TP

Exercices issus de «L'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses»

Frédéric Butin

Savoirs et compétences :

Exercice 1 – Opérations sur les polynômes – 2.11.3 p.50

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Un polynôme $P=\sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{R}[X]$ de degré n est représenté dans cet exercice par le tableau $P=[a_0,...,a_n]$.

1. Créer une fonction `affiche_poly` qui permet d'afficher un polynôme sous la forme $P=\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$.
2. Créer une fonction `degre_poly` qui calcule le degré d'un polynôme.
3. Implémenter la somme, le produit et la multiplication par un scalaire comme des fonctions notées `add_poly`, `mul_poly` et `mul_sca_poly`.
4. Créer une fonction `prsc_poly` qui calcule le prduit scalaire canonique de deux polynômes.
5. Créer une fonction `deriv_poly` qui calcule la dérivée d'un polynôme.

Exercice 2 – Produits polynômes – 2.11.20 p.65

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Un polynôme $P=\sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{R}[X]$ de degré n est représenté dans cet exercice par le tableau $P=[a_0,...,a_n]$.

1. Créer une fonction `affiche_poly` qui permet d'afficher un polynôme sous la forme $P=\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$.
2. Créer une fonction `degre_poly` qui calcule le degré d'un polynôme.
3. Implémenter le produit de deux polynômes. On notera `mul_poly` cette fonction. Donner sa complexité.

On suppose désormais que $n=2^k=2m$. La méthode qui suit permet de calculer le produit de deux polynômes en utilisant le principe «diviser pour régner».

On pose $P=P_1+X^mP_2$ et $Q=Q_1+X^mQ_2$, où P_1 et Q_1 sont de degré strictement inférieur à m. Ainsi, $PQ=P_1Q_1+X^m(P_1Q_2+Q_1P_2)+X^nP_2Q_2$.

1. Calculer le produit de deux polynômes de degré strictement inférieur à n revient donc à calculer 4 produits de deux polynômes de degré inférieur à $\frac{n}{2}$. Implémenter cet algorithme en une fonction `mul_poly_div`. Quelle est sa complexité? Qu'en conclure?
2. Une autre méthode de calcul consiste à poser $R_1=P_1Q_1$, $R_2=P_2Q_2$ et $R_3=(P_1+P_2)(Q_1+Q_2)$. Expliciter PQ en fonction des polynômes R_1, R_2, R_3. En déduire un algorithme (appelé algorithme de Karatsuba) permettant le calcul de PQ que l'on implémentera en une fonction `mul_poly_kara`. Comparer la complexité de cet algorithme à celle des algorithmes des questions précédentes.
3. Que faire quand n n'est pas de la forme 2^k.

Exercice 3 – Courbes en polaires – 4.6.25 p.111

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère Γ_n en coordonnées polaires définie par :

$$\sigma_n(\theta)=\cos^3(n\theta)-\sin^3(n\theta).$$

1. Représenter la courbe Γ_0.
2. Représenter sur un même graphique les courbes Γ_j, pour $j\in[\![0,3]\!]$.

Exercice 4 – Fonction de Takagi – 4.6.26 p.112

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

La fonction de Takagi est définie sur $[0,1]$ par $T: x\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\left(2^k x\right)}{2^k}$, où $d(y)$ représente la distance de y à l'entier le plus proche. On peut montrer que cette fonction est continue sur $[0,1]$ mais nulle part dérivable.

1. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, majorer $||T-T_n||_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|T(x)-T_n(x)|$ où $T_n: x\mapsto \sum_{k=0}^{n}\frac{d\left(2^k x\right)}{2^k}$.
2. Représenter le graphe de cette fonction, appelé la courbe du blanc-manger.

Exercice 5 – Modèle logistique – 4.6.27 p.113

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Pour tout $a \in]0,3]$, on considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \left[0, 1+\frac{1}{a}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (1+a(1-u_n))u_n$. Cette suite représente, à un facteur près, la population d'une espèce.

1. Pour $a=1$ et $u_0 = 0,5$, représenter graphiquement les 10 premiers termes de la suite.
2. On fixe $u_0 = 0,5$. Créer une procédure qui reçoit en arguments a_1, c, a_2 et permet de représenter les termes u_n pour $n \in [\![100,200]\!]$ et $a = a_1 + jc$, $j \in [\![0, \lfloor \frac{a_2-a_1}{c} \rfloor]\!]$ (les points sont à tracer sont des points de coordonnées (a, u_n).
3. Exécuter cette procédure avec $a_1 = 2$, $c = 0,005$, $a_2 = 3$ puis avec $a_1 = 2.84$, $c = 0,0001$, $a_2 = 2,86$.

Exercice 6 – Enveloppe d'une famille de droites – 4.6.28 p.115

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Doit $(D_t)_{t\in I}$ une famille de droites du plan affine, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère, de sorte que la droite D_t a pour équation :

$$u(t)x + v(t)y + w(t) = 0.$$

On suppose que les applications u, v, w sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et qu'elles ne s'annulent pas en même temps.

