

Modéliser

Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur

PSI★ – MP

## B2

### Proposer un modèle de connaissance et de comportement

chapter.1chapter.2section.2.1section.2.2subsection.2.2.1section.2.3section.2.4subse



# Chapitre 2

## Résoudre

### 2.1 Proposer une démarche de résolution

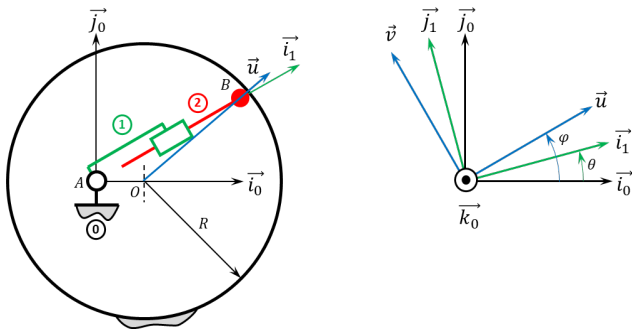
### 2.2 Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

#### 2.2.1 Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques

##### Exercice 1 – Pompe à piston radial \*

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AO} = e \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus  $e = 10 \text{ mm}$  et  $R = 20 \text{ mm}$ . Le contact entre 0 et 2 en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** En utilisant Python, tracer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 4** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

On prendra une section de piston 2 de  $1 \text{ cm}^2$  et une fréquence de rotation de  $\dot{\theta}(t) = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$ . **Question 5** Exprimer le débit instantané de la pompe.

**Question 6** En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour  $e = 10 \text{ mm}$  et  $e = 15 \text{ mm}$ .

**Question 7** En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour  $e = 10 \text{ mm}$  pour une pompe à 5 pistons (5 branches 1+2).

Indications :

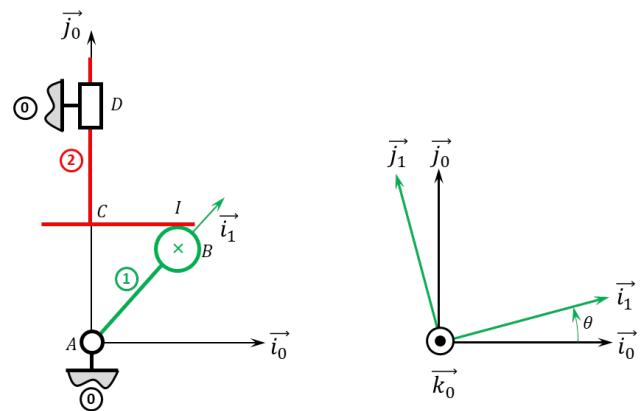
1. .
2.  $\lambda(t) = e \cos \theta(t) \pm \sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}$ .
3. .
4.  $q(t) = S \dot{\lambda}(t)$ .
5. .

Corrigé voir 12.

##### Exercice 2 – Pompe à piston axial \*

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = e \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BI} = R \vec{j}_0$  et  $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \vec{j}_0$ . De plus,  $e = 10 \text{ mm}$  et  $R = 20 \text{ mm}$ . Le contact entre 1 et 2 en B est maintenu en permanence par un ressort suffisamment raide (non représenté) positionné entre 0 et 2.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** On note  $S$  la section du piston 2. Exprimer le débit instantané de la pompe.

**Question 5** En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour  $e = 10 \text{ mm}$  et  $R = 10 \text{ mm}$  ainsi que pour  $e = 20 \text{ mm}$  et  $R = 5 \text{ mm}$ . La fréquence de rotation est  $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$ , la section du piston est donnée par  $S = 1 \text{ cm}^2$ .

Indications :

1. .
2.  $e \sin \theta + R - \lambda(t) = 0$ .
3.  $\dot{\lambda}(t) = e \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$ .
4.  $q(t) = e S \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$ .
5. .

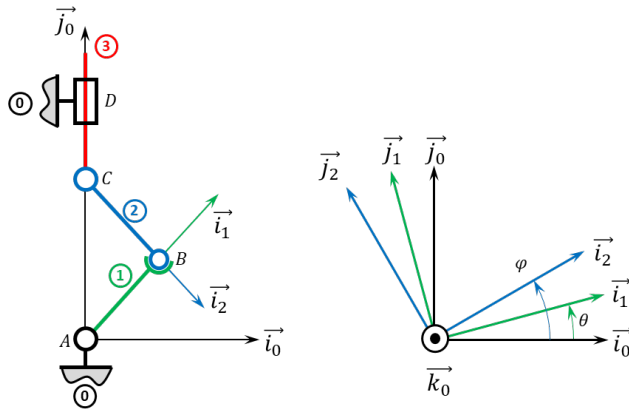
Corrigé voir 13.

Corrigé voir 15.

### Exercice 3 – Système bielle manivelle \*\*

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$ ,  $\overrightarrow{CB} = L \vec{i}_2$  et  $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \vec{j}_0$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer la vitesse du piston en fonction du temps. La fréquence de rotation est  $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$ , on prendra  $R = 10 \text{ mm}$  et  $L = 20 \text{ mm}$  puis  $L = 30 \text{ mm}$ .

**Question 5** En utilisant Python, tracer l'accélération du piston en fonction du temps en utilisant les mêmes valeurs que dans la question précédente. On utilisera une dérivation numérique.

