SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGENIEUR
DEVOIR SURVEILLE 2

[Durée 1h - Aucun document - Calculatrice interdite - Répondre directement sur le sujet]

MODELISATION DES SLCI PAR LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

Exercice

On donne l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2}+2\frac{ds(t)}{dt}+10\cdot s(t)=10\cdot e(t)+\frac{de(t)}{dt} \qquad (E_1)$$

Les conditions initiales sont les suivantes :

- $s(0)=0$ $\qquad s'(0)=0$
- $e(0)=1$

Question 1 *Donner l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ dans le domaine de Laplace.*

Pour tout t>0, $\mathcal{L}[e(t)]=E(p)$, $\mathcal{L}\left[\frac{de(t)}{dt}\right]=p\cdot E(p)-1$, $\mathcal{L}[s(t)]=S(p)$, $\mathcal{L}\left[\frac{ds(t)}{dt}\right]=p\cdot S(p)$, $\mathcal{L}\left[\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right]=p^2\cdot S(p)$.

Au final :

$$p^2S(p)+2pS(p)+10S(p)=10E(p)+pE(p)-1$$

1

Question 2 *On considère maintenant que $\boldsymbol{e(0)=0}$. Donner l'équation$(\boldsymbol{E_1})$ dans le domaine de Laplace. On note l'équation obtenue $(\boldsymbol{E_2})$.*

$$p^2S(p)+2pS(p)+10S(p)=10E(p)+pE(p)$$

1

Question 3 *Mettre $(\boldsymbol{E_2})$ sous la forme $\boldsymbol{S(p)=F(p)\cdot E(p)}$. $\boldsymbol{F(p)}$ est une fonction rationnelle qu'on explicitera.*

$$S(p)\cdot[p^2+2p+10]=E(p)[10+p]$$

$$\Leftrightarrow \frac{S(p)}{E(p)}=F(p)=\frac{10+p}{p^2+2p+10}$$

1

Question 4 *$\boldsymbol{E(p)}$ est un échelon d'amplitude 2. Donner la valeur de $\boldsymbol{E(p)}$ puis de $\boldsymbol{S(p)}$.*

$E(p)$ étant un échelon d'amplitude 2, on a : $E(p)=\frac{2}{p}$

En conséquence

$$S(p)=\frac{10+p}{p^2+2p+10}\cdot\frac{2}{p}$$

2

Indépendamment de ce qui a été trouvé précédemment, on utilisera :

$$S(p)=\frac{20+2p}{p(p^2+2p+10)}$$

Question 5 *Donner la valeur initiale de $\boldsymbol{s(t)}$.*

Application du théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0}s(t)=\lim_{p\to+\infty}p\cdot S(p)=\lim_{p\to+\infty}2\cdot\frac{10+p}{p^2+2p+10}=0$$

2

Question 6 *Donner la valeur finale de $\boldsymbol{s(t)}$.*

Application du théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to+\infty}s(t)=\lim_{p\to 0}p\cdot S(p)=S(p)=\lim_{p\to+\infty}2\cdot\frac{10+p}{p^2+2p+10}=2$$

2

Question 7 *Donner la valeur initiale de $\boldsymbol{\frac{ds(t)}{dt}}$.*

Application du théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0}\frac{ds(t)}{dt}=\lim_{p\to+\infty}p^2\cdot S(p)=\lim_{p\to+\infty}2\cdot p\cdot\frac{10+p}{p^2+2p+10}=2$$

2

$S(p)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$S(p)=\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta+\gamma\cdot p}{p^2+2p+10}$$

Question 8 **On donne $\boldsymbol{\gamma=-2}$. Déterminer $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$.**

En multipliant les deux expressions de $S(p)$ par p et en posant $p=0$, on a : $\alpha=2$

Prenons une valeur particulière : p=1. On a donc :

$$\frac{22}{13}=2+\frac{\beta-2}{13}\Leftrightarrow 22=26+\beta-2\Leftrightarrow\beta=-2$$

On a donc :

$$S(p)=\frac{2}{p}-\frac{2+2\cdot p}{p^2+2p+10}$$

3

Question 9 **En utilisant les transformées de Laplace inverse, déterminer $\boldsymbol{s(t)}$.**

Pour $t>0$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p}\right]=2$.

Par ailleurs :

$$-\frac{2+2\cdot p}{p^2+2p+10}=-2\frac{p+1}{p^2+2p+10}=-2\frac{p+1}{(p+1)^2+9}$$

Au final :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[-2\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}\right]=-2e^{-t}\cos 3t$$

Pour $t>0$

$$s(t)=2-2e^{-t}\cos 3t$$

4

Question 10 **Donner l'allure de $\boldsymbol{s(t)}$. – 2 pts**