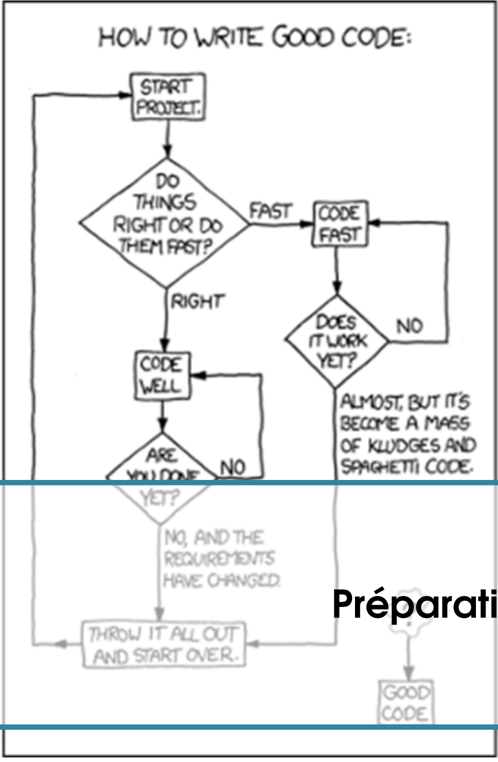
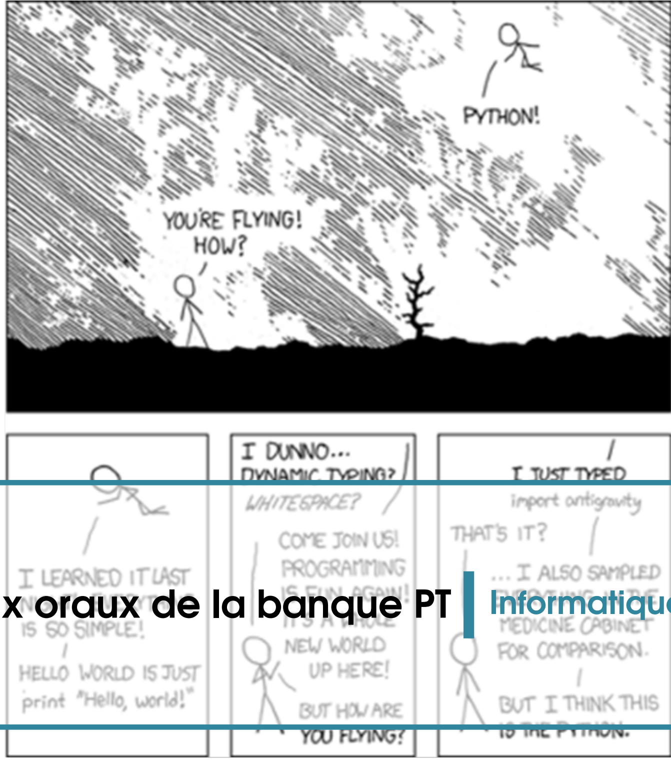




Oral

PT – PT ⋆

Préparation aux oraux de la banque PT | Informatique

Exercices

Préparation aux oraux de la banque PT
Épreuve de « Mathématique et Algorithmique »

Xavier Pessoles
D'après Banque PT
PT – PT ⋆

Exercice 1 – Arithmétique

1. Soit l'entier $n = 1234$. Quel est le quotient, noté q, dans la division euclidienne de n par 10 ? Quel est le reste ? Que se passe-t-il si on recommence la division par 10 à partir de q ?
2. Écrire la suite d'instructions calculant la somme des cubes des chiffres de l'entier 1234.
3. Écrire une fonction `somcube`, d'argument `n`, renvoyant la somme des cubes des chiffres du nombre entier `n`.
4. Trouver tous les nombres entiers inférieurs à 1000 égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.
5. En modifiant les instructions de la fonction `somcube`, écrire une fonction `somcube2` qui convertit l'entier `n` en une chaîne de caractères permettant ainsi la récupération de ses chiffres sous forme de caractères. Cette nouvelle fonction renvoie toujours la somme des cubes des chiffres de l'entier `n`.

Exercice 2 – Intégration

On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction donnée par des points dont les coordonnées sont situées dans un fichier.

