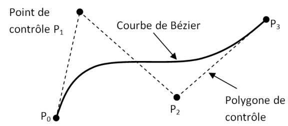
1 Présentation

Les courbes de Bézier ont été inventées par l'ingénieur Pierre Bézier (ingénieur Arts et Métiers (Pa. 1927) et Renault). Il s'agit de courbes paramétrées utilisées dans les logiciels de dessin, en conception assistée par ordinateur ou encore pour définir certaines polices de caractères. Même si ces courbes sont remplacées par des des courbes de types « NURBS » elles restent néanmoins encore très utilisées.

Fonte définie par des courbes de Bézier



Courbe de Bézier et polygone de contrôle

Définition Soient P_0, P_1, ..., P_n, $n+1$ points de contrôle. Pour une courbe plane la position d'un point M de coordonnées $\left(x(t), y(t)\right)$ dans la base $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ est définie par :

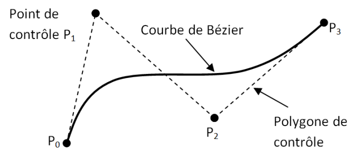
$$\forall t \in [0,1] \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} B_i^n(t) x_{Pi} \\ y(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} B_i^n(t) y_{Pi} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{et} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$$

La fonction $B_i^n(t)$ est appelée polynôme de base de Bernstein.

Exemple

Pour 4 pôles P_0, P_1, P_2 et P_3, (courbe de Bézier de degré 3), on a :

$$\forall t \in [0,1] \left\{ \begin{array}{l} x(t) = (1-t)^3 t^0 x_{P_0} + (1-t)^2 t^1 x_{P_1} + (1-t)^1 t^2 x_{P_2} + (1-t)^0 t^3 x_{P_3} \\ y(t) = (1-t)^3 t^0 y_{P_0} + (1-t)^2 t^1 y_{P_1} + (1-t)^1 t^2 y_{P_2} + (1-t)^0 t^3 y_{P_3} \end{array} \right. .$$



■

Objectif L'objectif est de tracer les courbes de Bézier en utilisant des méthodes différentes.

2 Tracer naïf d'une courbe de Bézier

Question 1 *Le tracer d'une courbe de Bézier de degré n fait appel à la fonction* `fact(n)` *permettant de calculer* $n!$. *Écrire cette fonction en utilisant un algorithme récursif et itératif. Vous prendrez soin de documenter votre fonction.*

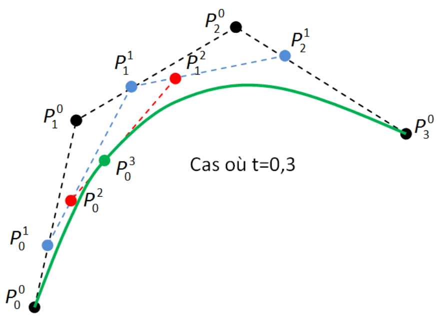
Question 2 *En utilisant la fonction* `calculPointCourbe(poles,u)` *,réaliser le programme permettant de tracer une courbe sur 100 points. On rappelle que pour utiliser la fonction* `plot` *il est nécessaire de réaliser la liste des abscisses, qu'on pourra nommer* `les_x`*, et liste des ordonnées, qu'on pourra nommer* `les_y`.

Question 3 *On fait l'hypothèse (forte) que la complexité algorithmique de la fonction* `pow` *est linéaire. Donner la complexité algorithmique temporelle de la fonction* `fonctionBernstein`.

3 Utilisation de l'algorithme de De Casteljau

L'algorithme de De Casteljau se repose sur le fait qu'une restriction d'une courbe de Bézier est aussi une courbe de Bézier. En notant P_0, P_1, P_2 et P_3 les 4 points de contrôle d'une courbe de Bézier et t un réel donnée appartenant à $[0;1]$ et $\mathrm{d}t$ le pas de calcul :

- ❒ on construit les 3 barycentres P_j^1, $j \in [0;2]$ des points de contrôle P_i^0, $i \in [0;3]$: $P_j^1 = (1-t)P_j^0 + t P_{j+1}^0$;
- ❒ on construit les 2 barycentres P_j^2, $j \in [0;1]$: $P_j^2 = (1-t)P_j^1 + t P_{j+1}^1$;
- ❒ on construit les dernier barycentre $P_0^3 = (1-t)P_0^2 + t P_1^2$.



