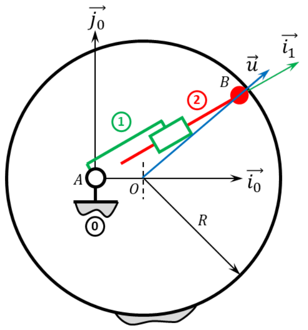
1 Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

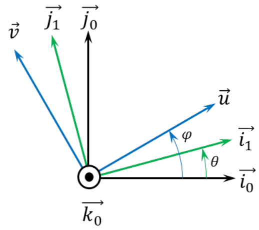
1.1 Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques

Exercice 1 – Pompe à piston radial ⋆

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AO} = e\,\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_1}$. De plus $e = 10\,\text{mm}$ et $R = 20\,\text{mm}$. Le contact entre **0** et **2** en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).





Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 4 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

On prendra une section de piston **2** de $1\,\text{cm}^2$ et une fréquence de rotation de $\dot{\theta}(t) = 2\pi\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. **Question 5** *Exprimer le débit instantané de la pompe.*

Question 6 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ et $e = 15\,\text{mm}$.*

Question 7 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ pour une pompe à 5 pistons (5 branches **1+2**).*

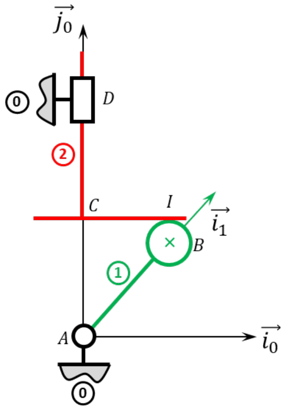
Indications (à vérifier...) :
1. .
2. $\lambda(t) = e\cos\theta(t) \pm \sqrt{e^2\cos^2\theta(t) - e^2 + R^2}$.
3. .
4. $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$.
5. .

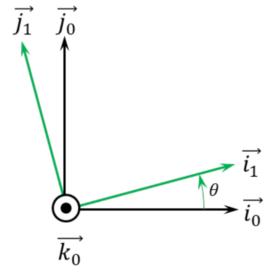
Corrigé voir 12.

Exercice 2 – Pompe à piston axial ⋆

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = e\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BI} = R\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t)\,\overrightarrow{j_0}$. De plus, $e = 10\,\text{mm}$ et $R = 20\,\text{mm}$. Le contact entre **1** et **2** en B est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre **0** et **2**.





Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*
Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*
Question 3 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*
Question 4 *On note S la section du piston **2**. Exprimer le débit instantané de la pompe.*
Question 5 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ et $R = 10\,\text{mm}$ ainsi que pour $e = 20\,\text{mm}$ et $R = 5\,\text{mm}$. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, la section du piston est donnée par $S = 1\,\text{cm}^2$.*

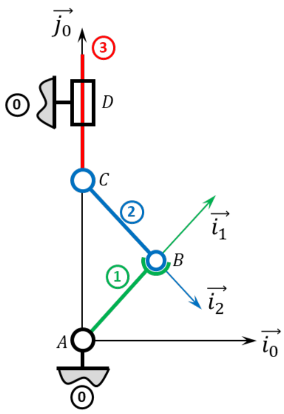
Indications :
1. .
2. $e\sin\theta + R - \lambda(t) = 0$.
3. $\dot{\lambda}(t) = e\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$.
4. $q(t) = eS\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$.
5. .

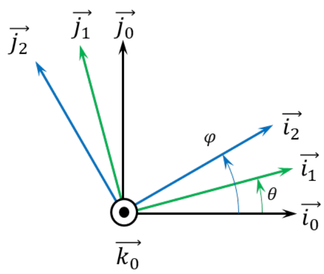
Corrigé voir 13.

Exercice 3 – Système bielle manivelle ⋆⋆

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\,\overrightarrow{i_1}$, $\overrightarrow{CB} = L\,\overrightarrow{i_2}$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t)\,\overrightarrow{j_0}$.





Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*
Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*
Question 3 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*
Question 4 *En utilisant Python, tracer la vitesse du piston en fonction du temps. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, on prendra $R = 10\,\text{mm}$ et $L = 20\,\text{mm}$ puis $L = 30\,\text{mm}$.*

Question 5 *En utilisant Python, tracer l'accélération du piston en fonction du temps en utilisant les mêmes valeurs que dans la question précédente. On utilisera une dérivation numérique.*

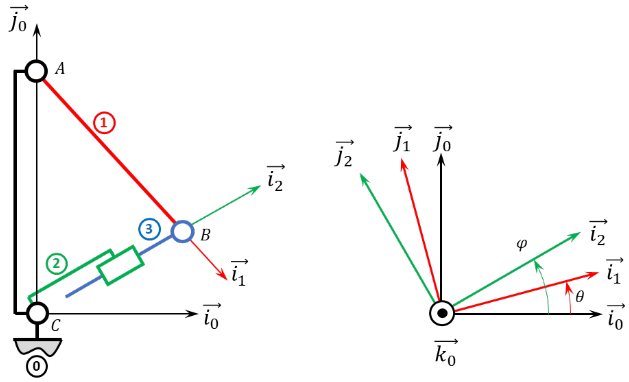
Indications :
1. .
2. $\lambda(t)=\pm\sqrt{L^2-R^2\cos^2\theta(t)}+R\sin\theta(t)$.
3. $\dot\lambda(t)=\pm\left(\dfrac{R^2\dot\theta(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{L^2-R^2\cos^2\theta(t)}}\right)+\dot\theta(t)R\cos\theta(t)$.
4. .
5. .

Corrigé voir 14.

