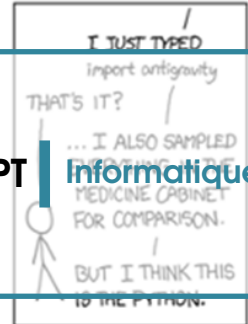


## HOW TO WRITE GOOD CODE:



Préparation aux oraux de la banque PT Informatique

## Exercices

Préparation aux oraux de la banque PT  
Épreuve de « Mathématique et Algorithmique »

Exercice 1 – Arithmétique	2
Exercice 2 – Intégration	2
Exercice 3 – Graphe	2
Exercice 4 – Gestion de liste	2
Exercice 5 – Probabilités	3
Exercice 6 – Tracer de fonction – $f(x)=0$	3
Exercice 7 – Algorithmique	3
Exercice 8 – Chiffrer – déchiffrer	3
Exercice 9 – Suite	3
Exercice 10 – Calcul matriciel	4
Exercice 11 – Tri de liste	4
Exercice 12 – Courbes paramétrées	4

## Exercice 1 – Arithmétique

1. Soit l'entier  $n = 1234$ . Quel est le quotient, noté  $q$ , dans la division euclidienne de  $n$  par 10 ? Quel est le reste ? Que se passe-t-il si on recommence la division par 10 à partir de  $q$  ?
2. Écrire la suite d'instructions calculant la somme des cubes des chiffres de l'entier 1234.
3. Écrire une fonction `somcube`, d'argument  $n$ , renvoyant la somme des cubes des chiffres du nombre entier  $n$ .
4. Trouver tous les nombres entiers inférieurs à 1000 égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.
5. En modifiant les instructions de la fonction `somcube`, écrire une fonction `somcube2` qui convertit l'entier  $n$  en une chaîne de caractères permettant ainsi la récupération de ses chiffres sous forme de caractères. Cette nouvelle fonction renvoie toujours la somme des cubes des chiffres de l'entier  $n$ .

## Exercice 2 – Intégration

On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction donnée par des points dont les coordonnées sont situées dans un fichier.

1. Le fichier `ex_001.csv`, situé dans le sous-répertoire `data` du répertoire de travail, contient une quinzaine de lignes selon le modèle suivant :

```
0.0;1.00988282142
0.1;1.07221264497
```

Chaque ligne contient deux valeurs flottantes séparées par un point-virgule, représentant respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point. Les points sont ordonnés par abscisses croissantes. Ouvrir le fichier en lecture, le lire et construire la liste `LX` des abscisses et la liste `LY` des ordonnées contenues dans ce fichier.

2. Représenter les points sur une figure.
3. Les points précédents sont situés sur la courbe représentative d'une fonction  $f$ . On souhaite déterminer une valeur approchée de l'intégrale  $I$  de cette fonction sur le segment où elle est définie. Écrire une fonction `trapeze`, d'arguments deux listes  $y$  et  $x$  de même longueur  $n$ , renvoyant :

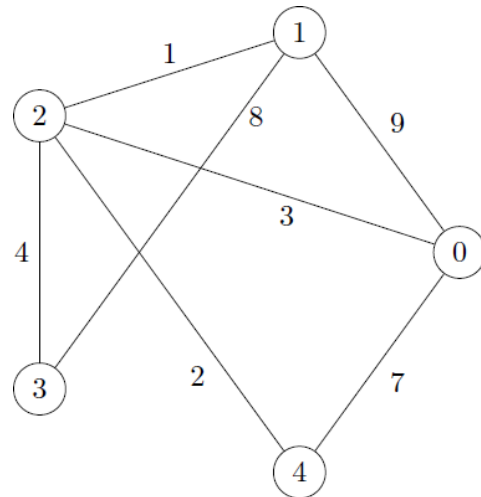
$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \frac{y_i + y_{i-1}}{2}.$$

`trapeze` (`LY`, `LX`) renvoie donc une valeur approchée de l'intégrale  $I$  par la méthode des trapèzes.

4. En utilisant la méthode d'intégration numérique `trapz` de la sous-bibliothèque `scipy.integrate` du langage Python ou la méthode `inttrap` du logiciel Scilab, retrouver la valeur approchée de l'intégrale  $I$ .

