TP 13

Systèmes linéaires

Sources :

Savoirs et compétences :

- ❒ *SN.C3 : Utiliser les bibliothèques de calcul standard*
- ❒ *SN.S1 : Bibliothèques logicielles*
- ❒ *SN.S4 : Problème discret multidimensionnel linéaire. Méthode de Gauss avec recherche partielle du pivot.*

Consignes

Attention : suivez précisément ces instructions. Vous enverrez à votre enseignant un fichier d'extension `.py` (script `Python`) nommé

`tp12_durif_kleim.py`,

où les noms de vos enseignants sont à remplacer par ceux des membres du binôme. Le nom de ce fichier ne devra comporter ni espace, ni accent, ni apostrophe, ni majuscule. Dans ce fichier, vous respecterez les consignes suivantes.

- Écrivez d'abord en commentaires (ligne débutant par #), le titre du TP, les noms et prénoms des étudiants du groupe.
- Commencez chaque question par son numéro écrit en commentaires.
- Les questions demandant une réponse écrite seront rédigées en commentaires.
- Les questions demandant une réponse sous forme de fonction ou de script respecteront pointilleusement les noms de variables et de fonctions demandés.

Commencer le TP par recopier les fonctions vues dans le cours pour utiliser l'algorithme du pivot de Gauss.

Activité 1 : Interpolation

On rappelle le principe de la méthode des moindres carrés.

On souhaite déterminer une parabole passant les points d'équation $y = a\,x^2 + b\,x + c$ de la parabole passant par les points $(-1,9)$, $(1,3)$ et $(2,3)$.

Q 1 : Poser le système d'équations à résoudre.

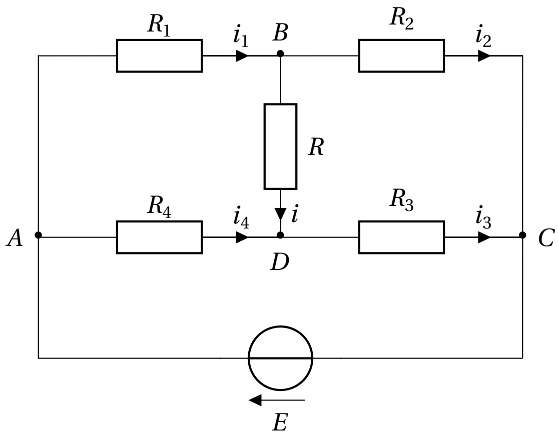
Q 2 : Déterminer les coefficients a, b et c par l'utilisation du pivot de Gauss.

Q 3 : Sur un même graphe faire apparaître les 3 points ainsi que la paraboles obtenue par interpolation.

Activité 2 : Application de physique : pont de wheastone

On considère le circuit électrique ci-contre appelé *pont de Wheatstone*. Les valeurs des résistances R_1, R_2, R_3, R_4, R et de la tension E étant connues, les inconnues sont les 5 intensités i_1, i_2, i_3, i_4, et i qui vérifient les 5 équations :

- loi des noeuds en B : $i_1 = i_2 + i_5$;
- loi des noeuds en D : $i_4 + i_5 = i_3$;
- loi des mailles : $E = R_1 \times i_1 + R_2 \times i_2$;
- loi des mailles : $E = R_4 \times i_4 + R_3 \times i_3$;
- loi des mailles : $0 = R_1 \times i_1 + R \times i_5 - R_4 \times i_4$.



Q 4 : Calculer la valeur de l'intensité i dans les deux cas suivants :

- $E = 10$ V; $R_1 = R_3 = 10$ kΩ; $R_2 = R_4 = R = 1$ kΩ;
- $E = 10$ V; $R_1 = R_3 = 4$ kΩ; $R_2 = R = 2$ kΩ; $R_4 = 8$ kΩ.

Dans le second cas, le pont de Wheatstone est dit *équilibré*. L'intensité i est nulle et cela correspond à l'égalité :

$$R_1 \times R_3 = R_2 \times R_4.$$

Q 5 : On suppose désormais connues les valeurs : $E = 10$ V, $R_1 = R = 1$ kΩ et $R_4 = 2$ kΩ. La valeur de la résistance R_2 est inconnue. On la fixera aléatoirement ainsi :

```
R2=(random.randrange(11)+5)*500
```

Q 6 : après avoir importé le module `random`. Écrire un programme permettant :

- de résoudre le système pour des valeurs de R_3 comprises entre 1 kΩ et 20 kΩ (on prendra 100 valeurs);
- d'afficher la courbe de l'intensité i en fonction de la résistance R_3.