1. Le fichier `ex_01.txt`, situé dans le sous-répertoire `data` du répertoire de travail, contient une quinzaine de lignes selon le modèle suivant :

```
0.0;1.00988282142
0.1;1.07221264497
```

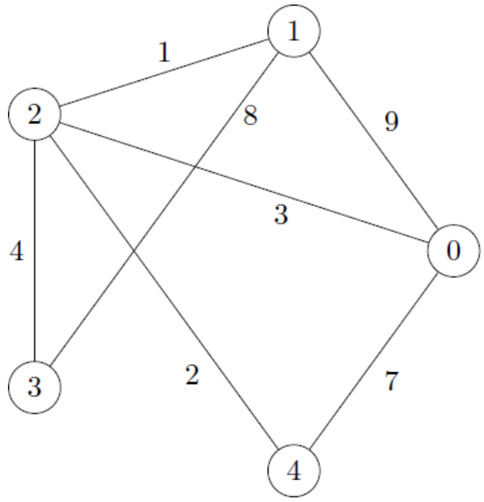
   Chaque ligne contient deux valeurs flottantes séparées par un point-virgule, représentant respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point. Les points sont ordonnés par abscisses croissantes. Ouvrir le fichier en lecture, le lire et construire la liste `LX` des abscisses et la liste `LY` des ordonnées contenues dans ce fichier.
2. Représenter les points sur une figure.
3. Les points précédents sont situés sur la courbe représentative d'une fonction `f`. On souhaite déterminer une valeur approchée de l'intégrale `I` de cette fonction sur le segment où elle est définie. Écrire une fonction `trapeze`, d'arguments deux listes `y` et `x` de même longueur `n`, renvoyant :

$$\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i-1})\frac{y_i + y_{i-1}}{2}.$$

   `trapeze(LY,LX)` renvoie donc une valeur approchée de l'intégrale I par la méthode des trapèzes.
4. En utilisant la méthode d'intégration numérique `trapz` de la sous-bibliothèque `scipy.integrate` du langage Python ou la méthode `inttrap` du logiciel Scilab, retrouver la valeur approchée de l'intégrale I.

Exercice 3

On considère le graphe `G` suivant, où le nombre situé sur l'arête joignant deux sommets est leur distance, supposée entière :



1. Construire la matrice $\left(M_{ij}\right)_{0\leq i,j\leq 4}$, matrice de distances du graphe `G`, définie par :
   « pour tous les indices i, j, M_{ij} représente la distance entre les sommets i et j, ou encore la longueur de l'arête reliant les sommets i et j ».
   On convient que, lorsque les sommets ne sont pas reliés, cette distance vaut -1. La distance du sommet i à lui-même est, bien sûr, égale à 0.
2. Écrire une suite d'instructions permettant de dresser à partir de la matrice `M` la liste des voisins du sommet 4.
3. Écrire une fonction `voisins`, d'argument un sommet i, renvoyant la liste des voisins du sommet i.
4. Écrire une fonction `degre`, d'argument un sommet i, renvoyant le nombre des voisins du sommet i, c'est-à-dire le nombre d'arêtes issues de i.
5. Écrire une fonction `longueur`, d'argument une liste `L` de sommets de `G`, renvoyant la longueur du trajet d'écrit par cette liste `L`, c'est-à-dire la somme des longueurs des arêtes empruntées. Si le trajet n'est pas possible, la fonction renverra -1.

Exercice 4 – Gestion de liste

Soit un entier naturel n non nul et une liste `t` de longueur n dont les termes valent 0 ou 1. Le but de cet exercice est de trouver le nombre maximal de 0 contigus dans `t` (c'est-à-dire figurant dans des cases consécutives). Par exemple, le nombre maximal de zéros contigus de la liste `t1` suivante vaut 4 :

`i`	0	1	2	3	4	5	6	7
`t1[i]`	0	1	1	1	0	0	0	1

`i`	8	9	10	11	12	13	14
`t1[i]`	0	1	1	0	0	0	0

1. Écrire une fonction nombreZeros(t,i), prenant en paramètres une liste t, de longueur n, et un indice i compris entre 0 et $n-1$, et renvoyant :

$$\begin{cases} 0, \text{ si } t[i] = 1 \\ \text{le nombre de zéros consécutifs dans t} \\ \text{à partir de t[i] inclus, si t[i]} = 0. \end{cases}$$

Par exemple, les appels `nombreZeros(t1,4)`, `nombreZeros(t1,1)` et `nombreZeros(t1,8)` renvoient respectivement les valeurs 3, 0 et 1.

