TP 05 BIS

Tracé de fonctions

Sources :

Savoirs et compétences :

- ❒

Etude de la suite logistique

Nous allons utiliser les fonctions graphiques de Python pour observer quelques particularités de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de la valeur $x_0 \in]0,1[$ et de la relation de récurrence : $x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$, où μ est une constante de l'intervalle $[0,4]$. On peut visualiser le comportement de ces suites à l'aides de graphes tels ceux tracés en figure suivante, en positionnant l'entier n sur l'axe des abscisses et x_n sur l'axe des ordonnées.

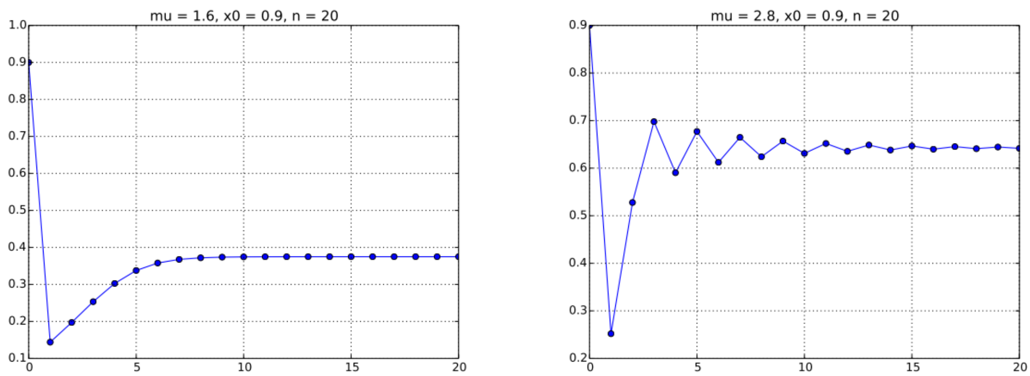

Figure 1: Pour μ = 1,6 la suite (x_n) est croissante à partir d'un certain rang, pour μ = 2,8 les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont (à partir d'un certain rang) adjacentes. Dans les deux cas la suite x converge.

Une autre façon de visualiser le comportement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste, à partir des graphes de la fonction $f_\mu : x \mapsto \mu x(1-x)$ et de la droite d'équation $y = x$, à tracer la ligne brisée reliant les points de coordonnées (x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), ... , (x_{n-1}, x_{n-1}), (x_{n-1}, x_n) (illustration figure 2).

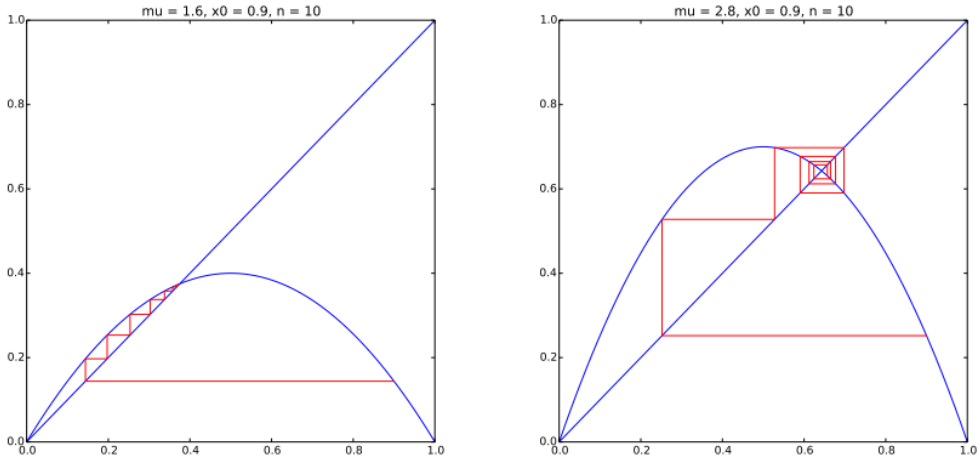

Figure 2: Une autre représentation des suites obtenues pour $\mu = 1{,}6$ et $\mu = 2{,}8$.

