CI 3 – CIN : Étude du comportement cinématique des systèmes

Devoir Maison 5

Système EPAS : *Échelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle*

D'après le concours CCP – PSI – 2007

1 Présentation

2 Paramétrage du système

3 Loi de commande dans le vérin

L'élévation de la grue est donnée par l'allongement du vérin constitué des pièces 4 et 5.

Question 1

Donner le graphe des liaisons constitués par les pièces 2, 3, 4, et 5. Comment appelle-t-on ce type de chaîne ?

Correction

Le tracé du graphe des liaisons donne une chaîne fermée.

Question 2

L'élévation de la grue est donnée par l'angle $\gamma(t)$ du berceau 5 par rapport à la tourelle 2. Réaliser une fermeture cinématique liant les solides 2, 3, 4 et 5 et donner une relation entre λ et γ.

Les solides 2, 3, 4 et 5 forment une chaîne fermée. La fermeture géométrique est la suivante :

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{0}$$

$$b\overrightarrow{x_2}+a\overrightarrow{y_2}+g\overrightarrow{x_5}-\lambda(t)\overrightarrow{x_3}=\overrightarrow{0}$$

$$\Longleftrightarrow b\overrightarrow{x_2}+a\overrightarrow{y_2}+g\cos\gamma\overrightarrow{x_2}+g\sin\gamma\overrightarrow{y_2}-\lambda(t)\cos\beta\overrightarrow{x_2}-\lambda(t)\sin\beta\overrightarrow{y_2}=\overrightarrow{0}$$

On projette ensuite les expressions sur $\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{y_2}$:

$$\begin{cases} b+g\cos\gamma-\lambda(t)\cos\beta=0\\ a+g\sin\gamma-\lambda(t)\sin\beta=0\end{cases}$$

Il nous faut éliminer β dans l'équation :

$$\begin{cases} \lambda(t)\cos\beta=b+g\cos\gamma\\ \lambda(t)\sin\beta=a+g\sin\gamma\end{cases}$$

En élevant les deux équations au carré et en les sommant on a donc :

$$\lambda(t)^2=b^2+g^2\cos^2\gamma+2bg\cos\gamma+a^2+g^2\sin^2\gamma+2ag\sin\gamma$$

$$\lambda(t)^2=b^2+g^2+2bg\cos\gamma+a^2+2ag\sin\gamma \Longleftrightarrow \lambda(t)^2=b^2+g^2+a^2+2g\left(b\cos\gamma+a\sin\gamma\right)$$

Correction

Question 3

En faisant l'hypothèse que $b = g$ et $a = 0$, exprimer $\gamma(t)$ en fonction de $\lambda(t)$ puis calculer $\dfrac{d\gamma(t)}{dt}$.

Correction

En tenant compte des hypothèses précédentes :

$$\lambda(t)^2 = 2b^2 + 2b^2\cos\gamma \Longleftrightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{\lambda(t)^2}{2b^2} - 1\right)$$

On a donc :

$$\dot{\gamma} = -\frac{\dfrac{\dot{\lambda}\lambda}{b^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda(t)^2}{2b^2}-1\right)^2}} = -\frac{\dfrac{\dot{\lambda}\lambda}{b^2}}{\sqrt{-\dfrac{\lambda(t)^4}{4b^4}+\dfrac{\lambda(t)^2}{b^2}}}$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\dfrac{\dot{\lambda}}{b}}{\sqrt{1-\dfrac{\lambda(t)^2}{4b^2}}} = -\frac{\dfrac{\dot{\lambda}}{b}}{\sqrt{\dfrac{4b^2-\lambda(t)^2}{4b^2}}} = -\frac{\dot{\lambda}}{\dfrac{b}{2b}\sqrt{4b^2-\lambda(t)^2}} = -\frac{2\dot{\lambda}}{\sqrt{4b^2-\lambda(t)^2}}$$

4 Élévation de la plateforme

On considère dans cette partie que $\alpha_2 = 0$.
Dans les calculs suivants, on ne tiendra pas compte des pièces 3 et 4.

Question 4

Donner le graphe des liaisons du mécanisme en tenant compte des hypothèses ci-dessus. Comment appelle-t-on ce type de chaîne ?

Correction

Le graphe des liaisons forme une chaîne ouverte.

Question 5

On souhaite que pendant le mouvement d'élévation, la plateforme reste horizontale. Donner la relation simple liant $\varphi(t)$ et $\gamma(t)$.

Correction

La plate forme restera horizontale (si on suppose le tourelle 2 horizontale) si et seulement si :

$$\overrightarrow{x_7} \wedge \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \sin(\varphi+\gamma)\,\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \varphi+\gamma = 0$$

Question 6

Donner les vecteurs $\overrightarrow{\Omega(7/6)}$ et $\overrightarrow{V(G\in 7/6)}$.