Q 7 : À l'aide d'une lecture graphique, en déduire la valeur de la résistance R_2.

Activité 3 : Modélisation et identification du comportement du moteur de la Robucar

0.1 Modélisation et identification du comportement du moteur de la Robucar

Afin de déterminer la fonction de transfert de l'ensemble du système mécanique (moto réducteur et arbre de la roue), nous avons isolé la partie mécanique du système et réalisé un essai indiciel en introduisant un couple moteur $C_m(t)$ d'un échelon de $4N.m$ à l'entrée de l'arbre du moteur. Nous avons enregistré en sortie de la roue la variation de la vitesse angulaire comme expliqué par le schéma de la figure 1. La réponse à cette échelon est donnée figure 2.

On assimile la fonction de transfert à un élément du premier ordre et on relève la vitesse en régime permanent : $\Delta\dot{\theta}(\infty) = 3\ rad/s$, et ceci pour un échelon d'entrée d'amplitude $C_m = 4N \cdot m$.

Q 8 : Procéder à une identification classique graphique des valeurs numériques avec les unités des paramètres caractéristiques de la fonction de transfert du 1er ordre.

On souhaite maintenant mettre en place une méthode d'identification plus précise se basant sur la **méthode des moindres carrés**. Dans un premier temps, on suppose que le gain statique est identifié à l'aide de la méthode précédente. L'ensemble des données de l'essai permettant de tracer la courbe de la figure 2 sont stockées dans le fichier 'premier_ordre.csv'

Q 9 : Écrire le programme permettant de lire le fichier 'premier_ordre.csv' et de stocker sous la forme de deux tableaux $t = [t_1, t_2 \cdots, t_n]$ et $V = [V_1, V_2 \cdots, V_n]$ respectivement le temps et la vitesse angulaire à chaque instant.

Q 10 : Tracer en fonction du temps la grandeur $ln\left(\frac{\Delta\dot{\theta}(\infty)-V}{\Delta\dot{\theta}(\infty)}\right)$. Que remarquez-vous ?

Pour la suite on note Y le tableau correspondant au calcul de :

$$Y = ln\left(\frac{\Delta\dot{\theta}(\infty) - V}{\Delta\dot{\theta}(\infty)}\right).$$

Propriété — Méthode des moindres carré pour une interpolation linéaire. On travaille ici sur un nuage de points expérimentaux donnant le vecteur $Y = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_n]$ en fonction du vecteur $t = [t_1, t_2 \cdots, t_n]$. Cette méthode permet d'identifier une fonction linéaire approchant au mieux (au sens des moindres carrés) un nuage de points issu de données expérimentales. Dans notre cas, la fonction linéaire recherchée est donnée par :

$$Y = f(t) = \alpha \times t$$

On note $E(\alpha)$ la somme des distances au carré verticale entre chaque point de coordonnées $(t, i\,Y_i)$ et la courbe théorique issue d'un modèle (ici $Y = \alpha \times t$).

Dans notre cas :

$$E(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha \times t_i)^2$$

La valeur de α qui permet de trouver la droite qui approche au mieux l'ensemble des points expérimentaux au sens des moindres carrés est celle qui minimise la grandeur $E(\alpha)$:

$$\alpha \quad \text{tel que} \quad \frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

Q 11 : Donner l'expression de α en fonction des Y_i et des t_i (valeurs des tableaux Y et t pris aux instants i.

Q 12 : Écrire une fonction qui prend en arguments les tableaux t et Y et qui renvoie la quantité α

On rappelle que si on peut approximer la fonction de transfert par un premier ordre, la relation liant V à t est donnée par :

$$V(t) = \Delta\dot{\theta}(\infty)\cdot\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Q 13 : Donner la relation entre α et τ.

Q 14 : Tracer un graph permettant de comparer l'identification aux mesures expérimentales.

Q 15 : Écrire une fonction permettant de calculer le résidu au sens des moindre carrés pour la valeur de α mesurée.

Q 16 : Écrire une fonction permettant de calculer par différence finie la dérivée du vecteur V.