Exercice 4 – Pompe oscillante ⋆

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB}=R\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{CA}=H\,\overrightarrow{j_0}$. De plus, $R=40$ mm et $H=60$ mm. Par ailleurs, on note $\overrightarrow{CB}=\lambda(t)\,\overrightarrow{i_2}$.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot\lambda(t)$ en fonction de $\dot\theta(t)$.*

Question 4 *Exprimer le débit instantané de la pompe.*

Question 5 *En utilisant Python, donner le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour un piston de diamètre $D=10$ mm.*

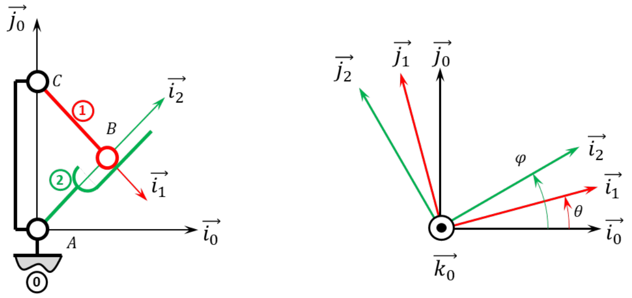
Indications :
1. .
2. $\lambda(t)=\pm\sqrt{R^2+H^2+2HR\sin\theta(t)}$
3. $\dot\lambda(t)=\dfrac{1}{2}\left(-2HR\dot\theta(t)\cos\theta(t)\right)\left(R^2+H^2+2HR\sin\theta(t)\right)^{-\frac{1}{2}}$
4. $q(t)=S\dot\lambda(t)$
5. .

Corrigé voir 15.

Exercice 5 – Barrière Sympact ⋆

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC}=H\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB}=R\,\overrightarrow{i_1}$. De plus, $H=120$ mm et $R=40$ mm.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot\varphi(t)$ en fonction de $\dot\theta(t)$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot\varphi(t)$ en fonction de $\dot\theta(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Indications :
1. .
2. $\tan\varphi(t)=\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}$.
3. $\dot\varphi(t)=\dfrac{R\dot\theta(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2+h^2+2Rh\sin\theta(t)}$.
4. .

Corrigé voir 16.

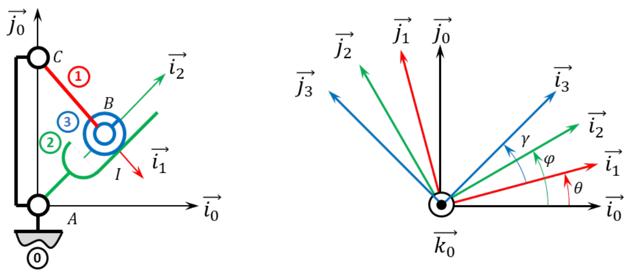
Exercice 6 – Barrière Sympact avec galet ⋆⋆

B2-13

C2-05

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC}=H\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB}=R\,\overrightarrow{i_1}$. De plus, $H=120$ mm et $R=40$ mm.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot\varphi(t)$ en fonction de $\dot\theta(t)$.*

Question 4 *En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer $\gamma(t)$ et $\dot\gamma(t)$.*

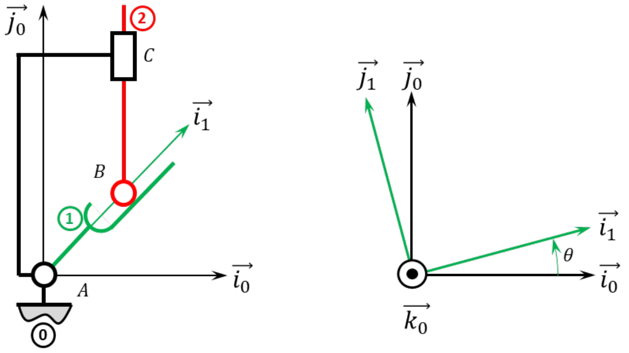
Question 5 *En utilisant Python, tracer $\dot\varphi(t)$ en fonction de $\dot\theta(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Corrigé voir 17.

Exercice 7 – Poussoir ⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC}=L\,\overrightarrow{i_0}+H\,\overrightarrow{j_0}$, $\overrightarrow{AB}=\lambda(t)\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BC}=\mu(t)\,\overrightarrow{j_0}$. De plus, $H=120$ mm, $L=40$ mm.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*
Question 2 *Exprimer $\mu(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*
Question 3 *Exprimer $\dot{\mu}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*
Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\mu}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

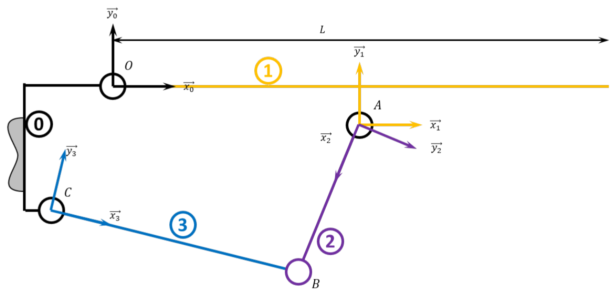
Corrigé voir 18.

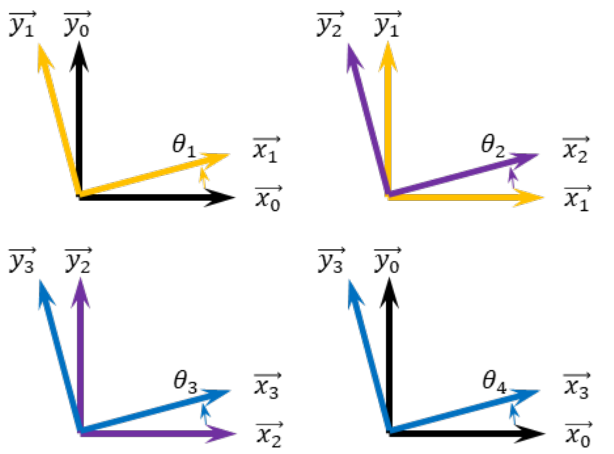
Exercice 8 – Système 4 barres ⋆⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

On a :

- $\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{x_1} - f\overrightarrow{y_1}$ avec $a = 355$ mm et $f = 13$ mm ;
- $\overrightarrow{AB} = b\overrightarrow{x_2}$ avec $b = 280$ mm ;
- $\overrightarrow{BC} = -c\overrightarrow{x_3}$ avec $c = 280$ mm ;
- $\overrightarrow{OC} = -d\overrightarrow{x_0} - e\overrightarrow{y_0}$ avec $d = 89{,}5$ mm et $e = 160$ mm ;





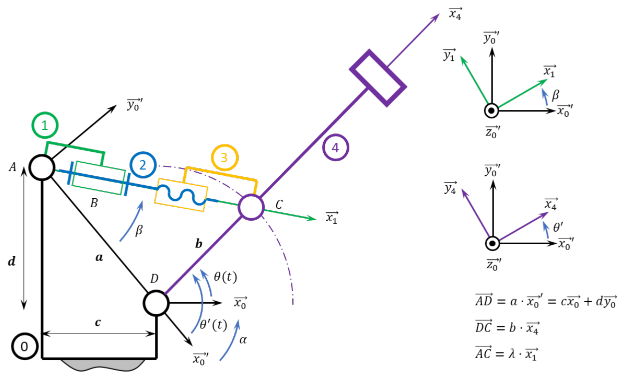
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*
Question 2 *Exprimer $\theta_1(t)$ en fonction de $\theta_4(t)$.*
Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$.*
Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Corrigé voir 19.

