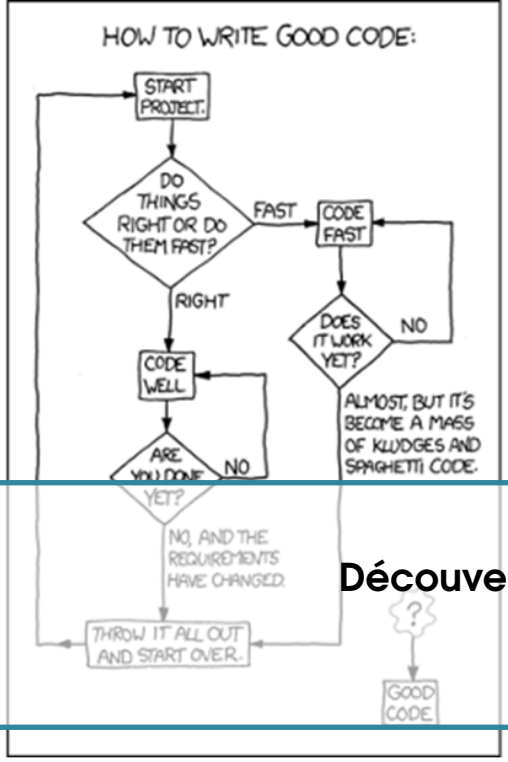
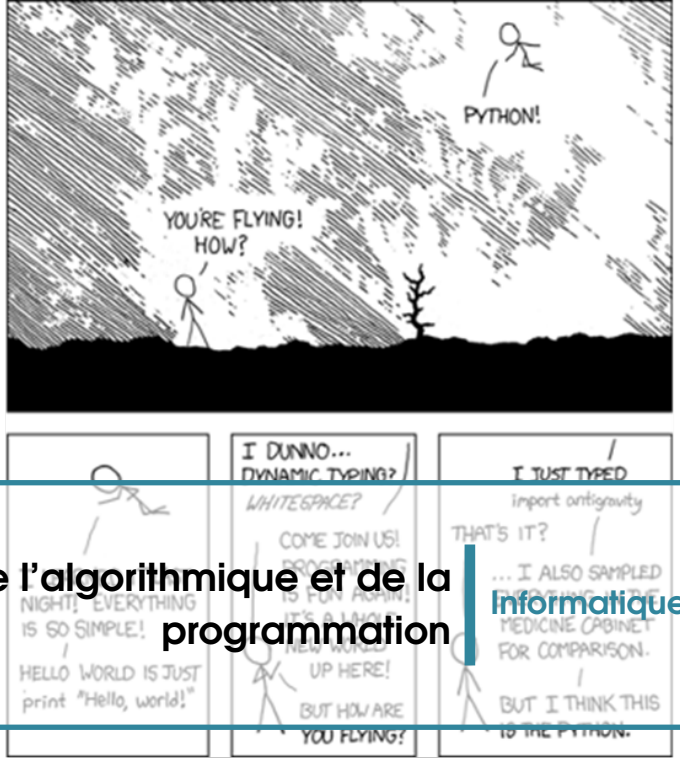




Découverte de l'algorithmique et de la programmation

Informatique

Cours

Chapitre 7

Complexité algorithmique

Savoirs et compétences :

- *Complexité.*

[

1]

Emilien Durif – Xavier Pessoles
MPSI – PTSI

1 Mise en évidence du problème

Prenons l'exemple de la recherche d'un élément dans une liste :

