DDV

Les ptits devoirs de vacances

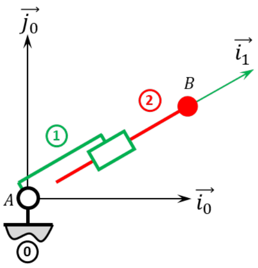
Xavier Pessoles

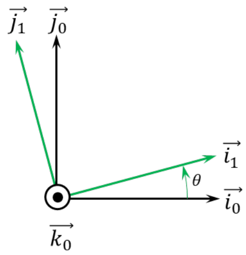
1 Petits exercices de méca sur les chaînes ouvertes – RT

Exercice 1 – Mouvement RT ⋆

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_1}$.





Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ rad et $\lambda(t) = 20\,\text{mm}$.*

Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta = \dfrac{-\pi}{4}$ rad et $\lambda(t) = -20\,\text{mm}$.*

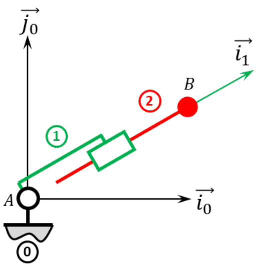
Corrigé voir 24.

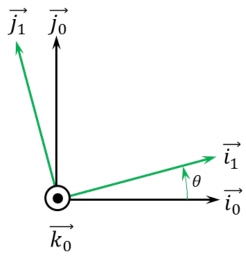
Exercice 2 – Mouvement RT ⋆

C2-05

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_1}$.





Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point B.*

Question 2 *Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point B dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On souhaite que le point B réalise un segment entre les points $[-25,25]$ et $[25,25]$.

Question 3 *Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\lambda(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v = 0{,}01\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.*

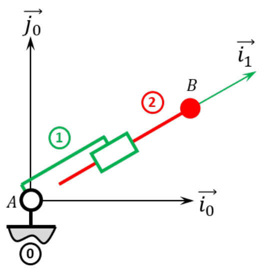
Question 4 *En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\lambda(t)$ et la trajectoire générée.*

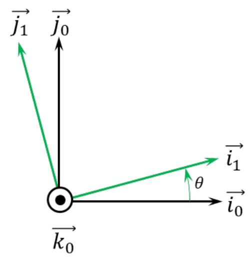
Corrigé voir 25.

Exercice 3 – Mouvement RT ⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_1}$.





Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$ par composition.*

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point B.*

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

Indications :
1. $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.
2. $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.
3. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_B$.
4. $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \left(\ddot{\lambda}(t) - \lambda(t)\dot{\theta}(t)^2\right)\overrightarrow{i_1} + \left(\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t) + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{j_1}$.

Corrigé voir 26.

Exercice 4 – Mouvement RT ⋆

B2-14

B2-15

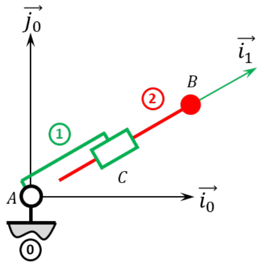
C1-05

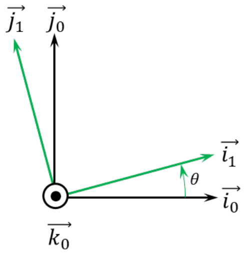
Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{AC} = R\overrightarrow{i_1}$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de **1** et $\overrightarrow{AG_1} = L_1\overrightarrow{i_1}$, on note m_1 la masse de **1** ;
- $G_2 = B$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2 la masse de **2**.

Un moteur électrique positionné entre **0** et **1** permet de maintenir **1** en équilibre. Un vérin électrique positionné entre **1** et **2** permet de maintenir **2** en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{j_0}$.





1.1

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*

Question 2 *Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.*

Question 3 *Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.*

Question 4 *Proposer une démarche permettant de déterminer le couple et l'effort que doivent développer chacun des actionneurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.*

Question 5 *Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts inconnus dans les liaisons.*

Corrigé voir 27.

Exercice 5 – Mouvement RT ⋆

B2-14

B2-15

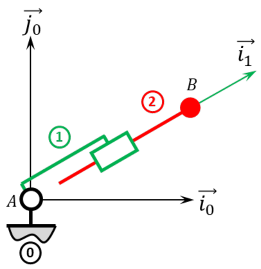
C2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

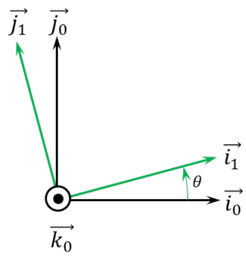
Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_1}$. De plus :

- G_1 désigne le centre d'inertie de **1** et $\overrightarrow{AG_1} = L_1\overrightarrow{i_1}$, on note m_1 la masse de **1** ;
- $G_2 = B$ désigne le centre d'inertie de **2**, on note m_2 la masse de **2**.

Un moteur électrique positionné entre **0** et **1** permet de maintenir **1** en équilibre. Un vérin électrique positionné entre **1** et **2** permet de maintenir **2** en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{j_0}$.





Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*

Question 2 *Donner le couple moteur et l'effort à fournir par le vérin pour maintenir le système à l'équilibre.*

Question 3 *Donner les actions mécaniques dans chacune des liaisons.*

Corrigé voir 28.

Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.

Exercice 6 – Moteur à courant continu⋆

B2-04

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$;
- $e(t) = K\omega(t)$;
- $c(t) = Ki(t)$;
- $c(t) - f\omega(t) = J\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}$.

Question 1 *Exprimer la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$.*

Question 2 *Préciser l'ordre et la classe de H.*

Question 3 *Mettre $H(p)$ sous forme canonique.*

Question 4 *Donner les caractéristiques de la fonction de transfert.*

Question 5 *Vérifier l'homgénéité des différentes constantes.*

Éléments de corrigé :

1. $H(p) = \dfrac{K_m}{K_m^2 + (R + Lp)(Jp + f)}$.
2. Ordre 2, classe 0.
3. $H(p) = \dfrac{\dfrac{K_m}{K_m^2 + Rf}}{1 + \dfrac{(RJ + Lf)}{K_m^2 + Rf}p + \dfrac{LJ}{K_m^2 + Rf}p^2}$.
4. $K = \dfrac{K_m}{K_m^2 + Rf}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_m^2 + Rf}{LJ}}$, $\xi = \dfrac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ(K_m^2 + Rf)}}$.

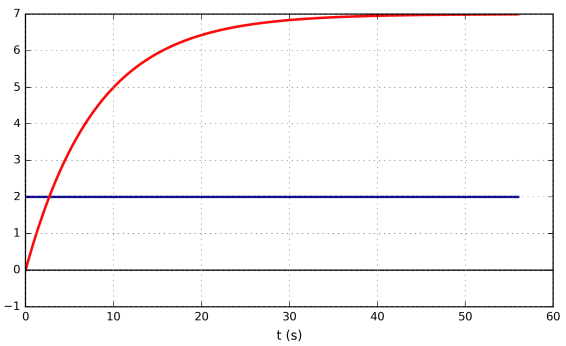
Corrigé voir 29.

1.2 Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.

Exercice 7 – Identification temporelle ⋆

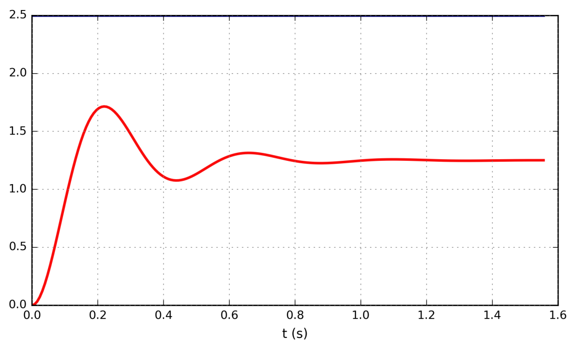
B2-06

Soit la réponse à un échelon.



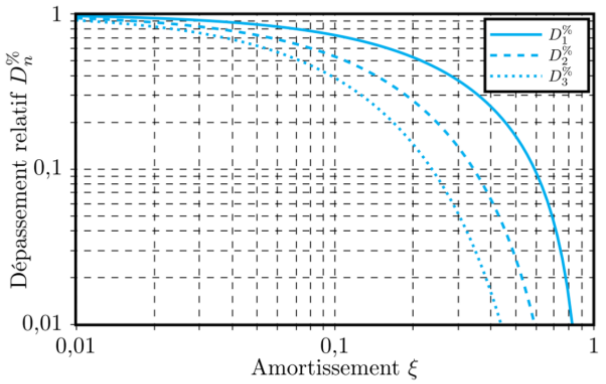
Question 1 *Déterminer la fonction de transfert du système.*

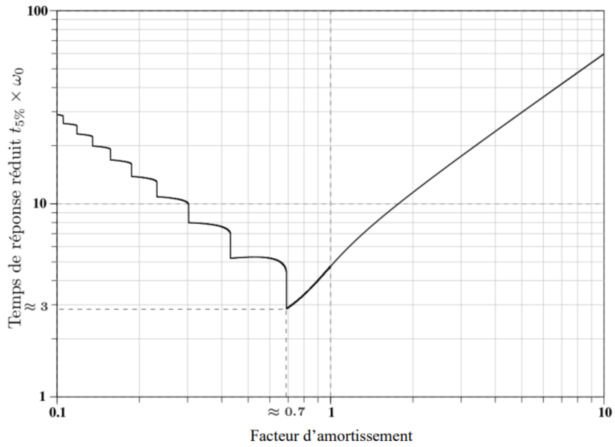
Soit la réponse à un échelon d'amplitude 2,5.



Question 2 *Déterminer la fonction de transfert du système en réalisant les mesures nécessaires et en utilisant les formules appropriées.*

Question 3 *Déterminer la fonction de transfert du système en utilisant les abaques.*





Indications :

1. $H(p) = \dfrac{3,5}{1 + 8p}$.
2. $H(p) = \dfrac{0,5}{1 + \dfrac{2 \times 0,1}{14,25}p + \dfrac{p^2}{14,25^2}}$.
3. $H(p) = \dfrac{0,5}{1 + \dfrac{2 \times 0,3}{16}p + \dfrac{p^2}{16^2}}$.

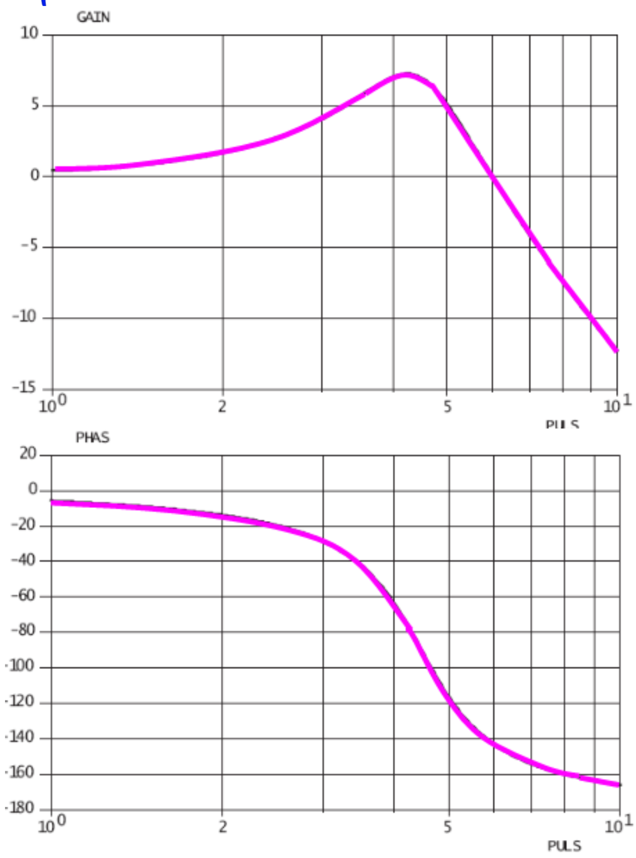
Corrigé voir 30.

Exercice 8 – Identification ⋆

B2-06

D'après Florestan Mathurin.

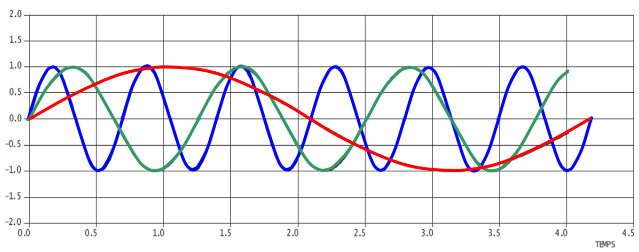
Soit un système dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



Question 1 *Tracer le diagramme de Bode asymptotique.*

Question 2 *Identifier le type de la fonction de transfert et ses valeurs remarquables.*

Le diagramme temporel ci-dessous présente 3 signaux d'entrée sinusoïdaux.



Question 3 *Déterminer les période et les pulsations de chacun des signaux.*

Question 4 *En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.*

Indications :

1. .
2. $H(p) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{2\times 0,23}{4,5} p + \dfrac{p^2}{4,5^2}}$.
3. .
   - Signal rouge : $T = 4{,}2\,\text{s}$ et $\omega 1{,}5\,\text{rad/s}$.
   - Signal vert : $T = 3{,}6/3 = 1{,}2\,\text{s}$ et $\omega = 5{,}2\,\text{rad/s}$.
   - Signal bleu : $T = 4{,}2/6 = 0{,}7\,\text{s}$ et $\omega = 9\,\text{rad/s}$.
4. .
   - $s(t) = 1,12\sin(\omega t - 0,17)$.
   - $s(t) = 1,8\sin(\omega t - 2,1)$.
   - $s(t) = 0,3\sin(\omega t - 2,8)$.

Corrigé voir 31.

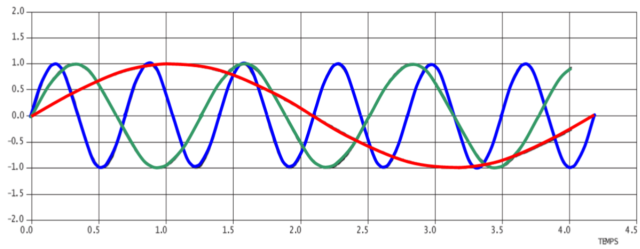
Exercice 9 – Identification ⋆

B2-06

Pas de corrigé pour cet exercice.

D'après Florestan Mathurin.

Le diagramme temporel ci-dessous présente 3 signaux d'entrée sinusoïdaux.



Question 1 *Déterminer les période et les pulsations de chacun des signaux.*

Question 2 *En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.*

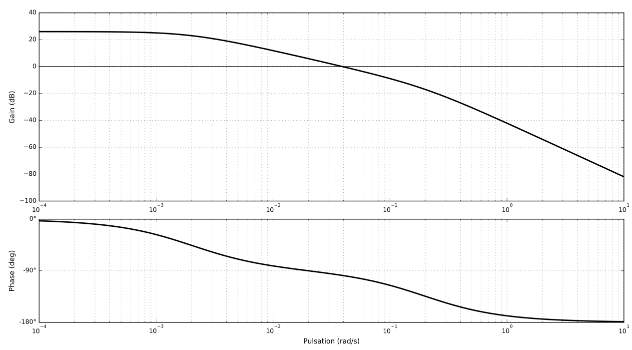
Corrigé voir 32.

Exercice 10 – Identification ⋆

B2-06

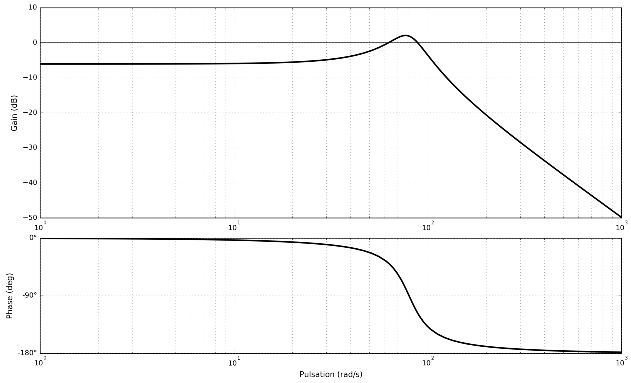
Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit la réponse fréquentielle suivante.



