CI 3 – CIN : ÉTUDE DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES

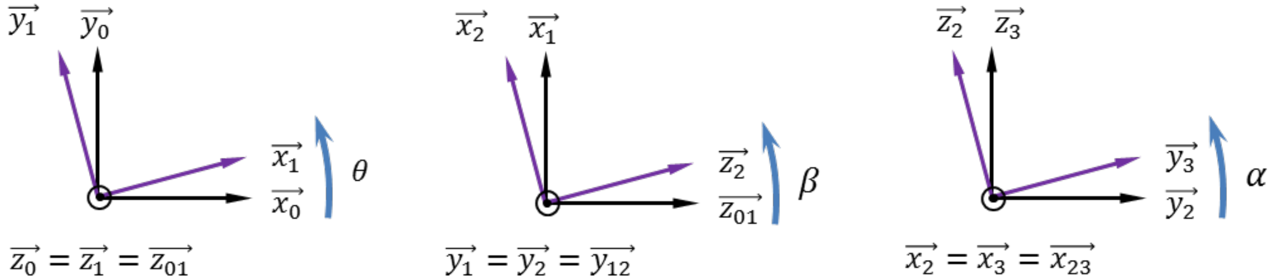
DEVOIR SURVEILLÉ 6

Eléments de corrigés

1 Pales d'hélicoptères

1.1 Mise en situation

1.2 Cinématique analytique



Question 1

Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V(G\in S_3/S_2)}$.

Correction

On a :

$$\{\mathscr{V}(S_3/S_2)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)}=\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{23}}\\ \overrightarrow{V(A_3\in S_3/S_2)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{A_3}$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(G\in S_3/S_2)}=\underbrace{\overrightarrow{V(A_3\in S_3/S_2)}}_{\overrightarrow{0}}+\overrightarrow{GA_3}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)}=-a\overrightarrow{x_{23}}\wedge\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{23}}=\overrightarrow{0}$$

Au final,

$$\{\mathscr{V}(S_3/S_2)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_3/S_2)}=\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{23}}\\ \overrightarrow{V(G\in S_3/S_2)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{G}$$

Question 2

Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}$.

Correction

On a :

$$\{\mathscr{V}(S_2/S_1)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}=\dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}}\\ \overrightarrow{V(A_3\in S_2/S_1)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{A_3}$$

Correction

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}=\underbrace{\overrightarrow{V(A_3\in S_2/S_1)}}_{\overrightarrow{0}}+\overrightarrow{GA_3}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}=-a\overrightarrow{x_{23}}\wedge\dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}}=-a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}$$

Au final,

$$\{\mathscr{V}(S_2/S_1)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}=\dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}}\\ \overrightarrow{V(G\in S_2/S_1)}=-a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}\end{array}\right\}_G$$

Question 3

Déterminer le vecteur $\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}$.

Correction

On a :

$$\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}}\\ \overrightarrow{V(O\in S_1/S_0)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}=\underbrace{\overrightarrow{V(O\in S_1/S_0)}}_{\overrightarrow{0}}+\overrightarrow{GO}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=\left(-a\overrightarrow{x_{23}}-r\overrightarrow{x_1}\right)\wedge\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}}=a\dot{\theta}\cos\beta\overrightarrow{y_{12}}+r\dot{\theta}\overrightarrow{y_{12}}$$

Au final,

$$\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}}\\ \overrightarrow{V(G\in S_1/S_0)}=\dot{\theta}\left(a\cos\beta+r\right)\overrightarrow{y_{12}}\end{array}\right\}_G$$

Question 4

Déduire des questions précédentes le torseur $\{\mathscr{V}(S_3/S_0)\}$ au point G.

Correction

Par composition du torseur cinématique on a :

$$\{\mathscr{V}(S_3/S_0)\}=\{\mathscr{V}(S_3/S_2)\}+\{\mathscr{V}(S_2/S_1)\}+\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\}$$

Tous les torseurs ayant déjà été exprimés au même point, on a :

$$\{\mathscr{V}(S_3/S_0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_3/S_0)}=\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}}+\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{23}}+\dot{\beta}\overrightarrow{y_{12}}\\ \overrightarrow{V(G\in S_3/S_0)}=\dot{\theta}\left(a\cos\beta+r\right)\overrightarrow{y_{12}}-a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}\end{array}\right\}_G$$

On pose maintenant $\overrightarrow{V(G\in S_3/S_0)}=(a\cdot\cos\beta+r)\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{y_{12}}-a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}$.

