DEVOIR SURVEILLÉ D'INFORMATIQUE 5 – 1 HEURE

SIMULATION DE VIBRATIONS – CCP PSI – ADAPTÉ DU SUJET 0

1 Mise en situation

2 Résolution d'une équation différentielle

Question 1 *Réécrire l'équation différentielle sous forme d'un système d'équations en fonction de $x(t)$, $v(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\dot{v}(t)$.*

Corrigé

On a donc :

$$\begin{cases} v(t) = \dot{x}(t) \\ m \cdot \dot{v}(t) + c \cdot v(t) + k \cdot x(t) = f(t) \end{cases}$$

Question 2 *En utilisant un schéma d'Euler implicite et l'équation $v(t) = \dot{x}(t)$ exprimer la suite x_n en fonction de x_{n-1}, v_n et du pas de calcul noté noté h.*

Corrigé

On a $\dfrac{d\,x(t)}{d\,t} \simeq \dfrac{x_n - x_{n-1}}{h}$. On a donc $v_n = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{h} \iff x_n = h \cdot v_n + x_{n-1}$.

Question 3 *En utilisant un schéma d'Euler implicite exprimer v_n en fonction de v_{n-1}, x_n, x_{n-1}, f_n, h, k, c et m.*

Corrigé

On a $\dfrac{d\,v(t)}{d\,t} \simeq \dfrac{v_n - v_{n-1}}{h}$. On a donc $\dot{v}_n = \dfrac{v_n - v_{n-1}}{h} \iff v_n = h \cdot \dot{v}_n + v_{n-1}$.

$$m \cdot \frac{v_n - v_{n-1}}{h} + c \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{h} + k \cdot x_n = f_n \iff m \cdot (v_n - v_{n-1}) + c \cdot (x_n - x_{n-1}) + kh \cdot x_n = h f_n$$

On a donc :

$$m\,v_n = h\,f_n - (k\,h + c) \cdot x_n + m\,v_{n-1} + c\,x_{n-1}$$

Question 4 *En déduire que la suite x_n peut se mettre sous la forme suivante : $x_n\left(m + c\,h + k\,h^2\right) - x_{n-1}(2m + c\,h) + m\,x_{n-2} = h^2 f_n$.*

Corrigé

D'après la question 2 on a :

$$v_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{h} \quad \text{et} \quad v_{n-1} = \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{h}$$

En utilisant le résultat de la question 3, on a :

$$m \frac{x_n - x_{n-1}}{h} = h\,f_n - (k\,h + c) \cdot x_n + m \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{h} + c\,x_{n-1}$$

$$\iff m(x_n - x_{n-1}) = h^2 f_n - h(k\,h + c) \cdot x_n + m(x_{n-1} - x_{n-2}) + c\,h\,x_{n-1}$$

Corrigé

$$\iff m(x_n - x_{n-1}) + h(kh + c)\cdot x_n - m(x_{n-1} - x_{n-2}) - c\,h\,x_{n-1} = h^2 f_n$$

$$\iff x_n\left(m + kh^2 + c\,h\right) - x_{n-1}(2m + c\,h) + m\,x_{n-2} = h^2 f_n$$

$$\iff x_n = \frac{1}{m + kh^2 + c\,h}\left(h^2 f_n + x_{n-1}(2m + c\,h) - m\,x_{n-2}\right)$$

Question 5 *Implémenter en Python le fonction f_omega permettant de créer une liste contenant l'ensemble des valeurs prises par la fonction f_n. On utilisera une boucle while. Les spécifications de la fonction sont les suivantes :*

Corrigé

```python
def f_omega(Tsimu,h,fmax,fsign):
    """
    Entrées :
        * Tsimu ( flt ) : temps de la simulation en seconde
        * h ( flt ) : pas de temps de a simulation
        * fmax ( flt ) : amplitude du signal (en Newton)
        * fsign ( flt ) : fréquence du signal (en Hertz)
    Sortie :
        * F ( list ) : liste des valeurs de la fonction
          f_n (t)= fmax sin (omega *t)
    """
    omega = 2*math.pi*fsign
    t=0
    F = []
    while t<Tsimu :
        F.append(fmax*math.sin(omega*t))
        t=t+h
    return F
```

Question 6 *En utilisant une boucle while, générer, en Python, les listes T et X contenant respectivement le temps de simulation et le déplacement de la masse mobile.*

Corrigé

```python
T=[0,h]
X=[0,0]
t=2*h
i=2
while t<Tsimu:
    T.append(t)
    X.append(alpha*F[i]+beta*X[i-1] +gamma*X(i-2))
    i=i+1
    t = t+h
```

3 Résolution du problème général

Question 7 *En reprenant les équations (1), (2) et (3) déterminer les matrices M, C, K et F.*

Corrigé

$$M=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2c & -c & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -c & 2c & -c & \ddots & & 0 & \vdots \\ 0 & -c & 2c & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2c & -c & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & -c & 2c & -c \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -c & 2c \end{pmatrix} \quad K=\begin{pmatrix} 2k & -k & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -k & 2k & -k & \ddots & & 0 & \vdots \\ 0 & -k & 2k & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2k & -k & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & -k & 2k & -k \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -k & 2k \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Question 8 *L'équation $H \cdot X_k = G_k$ peut être résolue grâce à la méthode du pivot de Gauss. Donner les étapes de cette méthode ainsi que l'objectif ce chacune d'entre elles. Quelle est la complexité algorithmique de la résolution d'une équation en utilisant le pivot de Gauss ?*

Corrigé

Question 9 *Expliquer en quoi cet algorithme permet de résoudre le système $H \cdot X_n = G_n$? Quelle est la complexité de cet algorithme ?*

Corrigé

4 Détermination de l'énergie dissipée

Question 10 *Expliquez le but des blocs constitués des lignes 4 à 8 puis des lignes 9 à 13. La fonction proposée permet-elle de calculer la puissance ? Si non, que faudrait-il modifier ?*

Corrigé

Question 11 *La programme précédent retourne la liste des puissances dissipées à chaque temps de calcul. En Python, programmer la fonction `calcul_energie` permettant de calculer l'énergie dissipée en utilisant la méthode des trapèzes. Vous réaliserez un schéma pour illustrer la méthdode. On rappelle que le pas de calcul est noté h.*

Corrigé