Question 1 *Déterminer la fonction de transfert du système.*

Soit la réponse fréquentielle suivante.



Question 2 *Déterminer la fonction de transfert du système.*

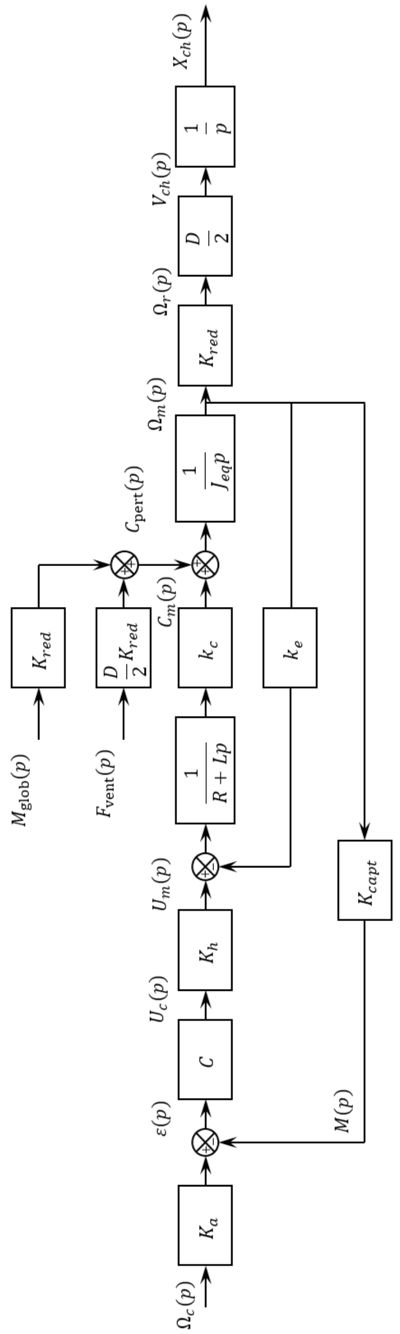
Corrigé voir 33.

1.3 Modéliser un système par schéma-blocs.

Exercice 11 – La Seine Musicale⋆

B2-07

Soit le schéma-blocs suivant.



Question 1 *En considérant que la perturbation $C_{pert}(p)$ est nulle, déterminer $H_f(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$ sous forme canonique.*

Question 2 *En prenant $\Omega_c(p) = 0$, exprimer la fonction de transfert $H_r(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$ en la mettant sous la forme : $H_r(p) = -\dfrac{\alpha\left(1+\tau p\right)}{1+\gamma p+\delta p^2}$. Exprimer α, τ, γ et δ en fonction des différents paramètres de l'étude.*

Question 3 *Exprimer $X_{ch}(p)$ en fonction de $\Omega_m(p)$ et $C_{pert}(p)$.*

Indications :

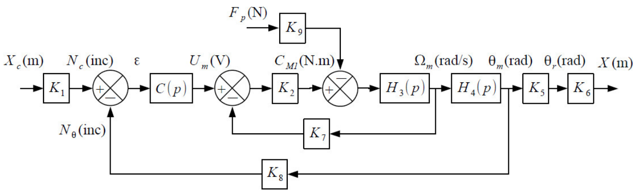
1. $H_f(p)=\dfrac{K_a}{\left(k_e k_c+C K_h K_{\text{capt}} k_c\right)} \dfrac{C K_h k_c}{\dfrac{J_{eq}(R+Lp)}{k_e k_c+C K_h K_{\text{capt}} k_c}p+1}$.
2. $\alpha = -\dfrac{R}{\left(C K_h K_{\text{capt}}+k_e\right)k_c}$, $\tau = \dfrac{L}{R}$, $\gamma = \dfrac{R J_{eq}}{\left(C K_h K_{\text{capt}}+k_e\right)k_c}$, $\delta = \dfrac{L J_{eq}}{\left(C K_h K_{\text{capt}}+k_e\right)k_c}$.
3. $X_{ch}(p)=\left(H_f(p)\Omega_c(p)+H_r(p)C_{\text{pert}}(p)\right)\dfrac{D K_{\text{red}}}{2p}$.

Corrigé voir 34.

Exercice 12 – Machine de rééducation SysReeduc ⋆

B2-07

On propose une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t)=e(t)+Ri(t)$, $e(t)=k_e\omega_m(t)$ et $C_{M1}(t)=k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M+m)\,r\rho_1\dot{\omega}_m(t)=\frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r}-F_p(t)$$

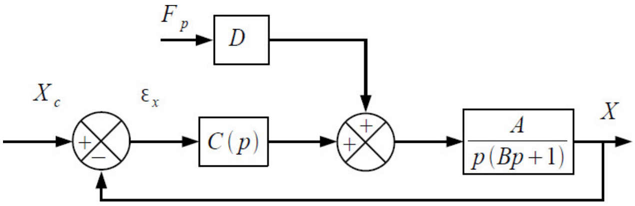
avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1=\dfrac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r=46{,}1$ mm le rayon de la poulie du transmetteur poulie–courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 *À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.*

Question 2 *Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.*

1. ...
   - $K_2=\dfrac{k_t}{R}$;
   - $K_7=k_e$;
   - $K_9=\rho_1 r$ et $H_3(p)=\dfrac{1}{(M+m)\,r^2\rho_1^2 p}$;
   - $H_4(p)=\dfrac{1}{p}$;
   - $K_8=\dfrac{2000}{2\pi}$;
   - $K_5=\rho_1$ et $K_6=r$ (à convertir en mètres) ;
   - $K_1=\dfrac{K_8}{K_5 K_6}$.
2. $A=\dfrac{K_8}{k_e}$, $B=\dfrac{R(m+M)\,r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D=\dfrac{K_9 R r\rho_1}{K_8 k_t}$

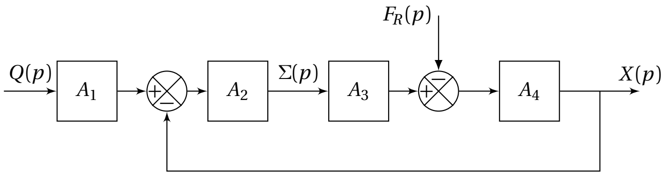


Corrigé voir 35.

Exercice 13 – Quille pendulaire⋆

B2-07

Le comportement d'un vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t)=S\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{V}{2B}\dfrac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}$ (a) ;
- $M\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}=S\sigma(t)-kx(t)-\lambda\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}-f_R(t)$ (b).

On a :

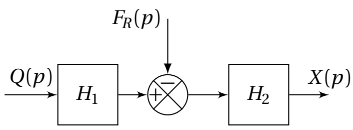
- $\mathcal{L}\left(q(t)\right)=Q(p)$: débit d'alimentation du vérin $\left[\mathrm{m^3 s^{-1}}\right]$;
- $\mathcal{L}(\sigma(t))=\Sigma(p)$: différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa];
- $\mathcal{L}(x(t))=X(p)$: position de la tige du vérin [m];
- $\mathcal{L}\left(f_R(t)\right)=F_R(p)$: composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

Les constantes sont les suivantes :

- S : section du vérin $\left[\mathrm{m^2}\right]$;
- k : raideur mécanique du vérin $\left[\mathrm{N\,m^{-1}}\right]$;
- V : volume d'huile de référence $\left[\mathrm{m^3}\right]$;
- B : coefficient de compressibilité de l'huile $\left[\mathrm{N\ m^{-2}}\right]$;
- M : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin $[\mathrm{kg}]$;
- λ : coefficient de frottement visqueux$\left[\mathrm{N\,m^{-1}s}\right]$.

Question 1 *Donner les expressions des fonctions de transfert A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.*

Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



Question 2 *Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1, A_2, A_3 et A_4, puis de la variable p et des constantes.*

Question 3 *Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.*

1. $A_1 = \dfrac{1}{Sp}$, $A_2 = \dfrac{S2B}{V}$, $A_3 = S$ et $A_4 = \dfrac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$.
2. $H_1(p) = A_1A_2A_3$ et $H_2 = \dfrac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$.
3. $\dfrac{X(p)}{Q(p)} = \dfrac{2BS}{p\left(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2\right)}$.

Corrigé voir 35.

Exercice 14 – Moteur à courant continu★

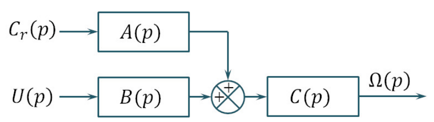
B2-07

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t) = e(t) + Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$;
- $e(t) = K\omega(t)$;
- $c(t) = Ki(t)$;
- $c(t) + c_r(t) - f\omega(t) = J\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}$.

Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*

Question 2 *Mettre le schéma-blocs sous la forme suivante.*



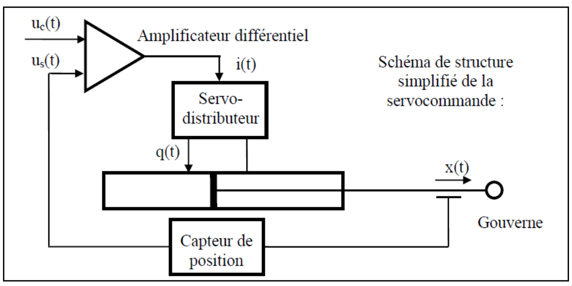
Éléments de corrigé :
1. .
2. $A(p) = R + Lp$, $B(p) = K$, $C(p) = \dfrac{1}{K^2 + (f + Jp)(R + Lp)}$ (plusieurs réponses possibles).

Corrigé voir 37.

Exercice 15 – Vérin★

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

On donne le schéma de principe d'une servo-commande.



Les différentes équations temporelles qui modélisent le fonctionnement d'une servocommande sont :

- un amplificateur différentiel défini par : $u_c(t) = \dfrac{i(t)}{K_a} + u_s(t)$;
- débit dans le vérin dans le cas d'une hypothèse de fluide incompressible $q(t) = S \cdot \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$;
- capteur de position : $u_s(t) = K_c \cdot x(t)$;
- le servo-distributeur est un composant de la chaîne de commande conçu pour fournir un débit hydraulique $q(t)$ proportionnel au courant de commande $i(t)$. (Attention, valable uniquement en régime permanent.) On a $q(t) + T\dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = K_d i(t)$.

Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*

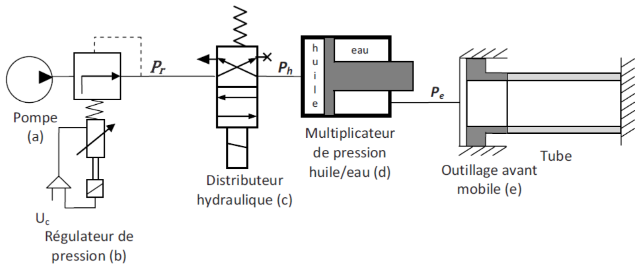
Corrigé voir 38.

Exercice 16 – Banc d'épreuve hydraulique ★

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Analyse de la fonction technique « mettre le tube sous pression ».

Un schéma hydraulique simplifié est donné figure suivante.



Mise en place du modèle

Les équations du débit sont :

$$Q_e(t) = S_e\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{V_{e0}}{B_e}\frac{\mathrm{d}P_e(t)}{\mathrm{d}t}$$

et

$$Q_h(t) = S_h\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{V_{h0}}{B_h}\frac{\mathrm{d}P_h(t)}{\mathrm{d}t}.$$

En appliquant le théorème de la résultante dynamique selon $\overrightarrow{z}$ sur le piston du multiplicateur, on a : $M\ddot{z}(t) = S_h p_h(t) - S_e p_e(t) - Mg - f\dot{z}(t)$.

Question 1 *Déduire de la relation précédente l'équation reliant $Z(p)$, $P_e(p)$, $P_h(p)$, et $Poids(p) = Mg/p$, transformées de Laplace de $z(t)$, $P_e(t)$, $P_h(t)$ et du poids perçu comme une perturbation. Les conditions initiales sont supposées nulles.*

On note :

- $L(t)$ la position de l'équipage mobile repérée par rapport à sa position initiale ;
- $V_t(t)$ le volume du tube ;
- $F_t(t)$ l'effort du tube sur l'équipage mobile, avec $F_t(t) = -rL(t)$.

On néglige les variations de volume du tube dues à ses déformations. L'équation du débit s'écrit alors :

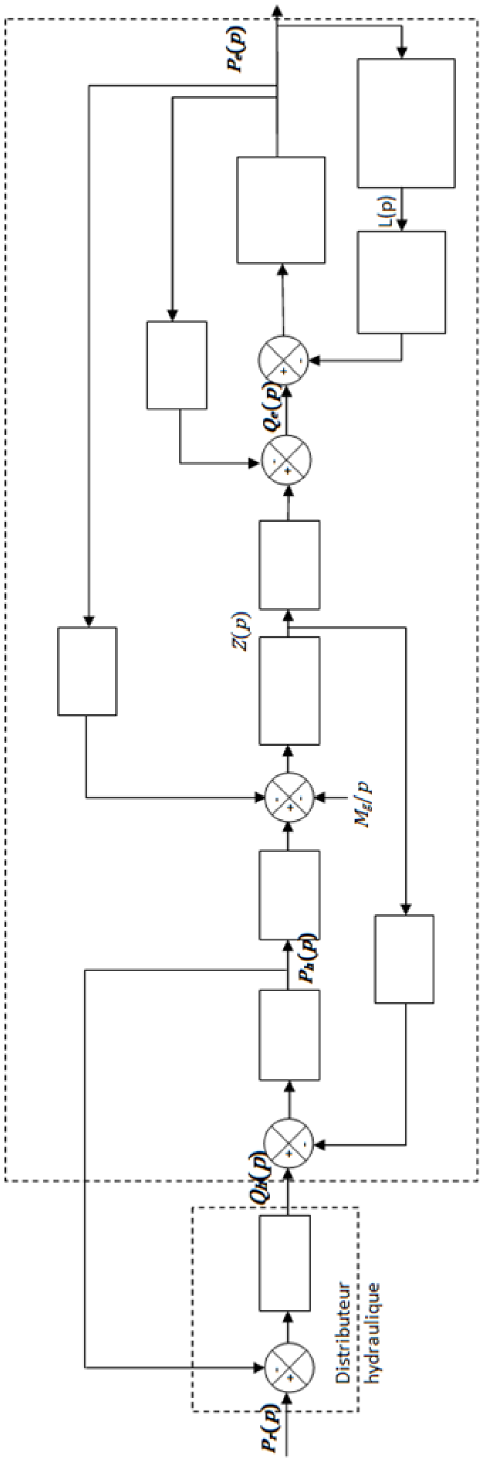
$$Q_e(t) = (S_a - S_b).\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{V_t}{B_e}\frac{\mathrm{d}P_e(t)}{\mathrm{d}t}.$$

L'équation du mouvement de l'équipage mobile est donnée par :

$$m\ddot{L}(t) = -rL(t) + (S_a - S_b)p_e(t) - f'\dot{L}(t).$$

Question 2 *En déduire, en tenant compte de l'équation du débit, deux équations liant $L(p)$, $P_e(p)$ et $Q_e(p)$, transformées de Laplace de $L(t)$, $P_e(t)$ et $Q_e(t)$. Les* *conditions initiales sont supposées nulles.*

Question 3 *Compléter le schéma-blocs de l'ensemble (sans le distributeur hydraulique), l'entrée étant la pression d'huile régulée $P_r(p)$ et la sortie la pression d'épreuve dans le tube $P_e(p)$.*



Corrigé voir 38.

