

CI 3 : INGÉNIERIE NUMÉRIQUE & SIMULATION

TP – PIVOT DE GAUSS

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, avec n lignes et p colonnes, est implémentée sous forme d'une liste de longueur n , composée de listes, chacune contenant p nombres.

Rappel sur la sélection des listes :

si : $M = [[a, b], [e, f], [u, v]]$
 alors : M est à 3 lignes et 2 colonnes,
 $M[2][0]$ désigne l'élément u

Méthode de Gauss

Remarque : si M est une telle liste alors :

$nLign = \text{len}(M)$ et $nCol = \text{len}(M[0])$

sont, respectivement, le nombre de lignes et le nombre de colonnes de M .

Combinaison de deux lignes

Question 1 Écrire une procédure `transv(M, i, mu, j)` qui remplace la ligne $n^{\circ}i$, L_i , par :

$$L_i \leftarrow L_i + \mu \times L_j$$

Question 2 Écrire une procédure `echang(M, i, j)` qui échange les lignes $n^{\circ}i$ et $n^{\circ}j$ dans M .

Le pivot

Soit la procédure :

```
def megalytero(M, i) :
    anotato = abs(M[i][i])
    j = i
    for k in range(i+1, nLign) :
        if abs(M[k][i]) > anotato :
            anotato = abs(M[k][i])
            j = k
    return j
```

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Question 3 Quelle valeur renvoie `megalytero(M, 2)` ?

Conclusion

Question 4 Compléter la procédure suivante en utilisant les notations et les procédures précédentes afin de modifier M par l'algorithme de Gauss :

```
def Pivot(M) :
    for i in ..... :
        i0 = megalytero(M, i)
        .....
        if M[i][i] ..... :
            for z in range( ... , ... ) :
                transv(... , ... , ..... )
    return
```

Un exemple

Soit $M = [[0, 1, 2, 3, 4, 5], [6, 7, 8, 9, 0, 1], [2, 3, 4, 5, 6, 7], [8, 9, 0, 1, 2, 3], [4, 5, 6, 7, 8, 9], [0, 1, 2, 3, 4, 5]]$.

Question 5 Écrire une série d'instructions qui, pour tout k entre 0 et $nCol$, affichent :

$$L_{k,0} \quad L_{k,1} \quad \dots \quad L_{k,nCol}$$

où deux espaces séparent chaque terme de cette ligne.

Question 6 Compléter la question précédente afin d'afficher la matrice M .

Question 7 Afficher la matrice obtenue par l'algorithme de Gauss sur M .

Question 8 En déduire un majorant du rang de M .

Déterminant

Question 9 Écrire une fonction `determinant(M)` qui renvoie le déterminant d'une matrice carrée M .

Il faudra vérifier que la matrice M est bien carrée.

Inversion

Question 10 Écrire une fonction `inversion(M)` qui renvoie l'inverse d'une matrice carrée M .