2. Comment obtenir le nombre maximal de zéros contigus d'une liste `t` connaissant la liste des `nombreZeros(t,i)` pour $0 \leq i \leq n-1$? En déduire une fonction `nombreZerosMax(t)`, de paramètre `t`, renvoyant le nombre maximal de 0 contigus d'une liste `t` non vide. On utilisera la fonction `nombreZeros`.
3. Quelle est la complexité de la fonction `nombreZerosMax(t)` construite à la question précédente ?
4. Trouver un moyen simple, toujours en utilisant la fonction `nombreZeros`, d'obtenir un algorithme plus performant.

Exercice 5 – Probabilités

Soient n un entier naturel strictement positif et p un réel compris entre 0 et 1. On considère X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur un espace probabilisé donné. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ et Y suit une loi binomiale de paramètres (n, p).

1. Définir une fonction `Px`, d'arguments k, n et p, renvoyant la valeur de $P(X=k)$. $k!$ (factorielle k) s'obtient par `factorial(k)` en Python (bibliothèque math) et `prod(1 : k)` en Scilab. Déterminer, pour $n = 30$ et $p = 0,1$, la liste des valeurs de $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq 30$.
2. Définir une fonction `Py`, d'arguments k, n et p, renvoyant la valeur de $P(Y=k)$. On pourra utiliser `comb` de la sous-bibliothèque `scipy.misc` en Python et `binomial` en Scilab.
   Déterminer, pour $n = 30$ et $p = 0,1$, la liste des valeurs de $P(Y=k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq 30$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On rappelle que, sous certaines conditions sur n et p, la probabilité $P(Y = k)$ peut être approchée par $P(X=k)$. Déterminer une fonction `Ecart` d'arguments n et p, renvoyant le plus grand des nombres $|P(Y=k) - P(X=k)|$, pour $0 \leq k \leq n$.
4. Soit e un réel strictement positif. Déterminer une fonction `N`, d'arguments e et p, renvoyant le plus petit entier n tel que `Ecart(n, p)` soit inférieur ou égal à e.
5. Faire l'application numérique dans les quatre cas suivants :
   - $p = 0,075$ avec $e = 0,008$ et $e = 0,005$;
   - $p = 0,1$ avec $e = 0,008$ et $e = 0,005$. Interpréter le dernier résultat.

Exercice 6 – $f(x) = 0$

On considère la fonction g définie sur $[0, 2[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pour } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

1. Définir la fonction g. Tracer sa courbe représentative sur $[0, 2[$, c'est-à-dire la ligne brisée reliant les points $(x, g(x))$ pour x variant de 0 à 1,99 avec un pas de 0,01.
2. Définir une fonction f donnée de manière récursive sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x} f(x-2) & \text{pour } x \geq 2 \end{cases}$$

3. Tracer la courbe représentative de f sur $[0, 6]$.
4. Écrire les instructions permettant de calculer, à 10^{-2} près, la plus petite valeur $\alpha > 0$ telle que $f(\alpha) > 4$.

Exercice 7 – Algorithmique

On considère le code Python de la fonction `d` suivante :

Python
```python
def d(n):
    L =[1]
    for nombre in range(2,n +1):
    if n%nombre == 0:
        L. append(nombre)
    return L
```

1. Quel est le résultat de l'appel `d(4)` ? Puis de l'appel `d(10)` ? Que fait la fonction `d` ?
2. Un diviseur non-trivial d'un entier `n` est un diviseur de `n` différent de 1 et de `n`. Écrire une fonction `DNT`, d'argument `n`, renvoyant la liste des diviseurs non-triviaux de l'entier `n`.
3. Écrire une fonction `sommeCarresDNT`, d'argument `n`, renvoyant la somme des carrés des diviseurs non-triviaux de l'entier `n`.
4. Écrire la suite des instructions permettant d'afficher tous les nombres entiers inférieurs à 1000 et égaux à la somme des carrés de leurs diviseurs non-triviaux. Que peut-on conjecturer ?

