Correction DS (2h) : Système de freinage de l'Airbus A318

Questions de cours (bonus) :

- Donner la fonction de transfert d'un système du premier ordre.

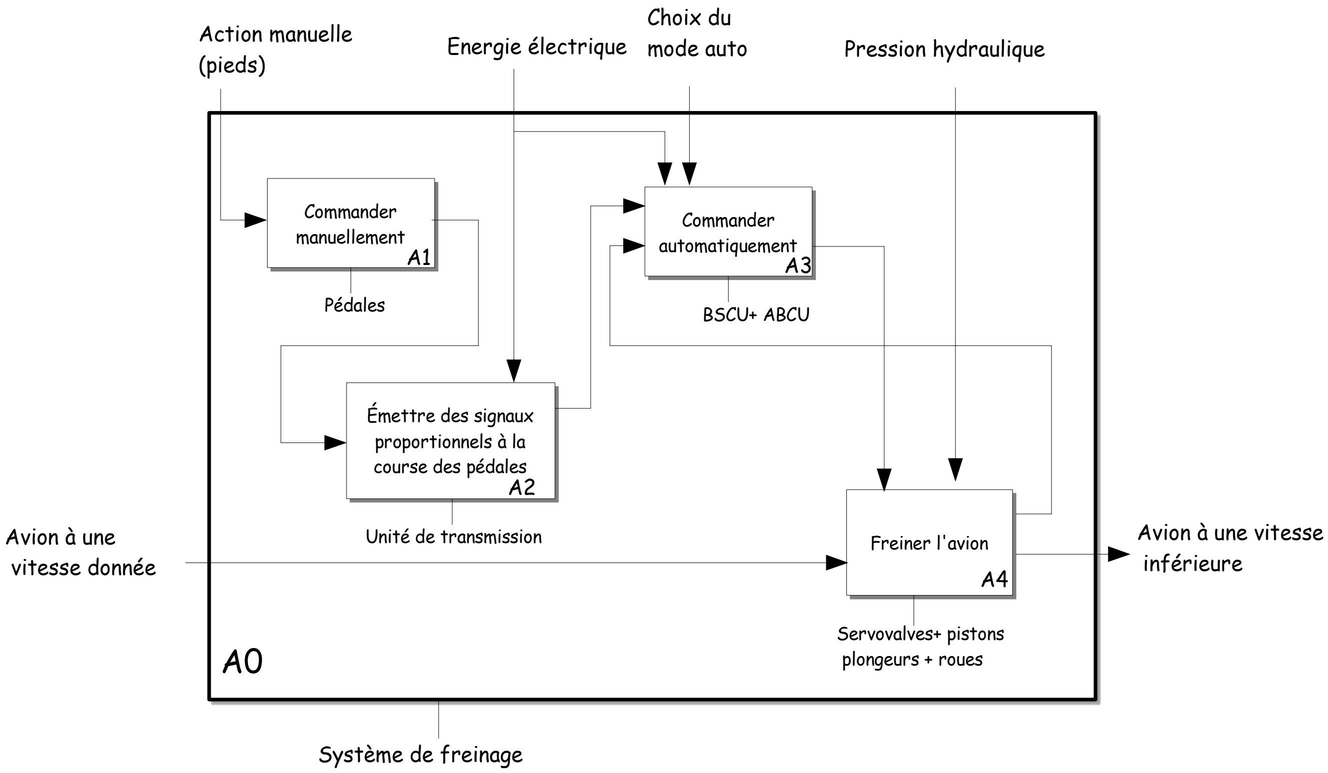
$$H(p)=\frac{K}{1+\tau p}$$

- Comment appelle t-on les constantes intervenant dans cette fonction de transfert