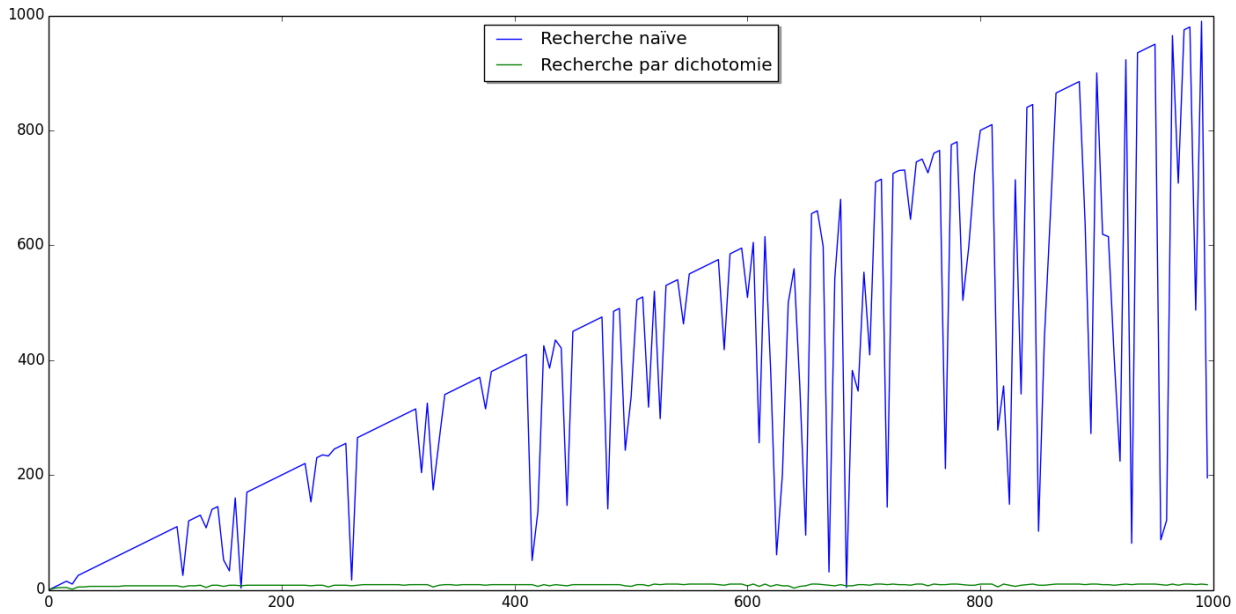
```
def is_number_in_list(nb,tab):
    """Renvoie True si le nombre nb est dans ↙
        la liste de nombres tab
    Entrées :
      * nb, int -- nombre entier
      * tab, list -- liste de nombres entiers
    """
    for i in range(len(tab)):
        if tab[i]==nb:
            return True
    return False
```

▪ **Exemple** À partir de l'algorithme précédent, évaluer :

- le nombre de tour de boucles dans le pire des cas ;
- le nombre de tour de boucles dans le meilleur des cas.

▪

```
def is_number_in_list_dicho(nb,tab):
    """
    Recherche d'un nombre par dichotomie dans↙
        un tableau trié.
    Renvoie l'index si le nombre nb est dans ↙
        la liste de nombres tab.
    Renvoie None sinon.
    Entrées :
     * nb,int -- nombre entier
     * tab,list -- liste de nombres entiers ↙
        triés
    """
    g, d = 0, len(tab)-1
    while g <= d:
        m = (g + d) // 2
        if tab[m] == nb:
            return m
        if tab[m] < nb:
            g = m+1
        else:
            d = m-1
    return None
```



Évolution du nombre d'opérations pour rechercher un nombre dans une liste de 1 à 1000 nombres

2 Complexité des algorithmes

2.1 Présentation

Il existe souvent plusieurs façons de programmer un algorithme. Si le nombre d'opérations à effectuer est peu important et les données d'entrée de l'algorithme sont de faibles tailles, le choix de la solution importe peu. En revanche, lorsque le nombre d'opérations et la taille des données d'entrée deviennent importants, deux paramètres deviennent déterminants : le temps d'exécution et l'occupation mémoire.

Définition Complexité en temps
La complexité en temps donne le nombre d'opérations effectuées lors de l'exécution d'un programme. On appelle C_o le coût en temps d'une opération o.

Définition Complexité en mémoire (ou en espace)
La complexité en mémoire donne le nombre d'emplacements mémoires occupés lors de l'exécution d'un programme.

