1 Principe de la méthode de la méthode d'Euler

Soit y l'unique solution de

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec (t_0, y_0) fixé.

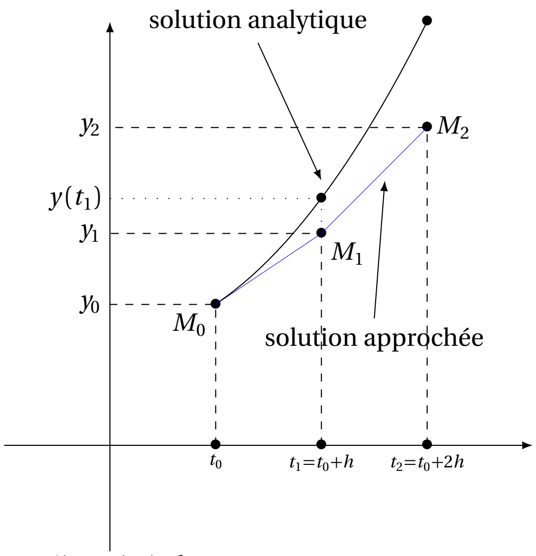
On souhaite obtenir une approximation de la fonction y sur l'intervalle $[a, b]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On découpe l'intervalle $[a, b]$ en n sous-segments de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$.
- On pose :

$$t_0 = a \quad t_1 = t_0 + h \quad t_2 = t_0 + 2h \quad \dots \quad t_k = t_0 + kh \quad t_n = t_0 + nh = b$$

  On part de t_0.
- On approche la portion de courbe entre t_0 et t_1 par la tangente à la courbe au point d'abscisse t_0.



Le point $M_1(t_1, y_1)$ appartient à la tangente à la courbe au point $M_0(t_0, y_0)$.

Alors, $y'(t_0) \approx \dfrac{y_1 - y_0}{h}$ D'où, $y_1 = y_0 + h\,y'(t_0)$.

Soit encore, $y_1 = y_0 + hF(t_0, y_0)$.

y_1 est une valeur approchée de la valeur exacte $y(t_1)$.

- De manière générale, on pose :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \qquad y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_k)$$

  Ce qui amène à construire successivement les points M_k de coordonnées (t_k, y_k). La ligne polygonale reliant ces points est alors une approximation de la courbe représentative de la solution.

2 Programmation de la méthode

1. Considérant l'équation différentielle d'ordre 1 $y'(t) = F(t, y(t))$, écrire en python une fonction `Euler(F, a, b, n)` d'arguments la fonction F, les bornes a et b de l'intervalle d'étude, la condition initiale $y0$ et le nombre d'étapes n. Cette fonction renverra une liste de temps et une liste de valeurs approchées par la méthode d'Euler.
2. Tracer la solution analytique et la solution approchée donnée par la méthode d'Euler pour l'équation différentielle :
$$y'(t) + t\,y(t) = 0$$
avec $y(0) = 1$. On prendra $a = 0$, $b = 1$, $n = 100$.

3 Application

Dans cet exercice, on souhaite étudier une fonction $t \mapsto y(t)$ sur un intervalle $[a, b]$. La fonction y est solution de l'équation différentielle
$$y'' = -\frac{1}{y^2}$$
avec les conditions initiales
$$y(a) = y0 \text{ et } y'(a) = yp0.$$

3. Mettre l'équation différentielle considérée sous forme d'un système de deux équations différentielles du premier ordre en introduisant une fonction auxilliaire $z(t) = y'(t)$.
4. Compte tenu du système d'équations différentielles, comment exprimer $z(t+h)$ et $y(t+h)$ en fonction de h, $y(t)$ et $z(t)$ (ou h est la pas de la subdivision) ?

On souhaite résoudre l'équation différentielle sur l'intervalle $[a, b]$ en utilisant N intervalles, soit $N+1$ points du segment $[a, b]$ (le premier vaut a, le dernier vaut b).

5. En supposant N, a et b préalablement définis dans le programme, écrire des lignes de code pour calculer le pas `h` ainsi que la liste `les_t` des $N+1$ instants équirépartis entre a et b.
6. Écrire une fonction `euler2(a,b,N,y0,yp0)` qui calcule et renvoie les listes `les_t`, `les_y` et `les_z` correspondant aux différents instants et aux valeurs approximées par la **méthode d'Euler** des fonctions y et z à ces différents instants.

On peut montrer (la justification n'est pas demandée ici) à l'aide de développements limités à l'ordre 2 que
$$y(t+h) - 2y(t) + y(t-h) = y''(t).h^2 + O(h^3).$$
Une méthode appelée **méthode de Verlet** consiste à négliger le terme en $O(h^3)$ et à écrire :
$$y(t+h) - 2y(t) + y(t-h) = y''(t).h^2.$$

7. Compte tenu de l'approximation de la méthode de Verlet et de l'équation différentielle, exprimer $y(t+h)$ en fonction de $y(t)$, $y(t-h)$ et h uniquement.
8. Pourquoi ne peut-on pas utiliser cette expression pour le calcul du premier point (c'est-à-dire pour le calcul de y en $t_1 = a+h$) ?
9. A l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 et en négligeant le terme en $O(h^3)$, exprimer $y(a+h)$ en fonction de h, $y0$, $yp0$ et $y''(a)$.
10. En tenant compte de l'équation différentielle, modifier l'expression précédente pour exprimer $y(a+h)$ en fonction de h, $y0$, $yp0$ uniquement.
11. Ecrire une fonction `verlet(a,b,N,y0,yp0)` qui calcule et renvoie les listes `les_t`, `les_y`, `les_z` par la méthode de Verlet.

Pour comparer les méthodes, on se propose de trouver une intégrale première du mouvement. Pour cela, on multiplie l'équation différentielle par y' et on prend une primitive.

12. Montrer que $E(t) = \frac{1}{2}y'(t)^2 - \frac{1}{y(t)}$ est une constante (indépendante de t).
13. Ecrire les lignes de code permettant de tracer la courbe $E(t)$ obtenue avec la méthode d'Euler et celle obtenue avec la méthode de Verlet sur le même graphique ($a = 0$, $b = 20$, $y0 = 10$, $yp0 = 0.03$ et on se limitera à une graduation des ordonnées comprise entre -0.1 et -0.0975)