Cours

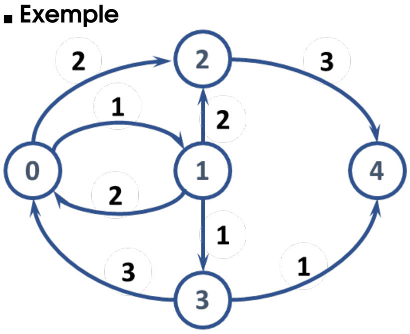
Ch. 8
Parcours de graphes

E. Durif – X. Pessoles
J.-P. Berne
MPSI

L'algorithme de Dijkstra est un parcours en largeur d'un graphe **pondéré** et orienté. Il permet de calculer l'ensemble des plus courts chemins entre un sommet vers tous les autres sommets du graphe.

Pour modéliser le graphe, on utilisera une matrice d'adjacence M pour laquelle $M_{ij} = w(i,j)$ et $w(i,j)$ représente le poids de l'arête de i vers j. Lorsqu'il n'y a pas d'arc entre deux sommets, on aura $M_{ij} = \infty$.

▪ **Exemple**



$$\begin{array}{cc} & \text{Colonne } j\text{, sommet d'arrivée} \\ \text{Ligne } i\text{, sommet de départ} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 2 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 3 & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

▪

Définition Poids d'un chemin Soit un un graphe pondéré $G = (V, E, w)$ où V désigne l'ensemble des sommets, E l'ensemble des arêtes et w, la fonction poids définie par $w : E \to \mathbb{R}$ ($w(u,v)$ est le poids de l'arête de u vers v).

On appelle poids du chemin C et on note $w(C)$ la somme des poids des arêtes du chemin.

Un chemin de $u \in V$ à $v \in V$ est un plus court chemin s'il n'existe pas de chemin de poids plus petit.

▪ **Exemple** Pour le chemin $C = 0, 1, 2, 4$, on a $w(C) = 6$.

Pour le chemin $C' = 0, 1, 3, 4$, on a $w(C') = 3$.

C' est un plus court chemin. ▪

Définition Distance La distance $d(u,v)$ est le poids d'un plus court chemin de u à v. On peut alors noter $d(u,v) = \inf\{w(C) | C \text{ est un chemin de } u \text{ à } v\}$.

Si v n'est pas atteignable depuis u on poser $d(u,v) = \infty$.

▪ **Exemple** Dans le cas précédent, $d(0,4) = 3$, $d(2,4) = 3$ et $d(4,1) = \infty$ ▪

Propriété Sous-optimalité – Soit C un plus court chemin de u à v ainsi que u' et v' deux sommets de C. Alors le sous-chemin de C de u' à v' est aussi un plus court chemin.

▪ **Exemple** $C' = 0, 1, 3, 4$ est un plus court chemin; donc $C' = 1, 3, 4$ ou $C' = 0, 1, 3$ aussi. ▪

Objectif Soit un graphe pondéré $G = (V, E, w)$ où V désigne l'ensemble des sommets, E l'ensemble des arêtes et w, la fonction poids.

Soit s un sommet de V. L'objectif est de déterminer la liste de l'ensemble des distances entre s et l'ensemble des sommets de V.

Pour répondre à l'objectif, on peut formuler l'algorithme de Dijkstra ainsi.

Entrées : un graphe pondéré donné par liste ou marrice d'adjacence, un sommet `s` du graphe
Sortie : `D` liste des distances entre `s` et chacun des sommets
Initialisation de `D` : `D[i] = ` ∞
Initialisation de `D` : `D[s] = 0`
Initialisation de `T` : `D[i] = False` liste des sommets traités
Initialisation d'une file de priorité avec le sommet de départ `F = {s}`
Tant que `F` n'est pas vide :
  Recherche du sommet `u` tel que `d[u]` minimal parmi les sommets de `F`
  Pour tout voisin v de u **faire** :
    Si v n'est ni dans F ni dans H **alors**
      Ajouter v à F
    D=min$(d[v], d[u]+w(u,v))$
  Ajouter u à H
Renvoyer `D`

Une des étapes qui diffère avec le parcours en largeur notamment, est l'utilisation d'une file de priorité et la recherche du sommet vérifiant $d[u]$ minimal. Cela signifie que lorsqu'on partira d'un sommet `s`, on déterminera alors l'ensemble des distances permettant d'atteindre les voisins de `s`. À l'itération suivante, on visitera alors le sommet ayant la distance la plus faible.

