MPSI

Cours

Ch. 6
Introduction aux graphes

E. Durif – X. Pessoles
J.-P. Berne
MPSI

1 Introduction aux graphes

1.1 Vocabulaire des graphes

Définition Graphe Un graphe est un ensemble de **sommets** et **relations** entre ces sommets.
Lorsque deux sommets sont en relation, on dit qu'il existe une **arête** entre ces sommets.

Définition Graphe non orienté – Arêtes Un graphe non orienté G est un couple $G=(S,A)$, où S est un ensemble fini de sommets (appelés aussi nœuds) et où A est un ensemble fini de paires ordonnées de sommets, appelées arêtes.
On note $x-y$ l'arête $\{x,y\}$. x et y sont les deux extrémités de l'arête.

Définition Graphe orienté – Arcs [**ref_01**] Un graphe orienté G est un couple $G=(S,A)$, où S est un ensemble fini de sommets et où A est un ensemble fini de paires ordonnées de sommets, appelées arcs.
On note $x \longrightarrow y$ l'arc (x,y). x est l'extrémité initiale de l'arc, y est son extrémité terminale. On dit que y est successeur de x et que x est prédécesseur de y.

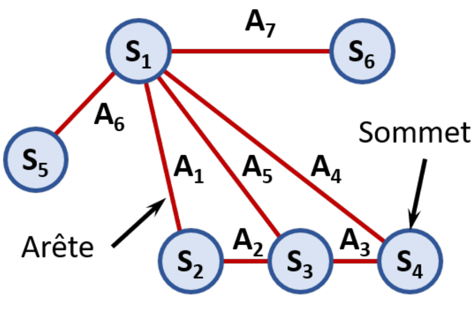


FIGURE 1 – Graphe non orienté

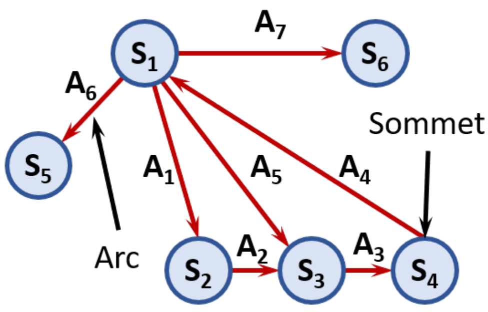


FIGURE 2 – Graphe orienté

R On peut noter le graphe non orienté $G=(\llbracket 1,6\rrbracket,E)$ où $E=(\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},\{1,3\},\{1,5\},\{1,6\})$ désigne les arêtes.
On peut noter le graphe orienté $G=(\llbracket 1,6\rrbracket,E)$ où $E=((1,2),(2,3),(3,4),(1,4),(1,3),(1,5),(1,6))$ désigne les arcs.

Définition Adjacence Deux arcs (resp. arêtes) d'un graphe orienté (resp. non orienté) sont dits adjacents s'ils ont au moins une extrémité commune.
Deux sommets d'un graphe non orienté sont dits adjacents s'il existe une arête les joignant.
Dans un graphe orienté, le sommet y est dit adjacent au sommet x s'il existe un arc $x \longrightarrow y$.

Définition Sommet (ou nœuds)

Définition Arc, arête

Définition Chemin d'un sommet à un autre

Définition Cycle

Définition Connexité dans les graphes non orientés

1.2 Notations

Définition Degré d'un sommet On appelle degré d'un sommet s et on note $d(s)$ le nombres d'arcs (ou d'arêtes) dont s est une extrémité.

Définition Degré entrant et sortant On note s le sommet d'un graphe orienté. On note :

- $d_+(s)$ le demi-degré extérieur de s, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant leur extrémité initiale en s (ces arcs sont dits incidents à s vers l'extérieur) ;
- $d_-(s)$ le demi-degré intérieur de s, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant leur extrémité finale en s (ces arcs sont dits incidents à s vers l'intérieur).

Dans ce cas, on a $d°(s)=d_-(s)+d_+(s)$.

■ **Exemple**

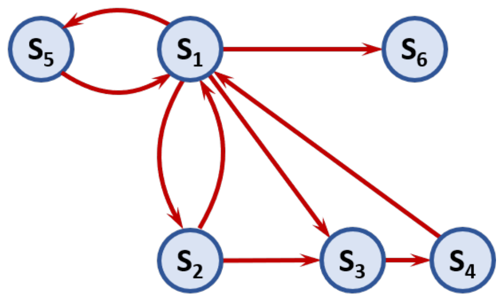


FIGURE 3 – Graphe orienté

- $d_-(S_1)=3$.
- $d_+(S_1)=4$.
- $d^\circ(S_1)=7$.