Exercice 17 – Tuyère à ouverture variable⋆

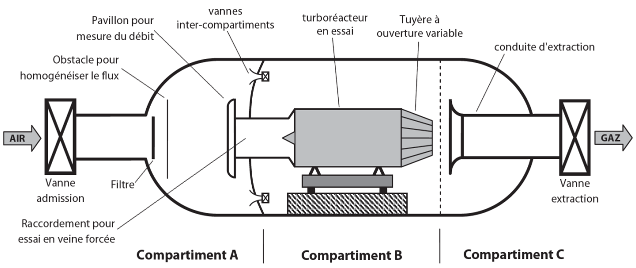
B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Présentation du système

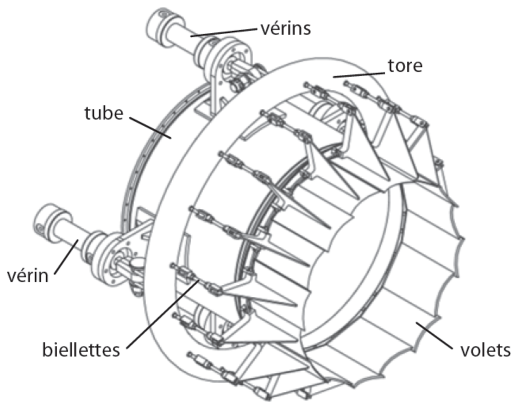
Les propulseurs utilisés dans les applications militaires ou civiles subissent, des tests de certification visant à contrôler leur bon fonctionnement et le respect des normes de sécurité.

Ces tests consistent à simuler au sol les conditions de vol subies par le propulseur et à observer les réactions de celui-ci consécutives à des commandes de pilotage.

La DGA (Direction Générale de l'Armement) dispose dans son centre d'essais des propulseurs de bancs d'essais dédiés à la certification et à la mise au point de différents types de propulseurs d'avions ou de missiles.



Le banc d'essai est composé d'un tube représentant le corps du réacteur et d'une tuyère à ouverture variable actionnée par quatre vérins hydrauliques et permettant de faire varier la vitesse de l'air éjecté.



Objectif On souhaite vérifier que le système permet de respecter le cahier des charges suivant :
- temps de réponse à 5% : 4 s au maximum ;
- précision : l'erreur statique doit être nulle ;
- précision : l'erreur de traînage doit être inférieure à 1 mm pour une consigne de 25 mm s^{-1}.

Modélisation du comportement du vérin – hypothèse fluide compressible

Objectif Il s'agit ici de proposer un modèle plus affiné du comportement du vérin en tenant compte de la compressibilité du fluide et du comportement dynamique du mécanisme.

Pour rendre compte du comportement dynamique du système on propose un modèle de comportement du vérin en tenant compte de la compressibilité du fluide.

L'évolution du débit est alors une fonction du déplacement mais aussi de la pression sous la forme de la relation suivante : $q(t)=S\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{V_0}{B}\dfrac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}$ avec :

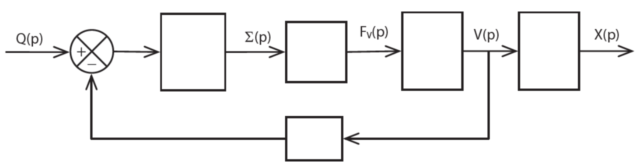
- $\sigma(t)$: pression utile dans le vérin. On notera $\Sigma(p)$ sa transformée ;
- V_0 : demi volume de fluide contenu dans le vérin ;
- B : coefficient de compressibilité du fluide.

La pression utile induit l'effort développé par le vérin que nous noterons F_v tel que : $F_V(p) = S\Sigma(p)$ où S représente la section utile du vérin en sortie de tige.

$V(p)$ représente l'image par la transformation de Laplace de la vitesse de translation $v(t)$ de la tige du vérin.

En considérant les actions de pesanteur négligeables et en se plaçant dans une phase de test à vide (sans flux d'air), l'application des lois de la dynamique donne la relation suivante : $F_V(t)=M_{\text{eq}}\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}$.

Question 1 *À partir des équations, compléter le schéma-blocs en indiquant les fonctions de transferts de chaque bloc.*



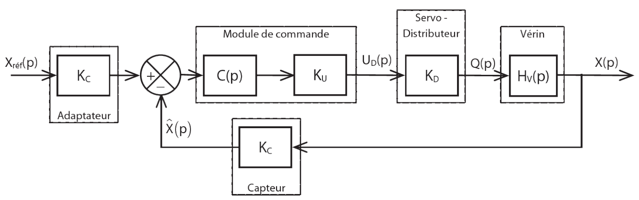
On note F_R l'action mécanique résistante équivalente pour quatre volets. On a $F_R(t)=K_F\,x(t)$. L'application du théorème de l'énergie cinétique se traduit par $M_{\text{eq}}\ddot{x}(t)=(F_V(t)-F_R(t))$.

Question 2 *Modifier le schéma-blocs précédent pour intégrer l'effort résistant.*

Question 3 *Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin $H_V(p)=\dfrac{X(p)}{Q(p)}$. On donnera le résultat sous la forme $H_V(p)=\dfrac{K_V}{p\left(1+a_2p^2\right)}$ en précisant les expression de K_V et a_2.*

Validation du comportement du vérin

Afin de valider le modèle établi, on se propose d'étudier le comportement en boucle fermée de la chaîne fonctionnelle de commande du vérin. On rappelle ci-dessous le schéma-bloc retenu et on considérera une correction proportionnelle telle que $C(p)=K_p$.



Question 4 *Donner l'expression de la forme canonique de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)=\dfrac{X(p)}{X_{ref}(p)}$. On donnera le résultat en fonction de K_C, K_U, K_D, K_p, K_V et a_2.*

Prise en compte du débit de fuite

Pour pallier le problème de stabilité du modèle précédemment établi, une solution possible consiste à un introduire un débit de fuite entre les deux chambres du vérin. Celui-ci a pour effet de réduire artificiellement le débit réel entrant dans le vérin en fonction de la pression utile. Ce débit vaut alors : $q(t)-\delta\sigma(t)$ où δ est le coefficient de débit de fuite.

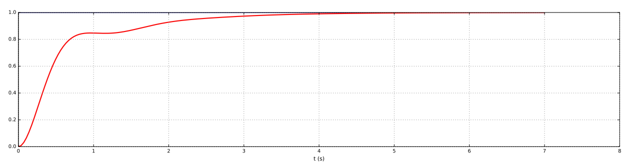
Question 5 *Modifier le schéma-blocs précédent pour intégrer le débit de fuite.*

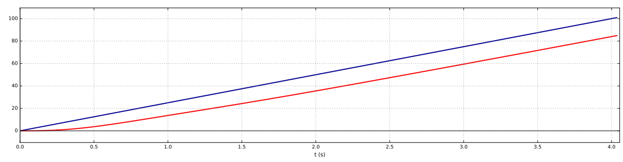
Question 6 *Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin $H_V(p)=\dfrac{X(p)}{Q(p)}$. On donnera le résultat sous la forme $H_V(p)=\dfrac{K_V}{p\left(1+a_1p+a_2p^2+a_3p^3\right)}$ en précisant les expression de K_V, a_1, a_2 et a_3.*

Retour sur le cahier des charges

On donne la réponse à un échelon et à une rampe de pente $25\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$.

Question 7 *Le cahier des charges est-il vérifié ?*





Corrigé voir 40.

Exercice 18 – Véhicule à trois roues Clever⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

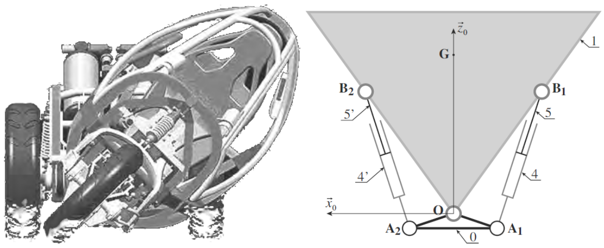
Présentation du système

Le Clever est un démonstrateur technologique développé par un tissu d'industriels européens. Clever est la contraction de Compact Low Emission VEhiclefor uRban tRansportation (véhicule compacte à faibles émissions pour le transport urbain) car, avec une consommation de seulement 2,5 L/100 km, il s'annonce très écologique.

L'habitacle peut s'incliner grâce à un système constitué

- d'un calculateur qui détermine le mouvement et la position à donner à l'habitacle en fonction des conditions d'utilisation ;
- d'un système hydro-mécanique de transmission de puissance et d'adaptation de mouvement ;

- d'un système de contrôle de l'inclinaison de l'habitacle.

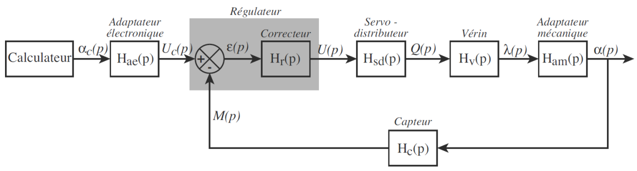


Objectif L'objectif est que le mouvement de l'habitacle soit contrôlé :
- écart statique : 0° ;
- écart de traînage pour une entrée en rampe unitaire : 0° ;
- temps de réponse à 5% : inférieur à 0,1 s.

Modélisation du servo-distributeur et du vérin

L'orientation de l'habitacle est contrôlée par un asservissement de la position angulaire. L'architecture de cet asservissement est représentée par le schéma-blocs de le figure suivante.

On modélise le comportement du servo-distributeur par un gain pur noté K_s et le capteur par $H_c(p) = C$ avec $C = 1\,\text{V}\,\text{rad}^{-1}$. L'adaptateur mécanique a un comportement linéaire sur l'intervalle d'utilisation. On a donc $H_{\text{am}}(p) = R$ ($R = 7\,\text{rad}\,\text{m}^{-1}$). Enfin, on considère que $H_r(p) = 1$.



À ce stade de l'étude, le modèle de comportement du fluide correspond à un comportement incompressible. L'équation caractérisant le comportement du vérin est alors : $q(t) = S\dot{\lambda}(t)$ où :
- S représente la section utile du vérin en sortie de tige (diamètre 32 mm) ;
- q est le débit en entrée de vérin ;
- $v(t) = \dot{\lambda}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t}$ est la vitesse de translation de la tige du vérin par rapport au corps.

Question 1 *Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin $H_{V1}(p)$ (telle que $\lambda(p) = H_{V1}(p)Q(p)$) et compléter le schéma-bloc associé à la modélisation actuelle du système.*

Question 2 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF_1$ (telle que $\alpha(p) = FTBF_1(p)\alpha_c(p)$) du système bouclé. Mettre $FTBF_1(p)$ sous la forme $\dfrac{K_1}{1+\tau_1 p}$ en précisant les expressions de K_1 et de τ_1.*

Question 3 *À partir du critère de temps de réponse à 5% ($t_{r5\%}$) du système, déterminer l'expression puis la valeur numérique minimale du gain du servo-distributeur.*

Modélisation du comportement du vérin avec fluide compressible et du comportement dynamique du mécanisme

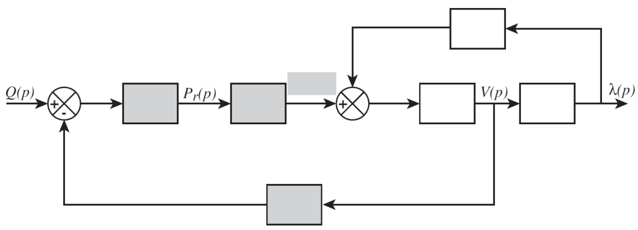
La compressibilité du fluide étant prise en compte dans le modèle, l'évolution du débit est une fonction du déplacement mais aussi de la pression sous la forme de la relation (1). L'effort exercé par le vérin en sortie de tige est décrit par la relation (2).

$$q(t) = S\dot{\lambda}(t) + \frac{V_0}{B}\dot{p}_r(t) \quad (1) \qquad F_V(t) = S p_r(t) \quad (2)$$

où :
- $p_r(t)$: pression utile dans le vérin ;
- V_0 : volume caractéristique moyen de fluide contenu dans le vérin et les durites, $V_0 = 2{,}5 \times 10^5\,\text{m}^3$;
- B : coefficient de compressibilité du fluide, $B = 109\,\text{Pa}$;
- $F_v(t)$: effort développé par le vérin en sortie de tige ;
- S : section utile du vérin en sortie de tige.

Par ailleurs, $F_v(t) + k_g\lambda(t) = m_{\text{eq}}\ddot{\lambda}(t)$ avec m_{eq} la masse équivalente du système, k_g une constante, $\lambda(t)$ le déploiement des vérins.

Question 4 *Appliquer la transformation de Laplace aux équations précédentes et compléter le schéma-blocs.*



Analyse du comportement global

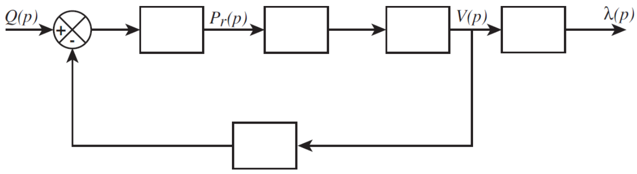
Question 5 *Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée du vérin H_{V2} (telle que $\lambda(p) = H_{V2}Q(p)$) et préciser les expressions des coefficients K_V et ω_V de sa forme canonique : $H_{V2}(p) = \dfrac{K_V}{p\left(1+\dfrac{p^2}{\omega_V^2}\right)}$.*

k_g peut maintenant être négligé.

Modélisation du comportement dynamique avec prise en compte d'un débit de fuite

Pour pallier le problème de stabilité du modèle précédemment établi, une solution possible consiste à introduire un débit de fuite au niveau du vérin. Celui-ci a pour effet de réduire artificiellement le débit réel entrant dans le vérin en fonction de la pression utile. L'expression du débit est alors : $q(t) = S\dot{\lambda}(t) + \dfrac{V_0}{B}\dot{p}_r(t) - \delta p_r(t)$ où δ représente le coefficient de débit de fuite.

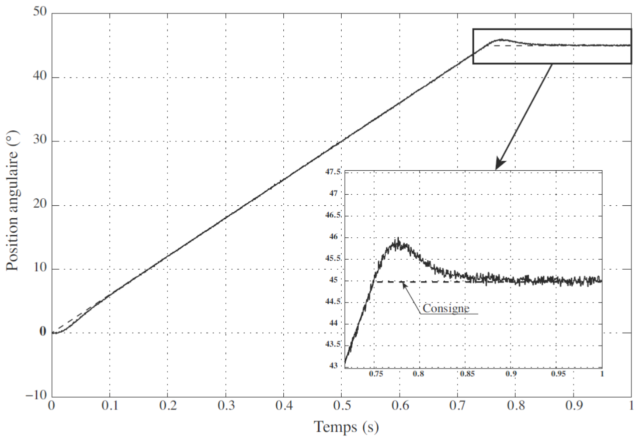
Question 6 *Proposer une modification du schéma-bloc donné afin de prendre en compte le débit de fuite.*



Question 7 *Déterminer l'expression de la fonction de transfert H_{V3} (telle que $\lambda(p) = H_{V3}Q(p)$) associée au comportement dynamique du vérin ainsi modélisé. On donnera le résultat sous la forme suivante : $H_{V3}(p) = \dfrac{K_V}{p\left(1+a_1 p+\dfrac{p^2}{\omega_V^2}\right)}$. Donner l'expression de a_1 en fonction de M_{eq}, δ et S et déterminer l'expression du coefficient d'amortissement ξ_V du second ordre en fonction de M_{eq}, δ, S, B et V_0.*

Retour sur le cahier des charges

Le régulateur étant a priori optimisé, on réalise un essai de validation du comportement temporel de l'inclinaison de l'habitacle, le véhicule étant à l'arrêt. Le calculateur envoie un signal de consigne représentant l'évolution de la position angulaire souhaitée (de 0 à 45°en 0,75 s).



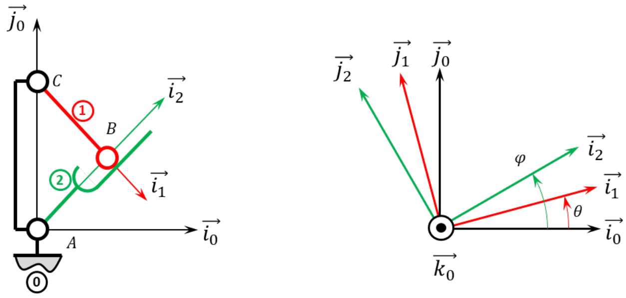
Question 8 *Quels sont les critères du cahier des charges validés ?*

Corrigé voir 41.