Exercice 9 – Maxpid ⋆⋆⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs $a = 107{,}1$ mm, $b = 80$ mm, $c = 70$ mm, $d = 80$ mm. Le pas de la vis est de 4 mm.

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*
Question 2 *Exprimer $\theta(t)$ en fonction de $\lambda(t)$.*
Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\dot{\lambda}(t)$.*
Question 4 *Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$, vitesse de rotation du rotor moteur **2** par rapport au stator **1**.*
Question 5 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **2** par rapport à **1** est de 500 tours par minute.*

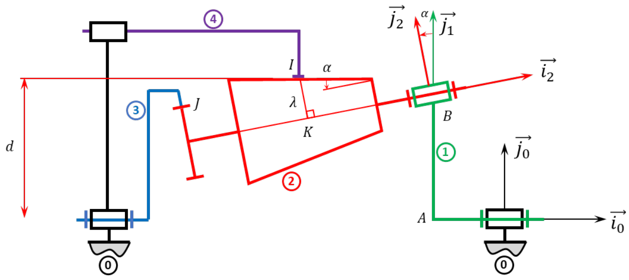
Corrigé voir 20.

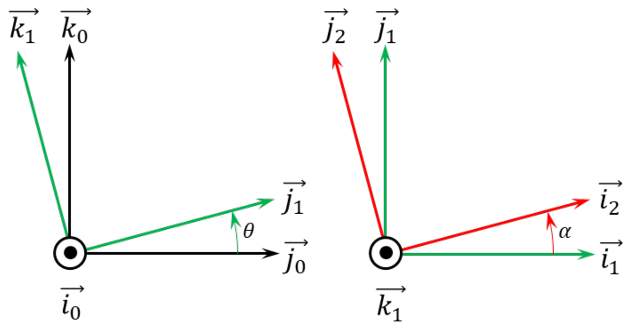
Exercice 10 – Variateur de Graham [1] ⋆⋆⋆

D'après ressources de Michel Huguet.

B2-13
C2-05
C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le schéma suivant.





1. Les éventuelles erreur de texte font partie intégrante de la difficulté :).

Modéliser

On note $\overrightarrow{AJ} = -L\,\overrightarrow{i_0} + \dfrac{d_3}{2}\overrightarrow{j_2}$ et $\overrightarrow{KJ} = -\ell\,\overrightarrow{i_2} + \dfrac{d_2}{2}\overrightarrow{j_2}$.

Soit $\mathcal{R} = \left(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$ un repère lié au bâti **0** du variateur. L'arbre moteur **1** et l'arbre récepteur **3** ont une liaison pivot d'axe $\left(A, \overrightarrow{i_0}\right)$ avec le bâti **0**. On pose $\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \omega_1\,\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \omega_3\,\overrightarrow{i_0}$.

Soit $\mathcal{R}_1 = \left(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$ et $\mathcal{R}_2 = \left(B; \overrightarrow{i_2}, \overrightarrow{j_2}, \overrightarrow{k_1}\right)$ deux repères liés respectivement à **1** et **2** tels que $\overrightarrow{AB}$ ait même direction que $\overrightarrow{j_1}$. On pose $\alpha = \left(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{i_2}\right)$ constant.

Le satellite **2** a une liaison pivot d'axe $\left(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{i_2}\right)$ avec **1**. **2** est un tronc de cône de révolution d'axe $\left(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{i_2}\right)$ de demi angle au sommet α. On pose $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \omega\,\overrightarrow{i_2}$.

La génératrice de **2** du plan $\left(O, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_1}\right)$ la plus éloignée de l'axe $\left(O, \overrightarrow{i_0}\right)$ est parallèle à $\overrightarrow{i_0}$. Notons d sa distance à l'axe $\left(O, \overrightarrow{i_0}\right)$

2 roule sans glisser au point I, sur une couronne **4**, immobile par rapport à **0** pendant le fonctionnement. Le réglage du rapport de variation s'obtient en déplaçant **4** suivant l'axe $\left(O, \overrightarrow{i_0}\right)$.

Soit K le centre de la section droite du tronc de cône passant par I. On pose $\overrightarrow{BI} = \lambda\,\overrightarrow{j_2}$. À l'extrémité de **2** est fixée une roue dentée de n dents, d'axe $\left(B, \overrightarrow{i_2}\right)$, qui engrène avec une couronne dentée intérieure d'axe $\left(A, \overrightarrow{i_0}\right)$, de n_2 dents, liée à **3**.

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *En exprimant que **2** roule sans glisser sur **4** au point I, déterminer ω en fonction de ω_1, d et λ.*

Question 3 *Quelle relation obtient-on entre ω_1, ω_3 et ω en exprimant l'engrènement des deux roues dentées ? (c'est à dire que **2** et **3** roulent sans glisser l'un sur l'autre en J).*

Question 4 *En déduire le rapport de variation $\dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ, d_2, d_3 et d.*

Question 5 *Tracer la courbe représentative du rapport de variation $\dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ, sachant que $\dfrac{n}{n_3} = \dfrac{d_1}{d_3}$, $d = 55\,\text{mm}$ et que λ varie entre $\lambda_{mini} = 12\,\text{mm}$ et la valeur $\lambda_{maxi} = 23\,\text{mm}$.*

Corrigé voir 22.

