

TP 05

Algorithme dichotomique

Savoirs et compétences :

- ☐ AA.C9 : Choisir un type de données en fonction d'un problème à résoudre
- ☐ AA.S11 : Manipulation de quelques structures de données.
- ☐ AA.S12 : Fichiers

Proposition de corrigé

Activité 1 – Recherche dichotomique dans un tableau trié

Question 1 Illustrer la méthode avec les deux exemples suivants :

```
# g=0, d=8
# m=4, L[m]=11 et 5 < 11, on pose g=0, d=3
# m=2, L[m]=5. On a trouvé x0

# g=0, d=8
# m=4, L[m]=8 et 8<11, on pose g=5, d=8
# m=6, L[m]=13 et 11<13, on pose g=5, d=5
# m=5, L[m]=10 et 10<11, on pose g=6, d=5. On s'arrête.
```

Question 2 Si x_0 n'est pas dans la liste L , donner un test d'arrêt du processus de dichotomie portant sur g et d .

$g > d$

Question 3 Écrire une fonction `dichotomie(x0, L)` qui renvoie `True` ou `False` selon que x_0 figure ou non dans L par cette méthode. On utilisera une boucle `while` que l'on interrompra soit lorsque l'on a trouvé x_0 , soit lorsque l'on a fini de parcourir la liste.

```
def dichotomie(x0, L):
    Test=False
    n=len(L)
    g,d=0,n-1
    while g<=d and not Test:
        m=(g+d)//2
        if L[m]==x0:
            Test=True
        elif L[m]>x0:
            d=m-1
        else:
            g=m+1
        print(g,d)
    return(Test)
```

Question 4 Combien vaut $g - d$ au i^{e} tour de boucle ? Si x_0 ne figure pas dans L , montrer que le nombre de tours de boucles nécessaires pour sortir de la fonction est de l'ordre de $\ln n$ où $n = \text{len}(L)$ (cela rend la fonction beaucoup plus efficace qu'une simple recherche séquentielle pour laquelle le nombre de comparaisons pour sortir de la boucle serait de l'ordre de n).

```
# Si x0 n'est pas présent, on exécute la boucle tant que g<=d. On sort avec g=d+1.
# A l'entrée du 1er tour de boucle, on a d-g+1=n. A chaque tour, la valeur d-g+1 diminue ✓
  environ de moitié. Donc après k tours de boucles, la longueur de l'intervalle est de ✓
  l'ordre de n/2**k.
# De plus, à chaque tour de boucle, il y a 2 comparaisons.
# Au dernier tour numéro k, on a g=d soit lorsque n/2**k = 1 d'où k=log_2(n).
# On obtient donc un nombre de comparaisons équivalent à 2*ln(n)/ln(2): complexité ✓
  logarithmique.
# Dans le cas séquentiel, on obtient une complexité linéaire, donc beaucoup moins intéressant.
```

Activité 2 – Recherche d'un zéro d'une fonction

Question 5 Si l'on souhaite que g_n et d_n soient des solutions approchées de ℓ à une précision ε , quelle est la condition d'arrêt de l'algorithme? Préciser alors la valeur approchée de ℓ qui sera renvoyée par la fonction.

```
# Pour une valeur à epsilon près, on s'arrete lorsque 0<d-g<2*epsilon et on renvoie (g+d)/2
```

Question 6 Écrire une fonction `recherche_zero(f,a,b,epsilon)` qui renvoie une valeur approchée du zéro de f sur $[a,b]$ à epsilon près.

```
def recherche_zero(f,a,b,epsilon):
    g,d=a,b
    while d-g>2*epsilon:
        m=(g+d)/2
        if f(m)*f(g)<=0:
            d=m
        else:
            g=m
    return((g+d)/2)
```

Question 7 Tester la fonction avec $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur $[0,2]$ et $\varepsilon = 0,001$.

```
def f(x):
    return(x**2-2)
```

Question 8 Avec une erreur de $\varepsilon = \frac{1}{2^p}$, combien y a-t-il de comparaisons au final en fonction de p ?

```
# Avec epsilon = 1/2**p, il faut compter combien il y a de tours de boucles. En sortie du ✓
  kieme tour de boucle, d-g vaut (b-a)/2**k. Il y a donc k tours de boucles avec (b-a)/2**k ✓
  <=1/2**(p-1) soit k>=p-1+log_2(b-a) soit une complexité logarithmique encore.
```

Activité 3 – Valeur d'un polynôme par plusieurs méthodes

Question 9 Écrire une fonction `exponaif(x,n)` d'arguments un réel x et un entier naturel n , qui renvoie la valeur de x^n par la méthode naïve $x^n = x \times x \times \dots \times x$ (n termes). Compter le nombre d'opérations dans `exponaif`.

```
def exponaif(x,n):
    p=1
    for i in range(n):
        p=p*x
    return(p)
```

Question 10 Quel est le nom de la variable locale dont le contenu est retourné par la fonction?

