DEVOIR SURVEILLÉ 3 – SYSTÈME DE FREINAGE DE L'AIRBUS A318

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

CI : 1 *AF : Fonctionnalités, architecture et structure des systèmes pluri techniques*
CI : 5 *Communication technique : schémas et géométrie des pièces*
CI : 7 *SLCI : Comportement et modélisation des systèmes automatiques. Identification*
CI : 8 *Seq : Commande et comportement des systèmes à événements discrets (Combinatoire et Séquentiel)*

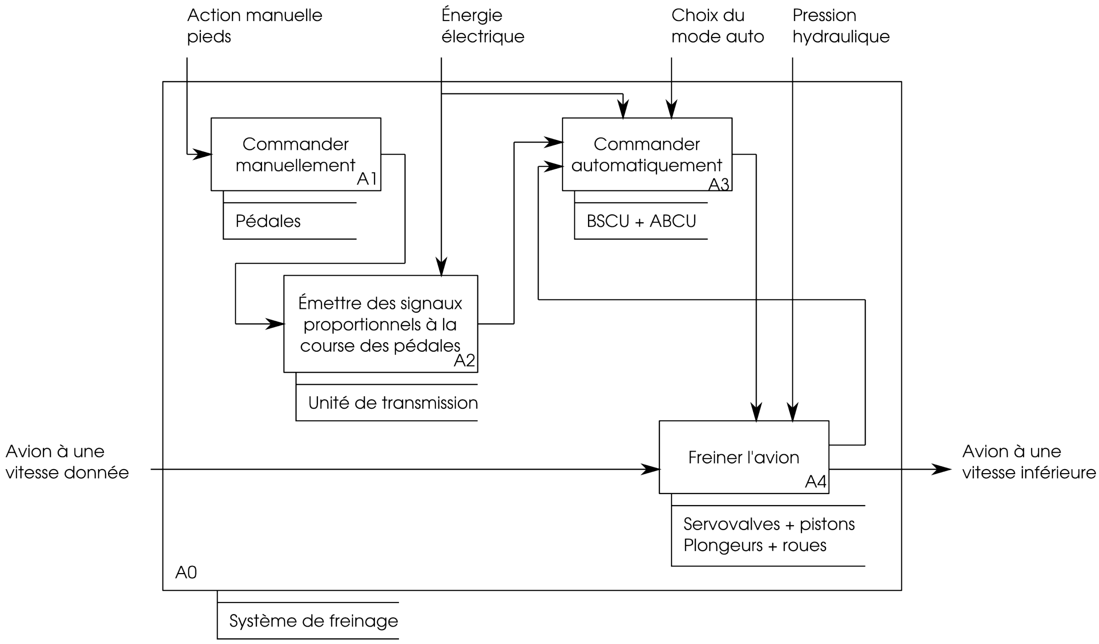
---

1 Présentation du système

2 Description fonctionnelle du système de freinage

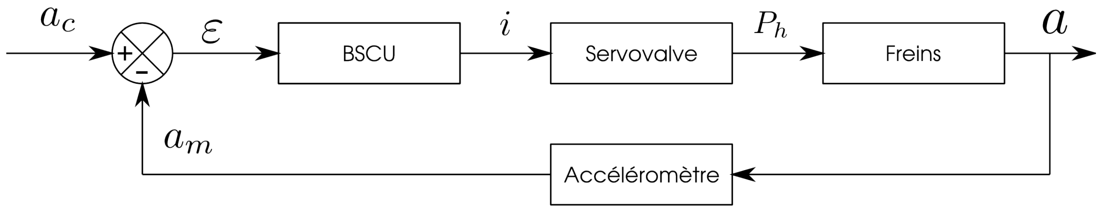
Question 1

Compléter à partir des explications précédentes et du SADT A-0, le SADT de niveau A0.



Question 2

Réaliser un schéma-bloc fonctionnel de l'asservissement en décélération à partir des indications ci-dessus. On prendra $a_c(t)$ comme entrée et $a(t)$ comme sortie.



