# TD 3

## Exercices d'application

*D'après IPT, Éditions Vuibert.*

***Savoirs et compétences :***

❒ *Alg – C15 : Récursivité : avantages et inconvénients.*

## Exercice 1

Soit l'algorithme suivant :

■ Python
```
def mult(n, p):
    if p == 0:
        return 0
    else :
        return n+mult(n,p-1)
```

**Question 1** *Énoncer un variant de boucle et montrer la terminaison de l'algorithme.*

**Question 2** *Énoncer un invariant de boucle et montrer la correction de l'algorithme.*

**Correction**
- Soit $\mathscr{P}$ la propriété d'invariance : à l'itération $p$, on a $mult(n,p) = n \cdot p$.
- À l'instant 0, on a : d'une part : $\forall n,\ n \cdot 0 = 0$. D'autre part, `mult(n,0)` renvoie 0. La propriété de récurrence est vraie.
- À l'instant $p$, on considère la propriété de récurrence est vraie à l'instant $p$ : $mult(n,p) = n \cdot p$.
- À l'instant $p+1$, on applique l'algorithme : $p$ étant différent de 0, l'algorithme retourne $mult(n,p+1) = n + mult(n,p)$. D'après la propriété de récurrence, on a donc $mult(n,p+1) = n + n \cdot p = n(p+1)$. La propriété est donc vraie au rang $p+1$.
- L'algorithme calcule donc le produit $np$.

**Question 3** *Donner et justifier la complexité temporelle de la fonction* `mult`.

**Correction** On note $C(p)$ le nombre d'appels récursifs : $C(p) = 1 + C(p-1) = 1 + 1 + C(p-2) = p + T(0)$. On a donc $C(p) = \mathcal{O}(p)$. La complexité temporelle est linéaire.

**Question 4** *Donner et justifier la complexité spatiale de la fonction* `mult`.

**Correction** On stocke une valeur à chaque appel récursif. Si ce stockage est à coût constant, étant donné qu'il y a $n$ appels récursifs, la complexité spatiale est en $\mathcal{O}(n)$.

## Exercice 2

Soit l'algorithme suivant :

■ **Python**
```
def puiss(x, n):
    if n == 0:
        return 1
    else :
        return x*puiss(x,n-1)
```

**Question 1** *Énoncer un variant de boucle et montrer la terminaison de l'algorithme.*

**Question 2** *Énoncer un invariant de boucle et montrer la correction de l'algorithme.*

**Correction**
- Soit $\mathscr{P}$ la propriété d'invariance : à l'itération $p$, on a $puiss(x,n) = x^n$.
- À l'instant 0, on a : d'une part : $\forall x > 0$, $x^0 = 1$. D'autre part, `puiss(x,0)` renvoie 1. La propriété de récurrence est vraie.
- À l'instant $n$, on considère la propriété de récurrence est vraie et à l'instant $p$ : $puiss(x,n) = x^n$.
- À l'instant $n+1$, on applique l'algorithme : $n$ étant différent de 0, l'algorithme retourne $puiss(x,n+1) = x * mult(x,n)$. D'après la propriété de récurrence, on a donc $puiss(x,n+1) = x * x^n = x^{n+1}$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- L'algorithme calcule donc le produit $x^n$.

**Question 3** *Donner et justifier la complexité temporelle de la fonction* `puiss`.

**Correction** On note $C(p)$ le nombre d'appels récursifs : $C(p) = 1 + C(p-1) = 1 + 1 + C(p-2) = p + T(0)$. On a donc $C(p) = \mathscr{O}(p)$. La complexité temporelle est linéaire.

**Question 4** *Donner et justifier la complexité spatiale de la fonction* `puiss`.

**Correction** On stocke une valeur à chaque appel récursif. Si ce stockage est à coût constant, étant donné qu'il y a $n$ appels récursifs, la complexité spatiale est en $\mathscr{O}(n)$.

## Exercice 3

Soit l'algorithme suivant :

■ **Python**
```
def rechecheDichoRec(x, l):
    n=len(l)
    if n == 0:
        return False
    elif x<l[n//2] :
        return rechecheDichoRec(x, l[0:n//2])
    elif :
        return rechecheDichoRec(x, l[n//2:n])
    else :
        return True
```

**Question 1** *Donner et justifier la complexité temporelle de la fonction* `rechecheDichoRec`.

**Correction** Définissons le coût temporel comme le nombre d'appel récursif. Dans le pire des cas, l'élément n'est pas dans la liste. On cherche $p$ le nombre de fois que $n$ est divisible par 2. On cherche donc $p$ tel que $n\left(\frac{1}{2}\right)^p > 1 \Leftrightarrow p\ln\left(\frac{1}{2}\right) > \ln\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow p > \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\ln(n)}{-\ln(2)} = \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$. La complexité est logarithmique.

**Question 2** *Donner et justifier la complexité spatiale de la fonction* `rechecheDichoRec`.

**Correction** On stocke une liste à chaque appel récursif. On note $n$ le coût de stockage d'une liste de taille $n$.

Soit une liste `l` de taille $n=2^k$ avec $k\in\mathbb{N}$. À chaque itération, on stocke une liste de taille $n/2$. On a donc $C(n)=n+\dfrac{n}{2}+\dfrac{n}{4}+...+1$.