■

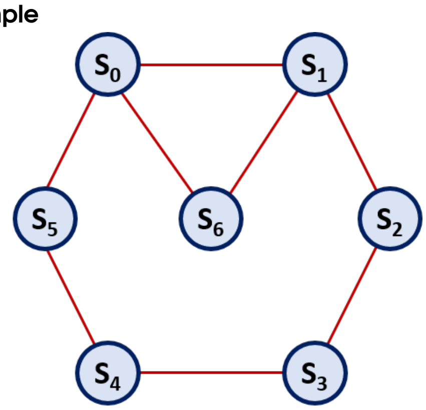
1.3 Implémentation des graphes

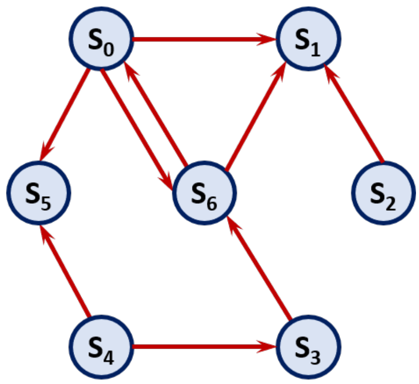
1.3.1 Liste d'adjacence

Définition Liste d'adjacence Soit un graphe de n sommets d'indices $i \in [\![0, n-1]\!]$. Pour implémenter le graphe, on utilise une liste `G` de taille n pour laquelle, `G[i]` est la liste des voisins de `i`.

R Cette implémentation est plutôt réservée au graphes « creux », c'est-à-dire ayant peu d'arêtes.

■ **Exemple**





Dans ce cas S_0 est voisin de S_1, S_5 et S_6 ; donc `G[0]=[1,5,6]`. S_3 est voisin de S_2 et S_4 ; donc `G[3]=[2,4]`.

```
G = [[1,5,6],[0,2,6],[1,3],[2,4],[3,5],
     [4,0],[1,0]]
```

Dans ca cas, le graphe est orienté. La liste d'adjacence contient la liste des successeurs. Ainsi, les successeurs de S_0 sont S_1, S_5 et S_6 ; donc `G[0]=[1,5,6]`. S_1 n'a pas de successeur donc `G[1]=[]`.

```
G = [[1,5,6],[],[1],[6],[3,5],[],[0,1]]
```

Dans la même idée, il est aussi possible d'utiliser des dictionnaires d'adjacence dans lequel les clés sont les sommets, et les valeurs sont des listes de voisins ou de sucesseurs.

```
# Graphe non orienté
G = {"S0":["S1","S5","S6"],"S1":["S0","S2","S6"],"S2":["S1","S3"],"S3":["S2","S4"],"S4":["S3"
    ,"S5"],"S5":["S4","S0"],"S6":["S1","S0"]}
# Graphe orienté
G = {"S0":["S1","S5","S6"],"S1":[],"S2":["S1"],"S3":["S6"],"S4":["S3","S5"],"S5":[],"S6":["S1
    ","S0"]}
```

■

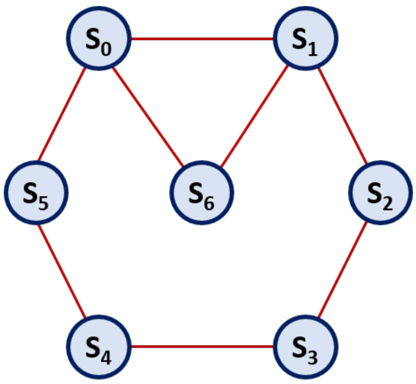
1.3.2 Matrice d'adjacence

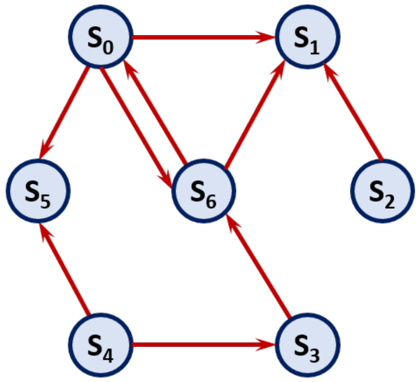
Définition Matrice d'adjacence Soit un graphe de n sommets d'indices $i \in [\![0, n-1]\!]$ et E l'ensemble des arêtes (on notera $G = ([\![0, n-1]\!], E)$. Pour implémenter le graphe, on utilise la matrice d'adjacence carrée de taille n, $\mathcal{M}_n$ `G` de taille n pour laquelle, $m_{i,j} = \begin{cases} \texttt{True} & \text{si } \{i,j\} \in E \\ \texttt{False} & \text{sinon} \end{cases}$ avec $i, j \in [\![0, n-1]\!]$.

S2

R Cette implémentation est plutôt réservée au graphes « denses » ayant « beaucoup » d'arêtes.

■ **Exemple**





On a dans ce cas

$$M = \begin{pmatrix} \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{True} \\ \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} \\ \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} \\ \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} \\ \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} \\ \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} \\ \texttt{True} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} \end{pmatrix}$$

ou

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ca cas, le graphe est orienté. On a On a dans ce cas

$$M = \begin{pmatrix} \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} \\ \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} \\ \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} \\ \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} \\ \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{True} & \texttt{False} \\ \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} \\ \texttt{True} & \texttt{True} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} & \texttt{False} \end{pmatrix}$$

ou $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ■

R

- Dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice est symétrique.
- Si on avait un bouclage sur un sommet, il y aurait des valeurs non nulles sur la diagonale.

2 Parcours d'un graphe

2.1 Piles et files

2.2 Parcours générique d'un graphe

2.3 Parcours en largeur

2.4 Parcours en profondeur

2.5 Détection de la présence des cycles

2.6 Connexité d'un graphe non orienté

3 Pondération d'un graphe

4 Recheche du plus court chemin

4.1 Algorithme de Dijkstra

4.2 Algorithme A⋆

Définition

Définition

Définition

Définition

Définition