

Représentation des nombres entiers

Définition Écriture d'un nombre dans une base

Dans un système de numération en base B , un nombre noté N_B peut s'écrire sous la forme : $N_B = \sum_{k=0}^n a_k \cdot B^k$
 s'écrit symboliquement sous la forme : $N_B = \underbrace{(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)}_{n+1 \text{ chiffres}}_B$ On note :

- B : la base ou nombre de chiffres différents qu'utilise le système de numération ;
- a_k : chiffre de rang k ;
- B^k la pondération associée à a_k .

Représentation des nombres entiers relatifs

Méthode Pour représenter l'opposé d'un nombre positif par son complément à deux, on commence par le coder le nombre en binaire. On inverse les bits 0 et 1 et on ajoute 1 au mot binaire obtenu.

R Lorsqu'on travaille sur un système n bits, on peut coder les nombres allant de -2^{n-1} à $-2^{n-1} - 1$.

Représentation des nombres réels

Méthode Conversion d'une partie fractionnaire en binaire

1. On multiplie la partie fractionnaire par 2.
2. La partie entière obtenue représente le poids binaire (limité aux seules valeurs 0 ou 1).
3. La partie fractionnaire restante est à nouveau multipliée par 2.
4. On procède ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de partie fractionnaire ou que le nombre de bits obtenus correspond à la taille du mot mémoire dans lequel on stocke cette partie.

Pour représenter des réels, nombres pouvant être positifs, nuls, négatifs et non entiers, on utilise la représentation en virgule flottante (*float* en anglais) qui fait correspondre au nombre 3 informations :

$$-243,25_{(10)} = \underbrace{-}_{1} \underbrace{0,24325}_{2} \cdot \underbrace{10^3}_{3}$$

On appelle alors :

1. le signe (positif ou négatif) ;
2. la mantisse (nombre de chiffres significatifs) ;
3. l'exposant : puissance à laquelle la base est élevée.

Sous cette forme normalisée, il suffit de mémoriser le signe, l'exposant et la mantisse pour avoir une représentation du nombre en base 10. Il n'est pas utile de mémoriser le 0 avant la virgule puisque tous les nombres vont commencer par 0. En faisant varier l'exposant, on fait « flotter » la virgule décimale.

C'est cette méthode que l'on va adapter pour coder les réels en binaire naturel. Il faut au préalable les écrire sous la forme (norme IEEE 754 – Institute of Electrical and Electronics Engineers) :

signe 1, mantisse $\times 2^{\text{exposant}}$

Le mot binaire obtenu sera la juxtaposition de 3 parties :



Le tableau décrit la répartition des bits selon le type de précision : la taille de la mantisse (m bits) donne la précision mais suivant la valeur de l'exposant, la précision sera totalement différente.

	Signe	Exposant	Mantisse
Simple précision – 32 bits	1	8	23
Double précision – 64 bits	1	11	52
Précision étendue – 80 bits	1	15	64

Ainsi :

- erreur relative : 2^{-m} (poids du dernier bit)
- erreur absolue : erreur relative * 2^{exposant}

Simple précision : $2^{-23} = 1,192... * 10^{-7}$ Double précision : $2^{-52} = 2,220... * 10^{-16}$

Procédure de conversion de réel en binaire (hexadécimale)

- Méthode**
1. Convertir en binaire les partie entière et fractionnaire du nombre sans tenir compte du signe.
 2. Décaler la virgule vers la gauche pour le mettre sous la forme normalisée (IEEE 754).
 3. Codage du nombre réel avec les conventions suivantes :
 - signe = 1 : Nombre négatif (Signe = 0 : Nombre positif) ;
 - le chiffre 1 avant la virgule étant invariant pour la forme normalisée, il n'est pas codé ;
 - on utilise un exposant décalé au lieu de l'exposant simple (complément sur octet). Ainsi, on ajoute à l'exposant simple la valeur 127 en simple précision et 1023 en double précision (c'est à dire $2^{n-1} - 1$ où n est le nombre de bits de l'exposant) ;
 - la mantisse est complétée à droite avec des zéros.