Correction

$$\{\mathscr{V}(7/6)\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(7/6)} = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{z_6}\\ \overrightarrow{V(G\in 7/6)} = \underbrace{\overrightarrow{V(E\in 7/6)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GE}\wedge\overrightarrow{\Omega(7/6)}\end{array}\right\}_G$$

Correction

$$\overrightarrow{V(G\in 7/6)} = -h\overrightarrow{x_7}\wedge\dot{\varphi}\,\overrightarrow{z_6} = h\dot{\varphi}\,\overrightarrow{y_7}$$

$$\{\mathscr{V}(7/6)\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(7/6)} = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{z_6}\\ \overrightarrow{V(G\in 7/6)} = h\dot{\varphi}\,\overrightarrow{y_7}\end{array}\right\}_G$$

Question 7

Donner les vecteurs $\overrightarrow{\Omega(6/5)}$ et $\overrightarrow{V(G\in 6/5)}$.

Correction

$$\{\mathscr{V}(6/5)\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(6/5)} = \overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{V(G\in 6/5)} = \dot{\mu}\,\overrightarrow{x_6}\end{array}\right\}_G$$

Question 8

On rappelle que $\mathscr{R}_5 = \mathscr{R}_6$. Calculer les produits vectoriels suivants : $\overrightarrow{x_6}\wedge\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{y_6}\wedge\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{x_7}\wedge\overrightarrow{y_1}$.

Correction

Calculons $\overrightarrow{x_6}\wedge\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{x_5}\wedge\overrightarrow{y_1} = \cos\gamma\,\overrightarrow{z_1}$.

Calculons $\overrightarrow{y_6}\wedge\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{y_5}\wedge\overrightarrow{y_1} = \left(\cos\gamma\,\overrightarrow{y_1} - \sin\gamma\,\overrightarrow{x_1}\right)\wedge\overrightarrow{y_1} = -\sin\gamma\,\overrightarrow{z_1}$.

Calculons $\overrightarrow{x_7}\wedge\overrightarrow{y_1} = \left(\cos\varphi(t)\overrightarrow{x_6} + \sin\varphi(t)\overrightarrow{y_6}\right)\wedge\overrightarrow{y_1} = \cos\varphi\cos\gamma\,\overrightarrow{z_1} - \sin\gamma\sin\varphi(t)\overrightarrow{z_1} = \cos\varphi\cos\gamma\,\overrightarrow{z_1} - \sin\gamma\sin\varphi(t)\overrightarrow{z_1} = \cos\left(\varphi+\gamma\right)\overrightarrow{z_1}$.

Question 9

Donner les vecteurs $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ et $\overrightarrow{V(G\in 2/0)}$.

Correction

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\alpha}_1\,\overrightarrow{y_1}\\ \overrightarrow{V(G\in 2/0)} = \underbrace{\overrightarrow{V(O\in 2/0)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GO}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/0)}\end{array}\right\}_G$$

$$\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = -h\overrightarrow{x_7} - \mu(t)\overrightarrow{x_6} - g\,\overrightarrow{x_5} - b\,\overrightarrow{x_2} - a\,\overrightarrow{y_2} - b\,\overrightarrow{x_2} + a\,\overrightarrow{y_2} - a\,\overrightarrow{y_1} - b\,\overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{GO} = -h\overrightarrow{x_7} - \mu(t)\overrightarrow{x_6} - g\,\overrightarrow{x_5} - 3b\,\overrightarrow{x_2} - a\,\overrightarrow{y_2}$$

$$\overrightarrow{V(G\in 2/0)} = \overrightarrow{GO}\wedge\dot{\alpha}_1\overrightarrow{y_1} = -h\dot{\alpha}_1\cos\left(\varphi+\gamma\right)\overrightarrow{z_1} - \mu(t)\dot{\alpha}_1\cos\gamma\,\overrightarrow{z_1} - g\dot{\alpha}_1\cos\gamma\,\overrightarrow{z_1} - 3b\dot{\alpha}_1\,\overrightarrow{z_2}$$

$$\overrightarrow{V(G\in 2/0)} = -\dot{\alpha}_1\left(h\cos\left(\varphi+\gamma\right) + \left(\mu(t)+g\right)\cos\gamma + 3b\right)\overrightarrow{z_1}$$

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\alpha}_1\,\overrightarrow{y_1}\\ \overrightarrow{V(G\in 2/0)} = -\dot{\alpha}_1\left(h\cos\left(\varphi+\gamma\right) + \left(\mu(t)+g\right)\cos\gamma + 3b\right)\overrightarrow{z_1}\end{array}\right\}_G$$

Question 10

On donne : $\overrightarrow{\Omega(5/2)} = \dot{\gamma}\,\overrightarrow{z_2}$ et $\overrightarrow{V(G\in 5/2)} = \left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}\,\overrightarrow{y_5} + g\dot{\gamma}\,\overrightarrow{y_7}$. En déduire $\overrightarrow{\Omega(7/0)}$ et $\overrightarrow{V(G\in 7/0)}$.