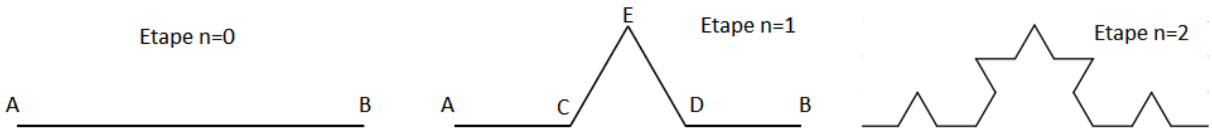
Par conséquent, $C(n)=2^k+\dfrac{2^k}{2}+\dfrac{2^k}{4}+...+1=2^k+2^{k-1}+2^{k-2}+...+1$. S'agissant de la somme des termes d'une suite géométrique : $C(n)=1+2^1+...+2^k=\dfrac{1-2^{k+1}}{1-2}=2n+1$. La complexité spatiale est donc linéaire.

## Exercice 4 – Flocon de Von Koch

Dans cet exercice, vous utiliserez des tableaux **numpy** pour représenter les points. C'est plus pratique que les listes python pour faire les calculs vectoriels.

- Si $a$ et $b$ représentent respectivement les points $(x,y)$ et $(x',y')$ alors $a+b$ représente le point $(x+x',y+y')$.
- Si $r$ est un réel et $a$ représente le point de coordonnées $(x,y)$ alors $r*a$ représente le point $(rx,ry)$.
- Si $a$ et $b$ sont des tableaux **numpy** alors $dot(a,b)$ représente le produit matriciel $a\times b$ (si ce produit est possible). La fonction **dot** est une fonction **numpy**.

Le mathématicien suédois Von Koch a défini la courbe du même nom dont voici les premières itérations.

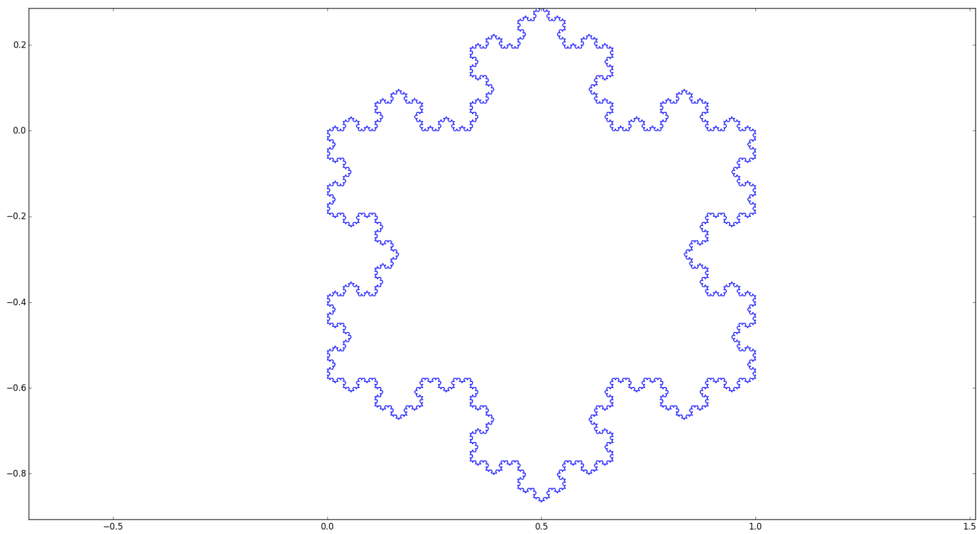



**Question 1** *Ecrire une fonction* `rotation` *d'argument un réel* `alpha` *qui renvoie le tableau* ***numpy*** *correspondant à la matrice de rotation d'angle* `alpha`.

**Question 2** *Pour l'étape $n=1$, exprimer les points $C$ et $D$ en fonction de $A$ et $B$*. En utilisant une matrice de rotation, exprimer $E$ en fonction de $C$ et $D$.

**Question 3** *En déduire une fonction récursive* `koch` *d'arguments les points* `A` *et* `B` *et un entier* `n`*. Cette fonction tracera la courbe de Von Koch pour l'itération $n$ à partir des points $A$ et $B$.*

**Question 4** *Ecrire une fonction* `flocon` *d'arguments les points $A$ et $B$ et un entier $n$. Cette fonction tracera le flocon de Von Koch pour l'itération $n$ à partir des points $A$ et $B$.*




**Correction**
```
#matrice rotation d'angle pi/3
def rotation(angle):
    return np.array([[np.cos(angle),-np.sin(angle)],[np.sin(angle),np.cos(angle)]])
```

Part. 5 – Ch. 1

```python
# angle=np.pi/3
# print (rotation(angle))

def koch(a, b, n):
    R = rotation(np.pi/3)
    if n == 0:
        plt.plot([a[0], b[0]], [a[1], b[1]],'b')
    else:
        c=np.array([(b[0]-a[0])/3+a[0],(b[1]-a[1])/3+a[1]])
        d=np.array([2*(b[0]-a[0])/3+a[0],2*(b[1]-a[1])/3+a[1]])
        vecteur=d-c
        e=np.dot(rotation(np.pi/3),vecteur)+c
        koch(a, c, n - 1)
        koch(c, e, n - 1)
        koch(e, d, n - 1)
        koch(d, b, n - 1)

def flocon(a,b,n):
    koch(a,b,n)
    vecteur=b-a
    c=np.dot(rotation(-2*np.pi/3),vecteur)+b
    koch(b,c,n)
    koch(c,a,n)

n = 5
a = np.array([0,0])
b = np.array([1,0])
flocon(a, b, n)
plt.axis('equal')
plt.show()
```