Cours

Ch. 6
Introduction aux graphes

E. Durif – X. Pessoles
J.-P. Berne
MPSI

1 Introduction aux graphes

1.1 Vocabulaire des graphes

Définition Graphe Un graphe est un ensemble de **sommets** et **relations** entre ces sommets.
Lorsque deux sommets sont en relation, on dit qu'il existe une **arête** entre ces sommets.

Définition Graphe non orienté – Arêtes Un graphe non orienté G est un couple $G=(S,A)$, où S est un ensemble fini de sommets (appelés aussi nœuds) et où A est un ensemble fini de paires ordonnées de sommets, appelées arêtes.
On note $x-y$ l'arête $\{x,y\}$. x et y sont les deux extrémités de l'arête.

Définition Graphe orienté – Arcs [**ref_01**] Un graphe orienté G est un couple $G=(S,A)$, où S est un ensemble fini de sommets et où A est un ensemble fini de paires ordonnées de sommets, appelées arcs.
On note $x\rightarrow y$ l'arc (x,y). x est l'extrémité initiale de l'arc, y est son extrémité terminale. On dit que y est successeur de x et que x est prédécesseur de y.

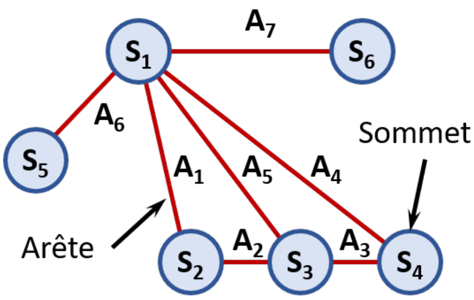


FIGURE 1 – Graphe non orienté

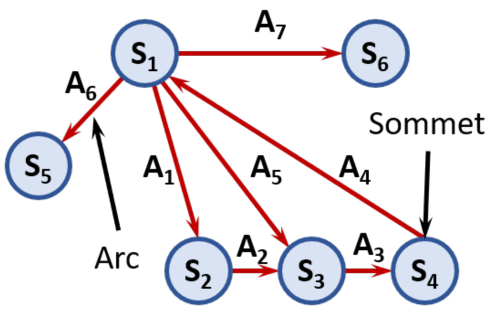


FIGURE 2 – Graphe orienté

R On peut noter le graphe non orienté $G=([\![1,6]\!],E)$ où $E=(\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},\{1,3\},\{1,5\},\{1,6\})$ désigne les arêtes.
On peut noter le graphe orienté $G=([\![1,6]\!],E)$ où $E=((1,2),(2,3),(3,4),(1,4),(1,3),(1,5),(1,6))$ désigne les arcs.

Définition Adjacence Deux arcs (resp. arêtes) d'un graphe orienté (resp. non orienté) sont dits adjacents s'ils ont au moins une extrémité commune.
Deux sommets d'un graphe non orienté sont dits adjacents s'il existe une arête les joignant.
Dans un graphe orienté, le sommet y est dit adjacent au sommet x s'il existe un arc $x\rightarrow y$.

Définition Graphes pondérés Étiqueter les arêtes d'un graphe (S,A) (orienté ou non), c'est se donner une fonction $f:A\rightarrow V$ (où V est un ensemble de valeurs). On dit qu'un graphe est pondéré si ses arêtes sont étiquetées par des nombres. On parlera alors du poids d'une arête.

1.2 Chermins

Définition Chemin dans un graphe On appelle chemin dans un graphe une suite finie $\{S_0,\dots,S_{n-1}\}$ de n sommets tels que pour tout $i\in[\![0,n-1[\![$, une arête relie S_i à S_{i+1}. On dit que ce chemin relie le sommet de départ S_0 au sommet de fin S_{n-1}.
Dans le cas d'un graphe non orienté, les arêtes sont notées $\{S_i,S_{i+1}\}$ pour $i\in[\![0,n-1[\![$.
Dans le cas d'un graphe orienté, les arêtes sont notées (S_i,S_{i+1}) pour $i\in[\![0,n-1[\![$.

Définition Chemin fermé Chemin dont le sommet de départ et le sommet d'arrivé sont identiques.

Définition Chemin élémentaire Chemin n'empruntant que des arêtes distinctes.

Définition Chemin simple Chemin tel que les $n-2$ sommets intermédiaires si, pour $i\in[\![1,n-1[\![$ soient deux à deux distincts et tous distincts du sommet de départ S_0 et du sommet d'arrivée S_{n-1} et tels que ce chemin n'est pas de la forme a,b,a dans le cas non-orienté.

