*

C2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

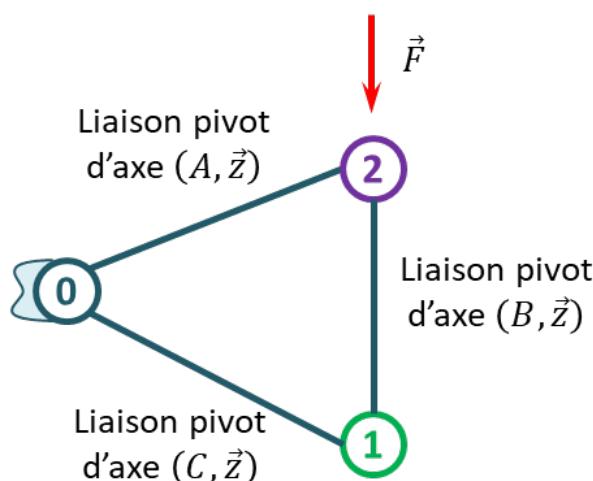
**Question 1** Déterminer la relation entre  $F$  et  $M$ . Que dire de la position du camion sur la plate-forme ?

**Question 2** Déterminer les actions mécaniques dans toutes les liaisons.

### Exercice 319 – Détermination des efforts dans une structure étayée \*\*

C2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).



**Question 2** Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.

Ici, il s'agit de déterminer les actions mécaniques dans toutes les liaisons. Il faudra donc isoler successivement toutes les pièces et réaliser un PFS pour chacune d'entre elles. Cependant, il y a quand même une stratégie d'isolement à avoir : **il faut commencer par isoler les solides soumis à deux glisseurs.** En effet, d'après le PFS, lorsqu'un solide est soumis à deux glisseurs, les deux forces sont de même norme, de même direction (droite passant par le point d'application des deux glisseurs) et de sens opposé.

La stratégie est donc la suivante :

- on isole 1 et on réalise le PFS ;
- on isole 2 et on réalise le PFS en B.

**Question 3** Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de  $F$ .

**On isole 1. On réalise le BAME :**

- $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$  ;
- $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}$ .

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = 0$ .

$$\text{Résolution : } \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = -\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{01} \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_A.$$

**On isole 2. On réalise le BAME :**

- $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{02} \vec{x} + Y_{02} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_{02} \vec{x} + Y_{02} \vec{y} \\ -a Y_{02} \vec{z} \end{array} \right\}_A$  ;
- $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{01} \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_B$  ;
- $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ -Fb \vec{z} \end{array} \right\}_C$ .

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow 2)\} = 0.$$

**Résolution :**

$$\begin{cases} X_{02} + F_{01} \cos \alpha = 0 \\ Y_{02} + F_{01} \sin \alpha - F = 0 \\ -a Y_{02} - Fb = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{02} = -F_{01} \cos \alpha = -F \frac{a+b}{a \tan \alpha} \\ F_{01} = \frac{F - Y_{02}}{\sin \alpha} = F \frac{a+b}{a \sin \alpha} \\ Y_{02} = -\frac{b}{a} F \end{cases}$$

### 3.5.6 Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.

#### Exercice 320 – Mouvement T – \*

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Exprimer le torseur cinétique  $\{\mathcal{C}(1/0)\}$  en B.

**Question 2** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en B puis en A.

#### Exercice 321 – Mouvement R \*

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Méthode 1 – Déplacement du torseur dynamique**

**Question 1** Exprimer le torseur cinétique  $\{\mathcal{C}(1/0)\}$  en B.

**Question 2** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en B puis en A.

**Méthode 2 – Calcul en A**

**Question 3** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en B puis en A.

#### Masse ponctuelle

On fait maintenant l'hypothèse que la masse est ponctuelle et concentrée en B.

**Question 4** Exprimer le torseur cinétique  $\{\mathcal{C}(1/0)\}$  en B.

**Question 5** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en B puis en A.

#### Exercice 322 – Mouvement TT – \*

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Exprimer les torseurs cinétiques  $\{\mathcal{C}(1/0)\}$  et  $\{\mathcal{C}(2/0)\}$ .

**Question 2** Exprimer les torseurs dynamiques  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  et  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$  en B.

**Question 3** En déduire  $\{\mathcal{D}(1+2/0)\}$  en B.

#### Exercice 323 – Mouvement RR \*

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en A.

**Question 2** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$  en B.

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

#### Exercice 324 – Mouvement RT \*

C2-08

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en A.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

#### Exercice 325 – Mouvement RT \*

C2-08

C2-09

**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$  en B.

**Expression de la résultante dynamique**  $\overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2, 2/0)} = m_2 \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R \frac{d}{dt} [\dot{\theta} \overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R (\ddot{\theta} \overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_2}).$

#### Méthode 1 : Calcul en $G_2 = C$ puis déplacement du torseur dynamique

- Calcul du moment cinétique en  $G_2 : G_2 = C$  est le centre de gravité donc  $\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)} = I_C(2) \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} = C_1 \dot{\theta} \overrightarrow{k_1}$ .
- Calcul du moment dynamique en  $G_2 : G_2 = C$  est le centre de gravité donc  $\overrightarrow{\delta(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{\sigma(C, 2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = C_1 \ddot{\theta} \overrightarrow{k_1} + R \overrightarrow{i_2} \wedge (\ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R (\ddot{\theta} \overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_2}))$
- Calcul du moment dynamique en B :  $\overrightarrow{\delta(B, 2/0)} = \overrightarrow{\delta(C, 2/0)} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R_d(2/0)} = C_1 \ddot{\theta} \overrightarrow{k_1} + R \overrightarrow{i_2} \wedge (\ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R (\ddot{\theta} \overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_2})) = C_1 \ddot{\theta} \overrightarrow{k_1} + R (-\sin \theta \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{k_0} + R \ddot{\theta} \overrightarrow{k_2})$ .

