

# Exercices

Préparation aux oraux de la banque PT Épreuve de « Mathématique et Algorithmique »

```
Exercice 6 – Tracer de fonction – f(x) = 0 \dots 3
Exercice 11 – Tri de liste ...... 4
Exercice 12 – Courbes paramétrées . . . . . . . . . . . . . . . . 4
Exercice 2 – Intégration – Corrigé . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
```





# Exercice 1 - Arithmétique

- 1. Soit l'entier n=1234. Quel est le quotient, noté q, dans la division euclidienne de n par 10? Quel est le reste ? Que se passe-t-il si on recommence la division par 10 à partir de q?
- 2. Écrire la suite d'instructions calculant la somme des cubes des chiffres de l'entier 1234.
- 3. Écrire une fonction somcube, d'argument n, renvoyant la somme des cubes des chiffres du nombre entier n.
- 4. Trouver tous les nombres entiers inférieurs à 1000 égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.
- 5. En modifiant les instructions de la fonction somcube, écrire une fonction somcube 2 qui convertit l'entier n en une chaîne de caractères permettant ainsi la récupération de ses chiffres sous forme de caractères. Cette nouvelle fonction renvoie toujours la somme des cubes des chiffres de l'entier n.

## Exercice 2 - Intégration

On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction donnée par des points dont les coordonnées sont situées dans un fichier.

 Le fichier ex\_01.txt, situé dans le sous-répertoire data du répertoire de travail, contient une quinzaine de lignes selon le modèle suivant :

Chaque ligne contient deux valeurs flottantes séparées par un point-virgule, représentant respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point. Les points sont ordonnés par abscisses croissantes. Ouvrir le fichier en lecture, le lire et construire la liste LX des abscisses et la liste LY des ordonnées contenues dans ce fichier.

- 2. Représenter les points sur une figure.
- 3. Les points précédents sont situés sur la courbe représentative d'une fonction f. On souhaite déterminer une valeur approchée de l'intégrale I de cette fonction sur le segment où elle est définie. Écrire une fonction trapeze, d'arguments deux listes y et x de même longueur n, renvoyant:

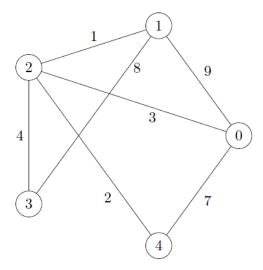
$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \frac{y_i + y_{i-1}}{2}.$$

trapeze(LY,LX) renvoie donc une valeur approchée de l'intégrale I par la méthode des trapèzes.

4. En utilisant la méthode d'intégration numérique trapz de la sous-bibliothèque scipy.integrate du langage Python ou la méthode inttrap du logiciel Scilab, retrouver la valeur approchée de l'intégrale *I*.

#### **Exercice 3**

On considère le graphe G suivant, où le nombre situé sur l'arête joignant deux sommets est leur distance, supposée entière :



- 1. Construire la matrice  $(M_{ij})_{0 \le i,j \le 4}$ , matrice de distances du graphe G, définie par : « pour tous les indices  $i,j,M_{ij}$  représente la distance
  - « pour tous les indices i, j,  $M_{ij}$  represente la distance entre les sommets i et j, ou encore la longueur de l'arête reliant les sommets i et j ».

On convient que, lorsque les sommets ne sont pas reliés, cette distance vaut -1. La distance du sommet i à lui-même est, bien sûr, égale à 0.

- 2. Écrire une suite d'instructions permettant de dresser à partir de la matrice M la liste des voisins du sommet 4.
- 3. Écrire une fonction voisins, d'argument un sommet i, renvoyant la liste des voisins du sommet i.
- 4. Écrire une fonction degre, d'argument un sommet *i*, renvoyant le nombre des voisins du sommet *i*, c'est-à-dire le nombre d'arêtes issues de *i*.
- 5. Écrire une fonction longueur, d'argument une liste L de sommets de G, renvoyant la longueur du trajet d'écrit par cette liste L, c'est-à-dire la somme des longueurs des arêtes empruntées. Si le trajet n'est pas possible, la fonction renverra -1.

