

# CONCOURS BLANC – 2014

## D'APRÈS CONCOURS CENTRALE – SUPELEC 2008

### Éléments de corrigés

Adaptations Florestan Mathurin et Xavier Pessoles.

## 1 Mise en situation

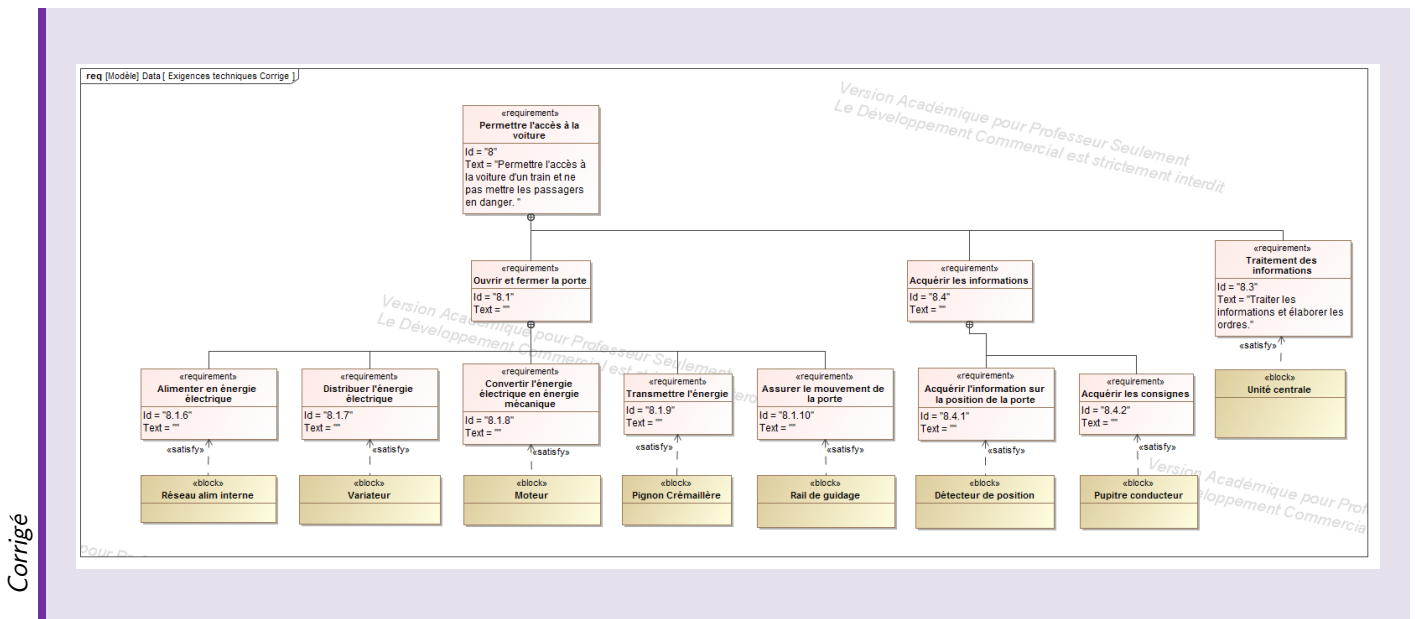
### 1.1 Objet de l'étude

### 1.2 Orientation de l'étude

### 1.3 Présentation du système

#### Question 1

À partir de la figure ??, compléter le diagramme de blocs sur le document réponse.



## 2 Étude du mouvement de la porte en mode nominal

#### Question 2

Décrire en quelques lignes la phase intermédiaire de louvoiement en précisant la nature du mouvement de la porte (4) par rapport à la caisse (0).

En première approche, on peut considérer que le mouvement de la porte est une rotation d'axe  $\vec{z}_0$ . Cette phase a pour but de remettre la porte «parallèle» à la caisse.

### Question 3

En le reprenant sur votre feuille, compléter le tableau ci-dessous recensant les degrés de mobilité (nombre et nature) de la porte (4) par rapport à la caisse du TGV (0) lors des différentes phases.

Corrigé

	Nombre	Nature
Décalage	1	Rotation
Louvoiement	1	Rotation
Escamotage	1	Translation

## 2.1 Étude analytique de la phase de décalage

Vérifier la satisfaction de l'exigence de 8.2.2.1.

### Question 4

Comment varie la longueur EI au cours de la phase de décalage ?

Corrigé

Lors de la phase de décalage la longueur EI diminue.

### Question 5

Dans quel sens (horaire ou trigonométrique) doit tourner la roue (6) par rapport au bras (1) afin de provoquer le décalage angulaire de la porte (4) par rapport à la caisse (0) ?

Corrigé

La roue (6) doit tourner dans le sens horaire pour provoquer le décalage angulaire de la porte par rapport à la caisse.

### Question 6

Écrire l'équation de fermeture géométrique liée à la boucle fermée constituée de la chaîne de solides 0 – 1 – 5 – 4.

### Question 7

Déterminer alors la loi entrée sortie en exprimant  $\theta_{40}$  en fonction de  $\theta_{10}$ . Pour cela on mettra l'expression sous la forme  $\sin \theta_{40} \cdot f(\theta_{10}) + \cos \theta_{40} \cdot g(\theta_{10}) = 1$  où  $f$  et  $g$  sont des fonctions à déterminer.

