TD 1

Instructions conditionnelles et boucles

Savoirs et compétences :

- ❒ *AA.C4 : Comprendre un algorithme et expliquer ce qu'il fait*
- ❒ *AA.C5 : Modifier un algorithme existant pour obtenir un résultat différent*
- ❒ *AA.C6 : Concevoir un algorithme répondant à un problème précisément posé*
- ❒ *AA.C7 : Expliquer le fonctionnement d'un algorithme*
- ❒ *AA.C8 : Écrire des instructions conditionnelles avec alternatives, éventuellement imbriquées*
- ❒ *AA.S8 : Instructions conditionnelles*
- ❒ *AA.S9 : Instructions itératives*

D'après Jean-Pierre Becirspahic, `https://info-llg.fr/`

La conjecture de Syracuse

On doit cette conjecture au mathématicien allemand Lothar Collatz qui, en 1937, proposa à la communauté mathématique le problème suivant : « on part d'un nombre entier strictement positif; s'il est pair on le divise par 2, s'il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1. On réitère ensuite cette opération.»

Par exemple, à partir de 14 on construit la suite de nombres :

$$14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2...$$

Après que le nombre 1 ait été atteint, la suite des valeurs (1, 4, 2, 1, 4, 2 ...) se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3.

La conjecture de Syracuse[1] est l'hypothèse mathématique selon laquelle n'importe quel entier de départ conduit à la valeur 1 au bout d'un certain temps.

Nous allons expérimenter cette conjecture en programmant l'évolution de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations :

$$u_0 = c \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Temps de vol et altitude maximale

Le temps de vol d'un entier c et le plus petit entier n (en admettant qu'il existe) pour lequel $u_n = 1$. Par exemple, le temps de vol pour $c = 14$ est égal à 17.

Question 1 *Définir une fonction nommée* `tempsdevol` *prenant un paramètre entier* `c` *et retournant le plus petit entier n pour lequel $u_n = 1$.*

De manière tout aussi imagée, on appelle altitude maximale de c la valeur maximale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple, l'altitude maximale de $c = 14$ est égale à 52.

1. Du nom de l'université américaine qui a popularisé ce problème.

Question 2 *Modifier votre algorithme pour définir une fonction nommée* `altitude` *qui calcule cette fois-ci l'altitude maximale pour un entier* `c` *donné en paramètre.*

Vérification expérimentale de la conjecture

On désire désormais vérifier la validité de la conjecture pour toute valeur $c \leq 1\,000\,000$. Une première solution consisterait à calculer le temps de vol pour toutes ces valeurs, mais ce calcul est long et il y a mieux à faire en observant que si la conjecture a déjà été vérifiée pour toute valeur $c' < c$, il suffit qu'il existe un rang n pour lequel $u_n < c$ pour être certain que la conjecture sera aussi vérifiée au rang c.

On appelle temps d'arrêt (ou encore temps de vol en altitude) le premier entier n (s'il existe) pour lequel $u_n < c$.

Question 3 *Écrire une fonction* `tempsdarret` *prenant un paramètre entier* `c` *et retournant le temps d'arrêt de la suite de Syracuse correspondante.*

Nous souhaitons maintenant mesurer le temps nécessaire pour vérifier la conjecture jusqu'à un paramètre entier m. Pour cela, nous allons utiliser la fonction `time` du module time du même nom, sans argument, qui retourne le temps en secondes depuis une date de référence (qui dépend du système).

Question 4 *À l'aide de cette fonction écrire une fonction* `verification` *qui prend en argument un paramètre entier m et retourne le temps nécessaire pour vérifier que toutes les valeurs $c \in [\![2, m]\!]$ ont bien un temps d'arrêt fini. Quelle durée d'exécution obtient-t-on pour $m = 1\,000\,000$?*

Question 5 *Quel est le temps d'arrêt d'un entier pair ? et d'un entier de la forme $c = 4n+1$? En déduire qu'on peut restreindre la recherche aux entiers de la forme $4n+3$, et modifier en conséquence la fonction précédente. Combien de temps gagne-t-on par rapport à la version précédente* *pour $m = 1\,000\,000$? Vérifier ensuite la conjecture pour* $m = 10\,000\,000$.

Records

Question 6 *Déterminer l'altitude maximale que l'on peut atteindre lorsque $c \in [\![1, 1\,000\,000]\!]$, ainsi que la valeur minimale de c permettant d'obtenir cette altitude.*

Question 7 *Déterminer le temps de vol en altitude (autrement dit le temps d'arrêt) de durée maximale lorsque $c \in [\![1, 1\,000\,000]\!]$ ainsi que la valeur de c correspondante.*

Question 8 *On appelle vol en altitude de durée record un vol dont tous les temps d'arrêt de rangs inférieurs sont plus courts. Par exemple, le vol réalisé pour $c = 7$ est un vol en altitude de durée record (égale à 11) car tous les vols débutant par $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ont des temps d'arrêt de durées inférieures à 11. Déterminez tous les vols en altitude de durée record pour $c \leq 1\,000\,000$.*

Affichage du vol

Question 9 *ée graphique qui prend un entier c en paramètre et qui construit le graphe de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durant son temps de vol.*