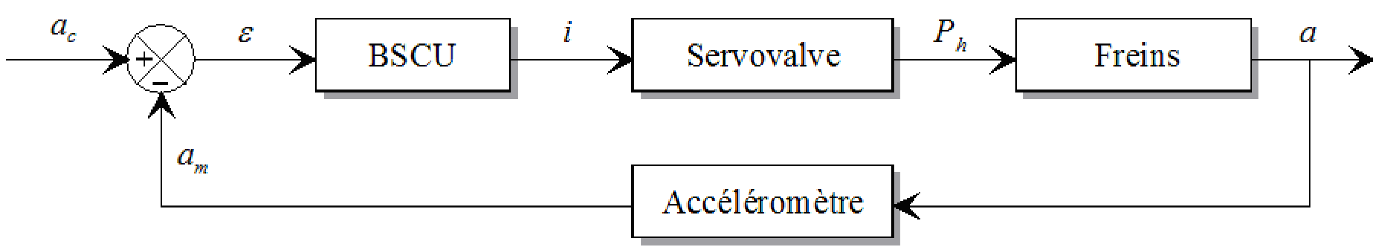
K = gain , τ constante de temps

Partie I : Description fonctionnelle du système de freinage

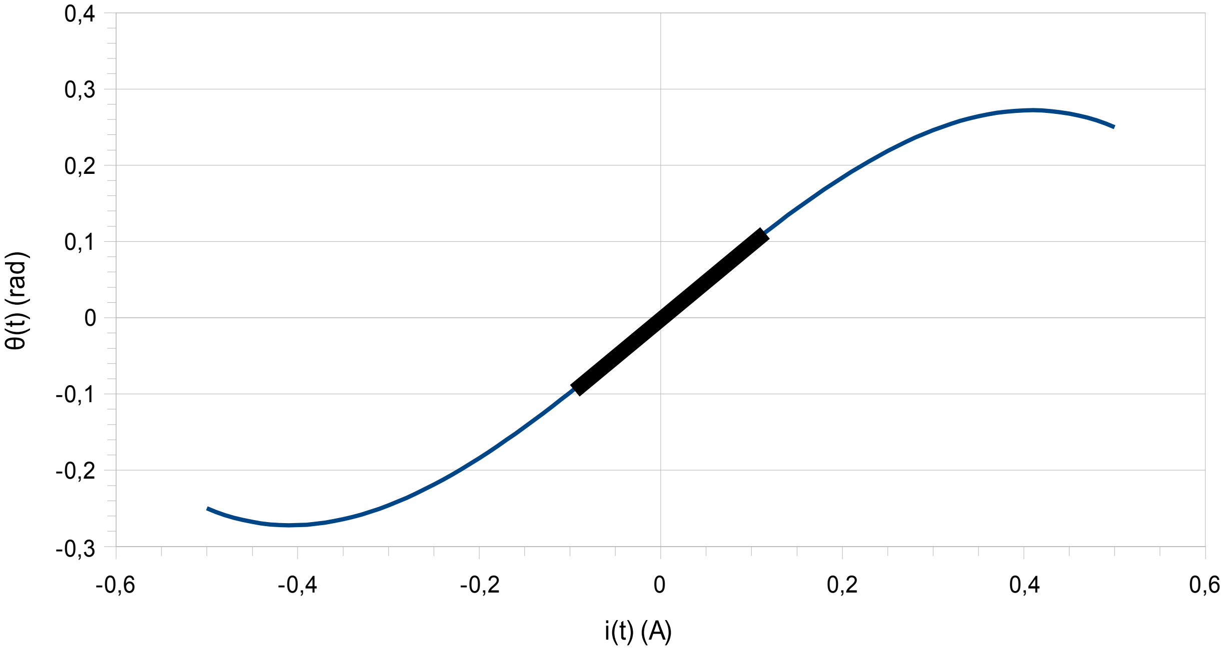
Question 1 : Compléter à partir des explications précédentes et du SADT A-0, le SADT de niveau A-0.



Question 2 : Réaliser un schéma-bloc fonctionnel de l'asservissement en décélération à partir des indications ci-dessus. On prendra $a_c(t)$ comme entrée et $a(t)$ comme sortie.



Partie II - Modélisation du système de freinage



Question 3 : Que peut-on dire de cette caractéristique sur tout le domaine de variation de i(t) ? Sachant que θ est très petit (varie autour de 0), on utilise la relation suivante $\theta(t)=K_1 i(t)$. Déterminer la valeur de K_1 à partir de la courbe.

