TP 8 – Fonctions récursives.

Exercice 1 – Applications directes

Question 1 *Implémenter la fonction* `mult_it(n:int, p:int) -> int` *qui permet de calculer* $n \times p$ *par une méthode* ***itérative****. L'opération* `*` *est strictement interdite.*

Question 2 *Implémenter la fonction* `mult_rec(n:int, p:int) -> int` *qui permet de calculer* $n \times p$ *par une méthode* ***récursive****. L'opération* `*` *est strictement interdite.*

Question 3 *Implémenter la fonction* `puiss_rec(x:float, n:int) -> float` *qui permet de calculer* x^n *par une méthode* ***récursive****. L'opération* `**` *est strictement interdite.*

Exercice 2 – Palindrome...

On souhaite réaliser une fonction `miroir` dont le but est de retourner le «miroir» d'une chaîne de caractères. Par exemple le résultat de `miroir("miroir")` serait *"riorim"*.

Question 4 *Programmer la fonction* `miroir_it` *permettant de répondre au problème de manière itérative.*

Question 5 *Programmer la fonction* `miroir_rec` *permettant de répondre au problème de manière récursive.*

Question 6 *Que renvoie la fonction si la chaîne de caractère est "Eh ! ça va la vache" ?*

On rappelle qu'il est possible de réaliser des opérations de slicing avec des chaînes de caractères. Ainsi si `ch='abcdef'`*, et* `var=ch[1:3]` *alors* `var` *contient* `'bc'`*.*

Exercice 3 – Suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci de la façon suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$.

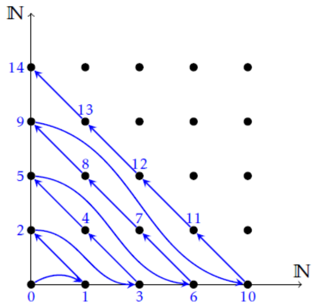
Question 7 *Définir la fonction* `fibonacci_it` *permettant de calculer* u_n *par une méthode itérative.*

Question 8 *Définir la fonction* `fibonacci_rec` *permettant de calculer* u_n *par une méthode récursive « intuitive».*

Question 9 *Observer comment passer du couple* (u_n, u_{n+1}) *au couple* (u_{n+1}, u_{n+2})*. En déduire une autre méthode récursive pour calculer le nième terme de la suite de Fibonacci.*

Exercice 4 – Problème

On démontre que sur l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable en numérotant chaque couple $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ suivant le procédé suggéré par la figure ci-contre.



Question 10 *Rédiger une fonction récursive qui retourne le numéro du point de coordonnées* (x, y)*.*

Question 11 *Rédiger la fonction réciproque, là encore de façon récursive.*

Exercice 5 – Flocon de Von Koch – Exercice corrigé

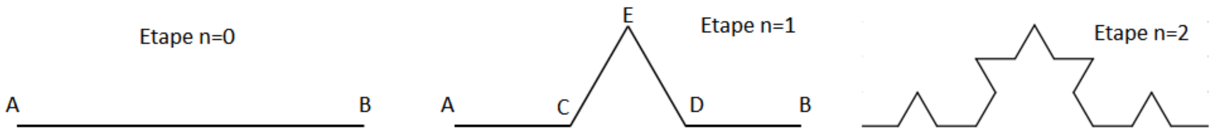
Dans cet exercice, vous utiliserez des tableaux **numpy** pour représenter les points. C'est plus pratique que les listes python pour faire les calculs vectoriels.

— Si a et b représentent respectivement les points (x, y) et (x', y') alors $a+b$ représente le point $(x+x', y+y')$.

— Si r est un réel et a représente le point de coordonnées (x, y) alors $r * a$ représente le point (rx, ry).

— Si a et b sont des tableaux **numpy** alors $dot(a, b)$ représente le produit matriciel $a \times b$ (si ce produit est possible). La fonction **dot** est une fonction **numpy**.

Le mathématicien suédois Von Koch a défini la courbe du même nom dont voici les premières itérations.



Question 12 *Ecrire une fonction* `rotation` *d'argument un réel* `alpha` *qui renvoie le tableau* **numpy** *correspondant à la matrice de rotation d'angle* `alpha`.

Question 13 *Pour l'étape $n = 1$, exprimer les points C et D en fonction de A et B.*

Question 14 *En utilisant une matrice de rotation, exprimer E en fonction de C et D.*

Question 15 *En déduire une fonction récursive* `koch` *d'arguments les points* `A` *et* `B` *et un entier* `n`*. Cette fonction tracera la courbe de Von Koch pour l'itération n à partir des points A et B.*

Question 16 *Ecrire une fonction* `flocon` *d'arguments les points A et B et un entier n. Cette fonction tracera le flocon de Von Koch pour l'itération n à partir des points A et B.*

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def rotation(angle):
    return np.array([[np.cos(angle),-np.sin(angle)],[np.sin(angle),np.cos(angle)]])
def koch(a, b, n):
    R = rotation(np.pi/3)
    if n == 0:
        plt.plot([a[0], b[0]], [a[1], b[1]],'b')
    else:
        c=np.array([(b[0]-a[0])/3+a[0],(b[1]-a[1])/3+a[1]])
        d=np.array([2*(b[0]-a[0])/3+a[0],2*(b[1]-a[1])/3+a[1]])
        vecteur=d-c
        e=np.dot(rotation(np.pi/3),vecteur)+c
        koch(a, c, n - 1)
        koch(c, e, n - 1)
        koch(e, d, n - 1)
        koch(d, b, n - 1)
def flocon(a,b,n):
    koch(a,b,n)
    vecteur=b-a
    c=np.dot(rotation(-2*np.pi/3),vecteur)+b
    koch(b,c,n)
    koch(c,a,n)
n = 5
a = np.array([0,0])
b = np.array([1,0])
flocon(a, b, n)
plt.axis('equal')
plt.show()
```