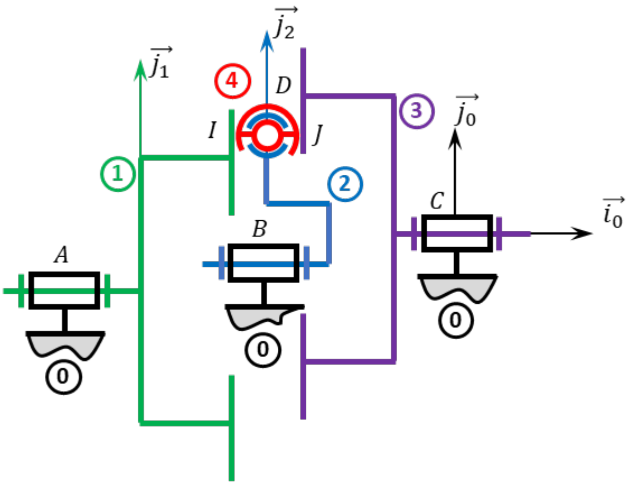
Exercice 11 – Variateur à billes ★★★★★★

B2-13

C2-05

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le schéma suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer la loi entrée – sortie.*

Corrigé voir 22.

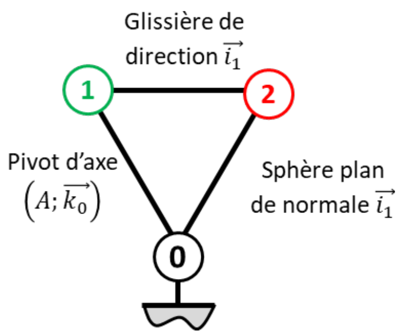
2 Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

2.1 Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques

Exercice 12 – Pompe à piston radial ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

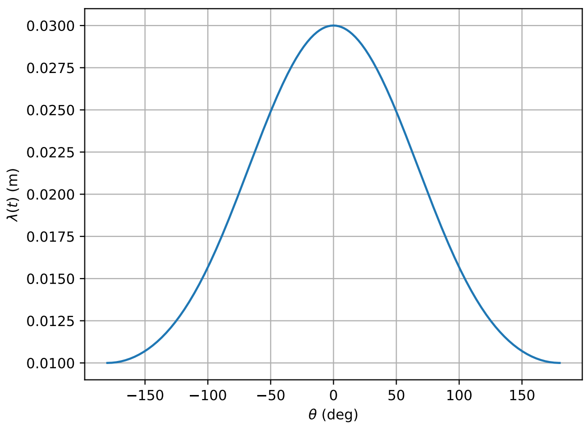
On a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{0}$ soit $-e\,\overrightarrow{i_0}+\lambda\,\overrightarrow{i_1}-R\,\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow -e\,\overrightarrow{i_0}+\lambda(t)\cos\theta(t)\,\overrightarrow{i_0}+\lambda(t)\sin\theta(t)\,\overrightarrow{j_0}-R\cos\varphi(t)\,\overrightarrow{i_0}-R\sin\varphi(t)\,\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

En projetant les expressions sur $\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{j_0}$, on a : $\left\{\begin{array}{l} -e+\lambda(t)\cos\theta(t)-R\cos\varphi(t)=0 \\ \lambda(t)\sin\theta(t)-R\sin\varphi(t)=0 \end{array}\right.$

On cherche à supprimer $\varphi(t)$; donc
$\left\{\begin{array}{l} -e+\lambda(t)\cos\theta(t)=R\cos\varphi(t) \\ \lambda(t)\sin\theta(t)=R\sin\varphi(t) \end{array}\right.$.

En élevant au carré les expressions et en sommant, on obtient $R^2=(-e+\lambda(t)\cos\theta(t))^2+\lambda(t)^2\sin^2\theta(t) \Rightarrow R^2=(-e+\lambda(t)\cos\theta(t))^2+\lambda(t)^2\sin^2\theta(t)$
$\Rightarrow R^2=e^2-2e\lambda(t)\cos\theta(t)+\lambda(t)^2$.
Résolution de l'équation : $\lambda(t)^2-2e\lambda(t)\cos\theta(t)+e^2-R^2=0$.
On a $\Delta=(-2e\cos\theta(t))^2-4\left(e^2-R^2\right)=4e^2\cos^2\theta(t)-4e^2+4R^2$.
On a donc
$\lambda(t)=\dfrac{2e\cos\theta(t)\pm\sqrt{4e^2\cos^2\theta(t)-4e^2+4R^2}}{2}$
$=e\cos\theta(t)\pm\sqrt{e^2\cos^2\theta(t)-e^2+R^2}$

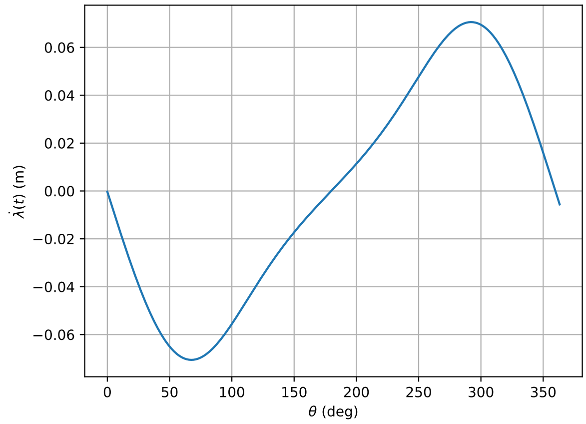
Question 3 *En utilisant Python, tracer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.* On garde la solution positive et obtient la courbe suivante.



Question 4 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

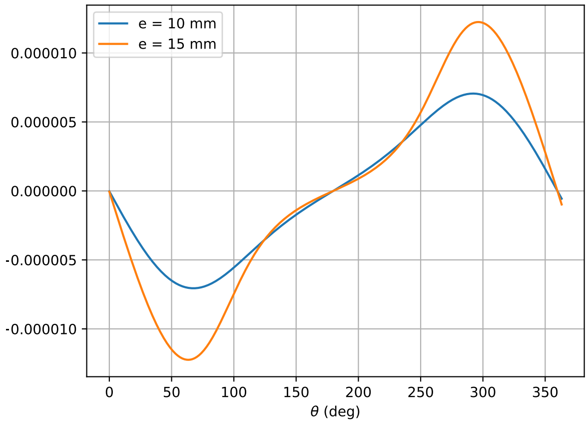
En dérivant l'expression précédente, on a $\dot{\lambda}_+(t)=-e\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)+\dfrac{1}{2}\left(e^2\cos^2\theta(t)\right)'\left(e^2\cos^2\theta(t)-e^2+R^2\right)^{-\frac{1}{2}}$
$=-e\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)-\dfrac{e^2\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{e^2\cos^2\theta(t)-e^2+R^2}}$.

