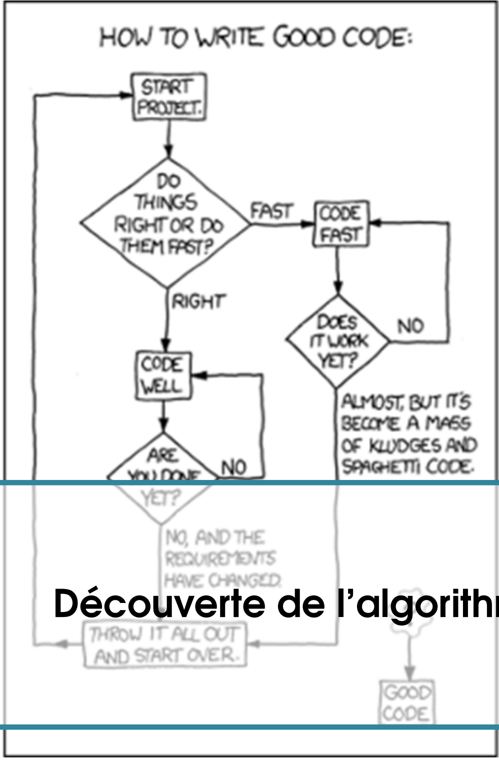
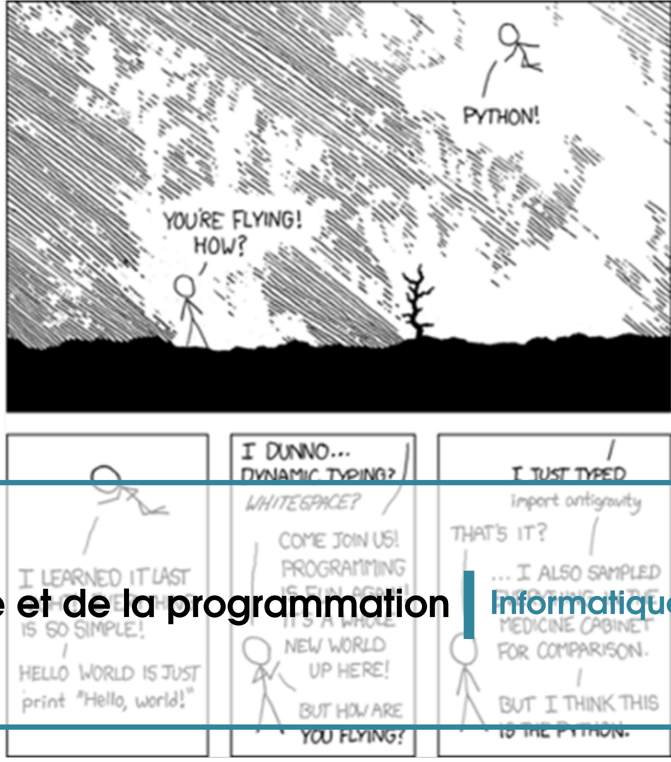
http://xkcd.com/353/
http://xkcd.com/844/





Découverte de l'algorithmique et de la programmation | Informatique

Cours

Chapitre 5

Dichotomie

Savoirs et compétences :

❒ *Algorithmes dichotomiques.*

Xavier Pessoles
MPSI – PTSI

1 Introduction

Les méthodes de résolutions par un algorithme dichotomique font partie des algorithmes basés sur le principe de " diviser pour régner ".
Elles utilisent la définition du terme `dichotomie` qui signifie diviser un tout en deux parties "opposées".
Certains algorithmes de tris sont basés sur ce principe de diviser pour régner.

Ce cours vous présente deux algorithmes dichotomiques :

- la recherche d'un élément dans une liste triée ;
- la détermination de la racine d'une fonction quand elle existe.

