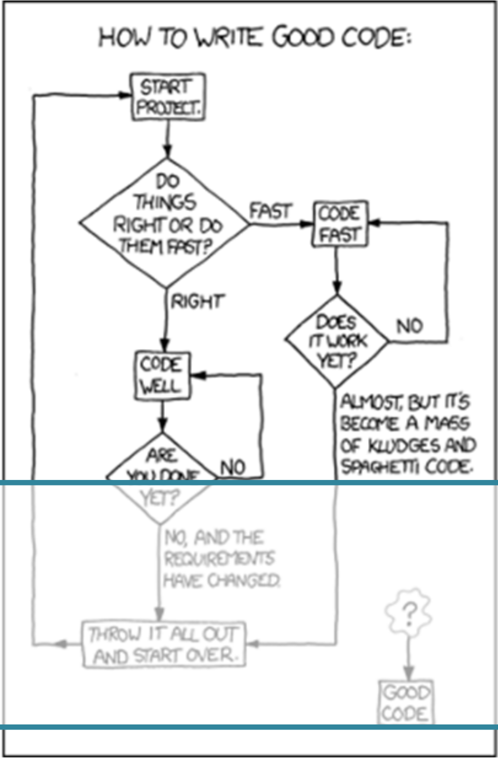
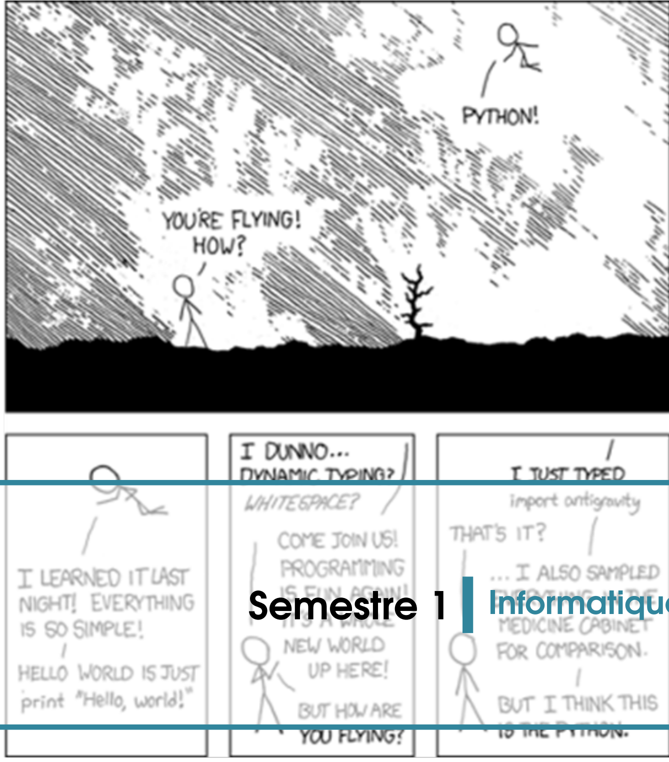
MPSI





http://xkcd.com/353/
http://xkcd.com/844/

Semestre 1 | Informatique

Thèmes d'étude

J.-P. Berne – E. Durif – X. Pessoles
MPSI

1 Intégration numérique

Exercice 1 – (INT-001)

Question 1
Tracer les nuages de points correspondant, pour tout $0 \leq p < 1000$ aux calculs de $\int_0^1 t^p \mathrm{d}t$ par les méthodes suivantes : rectangles à gauche, rectangles à droite, trapèzes, fonction `quad` de `scipy` et la valeur exacte. On utilisera 1000 rectangles ou trapèzes à chaque fois.

Question 2
Produire un second graphique en faisant apparaître les erreurs d'approximations des quatre premières méthodes en utilisant une échelle appropriée.

Question 3
Tracer les nuages de points correspondant, pour tout $1 \leq n < 1000$ aux calculs de $\int_0^1 t^2 \mathrm{d}t$ par les méthodes suivantes : rectangles à gauche, rectangles à droite, trapèzes et la valeur exacte, en utilisant n rectangles ou trapèzes.

Question 4
Produire un second graphique en faisant apparaître les erreurs d'approximations des quatre premières méthodes en utilisant une échelle appropriée.

