DEVOIR MAISON 8

MÉLANGEUR INTERNE À ROTORS ENGRENANTS

Éléments de corrigé – Adapté du concours E3A – PSI – 2013

1 Présentation du mélangeur à rotors engrenants

2 Étude de la chaîne fonctionnelle de mise en mouvement des rotors

2.1 Construction du schéma bloc

Question 1

En considérant que toutes les conditions initiales sont nulles, donner les quatre équations précédentes dans le domaine de Laplace.

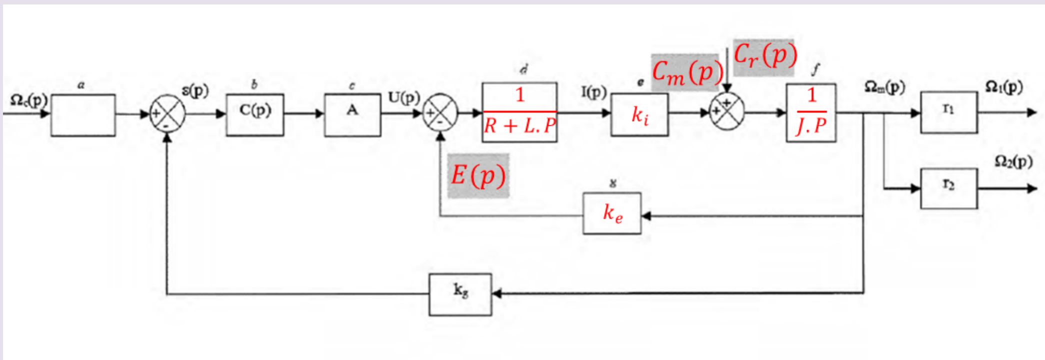
Corrigé

$$C_m(p)+C_r(p)=Jp\Omega_m(p) \quad U(p)=RI(p)+LpI(p)+E(p) \quad C_m(p)=k_i I(p) \quad E(p)=k_e\Omega_m(p)$$

Question 2

Remplir les fonctions de transfert des cases d, e, f et g ainsi que les trois grandeurs physiques manquantes (zones grisées) sur le schéma-bloc fourni sur le cahier réponses.

Corrigé



Question 3

Donner la valeur algébrique des rapports de réduction $r_1=\dfrac{\omega_1}{\omega_m}$ et $r_2=\dfrac{\omega_2}{\omega_m}$ en fonction des nombres de dents Z_i. Faire les applications numériques.

Corrigé

$$r_1 = \frac{\omega_2}{\omega_m} = (-1)^n \frac{Z_m \cdot Z_{3b} \cdot Z_{1b}}{Z_{3a} \cdot Z_{1a} \cdot Z_2} = -\frac{40 \cdot 24 \cdot 80}{200 \cdot 144 \cdot 80} = -0,033$$

$$r_2 = \frac{\omega_1}{\omega_m} = (-1)^n \frac{Z_m \cdot Z_{3b}}{Z_{3a} \cdot Z_{1a}} = 0,033$$

Question 4

Quelle doit être la fonction de transfert K_a de l'adaptateur de consigne (case a) si l'on veut que l'écart ε soit nul quand la vitesse ω_1 est égale à la vitesse de consigne ω_c ? Remplir la case a du schéma bloc précédent.

Corrigé

On a : $\varepsilon(p) = a \cdot \Omega_c(p) - k_g \Omega_m(p) = a \cdot \Omega_c(p) - k_g \dfrac{\Omega_1(p)}{r_1} = 0$. Or dans les conditions indiquées ci-dessus, on souhaite que $\varepsilon(p) = 0$ lorsque $\Omega_m(p) = \Omega_1(p)$; donc : $a \cdot \Omega_c(p) - k_g \dfrac{\Omega_c(p)}{r_1} = 0 \Longleftrightarrow a - k_g \dfrac{1}{r_1} = 0 \Longleftrightarrow a = \dfrac{k_g}{r_1}$

Dans un premier temps nous considèrerons que le correcteur est proportionnel de fonction de transfert k_c.

