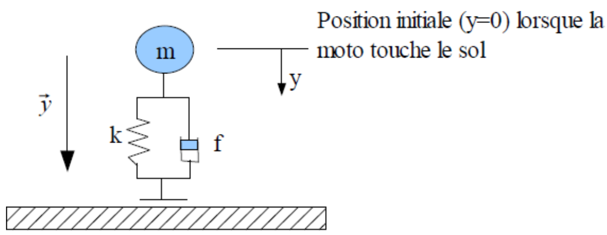
CI 2 – SLCI : Étude du comportement des Systèmes Linéaires Continus Invariants

Devoir Maison 1 – Étude d'un amortisseur de moto

Le record du monde de saut en moto a été battu en 2008. L'australien Robbie Maddison a réussi un saut de 98,14 mètres (soit environ la longueur d'un terrain de football), et ceci deux fois de suite. L'événement a eu lieu au Rio Hotel à Las Vegas pour célébrer la nouvelle année 2008.

Pour réussir un tel saut, il est nécessaire d'avoir une suspension bien réglée. On ne s'intéresse ici qu'au réglage de la suspension de la roue arrière. Celle-ci est composée d'un amortisseur et d'un ressort . Le choix d'une raideur de ressort convenable permettra d'éviter un ressenti de dureté lors de l'atterrissage. De la même manière, un amortisseur correctement réglé permettra d'obtenir une bonne stabilité.

On se propose de chercher un réglage théoriquement convenable de la raideur et de l'amortisseur pour répondre à la contrainte suivante : « Lors de l'atterrissage, pour éviter une chute, la moto doit atteindre sa position d'équilibre le plus rapidement possible (0,3s) et être bien amortie. »



On modélise la suspension de la moto par un système masse – ressort – amortisseur.

L'axe $\overrightarrow{y}$ est vertical descendant. On note $y(t)$ l'évolution de la position de la moto au cours du temps à partir de la position initiale (lorsque la moto touche le sol).

La modélisation du choc lors de l'atterrissage revient à supposer que le système est soumis à un échelon de valeur Mg (où M est la somme de la masse de la moto et de la masse du conducteur et g l'accélération de la pesanteur). Ce modèle approximatif permet d'obtenir plusieurs valeurs caractéristiques.

L'équation différentielle, obtenue en écrivant le principe fondamental de la dynamique sur la masse M, est la suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{f}{M}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{k}{M}y(t)=\frac{f(t)}{M}$$

avec f frottement visqueux, k raideur du ressort, $M = 100\ kg$ masse de l'ensemble {moto+conducteur}, $f(t)$ action exercée sur la masse.

L'objectif de ce travail est donc de déterminer les paramètres f et k optimaux en analysant la réponse temporelle $y(t)$.

1 Préliminaires

On note $f(t) = Mg \cdot u(t)$ avec $u(t)$ fonction de Heaviside. On a donc, $f(t) = Mg$ pour $t > 0$.

Question 1

Donner l'expression de $f(t)$ dans le domaine de Laplace.

Question 2

En utilisant l'expression obtenue pour $f(t)$, passer l'équation dans le domaine de Laplace (on se place dans les conditions de Heaviside) et exprimer $Y(p)$ en fonction des données.

Question 3

En utilisant le théorème de la valeur initiale, déterminer la position initiale.

Question 4

En utilisant le théorème de la valeur finale, déterminer la position d'équilibre (position finale).

Question 5

Déterminer la pente de $y(t)$ à l'origine.

Question 6

Écrire $Y(p)$ (transformée de Laplace de $y(t)$) sous la forme $Y(p) = \dfrac{g}{p\left(p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2\right)}$. On exprimera ω_0 et z en fonction de f, k, M.

Pour déterminer la réponse temporelle et étudier son allure, il est nécessaire de déterminer les racines du polynôme du second degré :

$$D(p) = p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2$$

Question 7

Déterminer la valeur de z (nombre positif par définition) à partir de laquelle les racines sont réelles.

2 Cas de racines réelles

On note $p_1 = -\dfrac{1}{T_1}$ et $p_2 = -\dfrac{1}{T_2}$ les deux racines réelles de $D(p)$, avec $T_1 < T_2$.

Question 8

Donner l'expression de T_1 et T_2 en fonction de ω_0 et z.

Question 9

Décomposer $Y(p)$ en éléments simples. On mettra $Y(p)$ sous la forme $Y(p) = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p - p_1} + \dfrac{C}{p - p_2}$. On exprimera A, B, C, p_1 et p_2 en fonction de T_1 et T_2.

Question 10

En déduire $y(t)$ en utilisant la transformée de Laplace inverse.

Question 11

Tracer l'allure de $y(t)$.

Question 12

À l'aide d'un logiciel adéquat (Libreoffice, Excel, gnuplot, ...), tracer l'évolution de $\dfrac{y(t)}{g/\omega_0^2}$.

On tracera deux graphiques (contenant plusieurs courbes) mettant en évidence :

- l'influence de z sur la réponse (en prenant $\omega_0 = 10\ rad/s$ et des valeurs de $z = \{1,1;1,5;2,3;5\}$) ;
- l'influence de ω_0 sur la réponse (en prenant $z = 1,5$ et des valeurs de $\omega_0 = \{0,5;1;2;5;10\}\ rad/s$).

Question 13

Quelle valeur de z permet d'obtenir un système rapide ?

Question 14 Facultatif

Sachant que l'allure de la réponse d'un système du premier ordre est la suivante. Donner les différences et les similitudes (on observera la pente à l'origine, la valeur asymptotique, l'allure, les dépassements). Que dire si une des racines est très grande devant l'autre ? ($T_2 >> T_1$).