Exercice 8 – Chiffrer – déchiffrer

Soit n un entier vérifiant $n \leq 26$. On souhaite écrire un programme qui code un mot en décalant chaque lettre de l'alphabet de n lettres. Par exemple pour $n = 3$, le décalage sera le suivant :

Avant décalage	a	b	c	...	x	y	z
Après décalage	d	e	f	...	a	b	c

Le mot `oralensam` devient ainsi `rudohqvdp`.

1. Définir une chaîne de caractères contenant toutes les lettres dans l'ordre alphabétique (caractères en minuscule).
2. Écrire une fonction `decalage`, d'argument un entier `n`, renvoyant une chaîne de caractères contenant toutes les lettres dans l'ordre alphabétique, décalées de `n`, comme indiqué ci-dessus.
3. Écrire une fonction `indices`, d'arguments un caractère `x` et une chaîne de caractères `phrase`, renvoyant une liste contenant les indices de `x` dans `phrase` si `x` est une lettre de phrase et une liste vide sinon.
4. Écrire une fonction codage d'arguments un entier `n` et une chaîne de caractères `phrase`, renvoyant `phrase` codé avec un décalage de `n` lettres.
5. Comment peut-on décoder un mot codé ?

Exercice 9 – Suite

On pose $M = 20$ et $m = 10$. À un nombre c quelconque, on associe la suite $(u_n)_n \geq 0$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + c$ pour $n \geq 0$.

S'il existe, on note k le plus petit entier tel que l'on ait $0 \leq k \leq m$ et $|u_k| > M$. On définit alors la fonction f par

$$f : c \mapsto \begin{cases} k \text{ s'il existe} \\ m+1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Donner le code définissant la fonction f.
2. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f sur $[-2;2]$, en créant une liste `LX` de 401 valeurs équiréparties entre -2 et 2 inclus et en utilisant les fonctions `plot` et show de la sous- bibliothèque `matplotlib.pyplot`.
3. Construire le tableau des valeurs $f(x+iy)$ où x prend 101 valeurs comprises entre -2 et 0,5 et y prend 101 valeurs entre -1,1 et 1,1. *On rappelle que le nombre complexe i est représenté par* $1j$. *Par exemple, le complexe* $1+2i$ *est représenté par* $1+2j$.
4. Tracer l'image que code ce tableau. On pourra utiliser les fonctions `imshow` et `show` de la sous- bibliothèque `matplotlib.pyplot`. Quels paramètres peut-on modifier pour obtenir une meilleure résolution ?

Exercice 10 – Calcul matriciel

Dans cet exercice, avec Python on pourra utiliser la fonction `array` *de la bibliothèque* `numpy`, *ainsi que la fonction* `eig` *de la sous-bibliothèque* `numpy.linalg`. *Avec Scilab, on utilisera* `spec`.

1. Créer deux matrices $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et les faire afficher.
2. Créer une fonction `test`, d'argument M, renvoyant la valeur `n` si M est une matrice carrée d'ordre `n` (entier naturel non nul) et zéro dans tous les autres cas. Vérifier la fonction test sur R et sur S.
3. Le fichier `ex_006.txt`, situé dans le sous-répertoire `data` du répertoire de travail, contient un tableau de valeurs flottantes. Lire ce tableau dans le fichier et vérifier qu'il correspond bien à une matrice carrée d'ordre 5 que l'on désignera par `M1`.
4. Déterminer les valeurs propres de la matrice `M1`.
5. Créer une fonction `dansIntervalle`, d'arguments une liste L et deux réels a et b, renvoyant la valeur `True` si tous les éléments de la liste L sont dans l'intervalle $[a,b]$ et `False` sinon. Vérifier que toutes les valeurs propres de la matrice `M1` sont dans l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 11 – Tri de liste

Soit N un entier naturel non nul. On cherche à trier une liste L d'entiers naturels strictement inférieurs à N.

1. Écrire une fonction comptage, d'arguments L et N, renvoyant une liste P dont le k-ième élément désigne le nombre d'occurences de l'entier k dans la liste L.
2. Utiliser la liste P pour en déduire une fonction `tri`, d'arguments L et N, renvoyant la liste L triée dans l'ordre croissant.
3. Tester la fonction `tri` sur une liste de 20 entiers inférieurs ou égaux à 5, tirés aléatoirement.
4. Quelle est la complexité temporelle de cet algorithme ? La comparer à la complexité d'un tri par insertion ou d'un tri fusion.