Exercice 19 – Barrière Sympact ⋆

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB} = R\,\overrightarrow{i_1}$. De plus, $H = 120\,\text{mm}$ et $R = 40\,\text{mm}$.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

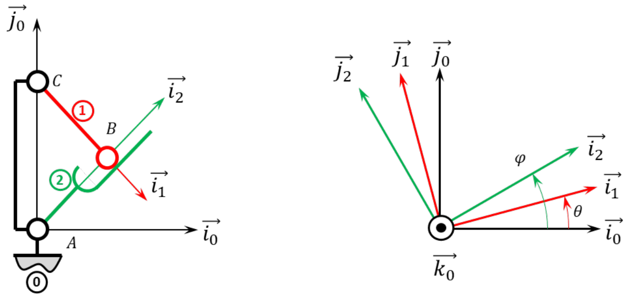
> Indications :
> 1. .
> 2. $\tan\varphi(t) = \dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}$.
> 3. $\dot{\varphi}(t) = \dfrac{R\dot{\theta}(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2+h^2+2Rh\sin\theta(t)}$.
> 4. .

Corrigé voir 19.

Exercice 20 – Barrière Sympact ⋆⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H\,\overrightarrow{j_0}$, $\overrightarrow{CB} = R\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_2}$. De plus, $H = 120\,\text{mm}$ et $R = 40\,\text{mm}$.



Question 1 *Calculer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$?*

Question 2 *Calculer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$?*

Question 3 *Justifier que $\overrightarrow{V(B,2/1)}\cdot\overrightarrow{j_2} = 0$.*

Question 4 *En déduire une relation cinématique entre les différentes grandeurs.*

> Indications :
> 1. $\overrightarrow{V(B,1/0)} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$.
> 2. $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \lambda\dot{\varphi}\,\overrightarrow{j_2}$.
> 3. .
> 4. $\lambda\dot{\varphi} - R\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta) = 0$.

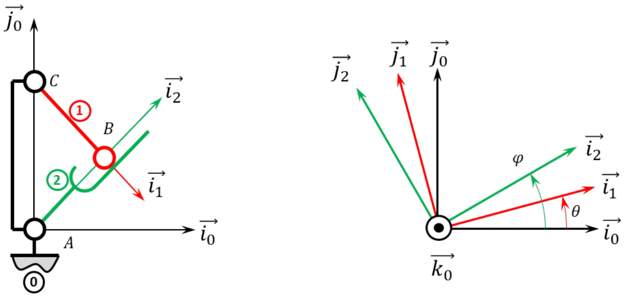
DDS

Corrigé voir 20.

Exercice 21 – Barrière Sympact ⋆⋆

C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB} = R\overrightarrow{i_1}$. De plus, $H = 120\,\text{mm}$ et $R = 40\,\text{mm}$.



On néglige la pesanteur sur la pièce **1**.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce **1**.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce **2**. Le raideur du ressort est telle qu'il exerce un couple de 45 Nm pour un angle de rotation 100°. On considère que le couple est nul lorsque la pièce 2 est à la verticale ($\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$). Il est au maximum lorsque $\varphi_f = 0$.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L\overrightarrow{i_2}$.

Question 1 *Réaliser un graphe d'analyse.*

Question 2 *Expliciter C_r en fonction des différents constantes $(k, \varphi_o, \varphi_f)$ et celles qui vous sembleraient utile.*

Question 3 *Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

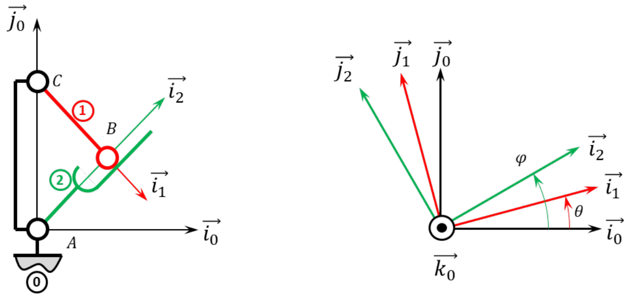
Indications :
1. .
2. $C_r(\varphi) = k\dfrac{\pi}{2(\varphi_f - \varphi_0)}\varphi - k\dfrac{\pi\varphi_0}{2(\varphi_f - \varphi_0)}$ et $C_r(\varphi) = -k\varphi + k\dfrac{\pi}{2}$.
3. On isole 1, TMS sur $\left(C, \overrightarrow{k_0}\right)$. On isole 2, TMS sur $\left(A, \overrightarrow{k_0}\right)$.

Corrigé voir 21.

Exercice 22 – Barrière Sympact ⋆⋆

C2-07

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H\overrightarrow{j_0}$, $\overrightarrow{CB} = R\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{i_2}$. De plus, $H = 120\,\text{mm}$ et $R = 40\,\text{mm}$.



On néglige la pesanteur sur la pièce **1**.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce **1**.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r\overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce **2**.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L\overrightarrow{i_2}$.

Question 1 *Réaliser un graphe d'analyse.*

Question 2 *Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

Question 3 *Mettre en œuvre une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

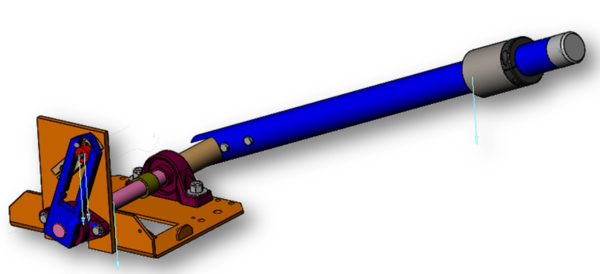
Question 4 *Tracer, en utilisant Python, l'évolution du couple moteur en fonction de l'angle de la manivelle. On prendra $M = 1\,\text{kg}$ et $L = 0{,}1\,\text{m}$*

Corrigé voir 22.

Exercice 23 – Barrière Sympact ⋆

C2-09 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

La barrière Sympact permet d'ouvrir ou de fermer l'accès à un parking.



L'angle d'ouverture est de est $\alpha = 90°$. La durée d'ouverture et de fermeture doit être $T = 1\,\text{s}$ au maximum. L'accélération maximale est de $\ddot{\theta}_{\max} = 30\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}$. La loi d'évolution est un trapèze de vitesse. On note t_a le temps d'accélération (égal au temps de décélération) et T le temps passé à vitesse constante. On note $\dot{\theta}_{\max}$ la vitesse angulaire maximale.

Question 1 *Donner **l'allure** des lois d'accélération, vitesse et position angulaires. Vous indiquerez toutes les valeurs utiles (sous forme littérale).*

Question 2 *Donner l'expression littérale du temps total.*

Question 3 *Donner l'expression littérale de la vitesse angulaire en fin de phase d'accélération.*

Question 4 *Donner l'expression littérale de l'angle total parcouru.*

Question 5 *Déterminer la durée de l'accélération ainsi que la vitesse angulaire maximale atteinte.*

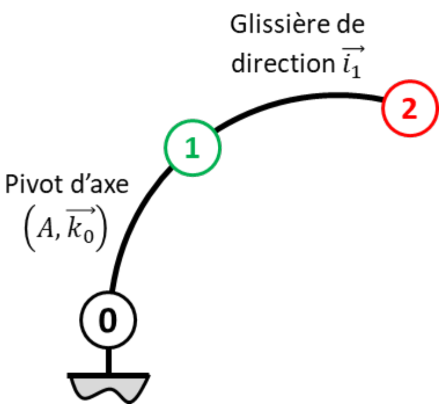
Corrigé voir 23.

Petits exercices de méca sur les chaînes ouvertes – RT – Corrigé

Exercice 24 – Mouvement RT ⋆

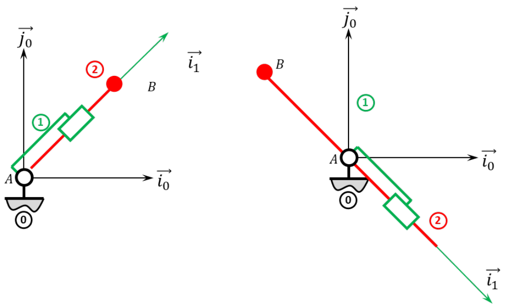
B2-12

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ rad et $\lambda(t)=20\,\text{mm}$.*

Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta=\dfrac{-\pi}{4}$ rad et $\lambda(t)=-20\,\text{mm}$.*



Exercice 25 – Mouvement RT ⋆

C2-05

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Donner l'ensemble des positions accessibles par le point B.*

Question 2 *Donner l'équation horaire (trajectoire en fonction du temps) du point B dans le mouvement de **2** par rapport à **0**.*

On souhaite que le point B réalise un segment entre les points $[-25,25]$ et $[25,25]$.

Question 3 *Donner les expressions de $\theta(t)$ et $\lambda(t)$ permettant la réalisation de cette trajectoire à la vitesse $v=0{,}01\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\theta(t)$, $\lambda(t)$ et la trajectoire générée.*

Exercice 26 – Mouvement RT ⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\lambda(t)\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$ par composition.*

$\overrightarrow{V(B,2/0)}=\overrightarrow{V(B,2/1)}+\overrightarrow{V(B,1/0)}$.

$\forall P$, $\overrightarrow{V(P,2/1)}=\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}$.

Par ailleurs $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)} = -\lambda(t)\overrightarrow{i_1}\wedge\dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0} = \lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

Au final, $\overrightarrow{V(B,2/0)}=\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point B.*

$$\{\mathscr{V}(2/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}(t)\overrightarrow{k_0}\\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1}+\lambda(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}\end{array}\right\}_B.$$

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} - \lambda(t)\dot{\theta}(t)^2\overrightarrow{i_1} = \left(\ddot{\lambda}(t)-\lambda(t)\dot{\theta}(t)^2\right)\overrightarrow{i_1} + \left(\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)+\dot{\lambda}(t)\dot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{j_1}$.

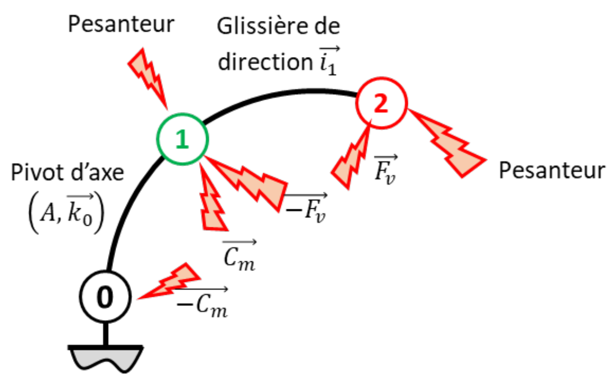
Exercice 27 – Mouvement RT ⋆

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.*

- liaison glissière : $\{\mathscr{T}(1\to 2)\}=\left\{\begin{array}{c}Y_{12}\overrightarrow{j_1}+Z_{12}\overrightarrow{k_1}\\ L_{12}\overrightarrow{i_1}+M_{12}\overrightarrow{j_1}+N_{12}\overrightarrow{k_1}\end{array}\right\}_C$;
- pesanteur sur 2 : $\{\mathscr{T}(\text{pes}\to 2)\}=\left\{\begin{array}{c}-m_2 g\overrightarrow{j_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B$;

- action du vérin $\{\mathscr{T}(\text{Vérin} \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_v \overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$.
- liaison pivot : $\{\mathscr{T}(0 \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01} \overrightarrow{i_1} + Y_{01} \overrightarrow{j_1} + Z_{01} \overrightarrow{k_1} \\ L_{01} \overrightarrow{i_1} + M_{01} \overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_C$;
- pesanteur sur 1 : $\{\mathscr{T}(\text{pes} \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_1}$
- action du moteur $\{\mathscr{T}(\text{Moteur} \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_A$.

Question 3 *Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.*

- liaison glissière : $\{\mathscr{T}(1 \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{12} \overrightarrow{j_1} \\ N_{12} \overrightarrow{k_1} \end{array} \right\}_C$;
- pesanteur sur 2 : $\{\mathscr{T}(\text{pes} \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$;
- action du vérin $\{\mathscr{T}(\text{Vérin} \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_v \overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A$.
- liaison pivot : $\{\mathscr{T}(0 \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01} \overrightarrow{i_1} + Y_{01} \overrightarrow{j_1} \\ 0 \end{array} \right\}_C$;
- pesanteur sur 1 : $\{\mathscr{T}(\text{pes} \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_1}$;
- action du moteur $\{\mathscr{T}(\text{Moteur} \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_A$.

Question 4 *Proposer une démarche permettant de déterminer le couple et l'effort que doivent développer chacun des actionneurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.*

- On isole **{1}**. On réalise un théorème de la résultante statique en projection sur $\overrightarrow{i_1}$: $\overrightarrow{R(1 \to 2)} \cdot \overrightarrow{i_1} + \overrightarrow{R(F_v \to 2)} \cdot \overrightarrow{i_1} + \overrightarrow{R(\text{Pes} \to 2)} \cdot \overrightarrow{i_1} = 0$.
- On isole **{1+2}**. On réalise un théorème du moment statique en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$: $\overrightarrow{\mathscr{M}(A, 0 \to 1)} \cdot \overrightarrow{k_0} + \overrightarrow{\mathscr{M}(A, \text{Mot} \to 1)} \cdot \overrightarrow{k_0} + \overrightarrow{\mathscr{M}(A, \text{Pes} \to 2)} \cdot \overrightarrow{k_0} + \overrightarrow{\mathscr{M}(A, \text{Pes} \to 1)} \cdot \overrightarrow{k_0} = 0$.

Question 5 *Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts inconnus dans les liaisons.*

- On isole **{1}**. On réalise un théorème de la résultante statique en projection sur $\overrightarrow{j_1}$ et un théorème du moment statique C en projection sur $\overrightarrow{k_1}$.
- On isole **{1+2}**. On réalise un théorème de la résultante statique en projection sur $\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{j_1}$.

Exercice 28 – Mouvement RT ⋆

B2-14

B2-15

C2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*

Question 2 *Donner le couple moteur et l'effort à fournir par le vérin pour maintenir le système à l'équilibre.*

Question 3 *Donner les actions mécaniques dans chacune des liaisons.*

1.4 Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.

Exercice 29 – Moteur à courant continu⋆

B2-04

Question 1 *Exprimer la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$.*

En passant les équations dans le domaine de Laplace, on a :

- $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p)$;
- $E(p) = K_m \Omega(p)$;
- $C(p) = K_m I(p)$;
- $C(p) - f\Omega(p) = Jp\Omega(p) \Leftrightarrow C(p) = \Omega(p)\left(Jp + f\right)$.

Vous devez savoir qu'un moteur à courant continu est piloté en tension ($U(p)$) et qu'en sortie on observe le taux de rotation ($\Omega(p)$).

En ne conservant que $U(p)$ et $\Omega(p)$, on a donc $U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p) \Leftrightarrow U(p) = K_m\Omega(p) + \left(R + Lp\right)\dfrac{C(p)}{K_m}$ $\Leftrightarrow U(p) = K_m\Omega(p) + \left(R + Lp\right)\dfrac{\Omega(p)\left(Jp + f\right)}{K_m} \Leftrightarrow U(p) = \left(K_m + \left(R + Lp\right)\dfrac{\left(Jp + f\right)}{K_m}\right)\Omega(p) \Leftrightarrow U(p) = \dfrac{K_m^2 + \left(R + Lp\right)\left(Jp + f\right)}{K_m}\Omega(p)$.

On a donc $H(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)} = \dfrac{K}{K^2 + \left(R + Lp\right)\left(Jp + f\right)}$.

Question 2 *Préciser l'ordre et la classe de H.*

H est d'ordre 2 et de classe 0 car on ne peut pas mettre de p en facteur. Le terme de plus haut degré du dénominateur est de degré 2.

Question 3 *Mettre $H(p)$ sous forme canonique.*

$H(p) = \dfrac{K_m}{K_m^2 + Rf + \left(RJ + Lf\right)p + LJp^2} \Leftrightarrow H(p) = \dfrac{\dfrac{K_m}{K_m^2 + Rf}}{1 + \dfrac{\left(RJ + Lf\right)}{K_m^2 + Rf}p + \dfrac{LJ}{K_m^2 + Rf}p^2}$.