On pose maintenant $\overrightarrow{V(G\in S_3/S_0)}=(a\cdot\cos\beta+r)\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{y_{12}}-a\dot{\beta}\overrightarrow{z_2}$.

Question 5

Exprimer l'accélération $\overrightarrow{\Gamma(G\in S_3/S_0)}$.

Correction

Par définition,

$$\overrightarrow{\Gamma(G\in S_3/S_0)}=\left[\frac{\overrightarrow{V(G\in S_3/S_0)}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

Il est donc nécessaire de dériver $\overrightarrow{y_{12}}$ et $\overrightarrow{z_2}$:

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_{12}}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{y_{12}}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_1}+\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}\wedge\overrightarrow{y_{12}}=\dot\theta\overrightarrow{z_{01}}\wedge\overrightarrow{y_{12}}=-\dot\theta\overrightarrow{x_1}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_2}+\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}\wedge\overrightarrow{z_2}=\left(\dot\theta\overrightarrow{z_{01}}+\dot\beta\overrightarrow{y_{12}}\right)\wedge\overrightarrow{z_2}=\dot\theta\sin\beta\overrightarrow{y_1}+\dot\beta\overrightarrow{x_2}$$

Au final :

$$\overrightarrow{\Gamma(G\in S_3/S_0)}=-a\dot\beta\sin\beta\dot\theta\overrightarrow{y_{12}}+(a\cos\beta+r)\ddot\theta\overrightarrow{y_{12}}-(a\cos\beta+r)\dot\theta^2\overrightarrow{x_1}-a\ddot\beta\overrightarrow{z_2}-a\dot\beta\left(\dot\theta\sin\beta\overrightarrow{y_1}+\dot\beta\overrightarrow{x_2}\right)$$

Question 6

La longueur des pales est, entre autre, limitée par la vitesse du son en bout de pale (Exigence 1.1.1.1.1). Pour $\beta=0$, calculer la longueur maximale de la pale pour ne pas dépasser la vitesse du son. La vitesse du rotor est de 250 tr/min.

Correction

Lorsque $\beta=0$ la vitesse en bout de pale est donnée par $L\dot\theta$. $\dot\theta=250\ tr/min=\frac{250\cdot 2\pi}{60}\ rad/s=26,18\ rad/s$ On a donc :

$$L=\frac{295,1}{26,18}=11,2\ m$$

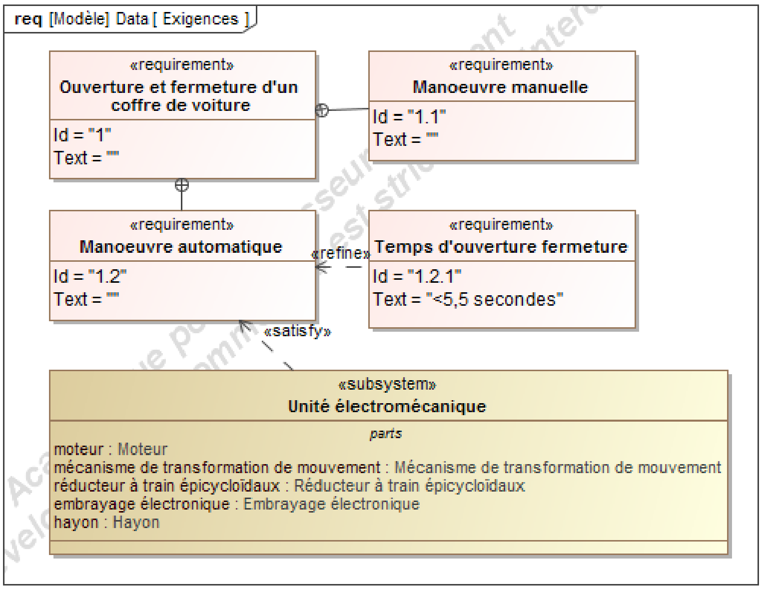
2 Système de coffre motorisé

D'après le concours Centrale – Supélec 2007.

