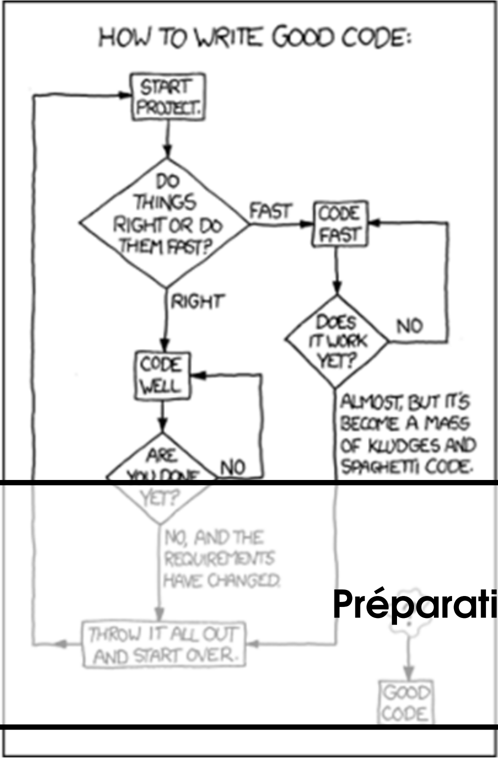
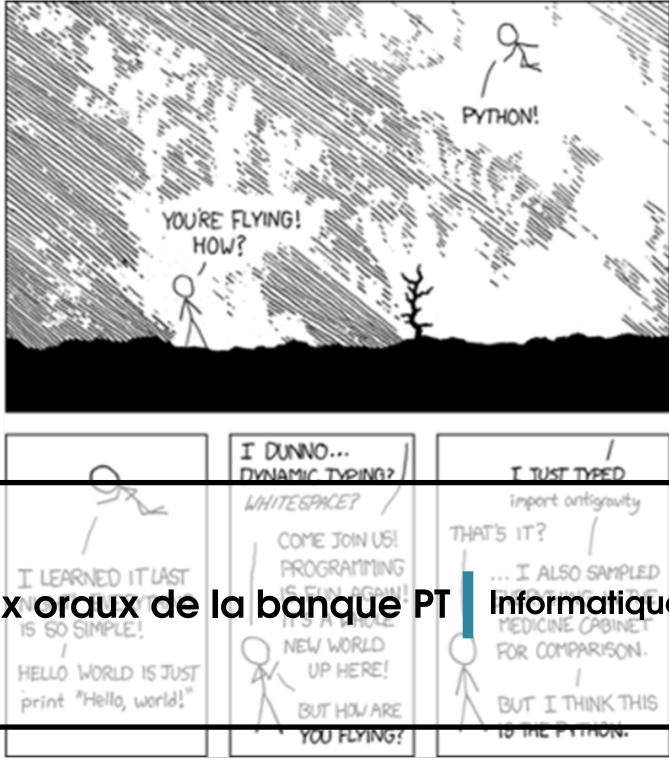




Oral

Préparation aux oraux de la banque PT | Informatique

Exercic

Préparation aux oraux de la banque PT
Épreuve de « Mathématiques et Algorithmique »

Xavier Pessoles
D'après Banque PT et L'informatique pas à pas en prépa.
PT – PT⋆

1 Avant-propos

Ce recueil d'exercices est réalisé à partir de 3 sources :

- des exercices «zeros» de la banque PT ;
- d'exercices retranscrits par vos prédécesseurs en 2015 et 2016 (Lycée Mimard de Saint-Étienne et Lycée La Martinière Monplaisir) ;
- d'exercices tirés du livre de Frédéric Butin : *L'informatique pas à pas en prépa. Cours et exercices corrigés. Éditions ellipses.*

Ces exercices ont pour but de vous entrainer à la partie «Informatique» de l'épreuve de «Mathématiques et d'algorithmique» de la banque PT, anciennement « Maths II». Cette épreuve se déroule à l'école Arts et Métiers ParitTech de Paris.

Afin de vous mettre dans les conditions de l'épreuve, je vous encourage très très très vivement à utiliser IDLE. IDLE est disponible avec toute installation de Python, Pyzo ou WinPython. Pour cela, aller dans le dossier contenant Pyzo puis dans le répertoire `Lib\idlelib` et lancer le programme `idle.bat`.

Pour réaliser les exercices vous aurez accès à un aide-mémoire des fonctions Python (qui devrait être agrafé à ce document si je n'oublie pas!

Notes pour les PT ⋆ (et les autres)

L'objectif pour vous est de réaliser le maximum d'exercices afin de vous entraîner afin que vous puissiez «parler python couramment».

Remarques concernant les corrigés

Je n'ai pas réalisé les corrigés de tous les exercices. Concernant les corrigés des exercices de F. Butin, or mention spéciale, les corrigés sont ceux que je propose. Pour les exercices sans corrigé, on peut donc les retrouver dans le bouquin.

Pour les exercices retranscrits, il se peut qu'il y ait des erreurs de texte (de ma part ou de la part des anciens élèves). Merci de me les rapporter à l'adresse `xpessoles.ptsi@free.fr`.

Par ailleurs, vous pouvez proposer des corrigés que j'ajouterai à ce document ce qui vous vaudra d'avoir votre non cité dans ce recueil ainsi que mon entière considération!

Remarques concernant les exercices retranscrits

Comme vous le voyez, cette préparation repose en partie sur le retranscription des exercices de vos prédécesseurs. Afin d'améliorer la préparation des futurs élèves, je vous demande donc, à votre tour, à la fin de l'épreuve, de noter immédiatement le texte des exercices et de me les envoyer (ainsi qu'à Madame Gaggioli!).

Conseils divers et variés

- Exercez-vous!
- Pratiquez du Python!!
- Ne vous jetez pas sur les corrigés, mais réfléchissez!
- Réfléchissez encore un peu!!
- Variez les plaisirs en faisant un peu d'arithmétique, un peu d'équa diff, un peu de courbes ...
- Exercez-vous à utiliser les bibliothèques de `numpy` pour manipuler les vecteurs et les matrices.
- Exercez-vous à utiliser les bibliothèques de `scipy` pour résoudre les équations différentielles.

Conseils plus précis, trucs à savoir faire, en vrac

- manipuler des nombres complexes avec python ;
- tracer une courbe à partir de deux listes ;
- tracer une courbe à partir de numpy (linspace et fonctions mathématiques commençant par np) ;
- lire un fichier texte (ouvrir le fichier, séparer les données, convertir les données, stocker les données) ;
- tirer des valeurs aléatoires en utilisant random ;
- utiliser les fonctions élémentaires associées aux listes (max, min, sort...)...

Liens...

Les différents corrigés Python ou fichiers nécessaires à certains exercices sont disponibles ici : `https://goo.gl/oDW6pR`

Pour finir, à la fin des épreuves, n'oubliez pas de m'envoyer vos exercices, impressions *etc.*
Et surtout... m** pour vos épreuves!**
Xavier Pessoles

2 Wall of fame

Mes sincères remerciements à ces anciens élèves qui ont débogué des sujets et proposé des corrigés.

- PT⋆ 2016 : Lucie Bathie, Centrale Paris.
- PT⋆ 2017 : Ayoub Elghaoui.
- PT⋆ 2017 : Léo Chabert.
- PT⋆ 2017 : Thibault Decombe.

3 Sujet «0» de la banque PT

Exercice 1 – Arithmétique

1. Soit l'entier $n = 1234$. Quel est le quotient, noté q, dans la division euclidienne de n par 10 ? Quel est le reste ? Que se passe-t-il si on recommence la division par 10 à partir de q ?
2. Écrire la suite d'instructions calculant la somme des cubes des chiffres de l'entier 1234.
3. Écrire une fonction `somcube`, d'argument `n`, renvoyant la somme des cubes des chiffres du nombre entier `n`.
4. Trouver tous les nombres entiers inférieurs à 1000 égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.
5. En modifiant les instructions de la fonction `somcube`, écrire une fonction `somcube2` qui convertit l'entier `n` en une chaîne de caractères permettant ainsi la récupération de ses chiffres sous forme de caractères. Cette nouvelle fonction renvoie toujours la somme des cubes des chiffres de l'entier `n`.

Exercice 2 – Intégration

On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction donnée par des points dont les coordonnées sont situées dans un fichier.

1. Le fichier `ex_01.txt`, situé dans le sous-répertoire `data` du répertoire de travail, contient une quinzaine de lignes selon le modèle suivant :

```
0.0;1.00988282142
0.1;1.07221264497
```

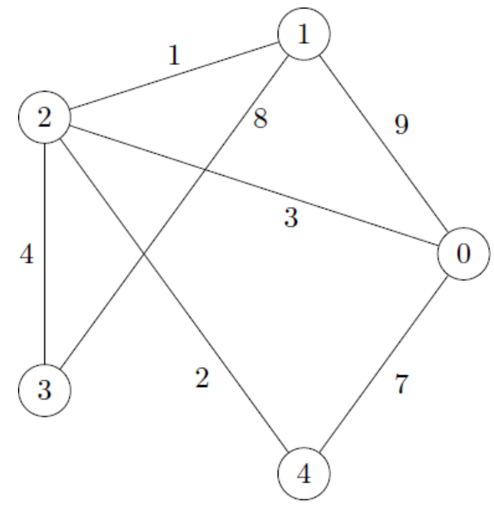
   Chaque ligne contient deux valeurs flottantes séparées par un point-virgule, représentant respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point. Les points sont ordonnés par abscisses croissantes. Ouvrir le fichier en lecture, le lire et construire la liste `LX` des abscisses et la liste `LY` des ordonnées contenues dans ce fichier.
2. Représenter les points sur une figure.
3. Les points précédents sont situés sur la courbe représentative d'une fonction `f`. On souhaite déterminer une valeur approchée de l'intégrale `I` de cette fonction sur le segment où elle est définie. Écrire une fonction `trapeze`, d'arguments deux listes `y` et `x` de même longueur `n`, renvoyant :

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \frac{y_i + y_{i-1}}{2}.$$

   `trapeze(LY,LX)` renvoie donc une valeur approchée de l'intégrale I par la méthode des trapèzes.
4. En utilisant la méthode d'intégration numérique `trapz` de la sous-bibliothèque `scipy.integrate` du langage Python ou la méthode `inttrap` du logiciel Scilab, retrouver la valeur approchée de l'intégrale I.

Exercice 3

On considère le graphe `G` suivant, où le nombre situé sur l'arête joignant deux sommets est leur distance, supposée entière :



1. Construire la matrice $\left(M_{ij}\right)_{0\leq i,j\leq 4}$, matrice de distances du graphe `G`, définie par :
   « pour tous les indices i, j, M_{ij} représente la distance entre les sommets i et j, ou encore la longueur de l'arête reliant les sommets i et j ».
   On convient que, lorsque les sommets ne sont pas reliés, cette distance vaut -1. La distance du sommet i à lui-même est, bien sûr, égale à 0.
2. Écrire une suite d'instructions permettant de dresser à partir de la matrice `M` la liste des voisins du sommet 4.
3. Écrire une fonction `voisins`, d'argument un sommet i, renvoyant la liste des voisins du sommet i.
4. Écrire une fonction `degre`, d'argument un sommet i, renvoyant le nombre des voisins du sommet i, c'est-à-dire le nombre d'arêtes issues de i.
5. Écrire une fonction `longueur`, d'argument une liste `L` de sommets de `G`, renvoyant la longueur du trajet d'écrit par cette liste `L`, c'est-à-dire la somme des longueurs des arêtes empruntées. Si le trajet n'est pas possible, la fonction renverra -1.

Exercice 4 – Gestion de liste

Soit un entier naturel n non nul et une liste `t` de longueur n dont les termes valent 0 ou 1. Le but de cet exercice est de trouver le nombre maximal de 0 contigus dans `t` (c'est-à-dire figurant dans des cases consécutives). Par exemple, le nombre maximal de zéros contigus de la liste `t1` suivante vaut 4 :

i	0	1	2	3	4	5	6	7
t1[i]	0	1	1	1	0	0	0	1

i	8	9	10	11	12	13	14
t1[i]	0	1	1	0	0	0	0

1. Écrire une fonction `nombreZeros(t,i)`, prenant en paramètres une liste `t`, de longueur n, et un indice i compris entre 0 et $n-1$, et renvoyant :

$$\begin{cases} 0, \text{ si } t[i]=1 \\ \text{le nombre de zéros consécutifs dans t} \\ \text{à partir de t[i] inclus, si t[i]} = 0. \end{cases}$$

Par exemple, les appels `nombreZeros(t1,4)`, `nombreZeros(t1,1)` et `nombreZeros(t1,8)` renvoient respectivement les valeurs 3, 0 et 1.

2. Comment obtenir le nombre maximal de zéros contigus d'une liste `t` connaissant la liste des `nombreZeros(t,i)` pour $0 \le i \le n-1$? En déduire une fonction `nombreZerosMax(t)`, de paramètre `t`, renvoyant le nombre maximal de 0 contigus d'une liste `t` non vide. On utilisera la fonction `nombreZeros`.
3. Quelle est la complexité de la fonction `nombreZerosMax(t)` construite à la question précédente ?
4. Trouver un moyen simple, toujours en utilisant la fonction `nombreZeros`, d'obtenir un algorithme plus performant.

Exercice 5 – Probabilités

Soient n un entier naturel strictement positif et p un réel compris entre 0 et 1. On considère X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur un espace probabilisé donné. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ et Y suit une loi binomiale de paramètres (n, p).

1. Définir une fonction `Px`, d'arguments k, n et p, renvoyant la valeur de $P(X = k)$. $k!$ (factorielle k) s'obtient par `factorial(k)` en Python (bibliothèque math) et `prod(1 : k)` en Scilab. Déterminer, pour $n = 30$ et $p = 0,1$, la liste des valeurs de $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le 30$.
2. Définir une fonction `Py`, d'arguments k, n et p, renvoyant la valeur de $P(Y = k)$. On pourra utiliser `comb` de la sous-bibliothèque `scipy.misc` en Python et `binomial` en Scilab.
   Déterminer, pour $n = 30$ et $p = 0,1$, la liste des valeurs de $P(Y = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le 30$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On rappelle que, sous certaines conditions sur n et p, la probabilité $P(Y = k)$ peut être approchée par $P(X = k)$. Déterminer une fonction `Ecart` d'arguments n et p, renvoyant le plus grand des nombres $|P(Y = k) - P(X = k)|$, pour $0 \le k \le n$.
4. Soit e un réel strictement positif. Déterminer une fonction `N`, d'arguments e et p, renvoyant le plus petit entier n tel que `Ecart(n, p)` soit inférieur ou égal à e.
5. Faire l'application numérique dans les quatre cas suivants :
   - $p = 0,075$ avec $e = 0,008$ et $e = 0,005$;
   - $p = 0,1$ avec $e = 0,008$ et $e = 0,005$. Interpréter le dernier résultat.

Exercice 6 – $f(x) = 0$

On considère la fonction g définie sur $[0, 2[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{pour } 1 \le x < 2 \end{cases}$$

1. Définir la fonction g. Tracer sa courbe représentative sur $[0, 2[$, c'est-à-dire la ligne brisée reliant les points $(x, g(x))$ pour x variant de 0 à 1,99 avec un pas de 0,01.
2. Définir une fonction f donnée de manière récursive sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } 0 \le x < 2 \\ \sqrt{x}\, f(x-2) & \text{pour } x \ge 2 \end{cases}$$

3. Tracer la courbe représentative de f sur $[0, 6]$.
4. Écrire les instructions permettant de calculer, à 10^{-2} près, la plus petite valeur $\alpha > 0$ telle que $f(\alpha) > 4$.

Exercice 7 – Algorithmique

On considère le code Python de la fonction `d` suivante :

Python
```python
def d(n):
    L =[1]
    for nombre in range(2,n+1):
        if n%nombre == 0:
            L.append(nombre)
    return L
```

1. Quel est le résultat de l'appel `d(4)` ? Puis de l'appel `d(10)` ? Que fait la fonction `d` ?
2. Un diviseur non-trivial d'un entier `n` est un diviseur de `n` différent de 1 et de `n`. Écrire une fonction `DNT`, d'argument `n`, renvoyant la liste des diviseurs non-triviaux de l'entier `n`.
3. Écrire une fonction `sommeCarresDNT`, d'argument `n`, renvoyant la somme des carrés des diviseurs non-triviaux de l'entier `n`.
4. Écrire la suite des instructions permettant d'afficher tous les nombres entiers inférieurs à 1000 et égaux à la somme des carrés de leurs diviseurs non-triviaux. Que peut-on conjecturer ?

Exercice 8 – Chiffrer – déchiffrer

Soit n un entier vérifiant $n \le 26$. On souhaite écrire un programme qui code un mot en décalant chaque lettre de l'alphabet de n lettres. Par exemple pour $n = 3$, le décalage sera le suivant :

Avant décalage	a	b	c	...	x	y	z
Après décalage	d	e	f	...	a	b	c

Le mot `oralensam` devient ainsi `rudohqvdp`.

1. Définir une chaîne de caractères contenant toutes les lettres dans l'ordre alphabétique (caractères en minuscule).
2. Écrire une fonction `decalage`, d'argument un entier `n`, renvoyant une chaîne de caractères contenant toutes les lettres dans l'ordre alphabétique, décalées de `n`, comme indiqué ci-dessus.
3. Écrire une fonction `indices`, d'arguments un caractère `x` et une chaîne de caractères `phrase`, renvoyant une liste contenant les indices de `x` dans `phrase` si `x` est une lettre de phrase et une liste vide sinon.
4. Écrire une fonction codage d'arguments un entier `n` et une chaîne de caractères `phrase`, renvoyant `phrase` codé avec un décalage de `n` lettres.
5. Comment peut-on décoder un mot codé ?

Exercice 9 – Fractale de Mandelbrot

On pose $M = 20$ et $m = 10$. À un nombre c quelconque, on associe la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + c$ pour $n \geq 0$.

S'il existe, on note k le plus petit entier tel que l'on ait $0 \leq k \leq m$ et $|u_k| > M$. On définit alors la fonction f par

$$f : c \mapsto \begin{cases} k \text{ s'il existe} \\ m+1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Donner le code définissant la fonction f.
2. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f sur $[-2;2]$, en créant une liste `LX` de 401 valeurs équiréparties entre -2 et 2 inclus et en utilisant les fonctions `plot` et show de la sous-bibliothèque `matplotlib.pyplot`.
3. Construire le tableau des valeurs $f(x+iy)$ où x prend 101 valeurs comprises entre -2 et 0,5 et y prend 101 valeurs entre -1,1 et 1,1. *On rappelle que le nombre complexe i est représenté par $1j$. Par exemple, le complexe $1+2i$ est représenté par $1+2j$.*
4. Tracer l'image que code ce tableau. On pourra utiliser les fonctions `imshow` et `show` de la sous- bibliothèque `matplotlib.pyplot`. Quels paramètres peut-on modifier pour obtenir une meilleure résolution ?

Exercice 10 – Calcul matriciel

Dans cet exercice, avec Python on pourra utiliser la fonction `array` *de la bibliothèque* `numpy`*, ainsi que la fonction* `eig` *de la sous-bibliothèque* `numpy.linalg`*. Avec Scilab, on utilisera* `spec`.

1. Créer deux matrices $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et les faire afficher.
2. Créer une fonction `test`, d'argument M, renvoyant la valeur `n` si M est une matrice carrée d'ordre `n` (entier naturel non nul) et zéro dans tous les autres cas. Vérifier la fonction test sur R et sur S.
3. Le fichier `ex_006.txt`, situé dans le sous-répertoire `data` du répertoire de travail, contient un tableau de valeurs flottantes. Lire ce tableau dans le fichier et vérifier qu'il correspond bien à une matrice carrée d'ordre 5 que l'on désignera par `M1`.
4. Déterminer les valeurs propres de la matrice `M1`.
5. Créer une fonction `dansIntervalle`, d'arguments une liste L et deux réels a et b, renvoyant la valeur `True` si tous les éléments de la liste L sont dans l'intervalle $[a,b]$ et `False` sinon. Vérifier que toutes les valeurs propres de la matrice `M1` sont dans l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 11 – Tri de liste

Soit N un entier naturel non nul. On cherche à trier une liste L d'entiers naturels strictement inférieurs à N.

1. Écrire une fonction comptage, d'arguments L et N, renvoyant une liste P dont le k-ième élément désigne le nombre d'occurences de l'entier k dans la liste L.
2. Utiliser la liste P pour en déduire une fonction `tri`, d'arguments L et N, renvoyant la liste L triée dans l'ordre croissant.
3. Tester la fonction `tri` sur une liste de 20 entiers inférieurs ou égaux à 5, tirés aléatoirement.
4. Quelle est la complexité temporelle de cet algorithme ? La comparer à la complexité d'un tri par insertion ou d'un tri fusion.

Exercice 12 – Courbes paramétrées

1. Deux paramètres b et w valant respectivement 0,5 et 6,0, définir trois fonctions d'une variable t renvoyant des couples :
$$\begin{cases} p : t \mapsto & (\cos(t) + b\cos(wt), \sin(t) + b\sin(wt)) \\ v : t \mapsto & (-\sin(t) - bw\sin(wt), \\ & \quad \cos(t) + bw\cos(wt)) \\ a : t \mapsto & \left(-\cos(t) - bw^2\cos(wt), \right. \\ & \quad \left. -\sin(t) - bw^2\sin(wt)\right) \end{cases}$$
Vérifier ces fonctions sur un exemple.
$p(t) = (x(t), y(t))$ désigne la position dans le plan d'une masse ponctuelle mobile au cours du temps, $v(t) = (x'(t), y'(t))$, sa vitesse, et $a(t) = (x''(t), y''(t))$, son accélération.
2. Construire la liste L des points $p(t)$, pour t variant de $-\pi$ à π avec un pas de discrétisation δt vérifiant $\delta t = 0,01\,\pi$.
3. Faire tracer dans le plan muni d'un repère orthonormal la ligne polygonale reliant les points $p(t)$ de la liste L.
4. Définir puis tester la fonction c d'une variable t qui renvoie le couple des coordonnées du centre de courbure donnée par :
$$c(t) = \left(x(t) - d\,y'(t), y(t) + d\,x'(t)\right)$$
où
$$d = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}.$$
5. Rajouter sur le graphique précédent la ligne décrite par les centres de courbure, avec la même discrétisation en temps.
6. Calculer la longueur de la ligne polygonale reliant les points $p(t)$, pour différents pas de discrétisation δt. Observer l'évolution de cette longueur lorsque δt diminue.

Oral

4 Exercices de la banque PT – 2017 – À vérifier

Exercice 1

Exercice tombé 2 fois.