Corrigé

On a :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{0} \quad L_1 \overrightarrow{y_1} + R_5 \overrightarrow{x_4} + \lambda(t) \overrightarrow{y_4} - L_0 \overrightarrow{x_0} - H_0 \overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0}$$

En projetant cette équation sur  $\overrightarrow{x_0}$  :

$$-L_1 \sin \theta_{10} + R_5 \cos \theta_{40} - \lambda(t) \sin \theta_{40} - L_0 = 0 \iff \lambda(t) = \frac{-L_1 \sin \theta_{10} + R_5 \cos \theta_{40} - L_0}{\sin \theta_{40}}$$

En projetant cette équation sur  $\overrightarrow{y_0}$  :

$$L_1 \cos \theta_{10} + R_5 \sin \theta_{40} + \lambda(t) \cos \theta_{40} - H_0 = 0 \iff \lambda(t) = \frac{-L_1 \cos \theta_{10} - R_5 \sin \theta_{40} + H_0}{\cos \theta_{40}}$$

On a donc :

$$\frac{-L_1 \sin \theta_{10} + R_5 \cos \theta_{40} - L_0}{\sin \theta_{40}} = \frac{-L_1 \cos \theta_{10} - R_5 \sin \theta_{40} + H_0}{\cos \theta_{40}}$$

$$\Leftrightarrow -L_1 \sin \theta_{10} \cos \theta_{40} + R_5 \cos^2 \theta_{40} - L_0 \cos \theta_{40} = -L_1 \cos \theta_{10} \sin \theta_{40} - R_5 \sin^2 \theta_{40} + H_0 \sin \theta_{40}$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta_{40} (-L_1 \sin \theta_{10} - L_0) + R_5 = \sin \theta_{40} (-L_1 \cos \theta_{10} + H_0)$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta_{40} (-L_1 \cos \theta_{10} + H_0) - \cos \theta_{40} (L_1 \sin \theta_{10} + L_0) = R_5$$

### Question 8

Exprimer chacun des torseurs des liaisons entrant en compte dans la chaîne de solides 0 – 1 – 5 – 4 au point I.

Liaison 1 – 0 : pivot de centre O :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(O \in 1/0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(I \in 1/0)} = \end{array} \right\}_I$$

$$\overrightarrow{V(I \in 1/0)} = \overrightarrow{V(O \in 1/0)} + \overrightarrow{IO} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = (-R_5 \overrightarrow{x_4} - L_1 \overrightarrow{y_1}) \wedge \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{z_0} = R_5 \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{y_4} - L_1 \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{x_1}$$

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(I \in 1/0)} = R_5 \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{y_4} - L_1 \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_I$$

Liaison 5 – 1 : pivot de centre A :

$$\{\mathcal{V}(5/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(5/1)} = \dot{\theta}_{51} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(A \in 5/1)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(5/1)} = \dot{\theta}_{51} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(I \in 5/1)} = \end{array} \right\}_I$$

$$\overrightarrow{V(I \in 5/1)} = \overrightarrow{V(A \in 5/1)} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\Omega(5/1)} = -R_5 \overrightarrow{x_4} \wedge \dot{\theta}_{51} \overrightarrow{z_0} = R_5 \dot{\theta}_{51} \overrightarrow{y_4}$$

$$\{\mathcal{V}(5/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(5/1)} = \dot{\theta}_{51} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(I \in 5/1)} = R_5 \dot{\theta}_{51} \overrightarrow{y_4} \end{array} \right\}_I$$

Liaison 4 – 5 : contact sphère – cylindre avec roulement sans glissement en I :

$$\{\mathcal{V}(4/5)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(4/5)} = \dot{\theta}_{45} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(I \in 4/5)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_I$$

Liaison 4 – 0 : pivot de centre E :

$$\{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(4/0)} = \dot{\theta}_{40} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(4/0)} = \dot{\theta}_{40} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(I \in 4/0)} = \end{array} \right\}_I$$

$$\overrightarrow{V(I \in 4/0)} = \overrightarrow{V(E \in 4/0)} + \overrightarrow{IE} \wedge \overrightarrow{\Omega(4/0)} = \lambda(t) \overrightarrow{y_4} \wedge \dot{\theta}_{40} \overrightarrow{z_0} = \lambda(t) \dot{\theta}_{40} \overrightarrow{x_4}$$

$$\{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(4/0)} = \dot{\theta}_{40} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(I \in 4/0)} = \lambda(t) \dot{\theta}_{40} \overrightarrow{x_4} \end{array} \right\}_I$$

### Question 9

Réaliser la fermeture de chaîne cinématique au point I. On projettera l'équation des vecteurs vitesse dans la base  $\mathcal{R}_4$ .

La fermeture de chaîne cinématique donne :

$$\{\mathcal{V}(4/5)\} + \{\mathcal{V}(5/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} = \{\mathcal{V}(4/0)\}$$

La fermeture des vecteur instantané de rotation se traduit par :

$$\dot{\theta}_{45} \vec{z}_0 + \dot{\theta}_{51} \vec{z}_0 + \dot{\theta}_{10} \vec{z}_0 = \dot{\theta}_{40} \vec{z}_0 \implies \dot{\theta}_{45} + \dot{\theta}_{51} + \dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{40}$$

La fermeture des vecteurs vitesse donne :

$$\vec{0} + R_5 \dot{\theta}_{51} \vec{y}_4 + R_5 \dot{\theta}_{10} \vec{y}_4 - L_1 \dot{\theta}_{10} \vec{x}_1 = \lambda(t) \dot{\theta}_{40} \vec{x}_4 \iff R_5 \dot{\theta}_{51} \vec{y}_4 + R_5 \dot{\theta}_{10} \vec{y}_4 - L_1 \dot{\theta}_{10} \vec{x}_1 = \lambda(t) \dot{\theta}_{40} \vec{x}_4$$

Exprimons  $\vec{x}_1$  dans le repère  $\mathcal{R}_4$  :

$$\vec{x}_1 = \cos \theta_{10} \vec{x}_0 + \sin \theta_{10} \vec{y}_0 \quad \vec{x}_0 = \cos \theta_{40} \vec{x}_4 - \sin \theta_{40} \vec{y}_4 \quad \vec{y}_0 = \sin \theta_{40} \vec{x}_4 + \cos \theta_{40} \vec{y}_4$$