Objectifs

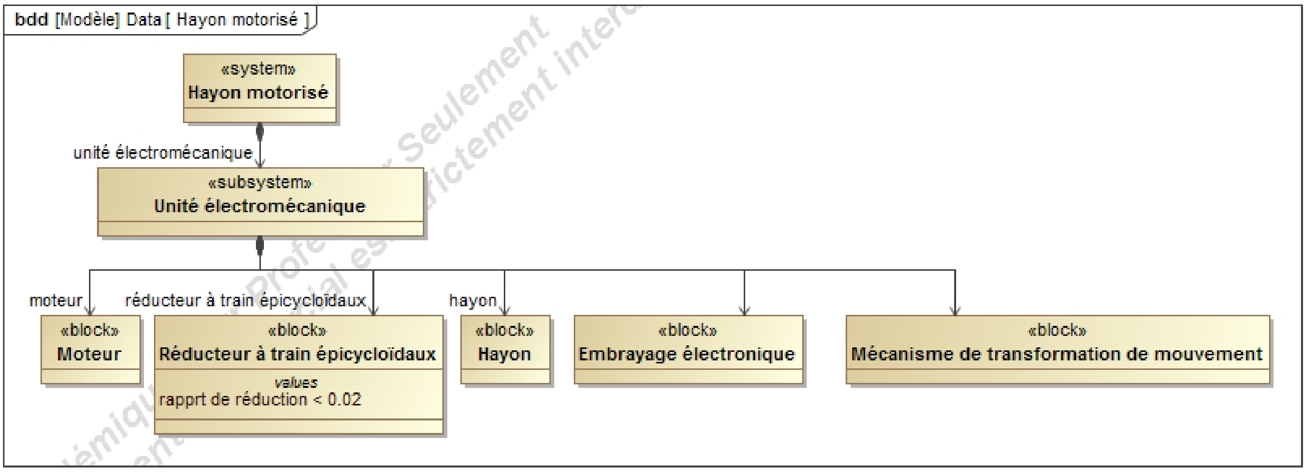
- Vérifier le rapport de réduction du train épicycloïdal.
- Déterminer la loi Entrée – Sortie du système 4 barres.

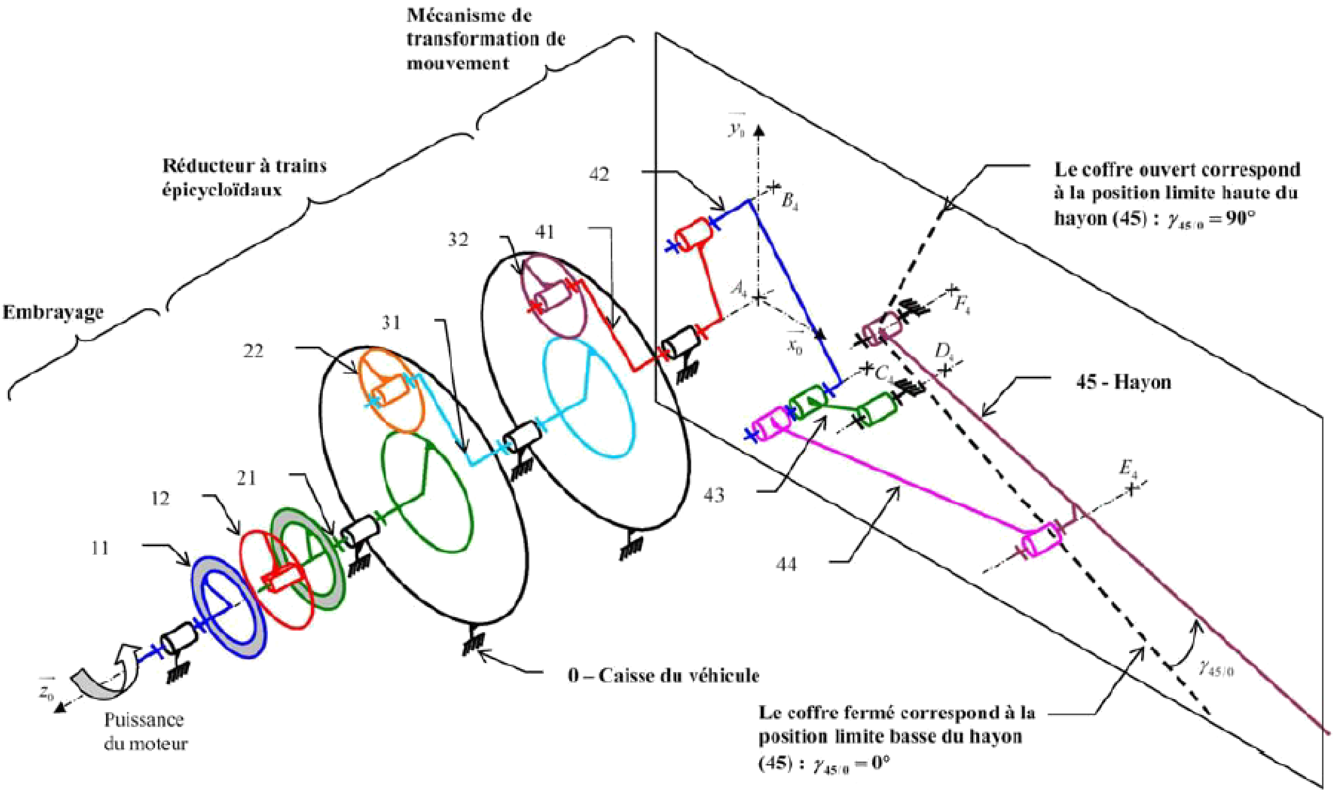
L'utilisateur a la possibilité de programmer l'angle d'ouverture du hayon pour éviter par exemple qu'il ne heurte le plafond du garage. L'utilisateur conserve naturellement la possibilité de manœuvrer manuellement le hayon. Ce système dispose également de détecteurs d'obstacles. En position fermée, le système doit assurer le blocage du hayon avec la caisse du véhicule.