Q 17 : Tracer son évolution au cours du temps. Que pouvons-nous remarquer ?

Propriété — Méthode des moindres carrés appliquée à l'identification d'un premier ordre. On cherche à identifier les paramètre K et τ de l'équation différentielle suivante :

$$V(t) + \tau \cdot \frac{dV(t)}{dt} = K \cdot C_m(t)$$

On dispose de n mesures que l'on peut stocker dans 3 vecteurs dS, S et E :

$$dS = \begin{bmatrix} \frac{dV(t_1)}{dt} \\ \frac{dV(t_2)}{dt} \\ \dots \\ \frac{dV(t_n)}{dt} \end{bmatrix} \; ; \; S = \begin{bmatrix} V(t_1) \\ V(t_2) \\ \dots \\ V(t_n) \end{bmatrix} \quad et \quad iE = \begin{bmatrix} C_m(t_1) \\ C_m(t_2) \\ \dots \\ C_m(t_n) \end{bmatrix}$$

On peut alors définir la matrice Φ de taille $n \times 2$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{dV(t_1)}{dt} & V(t_1) \\ \frac{dV(t_2)}{dt} & V(t_2) \\ \dots & \\ \frac{dV(t_n)}{dt} & V(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dS & S \end{bmatrix}$$

La recherche des coefficients K et τ au sens des moindres carrés revient à résoudre l'équation matricielle suivante :

$$\Phi \cdot X = E$$

Avec

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\tau}{K} \\ \frac{1}{K} \end{bmatrix}$$

Or la matrice Φ n'est pas inversible et donc le problème est mal posé. Il suffit alors de faire une multiplication à gauche par Φ^t : Cela revient donc à rechercher le vecteur X solution du problème matriciel suivant :

Cycle 01

$$\Phi^t \cdot \Phi \cdot X = \Phi^t \cdot E$$

On peut donc obtenir X par :

$$X = \left(\Phi^t \cdot \Phi\right)^{-1} \cdot \Phi^t \cdot E$$

Q 18 :

- **Après avoir fait appel à la fonction permettant de calculer la dérivée de V, construire la matrice Φ (On pourra pour cela utiliser la fonction transpose du module numpy.**
- **Construire le vecteur E qui contient les mêmes valeurs pour chacune de ses composantes égales à $E_0 = 4N \cdot m$.**
- **Calculer le vecteur X en utilisant la propriété donnée ci-dessus (On pourra utiliser la fonction inv du module linalg sous-module de numpy.)**
- **Extraire alors K et τ.**
- **Avec ces valeurs identifiées calculer le vecteur V_th1 donnant l'évolution de la vitesse angulaire en fonction du temps et la comparer aux résultats expérimentaux.**
- **Que peut-on en conclure ?**

Propriété — Méthode des moindres carrés intégrée appliquée à l'identification d'un premier ordre. On souhaite améliorer la méthode en utilisant la méthode des moindres carré sous la forme intégrée. On intègre entre 0 et t l'équation différentielle que l'on cherche à identifier :

$$\int_0^t V(t) \cdot dt + \tau \cdot \int_0^t \frac{dV(t)}{dt} = K \cdot \int_0^t C_m(t)$$

On travaille donc maintenant avec trois vecteurs iS, S (déjà défini plus haut) et iE :

$$iS \quad = \quad \begin{bmatrix} \int_0^t V(t_1) \cdot dt \\ \int_0^t V(t_2) \cdot dt \\ \dots \\ \int_0^t V(t_n) \cdot dt \end{bmatrix} \quad et \quad iE \quad = \quad \begin{bmatrix} \int_0^t C_m(t_1) \cdot dt \\ \int_0^t C_m(t_2) \cdot dt \\ \dots \\ \int_0^t C_m(t_n) \cdot dt \end{bmatrix}$$

On doit donc résoudre le même type de problème que précédemment mais donné par :

$$i\Phi \quad = \quad \begin{bmatrix} S & iS \end{bmatrix}$$

$$i\Phi \cdot X = iE$$

Avec

$$X \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{\tau}{K} \\ \frac{1}{K} \end{bmatrix}$$

On peut donc obtenir X par :

$$X = \left(i\Phi^t \cdot i\Phi\right)^{-1} \cdot i\Phi^t \cdot iE$$

Q 19 : Écrire une fonction prenant en arguments une liste t et un vecteur U et retournant une liste iU correspondant à l'intégrale de U entre 0 et t.

