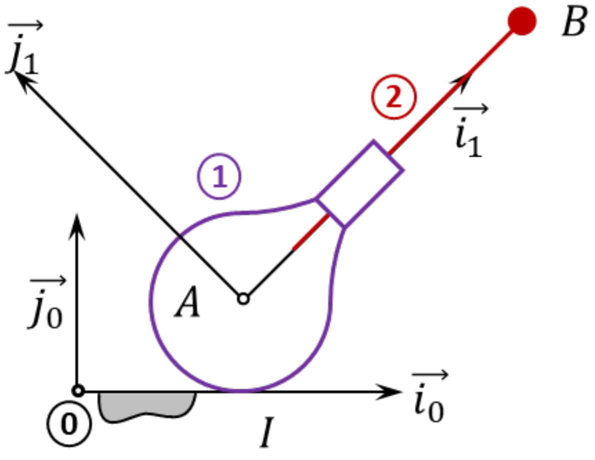
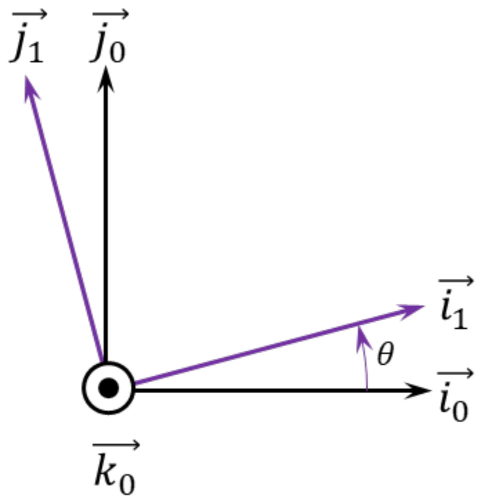
Exercice 1 – Mouvement RT – RSG ⋆⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{IA} = R\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_1}$. De plus $R = 15\,\text{mm}$. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I.





Question 1 *Déterminer* $\overrightarrow{V(B,2/0)}$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ *au point* B.

Question 3 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.

Indications :

1. $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_1} + \dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right)$.
2. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_1} + \dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right) \end{array}\right\}_B$.
3. $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + \ddot{\theta}(t)\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right) + \dot{\theta}(t)\left(\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_1} - \lambda(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{i_1}\right)$.

Corrigé voir 2.

Exercice 2 – Mouvement RT – RSG ⋆⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer* $\overrightarrow{V(B,2/0)}$.

$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)}$.

D'une part, $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_1}$.

D'autre part, en utilisant le roulement sans glissement en I, $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(I,1/0)} + \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} + \left(-\lambda(t)\overrightarrow{i_1} - R\,\overrightarrow{j_0}\right) \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} = -\dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{k_0} + R\,\overrightarrow{j_0} \wedge \overrightarrow{k_0}\right) = \dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right)$.

Au final, $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_1} + \dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right)$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ *au point* B.

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_1} + \dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right) \end{array}\right\}_B.$$

Question 3 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + \ddot{\theta}(t)\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right) + \dot{\theta}(t)\left(\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_1} - \lambda(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{i_1}\right).$$

