

TD 1

Exercices d'application

TD d'informatique du Lycée Louis Legrand – Jean-Pierre Becirspahic

<http://info-llg.fr/>

Savoirs et compétences :

- Alg – C15 : Récursivité : avantages et inconvénients.

Exercice

On considère la fonction suivante :

```
def f(x) :
    if x <= 1 :
        return 1
    elif x % 2 == 0 :
        return 2*f(x/2)
    else :
        return 1 + f(x+1)
```

1. Montrer que cette fonction récursive se termine pour toute valeur entière de l'argument x .
2. Soient $x \in \mathbb{N}$ et $g(x) = f(x) + x$. À partir du programme précédent, donner un programme python qui calcule $g(x)$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $g(x)$ est une puissance de 2.

Corrigé

1. Si x est pair et > 1 , alors $f(x) = 2f(x/2)$ et $x/2 < x$. Si x est impair et > 1 , alors $f(x) = 1 + 2f((x+1)/2)$ et $(x+1)/2 < x$. Donc dans les deux cas récurrents, on appelle f en une ou deux étapes avec un argument strictement inférieur à x . Ceci prouve la terminaison du calcul de $f(x)$ par récurrence sur x .
2. Soit $g(x) = f(x) + x$. En remplaçant $f(x)$ par $g(x) - x$ dans la définition de f et en simplifiant, on obtient un programme calculant g :

```
def g(x) :
    if x <= 1 :
        return 1 + x
    elif x % 2 == 0 :
        return 2*g(x/2)
    else :
        return g(x+1)
```

3. Avec la question précédente, il est immédiat par récurrence que $g(x)$ est toujours une puissance de 2.