## Exercice 3

On considère le graphe  $G$  suivant, où le nombre situé sur l'arête joignant deux sommets est leur distance, supposée entière :



1. Construire la matrice  $(M_{ij})_{0 \leq i,j \leq 4}$ , matrice de distances du graphe  $G$ , définie par : « pour tous les indices  $i, j$ ,  $M_{ij}$  représente la distance entre les sommets  $i$  et  $j$ , ou encore la longueur de l'arête reliant les sommets  $i$  et  $j$  ». On convient que, lorsque les sommets ne sont pas reliés, cette distance vaut -1. La distance du sommet  $i$  à lui-même est, bien sûr, égale à 0.
2. Écrire une suite d'instructions permettant de dresser à partir de la matrice  $M$  la liste des voisins du sommet 4.
3. Écrire une fonction `voisins`, d'argument un sommet  $i$ , renvoyant la liste des voisins du sommet  $i$ .
4. Écrire une fonction `degre`, d'argument un sommet  $i$ , renvoyant le nombre des voisins du sommet  $i$ , c'est-à-dire le nombre d'arêtes issues de  $i$ .
5. Écrire une fonction `longueur`, d'argument une liste  $L$  de sommets de  $G$ , renvoyant la longueur du trajet d'écrit par cette liste  $L$ , c'est-à-dire la somme des longueurs des arêtes empruntées. Si le trajet n'est pas possible, la fonction renverra -1.

## Exercice 4 – Gestion de liste

Soit un entier naturel  $n$  non nul et une liste  $t$  de longueur  $n$  dont les termes valent 0 ou 1. Le but de cet exercice est de trouver le nombre maximal de 0 contigus dans  $t$  (c'est-à-dire figurant dans des cases consécutives). Par exemple, le nombre maximal de zéros contigus de la liste  $t_1$  suivante vaut 4 :

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$t_1[i]$	0	1	1	1	0	0	0	1

$i$	8	9	10	11	12	13	14
$t_1[i]$	0	1	1	0	0	0	0

1. Écrire une fonction `nombreZeros(t,i)`, prenant en paramètres une liste  $t$ , de longueur  $n$ , et un indice  $i$  compris entre 0 et  $n-1$ , et renvoyant :

$$\begin{cases} 0, & \text{si } t[i] = 1 \\ \text{le nombre de zéros consécutifs dans } t \\ \text{à partir de } t[i] \text{ inclus, si } t[i] = 0. \end{cases}$$

Par exemple, les appels `nombreZeros(t1,4)`, `nombreZeros(t1,1)` et `nombreZeros(t1,8)` renvoient respectivement les valeurs 3, 0 et 1.

- Comment obtenir le nombre maximal de zéros contigus d'une liste `t` connaissant la liste des `nombreZeros(t,i)` pour  $0 \leq i \leq n-1$ ? En déduire une fonction `nombreZerosMax(t)`, de paramètre `t`, renvoyant le nombre maximal de 0 contigus d'une liste `t` non vide. On utilisera la fonction `nombreZeros`.
- Quelle est la complexité de la fonction `nombreZerosMax(t)` construite à la question précédente?
- Trouver un moyen simple, toujours en utilisant la fonction `nombreZeros`, d'obtenir un algorithme plus performant.

### Exercice 5 – Probabilités

Soient  $n$  un entier naturel strictement positif et  $p$  un réel compris entre 0 et 1. On considère  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  sur un espace probabilisé donné.  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = np$  et  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres  $(n, p)$ .

- Définir une fonction `Px`, d'arguments  $k$ ,  $n$  et  $p$ , renvoyant la valeur de  $P(X = k)$ .  $k!$  (factorielle  $k$ ) s'obtient par `factorial(k)` en Python (bibliothèque `math`) et `prod(1 : k)` en Scilab. Déterminer, pour  $n = 30$  et  $p = 0,1$ , la liste des valeurs de  $P(X = k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq 30$ .
- Définir une fonction `Py`, d'arguments  $k$ ,  $n$  et  $p$ , renvoyant la valeur de  $P(Y = k)$ . On pourra utiliser `comb` de la sous-bibliothèque `scipy.misc` en Python et `binomial` en Scilab. Déterminer, pour  $n = 30$  et  $p = 0,1$ , la liste des valeurs de  $P(Y = k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq 30$ .
- Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On rappelle que, sous certaines conditions sur  $n$  et  $p$ , la probabilité  $P(Y = k)$  peut être approchée par  $P(X = k)$ . Déterminer une fonction `Ecart` d'arguments  $n$  et  $p$ , renvoyant le plus grand des nombres  $|P(Y = k) - P(X = k)|$ , pour  $0 \leq k \leq n$ .
- Soit  $e$  un réel strictement positif. Déterminer une fonction `N`, d'arguments  $e$  et  $p$ , renvoyant le plus petit entier  $n$  tel que `Ecart(n, p)` soit inférieur ou égal à  $e$ .
- Faire l'application numérique dans les quatre cas suivants :
  - $p = 0,075$  avec  $e = 0,008$  et  $e = 0,005$ ;
  - $p = 0,1$  avec  $e = 0,008$  et  $e = 0,005$ . Interpréter le dernier résultat.

