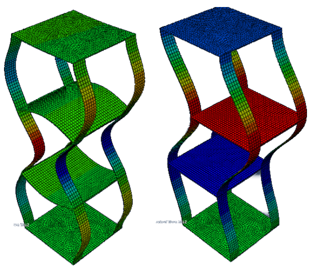
Projet 1



Modélisation d'un système visco élastique

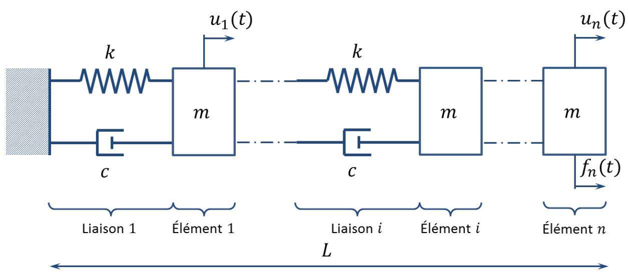
D'après concours CCP – Sujet 0.

Savoirs et compétences :

Mise en situation

Pour étudier une poutre soumises à des vibrations en traction compression, il est possible de la modéliser par n éléments de masse m_i (i variant de 1 à n). Ces éléménts sont reliés par des liaisons visco-élastiques elles-mêmes modélisées par des un ressort de raideur k (k dépendant du module de Young du matériau et des dimensions de la poutre) en parallèle d'un élément d'amortissement c (dépendant d'un coefficient d'amortissement visqueux entre les éléments, du nombre d'éléments et de la masse de la structure). La structure est supposée unidimensionnelle de longueur L. Le nombre d'éléments peut être de l'ordre de plusieurs milliers.

Le déplacement au cours du temps de l'élément i autour de sa position d'équilibre est noté $u_i(t)$. Une force $f_n(t)$ est appliquée sur l'élément n uniquement. L'extrémité gauche de la structure est bloquée. Les effets de la pesanteur sont négligés.



Le théorème de la résultante dynamique appliqué à un élément i (i variant de 2 à $n-1$ inclus) s'écrit sous la forme :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 u_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = -2k\,u_i(t) + k\,u_{i-1}(t) + k\,u_{i+1}(t) - 2c\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} + c\frac{\mathrm{d}u_{i-1}(t)}{\mathrm{d}t} + c\frac{\mathrm{d}u_{i+1}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué aux éléments 1 et n donne les équations suivantes :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 u_1(t)}{\mathrm{d}t^2} = -2k\,u_1(t) + k\,u_2(t) - 2c\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + c\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 u_n(t)}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(u_n(t) - u_{n-1}(t)\right) - c\left(\frac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u_{n-1}(t)}{\mathrm{d}t}\right) + f_n(t) \tag{3}$$

Objectif

1 Travail demandé

Pour mener à bien ce projet il est demandé de réaliser un certain nombre d'activités (non exhaustives).

1. Réaliser une recherche sur les domaines d'application du modèle visco-élastique et trouver des triplets *(masse, raideur, coefficient d'amortissement)*
2. Modéliser le problème et déterminer la (ou les) équation(s) différentielle(s) liant le déplacement de la masse et de la sollicitation mécanique du système.
3. Résoudre le problème en utilisant plusieurs méthode :
   - résolution numérique de l'équation différentielle (en Python) ;
   - résolution analytique de l'équation différentielle ;
   - résolution de l'équation en utilisant le formalisme de Laplace (et éventuellement le module Xcos de Scilab ou Matlab-Simulink) ;
   - résolution de l'équation en utilisant la modélisation multiphysique (Scilab-Xcos-SIMM ou Matlab-Simulink).
4. Comparer les résultats des simulations et commenter les paramètres des solver.

2 Évaluation

L'évaluation se fera sous forme d'une présentation de 10 à 15 minutes (6 diapositives au maximum). Les élèves devront présenter au minimum :

- la modélisation retenue ;
- la structure du programme en Python ;
- une démonstration de l'exécution du code Python.

Éléments de corrigé

1 Mise en équation du problème

Écrivons les équations aux rangs 1, 2, 3, 4 et n :

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + 2c\dot{u}_1 - c\dot{u}_2 + 2ku_1 - ku_2 = 0 \\ m\ddot{u}_2 - c\dot{u}_1 + 2c\dot{u}_2 - c\dot{u}_3 - ku_1 + 2ku_2 - ku_3 = 0 \\ m\ddot{u}_3 - c\dot{u}_2 + 2c\dot{u}_3 - c\dot{u}_4 - ku_2 + 2ku_3 - ku_4 = 0 \\ m\ddot{u}_4 - c\dot{u}_3 + 2c\dot{u}_4 - c\dot{u}_5 - ku_3 + 2ku_4 - ku_5 = 0 \\ \vdots \\ m\ddot{u}_n + ku_n - ku_{n-1} + c\dot{u}_n - c\dot{u}_{n-1} - f_n = 0 \end{cases}$$

On observe que ce système semble pouvoir se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} m & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & m & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & m & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -c & 2c & -c & \ddots & & \vdots \\ 0 & -c & 2c & -c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2c & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -c \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -k & 2k & -k & \ddots & & \vdots \\ 0 & -k & 2k & -k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2k & -k \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

L'équation peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F$$

2 Résolution numérique

En utilisant un schéma d'Euler implicite, on a d'une part $\dot{U} \simeq \dfrac{U_m - U_{m-1}}{h}$. D'autre part, $\ddot{U} \simeq \dfrac{\dot{U}_m - \dot{U}_{m-1}}{h}$. Au final :

$$\ddot{U} \simeq \frac{\dot{U}_m - \dot{U}_{m-1}}{h} \simeq \frac{\frac{U_m - U_{m-1}}{h} - \frac{U_{m-1} - U_{m-2}}{h}}{h} = \frac{U_m - 2U_{m-1} + U_{m-2}}{h^2}$$

En substituant dans l'équation matricielle, on a donc :

$$\begin{aligned} & M\frac{U_m - 2U_{m-1} + U_{m-2}}{h^2} + C\frac{U_m - U_{m-1}}{h} + KU_m = F_m \\ \iff \quad & M(U_m - 2U_{m-1} + U_{m-2}) + Ch(U_m - U_{m-1}) + Kh^2U_m = h^2F_m \\ \iff \quad & MU_m - 2MU_{m-1} + MU_{m-2} + ChU_m - ChU_{m-1} + Kh^2U_m = h^2F_m \\ \iff \quad & \left(M + Ch + Kh^2\right)U_m + (-2M - Ch)U_{m-1} + MU_{m-2} = h^2F_m \\ \iff \quad & \left(M + Ch + Kh^2\right)U_m = h^2F_m + (2M + Ch)U_{m-1} - MU_{m-2} \end{aligned}$$