Cette courbe est non-linéaire sur tout le domaine de variation de i. Comme θ est très petit, on peut linéariser la courbe au voisinage de 0. La valeur de K1 correspond ainsi à la pente de la courbe : K1 = (0.1 - (-0.1)) / (0.1 - (-0.1)) = 1 rad/A

Question 4 : Calculer la fonction de transfert $H_t(p)=\frac{Z(p)}{\Delta P(p)}$ où Z(p) et $\Delta P(p)$ sont les transformées de Laplace de z(t) et $\Delta P(t)$ en précisant l'hypothèse retenue

On passe l'équation dans le domaine de Laplace en se plaçant dans les conditions de Heaviside :

$m_t.p^2.Z(p) = -2k_t.Z(p) + 2S_t.\Delta P(p) - c_t.p.Z(p)$

La fonction de transfert est donc : $\frac{Z(p)}{\Delta P(p)} = \frac{2S_t}{m_t.p^2 + c_t.p + 2k_t}$

Question 5 : Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et donner son ordre.

On factorise le dénominateur par 2kt pour obtenir :

$$\frac{Z(p)}{\Delta P(p)} = \frac{\frac{S_t}{k_t}}{1 + \frac{c_t}{2k_t}.p + \frac{m_t}{2k_t}.p^2}$$

Son ordre est de 2

Question 6 : A partir de toutes les informations précédentes (modélisation armature, buse/palette, tiroir...), compléter le schéma-bloc de la servovalve donné dans le document réponse, en précisant les fonctions de transfert de chaque bloc (utiliser les notations algébriques).

On utilise les équations :

$\theta(t)=K_1 i(t)$

$\Delta S=K_2\theta$

$\Delta P=K_3\Delta S$

$P_h(t)=K_4 z(t)$ *qui ne changent pas dans le domaine de Laplace.*

On aboutit alors au schéma-bloc

$$I(p)\longrightarrow\boxed{K1}\xrightarrow{\theta(p)}\boxed{K2}\xrightarrow{\Delta S(p)}\boxed{K_3}\xrightarrow{\Delta P(p)}\boxed{\dfrac{\dfrac{S_t}{k_t}}{1+\dfrac{c_t}{2k_t}.p+\dfrac{m_t}{2k_t}.p^2}}\xrightarrow{Z(p)}\boxed{K4}\longrightarrow P_h(p)$$

Question 7 : En déduire la fonction de transfert $S_v(p)=\dfrac{P_h(p)}{I(p)}$ de la servovalve

La fonction de transfert est directement : $S_v(p)=\dfrac{K_1.K_2.K_3.K_4.\dfrac{S_t}{k_t}}{1+\dfrac{c_t}{2k_t}p+\dfrac{m_t}{2k_t}p^2}$

Question 8 : Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :

$$S_v(p)=\frac{P_h(p)}{I(p)}=\frac{K_{sv}}{1+2\dfrac{\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

où on donnera les expressions littérales de K_{sv} , ξ et ω_0

On identifie terme à terme :

– *Gain statique :* $K_{sv}=\dfrac{S_t.K_1.K_2.K_3.K_4}{k_t}$

– *Pulsation propre :* $\omega_0=\sqrt{\dfrac{2k_t}{m_t}}$

– *Coefficient d'amortissement :* $\xi=\dfrac{c_t}{2\sqrt{2k_t.m_t}}$

Question 9 : A quelle valeur de ξ correspond cette spécification ?

Pour ne pas avoir de dépassement, il faut que $\xi\geq 1$ *Pour être le plus rapide possible, on doit donc avoir* $\xi=1$

Question 10 : Démontrer que cette condition ne peut être satisfaite que si $k_t=\dfrac{c_t^2}{8m_t}$

Pour cette valeur on a : $2\sqrt{2k_t.m_t}=c_t$ *soit* $8k_t m_t=c_t^2$ *, d'où le résultat annoncé.*

Question 11 : Montrer alors que la fonction de transfert de la servovalve peut se mettre sous la forme :

$$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{(1+T_{sv}p)^2}$$

on donnera l'expression littérale de T_{sv}

Avec $\xi = 1$, le polynôme du dénominateur de la fonction de transfert $S_v(p)$ possède un discriminant nul et donc une racine réelle double $p = -\omega_0$. Il s'écrit sous la forme : $\left(1+\frac{1}{\omega_0}p\right)^2$

Ainsi : $$S_v(p) = \frac{P_h(p)}{I(p)} = \frac{K_{sv}}{\left(1+\frac{1}{\omega_0}p\right)^2}$$

La constante de temps T_{sv} s'exprime : $T_{sv} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m_t}{2k_t}}$ *et* $k_t = \frac{c_1^2}{8m_t}$ *d'où* $T_{sv} = \sqrt{\frac{8m_t^2}{2c_t^2}} = 2\frac{m_t}{c_t}$

