TP 10

Méthode numérique de résolution d'équation différentielle

Savoirs et compétences :

- ❒ *SN.C2 : Étudier l'effet d'une variation des paramètres sur le temps de calcul, sur la précision des résultats, sur la forme des solutions pour des programmes d'ingénierie numérique choisis, tout en contextualisant l'observation du temps de calcul par rapport à la complexité algorithmique de ces programmes*
- ❒ *SN.S3 : Problème dynamique à une dimension, linéaire ou non. Méthode d'Euler.*

Consignes

Attention : suivez précisément ces instructions.

Votre fichier portera un nom du type

`tp10_durif_berne.py`,

où les noms de vos enseignants sont à remplacer par ceux des membres du binôme. Le nom de ce fichier ne devra comporter ni espace, ni accent, ni apostrophe, ni majuscule. Dans ce fichier, vous respecterez les consignes suivantes.

- Écrivez d'abord en commentaires (ligne débutant par #), le titre du TP, les noms et prénoms des étudiants du groupe.
- Commencez chaque question par son numéro écrit en commentaires.
- Les questions demandant une réponse écrite seront rédigées en commentaires.
- Les questions demandant une réponse sous forme de fonction ou de script respecteront pointilleusement les noms de variables et de fonctions demandés.

Les éventuelles figures seront sauvegardées sous le nom `tp10_Qnum_nom1_nom2.png`, où Qnum est le numéro de la question, et nom1, nom2 les noms des membres du binôme.

Activité 1 – Introduction à la méthode d'Euler

Principe de la méthode de la méthode d'Euler

Soit y l'unique solution de

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec (t_0, y_0) fixé.

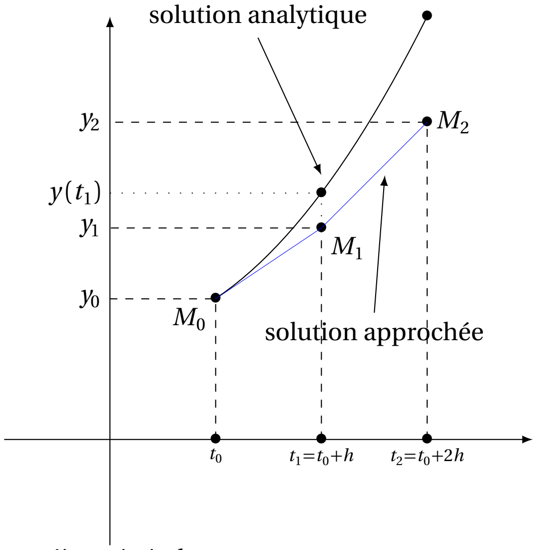
On souhaite obtenir une approximation de la fonction y sur l'intervalle $[a, b]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On découpe l'intervalle $[a, b]$ en n sous-segments de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$.
- On pose :

  $$t_0 = a \quad t_1 = t_0 + h \quad t_2 = t_0 + 2h \quad \dots \quad t_k = t_0 + kh \quad t_n = t_0 + nh = b$$

  On part de t_0.
- On approche la portion de courbe entre t_0 et t_1 par la tangente à la courbe au point d'abscisse t_0.



Le point $M_1(t_1, y_1)$ appartient à la tangente à la courbe au point $M_0(t_0, y_0)$.
Alors, $y'(t_0) \approx \dfrac{y_1 - y_0}{h}$ D'où, $y_1 = y_0 + h\,y'(t_0)$.
Soit encore, $y_1 = y_0 + hF(t_0, y_0)$.
y_1 est une valeur approchée de la valeur exacte $y(t_1)$.

- De manière générale, on pose :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \qquad y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_k)$$

Ce qui amène à construire successivement les points M_k de coordonnées (t_k, y_k). La ligne polygonale reliant ces points est alors une approximation de la courbe représentative de la solution.