Question 5

- *Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\Omega_1(p)}{\Omega_c(p)}$ de suivi de consigne ($C_r(p) = 0$) en fonction de A, R, L, J, k_i, k_e, k_g et k_c.*
- *La mettre sous la forme $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0} p + \dfrac{1}{\omega_0^2} p^2}$ et identifier les constantes K, ξ et ω_0.*

Corrigé

D'une part, on a :

$$\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\dfrac{1}{R+Lp} \cdot k_i \cdot \dfrac{1}{Jp}}{1 + \dfrac{1}{R+Lp} \cdot k_i \cdot \dfrac{1}{Jp} k_e} = \frac{k_i}{(R+Lp)Jp + k_i k_e}$$

D'autre part :

$$H(p) = \frac{\Omega_1(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{k_g}{r_1} \cdot \frac{k_c A \dfrac{k_i}{(R+Lp)Jp + k_i k_e}}{1 + k_c A k_g \dfrac{k_i}{(R+Lp)Jp + k_i k_e}} \cdot r_1 = \frac{k_g k_c A k_i}{RJp + LJp^2 + k_i k_e + k_c A k_g k_i}$$

$$H(p) = \frac{\dfrac{k_g k_c A}{k_e + k_c A k_g}}{\dfrac{RJ}{k_i k_e + k_c A k_g k_i} p + \dfrac{LJ}{k_i k_e + k_c A k_g k_i} p^2 + 1}$$

Par identification :

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \dfrac{k_g k_c A}{k_e + k_c A k_g} \\ \dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{LJ}{k_i k_e + k_c A k_g k_i} \\ \dfrac{2\xi}{\omega_0} = \dfrac{RJ}{k_i k_e + k_c A k_g k_i} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} K = \dfrac{k_g k_c A}{k_e + k_c A k_g} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_i k_e + k_c A k_g k_i}{LJ}} \\ \xi = \dfrac{1}{2} \dfrac{R\sqrt{J}}{\sqrt{L}\sqrt{k_i k_e + k_c A k_g k_i}} \end{array} \right.$$

Corrigé

2.2 Étude de l'asservissement de vitesse

Question 6

Si l'on considère dans un premier temps que le correcteur est proportionnel de fonction de transfert $C(p) = K$, donner la valeur que prend l'écart (en fonction de a, b, c et K s'il est constant) dans chacun des trois cas proposés. Le cahier des charges est-il respecté ?

Corrigé

Calculons la fonction écart :

$$\varepsilon(p) = \Omega_c(p) - \Omega_r(p) = \Omega_c(p) - \left(C_r(p) + \varepsilon(p)AC(p)H_1(p)\right)H_2(p) = \Omega_c(p) - C_r(p)H_2(p) - \varepsilon(p)AC(p)H_1(p)H_2(p)$$

On a alors :

$$\varepsilon(p) = \frac{\Omega_c(p) - C_r(p)H_2(p)}{1 + AC(p)H_1(p)H_2(p)}$$

Dans le premier cas, $\Omega_c(p) = \dfrac{a}{p}$ et $C_r(p) = 0$; donc :

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p \cdot \frac{a}{p}\frac{1}{1 + AKH_1(p)H_2(p)} = \frac{a}{1 + 3000 \cdot 5 \cdot K \cdot 5,7 \cdot 10^{-5}} = \frac{a}{1 + 0,855 \cdot K}$$

Dans le second cas, $\Omega_c(p) = 0$ et $C_r(p) = \dfrac{b}{p}$; donc :

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p \cdot \frac{-b}{p}\frac{H_2(p)}{1 + AC(p)H_1(p)H_2(p)} = -b\frac{5,7 \cdot 10^{-5}}{1 + 0,855 \cdot K}$$

Dans le troisième cas, $\Omega_c(p) = 0$ et $C_r(p) = \dfrac{c}{p^2}$; donc :

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p \cdot \frac{-c}{p^2}\frac{H_2(p)}{1 + AC(p)H_1(p)H_2(p)} = -\infty$$

Corrigé

Question 7

Dans quel(s) cas le cahier des charges est il-respecté sur le critères de précision ?

Corrigé

Le cahier des charges n'est pas respecté.

Question 8

Parmi les quatre correcteurs proposés, quels sont ceux qui permettent de répondre aux trois critères de précision du cahier des charges.