La chaîne d'énergie du système est constituée :

- d'un moteur à courant continu ;
- d'un embrayage électromagnétique ;
- d'un double train épicycloïdal
- d'un mécanisme de transformation de mouvement de type 4 barres ;
- de l'effecteur à savoir le hayon **45** du coffre.





2.1 Étude du train épicycloïdal

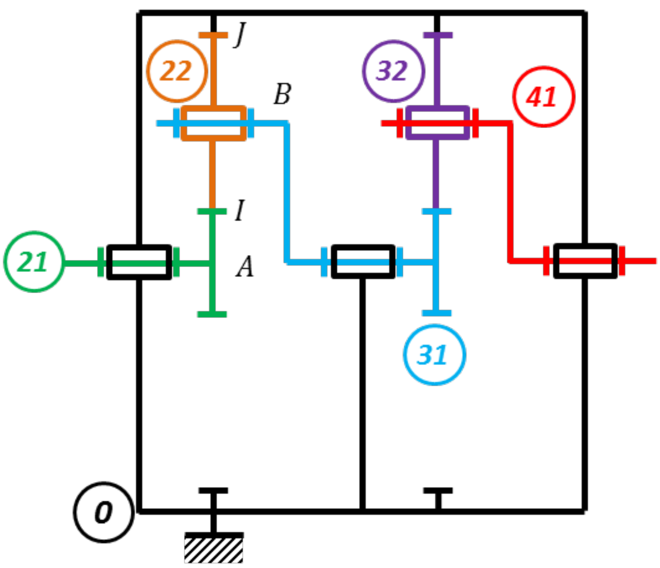
On donne le schéma cinématique du double train épicycloïdal.

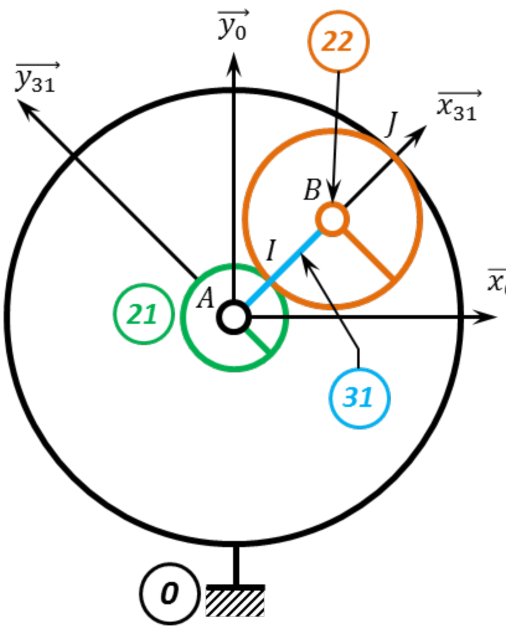
Le premier train est constitué :