Question 4 *Donner les caractéristiques de la fonction de transfert.*

En identifiant avec la forme canonique standard, $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$ soit $K = \dfrac{K_m}{K_m^2 + Rf}$, $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = \dfrac{\left(RJ + Lf\right)}{K_m^2 + Rf}$ et $\dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{LJ}{K_m^2 + Rf}$.

Au final, $K = \dfrac{K_m}{K_m^2 + Rf}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_m^2 + Rf}{LJ}}$, $\xi = \dfrac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ\left(K_m^2 + Rf\right)}}$.

DDS

Question 5 *Vérifier l'homgénéité des différentes constantes.*

Le gain doit être en $\mathrm{rad\,s^{-1}V^{-1}}$.

D'une part, $[K_m] = \mathrm{N\,m\,A^{-1}}$. D'autre part, $[K_m] = \mathrm{V\,rad^{-1}\,s}$. On a donc $\mathrm{V\,rad^{-1}\,s} = \mathrm{N\,m\,A^{-1}}$. (On pourrait aussi le montrer par une analyse dimensionnelle...)

De plus $[R] = \Omega = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$ et $[f] = \mathrm{N\,m\,rad^{-1}\,s}$.

On a donc $[K] = \dfrac{\mathrm{N\,m\,A^{-1}}}{(\mathrm{N\,m\,A^{-1}})^2 + \mathrm{N\,m\,rad^{-1}\,s} \times \mathrm{V\,A^{-1}}} = \dfrac{1}{\mathrm{N\,m\,A^{-1}} + \mathrm{rad^{-1}\,s\,V}} = \dfrac{1}{\mathrm{rad^{-1}\,s\,V}} = \mathrm{rad\,s^{-1}\,V^{-1}}$.

La pulsation propre doit être en $\mathrm{s^{-1}}$ ou $\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

On a vu que $[K_m^2] = [Rf]$. De plus $[L] = H = \mathrm{V\,s\,A^{-1}}$ et $[J] = \mathrm{N\,m\,rad^{-1}\,s^2}$ (PFD).

$[\omega_0] = \sqrt{\dfrac{\mathrm{N^2\,m^2\,A^{-2}}}{\mathrm{V\,s\,A^{-1}} \times \mathrm{N\,m\,rad^{-1}\,s^2}}} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{N\,m\,rad}}{\mathrm{V\,s\,A\,s^2}}}$. Or, $\mathrm{W} = \mathrm{N\,m\,rad\,s^{-1}} = \mathrm{VA}$.

On a alors $[\omega_0] = \sqrt{\dfrac{\mathrm{N\,m\,rad\,s^{-1}}}{\mathrm{V\,s^2\,A}}} = \sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{s^2}}} = \mathrm{s^{-1}}$.

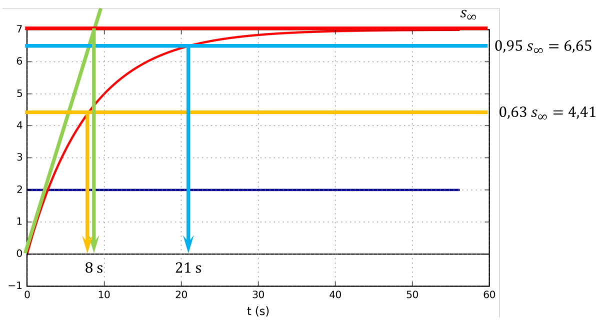
Enfin, ξ est sans unité... à vérifier :)

1.5 Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.

Exercice 30 – Identification temporelle ⋆

B2-06

Question 1 *Déterminer la fonction de transfert du système.*



La tangente à l'origine est non nulle. Il n'y a pas de dépassement. On va donc identifier un système d'ordre 1 de la forme $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$.

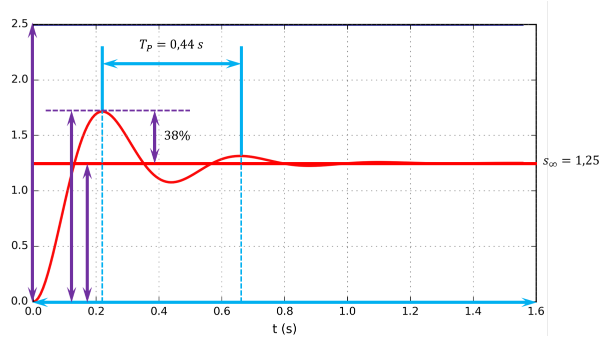
L'échelon d'entrée a une amplitude de 2. En régime permanent la valeur atteinte est de 7. On a donc $K = \dfrac{7}{2} = 3,5$.

Pour identifier la constante de temps, on peut :

- regarder à quel temps a lieu l'intersection entre l'asympote en régime permanent et la tangente à l'origine;
- mesurer le temps de temps réponse à 63 %;
- mesurer le temps de temps réponse à 95 % et diviser cette valeur par 3.

On a donc $H(p) = \dfrac{3,5}{1+8p}$.

Question 2 *Déterminer la fonction de transfert du système en réalisant les mesures nécessaires et en utilisant les formules appropriées.*



La tangente à l'origine est nulle et il y a des dépassements. On modélise le système par un système d'ordre 2. $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$.

On a $K = \dfrac{1,25}{2,5} = 0,5$.

On mesure un dépassement de $1,38 = e^{\dfrac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ $\Leftrightarrow \ln 0,38 = \dfrac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1-\xi^2}\ln 1,38 = -\pi\xi \Leftrightarrow (1-\xi^2)(\ln 1,38)^2 = \pi^2\xi^2 \Leftrightarrow (\ln 1,38)^2 - \xi^2(\ln 1,38)^2 = \pi^2\xi^2 \Leftrightarrow (\ln 1,38)^2 = \pi^2\xi^2 + \xi^2(\ln 1,38)^2 \Leftrightarrow (\ln 1,38)^2 = \xi^2\left(\pi^2 + (\ln 1,38)^2\right) \Leftrightarrow \dfrac{(\ln 1,38)^2}{\pi^2 + (\ln 1,38)^2} = \xi^2 \Leftrightarrow \xi = \sqrt{\dfrac{(\ln 1,38)^2}{\pi^2 + (\ln 1,38)^2}} = 0,3$.

Par ailleurs, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_p\sqrt{1-\xi^2}} = \dfrac{2\pi}{0,44\sqrt{1-0,3^2}} = 14,9\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

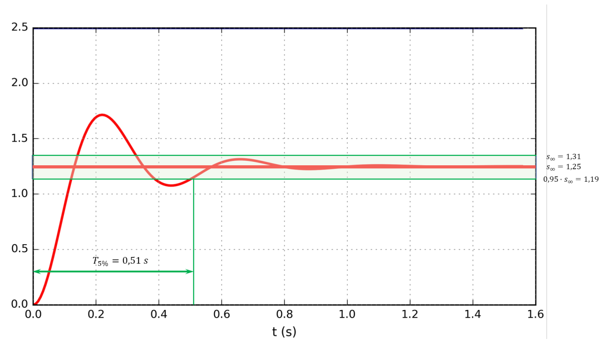
Au final, $H(p) = \dfrac{0,5}{1 + \dfrac{2\times 0,3}{14,9}p + \dfrac{p^2}{14,9^2}}$.

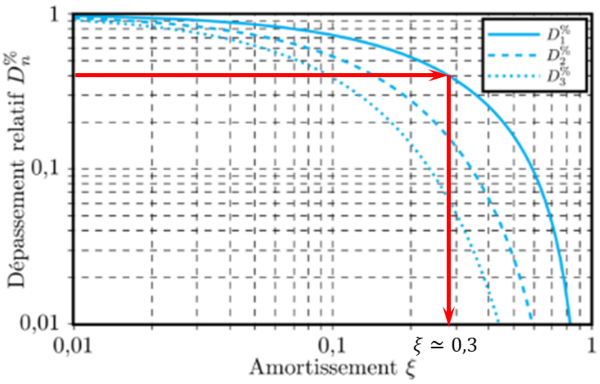
Question 3 *Déterminer la fonction de transfert du système en utilisant les abaques.*

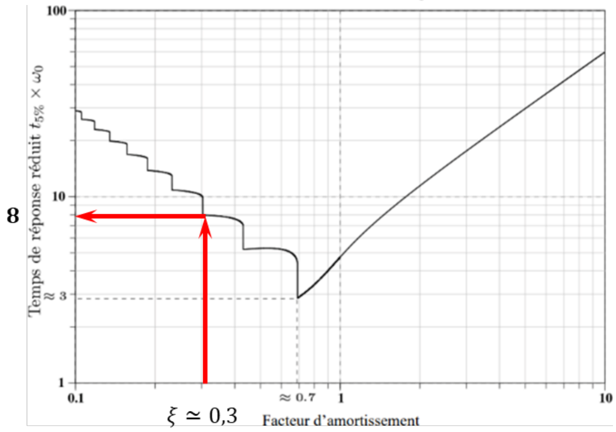
Le dépassement est de 38 %. On a donc $\xi = 0,3$.

De plus, on mesure $T_{5\%} \times \omega_0 = 8$ avec $T_{5\%} = 0,51\,\mathrm{s}$ on a $\omega_0 = 8/0,5 \simeq 16\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Au final, $H(p) = \dfrac{0,5}{1 + \dfrac{2\times 0,3}{16}p + \dfrac{p^2}{16^2}}$.



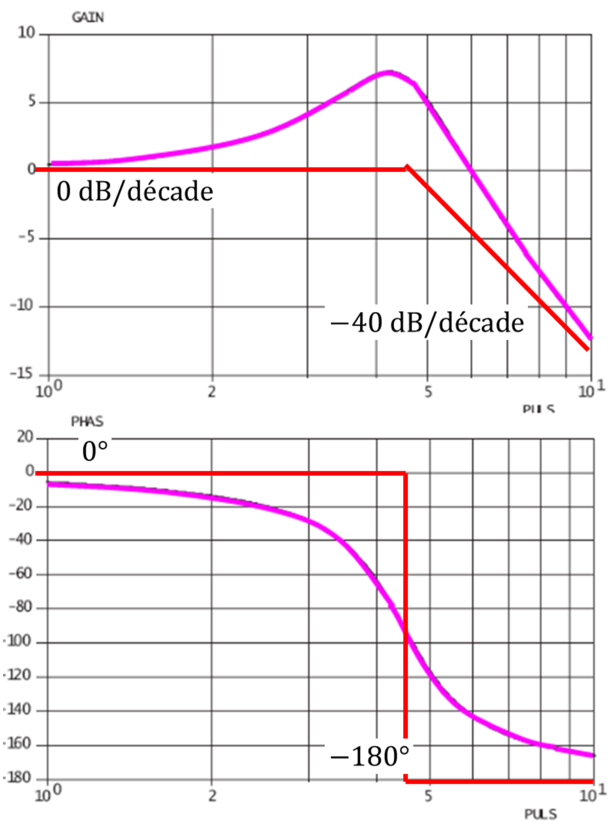




Exercice 31 – Identification ⋆

B2-06

Question 1 *Tracer le diagramme de Bode asymptotique.*



Question 2 *Identifier le type de la fonction de transfert et ses valeurs remarquables.*

La phase tend vers 0 lorsque ω tend vers 0 rad/s et vers $-180°$ lorsque ω tend vers l'infini. On observe de plus une résonance. Par ailleurs le gain est nul quand ω tend vers 0 rad/s. Le système est donc d'ordre 2 avec un gain unitaire et un $\xi < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On détermine ω_0 lorsque la phase vaut $-90°$.

À ce stade, $H(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{2\xi}{4,5}p+\dfrac{p^2}{4,5^2}}$.

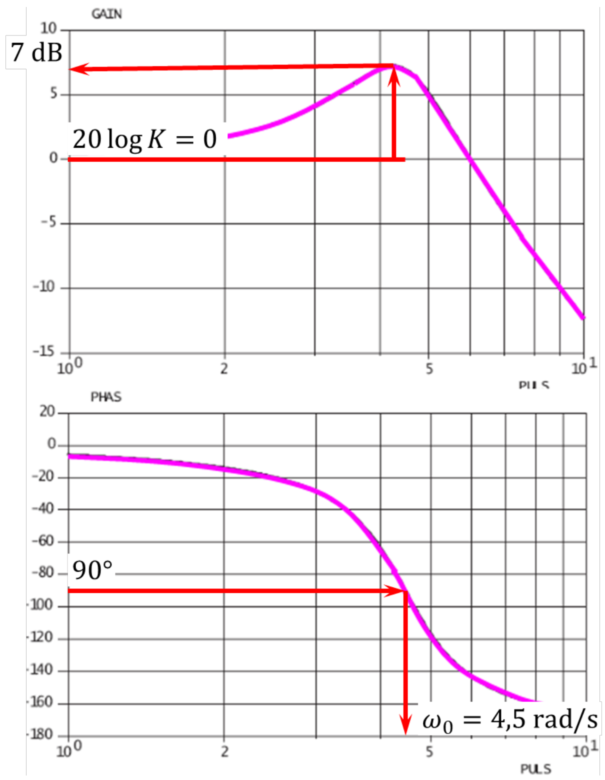
Enfin, on mesure un gain à la résonance de 7 dB. On a donc $20\log A_{\text{max}} = 7$ soit $A_{\text{max}} = 10^{7/20} = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.

Par suite, $\dfrac{1}{A_{\text{max}}} = 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{A_{\text{max}}} = 4\xi^2\left(1-\xi^2\right)$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{A_{\text{max}}^2} = 4\xi^2 - 4\xi^4 \Rightarrow 4\xi^4 - 4\xi^2 + \dfrac{1}{A_{\text{max}}^2} = 0 \Rightarrow 4X^2 - 4X + \dfrac{1}{A_{\text{max}}^2} = 0$

On a alors $\Delta = 16 - \dfrac{16}{A_{\text{max}}^2}$ et $X_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{\Delta}}{16}$

En réalisant les applications numériques, on a $\xi = \sqrt{\dfrac{4-\sqrt{\Delta}}{16}} = 0,23$.

Alors, $H(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{2\times 0,23}{4,5}p+\dfrac{p^2}{4,5^2}}$.

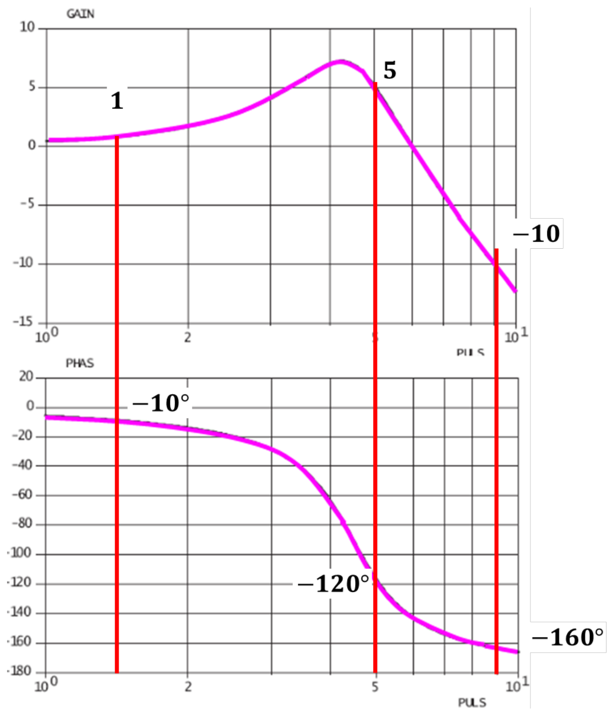


Question 3 *Déterminer les période et les pulsations de chacun des signaux.*

- Signal rouge : $T = 4{,}2\,\text{s}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1{,}5\,\text{rad/s}$.
- Signal vert : $T = 3{,}6/3 = 1{,}2\,\text{s}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 5{,}2\,\text{rad/s}$.
- Signal bleu : $T = 4{,}2/6 = 0{,}7\,\text{s}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 9\,\text{rad/s}$.