Exercice 3 – Mouvement RT – RSG ⋆⋆

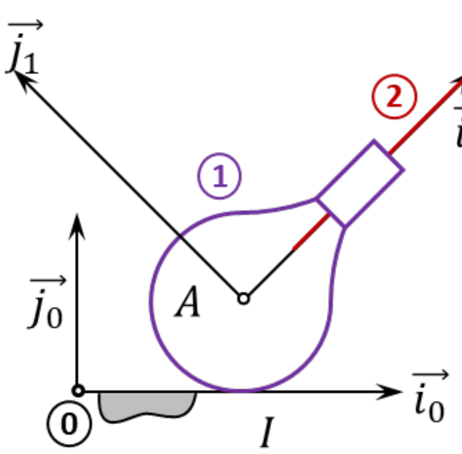
B2-14

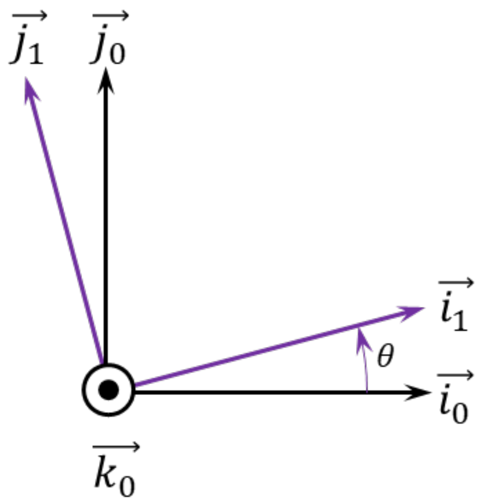
C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{IA} = R\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_1}$. De plus $R = 15\,\text{mm}$. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de **1** tel que $\overrightarrow{AG_1} = -\ell\,\overrightarrow{i_1}$, on note m_1 la masse de **1** ;
- $G_2 = B$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2 la masse de **2**.

Un ressort exerce une action mécanique entre les points A et B.





Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*

Question 2 *Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de **1** et de **2** par rapport à $\mathcal{R}_0$.*

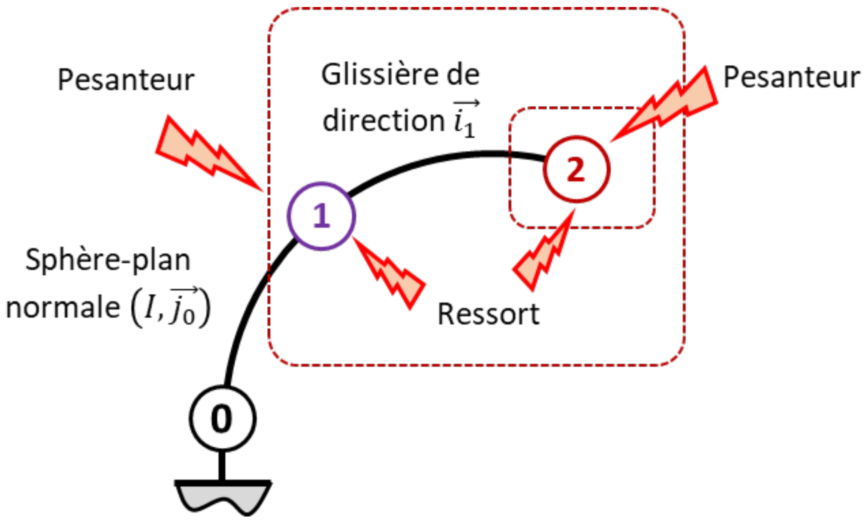
Corrigé voir 4.

Exercice 4 – Mouvement RT – RSG ⋆⋆

B2-14

C1-05

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Proposer une démarche permettant de déterminer les loi de mouvement de **1** et de **2** par rapport à $\mathcal{R}_0$.*

Le système possède deux mobilités :

- translation de 1 par rapport à 2 (λ) ;
- rotation de l'ensemble {1+2} autour du point I (le roulement sans glissement permet d'écrire une relation entre la rotation de paramètre θ et le déplacement suivant $\overrightarrow{i_0}$.

On en déduit la stratégie suivante :

- on isole 2 et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection suivant $\overrightarrow{i_1}$. BAME : $\{\mathscr{T}(1 \rightarrow 2)\}$, $\{\mathscr{T}(1_{\text{ressort}} \rightarrow 2)\}$ ($\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{i_1} = 0$ et $\overrightarrow{R(1_{\text{ressort}} \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{i_1} = 0$) $\{\mathscr{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\}$.
- on isole {1+2} et on réalise un théorème du moment dynamique en I en projection suivant $\overrightarrow{k_0}$. BAME : $\{\mathscr{T}(0 \rightarrow 1)\}$ ($\overrightarrow{\mathscr{M}(I, 0 \rightarrow 1)} \cdot \overrightarrow{k_0} = 0$), $\{\mathscr{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 1)\}$ et $\{\mathscr{T}(\text{Pesanteur} \rightarrow 2)\}$.