Au final, on a donc  $\{\mathcal{D}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 (\ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R (\ddot{\theta} \overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_2})) \\ C_1 \ddot{\theta} \overrightarrow{k_1} + R (-\sin \theta \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{k_0} + R \ddot{\theta} \overrightarrow{k_2}) \end{array} \right\}_B$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} \cdot \overrightarrow{i_0}$

On a  $\overrightarrow{R_d(1+2/0)} = \overrightarrow{R_d(1/0)} + \overrightarrow{R_d(2/0)} = m_1 \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + m_2 (\ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R(\dot{\theta} \overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_2}))$ . On projette alors sur  $\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{R_d(1+2/0)}$ :  
 $\overrightarrow{i_0} = m_1 \ddot{\lambda}(t) + m_2 (\ddot{\lambda}(t) - R(\dot{\theta} \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2 \cos \theta))$ .

### Exercice 326 – Mouvement RR 3D \*\*

**C2-08**
**C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}$  en B.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

### Exercice 327 – Mouvement RR 3D \*\*

**C2-08**
**C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Question 1** Exprimer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(2/0)\}$  en B.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(A, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{j_0}$

### Exercice 328 – Mouvement RT – RSG \*\*

**C2-08**
**C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{i_1}$

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\delta(I, 1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

### Exercice 329 – Banc Balafre \*

**C2-08 Pas de corrigé pour cet exercice.**

#### Données et hypothèses

- On note  $\overrightarrow{BM} = z \overrightarrow{z_0} + R_J \overrightarrow{u}(\theta)$  où  $R_J$  est le rayon du joint avec  $R_J = 175 \text{ mm}$ ;
- la longueur du joint est  $L_J = 150 \text{ mm}$ . La position du point B, centre du joint est  $\overrightarrow{OB} = z_B \overrightarrow{z_0}$  avec  $z_B = 425 \text{ mm}$ ;
- Le coeur de butée a une masse  $M_{CB} = 40 \text{ kg}$  et la position de son centre d'inertie  $G_{CB}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB} \overrightarrow{z_0}$  avec  $L_{CB} = 193 \text{ mm}$ ;
- L'ensemble  $JR = \{\text{Joint(rotor)+ Butée double}\}$  a une masse  $M_{JR} = 100 \text{ kg}$  et la position de son centre d'inertie

$$G_{JR} \text{ est paramétrée par } \overrightarrow{OG_{JR}} = L_{JR} \overrightarrow{z_0} \text{ avec } L_{JR} = 390 \text{ mm}. \text{ On notera } I_{G_{JR}}(JR) = \begin{pmatrix} A_{JR} & -F_{JR} & -E_{JR} \\ -F_{JR} & B_{JR} & -D_{JR} \\ -E_{JR} & -D_{JR} & C_{JR} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{JR}}$$

la matrice d'inertie de l'ensemble  $JR$  au point  $G_{JR}$  exprimée dans une base  $\mathcal{B}_{JR} = (\overrightarrow{x_{JR}}, \overrightarrow{y_{JR}}, \overrightarrow{z_0})$  liée à  $JR$ ;

- Les positions des points  $A_4$  et  $A_8$  sont paramétrées par  $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \overrightarrow{z_0} - R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  et  $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  avec  $z_4 = 280 \text{ mm}$  et  $R_{CB} = 150 \text{ mm}$ .

Pour simplifier l'étude, on s'intéresse au mouvement généré uniquement dans le plan  $(y_0, \overrightarrow{z_0})$ , lorsque les actionneurs 4 et 8 sont commandés en phase, et en opposition de phase avec les actionneurs 2 et 6. Pendant ce mouvement, les actionneurs 1, 3, 5 et 7 sont laissés libres. On considérera donc qu'ils n'ont aucune action sur le coeur de butée.

**Question 1** Décrire la nature du mouvement obtenu pour le coeur de butée CB par rapport au bâti 0 dans ces conditions.

Les actionneurs sont utilisés uniquement pendant les phases de mesure. L'ensemble  $JR$  a donc un mouvement de rotation uniforme par rapport au coeur de butée. On donne les torseurs cinématiques (exprimés dans le repère lié au bâti  $(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ ):  $\{\mathcal{V}(JR/CB)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(JR/CB)} = \Omega \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_{JR}}$  avec  $\Omega$  constante.  $\{\mathcal{V}(CB/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ v(t) \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{G_{CB}}$ .

La fonction  $v(t)$  représente la vitesse de translation du coeur de butée par rapport au bâti. On peut donc relier  $v(t)$  aux déplacements  $y(t) = y_4(t) = y_8(t)$  provoqués en  $A_4$  et  $A_8$  par les actionneurs 4 et 8. On isole l'ensemble  $S = \{JR + CB\}$  afin de quantifier les efforts dans les actionneurs.

**Question 2** Exprimer  $v(t)$  en fonction de  $y(t)$ .

**Question 3** Déterminer l'expression en  $G_{CB}$  du torseur dynamique de CB par rapport au bâti 0 (fixé au sol et donc considéré comme un référentiel galiléen).

**Question 4** Déterminer l'expression en  $G_{JR}$  du torseur dynamique de  $JR$  par rapport au bâti 0 (fixé au sol et donc considéré comme un référentiel galiléen).

**Question 5** Exprimer alors en  $G$  le torseur dynamique de l'ensemble  $S$  par rapport à 0 en fonction de  $\dot{v}(t)$ ,  $M_{CB}$  et  $M_{JR}$ .