DDS

Question 4 *En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.*



- Pour $\omega = 1{,}5\,\text{rad/s}$, $G_{\text{dB}} = 1 \Rightarrow 20\log K = 1 \Rightarrow K = 10^{1/20} = 1{,}12$ et $\varphi = -0{,}17\,\text{rad}$. On a donc $s(t) = 1{,}12\sin(\omega t - 0{,}17)$.
- Pour $\omega = 5\,\text{rad/s}$, $G_{\text{dB}} = 5 \Rightarrow K = 10^{5/20} = 1{,}8$ et $\varphi = -2{,}1\,\text{rad}$. On a donc $s(t) = 1{,}8\sin(\omega t - 2{,}1)$.
- Pour $\omega = 9\,\text{rad/s}$ $G_{\text{dB}} = 5 \Rightarrow K = 10^{-10/20} = 0{,}3$ et $\varphi = -2{,}8\,\text{rad}$. On a donc $s(t) = 0{,}3\sin(\omega t - 2{,}8)$.

Exercice 32 – Identification ⋆

B2-06

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 *Déterminer les période et les pulsations de chacun des signaux.*

Question 2 *En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.*

Exercice 33 – Identification ⋆

B2-06

Pas de corrigé pour cet exercice.

Question 1 *Déterminer la fonction de transfert du système.*

Question 2 *Déterminer la fonction de transfert du système.*

1.6 Modéliser un système par schéma-blocs.

Exercice 34 – La Seine Musicale⋆

B2-07

Question 1 *En considérant que la perturbation $C_{pert}(p)$ est nulle, déterminer $H_f(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$ sous forme canonique.*

Réduction de la boucle du moteur à courant continu :

$$\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\dfrac{k_c}{R+Lp}\dfrac{1}{J_{eq}p}}{1+\dfrac{k_c}{R+Lp}\dfrac{k_e}{J_{eq}p}} = \frac{k_c}{(R+Lp)J_{eq}p + k_e k_c}.$$

On a alors,

$$\frac{X_{ch}(p)}{\Omega_c(p)} = K_a\frac{CK_h\dfrac{k_c}{(R+Lp)J_{eq}p+k_ek_c}}{1+CK_hK_{\text{capt}}\dfrac{k_c}{(R+Lp)J_{eq}p+k_ek_c}}$$

$$= K_a\frac{CK_hk_c}{(R+Lp)J_{eq}p+k_ek_c+CK_hK_{\text{capt}}k_c}$$

$$= \frac{K_a}{(k_ek_c+CK_hK_{\text{capt}}k_c)}\frac{CK_hk_c}{\dfrac{J_{eq}(R+Lp)}{k_ek_c+CK_hK_{\text{capt}}k_c}p+1}.$$

Question 2 *En prenant $\Omega_c(p) = 0$, exprimer la fonction de transfert $H_r(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$ en la mettant sous la forme : $H_r(p) = -\dfrac{\alpha(1+\tau p)}{1+\gamma p+\delta p^2}$. Exprimer α, τ, γ et δ en fonction des différents paramètres de l'étude.*

Par lecture directe du schéma-blocs, on a $\Omega_m(p) = \dfrac{1}{J_{eq}p}\left(C_{\text{pert}}(p)+C_m(p)\right)$.

De plus, $C_m(p) = \left(U_m(p)-k_e\Omega_m(p)\right)\dfrac{k_c}{R+Lp}$ et $U_m(p) = \varepsilon(p)CK_h = -\Omega_m(p)CK_hK_{\text{capt}}$.

On a donc,

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq}p}C_{\text{pert}}(p) + \frac{1}{J_{eq}p}\left(-\Omega_m(p)CK_hK_{\text{capt}} - k_e\Omega_m(p)\right)\frac{k_c}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow \Omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq}p}C_{\text{pert}}(p) + \frac{1}{J_{eq}p}\Omega_m(p)\left(-CK_hK_{\text{capt}}-k_e\right)\frac{k_c}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow \Omega_m(p)\left(1+\frac{1}{J_{eq}p}(CK_hK_{\text{capt}}+k_e)\frac{k_c}{R+Lp}\right) = \frac{1}{J_{eq}p}C_{\text{pert}}(p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{C_{\text{pert}}(p)} = \frac{\dfrac{1}{J_{eq}p}}{\left(1+\dfrac{1}{J_{eq}p}(CK_hK_{\text{capt}}+k_e)\dfrac{k_c}{R+Lp}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{C_{\text{pert}}(p)} = \frac{R+Lp}{J_{eq}p(R+Lp)+(CK_hK_{\text{capt}}+k_e)k_c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{C_{\text{pert}}(p)} = \frac{R}{(CK_hK_{\text{capt}}+k_e)k_c}\frac{1+\dfrac{L}{R}p}{\dfrac{J_{eq}}{(CK_hK_{\text{capt}}+k_e)k_c}p(R+Lp)+1}$$

Par identification, on a alors : $\alpha = -\dfrac{R}{(CK_hK_{\text{capt}}+k_e)k_c}$,

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$\gamma = \frac{RJ_{eq}}{(CK_hK_{\text{capt}}+k_e)k_c}$$

$$\delta = \dfrac{L J_{eq}}{\left(C K_h K_{\text{capt}} + k_e\right) k_c}.$$

Question 3 *Exprimer $X_{ch}(p)$ en fonction de $\Omega_m(p)$ et $C_{pert}(p)$.*

D'une part, $\Omega_m(p) = H_f(p)\Omega_c(p)$ quand il n'y a pas de perturbation. D'autre part, $\Omega_m(p) = H_r(p)C_{\text{pert}}(p)$ quand il n'y a pas de perturbation.

Par superposition, on a donc $\Omega_m(p) = H_f(p)\Omega_c(p) + H_r(p)C_{\text{pert}}(p)$.

Par suite, $X_{ch}(p) = \left(H_f(p)\Omega_c(p) + H_r(p)C_{\text{pert}}(p)\right)\dfrac{D K_{\text{red}}}{2p}$.

Exercice 35 – Machine de rééducation SysReeduc ⋆

B2-07

Question 1 *À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.*

On a :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \dfrac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e\Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M+m)r\rho_1 p\Omega_m(p) = \dfrac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M+m)r^2\rho_1^2 p\Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \dfrac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \dfrac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \dfrac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incréments. X_c est la consigne que doit respectée X. Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8\theta_m = K_1 X_C - K_8\dfrac{X}{K_5K_6}$. Au final, $K_1 = \dfrac{K_8}{K_5K_6}$.

Question 2 *Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.*

D'une part,

$$X(p) = \big(\big(X_C(p) - X(p)\big)C(p) - F_P(p)D\big)\frac{A}{p(Bp+1)}$$

$$X(p) = \frac{A\big(X_C(p) - X(p)\big)C(p)}{p(Bp+1)} - \frac{AF_P(p)D}{p(Bp+1)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) + \frac{AX(p)C(p)}{p(Bp+1)} = \frac{AX_C(p)C(p)}{p(Bp+1)} - \frac{AF_P(p)D}{p(Bp+1)}.$$

$$\Leftrightarrow X(p)\left(\frac{p(Bp+1)+AC(p)}{p(Bp+1)}\right) = \frac{AX_C(p)C(p)}{p(Bp+1)} + \frac{AF_P(p)D}{p(Bp+1)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow X(p) = \frac{AX_C(p)C(p)}{p(Bp+1)+AC(p)} - \frac{AF_P(p)D}{p(Bp+1)+AC(p)}.}$$

D'autre part, $X(p) = \Omega_m(p)H_4(p)K_5K_6$, $U_m(p) = \big(X_c(p)K_1 - \theta_m(p)K_8\big)C(p)$, $\theta_m(p) = \Omega_m(p)H_4(p)$.

$$\Omega_m(p) = \big(\big(U_m(p) - \Omega_m(p)K_7\big)K_2 - F_P(p)K_9\big)H_3(p)$$

$$\Leftrightarrow \Omega_m(p)\big(1 + K_7K_2H_3(p)\big) = U_m(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9$$

$$X(p) = \big(U_m(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9\big)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \big(\big(X_c(p)K_1 - \theta_m(p)K_8\big)C(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H_3(p$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \left(\left(X_c(p)K_1 - X(p)\frac{K_8}{K_5K_6}\right)C(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H\right.$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \big(\big(X_c(p) - X(p)\big)C(p)H_3(p)K_1K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9$$

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1 + C(p)H_3(p)K_1K_2\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}\right) = \big(X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9\big)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow X(p)\big(1 + K_7K_2H_3(p) + C(p)H_3(p)K_1K_2H_4(p)K_5K_6\big) = \big(X_c(p)C(p}$$

Par suite,

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1 + K_7K_2\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p)\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}\frac{K_8}{K_5K_6}K_2\frac{1}{p}\right.$$

$$\left(X_c(p)C(p)\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}\frac{K_8}{K_5K_6}K_2 - F_P(p)\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}K_9\right)\frac{1}{p}K_5K_6$$

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1 + \frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right) = \left(X_c(p)C(p)\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\frac{k_t}{R} - F_P(p)\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}\right).$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\frac{k_t}{R}}{\left(1 + \frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}$$

$$F_P(p)\frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}}{\left(1 + \frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{1}\frac{k_t}{R}}{\left((M+m)r^2\rho_1^2p^2 + \frac{(M+m)r^2\rho_1^2p^2\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p} + C\right.}$$

DDS

$$F_P(p)\dfrac{\dfrac{K_9}{(M+m)r\rho_1 p^2}}{\left(1+\dfrac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p}+C(p)\dfrac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\dfrac{\frac{K_8k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2+p\frac{k_ek_t}{R}+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\dfrac{\frac{K_9}{1}}{\left((M+m)r\rho_1p^2+\dfrac{(M+m)r\rho_1p^2\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\dfrac{(M+m)r\rho_1p^2K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\dfrac{\frac{K_8k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2+p\frac{k_ek_t}{R}+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\dfrac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2+\dfrac{pk_ek_t}{Rr\rho_1}+C(p)\dfrac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\dfrac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}\left(\frac{R}{k_ek_t}(M+m)r^2\rho_1^2p+1\right)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\dfrac{K_9}{p\dfrac{k_ek_t}{Rr\rho_1}\left(\dfrac{(M+m)Rr^2\rho_1^2}{k_ek_t}p+1\right)+C(p)\dfrac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\dfrac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}\left(Bp+1\right)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\dfrac{K_9}{p\dfrac{k_ek_t}{Rr\rho_1}\left(Bp+1\right)+C(p)\dfrac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\dfrac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}\left(Bp+1\right)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\dfrac{K_9}{p\dfrac{k_ek_t}{Rr\rho_1}\left(Bp+1\right)+C(p)\dfrac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\dfrac{\frac{R}{k_ek_t}\frac{K_8k_t}{R}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}\frac{R}{k_ek_t}}-F_P(p)\dfrac{K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)\dfrac{Rr\rho_1}{k_ek_t}\dfrac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\dfrac{\frac{K_8}{k_e}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}-F_P(p)\dfrac{K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\dfrac{\frac{K_8}{k_e}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}-F_P(p)\dfrac{\frac{K_8}{k_e}\frac{k_e}{K_8}K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p\left(Bp+1\right)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}$$

On a donc $A=\dfrac{K_8}{k_e}$, $B=\dfrac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_ek_t}$ et $D=\dfrac{K_9Rr\rho_1}{K_8k_t}$.

Exercice 36 – Quille pendulaire⋆

B2-07

Question 1 *Donner les expressions des fonctions de transfert A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction de la variable complexe p et des constantes.*

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace : $Q(p)=SpX(p)+\dfrac{V}{2B}p\Sigma(p)$ et $Mp^2X(p)=S\Sigma(p)-kX(p)-\lambda pX(p)-F_R(p)$.

En utilisant le schéma-blocs, on a $\Sigma(p)=A_2\left(A_1Q(p)-X(p)\right)=A_1A_2Q(p)-A_2X(p)$.

Par ailleurs $\Sigma(p)=\dfrac{Q(p)-SpX(p)}{\frac{V}{2B}p}=Q(p)\dfrac{2B}{Vp}-X(p)\dfrac{S2B}{V}$. On a donc $A_2=\dfrac{S2B}{V}$, $A_1A_2=\dfrac{2B}{Vp}$ soit $A_1=\dfrac{2B}{Vp}\dfrac{V}{S2B}=\dfrac{1}{Sp}$.

On a aussi $X(p)=A_4\left(-F_R(p)+A_3\Sigma(p)\right)=-A_4F_R(p)+A_3A_4\Sigma(p)$. Par ailleurs, $X(p)\left(Mp^2+\lambda p+k\right)=S\Sigma(p)-F_R(p)\Leftrightarrow X(p)=\dfrac{S\Sigma(p)}{Mp^2+\lambda p+k}-\dfrac{F_R(p)}{Mp^2+\lambda p+k}$. On a donc : $A_4=\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}$ et $A_3=S$.

Au final, $A_1=\dfrac{1}{Sp}$, $A_2=\dfrac{S2B}{V}$, $A_3=S$ et $A_4=\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}$.

Question 2 *Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1, A_2, A_3 et A_4, puis de la variable p et des constantes.*

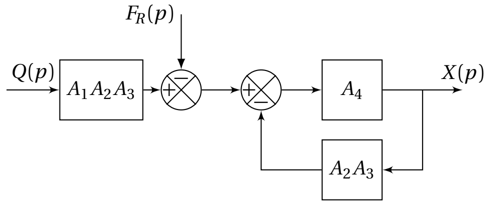
Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes On a $X(p)=\left(H_1Q(p)-F_R(p)\right)H_2(p)$.

Par ailleurs, on a vu que $X(p)=A_4\left(-F_R(p)+A_3\Sigma(p)\right)$ et $\Sigma(p)=A_2\left(A_1Q(p)-X(p)\right)$.

On a donc $X(p)=A_4\left(-F_R(p)+A_3A_2\left(A_1Q(p)-X(p)\right)\right)$ $\Leftrightarrow X(p)(1+A_2A_3A_4)=A_4\left(-F_R(p)+A_3A_2A_1Q(p)\right)$. On a donc $H_1(p)=A_1A_2A_3$ et $H_2=\dfrac{A_4}{1+A_2A_3A_4}$.

Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs Revient à utiliser la méthode précédente.

Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment. $A_1=\dfrac{1}{Sp}$, $A_2=\dfrac{S2B}{V}$, $A_3=S$ et $A_4=\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}$.

En faisant le calcul on obtient : $H_1(p)=\dfrac{2BS}{pV}$ et $H_2=\dfrac{\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}}{1+\dfrac{2BS^2}{V}\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k}}=\dfrac{1}{Mp^2+\lambda p+k+\dfrac{2BS^2}{V}}$.

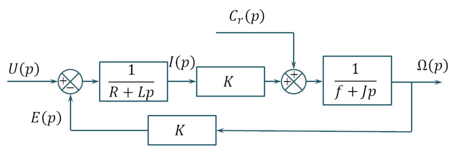
Question 3 *Pour ce vérin non perturbé ($F_R=0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.*

Dans ce cas, $\dfrac{X(p)}{Q(p)}=H_1(p)H_2(p)=\dfrac{2BS}{p\left(MVp^2+\lambda pV+kV+2BS^2\right)}$.

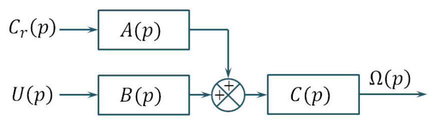
Exercice 37 – Moteur à courant continu ⋆

B2-07

Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*



Question 2 *Mettre le schéma-blocs sous la forme suivante.*



En utilisant le schéma-blocs proposé, on a $\Omega(p)=\left(C_r(p)A(p)+U(p)B(p)\right)C(p)$.

D'autre part, $\Omega(p)=\left(C_r(p)+\dfrac{K}{R+Lp}\left(U(p)-K\Omega(p)\right)\right)\dfrac{1}{f+Jp}$.