### Exercice 6 – $f(x) = 0$

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0,2[$  par :

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pour } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

- Définir la fonction  $g$ . Tracer sa courbe représentative sur  $[0,2[$ , c'est-à-dire la ligne brisée reliant les points  $(x, g(x))$  pour  $x$  variant de 0 à 1,99 avec un pas de 0,01.

- Définir une fonction  $f$  donnée de manière récursive sur  $[0, +\infty[$  par

$$g(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x}f(x-2) & \text{pour } x \geq 2 \end{cases}$$

- Tracer la courbe représentative de  $f$  sur  $[0,6]$ .
- Écrire les instructions permettant de calculer, à  $10^{-2}$  près, la plus petite valeur  $\alpha > 0$  telle que  $f(\alpha) > 4$ .

### Exercice 7 – Algorithmique

On considère le code Python de la fonction `d` suivante :

#### ■ Python

```
def d(n):
    L = [1]
    for nombre in range(2, n + 1):
        if n % nombre == 0:
            L.append(nombre)
    return L
```

- Quel est le résultat de l'appel `d(4)` ? Puis de l'appel `d(10)` ? Que fait la fonction `d` ?
- Un diviseur non-trivial d'un entier  $n$  est un diviseur de  $n$  différent de 1 et de  $n$ . Écrire une fonction `DNT`, d'argument  $n$ , renvoyant la liste des diviseurs non-triviaux de l'entier  $n$ .
- Écrire une fonction `sommeCarresDNT`, d'argument  $n$ , renvoyant la somme des carrés des diviseurs non-triviaux de l'entier  $n$ .
- Écrire la suite des instructions permettant d'afficher tous les nombres entiers inférieurs à 1000 et égaux à la somme des carrés de leurs diviseurs non-triviaux. Que peut-on conjecturer ?

### Exercice 8 – Chiffrer – déchiffrer

Soit  $n$  un entier vérifiant  $n \leq 26$ . On souhaite écrire un programme qui code un mot en décalant chaque lettre de l'alphabet de  $n$  lettres. Par exemple pour  $n = 3$ , le décalage sera le suivant :

Avant décalage	a	b	c	...	x	y	z
Après décalage	d	e	f	...	a	b	c

Le mot `oralensam` devient ainsi `rudohqvdp`.

- Définir une chaîne de caractères contenant toutes les lettres dans l'ordre alphabétique (caractères en minuscule).
- Écrire une fonction `decalage`, d'argument un entier  $n$ , renvoyant une chaîne de caractères contenant toutes les lettres dans l'ordre alphabétique, décalées de  $n$ , comme indiqué ci-dessus.
- Écrire une fonction `indices`, d'arguments un caractère  $x$  et une chaîne de caractères `phrase`, renvoyant une liste contenant les indices de  $x$  dans `phrase` si  $x$  est une lettre de phrase et une liste vide sinon.
- Écrire une fonction `codage` d'arguments un entier  $n$  et une chaîne de caractères `phrase`, renvoyant `phrase` codé avec un décalage de  $n$  lettres.
- Comment peut-on décoder un mot codé ?

## Exercice 9 – Suite

On pose  $M = 20$  et  $m = 10$ . À un nombre  $c$  quelconque, on associe la suite  $(u_n)_n \geq 0$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = u_n^2 + c$  pour  $n \geq 0$ .

S'il existe, on note  $k$  le plus petit entier tel que l'on ait  $0 \leq k \leq m$  et  $|u_k| > M$ . On définit alors la fonction  $f$  par

$$f : c \mapsto \begin{cases} k & \text{s'il existe} \\ m + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner le code définissant la fonction  $f$ .
2. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction  $f$  sur  $[-2; 2]$ , en créant une liste LX de 401 valeurs équiréparties entre -2 et 2 inclus et en utilisant les fonctions `plot` et `show` de la sous-bibliothèque `matplotlib.pyplot`.
3. Construire le tableau des valeurs  $f(x + iy)$  où  $x$  prend 101 valeurs comprises entre -2 et 0,5 et  $y$  prend 101 valeurs entre -1,1 et 1,1. On rappelle que le nombre complexe  $i$  est représenté par `1j`. Par exemple, le complexe  $1 + 2i$  est représenté par `1 + 2j`.
4. Tracer l'image que code ce tableau. On pourra utiliser les fonctions `imshow` et `show` de la sous-bibliothèque `matplotlib.pyplot`. Quels paramètres peut-on modifier pour obtenir une meilleure résolution ?

