CI 2 – SLCI : Étude du comportement des Systèmes Linéaires Continus Invariants

Devoir Maison 1 – Étude d'un amortisseur de moto

Éléments de corrigé

D'après ressources de David Violeau.

L'équation différentielle, obtenue en écrivant le principe fondamental de la dynamique sur la masse M, est la suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{f}{M}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{k}{M}y(t)=\frac{f(t)}{M}$$

avec f frottement visqueux, k raideur du ressort, $M=100\ kg$ masse de l'ensemble {moto+conducteur}, $f(t)$ action exercée sur la masse.

L'objectif de ce travail est donc de déterminer les paramètres f et k optimaux en analysant la réponse temporelle $y(t)$.

1 Préliminaires

On note $f(t)=Mg\cdot u(t)$ avec $u(t)$ fonction de Heaviside. On a donc, $f(t)=Mg$ pour $t>0$.

Question 1

Donner l'expression de $f(t)$ dans le domaine de Laplace.

Correction

On a $\forall t>0$, $F(p)=\dfrac{Mg}{p}$.

Question 2

En utilisant l'expression obtenue pour $f(t)$, passer l'équation dans le domaine de Laplace (on se place dans les conditions de Heaviside) et exprimer $Y(p)$ en fonction des données.

Correction

Dans le domaine de Laplace, pour $t>0$, on a $p^2Y(p)+\dfrac{f}{M}pY(p)+\dfrac{k}{M}Y(p)=\dfrac{g}{p}$

On a donc :

$$Y(p)=\frac{g}{p}\cdot\frac{1}{p^2+\dfrac{f}{M}p+\dfrac{k}{M}}$$

Question 3

En utilisant le théorème de la valeur initiale, déterminer la position initiale.

Correction

D'après le théorème de la valeur initiale, on a :

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{p\to+\infty} p\cdot Y(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{g}{p^2+\frac{f}{M}p+\frac{k}{M}} = 0$$

Question 4

En utilisant le théorème de la valeur finale, déterminer la position d'équilibre (position finale).

Correction

D'après le théorème de la valeur finale, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{p\to 0} p\cdot Y(p) = \lim_{p\to 0} \frac{g}{p^2+\frac{f}{M}p+\frac{k}{M}} = \frac{gM}{k}$$

Question 5

Déterminer la pente de $y(t)$ à l'origine.

Correction

La pente à l'origine correspond à la valeur initiale de la dérivée de $y(t)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{dy(t)}{dt} = \lim_{p\to+\infty} p\cdot p\cdot Y(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{g\cdot p}{p^2+\frac{f}{M}p+\frac{k}{M}} = 0$$

Il y a donc une asymptote horizontale à l'origine.

Question 6

Écrire $Y(p)$ (transformée de Laplace de $y(t)$) sous la forme $Y(p) = \dfrac{g}{p\left(p^2+2z\omega_0 p+\omega_0^2\right)}$. On exprimera ω_0 et z en fonction de f, k, M.

Correction

$$Y(p) = \frac{g}{p}\cdot\frac{1}{p^2+\frac{f}{M}p+\frac{k}{M}}$$

On identifie donc les coefficients : $2z\omega_0 = \dfrac{f}{M}$ et $\omega_0^2 = \dfrac{k}{M}$.

On a donc $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$ et $z = \dfrac{f}{2\omega_0 M} = \dfrac{f}{2\sqrt{\dfrac{k}{M}}M} = \dfrac{f}{2\sqrt{kM}}$.

Pour déterminer la réponse temporelle et étudier son allure, il est nécessaire de déterminer les racines du polynôme du second degré :

$$D(p) = p^2+2z\omega_0 p+\omega_0^2$$

Question 7

Déterminer la valeur de z (nombre positif par définition) à partir de laquelle les racines sont réelles.

Correction

Calculons le discriminant associé à $D(p)$:

$$\Delta = 4z^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(z^2-1\right).$$

Ainsi le $D(p)$ admet deux racines réelles lorsque $\Delta > 0$ et que $z > 1$.