Exercice 2 – (INT-002)

Le but est d'obtenir un encadrement de $I = 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

Question 1
Compléter cet algorithme et le coder en python afin d'obtenir une valeur approchée de I par la méthode des rectangles à gauche en utilisant les champs suivants : $\boxed{\text{x+h}}$ $\boxed{\text{(b-a)/n}}$ $\boxed{\text{h}}$ $\boxed{\text{somme+f(x)}}$ $\boxed{\text{f(a)}}$.

Question 2
A partir de la question précédente, écrire une fonction que l'on appellera `rect_gauche`, qui prendra en argument une fonction `f`, les variables `a` et `b` définissant le domaine d'intégration et le paramètre `n` définissant le nombre de subdivisions. Cette fonction renverra la valeur approché de `I`.

```
a=0
b=1
n=100
h=
x=a
somme=
for k in range(1,n) :
    x=
    somme=
print(somme*
```

Question 3
Modifier cet algorithme pour que la méthode soit celle des rectangles à droite. On appellera la fonction associée `rect_droit`, elle prendra les mêmes arguments et en renverra la valeur approché de `I`.

Question 4
Définir la fonction `f(x)` permettant d'utiliser les deux fonctions précédentes avec la fonction à intégrer.

Question 5
Tester ces fonctions en augmentant le nombre de subdivisions. et en traçant les résultats obtenus sur l'estimation de I pour différentes valeurs de n. Vous sauvegarderez le graphe obtenu sous le nom **"tp10_q05_vos_noms.png"** et vous l'enverrez à votre professeur (On veillera à choisir des valeurs de n et une échelle de représentation graphique pertinentes).

Question 6
Justifier que la méthode des rectangles à droite donne un minorant de I et que la méthode des rectangles à gauche donne un majorant.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n}\mathrm{d}x$$

Question 7
Écrire une fonction que l'on appellera `calcul_in` d'argument n qui renvoie une valeur approchée de I_n par une la méthodes des rectangles à gauche (avec une subdivision de 100 intervalles).

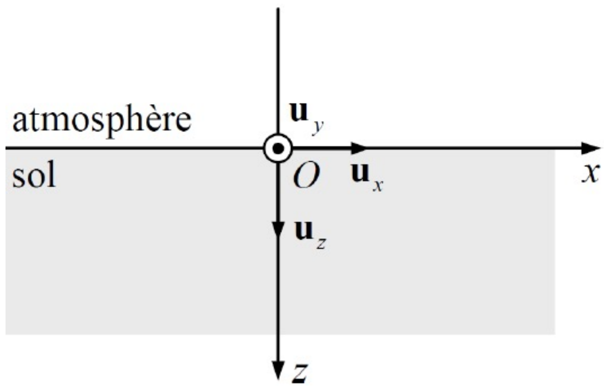
Question 8
A l'aide d'un graphe choisi judicieusement (que vous sauvegarderez sous le nom **"tp10_q08_vos_noms.png"** et vous l'enverrez à votre professeur), afficher quelques valeurs de cette suite afin de conjecturer sa monotonie et son comportement asymptotique.

Exercice 3 – (INT-003)

La température dans le sol terrestre étant initialement constante, égale à 5°C , on cherche à déterminer à quelle profondeur minimale il est nécessaire d'enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque chute de la température de sa surface à -15°C n'entraine pas le gel de cette canalisation après 10 jours.

Les hypothèses sont les suivantes :

- la température en un point quelconque du sol et de sa surface à tout instant $t < 0$ est constante et égale à $T_0 = 278\ K$ ($\theta_0 = 5^oC$);
- la température à la surface du sol, confondue avec le plan d'équation $z = 0$, passe brutalement à l'instant $t = 0$, de $T_0 = 278\ K$ à $T_1 = 258\ K$ ($\theta_1 = -15^oC$) et se maintient à cette valeur pendant t_f =10 jours.



On peut montrer que la température $T(z,t)$ à la profondeur z et à l'instant t est donnée par la relation suivante :

$$T(z,t) = T_1 + (T_0 - T_1)\mathrm{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

où erf(x) désigne la fonction définie par :

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

Données numériques : $D=2,8\cdot 10^{-7}\ m^2\cdot s^{-1}$ (diffusivité thermique du sol terrestre).

Question 1

Écrire une fonction Python, appelée trapeze, prenant en argument une fonction `f`, les variables `a` et `b` définissant le domaine d'intégration et le paramètre `n` définissant le nombre de subdivisions.

