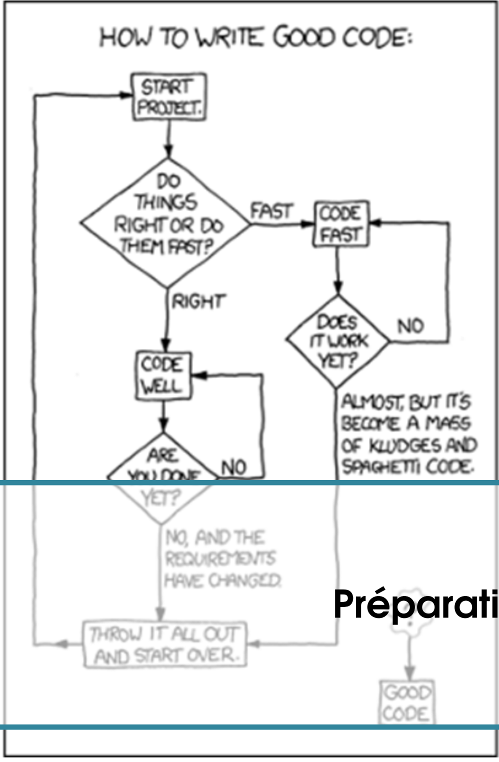
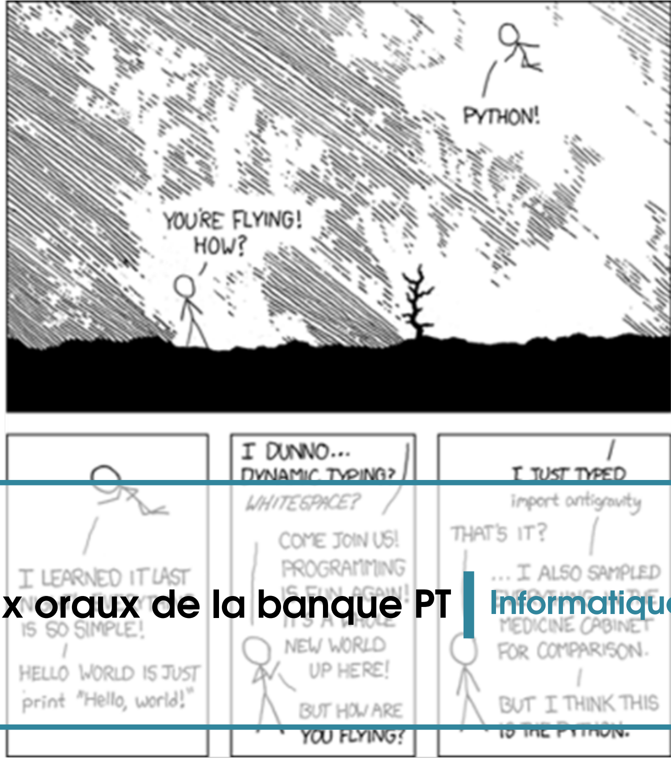




http://xkcd.com/353/
http://xkcd.com/844/

Oral

PT – PT⋆

Préparation aux oraux de la banque PT | Informatique

Exercices

Préparation aux oraux de la banque PT
Épreuve de « Mathématique et Algorithmique »

Xavier Pessoles
D'après Banque PT
PT – PT ⋆

Exercice 1 – Arithmétique

1. Soit l'entier $n = 1234$. Quel est le quotient, noté q, dans la division euclidienne de n par 10 ? Quel est le reste ? Que se passe-t-il si on recommence la division par 10 à partir de q ?
2. Écrire la suite d'instructions calculant la somme des cubes des chiffres de l'entier 1234.
3. Écrire une fonction `somcube`, d'argument `n`, renvoyant la somme des cubes des chiffres du nombre entier `n`.
4. Trouver tous les nombres entiers inférieurs à 1000 égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.
5. En modifiant les instructions de la fonction `somcube`, écrire une fonction `somcube2` qui convertit l'entier `n` en une chaîne de caractères permettant ainsi la récupération de ses chiffres sous forme de caractères. Cette nouvelle fonction renvoie toujours la somme des cubes des chiffres de l'entier `n`.

Exercice 2 – Intégration

On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction donnée par des points dont les coordonnées sont situées dans un fichier.

1. Le fichier `ex_01.txt`, situé dans le sous-répertoire `data` du répertoire de travail, contient une quinzaine de lignes selon le modèle suivant :

```
0.0;1.00988282142
0.1;1.07221264497
```

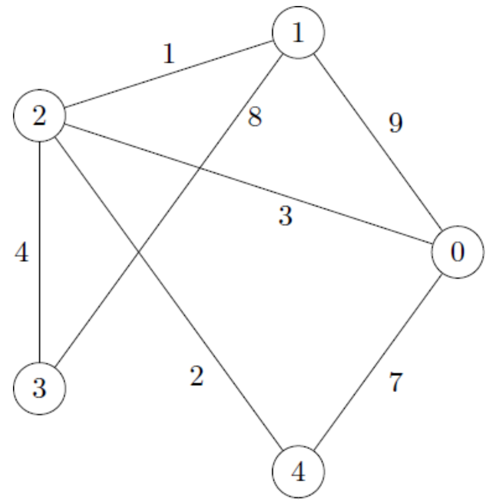
   Chaque ligne contient deux valeurs flottantes séparées par un point-virgule, représentant respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point. Les points sont ordonnés par abscisses croissantes. Ouvrir le fichier en lecture, le lire et construire la liste `LX` des abscisses et la liste `LY` des ordonnées contenues dans ce fichier.
2. Représenter les points sur une figure.
3. Les points précédents sont situés sur la courbe représentative d'une fonction `f`. On souhaite déterminer une valeur approchée de l'intégrale `I` de cette fonction sur le segment où elle est définie. Écrire une fonction `trapeze`, d'arguments deux listes `y` et `x` de même longueur `n`, renvoyant :

$$\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i-1})\frac{y_i + y_{i-1}}{2}.$$

   `trapeze(LY,LX)` renvoie donc une valeur approchée de l'intégrale I par la méthode des trapèzes.
4. En utilisant la méthode d'intégration numérique `trapz` de la sous-bibliothèque `scipy.integrate` du langage Python ou la méthode `inttrap` du logiciel Scilab, retrouver la valeur approchée de l'intégrale I.

