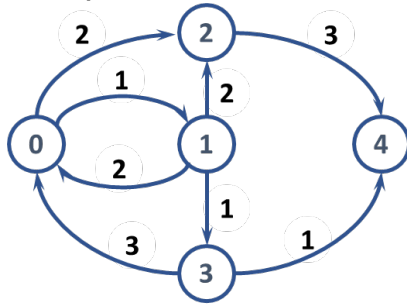




L'algorithme de Dijkstra est un parcours en largeur d'un graphe **pondéré** et orienté. Il permet de calculer l'ensemble des plus courts chemins entre un sommet vers tous les autres sommets du graphe.

Pour modéliser le graphe, on utilisera une matrice d'adjacence  $M$  pour laquelle  $M_{ij} = w(i, j)$  et  $w(i, j)$  représente le poids de l'arête de  $i$  vers  $j$ . Lorsqu'il n'y a pas d'arc entre deux sommets, on aura  $M_{ij} = \infty$ .

#### ■ Exemple



	Colonne $j$ , sommet d'arrivée				
Ligne $i$ , sommet de départ	0	1	2	$\infty$	$\infty$
	2	0	2	1	$\infty$
	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	3
	3	$\infty$	$\infty$	0	1
	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0

**Définition Poids d'un chemin** Soit un un graphe pondéré  $G = (V, E, w)$  où  $V$  désigne l'ensemble des sommets,  $E$  l'ensemble des arêtes et  $w$ , la fonction poids définie par  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $w(u, v)$  est le poids de l'arête de  $u$  vers  $v$ ).

On appelle poids du chemin  $C$  et on note  $w(C)$  la somme des poids des arêtes du chemin.

Un chemin de  $u \in V$  à  $v \in V$  est un plus court chemin s'il n'existe pas de chemin de poids plus petit.

■ **Exemple** Pour le chemin  $C = 0, 1, 2, 4$ , on a  $w(C) = 6$ .

Pour le chemin  $C' = 0, 1, 3, 4$ , on a  $w(C') = 3$ .

$C'$  est un plus court chemin.

**Définition Distance** La distance  $d(u, v)$  est le poids d'un plus court chemin de  $u$  à  $v$ . On peut alors noter  $d(u, v) = \inf\{w(C) | C \text{ est un chemin de } u \text{ à } v\}$ .

Si  $v$  n'est pas atteignable depuis  $u$  on pose  $d(u, v) = \infty$ .

■ **Exemple** Dans le cas précédent,  $d(0, 4) = 3$ ,  $d(2, 4) = 3$  et  $d(4, 1) = \infty$

**Propriété Sous-optimalité** – Soit  $C$  un plus court chemin de  $u$  à  $v$  ainsi que  $u'$  et  $v'$  deux sommets de  $C$ . Alors le sous-chemin de  $C$  de  $u'$  à  $v'$  est aussi un plus court chemin.

■ **Exemple**  $C' = 0, 1, 3, 4$  est un plus court chemin; donc  $C' = 1, 3, 4$  ou  $C' = 0, 1, 3$  aussi.

**Objectif** Soit un graphe pondéré  $G = (V, E, w)$  où  $V$  désigne l'ensemble des sommets,  $E$  l'ensemble des arêtes et  $w$ , la fonction poids.

Soit  $s$  un sommet de  $V$ . L'objectif est de déterminer la liste de l'ensemble des distances entre  $s$  et l'ensemble des sommets de  $V$ .

Pour répondre à l'objectif, on peut formuler l'algorithme de Dijkstra ainsi.

**Entrées :** un graphe pondéré donné par liste ou matrice d'adjacence, un sommet  $s$  du graphe

**Sortie :** D liste des distances entre  $s$  et chacun des sommets

Initialisation de  $D$  :  $D = n \times [\infty]$

Initialisation de  $D$  :  $D[s] = 0$

Initialisation de  $T$  :  $T = n \times [\text{False}]$  liste des sommets traités

Initialisation d'une file de priorité avec le sommet de départ  $F = \{s\}$

**Tant que**  $F$  n'est pas vide :

    Recherche du sommet  $u$  tel que  $d[u]$  minimal parmi les sommets de  $F$

**Pour** tout voisin  $v$  de  $u$  **faire** :

**Si**  $v$  n'est ni dans  $T$  ni dans  $F$  **alors**

            Ajouter  $v$  à  $F$

$D = \min(d[v], d[u] + w(u, v))$

$T[u] = \text{True}$

Renvoyer  $D$

Une des étapes qui diffère avec le parcours en largeur notamment, est l'utilisation d'une file de priorité et la recherche du sommet vérifiant  $d[u]$  minimal. Cela signifie que lorsqu'on partira d'un sommet  $s$ , on déterminera alors l'ensemble des distances permettant d'atteindre les voisins de  $s$ . À l'itération suivante, on visitera alors le sommet ayant la distance la plus faible.

