

## Cours

## Chapitre 1

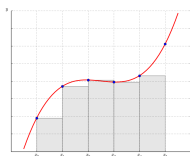
### Intégration numérique

#### Savoirs et compétences :

- ☐ Méthodes des rectangles et des trapèzes pour le calcul approché d'une intégrale sur un segment.



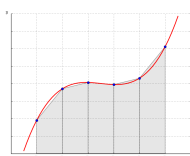
Fonction à intégrer



Intégration par méthode des rectangles à gauche



Intégration par méthode des rectangles à droite



Intégration par méthode des trapèzes

<b>1</b>	<b>Description du problème</b>	<b>2</b>
1.1	Approximation d'un calcul intégral . . . . .	2
1.2	Traitement de mesures . . . . .	2
1.3	Limites de la résolution numérique . . . . .	3
1.4	Remarques préliminaires . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Méthode des rectangles</b>	<b>3</b>
2.1	Principe . . . . .	3
2.2	Interprétation graphique . . . . .	3
2.3	Implémentations . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Méthode des trapèzes</b>	<b>4</b>
3.1	Principe . . . . .	4
3.2	Interprétation graphique . . . . .	5
3.3	Implémentation . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Calcul d'erreur</b>	<b>5</b>
4.1	Majoration de l'erreur – Rectangles à gauche (et à droite) 5	
4.2	Majoration de l'erreur – Rectangles au milieu . . . . . 6	
4.3	Majoration de l'erreur – Méthode des trapèzes . . . . . 7	
4.4	Calcul d'erreur à précision constante . . . . . 7	

Lors de la résolution de problèmes scientifiques, le calcul intégral est souvent nécessaire :

- en mathématiques, lors du calcul d'une intégrale définie ;
- en mécanique, lors du calcul de la vitesse et de l'accélération à partir de la position d'un solide ;
- lors d'activités expérimentales, lorsqu'on veut par exemple connaître l'intégrale d'un signal mesuré ;
- etc.

## 1 Description du problème

### 1.1 Approximation d'un calcul intégral

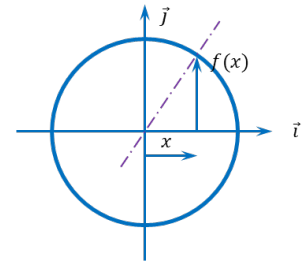
Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  avec  $a, b \in \mathbb{R}^2$  et  $a < b$ . On appelle  $I \in \mathbb{R}$  l'intégrale définie. On la note :

$$I = \int_a^b f(x) \, dx$$

Comment approcher  $I$  sans connaître de primitive de  $f$  ?

#### ■ Exemple Calcul de $\pi$

Parmi les méthodes permettant d'approximer  $\pi$ , on peut chercher à calculer l'aire du cercle trigonométrique (de rayon 1). L'aire d'un cercle de rayon 1 vaut  $\pi$ . On s'intéresse ici à l'aire d'un quart de cercle. Il est nécessaire de modéliser le problème afin d'établir la fonction  $f$ .



En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle défini, on a :  $x^2 + f(x)^2 = 1$ . On a donc  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . L'aire d'un quart de disque est donc l'aire sous la courbe  $f(x)$  quand  $x$  varie de 0 à 1 :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx$$

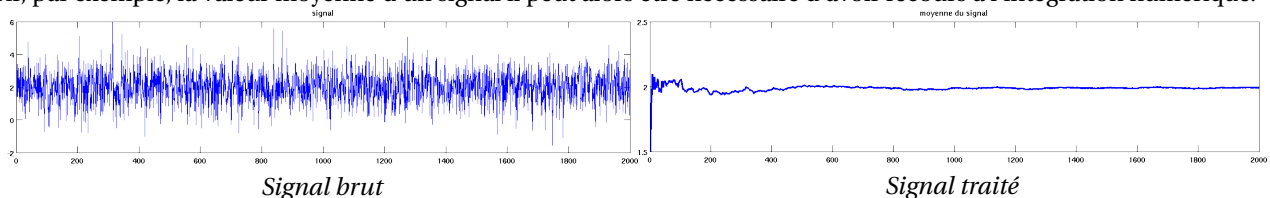
Ainsi une valeur approchée de l'intégrale peut permettre d'approximer la valeur de  $\pi$ .