<u>Question 12 :</u> Déterminer la réponse indicielle $P_h(t)$ pour une entrée échelon de valeur $i(t)=i_0\, u(t)$

<u>Aide</u> : On rappelle que $\mathfrak{L}(t\exp(-at)u(t)) = \frac{1}{(p+a)^2}$

L'échelon d'entrée s'écrit : $I(p) = \frac{i_0}{p}$

On calcule $P_h(p)$ en fonction de i0 : $P_h(p) = i_0\frac{K_{sv}}{p(1+T_{sv}p)^2}$

La décomposition en éléments simples donne : $P_h(p) = \frac{A}{p}+\frac{B}{1+T_{sv}p}+\frac{C}{(1+T_{sv}p)^2}$

On évalue p Ph(p) en p=0, pour obtenir : $A = K_{sv}i_0$

On évalue $(1+T_{sv}p)^2 P_h(p)$ *en* $p=-1/T_{sv}$ *pour obtenir :* $C = -K_{sv}i_0 T_{sv}$

On calcule la limite de p Ph(p) en l'infini et on obtient : $A+\frac{B}{T_{sv}} = 0$ *soit* $B = -AT_{sv} = C$

Ainsi $P_h(p) = K_{sv}i_0\left(\frac{1}{p}-\frac{T_{sv}}{1+T_{sv}p}-\frac{T_{sv}}{(1+T_{sv}p)^2}\right)$

Soit après réécriture $P_h(p) = K_{sv}i_0\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\frac{1}{T_{sv}}+p}-\frac{\frac{1}{T_{sv}}}{(\frac{1}{T_{sv}}+p)^2}\right)$

On obtient de retour dans le domaine temporel :

$$Ph(t) = K_{sv}i_0 u(t)\left(1-\exp(-t/T_{sv})-\frac{t}{T_{sv}}\exp(-t/T_{sv})\right)$$

<u>Question 13 :</u> Déterminer les transformées de Laplace des expressions (1) à (5).

(1) $\varepsilon(p) = X_1(p) - X_2(p)$

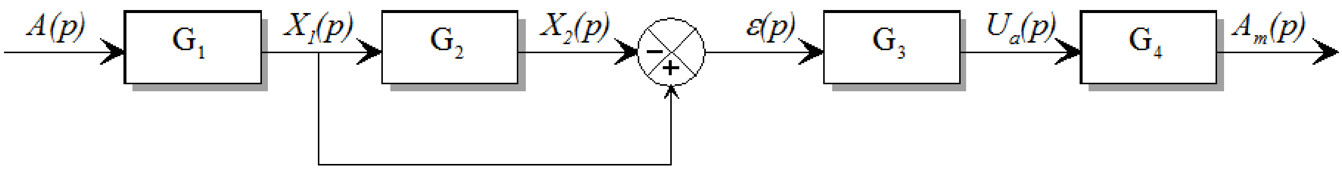
(2) $A(p) = p^2.X_1(p)$

(3) $m_a.p^2.X_2(p) = c_a.p\left(X_1(p) - X_2(p)\right) + k_a\left(X_1(p) - X_2(p)\right)$

(4) $U_a(p) = K_p.\varepsilon(p)$

(5) $A_m(p) = K_{CAN}.U_a(p)$

Question 14 : En déduire les transmittances G_i du schéma bloc ci-après.



$$G_1 = \frac{X_1(p)}{A(p)} = \frac{1}{p^2} \qquad G_3 = \frac{U_a(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \qquad G_4 = \frac{A_m(p)}{U_a(p)} = K_{CAN}$$

De l'équation (3), on extrait : $$G_2 = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{c_a.p + k_a}{m_a.p^2 + c_a.p + k_a}$$

Question 15 : En déduire la fonction de transfert $\frac{A_m(p)}{A(p)}$ et montrer quelle peut se mettre sous la forme $\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{K_{acc}}{1 + 2\frac{\xi_a}{\omega_a}p + \frac{p^2}{\omega_a^2}}$. Donner les expressions de K_{acc}, ξ_a et ω_a

La fonction de transfert est : $$\frac{A_m(p)}{A(p)} = G_1.G_3.G_4\left(1 - G_2\right)$$

On remplace les transmittances G_i : $$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{K_p.K_{CAN}}{p^2}\left(1 - \frac{c_a.p + k_a}{m_a.p^2 + c_a.p + k_a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{m_a.K_p.K_{CAN}}{m_a.p^2 + c_a.p + k_a}$$