Question 2

Écrire une fonction Python, appelée erf, prenant en paramètre un nombre réel positif ou nul x, un entier nb correspondant au nombre de subdivisions de la méthode d'intégration et retournant la valeur de erf(x).

Question 3

Écrire une fonction Python, appelée Temperature, prenant en paramètre la profondeur z (exprimée en m) et le temps t (exprimé en s) et retournant la valeur de la température $T(z,t)$ (On pourra utiliser 500 subdivisions pour les calculs d'intégration).

Question 4

Écrire un programme Python permettant de créer une liste, nommée ListeErreur, contenant les valeurs de la fonction erf(x) pour x variant par pas de 0,05 dans l'intervalle $[0;2]$ (On pourra utiliser 500 subdivisions pour les calculs d'intégration).

Question 5

En déduire, à 1 cm près, à quelle profondeur minimale z_{min} il est nécessaire d'enterrer une canalisation d'eau pour qu'une brusque chute de la température de la surface du sol de 5°C à -15 °C n'entraine pas le gel de cette canalisation au bout de 10 jours.

Exercice 4 – (INT-004)

On démontre que la longueur L de la courbe $y=x^2$ pour $x\in[0;\alpha]$ dans un repère orthonormal est donnée par : $L=\int_0^\alpha\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$.

Question 1

Calculer L à 10^{-3} près par la méthode des rectangles à gauche.

Question 2

Calculer L à 10^{-3} près par la méthode des rectangles à droite.

Question 3

Calculer L à 10^{-3} près par la méthode des trapèzes.

Exercice 5 – (INT-periodependule)

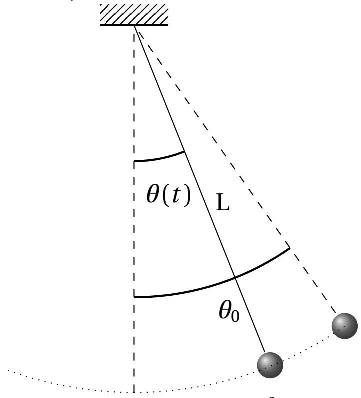
On considère un pendule de masse $m=1+0,01\cdot\alpha$, de longueur $L=\alpha$ que l'on abandonne, sans vitesse initiale, à un angle de $\theta_0=\dfrac{\pi}{4\cdot\alpha}$ avec $g=9,81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

En appliquant la conservation de l'énergie, on trouve l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}(t)^2+m\,g\,l\,(1-\cos\theta(t))=m\,g\,L(1-\cos\theta_0)$$

On en déduit : $\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\dfrac{2g}{L}(\cos\theta(t)-\cos\theta_0)}$.

Ce qui donne : $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\sqrt{\dfrac{2g}{L}(\cos\theta(t)-\cos\theta_0)}}$.



La période est donc : $T=\displaystyle\int_0^T \mathrm{d}t=4\times\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\sqrt{\dfrac{2g}{L}(\cos\theta(t)-\cos\theta_0)}}$

On rappelle que la période avec l'approximation des petites oscillations est donnée par : $T_0=\sqrt{\dfrac{L}{g}}\times 2\pi$.

R $T=\displaystyle\int_0^{\theta_0}f(\theta)\mathrm{d}\theta$ est une intégrale généralisée car $f(\theta)$ tend vers l'infini. Donc certaines méthodes numériques d'intégration donnent des résultats infinis.

Pour les méthodes posant problèmes, il faut alors remplacer la borne supérieur θ_0 par $\theta_0(1-\varepsilon)$ avec $\varepsilon=10^{-3}$.

Question 1

Calculer T_0.

Pour les méthodes d'intégration numérique, on renverra les résultats avec 100 subdivisions.

Question 2

Calculer T (noté T_g) par la méthode des rectangles à gauche.

Question 3

Calculer T (noté T_d) par la méthode des rectangles à droite.

Question 4

Calculer T (noté T_t) par la méthode des trapèzes.

On note $\varepsilon_g=|T_g-T_0|$, $\varepsilon_d=|T_d-T_0|$, $\varepsilon_t=|T_t-T_0|$, les erreurs entre les différentes approximation et l'estimation de T_0.

Question 5

Renvoyer ε_g, ε_d, ε_t.

Modéliser