### 3.5.7 Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.

#### Exercice 330 – Banc Balafre \*

**C2-08** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Données et hypothèses**

- On note  $\overrightarrow{BM} = z \overrightarrow{z_0} + R_J \overrightarrow{u}(\theta)$  où  $R_J$  est le rayon du joint avec  $R_J = 175 \text{ mm}$ ;
- la longueur du joint est  $L_J = 150 \text{ mm}$ . La position du point  $B$ , centre du joint est  $\overrightarrow{OB} = z_B \overrightarrow{z_0}$  avec  $z_B = 425 \text{ mm}$ ;
- Le coeur de butée a une masse  $M_{CB} = 40 \text{ kg}$  et la position de son centre d'inertie  $G_{CB}$  est paramétrée par  $\overrightarrow{OG_{CB}} = L_{CB} \overrightarrow{z_0}$  avec  $L_{CB} = 193 \text{ mm}$ ;
- L'ensemble  $JR = \{\text{Joint(rotor)+ Butée double}\}$  a une masse  $M_{JR} = 100 \text{ kg}$  et la position de son centre d'inertie

$$G_{JR} \text{ est paramétrée par } \overrightarrow{OG_{JR}} = L_{JR} \overrightarrow{z_0} \text{ avec } L_{JR} = 390 \text{ mm. On notera } I_{G_{JR}}(JR) = \begin{pmatrix} A_{JR} & -F_{JR} & -E_{JR} \\ -F_{JR} & B_{JR} & -D_{JR} \\ -E_{JR} & -D_{JR} & C_{JR} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_{JR}}$$

la matrice d'inertie de l'ensemble  $JR$  au point  $G_{JR}$  exprimée dans une base  $\mathcal{B}_{JR} = (\overrightarrow{x_{JR}}, \overrightarrow{y_{JR}}, \overrightarrow{z_0})$  liée à  $JR$ ;

- Les positions des points  $A_4$  et  $A_8$  sont paramétrées par  $\overrightarrow{OA_4} = z_4 \overrightarrow{z_0} - R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  et  $\overrightarrow{OA_8} = -R_{CB} \overrightarrow{y_0}$  avec  $z_4 = 280 \text{ mm}$  et  $R_{CB} = 150 \text{ mm}$ .

Pour simplifier l'étude, on s'intéresse au mouvement généré uniquement dans le plan  $(y_0, \overrightarrow{z_0})$ , lorsque les actionneurs 4 et 8 sont commandés en phase, et en opposition de phase avec les actionneurs 2 et 6. Pendant ce mouvement, les actionneurs 1, 3, 5 et 7 sont laissés libres. On considérera donc qu'ils n'ont aucune action sur le coeur de butée.

**Question 1** Décrire la nature du mouvement obtenu pour le coeur de butée  $CB$  par rapport au bâti 0 dans ces conditions.

Les actionneurs sont utilisés uniquement pendant les phases de mesure. L'ensemble  $JR$  a donc un mouvement de rotation uniforme par rapport au coeur de butée. On donne les torseurs cinématiques (exprimés dans le repère lié au bâti  $(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ ) :  $\{\mathcal{V}(JR/CB)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(JR/CB)} = \Omega \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_{JR}}$  avec  $\Omega$  constante.  $\{\mathcal{V}(CB/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ v(t) \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{G_{CB}}$ .

La fonction  $v(t)$  représente la vitesse de translation du coeur de butée par rapport au bâti. On peut donc relier  $v(t)$  aux déplacements  $y(t) = y_4(t) = y_8(t)$  provoqués en  $A_4$  et  $A_8$  par les actionneurs 4 et 8. On isole l'ensemble  $S = \{JR + CB\}$  afin de quantifier les efforts dans les actionneurs.

On considérera l'expression suivante pour le torseur dynamique de  $S$  par rapport à 0 :  $\{\mathcal{D}(S/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} M \dot{v} \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_{CB}}$  où  $M = 140 \text{ kg}$ .

**Question 2** Exprimer le torseur  $\{T_{V \rightarrow CB}\}$  (actionneurs 2 et 4 sur  $CB$ ) au point  $A_4$  en fonction de  $F_V$  et le torseur  $\{T_{R \rightarrow CB}\}$  (actionneurs 6 et 8 sur  $CB$ ) au point  $A_8$  en fonction de  $F_R$ .

**Question 3** En expliquant clairement chaque étape de la démarche utilisée, montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_V = M \frac{z_G}{z_4} \dot{v}(t) + 2p(t)R_J L_J \frac{z_B}{z_4} \\ F_R = M \left(1 - \frac{z_G}{z_4}\right) \dot{v}(t) + 2p(t)R_J L_J \left(1 - \frac{z_B}{z_4}\right) \end{array} \right.$$

**Question 4** En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer les actionneurs les plus sollicités par le mouvement en phase : actionneurs du plan avant (2 et 4) ou du plan arrière (6 et 8).

### 3.5.8 Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus – Lois de mouvement 1D

#### Exercice 331 – Mouvement T – \*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Les performances dynamiques de l'axe demandées sont les suivantes :

- vitesse linéaire maximale :  $50 \text{ m min}^{-1}$ ;
- accélération linéaire maximale :  $9,8 \text{ ms}^{-2}$ .

**Objectif** L'objectif de ce travail est de déterminer les caractéristiques du moteur (vitesse et couple) permettant d'atteindre ces performances.