On a donc :

$$\vec{x}_1 = \cos \theta_{10} (\cos \theta_{40} \vec{x}_4 - \sin \theta_{40} \vec{y}_4) + \sin \theta_{10} (\sin \theta_{40} \vec{x}_4 + \cos \theta_{40} \vec{y}_4)$$

$$\iff \vec{x}_1 = (\cos \theta_{10} \cos \theta_{40} + \sin \theta_{10} \sin \theta_{40}) \vec{x}_4 + (\sin \theta_{10} \cos \theta_{40} - \cos \theta_{10} \sin \theta_{40}) \vec{y}_4$$

$$\iff \vec{x}_1 = \cos(\theta_{10} - \theta_{40}) \vec{x}_4 + \sin(\theta_{10} - \theta_{40}) \vec{y}_4$$

On a alors :

$$R_5 \dot{\theta}_{51} \vec{y}_4 + R_5 \dot{\theta}_{10} \vec{y}_4 - L_1 \dot{\theta}_{10} (\cos(\theta_{10} - \theta_{40}) \vec{x}_4 + \sin(\theta_{10} - \theta_{40}) \vec{y}_4) = \lambda(t) \dot{\theta}_{40} \vec{x}_4$$

En projetant sur  $\vec{x}_4$  et sur  $\vec{y}_4$  :

$$-L_1 \dot{\theta}_{10} \cos(\theta_{10} - \theta_{40}) = \lambda(t) \dot{\theta}_{40}$$

$$R_5 \dot{\theta}_{51} + R_5 \dot{\theta}_{10} - L_1 \dot{\theta}_{10} \sin(\theta_{10} - \theta_{40}) = 0$$

Corrigé

### Question 10

Calculer  $\overrightarrow{V(A \in 5/4)}$  par le calcul direct.

$$\overrightarrow{V(A \in 5/4)} = \left[ \frac{d\vec{EA}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_4} = \left[ \frac{d\vec{EI}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_4} + \left[ \frac{d\vec{IA}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_4} = \left[ \frac{d - \lambda(t) \vec{y}_4}{dt} \right]_{\mathcal{R}_4} + \left[ \frac{d - R_5 \vec{x}_4}{dt} \right]_{\mathcal{R}_4} = -\dot{\lambda}(t) \vec{y}_4$$

Corrigé

### Question 11

À partir de la condition de roulement sans glissement au point I, déterminer une deuxième expression de  $\overrightarrow{V(A \in 5/4)}$  à l'aide du champ des vitesses. En déduire une relation scalaire liant  $\dot{\lambda}$ ,  $R_5$  et  $\dot{\theta}_{54}$ .

$$\overrightarrow{V(A \in 5/4)} = \overrightarrow{V(I \in 5/4)} + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}(5/4) = R_5 \vec{x}_4 \wedge \dot{\theta}_{54} \vec{z}_0 = -R_5 \dot{\theta}_{54} \vec{y}_4$$

En utilisant la question précédente, on a alors :

$$-\dot{\lambda}(t) \vec{y}_4 = -R_5 \dot{\theta}_{54} \vec{y}_4 \implies \dot{\lambda}(t) = R_5 \dot{\theta}_{54}$$

Corrigé

### Question 12

Montrer que l'équation vectorielle obtenue par la fermeture cinématique correspond à l'équation vectorielle dérivée issue de la fermeture de géométrie de la question 6.

En utilisant la fermeture cinématique on a :

$$R_5 \dot{\theta}_{51} \vec{y}_4 + R_5 \dot{\theta}_{10} \vec{y}_4 - L_1 \dot{\theta}_{10} (\cos(\theta_{10} - \theta_{40}) \vec{x}_4 + \sin(\theta_{10} - \theta_{40}) \vec{y}_4) = \lambda(t) \dot{\theta}_{40} \vec{x}_4$$

En utilisant la fermeture géométrique, on a :

$$L_1 \vec{y}_1 + R_5 \vec{x}_4 + \lambda(t) \vec{y}_4 - L_0 \vec{x}_0 - H_0 \vec{y}_0 = \vec{0}$$

En dérivant l'expression on obtient donc :

$$-L_1 \dot{\theta}_{10} \vec{x}_1 + R_5 \dot{\theta}_{40} \vec{y}_4 + \dot{\lambda}(t) \vec{y}_4 - \lambda(t) \dot{\theta}_{40} \vec{x}_4 = \vec{0} \iff -L_1 \dot{\theta}_{10} \vec{x}_1 + R_5 \dot{\theta}_{40} \vec{y}_4 + \dot{\lambda}(t) \vec{y}_4 = \lambda(t) \dot{\theta}_{40} \vec{x}_4$$

$$\iff -L_1 \dot{\theta}_{10} (\cos(\theta_{10} - \theta_{40}) \vec{x}_4 + \sin(\theta_{10} - \theta_{40}) \vec{y}_4) + R_5 \dot{\theta}_{40} \vec{y}_4 + \dot{\lambda}(t) \vec{y}_4 = \lambda(t) \dot{\theta}_{40} \vec{x}_4$$

Il faut donc montrer que :  $R_5 \dot{\theta}_{51} \vec{y}_4 + R_5 \dot{\theta}_{10} \vec{y}_4 = R_5 \dot{\theta}_{40} \vec{y}_4 + \dot{\lambda}(t) \vec{y}_4 \implies \dot{\theta}_{51} + \dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{40} + \dot{\theta}_{54}$ .