On cherche une courbe paramétrée $f : I \to \mathbb{R}^2$ telle que pour tout $t \in I$,

- $f(t) \in D_t$;
- D_t est tangente à la courbe en $f(t)$.

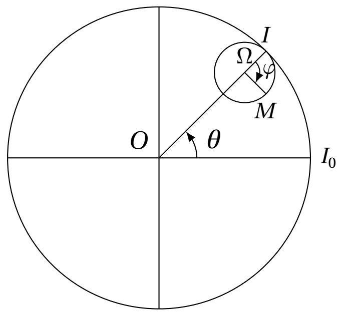
Quand elle existe, cette courbe est appelée l'enveloppe de la famille de droits $(D_t)_{t\in I}$.

1. On note $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Montrer que $\big(x(t), y(t)\big)$ est solution du système :
$$\left\{\begin{array}{l} u(t)x(t)+v(t)y(t) = -w(t) \\ u'(t)x(t)+v'(t)y(t) = -w'(t) \end{array}\right. .$$
En déduire qu'au voisinage de tout point $t_0 \in I$ tel que :
$$\begin{vmatrix} u(t_0) & v(t_0) \\ u'(t_0) & v'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$
, le système précédent a une unique solution, donnée par :
$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} -w(t) & v(t) \\ -w'(t) & v'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}},\ y(t) = \frac{\begin{vmatrix} u(t) & -w(t) \\ u'(t) & -w'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}}.$$
2. Déterminer une paramétrisation de l'enveloppe E de la famille des droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'équation :
$$\sin(t)x - \cos(t)y - \sin^2(t) = 0.$$
3. Représenter, sur un même graphique, E et plusieurs droites D_t.

Exercice 7 – Hypocycloïde – 4.6.29 p.117

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Un cercle $\Gamma(\Omega, r)$ roule sans glisser à l'intérieur du cercle $C(O,R)$ (où $R > r$). On note $M = M(\theta)$ un point de Γ dont étudie la trajectoire. On note θ l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{O\Omega}}\right)$ et φ l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega M}}\right)$. Initialement, Ω est situé sur l'axe horizontal et M est situé en I_0.



1. Montrer que l'affixe de M est donnée par $z(\theta) = (R-r)\exp(i\theta) + r\exp(im\theta)$ où $m = 1 - \frac{R}{r}$. Ainsi, M a pour coordonnées :
$$\left\{\begin{array}{l} x(\theta) = (R-r)\cos\theta + r\cos(m\theta) \\ y(\theta) = (R-r)\sin\theta + r\sin(m\theta) \end{array}\right. .$$
2. On choisit $R = 4$ et $r = \frac{R}{4}$. Représenter la trajectoire de M. La courbe obtenue est appelée astroïde.
3. On choisit $R = 4$ et $r = \frac{R}{p}$ où $p \in \mathbb{N}$. Représenter, pour différentes valeurs de p, $\Gamma(\Omega, r)$ roulant sur $C(O,R)$, ainsi que la trajectoire de M. La courbe obtenue est appelée hypocycloïde à p rebroussements.
4. Vérifier que ces points sont effectivement des points de rebroussement.

Exercice 8 – Ensembles de Mandelbrot et de Julia – 4.6.30 p.119

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

L'ensemble de Mandelbrot est la partie M du plan complexe définie par $M = \{c \in \mathbb{C} /$ la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ est bornée $\}$.

De même, pour tout $c \in \mathbb{C}$, l'ensemble de Julia de paramètre c est défini par $J_c = \{z \in \mathbb{C} /$ la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = z$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ est bornée $\}$.

On souhaite représenter l'ensemble de Mandelbrot. On fixe un entier p assez grand, et pour chaque point $c \in \mathbb{C}$, on s'intéresse à la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$. On considère que cette suite n'est pas bornée s'il existe $k \leq p$ tel que $|z_k| \geq 4$.

1. Représenter l'ensemble de Mandelbrot. On pourra utiliser la fonction `imshow` qui permet de représenter, par une couleur différente, chaque valeur de k_0, où k_0 est le plus petit entier tel que $|z_{k0}| \geq 4$.

2. En procédant de même, représenter l'ensemble de Julia J_c pour différentes valeur de c.

Exercice 9 – Courbe de Peano – 4.6.31 p.122

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

La courbe de Peano est construite à partir d'un motif de base dans le lequel on remplace chacun des 9 segments par le motif complet auquel on a appliqué une homothétie de rapport $\dfrac{1}{3}$.

1. S'approprier le module `turtle` en réalisant un cercle avec la tortue.
2. En utilisant la tortue de Python, écrire une procédure récursive qui reçoit un entier n et trace la courbe obtenue en itérant n fois le procédé décrit ci-dessus.

R Pour utiliser le module `turtle` :

- importer le module : `import turtle;`
- cacher la tortue : `turtle.hideturtle();`
- choisir la vitesse de la tortue : `turtle.speed(10);`
- faire en sorte que la tortue laisse un trait sur son chemin : `tortue = turtle.Pen();`
- faire avancer la tortue de 5 : `tortue.forward(5);`
- faire tourner la tortue de 90 degrés vers la gauche : `tortue.left(90)`.