Etant donné deux suites (u_n) et (v_n) de réels strictement positifs, on dit que (u_n) est dominée par la suite (v_n) lorsque $(u_n v_n)$ est une suite bornée. On note alors $u_n = n \rightarrow +\infty(v_n)$.

Par exemple :

Si (u_n) converge alors $u_n = n \rightarrow +\infty(1)$. Réciproque fausse.

$3n = n \rightarrow +\infty(n^2)$, $5n^2 = n \rightarrow +\infty(n^2)$, $\ln(n) = n \rightarrow +\infty(n\ln(n)^2)$, $an^2 + bn + c\ln(n) = n \rightarrow +\infty(n^2)$ ...

Pour tout polynôme de degré p, $P = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + ... + a_1 x + a_0$, on a $P(n) = n \rightarrow +\infty(n^p)$.

En programmation, on dira qu'un programme a :

- une complexité linéaire lorsque le nombre d'opérations effectuées est en $n \rightarrow +\infty(n)$
- une complexité logarithmique lorsque le nombre d'opérations effectuées est en $n \rightarrow +\infty(\log(n))$
- une complexité quadratique lorsque le nombre d'opérations effectuées est en $n \rightarrow +\infty(n^2)$

1 Recherche dichotomique d'un élément dans une liste triée

On se donne une liste `L` de nombres de longueur `n`, triée dans l'ordre croissant, et un nombre `x0`.

Pour chercher `x0`, on va couper la liste en deux moitiés et chercher dans la moitié qui encadre `x0` et ainsi de suite...

On appelle `g` l'indice de l'élément du début de la sous-liste dans laquelle on travaille et `d` l'indice de l'élément de fin.

Au début, `g = 0` et `d = n - 1`

On utilise la méthode suivante :

- On compare `x0` à "l'élément du milieu" `L[m]` avec `m = (g + d) // 2`
- Si `x0 = L[m]`, on a trouvé `x0`, on peut alors s'arrêter.
- Si `x0` < `L[m]`, c'est qu'il faut chercher entre `L[g]` et `L[m-1]`
- Si `x0` > `L[m]`, c'est qu'il faut chercher entre `L[m+1]` et `L[d]`

On poursuit jusqu'à ce qu'on a trouvé `x0` ou lorsque l'on a épuisé la liste `L`.

Question 1 *Illustrer la méthode avec les deux exemples suivants en déterminant successivement les valeurs de* g*, de* d *et de* m *:*

- `x0 = 5` et L =

−3	5	7	10	11	14	17	21	30

- `x0 = 11` et L =

−2	1	2	7	8	10	13	16	17

Question 2 *Si* `x0` *n'est pas dans la liste* `L`*, donner un test d'arrêt du processus de dichotomie portant sur* g *et* d*.*

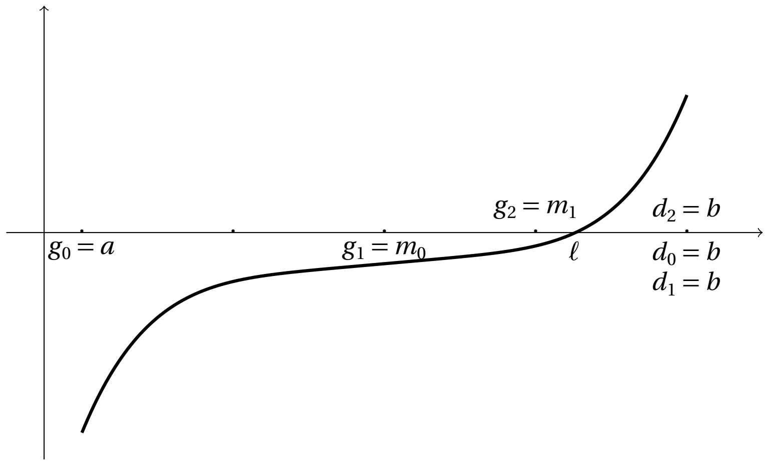
Question 3 *Écrire une fonction* `dichotomie(x0,L)` *qui renvoie* `True` *ou* `False` *selon que* `x0` *figure ou non dans* `L` *par cette méthode. On utilisera une boucle* `while` *que l'on interrompra soit lorsque l'on a trouvé* `x0`*, soit lorsque l'on a fini de parcourir la liste.*

Question 4 *Combien vaut* $g - d$ *au* i^e *tour de boucle ? Si* `x0` *ne figure pas dans* `L`*, montrer que le nombre de tours de boucles nécessaires pour sortir de la fonction est de l'ordre de* $\ln n$ *où* $n = len(L)$ *(cela rend la fonction beaucoup plus efficace qu'une simple recherche séquentielle pour laquelle le nombre de comparaisons pour sortir de la boucle serait de l'ordre de* n*)*

2 Recherche d'un zéro d'une fonction

Soit une fonction $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ $(a < b)$ vérifiant : f continue sur $[a,b]$ et $f(a).f(b)0$ ie $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés..

Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique et assure que f possède au moins un zéro ℓ entre a et b.



L'idée consiste à créer une suite d'intervalles $[g_n, d_n]$ tels que pour tout entier naturel n,

$$g_n \leq \ell \leq n \text{ et } 0 \leq g_n - d_n = \frac{g_{n-1} - d_{n-1}}{2}.$$

On considère $m_0 = \dfrac{g_0 + d_0}{2}$ et on évalue $f(m_0)$:

- Si $f(m_0) \times f(d_0) \geq 0$, on va poursuivre la recherche d'un zéro dans l'intervalle $[g_1, d_1] = [g_0, m_0]$
- Sinon, on poursuit la recherche dans l'intervalle $[g_1, d_1] = [m_0, d_0]$.
- On recommence alors en considérant $m_1 = \dfrac{g_1 + d_1}{2}$ ...

Question 5 *Si l'on souhaite que g_n et d_n soient des solutions approchées de ℓ à une précision ε, quelle est la condition d'arrêt de l'algorithme ? Préciser alors la valeur approchée de ℓ qui sera renvoyée par la fonction.*

Question 6 *Écrire une fonction* `recherche_zero(f,a,b,epsilon)` *qui renvoie une valeur approchée du zéro de* `f` *sur* `[a,b]` *a epsilon près.*

Question 7 *Tester la fonction avec $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur $[0,2]$ et $\varepsilon = 0.001$.*

Question 8 *Avec une erreur de $\varepsilon = 12^p$, combien y a-t-il de comparaisons au final en fonction de p ?*

3 Valeur d'un polynôme par plusieurs méthodes

Question 9 *Ecrire une fonction* `exponaif(x,n)` *d'arguments un réel x et un entier naturel n, qui renvoie la valeur de x^n par la méthode naïve $x^n = x \times x \times \ldots \times x$ (n termes).*

Question 10 *Une autre méthode, celle de l'exponentiation rapide consiste à remarquer que*

$$x^n = \begin{cases} (x^2)^{n/2} & si \quad n \text{ pair} \\ x \times (x^2)^{(n-1)/2} & si \quad n \text{ impair} \end{cases}$$

Le code itératif correspondant est le suivant :

```
def expo_rapide(x,n) :
    p,res,y = n,1,x
    while p>0 :
        if p%2==1 :
            res=res*y
        p=p//2
        y=y*y
    return(res)
```

Question 11 *Quel est le nom de la variable locale dont le contenu est retourné par la fonction ?*

Question 12 *Faire tourner « à la main » la fonction pour $x=2$ et $n=10$:*

	p	res	y
sortie du 1er tour de boucle			
sortie du 2e tour de boucle			
…			
…			

On considère un polynôme

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k.x^k$$

que l'on modélisera en Python par la liste $P=[a_0,a_1,...,a_n]$. Dans la suite, on prendra pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a_k=k$.

Question 13 *Ecrire une fonction* `Pnaif(x,n)` *qui renvoie $P(x)$ à l'aide de la fonction* `exponaif`.

Question 14 *Faire de même pour une fonction* `Prapide(x,n)` *qui renvoie $P(x)$ à l'aide de la fonction* `exporapide`.

Une dernière méthode consiste à utiliser le schéma de Hörner :

$$P(x)=(\ldots((a_n x+a_{n-1})x+a_{n-2})x+...+a_1)x+a_0$$

Question 15 *Écrire une fonction* `horner(x,L)` *de paramètres un réel x et une liste L représentant un polynôme P, renvoie la valeur de $P(x)$ par la méthode de Hörner.*

On désire maintenant visualiser les temps d'éxécution des trois fonctions précédentes pour des grandes valeurs de n.

Question 16 *Définir la liste N des entiers naturels compris entre 0 et 100.*

Question 17 *Grâce à la fonction* `perf_counter` *de la bibliothèque* `time`*, écrire une fonction* `Temps_calcul(x)` *qui :*

- définit 3 listes `Tn`, `Tr` *et* `Th` *contenant les temps de calcul de $P(x)$ pour $P=\sum_{k=0}^{n} k.x^k$ lorsque n décrit N avec respectivement la méthode naïve, la méthode rapide puis la méthode de Hörner.*
- trace les trois courbes `Tn`, `Tr` *et* `Th` *en fonction de N (on prendra $x=2$). Interpréter le résultat (on pourrait démontrer que les temps d'éxécution des trois programmes sont de l'ordre de $n**2$ pour la méthode naïve (on parle de complexité quadratique), de l'ordre de $n\ln(n)$ pour l'exporapide, et de l'ordre de n pour la méthode de Hörner (complexité linéaire)).*