Correction

$$\overrightarrow{\Omega(7/0)} = \overrightarrow{\Omega(7/5)} + \overrightarrow{\Omega(5/2)} + \overrightarrow{\Omega(2/0)}$$
$$\overrightarrow{V(G \in 7/0)} = \overrightarrow{V(G \in 7/5)} + \overrightarrow{V(G \in 5/2)} + \overrightarrow{V(G \in 2/0)}$$

Question 11

Dans le cas où α_1 et μ sont des constantes, on a $\overrightarrow{V(G\in 7/0)} = h\dot{\varphi}\,\overrightarrow{y_7} + \left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}\,\overrightarrow{y_5} + g\dot{\gamma}\,\overrightarrow{y_7}$. Calculer alors $\overrightarrow{\Gamma(G\in 7/0)}$.

Correction

$$\overrightarrow{\Gamma(G\in 7/0)} = h\ddot{\varphi}\,\overrightarrow{y_7} + h\dot{\varphi}\left[\frac{d\,\overrightarrow{y_7}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left(g+\mu(t)\right)\ddot{\gamma}\,\overrightarrow{y_5} + \left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}\left[\frac{d\,\overrightarrow{y_5}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} + g\ddot{\gamma}\,\overrightarrow{y_7} + g\dot{\gamma}\left[\frac{d\,\overrightarrow{y_7}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

Commençons par calculer les dérivées de vecteurs :

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{y_7}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{y_7}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_7} + \overrightarrow{\Omega(7/0)} \wedge \overrightarrow{y_7} = \left(\dot{\varphi}\,\overrightarrow{z_6} + \dot{\gamma}\,\overrightarrow{z_5}\right) \wedge \overrightarrow{y_7} = -\left(\dot{\varphi}+\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{x_7}$$

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{y_5}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{y_5}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_5} + \overrightarrow{\Omega(5/0)} \wedge \overrightarrow{y_5} = \dot{\gamma}\,\overrightarrow{z_5} \wedge \overrightarrow{y_5} = -\dot{\gamma}\,\overrightarrow{x_5}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{\Gamma(G\in 7/0)} = h\ddot{\varphi}\,\overrightarrow{y_7} - h\dot{\varphi}\left(\dot{\varphi}+\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{x_7} + \left(g+\mu(t)\right)\ddot{\gamma}\,\overrightarrow{y_5} - \left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}^2\,\overrightarrow{x_5} + g\ddot{\gamma}\,\overrightarrow{y_7} - g\dot{\gamma}\left(\dot{\varphi}+\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{x_7}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G\in 7/0)} = \left(h\ddot{\varphi}+g\ddot{\gamma}\right)\overrightarrow{y_7} - \left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)\left(\dot{\varphi}+\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{x_7} + \left(g+\mu(t)\right)\ddot{\gamma}\,\overrightarrow{y_5} - \left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}^2\,\overrightarrow{x_5}$$

5 Validation du cahier des charges

Question 12

A l'aide de l'étude réalisée ci-dessus, vérifier que l'exigence 1.1.2.1 est satisfaite. On considèrera pour cela que $\mu = 20m$, $\dot{\gamma}$ (et donc $\dot{\varphi}$), α_1 et α_2 sont des constantes ; $g = b = h = 0{,}5m$; $a = 0m$; $\dot{\lambda} = 10mm/s$

Correction

On a $\overrightarrow{V(G\in 7/0)} = \left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{y_7} + \left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}\,\overrightarrow{y_5}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{y_7} = \cos\varphi\,\overrightarrow{y_6} - \sin\varphi\,\overrightarrow{x_6} = \cos\varphi\,\overrightarrow{y_5} - \sin\varphi\,\overrightarrow{x_5}$.
On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(G\in 7/0)} &= \left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{y_5} - \sin\varphi\,\overrightarrow{x_5}\right) + \left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}\,\overrightarrow{y_5}\\ &= -\sin\varphi\left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{x_5} + \left(\left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)\cos\varphi + \left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{y_5}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(G\in 7/0)}^2 &= \left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)^2\sin^2\varphi + \left(\left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)\cos\varphi + \left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}\right)^2\\ &= \left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)^2\sin^2\varphi + \left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)^2\cos^2\varphi + \left(g+\mu(t)\right)^2\dot{\gamma}^2 + 2\left(\left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)\cos\varphi\cdot\left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}\right)\\ &= \left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)^2 + \left(g+\mu(t)\right)^2\dot{\gamma}^2 + 2\left(\left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)\cos\varphi\cdot\left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}\right)\end{aligned}$$

Par ailleurs on a vu que $\dot{\gamma} = -\dfrac{2\dot{\lambda}}{\sqrt{4b^2-\lambda(t)^2}}$.