

## Exercices

Préparation aux oraux de la banque PT  
Épreuve de Mathématique et Algorithmique

## Exercice 1

1. Soit l'entier  $n = 1234$ . Quel est le quotient, noté  $q$ , dans la division euclidienne de  $n$  par 10 ? Quel est le reste ? Que se passe-t-il si on recommence la division par 10 à partir de  $q$  ?
2. Écrire la suite d'instructions calculant la somme des cubes des chiffres de l'entier 1234.
3. Écrire une fonction `somcube`, d'argument  $n$ , renvoyant la somme des cubes des chiffres du nombre entier  $n$ .
4. Trouver tous les nombres entiers inférieurs à 1000 égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.
5. En modifiant les instructions de la fonction `somcube`, écrire une fonction `somcube2` qui convertit l'entier  $n$  en une chaîne de caractères permettant ainsi la récupération de ses chiffres sous forme de caractères. Cette nouvelle fonction renvoie toujours la somme des cubes des chiffres de l'entier  $n$ .

## Exercice 2

On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction donnée par des points dont les coordonnées sont situées dans un fichier.

1. Le fichier `ex_001.csv`, situé dans le sous-répertoire `data` du répertoire de travail, contient une quinzaine de lignes selon le modèle suivant :

```
0.0;1.00988282142
```

```
0.1;1.07221264497
```

Chaque ligne contient deux valeurs flottantes séparées par un point-virgule, représentant respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point. Les points sont ordonnés par abscisses croissantes. Ouvrir le fichier en lecture, le lire et construire la liste `LX` des abscisses et la liste `LY` des ordonnées contenues dans ce fichier.

2. Représenter les points sur une figure.
3. Les points précédents sont situés sur la courbe représentative d'une fonction  $f$ . On souhaite déterminer une valeur approchée de l'intégrale  $I$  de cette fonction sur le segment où elle est définie. Écrire une fonction `trapeze`, d'arguments deux listes  $y$  et  $x$  de même longueur  $n$ , renvoyant :

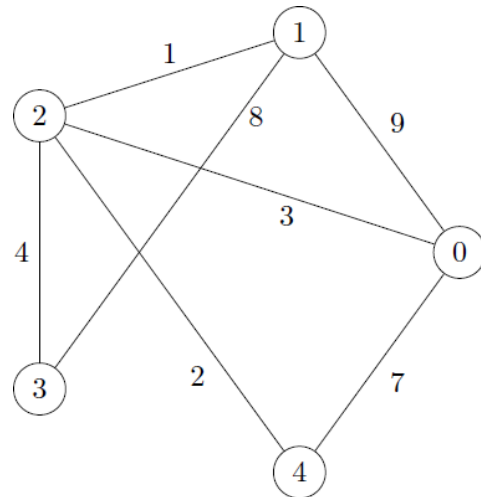
$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \frac{y_i + y_{i-1}}{2}.$$

`trapeze` (`LY`, `LX`) renvoie donc une valeur approchée de l'intégrale  $I$  par la méthode des trapèzes.

4. En utilisant la méthode d'intégration numérique `trapz` de la sous-bibliothèque `scipy.integrate` du langage Python ou la méthode `inttrap` du logiciel Scilab, retrouver la valeur approchée de l'intégrale  $I$ .

## Exercice 3

On considère le graphe  $G$  suivant, où le nombre situé sur l'arête joignant deux sommets est leur distance, supposée entière :



1. Construire la matrice  $(M_{ij})_{0 \leq i, j \leq 4}$ , matrice de distances du graphe  $G$ , définie par : « pour tous les indices  $i, j$ ,  $M_{ij}$  représente la distance entre les sommets  $i$  et  $j$ , ou encore la longueur de l'arête reliant les sommets  $i$  et  $j$  ». On convient que, lorsque les sommets ne sont pas reliés, cette distance vaut -1. La distance du sommet  $i$  à lui-même est, bien sûr, égale à 0.
2. Écrire une suite d'instructions permettant de dresser à partir de la matrice  $M$  la liste des voisins du sommet 4.
3. Écrire une fonction `voisins`, d'argument un sommet  $i$ , renvoyant la liste des voisins du sommet  $i$ .
4. Écrire une fonction `degre`, d'argument un sommet  $i$ , renvoyant le nombre des voisins du sommet  $i$ , c'est-à-dire le nombre d'arêtes issues de  $i$ .
5. Écrire une fonction `longueur`, d'argument une liste  $L$  de sommets de  $G$ , renvoyant la longueur du trajet d'écrit par cette liste  $L$ , c'est-à-dire la somme des longueurs des arêtes empruntées. Si le trajet n'est pas possible, la fonction renverra -1.