1. Écrire une fonction `C1` d'argument n qui contient les carrés parfaits inférieurs ou égal à n. (Par exemple : `C1 (10) =[0,1,4,9]`.) Afficher C1 (100).
2. Écrire une fonction `C2` d'argument n qui contient la somme de deux carrés parfaits inférieurs ou égal à n. La liste doit être triée. Afficher `C2 (100)`.
3. Soit $m = p^2 + q^2$. Écrire une fonction `decomp` d'argument m qui renvoie les couples p et q tel que $m = p^2 + q^2$.
4. Écrire une fonction `C3` d'argument n qui renvoie la somme de trois carrés parfaits inférieurs ou égal à n. La liste doit être triée. `Afficher C3 (100)`.
5. Montrer que tous les entiers inférieurs ou égal à 2016 qui ne s'écrivent pas comme la somme de 3 carrés parfaits sont de la forme : $4^k(8q+7)$.

Exercice 2

1. Si `M=[[0,0,0],[0,x,0],[0,0,0]]`, `UnAnDePlus(M)` renvoie `[[0,0.1*x,0],[0.05*x,1.3*x,0.2*x],[0,0.1*x,0]]`. Tester votre programme sur 10 ans avec la matrice M donnée.
2. En réalité, toutes les zones ne sont pas aussi propices pour l'espèce. On donne une matrice S de saturation, le taux de présence de l'espèce à la case i, j doit être inférieur à $S[i][j]$. Adapter l'algorithme.
3. S est stocké dans le répertoire data dans le fichier `lessaturation.txt`, les valeurs sont séparées par des espaces. Extraire S.
4. On suppose que M est de taille $m \times n$, à la case $(60,30)$ il y a la proportion $x = 0,01$ la première année, afficher la propagation au bout de 100 ans (on utilisera `imshow` dans la bibliothèque `matplotlib`).

Exercice 3

On définit un segment ainsi : `[a,b]`.

1. Écrire une fonction `disjoints` qui prend pour argument deux segments et qui permet de savoir si deux segments sont disjoints.
2. Écrire une fonction `fusion` qui prend pour argument deux segments et qui les rassemble. (La borne inférieure est le minimum des deux segments et la borne supérieure le maximum). Une liste est correctement formée si cette liste est composée de segments disjoints deux à deux et classés dans l'ordre croissant.
3. Ces listes sont-elles correctement formées? `L1= [[1,2],[3,5],[4,6]]`, `L2= [[1,2],[5,6],[3,4]]`,`L3= [[1,2],[3,4],[5,6]]`.
4. Écrire une fonction récursive vérifie qui prend pour argument une liste et qui permet de savoir si une liste de segments est correctement formée.
5. Créer une fonction appartient qui prends pour argument `x` (un nombre) et `L` (une liste de segment) et qui renvoie `True` si `x` appartient à un des segments. (Par exemple 1,5 appartient à `L3`).

Exercice 5

1. Écrire une fonction "avec" d'arguments deux entiers non nuls k et n, renvoyant une liste d'un tirage de k entiers compris entre 0 et $n-1$ déterminés aléatoirement (en utilisant `randint`). Le tirage se fait avec remise.
2. Même question sans remise.
3. La fonction à écrire doit renvoyer une matrice (liste de liste) de la forme suivante en plaçant aléatoirement 0,1... 9 :

$$\begin{pmatrix} \star & \star & 2 & \star & \star \\ 3 & 4 & 5 & \star & \star \\ \star & \star & 9 & \star & \star \\ \star & 1 & \star & \star & 0 \\ 8 & \star & 6 & 7 & \star \end{pmatrix}$$

Exercice 6

On note $E_n = \{1, ..., b\}$. Dans Python, on note les parties de E_n comme des listes. Ainsi, on note $\{0\}$, $\{2\}$, $\{(3,4)\}$ respectivement `[[]]`, `[[2]]`, `[[3,4]]`.

```python
def A (listes,numero):
    res = []
    for L in listes :
        res.append(L+[numero])
    return(res)
```

1. Expliquer ce que fait la fonction A. Donner notamment la nature de l'argument listes.
2. Donner L0, le nombre de parties de E_5 à 0 élément.
3. Écrire la fonction récursive parties, d'argument n et p, renvoyant le nombre de parties de E_n d'au plus p éléments. *On pourra remarquer que l'ensemble des parties de E_n à p éléments contenants n et les parties de E_n à p éléments ne contenant pas n réalisent une partition de E_n ? On pourra traiter à part les cas $n = 0$ et $p = 0$.*
4. Déterminer L_1 l'ensemble des parties de E_5 à 1 élément.
5. Déterminer L_5 l'ensemble des parties de E_5 à 5 éléments.
6. Écrire une fonction récursive parties2 d'arguments n et p renvoyant le nombre de parties de E_n avec exactement p éléments.

Exercice 7

Il fallait générer un jeu de 32 cartes à partir des listes valeurs=["7","8","9","10","V","D","R","A"] et couleurs=["T","K","C","P"]. Ensuite je devais définir la fonction `tirermain` permettant de tirer une main de 5 cartes (à l'aide de la fonction `sample` de la bibliothèque `random`). La troisième question consistait en la définition d'une fonction LV d'argument une main qui renvoyait une liste triée par ordre croissant du nombre de fois qu'une valeur apparaissait dans la main. Par exemple, si la main contient une double paire, LV doit renvoyer [1,2,2] Si la main contient un brelan, LV doit renvoyer [1,1,3] Pour trier la liste, on avait le droit d'utiliser la fonction `sorted`. Je devais ensuite calculer la probabilité d'obtenir une paire, une double paire, un full (une paire et un brelan) et un carré, en faisant un test sur 5000 mains.

Exercice 8

L'exercice traitait du chemin d'une fourmi sur un quadrillage, à chaque instant la fourmi pouvait se déplace dans les 4 directions possibles.

1. Créer une fonction renvoyant aléatoirement une des 4 listes suivantes : $[0,1],[1,0],[-1,0],[0,-1]$ (fonction sans argument) on pourra utiliser la bibliothèque random.
2. Créer une fonction chemin renvoyant un chemin jusqu'à que la fourmi sorte du carré défini par $-2 < x < 2$ et $-2 < y < 2$ (elle part de l'origine donc $[0,0]$).
3. Tracer 6 chemin différents pour une fourmi dans un carré $-10 < x < 10$ et $-10 < y < 10$.

Exercice 9

Mon oral d'info portait sur la répartition de population. Je devais d'abord expliquer un premier programme qui créait une liste de complexes x + jy de manière aléatoire. Je devais afficher les points sur un graphe (j'avais besoin des fonctions .imag et . reel (je ne sais plus exactement) que je ne connaissais pas) Ensuite, il fallait que je trouve l'habitation où devait se passer une réunion : le trajet devait être le minimum des maximum de chemin pour chacune des maisons (c'est plutôt compliqué à expliquer j'ai mis un moment à comprendre l'énoncé) Je me suis arrêtée là En fait, il m'a paru plus dur de comprendre l'énoncé que de réaliser le programme. De plus, on est pas habitué à utiliser les fonctions usuelles comme max,min... je n'ai pas eu le reflex de les utiliser.

Exercice 10

On appelle un intervalle une liste de 2 éléments $[a,b]$ tel que $a < b$.

1. Créer une fonction disjoints de paramètres i1 et i2 2 intervalles qui renvoie True si les deux intervalles sont disjoints ou False sinon.
2. Créer une fonction fusion qui renvoie un intervalle $[a,b]$ tel que a est le minimum de i1 et i2, et b le max.
3. On considère une liste d intervalle l=[i1,i2,i3...]. Elle est considérée "juste" si les intervalles vérifient 2 à 2 :
   - ils sont disjoints 2 à 2;
   - ils sont croissant, ie le max du précédent est inférieur strict au minimum du suivant.

   Écrire une fonction récursive juste de paramètres L qui renvoie True si cette liste d'intervalle est juste ou False sinon.

Exercice 11

1. Définir une fonction polynomiale `q(x,y)` classique à deux variables.
2. Définir une fonction renvoyant un tableau(matrice) de paramètre `e`.
3. On a une fonction `p(x,y)` continue sur un intervalle, modélisation de la fonction par une avancée de triangles. Si la fonction `p(x,y)` entre dans le triangle ABC par AB alors $p(xa,xb)\cdot p(ya,yb)\leq 0$ et elle rentre dans un autre triangle (on conserve les points qui tracent le segment d'entrée et le point restant est le symétrique du 3e point par rapport au segment d'entrée) et ainsi de suite.

Exercice 12

1. Tester deux lignes de commandes (elles permettaient de transformer un entier en la liste des nombres sous forme de caractères , ou quelque chose comme ça et inversement)
2. À partir de ça, créer une fonction `R(n)` qui renvoie la retournée de `n`. (La retournée de 13 est 31, celle de 140 est 41 par exemple.)
3. Créer une fonction qui renvoie la distance entre un nombre et sa retournée.
4. Créer une fonction de paramètres `(a,N)` qui renvoie les `N+1` termes de la suite $u_{n+1} = R(u_n)$, $u_0 = a$ (je ne sais plus si c'est la suite des retournées ou la suite des distances entre retournées ... mais je penche plus pour le deuxième).
5. Trouver le plus petit a tel que $u_{20} = 0$.
6. Trouver la liste des a entre 1000 et 10000 tels que $u_{20} = 0$ (pas sûr non plus).
7. Vérifier que la suite un est 2-périodique à partir d'un certain rang et qu'elle oscille entre les valeurs .... Et .... (en gros, ces deux valeurs sont retournées l'une de l'autre, donc dès qu'on en atteint une, la suite est limitée à ces deux valeurs).

Exercice 13

On s'intéresse ici au codage d'un mot. On note A l'alphabet, M le message à coder et k la clé du code. Le message est codé si chaque lettre du mot de base est décalée de k places vers la droite dans l'alphabet A. Si un caractère du message de base n'est pas dans l'alphabet A, le codage de modifie pas le dit-caractère.

1. Créer la chaine de caractère suivante : `mnsc = 'abcdefghijklmnopqrstuvwxyz'`.
2. Vérifier qu'il y a bien 26 caractères.
3. Créer une fonction `codee` d'arguments A, M, k renvoyant le message M codé.
4. Comment obtenir le mot de base connaissant la clé k d'un mot codé?
5. On dispose d'un fichier txt contenant un message codé. On ignore la clé de ce message Quelle est le caractère le plus fréquent dans ce message?

Exercice 14

(u_n) definie par $u_0 = 1$ et et $u_{n+1} = f(u_n)$ où

$$\begin{array}{rcl} f:[1,1] & \to & [2,1] \\ [1,1,1,2,1] & \to & [3,1,1,2,1,1] \end{array}$$

renvoie le nombre d'apparitions consécutives d'un élément + cet élément.

1. Écrire une fonction lire d'argument une liste `L` renvoyant `f(L)`. Afficher `lire([1,1,2,2,1])`.

Oral

2. Que fait la fonction `L2str` :

```
def L2str(L) :
    ch='' ''
    for e in L :
        ch=ch+str(e)
    return (ch)
```

3. Afficher les 15 premiers termes de u_n. Quels nombres apparaissent ?

Exercice 15

Il y avait un graphe exemple. Un graphe est défini par une liste de tuples. Un tuple est une arrête : c'est le numéro des deux sommets qu'elle relie.

Par exemple : `L=[(0,1),(1,2),(4,1),(0,1)]`.

1. Le degré d'un sommet est son nombre de voisin. Écrire une fonction `degre` d'arguments une liste L et un entier k qui renvoie le degré du sommet numéro k du graphe définit par la liste L.
2. Un sommet est dit non isolé si il n'a pas de voisin. Écrire une fonction `non_isole` d'argument L qui renvoie le nombre de sommets non isolé du graphe définit par L.
3. La liste d'adjacence d'un graphe est une liste de liste. Ainsi l'élément d'indice k est la liste des voisins du sommet numéro k. Écrire une fonction `adjacance` d'arguments L et n le nombre de sommets du graphe et qui renvoie la liste A d'adjacence du graphe.
   Pour l'exemple initial, on a A=[[1],[0,2,4],[1,4],[],[1,2]].
4. Écrire une fonction `deg_max` d'argument A la liste d'adjacence d'un graphe et qui renvoie le numéro du sommet ayant le plus haut degré. (Je crois qu'il fallait renvoyer le numéro du sommet et pas le degré maximal mais je ne suis pas très sûr).

Exercice 16

Soit u_n une suite définie par $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$. Soit P un polynôme défini par $P = X^3 - 2X^2 - X + 1$. $u_n = a\lambda^n + b\mu^n + c\nu^n$, $|\lambda| > |\mu| > |\nu|$ avec λ, μ, ν racines de P.

1. Écrire une fonction `f(N,x,y,z)` affichant les N premiers termes de u_n dans une liste sachant que (x, y, z) sont les trois premiers termes. Test par $N = 10$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
2. À l'aide de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, trouver λ tel que P soit inférieur à 10^{-10}.
3. Soit $Q(x) = X^3 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$. Trouver r tel que Q soit inférieur à 10^{-10}.
4. Trouver μ.

Exercice 17

Écrire les fonctions permettant de transformer la liste $[0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1]$:

- en $[2, 5, 6, 8]$ (places des coupures) ;
- en $[2, 0, 3, 1, 1, 0, 2, 1]$.

Exercice 18

On modélise un pendule pesant. On a une masse au bout d'une corde, on note α son angle avec la verticale. On donne l'équation vérifiée par α :

$$\alpha'' = -m\alpha - f\alpha (m \text{ et } f \text{ sont donnés}$$
$$\alpha(0) = 0\,\text{rad}$$
$$\alpha'(0) = \omega_0 rad/s(onlancelamasseavecunevitesseinitialeq$$

Question à faire sur le brouillon : on note $u(t) = (\alpha, \alpha')$ donner $\psi(u(t)) = u'(t)$.

1. Résoudre le système avec « odeint ».
2. Tracer la courbe de α en fonction du temps (avec $\omega_0 = 1 ; 2 ; 4 ; 8$ rad/s).
3. Pourquoi α(infini) = cste qui dépend de ω_0 ?

Exercice 19

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 9 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \\ 27 & 29 & 31 & 33 \\ 47 & 49 & 51 & 53 \end{pmatrix}$$

Soit P un polynôme tel que $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$. Soit la suite des (B_k) telle que $\begin{cases} B_0 = M \\ B_{k+1} = M\left(B_k - \dfrac{Tr(B_k)}{k+1} I\right) \end{cases}$. On note $Q(x) = X^n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{Tr(B_{k-1})}{k} X^{n-k}$. $L = [a_n, a_{n-1}, ...; a_1, a_0]$.

1. Définir une fonction `valpol` d'arguments la liste L et x et qui renvoie $P(x)$.
2. Écrire la matrice A.
3. Calculer $A(A - Tr(A) I_4)$.
4. Définir une fonction `pol` d'argument M et qui renvoie une liste associée à Q(X).
5. Obtenir pol(A)
6. Tracer la courbe des Pol(A) pour x variant de -5 à 1.5.

Exercice 20

*Il fallait créer 2 matrices 2*2. Pour créer les coefficients, il fallait ouvrir un tableur .csv . À partir de ces valeurs, la création des coefficients des matrices était facile (carrés, multiplications ....) Il fallait ensuite résoudre le système matriciel $AX = B$ grâce à linealg de scipy, je n'y ai pas pensé tout de suite et j' ai commencé à écrire la méthode du pivot ....*

Exercice 21

Dans une liste de longueur n, un élément est dit majoritaire si le nombre d'occurrences de cet élément est strictement supérieur à n/2.

1. Créer une fonction d'argument une liste L et un élément x renvoyant le nombre d'occurrences de x dans L.
2. Créer une fonction `maj(L)` renvoyant le nombre d'éléments majoritaires dans la liste L ainsi que leur nombre d'occurrences respectifs. La fonction renverra [0,-1] s'il n'y a aucun élément majoritaire.

3. Soient deux listes L1 et L2 extraites d'une liste L. Montrer, sur papier, que si un élément de L est majoritaire, alors il l'est également dans l'une des deux listes L1 et L2.
4. Lire le fichier « valeurs.csv ». Il contient un tableau de valeurs à deux colonnes. Les deux colonnes ont le même nombre de lignes. Déterminer le nombre de lignes dans chaque colonne.

Exercice 22

1. Écrire une fonction partage d'arguments une liste L et a un nombre. Pour tous les éléments de L, si l'élément est strictement plus petit qu'a, on l'ajoute à Linf; si l'élément est supérieur ou égal à a, on l'ajoute à Lsup. La fonction renvoie, Linf et Lsup.
2. Écrire le quick sort (vraiment rédiger comme cela sans rien de plus)
3. Implanter un retour de nombre de comparaisons.
4. Tester le tri avec une liste de 40 000 éléments aléatoires entre -999 et 999.

Oral

5 Exercices de l'oral de Polytechnique – 2017 – À vérifier

Exercice 1

Les listes sont de tailles supérieures ou égales à 3 et composées d'éléments distincts.

1. Écrire une fonction `maxi` d'argument une liste `lst` de taille n qui renvoie le maximum de `lst` en effectuant $n-1$ comparaisons.
2. Écrire une fonction `maxmin` d'argument une liste `lst` de taille n qui renvoie le couple `(max, min)` en effectuant $3/2n+1$ comparaisons.
3. Écrire une fonction `ord_triee` d'argument `k` et une liste `lst` qui renvoie l'élément `x` de la liste `lst` triée tel que x possède k éléments plus petit que lui. Ainsi le minimum est `ord_triee (0, lst)` le maximum `ord_triee (n-1, lst)`. Écrire une fonction `ord_naif` d'argument `k` et une liste `lst` qui renvoie l'élément `x` de la liste `lst` non triée tel que `x` possède `k` éléments plus petit que lui.
4. Écrire une fonction récursive `ord1(k, lst)` effectuant la même chose que précédemment. Un algorithme est donné :
   - on sépare la liste `lst` en 2 listes : une liste de valeurs plus grande que le 1^er^élément, une liste de valeurs plus petite que le 1^er^élément;
   - trouver la condition d'arrêt et d'appel récursif
   - donner la complexité si on exécute `ord1(N-1, L)` avec la liste `L=[0, 1, 2, 3, .... N]`.
5. Écrire une fonction récursive `select(k, lst)` effectuant la même chose que précédemment. On améliore l'algorithme précédent. Un algorithme est donné :
   - on sépare la liste en liste de 5 éléments avec la dernière liste de taille au plus égale à 5. On appelle la liste de liste segment
   - on calcule la médiane de chaque petite liste. On obtient un tableau de médianes M ;
   - on calcule la médiane des médianes : mdm,
   - on sépare la liste `lst` en 2 listes : une liste de valeurs plus grande que la médiane des médianes, une liste de valeurs plus petite que la médiane des médianes,
   - trouver la condition d'arrêt et d'appel récursif.
6. Montrer qu'il existe 1/2*3/5*n-7 éléments plus grand que la médiane des médianes. Montrer qu'il existe 1/2*3/5*n-7 éléments plus petit que la médiane des médianes.
7. Montrer que le nombre d'opérations $T(n)$ effectués par select s'écrit :
   (a) $T(n) < A sin < 140$;
   (b) $T(n) < B*n + T(7/10*n) + T(n/5) sin >= 140$. (Ne pas déterminer A et B).
8. En déduire la complexité de select.
9. Modifier le programme select pour qu'il gère les listes avec des éléments non distincts

Exercice 2

Épreuve : 1H de préparation, 45 min de présentation orale.

Soit M une matrice de taille $n \times m$. On considère que M est triée si :

$$\begin{cases} M[i,j] \leq M[i+1,j] & 0 \leq i \leq n-1 \\ M[i,j] \leq M[i,j+1] & 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

(M est triée par ligne et par colonne, $M[0,0]$ est la plus petite valeur de M et $M[n-1,m-1]$ la plus grande). L'épreuve consiste à trouver différentes façon de rechercher un élément dans un tableau (trié ou non).

1. Créer une fonction `est-Trié(M)` qui renvoie `True` quand le tableau est trié, `False` sinon. Quelle est la complexité ?
2. Donner une méthode pour avoir une matrice triée.
3. On pose $l = 1! \times 2! \times ... \times (n-1)! \times n! \times (n-1)! \times ... \times 1$. Soit $M = (a_{ij})$ $0 \leq i \leq n-1; 0 <= j \leq n-1$; avec les a_{ij} distincts et $0 \leq a_{ij} \leq n \times n$. Montrer qu'il existe l matrices triées et distinctes.
4. Recherche d'un élément dans une matrice quelconque. Peut on avoir une complexité linéaire ?

R Beaucoup de question ici, il fallait prouver que si l'algorithme ne regardait pas les $n \times m$ cases de M, il ne pouvait pas conclure de manière certaine que x était dans la matrice ou non. (M quelconque). J'avais du mal à comprendre la question, la réponse me paraissait évidente. Il fallait dire que si une case n'est de façon certaine pas prise en compte par l'algorithme (case (i,j)), `recherche(M,x)` et `recherche (Mp,x)` vont afficher le même résultat même si M possède une seule fois x à la case (i,j) et Mp vaut Men remplaçant la case (i,j) par un autre nombre.

5. Donner un algorithme de recherche d'un élément dans une liste triée, de taille n, de complexité $\mathcal{O}(n)$.
6. Donner un algorithme de recherche de l'élément x dans M, en supposant que M est triée, de complexité $\mathcal{O}(n \times l'(m))$.
7. On suppose M triée, donner un algorithme de complexité $\mathcal{O}(n+m)$ qui dit si l'élément x est dans Mou non. L'algorithme ne doit pas être récursif. On pourra commencer en bas à gauche de la matrice.
8. On m'a aussi demander de prouver que l'algorithme était correct (avec des schémas)

```
def fonction (M,x) :
        n,m= len (M), len(M[0])
        i,j = n-1, 0
        while M[i,j]!= x or (i=0 and M[i,j
             ]>x)
             or (j=m-1 and M[i,j]<x) :
             # les 2 dernière conditions
           # permettent d'éviter l'
               utilisation d'un compteur
                if i>0 and M[i,j]>x :
                        i=i-1
                if j<m-1 and M[i,j]<x :
                        j=j+1
        return (M[i,j]=x)
```

9. Faire le même algorithme de manière récursive.

R Remarques et impressions : Les examinateurs était ultra gentils. Ils demandent avant l'oral ce qu'on a fait pour gérer le temps. Ils ont souvent demandé les complexités. La plupart des questions peuvent être expliquées oralement, sans écrire le code (faire des schémas !).