- du planétaire **21**. On note $\overrightarrow{\Omega(21/0)} = \omega(21/0)\overrightarrow{z_0}$ et $||\overrightarrow{IA}|| = R_{21}$;
- du satellite **22**. On note $\overrightarrow{\Omega(22/31)} = \omega(22/31)\overrightarrow{z_0}$ et $||\overrightarrow{IB}|| = R_{22}$;
- du porte-satellite **31**. On note $\overrightarrow{\Omega(31/0)} = \omega(31/0)\overrightarrow{z_0}$;
- de la couronne **0**. On note $||\overrightarrow{AJ}|| = R_0$;.

Le second train est constitué :

- du planétaire **21** ;
- du satellite **32** ;
- du porte-satellite **41** ;
- de la couronne **0**.





Question 1

Après avoir exprimé la relation de roulement sans glissement au point I, montrer que $R_{22}\omega(22/31) = R_{21}\left(\omega(31/0)-\omega(21/0)\right)$.

Correction

En faisant l'hypothèse que **22** roule sans glisser sur **21**, on a :

$$\overrightarrow{V(I\in 22/21)} = \overrightarrow{0}$$

On a alors :

$$\overrightarrow{V(I\in 22/31)} + \overrightarrow{V(I\in 31/0)} + \overrightarrow{V(I\in 0/21)} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{V(I\in 22/31)} + \overrightarrow{V(I\in 31/0)} - \overrightarrow{V(I\in 21/0)} = \overrightarrow{0}$$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{V(I\in 22/31)}\\
=\ &\overrightarrow{V(B\in 22/31)} + \overrightarrow{IB}\wedge\overrightarrow{\Omega(22/31)}\\
=\ &R_{22}\overrightarrow{x_{31}}\wedge\omega(22/31)\overrightarrow{z_0}\\
=\ &-R_{22}\omega(22/31)\overrightarrow{y_{31}}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\overrightarrow{V(I\in 31/0)}\\
=\ &\overrightarrow{V(A\in 31/0)} + \overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{\Omega(31/0)}\\
=\ &-R_{21}\overrightarrow{x_{31}}\wedge\omega(31/0)\overrightarrow{z_0}\\
=\ &R_{21}\omega(31/0)\overrightarrow{y_{31}}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\overrightarrow{V(I\in 21/0)}\\
=\ &\overrightarrow{V(A\in 31/0)} + \overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{\Omega(31/0)}\\
=\ &-R_{21}\overrightarrow{x_{31}}\wedge\omega(21/0)\overrightarrow{z_0}\\
=\ &R_{21}\omega(21/0)\overrightarrow{y_{31}}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$-R_{22}\omega(22/31)\overrightarrow{y_{31}} + R_{21}\omega(31/0)\overrightarrow{y_{31}} - R_{21}\omega(21/0)\overrightarrow{y_{31}} = \overrightarrow{0}$$

$$\Longrightarrow -R_{22}\omega(22/31) + R_{21}\omega(31/0) - R_{21}\omega(21/0) = 0 \Longleftrightarrow R_{22}\omega(22/31) = R_{21}\left(\omega(31/0)-\omega(21/0)\right)$$

Question 2

Après avoir exprimé la relation de roulement sans glissement au point J, déterminer une relation entre R_{22}, $\omega(22/31)$, R_0 et $\omega(31/0)$.

