CI 3 – CIN : ÉTUDE DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES

DEVOIR MAISON 5

Système EPAS : *Échelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle*

D'après le concours CCP – PSI – 2007

1 Présentation

2 Paramétrage du système

3 Loi de commande dans le vérin

L'élévation de la grue est donnée par l'allongement du vérin constitué des pièces 4 et 5.

Question 1

Donner le graphe des liaisons constitués par les pièces 2, 3, 4, et 5. Comment appelle-t-on ce type de chaîne ?

Correction

Le tracé du graphe des liaisons donne une chaîne fermée.

Question 2

L'élévation de la grue est donnée par l'angle $\gamma(t)$ du berceau 5 par rapport à la tourelle 2. Réaliser une fermeture cinématique liant les solides 2, 3, 4 et 5 et donner une relation entre λ et γ.

Correction

Les solides 2, 3, 4 et 5 forment une chaîne fermée. La fermeture géométrique est la suivante :

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{0}$$

$$b\overrightarrow{x_2}+a\overrightarrow{y_2}+g\overrightarrow{x_5}-\lambda(t)\overrightarrow{x_3}=\overrightarrow{0}$$
$$\Longleftrightarrow b\overrightarrow{x_2}+a\overrightarrow{y_2}+g\cos\gamma\overrightarrow{x_2}+g\sin\gamma\overrightarrow{y_2}-\lambda(t)\cos\beta\overrightarrow{x_2}-\lambda(t)\sin\beta\overrightarrow{y_2}=\overrightarrow{0}$$

On projette ensuite les expressions sur $\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{y_2}$:

$$\begin{cases} b+g\cos\gamma-\lambda(t)\cos\beta=0 \\ a+g\sin\gamma-\lambda(t)\sin\beta=0 \end{cases}$$

Il nous faut éliminer β dans l'équation :

$$\begin{cases} \lambda(t)\cos\beta=b+g\cos\gamma \\ \lambda(t)\sin\beta=a+g\sin\gamma \end{cases}$$

En élevant les deux équations au carré et en les sommant on a donc :

$$\lambda(t)^2=b^2+g^2\cos^2\gamma+2bg\cos\gamma+a^2+g^2\sin^2\gamma+2ag\sin\gamma$$

$$\lambda(t)^2=b^2+g^2+2bg\cos\gamma+a^2+2ag\sin\gamma \Longleftrightarrow \lambda(t)^2=b^2+g^2+a^2+2g\left(b\cos\gamma+a\sin\gamma\right)$$

Correction

Question 3

En faisant l'hypothèse que $b = g$ et $a = 0$, exprimer $\gamma(t)$ en fonction de $\lambda(t)$ puis calculer $\dfrac{d\gamma(t)}{dt}$.

Correction

En tenant compte des hypothèses précédentes :

$$\lambda(t)^2 = 2b^2 + 2b^2\cos\gamma \Longleftrightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{\lambda(t)^2}{2b^2} - 1\right)$$

On a donc :

$$\dot{\gamma} = -\frac{\dfrac{\dot{\lambda}\lambda}{b^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda(t)^2}{2b^2}-1\right)^2}} = -\frac{\dfrac{\dot{\lambda}\lambda}{b^2}}{\sqrt{-\dfrac{\lambda(t)^4}{4b^4}+\dfrac{\lambda(t)^2}{b^2}}}$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\dfrac{\dot{\lambda}}{b}}{\sqrt{1-\dfrac{\lambda(t)^2}{4b^2}}} = -\frac{\dfrac{\dot{\lambda}}{b}}{\sqrt{\dfrac{4b^2-\lambda(t)^2}{4b^2}}} = -\frac{\dot{\lambda}}{\dfrac{b}{2b}\sqrt{4b^2-\lambda(t)^2}} = -\frac{2\dot{\lambda}}{\sqrt{4b^2-\lambda(t)^2}}$$

4 Élévation de la plateforme

On considère dans cette partie que $\alpha_2 = 0$.
Dans les calculs suivants, on ne tiendra pas compte des pièces 3 et 4.

Question 4

Donner le graphe des liaisons du mécanisme en tenant compte des hypothèses ci-dessus. Comment appelle-t-on ce type de chaîne ?

Correction

Le graphe des liaisons forme une chaîne ouverte.

Question 5

On souhaite que pendant le mouvement d'élévation, la plateforme reste horizontale. Donner la relation simple liant $\varphi(t)$ et $\gamma(t)$.

Correction

La plate forme restera horizontale (si on suppose le tourelle 2 horizontale) si et seulement si :

$$\overrightarrow{x_7} \wedge \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \sin(\varphi+\gamma)\,\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \varphi + \gamma = 0$$

Question 6

Donner les vecteurs $\overrightarrow{\Omega(7/6)}$ et $\overrightarrow{V(G\in 7/6)}$.