Question 1 *Définir une fonction* `logistique1(mu, x0, n)` *qui permette le tracé des graphes que l'on trouve figure 1, puis une fonction* `logistique2(mu, x0, n)` *pour le tracé des graphes de la figure 2.*

Question 2 *À l'aide de ces deux fonctions nous allons (sans démonstration) postuler le comportement de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de la valeur de μ. On choisira à chaque fois pour valeur de départ $x_0 = 0,9$ (bien qu'en réalité et mis à part quelques valeurs particulières cette valeur importe peu) et on essayera plusieurs valeurs de n.*

1. *Lorsque $\mu \in [0,1]$, observer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*
2. *Lorsque $\mu \in [1,3]$, observer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point fixe $\dfrac{\mu-1}{\mu}$ Quelle différence peut-on faire suivant que $\mu \in [1,2]$ ou que $\mu \in [2,3]$?*
3. *Lorsque $\mu = 3,05$, qu'observe-t-on ? Et lorsque $\mu = 3,5$?*
4. *Observer enfin la situation pour $\mu = 3,86$.*

Il est possible de démontrer que lorsque μ est compris entre 3 et $1+\sqrt{6}$ (environ 3,45) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finit par osciller entre deux valeurs dépendantes de μ mais pas de x_0. Entre 3,45 et (environ) 3,54 la suite finit par osciller entre quatre valeurs. au delà de cette valeur la suite oscille entre huit valeurs, puis seize, etc. À partir de d'environ 3,57, le chaos s'installe et mis à part certaines valeurs il n'est plus possible de décrire le comportement asymptotique de la suite. Tout ceci peut être résumé par le diagramme des bifurcations : l'axe des abscisses porte les valeurs du paramètre μ, l'axe des ordonnées les valeurs d'adhérences possibles.

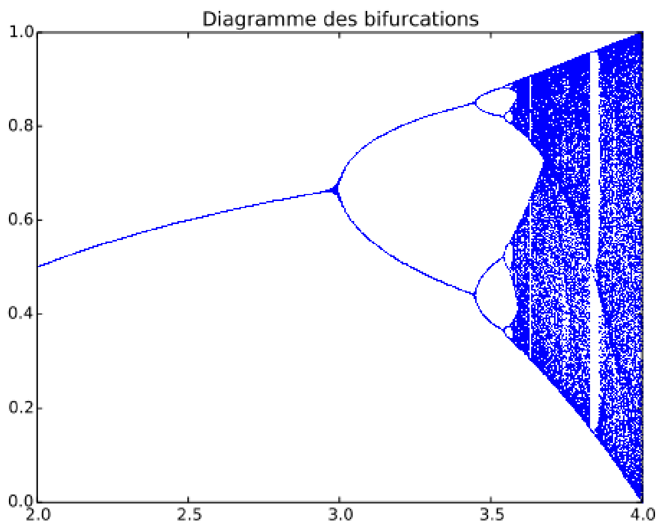

Figure 3: Le diagramme des bifurcations de la suite logistique.

Question 3 *Le diagramme des bifurcations de la figure 3 a été obtenu en faisant varier μ entre 2 et 4 avec un pas égal à 0,002. Pour chacune des valeurs de μ sont représentées en ordonnée les valeurs distinctes à 10^{-3} près de x_{101}, x_{102},..., x_{200}.Le tracé a été obtenu avec les options* `marker=',',linestyle=''`. *Rédiger un script Python qui réalise le tracé de ce diagramme.*

Exposant de Lyapunov

Le système dynamique obtenu pour $\mu = 4$ est chaotique : une infime variation de la valeur initiale x_0 modifie du tout au tout la valeur de x_n après seulement quelques itérations. Pour mesurer l'influence d'un écart e_0 sur x_0 pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on calcule l'écart absolu après une itération : $e_1 = f_\mu(x_0 + e_0) - f_\mu(x_0)$. L'écart relatif vaut $\dfrac{|e_1|}{|e_0|} = \left|\dfrac{f_\mu(x_0+e_0)-f_\mu(x_0)}{e_0}\right|$, quantité que l'on appproche $\left|f_\mu'(x_0)\right|$ sachant que e_0 est petit. Après n itérations l'écart relatif vaut donc :

$$\frac{|e_n|}{|e_0|} = \frac{|e_n|}{|e_{n-1}|} \times \ldots \times \frac{|e_1|}{|e_0|} \simeq \prod_{k=0}^{n-1} \left|f_\mu'(x_k)\right|.$$