**Question 1** Quelle est la vitesse maximale que l'axe peut atteindre en  $\text{m s}^{-1}$ ?

**Correction**  $V = 0,83 \text{ ms}^{-1}$

**Question 2** Combien de temps l'axe met-il pour atteindre la vitesse maximale?

**Correction**  $T_a = 0,83/9,8 = 0,08 \text{ s}$

Résoudre

**Question 3** Quelle distance l'axe parcourt-il pour atteindre la vitesse maximale?

**Correction**

**Question 4** Quelle est la longueur minimale à commander pour que l'axe puisse atteindre la vitesse maximale?

**Correction**

**Question 5** Proposer une longueur minimale de l'axe pour pouvoir profiter de ses performances dynamiques.

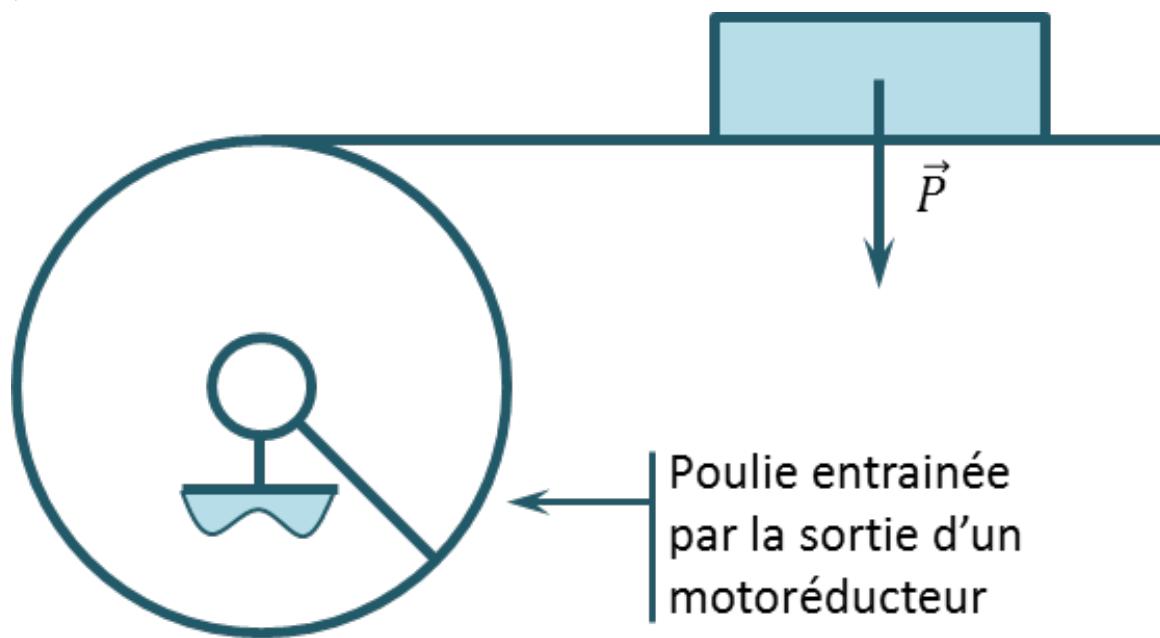
**Correction**

**Question 6** Tracer le profil de la position, de la vitesse et de l'accélération pour parcourir une distance de 50 cm. On cherchera à atteindre les performances maximales de l'axe.

**Correction**

Un motoréducteur permet d'entraîner un système poulie – courroie permettant de déplacer la charge. On considère :

- une charge de masse 1 kg;
- un poulie de rayon 5 cm;
- un réducteur de rapport de transmission 1 : 20.



**Question 7** Déterminer le couple à fournir par la poulie pour déplacer la charge lorsque l'accélération est au maximum.

#### Correction

#### Exercice 332 – Mouvement R \*

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Calculer l'accélération du moteur pendant le démarrage.

**Question 2** Calculer le temps mis pour atteindre la fréquence nominale.

#### Exercice 333 – Barrière Sympact \*

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Donner l'allure des lois d'accélération, vitesse et position angulaires. Vous indiquerez toutes les valeurs utiles (sous forme littérale).

**Question 2** Donner l'expression littérale du temps total.

**Question 3** Donner l'expression littérale de la vitesse angulaire en fin de phase d'accélération.

**Question 4** Donner l'expression littérale de l'angle total parcouru.

**Question 5** Déterminer la durée de l'accélération ainsi que la vitesse angulaire maximale atteinte.

#### Exercice 334 – Automate d'exploration de l'hémostase \*

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Afin de valider le choix des moteurs, on étudie le déplacement sur l'axe  $\overrightarrow{x}$ . On note  $V_x$  la vitesse selon cet axe. On rappelle que la distance maximum à parcourir est  $x_M^{\max} = 550 \text{ mm}$  en 1 seconde. La loi de commande sur chaque axe est définie par un trapèze de vitesse (Figure 3.3) avec les temps d'accélération et de décélération ( $T_a$ ) identiques. De plus, les moteurs se mettent en route et s'arrêtent en même temps.  $T$  est la durée totale du déplacement. Nous allons chercher à optimiser cette loi de commande de sorte que le moteur fournit une puissance instantanée minimale.