#### ■ Exemple Calcul intégral

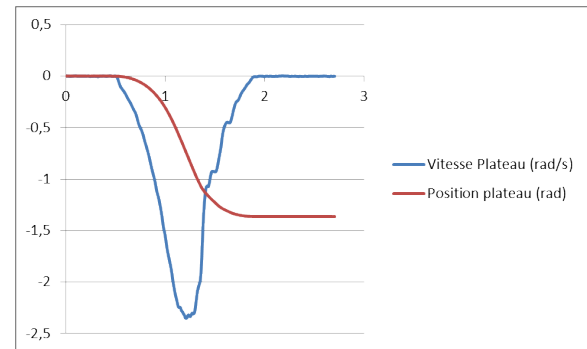
Comment calculer l'intégrale suivante :  $\int_0^1 \cos(x^2) \, dx$  ?

### 1.2 Traitement de mesures

Lors de l'acquisition de signaux grâce à des capteurs, les signaux mesurés ne sont pas toujours exploitables. Pour avoir, par exemple, la valeur moyenne d'un signal il peut alors être nécessaire d'avoir recours à l'intégration numérique.



Enfin, pour avoir une idée de la position d'un solide alors qu'il est seulement possible de mesurer une vitesse, l'intégration numérique peut s'avérer nécessaire. Ainsi, sur la capsuleuse de bocaux seule la vitesse de la croix de Malte (et du maneton) sont possibles. Une intégration permet le calcul de la position angulaire.



Mesures sur la capsuleuse de bocaux

### 1.3 Limites de la résolution numérique

! L'intégration numérique ne permet d'avoir qu'une valeur approchée de l'intégrale définie. Ainsi, il est nécessaire d'être conscient de l'approximation réalisée lors de tels calculs.

### 1.4 Remarques préliminaires

Les méthodes présentées s'appuient sur les formules de Newton – Cotes, elles-même reposant sur les formules de quadrature. Il s'agit de subdiviser l'intervalle de calcul, puis d'approximer la courbe par des fonction polynomiales sur ces intervalles. Les polynômes utilisés sont appelés polynômes de Lagrange. On appelle :

- méthode des rectangles, lorsque les polynômes d'interpolation sont de degrés 0,
- méthode des trapèzes, lorsque les polynômes d'interpolation sont de degrés 1,
- méthode de Simpson, lorsque les polynômes d'interpolation sont de degrés 2 ou 3.

## 2 Méthode des rectangles

### 2.1 Principe

**Définition** Dans cette méthode, la fonction à intégrer est interpolée par un polynôme de degré 0, à savoir une fonction constante. Géométriquement, l'aire sous la courbe est alors approximée par un rectangle. Plusieurs choix sont possibles.

Rectangles à gauche :

Point milieu :

Rectangles à droite :

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f(a)$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f(b)$$

R Dans le but d'augmenter la précision du calcul, on utilise les propriétés de linéarité de l'intégrale afin de subdiviser l'intervalle  $[a, b]$ . Ainsi, si  $[a, b]$  est divisé en  $n$  intervalles, on note  $\varepsilon = \frac{b-a}{n}$  et on a :

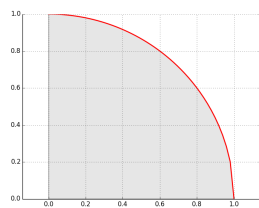
$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^{a+2\varepsilon} f(x)dx + \dots + \int_{a+(n-1)\varepsilon}^b f(x)dx$$

On approxime alors chacune des intégrales par la méthode des rectangles.