3 Modélisation du système de freinage

3.1 Modélisation de la servo-valve

Question 3

Que peut-on dire de cette caractéristique sur tout le domaine de variation de $i(t)$? Sachant que θ est très petit (varie autour de 0), on utilise la relation suivante $\theta(t) = K_1 i(t)$. Déterminer la valeur de K_1 à partir de la courbe.

Cette courbe est non linéaire sur tout le domaine de variation de i. Comme θ est très petit, on peut linéariser la courbe au voisinage de 0. La valeur K_1 correspond donc à la pente de la courbe. En conséquence, $K_1 = 1\ rad \cdot A^{-1}$.

Question 4

Calculer la fonction de transfert $H_t(p) = \dfrac{Z(p)}{\Delta P(p)}$ où $Z(p)$ et $\Delta P(p)$ sont les transformées de Laplace de $z(t)$ et $\Delta P(t)$ en précisant l'hypothèse retenue.

En se plaçant dans les conditions de Heaviside, on peut transformer l'équation dans le domaine de Laplace. On a donc :

$$m_t p^2 Z(p) = -2k_t Z(p) + 2S_t \Delta P(p) - p c_t Z(p)$$

Ainsi,

$$H_t(p) = \frac{Z(p)}{\Delta P(p)} = \frac{2S_t}{m_t p^2 + c_t p + 2k_t}$$

Question 5

Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et donner son ordre.

En factorisant par $2k_t$ on obtient :

$$H_t(p) = \frac{\dfrac{S_t}{k_t}}{1 + \dfrac{c_t}{2k_t} p + \dfrac{m_t}{2k_t} p^2}$$

Question 6

À partir de toutes les informations précédentes (modélisation armature, buse/palette, tiroir...), compléter le schéma-bloc de la servo-valve donné dans le document réponse, en précisant les fonctions de transfert de chaque bloc (utiliser les notations algébriques).

On utilise les équation suivantes :

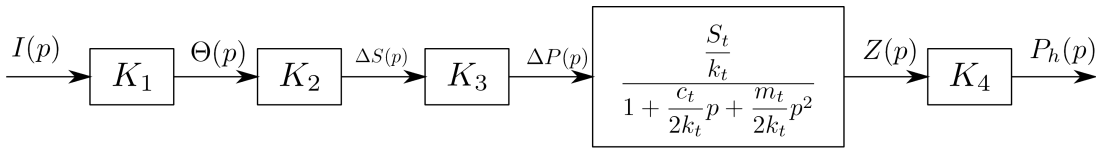
$$\theta(t) = K_1 i(t) \Leftrightarrow \Theta(p) = K_1 I(p)$$

$$\Delta S(t) = K_2 \theta(t) \Leftrightarrow \Delta S(p) = K_2 \Theta(p)$$

$$\Delta P(t) = K_3 \Delta S(t) \Leftrightarrow \Delta P(p) = K_3 \Delta S(p)$$

$$P_h(t) = K_4 z(t) \Leftrightarrow P_h(p) = K_4 Z(p)$$

On en déduit ainsi le schéma bloc suivant :



Question 7

En déduire la fonction de transfert $S_v(p) = \dfrac{P_h(p)}{I(p)}$ *de la servo-valve.*

On en déduit directement :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 \dfrac{S_t}{k_t}}{1 + \dfrac{c_t}{2k_t} + \dfrac{m_t}{2k_t} p^2}$$

Question 8

Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{1 + \dfrac{2\xi p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

où on donnera les expressions littérales de K_{sv}, ξ *et* ω_0.

Par identification, on déduit de la question précédente :

$$K_{SV} = K_1 K_2 K_3 K_4 \frac{S_t}{k_t}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k_t}{m_t}}$$

$$\xi = \frac{c_t}{2\sqrt{2k_t m_t}}$$

Question 9

A quelle valeur de ξ *correspond cette spécification ?* Pour ne pas avoir de dépassement, il est nécessaire que $\xi \geq 1$. Le système est le plus rapide lorsque $\xi = 1$.