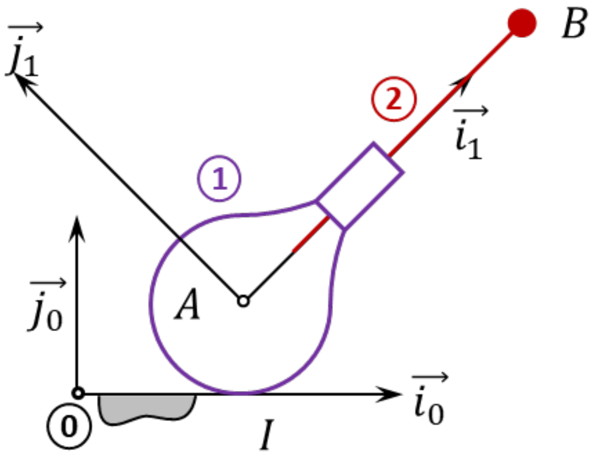
Exercice 5 – Mouvement RT – RSG ★★

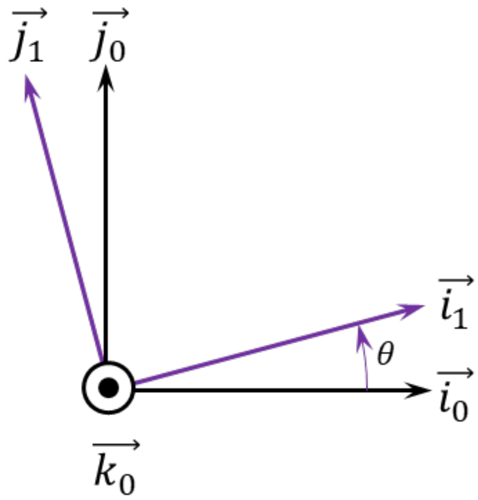
C2-08

C2-09

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{IA} = R\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_1}$. De plus $R = 15\,\text{mm}$. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de **1** tel que $\overrightarrow{AG_1} = -\ell\,\overrightarrow{i_1}$, on note m_1 la masse de **1** et $I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$;
- $G_2 = B$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2 la masse de **2** et $I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$.





On donne $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_1} + \dot{\theta}\left(\lambda(t)\,\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right)$ et
$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_1} + \ddot{\theta}(t)\left(\lambda(t)\,\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right) + \dot{\theta}(t)\left(2\dot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{j_1} - \lambda(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{i_1}\right)$.

Question 1 *Déterminer* $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{i_1}$

Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{\delta(I,1+2/0)} \cdot \overrightarrow{k_0}$

Corrigé voir 6.

Exercice 6 – Mouvement RT – RSG ★★

C2-08

C2-09

Question 1 *Déterminer* $\overrightarrow{R_d(2/0)} \cdot \overrightarrow{i_1}$

Par définition, $\overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)} = m_2\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.

Calcul de $\overrightarrow{V(B,2/0)}$:
$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)}$.
D'une part, $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_1}$.
D'autre part, en utilisant le roulement sans glissement en I, $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(I,1/0)} + \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} + \left(-\lambda(t)\,\overrightarrow{i_1} - R\,\overrightarrow{j_0}\right) \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} = -\dot{\theta}\left(\lambda(t)\,\overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{k_0} + R\,\overrightarrow{j_0} \wedge \overrightarrow{k_0}\right) = \dot{\theta}\left(\lambda(t)\,\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right)$.
Au final, $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_1} + \dot{\theta}\left(\lambda(t)\,\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right)$.

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$:
$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + \ddot{\theta}(t)\left(\lambda(t)\,\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right) + \dot{\theta}(t)\left(\dot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{j_1} - \lambda(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{i_1}\right)$.
Au final, $\overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2\left(\ddot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + \ddot{\theta}(t)\left(\lambda(t)\,\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right) + \dot{\theta}(t)\left(\dot{\lambda}(t)\,\overrightarrow{j_1} - \lambda(t)\dot{\theta}\,\overrightarrow{i_1}\right)\right)$

Question 2 *Déterminer* $\overrightarrow{\delta(I,1+2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}$

On a $\overrightarrow{\delta(I,1+2/0)}=\overrightarrow{\delta(I,1/0)}+\overrightarrow{\delta(I,2/0)}$.