S2

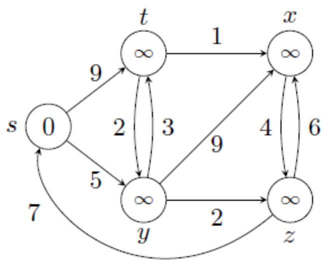
Définition **File de priorité** Une file de priorité est une structure de données permettant d'ajouter un élément et d'obtenir le minimum.

■ **Exemple** Soit une file de priorité comprenant les éléments suivants : `file = [12,1,4,5]`. La file de priorité est dotée d'une méthode `pop` permettant d'extraire la plus petite valeur. Ainsi, `file.pop()` renvoie `1` et la file contient alors les éléments `[12,4,5]`. En réitérant `file.pop()` renverra la valeur `4` et la file contient désormais les éléments `[12,5]`.

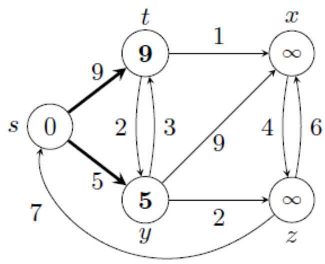
Soit une file de priorité comprenant les éléments suivants : `file = [(1,2),(2,5),(0,1)]`. La méthode `pop` permetttra d'extraire le couple pour lequel la première valeur est la plus petite.

Ainsi, `file.pop()` renvoie `(0,1)` et la file contient alors les éléments `[(1,2),(2,5)]` etc. ■

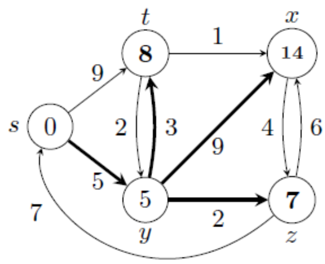
■ **Exemple** *[Jules Svartz]* La figure suivante représente le déroulement de l'algorithme de Dijkstra sur un graphe à 5 sommets, depuis la source s. Pour chaque sommet u on a fait figurer la valeur $d[u]$ à l'intérieur du cercle. Les arcs en gras représentent l'évolution de la liste des prédecesseurs.



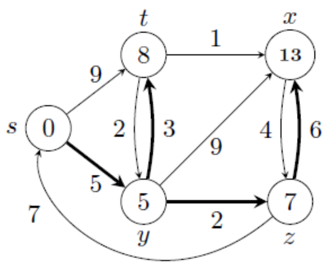
$H=\emptyset,\ F=\{s\}$



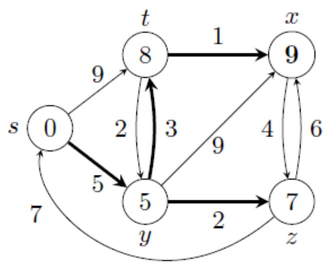
$H=\{s\},\ F=\{t,y\}$



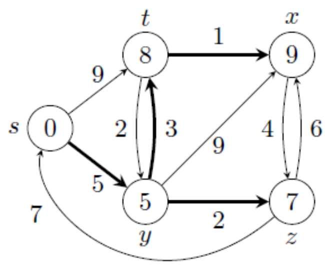
$H=\{s,y\},\ F=\{t,x,z\}$



$H=\{s,y,z\},\ F=\{t,x\}$



$H=\{s,y,z,t\},\ F=\{x\}$



$H=\{s,y,z,t,x\},\ F=\emptyset$

■

On peut donc commencer par implémenter une fonction `cherche_min` permettant de trouver le sommet `i` vérifiant d[i] minimal parmi les sommets n'ayant pas été traités.

```
def cherche_min(d, traites):
    """ Renvoie le sommet i vérifiant d[i] minimal et traites[i] faux, s'il existe un tel sommet
    tel que d[i] != inf. Sinon, renvoie -1 """
    n=len(d)
    x=-1
    for i in range(n):
        if not traites[i] and d[i] != float('inf') and (x==-1 or d[x]>d[i]):
            x=i
    return x
```

On donne alors l'algorithme de Dijkstra.

```
def dijkstra_mat(G,s):
    """
    G donné par matrice d'adjacence. Renvoie les poids chemins de plus petits poids depuis s.
    """
    n=len(G)
    d = [float('inf')]*n
    d[s]=0
    traites = [False]*n
    while True:
        x=cherche_min(d,traites)
        if x==-1:
            return d
        for i in range(n):
            d[i]=min(d[i], d[x]+G[x][i])
        traites[x]=True
```

Propriété Pour n sommets et a arcs, on peut montrer que, la complexité de l'algorithme est en $\mathcal{O}\left(a+n\log n\right)$.

▪ **Exemple** Reprendre le graphe précédent et utiliser l'algorithme de Dijkstra en partant du sommet 1. ▪

Sources

- Cours de Quentin Fortier.
- Cours de Jules Svartz, Lycée Masséna.