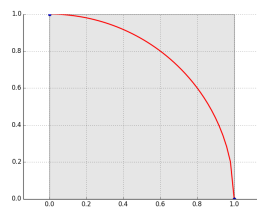
### 2.2 Interprétation graphique

On s'intéresse à nouveau à l'approximation de  $\pi$  grâce au calcul de  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

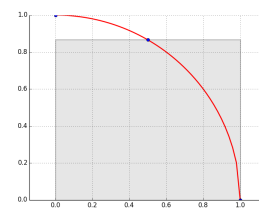
## 1 subdivision



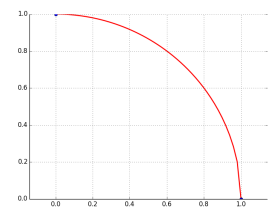
Calcul intégral



Rectangle à gauche –  $\pi \simeq 4$

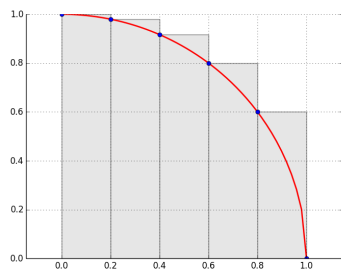


Point milieu –  $\pi \simeq 3,464...$

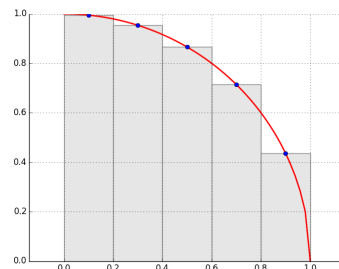


Rectangle à droite –  $\pi \simeq 0$

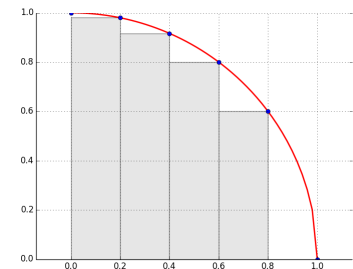
## 5 subdivisions



Rectangle à gauche –  $\pi \simeq 3,437...$



Point milieu –  $\pi \simeq 3,037...$



Rectangle à droite –  $\pi \simeq 2,637...$

Pour 100 subdivisions de l'intervalle, on a :

- dans le cas des rectangles à gauche :  $\pi \simeq 3,160...$  ;
- dans le cas des points milieux :  $\pi \simeq 3,137...$  ;
- dans le cas des rectangles à droite :  $\pi \simeq 3,120...$



On remarque l'existence d'une erreur dans le calcul intégral. Suivant les cas, le calcul permet d'avoir une approximation par excès ou par défaut de l'intégrale que l'on veut approximer.

## 2.3 Implémentations

### ■ Exemple Calcul intégral

Soit une fonction `gen_f` qui prend comme argument un nombre réel et qui renvoie un réel. On fera l'hypothèse que `gen_f` est une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . On cherche à approximer l'intégrale de la fonction définie dans `gen_f` sur un intervalle donné avec un pas donné.

1. Définir la fonction `rectangle_gauche` qui permet d'intégrer une fonction par la méthode des rectangles, à gauche.
2. Définir la fonction `rectangle_droite` qui permet d'intégrer une fonction par la méthode des rectangles, à droite.
3. Définir la fonction `rectangle_milieu` qui permet d'intégrer une fonction par la méthode des rectangles en utilisant le point milieu.
4. Définir une fonction permettant de comparer les méthodes d'intégration. Elle devra permettre d'approximer les intégrales pour différentes valeurs du pas.

### ■ Exemple Calcul d'une valeur moyenne

On fournit un fichier texte brut contenant les mesures provenant d'un capteur.

1. Comment stocker les valeurs du fichier dans un tableau de nombres ?
2. Définir une fonction prenant comme argument un tableau et retournant la valeur moyenne du signal.
3. Définir une fonction permettant de retourner un tableau contenant une valeur moyenne par morceau.

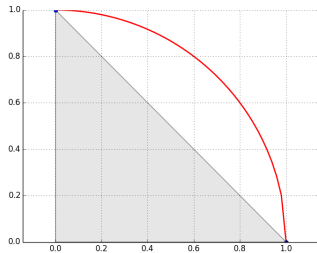
## 3 Méthode des trapèzes

### 3.1 Principe

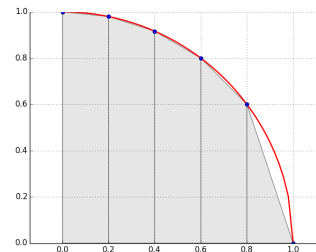
**Définition** Dans cette méthode, la fonction à intégrer est interpolée par un polynôme de degré 1, à savoir une fonction affine. Géométriquement, l'aire sous la courbe est alors approximée par un trapèze :