Question 10

Démontrer que cette condition ne peut être satisfaite que si $k_t = \dfrac{c_t^2}{8m_t}$.

$$\xi = 1 \Leftrightarrow c_t = 2\sqrt{2k_t m_t} \Leftrightarrow k_t = \frac{c_t^2}{8m_t}$$

Question 11

Montrer alors que la fonction de transfert de la servo-valve peut se mettre sous la forme :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{(1 + T_{sv} p)^2}$$

on donnera l'expression littérale de T_{sv}.

Lorsque $\xi = 1$, le discriminant du dénominateur de la fonction $S_v(p)$ est nul. En conséquence ce dénominateur possède une racine double. En utilisant la formulation proposée, cette racine est égale à $\dfrac{-1}{T_{sv}}$. En développant la fonction proposée, on peut donc identifier $T_s v$:

$$(1 + T_{sv} p)^2 = 1 + \frac{2p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2} \Leftrightarrow 1 + 2T_{sv} p + T_{sv}^2 p^2 = 1 + \frac{2p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}$$

On a donc :

$$T_{sv} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m_t}{2k_t}} = \sqrt{\frac{m_t}{2\dfrac{c_t^2}{8m_t}}} = 2\frac{m_t}{c_t}$$

Question 12

Déterminer la réponse indicielle $P_h(t)$ pour une entrée échelon de valeur $i(t) = i_0 u(t)$.

On soumet le système à une entre échelon. En conséquence, on a :

$$I(p) = \frac{i_0}{p}$$

On a alors :

$$P_h(p) = \frac{i_0}{p} \frac{K_{sv}}{\left(1 + T_{sv} p\right)^2}$$

En réalisant la décomposition en éléments simples, on a :

$$P_h(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1 + T_{sv} p} + \frac{\gamma}{\left(1 + T_{sv} p\right)^2}$$

En calculant $P_h(p)p$ et en posant $p = 0$, on obtient $\alpha = K_{sv} i_0$.
En calculant $P_h(p)\left(1 + T_{sv} p\right)^2$ et en posant $p = -\dfrac{1}{T_{sv}}$, on obtient $\alpha = K_{sv} i_0$. On obtient alors $\gamma = -K_{sv} T_{sv} i_0$.
Enfin, en calculant $\lim\limits_{p\to+\infty} p P_h(p)$ on obtient $\beta = -K_{sv} T_{sv} i_0$.
Au final, on obtient :

$$P_h(p) = K_{sv} i_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{T_{sv}}{1 + T_{sv} p} - \frac{T_{sv}}{\left(1 + T_{sv} p\right)^2} \right) = K_{sv} i_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\dfrac{1}{T_{sv}} + p} - \frac{\dfrac{1}{T_{sv}}}{\left(\dfrac{1}{T_{sv}} + p\right)^2} \right)$$

En repassant dans le domaine temporel, on obtient :

$$P_h(t) = K_{sv} i_0 \left(1 - e^{-\frac{-t}{T_{sv}}} - \frac{t}{T_{sv}} e^{-\frac{-t}{T_{sv}}} \right) u(t)$$

Question 13

Recueil des meilleures blagues, les auteurs se reconnaîtront :

- Monsieur, ne nous prenez pas pour des débiles, est-ce que vous avez déjà vu un logarithme et une exponentielle dans un café ?
- Que doit faire un proffesseur (NDLR les fautes ont été restituées telles quelles) de mathématiques avant d'aller au soleil ?
- À une fête i va voir 1 et lui dit «Aller, on va dans danser ?»
- Qu'est-ce qu'un ours polaire ?
- x^2 et $\sqrt{x}$ sont sur un bateau, $\sqrt{x}$ tombe à l'eau, qui est-ce qui reste ?

3.2 Modélisation de l'accéléromètre

Principe de l'accéléromètre

Question 14

Déterminer les transformées de Laplace des expressions (1) à (5).