## Exercice 4 - Gestion de liste

Soit un entier naturel n non nul et une liste t de longueur n dont les termes valent 0 ou 1. Le but de cet exercice est de trouver le nombre maximal de 0 contigus dans t (c'est-à-dire figurant dans des cases consécutives). Par exemple, le nombre maximal de zéros contigus de la liste t1 suivante vaut 4:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
t1[i]	0	1	1	1	0	0	0	1
i	8	9	10	11	12	13	14	
t1[i]	0	1	1	0	0	0	0	

1. Écrire une fonction nombreZeros (t,i), prenant en paramètres une liste t, de longueur n, et un indice i compris entre 0 et n-1, et renvoyant:

$$\begin{cases}
0, \text{ si } t[i] = 1 \\
\text{le nombre de zéros consécutifs dans t} \\
\text{à partir de t[i] inclus, si t[i]} = 0.
\end{cases}$$



Par exemple, les appels nombreZeros(t1,4), nombreZeros(t1,1) et nombreZeros(t1,8) renvoient respectivement les valeurs 3,0 et 1.

- 2. Comment obtenir le nombre maximal de zéros contigus d'une liste t connaissant la liste des nombreZeros(t,i) pour  $0 \le i \le n-1$ ? En déduire une fonction nombreZerosMax(t), de paramètre t, renvoyant le nombre maximal de 0 contigus d'une liste t non vide. On utilisera la fonction nombreZeros.
- 3. Quelle est la complexité de la fonction nombreZerosMax(t) construite à la question précédente?
- 4. Trouver un moyen simple, toujours en utilisant la fonction nombreZeros, d'obtenir un algorithme plus performant.

#### Exercice 5 – Probabilités

Soient n un entier naturel strictement positif et p un réel compris entre 0 et 1. On considère X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb N$  sur un espace probabilisé donné. X suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = np$  et Y suit une loi binomiale de paramètres (n,p).

- 1. Définir une fonction Px, d'arguments k, n et p, renvoyant la valeur de P(X=k). k! (factorielle k) s'obtient par factorial(k) en Python (bibliothèque math) et prod(1:k) en Scilab. Déterminer, pour n=30 et p=0,1, la liste des valeurs de P(X=k) pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \le k \le 30$ .
- 2. Définir une fonction Py, d'arguments k, n et p, renvoyant la valeur de P(Y=k). On pourra utiliser comb de la sous-bibliothèque scipy.misc en Python et binomial en Scilab.
  - Déterminer, pour n = 30 et p = 0, 1, la liste des valeurs de P(Y = k) pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \le k \le 30$ .
- 3. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On rappelle que, sous certaines conditions sur n et p, la probabilité P(Y = k) peut être approchée par P(X = k). Déterminer une fonction Ecart d'arguments n et p, renvoyant le plus grand des nombres |P(Y = k) P(X = k)|, pour  $0 \le k \le n$ .
- 4. Soit e un réel strictement positif. Déterminer une fonction  $\mathbb{N}$ , d'arguments e et p, renvoyant le plus petit entier n tel que  $\mathsf{Ecart}(n, p)$  soit inférieur ou égal à e.
- 5. Faire l'application numérique dans les quatre cas suivants :
  - p = 0,075 avec e = 0,008 et e = 0,005;
  - p = 0,1 avec e = 0,008 et e = 0,005. Interpréter le dernier résultat.

# Exercice 6 – f(x) = 0

On considère la fonction g définie sur [0,2[ par :

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 \le x < 1\\ 1 & \text{pour } 1 \le x < 2 \end{cases}$$

1. Définir la fonction g. Tracer sa courbe représentative sur [0,2[, c'est-à-dire la ligne brisée reliant les points (x,g(x)) pour x variant de 0 à 1,99 avec un pas de 0,01.

2. Définir une fonction f donnée de manière récursive sur  $[0,+\infty[$  par :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } 0 \le x < 2\\ \sqrt{x} f(x-2) & \text{pour } x \ge 2 \end{cases}$$

- 3. Tracer la courbe représentative de f sur [0,6].
- 4. Écrire les instructions permettant de calculer, à  $10^{-2}$  près, la plus petite valeur  $\alpha > 0$  telle que  $f(\alpha) > 4$ .

## Exercice 7 - Algorithmique

On considère le code Python de la fonction d suivante :

#### ■ Python

```
def d(n):
   L =[1]
   for nombre in range(2,n+1):
      if n%nombre == 0:
        L.append(nombre)
   return L
```

- 1. Quel est le résultat de l'appel d (4) ? Puis de l'appel d (10) ? Que fait la fonction d?
- 2. Un diviseur non-trivial d'un entier n est un diviseur de n différent de 1 et de n. Écrire une fonction DNT, d'argument n, renvoyant la liste des diviseurs non-triviaux de l'entier n.
- 3. Écrire une fonction somme CarresDNT, d'argument n, renvoyant la somme des carrés des diviseurs nontriviaux de l'entier n.
- 4. Écrire la suite des instructions permettant d'afficher tous les nombres entiers inférieurs à 1000 et égaux à la somme des carrés de leurs diviseurs non-triviaux. Que peut-on conjecturer?

