

TP 04

Activités pratiques

Exercice 1 – Percolation

1 Présentation

Pour ce TP, on utilisera le fichier `Percolation_Sujet.py`

La percolation¹ désigne le passage d'un fluide à travers un solide poreux. Ce terme fait bien entendu référence au café produit par le passage de l'eau à travers une poudre de café comprimée, mais dans un sens plus large peut aussi bien s'appliquer à l'infiltration des eaux de pluie jusqu'aux nappes phréatiques ou encore à la propagation des feux de forêt par contact entre les feuillages des arbres voisins.

L'étude scientifique des modèles de percolation s'est développée à partir du milieu du XXe siècle et touche aujourd'hui de nombreuses disciplines, allant des mathématiques à l'économie en passant par la physique et la géologie.

2 Choix d'un modèle

Nous allons aborder certains phénomènes propres à la percolation par l'intermédiaire du modèle suivant : une grille carrée $n \times n$, chaque case pouvant être aléatoirement ouverte ou fermée. La question à laquelle nous allons essayer de répondre est la suivante : est-il possible de joindre le haut et le bas de la grille par une succession de cases ouvertes adjacentes?

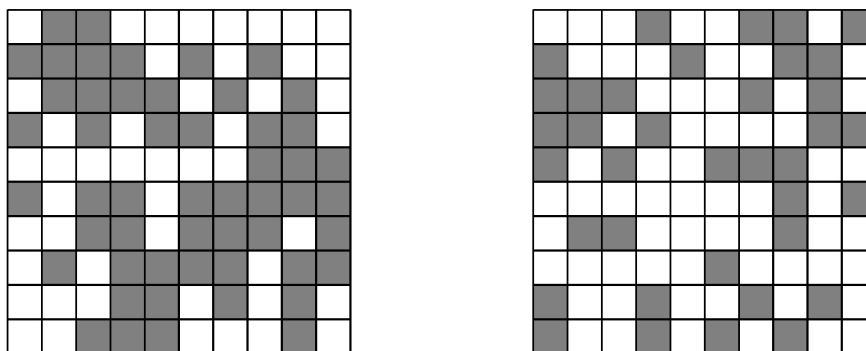


FIGURE 1 – Deux exemples de grilles 10×10 . La percolation n'est possible que dans le second cas (les cases ouvertes sont les cases blanches).

Création et visualisation de grilles

La grille de percolation sera représentée par le type `list`. Cette grille sera elle-même composée de n listes de n flottants (tableau $n \times n$). Une fois la grille `grille` créée, la case d'indice (i, j) est référencée par `grille[i][j]`.

Si la case `grille[i][j]` est vide on lui affectera la valeur 0 (case ouverte, le fluide peut passer). Si la case `grille[i][j]` empêche le fluide de passer, on lui affectera la valeur 1 (case fermée).

1. du latin *percolare* : couler à travers.

Question 1 Implémenter la fonction `creation_grille_vierge(n:int) -> list` permettant de créer un tableau de n lignes, n colonnes de 0. On utilisera pour cela deux boucles `for` imbriquées.

L'instruction `creation_grille_vierge(3)` renverra le résultat suivant `[[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]]`.

On dispose de la fonction `afficher_grille(grille : list) -> None` permettant d'afficher une grille.

Question 2 Donner les instructions permettant d'afficher une grille vierge de taille 3.

Question 3 Afficher la grille suivante `[[1, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 1]]`.

Question 4 Implémenter la fonction `creation_zebreh(n:int) -> list` permettant de créer une grille constituée de bandes horizontales noires puis blanches. `creation_zebreh(3)` renverra `[[1, 1, 1], [0, 0, 0], [1, 1, 1]]`. Valider votre résultat en utilisant la fonction `afficher_grille`.