Programmation de la méthode

Question 1 *Considérant l'équation différentielle d'ordre 1 $y'(t) = F(t, y(t))$, écrire en python une fonction* `Euler(F, a, b, n)` *d'arguments la fonction F, les bornes a et b de l'intervalle d'étude, la condition initiale $y0$ et le nombre d'étapes n. Cette fonction renverra une liste de temps et une liste de valeurs approchées par la méthode d'Euler.*

Question 2 *Tracer la solution analytique et la solution approchée donnée par la méthode d'Euler pour l'équation différentielle :*

$$y'(t) + t\,y(t) = 0$$

avec $y(0) = 1$. On prendra $a = 0$, $b = 1$, $n = 100$.

Activité 2 – Appliaction avec la méthode de Verlet

Dans cet exercice, on souhaite étudier une fonction $t \mapsto y(t)$ sur un intervalle $[a, b]$. La fonction y est solution de l'équation différentielle

$$y'' = -\frac{1}{y^2}$$

avec les conditions initiales

$$y(a) = y0 \text{ et } y'(a) = yp0.$$

Question 3 *Mettre l'équation différentielle considérée sous forme d'un système de deux équations différentielles du premier ordre en introduisant une fonction auxilliaire $z(t) = y'(t)$.*

Question 4 *Compte tenu du système d'équations différentielles, comment exprimer $z(t+h)$ et $y(t+h)$ en fonction de h, $y(t)$ et $z(t)$ (ou h est la pas de la subdivision) ?*

On souhaite résoudre l'équation différentielle sur l'intervalle $[a, b]$ en utilisant N intervalles, soit $N+1$ points du segment $[a, b]$ (le premier vaut a, le dernier vaut b).

Question 5 *En supposant N, a et b préalablement définis dans le programme, écrire des lignes de code pour calculer le pas* `h` *ainsi que la liste* `les_t` *des $N+1$ instants équirépartis entre a et b.*

Question 6 *Écrire une fonction* `euler2(a,b,N,y0,yp0)` *qui calcule et renvoie les listes* `les_t`, `les_y` *et* `les_z` *correspondant aux différents instants et aux valeurs approximées par la **méthode d'Euler** des fonctions y et z à* *ces différents instants.*

On peut montrer (la justification n'est pas demandée ici) à l'aide de développements limités à l'ordre 2 que

$$y(t+h)-2y(t)+y(t-h)=y''(t).h^2+O(h^3).$$

Une méthode appelée **méthode de Verlet** consiste à négliger le terme en $O(h^3)$ et à écrire :

$$y(t+h)-2y(t)+y(t-h)=y''(t).h^2.$$

Question 7 *Compte tenu de l'approximation de la méthode de Verlet et de l'équation différentielle, exprimer $y(t+h)$ en fonction de $y(t)$, $y(t-h)$ et h uniquement.*

Question 8 *Pourquoi ne peut-on pas utiliser cette expression pour le calcul du premier point (c'est-à-dire pour le calcul de y en $t_1=a+h$) ?*

Question 9 *A l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 et en négligeant le terme en $O(h^3)$, exprimer $y(a+h)$ en fonction de h, $y0$, $yp0$ et $y''(a)$.*

Question 10 *En tenant compte de l'équation différentielle, modifier l'expression précédente pour exprimer $y(a+h)$ en fonction de h, $y0$, $yp0$ uniquement.*

Question 11 *Ecrire une fonction* `verlet(a,b,N,y0,yp0)` *qui calcule et renvoie les listes* `les_t`, `les_y`, `les_z` *par la méthode de Verlet.*

Pour comparer les méthodes, on se propose de trouver une intégrale première du mouvement. Pour cela, on multiplie l'équation différentielle par y' et on prend une primitive.

Question 12 *Montrer que $E(t)=\frac{1}{2}y'(t)^2-\frac{1}{y(t)}$ est une constante (indépendante de t).*

Question 13 *Ecrire les lignes de code permettant de tracer la courbe $E(t)$ obtenue avec la méthode d'Euler et celle obtenue avec la méthode de Verlet sur le même graphique ($a=0$, $b=20$, $y0=10$, $yp0=0.03$ et on se limitera à une graduation des ordonnées comprise entre -0.1 et -0.0975)*