## Exercice 10 – Calcul matriciel

Dans cet exercice, avec Python on pourra utiliser la fonction `array` de la bibliothèque `numpy`, ainsi que la fonction `eig` de la sous-bibliothèque `numpy.linalg`. Avec Scilab, on utilisera `spec`.

1. Créer deux matrices  $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  et  $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  et les faire afficher.
2. Créer une fonction `test`, d'argument  $M$ , renvoyant la valeur `n` si  $M$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  (entier naturel non nul) et zéro dans tous les autres cas. Vérifier la fonction `test` sur  $R$  et sur  $S$ .
3. Le fichier `ex_006.txt`, situé dans le sous-répertoire `data` du répertoire de travail, contient un tableau de valeurs flottantes. Lire ce tableau dans le fichier et vérifier qu'il correspond bien à une matrice carrée d'ordre 5 que l'on désignera par  $M1$ .
4. Déterminer les valeurs propres de la matrice  $M1$ .
5. Créer une fonction `dansIntervalle`, d'arguments une liste  $L$  et deux réels  $a$  et  $b$ , renvoyant la valeur `True` si tous les éléments de la liste  $L$  sont dans l'intervalle  $[a, b]$  et `False` sinon. Vérifier que toutes les valeurs propres de la matrice  $M1$  sont dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

## Exercice 11 – Tri de liste

Soit  $N$  un entier naturel non nul. On cherche à trier une liste  $L$  d'entiers naturels strictement inférieurs à  $N$ .

1. Écrire une fonction `comptage`, d'arguments  $L$  et  $N$ , renvoyant une liste  $P$  dont le  $k$ -ième élément désigne le nombre d'occurrences de l'entier  $k$  dans la liste  $L$ .
2. Utiliser la liste  $P$  pour en déduire une fonction `tri`, d'arguments  $L$  et  $N$ , renvoyant la liste  $L$  triée dans l'ordre croissant.
3. Tester la fonction `tri` sur une liste de 20 entiers inférieurs ou égaux à 5, tirés aléatoirement.
4. Quelle est la complexité temporelle de cet algorithme ? La comparer à la complexité d'un tri par insertion ou d'un tri fusion.

## Exercice 12 – Courbes paramétrées

1. Deux paramètres  $b$  et  $w$  valant respectivement 0,5 et 6,0, définir trois fonctions d'une variable  $t$  renvoyant des couples :

$$\begin{cases} p : t \mapsto (\cos(t) + b \cos(wt), \sin(t) + b \sin(wt)) \\ v : t \mapsto (-\sin(t) - bw \sin(wt), \cos(t) + bw \cos(wt)) \\ a : t \mapsto (-\cos(t) - bw^2 \cos(wt), -\sin(t) - bw^2 \sin(wt)) \end{cases}$$

Vérifier ces fonctions sur un exemple.

$p(t) = (x(t), y(t))$  désigne la position dans le plan d'une masse ponctuelle mobile au cours du temps,  $v(t) = (x'(t), y'(t))$ , sa vitesse, et  $a(t) = (x''(t), y''(t))$ , son accélération.

2. Construire la liste  $L$  des points  $p(t)$ , pour  $t$  variant de  $-\pi$  à  $\pi$  avec un pas de discrétisation  $\delta t$  vérifiant  $\delta t = 0,01 \pi$ .
3. Faire tracer dans le plan muni d'un repère orthonormal la ligne polygonale reliant les points  $p(t)$  de la liste  $L$ .
4. Définir puis tester la fonction  $c$  d'une variable  $t$  qui renvoie le couple des coordonnées du centre de courbure donnée par :

$$c(t) = (x(t) - dy'(t), y(t) + dx'(t))$$

où

$$d = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}.$$

5. Rajouter sur le graphique précédent la ligne décrite par les centres de courbure, avec la même discrétisation en temps.
6. Calculer la longueur de la ligne polygonale reliant les points  $p(t)$ , pour différents pas de discrétisation  $\delta t$ . Observer l'évolution de cette longueur lorsque  $\delta t$  diminue.