Correction

$$\{\mathcal{V}(7/6)\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(7/6)} = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{z_6} \\ \overrightarrow{V(G\in 7/6)} = \underbrace{\overrightarrow{V(E\in 7/6)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GE}\wedge\overrightarrow{\Omega(7/6)}\end{array}\right\}_G$$

Correction

$$\overrightarrow{V(G\in 7/6)} = -h\overrightarrow{x_7}\wedge\dot{\varphi}\overrightarrow{z_6} = h\dot{\varphi}\overrightarrow{y_7}$$

$$\left\{\mathscr{V}(7/6)\right\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(7/6)} = \dot{\varphi}\overrightarrow{z_6}\\ \overrightarrow{V(G\in 7/6)} = h\dot{\varphi}\overrightarrow{y_7}\end{array}\right\}_G$$

Question 7
Donner les vecteurs $\overrightarrow{\Omega(6/5)}$ *et* $\overrightarrow{V(G\in 6/5)}$.

Correction

$$\left\{\mathscr{V}(6/5)\right\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(6/5)} = \overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{V(G\in 6/5)} = \dot{\mu}\overrightarrow{x_6}\end{array}\right\}_G$$

Question 8
On rappelle que $\mathscr{R}_5 = \mathscr{R}_6$. *Calculer les produits vectoriels suivants :* $\overrightarrow{x_6}\wedge\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{y_6}\wedge\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{x_7}\wedge\overrightarrow{y_1}$.

Correction

Calculons $\overrightarrow{x_6}\wedge\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{x_5}\wedge\overrightarrow{y_1} = \cos\gamma\,\overrightarrow{z_1}$.
Calculons $\overrightarrow{y_6}\wedge\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{y_5}\wedge\overrightarrow{y_1} = \left(\cos\gamma\,\overrightarrow{y_1} - \sin\gamma\,\overrightarrow{x_1}\right)\wedge\overrightarrow{y_1} = -\sin\gamma\,\overrightarrow{z_1}$.
Calculons $\overrightarrow{x_7}\wedge\overrightarrow{y_1} = \left(\cos\varphi(t)\overrightarrow{x_6} + \sin\varphi(t)\overrightarrow{y_6}\right)\wedge\overrightarrow{y_1} = \cos\varphi\cos\gamma\overrightarrow{z_1} - \sin\gamma\sin\varphi(t)\overrightarrow{z_1} = \cos\varphi\cos\gamma\overrightarrow{z_1} - \sin\gamma\sin\varphi(t)\overrightarrow{z_1} = \cos\left(\varphi+\gamma\right)\overrightarrow{z_1}$.

Question 9
Donner les vecteurs $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ *et* $\overrightarrow{V(G\in 2/0)}$.

Correction

$$\left\{\mathscr{V}(2/0)\right\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\alpha}_1\overrightarrow{y_1}\\ \overrightarrow{V(G\in 2/0)} = \underbrace{\overrightarrow{V(O\in 2/0)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{GO}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/0)}\end{array}\right\}_G$$

$$\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = -h\overrightarrow{x_7} - \mu(t)\overrightarrow{x_6} - g\overrightarrow{x_5} - b\overrightarrow{x_2} - a\overrightarrow{y_2} - b\overrightarrow{x_2} + a\overrightarrow{y_2} - a\overrightarrow{y_1} - b\overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{GO} = -h\overrightarrow{x_7} - \mu(t)\overrightarrow{x_6} - g\overrightarrow{x_5} - 3b\overrightarrow{x_2} - a\overrightarrow{y_2}$$

$$\overrightarrow{V(G\in 2/0)} = \overrightarrow{GO}\wedge\dot{\alpha}_1\overrightarrow{y_1} = -h\dot{\alpha}_1\cos\left(\varphi+\gamma\right)\overrightarrow{z_1} - \mu(t)\dot{\alpha}_1\cos\gamma\overrightarrow{z_1} - g\dot{\alpha}_1\cos\gamma\overrightarrow{z_1} - 3b\dot{\alpha}_1\overrightarrow{z_2}$$

$$\overrightarrow{V(G\in 2/0)} = -\dot{\alpha}_1\left(h\cos\left(\varphi+\gamma\right) + \left(\mu(t)+g\right)\cos\gamma + 3b\right)\overrightarrow{z_1}$$

$$\left\{\mathscr{V}(2/0)\right\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\alpha}_1\overrightarrow{y_1}\\ \overrightarrow{V(G\in 2/0)} = -\dot{\alpha}_1\left(h\cos\left(\varphi+\gamma\right) + \left(\mu(t)+g\right)\cos\gamma + 3b\right)\overrightarrow{z_1}\end{array}\right\}_G$$

Question 10
On donne : $\overrightarrow{\Omega(5/2)} = \dot{\gamma}\overrightarrow{z_2}$ *et* $\overrightarrow{V(G\in 5/2)} = \left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}\overrightarrow{y_5} + g\dot{\gamma}\overrightarrow{y_7}$. *En déduire* $\overrightarrow{\Omega(7/0)}$ *et* $\overrightarrow{V(G\in 7/0)}$.

