

**Problème de Cauchy**

**Rappel — Problème de Cauchy.** Le problème consiste à trouver les fonctions  $y$  de  $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{avec } t_0 \in [0, T] \text{ et } y_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donnés.}$$

L'existence et l'unicité de la solution peut se démontrer en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Définition Fonction lipschitzienne**

$f$  est lipschitzienne en  $y$  s'il existe un réel  $k > 0$  tel que  $\forall y(t) \in \mathbb{R}^n, \forall z(t) \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T]$ , alors

$$\|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\| \leq k \|y(t) - z(t)\|$$

**Théorème Théorème de Cauchy – Lipschitz**

Soit  $f$  une fonction de  $[0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue et lipschitzienne en  $y$ .

Alors,  $\forall t_0 \in [0, T]$  et  $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$ , le problème de Cauchy admet une unique solution définie sur  $[0, T]$ .

**Méthode d'Euler**

Pour un temps de simulation compris entre  $t_0$  et  $t_1$ , si on choisi un nombre  $n$  d'échantillons, alors le pas d'intégration est défini par  $h = \frac{t_1 - t_0}{n}$ . (On a donc  $t_i = t_0 + h \cdot i$  avec  $i \in [0, n]$ .)

**Résultat** En intégrant l'équation du problème de Cauchy sur un intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , on a :

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \iff y_{i+1} - y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \text{ et donc : } y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

**R** En utilisant la méthode des rectangles à gauche,  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \simeq h \cdot f(t_i, y(t_i))$ .

**Méthode d'Euler explicite**

À l'instant  $i$ ,  $\frac{dy(t)}{dt}$  peut être approximé par  $\frac{dy(t_i)}{dt} \simeq \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$ . Ainsi,  $y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$ .

**Méthode d'Euler implicite**

À l'instant  $i$ ,  $\frac{dy(t)}{dt}$  peut être approximé par  $\frac{dy(t_i)}{dt} \simeq \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$ . Ainsi,  $y_i = y_{i-1} + h f(t_{i-1}, y_i)$  ou encore  $y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_{i+1})$ .

**Bibliothèque Python**

## Exemples

Reformulation d'équations différentielles en vue de leur résolution numérique.

- Équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :  $\omega(t) + \tau \frac{d\omega(t)}{dt} = \omega_c$  :
- schéma d'Euler explicite : on a  $\frac{d\omega(t)}{dt} \simeq \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{h} \Rightarrow \omega_k + \tau \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{h} = \omega_c \Leftrightarrow \omega_{k+1} = \frac{h}{\tau} (\omega_c - \omega_k) + \omega_k$  ;
  - schéma d'Euler implicite : on a  $\frac{d\omega(t)}{dt} \simeq \frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{h} \Rightarrow \omega_k + \tau \frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{h} = \omega_c \Leftrightarrow \omega_k = \frac{h\omega_c + \tau\omega_{k-1}}{h + \tau}$ .
- Équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants :  $\omega(t)f(t) + \tau \frac{d\omega(t)}{dt} = \omega_c h(t)$  :
- Euler explicite :  $\frac{d\omega(t)}{dt} \simeq \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{h} \Rightarrow \omega_k f_k + \tau \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{h} g_k = \omega_c h_k \Leftrightarrow \omega_{k+1} = \frac{h}{\tau g_k} (\omega_c h_k - \omega_k f_k) + \omega_k$  ;
  - Euler implicite :  $\frac{d\omega(t)}{dt} \simeq \frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{h} \Rightarrow \omega_k f_k + \tau \frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{h} g_k = \omega_c h_k \Leftrightarrow \omega_k = \frac{h\omega_c h_k + \tau g_k \omega_{k-1}}{f_k h + \tau g_k}$ .
- Équation différentielle du premier ordre  $\sin(\omega(t)) + \frac{d\omega(t)}{dt} = K$  :
- Euler explicite :  $\frac{d\omega(t)}{dt} \simeq \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{h} \Rightarrow \sin \omega_k + \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{h} = K \Leftrightarrow \omega_{k+1} = h(K - \sin \omega_k) + \omega_k$  ;
  - Euler implicite :  $\frac{d\omega(t)}{dt} \simeq \frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{h} \Rightarrow \sin \omega_k + \frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{h} = K \Leftrightarrow h \sin \omega_k + \omega_k - \omega_{k-1} = hK$ . Dans ce cas, il faut utiliser la méthode de Newton ou de dichotomie pour déterminer  $\omega_k$ .
- Équation différentielle du second ordre :  $\ddot{s}(t) + \frac{2\xi}{\omega_0} \dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = K e(t)$ . On pose :

$$\begin{cases} y_1(t) = s(t) \\ y_2(t) = \dot{s}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1(t) = \dot{s}(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = \ddot{s}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) + \frac{2\xi}{\omega_0} y_2(t) + \omega_0^2 y_1(t) = K e(t) \end{cases}$$

Schéma d'Euler explicite :  $\frac{dy(t)}{dt} \simeq \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$ . On a donc :

$$\begin{cases} \frac{y_{1,k+1} - y_{1,k}}{h} = y_{2,k} \\ \frac{y_{2,k+1} - y_{2,k}}{h} + \frac{2\xi}{\omega_0} y_{2,k} + \omega_0^2 y_{1,k} = K e_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{1,k+1} = h y_{2,k} + y_{1,k} \\ y_{2,k+1} = h K e_k - \frac{2\xi}{\omega_0} h y_{2,k} - h \omega_0^2 y_{1,k} + y_{2,k} \end{cases}$$

Schéma d'Euler implicite :  $\frac{dy(t)}{dt} \simeq \frac{y_k - y_{k-1}}{h}$ . On a donc :

$$\begin{cases} \frac{y_{1,k} - y_{1,k-1}}{h} = y_{2,k} \\ \frac{y_{2,k} - y_{2,k-1}}{h} + \frac{2\xi}{\omega_0} y_{2,k} + \omega_0^2 y_{1,k} = K e_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{1,k} = h y_{2,k} + y_{1,k-1} \\ y_{2,k} = \frac{h K e_k + y_{2,k-1} - h \omega_0^2 y_{1,k-1}}{1 + h \frac{2\xi}{\omega_0} + \omega_0^2 h^2} \end{cases}$$

- Équation différentielle du second ordre :  $\ddot{\theta}(t) + k \sin \theta(t) = 0$ . On pose :

$$\begin{cases} y_0(t) = \theta(t) \\ y_1(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_0(t) = \dot{\theta}(t) = y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) = \ddot{\theta}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_0(t) = y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) + k \sin y_0(t) = 0 \end{cases}$$

Schéma d'Euler explicite :

$$\begin{cases} \frac{y_{0,k+1} - y_{0,k}}{h} = y_{1,k} \\ \frac{y_{1,k+1} - y_{1,k}}{h} + k \sin y_{0,k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{0,k+1} = h y_{1,k} + y_{0,k} \\ y_{1,k+1} = y_{1,k} - k h \sin y_{0,k} \end{cases}$$

Schéma d'Euler implicite :

$$\begin{cases} \frac{y_{0,k} - y_{0,k-1}}{h} = y_{1,k} \\ \frac{y_{1,k} - y_{1,k-1}}{h} + k \sin y_{0,k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{0,k} = h y_{1,k} + y_{0,k-1} \\ y_{1,k} = y_{1,k-1} - k h \sin y_{0,k} \end{cases}$$

- Équation différentielle du second ordre :  $(k_1 + k_2 \sin^2 \theta(t)) \ddot{\theta}(t) + (k_3 \dot{\theta}(t)^2 + k_4) \sin 2\theta(t) + C(t) = 0$