**Définition File de priorité** Une file de priorité est une structure de données sur laquelle on peut effectuer les opérations suivantes :

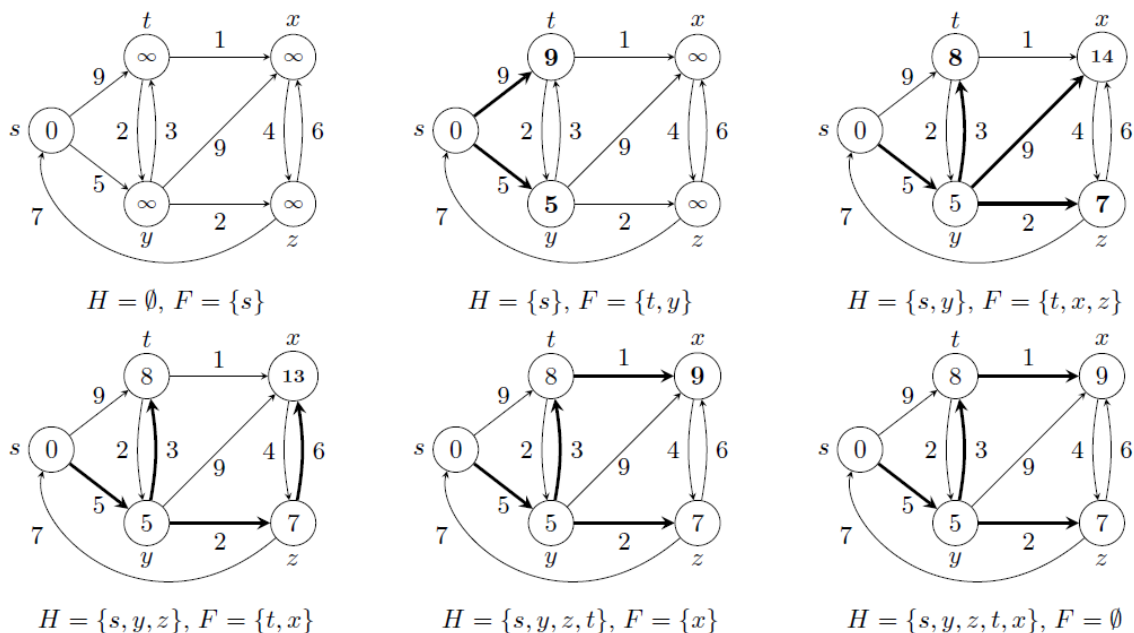
- insérer un élément;
- extraire l'élément ayant, dans notre cas, la plus petite valeur;
- tester si la file de priorité est vide ou pas.

■ **Exemple** Soit une file de priorité comprenant les éléments suivants :  $\text{file} = [12, 1, 4, 5]$ . La file de priorité est dotée d'une méthode `pop` permettant d'extraire la plus petite valeur. Ainsi, `file.pop()` renvoie 1 et la file contient alors les éléments  $[12, 4, 5]$ . En réitérant `file.pop()` renverra la valeur 4 et la file contient désormais les éléments  $[12, 5]$ .

Soit une file de priorité comprenant les éléments suivants :  $\text{file} = [(1, 2), (2, 5), (0, 1)]$ . La méthode `pop` permettra d'extraire le couple pour lequel la première valeur est la plus petite.

Ainsi, `file.pop()` renvoie  $(0, 1)$  et la file contient alors les éléments  $[(1, 2), (2, 5)]$  etc.

■ **Exemple [Jules Svartz]** La figure suivante représente le déroulement de l'algorithme de Dijkstra sur un graphe à 5 sommets, depuis la source  $s$ . Pour chaque sommet  $u$  on a fait figurer la valeur  $d[u]$  à l'intérieur du cercle. Les arcs en gras représentent l'évolution de la liste des prédécesseurs.



On peut donc commencer par implémenter une fonction `cherche_min` permettant de trouver le sommet  $i$  vérifiant  $d[i]$  minimal parmi les sommets n'ayant pas été traités.

```
def cherche_min(d, traitees):
    """ Renvoie le sommet i vérifiant d[i] minimal et traitees[i] faux, s'il existe un tel
        sommet
        tel que d[i] != inf. Sinon, renvoie -1 """
    n=len(d)
    x=-1
    for i in range(n):
        if not traitees[i] and d[i] != float('inf') and (x==-1 or d[x]>d[i]):
            x=i
    return x
```

On donne alors l'algorithme de Dijkstra.

```
def dijkstra_mat(G,s):
    """
    G donné par matrice d'adjacence. Renvoie les poids chemins de plus petits poids depuis s.
    """
    n=len(G)
    d = [float('inf')]*n
    d[s]=0
    traitees = [False]*n
    while True:
        x=cherche_min(d,traitees)
        if x==-1:
            return d
        for i in range(n):
            d[i]=min(d[i], d[x]+G[x][i])
        traitees[x]=True
```

**Propriété** Pour  $n$  sommets et  $a$  arcs, on peut montrer que, la complexité de l'algorithme est en  $\mathcal{O}(a + n \log n)$ .

■ **Exemple** Reprendre le graphe précédent et utiliser l'algorithme de Dijkstra en partant du sommet  $t$ . ■

### Sources

- Cours de Quentin Fortier.
- Cours de Jules Svartz, Lycée Masséna.