DS06

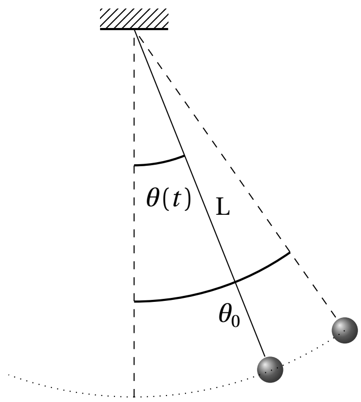
Ingéniérie numérique et équations différentielles

Sources :

Exercice 1 : Période d'oscillation d'un pendule

On considère un pendule de masse $m = 1 + 0,01 \cdot \alpha$, de longueur $L = \alpha$ que l'on abandonne, sans vitesse initiale, à un angle de $\theta_0 = \dfrac{\pi}{4 \cdot \alpha}$ avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

En appliquant la conservation de l'énergie, on trouve l'équation suivante :



$$\frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}(t)^2 + m g l (1 - \cos\theta(t)) = m g L (1 - \cos\theta_0)$$

On en déduit : $\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\dfrac{2g}{L}(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)}$.

Ce qui donne : $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\sqrt{\dfrac{2g}{L}(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)}}$.

La période est donc : $T = \displaystyle\int_0^T \mathrm{d}t = 4 \times \int_0^{\theta_0} \dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\sqrt{\dfrac{2g}{L}(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)}}$.

On rappelle que la période avec l'approximation des petites oscillations est donnée par : $T_0 = \sqrt{\dfrac{L}{g}} \times 2\pi$.

R $T = \displaystyle\int_0^{\theta_0} f(\theta)\mathrm{d}\theta$ est une intégrale généralisée car $f(\theta)$ tend vers l'infini. Donc certaines méthodes numériques d'intégration donnent des résultats infinis.
Pour les méthodes posant problèmes, il faut alors remplacer la borne supérieur θ_0 par $\theta_0(1-\varepsilon)$ avec $\varepsilon = 10^{-3}$.

Q 1 : Calculer T_0.
Pour les méthodes d'intégration numérique, on renverra les résultats avec 100 subdivisions.
Q 2 : Calculer T (noté T_g) par la méthode des rectangles à gauche.
Q 3 : Calculer T (noté T_d) par la méthode des rectangles à droite.
Q 4 : Calculer T (noté T_t) par la méthode des trapèzes.
On note $\varepsilon_g = |T_g - T_0|$, $\varepsilon_d = |T_d - T_0|$, $\varepsilon_t = |T_t - T_0|$, les erreurs entre les différentes approximation et l'estimation de T_0.

Q 5 : Renvoyer ε_g, ε_d, ε_t.

Exercice 2 : Modèle de trajectoire d'un chien par rapport à son maître

Un marcheur M suit une trajectoire rectiligne à vitesse constante V_M. Son chien C, qui part d'un point éloigné, court pour le rejoindre à vitesse constante V_C. À chaque instant, sa course est dirigée vers son maître, *i.e.* les vecteurs $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}(t)$ et $\overrightarrow{CM}(t)$ sont colinéaires et de même sens : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}(t) = V_C\,\frac{\overrightarrow{CM}(t)}{||\overrightarrow{CM}(t)||}$. Ainsi, les coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$ du chien vérifient le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = V_C\,\dfrac{V_M\,t - x(t)}{\sqrt{\big(V_M\,t - x(t)\big)^2 + \big(-y(t)\big)^2}} \\ y'(t) = V_C\,\dfrac{-y(t)}{\sqrt{\big(V_M\,t - x(t)\big)^2 + \big(-y(t)\big)^2}} \end{cases}$$

Écrire un programme permettant de résoudre ce système différentiel avec la méthode d'Euler jusque $t = 38s$ et avec 100 subdivisions.

On a $V_M = 1{,}5 + \alpha/100\,\mathrm{m.s^{-1}}$ et $V_C = 8\,\mathrm{m.s^{-1}}$ et les conditions initiales : $x(0) = 100 + \alpha$ et $y(0) = 300 + \alpha$ (coordonnées de la position initiale donnée en mètre).

Q 6 : Donner l'expression de la variable initiale à préciser dans la méthode d'Euler sous forme numérique en respectant son type.

Q 7 : Donner $x(t = 38s)$ obtenu avec la méthode d'Euler.

Q 8 : Donner $y(t = 38s)$ obtenu avec la méthode d'Euler.