Exercice 3

On considère le graphe `G` suivant, où le nombre situé sur l'arête joignant deux sommets est leur distance, supposée entière :



1. Construire la matrice $\left(M_{ij}\right)_{0\leq i,j\leq 4}$, matrice de distances du graphe `G`, définie par :
   « pour tous les indices i, j, M_{ij} représente la distance entre les sommets i et j, ou encore la longueur de l'arête reliant les sommets i et j ».
   On convient que, lorsque les sommets ne sont pas reliés, cette distance vaut -1. La distance du sommet i à lui-même est, bien sûr, égale à 0.
2. Écrire une suite d'instructions permettant de dresser à partir de la matrice `M` la liste des voisins du sommet 4.
3. Écrire une fonction `voisins`, d'argument un sommet i, renvoyant la liste des voisins du sommet i.
4. Écrire une fonction `degre`, d'argument un sommet i, renvoyant le nombre des voisins du sommet i, c'est-à-dire le nombre d'arêtes issues de i.
5. Écrire une fonction `longueur`, d'argument une liste `L` de sommets de `G`, renvoyant la longueur du trajet d'écrit par cette liste `L`, c'est-à-dire la somme des longueurs des arêtes empruntées. Si le trajet n'est pas possible, la fonction renverra -1.

Exercice 4 – Gestion de liste

Soit un entier naturel n non nul et une liste `t` de longueur n dont les termes valent 0 ou 1. Le but de cet exercice est de trouver le nombre maximal de 0 contigus dans `t` (c'est-à-dire figurant dans des cases consécutives). Par exemple, le nombre maximal de zéros contigus de la liste `t1` suivante vaut 4 :

i	0	1	2	3	4	5	6	7
t1[i]	0	1	1	1	0	0	0	1

i	8	9	10	11	12	13	14
t1[i]	0	1	1	0	0	0	0

1. Écrire une fonction `nombreZeros(t,i)`, prenant en paramètres une liste `t`, de longueur n, et un indice i compris entre 0 et $n-1$, et renvoyant :

$$\begin{cases} 0, \text{ si } t[i] = 1 \\ \text{le nombre de zéros consécutifs dans t} \\ \text{à partir de t[i] inclus, si t[i]} = 0. \end{cases}$$

Par exemple, les appels `nombreZeros(t1,4)`, `nombreZeros(t1,1)` et `nombreZeros(t1,8)` renvoient respectivement les valeurs 3, 0 et 1.

2. Comment obtenir le nombre maximal de zéros contigus d'une liste `t` connaissant la liste des `nombreZeros(t,i)` pour $0 \leq i \leq n-1$? En déduire une fonction `nombreZerosMax(t)`, de paramètre `t`, renvoyant le nombre maximal de 0 contigus d'une liste `t` non vide. On utilisera la fonction `nombreZeros`.
3. Quelle est la complexité de la fonction `nombreZerosMax(t)` construite à la question précédente ?
4. Trouver un moyen simple, toujours en utilisant la fonction `nombreZeros`, d'obtenir un algorithme plus performant.

Exercice 5 – Probabilités

Soient n un entier naturel strictement positif et p un réel compris entre 0 et 1. On considère X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur un espace probabilisé donné. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ et Y suit une loi binomiale de paramètres (n, p).

1. Définir une fonction `Px`, d'arguments k, n et p, renvoyant la valeur de $P(X=k)$. $k!$ (factorielle k) s'obtient par `factorial(k)` en Python (bibliothèque math) et `prod(1 : k)` en Scilab. Déterminer, pour $n = 30$ et $p = 0,1$, la liste des valeurs de $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq 30$.
2. Définir une fonction `Py`, d'arguments k, n et p, renvoyant la valeur de $P(Y=k)$. On pourra utiliser `comb` de la sous-bibliothèque `scipy.misc` en Python et `binomial` en Scilab.
   Déterminer, pour $n = 30$ et $p = 0,1$, la liste des valeurs de $P(Y=k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq 30$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On rappelle que, sous certaines conditions sur n et p, la probabilité $P(Y = k)$ peut être approchée par $P(X=k)$. Déterminer une fonction `Ecart` d'arguments n et p, renvoyant le plus grand des nombres $|P(Y=k) - P(X=k)|$, pour $0 \leq k \leq n$.
4. Soit e un réel strictement positif. Déterminer une fonction `N`, d'arguments e et p, renvoyant le plus petit entier n tel que `Ecart(n, p)` soit inférieur ou égal à e.
5. Faire l'application numérique dans les quatre cas suivants :
   - $p = 0,075$ avec $e = 0,008$ et $e = 0,005$;
   - $p = 0,1$ avec $e = 0,008$ et $e = 0,005$. Interpréter le dernier résultat.

Exercice 6 – $f(x) = 0$

On considère la fonction g définie sur $[0, 2[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pour } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

1. Définir la fonction g. Tracer sa courbe représentative sur $[0, 2[$, c'est-à-dire la ligne brisée reliant les points $(x, g(x))$ pour x variant de 0 à 1,99 avec un pas de 0,01.
2. Définir une fonction f donnée de manière récursive sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x} f(x-2) & \text{pour } x \geq 2 \end{cases}$$

3. Tracer la courbe représentative de f sur $[0, 6]$.
4. Écrire les instructions permettant de calculer, à 10^{-2} près, la plus petite valeur $\alpha > 0$ telle que $f(\alpha) > 4$.

Exercice 7 – Algorithmique

On considère le code Python de la fonction `d` suivante :

Python
```python
def d(n):
    L =[1]
    for nombre in range(2,n+1):
        if n%nombre == 0:
            L.append(nombre)
    return L
```

1. Quel est le résultat de l'appel `d(4)` ? Puis de l'appel `d(10)` ? Que fait la fonction `d` ?
2. Un diviseur non-trivial d'un entier `n` est un diviseur de `n` différent de 1 et de `n`. Écrire une fonction `DNT`, d'argument `n`, renvoyant la liste des diviseurs non-triviaux de l'entier `n`.
3. Écrire une fonction `sommeCarresDNT`, d'argument `n`, renvoyant la somme des carrés des diviseurs non-triviaux de l'entier `n`.
4. Écrire la suite des instructions permettant d'afficher tous les nombres entiers inférieurs à 1000 et égaux à la somme des carrés de leurs diviseurs non-triviaux. Que peut-on conjecturer ?

