Chapitre 1
Programmation récursive

TD 2

Exercices d'application

Savoirs et compétences :

❒ *Alg – C15 : Récursivité : avantages et inconvénients.*

Exercice 1 – Fonction mystère

D'après ressources de C. Lambert. On donne la fonction suivante :

■ **Python**
```
def mystere(L):
    """
    Ceci est la fonction mystère, saurez−vous trouver
    son but ?
    Entrée :
        * L( list ) : liste de nombres entiers ou réels
    Sortie :
        * ???
    """
    n = len(L)
    if n==0 :
        return (none)
    elif n==1 :
        return (L(0))
    else :
        x = mystere(L(0:n−1))
        if x<=L(−1) :
            return (x)
        else :
            return (L(−1))
```

Question 1 *Sans coder la fonction, déterminer le résultat de l'instruction **print(mystere([14, 20, 3, 16]))** ? Vous pourrez représenter de façon graphique l'empilement et le dépilement de la pile d'exécution.*

Question 2 *D'après vous quel est le but de cette fonction ?*

Question 3 *Programmer la fonction et tester l'instruction précédente. Sur plusieurs exemples, vérifiez la conjecture faite à la question précédente.*

Question 4 *Question subsidiaire. – Montrer que la propriété suivante est une propriété d'invariance :*
$\mathscr{P}$: l'algorithme retourne le plus petit élément de la liste de taille k, s'il existe.

R

- Il faudra montrer que l'algorithme se termine au moyen d'un variant de boucle.
- Il faudra montrer que $\mathscr{P}$ est une propriété d'invariance.

Exercice 2 – Palindrome...

D'après ressources de C. Lambert. On souhaite réaliser une fonction *miroir* dont le but est de retourner le «miroir» d'une chaîne de caractères. Par exemple le résultat de *miroir("miroir")* serait *"riorim"*.

Question 1 *Programmer la fonction miroir_it permettant de répondre au problème de manière itérative.*

Question 2 *Programmer la fonction miroir_rec permettant de répondre au problème de manière récursive.*

Question 3 *Que renvoie la fonction si la chaîne de caractère est "Eh ! ça va la vache" ?*

Question 4 *Évaluer la complexité algorithmique de chacune de deux fonctions.*

Exercice 3 – Calcul de $n!$

On rappelle la définition de $n!$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} n! = \prod_{k=1}^{n} k & \text{si } n \leq 1 \\ n! = 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

R Pour vérifier vos résultats, vous pouvez utiliser la fonction disponible dans la bibliothèque math :

```
>>> from math import factorial
>>> print(factorial(4))
    24
```

Question 1 *Définir la fonction fact_it permettant de calculer $n!$ de façon itérative.*

Correction

```
def fact_it(n):
    """
    Calcul de n! de manière itérative
    Entrée :
      * n(int) : nombre entier naturel
    Sortie
      * res (int): résultat, nombre entier naturel
    """
    # Vérifie que n est bien positif ou nul
    # On pourrait aussi vérifier que n est bien un integer
    assert (n >= 0),"Nombre négatif"
    if n==0:
        return 1
    else :
        res = 1
        k=n
        while k>0:
            res=res * k
            k=k-1
        return res
```

Question 2 *Donner alors la complexité algorithmique de votre algorithme.*

Correction Il y a n opérations dans le pire des cas. En conséquence, $C(n) = \mathcal{O}(n)$.

Question 3 *Définir la fonction fact_rec permettant de calculer $n!$ de façon récursive.*

Correction

```
def fact_rec(n):
    """
    Calcul de n! de manière récursive
    Entrée :
      * n(int) : nombre entier naturel
    Sortie
      * (int): résultat, nombre entier naturel
    """
    if n<2:
        return 1
    else:
        return n*fact_rec(n-1)
```

Question 4 *Évaluer* 1010! *dans les trois cas (itératif, récursif et fonction native de Python). Expliquer ce qu'il se passe ?*

Correction Dans le cas de l'appel récursif, on réalise que Python limite à 1000 le nombre d'appels.

Exercice 4 – Suite de Fibonacci

D'après ressources de C. Lambert.

On définit la suite de Fibonacci de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

Question 1 *Définir la fonction fibonacci_it permettant de calculer u_n par une méthode itérative. Évaluer la complexité algorithmique de l'algorithme.*

Question 2 *Définir la fonction fibonacci_rec permettant de calculer u_n par une méthode récursive « intuitive». Évaluer la complexité algorithmique de l'algorithme.*

Question 3 *Observer comment passer du couple (u_n, u_{n+1}) au couple (u_{n+1}, u_{n+2}). En déduire une autre méthode récursive pour calculer le n^e terme de la suite de Fibonacci. Évaluer la complexité algorithmique de l'algorithme.*

Exercice 5 – Calcul de déterminant

D'après ressources de David Prévost – UPSTI

On souhaite calculer le déterminant d'une matrice (carrée) A par la formule de développement sur la première ligne (ou sur la première colonne) mais pas une autre (par exemple si on le faisait sur la troisième, la fonction ne conviendrait pas pour un déterminant 2x2).

Question 1 *Écrire une fonction extraire(A,lig,col) qui permet de fabriquer la matrice extraite de A en rayant la ligne lig et la colonne col (dans l'optique d'obtenir son déterminant).*

Question 2 *Écrire une fonction récursive determinant(A) retournant le déterminant de A.*

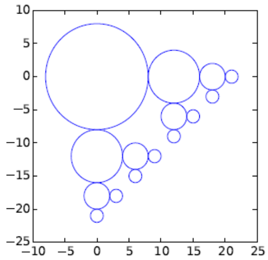
Question 3 *Tester l'algorithme sur une matrice (de taille au moins 3,3) et comparer le résultat à ce que retourne la fonction det du module linalg de la bibliothèque numpy.*

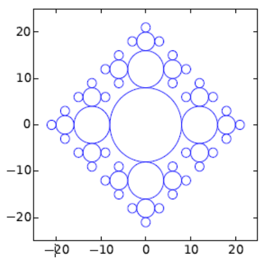
Exercice 6 – Bubble bobble

D'après ressources de Jean-Pierre Becirspahic `http://info-llg.fr/`.

On suppose disposer d'une fonction *circle([x, y], r)* qui trace à l'écran un cercle de centre $(x; y)$ de rayon r.

Question *Définir deux fonctions récursives permettant de tracer les dessins présentés figure suivante (chaque cercle est de rayon moitié moindre qu'à la génération précédente).*





Correction

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def cercle(coord, r):
    x,y=[],[]
    for t in range (101):
        x.append(coord[0]+r*np.cos(t*np.pi/50))
        y.append(coord[1]+r*np.sin(t*np.pi/50))
    plt.plot(x,y)


def bulle1(n,x=0,y=0,r=8):
    cercle((x,y),r)
    if n>1 :
        bulle1(n-1,x+3*r/2,y,r/2)
        bulle1(n-1,x,y-3*r/2,r/2)

bulle1(6)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

Part. 5 – Ch. 1