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

### 3.2 Interprétation graphique



Trapèze avec 1 subdivision –  $\pi \simeq 2$



Trapèzes avec 5 subdivisions –  $\pi \simeq 3,14159...$

### 3.3 Implémentation

#### ■ Exemple Calcul intégral

Soit une fonction `gen_f` qui prend comme argument un nombre réel et qui renvoie un réel. On fera l'hypothèse que `gen_f` est une fonction continue définie sur  $\mathbb{R}$ . On cherche à approximer l'intégrale de la fonction définie dans `gen_f` sur un intervalle donné avec un pas donné.

Définir la fonction `integration_trapeze` qui permet d'intégrer une fonction par la méthode des trapèzes.

## 4 Calcul d'erreur

Dans la majorité des cas, le calcul numérique d'une intégrale donne un résultat approché du résultat réel. En augmentant la discrétisation de l'intervalle d'intégration, il est possible de diminuer cette erreur. Cependant, une augmentation de cette discrétisation conduit à une augmentation des calculs.

### 4.1 Majoration de l'erreur – Rectangles à gauche (et à droite)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I = [a, b]$  et dont  $f'$  continue sur  $I$ . L'intervalle  $I$  est fractionné en  $n$  segments  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  avec  $a_0 = a$  et  $a_n = b$ . On cherche à approximer :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx \right]$$

On note  $\mathcal{A}_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$ . Par la méthode des rectangles à gauche,  $\mathcal{A}_i$  est approximée par  $(a_{i+1} - a_i) f(a_i)$ .

**Objectif** Déterminer sur chaque intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  l'erreur commise par une intégration utilisant la méthode des rectangles à gauche. On va pour cela chercher à majorer l'erreur  $\varepsilon_i$  :

$$\varepsilon_i = \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - (a_{i+1} - a_i) f(a_i) \right|$$

On a  $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(a_i)dx = (a_{i+1} - a_i) f(a_i)$ , en conséquence,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i &\leq \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) - f(a_i) \, dx \right| \\
 &\leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x) - f(a_i)| \, dx \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
 &\leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} \underbrace{\sup_{[a,b]} |f'(x)|}_{M_1} |x - a_i| \, dx \quad \text{d'après l'inégalité des accroissements finis} \\
 &\leq M_1 \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - a_i) \, dx \quad \text{parce que } x \geq a_i \\
 &\leq M_1 \left[ \frac{(x - a_i)^2}{2} \right]_{a_i}^{a_{i+1}} \leq M_1 \frac{(a_{i+1} - a_i)^2}{2}
 \end{aligned}$$

Dans le cas où  $I$  est divisé en  $n$  subdivisions régulières,  $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$ . On a alors

$$\varepsilon_k \leq \frac{M_1(b-a)}{2n^2} \quad \text{sur } [a_i, a_{i+1}]$$

On montre alors que sur  $[a, b]$ , on a donc :

$$\varepsilon \leq n \frac{M_1(b-a)}{2n^2} \leq \frac{M_1(b-a)}{2n}$$

#### Résultat Erreur sur la méthode des rectangles à gauche et à droite

Soit  $f$  fonction dérivable sur  $I = [a, b]$  et dont  $f'$  est continue sur  $I$ . Soit  $M_1$  un majorant de  $f'$  sur  $I$ . En intégrant  $f$  sur  $n$  subdivisions régulières de  $I$  par la méthode des rectangles à droite ou à gauche, l'erreur commise  $\varepsilon$  est telle que :

$$\varepsilon \leq \frac{M_1}{2n}$$

( $b - a$  est intégré dans  $M_1$ ).

**R** La démonstration pour les rectangles à droite se conduit de manière identique.

## 4.2 Majoration de l'erreur – Rectangles au milieu

On conserve les notations du cas précédent.

Par la méthode des rectangles au milieu, sur chaque subdivision de  $I$ ,  $\mathcal{A}_i$  est approximée par  $(a_{i+1} - a_i) \cdot f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)$ .