Représentation chaînes de caractères

Les fichiers texte stockés sur un périphérique de stockage sont encodés avec un encodage particulier (ANSI, UTF-8, ASCII...). L'encodage est une table de correspondance entre une séquence de bits et un caractère (visible – une lettre – ou non – une tabulation–).

Par exemple, l'ASCII est un encodage fréquemment utilisé où les caractères sont codés sur 7 bits et permet donc d'encoder 127 caractères. Cependant, les informations étant très souvent regroupées par octets, un caractère ASCII occupe donc 8 bits.

Code décimal	Caractère ASCII	Description	Décimal	Caractère	Décimal	Caractère	Décimal	Caractère
0	NUL	Null	32	Space	64	@	96	'
1	SOH	Start of heading	33	!	65	A	97	a
2	STX	Start of text	34	"	66	B	98	b
3	ETX	End of text	35	#	67	C	99	c
4	EOT	End of transmission	36	\$	68	D	100	d
5	ENQ	Enquiry	37	%	69	E	101	e
6	ACQ	Acknowledge	38	&	70	F	102	f
7	BEL	Bell	39	'	71	G	103	g
8	BS	Backspace	40	(72	H	104	h
9	TAB	horizontal tab	41)	73	I	105	i
10	LF	New line feed, new line	42	*	74	J	106	j
11	VT	Vertical tab	43	+	75	K	107	k
12	FF	NP form feed, new page	44	,	76	L	108	l
13	CR	Carriage return	45	-	77	M	109	m
14	SO	Shift out	46	.	78	N	110	n
15	SI	Shift in	47	/	79	O	111	o
16	DLE	Data link espace	48	0	80	P	112	p
17	DC1	Device control 1	49	1	81	Q	113	q
18	DC2	Device control 2	50	2	82	R	114	r
19	DC3	Device control 3	51	3	83	S	115	s
20	DC4	Device control 4	52	4	84	T	116	t
21	NAK	Negative acknowledge	53	5	85	U	117	u
22	SYN	Synchronous idle	54	6	86	V	118	v
23	ETB	End of trans. block	55	7	87	W	119	w
24	CAN	Cancel	56	8	88	X	120	x
25	EM	End of medium	57	9	89	Y	121	y
26	SUB	Substitute	58	:	90	Z	122	z
27	ESC	Escape	59	;	91	[123	{
28	FS	File separator	60	<	92	\	124	
29	GS	Group separator	61	=	93]	125	}
30	RS	Record separator	62	>	94	^	126	~
31	US	Unit separator	63	?	95	_	127	DEL

Exercice 1

Question Réalisez la conversion des nombres suivants dans les autres systèmes de numération (base 10, 2 ou 16) : $(10050)_{10}$, $(10010001)_2$ et $(A3F)_{16}$.

Correction

$$\begin{aligned} 10050_{10} &= 1 \cdot 8192 + 0 \cdot 4096 + 0 \cdot 2048 + 1 \cdot 1024 + 1 \cdot 512 + 1 \cdot 256 \\ &\quad + 0 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ &= (0010\ 0111\ 0100\ 0010)_2 = (2742)_{16} \end{aligned}$$

Exercice 2

On désire utiliser 12 bits pour comptabiliser des objets.

Question 1 Quel est le nombre maximum d'objets qu'il est possible de compter ?

Question 2 Indiquer le numéro du premier et du dernier (dans les systèmes de numération décimale, binaire et hexadécimale).

Exercice 3

On désire compter 65000 objets.

Question 1 Sur combien de bit peut-on réaliser cette opération ?

Question 2 Quel est le numéro du premier et du dernier (dans les systèmes de numération binaire et hexadécimale) ?

Exercice 4

Soit une machine où les nombres entiers sont codés sur 8 bits.

Question 1 Donner le plus grand et le plus petit nombre représentable selon que le codage utilisé est non signé ou signé.

Correction Avec 8 bits, on peut représenter des nombres allant de 0 à 255 ou de -128 à 127.

Par exemple :

- $128_{10} = 1000\ 0000_2$. En passant en complément à 2, on obtient : $0111\ 1111_2$ puis en ajoutant 1, on a : $-128_{10} = 1000\ 0000_2$.
- $127_{10} = 0111\ 1111_2$. En passant en complément à 2, on obtient : $1000\ 0000_2$ puis en ajoutant 1 on a : $-127_{10} = 1000\ 0001_2$.