Exercice 8 – Chiffrer – déchiffrer

Soit n un entier vérifiant $n \leq 26$. On souhaite écrire un programme qui code un mot en décalant chaque lettre de l'alphabet de n lettres. Par exemple pour $n = 3$, le décalage sera le suivant :

Avant décalage	a	b	c	...	x	y	z
Après décalage	d	e	f	...	a	b	c

Le mot `oralensam` devient ainsi `rudohqvdp`.

1. Définir une chaîne de caractères contenant toutes les lettres dans l'ordre alphabétique (caractères en minuscule).
2. Écrire une fonction `decalage`, d'argument un entier `n`, renvoyant une chaîne de caractères contenant toutes les lettres dans l'ordre alphabétique, décalées de `n`, comme indiqué ci-dessus.
3. Écrire une fonction `indices`, d'arguments un caractère `x` et une chaîne de caractères `phrase`, renvoyant une liste contenant les indices de `x` dans `phrase` si `x` est une lettre de phrase et une liste vide sinon.
4. Écrire une fonction codage d'arguments un entier `n` et une chaîne de caractères `phrase`, renvoyant `phrase` codé avec un décalage de `n` lettres.
5. Comment peut-on décoder un mot codé ?

Oral

Exercice 9 – Fractale de Mandelbrot

On pose $M = 20$ et $m = 10$. À un nombre c quelconque, on associe la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + c$ pour $n \geq 0$.

S'il existe, on note k le plus petit entier tel que l'on ait $0 \leq k \leq m$ et $|u_k| > M$. On définit alors la fonction f par

$$f : c \mapsto \begin{cases} k \text{ s'il existe} \\ m+1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Donner le code définissant la fonction f.
2. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f sur $[-2;2]$, en créant une liste `LX` de 401 valeurs équiréparties entre -2 et 2 inclus et en utilisant les fonctions `plot` et show de la sous-bibliothèque `matplotlib.pyplot`.
3. Construire le tableau des valeurs $f(x+iy)$ où x prend 101 valeurs comprises entre -2 et 0,5 et y prend 101 valeurs entre -1,1 et 1,1. *On rappelle que le nombre complexe i est représenté par $1j$. Par exemple, le complexe $1+2i$ est représenté par $1+2j$.*
4. Tracer l'image que code ce tableau. On pourra utiliser les fonctions `imshow` et `show` de la sous- bibliothèque `matplotlib.pyplot`. Quels paramètres peut-on modifier pour obtenir une meilleure résolution ?

Exercice 10 – Calcul matriciel

Dans cet exercice, avec Python on pourra utiliser la fonction `array` de la bibliothèque `numpy`, ainsi que la fonction `eig` de la sous-bibliothèque `numpy.linalg`. Avec Scilab, on utilisera `spec`.

1. Créer deux matrices $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et les faire afficher.
2. Créer une fonction `test`, d'argument M, renvoyant la valeur `n` si M est une matrice carrée d'ordre `n` (entier naturel non nul) et zéro dans tous les autres cas. Vérifier la fonction test sur R et sur S.
3. Le fichier `ex_006.txt`, situé dans le sous-répertoire `data` du répertoire de travail, contient un tableau de valeurs flottantes. Lire ce tableau dans le fichier et vérifier qu'il correspond bien à une matrice carrée d'ordre 5 que l'on désignera par `M1`.
4. Déterminer les valeurs propres de la matrice `M1`.
5. Créer une fonction `dansIntervalle`, d'arguments une liste L et deux réels a et b, renvoyant la valeur `True` si tous les éléments de la liste L sont dans l'intervalle $[a,b]$ et `False` sinon. Vérifier que toutes les valeurs propres de la matrice `M1` sont dans l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 11 – Tri de liste

Soit N un entier naturel non nul. On cherche à trier une liste L d'entiers naturels strictement inférieurs à N.

1. Écrire une fonction comptage, d'arguments L et N, renvoyant une liste P dont le k-ième élément désigne le nombre d'occurences de l'entier k dans la liste L.
2. Utiliser la liste P pour en déduire une fonction `tri`, d'arguments L et N, renvoyant la liste L triée dans l'ordre croissant.
3. Tester la fonction `tri` sur une liste de 20 entiers inférieurs ou égaux à 5, tirés aléatoirement.
4. Quelle est la complexité temporelle de cet algorithme ? La comparer à la complexité d'un tri par insertion ou d'un tri fusion.

Exercice 12 – Courbes paramétrées

1. Deux paramètres b et w valant respectivement 0,5 et 6,0, définir trois fonctions d'une variable t renvoyant des couples :

$$\begin{cases} p : t \mapsto & (\cos(t)+b\cos(wt), \sin(t)+b\sin(wt)) \\ v : t \mapsto & (-\sin(t)-bw\sin(wt), \\ & \quad \cos(t)+bw\cos(wt)) \\ a : t \mapsto & (-\cos(t)-bw^2\cos(wt), \\ & \quad -\sin(t)-bw^2\sin(wt)) \end{cases}$$

   Vérifier ces fonctions sur un exemple.
   $p(t) = (x(t), y(t))$ désigne la position dans le plan d'une masse ponctuelle mobile au cours du temps, $v(t) = (x'(t), y'(t))$, sa vitesse, et $a(t) = (x''(t), y''(t))$, son accélération.
2. Construire la liste `L` des points $p(t)$, pour t variant de $-\pi$ à π avec un pas de discrétisation δt vérifiant $\delta t = 0,01\,\pi$.
3. Faire tracer dans le plan muni d'un repère orthonormal la ligne polygonale reliant les points $p(t)$ de la liste `L`.
4. Définir puis tester la fonction c d'une variable t qui renvoie le couple des coordonnées du centre de courbure donnée par :

$$c(t) = \big(x(t) - dy'(t), y(t) + dx'(t)\big)$$

   où

$$d = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}.$$

5. Rajouter sur le graphique précédent la ligne décrite par les centres de courbure, avec la même discrétisation en temps.
6. Calculer la longueur de la ligne polygonale reliant les points $p(t)$, pour différents pas de discrétisation δt. Observer l'évolution de cette longueur lorsque δt diminue.