Fonction de transfert sous sa forme canonique :

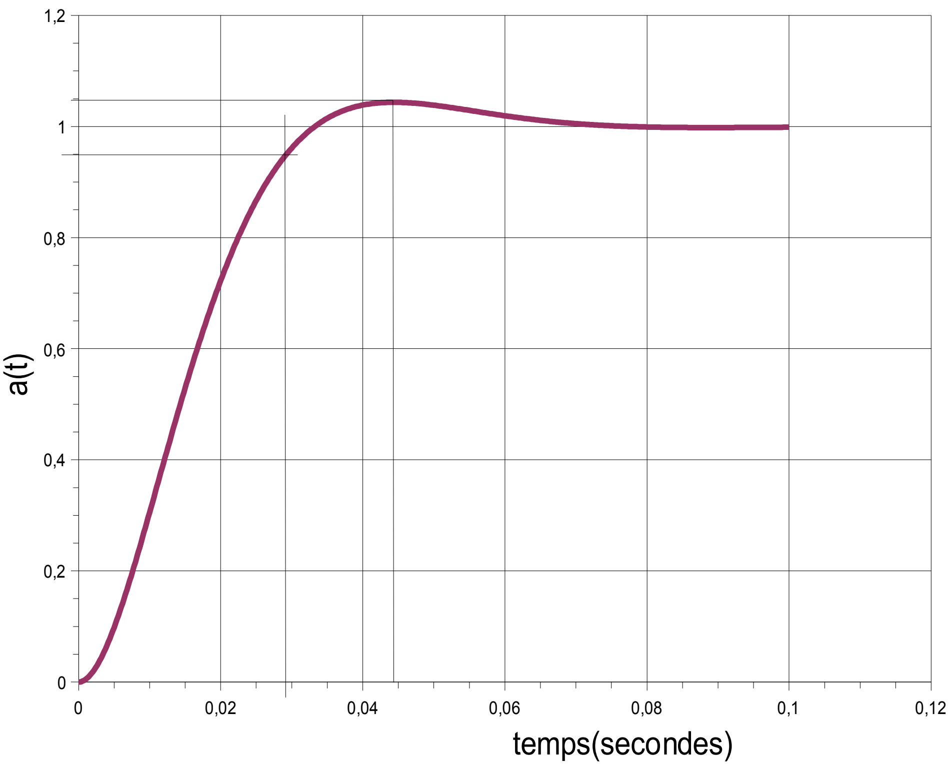
$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = \frac{m_a.K_p.K_{CAN}}{k_a}\,\frac{1}{1 + \frac{c_a}{k_a}p + \frac{m_a}{k_a}p^2}$$

Gain statique : $K_{acc} = \frac{m_a.K_p.K_{CAN}}{k_a}$ *Pulsation propre :* $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$

Coefficient d'amortissement : $\xi_a = \dfrac{c_a}{2\sqrt{k_a.m_a}}$

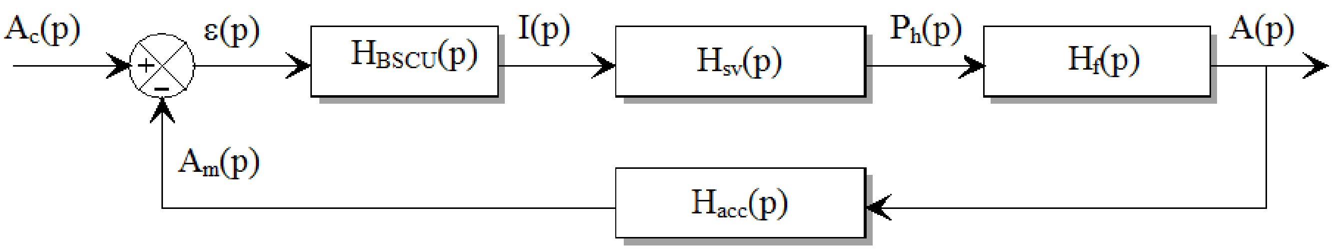
Question 16 : La figure ci-dessous donne la réponse indicielle (entrée unitaire) de l'accéléromètre. Identifier les valeurs des constantes K_{acc} , ξ_a et ω_a (On pourra utiliser les abaques donnés en annexe).

