Partie 3

Ingénierie Numérique & Simulation

Chapitre 1– Intégration numérique

Informatique

Fiche PSI ⋆

Hypothèse(s) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a,b]$. On note $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Principe des méthodes des rectangles

Définition Dans cette méthode, la fonction à intégrer est interpolée par un polynôme de degré 0, à savoir une fonction constante. Géométriquement, l'aire sous la courbe est alors approximée par un rectangle. Plusieurs choix sont possibles.

Rectangles à gauche :

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (b-a)f(a)$$

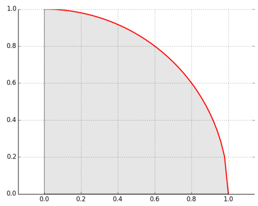
Point milieu :

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

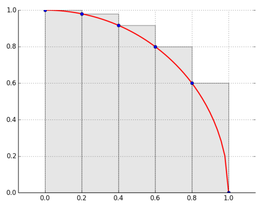
Rectangles à droite :

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (b-a)f(b)$$

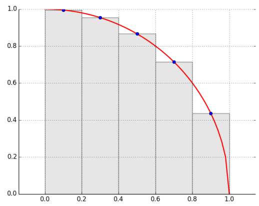
Interprétation graphique



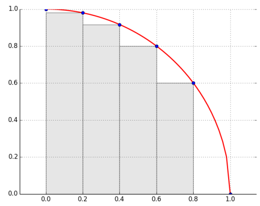
Calcul intégral



Rectangles à gauche



Point milieu

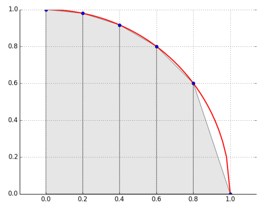


Rectangles à droite

Principe des méthodes des trapèzes

Définition Dans cette méthode, la fonction à intégrer est interpolée par un polynôme de degré 1, à savoir une fonction affine. Géométriquement, l'aire sous la courbe est alors approximée par un trapèze :

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$



Notion d'erreur d'intégration

Résultat Dans chaque cas, on intègre f sur n subdivisions régulières de I.

Erreur sur la méthode des rectangles à gauche et à droite

Soit f fonction dérivable sur $I=[a,b]$ et dont f' est continue sur I. Soit M_1 un majorant de f' sur I. L'erreur ε commise lors de l'intégration par la méthode des rectangles à droite ou à gauche est telle que $\varepsilon \leq \dfrac{M_1}{2n}$.

Erreur sur la méthode des rectangles – point milieu

Si de plus f est deux fois dérivables sur $I=[a,b]$ et f'' est continue sur I, on note M_2 un majorant de f'' sur I.L'erreur ε commise lors de l'intégration par la méthode des rectangles – point milieu est telle que $\varepsilon \leq \dfrac{M_2}{12n^2}$.

Erreur sur la méthode des trapèzes

L'erreur commiseε est telle qu'il existe un entier M tel que $\varepsilon \leq \dfrac{M}{12n^2}$.

Bibliothèque Python

Il est possible d'intégrer une fonction en utilisant les modules de la bibliothèque `scipy` :

■ **Python**

```python
from scipy.integrate import quad
from math import sin
# Définition  des bornes de gauche et de droite
g,d = -1,1
def f(x):
    return  sin(x)

I ,erreur = quad(f,g,d)
print(I ,erreur)
```