DS 1

Devoir Surveillé 1

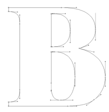
Tracer des courbes de Bézier –

Informatique

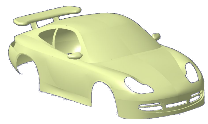
PT – PT⋆

1 Présentation

Les courbes de Bézier ont été inventées par l'ingénieur Pierre Bézier (ingénieur Arts et Métiers (Pa. 1927) ingénieur chez Renault). Il s'agit de courbes paramétrées utilisées dans les logiciels de dessin, en conception assistée par ordinateur ou encore pour définir certaines polices de caractères. Même si ces courbes sont remplacées par des courbes de types « NURBS » elles restent néanmoins encore très utilisées.



Fonte définie par des courbes de Bézier



Surface de Bézier Logiciel Catia

Définition Soient P_0, P_1, ..., P_n, $n+1$ des points appelés pôles, de coordonnées $\left(x_{Pi}, y_{Pi}\right)$. Pour une courbe de Bézier plane, la position d'un point M de coordonnées $\left(x(t), y(t)\right)$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ est définie par :

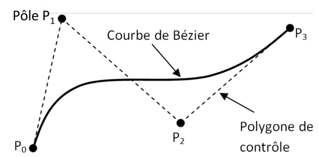
$$\forall t \in [0,1] \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) x_{Pi} \\ y(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) y_{Pi} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{et} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$$

La fonction $B_{i,n}(t)$ est appelée polynôme de base de Bernstein.

▪ Exemple

Pour 4 pôles P_0, P_1, P_2 et P_3, (courbe de Bézier de degré 3), on a :

$$\forall t \in [0,1] \left\{ \begin{array}{l} x(t) = (1-t)^3\, t^0 x_{P_0} + 3(1-t)^2\, t^1 x_{P_1} + 3(1-t)^1\, t^2 x_{P_2} + (1-t)^0\, t^3 x_{P_3} \\ y(t) = (1-t)^3\, t^0 y_{P_0} + 3(1-t)^2\, t^1 y_{P_1} + 3(1-t)^1\, t^2 y_{P_2} + (1-t)^0\, t^3 y_{P_3} \end{array} \right.$$



Objectif L'objectif est de tracer les courbes de Bézier en utilisant des méthodes différentes.

2 Tracé naïf d'une courbe de Bézier

Le premier bloc de fonctions donné en annexe permet de tracer un point appartenant à une courbe de Bézier à partir de la fonction `calculPointCourbe` (via les fonctions `coef_binom` et `fonctionBernstein`). La fonction `coef_binom` fait appel à la fonction `fact(n)` permettant de calculer $n!$.

Question 1 *Écrire cette fonction en utilisant un algorithme récursif* `factRec(n)`. *Vous prendrez soin de documenter votre fonction.*

Question 2 *Écrire cette fonction en utilisant un algorithme itératif* `factIt(n)`. *Vous prendrez soin de documenter votre fonction.*

Question 3 *En utilisant la fonction* `calculPointCourbe(poles,t)` *(donnée en annexe), réaliser le programme permettant de tracer une courbe sur 100 points. On rappelle que pour utiliser la fonction* `plot` *il est nécessaire de réaliser la liste des abscisses, qu'on pourra nommer* `les_x`, *et la liste des ordonnées, qu'on pourra nommer* `les_y`. *On fera l'hypothèse que la liste de pôles a déjà été renseignée dans la variable* `poles`.

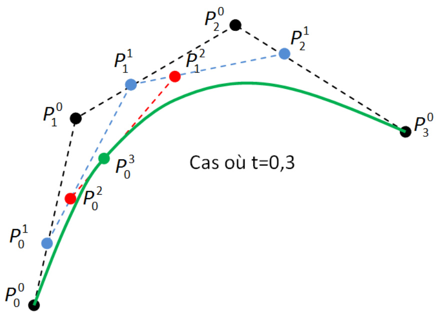
Question 4 *On fait l'hypothèse que la complexité algorithmique de la fonction* `pow`, *appelée dans la fonction* `fonctionBernstein`, *est linéaire. Donner la complexité algorithmique temporelle de la fonction* `fonctionBernstein`.

3 Utilisation de l'algorithme de De Casteljau

L'algorithme de De Casteljau repose sur le fait qu'une restriction d'une courbe de Bézier est aussi une courbe de Bézier. En notant P_0, P_1, P_2 et P_3 les 4 pôles d'une courbe de Bézier et t un réel donné appartenant à $[0;1]$:

- on construit les 3 barycentres $P_{j,1}$, $j \in [0;2]$ des pôles $P_{i,0}$, $i \in [0;3]$: $P_{j,1} = (1-t)P_{j,0} + tP_{j+1,0}$;
- on construit les 2 barycentres $P_{j,2}$, $j \in [0;1]$: $P_{j,2} = (1-t)P_{j,1} + tP_{j+1,1}$;
- on construit le dernier barycentre $P_{0,3} = (1-t)P_{0,2} + tP_{1,2}$.