Exercice 3

Soit L une liste de nombre, par exemple $L = [-6, -4, 1, 2, -3, 8, 1, -4]$. On cherche à savoir s'il existe 3 éléments (a, b, c) de la liste tel que $a + b + c = 0$. Ici $(1, 2, -3)$ ou encore $(-4, -4, 8)$ sont solutions.

1. Écrire un programme « naïf » qui retourne un couple solution et `None` s'il n'y en a pas. Donner la complexité de cet algorithme.
   Réponse $\mathcal{O}(n^3)$
2. On cherche à réduire la complexité. On veut une complexité en $\mathcal{O}\left(n^2 \log(n)\right)$. Pour cela on continue de tester toutes les combinaisons avec a et b puis on cherche c de manière astucieuse. *(Réponse : tri fusion puis dichotomie)*
3. On réduit encore la complexité. On veut qu'elle soit en $\mathcal{O}(n^2)$. Pour cela on cherchera b et c tels que $a \leq b \leq c$. On utilisera le fait que si b et c existent, ils appartiennent à l'intervalle $[inf, sup]$. On cherchera à conserver cet intervalle tout au long de l'algorithme.
   Réponse :

```
def Tri fusion (L)
    for i in range (len(L)) :
        a=L[i]
        inf=i
        sup=len(L)-1
        while sup >= inf :
            s=a + L[sup] + L[inf]
            if s==0 :
                return (a,L[sup], L[inf])
            elif s > 0 :
                sup=sup-1
            else :
                inf=inf+1
    return(none)
```

Évidemment je n'ai pas trouvé cet algorithme pendant la préparation, les examinateurs m'ont guidé vers celui-ci, puis ils m'ont demandé de prouver qu'il fonctionnait (il fallait le faire par l'absurde).

4. On a maintenant 3 listes A, B et C. On cherche à savoir s'il existe (a, b, c) où a appartient à A, b appartient à B, et c à C tels que $a + b + c = 0$. Écrire un programme qui retourne (a, b, c) s'ils s'existent et `None` sinon. Complexité $\mathcal{O}(n^2 \log(n))$.
5. On se replace dans le premier cas. Soit N le maximum en valeur absolue de la liste. Donner un programme en $\mathcal{O}(n + N^2)$ qui retourne un triplet dont la somme est nulle.

Réponse : Recherche du maximum : O(n) On parcourt alors la liste et on met les éléments dans l'ordre dans une autre liste. Et on applique l'algorithme de la question 3. $\mathcal{O}(N^2)$

Oral

6 Exercices de la Banque PT – 2016 – ✓

Exercice 1

Soit la suite définie par $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

1. Créer le programme qui, à partir d'un argument z_0 renvoie $\frac{z_0+|z_0|}{2}$. Itérer ce programme 12 fois.
2. Créer le programme d'arguments, z_0 et n qui renvoie la liste $[z_0, z_1, .., z_n]$ des termes de la suites.
3. Créer le programme d'argument z_0 et renvoyant la valeur de n dès que $|Im(z_n)| \leq 10^{-2}$.

Exercice 2

1. Écrire une fonction P d'argument L telle que $L = [l_0, l_1, \ldots, l_{d-1}]$ et $C = [c_0, c_1, \ldots, c_{d-1}]$ (deux listes) qui renvoie le produit du vecteur ligne par le vecteur colonne
2. Soit M une matrice carré sous forme d'une seule ligne (exemple : $M = [m_0, m_1, m_2, m_3]$ est une matrice 2x2 $\begin{pmatrix} m_0 & m_1 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}$. Écrire une fonction d'argument M une matrice carrée sous forme d'une liste, et un entier i qui renvoie la ligne i de la matrice M.
3. Écrire une fonction d'argument M et j qui renvoie la colonne j de la matrice M (toujours une matrice sous forme d'une liste).
4. Écrire une fonction d'argument M et N, deux matrices carrées sous forme d'une liste, et qui renvoie le produit matricielle de M par N.

Exercice 3

Python

```python
def ordonner(L):
    if len(L) == 0 :
        return([])
    if len == 1 :
        return(L)
    if len(L) == 2 :
        if L[1]<=L[0] :
            return(L)
        else :
            return([L[1],L[0]])
    if len(L) >= 3 :
        n=1
        e0=L[0]
        Linf,Lsup = [],[]
        for ei in L[1:]:
            if ei == e:0
                n+=1
            elif ei<e0:
                Linf.append(ei)
            else :
                Lsup.append(ei)
    return (ordonner(Linf)+n*[e0]+ordonner(
        Lsup))
```

1. Que fait le programme ordonner? Quelle est sa particularité?
2. Écrire la fonction `less(z1,z2)`, `(z1,z2)` des complexes qui renvoie `True` si : « Re(z1)<Re(z2) ou (Re(z1)=Re(z2) et Im(z1)<Im(z2)) ».
3. Écrire en s'inspirant de `ordonner` la fonction `ordonnerdansc(L)` qui classe une liste de complexes.
4. Tester `ordonnerdansc` avec une liste de complexes dont les parties réelles et imaginaires ont été choisies aléatoirement dans $[-10, 10]$.
5. Créer la liste des $(20+\cos(10a))e^{ia}$ avec a allant de $-\pi$ à π avec un pas de $\frac{pi}{100}$. On importera `cmath` pour l'exponentielle complexe. Tracer dans le plan complexe la liste ordonnée avec les fonctions `plot` et `show`.

Exercice 4

« Je suis tombé sur un algorithme qui transforme une liste en une autre.

Exemple [1,2,2] est transformé en (un un, deux deux) donc [1,1,2,2].

1. Écrire la fonction transformant une liste de nombre suivant la règle énoncée ci-dessus.
2. Transformer la liste d'entiers obtenue ci-dessus en une liste de chaine de caractère.
3. Écrire la fonction inverse, transformant une liste de nombres codés sous forme de chaîne de caractères en liste d'entiers suivant la règle énoncée en préambule.

»

Exercice 5

Python

```python
def chiffres (n):
    L=[]
    if n==0 :
        return[0]
    else :
        while n!=0:
            L.append(n%10)
            n=n//10
    L.reverse()
    return (L)
```

1. Que fait cette fonction?
2. Un nombre narcissique est un nombre composé de p chiffres dont la somme de ces chiffres exposant p est égale à ce nombre (celui de départ) (exemple : $93084 = 9^5 + 3^5 + 0^5 + 8^5 + 4^5$). Montrer que 93084 est narcissique.
3. Écrire une fonction d'argument n qui renvoie le booléen True si n est narcissique, False sinon.
4. Afficher la liste de tous les nombres narcissiques compris entre 0 et 10000.

Exercice 6

On donnait trois points A, B, C de coordonnées respectives (1,5), (2,8), (7,1).

1. Tracer le triangle?
2. Créer une fonction milieu qui calcul le milieu du segment.
3. Créer une fonction qui calcule le milieu entre le point $D(1,1)$ et A, B, ou C tirés au hasard (random) .

4. Appliquer cette fonction 1000 fois et tracer le résultat (on est en 2D).

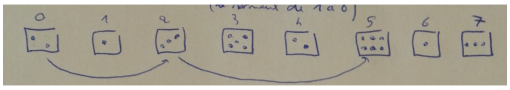
Exercice 7

Le zholty est la monnaie d'un pays et il n'existe que des billets de 52, 62 et 72.

1. Peut-on payer 400 zholty ? 600 ?
2. De combien de manières peut-on payer 600 zholty ?
3. Un enfant veut acheter un bonbon à 4 zholty, il possède au plus 600 zholty en au moins deux types de billet différents et le commerçant lui rend la monnaie. Combien avait l'enfant ?

Exercice 8

On modélise le lancer de n dés à 6 faces alignés comme ceci :



À partir du premier dé on avance de k dés avec k la valeur du dé comme ci-dessus jusqu'à que ce ne soit plus possible.

1. Écrire une fonction `lancer` sans argument qui modélise un lancer de dé (la méthode `random` était donnée mais pas son fonctionnement).
2. Écrire une fonction `liste` d'argument n qui renvoie une liste de n lancées de dés.
3. Écrire une fonction `arrivee` d'argument k et L avec k l'indice du premier dé pris en compte (dans l'exemple du haut $k = 0$) et L une liste de lancés de dés qui donne l'indice du dernier dé pris en compte. La tester pour tous les k avec des listes de 15, 20 et 25 lancés. Que remarquez-vous ?
4. Écrire une fonction `commun` d'argument L, une liste de lancés qui renvoie le plus grand entier k tel que l'indice d'arrivée en partant de 0, 1, 2, k soit le même.

Exercice 9

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ tel que si $0 \leq x < 1$, $f(x) = g(x)$, si $x > 1$, $f(x) = x f(x-1)$.

1. Avec $g(x) = 1$, créer une fonction $H(x)$ qui est la continuité de $f(x)$ sur $]-1, 0]$.
2. Créer $f(x)$ entre $]-1, +\infty[$.
3. Tracer $f(x)$ entre $]-1, 4y[$.
4. Tracer la dérivée de $f(x)$.
5. Même chose avec $g(x) = \cos x$.

Exercice 10

Pour le python c'était un sujet sur les mots et les bon mots.

1. Créer une fonction **mots(n)** qui retourne la listes des listes de longueur n avec le nombre 1 aux différents endroit possibles.
   Par exemple pour une longueur 2 : (0,1) ;(1,0) .
2. Un bon mot est une liste ou on a deux fois le nombre 1 consécutivement à l'intérieur. Écrire une fonction **bon_mot(mot)** renvoyant un booléen qui détermine si la liste est un bon mot ou non

Exercice 11

1. Écrire une fonction pol(L,x) d'argument une liste $L = [a_n, .., a_0]$ des coefficients d'un polynômes P et x un flottant et renvoyant $P(x)$.
2. Définir la matrice M donnée (4x4).
3. On définit la suite de matrice $B_0 = M$ et relation de récurrence entre B_k et B_{k-1}, écrire une fonction calculant la matrice B_k

Exercice 12

1. Écrire une fonction divise d'argument un entier n et qui renvoie la liste de ses diviseurs de carré inférieur ou égal à n.
2. Écrire une fonction est_premier d'argument un entier n et qui renvoie le booléen correspondant correspondant à "n est premier".
3. Écrire une fonction nbp d'argument un entier n et qui renvoie le nombre de nombre premiers entre 2 et n.
4. Deux autres non traitées.

Exercice 13

On considère les fonctions suivantes :

$$h(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}$$

et $\rho(t) = \sqrt{h(\cos(2t))\cos(2t)}$.
Et la courbe Γ de représentation paramétrique $x(t) = \rho(t)\cos(t)$ et $y(t) = \rho(t)\sin(t)$.

1. Écrire la fonction $\rho(t)$ d'argument t
2. Écrire une fonction **pts** d'argument un entier naturel et qui renvoie la liste de couples des coordonnées (x_i, y_i) des points $M(t_i)$ de Γ, pour $n+1$ valeurs de t_i régulièrement réparties dans $[0, 2\pi]$.
3. Tracer sur un même graphique les lignes polygonales approchant la courbe Γ pour les valeurs $n = 50$ et $n = 1000$.
4. Écrire une fonction **longueur** d'argument une liste de couples de coordonnées et qui renvoie la longueur de la ligne brisée reliant les points de la liste. Calculer la longueur approchée de la courbe.

Exercice 14

On définit la suite (t_n) par $t_0 = 0$, $t_{2n} = t_n$ et $t_{2n+1} = 1 - t_n$

1. Définir une fonction **t** d'argument un entier n, récursive et renvoyant t_n.
   On appelle MOT T la chaine de caractère associée aux termes de (t_n) : "0110100.."
2. Définir une fonction une fonction **mot** d'argument un entier naturel n et qui renvoie les n premiers caractère de MOT T.
3. Définir **nbseq** d'arguments un entier n et une chaine de caractères seq, renvoyant le nombre d'apparitions de la chaine seq dans le mot mot(n).
4. Conjecturer la limite de $\frac{nbseq(n,seq)}{n}$ pour des séquences à 1, 2 ou 3 bits.
5. ....

Exercice 15

Données fournies : décimales de π dans un fichier texte

1. Ouvrir le fichier et récupérer les donnes sous forme d'une chaine de caractères.
2. Afficher les dix premières décimales, les 10 dernières du fichier, le nombre de décimales.
3. Écrire une fonction **tirer** d'arguments un entier n , C (chaine de longueur N) et p (dans $[1, N]$), renvoyant une liste de longueur n de chiffres compris entre 0 et 9 d'éléments ressortant de la lecture de C entre $C[p]$ et $C[p+n-1]$. (si on arrive à la fin de C on recommence au début)

Exercice 16

1. Écrire une fonction bin(d) d'argument un entier d non nul et renvoyant le nombre de chiffres dans l'écriture binaire de d.
2. Écrire la fonction f(a) retournant $a^{n+1}-2^{n+1}$ où n est le nombre de chiffres dans l'écriture binaire de a (?)
3. Écrire une fonction créant la liste de n éléments utilisant la fonction f telle que $u_{n+1}=f(u_n)$.
4. ?

Exercice 17

1. Écrire une fonction d'argument n et renvoyant une liste de toutes listes de longueurs n possibles, formées de 1 et de -1.
   Pour $n = 2$ la fonction doit renvoyée $[[1,1],[1,-1],[-1,1],[-1,-1]]$.
2. ?
3. ?

Exercice 18

1. Écrire une fonction d'argument un entier n et renvoyant le nombre "inversé" 1234 devient 4321.
2. Écrire une fonction d'argument un entier et retournant le booléen représentant "n est un palindrome".
3. Créer une fonction d'argument n et renvoyant la liste des entiers de 0 à n identiques à leur palindrome.
4. Reprendre la question 1 en écrivant une fonction récursive.

Exercice 19

Un enfant a deux boites de bonbons (une dans chaque poche) contenant N_a et N_b bonbons. Il tire au hasard une des deux boites; si elle est vide il s'arrête de manger des bonbons, sinon il prend un bonbon et remet la boite dans sa poche, puis recommence.

1. Écrire une fonction donnant le nombre de bonbons mangés.
   Utiliser le module rand de numpy.
2. Estimer la loi de probabilité définissant le nombre de bonbons mangés et quelle boite sera vide sur n expériences.

Exercice 20

Un jeu de carte est composée de 32 cartes, une carte est un couple $[valeur, couleur]$ où $valeur$ appartient à $valeurs = ["7","8","9","10","V","D","R","A"]$ et $couleur$ appartient à $couleurss = ["trefle","coeur","carre$

1. Représenter le jeu de carte dans une liste.
2. Définir une fonction sans argument tirermain() qui retourne une liste de 5 cartes au hasard. On pourra utiliser la fonction sample du module random. (l'examinatrice m'a orienté vers randint)
3. Définir une fonction LV d'argument une main et qui retourne une liste du nombre de fois qu'apparait chaque valeur dans la main, dans l'ordre croissant, pour une paire la fonction retourne $[1,1,1,2]$.
4. ?
5. ?
6. Estimer la probabilité d'obtenir une paire, un brelan, un carré.

7 Exercices de la Banque PT – 2016 – à vérifier

Exercice 1

1. Compréhension d'un programme qui stocke dans deux listes les quotients et restes de la division par 4
2. Une liste de réels était donnée avec 16 éléments $L = [.,....,.]$ Il fallait la découper en paquets de 4 $L = [[...],[...]...]$, puis la transformer en chaine de caractère $m = ...ch(16a_0 + 64a_1 + ?a_2 + ?a_3)$.
   Cette chaine renvoyait le mot OK.

Exercice 2

1. Écrire une fonction P d'argument L telle que $L = [l_0, l_1, \ldots, l_{d-1}]$ et $C = [c_0, c_1, \ldots, c_{d-1}]$ (deux listes) qui renvoie le produit du vecteur ligne par le vecteur colonne
2. Soit M une matrice carré sous forme d'une seule ligne (exemple : $M = [m_0, m_1, m_2, m_3]$ est une matrice 2x2 $\begin{pmatrix} m_0 & m_1 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}$. Écrire une fonction d'argument M une matrice carrée sous forme d'une liste, et un entier i qui renvoie la ligne i de la matrice M.
3. Écrire une fonction d'argument M et j qui renvoie la colonne j de la matrice M (toujours une matrice sous forme d'une liste).
4. Écrire une fonction d'argument M et N, deux matrices carrées sous forme d'une liste, et qui renvoie le produit matricielle de M par N.

Exercice 3

On a : $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, ..., $\mathscr{P}_n$ populations d'un grand nombre d'individus. $\mathscr{P}_i = \dfrac{i}{n}$ la population vérifiant $\mathscr{C}$. On choisit n individus et on note X le nombre d'individus vérifiant $\mathscr{C}$.

1. Sachant $\mathscr{P}_i$, calculer $P(X = h)$.
2. Définir la fonction `tirer` qui simule cela en utilisant `randint`.

Exercice 4

1. Faire une fonction «partage» d'arguments `L` une liste de chiffre et `a` un chiffre, elle devrait renvoyer deux liste `Linf` qui correspond a la liste des élément de `L` inférieur ou égale à `a` et `Lsup` (réciproquement).
2. Faire une fonction `tri_rapide` à l'aide de la fonction `partage`.
3. Modifier tri pour quelle renvoie le nombre de comparaison (je n'ai pas réussi à modifier la récurrence pour obtenir les comparaisons).
4. Essayer la fonction avec une liste de 1000 éléments aléatoires, compris entre -999 et 999.

Exercice 5

Un physicien réalise une expérience et stocke les données dans un fichier. Il y a 41 positions (de -20 à 20) et deux points extrêmes désignant la frontière de l'étude (-25 et 25), soit 43 points au total. Les résultats sont des probabilités de présence autour des points. Il souhaite déterminer le modèle le plus adéquat. Le fichier est enregistré sous la forme :

```
2500

2.56
6.89
...
```

Avec le premier nombre désignant le nombre de valeurs puis la liste des probabilités de présence pour chaque point.

1. Écrire la fonction `nomfic` de paramètre n (un entier compris entre 0 et 99) retournant la chaîne de caractère `'data/modele152-xy.txt'` avec x le nombre des dizaines et y le nombre des unités. (Ex : `nomfic(7) -> 'data/modele152-07.txt'`).
2. Écrire la fonction `ecart` de paramètres F et P (deux listes contenant des probabilités de présence) et qui renvoie : $E = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{f_i - p_i}{p_i}$.
3. Lire le fichier `'data/experience152.txt'` dans le format détaillé précédemment avec N le nombre de valeurs et F la liste de probabilités. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1. Afficher le nuage de point des probabilités en fonction de la position.
4. Parcourir tous les fichiers de modèle (de la même forme que l'expérience mais sans le nombre de valeurs) et pour chaque?? :
   (a) extraire P la liste des probas ;
   (b) trouver le minimum de P : N_{min} ;
   (c) si $N > N_{min}$: $E = N \cdot \text{ecart}(F, P)$.

Et je ne me souviens plus tout à fait de la suite, il faut certainement récupérer le modèle correspondant à l'écart le plus faible et le tracer sur la courbe précédente.

Oral

8 Exercices de la Banque PT – 2015 – ✓

Exercice 1

« Il m'était demandé de créer une liste regroupant les abscisses et ordonnées pour k allant de 1 à 12, des points complexes de module variant entre 0 et 1, d'angle $\frac{k\pi}{6}$ et ensuite de tracer ces points. Je suis arrivé à le faire mais j'ai été obligé de me faire confirmer par l'examinateur ce qu'il fallait faire car l'énoncé me bloquait. »

Précision sur l'énoncé : tracer dans le plan complexe des points de module $k/12$ et d'argument $k \cdot pi/6$, k entre 0 et 12.

Exercice 2

R Exercice tombé au moins deux fois.

Un segment $[a, b]$ est noté comme une liste `[a,b]`. Soient I_1 et I_2 deux segments. Ils sont disjoints si leur intersection est vide.

1. Écrire une fonction `disjoint` d'arguments i_1 et i_2 (deux listes représentant des segments) et retournant `True` s'ils sont disjoints, `False` sinon.
2. La fusion de deux segments correspond à un segment qui a pour min le plus petit des deux min et pour max le plus grand des deux max. Écrire une fonction `fusion` d'arguments i_1 et i_2 et qui retourne la liste correspondant à la fusion de ces deux segments.
3. On dit qu'une liste de segments est bien fondée si les segments de cette liste sont disjoints et rangés dans l'ordre croissant. (On dit que $I_1 = [a, b]$ est inférieur à $I_2 = [c, d]$ si $b < c$.)
   (a) Les listes suivantes sont-elles bien fondées : $L = [[0,3],[6,7],[2,5]]$ et $L = [[0,1],[2,3],[4,5]]$?
   (b) Écrire une fonction récursive `verif` qui dit si une liste est bien fondée ou non.

Exercice 3

Voici un théorème d'arithmétique : tous les nombres entiers sont au plus décomposables en une somme de 9 cubes.

1. Définir une fonction `estcube(n)` qui retourne `True` si n est un cube, `False` sinon. Afficher tous les cubes inférieurs ou égaux à 250.
2. Définir une fonction `S2cube(n)` qui retourne `True` si n est la somme de deux cubes, `False` sinon. Afficher tous les entiers inférieurs ou égaux à 250 qui sont somme de deux cubes.
3. Définir une fonction `S4cube(n)` qui retourne `True` si n est la somme de quatre cubes, `False` sinon. Afficher tous les entiers inférieurs ou égaux à 250 qui ne sont pas somme de deux cubes.
4. Définir une fonction `S8cube(n)` qui retourne `True` si n est la somme de huit cubes, `False` sinon. Afficher tous les entiers inférieurs ou égaux à 250 qui ne sont pas somme de deux cubes.
5. Expliquer pourquoi les nombres qui ne sont pas somme de 8 cubes sont sommes de 9 cubes.
6. Conclure.

9 Exercices de la banque PT retranscrits par vos prédécesseurs – 2015

R Les exercices vous sont retranscrits tels que vos prédécesseurs nous les ont retranscrits.

Exercice 4

On considère la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

1. Montrer que le reste de la série vérifie $|R_n| \leq \frac{1}{1+n}$.
2. Écrire une fonction qui calcule la somme S à 10^{-6} près.
3. Tracer S_n en fonction de n (on rendra une centaine de points).

Exercice 5

Dans un ensemble $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, A_i représente une partie de E et est représenté par le code c_i tel que $c_i[k] = 0$ si $a_k \in A_i$ et 1 sinon.