On a donc $\left(f+Jp\right)\Omega(p)=C_r(p)+U(p)\dfrac{K}{R+Lp}$

$\Leftrightarrow \left(f+Jp\right)\Omega(p)+\dfrac{K^2}{R+Lp}\Omega(p)=C_r(p)+U(p)\dfrac{K}{R+Lp}$

$\Leftrightarrow \left(\left(f+Jp\right)+\dfrac{K^2}{R+Lp}\right)\Omega(p)=C_r(p)+U(p)\dfrac{K}{R+Lp}$

$\Leftrightarrow \dfrac{K^2+\left(f+Jp\right)\left(R+Lp\right)}{R+Lp}\Omega(p)=C_r(p)+U(p)\dfrac{K}{R+Lp}$

$\Leftrightarrow \Omega(p)=\left(C_r(p)+U(p)\dfrac{K}{R+Lp}\right)\dfrac{R+Lp}{K^2+\left(f+Jp\right)\left(R+Lp\right)}$.

Dés lors plusieurs schéma-blocs peuvent répondre à la question. Par exemple, $A(p)=1$, $B(p)=\dfrac{K}{R+Lp}$, $C(p)=\dfrac{R+Lp}{K^2+\left(f+Jp\right)\left(R+Lp\right)}$.

En poursuivant, on a aussi : $\Omega(p)=\left(C_r(p)(R+Lp)+U(p)K\right)\dfrac{1}{K^2+(f}$

On a donc aussi, $A(p)=R+Lp$, $B(p)=K$, $C(p)=\dfrac{1}{K^2+\left(f+Jp\right)\left(R+Lp\right)}$

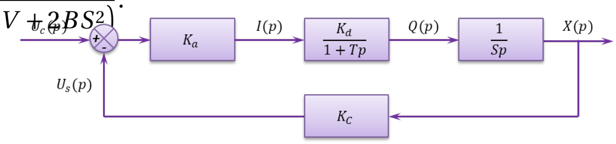
Exercice 38 – Vérin⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*

On a :

- $U_c(p)=\dfrac{1}{K_a}I(p)+U_s(p)$
- $Q(p)=SpX(p)$
- $U_S(p)=K_C\cdot X(p)$
- $F(p)=\dfrac{Q(p)}{I(p)}=\dfrac{K_d}{1+Tp}$



Exercice 39 – Banc d'épreuve hydraulique ⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

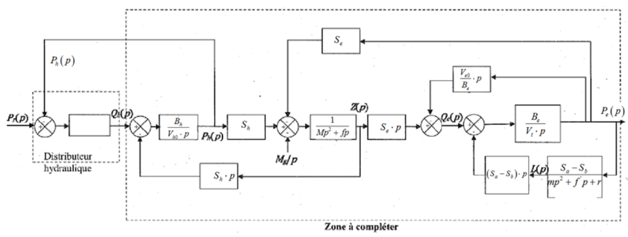
Question 1 *Déduire de la relation précédente l'équation reliant $Z(p)$, $P_e(p)$, $P_h(p)$, et Poids$(p)=Mg/p$, transformées de Laplace de $z(t)$, $P_e(t)$, $P_h(t)$ et du poids perçu comme une perturbation. Les conditions initiales sont supposées nulles.*

$$Mp^2Z(p))=S_hP_h(p)-S_eP_e(pt)-\frac{Mg}{p}-fpZ(p)$$

Question 2 *En déduire, en tenant compte de l'équation du débit, deux équations liant $L(p)$, $P_e(p)$ et $Q_e(p)$, transformées de Laplace de $L(t)$, $P_e(t)$ et $Q_e(t)$. Les conditions initiales sont supposées nulles.*

$Q_e(p)=(S_a-S_b)pL(p)+\dfrac{V_t}{B_e}pP_e(p)$ et $mp^2L(p)=-rL(p)+(S_a-S_b)P_e(p)-f'pL(p)$.

Question 3 *Compléter le schéma-blocs de l'ensemble (sans le distributeur hydraulique), l'entrée étant la pression d'huile régulée $P_r(p)$ et la sortie la pression d'épreuve dans le tube $P_e(p)$.*



Exercice 40 – Tuyère à ouverture variable⋆

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

DDS

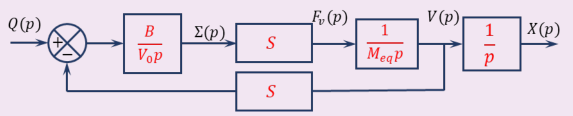
Présentation du système

Objectif On souhaite vérifier que le système permet de respecter le cahier des charges suivant :
- temps de réponse à 5% : 4 s au maximum ;
- précision : l'erreur statique doit être nulle ;
- précision : l'erreur de traînage doit être inférieure à 1 mm pour une consigne de 25 mm s^{-1}.

Modélisation du comportement du vérin – hypothèse fluide compressible

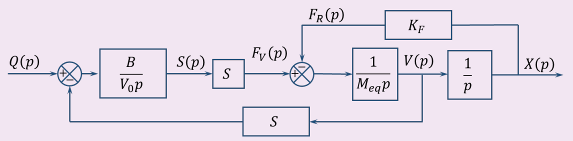
Question 1 *À partir des équations, compléter le schéma-blocs en indiquant les fonctions de transferts de chaque bloc.*

Correction



Question 2 *Modifier le schéma-blocs précédent pour intégrer l'effort résistant.*

Correction



Question 3 *Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin* $H_V(p) = \dfrac{X(p)}{Q(p)}$. *On donnera le résultat sous la forme* $H_V(p) = \dfrac{K_V}{p\left(1+a_2p^2\right)}$ *en précisant les expression de* K_V *et* a_2.

Correction

$$H_{BI}(p) = \dfrac{\dfrac{1}{M_{éq}p^2}}{1+\dfrac{K_F}{M_{éq}p^2}} = \dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}$$

$$H_v(p) = \dfrac{\dfrac{B}{V_0 p} S \dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}{1+\dfrac{B}{V_0 p} S^2 \dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2} p} \qquad H_v(p) = \dfrac{\dfrac{B}{V_0 p} S \dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}{1+\dfrac{B}{V_0 p} S^2 \dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2} p}$$

$$H_v(p) = \dfrac{\dfrac{B}{V_0 p} S \dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}{1+\dfrac{B}{V_0} S^2 \dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}} \qquad H_v(p) = \dfrac{\dfrac{B}{V_0 p} S \dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}{1+\dfrac{B}{V_0} S^2 \dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}$$

$$H_v(p) = \dfrac{\dfrac{BS}{V_0 p}}{K_F+M_{éq}p^2+\dfrac{BS^2}{V_0}}$$

$$H_v(p) = \dfrac{\dfrac{\dfrac{BS}{V_0}}{K_F+\dfrac{BS^2}{V_0}}}{p\left(1+\dfrac{M_{éq}}{K_F+\dfrac{BS^2}{V_0}}p^2\right)}$$

$$Kv = \dfrac{\dfrac{BS}{V_0}}{K_F+\dfrac{BS^2}{V_0}}$$

$$a_2 = \dfrac{M_{éq}}{K_F+\dfrac{BS^2}{V_0}}$$

Validation du comportement du vérin

Question 4 *Donner l'expression de la forme canonique de la fonction de transfert en boucle fermée* $H_{BF}(p) = \dfrac{X(p)}{X_{ref}(p)}$. *On donnera le résultat en fonction de* K_C, K_U, K_D, K_p, K_V *et* a_2.

Correction

$$H_{BF}(p) = \dfrac{X(p)}{X_{ref}(p)} = \dfrac{K_c K_p K_u K_D \dfrac{K_V}{p\left(1+a_2p^2\right)}}{1+K_c K_p K_u K_D \dfrac{K_V}{p\left(1+a_2p^2\right)}}$$

$$H_{BF}(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{p\left(1+a_2p^2\right)}{K_c K_p K_u K_D K_V}}$$

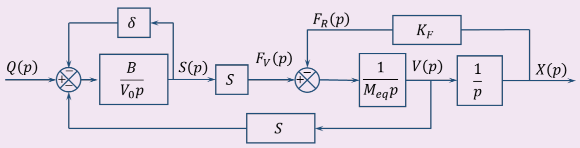
$$H_{BF}(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{p}{K_c K_p K_u K_D K_V}+\dfrac{a_2}{K_c K_p K_u K_D K_V}p^3}$$

Prise en compte du débit de fuite

DDS

Question 5 *Modifier le schéma-blocs précédent pour intégrer le débit de fuite.*

Correction



Question 6 *Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin $H_V(p)=\dfrac{X(p)}{Q(p)}$. On donnera le résultat sous la forme $H_V(p)=\dfrac{K_V}{p\left(1+a_1p+a_2p^2+a_3p^3\right)}$ en précisant les expression de K_V, a_1, a_2 et a_3.*

Correction

$$H_{B1}(p)=\frac{\dfrac{B}{V_0 p}}{1+\dfrac{\delta B}{V_0 p}}=\frac{\dfrac{1}{\delta}}{1+\dfrac{V_0}{\delta B}p}$$

$$H_v(p)=\frac{\dfrac{B}{\delta B+V_0 p}S\dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}}{1+\dfrac{B}{\delta B+V_0 p}S^2\dfrac{1}{K_F+M_{éq}p^2}p}$$

$$H_v(p)=\frac{BS}{(\delta B+V_0 p)(K_F+M_{éq}p^2)+BS^2 p}$$

$$H_v(p)=\frac{BS}{\delta BK_F+K_F V_0 p+\delta BM_{éq}p^2+V_0 M_{éq}p^3+BS^2 p}$$

$$H_v(p)=\frac{\dfrac{S}{\delta K_F}}{1+\dfrac{K_F V_0+BS^2}{\delta BK_F}p+\dfrac{M_{éq}}{K_F}p^2+\dfrac{V_0 M_{éq}}{\delta BK_F}p^3}$$

$$K_v=\frac{S}{\delta K_F}$$

$$a_1=\frac{K_F V_0+BS^2}{\delta BK_F}$$

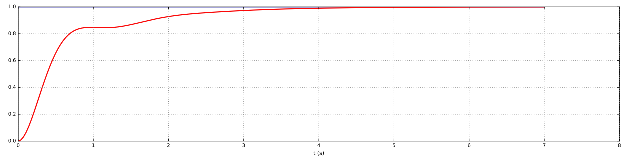
$$a_2=\frac{M_{éq}}{K_F}$$

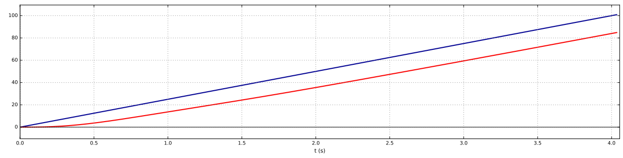
$$a_3=\frac{V_0 M_{éq}}{\delta BK_F}$$

Retour sur le cahier des charges

On donne la réponse à un échelon et à une rampe de pente $25\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$.

Question 7 *Le cahier des charges est-il vérifié ?*



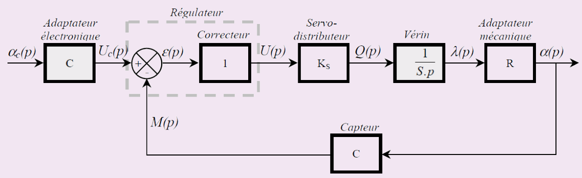


Exercice 41 – Véhicule à trois roues Clever★

B2-07 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin $H_{V1}(p)$ (telle que $\lambda(p)=H_{V1}(p)Q(p)$) et compléter le schéma-bloc associé à la modélisation actuelle du système.*

Correction



Question 2 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF_1$ (telle que $\alpha(p)=FTBF_1(p)\alpha_c(p)$) du système bouclé. Mettre $FTBF_1(p)$ sous la forme $\dfrac{K_1}{1+\tau_1 p}$ en précisant les expressions de K_1 et de τ_1.*

Correction

$$FTBF_1(p)=\frac{C\dfrac{K_S.R}{S.p}}{1+C\dfrac{K_S.R}{S.p}}=\frac{C.K_S.R}{S.p+C.K_S.R}=\frac{1}{1+\dfrac{S}{C.K_S.R}.p}$$

Question 3 *À partir du critère de temps de réponse à 5% ($t_{r5\%}$) du système, déterminer l'expression puis la valeur numérique minimale du gain du servo-distributeur.*

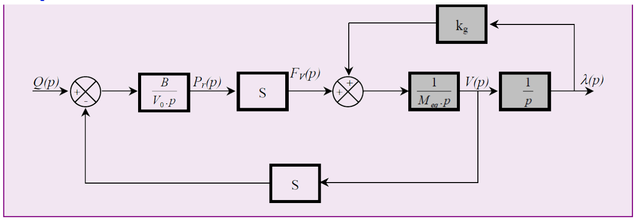
Correction

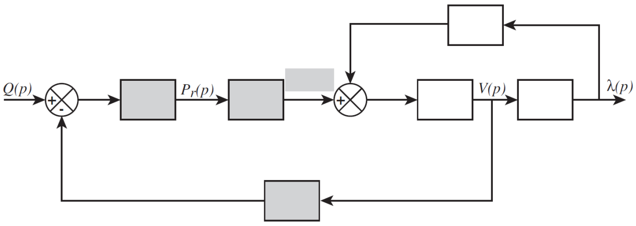
$t_{R5\%}=\dfrac{3.S}{C.K_S.R}$ soit pour avoir $t_{R5\%}\leq 0{,}1\ s=t_0$ il faut que :

$$K_S>\frac{3.S}{C.R.t_0}=\frac{3\times\pi\times16^2\times10^{-6}}{1\times\dfrac{\pi}{180}\times400\times0{,}1}=3\times18\times4\times16\times10^{-6}=3{,}456.10^{-3}\ m^3s^{-1}V^{-1}$$

Question 4 *Appliquer la transformation de Laplace aux équations précédentes et compléter le schéma-blocs.*

Correction





Question 5 *Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée du vérin H_{V2} (telle que $\lambda(p) = H_{V2}Q(p)$) et préciser les expressions des coefficients K_V et ω_V de sa forme canonique : $H_{V2}(p) = \dfrac{K_V}{p\left(1+\dfrac{p^2}{\omega_V^2}\right)}$.*

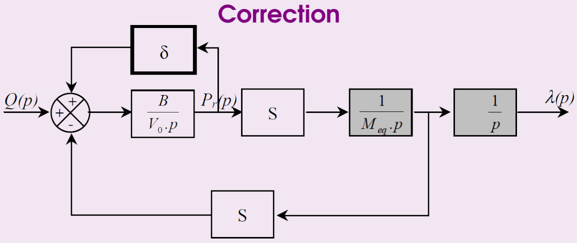
Correction

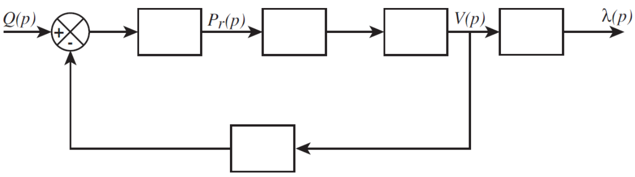
$$H_{V2}(p) = \frac{\frac{BS}{V_0.p}\frac{\frac{1}{M_{eq}.p^2}}{1-k_g.\frac{1}{M_{eq}.p^2}}}{1+\frac{BS^2}{V_0}\frac{1}{M_{eq}.p^2-k_g}} = \frac{BS}{V_0.p.(M_{eq}.p^2-k_g)+BS^2.p} = \frac{\frac{BS}{BS^2-k_g.V_0}}{p.\left(1+\frac{V_0.M_{eq}}{BS^2-V_0.k_g}.p^2\right)}$$

$$\boxed{H_{V2}(p) = \frac{\frac{BS}{BS^2-k_g.V_0}}{p.\left(1+\frac{V_0.M_{eq}}{BS^2-V_0.k_g}.p^2\right)}} \qquad \boxed{K_V = \frac{BS}{BS^2-k_g.V_0}} \qquad \boxed{\omega_V = \left(\frac{BS^2-V_0.k_g}{V_0.M_{eq}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Question 6 *Proposer une modification du schéma-bloc donné afin de prendre en compte le débit de fuite.*

Correction





Question 7 *Déterminer l'expression de la fonction de transfert H_{V3} (telle que $\lambda(p) = H_{V3}Q(p)$) associée au comportement dynamique du vérin ainsi modélisé. On donnera le résultat sous la forme suivante : $H_{V3}(p) = \dfrac{K_V}{p\left(1+a_1p+\dfrac{p^2}{\omega_V^2}\right)}$. Donner l'expression de a_1 en fonction de M_{eq}, δ et S et déterminer l'expression du coefficient d'amortissement ξ_V du second ordre en fonction de M_{eq}, δ, S, B et V_0.*

Correction

$$Q(p) = S\lambda.p + \frac{V_0}{B}p.P_r(p) - \delta.P_r(p)$$

$$H_{V2}(p) = \frac{\frac{\frac{B}{V_0.p}}{1-\frac{B\delta}{V_0.p}}\frac{S}{M_{eq}.p}\frac{1}{p}}{1+\frac{\frac{B}{V_0.p}}{1-\frac{B\delta}{V_0.p}}\frac{S^2}{M_{eq}.p}} = \frac{BS}{(V_0.p-B\delta).M_{eq}.p^2+BS^2.p} = \frac{\frac{1}{S}}{p\left(1-\frac{\delta.M_{eq}}{S^2}.p+\frac{V_0.M_{eq}}{BS^2}.p^2\right)}$$

$$\frac{2\xi_V}{\omega_V} = -\frac{\delta.M_{eq}}{S^2} \text{ et } \omega_V = \left(\frac{BS^2}{V_0.M_{eq}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ soit } \xi_V = -\frac{1}{2}\frac{\delta.M_{eq}}{S^2}\left(\frac{BS^2}{V_0.M_{eq}}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\delta\left(\frac{BM_{eq}}{V_0.S^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Question 8 *Quels sont les critères du cahier des charges validés ?*

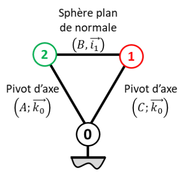
Correction

- Ecart de traînage = 0 ⇒ validé
- Ecart dynamique (dépassement pour entrée en trapèze) = 0,8° ⇒ validé
- *Temps de réponse lié à la bande passante et l'amortissement ⇒ validé (ne peut pas être lu sur une entrée en trapèze).*

Exercice 42 – Barrière Sympact ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ soit $\lambda(t)\,\vec{i_2} - R\,\vec{i_1} - h\,\vec{j_0} = \vec{0}$.