R

On distingue la complexité dans le pire des cas, la complexité dans le meilleure des cas, ou la complexité en moyenne. En effet, pour un même algorithme, suivant les données à manipuler, le résultat sera déterminé plus ou moins rapidement.
Généralement, on s'intéresse au cas le plus défavorable à savoir, la complexité dans le pire des cas.

Définition Complexité algorithmique – Notation $\mathcal{O}$ [Bournez] Soient f et g deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_*^+$. On note $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ lorsqu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Intuitivement, cela signifie que f est inférieur à g à une constante multiplicative près pour les données suffisamment grandes.

▪ **Exemple** Par ordre de complexité croissante on a :
- $\mathcal{O}(1)$: algorithme s'exécutant en temps constant, quelle que soit la taille des données ;
- $\mathcal{O}(\log(n))$: algorithme rapide (complexité logarithmique) (Exemple : recherche par dichotomie dans un tableau trié) ;
- $\mathcal{O}(n)$: algorithme linéaire ;
- $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$: algorithme quasi-linaire ;
- $\mathcal{O}(n^2)$: complexité quadratique ;
- $\mathcal{O}(n^3)$: complexité cubique ;
- $\mathcal{O}(2^n)$: complexité exponentielle.

▪

2.2 Coût temporel d'un algorithme et d'une opération

Résultat On considère que le coût élémentaire C_e correspond au coût d'une affectation, d'une comparaison ou de l'évaluation d'une opération arithmétique.

▪ **Exemple**

```
def foo():
    a=20
    a<=100
    a+a
```

Chacune de ces 3 opérations expressions ont le même coût temporel C_e. On a donc $C_{\text{foo}}(n) = 3C_e$.
`foo` prendra (a priori) toujours le même temps d'exécution. On a donc $C_{\text{foo}}(n) = \mathcal{O}(1)$. On parle de complexité constante. ▪

Résultat Pour une séquence de deux instructions de coûts respectifs C_1 et C_2, le coût total est de la séquence est de $C_1 + C_2$.

▪ **Exemple**

Soit la fonction suivante.

```
def foo():
    a=20
    print(a)
```

Le coût temporel correspond à l'addition du coût élémentaire de l'affectation ajouté au coût de l'affichage. On a donc $C_{\text{foo}}(n) = C_e + C_{\text{print}}$. Le côut du `print` est variable en fonction, par exemple, de la longeur de la chaîne à afficher.
`foo` prendra (a priori) toujours le même temps d'exécution. On a donc $C_{\text{foo}}(n) = \mathcal{O}(1)$. On parle de complexité constante. ▪

Résultat Le coût d'un test `if test : inst_1 else : inst_2` est inférieur ou égal au maximum du coût de l'instruction 1 et du coût de l'instruction 2 additionné au coût du test (coût élémentaire).

▪ **Exemple**

Soit le programme suivant (sans application réelle) :

```
def foo(x) :
    if x<0 :
        x=x+1
        x=x+2
    else :
        x=x+1
```

La comparaison a un coût élémentaire C_e. Dans le « pire » des cas, on réalise deux additions et deux affectations. Le coût temporel total est est donc $C_{\text{foo}}(n) = C_e + \max(4C_e, 2C_e) = 5C_e$. `foo` prendra (a priori) toujours le même temps d'exécution. On a donc $C_{\text{foo}}(n) = \mathcal{O}(1)$. On parle de complexité constante. ▪

Résultat Le coût d'une boucle `for i in range(n) : inst` est égal à : n fois le coût de l'instruction `inst` si elle est indépendante de la valeur de i.

▪ **Exemple**
Soit la fonction suivante :

```
def foo(n) :
    res = 0
    for i in range(n) :
        res = res+i
    return res
```

On peut considérer que l'incrémentation de `i` a un coût C_e. $C_{\text{foo}}(n) = C_e + n \times 3C_e = \mathcal{O}(n)$. La durée de l'algorithme croît linéairement avec la valeur de n. ▪

Résultat Soit la boucle `while cond : inst`, la condition `cond` faisant intervenir un variant de boucle. Il est donc possible de connaître le nombre n d'itérations de la boucle.