2 Cas de racines réelles

On note $p_1 = -\dfrac{1}{T_1}$ et $p_2 = -\dfrac{1}{T_2}$ les deux racines réelles de $D(p)$, avec $T_1 < T_2$.

Question 8

Donner l'expression de T_1 et T_2 en fonction de ω_0 et z.

Correction

En résolvant $D(p) = 0$, on a :

$$p_1 = \frac{-2z\omega_0 - \sqrt{\Delta}}{2} \quad p_2 = \frac{-2z\omega_0 + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{avec} \quad \sqrt{\Delta} = 2\omega_0\sqrt{z^2-1}$$

On a alors :

$$p_1 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2-1} \quad p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2-1}$$

En conséquence,

$$T_1 = -\frac{1}{-z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{\omega_0\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)} \quad T_2 = -\frac{1}{-z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{\omega_0\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)}$$

Remarque : On a bien $T_1 < T_2$.

Question 9

Décomposer $Y(p)$ en éléments simples. On mettra $Y(p)$ sous la forme $Y(p) = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p-p_1} + \dfrac{C}{p-p_2}$. On exprimera A, B, C, p_1 et p_2 en fonction de T_1 et T_2.

Correction

On pose :

$$Y_1(p) = \frac{g}{p\left(p-p_1\right)\left(p-p_2\right)} \quad Y_2(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-p_1} + \frac{C}{p-p_2} \quad \text{avec} \quad Y(p) = Y_1(p) = Y_2(p)$$

1. On multiplie $Y_1(p)$ et $Y_2(p)$ par p puis on pose $p = 0$. On a alors $A = \dfrac{g}{p_1 p_2}$.
2. On multiplie $Y_1(p)$ et $Y_2(p)$ par $\left(p-p_1\right)$ puis on pose $p = p_1$. On a alors $B = \dfrac{g}{p_1\left(p_1-p_2\right)}$.
3. On multiplie $Y_1(p)$ et $Y_2(p)$ par $\left(p-p_2\right)$ puis on pose $p = p_2$. On a alors $C = \dfrac{g}{p_2\left(p_2-p_1\right)}$.

Correction

On peut alors réexprimer A, B et C :
- $A = gT_1T_2$;
- $B = \dfrac{g}{-\dfrac{1}{T_1}\left(-\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}\right)} = \dfrac{\dfrac{-gT_1}{T_1-T_2}}{T_1T_2} = \dfrac{gT_1^2T_2}{T_2-T_1}$
- $C = \dfrac{g}{-\dfrac{1}{T_2}\left(-\dfrac{1}{T_2}+\dfrac{1}{T_1}\right)} = \dfrac{\dfrac{-gT_2}{T_2-T_1}}{T_1T_2} = \dfrac{gT_1T_2^2}{T_1-T_2}$

En conséquences,

$$Y(p) = gT_1T_2\left(\frac{1}{p}+\frac{\dfrac{T_1}{T_2-T_1}}{p+\dfrac{1}{T_1}}+\frac{\dfrac{T_2}{T_1-T_2}}{p+\dfrac{1}{T_2}}\right)$$

Question 10

En déduire $y(t)$ en utilisant la transformée de Laplace inverse.

Correction

Dans le domaine temporel on a donc, pour $t > 0$:

$$y(t) = gT_1T_2\left(1+\frac{T_1}{T_2-T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

Question 11

Tracer l'allure de $y(t)$.

Correction

Question 12

À l'aide d'un logiciel adéquat (Libreoffice, Excel, gnuplot, ...), tracer l'évolution de $\dfrac{y(t)}{g/\omega_0^2}$.

On tracera deux graphiques (contenant plusieurs courbes) mettant en évidence :
- l'influence de z sur la réponse (en prenant $\omega_0 = 10\ rad/s$ et des valeurs de $z = \{1,1;1,5;2,3;5\}$) ;
- l'influence de ω_0 sur la réponse (en prenant $z = 1,5$ et des valeurs de $\omega_0 = \{0,5;1;2;5;10\}\ rad/s$).