Le dernier barycentre est un point de le courbe de Bézier.



Question 5 *On donne la fonction* `deCasteljau` *permettant de calculer l'abscisse (ou l'ordonnée) d'un point d'une courbe. Déterminer ce que retourne l'appel suivant (en justifiant et détaillant votre démarche) :* `deCasteljau([0,0,40,40],0,3,0.5)`.

Question 6 *Évaluer la complexité algorithmique de l'algorithme de De Casteljau en fonction du nombre de pôles.*

Question 7 *En identifiant un variant de boucle, montrer que l'algorithme se termine.*

4 Utilisation de l'algorithme de Horner

En mettant le polynôme sous la forme de Horner, on peut écrire que : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + ... + x(a_{n-1} + a_n x)))$. Ainsi, sous la forme de Horner, $x(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) x_{P\,i} = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$.

Exemple

- Pour un polynôme de degré 2 :
  - sous la forme «classique», on a : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$;
  - sous la forme de Horner , on a : $f(x) = a_0 + x(a_1 + a_2 x)$;
- pour une courbe de Bézier :
  - sous la forme «classique», on a : $x(t) = (1-t)^3\, t^0 x_{P_0} + 3(1-t)^2\, t^1 x_{P_1} + 3(1-t)^1\, t^2 x_{P_2} + (1-t)^0\, t^3 x_{P_3}$;
  - sous la forme de Horner, on a : $x(t) = \left(\left(\left(x_{P_3} - 3x_{P_2} + 3x_{P_1} - x_{P_0}\right)t + 3\left(x_{P_2} - 2x_{P_1} + x_{P_0}\right)\right)t + 3\left(x_{P_1} - x_{P_0}\right)\right)t + x_{P_0}$.

Question 8 *Écrire un algorithme récursif, permettant de calculer un point de la courbe par la méthode de Horner. La fonction* `horner` *prendra comme argument* `L` *la liste des a_i (*`[an,a(n-1),...,a1,a0]`*) et le paramètre t.*

Question 9 *Quel est l'avantage d'évaluer un polynôme en un point par la méthode de Horner plutôt que par une méthode naïve ?*

5 Bilan

Question 10 *Sachant que les polynômes de Bézier utilisés sont la plupart du temps de degré 3 (4 pôles), parmi les méthodes proposées (méthode naïve, de de Casteljau ou de Horner), laquelle préconiseriez vous évaluer les points d'une courbe de Bézier ?*

Algorithmes

■ **Python**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def coef_binom(i,n):
    """
    Retourne le coefficient binomial :
    C_n^i = n! / (i! (n-i)!)
    """
    res = fact(n)/(fact(i)*fact(n-i))
    return res

def calculPointCourbe(poles,u):
    """
    Retourne le point de la courbe de Bézier pour un paramètre donné.
    Entrées :
        * poles (list): liste des coordonnées des poles [[x1,y1],[x2,y2],...]
        * u (float) : paramètre appartenant à[0,1]
    Sortie :
        * pointM (list): point appartenant àla courbe de Bézier au paramètre u
    """
    px,py = [],[]
    for i in range(len(poles)):
        px.append(poles[i][0])
        py.append(poles[i][1])

    pointM = [fonctionBernstein(px,u),fonctionBernstein(py,u)]
    return pointM

def fonctionBernstein(p,u):
    """
    Calcul d'une des coordonnées d'un point appartenant àune courbe de Bézier.
        Entrées :
            * p (list): tableau contenant l'abscisse des poles
            * u (float): paramètre
        Sortie :
            * x (float) : une des coordonnées (suivant x ou y) d'un point de la courbe
    """
    n = len(p)
    x=0
    for i in range(n):
        x=x+coef_binom(i,n-1)*pow(u,i)*pow((1-u),n-i-1)*p[i]
    return x
```

■ **Python**

```
def deCasteljau(P, i, j, t):
    """
    Retourne l'abscisse(ou l'ordonnées) d'un point de la courbe de Bézier pour un paramètre donné.
    Entrées :
     * P (list) : listes des abscisses (ou des ordonnéees) des poles
     * i,j (int) : poles considérés
     * t (float) : paramètre compris entre 0 et 1
    Sortie :
     * float : abscisse ou ordonnée d'un point de la courbe
    """
    if j == 0:
        return P[i]
    else :
        return deCasteljau(P,i,j-1,t)*(1-t)+deCasteljau(P,i+1,j-1,t)*t
```

DM 01