Question 2 Écrire dans les différents formats signés les nombres décimaux 1, -1, 111 et 55.

Correction

- $1_{10} = 0000\ 0001_2$.
- En réalisant un complément à 2 et en ajoutant 1 : $-1_{10} = 1111\ 1111_2$.

Question 3 Quelles sont inversement les valeurs décimales codées par 4C et B4 suivant les différents codages signés et celui non signé.

Correction

- $4C_{16} = 0100\ 1100$ en soustrayant 1 on obtient $0100\ 1011$. On réalise le complément à 1 : $1011\ 0100 = 180$. 180 étant supérieur à 128, on soustrait 128 et on a $4C_{16} = -52_{10}$.

Exercice 5

Question Effectuez les opérations arithmétiques suivantes dans les systèmes de numération binaire (codé sur 8 bits) : $71 + 35 =$, $15 - 25 =$, $121 - 75 =$, $-51 - 77 =$.

Exercice 6

Question 1 Réaliser la conversion des nombres suivants dans les autres systèmes de numération : $(10050)_{10}$, $(343,56)_{10}$, $(10010001)_2$, $(A3F)_{16}$ et $(1C2A)_{16}$.

Exercice 7

On désire utiliser 12 bits pour comptabiliser des objets.

Question 1 Quel est le nombre maximum d'objets qu'il est possible de compter ?

Question 2 Indiquer le numéro du premier et du dernier (dans les systèmes de numération décimale, binaire et hexadécimale).

Exercice 8

On désire compter 65 000 objets.

Question 1 Sur combien de bit peut-on réaliser cette opération ?

Question 2 Quel est le numéro du premier et du dernier (dans les systèmes de numération binaire et hexadécimale) ?

Exercice 9

Question 1 Effectuez les opérations arithmétiques suivantes dans les systèmes de numération binaire (codé sur 8 bits) : $71 + 35$, $121 - 75$, $15 - 25$ et $-51 - 77$.

Exercice 10

Soit une machine où les nombres sont codés sur 8 bits.

Question 1 Donner le nombre le plus grand et le plus petit nombre représentable selon que le codage utilisé est non signé ou signé.

Question 2 Écrire dans le format signé les nombres décimaux 1, -1, 111 et 55.

Question 3 Quelles sont les valeurs décimales codées par 4C₁₆ et B4₁₆ si le codage est signé ou non ?

Question 4 Un périphérique de la machine lui délivre des données sur 8 bits dans le format valeur absolue + signe, la valeur absolue sur 7 bits est précédée d'un bit de signe valant 1 si positif ou nul, 0 sinon. Il transmet successivement 9A₁₆ puis 3C₁₆, quelles sont les valeurs significatives ?

Exercice 11

Question Écrire dans le format flottant simple précision (IEEE 754) les nombres 1,0, -1,0, 15,25 et -3,26. Les résultats seront donnés en hexadécimal.

Correction On a : $15_{10} = 1111_2$. D'autre part il faut convertir 0,25 en binaire :

$$\begin{array}{rclclcl} 0,25 & \times & 2 & = & 0,5 & = & 0 & + & 0,5 \\ 0,5 & \times & 2 & = & 1,0 & = & 1 & + & 0 \end{array}$$

On a donc : $15,25 = 1111,01 = 1,11101 \cdot 2^3$. Utilisant l'exposant décalé, on a $127 + 3 = 130 = 10000010_2$

0 - 100	0001	0 - 111	0100	0000	0000	0000	0000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

En hexadécimal, on a donc :

$$15,25_{10} = 4174\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$$

Exercice 12

Une mesure est réalisée grâce à un capteur tachymétrique pendant 10 secondes. L'échantillonnage est de 1 kHz. Les données sont écrites dans un fichier texte de deux colonnes (temps et mesure) séparées par des espaces. Les temps mesurés sont compris entre 0 et 99.9999 s. La vitesse mesurée peut être comprise entre -999,9999 et 999,9999 rad s⁻¹.

Question Quelle sera la taille maximale du fichier texte obtenu ?