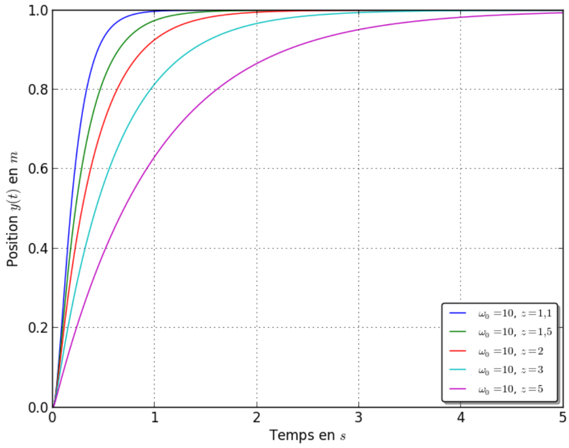
Correction

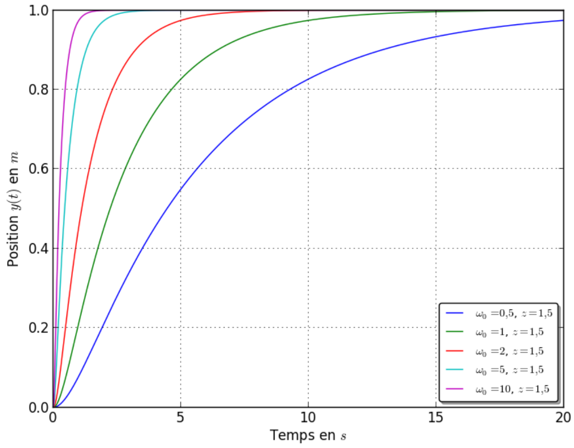
En utilisant les résultats de la question 8, on montre que $\omega_0^2 = \dfrac{1}{T_1\cdot T_2}$. En conséquence,

$$\frac{y(t)}{gT_1T_2} = 1+\frac{T_1}{T_2-T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$$

Correction

En utilisant la librairie matplotlib de python on obtient les courbes suivantes





Question 13

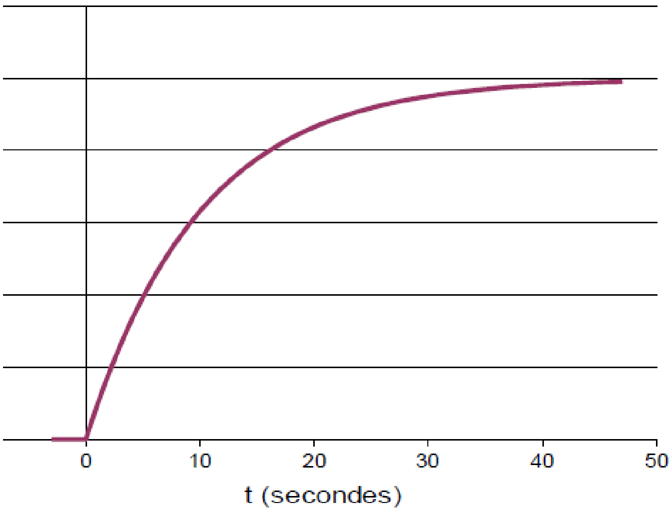
Quelle valeur de z permet d'obtenir un système rapide ?

Correction

On peut observer que le temps de réponse à 5% est le plus faible quand z tend vers 1.

Question 14 Facultatif

Sachant que l'allure de la réponse d'un système du premier ordre est la suivante. Donner les différences et les similitudes (on observera la pente à l'origine, la valeur asymptotique, l'allure, les dépassements). Que dire si une des racines est très grande devant l'autre ? ($T_2 >> T_1$).



Correction

	Premier ordre	Second ordre
Pente à l'origine	Non nulle	Nulle
Allure	Semblable	
Dépassement	Aucun	

Correction

Remarque : lorsque $\omega_0 = 10 rad/s$ on peut en déduire qu'une des racines devient négligeable devant l'autre. Le comportement de la sortie est donc proche du comportement d'un premier ordre.