Calcul $\overrightarrow{\delta(I,1/0)}$

Par déplacement du moment dynamique, on a $\overrightarrow{\delta(I,1/0)}=\overrightarrow{\delta(G_1,1/0)}+\overrightarrow{IG_1}\wedge\overrightarrow{R_d(1/0)}$

- $\overrightarrow{\delta(G_1,1/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(G_1,1/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}\cdot\overrightarrow{k_0}=C_1\ddot{\theta}$.
- $\overrightarrow{R_d(1/0)}=m_1\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(G_1,1/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}$ et $\overrightarrow{V(G_1,1/0)}=\overrightarrow{V(I,1/0)}+\overrightarrow{G_1I}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)}=\overrightarrow{0}+\left(\ell\overrightarrow{i_1}-R\overrightarrow{j_0}\right)\wedge\dot{\theta}\overrightarrow{k_0}=\dot{\theta}\left(-\ell\overrightarrow{j_1}+R\overrightarrow{i_0}\right)$.

  On a donc $\overrightarrow{R_d(1/0)}=m_1\ddot{\theta}\left(-\ell\overrightarrow{j_1}+R\overrightarrow{i_0}\right)+m_1\ell\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}$.
- $\left(\overrightarrow{IG_1}\wedge\overrightarrow{R_d(1/0)}\right)\cdot\overrightarrow{k_0}=\left(\left(R\overrightarrow{j_0}-\ell\overrightarrow{i_1}\right)\wedge\left(m_1\ddot{\theta}\left(-\ell\overrightarrow{j_1}+R\overrightarrow{i_0}\right)+m_1\ell\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0}$

  $=\left(R\overrightarrow{j_0}\wedge\left(m_1\ddot{\theta}\left(-\ell\overrightarrow{j_1}+R\overrightarrow{i_0}\right)+m_1\ell\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}\right)-\ell\overrightarrow{i_1}\wedge\left(m_1\ddot{\theta}\left(-\ell\overrightarrow{j_1}+R\overrightarrow{i_0}\right)+m_1\ell\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0}$

  $=m_1\left(R\overrightarrow{j_0}\wedge\left(\ddot{\theta}\left(-\ell\overrightarrow{j_1}+R\overrightarrow{i_0}\right)+\ell\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1}\right)-\ell\ddot{\theta}\overrightarrow{i_1}\wedge\left(-\ell\overrightarrow{j_1}+R\overrightarrow{i_0}\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0}$

  $=m_1\left(R\left(\ddot{\theta}\left(-\ell\overrightarrow{j_0}\wedge\overrightarrow{j_1}+R\overrightarrow{j_0}\wedge\overrightarrow{i_0}\right)+\ell\dot{\theta}^2\overrightarrow{j_0}\wedge\overrightarrow{i_1}\right)-\ell\ddot{\theta}\left(-\ell\overrightarrow{i_1}\wedge\overrightarrow{j_1}+R\overrightarrow{i_1}\wedge\overrightarrow{i_0}\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0}$

  $=m_1\left(R\left(\ddot{\theta}(-\ell\sin\theta-R)-\ell\dot{\theta}^2\cos\theta\right)-\ell\ddot{\theta}(-\ell-R\sin\theta)\right)$

  $=m_1\left(-R\left(\ddot{\theta}(\ell\sin\theta+R)+\ell\dot{\theta}^2\cos\theta\right)+\ell\ddot{\theta}(\ell+R\sin\theta)\right)$

  $=m_1\left(-R\ddot{\theta}\ell\sin\theta-R^2\ddot{\theta}-R\ell\dot{\theta}^2\cos\theta+\ell^2\ddot{\theta}+R\ell\ddot{\theta}\sin\theta\right)$

  $=m_1\left(-R^2\ddot{\theta}-R\ell\dot{\theta}^2\cos\theta+\ell^2\ddot{\theta}\right)$
- Au final, $\overrightarrow{\delta(I,1/0)}=C_1\ddot{\theta}+m_1\left(-R^2\ddot{\theta}-R\ell\dot{\theta}^2\cos\theta+\ell^2\ddot{\theta}\right)$.