**Objectif** Déterminer sur chaque intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  l'erreur commise par une intégration utilisant la méthode des rectangles à gauche. On va pour cela chercher à majorer l'erreur  $\varepsilon_i$  :

$$\varepsilon_i = \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \, dx - (a_{i+1} - a_i) \cdot f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \right|$$

$$\varepsilon_i = \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \, dx - (a_{i+1} - a_i) \cdot f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \right|$$

$$= \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) dx - f'\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \cdot \underbrace{\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(x - \frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) dx}_0 \right|$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &\leq \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) - \left[ f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) + f'\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \left(x - \frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \right] dx \right| \\ &\leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left| f(x) - \left[ f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) + f'\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \left(x - \frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \right] \right| dx \quad \text{Inégalité triangulaire} \\ &\leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} \underbrace{\sup_{[a,b]} |f''(x)|}_{M_2} \left| x - \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \right|^2 dx \quad \text{d'après l'inégalité de Taylor Lagrange} \\ &\leq M_2 \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left( x - \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \right)^2 dx \leq \frac{M_2}{3} \left[ \left( x - \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \right)^3 \right]_{a_i}^{a_{i+1}} \\ &\leq \frac{M_2}{3} \left[ \left( \frac{a_{i+1} - a_i}{2} \right)^3 - \frac{a_i - a_{i+1}}{2} \right] \\ &\leq \frac{2M_2}{3} \frac{1}{8} (a_{i+1} - a_i)^3 \end{aligned}$$

Dans le cas où  $I$  est divisé en  $n$  subdivisions régulières,  $a_{i+1} - a_i = \frac{(b-a)}{n}$ . On a alors

$$\varepsilon_k \leq \frac{2M_2}{3} \frac{1}{8} \frac{(b-a)}{n^3} \quad \text{sur } [a_i, a_{i+1}]$$

On montre alors que sur  $[a, b]$ , on a donc :

$$\varepsilon \leq n \frac{2M_2}{3} \frac{1}{8} \frac{(b-a)}{n^3} \leq \frac{M'_2}{12n^2} \quad (M'_2 = M_2(b-a))$$

#### Résultat Erreur sur la méthode des rectangles – point milieu

Soit  $f$  fonction deux fois dérivable sur  $I = [a, b]$  et dont  $f''$  est continue sur  $I$ . Soit  $M_2$  un majorant de  $f''$  sur  $I$ . En intégrant  $f$  sur  $n$  subdivisions régulières de  $I$  par la méthode des rectangles point milieu, l'erreur commise  $\varepsilon$  est telle que :

$$\varepsilon \leq \frac{M_2}{12n^2}$$

### 4.3 Majoration de l'erreur – Méthode des trapèzes

#### Résultat Erreur sur la méthode des trapèzes

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $I = [a, b]$  et dont  $f''$  continue sur  $I$ . En intégrant  $f$  sur  $n$  subdivisions régulières de  $I$  par la méthode des trapèzes, l'erreur commise  $\varepsilon$  est telle qu'il existe un entier  $M$  tel que :

$$\varepsilon \leq \frac{M}{12n^2}$$

### 4.4 Calcul d'erreur à précision constante

On a vu que la précision des rectangles à gauche ou à droite est en  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$  et celle des trapèzes et du rectangle point milieu est de la forme  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

■ **Exemple** Donner, avec chacune des méthodes, l'ordre de grandeur de l'échantillonnage pour avoir une erreur inférieure à  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-6}$ ,  $10^{-10}$ .

Erreur	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-10}$
Méthode des rectangles	$n > 10$	$n > 100$	$n > 1\,000$	$n > 10^6$	$n > 10^{10}$
Méthode des trapèzes	$n > \sqrt{10}$	$n > 10$	$n > 32$	$n > 1\,000$	$n > 10^5$

■

## Références

- [1] Analyse numérique : Intégration numérique, INP Grenoble – Pagora. [https://team.inria.fr/moise/files/2013/03/Cours\\_integration.pdf](https://team.inria.fr/moise/files/2013/03/Cours_integration.pdf).
- [2] Adrien Petri, *Analyse numérique : Intégration numérique*, Notes de cours de TSI 1, Lycée Rouvière, Toulon.