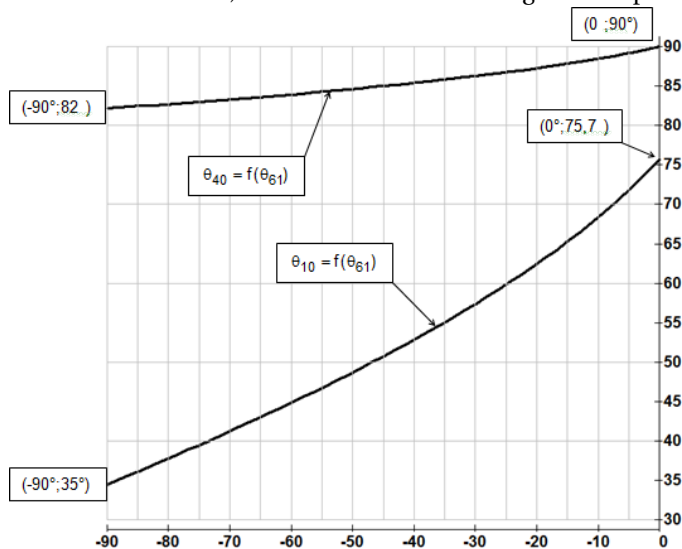
Or, d'après la fermeture cinématique, on a vu que :

$$\dot{\theta}_{45} + \dot{\theta}_{51} + \dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{40} \iff \dot{\theta}_{51} + \dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{40} + \dot{\theta}_{54}$$

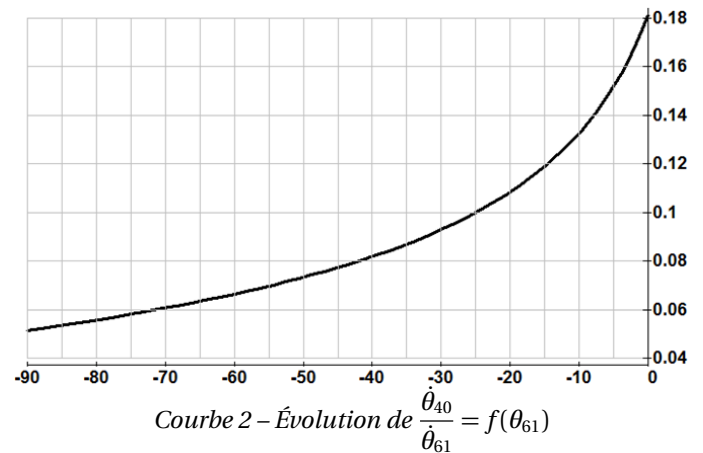
CQFD.

Corrigé

Les courbes 1 et 2 présentent les évolutions obtenues par simulation numérique de la position angulaire de la porte  $\theta_{40}$ , de la position angulaire du bras support (1)  $\theta_{10}$  et du rapport  $\frac{\theta_{40}}{\theta_{10}}$  en fonction de l'angle de rotation du moteur  $\theta_{61}$ . On suppose qu'à l'instant initial  $t = 0$ , on se trouve dans la configuration «porte fermée» pour laquelle on considère que  $\theta_{61} = \theta_{51} = 0$ .



Courbe 1 – Évolutions (en °) de  $\theta_{40} = f(\theta_{61})$  et  $\theta_{10} = f(\theta_{61})$



Courbe 2 – Évolution de  $\frac{\theta_{40}}{\theta_{10}} = f(\theta_{61})$

### Question 13

A l'aide des équations scalaires obtenues grâce à la fermeture géométrique et de la courbe 1 faire l'application numérique pour la configuration  $t = 0$  s afin de déterminer le rayon  $R_5$  ainsi que la valeur de  $\lambda(t = 0)$  notée  $\lambda_0$ . ( $\cos 75,7 \simeq 0,25$  et  $\sin 75,7 \simeq 0,97$ )

Les équations scalaires sont les suivantes :

$$\lambda(t) \sin \theta_{40} = -L_1 \sin \theta_{10} + R_5 \cos \theta_{40} - L_0 \quad \lambda(t) \cos \theta_{40} = -L_1 \cos \theta_{10} - R_5 \sin \theta_{40} + H_0$$

Corrigé

Corrigé

En  $t = 0$ ,  $\theta_{40} = 90$  :

$$\lambda_0 \sin \theta_{40} = -L_1 \sin \theta_{10} - L_0 \quad 0 = -L_1 \cos \theta_{10} - R_5 + H_0$$

On a donc  $R_5 = H_0 - L_1 \cos \theta_{10} \Rightarrow R_5 = 65,8 - 149 \cdot \cos 75,7 \simeq 29 \text{ mm}$ .

Par ailleurs :  $\lambda_0 = -L_1 \sin \theta_{10} - L_0 = -149 \sin 75,7 - 544 \simeq 693 \text{ mm}$ .

#### Question 14

Déterminer la fréquence de rotation supposée constante du moteur (en  $\text{tr/min}$ ) si la durée de la phase de décalage est limitée à 0,3 s.

Corrigé

Durant la phase de décalage, la courbe 1 indique que le moteur tourne de 90 degrés. Pour que cette phase soit limitée à 0,3 s, on a donc une vitesse de rotation de 1 tour pour 1,2 s soient 50 tours par minute.

#### Question 15

En utilisant la courbe 2, déterminer alors la plage de variation de la fréquence de rotation de la porte (4) par rapport à la caisse (0) sachant que la porte a une longueur  $L_4 = 850 \text{ mm}$  et une épaisseur  $e_4 = 40 \text{ mm}$ . Conclure vis-à-vis du cahier des charges fonctionnel.

Corrigé

On a :

$$0,05 < \frac{\dot{\theta}_{40}}{\dot{\theta}_{61}} < 0,18 \iff 0,05\dot{\theta}_{61} < \dot{\theta}_{40} < 0,18\dot{\theta}_{61} \iff 2,5 \text{ tr/min} < \dot{\theta}_{40} < 9 \text{ tr/min}$$

La vitesse maximale en bout de porte est donc de l'ordre de  $850 \cdot \frac{9 \cdot 2\pi}{60} \simeq 850 \text{ mm/s}$ . Cela est compatible avec l'exigence 8.2.2.1.

## 2.2 Étude graphique de la phase de décalage

#### Question 16

Sur le document-réponse fourni, définir géométriquement la position des points (B, C, I, J) dans la configuration «porte fermée». Faire apparaître la roue (6) et les solides (3), (2) et (1).

Corrigé

Pour la question suivante, on précisera les directions des différentes vitesses et/ou la position des centres instantanés de rotation. On respectera l'échelle des vitesses donnée sur le document réponse. Les justifications des tracés seront reportées directement sur le document-réponse.