En exprimant l'équation vectorielle dans le repère $\mathscr{R}_0$, on a $\lambda(t)\left(\cos\varphi(t)\,\vec{i_0} + \sin\varphi(t)\,\vec{j_0}\right) - R\left(\cos\theta(t)\,\vec{i_0} + \sin\theta(t)\,\vec{j_0}\right) - h\,\vec{j_0} = \vec{0}$.

On a alors $\begin{cases} \lambda(t)\cos\varphi(t) - R\cos\theta(t) = 0 \\ \lambda(t)\sin\varphi(t) - R\sin\theta(t) - h = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} \lambda(t)\cos\varphi(t) = R\cos\theta(t) \\ \lambda(t)\sin\varphi(t) = R\sin\theta(t) + h \end{cases}$.

En faisant le rapport des équations, on a donc : $\tan\varphi(t) = \dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}$ (pour $\theta(t) \neq \dfrac{\pi}{2}\ mod\,\pi$).

Question 3 *Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

On a : $\varphi(t) = \arctan\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)$.

Pour commencer, $(R\sin\theta(t)+h)' = R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$ et $(R\cos\theta(t))' = -R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)$.

De plus, $\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)'$

$$= \frac{R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)R\cos\theta(t) + R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)(R\sin\theta(t)+h)}{R^2\cos^2\theta(t)}$$

$$= \frac{R^2\dot{\theta}(t)\cos^2\theta(t) + R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)(R\sin\theta(t)+h)}{R^2\cos^2\theta(t)}$$

$$= \frac{R\dot\theta(t)\cos^2\theta(t) + R\sin^2\theta(t)\dot\theta(t) + h\dot\theta(t)\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}$$
$$= \dot\theta(t)\frac{R + h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}.$$

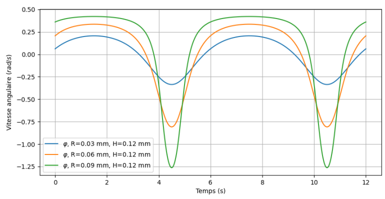
Au final,

$$\dot\varphi(t) = \frac{\dot\theta(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{1+\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)^2} \quad \frac{\dot\theta(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{1+\dfrac{(R\sin\theta(t)+h)^2}{R^2\cos^2\theta(t)}}.$$

$$\dot\varphi(t) = R^2\cos^2\theta(t)\frac{\dot\theta(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{R^2\cos^2\theta(t)+\dfrac{(R\sin\theta(t)+h)^2}{R^2\cos^2\theta(t)}} = \frac{R\dot\theta(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2\cos^2\theta(t)+(R\sin\theta(t)+h)^2}.$$

$$\dot\varphi(t) = \frac{R\dot\theta(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2\cos^2\theta(t)+R^2\sin^2\theta(t)+h^2+2Rh\sin\theta(t)}$$
$$= \frac{R\dot\theta(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2+h^2+2Rh\sin\theta(t)}.$$

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot\varphi(t)$ en fonction de $\dot\theta(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*




```python
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""14_Sympact.py"""

__author__ = "Xavier Pessoles"
__email__ = "xpessoles.ptsi@free.fr"

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.03 # m
H = 0.12 # m
w = 10 # tours /min
w = 10*2*m.pi/60 # rad/s

def calc_phi(theta):
    num = R*np.sin(theta)+H
    den = R*np.cos(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def calc_phip(theta):
    num = R*w*(R+H*np.sin(theta))
    den = R*R+H*H+2*R*H*np.sin(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def plot_phi():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phi = calc_phi(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Position angulaire ($rad$)")
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phi,label=str("$\\varphi$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.legend()
    plt.show()


def plot_phip():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phip = calc_phip(les_theta)

    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Vitesse angulaire ($rad/s$)")
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phip,label=str("$\\varphi$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.legend()
    plt.show()

for R in [0.03,0.06,0.09]:
    plot_phip()
```

Exercice 43 – Barrière Sympact ⋆⋆

B2-13

Question 1 *Calculer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$?*

$\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(C,1/0)} + \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} - R\overrightarrow{i_1}\wedge\dot\theta\,\overrightarrow{k_0} = R\dot\theta\,\overrightarrow{j_1}$.

(Possibilité d'utiliser la dérivation vectorielle.)

Question 2 *Calculer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$?*

$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(A,2/0)} + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \overrightarrow{0} - \lambda\overrightarrow{i_2}\wedge\dot\varphi\,\overrightarrow{k_0} = \lambda\dot\varphi\,\overrightarrow{j_2}$.

(**Impossibilité** d'utiliser la dérivation vectorielle.)

Question 3 *Justifier que $\overrightarrow{V(B,2/1)}\cdot\overrightarrow{j_2} = 0$.*

La liaison entre **2** et **1** est une liaison ponctuelle de normale $\overrightarrow{j_2}$. Il n'y a donc pas de vitesse sur cette direction (ce qui de plus provoquerait une rupture de contact en B).

Question 4 *En déduire une relation cinématique entre les différentes grandeurs.*

En utilisant la décomposition du vecteur vitesse, on a $\overrightarrow{V(B,2/1)}\cdot\overrightarrow{j_2} = \left(\overrightarrow{V(B,2/0)} - \overrightarrow{V(B,1/0)}\right)\cdot\overrightarrow{j_2} \Leftrightarrow 0 = \left(\lambda\dot\varphi\,\overrightarrow{j_2} - R\dot\theta\,\overrightarrow{j_1}\right)\cdot\overrightarrow{j_2} \Leftrightarrow 0 = \lambda\dot\varphi - R\dot\theta\cos(\varphi-\theta)$

Exercice 44 – Barrière Sympact ⋆⋆

C1-05

On néglige la pesanteur sur la pièce **1**.

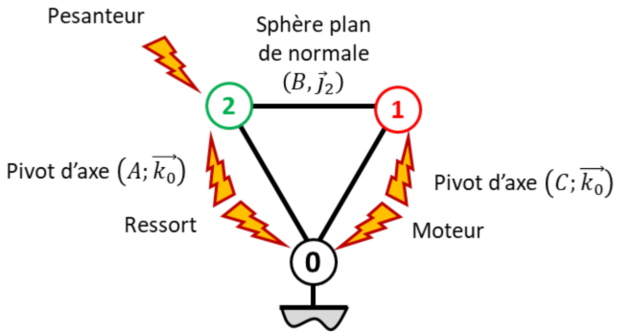
On note $\{\mathscr{T}(\text{Moteur}\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_m\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce **1**.

DDS

On note $\{\mathscr{T}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce **2**. Le raideur du ressort est telle qu'il exerce un couple de 45 Nm pour un angle de rotation 100°. On considère que le couple est nul lorsque la pièce 2 est à la verticale ($\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$). Il est au maximum lorsque $\varphi_f = 0$.

On note $\{\mathscr{T}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L\overrightarrow{i_2}$.

Question 1 *Réaliser un graphe d'analyse.*



Question 2 *Expliciter C_r en fonction des différents constantes (k, φ_o, φ_f) et celles qui vous sembleraient utile.*
Exprimons le couple du ressort par $C_r(\varphi) = a\varphi + b$. On a d'une part, $C_r(\varphi_0) = 0$. D'autre part, on a une raideur k de 45 Nm pour un angle de rotation 100°soit $k = \dfrac{45}{100\dfrac{\pi}{180}} =$ 26 Nm rad^{-1}. On a donc $C_r(\varphi_f) = k\dfrac{\pi}{2}$.

On a donc : $\left\{ \begin{array}{l} a\varphi_0 + b = 0 \\ a\varphi_f + b = k\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = -a\varphi_0 \\ a\varphi_f - a\varphi_0 = k\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = -a\varphi_0 \\ a(\varphi_f - \varphi_0) = k\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = -a\varphi_0 \\ a = k\dfrac{\pi}{2(\varphi_f - \varphi_0)} \end{array} \right.$

On a donc $C_r(\varphi) = k\dfrac{\pi}{2(\varphi_f - \varphi_0)}\varphi - k\dfrac{\pi\varphi_0}{2(\varphi_f - \varphi_0)}$.

Avec $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi_f = 0$, on a $C_r(\varphi) = -k\varphi + k\dfrac{\pi}{2}$.

Question 3 *Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

- On isole 1, on réalise un TMS en C en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On obtient une équation liant le couple moteur et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- On isole 2, on réalise un TMS en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On obtient une équation liant le couple dans le ressort et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- En combinant les deux équations on élimine l'action normale dans la liaison sphère plan. On peut éliminer un des deux angles en utilisant la loi entrée sortie.

Exercice 45 – Barrière Sympact ★★

C2-07

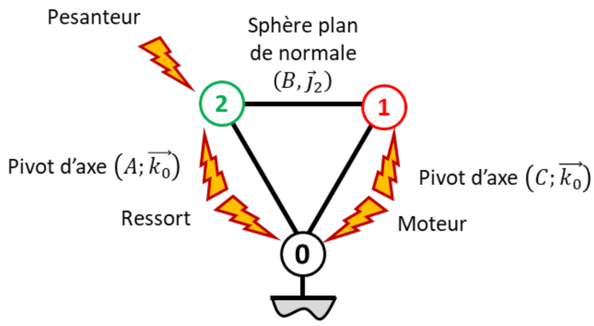
On néglige la pesanteur sur la pièce **1**.

On note $\{\mathscr{T}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce **1**.

On note $\{\mathscr{T}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce **2**.

On note $\{\mathscr{T}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L\overrightarrow{i_2}$.

Question 1 *Réaliser un graphe d'analyse.*



Question 2 *Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

- On isole 1, on réalise un TMS en C en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On obtient une équation liant le couple moteur et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- On isole 2, on réalise un TMS en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On obtient une équation liant le couple dans le ressort et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- En combinant les deux équations on élimine l'action normale dans la liaison sphère plan. On peut éliminer un des deux angles en utilisant la loi entrée sortie.

Question 3 *Mettre en œuvre une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

- **On isole 1.**
- **On réalise le bilan des actions mécaniques** :
  - action de la pivot en C (pas de moment suivant $\overrightarrow{k_0}$),
  - action de la liaison sphère plan en B : $\{\mathscr{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_B\overrightarrow{j_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$, on a alors $\overrightarrow{\mathscr{M}(C, 2 \rightarrow 1)} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B, 2 \rightarrow 1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 1)} = R\overrightarrow{i_1} \wedge F_B\overrightarrow{j_2} = RF_B \sin\left(\varphi - \theta + \dfrac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{k_0} = RF_B\cos(\varphi - \theta)\overrightarrow{k_0}$;
  - $\{\mathscr{T}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\}$.
- **On réalise le TMS en C en projection sur $\overrightarrow{k_0}$** : $C_m + RF_B\cos(\varphi - \theta) = 0$.

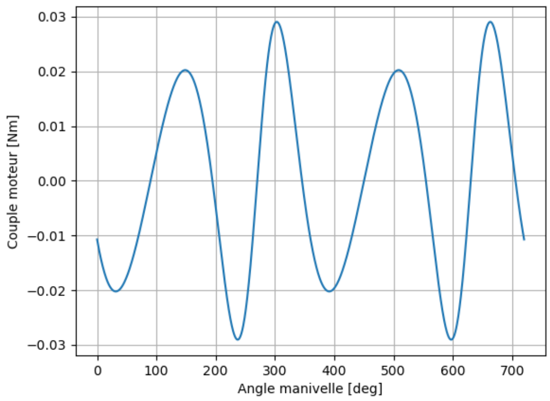
- **On isole 2.**
- **On réalise le bilan des actions mécaniques** :
  - action de la pivot en A (pas de moment suivant $\overrightarrow{k_0}$),
  - action de la liaison sphère plan en B : $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} -F_B\overrightarrow{j_2} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B$, on a alors $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,1\rightarrow 2)} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B,1\rightarrow 2)} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R(1\rightarrow 2)} = \lambda\overrightarrow{i_2}\wedge -F_B\overrightarrow{j_2} = -\lambda F_B\overrightarrow{k_2}$.
  - $\{\mathscr{F}(\text{Ressort}\rightarrow 2)\}$;
  - action de la pesanteur : $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,\text{pes}\rightarrow 2)} = \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{pes}\rightarrow 2)} + \overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{R(\text{pes}\rightarrow 2)} = L\overrightarrow{i_2}\wedge -Mg\overrightarrow{j_0}$
    $= -MgL\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\overrightarrow{k_0}$
    $= -MgL\cos\left(\varphi\right)\overrightarrow{k_0}$
- **On réalise le TMS en** C **en projection sur** $\overrightarrow{k_0}$: $C_r - \lambda F_B - MgL\cos\varphi = 0$.

Au final, $C_r - \lambda F_B - MgL\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow F_B = \dfrac{C_r - MgL\cos\varphi}{\lambda}$ et

$$C_m + R\frac{C_r - MgL\cos\varphi}{\lambda}\cos\left(\varphi-\theta\right) = 0.$$

Question 4 *Tracer, en utilisant Python, l'évolution du couple moteur en fonction de l'angle de la manivelle. On prendra $M = 1\,\text{kg}$ et $L = 0{,}1\,\text{m}$*

`https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/324a-628215/mcer`



Exercice 46 – Barrière Sympact ⋆

C2-09 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Donner* ***l'allure*** *des lois d'accélération, vitesse et position angulaires. Vous indiquerez toutes les valeurs utiles (sous forme littérale).*

Question 2 *Donner l'expression littérale du temps total.*

Question 3 *Donner l'expression littérale de la vitesse angulaire en fin de phase d'accélération.*

Question 4 *Donner l'expression littérale de l'angle total parcouru.*

Question 5 *Déterminer la durée de l'accélération ainsi que la vitesse angulaire maximale atteinte.*

DDS