La variable locale est `res`.

Question 11 Faire tourner «à la main» la fonction pour $x = 2$ et $n = 10$ en complétant le tableau suivant puis encadrer le nombre d'opérations dans `exporapide` en fonction de $\ln(n)/\ln(2)$.

	p	res	y
sortie du 1er tour de boucle	5	1	4
sortie du 2er tour de boucle	2	4	16
sortie du 3er tour de boucle	1	4	256
sortie du 4er tour de boucle	0	1024	65536

Le nombre d'opérations effectuées est exactement n (1 produit à chaque tour)

Question 12 Ecrire une fonction `Pnaif(x,P)` d'arguments un réel x et P la liste des coefficients du polynôme, qui renvoie $P(x)$ à l'aide de la fonction `exponaif`. Compter le nombre d'opérations.

```
def Pnaif(x,n):
    S=0
    for i in range(n):
        S=S+i*exponaif(x,i)
    return(S)

# n+n(n+1)/2 ~ n**2/2 opérations. Quadratique
```

Question 13 Faire de même pour une fonction `Prapide(x,n)` qui renvoie $P(x)$ à l'aide de la fonction `exporapide`. On admettra que la complexité est en $O(n \ln(n))$.

```
def Prapide(x,n):
    S=0
    for i in range(n):
        S=S+i*exporapide(x,i)
    return(S)

# O(log(i)) pour chaque i*x**i. Il reste la somme des n termes.
# D'où n+somme des log(i)=O(n.ln(n)).
```

Question 14 Écrire une fonction `horner(x,L)` de paramètres un réel x et une liste L représentant un polynôme P , renvoie la valeur de $P(x)$ par la méthode de Hörner. Compter le nombre d'opérations.

```
def horner(x,L):
    """L est la liste des coefficients"""
    n=len(L)-1
    S=0
    for i in range(n+1):
        S=S*x+L[n-i]
    return(S)

# 2n opérations. Linéaire mais plus intéressante que ci-dessus.
```

Question 15 Définir la liste N des entiers naturels compris entre 0 et 100.

```
N=[i for i in range(101)]
```

Question 16 Grâce à la fonction `perf_counter` de la bibliothèque `time`, écrire une fonction `Temps_calcul(x)` qui :

- définit 3 listes T_n , T_r et T_h contenant les temps de calcul de $P(x)$ pour $P = \sum_{k=0}^n k.x^k$ lorsque n décrit N avec respectivement la méthode naïve, la méthode rapide puis la méthode de Hörner.
- trace les trois courbes T_n , T_r et T_h en fonction de N (on prendra $x = 2$). Interpréter le résultat (on pourrait démontrer que les temps d'exécution des trois programmes sont de l'ordre de n^2 pour la méthode naïve (on parle de complexité quadratique), de l'ordre de $n \ln(n)$ pour l'exporapide, et de l'ordre de n pour la méthode de Hörner (complexité linéaire)).

```
import time as t

def Temps_calcul_P(x):
    # Le polynôme est donné par une liste des coefficients.
    Tn,Tr,Th=[],[],[]
    for n in N:
        L=[k for k in range(n+1)]
        tps=t.perf_counter()
        Pnaif(x,n)
        Tn.append(t.perf_counter()-tps)
        tps=t.perf_counter()
        Sr=0
        Prapide(x,n)
        Tr.append(t.perf_counter()-tps)
        tps=t.perf_counter()
        Phorner(x,L)
        Th.append(t.perf_counter()-tps)
    plt.plot(N,Th,label='méthode horner')
    plt.plot(N,Tr,label='méthode rapide')
    plt.plot(N,Tn,label='méthode naïve')
    plt.legend()
    plt.show()
```