2 Recherche dichotomique dans une liste triée : Principe

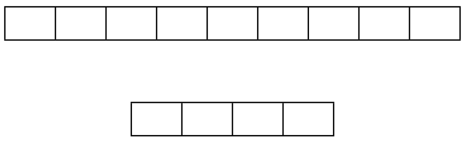
Lorsque vous cherchez le mot « hippocampe » dans le dictionnaire, vous ne vous amusez pas à parcourir chaque page depuis la lettre a jusqu'à tomber sur le mot « hippocampe »...
Dans une liste triée, il y a plus efficace ! Par exemple dans le dictionnaire, vous ouvrez à peu près au milieu, et suivant si le mot trouvé est « inférieur » ou « supérieur » à « hippocampe » (pour l'ordre alphabétique), vous poursuivez votre recherche dans l'une ou l'autre moitié du dictionnaire.

Propriété On se donne une liste `L` de nombres de longueur `n`, triée dans l'ordre croissant, et un nombre `x0`.
Pour chercher `x0`, on va couper la liste en deux moitiés et chercher dans la moitié intéressante et ainsi de suite.
On appelle `g` l'indice de l'élément du début de la sous-liste dans laquelle on travaille et `d` l'indice de l'élément de fin.
Au début, `g =0` et `d = n - 1`
On souhaite construire un algorithme admettant l'invariant suivant :

$$\boxed{\text{si } \texttt{x0} \text{ est dans } \texttt{L} \text{ alors } \texttt{x0} \text{ est dans la sous-liste } \texttt{L[g:d]} \text{ (} \texttt{g} \text{ inclus et } \texttt{d} \text{ exclu).}}$$

On va utiliser la méthode suivante :

- On compare `x0` à "l'élément du milieu" : c'est `L[m]` où `m = (g + d) // 2` son indice est `m= n//2` (division euclidienne)



- Si `x0 = L[m]`, on a trouvé `x0`, on peut alors s'arrêter.
- Si `x0` < `L[m]`, c'est qu'il faut chercher dans la première moitié de la liste, entre `L[g]` et `L[m-1]` (`L[m]` exclu).
- Si `x0` > `L[m]`, c'est qu'il faut chercher dans la seconde moitié de la liste, entre `L[m+1]` et `L[d]` (`L[m]` exclu).

On poursuit jusqu'à ce qu'on a trouvé `x0` ou lorsque l'on a épuisé la liste `L`.

3 Exemples d'application

Indiquer pour les deux exemples suivants les valeurs successives de `g` et `d` :

1. `x0 = 5` et `L` =

−3	5	7	10	11	14	17	21	30

$$\begin{cases} g=0 \\ d=8 \\ m=4, L[m]>x0 \end{cases} \quad \begin{cases} g=0 \\ d=3 \\ m=1, L[m]=x0 \end{cases}.$$

C'est fini, on a bien trouvé x_0 dans la liste.

2. `x0 = 11` et `L` =

−2	1	2	7	8	10	13	16	17

$$\begin{cases} g=0 \\ d=8 \\ m=4, L[m]<x0 \end{cases}, \begin{cases} g=5 \\ d=8 \\ m=6, L[m]>x0 \end{cases} \quad \begin{cases} g=5 \\ d=5 \\ m=5, L[m]<x0 \end{cases} \quad \begin{cases} g=6 \\ d=5 \end{cases}.$$

C'est fini, on a épuisé la liste `L` et on n'a pas trouvé $x0$.

4 Implémentation en Python

La fonction `recherche dichotomie` d'arguments une liste `L` et un élément `x0` renvoyant un booléen disant si `x0` est dans la liste `L` est proposée :

```
def recherche dichotomie(L:list, x0:int)-> bool:\\
    n = len(L)\\
    g ind = 0 \# c'est l'indice de gauche\\
    d ind = n - 1 \# c'est l'indice de droite\\
    rep = False\\
    while g ind <= d ind and rep == False:\\
        \# si x0 est dans L alors L[g ind] <= x0 <= L[d ind] {invariant}\\
        m = (d ind + g ind) // 2 \\
        if x0 == L[m]:\\
            rep = True\\
        elif x0 < L[m]:\\
            d ind = m - 1\\
         else:\\
            g ind = m + 1\\
         \# si x0 est dans L alors L[g ind] <= x0 <= L[d ind] {invariant}\\
    return(rep)\\
```

Remarque : La terminaison de l'algorithme est obtenue avec $d-g$ qui est un entier positif qui décroît strictement à chaque passage dans la boucle `while` et joue le rôle de variant.