Exercice 13 – Opérations sur les polynômes – 2.11.3 p.50

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Un polynôme $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{R}[X]$ de degré n est représenté dans cet exercice par le tableau $P = [a_0, ..., a_n]$.

1. Créer une fonction `affiche_poly` qui permet d'afficher un polynôme sous la forme $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$.

2. Créer une fonction `degre_poly` qui calcule le degré d'un polynôme.
3. Implémenter la somme, le produit et la multiplication par un scalaire comme des fonctions notées `add_poly`, `mul_poly` et `mul_sca_poly`.
4. Créer une fonction `prsc_poly` qui calcule le prduit scalaire canonique de deux polynômes.
5. Créer une fonction `deriv_poly` qui calcule la dérivée d'un polynôme.

Exercice 14 – Produits polynômes – 2.11.20 p.65

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Un polynôme $P=\sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{R}[X]$ de degré n est représenté dans cet exercice par le tableau $P=[a_0,...,a_n]$.

1. Créer une fonction `affiche_poly` qui permet d'afficher un polynôme sous la forme $P=\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$.
2. Créer une fonction `degre_poly` qui calcule le degré d'un polynôme.
3. Implémenter le produit de deux polynômes. On notera `mul_poly` cette fonction. Donner sa complexité.

On suppose désormais que $n=2^k=2m$. La méthode qui suit permet de calculer le produit de deux polynômes en utilisant le principe «diviser pour régner».

On pose $P=P_1+X^m P_2$ et $Q=Q_1+X^m Q_2$, où P_1 et Q_1 sont de degré strictement inférieur à m. Ainsi, $PQ=P_1Q_1+X^m(P_1Q_2+Q_1P_2)+X^n P_2Q_2$.

1. Calculer le produit de deux polynômes de degré strictement inférieur à n revient donc à calculer 4 produits de deux polynômes de degré inférieur à $\frac{n}{2}$. Implémenter cet algorithme en une fonction `mul_poly_div`. Quelle est sa complexité ? Qu'en conclure ?
2. Une autre méthode de calcul consiste à poser $R_1=P_1Q_1$, $R_2=P_2Q_2$ et $R_3=(P_1+P_2)(Q_1+Q_2)$. Expliciter PQ en fonction des polynômes R_1, R_2, R_3. En déduire un algorithme (appelé algorithme de Karatsuba) permettant le calcul de PQ que l'on implémentera en une fonction `mul_poly_kara`. Comparer la complexité de cet algorithme à celle des algorithmes des questions précédentes.
3. Que faire quand n n'est pas de la forme 2^k.

Exercice 15 – Courbes en polaires – 4.6.25 p.111

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère Γ_n en coordonnées polaires définie par :

$$\sigma_n(\theta)=\cos^3(n\theta)-\sin^3(n\theta).$$

1. Représenter la courbe Γ_0.
2. Représenter sur un même graphique les courbes Γ_j, pour $j\in[\![0,3]\!]$.

Exercice 16 – Fonction de Takagi – 4.6.26 p.112

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

La fonction de Takagi est définie sur $[0,1]$ par $T: x\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\left(2^k x\right)}{2^k}$, où $d(y)$ représente la distance de y à l'entier le plus proche. On peut montrer que cette fonction est continue sur $[0,1]$ mais nulle part dérivable.

1. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, majorer $\|T-T_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|T(x)-T_n(x)|$ où $T_n: x\mapsto \sum_{k=0}^{n}\frac{d\left(2^k x\right)}{2^k}$.
2. Représenter le graphe de cette fonction, appelé la courbe du blanc-manger.

Exercice 16 – Modèle logistique – 4.6.27 p.113

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Pour tout $a\in]0,3]$, on considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in\left[0,1+\frac{1}{a}\right]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}=(1+a(1-u_n))u_n$. Cette suite représente, à un facteur près, la population d'une espèce.

1. Pour $a=1$ et $u_0=0,5$, représenter graphiquement les 10 premiers termes de la suite.
2. On fixe $u_0=0,5$. Créer une procédure qui reçoit en arguments a_1, c, a_2 et permet de représenter les termes u_n pour $n\in[\![100,200]\!]$ et $a=a_1+jc$, $j\in[\![0,\lfloor\frac{a_2-a_1}{c}\rfloor]\!]$ (les points sont à tracer sont des points de coordonnées (a,u_n).
3. Exécuter cette procédure avec $a_1=2$, $c=0,005$, $a_2=3$ puis avec $a_1=2.84$, $c=0,0001$, $a_2=2,86$.

Exercice 17 – Enveloppe d'une famille de droites – 4.6.28 p.115

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Doit $(D_t)_{t\in I}$ une famille de droites du plan affine, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère, de sorte que la droite D_t a pour équation :

$$u(t)x+v(t)y+w(t)=0.$$

On suppose que les applications u, v, w sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et qu'elles ne s'annulent pas en même temps.

On cherche une courbe paramétrée $f: I\to\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $t\in I$,

- $f(t)\in D_t$;
- D_t est tangente à la courbe en $f(t)$.

Quand elle existe, cette courbe est appelée l'enveloppe de la famille de droits $(D_t)_{t\in I}$.