Définition Circuit Chemin fermé de longueur non nulle.

Définition Cycle Circuit élémentaire (chemin fermé de longueur non nulle dont toutes les arêtes sont distinctes).

Définition Cycle simple Chemin fermé et simple de longueur non nulle.

Définition — Chemin et cycle eulérien Chemin (resp. cycle) contenant une et une seule fois toutes les arêtes du graphe.

R Pour certains auteurs, un chemin élémentaire est ce que nous avons appelé un chemin simple et réciproquement. Pour d'autres, un cycle est ce que nous avons appelé un cycle simple.

Définition — Connexité dans les graphes non orientés

1.3 Notations

Définition — Degré d'un sommet On appelle degré d'un sommet s et on note $d(s)$ le nombres d'arcs (ou d'arêtes) dont s est une extrémité.

Définition — Degré entrant et sortant On note s le sommet d'un graphe orienté. On note :
- $d_+(s)$ le demi-degré extérieur de s, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant leur extrémité initiale en s (ces arcs sont dits incidents à s vers l'extérieur) ;
- $d_-(s)$ le demi-degré intérieur de s, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant leur extrémité finale en s (ces arcs sont dits incidents à s vers l'intérieur).

Dans ce cas, on a $d°(s) = d_-(s) + d_+(s)$.

■ **Exemple**

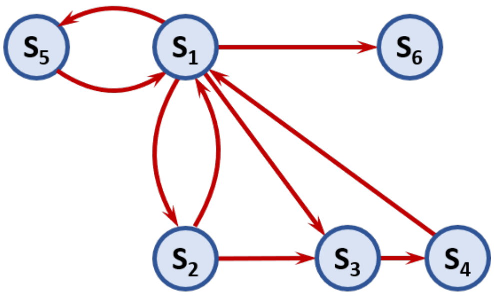


FIGURE 3 – Graphe orienté

- $d_-(S_1) = 3$.
- $d_+(S_1) = 4$.
- $d°(S_1) = 7$.

■

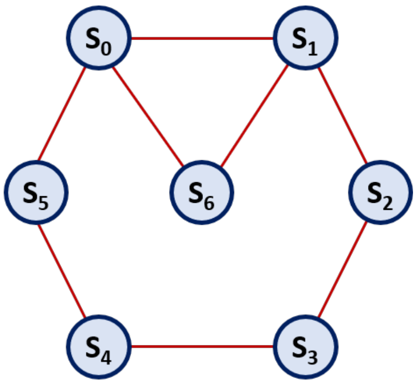
1.4 Implémentation des graphes

1.4.1 Liste d'adjacence

Définition — Liste d'adjacence Soit un graphe de n sommets d'indices $i \in [\![0, n-1]\!]$. Pour implémenter le graphe, on utilise une liste `G` de taille n pour laquelle, `G[i]` est la liste des voisins de `i`.

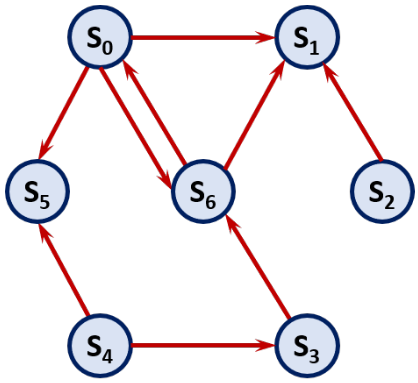
R Cette implémentation est plutôt réservée au graphes « creux », c'est-à-dire ayant peu d'arêtes.

■ **Exemple**



Dans ce cas S_0 est voisin de S_1, S_5 et S_6 ; donc `G[0]=[1,5,6]`. S_3 est voisin de S_2 et S_4 ; donc `G[3]=[2,4]`.

```
G = [[1,5,6],[0,2,6],[1,3],[2,4],[3,5],
     [4,0],[1,0]]
```



Dans ca cas, le graphe est orienté. La liste d'adjacence contient la liste des successeurs. Ainsi, les successeurs de S_0 sont S_1, S_5 et S_6 ; donc `G[0]=[1,5,6]`. S_1 n'a pas de successeur donc `G[1]=[]`.

```
G = [[1,5,6],[],[1],[6],[3,5],[],[0,1]]
```