Corrigé

Afin d'avoir un écart statique nul dans pour les 3 critères, il est nécessaire qu'il y ait un intégrateur en amont de la perturbation. Il faudra donc avoir recours aux correcteurs 2 ou 4.

Pour la suite nous utiliserons un correcteur de fonction de transfert $C(p) = K\dfrac{1+Tp}{Tp}$

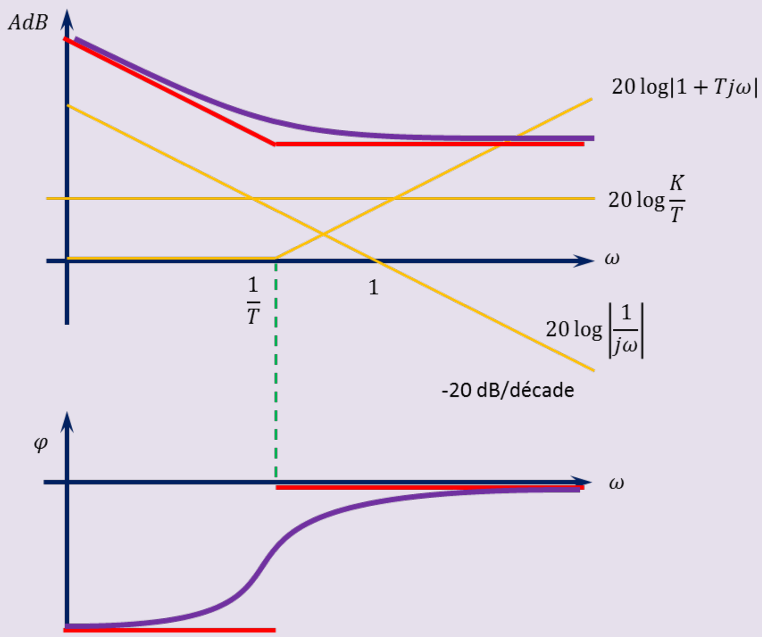
Remarque

Ce correcteur est appelé proportionnel intégral.

Question 9

Tracer le diagramme de Bode (asymptotique et allure du diagramme réel) du correcteur seul. Indiquer les pentes et points caractéristiques en fonction de K et T.

Corrigé



On choisit la valeur de T de telle façon que la valeur de la pulsation conduisant à un déphasage de -45 pour le correcteur seul soit dix fois plus petite que la pulsation pour laquelle la FTBO non corrigée présente un déphasage de -90.

Question 10

- *Déterminer la valeur de T correspondante.*
- *Tracer le diagramme asymptotique de Bode de la FTBO corrigée avec $K = 1$ et votre valeur de T. Indiquer les pentes et points caractéristiques.*

Corrigé

D'après le tracé de la FTBO, la phase est de -90°lorsque $\omega = 45\ rad/s$. On doit donc choisir T tel que $1/T = 4,5\ rad/s$. On a donc $T = 0,22\ s$.

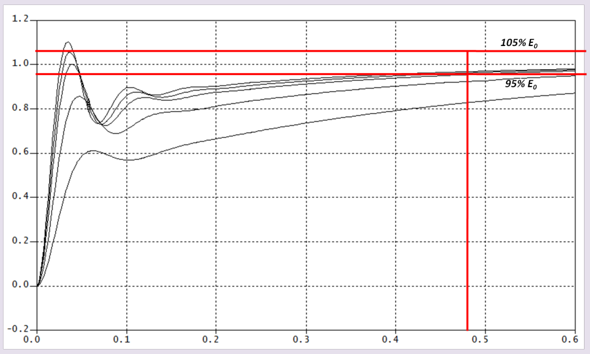
Question 11

– *La valeur de K_{stab} est-elle compatible avec les critères de précision en suivi de consigne, d'amortissement et de rapidité ? Justifiez votre réponse.*
– *Choisir pour K une valeur permettant de respecter à la fois les critères de stabilité, amortissement, rapidité et précision en suivi de consigne. Vous justifierez vos réponses et porterez sur la courbe les tracés que vous jugerez utiles.*

Corrigé

Le cahier des charges indique que pour une sollicitation à un échelon l'écart statique doit être nul en régime permanent, que le temps de réponse à 5% doit être inférieur à 0,5 s et que la consigne ne doit pas être dépassée.