La valeur asymptotique vaut 1 = K E0 avec E0 = 1 donc le gain est égal à 1
Le premier dépassement a pour valeur approximative 1.05-1 = 0.05 soit un taux de dépassement de 5%
Sur l'abaque on en déduit : $\xi_a = 0.7$
Ainsi l'abaque du temps de réponse réduit donne : Tr = 3
Comme on mesure un temps de réponse à 5% de 0.045s environ (ou 0.029 si temps d'avant)
D'où $\omega_0 = 67\,rad/s$ *(ou 100 rad/s)*



Partie III - Etude de l'asservissement global

La boucle d'asservissement en décélération est donnée ci-après :



avec $H_{sv}(p) = \dfrac{K_{sv}}{(1+T_{sv}\,p)^2}$, $H_{acc}(p) = \dfrac{K_{acc}}{1+2\dfrac{\xi_a}{\omega_a}p+\dfrac{p^2}{\omega_a^2}}$ $H_f(p) = K_f$ $H_{BSCU} = K_c$

Question 17 : Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert en boucle ouverte. En déduire l'ordre, la classe et le gain de la FTBO(p).

FTBO :

$$FTBO = \frac{A_m(p)}{\varepsilon(p)} = K_c.\frac{K_{sv}}{(1+T_{sv}.p)^2}.K_f.\frac{K_{acc}}{1+2\frac{\xi_a}{\omega_a}p+\frac{p^2}{\omega_a^2}}$$

FTBO sous sa forme canonique :

$$FTBO = \frac{K_c.K_{sv}.K_f.K_{acc}}{(1+T_{sv}.p)^2\left(1+2\frac{\xi_a}{\omega_a}p+\frac{p^2}{\omega_a^2}\right)}$$

Caractéristiques de la FTBO :

–Ordre : 4 , classe : 0 , gain : $K_{BO} = K_c.K_{sv}.K_f.K_{acc}$

Question 18 : Exprimer l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de $a_c(p)$ et de la FTBO(p)

Dans le domaine de Laplace, l'expression de l'écart ε(p) en fonction de l'entrée $A_c(p)$ est :

$$\varepsilon(p) = \frac{A_c(p)}{1+FTBO} \quad car \quad \varepsilon(p)=Ac(p)-Am(p)=Ac(p)-FTBO\,\varepsilon(p)$$

Question 19 : En déduire l'écart en régime permanent à une entrée de type échelon d'accélération $a_c(t)=a_c u(t)$. Que peut on dire de la performance de précision pour ce correcteur ?

On applique le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p.A_c(p)}{1+FTBO}\right)$$

Or pour un échelon d'amplitude a_c : $A_c(p) = \frac{a_c}{p}$.

D'autre part : $\lim_{p\to 0} FTBO = K_{BO}$

D'où l'écart en régime permanent : $\varepsilon = \frac{a_c}{1+K_{BO}} = \frac{a_c}{1+K_c.K_{sv}.K_f.K_{acc}}$

Ce système n'est pas précis car l'écart n'est pas nul.

Question 20 : On utilise un correcteur (correcteur PI) plus évolué de fonction de transfert $H_{BSCU}=K_i\frac{(1+T_i p)}{p}$, déterminer à nouveau l'écart en régime permanent et conclure sur ce choix de correcteur.

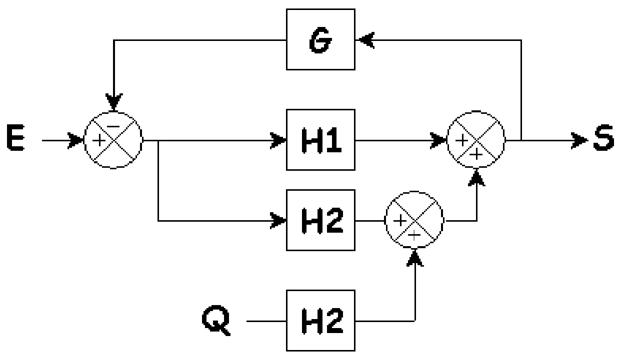
Cette fois, la FTBO vaut : $$FTBO = \frac{K_c.K_{sv}.K_f.K_{acc}}{(1+T_{sv}.p)^2\left(1+2\frac{\xi_a}{\omega_a}p+\frac{p^2}{\omega_a^2}\right)}$$