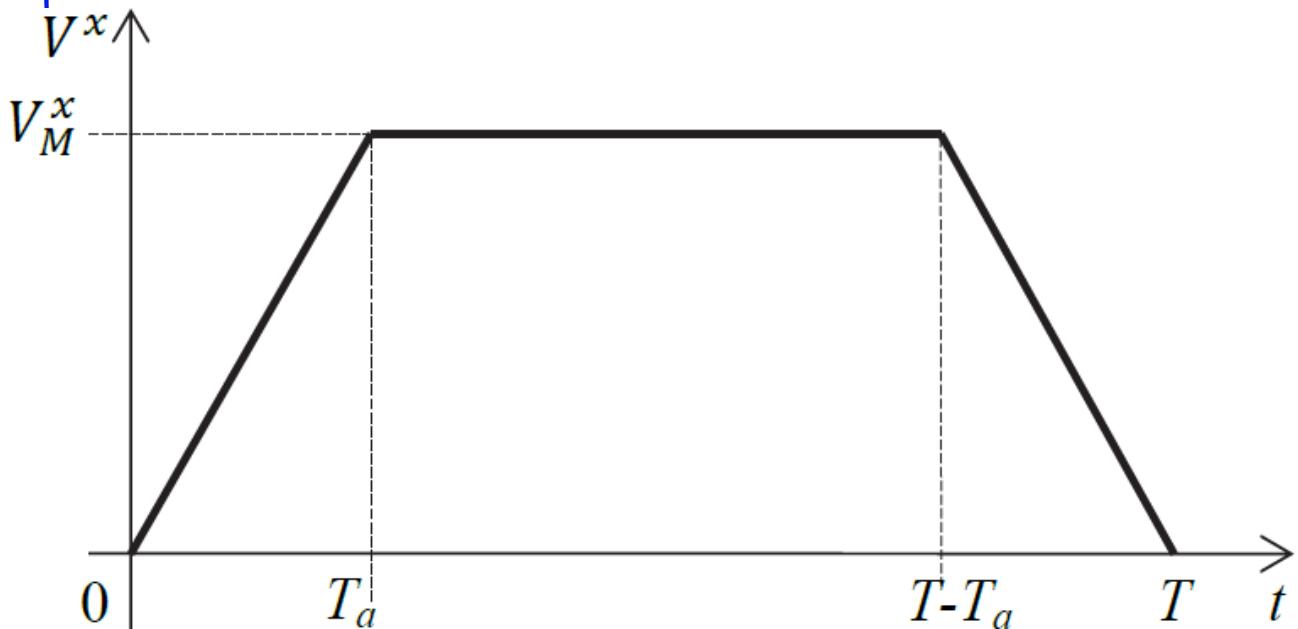


FIGURE 3.2 – Loi de commande de vitesse en trapèze

Résoudre

Le modèle de calcul pour cette commande d'axe est le suivant :

- le mouvement de rotation du moteur (vitesse  $\omega_m^x$ ) est transformé en mouvement de translation (vitesse  $V^x$ );
- le rapport de transmission de la chaîne cinématique est  $\lambda = \frac{V^x}{\omega_m^x}$ ;
- la distance à parcourir est  $x_M^{\max}$ ;
- l'inertie équivalente de l'ensemble des pièces en mouvement ramenée à l'arbre moteur est  $J_e$ ;
- les frottements et la pesanteur sont négligés, il n'y a donc pas de couple résistant.

**Question 1** Exprimer la vitesse maximale  $V_M^x$  en fonction de  $x_M^{\max}$ ,  $T$  et  $T_a$ .

**Question 2** Par application du théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble des pièces en mouvement, exprimer le couple moteur  $C_m$  en fonction de  $V_x$ ,  $T_a$ ,  $J_e$  et  $\lambda$  durant les trois phases du mouvement.

**Question 3** Préciser à quel(s) instant(s)  $t$  la puissance fournie par le moteur est maximale ( $P_{\max}$ )

**Question 4** Exprimer cette puissance  $P_{\max}$  en fonction de  $V_M^x$ ,  $\lambda$ ,  $J_e$ , et  $T_a$ .

**Question 5** Donner alors l'expression de  $P_{\max}$  en fonction de  $x_M^{\max}$ ,  $\lambda$ ,  $J_e$ , et  $T_a$ .

**Question 6** À partir de cette expression, montrer que  $P_{\max}$  est minimale pour un réglage du temps d'accélération  $T_a$  tel que  $T_a = \frac{T}{3}$ .

Pour cette nouvelle commande avec  $T_a = \frac{T}{3}$ , on cherche à valider le choix du moteur en étudiant le déplacement maximum suivant  $\vec{x}$ . Les caractéristiques de la chaîne cinématique sont :

- vitesse maximale du moteur :  $N_{\max}^{\text{mot}} = 4150 \text{ tr min}^{-1}$ ;
- rapport de réduction du réducteur  $k = \frac{1}{10}$ ;
- rayon de poulie  $R_p = 20 \text{ mm}$ .

**Question 7** Déterminer la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\max}^x$  que doit atteindre le moteur. Le choix de celui-ci est-il validé ?

### Exercice 335 – Automate d'exploration de l'hémostase \*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

Le principe de la chronométrie consiste à mesurer la variation de l'amplitude d'oscillation d'une bille placée dans la cuvette de mesure (Figure 3.3).

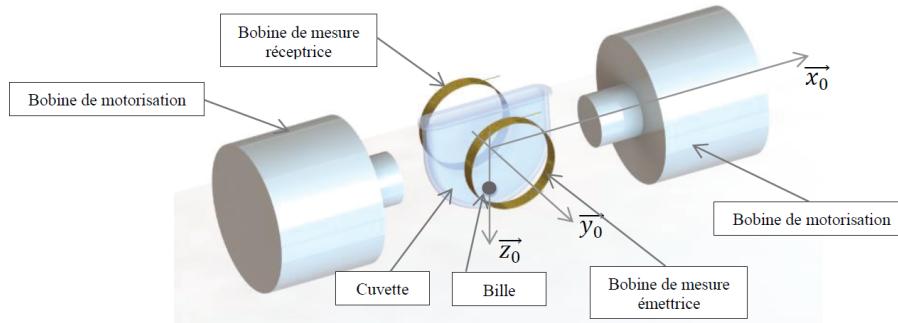


FIGURE 3.3 – Ensemble cuvette + bille avec bobines motrices et bobines de mesure

La bille, roulant sans glisser sur le fond cylindrique de la cuvette, est mise en mouvement par un champ magnétique variable induit par deux bobines motrices placées de part et d'autre de la tête de mesure. L'amplitude des oscillations est mesurée par deux autres bobines, l'une émettrice, l'autre réceptrice. Après amplification du signal mesuré, on obtient un signal quasi-sinusoidal, reflet de l'oscillation de la bille. A viscosité constante, on obtient un balancement pendulaire constant de la bille. Quand la viscosité augmente (phénomène de coagulation), l'amplitude d'oscillation de la bille varie. Pour chaque mesure, le champ magnétique est ajusté en fonction de la viscosité initiale du milieu et du type de test.