Le dernier barycentre est un point de le courbe de Bézier.

Question 4 *On donne la fonction* `deCasteljau` *permettant de calculer l'abscisse (ou l'ordonnée) d'un point d'une courbe. Déterminer (en le justifiant) ce que retourne l'appel suivant :* `deCasteljau([0,0,40,40],0,3,0.5)`.

Question 5 *Évaluer la complexité algorithmique de l'algorithme de de Casteljau en fonction du nombre de pôles.*

Question 6 *Montrer que la propriété* $x(t)=\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)x_{Pi}$ *est un invariant de boucle.****

4 Utilisation de l'algorithme de Horner

Question 7 *Réécrire la fonction permettant de calculer l'abscisse de la courbe de Bézier en mettant la fonction* $x(t)=\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)x_{Pi}$ *sous la forme* $x(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ *en explicitant* a_i.

En mettant le polynôme sous la forme de Horner, on a : $x(t)=(((a_n t+a_{n-1})t+...)t+a_1)t+a_0$.

▪ Exemple

Pour une courbe de Bézier cubique, on a : $x(t)=(1-t)^3\, t^0 x_{P_0}+(1-t)^2\, t^1 x_{P_1}+(1-t)^1\, t^2 x_{P_2}+(1-t)^0\, t^3 x_{P_3}$.
Sous la forme de Horner, on a : $x(t)=\left(\left(\left(x_{P_3}-3x_{P_2}+3x_{P_1}-x_{P_0}\right)t+3\left(x_{P_2}-2x_{P_1}+x_{P_0}\right)\right)t+3\left(x_{P_1}-x_{P_0}\right)\right)t+x_{P_0}$. ▪

Question 8 *Écrire un algorithme récursif, permettant de calculer un point de la courbe par la méthode de Horner. La fonction* `horner` *prendra comme argument* `a` *la liste des* a_i *(*`[a0,a1,a2,...,an]`*) et le paramètre* t.

Algorithmes

▪ Python

```python
def coef_binom(i,n):
    """
    Retourne le coefficient binomial :
    C_n^i = n! / (i! (n-i)!)
    """
    res = fact(n)/(fact(i)*fact(n-i))
    return res

def calculPointCourbe(poles,u):
    """
    Retourne le point de la courbe de Bézier pour un paramètre donné.
    Entrées :
        * poles (list): liste des coordonnées des poles [[x1,y1],[x2,y2],...]
        * u (float) : paramètre appartenant à[0,1]
    Sortie :
        * pointM (list): point appartenant àla courbe de Bézier au paramètre u
    """
    px,py = [],[]
    for i in range(len(poles)):
        px.append(poles[i][0])
        py.append(poles[i][1])

    pointM = [fonctionBernstein(px,u),fonctionBernstein(py,u)]
    return pointM

def fonctionBernstein(p,u):
    """
    Calcul d'une des coordonnées d'un point appartenant àune courbe de Bézier.
        Entrées :
            * p (list): tableau contenant l'abscisse des poles
            * u (float): paramètre
        Sortie :
            * x (float) : une des coordonnées (suivant x ou y) d'un point de la courbe
    """
    n = len(p)
    x=0
    for i in range(n):
        x=x+coef_binom(i,n-1)*pow(u,i)*pow((1-u),n-i-1)*p[i]
    return x
```

```
"""
Retourne l'abscisse(ou l'ordonnées) d'un point de la courbe de Bézier pour un paramètre donné.
Entrées :
 * P (list) : listes des abscisses (ou des ordonnéees) des poles
 * i,j (int) : poles considérés
 * t (float) : paramètre compris entre 0 et 1
Sortie :
 * float : abscisse ou ordonnée d'un point de la courbe
"""
if j == 0:
    return P[i]
else :
    return deCasteljau(P,i,j-1,t)*(1-t)+deCasteljau(P,i+1,j-1,t)*t
```

DM 01