À revoir



Question 5 *Exprimer le débit instantané de la pompe.*
Le débit instantané de la pompe est donné par $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$.

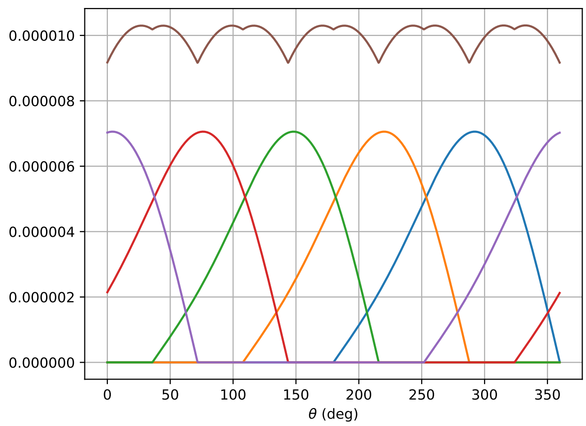
Question 6 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ et $e = 15\,\text{mm}$.*



Question 7 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ pour une pompe à 5 pistons (5 branches **1+2**).*

```
def plot_debit5p():
    plt.cla()
    w = 2*m.pi # rad/s (1tr/s)
    les_t = np.linspace(0,6,6000)
    les_theta = w*les_t

    # Calcul de la vitesse instantanée des pistons.
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda)
    les_lambdap = np.array(les_lambdap)

    S= 1e-4 # Surface en m2

    # 5 courbes de débit décalées d'un cinquième de tour
    les_q1 = S*les_lambdap
    les_q2 = S*les_lambdap[200:]
    les_q3 = S*les_lambdap[400:]
    les_q4 = S*les_lambdap[600:]
    les_q5 = S*les_lambdap[800:]

    # On conserve que les valeurs que sur un tour
    les_q1 = les_q1[:1000]
    les_q2 = les_q2[:1000]
    les_q3 = les_q3[:1000]
```

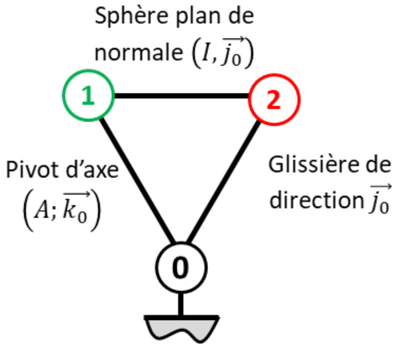
```
les_q4 = les_q4[:1000]
les_q5 = les_q5[:1000]
plt.grid()

les_t = les_t[:1000]
les_theta = les_theta[:1000]

plt.xlabel("$\\theta$ (deg)")
plt.ylabel("Débit instantané $m^3s^{-1}$")

# On conserve que les valeurs positives (débit)
for i in range(len(les_q1)):
    if les_q1[i]<0:
        les_q1[i]=0
    if les_q2[i]<0:
        les_q2[i]=0
    if les_q3[i]<0:
        les_q3[i]=0
    if les_q4[i]<0:
        les_q4[i]=0
    if les_q5[i]<0:
        les_q5[i]=0

plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q1)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q2)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q3)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q4)
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q5)

# Le débit instantané est la sommme des contributions
plt.plot(np.degrees(les_theta),les_q1+les_q2+les_q3+les_q4+les_q5)
#plt.show()
#plt.savefig("10_05_c.pdf")
```



Exercice 13 – Pompe à piston axial ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

En écrivant la fermeture géométrique, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$.

On a donc, $e\,\overrightarrow{i_1} + R\,\overrightarrow{j_0} + \mu\,\overrightarrow{i_0} - \lambda(t)\,\overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$. En projetant l'expression sur $\overrightarrow{j_0}$ (dans ce cas, l'expression suivant $\overrightarrow{i_0}$ n'est pas utile) : $e\sin\theta + R - \lambda(t) = 0$.

On a donc, $\lambda(t) = e\sin\theta + R$.

Question 3 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

En dérivant l'expression précédente, on a $\dot{\lambda}(t) = e\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$.

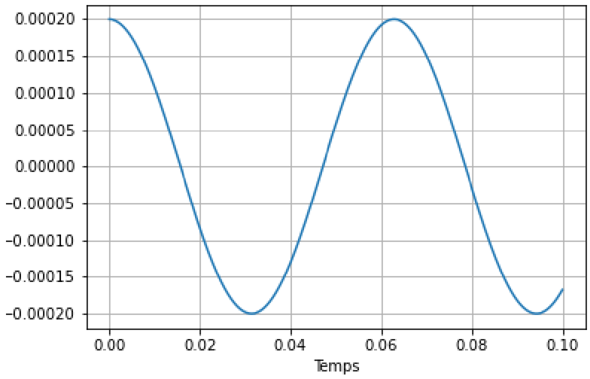
Question 4 *On note S la section du piston **2**. Exprimer le débit instantané de la pompe.*

En notant $q(t)$ le débit instantané, $q(t) = eS\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$.

Question 5 *En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour $e = 10\,\text{mm}$ et $R = 10\,\text{mm}$ ainsi que pour $e = 20\,\text{mm}$ et $R = 5\,\text{mm}$. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t) = 100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, la section du piston est donnée par $S = 1\,\text{cm}^2$.*

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""11_PompePistonAxial.py"""