1. On note $f(t)=(x(t),y(t))$. Montrer que $(x(t),y(t))$ est solution du système :
$$\left\{\begin{array}{l} u(t)x(t)+v(t)y(t)=-w(t)\\ u'(t)x(t)+v'(t)y(t)=-w'(t)\end{array}\right. .$$
En déduire qu'au voisinage de tout point $t_0\in I$ tel que :
$$\begin{vmatrix} u(t_0) & v(t_0)\\ u'(t_0) & v'(t_0)\end{vmatrix}\neq 0$$

, le système précédent a une unique solution, donnée par :

$$x(t)=\frac{\begin{vmatrix} -w(t) & v(t)\\ -w'(t) & v'(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u(t) & v(t)\\ u'(t) & v'(t)\end{vmatrix}},\quad y(t)=\frac{\begin{vmatrix} u(t) & -w(t)\\ u'(t) & -w'(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u(t) & v(t)\\ u'(t) & v'(t)\end{vmatrix}}.$$

2. Déterminer une paramétrisation de l'enveloppe E de la famille des droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'équation :

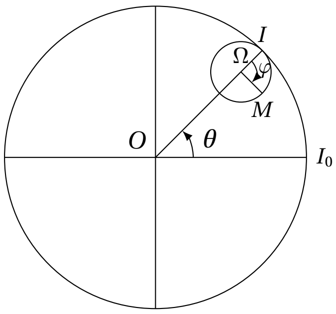
$$\sin(t)x-\cos(t)y-\sin^2(t)=0.$$

3. Représenter, sur un même graphique, E et plusieurs droites D_t.

Exercice 18 – Hypocycloïde – 4.6.29 p.117

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Un cercle $\Gamma(\Omega,r)$ roule sans glisser à l'intérieur du cercle $C(O,R)$ (où $R>r$). On note $M=M(\theta)$ un point de Γ dont étudie la trajectoire. On note θ l'angle $\left(\overrightarrow{i},\widehat{\overrightarrow{O\Omega}}\right)$ et φ l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega I},\widehat{\overrightarrow{\Omega M}}\right)$. Initialement, Ω est situé sur l'axe horizontal et M est situé en I_0.



1. Montrer que l'affixe de M est donnée par $z(\theta)=(R-r)\exp(i\theta)+r\exp(im\theta)$ où $m=1-\dfrac{R}{r}$. Ainsi, M a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x(\theta)=(R-r)\cos\theta+r\cos(m\theta)\\ y(\theta)=(R-r)\sin\theta+r\sin(m\theta)\end{cases}.$$

2. On choisit $R=4$ et $r=\dfrac{R}{4}$. Représenter la trajectoire de M. La courbe obtenue est appelée astroïde.
3. On choisit $R=4$ et $r=\dfrac{R}{p}$ où $p\in\mathbb{N}$. Représenter, pour différentes valeurs de p, $\Gamma(\Omega,r)$ roulant sur $C(O,R)$, ainsi que la trajectoire de M. La courbe obtenue est appelée hypocycloïde à p rebroussements.
4. Vérifier que ces points sont effectivement des points de rebroussement.

Exercice 19 – Ensembles de Mandelbrot et de Julia – 4.6.30 p.119

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

L'ensemble de Mandelbrot est la partie M du plan complexe définie par $M=\{c\in\mathbb{C}/$ la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0=0$ et $z_{n+1}=z_n^2+c$ est bornée $\}$.

De même, pour tout $c\in\mathbb{C}$, l'ensemble de Julia de paramètre c est défini par $J_c=\{z\in\mathbb{C}/$ la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0=z$ et $z_{n+1}=z_n^2+c$ est bornée $\}$.

On souhaite représenter l'ensemble de Mandelbrot. On fixe un entier p assez grand, et pour chaque point $c\in\mathbb{C}$, on s'intéresse à la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $z_{n+1}=z_n^2+c$. On considère que cette suite n'est pas bornée s'il existe $k\leq p$ tel que $|z_k|\geq 4$.

1. Représenter l'ensemble de Mandelbrot. On pourra utiliser la fonction `imshow` qui permet de représenter, par une couleur différente, chaque valeur de k_0, où k_0 est le plus petit entier tel que $|z_{k0}|\geq 4$.
2. En procédant de même, représenter l'ensemble de Julia J_c pour différentes valeur de c.

Exercice 1 – Arithmétique – Corrigé

```
# Question 1
n = 1234
q = n//10
r =  n%q

# r contient le nombre d'unités de n
```

```
# Question 2
s=0
while n!=0:
    q=n//10
    r = n%10
    #print(r)
    s=s+r**3
    n=q
```

```
# Question 3
def somcube(n):
    """
    Entrées :
     * n, int : nombre
    Sortie :
     * s, int : somme des cubes du chiffre n
    """
    s=0
    while n!=0:
        q=n//10
        r = n%10
        s=s+r**3
        n=q
    return s
```

```
# Question 4
res = []
for i in range (10001):
    if i == somcube(i):
        res.append(i)
```

```
# Question 5
def somcube2(n):
    """
    Entrées :
     * n, int : nombre
    Sortie :
     * s, int : somme des cubes du chiffre n
    """
    nombre=str(n)
    s=0
    for chiffre in nombre :
        s = s+int(chiffre)**3
    return s

print(somcube2(1234))
```

Exercice 2 – Intégration – Corrigé

```
# Question 1
# ==========
# Le répertoire courant est Exercice_02.
# Le sous-répertoire data contient le
# fichier ex_01.txt.

# On ouvre le fichier en lecture)
fid = open("data\ex_01.txt")

# On charge le fichier dans une liste.
# Chaque élément de la liste correspond à
# chaque ligne sous forme de chaîne de caractère.
file = fid.readlines()
# On ferme le fichier
fid.close()

LX=[]
LY=[]
for ligne in file :
    ligne = ligne.split(';')
    LX.append(float(ligne[0]))
    LY.append(float(ligne[1]))
```

```
# Question 2
# ==========
# Ne pas oublier de charger préalablement
# import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(LX,LY)
plt.show()
```

```
# Question 3
# ==========
def trapeze(x,y):
    res = 0
    for i in range(1,len(LX)):
        res = res+(LX[i]-LX[i-1])*0.5*(LY[i]+LY[i-1])
    return res
print(trapeze(LX,LY))
```

```
# Question 4
# ==========
from scipy.integrate import trapz
# Attention àl'ordre des arguments dans
# la fonction trapz : les_y puis les_x
# Aprés l'import, help(trapz) permet d'avoir
# de l'aide sur la fonction.
print(trapz(LY,LX))
```

