1 Présentation

Dans le domaine médical, la pression artérielle est l'un des paramètres les plus surveillés dans le cadre des maladies cardio-vasculaires. En effet, quand la pression artérielle est trop élevée, pendant des durées très longues, le muscle cardiaque finit par se fatiguer jusqu'à atteindre des insuffisances cardiaques sévères ; on parle d'hypertension.

À l'inverse, une tension trop basse conduit à sous-alimenter les organes et peut conduire à des étourdissements ou évanouissements. L'hypotension n'est généralement pas considérée comme une maladie. Communément, la mesure de la pression artérielle se fait par la détermination de deux valeurs classiques : la pression systolique (pression la plus élevée suite à la contraction du cœur) et la pression diastolique (pression la moins élevée après le relâchement du cœur quand celui-ci se remplit de sang).

Pour mesurer ces pressions, le médecin utilise classiquement la méthode du brassard associé à son stéthoscope. Le médecin gonfle le brassard jusqu'à couper la circulation sanguine dans le bras. Le médecin pose ensuite le stéthoscope sur l'artère et dégonfle progressivement le brassard. Dès qu'il écoute le sang passer à nouveau dans l'artère, il mesure la pression systolique sur le manomètre associé au brassard. Puis il continue à dégonfler le brassard jusqu'à ne plus écouter aucun bruit, là il lit la pression diastolique. On peut également mesurer ces pressions avec un tensiomètre électronique (voir figure 1). Il existe des modèles simples pour les particuliers et des modèles beaucoup plus complets dans le cadre des milieux médicaux.

Les applications numériques seront données avec 1 chiffre significatif, sauf contre-ordre.

2 Étude du capteur de pression

2.1 Étude du capteur : modélisation de la déformation de la membrane

Le principe du capteur de pression repose sur l'effet piézorésistif (voir figure 2). La cellule sensible du capteur est constituée d'une membrane se déformant sous l'effet de la force appliquée par un micro-vérin. Le micro-vérin applique une force F proportionnelle à la pression du brassard. Sur la membrane sont fixées 4 jauges de déformation. Les résistances électriques de ces jauges varient sous l'effet d'une déformation. Puis cette variation de résistance est transformée en tension électrique Vp au moyen d'un circuit de conditionnement.

L'objectif de cette partie est de relier la pression du brassard à la tension mesurée dans le circuit de conditionnement en fonction des différents paramètres caractéristiques du capteur. On cherchera également à montrer que le capteur permet d'avoir une précision de moins d'un mmHg.

En première approximation, la membrane peut être modélisée par une poutre de longueur $2L$ encastrée à chacune de ses extrémités soumise à un effort d'intensité $2F$ en son milieu (figure 3(a)). Les caractéristiques de la poutre sont :

- E : le module d'Young ;
- S : la surface de la section droite de la poutre ;
- I : le moment d'inertie de la section autour de l'axe $(G, \overrightarrow{z})$;
- e : l'épaisseur de la membrane.

G est le centre d'inertie de la section droite de la poutre. On note $\overrightarrow{AG} = x\,\overrightarrow{x}$. On suppose que le déplacement de la section droite est $\overrightarrow{u}(G) = u_y(x)\overrightarrow{y}$. La force appliquée par le vérin est notée $\overrightarrow{F} = -F\,\overrightarrow{y}$. Les effets de la pesanteur sont négligées. Le modèle est considéré comme plan.

Pour simplifier le calcul de la déformée de la membrane, on adopte le modèle donné sur la figure 3(b). On supposera que la liaison en B bloque la translation suivant $\overrightarrow{x}$ et la rotation suivant $(B, \overrightarrow{z})$.

Question 1 *Justifier pourquoi le modèle de la figure 3(b) est équivalent à celui de la figure 3(a). Justifier l'intérêt de cette simplification en déterminant le degré d'hyperstatisme des deux modèles.*

On notera les torseurs des actions mécaniques au niveau des liaisons sous la forme :

$\left\{\mathcal{T}\left(i \rightarrow j\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_M & - \\ Y_M & - \\ - & M_M \end{array} \right\}_{M,R}$, le torseur de cohésion est noté $\{\mathcal{T}(coh)\} = \left\{ \begin{array}{cc} T_X & - \\ T_Y & - \\ - & M_Z \end{array} \right\}_{G,R}$ (action de la partie droite sur la partie gauche).

Question 2 *Isoler le tronçon de poutre compris entre l'abscisse $[0, x]$. Écrire l'équation issue du principe fondamental de la statique permettant d'obtenir la relation entre le moment fléchissant M_Z, l'effort tranchant T_Y et une (ou des) inconnue(s) de la liaison en A. Effectuer un second isolement et écrire l'équation nécessaire permettant d'exprimer* *l'effort tranchant T_Y en fonction de F. En déduire la relation entre le moment fléchissant M_Z, l'effort F et une (ou des) inconnue(s) de la liaison en A.*

On rappelle que la relation de comportement reliant le moment de flexion au déplacement u_y est $M_z = EI\dfrac{d^2u_y}{dx^2}$. On se place dans les hypothèses de Navier-Bernoulli en petits déplacements, on a ainsi $\theta = \dfrac{du_y}{dx}$, θ la rotation de la section droite autour de l'axe $(G, \overrightarrow{z})$.