## Exercice 8 - Chiffrer - déchiffrer

Soit n un entier vérifiant  $n \le 26$ . On souhaite écrire un programme qui code un mot en décalant chaque lettre de l'alphabet de n lettres. Par exemple pour n=3, le décalage sera le suivant :

Avant décalage	a	b	С	 X	у	Z
Après décalage	d	e	f	 a	b	c

Le mot oralensam devient ainsi rudohqvdp.

- 1. Définir une chaîne de caractères contenant toutes les lettres dans l'ordre alphabétique (caractères en minuscule).
- Écrire une fonction decalage, d'argument un entier n, renvoyant une chaîne de caractères contenant toutes les lettres dans l'ordre alphabétique, décalées de n, comme indiqué ci-dessus.
- 3. Écrire une fonction indices, d'arguments un caractère x et une chaîne de caractères phrase, renvoyant une liste contenant les indices de x dans phrase si x est une lettre de phrase et une liste vide sinon
- 4. Écrire une fonction codage d'arguments un entier n et une chaîne de caractères phrase, renvoyant phrase codé avec un décalage de n lettres.
- 5. Comment peut-on décoder un mot codé?





## Exercice 9 - Suite

On pose M=20 et m=10. À un nombre c quelconque, on associe la suite  $(u_n)_n \ge 0$  définie par  $u_0=0$  et  $u_{n+1}=u_n^2+c$  pour  $n\ge 0$ .

S'il existe, on note k le plus petit entier tel que l'on ait  $0 \le k \le m$  et  $|u_k| > M$ . On définit alors la fonction f par

$$f: c \mapsto \begin{cases} k \text{ s'il existe} \\ m+1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

- 1. Donner le code définissant la fonction f.
- 2. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f sur [-2;2], en créant une liste LX de 401 valeurs équiréparties entre -2 et 2 inclus et en utilisant les fonctions plot et show de la sous-bibliothèque matplotlib.pyplot.
- 3. Construire le tableau des valeurs f(x + iy) où x prend 101 valeurs comprises entre -2 et 0,5 et y prend 101 valeurs entre -1,1 et 1,1. *On rappelle que le nombre complexe i est représenté par* 1 *j* . *Par exemple, le complexe* 1 + 2i *est représenté par* 1 + 2j.
- 4. Tracer l'image que code ce tableau. On pourra utiliser les fonctions imshow et show de la sous- bibliothèque matplotlib.pyplot. Quels paramètres peut-on modifier pour obtenir une meilleure résolution?

#### Exercice 10 - Calcul matriciel

Dans cet exercice, avec Python on pourra utiliser la fonction array de la bibliothèque numpy, ainsi que la fonction eig de la sous-bibliothèque numpy. linalg. Avec Scilab, on utilisera spec.

1. Créer deux matrices  $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  et  $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
 et les faire afficher.

- 2. Créer une fonction test, d'argument M, renvoyant la valeur n si M est une matrice carrée d'ordre n (entier naturel non nul) et zéro dans tous les autres cas. Vérifier la fonction test sur R et sur S.
- 3. Le fichier ex\_006.txt, situé dans le sousrépertoire data du répertoire de travail, contient un tableau de valeurs flottantes. Lire ce tableau dans le fichier et vérifier qu'il correspond bien à une matrice carrée d'ordre 5 que l'on désignera par M1.
- 4. Déterminer les valeurs propres de la matrice M1.
- 5. Créer une fonction dans Intervalle, d'arguments une liste L et deux réels a et b, renvoyant la valeur True si tous les éléments de la liste L sont dans l'intervalle [a,b] et False sinon. Vérifier que toutes les valeurs propres de la matrice M1 sont dans l'intervalle [0,1].

#### Exercice 11 - Tri de liste

Soit N un entier naturel non nul. On cherche à trier une liste L d'entiers naturels strictement inférieurs à N.

1. Écrire une fonction comptage, d'arguments L et N, renvoyant une liste P dont le k-ième élément dé-

- signe le nombre d'occurences de l'entier k dans la liste I.
- Utiliser la liste P pour en déduire une fonction tri, d'arguments L et N, renvoyant la liste L triée dans l'ordre croissant.
- 3. Tester la fonction tri sur une liste de 20 entiers inférieurs ou égaux à 5, tirés aléatoirement.
- 4. Quelle est la complexité temporelle de cet algorithme? La comparer à la complexité d'un tri par insertion ou d'un tri fusion.