Notre objectif est de déterminer si les écarts s'amplifient et donc si ce produit est supérieur à 1 ou si le système est stable et le produit inférieur à 1. Sachant que réaliser une addition est plus rapide qu'une multiplication, on étudie plutôt le logarithme de cette quantité :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left|f'(x_k)\right| < 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left|f_\mu'(x_k)\right| < 0$$

et pour relativiser le rôle du choix de n on divise cette somme par n. Ceci conduit à définir l'exposant de Lyapunov :

$$\lambda_\mu = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left|f_\mu'(x_k)\right|.$$

Question 4 *Rédiger une fonction* `lyapunov(mu, x0, n)` *qui calcule une approximation de cette quantité en fonction de la valeur de μ, de x_0 et du nombre d'itérations n choisi. Tracer ensuite le graphe représentant les variations de λ_μ en fonction de μ dans l'intervalle $[3,4]$ à partir de la valeur $x_0 = 0,9$. Comment interpréter ce graphique ?*

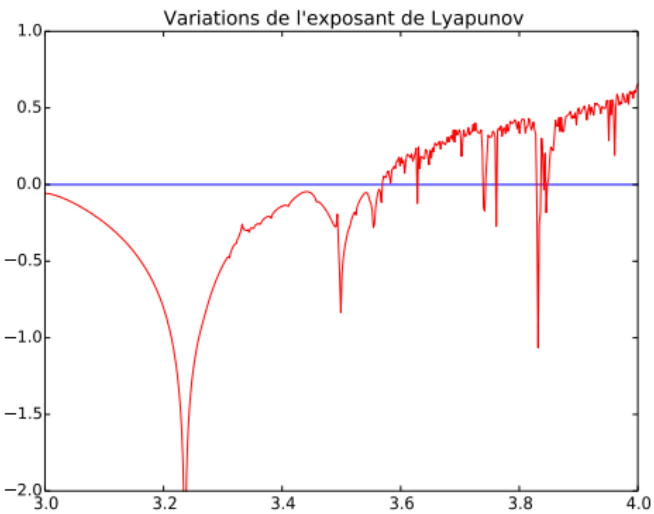

Figure 4: Les variations de l'exposant de Lyapunov entre 3 et 4.

Observons de nouveau le diagramme des bifurcations. Pour $\mu_0 = 3$ a lieu la première bifurcation; pour $\mu_1 =\simeq 3,45$ a lieu la seconde. Plus généralement on note μ_k la valeur de μ où a lieu la $(k+1)^{e}$bifurcation. La constante de Feigenbaum est la valeur de la limite :

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{\mu_{n+2}-\mu_{n+1}}$$

Question 5 *Essayer d'obtenir une approximation de cette constante (pour information on a $\delta = 4,669201...$).*

Indication. Pour déterminer la taille du cycle limite, définir une fonction qui calcule le nombre de valeurs distinctes à 10^{-4} près des termes x_{n+1},..., x_{n+256} pour une grande valeur de n (par exemple 100 000). En procédant à des recherches dichotomiques déterminer les six premières bifurcations et calculer $\dfrac{\mu_5-\mu_4}{\mu_6-\mu_5}$.

Remarque. Cette constante a ceci de remarquable qu'on la retrouve dans d'autres diagrammes des bifurcations, par exemple en étudiant les suites définies par la relation de récurrence $x_{n+1} = \mu \sin(x_n)$ ou encore $x_{n+1} = \mu - x_n^2$. Si vous en avez le temps vous pouvez mettre en évidence son caractère universel en reprenant votre étude avec l'une ou l'autre de ces deux relations.