

## TD

Sources :

## Savoirs et compétences :

- ☐ AN.C1 : Justifier qu'une itération (ou boucle) produit l'effet attendu au moyen d'un invariant
- ☐ AN.C2 : Démontrer qu'une boucle se termine effectivement
- ☐ AN.S1 : Recherche dans une liste, recherche du maximum dans une liste de nombres, calcul de la moyenne et de la variance.
- ☐ AN.S2 : Recherche par dichotomie.
- ☐ AN.S4 : Recherche d'un mot dans une chaîne de caractères.

## Proposition de corrigé

### 0.1 Test de primalité

**Q 1 : Proposer un invariant de boucle pour démontrer cet algorithme.**

```
def est_premier(n):
    """ Renvoie True si n est premier, False sinon
        Précondition : n est un entier. """
    for d in range(2, n):
        # n n'est pas divisible par 2, 3, ..., d-1.
        if n % d == 0:
            return False
    return True
```

### 0.2 Fonction mystère

**Q 1 :** À chaque tour de boucle,  $k$  est incrémenté de 1 et  $p$  est multiplié par  $b$ .

Au début du premier tour de boucle, on a  $k = 0$  et  $p = 1$ . Au tour suivant,  $k = 1$  et  $p = b$ . Au second tour,  $k = 2$  et  $p = b^2$ . Le tableau se dresse aisément.

**Q 2 :** Montrons que «  $b = p^k$  » est un invariant pour la boucle `while`. En entrée de boucle, on a  $k = 0$  et  $p = 1 = b^0$ , donc l'invariant est bien initialisé. Supposons qu'au début d'un tour de boucle on ait  $b = p^k$ . À la fin de la ligne 5, comme  $k$  est incrémenté de 1,  $p = b^{k-1}$ . À la fin de la ligne 6, comme  $p$  est multiplié par  $b$ , on a  $p = b^k$ . L'invariant est donc vrai au début du tour de boucle suivant.

Ainsi, «  $b = p^k$  » est un invariant pour la boucle `while`.

**Q 3 :** Montrons que «  $a - p$  » est un variant pour la boucle `while`.

- C'est bien un entier car par construction  $p$  est toujours un entier et  $a$  est entier par définition.
- C'est un entier positif : d'après la condition de la boucle `while`,  $p$  divise  $a$ . Comme  $a$  est strictement positif et comme  $p$  est positif,  $p \leq a$ , donc  $a - p \geq 0$ .
- C'est un entier positif qui décroît strictement à chaque tour de boucle : à chaque tour de boucle,  $p$  est multiplié par  $b$  et  $b > 1$ .

**Q 4 :** On a écrit un variant pour la boucle `while`, donc la fonction renvoie bien un résultat. Par l'invariant, en sortie de boucle, on a  $p = b^k$ . En sortie de boucle,  $k$  est le plus petit entier pour lequel  $b^k$  ne divise pas  $a$ . On renvoie en sortie  $k - 1$ . Ainsi, la fonction renvoie le plus grand entier  $k$  tel que  $b^k$  divise  $a$ .