DS07

Problèmes stationnaires et algèbre linéaire

Sources :

Consignes

1. **Lisez attentivement tout l'énoncé avant de commencer.**
2. Ce devoir est à réaliser seul, en utilisant Python 3.
3. Nous vous conseillons de commencez par créer un dossier au nom du DS dans le répertoire dédié à l'informatique de votre compte.
4. Nous vous rappelons qu'il est possible d'obtenir de l'aide dans l'interpréteur d'idle en tapant `help(nom_fonction)`.
5. Vous inscrirez vos réponses sur google form fourni par e-mail sous forme numérique.
6. Lorsque la réponse demandée est un réel, on attend que l'écart entre la réponse que vous donnez et la valeur attendue soit strictement inférieur à 10^{-4}. Donnez donc des valeurs avec 5 chiffres après la virgule.
7. Vos réponses dépendent d'un paramètre α, unique pour chaque étudiant, qui vous a été donné par e-mail.

Exercice 1 : Quelques exemples d'analyse

Q 1 : Donner une approximation de $\int_{\alpha}^{\alpha+1} \cos(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$ avec la méthode des trapèzes et 1000 subdivisions.

Q 2 : Donnez une approximation (à 10^{-5} près) de l'unique réel positif solution de l'équation $x^2+\sqrt{x}-10=\alpha$ avec la méthode de votre choix.

Q 3 : Donnez le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir ce résultats avec la méthode de Newton en prenant pour valeur initiale α.

Q 4 : Donnez le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir ce résultats avec la méthode de Dichotomie sur l'intervalle $[0, 12+\alpha]$.

Q 5 : Donnez à l'aide une approximation (à 10^{-5} près) de l'unique réel positif t tel que $\int_{\alpha}^{\alpha+t}(2+\sqrt{x}+\cos x)\,\mathrm{d}x = 10$. *Pour l'intégration numérique, on pourra utiliser la méthode des trapèzes avec 1000 subdivisions.*

Q 6 : Donner une valeur approchée de $x(1)$ avec x l'unique fonction vérifiant $x(0)=\alpha$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x'(t)=3\cos(x(t))+t$.

Q 7 : Donner une valeur approchée de $x\left(1+\frac{\alpha}{10}\right)$ avec x l'unique fonction vérifiant $x(0)=0$, $x'(0)=0$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x''(t)=1+\sin(t+x(t))$.

Q 8 : Donner une approximation de $\beta\in\mathbb{R}$, pour que l'unique solution de l'équation différentielle non linéaire $x''(t)=1+\arctan(t+x(t))$ avec les conditions initiales $x(0)=0$ et $x'(0)=\beta$ vérifie $x\left(1+\frac{\alpha}{10}\right)=1+\frac{2}{3}\alpha$.

Exercice 2 : Algèbre linéaire

Dans cette partie, on travaille avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 32 & 243 \\ 1 & 32 & 243 & 1024 \\ 32 & 243 & 1024 & 3125 \\ 243 & 1024 & 3125 & 7776 \end{pmatrix}$$

de terme général $a_{ij} = (i+j-2)^5$ pour $1 \leq i, j \leq n$ (attention en Python, les indices commencent à 0 et le terme général est alors $(i+j)^5$).

Q 9 : Résoudre

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Donner la valeur de x_1.

Q 10 : Calculer $B = A^3$ et donner le reste du coefficient de B situé sur la première ligne et la première colonne de B (donc d'indices 0 et 0 en `numpy`) dans la division par $10\,000 + \alpha$.