#### Question 17

Sur le document-réponse fourni, construire graphiquement la vitesse du point I appartenant à la porte (4) par rapport à (1), soit  $\overrightarrow{V(I \in 4/1)}$  à partir de la vitesse  $\overrightarrow{V(J \in 6/1)}$ . Justifier vos hypothèses. Construire alors les vitesses  $\overrightarrow{V(I \in 4/0)}$  et  $\overrightarrow{V(I \in 1/0)}$ .

Corrigé

Le mouvement de (6) par rapport à (1) est une rotation de centre B.  $\overrightarrow{V(J \in 6/1)}$  est donc tangent au cercle de centre B et de rayon BJ. Par ailleurs  $\dot{\theta}_{61} = -50 \text{ tr/min}$  et  $R_6 = 37 \text{ mm}$ . On a donc  $\|\overrightarrow{V(J \in 6/1)}\| = \frac{50 \cdot 2\pi}{60} R_6 \simeq 185 \text{ mm/s}$ . La rotation dans le sens horaire impose le sens du vecteur.

Par ailleurs le roulement sans glissement en J entre 6 et 5 impose que  $\overrightarrow{V(J \in 6/1)} = \overrightarrow{V(J \in 5/1)}$ . On connaît donc la norme de  $\overrightarrow{V(I \in 5/1)}$ . Sa direction est perpendiculaire à (AI). La rotation dans le sens trigonométrique de la pièce 5 impose le sens de  $\overrightarrow{V(I \in 5/1)}$ .

Corrigé

En outre, le roulement sans glissement en  $I$  impose que  $\overrightarrow{V(I \in 5/1)} = \vec{0}$ . En conséquence,  $\overrightarrow{V(I \in 5/4)} = \vec{0} = \overrightarrow{V(I \in 5/1)} + \overrightarrow{V(I \in 1/0)} + \overrightarrow{V(I \in 0/4)}$  et donc  $\overrightarrow{V(I \in 4/0)} = \overrightarrow{V(I \in 5/1)} + \overrightarrow{V(I \in 1/0)}$ .  $\overrightarrow{V(I \in 4/0)}$  est suivant  $\vec{x}_0$ .  $\overrightarrow{V(I \in 5/1)}$  est connu. Le second Il est donc possible de tracer  $\overrightarrow{V(I \in 4/0)}$ .

Enfin, le mouvement de 1 par rapport à 0 est une rotation de centre O.  $\overrightarrow{V(I \in 1/0)}$  est donc perpendiculaire à (OI).

### Question 18

Après avoir construit la vitesse  $\overrightarrow{V(B \in 1/0)}$ , déterminer  $\overrightarrow{V(C \in 3/0)}$ . En déduire la valeur de  $\dot{\theta}_{30}$  en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Valider le critère du cahier des charges fonctionnel correspondant.

Corrigé

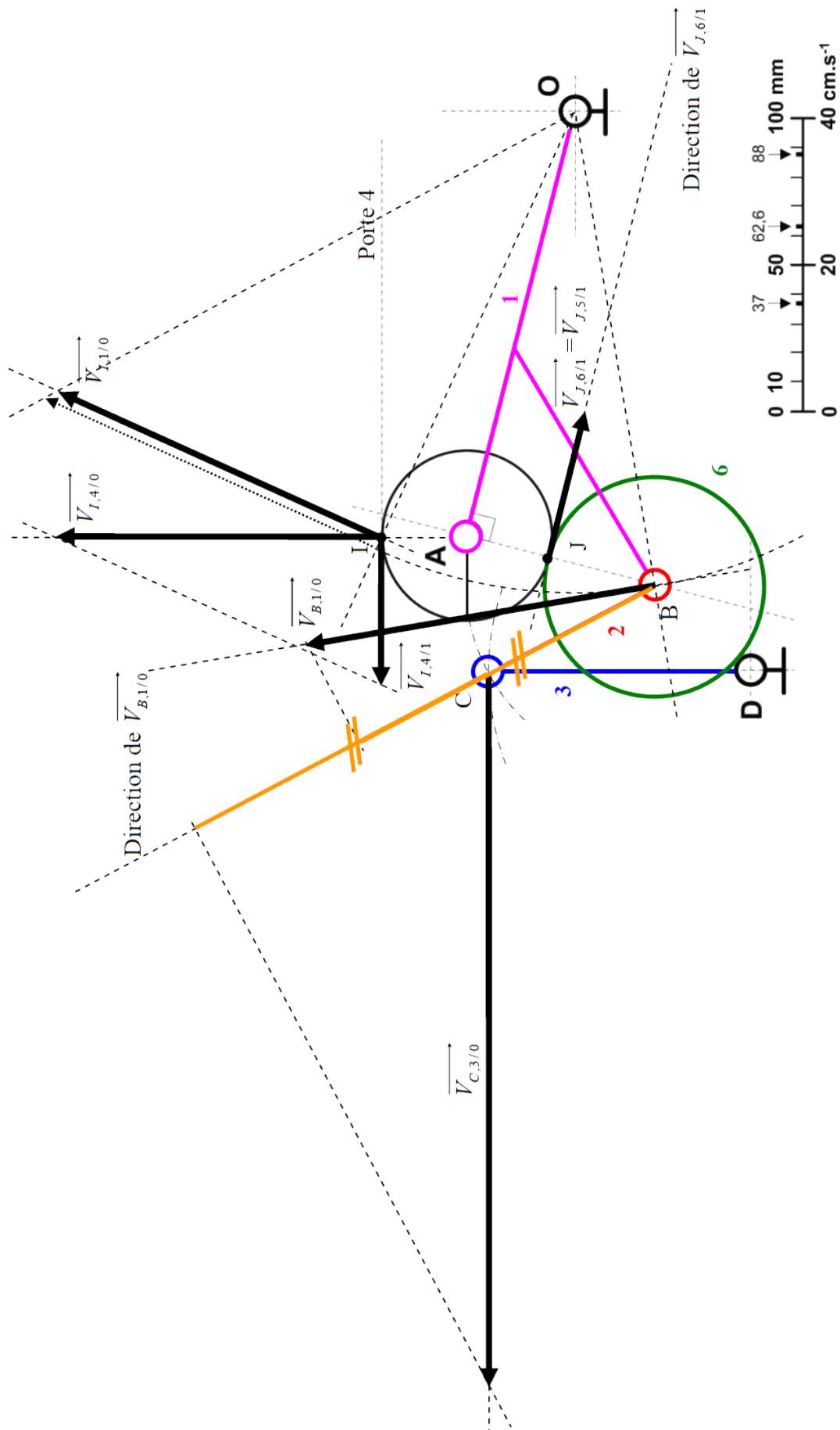
O est le CIR du mouvement de 1/0 donc  $\overrightarrow{V(B \in 1/0)}$  est perpendiculaire à la droite (OB). Par équiprojectivité on a alors  $\overrightarrow{V(B \in 1/0)} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{V(I \in 1/0)} \cdot \overrightarrow{IB}$ .