Oral

Exercice 3 – Graphe – Corrigé

```
# Question 1
# ==========
# Matrices avec des listes
M=[[0,9,3,-1,7],
      [9,0,1,8,-1],
      [3,1,0,4,2],
      [-1,8,4,0,-1],
      [7,-1,2,-1,0]]
```

```
# Question 2 & 3
# ==============
def voisins(M,i):
    """
    Entrées :
      * M(lst) : graphe
      * i : noeud considéré
    Sortie :
      * v(lst) : liste des voisins
    """
    v = []
    # On cherche les voisins sur une ligne
    # (on pourrait le faire sur une colonne)
    for j in range(len(M[i])):
        if M[i][j]>0:
            v.append(j)
    return v

# print(voisins(M,0))
```

```
# Question 4
# ==========
def degre(M,i):
    """
    Entrées :
      * M(lst) : graphe
      * i : noeud considéré
    Sortie :
      * (int) : nomnbre de voisins
    """
    return len(voisins(M,i))
```

```
# Question 5
# ==========
def longueur(M,chemin):
    l = 0
    for i in range(len(chemin)-1):
        if M[chemin[i]][chemin[i+1]]<0:
            return -1
        else :
            l=l+M[chemin[i]][chemin[i+1]]
    return l

chemin = [1,2,3,1,4]
print(longueur(M,chemin))
chemin = [0,4,2,1,0]
print(longueur(M,chemin))
```

Exercice 4

```
# Question 1
# ==========
def nombreZeros(t,i):
    if t[i]==1:
        return 0
    else :
        res = 1
        j=i+1
        while j<len(t) and t[j]==0:
            res = res+1
            j=j+1
    return res
# t1=[0,1,1,1,0,0,0,1,0,1,1,0,0,0,0]
# print(nombreZeros(t1,4))
# print(nombreZeros(t1,1))
# print(nombreZeros(t1,8))
```

```
# Question 2
# ==========
def nombreZerosMax(t):
    max=nombreZeros(t,0)
    for i in range(1,len(t)):
        tmp = nombreZeros(t,i)
        if tmp>max:
            max = tmp
    return max
print(nombreZerosMax(t1))
```

```
# Question 3 et 4
# ================
```

Exercice 5 – Corrigé

Exercice 6 – Corrigé

```
# Import de fonctions
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sqrt
# Question 1
# ==========
def g(x):
    if x>= 0 and x<1 :
        return x
    elif x>1 and x<2 :
        return 1
xx = [0]
t=0
while t<=1.99:
    t=t+0.01
    xx.append(t)
yy = [g(x) for x in xx]
plt.plot(xx,yy)
plt.show()
```

```
# Question 2
# ==========
def f(x):
    if x>=0 and x<2 :
        return g(x)
    else : # x>=2
        return sqrt(x)*f(x-2)
```

```
# Question 3
# ==========
xxx = [0]
t=0
while t<=6:
    t=t+0.01
    xxx.append(t)
yyy = [f(x) for x in xxx]
plt.plot(xxx,yyy)
plt.show()
```

```
# Question 4
# ==========
# On cherche àrésoudre f(x)-4 = 0 sur
# l'intervalle [5,6]
def h(x):
    res = f(x)-4
    return res

a = 5.
b = 6.
while (b-a)>0.01:
    m=(a+b)/2
    if h(m)>0:
        b=m
    else :
        a=m
m=(a+b)/2

if h(m)<0:
    m= m+ abs(b-a)
print(m,h(m))
```

Exercice 7 – Corrigé

```
# Question 1
# ==========
def d(n):
    """
    Retourne la liste de tous les diviseurs de n.
    Entrée :
     * n(int) : entier.
    Sortie :
     * L(lst) : liste des diviseurs de n.
    """
    L =[1]
    for nombre in range(2,n+1):
        if n%nombre == 0:
            L.append(nombre)
    return L
print(d(4),d(10))
```

```
# Question 2
# ==========
def DNT_01(n):
    return d(n)[1:-1]
def DNT_02(n):
    L =[]
    for nombre in range(2,n):
        if n%nombre == 0:
            L.append(nombre)
    return L
print(DNT_01(4),DNT_02(4))
print(DNT_01(10),DNT_02(10))
```

```
# Question 3
# ==========
def sommeCarresDNT_01(n):
    L = DNT_01(n)
    res = [x**2 for x in L]
    return sum(res)
def sommeCarresDNT_02(n):
    L = DNT_01(n)
    res = 0
    for x in L:
        res = res + x*x
    return res
def sommeCarresDNT_03(n):
    L = DNT_01(n)
    res = 0
    for i in range(len(L)):
        res = res + L[i]**2
    return res
print(sommeCarresDNT_01(15),sommeCarresDNT_02(15),
    sommeCarresDNT_03(15))
```

```
# Question 4
# ==========
from math import sqrt
for i in range(1001):
    if i == sommeCarresDNT_01(i) :
        print(str(i)+"\t"+str(sqrt(i)))
# Conjecture les nombres recherchés sont
# les carrés des nombres premiers.
```

Exercice 8 – Corrigé

```
# Question 1
# ==========
chaine = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
```

```
# Question 2
# ==========
def decalage(chaine,n):
    chaine = chaine[n:-1]+chaine[0:n]
    return chaine
print(chaine,decalage(chaine,3))
```

```
# Question 3
# ==========
def indices(x,phrase):
    """
    Recherche des indices de x dans phrase
    Entrée :
     * x(str) : un caractère
     * phrase(str)
    Sortie :
     * res(lst) : liste des indices de x
    """
    res = []
    for i in range(len(phrase)):
        if phrase[i] == x:
            res.append(i)
    return res

print(indices("a","akjlkjalkjlkjalkjlkja"))
```

```
# Question 4
# ==========
def codage(n,phrase):
    ch = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
    ch_c = decalage(ch,n)
    print(ch_c)
    phrase_c=""
    for c in phrase :
        i = indices(c,ch)
        i = i[0]
        phrase_c = phrase_c+ch_c[i]
    return phrase_c
print(codage(3,"oralensam"))
```

```
# Question 5
# ==========
# Solution 1 : essayer les 26 permutations,
# jusqu'à trouver une phrase qui est du sens.
# Solution 2 : statistiquement le e est la lettre
# la plus présente dans la langue française. On
# peut donc déterminer la fréquence d'apparition
# des lettres. # La lettre la plus fréquente
# peut être assimilée au "e".
# On calcule ainsi le décalage...
```