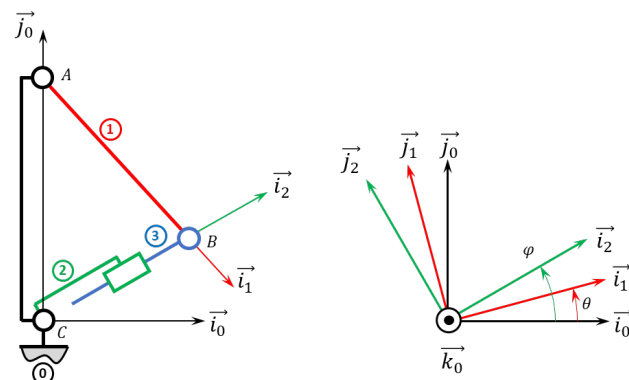
Corrigé voir 14.

### Exercice 4 – Pompe oscillante \*

C2-06

Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{CA} = H \vec{j}_0$ . De plus,  $R = 10 \text{ mm}$  et  $H = 60 \text{ mm}$ . Par ailleurs, on note  $\overrightarrow{CB} = \lambda(t) \vec{i}_2$



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

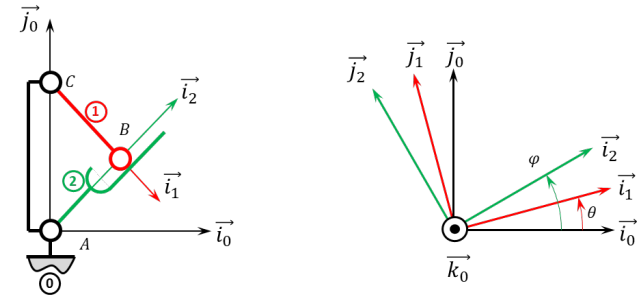
**Question 4** Exprimer le débit instantané de la pompe.

**Question 5** En utilisant Python, donner le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour un piston de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$ .

### Exercice 5 – Barrière Sympact \*

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = H \vec{j}_0$  et  $\overrightarrow{CB} = R \vec{i}_1$ . De plus,  $H = 120 \text{ mm}$  et  $R = 40 \text{ mm}$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\varphi(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Corrigé voir 16.

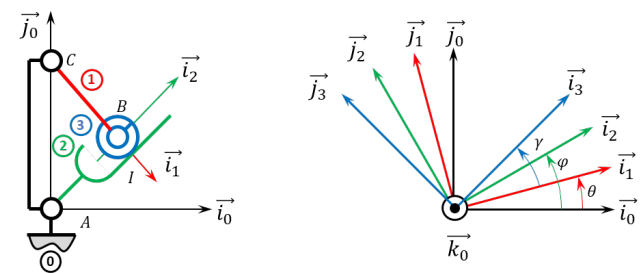
### Exercice 6 – Barrière Sympact avec galet \*\*

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = H \vec{j}_0$  et  $\overrightarrow{CB} = R \vec{i}_1$ . De plus,  $H = 120 \text{ mm}$  et  $R = 40 \text{ mm}$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\varphi(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer  $\gamma(t)$  et  $\dot{\gamma}(t)$ .

**Question 5** En utilisant Python, tracer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Corrigé voir 17.

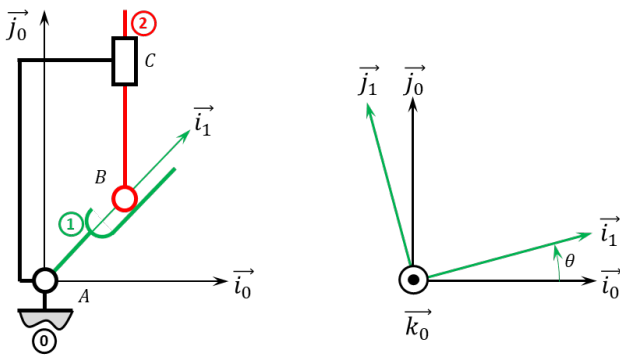
### Exercice 7 – Pousoir \*

C2-06

Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AC} = L \vec{i}_0 + H \vec{j}_0$ ,  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$ . De plus,  $H = 120 \text{ mm}$ ,  $L = 40 \text{ mm}$ .

Corrigé voir 19.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\mu(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\mu}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\dot{\mu}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

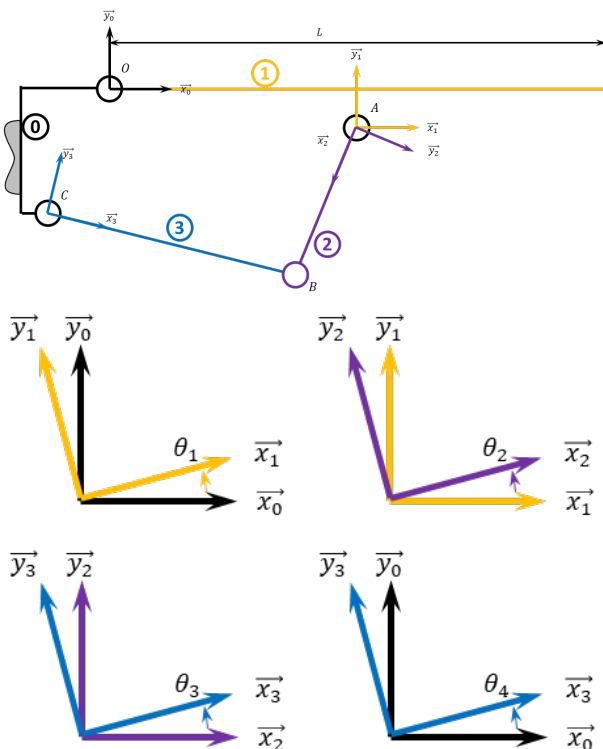
Corrigé voir 18.

### Exercice 8 – Système 4 barres \*\*

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

On a :

- $\overrightarrow{OA} = a \vec{x}_1 - f \vec{y}_1$  avec  $a = 355 \text{ mm}$  et  $f = 13 \text{ mm}$  ;
- $\overrightarrow{AB} = b \vec{x}_2$  avec  $b = 280 \text{ mm}$  ;
- $\overrightarrow{BC} = -c \vec{x}_3$  avec  $c = 280 \text{ mm}$  ;
- $\overrightarrow{OC} = -d \vec{x}_0 - e \vec{y}_0$  avec  $d = 89,5 \text{ mm}$  et  $e = 160 \text{ mm}$  ;



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\theta_1(t)$  en fonction de  $\theta_4(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\theta}_1(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}_4(t)$ .

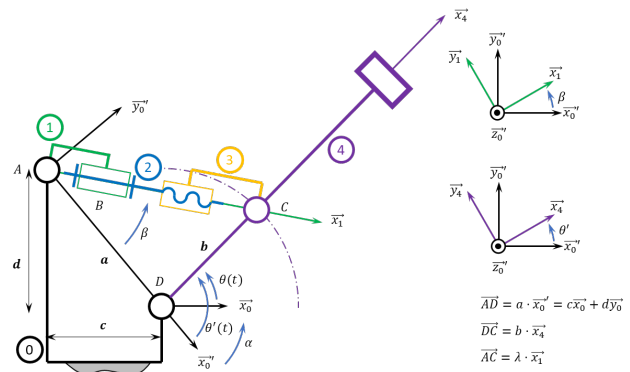
**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\dot{\theta}_1(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}_4(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

1. Les éventuelles erreur de texte font partie intégrante de la difficulté :).

### Exercice 9 – Maxpid \*\*\*

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs  $a = 107,1 \text{ mm}$ ,  $b = 80 \text{ mm}$ ,  $c = 70 \text{ mm}$ ,  $d = 80 \text{ mm}$ . Le pas de la vis est de 4 mm.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\theta(t)$  en fonction de  $\lambda(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\dot{\lambda}(t)$ .

**Question 4** Exprimer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\omega(t)$ , vitesse de rotation du rotor moteur 2 par rapport au stator 1.

**Question 5** En utilisant Python, tracer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\omega(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 2 par rapport à 1 est de 500 tours par minute.

Corrigé voir 20.

### Exercice 10 – Variateur de Graham 1 \*\*\*

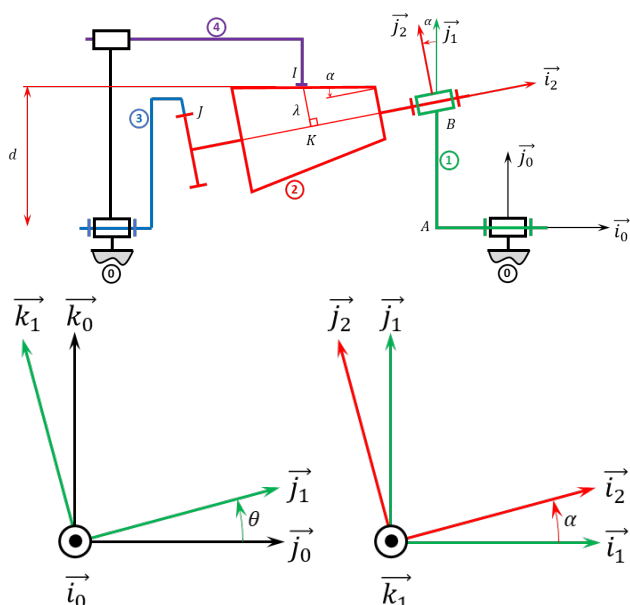
D'après ressources de Michel Huguet.

**B2-13**

**C2-05**

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



On note  $\overrightarrow{AJ} = -L \overrightarrow{i_0} + \frac{d_3}{2} \overrightarrow{j_2}$  et  $\overrightarrow{KJ} = -\ell \overrightarrow{i_2} + \frac{d_2}{2} \overrightarrow{j_2}$ .

Soit  $\mathcal{R} = (A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0})$  un repère lié au bâti **0** du variateur. L'arbre moteur **1** et l'arbre récepteur **3** ont une liaison pivot d'axe  $(A, \overrightarrow{i_0})$  avec le bâti **0**. On pose  $\Omega(1/0) = \omega_1 \overrightarrow{i_0}$  et  $\Omega(3/0) = \omega_3 \overrightarrow{i_0}$ .

Soit  $\mathcal{R}_1 = (A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$  et  $\mathcal{R}_2 = (B; \overrightarrow{i_2}, \overrightarrow{j_2}, \overrightarrow{k_2})$  deux repères liés respectivement à **1** et **2** tels que  $\overrightarrow{AB}$  ait même direction que  $\overrightarrow{j_1}$ . On pose  $\alpha = (\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{i_2})$  constant.

Le satellite **2** a une liaison pivot d'axe  $(B, \overrightarrow{i_2})$  avec **1**. **2** est un tronc de cône de révolution d'axe  $(B, \overrightarrow{i_2})$  de demi angle au sommet  $\alpha$ . On pose  $\Omega(S_2/S_1) = \omega \overrightarrow{i_2}$ .

La génératrice de **2** du plan  $(O, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_1})$  la plus éloignée de l'axe  $(O, \overrightarrow{i_0})$  est parallèle à  $\overrightarrow{i_0}$ . Notons  $d$  sa distance à l'axe  $(O, \overrightarrow{i_0})$ .

**2** roule sans glisser au point  $I$ , sur une couronne **4**, immobile par rapport à **0** pendant le fonctionnement. Le réglage du rapport de variation s'obtient en déplaçant **4** suivant l'axe  $(O, \overrightarrow{i_0})$ .

Soit  $K$  le centre de la section droite du tronc de cône passant par  $I$ . On pose  $\overrightarrow{BI} = \lambda \overrightarrow{j_2}$ . À l'extrémité de **2** est fixée une roue dentée de  $n$  dents, d'axe  $(B, \overrightarrow{i_2})$ , qui engrène avec une couronne dentée intérieure d'axe  $(A, \overrightarrow{i_0})$ , de  $n_2$  dents, liée à **3**.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** En exprimant que **2** roule sans glisser sur **4** au point  $I$ , déterminer  $\omega$  en fonction de  $\omega_1$ ,  $d$  et  $\lambda$ .

**Question 3** Quelle relation obtient-on entre  $\omega_1$ ,  $\omega_3$  et  $\omega$  en exprimant l'engrènement des deux roues dentées? (c'est à dire que **2** et **3** roulent sans glisser l'un sur l'autre en  $J$ ).

**Question 4** En déduire le rapport de variation  $\frac{\omega_3}{\omega_1}$  du mécanisme en fonction de  $\lambda$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  et  $d$ .

**Question 5** Tracer la courbe représentative du rapport de variation  $\frac{\omega_3}{\omega_1}$  du mécanisme en fonction de  $\lambda$ , sachant que  $\frac{n}{n_3} = \frac{d_1}{d_3}$ ,  $d = 55 \text{ mm}$  et que  $\lambda$  varie entre  $\lambda_{\min} = 12 \text{ mm}$  et la valeur  $\lambda_{\max} = 23 \text{ mm}$ .

Corrigé voir 22.

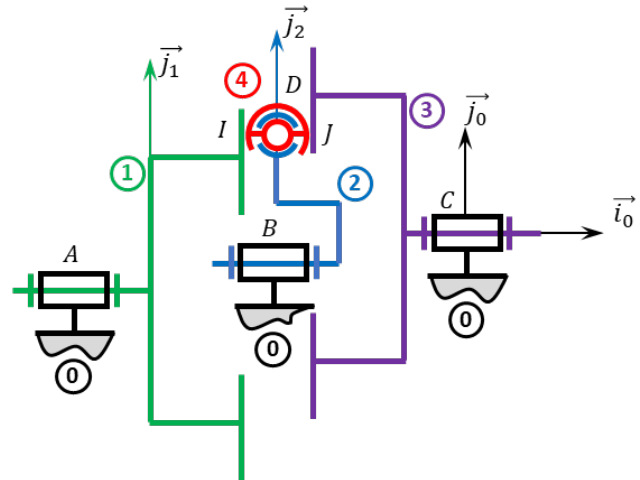
### Exercice 11 – Variateur à billes \*\*\*\*\*

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer la loi entrée – sortie.

Corrigé voir 22.

## 2.3 Proposer une démarche de résolution

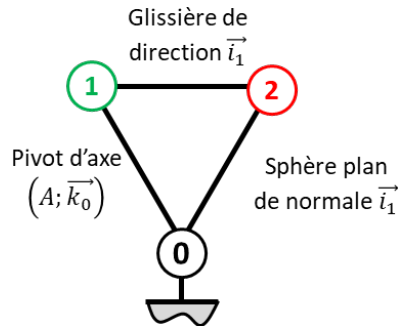
## 2.4 Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

### 2.4.1 Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques

#### Exercice 12 – Pompe à piston radial \*

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

On a  $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}$  soit  $-e \vec{i}_0 + \lambda \vec{i}_1 - R \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow -e \vec{i}_0 + \lambda(t) \cos \theta(t) \vec{i}_0 + \lambda(t) \sin \theta(t) \vec{j}_0 - R \cos \varphi(t) \vec{i}_0 - R \sin \varphi(t) \vec{j}_0 = \vec{0}$ .

En projetant les expressions sur  $\vec{i}_0$  et  $\vec{j}_0$ , on a :

$$\begin{cases} -e + \lambda(t) \cos \theta(t) - R \cos \varphi(t) = 0 \\ \lambda(t) \sin \theta(t) - R \sin \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

On cherche à supprimer  $\varphi(t)$ ; donc

$$\begin{cases} -e + \lambda(t) \cos \theta(t) = R \cos \varphi(t) \\ \lambda(t) \sin \theta(t) = R \sin \varphi(t) \end{cases}$$

En élevant au carré les expressions et en sommant, on obtient  $R^2 = (-e + \lambda(t) \cos \theta(t))^2 + \lambda(t)^2 \sin^2 \theta(t) \Rightarrow R^2 = (-e + \lambda(t) \cos \theta(t))^2 + \lambda(t)^2 \sin^2 \theta(t)$

$$\Rightarrow R^2 = e^2 - 2e\lambda(t) \cos \theta(t) + \lambda(t)^2$$

Résolution de l'équation :  $\lambda(t)^2 - 2e\lambda(t) \cos \theta(t) + e^2 - R^2 = 0$ .

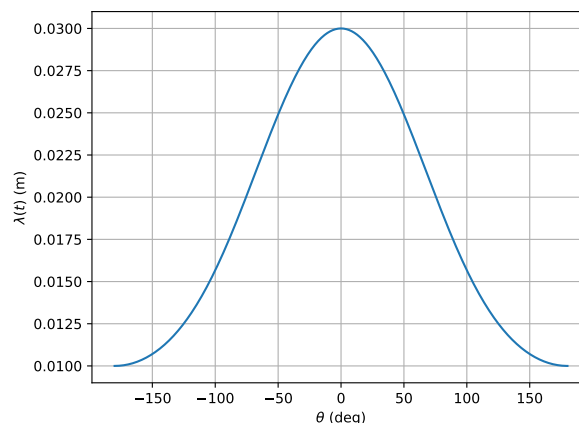
$$\text{On a } \Delta = (-2e \cos \theta(t))^2 - 4(e^2 - R^2) = 4e^2 \cos^2 \theta(t) - 4e^2 + 4R^2$$

On a donc

$$\lambda(t) = \frac{2e \cos \theta(t) \pm \sqrt{4e^2 \cos^2 \theta(t) - 4e^2 + 4R^2}}{2}$$

$$= e \cos \theta(t) \pm \sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}$$

Question 3 En utilisant Python, tracer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ . On garde la solution positive et obtient la courbe suivante.



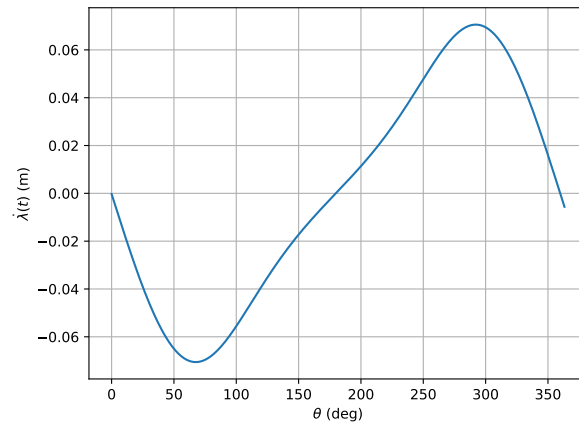
Question 4 Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

En dérivant l'expression précédente, on a  $\dot{\lambda}_+(t) = -e \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \frac{1}{2} (e^2 \cos^2 \theta(t))' (e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= -e \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) - \frac{e^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{e^2 \cos^2 \theta(t) - e^2 + R^2}}$$

À revoir

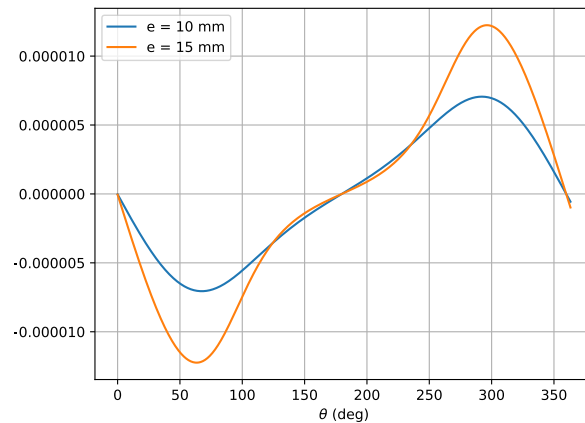




**Question 5** Exprimer le débit instantané de la pompe.

Le débit instantané de la pompe est donné par  $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$ .

**Question 6** En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour  $e = 10$  mm et  $e = 15$  mm.



**Question 7** En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour  $e = 10$  mm pour une pompe à 5 pistons (5 branches 1+2).

```
def plot_debit5p():
    plt.cla()
    w = 2*m.pi # rad/s (1tr/s)
    les_t = np.linspace(0,6,6000)
    les_theta = w*les_t

    # Calcul de la vitesse instantanée des pistons.
    les_lambda = calc_lambda(les_theta)
    les_lambdap = calc_lambdap_bis(les_t, les_lambda)
    les_lambdap = np.array(les_lambdap)

    S= 1e-4 # Surface en m2

    # 5 courbes de débit décalées d'un cinquième de tour
    les_q1 = S*les_lambdap
    les_q2 = S*les_lambdap[200:]
    les_q3 = S*les_lambdap[400:]
    les_q4 = S*les_lambdap[600:]
    les_q5 = S*les_lambdap[800:]

    # On conserve que les valeurs que sur un tour
    les_q1 = les_q1[:1000]
    les_q2 = les_q2[:1000]
    les_q3 = les_q3[:1000]
```



```
les_q4 = les_q4[:1000]
les_q5 = les_q5[:1000]
plt.grid()

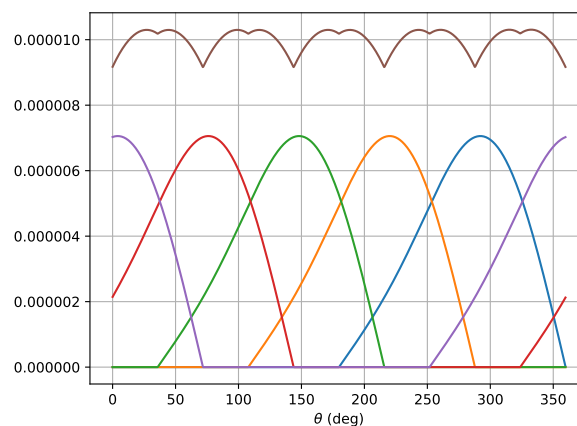
les_t = les_t[:1000]
les_theta = les_theta[:1000]

plt.xlabel("$\\theta$(deg)")
plt.ylabel("Débit instantané $m^3s^{-1}$")

# On conserve que les valeurs positives (débit)
for i in range(len(les_q1)):
    if les_q1[i]<0:
        les_q1[i]=0
    if les_q2[i]<0:
        les_q2[i]=0
    if les_q3[i]<0:
        les_q3[i]=0
    if les_q4[i]<0:
        les_q4[i]=0
    if les_q5[i]<0:
        les_q5[i]=0

plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q1)
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q2)
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q3)
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q4)
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q5)

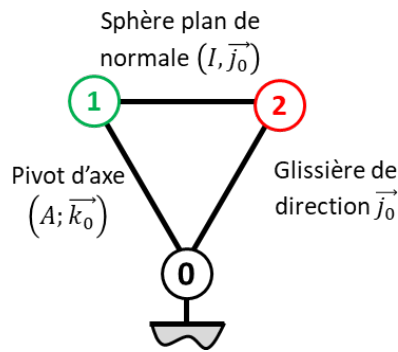
# Le débit instantané est la somme des contributions
plt.plot(np.degrees(les_theta), les_q1+les_q2+les_q3+les_q4+les_q5)
plt.show()
plt.savefig("10_05_c.pdf")
```



### Exercice 13 – Pompe à piston axial \*

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.



**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

En écrivant la fermeture géométrique, on a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ .

On a donc,  $e \vec{i}_1 + R \vec{j}_0 + \mu \vec{i}_0 - \lambda(t) \vec{j}_0 = \overrightarrow{0}$ . En projetant l'expression sur  $\vec{j}_0$  (dans ce cas, l'expression suivant  $\vec{i}_0$  n'est pas utile) :  $e \sin \theta + R - \lambda(t) = 0$ .

On a donc,  $\lambda(t) = e \sin \theta + R$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

En dérivant l'expression précédente, on a  $\dot{\lambda}(t) = e \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$ .

**Question 4** On note  $S$  la section du piston 2. Exprimer le débit instantané de la pompe.

En notant  $q(t)$  le débit instantané,  $q(t) = e S \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$ .

**Question 5** En utilisant Python, tracer le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour  $e = 10$  mm et  $R = 10$  mm ainsi que pour  $e = 20$  mm et  $R = 5$  mm. La fréquence de rotation est  $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$ , la section du piston est donnée par  $S = 1 \text{ cm}^2$ .

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""11_PompePistonAxial.py"""

__author__ = "Xavier_Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.02 # m
e = 0.01 # m

def calc_lambda(theta):
    res= e*np.sin(theta)+R

    return res

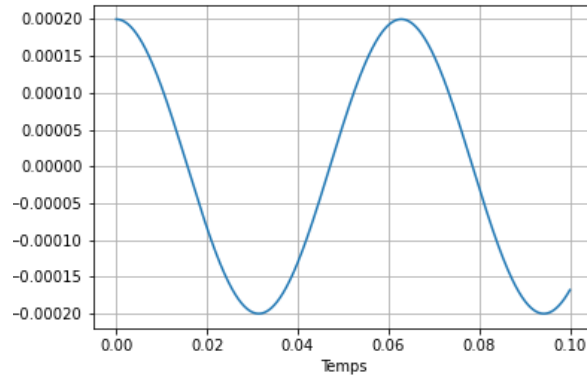
def calc_lambdap(theta,w):

    res = e*w*np.cos(theta)
    return res

def plot_debit():
    plt.cla()
    w = 100 # rad/s
    les_t = np.linspace(0,0.1,1000)
    les_theta = w*les_t
    global e
    S = 1e-4
    e = 20e-3
    les_q = e*S*w*np.cos(les_theta)
    plt.plot(les_t,les_q)
    plt.xlabel("Temps(s)")
    plt.ylabel("Débit_t($\text{m}^3\text{s}^{-1}$)")
    plt.grid()
```

```
plt.savefig("11_02_c.png")
plt.show()

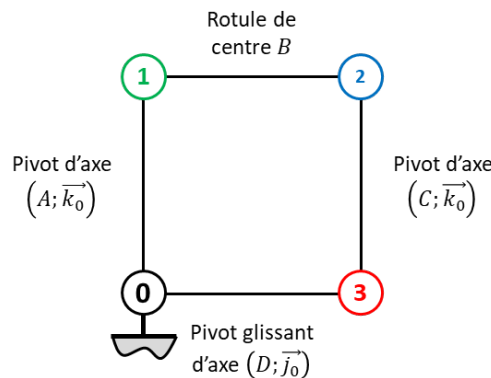
plot_debit()
```



## Exercice 14 – Système bielle manivelle \*\*

C2-06

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.



Question 2 Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

En réalisant une fermeture géométrique, on obtient  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow R \overrightarrow{i_1} - L \overrightarrow{i_2} - \lambda(t) \overrightarrow{j_0} = \overrightarrow{0}$ . On projette alors cette expression dans  $\mathcal{R}_0$  :

$$\begin{cases} R \cos \theta(t) - L \cos \varphi(t) = 0 \\ R \sin \theta(t) - L \sin \varphi(t) - \lambda(t) = 0 \end{cases}$$

On cherche à éliminer  $\varphi(t)$  :

$$\begin{cases} R \cos \theta(t) = L \cos \varphi(t) \\ R \sin \theta(t) - \lambda(t) = L \sin \varphi(t) \end{cases}$$

En élevant au carré, on a donc

$$\begin{cases} R^2 \cos^2 \theta(t) = L^2 \cos^2 \varphi(t) \\ (R \sin \theta(t) - \lambda(t))^2 = L^2 \sin^2 \varphi(t) \end{cases}$$

En conséquence,  $R^2 \cos^2 \theta(t) + (R \sin \theta(t) - \lambda(t))^2 = L^2$  et

$$(R \sin \theta(t) - \lambda(t))^2 = L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t) \Rightarrow \lambda(t) = \pm \sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)} + R \sin \theta(t).$$

Question 3 Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .  $\dot{\lambda}(t) = \pm \left( \frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)}} \right) + \dot{\theta}(t) R \cos \theta(t)$

Question 4 En utilisant Python, tracer la vitesse du piston en fonction du temps. La fréquence de rotation est  $\dot{\theta}(t) = 100 \text{ rad s}^{-1}$ , on prendra  $R = 10 \text{ mm}$  et  $L = 20 \text{ mm}$  puis  $L = 30 \text{ mm}$ .

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

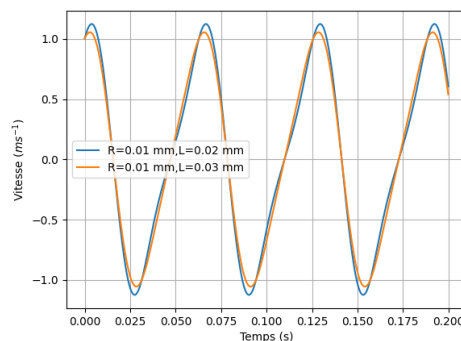
"""12_BielleManivelle.py"""
__author__ = "Xavier_Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

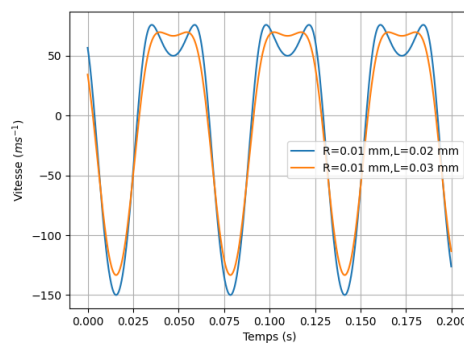
R = 0.01 # m
L = 0.03 # m
w = 100
def calc_lambda(theta):
    #res = R*np.sin(theta)
    #print(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))
    #res = res + np.sqrt(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))
    res = np.sqrt(L*L-R*R*np.cos(theta)*np.cos(theta))+R*np.sin(theta)
    return res

def plot_lambda():
    les_theta=np.linspace(-2*np.pi,2*np.pi,1000)
    les_l = [calc_lambda(x) for x in les_theta]
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Vitesse (m.s-1)")
    plt.plot(les_theta, les_l, label=str("R=")+str(R)+"mm, "+str("L=")+str(L)+"mm")
    plt.legend()
    plt.show()

plot_lambda()
```



**Question 5** En utilisant Python, tracer l'accélération du piston en fonction du temps en utilisant les mêmes valeurs que dans la question précédente. On utilisera une dérivation numérique.



### Exercice 15 – Pompe oscillante ★

C2-06

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\lambda}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

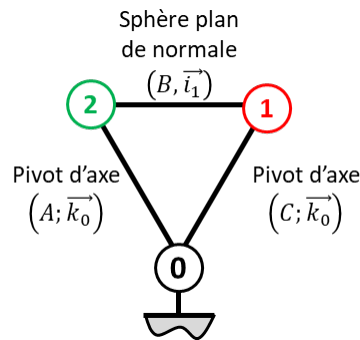
**Question 4** Exprimer le débit instantané de la pompe.

**Question 5** En utilisant Python, donner le débit instantané de la pompe pour un tour de pompe pour un piston de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$ .

### Exercice 16 – Barrière Sympact \*

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.



**Question 2** Exprimer  $\varphi(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ . On a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$  soit  $\lambda(t)\vec{i}_2 - R\vec{i}_1 - h\vec{j}_0 = \overrightarrow{0}$ .

En exprimant l'équation vectorielle dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , on a  $\lambda(t)(\cos\varphi(t)\vec{i}_0 + \sin\varphi(t)\vec{j}_0) - R(\cos\theta(t)\vec{i}_0 + \sin\theta(t)\vec{j}_0) - h\vec{j}_0 = \overrightarrow{0}$ .

$$\text{On a alors } \begin{cases} \lambda(t)\cos\varphi(t) - R\cos\theta(t) = 0 \\ \lambda(t)\sin\varphi(t) - R\sin\theta(t) - h = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \lambda(t)\cos\varphi(t) = R\cos\theta(t) \\ \lambda(t)\sin\varphi(t) = R\sin\theta(t) + h \end{cases}$$

En faisant le rapport des équations, on a donc :  $\tan\varphi(t) = \frac{R\sin\theta(t) + h}{R\cos\theta(t)}$  (pour  $\theta(t) \neq \frac{\pi}{2} \text{ mod } \pi$ ).

**Question 3** Exprimer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On a :  $\varphi(t) = \arctan\left(\frac{R\sin\theta(t) + h}{R\cos\theta(t)}\right)$ .

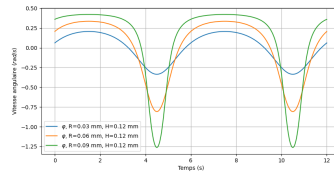
Pour commencer,  $(R\sin\theta(t) + h)' = R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$  et  $(R\cos\theta(t))' = -R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)$ .

$$\begin{aligned} \text{De plus, } \left(\frac{R\sin\theta(t) + h}{R\cos\theta(t)}\right)' &= \frac{R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)R\cos\theta(t) + R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)(R\sin\theta(t) + h)}{R^2\cos^2\theta(t)} \\ &= \frac{R^2\dot{\theta}(t)\cos^2\theta(t) + R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)(R\sin\theta(t) + h)}{R^2\cos^2\theta(t)} \\ &= \frac{R\dot{\theta}(t)\cos^2\theta(t) + R\sin^2\theta(t)\dot{\theta}(t) + h\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)} \\ &= \dot{\theta}(t) \frac{R + h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}. \end{aligned}$$

Au final,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \frac{\dot{\theta}(t) \frac{R + h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{1 + \left(\frac{R\sin\theta(t) + h}{R\cos\theta(t)}\right)^2} = \frac{\dot{\theta}(t) \frac{R + h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{1 + \frac{(R\sin\theta(t) + h)^2}{R^2\cos^2\theta(t)}} \\ \dot{\varphi}(t) &= R^2\cos^2\theta(t) \frac{\dot{\theta}(t) \frac{R + h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{R^2\cos^2\theta(t) + \frac{(R\sin\theta(t) + h)^2}{R^2\cos^2\theta(t)}} = \frac{R\dot{\theta}(t)(R + h\sin\theta(t))}{R^2\cos^2\theta(t) + (R\sin\theta(t) + h)^2} \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{R\dot{\theta}(t)(R + h\sin\theta(t))}{R^2\cos^2\theta(t) + R^2\sin^2\theta(t) + h^2 + 2Rh\sin\theta(t)} = \frac{R\dot{\theta}(t)(R + h\sin\theta(t))}{R^2 + h^2 + 2Rh\sin\theta(t)}. \end{aligned}$$

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.



```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""14_Sympact.py"""

__author__ = "Xavier_Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.03 # m
H = 0.12 # m
w = 10 # tours /min
w = 10*2*m.pi/60 # rad/s

def calc_phi(theta):
    num = R*np.sin(theta)+H
    den = R*np.cos(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def calc_phiip(theta):
    num = R*w*(R+H*np.sin(theta))
    den = R*R+H*H+2*R*H*np.sin(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def plot_phi():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phi = calc_phi(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Position angulaire ($rad$)")
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phi,label=str("$\\varphi$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.legend()
    plt.show()

def plot_phiip():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phiip = calc_phiip(les_theta)

    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Vitesse angulaire ($rad/s$)")
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phiip,label=str("$\\varphi$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.legend()
    plt.show()

for R in [0.03,0.06,0.09]:
    plot_phiip()
```

## Exercice 17 – Barrière Sympact avec galet \*\*

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer  $\varphi(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

Question 3 Exprimer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

Question 4 En utilisant la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer  $\gamma(t)$  et  $\dot{\gamma}(t)$ .

Question 5 En utilisant Python, tracer  $\dot{\varphi}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Exercice 18 – Pousoir \*

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer  $\mu(t)$  en fonction de  $\theta(t)$ .

Question 3 Exprimer  $\dot{\mu}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ .

Question 4 En utilisant Python, tracer  $\dot{\mu}(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Exercice 19 – Système 4 barres \*\*

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Exprimer  $\theta_1(t)$  en fonction de  $\theta_4(t)$ .

Question 3 Exprimer  $\dot{\theta}_1(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}_4(t)$ .

Question 4 En utilisant Python, tracer  $\dot{\theta}_1(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}_4(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

Exercice 20 – Maxpid \*\*\*

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Par ailleurs  $a = 107,1$  mm,  $b = 80$  mm,  $c = 70$  mm,  $d = 80$  mm. Le pas de la vis est de 4 mm.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons. Question 2 Exprimer  $\theta(t)$  en fonction de  $\lambda(t)$ .

Question 3 Exprimer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\dot{\lambda}(t)$ .

Question 4 Exprimer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\omega(t)$ , vitesse de rotation du rotor moteur 2 par rapport au stator 1.

Question 5 En utilisant Python, tracer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\omega(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 2 par rapport à 1 est de 500 tours par minute.

Exercice 21 – Variateur de Graham\*\*\*

D'après ressources de Michel Huguet.

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 En exprimant que 2 roule sans glisser sur 4 au point I, déterminer  $\omega$  en fonction de  $\omega_1$ ,  $d$  et  $\lambda$ .

Question 3 Quelle relation obtient-on entre  $\omega_1$ ,  $\omega_3$  et  $\omega$  en exprimant l'engrènement des deux roues dentées ? (c'est à dire que 2 et 3 roulent sans glisser l'un sur l'autre en J).

Question 4 En déduire le rapport de variation  $\frac{\omega_3}{\omega_1}$  du mécanisme en fonction de  $\lambda$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  et  $d$ .

Question 5 Tracer la courbe représentative du rapport de variation  $\frac{\omega_3}{\omega_1}$  du mécanisme en fonction de  $\lambda$ , sachant

que  $\frac{n}{n_3} = \frac{d_1}{d_3}$ ,  $d = 55$  mm et que  $\lambda$  varie entre  $\lambda_{\min} = 12$  mm et la valeur  $\lambda_{\max} = 23$  mm.

Exercice 22 – Variateur à billes \*\*\*\*\*

B2-13

C2-05

C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 Tracer le graphe des liaisons.

Question 2 Déterminer la loi entrée – sortie.