5 Détermination de la racine d'une fonction par dichotomie

5.1 Principe théorique de la méthode par dichotomie

On considère une fonction f vérifiant :

$$f \text{ continue sur } [a,b]\,;\ f(a) \text{ et } f(b) \text{ de signes opposés.}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que f possède au moins un zéro ℓ entre a et b. La preuve, vue en cours de mathématiques, repose sur la méthode de dichotomie. Prenons le cas $f(a)<0$ et $f(b)>0$ et posons $g_0=a$, $d_0=b$. On considère $m_0=\dfrac{g_0+d_0}{2}$ et on évalue $f(m_0)$:

- Si $f(m_0)\geq 0$, on va poursuivre la recherche d'un zéro dans l'intervalle $[g_0, m_0]$
  On pose donc : $g_1=g_0 \quad ; \quad d_1=m_0$
- Sinon, la recherche doit se poursuivre dans l'intervalle $[m_0, d_0]$
  On pose donc : $g_1=m_0 \quad ; \quad d_1=d_0$
- On recommence alors en considérant $m_1=\dfrac{g_1+d_1}{2}$...

1. Par quoi peut-on remplacer la condition "$f(m_k)\geq 0$" dans le cas général où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires (pas forcément $f(a)<0$ et $f(b)>0$) ?
2. À quelle condition sur g_n et d_n s'arrête-t-on, si l'on souhaite que g_n et d_n soient des solutions approchées de ℓ à une précision ε ?
3. Au lieu de renvoyer g_n et/ou d_n comme valeurs approchées de ℓ, que pourrait-on prendre ?
   Que mettre comme condition d'arrêt pour avoir une précision ε ?
4. Un étudiant propose de tester si $f(m_k)=0$. Qu'en pensez-vous ?

5.2 Implémentation en Python et avec scipy

Écrivons une fonction `zero dichotomie(f:function,a:float,b:float,epsilon:float)->float` d'arguments une fonction `f`, des flottants `a` et `b` (tels que `a < b`), et la précision voulue `epsilon` (flottant strictement positif). Cette fonction renverra une valeur approchée à `epsilon` près d'un zéro de `f`, compris entre `a` et `b`, obtenue par la méthode de dichotomie.

`Python` def zero dichotomie(f :function, a :float, b :float, epsilon :float) :
val g = a # c'est un flottant
val d = b # c'est un flottant
while val d - val g > 2 * epsilon :
m = (val g + val d) / 2
if f(val g) * f(m) <= 0 :
val d = m
else :
val g = m
return ((val g + val d) / 2)

Effectuons un test avec la fonction $f: x \mapsto x^2-2$ sur l'intervalle $[1,2]$, avec une précision de 10^{-6} :

```
def f(x):\\
    return(x ** 2 - 2)\\
print (zero dichotomie(f, 1, 2, 10**(-6)))

\# il s'affichera : 1.4142141342163086
```

Une telle fonction est déjà prédéfinie dans la bibliothèque `scipy.optimize`, la fonction `bisect` (la méthode de dichotomie s'appelle aussi la méthode de la *bisection*) :

```
import scipy.optimize as spo\\[2mm]
print (spo.bisect(f, 1, 2)) \\
\# il s'affichera : 1.4142135623724243
```

La précision est un argument optionnel (à mettre après `f`, `a` et `b`) et vaut 10^{-12} par défaut.