On obtient directement :

$$\varepsilon(p) = X_1(p) - X_2(p)$$

$$A(p) = p^2 X_1(p)$$

$$m_a p^2 X_2(p) = c_a \left(p X_1(p) - p X_2(p)\right) + k_a \left(X_1(p) - X_2(p)\right)$$

$$U_a(p) = K_p \epsilon(p)$$

$$A_m(p) = K_{CAN} U_a(p)$$

Question 15

En déduire les transmittances G_i du schéma bloc. On a :

$$G_1 = \frac{X_1(p)}{A(p)} = \frac{1}{p^2}$$

D'après la troisième relation, on a :

$$X_2(p)\left(m_a p^2 + c_a p + k_a\right) = X_1(p)\left(c_a p + k_a\right)$$

et donc

$$G_2 = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$$

$$G_3 = \frac{U_a(p)}{\varepsilon(p)} = K_p$$

$$G_4 = \frac{A_m(p)}{U_a(p)} = K_{CAN}$$

Question 16

En déduire la fonction de transfert $\frac{A_m}{A(p)}$ et montrer quelle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{A_m}{A(p)} = \frac{K_{acc}}{1 + 2\frac{\xi_a p}{\omega_a} + \frac{p^2}{\omega_a^2}}$$

Donner les expressions de K_{acc}, ξ_a et ω_a.

D'après le schéma bloc, on a :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = G_1(1 - G_2)G_3G_4$$

D'où

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{1}{p^2}\left(1 - \frac{c_a p + k_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a}\right) K_p K_{CAN} = \frac{K_p K_{CAN} m_a}{m_a p^2 + c_a p + k_a}$$

En mettant la fonction cette fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{\frac{K_p K_{CAN} m_a}{k_a}}{\frac{m_a}{k_a}p^2 + \frac{c_a}{k_a}p + 1}$$

Au final :

$$K_{acc} = \frac{K_p K_{CAN} m_a}{k_a}$$

$$\xi_a = \frac{c_a}{2\sqrt{k_a m_a}}$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$$

Question 17

La figure ci-dessous donne la réponse indicielle (entrée unitaire) de l'accéléromètre. Identifier les valeurs des constantes K_{acc}, ξ_a et ω_a (On pourra utiliser les abaques donnés en annexe).

D'après le tracé de la réponse indicielle avec une entrée unitaire, on observe bien la réponse d'un système du second ordre (tangente horizontale et un dépassement).

L'entrée est unitaire et le système tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini. En conséquence on a $K_{acc} = 1$.

La valeur du premier dépassement est de 1,05. En conséquence le dépassement est de 5%. D'après l'abaque du dépassement relatif, on a donc : $\xi_a = 0,7$.

En utilisant l'abaque donnant $t_r\omega_0$ en fonction de ξ on lit que $t_r\omega_0 = 4$.

Enfin, en mesurant le temps de réponse à 5% on a $t_r = 0,045s$.. En conséquence : $\omega_a = \dfrac{4}{0,045} \simeq 100 rad/s$.

4 Étude de l'asservissement global

Question 18

Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte. En déduire l'ordre, la classe et le gain de la $FTBO(p)$.

Par définition, la FTBO s'exprime par la relation :

$$FTBO(p) = H_{BSCU} \cdot H_{SC}(p) \cdot H_f(p) \cdot H_acc(p) = \frac{K_c K_{SV} K_f K_{acc}}{(1+T_{sv}p)^2 \left(1 + \frac{2\xi_a}{\omega_a}p + \frac{p^2}{\omega_a^2}\right)}$$

Le gain de la FTBO est donné par le numérateur : $K_c K_{SV} K_f K_{acc}$.

L'ordre de la FTBO est donné par le monome de plus haut degré : l'ordre est donc de 4 (lorsqu'on développe le système).

La classe du système est donné par le nombre d'intégrateur présent au dénominateur. Ici, p ne peut pas être mis en facteur du dénominateur. La classe est donc de 0.

Question 19

Exprimer l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de $a_c(p)$ et de la $FTBO(p)$. D'après le schéma bloc, on a :

$$\varepsilon(p) = A_c(p) - A_m(p) = A_c(p) - \varepsilon(p) \cdot FTBO(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p)\left(1 - FTBO(p)\right) = A_c(p)$$

On a donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{A_c(p)}{\left(1 - FTBO(p)\right)}$$

Question 20

En déduire l'écart en régime permanent à une entrée de type échelon d'accélération $a_c(t) = a_c u(t)$. Que peut on dire de la performance de précision pour ce correcteur ?