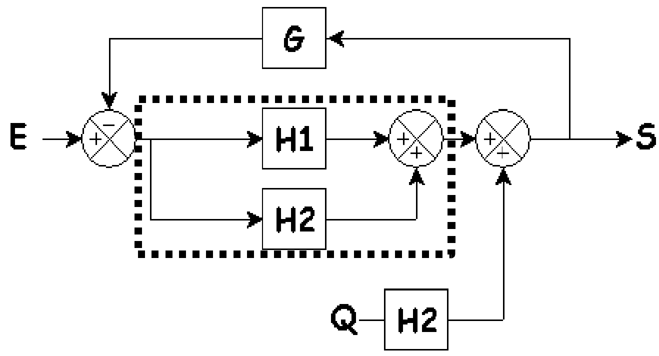
$$FTBO = K_i K_{sv} K_f K_{acc} \frac{1+T_i p}{p(1+T_{sv} p)^2 \left(1+2\frac{\xi_a}{\omega_a} p + \frac{p^2}{\omega_a^2}\right)}$$ *d'où une limite infinie quand p tend vers 0*

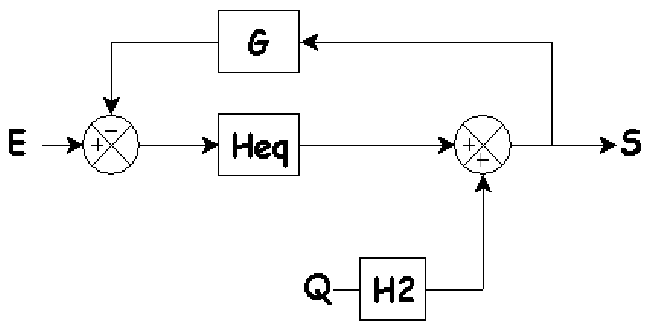
Ainsi l'écart vaut donc 0, le système est précis.

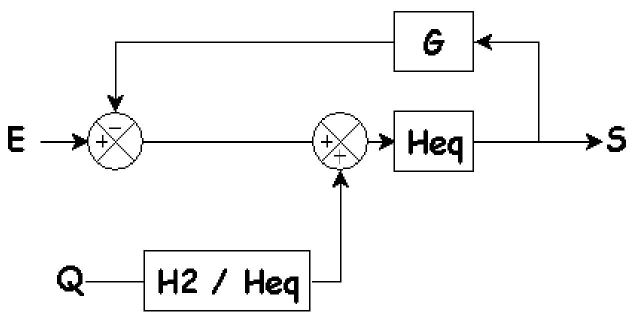
Exercice supplémentaire

Question 21 : Réduire le schéma-bloc pour obtenir S(p) = H(p)*E(p) + F(p)*Q(p) où l'on précisera l'expression de H(p) et F(p) (On peut omettre les (p) pour simplifier les notations).

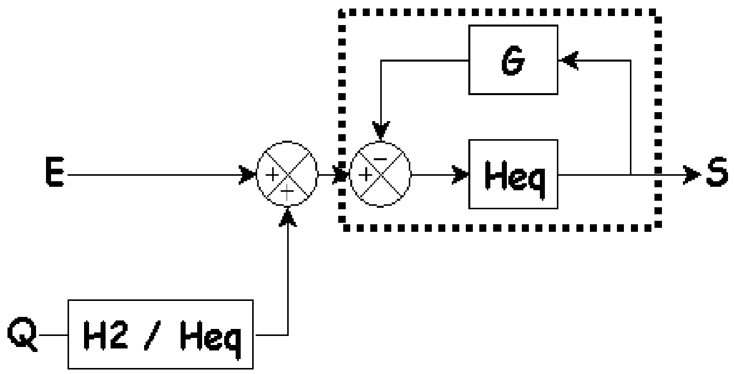








avec Heq = H1 + H2



$$S = \frac{Heq}{1+Heq\,G}\left(E + \frac{H2}{Heq} Q\right) \quad \text{soit} \quad S = \frac{Heq}{1+Heq\,G} E + \frac{H2}{1+Heq\,G} Q$$

$$S = \frac{(H1+H2)}{1+(H1+H2)G} E + \frac{H2}{1+(H1+H2)G} Q$$

Ainsi $H = \frac{(H1+H2)}{1+(H1+H2)G}$ et $F = \frac{H2}{1+(H1+H2)G}$