## Exercice 12 - Courbes paramétrées

1. Deux paramètres b et w valant respectivement 0,5 et 6,0, définir trois fonctions d'une variable t renvoyant des couples :

$$\begin{cases} p:t \mapsto & (\cos(t) + b\cos(wt), \sin(t) + b\sin(wt)) \\ v:t \mapsto & (-\sin(t) - bw\sin(wt), \\ & \cos(t) + bw\cos(wt)) \\ a:t \mapsto & (-\cos(t) - bw^2\cos(wt), \\ & -\sin(t) - bw^2\sin(wt)) \end{cases}$$

Vérifier ces fonctions sur un exemple.

p(t) = (x(t), y(t)) désigne la position dans le plan d'une masse ponctuelle mobile au cours du temps, v(t) = (x'(t), y'(t)), sa vitesse, et a(t) = (x''(t), y''(t)), son accélération.

- 2. Construire la liste L des points p(t), pour t variant de  $-\pi$  à  $\pi$  avec un pas de discrétisation  $\delta t$  vérifiant  $\delta t = 0,01 \ \pi$ .
- 3. Faire tracer dans le plan muni d'un repère orthonormal la ligne polygonale reliant les points p(t) de la liste L.
- 4. Définir puis tester la fonction *c* d'une variable *t* qui renvoie le couple des coordonnées du centre de courbure donnée par :

$$c(t) = (x(t) - dy'(t), y(t) + dx'(t))$$

où

$$d = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}.$$

- Rajouter sur le graphique précédent la ligne décrite par les centres de courbure, avec la même discrétisation en temps.
- 6. Calculer la longueur de la ligne polygonale reliant les points p(t), pour différents pas de discrétisation  $\delta t$ . Observer l'évolution de cette longueur lorsque  $\delta t$  diminue.



# Exercice 1 - Arithmétique - Corrigé

```
# Question 1
n = 1234
q = n//10
r = n%q
# r contient le nombre d'unités de n
```

```
# Question 2
s=0
while n!=0:
    q=n//10
    r = n%10
    #print(r)
    s=s+r**3
    n=q
```

```
# Question 3
def somcube(n):
    """
    Entrées :
     * n, int : nombre
    Sortie :
     * s, int : somme des cubes du chiffre n
    """
    s=0
    while n!=0:
        q=n//10
        r = n%10
        s=s+r**3
        n=q
    return s
```

```
# Question 4
res = []
for i in range (10001):
    if i == somcube(i):
        res.append(i)
```

```
# Question 5
def somcube2(n):
    """
    Entrées :
     * n, int : nombre
    Sortie :
     * s, int : somme des cubes du chiffre n
    """
    nombre=str(n)
    s=0
    for chiffre in nombre :
        s = s+int(chiffre)**3
    return s

print(somcube2(1234))
```

## Exercice 2 - Intégration - Corrigé

```
# Question 1
# Le répertoire courant est Exercice_02.
# Le sous-répertoire data contient le
# fichier ex_01.txt.
# On ouvre le fichier en lecture)
fid = open("data\ex_01.txt")
# On charge le fichier dans une liste.
# Chaque élément de la liste correspond à
# chaque ligne sous forme de chaîne de caractère.
file = fid.readlines()
# On ferme le fichier
fid.close()
LX = []
LY=[]
for ligne in file:
   ligne = ligne.split(';')
   LX.append(float(ligne[0]))
   LY.append(float(ligne[1]))
```

```
# Question 2
# =======

# Ne pas oublier de charger préalablement
# import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(LX,LY)
plt.show()
```

```
# Question 3
# ========
def trapeze(x,y):
    res = 0
    for i in range(1,len(LX)):
        res = res + (LX[i]-LX[i-1])*0.5*(LY[i]+LY[i-1])
    return res
print(trapeze(LX,LY))
```

```
# Question 4
# =========
from scipy.integrate import trapz
# Attention al'ordre des arguments dans
# la fonction trapz : les_y puis les_x
# Après l'import, help(trapz) permet d'avoir
# de l'aide sur la fonction.
print(trapz(LY,LX))
```

