L’algorithme d’Euclide permet, étant donnés deux entiers *a* et *b*, de calculer leur plus grand commun diviseur (pgcd) *d*. Cet algorithme se base sur la propriété suivante :

où *a* % *b* représente le reste de la division euclidienne de *a* par *b*.

1. Ecrire une fonction récursive pgcd(a,b)qui calcule le plus grand commun diviseur de deux entiers en utilisant l’algorithme d’Euclide.

Le théorème de Bézout nous assure également l’existence de deux entiers *u* et *v* tels que :

*a.u* + *b.v* = *d* (*u* et *v* sont des coefficients de Bézout de *a* et *b*).

Une version étendue de l’algorithme d’Euclide permet de calculer, en plus du pgcd *d* des valeurs possibles pour les coefficients de Bézout *u* et *v*.

Cet algorithme prend en entrée deux entiers *a* et *b*. Il procède de la manière suivante :

* Si *b* = 0 alors *d* = *a*, *u* = 1 et *v* = 0.
* Sinon, on applique récursivement l’algorithme sur les entiers *b* et (*a* % *b*).

On obtient ainsi *d*’, *u*’ et *v*’ tels que :

*d*’ = pgcd(*b*, *a* % b) ; et : *b.u*’ + (*a* % *b*).*v’* = *d’*

On en déduit la solution pour *a* et b grâce aux égalités :

*d* = *d’*, *u* = *v’* et *v* = *u*’ – (*a*//*b*).*v’*

1. En déduire une fonction bezoutqui étant donnés deux entiers *a* et *b* calcule le triplet (*d*,*u*,*v*) comme expliqué ci-dessus.