## Exercice 4

Soit un entier naturel  $n$  non nul et une liste  $t$  de longueur  $n$  dont les termes valent 0 ou 1. Le but de cet exercice est de trouver le nombre maximal de 0 contigus dans  $t$  (c'est-à-dire figurant dans des cases consécutives). Par exemple, le nombre maximal de zéros contigus de la liste  $t_1$  suivante vaut 4 :

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$t_1[i]$	0	1	1	1	0	0	0	1

i	8	9	10	11	12	13	14
$t_1[i]$	0	1	1	0	0	0	0

1. Écrire une fonction `nombreZeros(t,i)`, prenant en paramètres une liste  $t$ , de longueur  $n$ , et un indice  $i$  compris entre 0 et  $n-1$ , et renvoyant :

$$\begin{cases} 0, & \text{si } t[i] = 1 \\ \text{le nombre de zéros consécutifs dans } t \\ & \text{à partir de } t[i] \text{ inclus, si } t[i] = 0. \end{cases}$$

Par exemple, les appels `nombreZeros(t1,4)`, `nombreZeros(t1,1)` et `nombreZeros(t1,8)` renvoient respectivement les valeurs 3, 0 et 1.

2. Comment obtenir le nombre maximal de zéros contigus d'une liste `t` connaissant la liste des `nombreZeros(t,i)` pour  $0 \leq i \leq n-1$ ? En déduire une fonction `nombreZerosMax(t)`, de paramètre `t`, renvoyant le nombre maximal de 0 contigus d'une liste `t` non vide. On utilisera la fonction `nombreZeros`.
3. Quelle est la complexité de la fonction `nombreZerosMax(t)` construite à la question précédente?
4. Trouver un moyen simple, toujours en utilisant la fonction `nombreZeros`, d'obtenir un algorithme plus performant.

### Exercice 5

Soient  $n$  un entier naturel strictement positif et  $p$  un réel compris entre 0 et 1. On considère  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  sur un espace probabilisé donné.  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = np$  et  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres  $(n, p)$ .

1. Définir une fonction `Px`, d'arguments  $k$ ,  $n$  et  $p$ , ren-

voyant la valeur de  $P(X = k)$ .  $k!$  (factorielle  $k$ ) s'obtient par `factorial(k)` en Python (bibliothèque `math`) et `prod(1 : k)` en Scilab. Déterminer, pour  $n = 30$  et  $p = 0,1$ , la liste des valeurs de  $P(X = k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq 30$ .

2. Définir une fonction `Py`, d'arguments  $k$ ,  $n$  et  $p$ , renvoyant la valeur de  $P(Y = k)$ . On pourra utiliser `comb` de la sous-bibliothèque `scipy.misc` en Python et `binomial` en Scilab.

Déterminer, pour  $n = 30$  et  $p = 0,1$ , la liste des valeurs de  $P(Y = k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq 30$ .

3. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On rappelle que, sous certaines conditions sur  $n$  et  $p$ , la probabilité  $P(Y = k)$  peut être approchée par  $P(X = k)$ . Déterminer une fonction `Ecart` d'arguments  $n$  et  $p$ , renvoyant le plus grand des nombres  $|P(Y = k) - P(X = k)|$ , pour  $0 \leq k \leq n$ .
4. Soit  $e$  un réel strictement positif. Déterminer une fonction `N`, d'arguments  $e$  et  $p$ , renvoyant le plus petit entier  $n$  tel que `Ecart(n, p)` soit inférieur ou égal à  $e$ .

5. Faire l'application numérique dans les quatre cas suivants :

- $p = 0,075$  avec  $e = 0,008$  et  $e = 0,005$ ;
- $p = 0,1$  avec  $e = 0,008$  et  $e = 0,005$ . Interpréter le dernier résultat.