DS05

Ingéniérie numérique

Sources :

Exercice 1 : Intégration numérique

On démontre que la longueur L de la courbe $y = x^2$ pour $x \in [0; \alpha]$ dans un repère orthonormal est donnée par : $L = \int_0^{\alpha} \sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$.

Q 1 : Calculer L à 10^{-3} près par la méthode des rectangles à gauche.
Q 2 : Calculer L à 10^{-3} près par la méthode des rectangles à droite.
Q 3 : Calculer L à 10^{-3} près par la méthode des trapèzes.

Exercice 2 : Modèle proie-prédateurs de Lotka-Volterra

Objectif On souhaite déterminer l'évolution d'une population d'une proie en fonction de celle de son prédateur.

On suppose un milieu où existe une population « u » de proies (lapins) interagissant avec une unique population « v » de prédateurs (renards).

Modèle sans prédation

Sans prédateur, l'évolution du nombre de proies est donné par l'équation différentielle suivante : $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = a \times u(t)$ avec a le taux re reproduction des proies.

On prendra $u_0 = \alpha$ et $a = \alpha 10^{-2}$.

Q 4 : Donner la population de lapins à 1 près après 20 unités de temps.

Modèle avec prédation

Le modèle avec prédateur est donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = u(t)(a - b \times v(t)) \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = -v(t)(c - d \times u(t)) \end{cases}$$

avec :
- a : taux de reproduction des proies ;
- b : taux de mortalité des proies à cause des prédateurs ;
- c : taux de mortalité des prédateurs ;
- d : taux de reproduction des prédateurs.

On donne $u_0 = \alpha$, $a = \alpha 10^{-2}$, $b = \alpha 10^{-3}$ ainsi que $v_0 = \alpha + 10$, $c = \alpha 10^{-2}$, $d = \dfrac{\alpha}{5} \times 10^{-3}$.

Q 5 : Donner la population de lapins après 300 unités de temps.

Q 6 : Donner la population de renards après 300 unités de temps.