

Dans la mesure du possible, on justifiera le code demandé par des invariants.

1 Opérations utiles sur les listes

Une liste t étant donnée :

1. $\text{len}(t)$ désigne la longueur de t ;
2. pour tout i dans $\text{range}(\text{len}(t))$, $t[i]$ désigne l'élément d'indice i .
3. On peut construire une liste de n éléments tous physiquement égaux à x avec l'expression $[x] * n$.
4. On peut ajouter un élément x à la fin de t par l'instruction $t.append(x)$ (la longueur de t augmente alors de 1).
5. On peut ajouter tous les éléments d'une liste u à la fin de la liste t par l'instruction $t += u$.

On supposera que ces opérations sur les listes ont respectivement une complexité :

1. $\Theta(1)$
2. $\Theta(1)$
3. $\Theta(n)$
4. $\Theta(1)$ (ce n'est pas tout à fait vrai mais pour ce TP, c'est raisonnable)
5. $\Theta(\text{len}(u))$ (ce n'est pas tout à fait vrai mais pour ce devoir, c'est raisonnable)

2 Programmation

1. Écrire une fonction `random_list(n, k)` construisant une liste de n entiers tirés au hasard dans l'intervalle $\text{range}(k)$. On pourra utiliser la fonction `randrange` du module `random` à cet effet.
2. Écrire une fonction `counting_sort(k, t)` prenant en argument une liste t d'entiers appartenant à $\text{range}(k)$ et retournant une copie triée de ce tableau. On utilisera impérativement l'algorithme suivant :
 - On construit un tableau u de taille k initialisé avec des 0.
 - On parcourt t . Pour chaque valeur x trouvée, on incrémente $u[x]$. À la fin du parcours, pour tout entier i de $\text{range}(k)$, $u[i]$ contient donc le nombre d'occurrences de i dans t .
 - Il est alors facile de construire un tableau r trié répondant à la question posée.
3. Écrire suivant le même principe une fonction `bucket_sort(f, k, t)` retournant une copie de t triée suivant le critère f . Plus précisément, f doit être une fonction prenant ses valeurs dans $\text{range}(k)$ et les éléments de la liste résultat sont triés par ordre croissant de leurs images par f .
De plus, on fera en sorte que le tri soit *stable*, c'est-à-dire que pour tout couple de valeurs x et y ayant même image par f , x et y apparaissent dans le même ordre dans t et dans la liste triée.

Par exemple, si f est la fonction $n \mapsto n^2 \% 5$, et $t = [0, 1, 5, 6, 4, 12, 10, 9, 17, 2, 6, 7]$. Nous pouvons calculer $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(4) = 1$, $f(5) = 0$, $f(6) = 1$, $f(7) = 4$, $f(9) = 1$, $f(10) = 0$, $f(12) = 4$ et $f(17) = 4$. Donc `bucket_sort(f, 4, t)` doit renvoyer `[0, 5, 10, 1, 6, 4, 6, 12, 9, 17, 2, 7]`. Le tableau `[5, 0, 10, 1, 6, 4, 9, 6, 12, 17, 2, 7]` est aussi trié suivant le critère f , mais ne peut être renvoyé par `bucket_sort(f, 4, t)` car les deux premiers éléments ne sont pas dans le même ordre que dans t , or on veut un tri stable.

4. On se donne la fonction suivante :

```
def radix_sort(k, t):
    """Retourne une copie de t triée par ordre croissant.
    t doit contenir des entiers appartenant à range(k**2)
    """
    def lp(x):
        return x // k
    def rp(x):
        return x % k
    u = bucket_sort(rp, k, t)
    r = bucket_sort(lp, k, u)
    return r
```

Soit $t = [0, 5, 10, 1, 6, 4, 6, 12, 9, 17, 2, 7]$ et $k = 5$. Calculer $\text{bucket_sort}(rp, k, t)$, et en déduire $\text{radix_sort}(k, t)$.

Quelle hypothèse peut-on formuler concernant la fonction radix_sort ?

3 Étude de complexité

5. Expliquer (brièvement) et sous quelle hypothèse pourquoi la complexité de $\text{random_list}(n, k)$ est un $\Theta(n)$.
6. Justifier que la complexité de $\text{counting_sort}(k, t)$ est un $\Theta(\max(n, k))$, où $n = \text{len}(t)$.
7. Justifier que la complexité de $\text{bucket_sort}(f, k, t)$ est un $\Theta(\max(n, k))$, où $n = \text{len}(t)$.
8. Quelle est la complexité de radix_sort ?
9. En admettant que la fonction bucket_sort répond bien à l'énoncé, justifier que radix_sort trie le tableau donné en argument. On pourra commencer par regarder le cas où k vaut 10 pour comprendre ce qu'il se passe et se poser la question : à quelle(s) condition(s) sur $lp(x), lp(y), rp(x), rp(y)$ a-t-on $x \leq y$?