TD méthodes de résolution numérique des équations différentielles

Compétences Visées :

- Implémenter la méthode d'Euler explicite et analyser les résultats obtenus
- Comparer la méthode d'Euler explicite à la méthode d'Euler implicite pour la résolution d'une équation différentielle du premier ordre.

1 OBJECTIF

Le premier objectif de cet exercice est d'implémenter la méthode d'Euler explicite en python et d'analyser les résultats obtenus en fonction de la discrétisation choisie sur une équation différentielle du premier ordre puis sur une équation différentielle du second ordre.

Le second objectif de cet exercice est d'implémenter la méthode d'Euler explicite en python et de comparer les résultats obtenus pour une équation différentielle du premier ordre avec ceux de la méthode d'Euler explicite au niveau de la stabilité et de la rapidité des calculs.

2 METHODE D'EULER EXPLICITE

2.1 Equation différentielle du premier ordre

Prenons l'équation différentielle de la commande en tension d'un moteur à courant continu :

$\tau\frac{d\omega(t)}{dt}+\omega(t)=K_c u(t)$ avec comme conditions initiales u(0)=0 et $\omega(0)=0$, pour $t\in[0,2]$ u(t)=U_0

Cette équation différentielle peut être facilement résolue et la solution s'écrit :

$$\omega(t)=K_cU_0(1-e^{\frac{-t}{\tau}})$$ on prendra $\tau=0{,}2s$, Kc=0.5, et U_0=5

2.2 Méthode d'Euler explicite pour une équation différentielle d'ordre 1

Question 1. Ecrire la relation de récurrence de la méthode d'Euler explicite.

Question 2. Ecrire la fonction **euler1_explicite** qui prendra comme arguments une durée ***T***, un pas de temps ***h***, les valeurs initiales et qui renvoie la liste des valeurs de $\boldsymbol{\omega_i}$ sur l'intervalle de temps défini.

Question 3. Tracer la solution exacte de l'équation différentielle et la solution approchée pour différentes valeurs du pas de temps h=[0.5, 0.2, 0.1, 0.01, 0.005] et sur un intervalle de temps T=2s. Faites un essai ensuite avec h=1.

Question 4. Modifier votre programme pour obtenir les temps de calcul pour chaque pas (importer le module time et utiliser time.clock()).

Question 5. Déterminer l'erreur de consistance c_i pour chaque pas de temps.

Question 6. Générer un fichier nommé « euler_explicite.csv » contenant les résultats obtenus pour différentes valeurs du pas de temps sous la forme suivante :

h : pas de temps	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
N pas de temps						
Erreur						
Temps de calcul (s)						

On utilisera le séparateur « ; » entre les colonnes et le retour à la ligne « \n » entre les lignes.

2.3 Equation différentielle du second ordre

Pour cette étude, nous allons nous placer dans le cas de l'étude de l'inertie et des frottements de la nacelle de drone vue en TP. Nous nous placerons dans la situation du pendule libre.

Une étude énergétique permet d'écrire :

$$J\frac{d^2\Theta(\mathrm{t})}{dt^2}+\mu\frac{d\Theta(\mathrm{t})}{dt}+dmgsin\Theta(\mathrm{t})=0$$

J est l'inertie du pendule ramené sur l'axe de tangage
Θest l'angle de tangage
μ le coefficient de frottement visqueux
D est la distance entre le centre d'inertie du pendule et l'axe de tangage
M est la masse du pendule
G l'accélération de pesanteur

$$J\frac{d^2\Theta(\mathrm{t})}{dt^2}+\mu\frac{d\Theta(\mathrm{t})}{dt}+dmg\Theta(\mathrm{t})=0 \text{ pour } \Theta(\mathrm{t}) \text{ petit}$$

La solution analytique en régime oscillatoire amorti (z<1) car c'est le régime observé expérimentalement :

$$\Theta_{app}(t)=\Theta_0 e^{-z\omega_0 t}(\cos\left(\sqrt{1-z^2}\times\omega_0 t\right)+\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\sin\left(\sqrt{1-z^2}\times\omega_0 t\right))$$

Avec :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{dmg}{J}} \qquad z=\frac{\mu}{2\sqrt{Jdmg}}$$

a.n : $\mathrm{J}=1{,}5.10^{-2}kg.m^2$ $\quad \mu=\ 10^{-2}Nms$ $\quad dmg=0{,}6\,Nm$ $\quad \Theta_0=\frac{\pi}{4}$

2.4 Méthode d'Euler explicite pour une équation différentielle d'ordre 2

Question 7. En utilisant l'approximation de la dérivée de la méthode d'Euler explicite, écrire la relation liant Θ_{i+2}, Θ_{i+1}, Δt, J, µ, d, m et g.

Question 8. Ecrire la fonction **euler2_explicite** qui prendra comme arguments la durée de l'essai T et le pas de temps Δt et renvoyant la liste des Θ_i sur l'intervalle de temps de 15s.

Question 9. Tracer les courbes Θ_i pour les valeurs de $\Delta\mathrm{t}=\ [0.001, 0.01]$ et comparer avec la solution analytique. Faites un tracé avec puis pour $\Delta\mathrm{t}=\ [0.1, 1]$. Conclure.

3 METHODE D'EULER IMPLICITE

En travaillant sur l'équation différentielle d'ordre 1 donnée dans la partie 1.1

Question 10. Ecrire la relation de récurrence de la méthode d'Euler implicite.

Question 11. Proposer une méthode pour résoudre l'équation obtenue.

Question 12. Ecrire la fonction **euler_implicite** qui prendra comme arguments une durée ***T*** et un pas de temps ***h*** et qui renvoie la liste des valeurs de $\boldsymbol{\omega_i}$ sur l'intervalle de temps défini.

Question 13. Tracer la solution exacte et la solution approchée pour différentes valeurs du pas de temps.

Question 14. Montrer que cette méthode est stable.