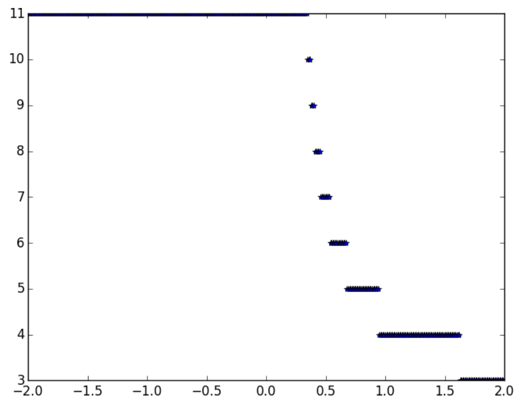
Exercice 9 – Fractale de Mandelbrot – Corrigé

```
# Question 1
# ==========
def suite_u(c,n):
    """
    Calcul de la suite u au rang n.
    Entrées :
     * c(flt) : nombre quelconque
     * n(int)
    Sortie :
     * res(flt) : valeur de u(n)
    """
    res = 0
    i=0
    while i!=n:
        res = res*res+c
        i=i+1
    return res
```

```
def recherche_k(m,M,c):
    """ Recherche de k """
    k=0
    while k<=m:
        if abs(suite_u(c,k))>M:
            return k
        k=k+1
    return -1
```

```
def fonction_f(m,M,c):
    """ Fonction """
    k = recherche_k(m,M,c)
    if k>=0:
        return k
    else :
        return m+1
```

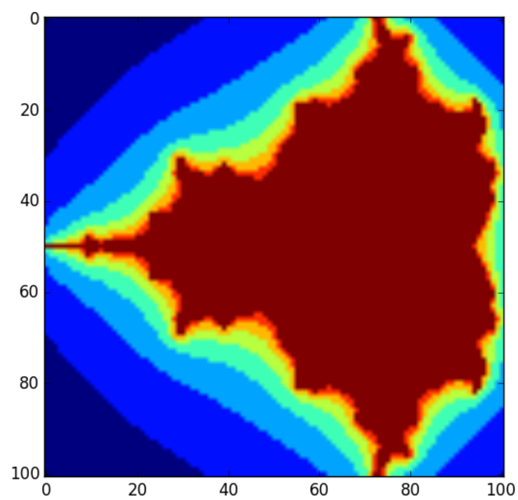
```
# Question 2
#===========
import matplotlib.pyplot as plt
m,M=10,20
LX = [-2+4*x/400 for x in range(401)]
LF = [fonction_f(m,M,x) for x in LX]
plt.plot(LX,LF,"*")
plt.show()
```



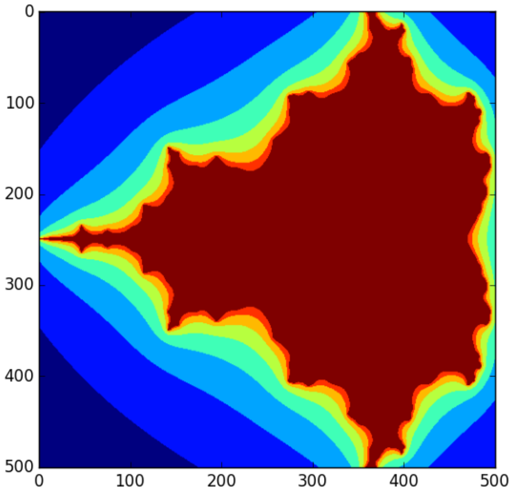
```
# Question 3
#===========
LX = [-2+2.5*x/100 for x in range(101)]
LY = [-1.1+2.2*x/100 for x in range(101)]
XY = [[[x,y] for x in LX] for y in LY]

for i in range(len(LX)):
    for j in range(len(LY)):
        XY[i][j]=fonction_f(
            m,M,complex(XY[i][j][0],XY[i][j][1]))
```

```
# Question 4
#===========
res = 100
LX = [-2+2.5*x/res for x in range(res+1)]
LY = [-1.1+2.2*x/res for x in range(res+1)]
XY = [[[x,y] for x in LX] for y in LY]

for i in range(len(LX)):
    for j in range(len(LY)):
        XY[i][j]=fonction_f(
        m,M,complex(XY[i][j][0],XY[i][j][1]))

# plt.imshow(XY)
# plt.show()
```

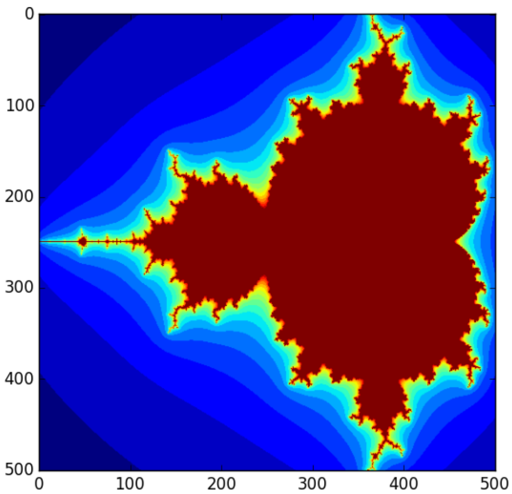
```
# Bilan
#=======
def affichage(m,M,res):
    m = m
    M = M
    LX = [-2+2.5*x/res for x in range(res+1)]
    LY = [-1.1+2.2*x/res for x in range(res+1)]
    XY = [[[x,y] for x in LX] for y in LY]
    for i in range(len(LX)):
        for j in range(len(LY)):
            XY[i][j]=fonction_f(
                m,M,complex(XY[i][j][0],XY[i][j][1]))
    plt.imshow(XY)
    plt.show()
```