D'une part,  $\overrightarrow{V(C \in 3/0)} = \overrightarrow{V(C \in 3/2)} + \overrightarrow{V(C \in 2/0)} = \overrightarrow{V(C \in 2/0)}$ ; donc  $\overrightarrow{V(C \in 2/0)}$  est perpendiculaire à (CD). D'autre part  $\overrightarrow{V(B \in 1/0)} = \overrightarrow{V(B \in 1/2)} + \overrightarrow{V(B \in 2/0)} = \overrightarrow{V(B \in 2/0)}$ . On peut donc tracer  $\overrightarrow{V(C \in 2/0)}$  par équiprojectivité :  $\overrightarrow{V(C \in 2/0)} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{V(B \in 2/0)} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

Graphiquement on obtient  $\|\overrightarrow{V(C \in 3/0)}\| = 96 \text{ cm/s}$ .

Au final :  $\dot{\theta}_{30} = \frac{\|\overrightarrow{V(C \in 3/0)}\|}{L_3} = \frac{960}{88} \simeq 11 \text{ rad/s} \simeq 11 \frac{60}{2\pi} \simeq 110 \text{ tr/min} < 140 \text{ tr/min}$ .

L'exigence 8.2.4 est satisfaite.





## 2.3 Étude de la phase d'escamotage

### Question 19

Déterminer la valeur constante (en mm) de  $\vec{OI} \cdot \vec{y}_0$  lors de la phase d'escamotage. Valider alors la satisfaction de l'exigence 8.2.3.

Calculons  $\vec{OI} \cdot \vec{y}_0$  :

$$\vec{OI} \cdot \vec{y}_0 = (\vec{OA} + \vec{AI}) \cdot \vec{y}_0 = \vec{OA} \cdot \vec{y}_0 + R_5 = L_1 \cos \theta_{10} + R_5$$

$\theta_{10} = 35$  en fin de décalage. On a donc :

$$\vec{OI} \cdot \vec{y}_0 = 149 \cos 35 + 29 \simeq 151 \text{ mm}$$

Par ailleurs  $H_0 = 65,8 \text{ mm}$  et l'épaisseur de la porte est de  $40 \text{ mm}$ . L'écart entre la porte et la face du train est donc de  $151 - 40 - 65,8 = 45,2 \text{ mm} > 40 \text{ mm}$ . L'exigence est donc respectée.

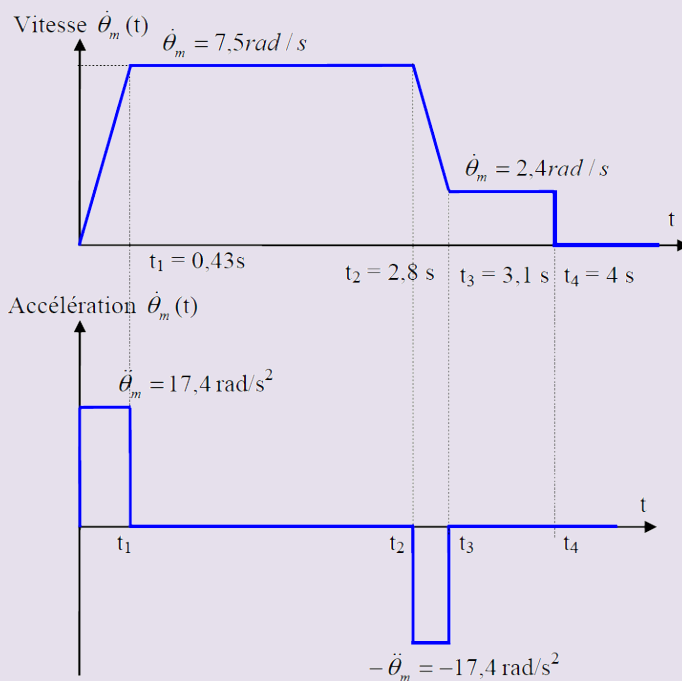
### Question 20

À partir de la description temporelle, tracer l'allure de la loi de commande en vitesse  $\dot{\theta}_m(t)$  du moteur et la loi de commande en accélération  $\ddot{\theta}_m(t)$ . Indiquer toutes les valeurs caractéristiques.