Le schéma de calcul est donné Figure 3.4.

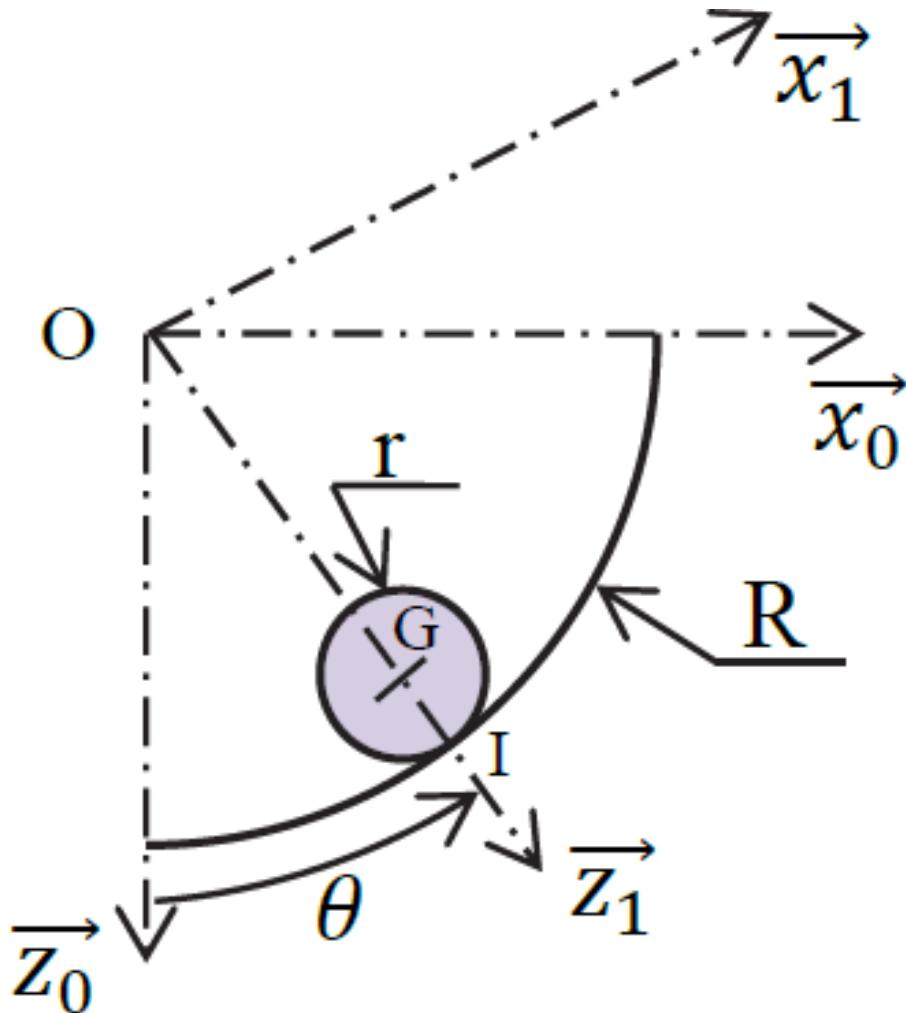


FIGURE 3.4 – Bille en contact avec le rail de la cuvette

Hypothèses :

- la bille de masse  $m$ , de centre de masse  $G$ , de rayon  $r$ , roule sans glisser sur un rail circulaire de rayon  $R$  dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ;
- $I$  est le point de contact entre la bille et le rail circulaire;

- la position de la bille sur le rail est repérée par :  $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ .

On note :

- $\{\mathcal{T}(\text{rail} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{l} -N_I \vec{z}_1 + T_I \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_I$ , le torseur associé à l'action mécanique du rail sur la bille;
- $f$  le coefficient d'adhérence au contact bille/cuvette :  $f = 0,1$ ;
- $\{\mathcal{T}(\text{bob} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(\text{bob} \rightarrow \text{bille}) = F(t) \vec{x}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_G$ , le torseur associé à l'effort résultant des deux bobines de motorisation sur la bille, avec  $F(t) = F_0 \sin(\omega_{\text{bob}}(t))$ ;
- $\{\mathcal{T}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille}) = -f_v V(G, \text{bille}/0) \\ 0 \end{array} \right\}_G$ , le torseur associé à l'action du fluide sur la bille induite par la viscosité. On se place dans l'hypothèse simplificatrice d'un écoulement laminaire pour lequel le modèle de Stokes est applicable : le coefficient de frottement visqueux vaut alors  $f_v = 6\pi r \eta$  où  $\eta$  est la viscosité du sang qui varie lors de la coagulation;
- $\{\mathcal{T}(g \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{l} mg \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_G$ , le torseur associé à l'action de la pesanteur sur la bille;
- $\{\mathcal{V}(\text{bille}/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\text{bille}/0) = \omega_b \vec{y}_0 \\ \vec{V}(G, \text{bille}/0) = v \vec{x}_1 \end{array} \right\}_G$ , le torseur cinématique de la bille par rapport au rail 0;
- $J = \frac{2}{5} m r^2$ , le moment d'inertie de la bille autour de l'axe  $(G, \vec{y}_0)$ ;
- $R = \|\vec{O}\vec{I}\|$ , le rayon du rail,  $r = \|\vec{G}\vec{I}\|$ , le rayon de la bille.