Dans la même idée, il est aussi possible d'utiliser des dictionnaires d'adjacence dans lequel les clés sont les sommets, et les valeurs sont des listes de voisins ou de sucesseurs.

```
# Graphe non orienté
G = {"S0":["S1","S5","S6"],"S1":["S0","S2","S6"],"S2":["S1","S3"],"S3":["S2","S4"],"S4":["S3"
  ,"S5"],"S5":["S4","S0"],"S6":["S1","S0"]}
# Graphe orienté
G = {"S0":["S1","S5","S6"],"S1":[],"S2":["S1"],"S3":["S6"],"S4":["S3","S5"],"S5":[],"S6":["S1
  ","S0"]}
```

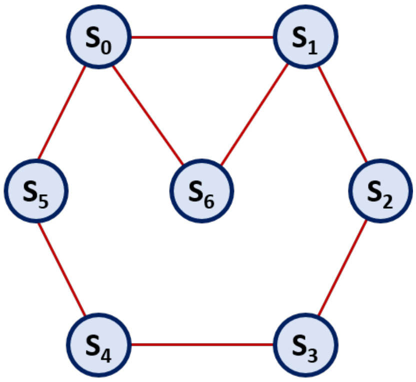
■

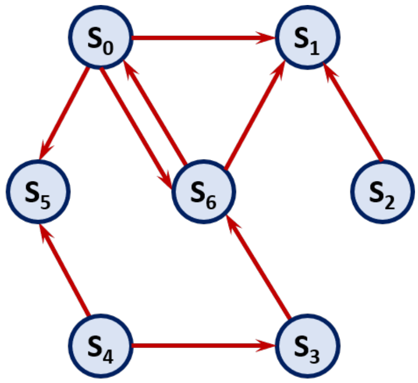
1.4.2 Matrice d'adjacence

Définition Matrice d'adjacence Soit un graphe de n sommets d'indices $i \in [\![0, n-1]\!]$ et E l'ensemble des arêtes (on notera $G = ([\![0, n-1]\!], E)$. Pour implémenter le graphe, on utilise la matrice d'adjacence carrée de taille n, $\mathcal{M}_n$ `G` de taille n pour laquelle, $m_{i,j} = \begin{cases} \texttt{True} & \text{si } \{i,j\} \in E \\ \texttt{False} & \text{sinon} \end{cases}$ avec $i, j \in [\![0, n-1]\!]$.

R Cette implémentation est plutôt réservée au graphes « denses » ayant « beaucoup » d'arêtes.

■ **Exemple**





On a dans ce cas

$$M=\begin{pmatrix} \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{True} \\ \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} \\ \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} \\ \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} \\ \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} \\ \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} \\ \texttt{True} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} \end{pmatrix}$$

ou

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ca cas, le graphe est orienté. On a On a dans ce cas

$$M=\begin{pmatrix} \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} \\ \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} \\ \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} \\ \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} \\ \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} \\ \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} \\ \texttt{True} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} \end{pmatrix}$$

ou $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

R

- Dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice est symétrique.
- Si on avait un bouclage sur un sommet, il y aurait des valeurs non nulles sur la diagonale.

2 Parcours d'un graphe

2.1 Piles et files

2.1.1 Pile

Définition Pile Une pile est une structure de données dans laquelle le dernier élément stocké est le premier à en sortir. On parle de principe *LIFO* pour *Last In First Out*. Le dernier élément stocké est appelé **sommet**.

Pour gérer une pile, indépendamment de la façon dont elle est implémentée, on suppose exister les opérations élémentaire suivantes :

- création d'une pile vide ;
- test si une est vide ;
- rajout d'un élément au sommet de la pile ;
- accès au sommet d'une pile non vide ;
- suppression (et renvoi) du sommet d'une pile non vide.

Théoriquement, chacune de ces opérations doit se faire à **temps constant**.

Une des possiblités pour implémenter les piles est d'utiliser le module `deque`. Chacun des éléments de la pile peut être un objet de type différent.

```
from collections import deque

# Création d'une pile vide
pile = deque()

# Test si une pile est vide
len(pile) == 0

# Ajout de l'élément Truc au sommet de la pile
pile.append("Truc")

# Suppression (et renvoi) du sommet d'une pile non vide
sommet = pile.pop()
```

2.2 Parcours générique d'un graphe

2.3 Parcours en largeur

2.4 Parcours en profondeur

2.5 Détection de la présence des cycles

2.6 Connexité d'un graphe non orienté

3 Pondération d'un graphe

4 Recheche du plus court chemin

4.1 Algorithme de Dijkstra

4.2 Algorithme A$\star$

Définition

Définition

Définition

Définition

Définition