D'après les questions précédentes on a une vitesse d'escamotage qui vaut  $V = R_6 \cdot \dot{\theta}_m$  (le pignon 5 ne sert que de renvoi de mouvement). On en déduit donc d'après les données du cahier des charges que :

$$\dot{\theta}_m(t_1) = \dot{\theta}_m(t_2) = \frac{0,28}{0,037} = 7,5 \text{ rad/s} \text{ et } \dot{\theta}_m(t_3) = \dot{\theta}_m(t_4) = \frac{0,09}{0,037} = 2,4 \text{ rad/s}.$$

$$\text{D'autre part } t_1 = \frac{\dot{\theta}_m(t_1)}{\ddot{\theta}_m(t_1)} = \frac{7,5}{17,4} = 0,43 \text{ s}$$



### 3 Étude de la commande de la porte en mode nominal

#### 3.1 Analyse du modèle de commande de la porte

##### Question 21

Montrer que la fonction de transfert du moteur non perturbé peut se mettre sous la forme  $\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K_m}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ . Déterminer l'expression du gain statique  $K_m$ . Déterminer les valeurs numériques (en s) des deux constantes de temps  $T_1$  et  $T_2$ .

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} &= \frac{\frac{K_c}{(R + Lp)(f + Jp)}}{1 + \frac{K_c K_e}{(R + Lp)(f + Jp)}} = \frac{K_c}{(R + Lp)(f + Jp) + K_c K_e} = \frac{K_c}{Rf + (Lf + RJ)p + LJp^2 + K_c K_e} \\ &= \frac{\frac{K_c}{Rf + K_c K_e}}{1 + \frac{Lf + RJ}{Rf + K_c K_e}p + \frac{LJ}{Rf + K_c K_e}p^2} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K_m}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = \frac{K_m}{1 + T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p}$$

On a donc :

$$\frac{Lf + RJ}{Rf + K_c K_e} = T_1 + T_2 \quad \frac{LJ}{Rf + K_c K_e} = T_1 T_2$$

Corrigé

##### Question 22

En observant la figure ??, proposer une description conditionnelle (si... alors...) du bloc saturateur de la figure ?? en utilisant les variables  $y_4(t)$  et  $y(t)$ . Quelle contrainte mécanique est modélisée par ce bloc ?

Si  $y(t) \leq 850 \text{ mm}$  alors  $y_4(t) = y(t)$ .

Si  $y(t) > 850 \text{ mm}$  alors  $y_4(t) = 850 \text{ mm}$ .

La saturation permet de prendre en compte la butée de fin de course.

Corrigé

##### Question 23

En vous aidant de la figure ??, justifier le caractère non linéaire du saturateur.

On observe que le comportement du saturateur n'est pas linéaire pour tout  $t > 0$ .

Corrigé

#### 3.2 Estimation du couple résistant

##### Question 24

D'après le schéma bloc du moteur, déterminer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $C_r(p)$  et  $I_m(p)$ .

On a directement :

$$\Omega_m(p) = (K_c I_m(p) - C_r(p)) \cdot \frac{1}{f + Jp}$$

Corrigé

### Question 25

D'après le schéma bloc de l'estimateur, déterminer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\Omega_m(p)$ ,  $\hat{C}_r(p)$  et  $I_m(p)$  et déterminer  $\hat{C}_r(p)$  en fonction de  $\varepsilon(p)$ .

Corrigé

On a :

$$\varepsilon(p) = \Omega_m(p) - (I_m(p) \cdot F_3(p) + \hat{C}_r(p)) F_4(p)$$

Par ailleurs :

$$\hat{C}_r(p) = F(p) \varepsilon(p)$$

### Question 26

En déduire la relation entre  $\hat{C}_r(p)$ ,  $C_r(p)$  et  $I_m(p)$ . Déterminer  $F_3(p)$  et  $F_4(p)$  afin que l'estimateur puisse se mettre sous la forme du schéma bloc figure ??.

Corrigé

On a d'une part :

$$\hat{C}_r(p) = \frac{\frac{F(p)}{f + Jp}}{1 + \frac{F(p)}{f + Jp}} C_r(p) = \frac{F(p)}{f + Jp + F(p)} C_r(p)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{C}_r(p)}{F(p)} &= (K_c I_m(p) - C_r(p)) \cdot \frac{1}{f + Jp} - (I_m(p) \cdot F_3(p) + \hat{C}_r(p)) F_4(p) \\ \Leftrightarrow \hat{C}_r(p) &= (K_c I_m(p) - C_r(p)) \cdot \frac{F(p)}{f + Jp} - F(p) (I_m(p) \cdot F_3(p) + \hat{C}_r(p)) F_4(p) \\ \Leftrightarrow \hat{C}_r(p) (1 + F(p) F_4(p)) &= (K_c I_m(p) - C_r(p)) \cdot \frac{F(p)}{f + Jp} - (I_m(p) \cdot F_3(p)) F(p) F_4(p) \\ \Leftrightarrow \hat{C}_r(p) (1 + F(p) F_4(p)) &= \frac{F(p)}{f + Jp} K_c I_m(p) - \frac{F(p)}{f + Jp} C_r(p) - F(p) \cdot F_3(p) F_4(p) I_m(p) \\ \Leftrightarrow \hat{C}_r(p) &= \left( \frac{K_c}{f + Jp} - F_3(p) F_4(p) \right) \frac{F(p)}{1 + F(p) F_4(p)} I_m(p) - \frac{F(p)}{(f + Jp) (1 + F(p) F_4(p))} C_r(p) \end{aligned}$$

Pour pouvoir se mettre sous la forme du schéma bloc donné, il faut donc que :

$$\frac{K_c}{f + Jp} - F_3(p) F_4(p) = 0$$

Par identification, on a donc  $F_3(p) = K_c$  et  $F_4(p) = \frac{1}{f + Jp}$ .

### Question 27

Quel doit être le gain statique en boucle fermée de la fonction de transfert de l'estimateur afin que l'erreur en position soit nulle ? Est-ce le cas ?