Correction

$$\overrightarrow{\Omega(7/0)}=\overrightarrow{\Omega(7/5)}+\overrightarrow{\Omega(5/2)}+\overrightarrow{\Omega(2/0)}$$
$$\overrightarrow{V(G\in 7/0)}=\overrightarrow{V(G\in 7/5)}+\overrightarrow{V(G\in 5/2)}+\overrightarrow{V(G\in 2/0)}$$

Question 11

Dans le cas où α_1 et μ sont des constantes, on a $\overrightarrow{V(G\in 7/0)}=h\dot{\varphi}\,\overrightarrow{y_7}+\left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}\,\overrightarrow{y_5}+g\dot{\gamma}\,\overrightarrow{y_7}$. Calculer alors $\overrightarrow{\Gamma(G\in 7/0)}$.

Correction

$$\overrightarrow{\Gamma(G\in 7/0)}=h\ddot{\varphi}\,\overrightarrow{y_7}+h\dot{\varphi}\left[\frac{d\,\overrightarrow{y_7}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}+\left(g+\mu(t)\right)\ddot{\gamma}\,\overrightarrow{y_5}+\left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}\left[\frac{d\,\overrightarrow{y_5}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}+g\ddot{\gamma}\,\overrightarrow{y_7}+g\dot{\gamma}\left[\frac{d\,\overrightarrow{y_7}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

Commençons par calculer les dérivées de vecteurs :

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{y_7}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\frac{d\,\overrightarrow{y_7}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_7}+\overrightarrow{\Omega(7/0)}\wedge\overrightarrow{y_7}=\left(\dot{\varphi}\,\overrightarrow{z_6}+\dot{\gamma}\,\overrightarrow{z_5}\right)\wedge\overrightarrow{y_7}=-\left(\dot{\varphi}+\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{x_7}$$

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{y_5}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\frac{d\,\overrightarrow{y_5}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_5}+\overrightarrow{\Omega(5/0)}\wedge\overrightarrow{y_5}=\dot{\gamma}\,\overrightarrow{z_5}\wedge\overrightarrow{y_5}=-\dot{\gamma}\,\overrightarrow{x_5}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{\Gamma(G\in 7/0)}=h\ddot{\varphi}\,\overrightarrow{y_7}-h\dot{\varphi}\left(\dot{\varphi}+\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{x_7}+\left(g+\mu(t)\right)\ddot{\gamma}\,\overrightarrow{y_5}-\left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}^2\,\overrightarrow{x_5}+g\ddot{\gamma}\,\overrightarrow{y_7}-g\dot{\gamma}\left(\dot{\varphi}+\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{x_7}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G\in 7/0)}=\left(h\ddot{\varphi}+g\ddot{\gamma}\right)\overrightarrow{y_7}-\left(h\dot{\varphi}+g\dot{\gamma}\right)\left(\dot{\varphi}+\dot{\gamma}\right)\overrightarrow{x_7}+\left(g+\mu(t)\right)\ddot{\gamma}\,\overrightarrow{y_5}-\left(g+\mu(t)\right)\dot{\gamma}^2\,\overrightarrow{x_5}$$

5 Validation du cahier des charges

Question 12

A l'aide de l'étude réalisée ci-dessus, donner une méthode permettant de vérifier que les exigences 1.1.2.1 et 1.1.2.2 sont satisfaites.

Correction

Un certain nombre d'hypothèses serait nécessaire pour répondre à cette question :

- on peut d'abord faire l'hypothèse que le déploiement du vérin suit une loi en trapèze de vitesse. On peut donc avoir $\lambda(t)$ et $\dot{\lambda}(t)$;
- la loi entrée-sortie permet alors d'avoir $\gamma(t)$, $ga\dot{m}ma(t)$ et $ga\ddot{m}ma(t)$;
- une relation entre γ et $\varphi(t)$ a été donnée ultérieurement ;
- on fait l'hypothèse que α_1 et α_2 sont des constantes (ce qui peut se justifier car ces angles correspondent au réglage de l'assiette du camion).

Il faudrait ensuite calculer les normes de la vitesse et de l'accélération (après avoir projeté les vecteurs dans une base donnée). Connaissant les différentes constantes, on pourrait alors tracer l'allure les courbes de vitesse et d'accélération et vérifier que les CDCF est vérifié.