L'écart est donné par la fonction ε. L'écart en régime permanent est donné par la limite de $\varepsilon(t)$ en l'infini. D'après le théorème de la valeur finale on a donc :

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} \frac{pA_c(p)}{\left(1 - FTBO(p)\right)}$$

L'entrée est un échelon d'accélération d'amplitude a_c. En conséquence :

$$A_c(p) = \frac{a_c}{p}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} \frac{a_c}{p} \frac{p}{1 + FTBO(p)}$$

Or,

$$\lim_{p\to 0} FTBO(p) = K_c K_{SV} K_f K_{acc}$$

En conséquence,

$$\lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \frac{a_c}{1 + K_c K_{SV} K_f K_{acc}}$$

L'écart statique de ce système n'étant pas nul, le système n'est donc pas précis.

Question 21

On utilise un correcteur (correcteur PI) plus évolué de fonction de transfert $H_{BSCU} = K_i \frac{1+T_i p}{p}$, *déterminer à nouveau l'écart en régime permanent et conclure sur ce choix de correcteur.*

Il suffit dans un premier temps de calculer la limite quand p vers 0 de la nouvelle FTBO.

Cette FTBO vaut :

$$FTBO(p) = \frac{K_c K_{SV} K_f K_{acc}}{(1+T_{sv} p)^2 \left(1 + \frac{2\xi_a}{\omega_a} p + \frac{p^2}{\omega_a^2}\right)} \frac{K_i (1 + T_i p)}{p}$$

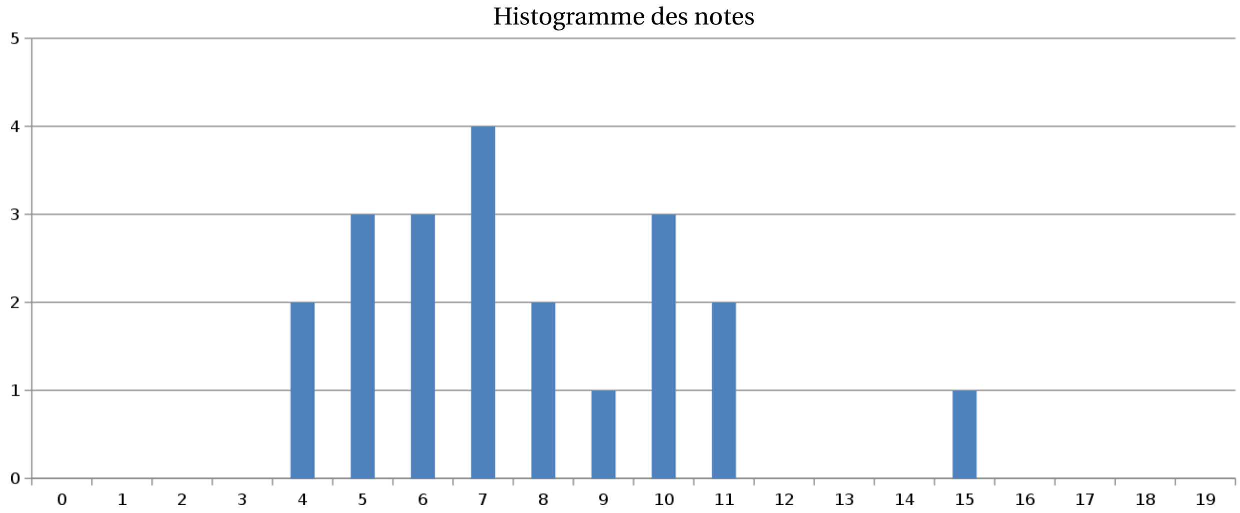
On a alors :

$$\lim_{p \to +\infty} FTBO(p) = +\infty$$

En conséquence [1],

$$\lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

L'écart statique étant nul, le système est donc précis.



1. Merci de ne pas montrer cette partie du corrigé à Mr Soleillant ;)