Corrigé

On souhaite par ailleurs que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_r(t) - \hat{C}_r(t) = 0 \Rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} \varepsilon_p(p) = \lim_{p \rightarrow 0} (C_r(p) - \hat{C}_r(p)) = 0$$

On a :

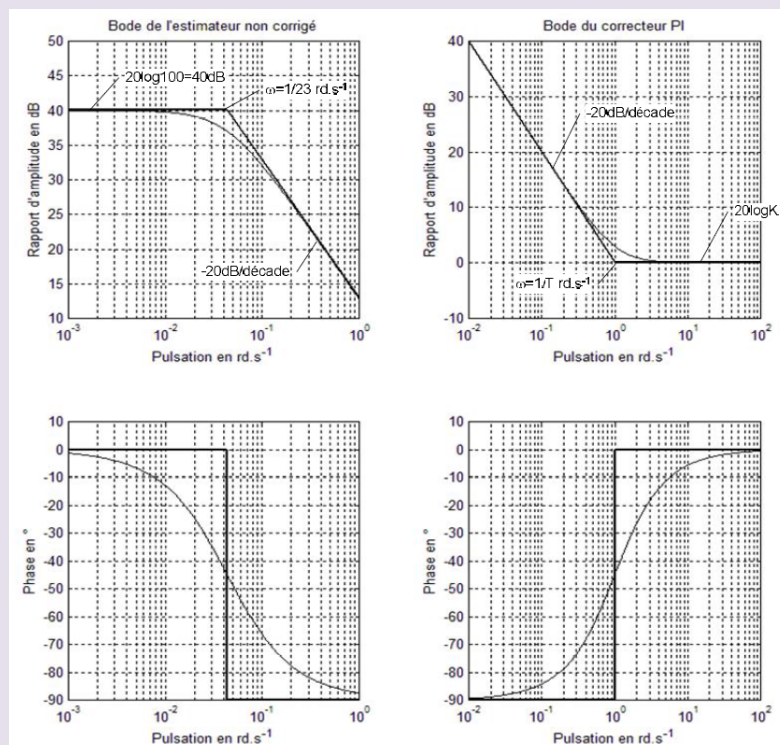
$$\frac{\hat{C}_r(p)}{C(p)} = \frac{K_{cor} \frac{1 + T_{cor} \cdot p}{T_{cor} p}}{f + Jp + K_{cor} \frac{1 + T_{cor} \cdot p}{T_{cor} p}} = \frac{K_{cor}(1 + T_{cor} \cdot p)}{f T_{cor} p + J T_{cor} p^2 + K_{cor}(1 + T_{cor} \cdot p)} = \frac{1 + T_{cor} \cdot p}{1 + T_{cor}(1 + \frac{f}{K_{cor}})p + \frac{J T_{cor}}{K_{cor}} p^2}$$

La FTBF a donc un gain unitaire et tend donc bien vers 1 lorsque  $p$  tend vers 0.

On donne  $T_{cor} = \frac{J}{f}$  et  $K_{cor} = 10$ .

### Question 28

Tracer en vert les diagrammes de Bode (asymptotiques et réels) de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'estimateur sans correcteur. Faire apparaître les points caractéristiques.



### Question 29

Tracer en rouge les diagrammes de Bode (asymptotiques et réels) du correcteur. Faire apparaître les points caractéristiques. On rappelle que  $J = 0,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  et que  $f = 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$ .

### Question 30

Déterminer  $K_{cor}$  pour vérifier l'erreur de traînage imposée par le cahier des charges. Faire l'application numérique.

L'erreur du système est donnée par :

$$\varepsilon(p) = C_r(p) \cdot \frac{1}{1 + K_{cor} \frac{1 + T_{cor} \cdot p}{T_{cor} p} \cdot \frac{1}{f + Jp}} = C_r(p) \frac{T_{cor} p (f + Jp)}{T_{cor} p (f + Jp) + K_{cor} (1 + T_{cor} p)}$$

L'erreur de trainage se calcule à partir d'une entrée en rampe (de pente  $a$ ) :  $C_r(p) = \frac{a}{p^2}$ .

On a donc

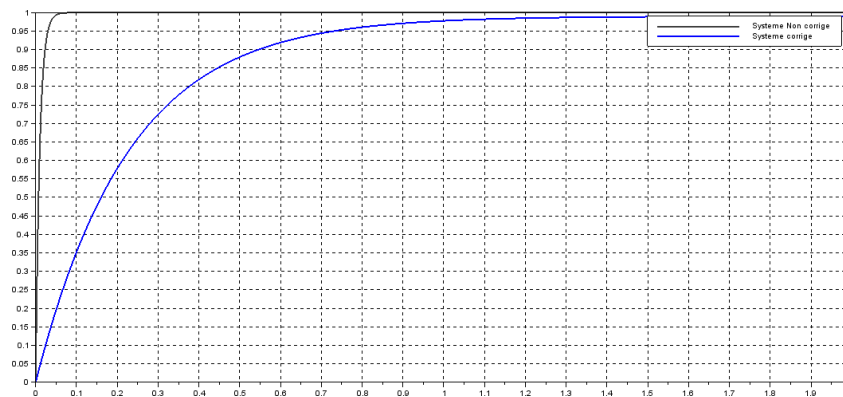
$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{a}{p^2} \cdot \frac{T_{Cor} p(f + Jp)}{T_{Cor} p(f + Jp) + K_{cor}(1 + T_{cor}p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{T_{Cor} a(f + Jp)}{T_{Cor} p(f + Jp) + K_{cor}(1 + T_{cor}p)} = \frac{T_{cor} a f}{K_{cor}}$$

Prenons une pente de 1.  $\varepsilon_v = \frac{T_{cor} f}{K_{cor}} < 0,01 \Leftrightarrow K_{cor} > 100 f T_{cor} \Leftrightarrow K_{cor} > 23$ .

Corrigé

### Question 31

On donne les tracés de la réponse indicielle (entrée unitaire) de la fonction de transfert de en boucle fermée de l'estimateur avec et sans correction. Faire apparaître sur chaque tracé l'erreur de position et le temps de réponse à 5%. Vérifie-t-on tous les critères du cahier des charges de l'estimateur ?



Le système corrigé répond à l'exigence d'écart statique nul et de temps de réponse inférieur à 0,05 seconde (0,01 seconde).

Corrigé