Correction

En faisant l'hypothèse que **22** roule sans glisser sur **0**, on a :

$$\overrightarrow{V(J\in 22/0)} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{V(J\in 22/31)} + \overrightarrow{V(J\in 31/0)} = \overrightarrow{0}$$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{V(J\in 22/31)}\\
=\ &\overrightarrow{V(B\in 22/31)} + \overrightarrow{JB}\wedge\overrightarrow{\Omega(22/31)}\\
=\ &-R_{22}\overrightarrow{x_{31}}\wedge\omega(22/31)\overrightarrow{z_0}\\
=\ &R_{22}\omega(22/31)\overrightarrow{y_{31}}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\overrightarrow{V(J\in 31/0)}\\
=\ &\overrightarrow{V(A\in 31/0)} + \overrightarrow{JA}\wedge\overrightarrow{\Omega(31/0)}\\
=\ &-R_{0}\overrightarrow{x_{31}}\wedge\omega(31/0)\overrightarrow{z_0}\\
=\ &R_{0}\omega(31/0)\overrightarrow{y_{31}}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$R_{22}\omega(22/31)\overrightarrow{y_{31}} + R_0\omega(31/0)\overrightarrow{y_{31}} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow R_{22}\omega(22/31) + R_0\omega(31/0) = 0$$

Question 3

Déterminer alors le rapport de réduction $\dfrac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)}$.

Correction

On a :

$$R_{22}\omega(22/31) = R_{21}\left(\omega(31/0) - \omega(21/0)\right) \quad \text{et} \quad R_{22}\omega(22/31) + R_0\omega(31/0) = 0$$

Au final :

$$R_{21}\omega(21/0) = R_{21}\omega(31/0) + R_0\omega(31/0) \Longleftrightarrow \frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)} = \frac{R_{21}}{R_{21}+R_0} = \frac{Z_{21}}{Z_{21}+Z_0}$$

Par ailleurs, la condition d'entraxe dans un train épicycoïdal se formule ainsi : $AJ = AI + IJ \Longleftrightarrow R_0 = R_{21} + 2R_{22}$. On a alors :

$$\frac{\omega(31/0)}{\omega(21/0)} = \frac{Z_{21}}{2Z_{21}+Z_{22}}$$

Question 4

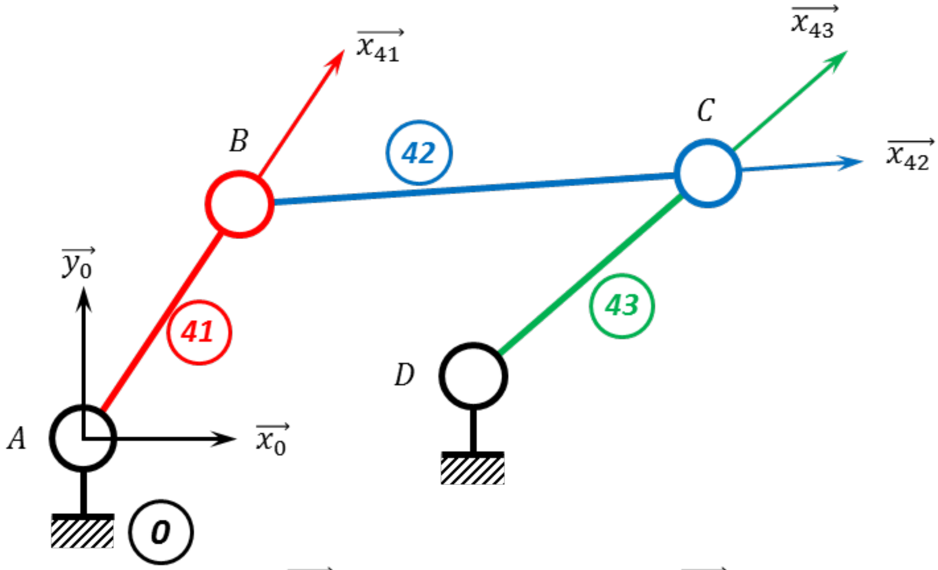
En déduire le rapport de réduction du double train épicycloïdal. Puis faire l'application numérique. On donne $Z_{21} = 13$ *et* $Z_{22} = 81$. *Le rapport de réduction est-il compatible avec celui du diagramme de blocs ?*