On notera  $F(p)$  la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  où  $p$  représente la variable de Laplace.

**Question 1** En exprimant la condition de roulement sans glissement en  $I$ , déterminer  $\omega_b$  et  $v$ , les composantes du torseur cinématique en  $G$  de la bille par rapport au rail 0, en fonction de  $\dot{\theta}$ ,  $r$  et  $R$ .

**Question 2** En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés : montrer que les efforts normal  $N_I$  et tangentiel  $T_I$  du rail sur la bille sont liés à l'angle  $\theta$  par les équations suivantes :

$$N_I = F(t) \sin \theta + mg \cos \theta + m(R-r)\dot{\theta}^2 \text{ et } T_I = \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}.$$

**Question 3** En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés, montrer que  $\frac{7}{5}m(r-R)\ddot{\theta} + f_v(r-R)\dot{\theta} + mg \sin \theta = F(t) \cos \theta$ .

### 3.5.9 Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus

**Exercice 336 – Mouvement T – \***

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Dans le but d'obtenir la loi de mouvement, appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide 1 en projection sur  $\vec{i}_0$ .

**Exercice 337 – Mouvement R \***

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Dans le but d'obtenir la loi de mouvement, appliquer le théorème du moment dynamique au solide 1 au point A en projection sur  $\vec{k}_0$ .

**Exercice 338 – Mouvement TT – \***

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide 2 en projection sur  $\vec{j}_0$  puis le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble 1+2 en projection sur  $\vec{i}_0$

**Exercice 339 – Mouvement RR \***

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème du moment dynamique au solide 2 au point B en projection sur  $\vec{k}_0$  puis le théorème du moment dynamique à l'ensemble 1+2 au point A en projection sur  $\vec{k}_0$

**Exercice 340 – Mouvement RT \***

**C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide 2 en projection sur  $\vec{i}_1$  puis le théorème du moment dynamique à l'ensemble 1+2 au point A en projection sur  $\vec{k}_0$

**Exercice 341 – Mouvement RT \***
**C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.**

L'objectif est d'obtenir les lois de mouvement.

**Question 1** Appliquer le théorème du moment dynamique au solide 2 au point B en projection sur  $\vec{k}_0$ .

- **On isole 2.**

- **BAME :**

- actions de la liaison pivot  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\}$ ;
- action de la pesanteur  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\}$ . On a  $\overline{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 0)} \cdot \vec{k}_0 = \overline{\mathcal{M}(G_2, 2 \rightarrow 0)} \cdot \vec{k}_0 + (\overline{BG_2} \wedge (-m_2 g \vec{j}_0)) \cdot \vec{k}_0 = (R \vec{i}_2 \wedge (-m_2 g \vec{j}_0)) \cdot \vec{k}_0 = -m_2 g R \vec{i}_0 \cdot \vec{i}_2 = -m_2 g R \cos \theta(t)$ .

- **Théorème :** on applique le théorème du moment dynamique en B au solide 2 en projection sur  $\vec{k}_0 : C_m + \overline{\mathcal{M}(B, \text{pes} \rightarrow 2)} \cdot \vec{k}_0 = \overline{\delta(B, 2/0)} \cdot \vec{k}_0$ . On a  $\overline{\delta(B, 2/0)} \cdot \vec{k}_0 = (C_1 \ddot{\theta} \vec{k}_1 + R(-\sin \theta \ddot{\lambda}(t) \vec{k}_0 + R \ddot{\theta} \vec{k}_2)) \cdot \vec{k}_0 = C_1 \ddot{\theta} + R(-\sin \theta \ddot{\lambda}(t) + R \ddot{\theta})$ . Au final,  $C_m - m_2 g R \cos \theta(t) = C_1 \ddot{\theta} + R(-\sin \theta \ddot{\lambda}(t) + R \ddot{\theta})$ .

**Question 2** Appliquer le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble 1+2 en projection sur  $\vec{i}_0$

- **On isole 1+2.**

- **BAME :**

- actions de la liaison glissière  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$ ;
- action de la pesanteur  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\}$ ;
- action de la pesanteur  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 2)\}$ ;
- action du vérin  $\{\mathcal{T}(\text{ver} \rightarrow 1)\}$ .

- **Théorème :** on applique le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble 1+2 en projection sur  $\vec{i}_0 : R(\text{ver} \rightarrow 1) \cdot \vec{i}_0 = R_d(1+2/0) \cdot \vec{i}_0$ . Au final,  $F_{\text{ver}} = m_1 \ddot{\lambda}(t) + m_2 (\ddot{\lambda}(t) - R(\ddot{\theta} \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2 \cos \theta))$ .

**Exercice 342 – Mouvement RR 3D \*\***
**B2-14**
**C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème du moment dynamique au solide 2 au point A en projection sur  $\vec{i}_1$  puis le théorème du moment dynamique à l'ensemble 1+2 au point A en projection sur  $\vec{k}_0$

**Exercice 343 – Mouvement RR 3D \*\***
**C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.**

**Question 1** Dans le but d'obtenir les lois de mouvement, appliquer le théorème du moment dynamique au solide 2 au point B en projection sur  $\vec{k}_1$  puis le théorème du moment dynamique à l'ensemble 1+2 au point A en projection sur  $\vec{j}_0$

**Exercice 344 – Mouvement RT – RSG \*\***
**C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.**

L'objectif est d'obtenir les lois de mouvement.

