

# DEVOIR SURVEILLÉ D'INFORMATIQUE 5 – 1 HEURE

## SIMULATION DE VIBRATIONS – CCP PSI – ADAPTÉ DU SUJET 0

### 1 Mise en situation

### 2 Résolution d'une équation différentielle

**Question 1** Réécrire l'équation différentielle sous forme d'un système d'équations en fonction de  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  et  $\dot{v}(t)$ .

Corrigé

On a donc :

$$\begin{cases} v(t) = \dot{x}(t) \\ m \cdot \dot{v}(t) + c \cdot v(t) + k \cdot x(t) = f(t) \end{cases}$$

**Question 2** En utilisant un schéma d'Euler implicite et l'équation  $v(t) = \dot{x}(t)$  exprimer la suite  $x_n$  en fonction de  $x_{n-1}$ ,  $v_n$  et du pas de calcul noté  $h$ .

Corrigé

$$\text{On a } \frac{dx(t)}{dt} \simeq \frac{x_n - x_{n-1}}{h}. \text{ On a donc } v_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{h} \iff x_n = h \cdot v_n + x_{n-1}.$$

**Question 3** En utilisant un schéma d'Euler implicite exprimer  $v_n$  en fonction de  $v_{n-1}$ ,  $x_n$ ,  $x_{n-1}$ ,  $f_n$ ,  $h$ ,  $k$ ,  $c$  et  $m$ .

Corrigé

$$\text{On a } \frac{dv(t)}{dt} \simeq \frac{v_n - v_{n-1}}{h}. \text{ On a donc } \dot{v}_n = \frac{v_n - v_{n-1}}{h} \iff v_n = h \cdot \dot{v}_n + v_{n-1}.$$

$$m \cdot \frac{v_n - v_{n-1}}{h} + c \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{h} + k \cdot x_n = f_n \iff m \cdot (v_n - v_{n-1}) + c \cdot (x_n - x_{n-1}) + k h \cdot x_n = h f_n$$

On a donc :

$$m v_n = h f_n - (k h + c) \cdot x_n + m v_{n-1} + c x_{n-1}$$

**Question 4** En déduire que la suite  $x_n$  peut se mettre sous la forme suivante :  $x_n(m + c h + k h^2) - x_{n-1}(2m + c h) + m x_{n-2} = h^2 f_n$ .

Corrigé

D'après la question 2 on a :

$$v_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{h} \quad \text{et} \quad v_{n-1} = \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{h}$$

En utilisant le résultat de la question 3, on a :

$$m \frac{x_n - x_{n-1}}{h} = h f_n - (k h + c) \cdot x_n + m \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{h} + c x_{n-1}$$

$$\iff m(x_n - x_{n-1}) = h^2 f_n - h(k h + c) \cdot x_n + m(x_{n-1} - x_{n-2}) + c h x_{n-1}$$

Corrigé

$$\Leftrightarrow m(x_n - x_{n-1}) + h(kh + c) \cdot x_n - m(x_{n-1} - x_{n-2}) - chx_{n-1} = h^2 f_n$$

$$\Leftrightarrow x_n (m + kh^2 + ch) - x_{n-1} (2m + ch) + mx_{n-2} = h^2 f_n$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{1}{m + kh^2 + ch} (h^2 f_n + x_{n-1} (2m + ch) - mx_{n-2})$$

**Question 5** Implémenter en Python le fonction `f_omega` permettant de créer une liste contenant l'ensemble des valeurs prises par la fonction  $f_n$ . On utilisera une boucle `while`. Les spécifications de la fonction sont les suivantes :

Corrigé



```
def f_omega(Tsimu,h,fmax,fsign):
    """
    Entrées :
        * Tsimu (flt) : temps de la simulation en seconde
        * h (flt) : pas de temps de a simulation
        * fmax (flt) : amplitude du signal (en Newton)
        * fsign (flt) : fréquence du signal (en Hertz)
    Sortie :
        * F (list) : liste des valeurs de la fonction
        f_n (t)= fmax sin (omega *t)
    """
    omega = 2*math.pi*fsign
    t=0
    F = []
    while t<Tsimu :
        F.append(fmax*math.sin(omega*t))
        t=t+h
    return F
```

**Question 6** En utilisant une boucle `while`, générer, en Python, les listes `T` et `X` contenant respectivement le temps de simulation et le déplacement de la masse mobile.

Corrigé

```
T=[0,h]
X=[0,0]
t=2*h
i=2
while t<Tsimu:
    T.append(t)
    X.append(alpha*F[i]+beta*X[i-1] +gamma*X(i-2))
    i=i+1
    t = t+h
```

### 3 Résolution du problème général

**Question 7** En reprenant les équations (1), (2) et (3) déterminer les matrices  $M$ ,  $C$ ,  $K$  et  $F$ .

Corrigé

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2c & -c & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -c & 2c & -c & \ddots & & & 0 \\ 0 & -c & 2c & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2c & -c & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & -c & 2c & -c \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c & 2c \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -k & 2k & -k & \ddots & & & 0 \\ 0 & -k & 2k & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2k & -k & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & -k & 2k & -k \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -k & 2k \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

**Question 8** L'équation  $H \cdot X_k = G_k$  peut être résolue grâce à la méthode du pivot de Gauss. Donner les étapes de cette méthode ainsi que l'objectif de chacune d'entre elles. Quelle est la complexité algorithmique de la résolution d'une équation en utilisant le pivot de Gauss ?

Corrigé

Voir cours. Complexité cubique.

**Question 9** Expliquer en quoi cet algorithme permet de résoudre le système  $H \cdot X_n = G_n$  ? Quelle est la complexité de cet algorithme ?

Corrigé

La matrice étant tridiagonale, la phase d'échelonnage et de remontée sont simplifiées.

### 4 Détermination de l'énergie dissipée

**Question 10** Expliquez le but des blocs constitués des lignes 4 à 8 puis des lignes 9 à 14. La fonction proposée permet-elle de calculer la puissance ? Si non, que faudrait-il modifier ?

Corrigé

La puissance devant être calculée à partir de la vitesse, les lignes 4 à 8 permettent de calculer la vitesse par différence de position sur un temps  $h$ . La vitesse d'un nœud  $j$  à l'instant  $i$  est donc calculée par  $\frac{U[i][j] - U[i-1][j]}{h}$ .

Les lignes 9 à 14 permettent de calculer la puissance, mais ne prennent pas en compte le cas où  $i = 0$ . Il faut donc que le range varie entre 0 et  $p$  et traiter le cas où  $p = 0$  à l'aide d'un if.

**Question 11** La programme précédent retourne la liste des puissances dissipées à chaque temps de calcul. Calculer l'énergie dissipée en utilisant la méthode des trapèzes. Vous réaliserez un schéma pour illustrer la méthode. On rappelle que le pas de calcul est noté  $h$ .

Corrigé