Exercice 12 – Courbes paramétrées

1. Deux paramètres b et w valant respectivement 0,5 et 6,0, définir trois fonctions d'une variable t renvoyant des couples :

$$\begin{cases} p : t \mapsto & (\cos(t) + b\cos(wt), \sin(t) + b\sin(wt)) \\ v : t \mapsto & (-\sin(t) - bw\sin(wt), \\ & \quad \cos(t) + bw\cos(wt)) \\ a : t \mapsto & \left(-\cos(t) - bw^2\cos(wt), \right. \\ & \quad \left. -\sin(t) - bw^2\sin(wt)\right) \end{cases}$$

   Vérifier ces fonctions sur un exemple.
   $p(t) = (x(t), y(t))$ désigne la position dans le plan d'une masse ponctuelle mobile au cours du temps, $v(t) = (x'(t), y'(t))$, sa vitesse, et $a(t) = (x''(t), y''(t))$, son accélération.
2. Construire la liste `L` des points $p(t)$, pour t variant de $-\pi$ à π avec un pas de discrétisation δt vérifiant $\delta t = 0,01\,\pi$.
3. Faire tracer dans le plan muni d'un repère orthonormal la ligne polygonale reliant les points $p(t)$ de la liste `L`.
4. Définir puis tester la fonction c d'une variable t qui renvoie le couple des coordonnées du centre de courbure donnée par :

$$c(t) = \left(x(t) - d\,y'(t), y(t) + d\,x'(t)\right)$$

   où

$$d = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}.$$

5. Rajouter sur le graphique précédent la ligne décrite par les centres de courbure, avec la même discrétisation en temps.
6. Calculer la longueur de la ligne polygonale reliant les points $p(t)$, pour différents pas de discrétisation δt. Observer l'évolution de cette longueur lorsque δt diminue.

Exercice 1 – Arithmétique – Corrigé

```
# Question 1
n = 1234
q = n//10
r = n%q

# r contient le nombre d'unités de n
```

```
# Question 2
s=0
while n!=0:
    q=n//10
    r = n%10
    #print(r)
    s=s+r**3
    n=q
```

```
# Question 3
def somcube(n):
    """
    Entrées :
     * n, int : nombre
    Sortie :
     * s, int : somme des cubes du chiffre n
    """
    s=0
    while n!=0:
        q=n//10
        r = n%10
        s=s+r**3
        n=q
    return s
```

```
# Question 4
res = []
for i in range (10001):
    if i == somcube(i):
        res.append(i)
```

```
# Question 5
def somcube2(n):
    """
    Entrées :
     * n, int : nombre
    Sortie :
     * s, int : somme des cubes du chiffre n
    """
    nombre=str(n)
    s=0
    for chiffre in nombre :
        s = s+int(chiffre)**3
    return s

print(somcube2(1234))
```

Exercice 2 – Intégration – Corrigé

```
# Question 1
# ==========
# Le répertoire courant est Exercice_02.
# Le sous-répertoire data contient le
# fichier ex_01.txt.

# On ouvre le fichier en lecture)
fid = open("data\ex_01.txt")

# On charge le fichier dans une liste.
# Chaque élément de la liste correspond à
# chaque ligne sous forme de chaîne de caractère.
file = fid.readlines()
# On ferme le fichier
fid.close()

LX=[]
LY=[]
for ligne in file :
    ligne = ligne.split(';')
    LX.append(float(ligne[0]))
    LY.append(float(ligne[1]))
```

```
# Question 2
# ==========
# Ne pas oublier de charger préalablement
# import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(LX,LY)
plt.show()
```

```
# Question 3
# ==========
def trapeze(x,y):
    res = 0
    for i in range(1,len(LX)):
        res = res + (LX[i]-LX[i-1])*0.5*(LY[i]+LY[i-1])
    return res
print(trapeze(LX,LY))
```

```
# Question 4
# ==========
from scipy.integrate import trapz
# Attention àl'ordre des arguments dans
# la fonction trapz : les_y puis les_x
# Aprés l'import, help(trapz) permet d'avoir
# de l'aide sur la fonction.
print(trapz(LY,LX))
```

Oral