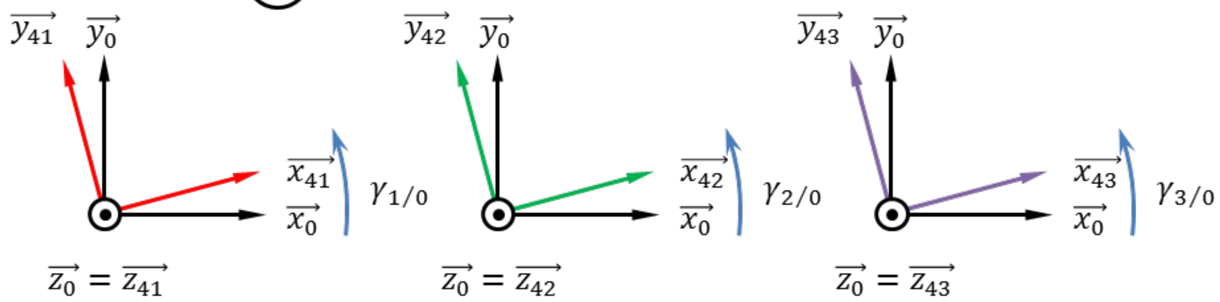
Correction

On a :

$$\left(\frac{Z_{21}}{2Z_{21}+Z_{22}}\right)^2 = 0,0147$$

2.2 Étude du mécanisme de transformation de mouvement





On donne :
- $\overrightarrow{AB} = L_1\overrightarrow{x_{41}}$;
- $\overrightarrow{BC} = L_2\overrightarrow{x_{42}}$;
- $\overrightarrow{DC} = L_3\overrightarrow{x_{43}}$;
- $\overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{x_0} + b\,\overrightarrow{y_0}$.

Question 5

Établir une relation géométrique entre γ_1 et γ_3. Cette relation pourra faire intervenir les différents paramètres constants (a, b, L_1, L_2, L_3). On ne devra pas voir apparaître γ_2.

Correction

En écrivant la fermeture de chaîne géométrique, on a :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow\; & L_1\overrightarrow{x_{41}} + L_2\overrightarrow{x_{42}} - L_3\overrightarrow{x_{43}} - a\,\overrightarrow{x_0} - b\,\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow\; & L_1\left(\cos\gamma_1\overrightarrow{x_0} + \sin\gamma_1\overrightarrow{y_0}\right) + L_2\left(\cos\gamma_2\overrightarrow{x_0} + \sin\gamma_2\overrightarrow{y_0}\right) - L_3\left(\cos\gamma_3\overrightarrow{x_0} + \sin\gamma_3\overrightarrow{y_0}\right) - a\,\overrightarrow{x_0} - b\,\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

En projetant respectivement cette expression sur $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} L_1\cos\gamma_1 + L_2\cos\gamma_2 - L_3\cos\gamma_3 - a = 0 \\ L_1\sin\gamma_1 + L_2\sin\gamma_2 - L_3\sin\gamma_3 - b = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} L_2\cos\gamma_2 = L_3\cos\gamma_3 - L_1\cos\gamma_1 + a \\ L_2\sin\gamma_2 = L_3\sin\gamma_3 - L_1\sin\gamma_1 + b \end{array}\right.$$

Correction

On a donc :

$$\begin{aligned}
L_2^2 &= \left(L_3\cos\gamma_3 - L_1\cos\gamma_1 + a\right)^2 + \left(L_3\sin\gamma_3 - L_1\sin\gamma_1 + b\right)^2 \\
L_2^2 &= L_3^2\cos^2\gamma_3 + L_1^2\cos^2\gamma_1 + a^2 \\
&\quad -2L_3L_1\cos\gamma_3\cos\gamma_1 + 2bL_3\cos\gamma_3 - 2bL_1\cos\gamma_1 \\
&\quad +L_3^2\sin^2\gamma_3 + L_1^2\sin^2\gamma_1 + b^2 \\
&\quad -2L_3L_1\sin\gamma_3\sin\gamma_1 + 2bL_3\sin\gamma_3 - 2bL_1\sin\gamma_1 \\
&= L_3^2 + L_1^2 + a^2 + b^2 - 2L_3L_1\left(\cos\gamma_3\cos\gamma_1 + \sin\gamma_3\sin\gamma_1\right) \\
&\quad +2bL_3\left(\cos\gamma_3 + \sin\gamma_3\right) - 2bL_1\left(\cos\gamma_1 + \sin\gamma_1\right)
\end{aligned}$$