1. Écrire la fonction `reunion` d'arguments c_1 et c_2 codes respectifs de A_1 et A_2 et retournant le code de $A_1 \bigcup A_2$.
2. Écrire la fonction `estrec` d'argument `L` une liste de codes associés à des sous ensembles de E et retournant le booléen `True` su la réunion de ces sous ensembles vaut `E` ou `False` sinon.
3. Soit R un ensemble de parties de E représenté par une liste L de codes. On dit que R est un recouvrement minimal de E si la réunion des parties de R est E et que pour tout R' inclus dans R et différent de R, R' n'est pas un recouvrement de E (la réunion des parties de R' est différente de E.
4. Écrire la fonction `estRecMin` d'argument `L` une liste de codes représentant R, qui retourne le booléen `True` si R est un recouvrement minimal de E `False` sinon.

Exercice 6

Soit s définie par $s_0 = 1$, $s_1 = 1$, et pour tout n, $s_{2n} s_n + s_{n+1}$.

1. Calculer les 8 premiers termes de la suite.
2. Écrire la fonction `LS` d'argument N et renvoyant les $N+1$ premiers éléments de la suite s. Calculer $L_{128} = LS(128)$.
3. On sépare la liste L_{128} de 1 à 2, de 2 à 4, de 4 à 8... Quelle symétrie y a-t-il pour chaque paquet? Extraire ces paquets.
4. Écrire la fonction `LP` d'argument N et renvoyant les $N+1$ premières lignes du triangle de Pascal. On rappelle que $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$ et $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. On a par exemple, $TP(4) = [[1],[1,1],[1,2,1],[1,3,3,1],[1,4,6,4,1]$.
5. ...

Exercice 10

On dit qu'un mot est un palindrome s'il est le même lorsqu'on le dit à l'envers. Par exemple le mot «radar» est un palindrome. Le mot «nul» donne «lun» à l'nvers et n'est pas un palindrome.

1. Écrire une fonction `inverse` d'argument une chaine de caractères `mot` et renvoyant la chaîne écrite à l'envers.
2. Écrire une fonction `palindrome` d'argument une chaine de caractères `mot` et renvoyant le booléen `True` si le mot est un palindrome, `False` sinon.
3. Par extension on dit qu'un nombre est un palindrome s'il est égal au nombre obtenu en écrivant les chiffres en ordre inverse. Écrire une fonction `pat_nombre` d'argument N et renvoyant la liste des nombres palindromes inférieurs ou égaux à N.

Exercice 11

1. Créer une fonction `partage` prenant en argument une liste L et un entier a retournant 2 listes $Linf$ et $Lsup$ respectivement les listes des éléments de L inférieurs à a et et ceux supérieurs à a.
2. Créer une fonction `trirapide` utilisant la précédente.
3. Modifier les deux fonctions précédentes afin de connaître le nombre de comparaisons effectuées.
4. Tester votre fonction avec une liste de 4000 valeurs entre -999 et 999. Utiliser `randint(p,q)` pour créer cette liste.

Exercice 12

On qualifie un vecteur de creux lorsque le nombre de zéros qu'il contient est au moins supérieur à la moitié de son nombre de coordonnées. Par exemple $v = (1,2,0,4,7,0,0,0,0)$ est creux (5 zéros et 9 coordonnées). Son codage est creux est $v = [9,[1,2,4,7],[0,1,3,4]]$ (nombre de coordonnées, liste des éléments non nuls, liste des indices de ces éléments).

1. Définir la fonction `creux` d'argument une liste v représentant un vecteur et retournant un booléen indiquant si le vecteur est creux ou non.
2. Définir la fonction `coder` d'argument une liste v représentant un vecteur et retournant le codage creux du vecteur.
3. Définir une fonction `decoder`.
4. Définir une fonction `simul` d'argument le codage `C` d'un vecteur v et un scalaire a retournant le cordage creux du vecteur $a\,v$.
5. Définir une fonction `coefficient(j,C)` qui renvoie la coordonnée j du vecteur creux associé au code C.

Exercice 13

1. Créer une fonction `C` d'argument un entier d et qui renvoie un entier formé par les chiffres de d dans l'ordre croissant. Par exemple, $C(1542) = 1245$.
2. Créer une fonction `D` qui fait la même chose que `C` mais dans l'ordre décroissant.
3. On définit une suite u_n par $u_0 = a \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} = D(u_n) - C(u_n)$. Écrire une fonction qui calcule les termes de cette suite.
4. ...

Oral

Exercice 14

1. Créer une fonction `nbits` d'argument un entier `n` qui renvoie le plus petit entier i tel que $n \leq 2^i$.
2. Créer une fonction `sansrep` d'argument une liste L d'entiers et qui retourne la liste des éléments de L en unique exemplaire. Exemple : `sansrep([5,0,0,0,3,3,5])=[5,0,5]`. On utilisera la fonction `in`.
3. Créer une fonction `position` d'argument une liste L d'entiers et e un entier, retournant la première position de e dans L (en supposant que e est dans L).
4. Retourner l'écriture binaire de la position de e dans la liste. On utilisera `nb.format(i)`.

Exercice 15

Soit n un entier fixé. On étudie le codage de listes d'entiers de longueur. On dispose d'une liste représentant le codage `C` de longueur n contenant des 0 et des 1. Une liste `E` d'entiers de longueurs n est la liste codée d'une liste A telle que A contient les éléments de la liste E dont les indices sont ceux pour lesquels `C` contient 1. Ainsi si `E=[2,4,6,7]` et `C=[0,1,1,0]` alors `A=[4,6]`.

1. Créer une fonction `decoder` d'arguments deux listes `E` et `C` qui renvoie la liste `A`.
2. Créer une fonction `coder` d'arguments `E` et `A` retournant `C`.
3. Créer une fonction `incrementer` d'argument `C` et retournant une liste `C'` contenant l'écriture binaire du nombre $N+1$ avec N nombres dont l'écriture binaire est C (si `C=[0,1,1,0]`, `N=6` donc `N+1=7` et `C'=[0,1,1,1]`.

Exercice 15

Soit T_n, le reste de la division euclidienne par 2 de la somme des chiffres représentant n en base 2. (exemple : 13 s'écrit 1101 donc on regarde le reste de la division de 1+1+0+1 par 2, donc $T(13)=1$).

1. (a) Trouver une relation entre T_{2n} et T_n.
   (b) De-même, trouver une relation entre T_{2n+1} et T_n.
   (c) Créer une fonction récursive pour calculer T_n
2. Afficher les lignes suivantes :
   - T_0, T_1
   - T_0 T_1 ; T_2 T_3 ;
   - T_0 T_1 T_2 ; T_3 T_4 T_5.

   Remarquer une particularité et en déduire une manière simple de calculer les 2^p premiers termes de la suite T_n.
3. Montrer que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} = \dfrac{T_n}{2^{n+1}}$ converge.
4. Calculer numériquement une valeur approchée de la somme à $10^(-6)$ près.

Exercice 16

1. Créer une fonction qui compte le nombre d'éléments pairs d'une liste.
2. Créer une fonction qui crée la liste des éléments pairs d'une liste.
3. Créer une fonction qui renvoie le booléen `True` si la liste ne contient que des chiffres pairs, `False` sinon.
4. Créer une fonction qui donne la position du maximum dans la liste.
5. Créer une fonction qui donne la médiane de la liste.
6. Créer une liste de 20 nombres aléatoires entre 0 et 100. Tester les fonctions.

Exercice 17

1. Écrire une fonction `binaire` d'argument $n \in ⋉$, renvoyant sous forme de liste l'écriture binaire de $n/$
2. Écrire une fonction `nombreDeUn` d'argument $n \in \mathbb{N}$, renvoyant le nombre de 1 dans `binaire(n)`.
3. La définition du «n-palindrome» était donnée dans l'énoncé.
   (a) Écrire une fonction `Palindrome` d'argument $n \in \mathbb{N}$ permettant de déterminer si n est un 2-palindrome.
   (b) Donner les 2-palindromes entre 0 et 100.

Exercice 18

Les nombres sont écrits sous forme de chaîne de caractères.

1. Déterminer tous les entiers inférieurs à 10000 égaux à la puissance 4 de la somme de leurs chiffres.
2. Écrire une fonction `DixVersDeux` qui prend comme argument un nombre en base 10 (chaine de caractères) et envoie le nombre en base 2.
3. Écrire une fonction `DeuxVersDix` réciproque de la fonction précédente.
4. Déterminer tous les entiers inférieurs à 10 000 égaux à la puissance 4 de la somme de leurs chiffres en base 2.
5. Écrire une fonction `DixVersBase(chaine,base)`.
6. Refaire la question 4 avec les bases 3 à 9.

Exercice 18 – Bis

On écrit 18 par une chaine de caractères : `'18'` en base 10 et `'10010'` en base 2.

1. Écrire une fonction `somchi` d'argument une chaine de caractères et retournant la somme de ses chiffres (exemple `somchi('18')` retourne 9).
2. Donner la liste des nombres entiers égaux à la somme de leurs chiffres à la puissance 4.
3. Écrire la fonction `DixVersDeux`, d'argument une chaine de caractère d'un nombre en en base 10 et retournant le nombre en base 2.
4. Écrire la fonction réciproque `DeuxVersDix`.
5. Donner la liste des nombres entiers en base 2 égaux à la puissance 4 de la somme de leur chiffre.

Exercice 19

- Deux algorithmes à expliquer (l'un transforme un nombre en une liste de ses chiffres et l'autre est la fonction inverse) exemple : 2015 : alg1 → [2, 0, 1, 5] – alg2 → 2015.
- Écrire la fonction récursive `perm` d'argument une liste `L` qui renvoi toute les permutations de cette

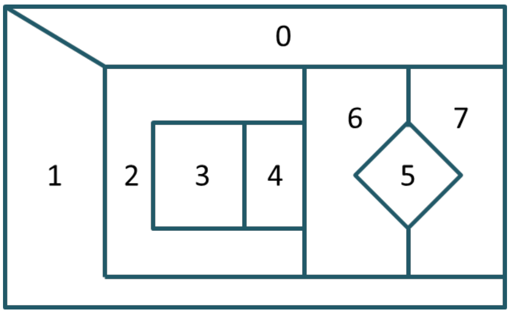
liste.
- 2 autres questions non traitées.

Exercice 20

Soit x un réel, $v_0 = x$, $a_n = \lfloor v_n \rfloor$, $v_{n+1} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{1}{a_n - 1} \end{cases}$ si $a_n > 1$.

1. Calculer les 10 premiers termes de la suite pour $x = \sqrt{3}$.
2. Définir $A(x)$, la fonction qui définit la suite et renvoie les 10 premiers termes de la suite. La tester avec $\sqrt{2}$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{5}$.
3. Définir la fonction $Nb(x)$ qui renvoie le numérateur et le dénominateur de $a + \dfrac{b}{n}$.
4. Définir le quotient de la fonction $Q(x)$ qui renvoie le quotient $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots \cfrac{1}{a_r}}}}$ avec r le plus petit entier tel que $a_r < 1$.

Exercice 21



Une carte numérotant des pays est numérotée de 0 à i. Chaque pays se voit attribuer une couleur. Le but est que des pays voisins n'aient pas la même couleur.

1. Écrire la liste carte constituée elle-même de liste donnant pour chaque pays le numéro des pays dont le numéro est supérieur à ce pays et ayant une frontière commune avec ce pays. Exemple : `carte[4]=[6]`, `carte[5]=[6,7]`.
2. Définir une fonction `voisins` de paramètres `(i,j,carte)` avec $i \neq j$. Cette fonction doit renvoyer un booléen `True` ou `False` si les pays i et j ont une frontière commune.
3. On attribue une couleur à chaque pays. Les couleurs sont représentées par des entiers naturels. On définit la liste `color` qui attribue pour chaque pays un numéro correspondant à sa couleur. Si le pays n'a pas de couleur, son numéro est -1.
   Définir la fonction `donnecouleur` de paramètre `p` pour le numéro de pays, `carte` et `color`. La fonction doit changer la liste couleur de façon à attribuer au pays `p` la couleur la plus petite tel qu'il ait une couleur différente de ses voisins.
   Exemple avec 3 : le pays 3 correspond à `p=2`. Admettons que les pays 2 et 4 aient respectivement les couleurs 1 et 2, on attribue à 4 la couleur 2.

Exercice 22

Soit `L` une liste triée et `a` un réel.

1. Écrire la fonction `ajout(L,a)` qui insère `a` dans `L` au bon endroit.
2. Écrire la fonction `fusion(L1,L2)` qui classe en une liste triée la somme de `L1` et `L2`.

Exercice 23

On étudie les entiers tels que $n = a^3 + b^3$.

1. Montrer que 3 ne s'écrit pas comme la somme de 2 cubes.
2. Écrire un programme afin de déterminer la liste des entiers n tels que $n = a^3 + b^3$ avec $n < 100$.
3. Écrire une fonction renvoyant un booléen nous indiquant si n est la somme de deux cubes.
4. Écrire une fonction qui indique si n est la somme de 2 cubes et l'ensemble des couples `(a,b)` tels que $n = a^3 + b^3$.

Oral

10 Exercices issus de «L'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses», Frédéric Butin

Exercice 1 – Opérations sur les polynômes – 2.11.3 p.50

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Un polynôme $P=\sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{R}[X]$ de degré n est représenté dans cet exercice par le tableau $P=[a_0,\dots,a_n]$.

1. Créer une fonction `affiche_poly` qui permet d'afficher un polynôme sous la forme $P=\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$.
2. Créer une fonction `degre_poly` qui calcule le degré d'un polynôme.
3. Implémenter la somme, le produit et la multiplication par un scalaire comme des fonctions notées `add_poly`, `mul_poly` et `mul_sca_poly`.
4. Créer une fonction `prsc_poly` qui calcule le prduit scalaire canonique de deux polynômes.
5. Créer une fonction `deriv_poly` qui calcule la dérivée d'un polynôme.

Exercice 2 – Produits polynômes – 2.11.20 p.65

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Un polynôme $P=\sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{R}[X]$ de degré n est représenté dans cet exercice par le tableau $P=[a_0,\dots,a_n]$.

1. Créer une fonction `affiche_poly` qui permet d'afficher un polynôme sous la forme $P=\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$.
2. Créer une fonction `degre_poly` qui calcule le degré d'un polynôme.
3. Implémenter le produit de deux polynômes. On notera `mul_poly` cette fonction. Donner sa complexité.

On suppose désormais que $n=2^k=2m$. La méthode qui suit permet de calculer le produit de deux polynômes en utilisant le principe «diviser pour régner».

On pose $P=P_1+X^m P_2$ et $Q=Q_1+X^m Q_2$, où P_1 et Q_1 sont de degré strictement inférieur à m. Ainsi, $PQ=P_1Q_1+X^m(P_1Q_2+Q_1P_2)+X^nP_2Q_2$.

1. Calculer le produit de deux polynômes de degré strictement inférieur à n revient donc à calculer 4 produits de deux polynômes de degré inférieur à $\frac{n}{2}$. Implémenter cet algorithme en une fonction `mul_poly_div`. Quelle est sa complexité ? Qu'en conclure ?
2. Une autre méthode de calcul consiste à poser $R_1=P_1Q_1$, $R_2=P_2Q_2$ et $R_3=(P_1+P_2)(Q_1+Q_2)$. Expliciter PQ en fonction des polynômes R_1, R_2, R_3. En déduire un algorithme (appelé algorithme de Karatsuba) permettant le calcul de PQ que l'on implémentera en une fonction `mul_poly_kara`. Comparer la complexité de cet algorithme à celle des algorithmes des questions précédentes.
3. Que faire quand n n'est pas de la forme 2^k.

Exercice 3 – Courbes en polaires – 4.6.25 p.111

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère Γ_n en coordonnées polaires définie par :

$$\sigma_n(\theta)=\cos^3(n\theta)-\sin^3(n\theta).$$

1. Représenter la courbe Γ_0.
2. Représenter sur un même graphique les courbes Γ_j, pour $j\in[\![0,3]\!]$.

Exercice 4 – Fonction de Takagi – 4.6.26 p.112

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

La fonction de Takagi est définie sur $[0,1]$ par $T: x\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\left(2^k x\right)}{2^k}$, où $d(y)$ représente la distance de y à l'entier le plus proche. On peut montrer que cette fonction est continue sur $[0,1]$ mais nulle part dérivable.

1. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, majorer $\|T-T_n\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|T(x)-T_n(x)|$ où $T_n: x\mapsto \sum_{k=0}^{n}\frac{d\left(2^k x\right)}{2^k}$.
2. Représenter le graphe de cette fonction, appelé la courbe du blanc-manger.

Exercice 5 – Modèle logistique – 4.6.27 p.113

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Pour tout $a\in]0,3]$, on considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in\left[0,1+\frac{1}{a}\right]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}=(1+a(1-u_n))u_n$. Cette suite représente, à un facteur près, la population d'une espèce.

1. Pour $a=1$ et $u_0=0,5$, représenter graphiquement les 10 premiers termes de la suite.
2. On fixe $u_0=0,5$. Créer une procédure qui reçoit en arguments a_1, c, a_2 et permet de représenter les termes u_n pour $n\in[\![100,200]\!]$ et $a=a_1+jc$, $j\in[\![0,\lfloor\frac{a_2-a_1}{c}\rfloor]\!]$ (les points sont à tracer sont des points de coordonnées (a,u_n)).
3. Exécuter cette procédure avec $a_1=2$, $c=0,005$, $a_2=3$ puis avec $a_1=2.84$, $c=0,0001$, $a_2=2,86$.

Exercice 6 – Enveloppe d'une famille de droites – 4.6.28 p.115

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Doit $(D_t)_{t\in I}$ une famille de droites du plan affine, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère, de sorte que la droite D_t a pour équation :

$$u(t)x+v(t)y+w(t)=0.$$

On suppose que les applications u, v, w sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et qu'elles ne s'annulent pas en même temps.

On cherche une courbe paramétrée $f: I\to\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $t\in I$,

- $f(t) \in D_t$;
- D_t est tangente à la courbe en $f(t)$.

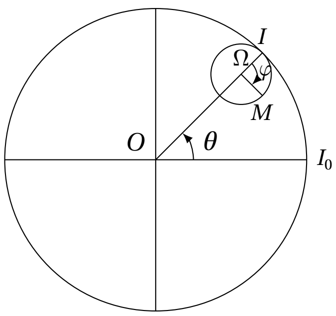
Quand elle existe, cette courbe est appelée l'enveloppe de la famille de droits $(D_t)_{t\in I}$.

1. On note $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Montrer que $\big(x(t), y(t)\big)$ est solution du système :
$$\left\{\begin{array}{l} u(t)x(t)+v(t)y(t)=-w(t) \\ u'(t)x(t)+v'(t)y(t)=-w'(t) \end{array}\right. .$$
En déduire qu'au voisinage de tout point $t_0 \in I$ tel que :
$$\begin{vmatrix} u(t_0) & v(t_0) \\ u'(t_0) & v'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$
, le système précédent a une unique solution, donnée par :
$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} -w(t) & v(t) \\ -w'(t) & v'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}}, y(t) = \frac{\begin{vmatrix} u(t) & -w(t) \\ u'(t) & -w'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}}.$$
2. Déterminer une paramétrisation de l'enveloppe E de la famille des droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'équation :
$$\sin(t)x - \cos(t)y - \sin^2(t) = 0.$$
3. Représenter, sur un même graphique, E et plusieurs droites D_t.

Exercice 7 – Hypocycloïde – 4.6.29 p.117

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Un cercle $\Gamma(\Omega, r)$ roule sans glisser à l'intérieur du cercle $C(O,R)$ (où $R > r$). On note $M = M(\theta)$ un point de Γ dont étudie la trajectoire. On note θ l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{O\Omega}}\right)$ et φ l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega M}}\right)$. Initialement, Ω est situé sur l'axe horizontal et M est situé en I_0.



1. Montrer que l'affixe de M est donnée par $z(\theta) = (R-r)\exp(i\theta) + r\exp(im\theta)$ où $m = 1 - \frac{R}{r}$. Ainsi, M a pour coordonnées :
$$\left\{\begin{array}{l} x(\theta) = (R-r)\cos\theta + r\cos(m\theta) \\ y(\theta) = (R-r)\sin\theta + r\sin(m\theta) \end{array}\right. .$$
2. On choisit $R = 4$ et $r = \frac{R}{4}$. Représenter la trajectoire de M. La courbe obtenue est appelée astroïde.
3. On choisit $R = 4$ et $r = \frac{R}{p}$ où $p \in \mathbb{N}$. Représenter, pour différentes valeurs de p, $\Gamma(\Omega, r)$ roulant sur $C(O,R)$, ainsi que la trajectoire de M. La courbe obtenue est appelée hypocycloïde à p rebroussements.
4. Vérifier que ces points sont effectivement des points de rebroussement.

Exercice 8 – Ensembles de Mandelbrot et de Julia – 4.6.30 p.119

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

L'ensemble de Mandelbrot est la partie M du plan complexe définie par $M = \{c \in \mathbb{C}/$ la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ est bornée $\}$.

De même, pour tout $c \in \mathbb{C}$, l'ensemble de Julia de paramètre c est défini par $J_c = \{z \in \mathbb{C}/$ la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = z$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ est bornée $\}$.

On souhaite représenter l'ensemble de Mandelbrot. On fixe un entier p assez grand, et pour chaque point $c \in \mathbb{C}$, on s'intéresse à la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$. On considère que cette suite n'est pas bornée s'il existe $k \leq p$ tel que $|z_k| \geq 4$.

1. Représenter l'ensemble de Mandelbrot. On pourra utiliser la fonction `imshow` qui permet de représenter, par une couleur différente, chaque valeur de k_0, où k_0 est le plus petit entier tel que $|z_{k0}| \geq 4$.
2. En procédant de même, représenter l'ensemble de Julia J_c pour différentes valeur de c.

Exercice 9 – Courbe de Peano – 4.6.31 p.122

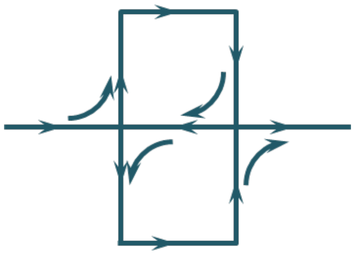
D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

La courbe de Peano est construite à partir d'un motif de base dans le lequel on remplace chacun des 9 segments par le motif complet auquel on a appliqué une homothétie de rapport $\frac{1}{3}$.

1. S'approprier le module `turtle` en réalisant un cercle avec la tortue.
2. En utilisant la tortue de Python, écrire une procédure récursive qui reçoit un entier n et trace la courbe obtenue en itérant n fois le procédé décrit ci-dessus.