Question 5 Implémenter la fonction `creation_zebrez(n:int) -> list` permettant de créer une grille constituée de bandes verticales noires puis blanches. `creation_zebrez(3)` renverra `[[1, 0, 1], [1, 0, 1], [1, 0, 1]]`. Valider votre résultat en utilisant la fonction `afficher_grille`.

Question 6 Implémenter la fonction `creation_damier(n:int) -> list` permettant de créer une grille en forme de damier. `creation_damier(3)` renverra `[[1, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 1]]`. Valider votre résultat en utilisant la fonction `afficher_grille`.

On va maintenant créer une grille pour simuler la percolation. Afin de remplir la grille, on dispose de la fonction `rand()` de la bibliothèque `random` permettant de renvoyer un nombre aléatoire compris dans l'intervalle $[0, 1]$.

On souhaite remplir une grille de taille n de la façon suivante :

- l'utilisateur choisit un nombre p compris entre 0 et 1 via un paramètre d'une fonction ;
- création d'une grille vide de taille n ;
- pour chaque élément de la grille :
 - on génère un nombre aléatoire nb compris dans l'intervalle $[0, 1]$;
 - si $nb > p$ alors l'élément est remplacé par la valeur 1.

Ainsi, si p vaut 1, la case aura 100 % de chance d'être ouverte. Si p vaut 0,25, la case aura 25 % de chance d'être ouverte.

Question 7 Définir une fonction de signature `def creation_grille(p: float, n: int) -> list` à deux paramètres : un nombre réel p (qu'on supposera dans l'intervalle $[0, 1]$) et un entier naturel n , qui renvoie un tableau (n, n) dans lequel chaque case sera ouverte (valeur 0) avec la probabilité p et fermée sinon (valeur 1).

3 Percolation

Une fois la grille créée, les cases ouvertes de la première ligne sont remplies par un fluide, ce qui sera représenté par la valeur 2 dans les cases correspondantes. Le fluide pourra ensuite être diffusé à chacune des cases ouvertes voisines d'une case contenant déjà le fluide jusqu'à remplir toutes les cases ouvertes possibles.

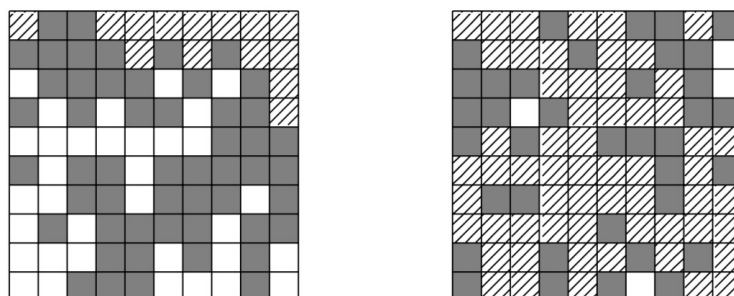


FIGURE 2 – les deux grilles de la figure 1, une fois le processus de percolation terminé (le fluide est représenté par des hachures).

3.1 Percolation « naïve »

Dans un premier temps, nous allons créer une fonction intermédiaire permettant de savoir si, pour une case de coordonnées $[i, j]$ de la grille, un de ses voisins est rempli (valeur 2) ou non.

Question 8 Écrire une fonction `a_un_voisin_rempli(grille:list, i:int, j:int) -> bool` retournant `True` si un des voisins est rempli, `False` si aucun des voisins n'est rempli.

Question 9 Écrire une fonction `percolation(grille : list) -> None` qui prend en argument une grille et qui remplit de fluide celle-ci, en appliquant l'algorithme exposé ci-dessous :

- pour la première ligne, si la case est ouverte on la remplit (passage de la valeur 0 à la valeur 2);
- pour les cases des lignes suivantes : si la case est ouverte et qu'un voisin est rempli, alors on remplit cette case.

Question 10 En affichant la grille avant et après percolation avec différentes valeurs de p , visualiser que l'algorithme ne répond pas complètement à la problématique. Modifier la fonction précédente en conséquence.