Résultat Dans la pratique, on cherche toujours à **majorer** le coût temporel d'un algorithme. En conséquences :
- il est inutile de compter exactement le nombre d'opérations ;
- il « suffit » de se se placer dans le pire des cas et de compter le nombre de fois qu'est réalisée l'opération se réalisant le plus de fois.

2.3 Exemple

▪ **Exemple** *Calcul de factorielle*

```
def factorielle(n) :
    if n == 0 :
        return 1
    else :
        i = 1
        res = 1
        while i <= n :
            res = res * i
            i = i + 1
    return res
```

Complexité en mémoire C_M : lors de l'exécution du programme, il sera nécessaire de stocker les variables suivantes : `n`, `res`, `i`.

La complexité en mémoire est donc constante : $C_M = \mathcal{O}(1)$.

Complexité en temps C_T (1)

Compte-tenu d'un des réultats précédents, dans le pure des cas, on est dans le `else`. La boucle `while` est réalisée n fois ; donc on peut directement dire que que $C_T(n)$ est un $\mathcal{O}(n)$.

Complexité en temps C_T (2) Une justification plus exhaustive serait la suivante.

La première comparaison a un coût élémentaire C_e.

Pour $n = 0$ le coût du retour est C_r.

Pour $n \neq 0$:
- les deux affectations ont un coût respectif C_e ;
- la boucle tant que sera réalisée n fois. Pour chaque itération,
  - la multiplication ainsi que l'affectation ont un chacun un coût C_e ;
  - l'incrémentation et l'affectation ont chacun un coût C_e ;
- le coût du retour est C_r.

En conséquence, la complexité en temps s'élève à :

$$C_T(n) = C_e + \max(C_r; C_e + C_e + n(4C_e) + C_r)$$

Ainsi $C_T(n) = C_e(3+4n) + C_r$ et $C_T(n) \underset{+\infty}{\sim} 4C_e n$ lorsque n tend vers l'infini. On parle d'une complexité algorithmique linéaire, notée $\mathcal{O}(n)$.

▪

Il est fréquent que la complexité en temps soit améliorée au prix d'une augmentation de la complexité en espace, et vice-versa. La complexité dépend notamment :

- de la puissance de la machine sur laquelle l'algorithme est exécuté ;
- du langage et compilateur / interpréteur utilisé pour coder l'algorithme ;
- du style du programmeur.

2.4 D'autres exemples

2.4.1 Recherche d'un maximum

▪ **Exemple** *Soit une liste de nombre entiers désordonnés. Comment déterminer le plus grand nombre de la liste ?*

Intuitivement, une solution est de parcourir la liste d'élément et de déterminer le plus grand élément par comparaisons successives.

```
def cherche_max(L : list) -> int :
    maxi = L[0]
    for i in range(1,len(L)):
        if tab[i] > maxi :
            maxi = tab[i]
    return maxi
```

Dans ce cas, le coût temporel est : $C_T(n) = C_e + n(2C_e)$. Ici encore, la complexité de cet algorithme est linéaire car $C_T(n) \underset{+\infty}{\sim} 2C_e n$.
Par ailleurs, en comptant le nombre de compairaisons, on observe aussi qu'il y a environ n comparaisons. On a donc $C_T(n)$ est en $\mathcal{O}(n)$.

▪

2.4.2 Suite

Soit la suite u_n définie par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases}$.

```
def un_it (n) :
    if n == 1 :
        return 1
    else :
        u = 1
        for i in range(2,n+1)↙
            :
            u = (u+6)/(u+2)
        return u
```

La boucle `cor` s'exécute `n` fois. Cet algorithme est en $\mathcal{O}(n)$.

```
def un_rec (n) :
    if n == 1 :
        return 1
    else :
        return (un_rec(n-1)↙
            +6)/(un_rec(n-1)↙
            +2)
```

A l'itération `n`, $C(n) = 2 \times C(n-1)$. Il s'agit donc d'une suite géométrique et $C(n) = C(0) \times 2^n$. On a donc une complexité exponentielle en $\mathcal{O}(2^n)$.

```
def un_rec_v2 (n):
    if n == 1 :
        return 1
    else :
        v = un_rec_v2(n-1)
        return (v+6)/(v+2)
```

A l'itération `n`, $C(n) = 1 + C(n-1)$. Il s'agit donc d'une suite arithmétique et $C(n) = C(0) + n$. On a donc une complexité linéaire en $\mathcal{O}(n)$.

