Problème de Cauchy

Rappel — Problème de Cauchy. Le problème consiste à trouver les fonctions y de $[0,T] \to \mathbb{R}^n$ telles que

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{avec } t_0 \in [0,T] \text{ et } y_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donnés}\end{array}\right. \qquad \text{avec } t_0 \in [0,T] \text{ et } y_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donnés.}$$

L'existence et l'unicité de la solution peut se démontrer en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Définition Fonction lipschitzienne
f est lipschitzienne en y s'il existe un réel $k>0$ tel que $\forall y(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall z(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0,T]$, alors

$$||f(t,y(t)) - f(t,z(t))|| \leq k||y(t) - z(t)||$$

Théorème Théorème de Cauchy – Lipschitz
Soit f une fonction de $[0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et lipschitzienne en y.
Alors, $\forall t_0 \in [0,T]$ et $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy admet une unique solution définie sur $[0,T]$.

Méthode d'Euler

Pour un temps de simulation compris entre t_0 et t_1, si on choisi un nombre n d'échantillons, alors le pas d'intégration est défini par $h = \dfrac{t_1 - t_0}{n}$. (On a donc $t_i = t_0 + h \cdot i$ avec $i \in [0, n]$.)

Résultat En intégrant l'équation du problème de Cauchy sur un intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, on a :

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \mathrm{d}y = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t \Longleftrightarrow y_{i+1} - y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t \text{ et donc : } y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t$$

R En utilisant la méthode des rectangles à gauche, $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t \simeq h \cdot f(t_i, y(t_i))$.

Méthode d'Euler explicite

À l'instant i, $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ peut être approximé par $\dfrac{\mathrm{d}y(t_i)}{\mathrm{d}t} \simeq \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$. Ainsi, $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$.

Méthode d'Euler implicite

À l'instant i, $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ peut être approximé par $\dfrac{\mathrm{d}y(t_i)}{\mathrm{d}t} \simeq \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}$. Ainsi, $y_i = y_{i-1} + hf(t_{i-1}, y_i)$ ou encore $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_{i+1})$.

Exemples

Reformulation d'équations différentielles en vue de leur résolution numérique.

Équation différentielle du premier ordre à coefficients constants : $\omega(t) + \tau\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_c$:

- schéma d'Euler explicite : on a $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} \simeq \dfrac{\omega_{k+1} - \omega_k}{h} \Rightarrow \omega_k + \tau\dfrac{\omega_{k+1} - \omega_k}{h} = \omega_c \Leftrightarrow \omega_{k+1} = \dfrac{h}{\tau}(\omega_c - \omega_k) + \omega_k$;
- schéma d'Euler implicite : on a $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} \simeq \dfrac{\omega_k - \omega_{k-1}}{h} \Rightarrow \omega_k + \tau\dfrac{\omega_k - \omega_{k-1}}{h} = \omega_c \Leftrightarrow \omega_k = \dfrac{h\omega_c + \tau\omega_{k-1}}{h + \tau}$.

Reformulation de $\omega(t)f(t) + \tau\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}g(t) = \omega_c h(t)$:

- Euler explicite : $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} \simeq \dfrac{\omega_{k+1}-\omega_k}{h} \Rightarrow \omega_k f_k + \tau \dfrac{\omega_{k+1}-\omega_k}{h} g_k = \omega_c h_k \Leftrightarrow \omega_{k+1} = \dfrac{h}{\tau g_k}\left(\omega_c h_k - \omega_k f_k\right) + \omega_k$;