

Chapitre 1

Programmation récursive

TD 1

Exercices d'application

TD d'informatique du Lycée Louis Legrand – Jean-Pierre Becirspahic

<http://info-llg.fr/>

Savoirs et compétences :

- Alg – C15 : Récursivité : avantages et inconvénients.

Exercice 1 – Fonction 91 de McCarthy

On considère la fonction récursive suivante :

```
■ Python
def f(n) :
    if n > 100 :
        return n - 10
    return f(f(n + 11))
```

Question Prouver sa terminaison lorsque $n \in \mathbb{N}$ et déterminer ce qu'elle calcule (sans utiliser l'interpréteur de commande).

Exercice 2

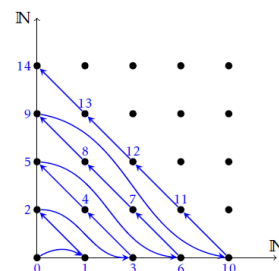
Question 1 Écrire une fonction récursive qui calcule a^n en exploitant la relation : $a^n = a^{n/2} \times a^{n/2}$.

Question 2 Écrire une fonction qui utilise de plus la remarque suivante : $n/2 = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n/2 + 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Question 3 Effectuer le nombre de multiplications effectuées dans les deux cas.

Exercice 3

On démontre que sur l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable en numérotant chaque couple $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ suivant le procédé suggéré par la figure ci-dessous.



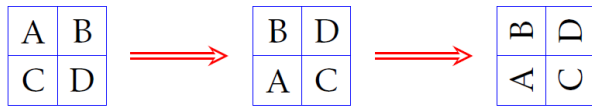
Question 1 Rédiger une fonction récursive qui retourne le numéro du point de coordonnées (x, y) .

Question 2 Rédiger la fonction réciproque, là encore de façon récursive.

Exercice 4

Les processeurs graphiques possèdent en général une fonction de bas niveau appelée *blit* (ou transfert de bloc) qui copie rapidement un bloc rectangulaire d'une image d'un endroit à un autre.

L'objectif de cet exercice est de faire tourner une image carrée de $n \times n$ pixels de 90° dans le sens direct en adoptant une stratégie récursive : découper l'image en quatre blocs de tailles $n/2 \times n/2$, déplacer chacun de ces blocs à sa position finale à l'aide de 5 *blits*, puis faire tourner récursivement chacun de ces blocs.



On supposera dans tout l'exercice que n est une puissance de 2.

Question 1 Exprimer en fonction de n le nombre de fois que la fonction `blit` est utilisée.

Question 2 Quel est le coût total de cet algorithme lorsque le coût d'un `blit` d'un bloc $k \times k$ est en $\mathcal{O}(n^2)$?

Question 3 Et lorsque ce coût est en $\mathcal{O}(n)$?

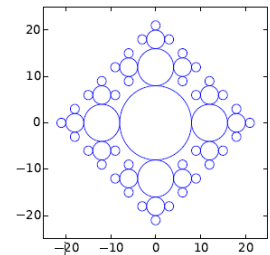
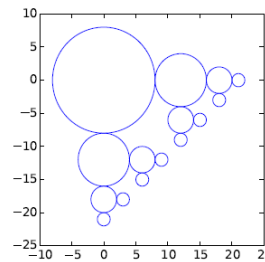
Question 4 En supposant qu'une image est représentée par une matrice `numpy` $n \times n$, rédiger une fonction qui adopte cette démarche pour effectuer une rotation de 90° dans le sens direct (on simulera un `blit` par la copie d'une partie de la matrice vers une autre en décrivant ces parties par le `slicing`).

Exercice 5

On suppose disposer d'une fonction `circle([x, y], r)` qui trace à l'écran un cercle de centre $(x; y)$ de rayon r .

Question Définir deux fonctions récursives permettant de tracer les dessins présentés figure suivante (chaque

cercle est de rayon moitié moindre qu'à la génération précédente).



Exercice 5

On suppose disposer d'une fonction `polygon((xa, ya), (xb, yb), (xc, yc))` qui trace le triangle plein dont les sommets ont pour coordonnées $(x_a; y_a)$, $(x_b; y_b)$, $(x_c; y_c)$.

Question 1 Définir une fonction récursive permettant le tracé présenté figure suivante (tous les triangles sont équilatéraux).