2.4.3 Tri d'une liste

2.4.4 Diviser pour régner – recherche dichotomique

▪ **Exemple**

```
def recherche_dichotomique(x, a):
    g, d = 0, len(a)-1
    while g <= d:
        m = (g + d) // 2
        if a[m] == x:
            return m
        elif a[m] < x:
            g = m+1
        else:
            d = m-1
    return None
```

On peut montrer que la suite $d-g$ décroit strictement (car d décroit et g croit). Dans ce cas, la difficulté consiste en déterminer le nombre de fois que sera exécutée la boucle `while`. On note $C_w = C_e + \max(C_e + C_r; 2C_e + 2C_e; 3C_e + C_e) =$

$C_e + \max(C_e + C_r; 4C_e)$ le coût d'une itération de la boucle `while`.

Au cours de l'algorithme, on va devoir diviser en 2 la taille le tableau jusqu'à ce qu'on trouve (ou pas) l'élément recherché. On cherche donc combien de fois m on peut diviser par 2 la taille du tableau n :

$$\frac{n}{2^m} \geq 1 \iff n \geq 2^m \iff \ln(n) \geq m\ln(2)$$

On parlera ici de complexité logarithmique.

▪

Résultat Pour une opération ayant un temps d'exécution de $10^{-9}s$, on peut calculer le temps d'exécution en fonction du nombre de données et de la complexité de l'algorithme :

Données	$\mathcal{O}(\log(n))$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n\cdot\log(n))$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(2^n)$
100	$2\cdot10^{-9}$ s	$0,1\cdot10^{-6}$ s	$0,2\cdot10^{-6}$ s	$10\cdot10^{-6}$ s	$1,26765\cdot10^{21}$ s
1 000	$3\cdot10^{-9}$ s	$1\cdot10^{-6}$ s	$3\cdot10^{-6}$ s	0,001 s	$1,0715\cdot10^{292}$ s
10 000	$4\cdot10^{-9}$ s	$10\cdot10^{-6}$ s	$40\cdot10^{-6}$ s	0,1 s	$+\infty$

2.5 Trompe l'œil – coûts cachés –

```
def recherche(e,L):
    return e in L
```

```
L1 = L.copy()
```

```
L.append(e)
```

Il faut être vigilant lorsqu'on manipule des tableaux avec Python. En effet, de simples instructions cachent en effet des coûts pas toujours visibles. Ainsi, l'instruction `e in L` est linéaire $\mathcal{O}(n)$ car Python dont inspecter chacun des éléments d'une liste de taille `n` pour savoir si `e` est dedans ou non.

Il en est de même pour l'instruction `copy`.

Concernant la méthode `append` on pourra faire l'hypothèse que cela s'effectue en temps constant ($\mathcal{O}(1)$). Cependant, lorsqu'on ajoute une liste Python préréserve des espaces d'allocations juxtaposés. Tant que la liste ne dépasse pas la taille de l'espace alloué, l'ajout d'un élément se fait à temps constant. Quand cette taille est dépassée, la liste est déplacée à un autre endroit en mémoire où plus d'espace est nécessaire. Cette copie se fait donc en temps linéaire. Ainsi, pour append on parle de temps amorti constant.

3 Profiling des algorithmes

Afin d'évaluer la performance des algorithmes, il existe des fonctionnalités permettant de compter le temps consacré à chacune des fonctions ou à chacune des instructions utilisées dans un programme `http://docs.python.org/2/library/profile.html`.

