1 Un marcheur et son chien.

Un marcheur M suit une trajectoire rectiligne à vitesse constante V_M. Son chien C, qui part d'un point éloigné, court pour le rejoindre à vitesse constante V_C. À chaque instant, sa course est dirigée vers son maître, *i.e.* les vecteurs $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}(t)$ et $\overrightarrow{CM}(t)$ sont colinéaires et de même sens :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}(t) = V_C\,\frac{\overrightarrow{CM}(t)}{||\overrightarrow{CM}(t)||}.$$

Ainsi, les coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$ du chien vérifient le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = V_C\,\dfrac{V_M\,t - x(t)}{\sqrt{\big(V_M\,t - x(t)\big)^2 + \big(-y(t)\big)^2}} \\ y'(t) = V_C\,\dfrac{-y(t)}{\sqrt{\big(V_M\,t - x(t)\big)^2 + \big(-y(t)\big)^2}} \end{cases}$$

- Écrire un programme permettant de tracer la trajectoire du chien avec les données :

  $$V_M = 1{,}5\,\mathrm{m.s^{-1}} \quad \text{et} \quad V_C = 8\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

  et la condition initiale :

  $$x(0) = 100\,\mathrm{m} \quad \text{et} \quad y(0) = 300\,\mathrm{m}.$$

2 Cinétique chimique.

On considère deux réactions successives :

$$A \xrightarrow{k_1} B$$
$$B \xrightarrow{k_2} C$$

dans lesquelles k_1 et k_2 désignent les constantes de vitesse. Les vitesses de réaction sont donc :

$$v_1 = -\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = k_1[A] \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{\mathrm{d}[C]}{\mathrm{d}t} = k_2[B].$$

B intervient dans les deux réactions chimiques : il est produit par la réaction 1 et consommé par la réaction 2. On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t} = v_1 - v_2 = k_1[A] - k_2[B].$$

On obtient ainsi un système de trois équations différentielles du premier ordre couplées :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -k_1[A] \\ \dfrac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t} = k_1[A] - k_2[B] \\ \dfrac{\mathrm{d}[C]}{\mathrm{d}t} = k_2[B] \end{cases}$$

- Écrire un programme permettant de représenter l'évolution des concentrations $[A]$, $[B]$ et $[C]$ au cours du temps avec la donnée :

  $$(k_1, k_2) = (8, 1)$$

  et la condition initiale :

  $$[A]_0 = 1\,\mathrm{mol.L^{-1}}, \quad [B]_0 = 0\,\mathrm{mol.L^{-1}} \quad \text{et} \quad [C]_0 = 0\,\mathrm{mol.L^{-1}}.$$