R Pour utiliser le module `turtle` :

- importer le module : `import turtle`;
- cacher la tortue : `turtle.hideturtle()`;
- choisir la vitesse de la tortue : `turtle.speed(10)`;
- faire en sorte que la tortue laisse un trait sur son chemin : `tortue = turtle.Pen()`;
- faire avancer la tortue de 5 : `tortue.forward(5)`;
- faire tourner la tortue de 90 degrés vers la gauche : `tortue.left(90)`.



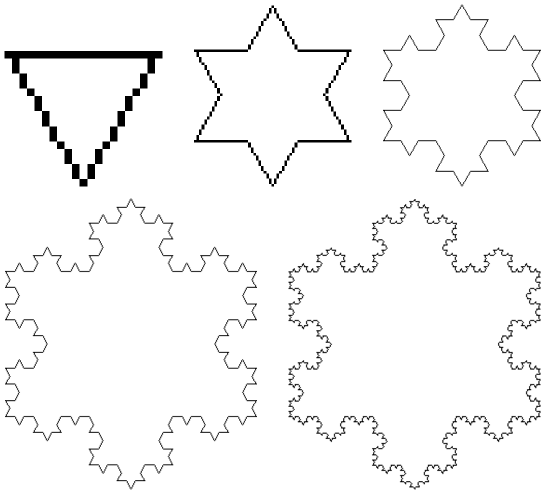
Exercice 10 – Flocon de Koch – 4.6.32 p.123

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Le flocon de Koch est construit à partir d'un triangle équilatéral sur chacun des trois côtés duquel on applique les transformations suivantes :

- on divise le côté en trois segments de même longueur;
- on construit un triangle équilatéral ayant pour base le segment du milieu dont on supprime la base.

1. Si cela n'a pas été fait, s'approprier le module `turtle` en réalisant un cercle avec la tortue.
2. En utilisant la tortue de Python, écrire une procédure récursive qui reçoit un entier n et trace le flocon de Koch en itérant n fois le procédé décrit ci-dessus.



Exercice 11 – Intégration numérique – 4.6.33 p.124

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x$.

1. Calculer $I = \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.
2. Comparer l'erreur entre I et la valeur approchée de I obtenue par les méthodes des rectangles et des trapèzes en approchant un nombre de points n où n parcourt la suite $[10, 20, 40, 100, 200, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 5000, 10000, 20000, 100000]$.
3. Représenter graphiquement cette erreur en prenant une échelle log – log. Expliquer les graphes obtenus.

R Tracé en diagramme log – log : `plt.loglog(x,y)`.

Exercice 12 – Équation différentielle – 4.6.34 p.125

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation différentielle :

$$x''(t) + 10x'(t) - x(t) = \sin(nt).$$

1. Résoudre cette équation différentielle avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.
2. Représenter le graphe des solutions pour $n \in [\![0, 10]\!]$ et $t \in [0, 7]$.

Exercice 13 – Suite de Fibonacci – 4.6.41 p.135

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

La suite de Fibonacci est la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Écrire une fonction qui calcule F_n à l'aide de produits de matrice.
2. Déterminer la complexité de la procédure de la question précédente en nombre d'additions et en nombre de multiplications. On distinguera les cas où :
   - la méthode d'exponentiation naïve est utilisée;
   - la méthode d'exponentiation rapide est utilisée.

Exercice 14 – Produits de matrices – 4.6.42 p.136

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

1. Calculer la complexité, en termes d'opérations sur les coefficients, de l'addition et de la multiplication de deux matrices de $M_n\mathbb{R}$ par la méthode naïve qui consiste à utiliser la définition du produit.
   On suppose désormais que $n = 2^k = 2m$.
2. Une méthode de calcul de produit de deux matrices qui repose sur le principe « diviser pour régner » est la suivante. On pose :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}.$$

On a donc :

$$P = MN = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} P_{11} &= M_{11}N_{11} + M_{12}N_{21} & P_{12} &= M_{11}N_{12} + M_{12}N_{22} \\ P_{21} &= M_{21}N_{11} + M_{22}N_{21} & P_{22} &= M_{21}N_{12} + M_{12}N_{22}. \end{aligned}$$

Ainsi calculer le produit de deux matrices $M_n\mathbb{R}$ revient à calculer 8 produits de deux matrices de $M_{n/2}\mathbb{R}$.
Implémenter cet algorithme en une fonction `prod_div`. Quelle est sa complexité ? Qu'en conclure ?

3. Une autre méthode de calcul consiste à poser $C_1 = M_{11}(N_{12}-N_{22})$, $C_2 = N_{22}(M_{11}+M_{12})$, $C_3 = N_{11}(M_{21}+M_{22})$, $C_4 = M_{22}(N_{21}-N_{11})$, $C_5 = (M_{11}+M_{22})(N_{11}+N_{22})$, $C_6 = (M_{12}-M_{22})(N_{21}+N_{22})$ et $C_7 = (M_{11}-M_{21})(N_{11}+N_{12})$. Expliciter P_{11}, P_{12}, P_{21} et P_{22} en fonction des matrices C_1, ..., C_7. En déduire un algorithme (appelé algorithme de Strassen) permettant le calcul de $P = MN$ que l'on implémentera en une fonction `prod_strassen`. Comparer la complexité de cet algorithme à celle des algorithmes des questions précédentes.
4. Que faire quand n n'est pas de la forme 2^k ?

Exercice 15 – Équations différentielles – 4.6.46 p.144

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

On souhaite résoudre par différences finies l'équation :

$$u''(x)+2u(x)=2\cos x+\sin^2 x$$

sur $[0,\pi]$ avec les conditions aux limites $u(0)=0$ et $u(\pi)=0$.

On considère la subdivision $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = \pi$ de l'intervalle $[0,\pi]$ où $x_i = ih$ et $h = \dfrac{\pi}{n+1}$. Pour tout i, on note u_i la valeur approchée cherchée de $u(x_i)$ et on approche la dérivée seconde $u''(x)$ par :

$$\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}.$$

1. Montrer que le système d'équation obtenu s'écrit matriciellement $AU = F$, où

$$A=\begin{bmatrix} 2h^2-2 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2h^2-2 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} h^2 f(x_1) \\ \vdots \\ h^2 f(x_n) \end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

avec $f : x \mapsto 2\cos x+\sin^2 x$.

2. Résoudre le système linéaire et représenter graphiquement la solution.
3. La solution exacte de l'équation est :

$$u(x) = \frac{\sin\left(\sqrt{2}x\right)\left(3+5\cos\left(\sqrt{2}\pi\right)\right)}{2\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)} - \frac{5\cos\left(\sqrt{2}x\right)}{2} + \frac{\cos x}{2}(4+\cos x).$$

Superposer le graphe de la solution exacte au graphe de la solution approchée.

Exercice 16 – Équations des ondes – 4.6.47 p.146

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

On souhaite résoudre par différences finies l'équation des ondes :

$$\partial_{tt} u(x,t)-c^2\partial_{xx} u(x,t)=0$$

sur $[-5,5] \times [0,0.1]$ avec les conditions initiales $u(x,0) = \exp\left(-10x^2\right)$ et $\partial_t u(x,0) = 0$, et les conditions aux limites $u(-5,t)=u(5,t)=0$.

On considère la subdivision $-5 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 5$ (resp. $0 = t_0 < t_i < \ldots < t_{m-1} < t_m = 0,1$) de l'intervalle $[-5,5]$ (resp. $[0,0.1]$) où $x_i = -5+ih$ (resp. $t_k = kl$) et $h = \dfrac{10}{n+1}$ (resp. $l = \dfrac{0,1}{m}$).

Pour tout $(i,k)\in[\![0,n+1]\!]\times[\![0,m]\!]$, on note $z_{i,k}$ la valeur approchée cherchée de $u(x_i,t_k)$ et l'on approche la dérivée première $\partial_t u(x_i,t_k)$ par $\dfrac{z_{i,k+1}-z_{i,k}}{l}$ et la dérivée seconde $\partial_{tt} u(x_i,t_k)$ par $\dfrac{z_{i,k+1}-2z_{i,k}+z_{i,k-1}}{l^2}$. On choisit $n = m = 100$ et $c = 31,6$.

1. Résoudre l'équation par différences finies en utilisant le schéma explicite, qui consiste à approcher la dérivée seconde $\partial_{xx} u(x_i,t_k)$ par l'expression $\dfrac{z_{i-1,k}-2z_{i,k}+z_{i+1,k}}{h^2}$.
2. Créer une animation permettant de visualiser la solution obtenue quand t varie.
3. Résoudre l'équation par différences finies en utilisant le schéma implicite, qui consiste à approcher la dérivée seconde $\partial_{xx} u(x_i,t_k)$ par l'expression : $\dfrac{z_{i-1,k+1}-2z_{i,k+1}+z_{i+1,k+1}}{h^2}$.
4. Créer une animation permettant de visualiser la solution obtenue quand t varie.

Exercice 17 – Position d'une membrane – 4.6.49 p.153

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

On considère une membrane élastique dont le bord est fixé à un cadre carré horizontal. La membrane est soumise à une force verticale f. On peut montrer que l'altitude $z(x,y)$ de la membrane en un point du carré de coordonnées (x,y) vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta z\left(x,y\right)=f(x,y)$$

avec les conditions aux limites $z(x,y)=0$ sur le bord du carré.

On se place dans le cas où le cadre est le carré $[0,1]^2$ et où f est constante, par exemple $f(x,y)=-4$ pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$.

Pour résoudre cette équation par la discrétisation, on pose $h = \dfrac{1}{n+1}$ et pour tout $(i,j)\in[\![0,n+4]\!]^2$, $x_i = ih$ et $y_j = jh$: on obtient ainsi un quadrillage du carré $[0,1]^2$. On a déjà $z\left(x_i,y_j\right) = 0$ si $i \in \{0,n+1\}$ ou $j \in \{0,n+1\}$ par hypothèse. On note $z_{i,j}$ l'approximation cherchée de $z\left(x_i,y_j\right)$ par $z_{i,j}$ et le laplacien $\Delta z\left(x_i,y_j\right)$ par son approximation à 5 points :

$$\frac{1}{h^2}\left(z_{i-1,j}+z_{i+1,j}+z_{i,j-1}+z_{i,j+1}-4z_{i,j}\right).$$

On résout alors le système formé par les équations obtenues, qui est un système linéaire dont les inconnues sont les $z_{i,j}$ pour $(i,j)\in[\![0,1]\!]^2$.

1. Étant donné $A=\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $B=\left(b_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ deux matrices de $M_n\mathbb{R}$, le produit de Kronecker de A par B est la matrice de $M_{n^2}\mathbb{R}$ définie par :

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B\\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \dots & a_{n,n}B\end{bmatrix}.$$

La commande `kron` de numpy permet de calculer le produit de Kronecker. Observer que le système linéaire peut se mettre sous la forme $(A_n\otimes I_n+I_n\otimes A_n)Z=F$ où A_n est la matrice du laplacien de taille n, c'est à dire :

$$A_n=\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1\\ & & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

2. Résoudre l'équation par discrétisation, comme expliqué ci-dessus.
3. Représenter la membrane en 3d.

Exercice 18 – Polygones orthogonaux – 4.6.50 p.155

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

1. Pour $n=16$, créer en Python la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Définir le produit scalaire $\varphi:(P,Q)\mapsto\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et la norme euclidienne associée sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, orthonormaliser la base canonique pour le produit scalaire φ.
4. Calculer la projection orthogonale de $h:x\mapsto\cos(4\pi x)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ (approximation de h au sens des moindres carrés).

Exercice 19 – Système proies – prédateurs – 4.6.37 p.129

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Le système proies-prédateurs est régit par les équations de Volterra qui forment le système non linéaire :

$$\begin{cases} x'(t)=a\,x(t)-b\,x(t)y(t)\\ y'(t)=-c\,y(t)+d\,x(t)y(t)\end{cases},$$

où a, b, c et d sont des réels strictement positifs.

1. On pose $X=(x,y)^t$. Créer une fonction f qui à (X,t,a,b,c,d) fait correspondre $(ax-bxy,-cy+dxy)$.
2. Résoudre le système dans les conditions suivantes : $X=(1,2)$ et $a,b,c,d=1,1,1,1$.
3. Représenter x et y sur un même graphique.
4. Représenter les courbes paramétrées par x et y, qui donne l'évolution des deux populations.

Exercice 20 – Transformée de Fourier – 4.6.65 p.241.

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Implémenter en Python l'algorithme naïf de calcul de la transformée de Fourier d'un vecteur de $\mathbb{C}^N$.

Exercice 21 – 6.5.66 p.242.

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application 2π-périodique définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in[0,\pi[\\ 10 & \text{si} \quad x\in[\pi,2\pi[\end{cases}.$$

1. En utilisant la FFT, calculer des valeurs approchées des coefficients de Fourier de f.
2. Représenter sur un même graphique f et la somme approchée de sa série de Fourier.

Exercice 22 – Débruitage d'un signal – 6.5.65 p.243.

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

On considère un signal donné par l'application :

$$f:t\mapsto 3\cos(3t)+2\sin(2t)-\frac{1}{2}\cos t$$

échantillonné sur $n=100$ points équidistants $(t_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ du segment $[0,2\pi]$. On introduit sur ce signal un bruit donné par une loi uniforme sur $[-1,1]$: ainsi pour tout point t_k d'échantillonnage, la valeur du signal n'est pas $f(t_k)$, mais $g(t_k)=f(t_k)+b_k$, où b_k est une réalisation d'une loi uniforme sur $[-1,1]$.

1. Représenter sur un même graphique le signal f et le signal bruité g.
2. Appliquer la FFT au signal bruité. Construire alors un nouveau signal débruité h en supprimant les fréquences d'indices trop grands (on peut par exemple ne garder qu'un quart des fréquences).
3. Représenter h sur le même graphique que f et g.

Exercice 23 – Taches solaires – 4.6.65 p.244.

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

Nous nous intéressons ici aux mesures de l'activité des taches solaires de l'année 1700 à l'année 2004. On appelle nombre de Wolf le nombre de taches solaires observées en une année.

La transformée de Fourier, qui permet de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel, donne la possibilité de savoir s'il existe une fréquence prédominante, c'est-à-dire si les données sont périodiques.

1. Représenter graphiquement le nombre Wolf en fonction de l'année.
2. Effectuer la FFT de la liste des nombres de Wolf. On la note Y. Représenter alors $\Im(Y)$ en fonction de $\Re(Y)$.
3. On souhaite construire un chronogramme, c'est-à-dire une graphe de la puissance du signal en fonction de la fréquence (la puissance de la FFT étant égale au carré du signal de la FFT).
   Tracer ce chronogramme en utilisant uniquement les coefficients de Y compris entre 1 et $E\left(\frac{n}{2}\right)$, où n est le nombre de relevés (les coefficients situés au-delà de $E\left(\frac{n}{2}\right)$ correspondant à des coefficients de Fourier d'indices négatifs) : la plage de fréquences est donc :
   $$\left(\frac{k}{n}\right)_{k\in\left[\!\left[1,E\left(\frac{n}{2}\right)\right]\!\right]}=\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots E\left(\frac{n}{2}\right)\frac{1}{n}\right].$$
   Tracer le graphe de la puissance du signal en fonction de la période. Que constate-t-on ?

Exercice 24 – Traitement d'image – Filtre – 6.5.69 p.247.

D'après Frédéric Butin, l'informatique pas à pas en prépa, éditions ellipses.

1. Créer une fonction qui permet d'afficher la composante rouge d'une image.
2. Créer une fonction qui permet d'afficher la composante cyan.

11 Corrigés – Banque PT

Exercice 1 – Arithmétique – Corrigé

Correction

```
# Question 1
n = 1234
q = n//10
r = n%q

# r contient le nombre d'unités de n
```

Correction

```
# Question 2
s=0
while n!=0:
    q=n//10
    r = n%10
    #print(r)
    s=s+r**3
    n=q
```

Correction

```
# Question 3
def somcube(n):
    """
    Entrées :
     * n, int : nombre
    Sortie :
     * s, int : somme des cubes du chiffre n
    """
    s=0
    while n!=0:
        q=n//10
        r = n%10
        s=s+r**3
        n=q
    return s
```

Correction

```
# Question 4
res = []
for i in range (10001):
    if i == somcube(i):
        res.append(i)
```

Correction

```
# Question 5
def somcube2(n):
    """
    Entrées :
     * n, int : nombre
    Sortie :
     * s, int : somme des cubes du chiffre n
    """
    nombre=str(n)
```

```
    s=0
    for chiffre in nombre :
        s = s+int(chiffre)**3
    return s

print(somcube2(1234))
```

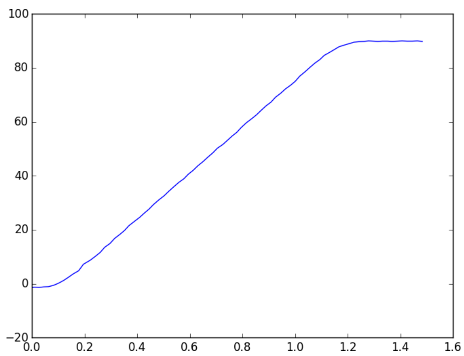
Exercice 2 – Intégration – Corrigé

Correction

```
# Question 1
# ==========
# Le répertoire courant est Exercice_02.
# Le sous-répertoire data contient le
# fichier ex_02.txt.

# On ouvre le fichier en lecture)
fid = open("data\ex_02.txt")

# On charge le fichier dans une liste.
# Chaque élément de la liste correspond à
# chaque ligne sous forme de chaÃ©ne de caractère.
file = fid.readlines()
# On ferme le fichier
fid.close()

LX=[]
LY=[]
for ligne in file :
    ligne = ligne.split(';')
    LX.append(float(ligne[0]))
    LY.append(float(ligne[1]))
```

Correction

```
# Question 2
# ==========
# Ne pas oublier de charger préalablement
# import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(LX,LY)
plt.show()
```



Correction

```
# Question 3
# ==========
def trapeze(x,y):
    res = 0
```

```
    for i in range(1,len(LX)):
        res = res+(LX[i]-LX[i-1])*0.5*(LY[i]+LY[i-1])
    return res
print(trapeze(LX,LY))

>>> 75.13635
```

Correction

```
# Question 4
# ==========
from scipy.integrate import trapz
# Attention àl'ordre des arguments dans
# la fonction trapz : les_y puis les_x
# Après l'import, help(trapz) permet d'avoir
# de l'aide sur la fonction.
print(trapz(LY,LX))

>>> 75.13635
```

Exercice 3 – Graphe – Corrigé

Correction

```
# Question 1
# ==========
# Matrices avec des listes
M=[[0,9,3,-1,7],
      [9,0,1,8,-1],
      [3,1,0,4,2],
      [-1,8,4,0,-1],
      [7,-1,2,-1,0]]
```

Correction

```
# Question 2 & 3
# ==============
def voisins(M,i):
    """
    Entrées :
      * M(lst) : graphe
      * i : noeud considéré
    Sortie :
      * v(lst) : liste des voisins
    """
    v = []
    # On cherche les voisins sur une ligne
    # (on pourrait le faire sur une colonne)
    for j in range(len(M[i])):
        if M[i][j]>0:
            v.append(j)
    return v

# print(voisins(M,0))
```

Correction

```
# Question 4
# ==========
def degre(M,i):
```

```
    """
    Entrées :
      * M(lst) : graphe
      * i : noeud considéré
    Sortie :
      * (int) : nomnbre de voisins
    """
    return len(voisins(M,i))
```

Correction

```
# Question 5
# ==========
def longueur(M,chemin):
    l = 0
    for i in range(len(chemin)-1):
        if M[chemin[i]][chemin[i+1]]<0:
            return -1
        else :
            l=l+M[chemin[i]][chemin[i+1]]
    return l

chemin = [1,2,3,1,4]
print(longueur(M,chemin))
chemin = [0,4,2,1,0]
print(longueur(M,chemin))
```

Exercice 4 – Corrigé

Correction

```
# Question 1
# ==========
def nombreZeros(t,i):
    if t[i]==1:
        return 0
    else :
        res = 1
        j=i+1
        while j<len(t) and t[j]==0:
            res = res+1
            j=j+1
    return res
# t1=[0,1,1,1,0,0,0,1,0,1,1,0,0,0,0]
# print(nombreZeros(t1,4))
# print(nombreZeros(t1,1))
# print(nombreZeros(t1,8))
```

Correction

```
# Question 2
# ==========
def nombreZerosMax(t):
    max=nombreZeros(t,0)
    for i in range(1,len(t)):
        tmp = nombreZeros(t,i)
        if tmp>max:
            max = tmp
    return max
print(nombreZerosMax(t1))
```

Correction La complexité est quadratique ($\mathcal{O}^2$) du fait de la boucle `for` et de la boucle `while` imbriquée.

Pour diminuer la complexité, il est possible de parcourir une seule fois la liste. On lit alors les termes un à un. Quand on détecte un zéro, on compte alors le nombre de zéros consécutifs et on poursuit jusqu'à la fin...

Exercice 5 – Corrigé

D'après Mme Barré `http://www.lycee-lesage.net/`.