__author__ = "Xavier Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.02 # m
e = 0.01 # m

def calc_lambda(theta):
    res= e*np.sin(theta)+R

    return res

def calc_lambdap(theta,w):

    res = e*w*np.cos(theta)
    return res

def plot_debit():
    plt.cla()
    w = 100 # rad/s
    les_t = np.linspace(0,0.1,1000)
    les_theta = w*les_t
    global e
    S = 1e-4
    e = 20e-3
    les_q = e*S*w*np.cos(les_theta)
    plt.plot(les_t,les_q)
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Débit ($m^3s^{-1}$)")
    plt.grid()
```

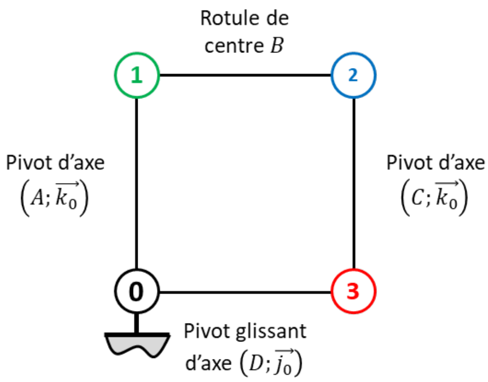
```
    plt.savefig("11_02_c.png")
    plt.show()

plot_debit()
```



Exercice 14 – Système bielle manivelle ⋆⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

En réalisant une fermeture géométrique, on obtient $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow R\,\overrightarrow{i_1}-L\,\overrightarrow{i_2}-\lambda(t)\,\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$. On projette alors cette expression dans $\mathscr{R}_0$:

$$\left\{\begin{array}{l} R\cos\theta(t)-L\cos\varphi(t)=0\\ R\sin\theta(t)-L\sin\varphi(t)-\lambda(t)=0\end{array}\right. .$$

On cherche à éliminer $\varphi(t)$:

$$\left\{\begin{array}{l} R\cos\theta(t)=L\cos\varphi(t)\\ R\sin\theta(t)-\lambda(t)=L\sin\varphi(t)\end{array}\right. .$$

En élevant au carré, on a donc

$$\left\{\begin{array}{l} R^2\cos^2\theta(t)=L^2\cos^2\varphi(t)\\ (R\sin\theta(t)-\lambda(t))^2=L^2\sin^2\varphi(t)\end{array}\right. .$$

En conséquence, $R^2\cos^2\theta(t)+(R\sin\theta(t)-\lambda(t))^2=L^2$ et $(R\sin\theta(t)-\lambda(t))^2=L^2-R^2\cos^2\theta(t) \Rightarrow \lambda(t)=\pm\sqrt{L^2-R^2\cos^2\theta(t)}+R\sin\theta(t)$.

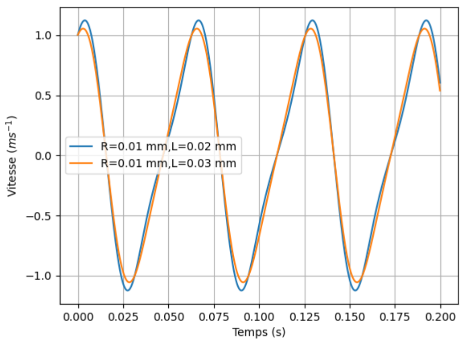
Question 3 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

$$\dot{\lambda}(t)=\pm\left(\frac{R^2\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{L^2-R^2\cos^2\theta(t)}}\right)+\dot{\theta}(t)R\cos\theta(t)$$

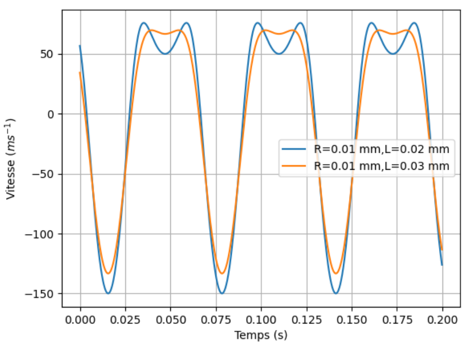
Question 4 *En utilisant Python, tracer la vitesse du piston en fonction du temps. La fréquence de rotation est $\dot{\theta}(t)=100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, on prendra $R=10\,\text{mm}$ et $L=20\,\text{mm}$ puis $L=30\,\text{mm}$.*

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""12_BielleManivelle.py"""
__author__ = "Xavier␣Pessoles"
```

```
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.01 # m
L = 0.03 # m
w = 100
def calc_lambda(theta):
    #res = R*np.sin(theta)
    #print(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))
    #res = res + np.sqrt(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))
    res = np.sqrt(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))+R*np.sin(theta)
    return res

def plot_lambda():
    les_theta=np.linspace(-2*np.pi,2*np.pi,1000)
    les_l = [calc_lambda(x) for x in les_theta]
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps␣(s)")
    plt.ylabel("Vitesse␣(${m}s^{-1}$)")
    plt.plot(les_theta,les_l,label=str("R=")+str(R)+"␣mm,"+str("L=")+str(L)+"␣mm")
    plt.legend()
    plt.show()

plot_lambda()
```



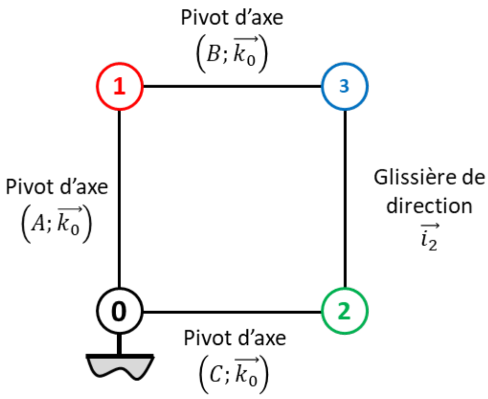
Question 5 *En utilisant Python, tracer l'accélération du piston en fonction du temps en utilisant les mêmes valeurs que dans la question précédente. On utilisera une dérivation numérique.*



Exercice 15 – Pompe oscillante ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

En réalisant une fermeture géométrique, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow R\,\overrightarrow{i_1}-\lambda(t)\,\overrightarrow{i_2}+H\,\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

En projetant cette expression dans le repère $\mathscr{R}_0$, on a $R\left(\cos\theta(t)\,\overrightarrow{i_0}+\sin\theta(t)\,\overrightarrow{j_0}\right)-\lambda(t)\left(\cos\varphi(t)\,\overrightarrow{i_0}+\sin\varphi(t)\,\overrightarrow{j_0}\right)+H\,\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

On obtient alors les équation scalaires suivantes : $\left\{\begin{array}{l} R\cos\theta(t)-\lambda(t)\cos\varphi(t)=0 \\ R\sin\theta(t)-\lambda(t)\sin\varphi(t)+H=0 \end{array}\right.$.