# Exercice 3 - Graphe - Corrigé

```
# Question 1
# ========

# Matrices avec des listes
M=[[0,9,3,-1,7],
        [9,0,1,8,-1],
        [3,1,0,4,2],
        [-1,8,4,0,-1],
        [7,-1,2,-1,0]]
```



```
# Question 2 & 3
def voisins(M,i):
   Entrées :
     * M(1st) : graphe
     * i : noeud considéré
   Sortie :
     * v(lst) : liste des voisins
   0.00
   v = []
   # On cherche les voisins sur une ligne
   # (on pourrait le faire sur une colonne)
   for j in range(len(M[i])):
       if M[i][j]>0:
          v.append(j)
   return v
# print(voisins(M,0))
```

```
# Question 4
# ========
def degre(M,i):
    """
    Entrées :
     * M(1st) : graphe
     * i : noeud considéré
    Sortie :
     * (int) : nomnbre de voisins
    """
    return len(voisins(M,i))
```

## Exercice 4

```
# Question 1
# ========

def nombreZeros(t,i):
    if t[i]==1:
        return 0
    else:
        res = 1
        j=i+1
        while j<len(t) and t[j]==0:
            res = res+1
            j=j+1
    return res
# t1=[0,1,1,1,0,0,0,1,0,1,1,0,0,0,0]
# print(nombreZeros(t1,4))
# print(nombreZeros(t1,1))
# print(nombreZeros(t1,8))</pre>
```

```
# Question 2
# ========

def nombreZerosMax(t):
    max=nombreZeros(t,0)
    for i in range(1,len(t)):
        tmp = nombreZeros(t,i)
        if tmp>max:
            max = tmp
    return max
print(nombreZerosMax(t1))
```

```
# Question 3 et 4
# ===========
```

# Exercice 6 - Corrigé

```
# Import de fonctions
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sqrt
# Question 1
# ----
def g(x):
   if x \ge 0 and x < 1:
       return x
    elif x>1 and x<2:
       return 1
xx = [0]
t=0
while t \le 1.99:
   t=t+0.01
    xx.append(t)
yy = [g(x) \text{ for } x \text{ in } xx]
plt.plot(xx,yy)
plt.show()
```



```
# Question 2
# ========

def f(x):
    if x>=0 and x<2 :
        return g(x)
    else : # x>=2
        return sqrt(x)*f(x-2)
```

```
# Question 3
# ========

xxx = [0]
t=0
while t<=6:
    t=t+0.01
    xxx.append(t)
yyy = [f(x) for x in xxx]

plt.plot(xxx,yyy)
plt.show()</pre>
```

```
# Question 4
# On cherche aresoudre f(x)-4 = 0 sur
# l'intervalle [5,6]
def h(x):
   res = f(x)-4
   return res
a = 5.
b = 6.
while (b-a)>0.01:
   m = (a+b)/2
   if h(m)>0:
       b=m
   else :
       a=m
m=(a+b)/2
if h(m)<0:
   m = m + abs(b-a)
print(m,h(m))
```

# Exercice 7 - Corrigé

```
# Question 3
# =======
def sommeCarresDNT_01(n):
  L = DNT_01(n)
   res = [x**2 for x in L]
   return sum(res)
def sommeCarresDNT_02(n):
  L = DNT_01(n)
   res = 0
   for x in L:
      res = res + x*x
   return res
def sommeCarresDNT_03(n):
   L = DNT_01(n)
   res = 0
   for i in range(len(L)):
      res = res + L[i]**2
   return res
print(sommeCarresDNT_01(15), sommeCarresDNT_02(15),
   sommeCarresDNT_03(15))
```

```
# Question 4
# ========
from math import sqrt
for i in range(1001):
    if i == sommeCarresDNT_01(i) :
        print(str(i)+"\t"+str(sqrt(i)))
# Conjecture les nombres recherchés sont
# les carrés des nombres premiers.
```

# Exercice 8 - Corrigé

```
# Question 1
# ========
chaine = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
```



```
# Question 3
# ========

def indices(x,phrase):
    """
    Recherche des indices de x dans phrase
    Entrée :
        * x(str) : un caractère
        * phrase(str)
    Sortie :
        * res(lst) : liste des indices de x
    """

res = []
for i in range(len(phrase)):
    if phrase[i] == x:
        res.append(i)
    return res

print(indices("a","akjlkjalkjlkjalkjlkja"))
```

```
# Question 4
# ========

def codage(n,phrase):
    ch = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
    ch_c = decalage(ch,n)
    print(ch_c)
    phrase_c=""
    for c in phrase :
        i = indices(c,ch)
        i = i[0]
        phrase_c = phrase_c+ch_c[i]
    return phrase_c
print(codage(3,"oralensam"))
```

Exercice 9 - Corrigé Exercice 10 - Corrigé Exercice 11 - Corrigé Exercice 12 - Corrigé