Correction

```
import math
import scipy.misc as scim
# Question 1
# ==========
def Px_poisson(k, n, p):
    """
    Entrée :
     * k(int)
     * n(int) : strictement positif
     * p(flt) : réel compris entre ]0, 1[
    X suit une loi de Poisson P(n*p)
    Sortie :
     * flt : (np)^k exp(-np)/k!
    """
    np = n * p
    return (np)**k * math.exp(- np) / math.factorial(k)

n, p = 30, 0.1
lst_px = [Px_poisson(k, n, p) for k in range(n + 1)]
```

Correction

```
# Question 2
# ==========
def Py_binomiale(k, n, p):
    """
    Entrée :
     * k(int)
     * n(int) : strictement positif
     * p(flt) : réel compris entre ]0, 1[
    Y suit une loi binomiale B(n,k)
    Sortie :
     * int : B(n,k)*p^k *(1-p)^(n-k)
    """
    return scim.comb(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k)

n, p = 30, 0.1
lst_py = [Py_binomiale(k, n, p) for k in range(n + 1)]
```

Correction

```
# Question 3
# ==========
def ecarts(n,p):
        """
        Entrée :
     * n(int) : strictement positif
     * p(flt) : réel compris entre ]0, 1[
    Sortie :
     * maxi(flt) écart maxi entre P(Y=k) et P(X=k)
    """

        lst_px = [Px_poisson(k, n, p) for k in range(n + 1)]
    lst_py = [Py_binomiale(k, n, p) for k in range(n + 1)]
    maxi = max([abs(lst_py[i]-lst_px[i]) for i in range(len(lst_px))])
    return maxi

#print(ecarts(n,p))
```

Correction

```
# Question 4
# ==========
def E(e,p):
        """
        Retourne le plus petit entier naturel n tq ecart(n,p)<=e
        Entrée :
         * e(flt) : >0
         * p(flt) : réel compris entre ]0, 1[
    Sortie :
     n(int)
        """
        n=1
        while (ecarts(n,p))>e :
                n=n+1
        return n
```

Correction

```
# Question 5
# ==========
```

```
print(E(0.008,0.075))
print(E(0.005,0.075))
print(E(0.008,0.1))
#print(E(0.005,0.1))
```

Exercice 6 – Corrigé

Correction

```
# Import de fonctions
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sqrt
# Question 1
# ==========
def g(x):
    if x>= 0 and x<1 :
        return x
    elif x>1 and x<2 :
        return 1
xx = [0]
t=0
while t<=1.99:
    t=t+0.01
    xx.append(t)
yy = [g(x) for x in xx]
plt.plot(xx,yy)
plt.show()
```

Correction

```
# Question 2
# ==========
def f(x):
    if x>=0 and x<2 :
        return g(x)
    else : # x>=2
        return sqrt(x)*f(x-2)
```

Correction

```
# Question 3
# ==========
xxx = [0]
t=0
while t<=6:
    t=t+0.01
    xxx.append(t)
yyy = [f(x) for x in xxx]
plt.plot(xxx,yyy)
plt.show()
```

Correction

```
# Question 4
# ==========
# On cherche àrésoudre f(x)-4 = 0 sur
# l'intervalle [5,6]
def h(x):
    res = f(x)-4
    return res
```

```python
a = 5.
b = 6.
while (b-a)>0.01:
    m=(a+b)/2
    if h(m)>0:
        b=m
    else :
        a=m
m=(a+b)/2

if h(m)<0:
    m= m+ abs(b-a)
print(m,h(m))
```

Exercice 7 – Corrigé

Correction

```python
# Question 1
# ==========
def d(n):
    """
    Retourne la liste de tous les diviseurs de n.
    Entrée :
     * n(int) : entier.
    Sortie :
     * L(lst) : liste des diviseurs de n.
    """
    L =[1]
    for nombre in range(2,n+1):
        if n%nombre == 0:
            L.append(nombre)
    return L
print(d(4),d(10))
```

Correction

```python
# Question 2
# ==========
def DNT_01(n):
    return d(n)[1:-1]
def DNT_02(n):
    L =[]
    for nombre in range(2,n):
        if n%nombre == 0:
            L.append(nombre)
    return L
print(DNT_01(4),DNT_02(4))
print(DNT_01(10),DNT_02(10))
```

Correction

```python
# Question 3
# ==========
def sommeCarresDNT_01(n):
    L = DNT_01(n)
    res = [x**2 for x in L]
    return sum(res)
def sommeCarresDNT_02(n):
    L = DNT_01(n)
    res = 0
    for x in L:
```

```
        res = res + x*x
    return res
def sommeCarresDNT_03(n):
    L = DNT_01(n)
    res = 0
    for i in range(len(L)):
        res = res + L[i]**2
    return res
print(sommeCarresDNT_01(15),sommeCarresDNT_02(15),
    sommeCarresDNT_03(15))
```

Correction

```
# Question 4
# ==========
from math import sqrt
for i in range(1001):
    if i == sommeCarresDNT_01(i) :
        print(str(i)+"\t"+str(sqrt(i)))
# Conjecture les nombres recherchés sont
# les carrés des nombres premiers.
```

Exercice 8 – Corrigé

Correction

```
# Question 1
# ==========
chaine = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
```

Correction

```
# Question 2
# ==========
def decalage(chaine,n):
    chaine = chaine[n:-1]+chaine[0:n]
    return chaine
print(chaine,decalage(chaine,3))
```

Correction

```
# Question 3
# ==========
def indices(x,phrase):
    """
    Recherche des indices de x dans phrase
    Entrée :
     * x(str) : un caractère
     * phrase(str)
    Sortie :
     * res(lst) : liste des indices de x
    """
    res = []
    for i in range(len(phrase)):
        if phrase[i] == x:
            res.append(i)
    return res

print(indices("a","akjlkjalkjlkjalkjlkja"))
```

Oral

Correction

```
# Question 4
# ==========
def codage(n,phrase):
    ch = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
    ch_c = decalage(ch,n)
    print(ch_c)
    phrase_c=""
    for c in phrase :
        i = indices(c,ch)
        i = i[0]
        phrase_c = phrase_c+ch_c[i]
    return phrase_c
print(codage(3,"oralensam"))
```

Correction

```
# Question 5
# ==========
# Solution 1 : essayer les 26 permutations,
# jusqu'à trouver une phrase qui est du sens.
# Solution 2 : statistiquement le e est la lettre
# la plus présente dans la langue franÃ§aise. On
# peut donc déterminer la fréquence d'apparition
# des lettres. # La lettre la plus fréquente
# peut être assimilée au "e".
# On calcule ainsi le décalage...
```

Exercice 9 – Fractale de Mandelbrot – Corrigé

Correction

```
# Question 1
# ==========
def suite_u(c,n):
    """
    Calcul de la suite u au rang n.
    Entrées :
     * c(flt) : nombre quelconque
     * n(int)
    Sortie :
     * res(flt) : valeur de u(n)
    """
    res = 0
    i=0
    while i!=n:
        res = res*res+c
        i=i+1
    return res
```

Correction

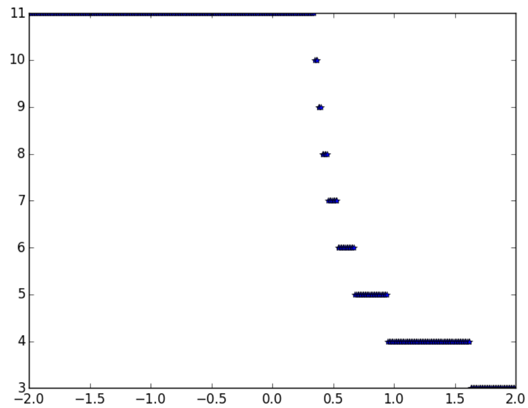
```
def recherche_k(m,M,c):
    """ Recherche de k """
    k=0
    while k<=m:
        if abs(suite_u(c,k))>M:
            return k
        k=k+1
    return -1
```

Correction

```
def fonction_f(m,M,c):
    """ Fonction """
    k = recherche_k(m,M,c)
    if k>=0:
        return k
    else :
        return m+1
```

Correction

```
# Question 2
#===========
import matplotlib.pyplot as plt
m,M=10,20
LX = [-2+4*x/400 for x in range(401)]
LF = [fonction_f(m,M,x) for x in LX]
plt.plot(LX,LF,"*")
plt.show()
```



Correction

```
# Question 3
#===========
LX = [-2+2.5*x/100 for x in range(101)]
LY = [-1.1+2.2*x/100 for x in range(101)]
XY = [[[x,y] for x in LX] for y in LY]

for i in range(len(LX)):
    for j in range(len(LY)):
        XY[i][j]=fonction_f(
            m,M,complex(XY[i][j][0],XY[i][j][1]))
```

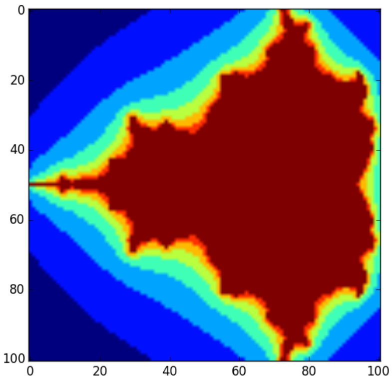
Correction

```
# Question 4
#===========
res = 100
LX = [-2+2.5*x/res for x in range(res+1)]
LY = [-1.1+2.2*x/res for x in range(res+1)]
XY = [[[x,y] for x in LX] for y in LY]

for i in range(len(LX)):
    for j in range(len(LY)):
        XY[i][j]=fonction_f(
```

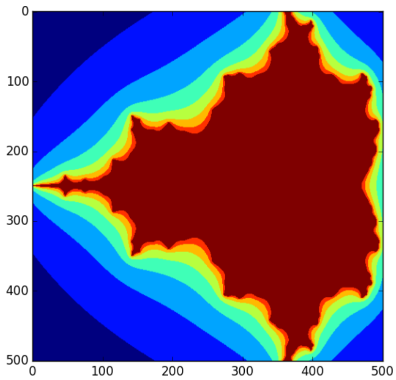
```
        m,M,complex(XY[i][j][0],XY[i][j][1]))

# plt.imshow(XY)
# plt.show()
```

Correction

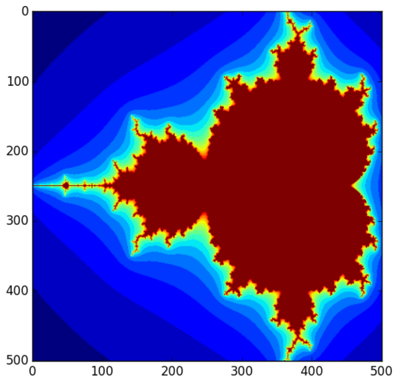
```
# Bilan
#=======
def affichage(m,M,res):
    m = m
    M = M
    LX = [-2+2.5*x/res for x in range(res+1)]
    LY = [-1.1+2.2*x/res for x in range(res+1)]
    XY = [[[x,y] for x in LX] for y in LY]
    for i in range(len(LX)):
        for j in range(len(LY)):
            XY[i][j]=fonction_f(
                m,M,complex(XY[i][j][0],XY[i][j][1]))
    plt.imshow(XY)
    plt.show()
```



$m = 10$, $M = 20$
100 points par 100 points



$m = 10$, $M = 20$
500 points par 500 points



$m = 20$, $M = 40$
500 points par 500 points

Exercice 10 – Corrigé

Correction

```
import numpy as np
# Question 1
R = np.array([[1,2,3],[4,5,6]])
S = np.array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])
```

Correction

```
# Question 2
def test(M):
    """
    Fonction permettant de tester si la
    matrice est carrée et retournant sa taille.
    Entrée :
     * M(numpy.ndarray) : matrice
    Sortie :
     * 0 si taille non carrée
     * n(int) : taille de M si elle est carrée
    """
    l = M.shape[0]
```

Oral

```
    c = M.shape[1]
    if l==c :
        return l
    else :
        return 0
print(test(R),test(S))
```

Correction

```
# Question 3
fid = open("data/ex_006.txt",'r')
M1 = []
for ligne in fid :
    l = ligne.rstrip().split(" ")
    Ligne = [float(x) for x in l]
    M1.append(Ligne)
fid.close()
M1 = np.array(M1)
```

Correction

```
# Question 4
if test(M1)>0:
    valeurs_propres = np.linalg.eig(M1)[0]
    print(valeurs_propres)
```

Correction

```
# Question 5
def dansIntervalle(L,a,b):
    """
    Vérifier que chaque élément de L est dans
    l'intervalle [a,b]
    Entrées :
     * L(lst) : liste de nombres
     * a,b(flt) : nombres
    Sortie :
     * True si chaque élément est dans [a,b]
     * False sinon.
    """
    for e in L :
        if e<a or e> b:
            return False
    return True
print(dansIntervalle(valeurs_propres,0,1))
```

Exercice 11 – Tri de liste – Corrigé

Correction

```
# Question 1
# ==========
def comptage(L,n):
    """
    Comptage des éléments de L.
    Entrées :
     * n(int) : entier
     * L(lst) : liste d'éléments inférieurs àn
    """
    P = [0 for i in range(n+1)]
```

```
    # P = [0]*(n+1)
    for e in L:
        P[e]=P[e]+1
    return P
from random import randint
maxi = 5
LL = [randint(0,maxi) for x in range(20)]
P = comptage(LL,maxi)
# print(LL)
# print(P)
```

Correction

```
# Question 2
# ==========
def tri(L,n):
    """
    Tri une liste.
    Entrées :
     * n(int) : entier
     * L(lst) : liste d'éléments inférieurs àn
    Sortie :
     * T(lst) : liste triée.
    """
    P = comptage(L,n)
    T = []
    for i in range(len(P)):
        for j in range(P[i]):
            T.append(i)
    return T
```

Correction

```
# Question 3
# ==========
from random import randint
maxi = 5
LL = [randint(0,maxi) for x in range(20)]
T = tri(LL,maxi)
print(LL)
print(T)
```

Correction

```
# Question 4
# ==========
# Complexité quadratique : C(n)=O(n+n^2)=O(n^2)
# n : complexité de comptage
# n^2 : complexité des deux boucles imbriquées du
# tri
# Ce tri s'exécutera toujours dans le pire des cas.
# Dans le cas moyen : tri fusion O(nlogn)
# Dans le cas moyen : tri insertion O(n^2)
```

Exercice 12 – Corrigé

Correction

```
b,w = 0.5,6
# Question 1
```

```
# ==========
import numpy as np
def fonc_p(t):
    return [np.cos(t)+b*np.cos(w*t),np.sin(t)
                  +b*np.sin(w*t)]
```

Correction

```
def fonc_v(t):
    return [-np.sin(t)-b*w*np.sin(w*t),np.cos(t)
                  +b*w*np.cos(w*t)]
```

Correction

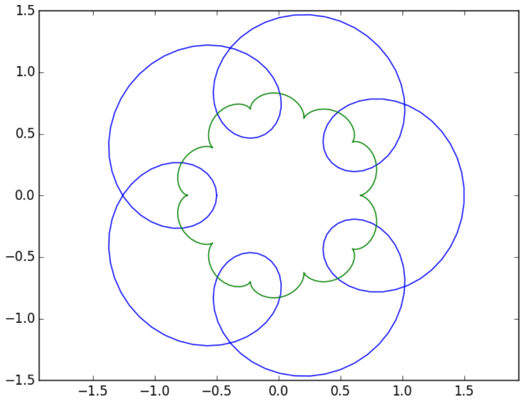
```
def fonc_a(t):
    return [-np.cos(t)-b*w*w*np.cos(w*t),
              -np.sin(t)-b*w*w*np.sin(w*t)]
```

Correction

```
# Question 2
# ==========
L=np.linspace(-np.pi,np.pi,200)
```

Correction

```
# Question 3
# ==========
import matplotlib.pyplot as plt
p = fonc_p(L)
#plt.plot(p[0],p[1])
#plt.axis("equal")
#plt.show()
```



Correction

```
# Question 4
# ==========
def fonc_d(t):
    xp,yp = fonc_v(t)
    xpp,ypp = fonc_a(t)
    return (xp**2 + yp**2)/(xp*ypp-yp*xpp)
def fonc_c(t):
    fd = fonc_d(t)
    x,y = fonc_p(t)
```

```
    xp,yp = fonc_v(t)
    return [x-fd*yp,y+fd*xp]
```

Correction

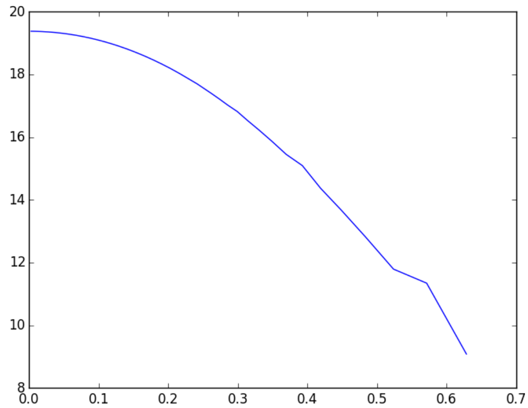
```
# Question 5
# ==========
les_xc = []
les_yc = []
c = fonc_c(L)
#plt.plot(c[0],c[1])
```

Correction

```
# Question 6
# ==========
from math import sqrt
def distance(p):
    """
    Calcule la longueur du profil p.
    Entrée :
     * p(lst) : liste [les_x,les_y]
    Sortie :
     * L(flt) : longueur du profil.
    """
    L=0
    for i in range(len(p[0])-1):
        x0 = p[0][i]
        y0 = p[1][i]
        x1 = p[0][i+1]
        y1 = p[1][i+1]
        L = L+ sqrt((x1-x0)**2+(y1-y0)**2)
    return L
```

Correction

```
les_dt = []
les_dist = []
for i in range(10,2000,1) :
    dt = 2*np.pi/i
    L=np.linspace(-np.pi,np.pi,i)
    p = fonc_p(L)
    d = distance(p)
    les_dt.append(dt)
    les_dist.append(d)
plt.plot(les_dt,les_dist)
plt.show()
```



Évolution de la longueur du polynôme en fonction de δt.

12 Correction – Adaptés des exercices de F. Butin

Exercice 10 – Corrigé

D'après Lucie Bathie, PT⋆ 2015–2016.

Correction

```
##Exo 10: palindrome
#1.
def inverse(mot):
    """renvoie la chaine de caractères écrite
        àl'envers"""
    liste = []
    for k in range(len(mot)):
        liste.append(mot[k])
    inverse = ''
    for i in range(1,len(liste)+1):
        inverse = inverse + liste[-i]
    return(inverse)
#print(inverse('bonjour'))
#ruojnob
```

Correction

```
#2.
def palindrome(mot):
    return(inverse(mot)==mot)
#print(palindrome('kayak'))
#True
#print(palindrome('bonjour'))
#False
```

Correction

```
#3.
def pat_nombre(N):
    """renvoie la liste de palindromes
    inférieurs ou égaux àN"""
    L =[]
    for n in range(N+1):
        if palindrome(str(n)) == True:
            L.append(n)
    return(L)

#print(pat_nombre(100))
#[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22,
# 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99]
```

Exercice 12 – Corrigé

D'après Lucie Bathie, PT⋆ 2015–2016.

Correction

```
#1.
v = [1,2,0,4,7,0,0,0,0]

def creux(v):
    """renvoie True si le vecteur est creux,
    false sinon"""
    nombre_zeros = 0
    for k in range(len(v)):
        if v[k] == 0:
            nombre_zeros +=1
    return(nombre_zeros >= (len(v)-
        nombre_zeros)/2)

#print(creux(v))
#True
```

Correction

```
#2.
def coder(v):
    code = [len(v)]
    indices = []
    valeurs = []
    for k in range(len(v)):
        if v[k] != 0:
            indices.append(k)
            valeurs.append(v[k])
    code.append(valeurs)
    code.append(indices)
    return(code)

#print(coder(v))
#[9, [1, 2, 4, 7], [0, 1, 3, 4]]
```

Oral

Correction

```
#3.
def decoder(code):
    """permet de décoder un codage creux"""
    v=[0]*code[0]
    for k in range(len(code[2])):
        v[code[2][k]] = code[1][k]
    return(v)

code1=[9,[1,2,4,7],[0,1,3,4]]
##print(decoder(code1))
##[1,
```

Correction

```
#4.
def simul(C,a):
    """C codage de v
renvoie le codage de av"""
    v = decoder (C)
    for k in range(len(v)):
        v[k] = a*v[k]
    return(coder(v))
```

```
#print(simul(code1,2))
#[9, [2, 4, 8, 14], [0, 1, 3, 4]]
```

Correction

```
#5
def coefficient(j,C):
    vecteur = decoder(C)
    return(vecteur[j])

#print(coefficient(1,code1))
#2
```

13 Correction – Adaptés des exercices de F. Butin

Exercice 1 – Corrigé

Correction

```
# Question 1
# ==========
def affiche_poly(P):
    """
    Affiche un polynome sous la forme
    a0*X^0+a1*X^1+a2*X^2+...
    Entrée :
     * P(lst) : liste des coefficients du polynome
       [a0,a1,...,an]
    Sortie :
     * Rien. Affichage
    """
    ch=""
    for i in range(len(P)):
        signe="+"
        if P[i]<0 :
            signe="-"

        ch=ch+signe+str(abs(P[i]))+"*X^"+str(i)
    print(ch)
```

Correction

```
# Question 2
# ==========
def degre_poly(P):
    """
    Calcule le degré d'un polynome.
    On se base uniquement sur la taille de la liste
    àcause de la comparaison àzero
    Entrée :
     * P(lst) : liste des coefficients du polynome
       [a0,a1,...,an]
    Sortie :
     * deg(int) : dege du polynome
    """
    return len(P)-1
```

Correction

```
# Question 3
# ==========
def add_poly(P1,P2):
    """
    Calcule la somme de deux polynomes.
    Attention àbien faire une copie...
    Entrée :
     * P1, P2(lst) : liste des coefficients du
        polynome [a0,a1,...,an]
    Sortie :
     * P(lst) : liste des coefficients du
        polynome [a0+b0,a1+b1,...,an+bn]
    """
    # On cherche le polynome le plus grand
    if degre_poly(P1)>=degre_poly(P2):
        P=P1.copy()
        for i in range(len(P2)):
            P[i]=P[i]+P2[i]
```

```
    else :
        P=P2.copy()
        for i in range(len(P1)):
            P[i]=P[i]+P1[i]
    return P
```

Correction

```
def mul_poly(P1,P2):
    """
    Calcule la multiplication de deux polynomes.
    Entrée :
     * P1, P2(lst) : liste des coefficients du
       polynome [a0,a1,...,an]
    Sortie :
     * P(lst) : produits des polynomes
    """
    P=[0]*(degre_poly(P1)+degre_poly(P2)+1)
    for i in range(len(P1)):
        for j in range(len(P2)):
           P[i+j] = P[i+j]+ P1[i]*P2[j]
    return P
```

Correction

```
def mul_poly(P1,P2):
    """
    Calcule la multiplication de deux polynomes.
    Entrée :
     * P1, P2(lst) : liste des coefficients du
        polynome [a0,a1,...,an]
    Sortie :
     * P(lst) : produits des polynomes
    """
    P=[0]*(degre_poly(P1)+degre_poly(P2)+1)
    for i in range(len(P1)):
        for j in range(len(P2)):
           P[i+j] = P[i+j]+ P1[i]*P2[j]
    return P
```

Correction

```
# Question 4
# ==========
def prsc_poly(P1,P2):
    """
    Calcule le produit scalaire de deux polynomes.
    Attention àbien faire une copie...
    Entrée :
     * P1, P2(lst) : liste des coefficients du
       polynome [a0,a1,...,an]
    Sortie :
     * P(flt) :produit des coefficients des
        polynomes a0*b0+a1*b1+...
    """
     # On cherche le polynome le plus grand
    if degre_poly(P1)>=degre_poly(P2):
        P=P1.copy()
        for i in range(len(P2)):
            P[i]=P[i]*P2[i]
    else :
```

Oral

```
        P=P2.copy()
        for i in range(len(P1)):
            P[i]=P[i]*P1[i]
    return sum(P)
```