▪ **Exemple** Voici un exemple du crible d'Eratosthène.

```
def crible(n):
    tab=[]
    for i in range(2,n):
        tab.append(i)
    # Liste en comprehension tab=[x for x in range(2,n)]
    for i in range(0,len(tab)):
        for j in range(len(tab)-1,i,-1):
            if (tab[j]%tab[i]==0):
                tab.remove(tab[j])
    return tab

import cProfile
cProfile.run('crible(10000)')
```

`cProfile` renvoie alors le message suivant :

```
 28770 function calls in 1.957 seconds

   Ordered by: standard name

   ncalls tottime percall cumtime percall filename:lineno(function)
```

```
      1 0.000 0.000 1.957 1.957 <string>:1(<module>)
      1 0.420 0.420 1.957 1.957 eratosthene.py:4(crible)
      1 0.000 0.000 1.957 1.957 {built-in method exec}
   9999 0.015 0.000 0.015 0.000 {built-in method len}
   9998 0.016 0.000 0.016 0.000 {method 'append' of 'list' objects}
      1 0.000 0.000 0.000 0.000 {method 'disable' of '_lsprof.Profiler' objects}
   8769 1.505 0.000 1.505 0.000 {method 'remove' of 'list' objects}
```

On a alors le bilan du temps passé à effectuer chacune des opérations. Ainsi pour améliorer notablement l'algorithme, le plus intéressant serait d'optimiser la méthode `remove`. ▪

Références

[1] François Denis `http://pageperso.lif.univ-mrs.fr/~francois.denis/algoL2/chap1.pdf`

[2] Alain Soyeur `http://asoyeur.free.fr/`

[3] François Morain, Cours de l'Ecole Polytechnique, `http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Francois.Morain/TC/X2004/Poly/www-poly009.html`.

[4] Renaud Kerivent et Pascal Monasse, La programmation pour ... , Cours de l'École des Ponts ParisTech - 2012/2013 `http://imagine.enpc.fr/~monasse/Info`.

[5] Olivier Bournez, Cours INFO 561 de l'Ecole Polytechnique, Algorithmes et programmation, `http://www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF561/uploads/Main/poly-good.pdf`.

[6] Wack et Al., *L'informatique pour tous en classes préparatoires aux grandes écoles*, Editions Eyrolles.

Application 01

Applications – Bases

Savoirs et compétences :

❒ .

Exercice 1 – Question 1 *Donner la complexité temporelle, dans le pire des cas et dans le meilleur des cas, de l'algorithme suivant.*

```
def f(L):
    x = 0
    for i in range(len(L)) :
        for j in range(len(L[0])) :
            x = x+1
    return x
```

Exercice 2 – Question 1 *Donner la complexité temporelle, dans le pire des cas et dans le meilleur des cas, de l'algorithme suivant.*

```
def f2(n) :
    x = 0
    for i in range (n) :
        for j in range (i) :
            x += 1
    return x
```

Exercice 3 – Question 1 *Donner la complexité temporelle, dans le pire des cas et dans le meilleur des cas, de l'algorithme suivant.*

```
def f3(n) :
    x, i = 0 , n
    while i > 1:
        x += 1
        i //= 2
    return x
```

Exercice 4 – Question 1 *Donner la complexité temporelle, dans le pire des cas et dans le meilleur des cas, de l'algorithme suivant.*

```
def f4(n) :
    x, i = 0 , n
    while i > 1:
        for j in range (n) :
            x += 1
        i //= 2
    return x
```

Exercice 5 – Question 1 *Donner la complexité temporelle, dans le pire des cas et dans le meilleur des cas, de l'algorithme suivant.*

```
f5(n) :
    x, i = 0 , n
    while i > 1:
        for j in range (i) :
            x += 1
        i //= 2
    return x
```

Exercice 6 – Question 1 *Donner la complexité temporelle, dans le pire des cas et dans le meilleur des cas, de l'algorithme suivant.*

```
def f6(n) :
    x = 0
    for i in range (n) :
        j = 0
        while j * j < i:
            x += 1
            j += 1
    return x
```