Question 3 *Après intégration, montrer que le déplacement se met sous la forme $u_y(x) = A_1x^3 + A_2x^2$ où vous préciserez les expressions des constantes A_1 et A_2 en fonction des paramètres du modèle en éliminant les inconnues de la liaison en A.*

On rappelle que le problème étant hyperstatique, le moment de flexion est exprimé en fonction d'inconnues de liaisons qui seront déterminées en appliquant les conditions limites.

On rappelle que la déformation dans une section droite de la poutre est donnée par $\varepsilon(x) = -y\dfrac{d\theta}{dx} = -y\dfrac{d^2u_y}{dx^2}$.

Question 4 *Montrer que la déformation sur la peau supérieure de la membrane ($y = e/2$) se met sous forme $\varepsilon = A_3 + A_4x$, où vous préciserez les expressions des constantes A_3 et A_4 en fonction des paramètres du modèle.*

Quatre jauges de déformation sont disposées sur la peau extérieure de la membrane (voir figure 4).

Question 5 *Quelle serait la position idéale des jauges de déformation ? En pratique elles sont placées en $x = \dfrac{L}{4}$ et en $x = \dfrac{3L}{4}$, donner la valeur des déformations de ces jauges et montrer que $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = kF$ où vous donnerez l'expression de k en fonction des paramètres du modèle.*

2.2 Choix des jauges de déformations

Les jauges de déformation disposées sur la membrane (voir figure 4) subissent une déformation proportionnelle à l'intensité de la force F appliquée par le piston : $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = kF$.

On cherche maintenant à déterminer la relation entre la variation de la résistance de la jauge de déformation et l'effort presseur F. Considérons une jauge de déformation de forme parallélépipédique constituée d'un matériau homogène de résistivité ρ (s'exprimant en $\Omega \cdot m$). On note ℓ sa longueur, a et b ses dimensions transversales, s sa section droite (voir figure 5).

La résistance électrique R de ce corps d'épreuve s'exprime au moyen de la relation $R = \rho\dfrac{\ell}{s}$.

Question 6 *Lorsque la jauge d'épreuve est soumise à une force $\overrightarrow{F}$ appliquée parallèlement à ℓ, elle se déforme : ℓ, s et ρ subissent de petites variations valant respectivement $\delta\ell$, δs et $\delta\rho$. Exprimer la variation relative de résistance électrique $\dfrac{\delta R}{R}$.*

Les variations de ℓ, de a et b ne sont pas indépendantes : $\dfrac{\delta a}{a} = \dfrac{\delta b}{b} = -\nu\dfrac{\delta\ell}{\ell}$ avec ν une constante dépendant du matériau, appelée coefficient de Poisson.

Question 7 *Exprimer $\dfrac{\delta R}{R}$ en fonction de $\dfrac{\delta\ell}{\ell}$, ν, $\dfrac{\delta\rho}{\rho}$.*

Dans le cas d'un métal, $\delta\rho$ est lié à la variation δV du volume V selon la loi $\dfrac{\delta\rho}{\rho} = c\dfrac{\delta V}{V}$ avec c une constante appelée constante de Bridgman.

Question 8 *Montrer que $\dfrac{\delta R}{R}$ peut s'écrire sous la forme : $\dfrac{\delta R}{R} = K\dfrac{\delta\ell}{\ell}$ avec K une constante appelée facteur de jauge.*

Dans le cas d'un semi-conducteur, $\delta\rho$ est lié à la contrainte $\sigma = \dfrac{||\overrightarrow{F}||}{s}$ selon la loi $\dfrac{\delta\rho}{\rho} = \Pi\sigma$, avec Π une constante appelée constante de piézorésistivité ; de plus, le module de Young E du matériau lie la contrainte σ et la déformation $\dfrac{\delta\ell}{\ell}$: $\dfrac{\delta\ell}{\ell} = \dfrac{\sigma}{E}$.

Question 9 *Exprimer le facteur de jauge dans le cas d'un semi-conducteur.* On donne :

- pour le cuivre : $\nu = 0,3$, $c = 1$;
- pour le silicium : $\nu = 0,4$, $E = 1011 Pa$, $\Pi = 10^{-9} Pa^{-1}$.

Question 10 *Évaluer le facteur de jauge dans le cas du cuivre et dans le cas du silicium. Commenter.*

Question 11 *Quel phénomène peut induire une erreur sur la mesure de la contrainte ?*

Question 12 Circuit de conditionnement : pont de WheatstoneCircuit de conditionnement : pont de Wheatstone