

Hypothèse(s) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$. On note $I = \int_a^b f(x)dx$.

Principe des méthodes des rectangles

Définition Dans cette méthode, la fonction à intégrer est interpolée par un polynôme de degré 0, à savoir une fonction constante. Géométriquement, l'aire sous la courbe est alors approximée par un rectangle. Plusieurs choix sont possibles.

Rectangles à gauche :

Point milieu :

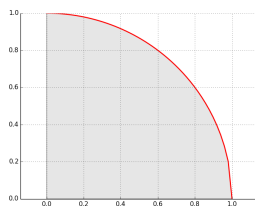
Rectangles à droite :

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f(a)$$

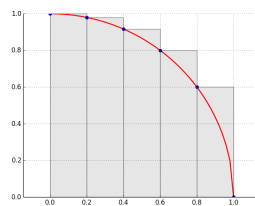
$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f(b)$$

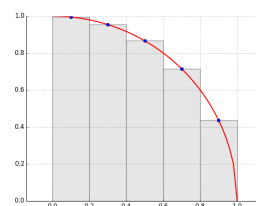
Interprétation graphique



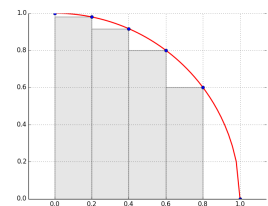
Calcul intégral



Rectangles à gauche



Point milieu

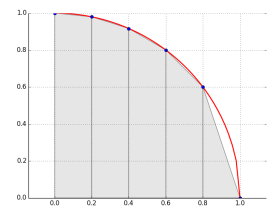


Rectangles à droite

Principe des méthodes des trapèzes

Définition Dans cette méthode, la fonction à intégrer est interpolée par un polynôme de degré 1, à savoir une fonction affine. Géométriquement, l'aire sous la courbe est alors approximée par un trapèze :

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$



Notion d'erreur d'intégration

Résultat Dans chaque cas, on intègre f sur n subdivisions régulières de I .

Erreur sur la méthode des rectangles à gauche et à droite

Soit f fonction dérivable sur $I = [a, b]$ et dont f' est continue sur I . Soit M_1 un majorant de f' sur I . L'erreur ε commise lors de l'intégration par la méthode des rectangles à droite ou à gauche est telle que $\varepsilon \leq \frac{M_1}{2n}$.

Erreur sur la méthode des rectangles – point milieu

Si de plus f est deux fois dérivable sur $I = [a, b]$ et f'' est continue sur I , on note M_2 un majorant de f'' sur I . L'erreur ε commise lors de l'intégration par la méthode des rectangles – point milieu est telle que $\varepsilon \leq \frac{M_2}{12n^2}$.

Erreur sur la méthode des trapèzes

L'erreur commise ε est telle qu'il existe un entier M tel que $\varepsilon \leq \frac{M}{12n^2}$.

Bibliothèque Python

Il est possible d'intégrer une fonction en utilisant les modules de la bibliothèque `scipy` :

■ Python

```
from scipy.integrate import quad
from math import sin
# Définition des bornes de gauche et de droite
g,d = -1,1
def f(x):
    return sin(x)

l,erreur = quad(f,g,d)
print(l,erreur)
```