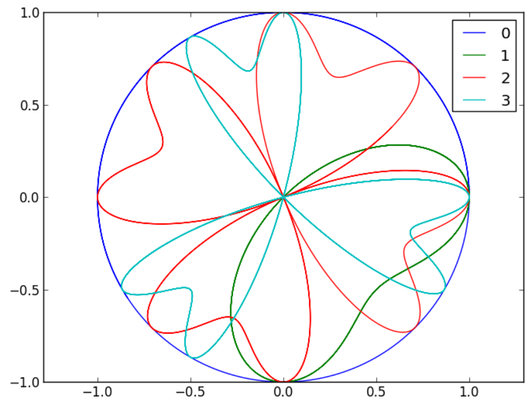
Correction

```
# Question 5
# ==========
def deriv_poly(P):
    """
    Calcule la dérivée d'un polynome.
    Entrée :
     * P(lst) : liste des coefficients du
        polynome [a0,a1,...,an]
    Sortie :
     * coefficients du polynome dérivé
    """
    return [P[i]*i for i in range(1,len(P))]
```

Exercice 3 – Corrigé

Correction

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Question 1
# ==========
def f_sigma(n,t):
    return (np.cos(n*t))**3-(np.sin(n*t))**3

x = np.linspace(0,10,1000)
y = f_sigma(1,x)

for i in range(4):
    x = np.linspace(0,10,1000)
    y = f_sigma(i,x)
    plt.plot(y*np.cos(x),y*np.sin(x),label=str(i))

plt.legend()
plt.axis("equal")
plt.show()
```

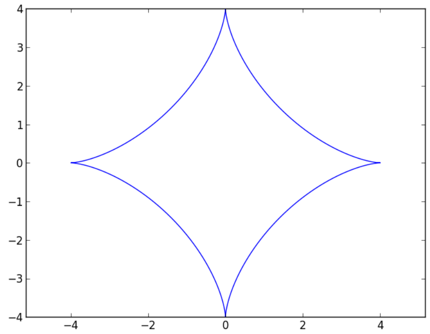


Exercice 7 – Corrigé

Correction

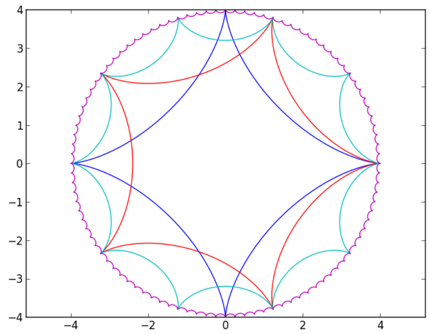
```
# Question 2
```

```
# ==========
R=4
r=R/4
m = 1-R/r
theta = np.linspace(0,2*np.pi,1000)
x=(R-r)*np.cos(theta)+r*np.cos(m*theta)
y=(R-r)*np.sin(theta)+r*np.sin(m*theta)
plt.plot(x,y,label="R=4,␣r=1,␣m=-3")
```



Correction

```
# Question 3
# ==========
for p in [1, 5, 10, 100]:
    r=R/p
    m = 1-R/r
    theta = np.linspace(0,2*np.pi,1000)
    x=(R-r)*np.cos(theta)+r*np.cos(m*theta)
    y=(R-r)*np.sin(theta)+r*np.sin(m*theta)
    titre = "R="+str(R)+",␣r␣=␣"+str(r)+ ",m="+str(m)
    plt.plot(x,y,label=titre)

x=R*np.cos(m*theta)
y=R*np.sin(m*theta)
#plt.plot(x,y)

plt.axis("equal")
#plt.legend()
plt.show()
```

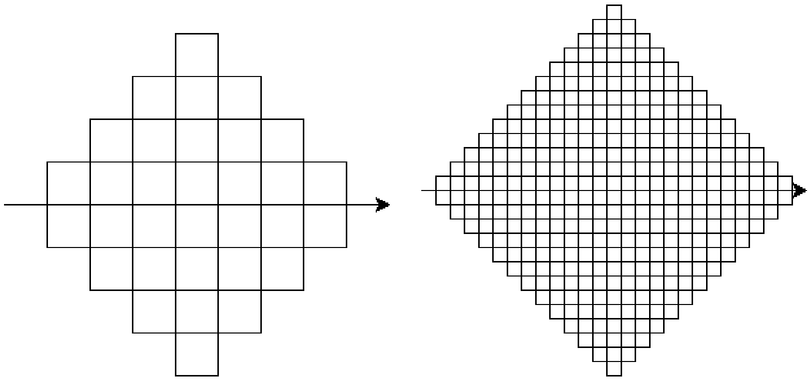


Exercice 9 – Corrigé

Correction

```
# EXERCICE 9
import numpy as np
```

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import turtle

# Question 1
#============
turtle.hideturtle()
turtle.goto(100,0)
turtle.speed(1)
tortue = turtle.Pen()

t = np.linspace(0,2*np.pi,1000)
x=100*np.cos(t)
y=100*np.sin(t)
for i in range(len(x)):
    tortue.goto(x[i],y[i])
```



Correction

```python
# Question 2
# ==========
def peano(n) :
    if n==1 :
        tortue.forward(10)
    else :
        peano(n-1)
        tortue.left(90)
        peano(n-1)
        tortue.left(-90)
        peano(n-1)
        tortue.left(-90)
        peano(n-1)
        tortue.left(-90)
        peano(n-1)
        tortue.left(90)
        peano(n-1)
        tortue.left(90)
        peano(n-1)
        tortue.left(90)
        peano(n-1)
        tortue.left(-90)
        peano(n-1)

peano(4)
turtle.hideturtle()
```

Exercice 10 – Corrigé

Correction

```
# EXERCICE 10 FB
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import turtle
__author__ = "Frederic␣Butin"

# Question 1
# ==========
turtle.hideturtle()
turtle.speed(10);
tortue = turtle.Pen()

def koch (n):
    if n==1 :
        tortue.forward(3)
    else :
        koch(n-1);
        tortue.left(60)
        koch(n-1);
        tortue.left(-120)
        koch(n-1);
        tortue.left(60)
        koch(n-1)


def flocon(n):
    tortue.clear()
    koch(n)
    tortue.left(-120)
    koch(n)
    tortue.left(-120)
    koch(n)
    tortue.hideturtle()

flocon(5)
```

Exercice 11 – Corrigé

Correction

```
# EXERCICE 11
# Question 1
# ==========
import matplotlib.pyplot as plt
import math

I_th = 8*math.log(2)-3
```

Correction

```
# Question 2
# ==========
def fonc(x):
    return math.log(x)
```

Correction

```
def calc_int_trap(a,b,n):
    res = 0
    pas = (b-a)/n
    x = a+pas
    i=1
```


Oral

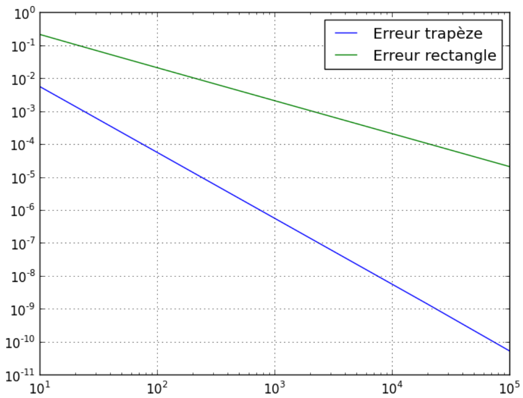
```
    while i<n:
        res = res + fonc(x)
        x = x + pas
        i=i+1
    res = pas*(res+(fonc(a)+fonc(b))/2)
    return res
```

Correction

```
def calc_int_rect_g(a,b,n):
    res = 0
    pas = (b-a)/n
    x = a
    i=0
    while i<n:
        res = res + fonc(x)
        x = x + pas
        i=i+1
    return res*pas
```

Correction

```
N = [10,20,40,100,200, 400, 500, 600, 700, 800,
       900, 1000, 5000, 10000, 20000, 100000]

calc_int_trap(1,4,10)
err_trap = [abs(I_th-calc_int_trap(1,4,n))
                                       for n in N]
err_rect = [abs(I_th-calc_int_rect_g(1,4,n))
                                       for n in N]

plt.loglog(N,err_trap,label = "Erreur␣trapèze")
plt.loglog(N,err_rect,label = "Erreur␣rectangle")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



Exercice 12 – Corrigé

Correction A refaire ?

On pose :

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t) \\ y_2(t) = x'(t) \end{cases}$$

Oral

En utilisant le schéma d'Euler explicite, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(k)=\dfrac{y_1(k+1)-y_1(k)}{h}\\ y_2'(k)=\dfrac{y_2(k+1)-y_2(k)}{h}\end{array}\right.$$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(t)=y_2(t)\\ y_2'(t)+10y_2(t)-y_1(t)=\sin(nt)\end{array}\right.$$

En discrétisant l'équation on a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} y_2(k)=\dfrac{y_1(k+1)-y_1(k)}{h}\\ \dfrac{y_2(k+1)-y_2(k)}{h}+10y_2(k)-y_1(k)=\sin(nk)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y_1(k+1)=h\,y_2(k)+y_1(k)\\ y_2(k+1)=h\left(\sin(nk)+y_1(k)-10y_2(k)\right)+y_2(k)\end{array}\right.$$

Correction Mise en forme matricielle du problème : On pose :

$$X=\left[\begin{array}{c} x(t)\\ x'(t)\end{array}\right]\Rightarrow X'=\left[\begin{array}{c} x'(t)\\ x''(t)\end{array}\right]$$

On a alors :

$$\left[\begin{array}{c} x'(t)\\ x''(t)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} 0 & 1\\ 1 & -10\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} x(t)\\ x'(t)\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c} 0\\ \sin(nt)\end{array}\right]$$

Le système peut donc se mettre sous la forme :

$$X'(t)=AX(t)+B(t)$$

En appliquant un schéma d'Euler explicite, on a donc :

$$X'(t)\simeq\frac{X_{k+1}-X_k}{h}$$

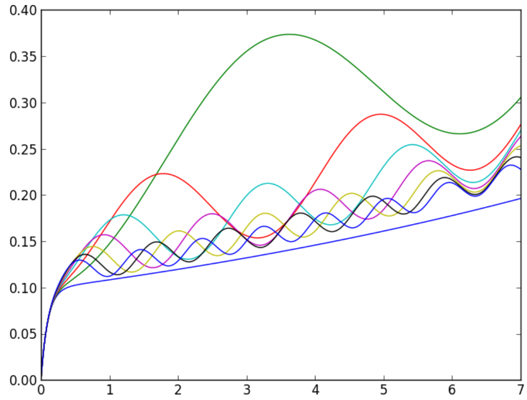
D'où :

$$\frac{X_{k+1}-X_k}{h}=AX_k+B_k\Leftrightarrow X_{k+1}=(hA+1)X_k+hB_k$$

Correction Mise en forme du problème de Cauchy :
En réutilisant la mise en forme matricielle précédente, on peut donc définit la fonction f telle que :

$$f(X,t)\mapsto AX(t)+B(t)$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.integrate as spi
N=10000

def fonction_f(X,t,n):
   return [X[1],X[0]-10*X[1]+np.sin(n*t)]

les_t=np.linspace(0,7,N)
for i in range(0,11):
    res = spi.odeint(fonction_f,[0,1],les_t,(i,))
    plt.plot(les_t,res[:,0])
plt.show()
```



Exercice 13 – Corrigé

Correction On pose :

$$X_i = \begin{bmatrix} F_{i+1} \\ F_i \end{bmatrix}$$

Le problème peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$X_{i+1} = \begin{bmatrix} F_{i+2} \\ F_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i+1} \\ F_i \end{bmatrix} \Leftrightarrow X_{i+1} = M X_i$$

On peut donc écrire que :

$$X_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i+1} \\ F_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ F_{i-1} \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$X_n = M^n X_0$$

Exercice 19

Correction

```
# EXERCICE 19
# Question 1
# ==========
import numpy as np
import scipy.integrate as sci
import matplotlib.pyplot as plt

def fonction_PP(X,t,a,b,c,d):
    return [a*X[0]-b*X[0]*X[1],-c*X[1]+d*X[0]*X[1]]

def fonction_PP2(X,t):
    a,b,c,d = 1,1,1,1
    return [a*X[0]-b*X[0]*X[1],-c*X[1]+d*X[0]*X[1]]
```

Correction

```
# Question 2
# ==========
# Conditions initiale :
X0=[1,2]
t = np.linspace(0,20,1000)
res = sci.odeint(fonction_PP2,X0,t)
```

Correction

```
# Question 3
```

```
# ==========
plt.figure()
plt.plot(t,res[:,0])
plt.plot(t,res[:,1])
```

Correction

```
# Question 4
# ==========
plt.figure()
plt.plot(res[:,0],res[:,1])
plt.axis("equal")
```

exo_fb_19_01.png

exo_fb_19_02.png

14 Exercices de la Banque PT – 2016

Exercice 1 – ✓

Correction

```
import math as m
# EXERCICE 2016 01
def suite (n,nb):
    i=1
    res=nb
    while n > 0:
        res = (res+module(res))/2
       # print(i,res)
        n=n-1
        i+=1
    return res


def module(nb):
    return(m.sqrt(nb.real**2+nb.imag**2))

def suite2(nb):
    i=1
    res=nb
    while abs(res.imag)>0.01:
        res = (res+module(res))/2
        i=i+1
    return i

print(suite(12,1+10j))
print(suite2(1+10j))
```

Exercice 2

D'après Léo Chabert, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
import numpy as np

#Q1
def produit(L,C):
    """ Renvoie le produit de la ligne L par la colonne C """
    l = np.array(L)
    c = np.array(C)

    return(np.dot(L,C))

L1 = [[1,-1]]
C1 = [[1],[1]]

#print(produit(L1,C1))
#[[0]]

#Q2

def ligne(M,i) :
    """ Renvoie le vecteur de la ligne i de M,
    M sous la forme d'une liste simple"""
    n = len(M)
    j = int(np.sqrt(n))

    return (M[(i-1)*j : i*j])

M = [1,1,1,1,1,0,1,0,0]
```

Oral

```
#print(ligne(M,2))
#[1, 1, 0]

#Q3

def colonne(M,j) :
    """ Renvoie le vecteur de la colonne j de M,
    M sous la forme d'une liste simple"""
    n = len(M)
    i = int(np.sqrt(n))

    return([M[(a*i)+(j-1)] for a in range(i)])

#print(colonne(M,3))
#[1, 0, 0]

#Q4

def produit_mat(M,N) :
    """ Effectue le produit matriciel de M par N, deux matrices sous forme de liste """
    P =[]
    n = int(np.sqrt(len(M)))

    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,n+1):
            L = ligne(M,i)
            C = colonne(N,j)

            P.append(produit(L,C))
    return(P)

N = [1,0,0,0,1,0,0,0,1]

#print(produit_mat(M,N))
#[1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0]
```

Exercice 3

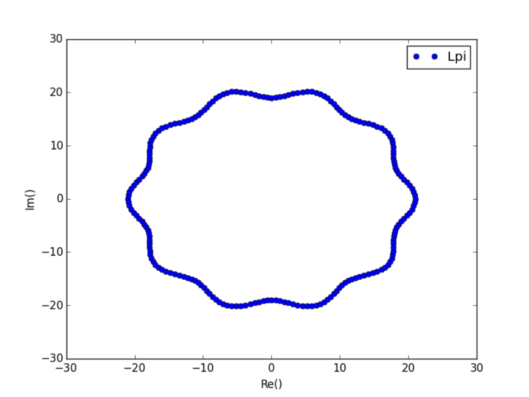
D'après Léo Chabert, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
import random as r
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Q1
 #Modification du programme (il manque l'initialisation )

def ordonner(L):
    if len(L) == 0 :
        return([])
    if len == 1 :
        return(L)
    if len(L) == 2 :
        if L[1]<=L[0] :
            return(L)
        else :
            return([L[1],L[0]])
    if len(L) >= 3 :
        n = 1
        e0 = L[0]
        Linf,Lsup = [],[]
        for ei in L[1:]:
          if ei == e0 :
```

```
            n+= 1
        elif ei < e0 :
            Linf.append(ei)
        else :
            Lsup.append(ei)

        return(ordonner(Linf)+ n *[e0] + ordonner (Lsup))

#Ordonner permet de classer la liste L par ordre croissant

#Q2

def less(z1,z2):
    """ Renvoie True si Re(z1)<Re(z2) ou (Re(z1)=Re(z2) et Im(z1) < Im (z2) """
    B = (((z1.real) < (z2.real)) or ((z1.real) == (z2.real) and (z1.imag < z2.imag)))

    return(B)

#print(less(1+2j,1+3j))
#True

#Q3

def ordonnerdansc(L):
    """ Ordonner la liste L d'après la méthode de la liste ordonner,
    en s'appuyant sur l'ordonnancement de la fonction less """
    if len(L) == 0 :
        return([])
    if len(L) == 1 :
        return(L)
    if len(L) == 2 :
         if less(L[1],L[0]) :
             return(L)
         else :
             return([L[1],L[0]])
    if len(L) >= 3 :
        n = 1
        e0 = L[0]
        Linf,Lsup = [],[]
        for ei in L[1:]:
            if ei == e0 :
                n+= 1
            elif less(ei,e0) :
                Linf.append(ei)
            else :
                Lsup.append(ei)

        return(ordonnerdansc(Linf) + n *[e0] + ordonnerdansc(Lsup))

#Q3
L = []
for i in range(11):
    a = r.randint(-10,10)
    b = r.randint(-10,10)
    L.append(a+b*1j)


#print (L)
#print(ordonnerdansc(L))

#[(-3-5j), (-2+0j), (9-6j), (4+1j), (-2+2j), (2-1j), (2-4j), (-5-1j), (3+9j), (-5+6j), (-7-9j
    )]
#[(-7-9j), (-5-1j), (-5+6j), (-3-5j), (-2+0j), (-2+2j), (2-4j), (2-1j), (3+9j), (4+1j), (9-6j
    )]
```

```
#Q4

Lpi = []

for a in range(-100,100):
    Lpi.append((20+ np.cos(10*a*np.pi/100))*np.exp((a*np.pi/100)*1j))

Lpi = ordonnerdansc(Lpi)

Lpir = []
Lpiim =[]

for z in Lpi :
        Lpir.append(z.real)
        Lpiim.append(z.imag)

plt.plot(Lpir,Lpiim,'o',label = 'Lpi')

plt.xlabel('Re()')
plt.ylabel('Im()')

plt.legend()
plt.show()
```



Exercice 4

D'après Ayoub Elghaoui, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
#question 1

def dédoublement(L):
    n =len(L)
    k=0
    P=[]
    while k < n :
        v=L[k]
        S=0
        while k<n and L[k] == v:
            S=S+1
            k=k+1
        P.append(S)
        P.append(v)
    return(P)

##print(dédoublement([1,1,1,2,2,2]))
##>>>
##[3, 1, 3, 2]
```

```
#question2

def chaine(P):
    C=str(P[0])
    n=len(P)
    for k in range(1,n):
        C=C+','+str(P[k])
    return(C)

##print(chaine(dédoublement([1,1,1,2,2,2])))
##>>>
##3,1,3,2

def dédoubl_recurence(L,n):
    for k in range(n):
        L=dédoublement(L)
    return(L)


def dédouble_recursive(L,n):
    if n == 0:
        return(L)
    else:
        L=dédoublement(L)
        return(dédouble_recursive(L,n-1))

##print(dédouble_recursive([1],3))
##print(dédoubl_recurence([1],3))
##>>>
##[1, 2, 1, 1]
##[1, 2, 1, 1]
```

Exercice 5

D'après Ayoub Elghaoui, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
#### Exercice 5
##question 1:
#cette fonction crée une liste de chiffre àpartir d'un nombre, les elements de la liste sont
    les chiffres
### qui composent le nombre

##question 2:
def chiffres (n):
    L=[]
    for k in range(len(str(n))):
        if n == 0:
            return[0]
        if n != 0:
            L.append(n%10)
            n=n//10
    return(L)

def calcul_narcissique(n):
    p=len(str(n))
    L=chiffres(n)
    S=0
    for k in range (p):
        S=S+L[k]**p
    return(S)

# print(calcul_narcissique(93084))
```

```
# 93084

##question 3:
def verif_narcissique(n):
    return(calcul_narcissique(n)==n)

# print(verif_narcissique(93084))
# True

##question 4
l=[]
for k in range(100000):
    if verif_narcissique(k) == True:
        l.append(k)

# print(l)
# [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 153, 370, 371, 407, 1634, 8208, 9474, 54748, 92727, 93084]
```

Oral

Exercice 6

D'après Ayoub Elghaoui, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import random as rdm

####Exercice 6 ####
A=[1,5]
B=[2,8]
C=[7,1]

##question 1:
def triangle(a,b,c):
    plt.plot([a[0],b[0],c[0]],[a[1],b[1],c[1]],'r')
        plt.plot([c[0],a[0]],[c[1],a[1]],'r')

triangle(A,B,C)
plt.show()
##question 2:

def milieu(a,b):
    I=[(a[0]+b[0])/2,(a[1]+b[1])/2]
    return(I)

print(milieu(A,B))

##question 3:

def cal_milieu(p):
    L=[A,B,C]
    a=L[rdm.randint(0,2)]
    I=milieu(a,p)

    return(I)

