Concours Blanc : Informatique

Autour de données météorologiques

1 Mise en situation

La structure peut être modélisée par n éléments de masse m_i (i variant de 1 à n) reliés par des liaisons visco-élastiques eux-mêmes modélisés par des un ressort de raideur k en parallèle d'un élément d'amortissement c. La structure est supposée unidimensionnelle de longueur L. Le nombre d'éléments peut être de l'ordre de plusieurs milliers.

Le déplacement au cours du temps de l'élément i autour de sa position d'équlibre est noté $u_i(t)$. Une force $f_n(t)$ est appliquée sur l'élément n uniquement. L'extrémité gauche de la structure est bloquée. Les effets de la pesanteur sont négligés.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à un élément i (i variant de 2 à $n-1$ inclus) s'écrit sous la forme :

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_i(t)}{\mathrm{d}t^2}=-k\left(u_i(t)-u_{i-1}(t)\right)-k\left(u_i(t)-u_{i+1}(t)\right)-c\left(\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}u_{i-1}}{\mathrm{d}t}\right)-c\left(\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}u_{i+1}}{\mathrm{d}t}\right)$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué aux éléments 1 et n donne les équations suivantes :

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_i(t)}{\mathrm{d}t^2}=-2ku_1(t)+ku_2(t)-2c\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}-c\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_n(t)}{\mathrm{d}t^2}=-k\left(u_n(t)-u_{n-1}(t)\right)-c\left(\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}u_{n-1}}{\mathrm{d}t}\right)+f_n(t)$$

Dans toute la suite, on imposera $f_n(t)=f_{max}\sin\omega(t)$.

2 Résolution d'une équation différentielle

On s'intéresse tout d'abord à un seul système masse ressort. L'application du théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe de déplacement s'écrit donc de la manière suivante :

$$m\cdot\ddot{u}(t)+c\cdot\dot{u}(t)+k\cdot u(t)=f(t)$$

On précise que pour $t\leq 0$, $u(t)=0$, $\dot{u}(t)=0$ et $\ddot{u}(t)=0$.

On pose $\left\{\begin{array}{l}x(t)=u(t)\\ v(t)=\dot{x}(t)\end{array}\right.$.

Question 1 *Réécrire l'équation différentielle sous forme d'un système d'équation en fonction de $x(t)$, $v(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\dot{v}(t)$*

Corrigé

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l}v(t)=\dot{x}(t)\\ m\cdot\dot{v}(t)+c\cdot v(t)+k\cdot x(t)=f(t)\end{array}\right.$$

Question 2 *En utilisant un schéma d'Euler explicite et l'équation $v(t) = \dot{x}(t)$ exprimer la suite x_{k+1} en fonction de x_k, v_k et le pas de calcul noté noté h.*

Corrigé

On a $\dfrac{dx(t)}{dt} \simeq \dfrac{x_{k+1} - x_k}{h}$. On a donc $v_k = \dfrac{x_{k+1} - x_k}{h} \Longleftrightarrow x_{k+1} = h \cdot v_k + x_k$.

Question 3 *En utilisant un schéma d'Euler explicite exprimer alors la suite v_{k+1}*

Corrigé

On a $\dfrac{dv(t)}{dt} \simeq \dfrac{v_{k+1} - v_k}{h}$. En conséquences, $m \cdot \dot{v}(t) + c \cdot v(t) + k \cdot x(t) = f(t)$ peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$m \cdot \frac{v_{k+1} - v_k}{h} + c \cdot v_k + k \cdot x_k = f_k \Longleftrightarrow m \cdot v_{k+1} = f_k h - kh \cdot x_k - ch \cdot v_k + v_k \Longleftrightarrow v_{k+1} = \frac{h}{m} f_k - \frac{kh}{m} x_k + \frac{1 - ch}{m} v_k$$