On cherche à supprimer $\varphi(t)$, on va donc isoler la variable : $\left\{\begin{array}{l} \lambda(t)\cos\varphi(t)=R\cos\theta(t) \\ \lambda(t)\sin\varphi(t)=R\sin\theta(t)+H \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda(t)^2\cos^2\varphi(t)=R^2 c \\ \lambda(t)^2\sin^2\varphi(t)=(R\sin \end{array}\right.$

En sommant les expressions, on a : $\lambda(t)^2=R^2\cos^2\theta(t)+(R\sin\theta(t)+H)^2$.

Au final, $\lambda(t)^2=R^2+H^2+2HR\sin\theta(t)$ et
$\lambda(t)=\pm\sqrt{R^2+H^2+2HR\sin\theta(t)}$.

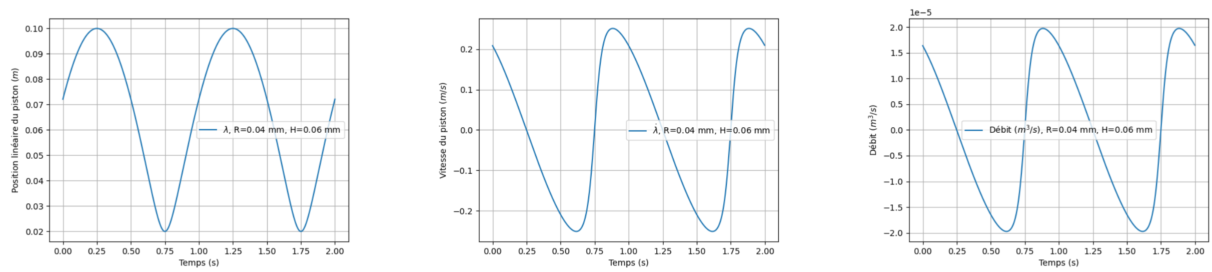
Question 3 *Exprimer $\dot{\lambda}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

En dérivant l'expression obtenue à la question précédente, on obtient
$\dot{\lambda}(t)=\dfrac{1}{2}\left(-2HR\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\right)\left(R^2+H^2+2HR\sin\theta(t)\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Question 4 *Exprimer le débit instantané de la pompe.*

On note q le débit instantané de la pompe. On a $q(t)=S\dot{\lambda}(t)$ avec S la section du piston 3.

Question 5 *En utilisant Python, donner le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour un piston de diamètre $D=10$ mm.*




```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""13_TransfoMouvement.py"""

__author__ = "Xavier␣Pessoles"
__email__ = "xpessoles@lamartin.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m

R = 0.04 # m
H = 0.06 # m
D = 10e-3 # 10 mm

w = 60 # tours /min
w = w*2*m.pi/60 # rad/s
```

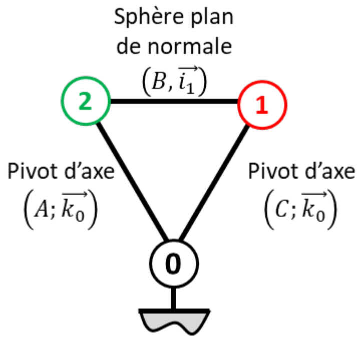
```
def calc_lambda(theta):
    res = R*R+H*H+2*H*R*np.sin(theta)

    return np.sqrt(res)

def calc_lambdap(theta):
    res = -H*R*w*np.cos(theta)*np.power(R*R+H*H+2*H*R*np.sin(theta),-0.5)
    return np.sqrt(res)

def calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda):
    les_lambda_p = []
    for i in range(len(les_t)-1):
        les_lambda_p.append((les_lambda[i+1]-les_lambda[i])/(les_t[i+1]-les_t[i]))

    return les_lambda_p

def plot_lambda():
    les_t = np.linspace(0,2,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps␣(s)")
    plt.ylabel("Position␣linéaire␣du␣piston␣($m$)")
    plt.plot(les_t,les_lambda,label=str("$\\lambda$,␣R=")+str(R)+"␣mm,␣"+str("H=")+str(H)+"␣mm")
    plt.legend()
    plt.show()

def plot_lambdap():
    les_t = np.linspace(0,2,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps␣(s)")
    plt.ylabel("Vitesse␣du␣piston␣($m/s$)")
    #plt.plot(les_t,les_lambdap,label=str("$\dot{\\lambda}$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H
        )+" mm")

    les_lambdap_bis = calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda)
    plt.plot(les_t[:-1],les_lambdap_bis,label=str("$\dot{\\lambda}$,␣R=")+str(R)+"␣mm,␣"+str("H=
        ")+str(H)+"␣mm")

    plt.legend()
    plt.show()

def plot_debit():
    les_t = np.linspace(0,2,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps␣(s)")
    plt.ylabel("Débit␣($m^3/s$)")
    #plt.plot(les_t,les_lambdap,label=str("$\dot{\\lambda}$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H
        )+" mm")

    les_lambdap_bis = calc_lambdap_bis(les_t,les_lambda)
    for i in range(len(les_lambdap_bis)):
        les_lambdap_bis[i]=les_lambdap_bis[i]*np.pi*D*D/4

    plt.plot(les_t[:-1],les_lambdap_bis,label=str("Débit␣($m^3/s$),␣R=")+str(R)+"␣mm,␣"+str("H="
        )+str(H)+"␣mm")

    plt.legend()
    plt.show()
```

```
#plot_lambda()
#plot_lambdap()
plot_debit()
```

Exercice 16 – Barrière Sympact ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.* On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$ soit $\lambda(t)\overrightarrow{i_2}-R\overrightarrow{i_1}-h\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

En exprimant l'équation vectorielle dans le repère $\mathscr{R}_0$, on a $\lambda(t)\left(\cos\varphi(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\varphi(t)\overrightarrow{j_0}\right)-R\left(\cos\theta(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\theta(t)\overrightarrow{j_0}\right)-h\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

On a alors $\left\{\begin{array}{l}\lambda(t)\cos\varphi(t)-R\cos\theta(t)=0\\ \lambda(t)\sin\varphi(t)-R\sin\theta(t)-h=0\end{array}\right.$

soit $\left\{\begin{array}{l}\lambda(t)\cos\varphi(t)=R\cos\theta(t)\\ \lambda(t)\sin\varphi(t)=R\sin\theta(t)+h\end{array}\right.$.

En faisant le rapport des équations, on a donc : $\tan\varphi(t)=\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}$ (pour $\theta(t)\neq\dfrac{\pi}{2}\,mod\pi$).