D'après le réseau de courbe proposé, il semble que K doivent être inférieur à 3 pour ne pas dépasser la consigne. Par ailleurs, le cas $K = 3$ a un temps de réponse à 5% et semble présenter un écart statique nul.



Question 12

Déterminer l'expression de $\varepsilon(p)$ en fonction de $C_r(p)$, $F(p)$ et $H_2(p)$.

Corrigé

On a vu que $\varepsilon(p) = \dfrac{\Omega_c(p) - C_r(p)H_2(p)}{1 + AC(p)H_1(p)H_2(p)}$. Si $\Omega_c(p) = 0$:

$$\varepsilon(p) = \frac{-C_r(p)H_2(p)}{1 + AC(p)H_1(p)H_2(p)}$$

Question 13

Que vaut $\varepsilon_1 = \lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t)$ pour une perturbation en échelon $C_r(t) = b\,u(t)$? Justifier votre réponse et conclure quant au respect du cahier des charges.

Corrigé

$$\varepsilon_1 = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p \frac{-C_r(p)H_2(p)}{1 + AC(p)H_1(p)H_2(p)} = \lim_{p\to 0} \frac{-b\,H_2(p)}{1 + AC(p)H_1(p)H_2(p)} = 0$$

Question 14

Déterminer $\varepsilon_2 = \lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t)$ pour une perturbation en rampe $C_r(t) = c\,t\,u(t)$. Le cahier des charges est-il respecté (justifier par l'application numérique sur ε_2) ?

Corrigé

$$\varepsilon_2 = \lim_{p\to 0} \frac{-(c/p)H_2(p)}{1+AC(p)H_1(p)H_2(p)} = -\frac{c}{2,25\cdot 10^5}$$

Pour $c=50$, $\varepsilon_2 = 2,2\cdot 10^{-4} rad/s = 0,0021 tr/min$. Le cahier des charges est respecté.

3 Étude de la chaîne fonctionnelle d'actionnement du fouloir

3.1 Étude de la commande

Question 15

A partir des informations figurant sur le schéma pneumatique, exprimer les équations logiques définissant respectivement, la commande de la descente en haute pression D_h, la commande de la descente en basse pression D_b et la commande de montée en haute pression M_h. Ces expressions seront données en fonction des variables logiques $V1$, $V2$, $V3$ et $V4$ de commande électrique des distributeurs.

Corrigé

On a :

$$D_h = V_1\cdot\overline{V_2}\cdot V_3\cdot\overline{V_4} \quad D_b = V_1\cdot\overline{V_2}\cdot\overline{V_3}\cdot\overline{V_4} \quad M_h = \overline{V_1}\cdot V_2\cdot V_3\cdot\overline{V_4}$$

Question 16

Proposer une commande A permettant d'immobiliser le fouloir dans une position quelconque (à la compressibilité de l'air près). Cette commande pourra être exprimée en fonction des variables logiques $V1$, $V2$, $V3$ et $V4$.

Corrigé

$$A = \overline{V_1}\cdot\overline{V_2}\cdot\overline{V_3}\cdot V_4$$

3.2 Étude du mouvement du fouloir

3.3 Étude du mouvement du fouloir

Question 17

En considérant que toutes les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert $Z(p)/F(p)$. Faire l'application numérique.

Corrigé

On a :

$$\frac{Z(p)}{F(p)} = \frac{1}{Mp^2+fp+k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{M}{k}p^2+\frac{f}{k}p+1}$$

Avec :

$$\begin{cases} K = \dfrac{1}{k} = 1,17\cdot 10^{-5} m/N \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}} = 4,9 rad/s \\ \xi = \dfrac{f\omega_0}{2k} = 0,14 \end{cases}$$

Corrigé

Question 18

– *En utilisant l'abaque fourni en annexe B, tracer l'allure de la courbe $z(t)$ de position du fouloir soumis à l'excitation en échelon d'effort de* $10\,000\ N$.
– *Mettre en place sur celle-ci les valeurs numériques caractéristiques.*
– *Conclure quant au respect du cahier des charges.*

Corrigé

Pour un échelon de 10 000 N, la valeur finale tend vers 0,11 m, le premier dépassement est de près de 70% soit approximativement 0,2 m.