3.2 Percolation un peu plus évoluée – Facultatif

Question 11 Écrire une fonction `percolation(grille : list) -> None` qui prend en argument une grille et qui remplit de fluide celle-ci, en appliquant l'algorithme exposé ci-dessous :

1. Créer une liste contenant initialement les coordonnées des cases ouvertes de la première ligne de la grille et remplir ces cases de liquide.
2. Puis, tant que cette liste n'est pas vide, effectuer les opérations suivantes :
 - (a) extraire de cette liste les coordonnées d'une case quelconque;
 - (b) ajouter à la liste les coordonnées des cases voisines qui sont encore vides, et les remplir de liquide.

L'algorithme se termine quand la liste est vide.

3.3 Validation de la percolation

Question 12 Rédiger un script vous permettant de visualiser une grille avant et après remplissage, et faire l'expérience avec quelques valeurs de p pour une grille de taille raisonnable (commencer avec $n = 10$ pour vérifier visuellement que votre algorithme est correct, puis augmenter la taille de la grille, par exemple avec $n = 64$). On pourra l'exporter et l'enregistrer sous le nom `tp_n_q03_vos_noms.png`.

On dit que la percolation est réussie lorsqu'à la fin du processus au moins une des cases de la dernière ligne est remplie du fluide.

Question 13 Écrire une fonction `teste_percolation(p : float, n : int) -> bool` qui prend en argument un réel $p \in [0, 1]$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$, crée une grille, effectue la percolation et renvoie :

- `True` lorsque la percolation est réussie, c'est-à-dire lorsque le bas de la grille est atteint par le fluide;
- `False` dans le cas contraire.

4 Seuil critique

Nous allons désormais travailler avec des grilles de taille 128×128^2

Faire quelques essais de percolation avec différentes valeurs de p . Vous observerez assez vite qu'il semble exister un seuil p_0 en deçà duquel la percolation échoue presque à chaque fois, et au delà duquel celle-ci réussit presque à chaque fois. Plus précisément, il est possible de montrer que pour une grille de taille infinie, il existe un seuil critique p_0 en deçà duquel la percolation échoue toujours, et au delà duquel la percolation réussit toujours. Bien évidemment, plus la grille est grande, plus le comportement de la percolation tend à se rapprocher du cas de la grille théorique infinie.

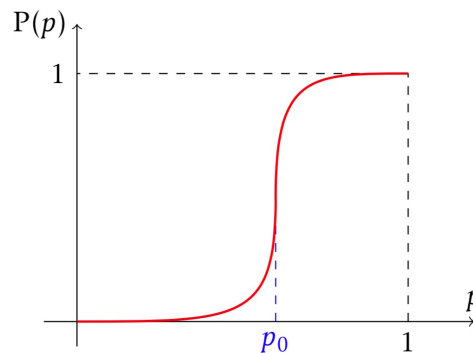


FIGURE 3 – L'allure théorique du graphe de la fonction $P(p)$.

Notons $P(p)$ la probabilité pour le fluide de traverser la grille. Pour déterminer une valeur approchée de la probabilité de traverser la grille, on se contente d'effectuer k essais pour une valeur de p puis de renvoyer le nombre moyen de fois où le test de percolation est vérifié.

Question 14 Rédiger la fonction `proba(p : float, k : int, n : int) -> float` qui prend en argument le nombre d'essai k , la variable p ainsi que le nombre de cases n sur la largeur de la grille et qui renvoie $P(p)$.

La fonction suivante prend en argument une taille n et affiche le graphe obtenu. On pourra traiter le cas d'une grille de 128×128 cases.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#Q06
def tracer_proba(n):
    x=np.linspace(0,1,21)
    y=[]
    for p in x:
        y.append(proba(p,20,n))
    plt.clf()
    plt.plot(x,y)
    plt.show()
    return None
```

2. Baisser cette valeur si le temps de calcul sur votre ordinateur est trop long.