## question 4 :

p=[1,1] # point p choisi arbitrairement

L=[]
for k in range(1000):
    L.append(cal_milieu(p))
```

```python
les_x=[]
les_y=[]

for l in range(len(L)):
    les_x.append(L[l][0])
    les_y.append(L[l][1])

triangle(A,B,C)
plt.xlim(0,10)
plt.ylim(0,10)
plt.plot([p[0]],[p[1]],'*')
plt.plot(les_x,les_y,'+-g')
plt.show()
```

Exercice 7

D'après Léo Chabert, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```python
##Q1

# 400 Zholty : Impossible !
# 400 divisible par 10 => Si on veut faire avec ces billets, il en faudra 5 ou 10
# Si on en prend 5, on sera en dessous et la valeur àcombler sera trop petite,
# Si on en prend 10 on est forcément au dessus (10*52 > 400 )

##Q2

Billets = [52,62,72]

def somme(p) :
    """ p = [a,b,c], renvoie la somme de a billets de 52 etc... """
    return(p[0]*Billets[0] + p[1]*Billets[1] + p[2]*Billets[2])

#print(somme([0,0,0]))
#print(somme([4,2,1]))
#0
#404

def compte(n) :
    """ Donne les possibilités pour obtenir n avec des triplets de bilets """
    Poss = []
    a,b,c = 0,0,0
    p = [a,b,c]

    while somme(p) < n :
        #On incrémente d'abord sur le a, après avoir testé toutes les combinaisons pour une
            valeur de a
        while somme(p) < n :
            #Id. pour b et c

            while somme(p) < n :
                c += 1
                p = [a,b,c]

            if somme(p) == n :
                Poss.append(p)

            c = 0
            b += 1
            p = [a,b,c]

        b = 0
        a += 1
```

```
        p = [a,b,c]

    return(Poss)

#print(compte(600))
#print(compte(400))
#[[3, 6, 1], [4, 4, 2], [5, 2, 3], [6, 0, 4]]
#[]

##Q3

res = []


for i in range(72, 600) :
    #On cherche les possibilités entre 72z et 600z avec 4z d'écarts

    if compte(i) != [] :
        if compte(i-4) != []:
            res.append(i)


#print(res)
#[436, 488, 498, 508, 540, 550, 560, 570, 580, 592]

for val in res :
    print(compte(val),compte(val-4))


# [[7, 0, 1]] [[0, 0, 6]]
# [[8, 0, 1]] [[0, 2, 5], [1, 0, 6]]
# [[7, 1, 1]] [[0, 1, 6]]
# [[6, 2, 1], [7, 0, 2]] [[0, 0, 7]]
# [[9, 0, 1]] [[0, 4, 4], [1, 2, 5], [2, 0, 6]]
# [[8, 1, 1]] [[0, 3, 5], [1, 1, 6]]
# [[7, 2, 1], [8, 0, 2]] [[0, 2, 6], [1, 0, 7]]
# [[6, 3, 1], [7, 1, 2]] [[0, 1, 7]]
# [[5, 4, 1], [6, 2, 2], [7, 0, 3]] [[0, 0, 8]]
# [[10, 0, 1]] [[0, 6, 3], [1, 4, 4], [2, 2, 5], [3, 0, 6]]
#A chaque fois, on àau moins deux billets différents
#Il faudrait éventuellement éliminer les cas incohérent ou l'enfant récupère des billets qu'
    il avait déjà
```

Exercice 8

D'après Léo Chabert, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
import random as r

##Q1
def lancer():
    """ Simule un lancer de dés """
    return(r.randint(1,6))

#print(lancer())
#1

##Q2
def liste(n) :
    """ Renvoie une liste pour le lancer de n dés """
    return([lancer() for i in range(n)])

#print(liste(10)); [5, 3, 3, 2, 4, 6, 4, 5, 1, 1]
```

```
L = [5, 3, 3, 2, 4, 6, 4, 5, 1, 1]

##Q3
def arrivee(k,L) :
    """ Simule l'avancée comme proposé """
    c = k
    while c < len(L) and c + L[c] < len(L) :
        c += L[k]
    return(c)

#print(arrivee(2,L)) ,5

L_15 = liste(15)
L_20 = liste(20)
L_25 = liste(25)
La_15 = []
La_20 = []
La_25 = []

for k in range (len(L_15)) :
    La_15.append(arrivee(k,L_15))

#print(La_15),[12, 15, 12, 15, 12, 15, 12, 15, 18, 17, 12, 14, 12, 14, 14]

for k in range (len(L_20)) :
    La_20.append(arrivee(k,L_20))

#print(La_20),[18, 19, 20, 17, 18, 20, 18, 17, 18, 18, 19, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18,
    19]

for k in range (len(L_25)) :
    La_25.append(arrivee(k,L_25))

"""print(La_25),[24, 25, 22, 21, 21, 25, 24, 23, 22, 21, 22, 21, 22, 23, 22,
21, 21, 21, 21, 21, 22, 21, 22, 23, 24]"""

##Q4
def commun(L) :
    """ renvoie le plus grand entier tel que l'arrivee de 0,1,2,k soit le même """
    a,b,c = arrivee(0,L),arrivee(1,L),arrivee(2,L)
    k = 0
    res = True

    while res and k < len(L) :
        if arrivee(k,L) == a and arrivee(k,L) == b and arrivee(k,L) == c :
            k +=1
        else :
            res = False

    return(k-1)

#print(commun([6,5,4,3,2,1,1]))
#6
```

Exercice 9

D'après Léo Chabert, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

## Q1
```

```
def g(x) :
    """ renvoie la valeur de g(x) """
    return(1)

def f(x) :
    """ renvoie la valeur de f(x) """

    if x>= 0 and x<1 :
        return(g(x))
    elif x>1 :
        return(x*f(x-1))

def H(x) :
    """ prolongement de f(x) à]-1,0] """
    if x >= 0 :
        return(f(x))
    elif x > -1 :
        return(f(-x))

## Q3

les_x = np.arange(-0.99,4.01,0.01)
les_y = []

for x in les_x :
 les_y.append(H(x))

plt.plot(les_x,les_y, 'b',label = 'H(x)')

## Q4

#On approxime la dérivée avec Euler :
# yi' = (yi+1-yi)/dx


def derivation(les_x,les_y) :
    """ dérive une fonction f, sous la forme de deux listes avec euler """
    return([ (les_y[i+1]-les_y[i])/(les_x[i+1]-les_x[i]) for i in range(len(les_x) -1) ])

les_yp = derivation(les_x,les_y)

plt.plot(les_x[:len(les_x)-1],les_yp,'r', label = "f'(x)")

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()

plt.figure()

## Q5
#Même chose avec g = cos(x)
def g2(x) :
    """ renvoie la valeur de g(x) """
    return(np.cos(x))

def f2(x) :
    """ renvoie la valeur de f(x) """

    if x>= 0 and x<1 :
        return(g2(x))
    elif x>1 :
        return(x*f2(x-1))

def H2(x) :
    """ prolongement de f(x) à]-1,0] """
```

Oral

```
    if x >= 0 :
        return(f2(x))
    elif x > -1 :
        return(f2(-x))

les_x2 = np.arange(-0.99,4.01,0.01)
les_y2 = []

for x in les_x2 :
 les_y2.append(H2(x))

plt.plot(les_x2,les_y2, 'b',label = 'H2(x)')
les_yp2 = derivation(les_x2,les_y2)

plt.plot(les_x2[:len(les_x2)-1],les_yp2,'r', label = "f'2(x)")

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()

plt.show()
```

Exercice 10

D'après Thibaut Decombe, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
###### Exercice 1 ######
## 1 ##
def mots(n):
    L=[]
    for i in range(n):
        L1=[0]*n
        L1[i]=1
        L.append(L1)
    return(L)
#print(mots(4)) [[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]]

## 2 ##
def bon_mot(mot):
    i=0
    x= False
    while i < len(mot)-1 and x == False:
        m=mot[i]
        n=mot[i+1]
        if m==n:
            x=True
            return(x)
        else:
            i+=1
            print(i)
    return(x)

##print(bon_mot([0,1,2,3,5,1,1])) #True
##print(bon_mot([1,3,2,3,5])) #False
```

Exercice 11

D'après Thibaut Decombe, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
## 1 ##
def pol(L,x):
```

```
    s=0
    for i in range(len(L)-1,-1,-1): # pas de -1 pour parcourir le range àl'envers
        s+=L[(len(L)-1)-i]*(x**i)

    return(s)

# print(pol([1,2,1],-2)) #1 bien égal à(-2)**2 +2*(-2)+1


## 2 ##

M=np.array([[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0]])
# print(M)
# [[0 0 0 0]
# [0 0 0 0]
# [0 0 0 0]
# [0 0 0 0]]

## 3 ##
# ici la relation de récurrence est bk+1 = bk**2 + I4
I4=np.array([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]])
def Bk(M,k):
    M1=np.copy(M)
    for i in range(k):
        M1=M1*M1 + I4
    return(M1)
# print(Bk(M,4))
# [[26 0 0 0]
# [ 0 26 0 0]
# [ 0 0 26 0]
# [ 0 0 0 26]]
```

Exercice 12

D'après Thibaut Decombe, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
## 1 ##
def divise(n):
    L=[]
    i=1
    while i*i<=n:
        if n%i==0:
            L.append(i)
        i+=1
    return(L)

#print(divise(100)) [1, 2, 4, 5, 10]

## 2 ##
def est_premier(n):
    return((len(divise(n))==1))
##print(est_premier(27)) False
##print(est_premier(25)) False
##print(est_premier(41)) True

## 3 ##
def nbp(n):
    i=0
    for j in range(2,n+1):
        if est_premier(j)==True:
            i+=1
    return(i)
# print(nbp(25))
```


Oral

```
# 9 cela correspond(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23)
```

Exercice 13

D'après Thibaut Decombe, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
## 1 ##
def h(t):
    if t>0:
        return(1)
    else:
        return(0)

def ro(t):
    return(np.sqrt(h(np.cos(2*t))*np.cos(2*t)))

## 2 ##
def pts(n):
    les_xy=[]
    les_ti=np.linspace(0,2*np.pi,n+1)
    for t in les_ti:
        les_xy.append((ro(t)*np.cos(t),ro(t)*np.sin(t)))
    return(les_xy)
# print(pts(2))
# [(1.0, 0.0), (-1.0, 1.2246467991473532e-16), (1.0, -2.4492935982947064e-16)]

les_x1=[]
les_y1=[]
les_x2=[]
les_y2=[]

for i in range(len(pts(50))):
    les_x1.append(pts(50)[i][0])
    les_y1.append(pts(50)[i][1])

for i in range(len(pts(1000))):
    les_x2.append(pts(1000)[i][0])
    les_y2.append(pts(1000)[i][1])

#plt.plot(les_x1,les_y1,label=' n = 50 ')
#plt.plot(les_x2,les_y2,label=' n = 1000 ')
#plt.legend()
#plt.savefig('courbe_exo_6')
#plt.show()

## 3 ##
def longueur(L):
    l=0
    for i in range(len(L)-1):
        l=l+np.sqrt((L[i+1][1]-L[i][1])**2+(L[i+1][0]-L[i][0])**2)
    return(l)

## print(longueur(pts(50))) 5.21854299262

## print(longueur(pts(1000))) 5.24403702161
```

Exercice 14

D'après Thibaut Decombe et Camille Ambellie PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
## 1 ##
```

```
def trec(n):
    if n==0:
        return(0)
    elif n == 1:
        return(1-trec(0))
    elif n%2==0:
        j=n//2
        return(trec(j))
    else:
        j=n//2
        return(1-trec(j))

##print(trec(0)) 0

## 2 ##
def mot(n):
    m=''
    for i in range(n):
        m+=str(trec(i))
    return(m)
#print(mot(10))

## 3 ##

def nbseq(n,seq):
    l=len(seq)
    nb=0
    for i in range(n-l+1):
        if seq==mot(n)[i:i+l]:
            nb+=1
    return(nb)

## 4 ##
# attention a ne pas trop augmenter la valeur de n, l'algorithme recursif plante
#print(nbseq(1000,'0')/1000) #0.75
#print(nbseq(1000,'1')/1000) #0.25
#print(nbseq(1000,'01')/1000) #0.25
#print(nbseq(1000,'10')) #0.25
#print(nbseq(1000,'010')/1000) #0.25
#trop de temps de calcul les autres ne sont pas fait
```

Exercice 15

D'après Thibaut Decombe, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
## 1 ##
f=open('pi.txt','r')
les_lignes=f.readlines()
deci=les_lignes[0]
f.close()

## 2 ##
#print(deci[:10]) 1415926535
#print(len(deci)) 50

## 3 ##
def tirer(n,C,p):
    l=[]
    N=len(C)
    for i in range(n):
        if p+i<N:
            l.append(C[p+i])
        else:
```

Oral

```
            l.append(C[p+i-N-1])
    return(l)

# print(tirer(5,deci,48))
# ['1', '0', '0', '1', '4']
```

Exercice 16

D'après Thibaut Decombe, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
## 1 ##
def bin(d):
    i=0
    m=1
    while d>m:
        m=m*2
        i+=1
    return(i)

#print(bin(31)) 5
#print(bin(3)) 2

## 2 ##

def f(a):
    n=bin(a)
    return(a**(n+1)-2**(n+1))

#print(f(1)) -1
#print(f(2)) 0


## 3 ##

def les_un(n,uo):
    l=[uo]
    for i in range(n):
        l.append(f(l[i]))
    return(l)

#print(les_un(3,1)) [1, -1, -3, -5]4
```

Exercice 17

D'après Thibaut Decombe, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
## 1 ##
def listes1(n):
    l=[]
    nb=2**n
    for i in range(0,nb):

        l1=[int(bin(i)[j]) for j in range(2,len(bin(i)))]
        l2=l1[:]
        while len(l2)<n:
            l2=[0]+l2
        l3=l2[:]
        for i in range(len(l2)):
            if l2[i] == 0:
                l3[i]=-1
        l.append(l3)
```

```
    return(l)

# il y a 2**n combinaison possible , on utilise l'ecriture en binaire de tout
# les nombres de 1 a 2**n en remplacant les 0 par des -1 et on obtient toutes
# les listes possibles
```

Exercice 18

D'après Thibaut Decombe, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
## 1 ##
def inversé(n):
    l=[]
    i=1
    while n >10:
        l.append(n%10)
        n=n//10
    l.append(n)
    #l contient les chiffres du nombre n dans l'ordre inverse [8, 7, 6, 5, 2, 1]
    s=0
    for i in range(len(l)):
        s+=l[i]*10**(len(l)-i-1)
    # s contient le nombre inversé
    return(s)

# print(inversé(125678)) 876521

## 2 ##
def palindrome(n):
    return(n==inversé(n))

#print(palindrome(121)) True
#print(palindrome(1212)) False


## 3 ##
def palindromes(n):
    l=[]
    for i in range(n+1):
        if palindrome(i) == True:
            l.append(i)
    return(l)

# print(palindromes(111))
# [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 111]

## 4 ##
l=[]
def inversérec(n):
    if n<10:
        l.append(n)
        s=0
        for i in range(len(l)):
            s+=l[i]*10**(len(l)-i-1)
        return(s)
    else:
        l.append(n%10)
        return(inversérec(n//10))

# print(inversérec(124)) 421
# De même mais on crée la liste de facon récursive, meme méthode pour finir
```

Exercice 19

D'après Thibaut Decombe, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
## 1 ##
import random as rd
def bonbonmang(n1,n2):
    bonbon=0
    while n1 >0 and n2 > 0 :
        poche=rd.randint(0,1)
        if poche==0:
            n1=n1-1
            bonbon+=1
        else:
            n2=n2-1
            bonbon+=1
    boitevide=1
    if n2==0:
        boitevide=2
    return(bonbon,boitevide)

# print(bonbonmang(5,5))
# (7,a)=(bonbons mangés , poche 1 vide)
# evolution (na,nb) : (5,4) (4,4) (3,4) (3,3) (3,2) (3,1) (3,0)

## 2 ##

def probamangé(na,nb,n):
    l=[0]*(na+nb)
    l2=[0,0]
    for i in range(n):
        l[bonbonmang(na,nb)[0]-1]+=1
        if bonbonmang(na,nb)[1]==1:
            l2[0]+=1
        else:
            l2[1]+=1

    for i in range(len(l)):
        l[i]=(l[i]/n)*100
    l2[0]=(l2[0]/n)*100
    l2[1]=(l2[1]/n)*100

    return(l2,l)

# print(probamangé(5,5,100)) renvoie deux listes : la preimiere donne les proba
# que les poche 1 puis 2 soient vides; la deuxieme liste donne la proba de chaque
# nombre de bonbon mangé de 1 a na+nb
```

Exercice 20

D'après Thibaut Decombe, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
valeurs=["7","8","9","10","V","D","R","A"]
couleurs=["trefle","coeur","carreau","pique"]

## 1 ##

jeu=[]
for val in valeurs:
    for cou in couleurs:
        jeu.append([val,cou])
#print(jeu)
```

Oral

```
## 2 ##

def tirermain():
    rand=[]
    while len(rand)<5:
        if rd.randint(0,31) not in rand:
            rand.append(rd.randint(0,31))
    main=[jeu[x] for x in rand]
    return(main)

#print(tirermain())
main1=[['R', 'trefle'], ['9', 'coeur'], ['8', 'carreau'], ['9', 'pique'], ['7', 'pique']]


## 3 ##

import numpy as np
def LV(main):
    l=[0,0,0,0,0,0,0,0]
    for x in main:
        for i in range(8):
            if x[0]==valeurs[i]:
                l[i]=l[i]+1
    l1=[]
    for i in range(7):
        if l[i]!=0:
            l1.append(l[i])

    return(l1)
# print(LV(tirermain()))
# [1, 1, 2, 1] [1, 1, 1, 1, 1] [2,3]

## 4 ##
def probabrelan(n):
    p=0
    for i in range(n):
        var=False
        for x in LV(tirermain()):
            if x>=3:
                var=True
        if var == True:
            p+=1
    return(p/n)


def probapaire(n):
    p=0
    for i in range(n):
        var=False
        for x in LV(tirermain()):
            if x>=2:
                var=True
        if var == True:
            p+=1
    return(p/n)

def probacarre(n):
    p=0
    for i in range(n):
        var=False
        for x in LV(tirermain()):
            if x>=4:
                var=True
        if var == True:
```

```
            p+=1
    return(p/n)
```

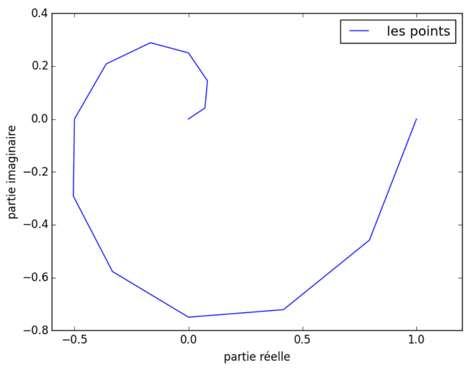
15 Exercices de la Banque PT – 2015

Exercice 1

D'après Léo Chabert, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Précision sur l'énoncé : tracé dans le plan complexe des points de module
# k/12 et d'argument k*pi/6, k entre 0 et 12

les_z = [ ((k/12)*np.exp((k*np.pi/6)*1j)) for k in range(0,13) ]
print(les_z)

les_abs = [ z.real for z in les_z ]
les_ord = [ z.imag for z in les_z ]

plt.plot(les_abs,les_ord, label = '␣les␣points␣' )

plt.xlabel( 'partie␣réelle' )
plt.ylabel( 'partie␣imaginaire' )

plt.legend()
plt.show()
```



D'après Thibaut Decombe, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
## 1 ##
zo=2 + 1j
def zn1(zn):
    return((zn+abs(zn))/2)

#print(zn1(zo))
z=zo
for i in range(12):
    z=zn1(z)

#print(z) 2.1568104230797602+0.000244140625j)

## 2 ##

def les_zn(zo,n):
    L=[zo]
    z=zo
    for i in range(n):
        L.append(zn1(z))
```

```
        z=zn1(z)
    return(L)
#print(les_zn(2+1j,2))

# [(2+1j), (2.118033988749895+0.5j), (2.1471424441163585+0.25j)]
```

Exercice 2

D'après Léo Chabert, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```
# On suppose a<b
## Q1
def disjoint(i1,i2):
    """ retourne True si les segment sont disjoints, false sinon """
    return(i1[1]<i2[0] or i2[1]<i1[0])

#print(disjoint([0,1],[-1,0.5]))
#False

## Q2
def fusion(i1,i2):
    """ fusionne les deux segments """
    return([min(i1[0],i2[0]),max(i1[1],i2[1])])

#print(fusion([-1,2],[0,0.5])) [-1, 2]
#print(fusion([-1,2],[0,5])) [-1, 5]


## Q3

#L = [[0,3],[6,7],[2,5]]
#non bien fondée
L = [[0,1],[2,3],[4,5]]
#bien fondée

def verif(L):
    """ vérifie si une liste est bien fondée """

    if len(L) == 1 :
        return(True)
    elif disjoint(L[0],L[1]) and L[0][1]<L[1][0] :
        return(True and (verif(L[1:])))
    else :
        return(False)

#print(verif(L))
#True
```

Exercice 3

D'après Léo Chabert, PT⋆ 2016 – 2017.

Correction

```


## Q1

def est_cube(n) :
    """ vérifie qu'un nombre est un cube """
    return(int(n**(1/3))**3 == n )

#print(est_cube(8))
```

```
#print(est_cube(27))
#print(est_cube(12))

#True
#True
#False

Lcube = []

for i in range(251):
    if est_cube(i):
        Lcube.append(i)

# print(Lcube)
# [0, 1, 8, 27, 125]


## Q2

def S2cube(n) :
    """ vérifie qu'un nombre est la somme de deux cubes """

    res = False
    i = 0

    while i <= (n-1) and not(res) :
        if est_cube(n-i) and est_cube(i) :
            res = True
        i+=1

    return(res)

#print(S2cube(35))
#print(S2cube(30))

#True
#False



# Entier inférieur à250 somme de 2 cubes :

##L2cube = []
##
##for i in range(251):
## if S2cube(i):
## L2cube.append(i)

#print(L2cube)
#[1, 2, 8, 9, 16, 27, 28, 35, 54, 125, 126, 133, 152, 250]


## Q3

def S4cube(n) :
    """ vérifie qu'un nombre est la somme de 4 cubes """

    res = False
    i = 0

    while i <= (n-1) and not(res) :
        if S2cube(n-i) and S2cube(i) :
            res = True
        i+=1
```

```
    return(res)

##
##L4cube = []
##
##for i in range(251):
## if S4cube(i):
## L4cube.append(i)

#print(L4cube)

""" [2, 3, 4, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 24, 25, 28, 29, 30, 32, 35, 36, 37, 43, 44, 51,
      54, 55, 56, 62, 63, 70, 81, 82, 89, 108, 126, 127, 128, 133, 134, 135, 141,
       142, 149, 152, 153, 154, 160, 161, 168, 179, 180, 187, 206, 250]
"""

## Q4
def S8cube(n) :
    """ vérifie qu'un nombre est la somme de 8 cubes """

    res = False
    i = 0

    while i <= (n-1) and not(res) :
        if S4cube(n-i) and S4cube(i) :
            res = True
        i+=1

    return(res)


##L8cube = []
##
##for i in range(251):
## if S8cube(i):
## L8cube.append(i)
## print(i)
##
##print(L8cube)
##
###[4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33,
     34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,
    56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78,
    79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 99, 100, 102,
     105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 116, 117, 118, 119, 121, 124, 125, 126,
     128, 129, 130, 131, 132, 133, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 142, 143, 144, 145, 146, 149,
     150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167,
     168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186,
     187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 195, 196, 197, 198, 200, 203, 204, 205, 206, 207, 208,
     209, 210, 211, 212, 214, 215, 216, 217, 219, 222, 223, 224, 230, 231, 233, 234, 235, 236,
     238, 241, 242, 243, 249, 250]
```