Q 20 :

- **Construire les vecteurs iS et iE ;**

- **construire la matrice $i\Phi$;**
- **extraire les coefficients τ et K issue de cette méthode;**
- **avec ces valeurs identifiées, calculer le vecteur V_th2 donnant l'évolution de la vitesse angulaire en fonction du temps et la comparer aux résultats expérimentaux et à V_th1.**
- **Que peut-on en conclure?**

Q 21 : Comparer les résidus des trois méthodes

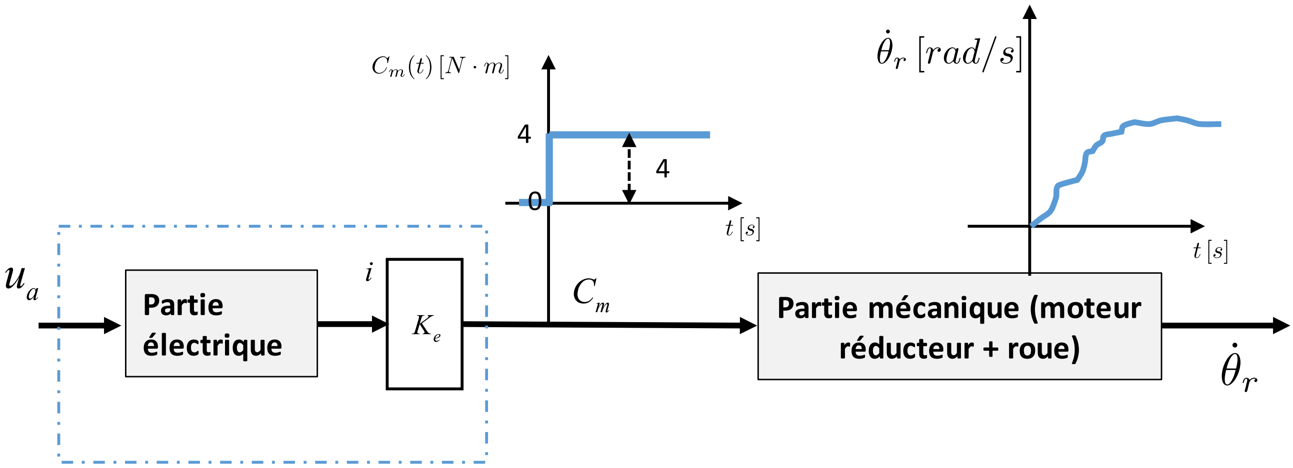


FIGURE 1 – Essai expérimental pour l'identification de la fonction de transfert de la partie mécanique

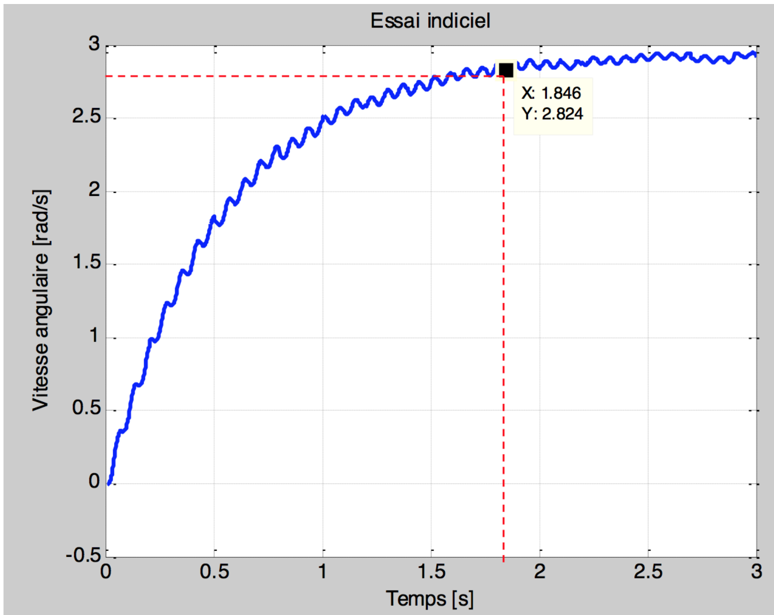


FIGURE 2 – Réponse indicielle de la vitesse angulaire de la roue suite à un couple moteur d'un échelon 4 N.m