Question 3 *Exprimer $\dot\varphi(t)$ en fonction de $\dot\theta(t)$.* On a : $\varphi(t)=\arctan\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)$.

Pour commencer, $(R\sin\theta(t)+h)'=R\dot\theta(t)\cos\theta(t)$ et $(R\cos\theta(t))'=-R\dot\theta(t)\sin\theta(t)$.

De plus, $\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)'$
$=\dfrac{R\dot\theta(t)\cos\theta(t)R\cos\theta(t)+R\dot\theta(t)\sin\theta(t)(R\sin\theta(t)+h)}{R^2\cos^2\theta(t)}$
$=\dfrac{R^2\dot\theta(t)\cos^2\theta(t)+R\dot\theta(t)\sin\theta(t)(R\sin\theta(t)+h)}{R^2\cos^2\theta(t)}$
$=\dfrac{R\dot\theta(t)\cos^2\theta(t)+R\sin^2\theta(t)\dot\theta(t)+h\dot\theta(t)\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}$
$=\dot\theta(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}$.

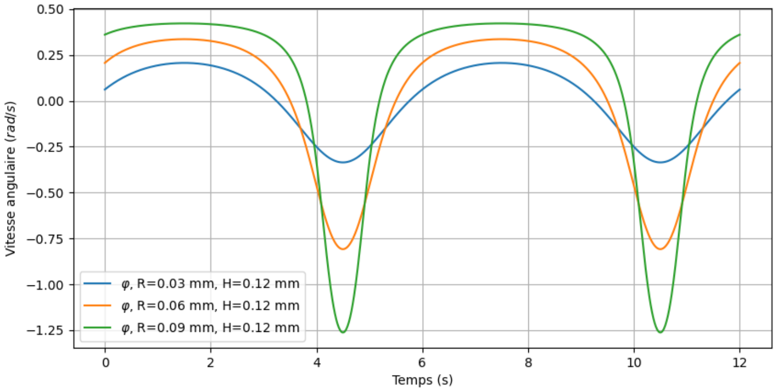
Au final,

$$\dot\varphi(t)=\frac{\dot\theta(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{1+\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)^2}\quad\frac{\dot\theta(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{1+\dfrac{(R\sin\theta(t)+h)^2}{R^2\cos^2\theta(t)}}.$$

$$\dot\varphi(t)=R^2\cos^2\theta(t)\frac{\dot\theta(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{R^2\cos^2\theta(t)+\dfrac{(R\sin\theta(t)+h)^2}{R^2\cos^2\theta(t)}}=\frac{R\dot\theta(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2\cos^2\theta(t)+(R\sin\theta(t)+h)^2}.$$

$$\dot\varphi(t)=\frac{R\dot\theta(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2\cos^2\theta(t)+R^2\sin^2\theta(t)+h^2+2Rh\sin\theta(t)}=\frac{R\dot\theta(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2+h^2+2Rh\sin\theta(t)}.$$

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot\varphi(t)$ en fonction de $\dot\theta(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*




```python
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""14_Sympact.py"""

__author__ = "Xavier␣Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.03 # m
H = 0.12 # m
w = 10 # tours /min
w = 10*2*m.pi/60 # rad/s

def calc_phi(theta):
    num = R*np.sin(theta)+H
    den = R*np.cos(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def calc_phip(theta):
    num = R*w*(R+H*np.sin(theta))
    den = R*R+H*H+2*R*H*np.sin(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def plot_phi():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phi = calc_phi(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps␣(s)")
    plt.ylabel("Position␣angulaire␣($rad$)")
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phi,label=str("$\\varphi$,␣R=")+str(R)+"␣mm,␣"+str("H=")+str(H)+"␣mm")
    plt.legend()
    plt.show()


def plot_phip():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phip = calc_phip(les_theta)

    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps␣(s)")
    plt.ylabel("Vitesse␣angulaire␣($rad/s$)")
```

```
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phip,label=str("$\\varphi$,␣R=")+str(R)+"␣mm,␣"+str("H=")+str(H)+"␣mm")
    plt.legend()
    plt.show()

for R in [0.03,0.06,0.09]:
    plot_phip()
```

Exercice 17 – Barrière Sympact avec galet ⋆⋆

B2-13

C2-05

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

Question 4 *En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer $\gamma(t)$ et $\dot{\gamma}(t)$.*

Question 5 *En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Exercice 18 – Poussoir ⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\mu(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\mu}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\mu}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Exercice 19 – Système 4 barres ⋆⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\theta_1(t)$ en fonction de $\theta_4(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Exercice 20 – Maxpid ⋆⋆⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Par ailleurs $a = 107{,}1\,\text{mm}$, $b = 80\,\text{mm}$, $c = 70\,\text{mm}$, $d = 80\,\text{mm}$. Le pas de la vis est de 4 mm.

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.* **Question 2** *Exprimer $\theta(t)$ en fonction de $\lambda(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\dot{\lambda}(t)$.*

Question 4 *Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$, vitesse de rotation du rotor moteur **2** par rapport au stator **1**.*

Question 5 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **2** par rapport à **1** est de 500 tours par minute.*

Exercice 21 – Variateur de Graham⋆⋆⋆

D'après ressources de Michel Huguet.

B2-13

C2-05

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *En exprimant que **2** roule sans glisser sur **4** au point I, déterminer ω en fonction de ω_1, d et λ.*

Question 3 *Quelle relation obtient-on entre ω_1, ω_3 et ω en exprimant l'engrènement des deux roues dentées ? (c'est à dire que **2** et **3** roulent sans glisser l'un sur l'autre en J).*

Question 4 *En déduire le rapport de variation $\dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ, d_2, d_3 et d.*

Question 5 *Tracer la courbe représentative du rapport de variation $\dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ, sachant que $\dfrac{n}{n_3} = \dfrac{d_1}{d_3}$, $d = 55\,\text{mm}$ et que λ varie entre $\lambda_{mini} = 12\,\text{mm}$ et la valeur $\lambda_{maxi} = 23\,\text{mm}$.*

Exercice 22 – Variateur à billes ⋆⋆⋆⋆⋆

B2-13

C2-05

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Modéliser

Question 2 *Déterminer la loi entrée – sortie.*