$m = 10$, $M = 20$, 100 points par 100 points



$m = 10$, $M = 20$, *500 points par 500 points*



$m = 20$, $M = 40$, *500 points par 500 points*

Exercice 10 – Corrigé

```
import numpy as np
# Question 1
R = np.array([[1,2,3],[4,5,6]])
S = np.array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])
```

```
# Question 2
def test(M):
    """
    Fonction permettant de tester si la
    matrice est carrée et retournant sa taille.
    Entrée :
     * M(numpy.ndarray) : matrice
    Sortie :
     * 0 si taille non carrée
     * n(int) : taille de M si elle est carrée
    """
    l = M.shape[0]
    c = M.shape[1]
    if l==c :
        return l
    else :
        return 0
print(test(R),test(S))
```

```
# Question 3
fid = open("data/ex_006.txt",'r')
M1 = []
for ligne in fid :
    l = ligne.rstrip().split(" ")
    Ligne = [float(x) for x in l]
    M1.append(Ligne)
fid.close()
M1 = np.array(M1)
```

```
# Question 4
if test(M1)>0:
    valeurs_propres = np.linalg.eig(M1)[0]
    print(valeurs_propres)
```

```
# Question 5
def dansIntervalle(L,a,b):
    """
    Vérifier que chaque élément de L est dans
    l'intervalle [a,b]
    Entrées :
     * L(lst) : liste de nombres
     * a,b(flt) : nombres
    Sortie :
     * True si chaque élément est dans [a,b]
     * False sinon.
    """
    for e in L :
        if e<a or e> b:
            return False
    return True
print(dansIntervalle(valeurs_propres,0,1))
```

Exercice 11 – Tri de liste – Corrigé

```
# Question 1
# ==========
def comptage(L,n):
    """
    Comptage des éléments de L.
    Entrées :
     * n(int) : entier
     * L(lst) : liste d'éléments inférieurs àn
    """
    P = [0 for i in range(n+1)]
    # P = [0]*(n+1)
    for e in L:
        P[e]=P[e]+1
    return P
from random import randint
maxi = 5
LL = [randint(0,maxi) for x in range(20)]
P = comptage(LL,maxi)
# print(LL)
# print(P)
```

```
# Question 2
# ==========
def tri(L,n):
    """
    Tri une liste.
    Entrées :
     * n(int) : entier
     * L(lst) : liste d'éléments inférieurs àn
    Sortie :
     * T(lst) : liste triée.
    """
    P = comptage(L,n)
    T = []
    for i in range(len(P)):
        for j in range(P[i]):
            T.append(i)
    return T
```

```
# Question 3
# ==========
from random import randint
maxi = 5
LL = [randint(0,maxi) for x in range(20)]
T = tri(LL,maxi)
print(LL)
print(T)
```

```
# Question 4
# ==========
# Complexité quadratique : C(n)=O(n+n^2)=O(n^2)
# n : complexité de comptage
# n^2 : complexité des deux boucles imbriquées du
# tri
# Ce tri s'exécutera toujours dans le pire des cas.
# Dans le cas moyen : tri fusion O(nlogn)
# Dans le cas moyen : tri insertion O(n^2)
```

Exercice 12 – Corrigé

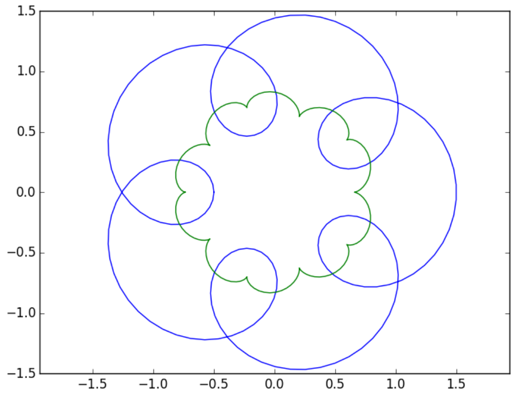
```
b,w = 0.5,6
# Question 1
# ==========
import numpy as np
def fonc_p(t):
    return [np.cos(t)+b*np.cos(w*t),np.sin(t)
                    +b*np.sin(w*t)]
```

```
def fonc_v(t):
    return [-np.sin(t)-b*w*np.sin(w*t),np.cos(t)
                    +b*w*np.cos(w*t)]
```

```
def fonc_a(t):
    return [-np.cos(t)-b*w*w*np.cos(w*t),
                -np.sin(t)-b*w*w*np.sin(w*t)]
```

```
# Question 2
# ==========
L=np.linspace(-np.pi,np.pi,200)
```

```
# Question 3
# ==========
import matplotlib.pyplot as plt
p = fonc_p(L)
#plt.plot(p[0],p[1])
#plt.axis("equal")
#plt.show()
```



Oral

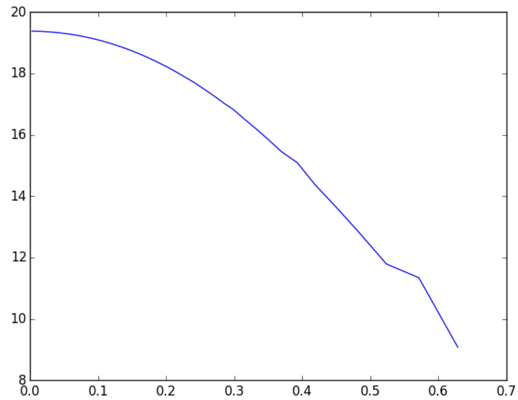
```python
# Question 4
# ==========
def fonc_d(t):
    xp,yp = fonc_v(t)
    xpp,ypp = fonc_a(t)
    return (xp**2 + yp**2)/(xp*ypp-yp*xpp)
def fonc_c(t):
    fd = fonc_d(t)
    x,y = fonc_p(t)
    xp,yp = fonc_v(t)
    return [x-fd*yp,y+fd*xp]
```

```python
# Question 5
# ==========
les_xc = []
```

```
les_yc = []
c = fonc_c(L)
#plt.plot(c[0],c[1])
```

```
# Question 6
# ==========
from math import sqrt
def distance(p):
    """
    Calcule la longueur du profil p.
    Entrée :
     * p(lst) : liste [les_x,les_y]
    Sortie :
     * L(flt) : longueur du profil.
    """
    L=0
    for i in range(len(p[0])-1):
        x0 = p[0][i]
        y0 = p[1][i]
        x1 = p[0][i+1]
        y1 = p[1][i+1]
        L = L+ sqrt((x1-x0)**2+(y1-y0)**2)
    return L
```

```
les_dt = []
les_dist = []
for i in range(10,2000,1) :
    dt = 2*np.pi/i
    L=np.linspace(-np.pi,np.pi,i)
    p = fonc_p(L)
    d = distance(p)
    les_dt.append(dt)
    les_dist.append(d)
plt.plot(les_dt,les_dist)
plt.show()
```



Évolution de la longueur du polynôme en fonction de δt.