**Question 1** Appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide 2 en projection sur  $\vec{i}_1$

**Question 2** Appliquer le théorème du moment dynamique à l'ensemble 1+2 au point I en projection sur  $\vec{k}_0$ .

### 3.5.10 Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus – TEC

**Exercice 345 – Pompe à palettes \***
**C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.**

On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 285.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble **1+2**.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble **1+2**.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1 + 2/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

### Exercice 346 – Pompe à pistons radiaux \*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 286.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble **1+2**.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble **1+2**.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1 + 2/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

### Exercice 347 – Système bielle manivelle \*\*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 287.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble **1+2+3**.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble **1+2+3**.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1 + 2 + 3/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

### Exercice 348 – Pompe oscillante \*

**C2-09**

Pas de corrigé pour cet exercice.

On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 288.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble **1+2+3**.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble **1+2+3**.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1 + 2 + 3/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

**Exercice 349 – Barrière Sympact \***

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 289.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble **1+2**.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble **1+2**.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1 + 2/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

**Exercice 350 – Barrière Sympact avec galet \*\***

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 290.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble **1+2+3**.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble **1+2+3**.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1 + 2 + 3/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

**Exercice 351 – Poussoir \***

**C2-09**

**Pas de corrigé pour cet exercice.**

On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 291.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble **1+2**.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble **1+2**.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c(1 + 2/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

**Exercice 352 – Système 4 barres \*\***

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

On rappelle que la loi entrée sortie est donnée par la relation \*\*\* établie à l'exercice 292.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble **1+2+3**.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble **1+2+3**.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c (1 + 2 + 3/0)$ .

**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

**Exercice 353 – Maxpid \*\*\***

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe d'analyse en indiquant l'ensemble des actions mécaniques agissant sur les différents solides.

**Question 2** Déterminer l'ensemble des puissances intérieures à l'ensemble 1+2+3+4.

**Question 3** Déterminer l'ensemble des puissances extérieures à l'ensemble 1+2+3+4.

**Question 4** Déterminer  $\mathcal{E}_c (1 + 2 + 3 + 4/0)$ .

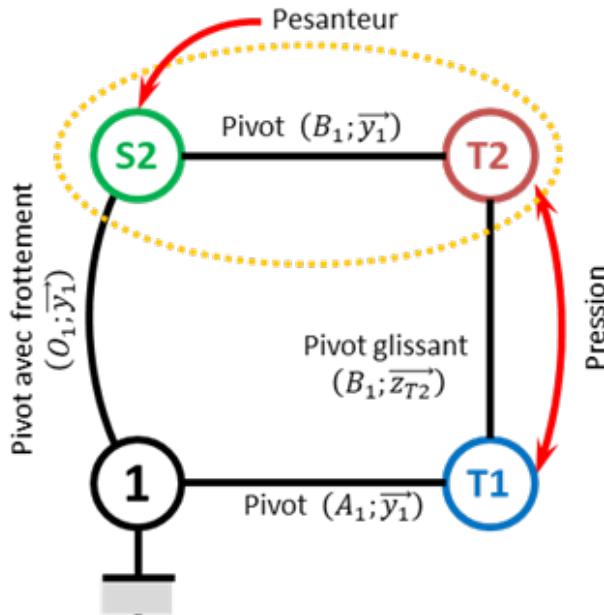
**Question 5** Déterminer la loi de mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

**Exercice 354 – Chariot élévateur de bateaux \*\***

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

Résoudre



**Question 2** En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle  $\alpha$  est petit, montrer que  $a(t)$  et  $p(t)$  sont liés par l'équation différentielle suivante :  $J_{eq}\ddot{a}(t) + \mu\dot{a}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2}g x_{G_{S_2}}$ . Exprimer  $J_{eq}$ .

On isole l'ensemble  $E = \{S_2; T_2, \}$ . On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen :  $\mathcal{P}_{int}(E) + \mathcal{P}(\overline{E} \rightarrow E/R_g) = \frac{d\mathcal{E}_c(E/R_g)}{dt}$ .

**Calcul des puissances externes**

$$\mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 2/R_g) =$$

**Calcul des puissances internes**  $\mathcal{P}_{int}(E) = 0$  car pas de frottement dans la liaison pivot.

**Exercice 355 – Banc Balafre\***

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Exprimer le moment d'inertie  $J_\Sigma$  en fonction des données fournies et calculer sa valeur numérique.

**Question 2** Exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble  $\Sigma$  par rapport au bâti (noté 0) du banc (fixé au sol).

**Question 3** Exprimer la puissance des actions mécaniques extérieures sur  $\Sigma$  dans le mouvement de  $\Sigma$  par rapport à 0.

**Question 4** Exprimer la puissance perdue  $P_{pertes}$  dans les roulements à billes et dans la butée hydrostatique.

**Question 5** Exprimer le théorème de l'énergie cinétique appliqué au mouvement de  $\Sigma$  par rapport à 0. En déduire l'expression de  $\frac{d\Omega}{dt}$  en fonction de  $C_m$ ,  $C_{res}$ ,  $\eta_r$ ,  $\eta_r$  et  $J_\Sigma$ .

**Question 6** En explicitant clairement les hypothèses utilisées, expliquer pourquoi l'accélération peut être considérée constante pendant la mise en mouvement de la ligne d'arbre.

**Question 7** Déterminer la valeur minimale d'accélération  $\alpha_{min}$  compatible avec le tableau des exigences 2.

**Question 8** En déduire la valeur de couple moteur nécessaire pendant cette phase d'accélération.

**Question 9** Déterminer alors la valeur de  $C_m$  pour le scénario le plus défavorable.

### 3.6 C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique