0.1 Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert

Exercice 1 – Moteur à courant continu⋆

B2-04 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + R\,i(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$;
- $e(t) = K\omega(t)$;
- $c(t) = K\,i(t)$;
- $c(t) - f\omega(t) = J\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}$.

Question 1 *Exprimer la fonction de transfert* $H(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$.

Question 2 *Mettre $H(p)$ sous forme canonique.*

Question 3 *Préciser l'ordre et la classe de H.*

Question 4 *Donner les caractéristiques de la fonction de transfert.*

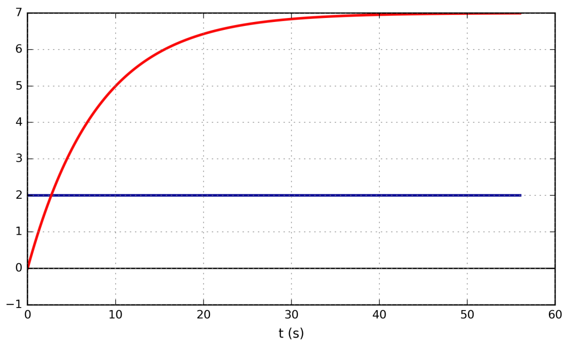
Corrigé voir 10.

0.2 B2-06 – Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle

Exercice 2 – Moteur à courant continu⋆

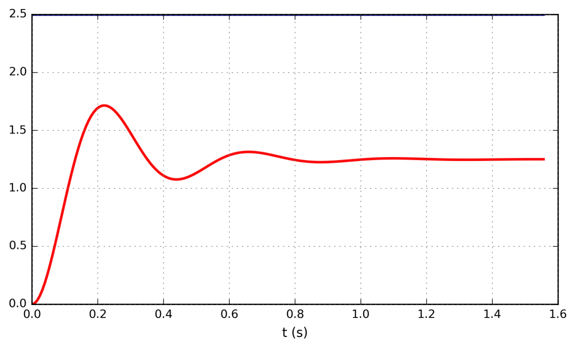
B2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit la réponse à un échelon.



Question 1 *Déterminer la fonction de transfert du système.*

Soit la réponse à un échelon d'amplitude 2,5.



Question 2 *Déterminer la fonction de transfert du système.*

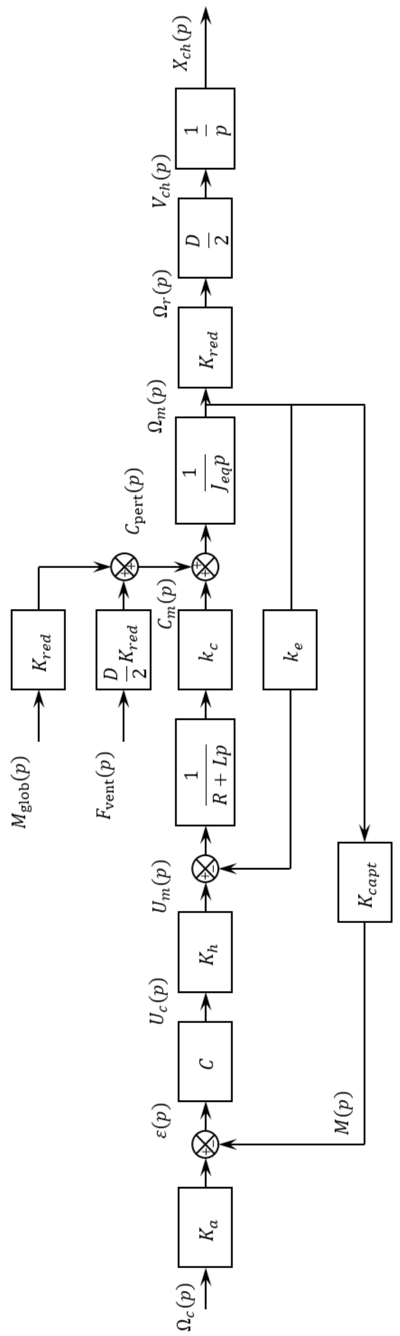
Corrigé voir 11.

0.3 Modéliser un système par schéma-blocs.

Exercice 3 – La Seine Musicale⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le schéma-blocs suivant.



Question 1 *En considérant que la perturbation $C_{pert}(p)$ est nulle, déterminer $H_f(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$ sous forme canonique.*

Question 2 *Exprimer la fonction de transfert $H_r(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$ en la mettant sous la forme : $H_r(p) = -\dfrac{\alpha(1+\tau p)}{1+\gamma p + \delta p^2}$. Exprimer α, τ, γ et δ en fonction des différents paramètres de l'étude.*

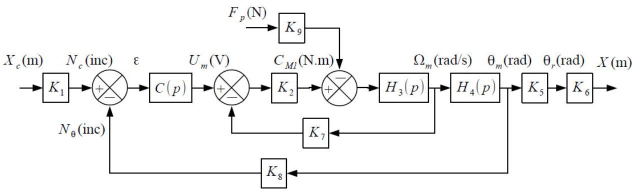
Question 3 *Exprimer $X_{ch}(p)$ en fonction de $\Omega_m(p)$ et $C_{pert}(p)$.*

Corrigé voir 12.

Exercice 4 – Machine de rééducation SysReeduc ⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

On propose une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$, $e(t) = k_e\omega_m(t)$ et $C_{M1}(t) = k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

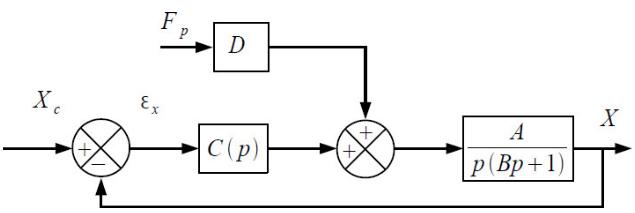
$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1 = \dfrac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r = 46{,}1$ mm le rayon de la poulie du transmetteur poulie–courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 *À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.*

Question 2 *Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.*

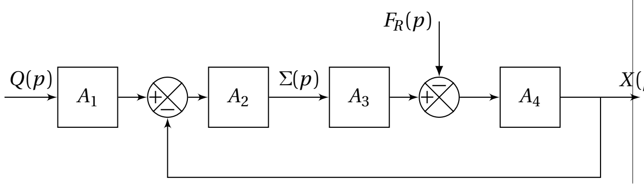


Corrigé voir 13.

Exercice 5 – Quille pendulaire⋆

B2-07

Le comportement d'un vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V}{2B}\dfrac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}$ (a) ;
- $M\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} - f_R(t)$ (b).

On a :

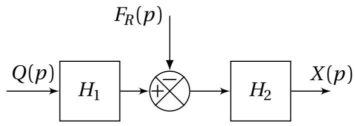
- $\mathscr{L}\left(q(t)\right) = Q(p)$: débit d'alimentation du vérin $\left[\mathrm{m^3 s^{-1}}\right]$;
- $\mathscr{L}\left(\sigma(t)\right) = \Sigma(p)$: différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa] ;
- $\mathscr{L}\left(x(t)\right) = X(p)$: position de la tige du vérin [m] ;
- $\mathscr{L}\left(f_R(t)\right) = F_R(p)$: composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

Les constantes sont les suivantes :

- S : section du vérin $\left[\mathrm{m^2}\right]$;
- k : raideur mécanique du vérin $\left[\mathrm{N\,m^{-1}}\right]$;
- V : volume d'huile de référence $\left[\mathrm{m^3}\right]$;
- B : coefficient de compressibilité de l'huile $\left[\mathrm{N\ m^{-2}}\right]$;
- M : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg] ;
- λ : coefficient de frottement visqueux$\left[\mathrm{N\,m^{-1}s}\right]$.

Question 1 *Donner les expressions des fonctions de transfert A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.*

Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



Question 2 *Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1, A_2, A_3 et A_4, puis de la variable p et des constantes.*

Question 3

Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Corrigé voir 13.

Exercice 6 – Moteur à courant continu⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$;
- $e(t) = K\omega(t)$;
- $c(t) = Ki(t)$;
- $c(t) - f\omega(t) = J\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}$.

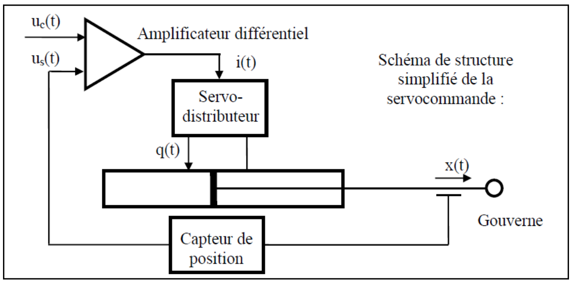
Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*

Corrigé voir 15.

Exercice 7 – Vérin⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

On donne le schéma de principe d'une servo-commande.



Les différentes équations temporelles qui modélisent le fonctionnement d'une servocommande sont :

- un amplificateur différentiel défini par : $u_c(t) = \dfrac{i(t)}{K_a} + u_s(t)$;
- débit dans le vérin dans le cas d'une hypothèse de fluide incompressible $q(t) = S \cdot \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$;
- capteur de position : $u_s(t) = K_c \cdot x(t)$;
- le servo-distributeur est un composant de la chaîne de commande conçu pour fournir un débit hydraulique $q(t)$ proportionnel au courant de commande $i(t)$. (Attention, valable uniquement en régime permanent.) Le constructeur fournit sa fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{K_d}{1+Tp}$$

où K_d est le gain du servo-distributeur et T sa constante de temps.

Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*

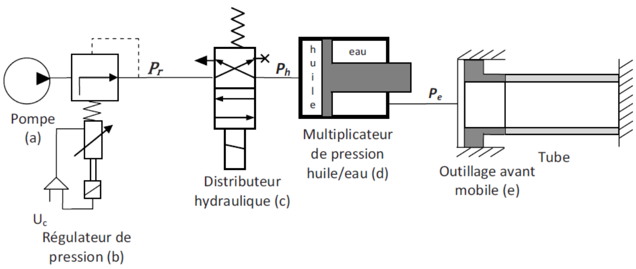
Corrigé voir 16.

Exercice 8 – Vérin⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Analyse de la fonction technique « mettre le tube sous pression ».

Un schéma hydraulique simplifié est donné figure suivante.



Mise en place du modèle

Les équations du débit sont :

$$Q_e(t) = S_e \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{V_{e0}}{B_e}\frac{\mathrm{d}P_e(t)}{\mathrm{d}t}$$

et

$$Q_h(t) = S_h \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{V_{h0}}{B_h}\frac{\mathrm{d}P_h(t)}{\mathrm{d}t}.$$

En appliquant le théorème de la résultante dynamique selon $\overrightarrow{z}$ sur le piston du multiplicateur, on a : $M\ddot{z}(t) = S_h p_h(t) - S_e p_e(t) - Mg - f\dot{z}(t)$.

Question 1 *Déduire de la relation précédente l'équation reliant $Z(p)$, $P_e(p)$, $P_h(p)$, et $Poids(p) = Mg/p$, transformées de Laplace de $z(t)$, $P_e(t)$, $P_h(t)$ et du poids perçu comme une perturbation. Les conditions initiales sont supposées nulles.*

On note :

- $L(t)$ la position de l'équipage mobile repérée par rapport à sa position initiale;
- $V_t(t)$ le volume du tube;
- $F_t(t)$ l'effort du tube sur l'équipage mobile, avec $F_t(t) = -rL(t)$.

On néglige les variations de volume du tube dues à ses déformations. L'équation du débit s'écrit alors :

$$Q_e(t) = (S_a - S_b).\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{V_t}{B_e}\frac{\mathrm{d}P_e(t)}{\mathrm{d}t}.$$

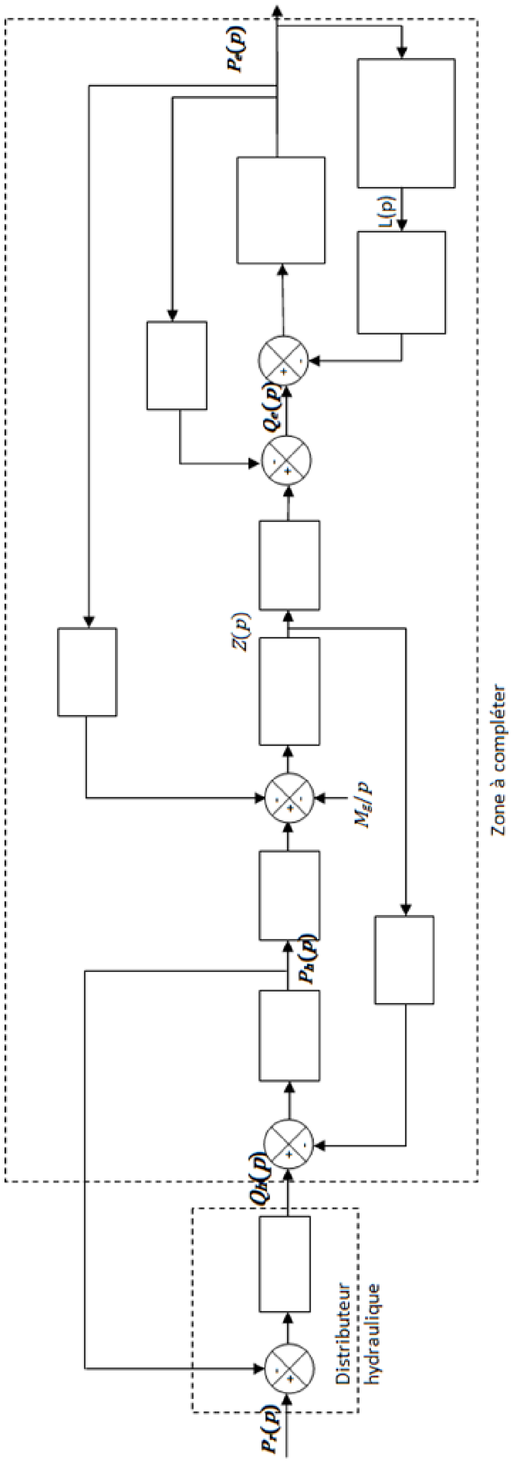
L'équation du mouvement de l'équipage mobile est donnée par :

$$m\ddot{L}(t) = -rL(t) + (S_a - S_b)p_e(t) - f'\dot{L}(t).$$

Question 2 *En déduire, en tenant compte de l'équation du débit, deux équations liant $L(p)$, $P_e(p)$ et $Q_e(p)$, transformées de Laplace de $L(t)$, $P_e(t)$ et $Q_e(t)$.*
Les conditions initiales sont supposées nulles.

Question 3 *Compléter le schéma-blocs de l'ensemble (sans le distributeur hydraulique), l'entrée étant la pression d'huile régulée $P_r(p)$ et la sortie la pression d'épreuve dans le tube $P_e(p)$.*

Modéliser



Corrigé voir 16.

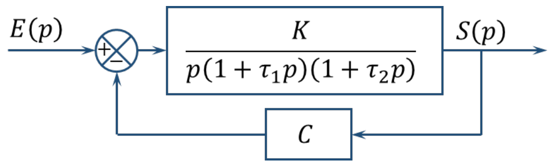
0.4 Déterminer les performances d'un système asservi

Exercice 9 – Vérin⋆

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma-blocs suivant.



Question 1 *Déterminer la valeur finale de $s(t)$ lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude E_0.*

Question 2 *Déterminer la valeur finale de $s(t)$ lorsque l'entrée est une rampe de pente k.*

Corrigé voir 18.

0.5 Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert

Exercice 10 – Moteur à courant continu⋆

B2-04 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Exprimer la fonction de transfert* $H(p)=\dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$.

Question 2 *Mettre* $H(p)$ *sous forme canonique.*

Question 3 *Préciser l'ordre et la classe de* H.

Question 4 *Donner les caractéristiques de la fonction de transfert.*

0.6 B2-06 – Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle

Exercice 11 – Moteur à courant continu⋆

B2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Déterminer la fonction de transfert du système.*

Question 2 *Déterminer la fonction de transfert du système.*

0.7 Modéliser un système par schéma-blocs.

Exercice 12 – La Seine Musicale⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *En considérant que la perturbation* $C_{pert}(p)$ *est nulle, déterminer* $H_f(p)=\dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$ *sous forme canonique.*

Question 2 *Exprimer la fonction de transfert* $H_r(p)=\dfrac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$ *en la mettant sous la forme :* $H_r(p)=-\dfrac{\alpha(1+\tau p)}{1+\gamma p+\delta p^2}$. *Exprimer* α, τ, γ *et* δ *en fonction des différents paramètres de l'étude.*

Question 3 *Exprimer* $X_{ch}(p)$ *en fonction de* $\Omega_m(p)$ *et* $C_{pert}(p)$.

Exercice 13 – Machine de rééducation SysReeduc ⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert* K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 *et* K_9.

On a :

- $u_m(t)=e(t)+Ri(t)\Rightarrow U_m(p)=E(p)+RI(p)$ et $C_{M1}(p)=k_tI(p)$ donc $K_2=\dfrac{k_t}{R}$;
- $E(p)=k_e\Omega_m(p)$ et donc $K_7=k_e$;
- $(M+m)r\rho_1p\Omega_m(p)=\dfrac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r}-F_p(p)\Leftrightarrow(M+m)r^2\rho_1^2p\Omega_m(p)=C_{M1}(p)-\rho_1 rF_p(p)$ et donc $K_9=\rho_1 r$ et $H_3(p)=\dfrac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p)=\dfrac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8=\dfrac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5=\rho_1$ et $K_6=r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incréments. X_c est la consigne que doit respectée X. Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon=0$ et $X=X_c$ soit $\varepsilon=0=K_1X_C-K_8\theta_m=K_1X_C-K_8\dfrac{X}{K_5K_6}$. Au final, $K_1=\dfrac{K_8}{K_5K_6}$.

Question 2 *Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera* A, B *et* D *en fonction des paramètres du système* r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m *et* K_8.

Correction

Exercice 14 – Quille pendulaire⋆

B2-07

Question 1 *Donner les expressions des fonctions de transfert A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.*

Correction D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace : $Q(p) = SpX(p) + \dfrac{V}{2B} p\Sigma(p)$ et $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$.

En utilisant le schéma-blocs, on a $\Sigma(p) = A_2\left(A_1Q(p) - X(p)\right) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$.

Par ailleurs $\Sigma(p) = \dfrac{Q(p) - SpX(p)}{\dfrac{V}{2B}p} = Q(p)\dfrac{2B}{Vp} - X(p)\dfrac{S2B}{V}$. On a donc $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_1A_2 = \dfrac{2B}{Vp}$ soit $A_1 = \dfrac{2B}{Vp}\dfrac{V}{S2B} = \dfrac{1}{Sp}$.

On a aussi $X(p) = A_4\left(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)\right) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$. Par ailleurs, $X(p)\left(Mp^2 + \lambda p + k\right) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \dfrac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \dfrac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$. On a donc : $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ et $A_3 = S$.

Au final, $A_1 = \dfrac{1}{Sp}$, $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

Question 2 *Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1, A_2, A_3 et A_4, puis de la variable p et des constantes.*

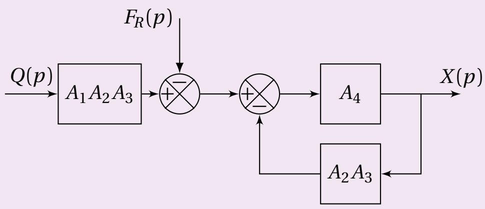
Correction **Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes** On a $X(p) = \left(H_1Q(p) - F_R(p)\right)H_2(p)$.

Par ailleurs, on a vu que $X(p) = A_4\left(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)\right)$ et $\Sigma(p) = A_2\left(A_1Q(p) - X(p)\right)$.

On a donc $X(p) = A_4\left(-F_R(p) + A_3A_2\left(A_1Q(p) - X(p)\right)\right) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) = A_4\left(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p)\right)$. On a donc $H_1(p) = A_1A_2A_3$ et $H_2 = \dfrac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$.

Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs Revient à utiliser la méthode précédente.

Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$A_1 = \dfrac{1}{Sp}$, $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.

En faisant le calcul on obtient : $H_1(p) = \dfrac{2BS}{pV}$ et $H_2 = \dfrac{\dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \dfrac{2BS^2}{V}\dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \dfrac{2BS^2}{V}}$.

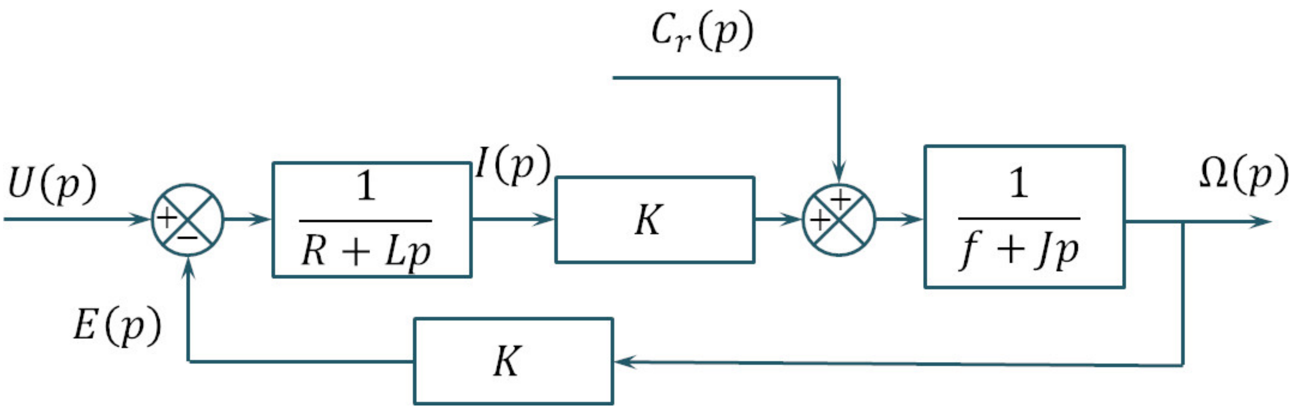
Question 3
Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

Correction Dans ce cas, $\dfrac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p)\dfrac{2BS}{p\left(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2\right)}$.

Exercice 15 – Moteur à courant continu⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*



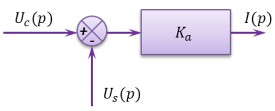
Exercice 16 – Vérin⋆

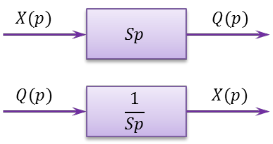
B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

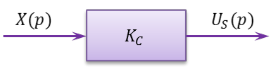
Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*

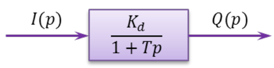
On a :

- $U_c(p)=\dfrac{1}{K_a}I(p)+U_s(p)$
- $Q(p)=SpX(p)$
- $U_S(p)=K_C\cdot X(p)$
- $F(p)=\dfrac{Q(p)}{I(p)}=\dfrac{K_d}{1+Tp}$









Exercice 17 – Vérin⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Déduire de la relation précédente l'équation reliant $Z(p)$, $P_e(p)$, $P_h(p)$, et Poids$(p)=Mg/p$, transformées de Laplace de $z(t)$, $P_e(t)$, $P_h(t)$ et du poids perçu comme une perturbation. Les conditions initiales sont supposées nulles.*

Correction $Mp^2Z(p))=S_hP_h(p)-S_eP_e(pt)-\dfrac{Mg}{p}-fpZ(p)$

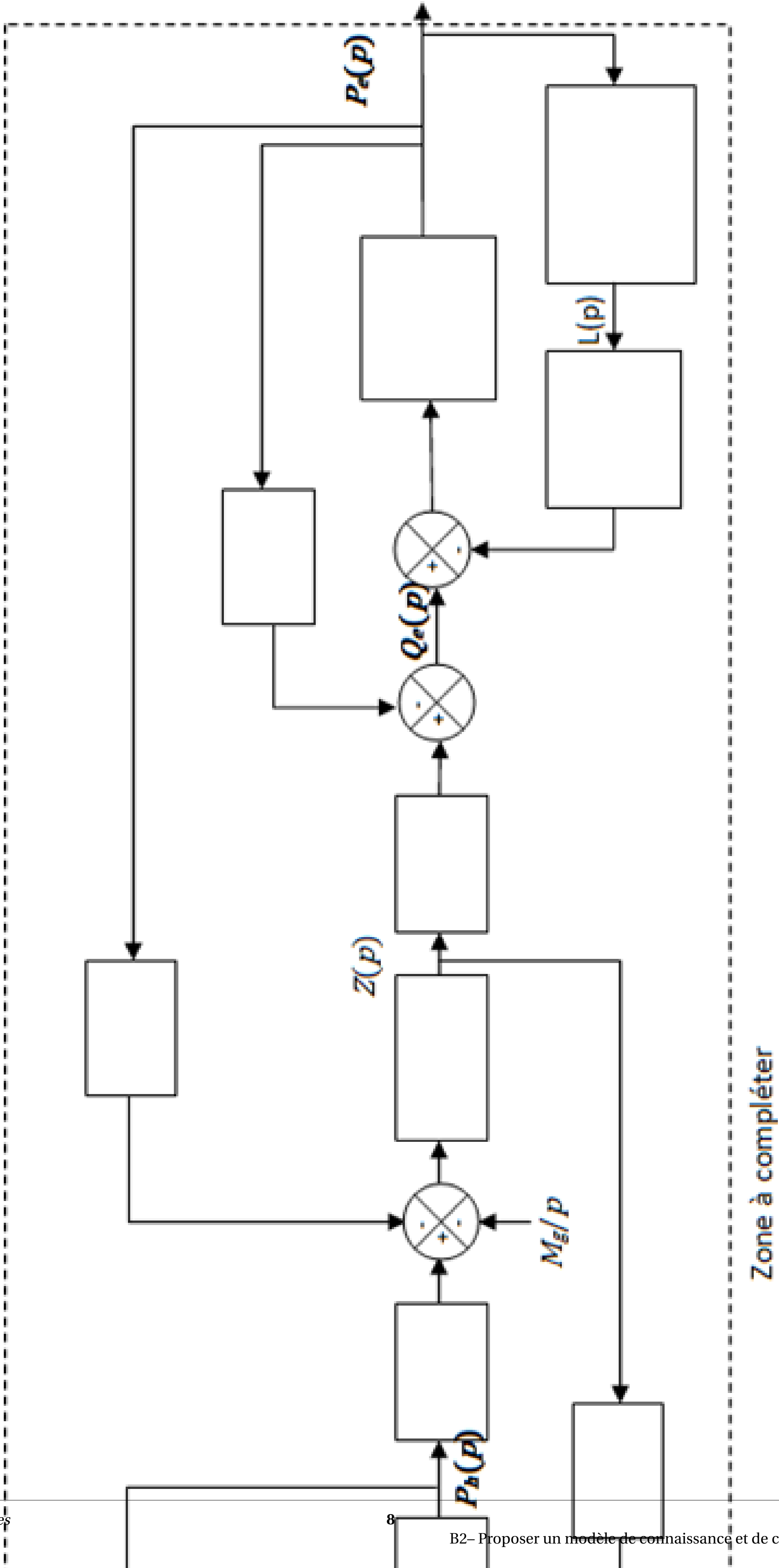
Question 2 *En déduire, en tenant compte de l'équation du débit, deux équations liant $L(p)$, $P_e(p)$ et $Q_e(p)$, transformées de Laplace de $L(t)$, $P_e(t)$ et $Q_e(t)$.*

Correction $Q_e(p)=(S_a-S_b)pL(p)+\dfrac{V_t}{B_e}pP_e(p)$

Les conditions initiales sont supposées nulles.

Question 3 *Compléter le schéma-blocs de l'ensemble (sans le distributeur hydraulique), l'entrée étant la pression d'huile régulée $P_r(p)$ et la sortie la pression d'épreuve dans le tube $P_e(p)$.*

Correction


$P_a(p)$
$L(p)$
$Q_e(p)$
$Z(p)$
M_E/p
$P_b(p)$
Zone à compléter

0.8 Déterminer les performances d'un système asservi

Exercice 18 – Vérin⋆

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 *Déterminer la valeur finale de* $s(t)$ *lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude* E_0.

Question 2 *Déterminer la valeur finale de* $s(t)$ *lorsque l'entrée est une rampe de pente* k.