Calcul $\overrightarrow{\delta(I,2/0)}$

Par déplacement du moment dynamique, on a $\overrightarrow{\delta(I,2/0)}=\overrightarrow{\delta(G_2,2/0)}+\overrightarrow{IG_2}\wedge\overrightarrow{R_d(2/0)}$

- $\overrightarrow{\delta(G_2,2/0)}\cdot\overrightarrow{k_0}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}\cdot\overrightarrow{k_0}=C_2\ddot{\theta}$.
- $\left(\overrightarrow{IG_2}\wedge\overrightarrow{R_d(2/0)}\right)\cdot\overrightarrow{k_0}=\left(R\overrightarrow{j_0}\wedge\left(m_2\left(\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}+\ddot{\theta}(t)\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1}-R\overrightarrow{i_0}\right)+\dot{\theta}(t)\left(\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_1}-\lambda(t)\dot{\theta}\overrightarrow{i_1}\right)\right)\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0}$

  $=m_2R\left(\overrightarrow{j_0}\wedge\left(\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}+\ddot{\theta}(t)\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1}-R\overrightarrow{i_0}\right)+\dot{\theta}(t)\left(\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_1}-\lambda(t)\dot{\theta}\overrightarrow{i_1}\right)\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0}$

  $\lambda(t)\overrightarrow{i_1}\wedge\left(m_2\left(\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}+\ddot{\theta}(t)\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1}-R\overrightarrow{i_0}\right)+\dot{\theta}(t)\left(\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_1}-\lambda(t)\dot{\theta}\overrightarrow{i_1}\right)\right)\right)\cdot\overrightarrow{k_0}$

  $=m_2R\left(-\ddot{\lambda}(t)\cos\theta+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\theta}(t)(-\lambda(t)\sin\theta+R)+\dot{\theta}(t)\left(\dot{\lambda}(t)\sin\theta+\lambda(t)\dot{\theta}\cos\theta\right)\right)$
  $+\lambda(t)m_2\left(2\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}+\ddot{\theta}(t)(\lambda(t)+R\sin\theta)\right)$

  $=-m_2R\ddot{\lambda}(t)\cos\theta+m_2R\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\sin\theta-m_2R\ddot{\theta}(t)\lambda(t)\sin\theta+m_2R^2\ddot{\theta}(t)+m_2R\dot{\theta}(t)\dot{\lambda}(t)\sin\theta+m_2R\dot{\theta}^2(t)\lambda(t)\cos\theta+2\lambda(t)m_2\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}+\ddot{\theta}(t)m_2\lambda(t)^2+\ddot{\theta}(t)\lambda(t)m_2R\sin\theta$

  $=-m_2R\ddot{\lambda}(t)\cos\theta+m_2R\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\sin\theta+m_2R^2\ddot{\theta}(t)+m_2R\dot{\theta}(t)\dot{\lambda}(t)\sin\theta+m_2R\dot{\theta}^2(t)\lambda(t)\cos\theta+2m_2\lambda(t)\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}+m_2\ddot{\theta}(t)\lambda(t)^2$

  Au final, $\overrightarrow{\delta(I,2/0)}=-m_2R\ddot{\lambda}(t)\cos\theta+m_2R\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\sin\theta+m_2R^2\ddot{\theta}(t)+m_2R\dot{\theta}(t)\dot{\lambda}(t)\sin\theta+m_2R\dot{\theta}^2(t)\lambda(t)\cos\theta+2m_2\lambda(t)\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}+m_2\ddot{\theta}(t)\lambda(t)^2+C_2\ddot{\theta}$