

Bases de données

Météo France publie et stocke chaque jour des informations météorologiques issues de ses stations (réseau RADOME). Le schéma de la relation RADOME est le suivant : RADOME = {num_sta, nom_usuel, département, commune, altitude, latitude, longitude}. On a donc par exemple :

| RADOME | | | | | | |
|---------|-----------------|-------------|------------|----------|-----------|-----------|
| num_sta | nom_usuel | département | commune | altitude | latitude | longitude |
| 7005 | ABBEVILLE | 80 | ABBEVILLE | 70 | 50.135833 | 1.834667 |
| 7015 | LILLE-LESQUIN | 59 | LESQUIN | 47 | 50.570000 | 3.097500 |
| 7020 | PTE DE LA HAGUE | 50 | AUDERVILLE | 6 | 49.725167 | -1.939833 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Ces données d'observations peuvent par exemple être destinées à des messages internationaux d'observation en surface (SYNOP) qui circulent sur le système mondial de télécommunication (SMT) de l'Organisation Météorologique Mondiale (OMM). Le schéma de la relation SYNOP est le suivant : SYNOP = {num_sta, date, pmer, tend, etc..}. Les caractéristiques des attributs sont les suivants :

| Descriptif | Attribut | Type | Unité |
|-----------------------------------|----------|------|-------|
| Indicatif OMM station | num_sta | car | |
| Date | Date | car | |
| Pression au niveau mer | pmer | int | Pa |
| Variation de pression en 3 heures | tend | int | Pa |
| Type de tendance barométrique | cod_tend | int | code |
| Direction du vent moyen 10 mn | dd | int | degré |
| Vitesse du vent moyen 10 mn | ff | réel | m/s |

Question 1 Quels sont les numéros de station et les villes correspondantes ?

Correction

$$\pi_{\text{num_sta, commune}}(\text{RADOME})$$

```
SELECT num_sta, commune FROM RADOME
```

Question 2 Quels sont les numéros de station et les villes correspondantes situées dans le var ?

Correction

$$\pi_{\text{num_sta, commune}}(\sigma_{\text{département} = 83}(\text{RADOME}))$$

```
SELECT num_sta, commune FROM RADOME WHERE département = 83
```

Question 3 Quelles sont les villes où la vitesse du vent moyen a dépassé les 20 m/s ?

Correction

$$\pi_{\text{commune}}(\sigma_{\text{RADOME.num_sta}=\text{SYNOP.num_sta}}(\text{RADOME} \times \sigma_{\text{ff}>20}(\text{SYNOP})))$$

```
SELECT RADOME.commune
FROM RADOME JOIN SYNOP ON RADOME.num_sta=SYNOP.num_sta
WHERE SYNOP.ff>20
```

Question 4 Quelle est la plus haute valeur de pression mesurée ?

Correction

$\pi_{\gamma \text{MAX}(\text{pmer})}(\text{SYNOP})$
 $\text{SELECT MAX}(\text{pmer}) \text{ FROM SYNOP}$

1 Mise en situation

1.1 Équation gouvernant la température

Correction Question 1

$$\rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

1.2 Conditions aux limites

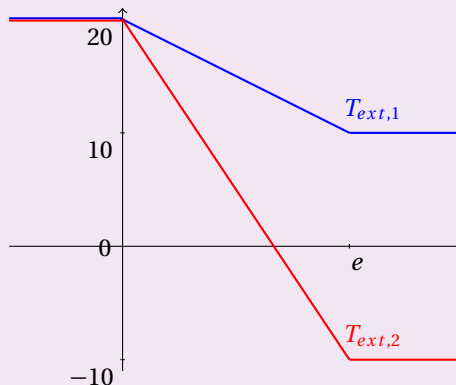
Correction Question 2

- **cas 1 :** $T(0, t) = T_{\text{int}}$ et $T(e, t) = T_{\text{ext}}$;
- **cas 2 :** $T(0, t) = T_{\text{int}}$ et $\frac{\partial T}{\partial t}(e, t) = 0$.

Question 3 En régime permanent, l'équation différentielle devient : $\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = 0$. On a donc : $T(x) = k_1 x + k_2$. Par suite : $T(0) = T_{\text{int}} = k_2$ et $T(e) = T_{\text{ext}} = k_1 e + k_2$. On a donc : $k_1 = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e}$. Au final : $T(x) = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} x + T_{\text{int}}$.

- **conditions 1 :** lorsque $t_1 < 0$, $T_{\text{int}} = 20^\circ\text{C}$ et $T_{\text{ext},1} = 10^\circ\text{C}$. En conséquence, $T(x) = \frac{T_{\text{ext},1} - T_{\text{int}}}{e} x + T_{\text{int}}$.
- **conditions 2 :** lorsque $t_2 > 0$, $T_{\text{int}} = 20^\circ\text{C}$ et $T_{\text{ext},2} = -10^\circ\text{C}$. En conséquence, $T(x) = \frac{T_{\text{ext},2} - T_{\text{int}}}{e} x + T_{\text{int}}$.

Question 4



2 Résolution numérique : méthode des différences finies

Correction Question 5 On a $\alpha = \frac{\rho c_p}{\lambda}$.

Question 6 On a, pour $t < 0$, $T(0, 0) = b = T_{\text{int}}$ et $T(e, 0) = a e + T_{\text{int}} = T_{\text{ext},1}$. On a donc : $a = \frac{T_{\text{ext},1} - T_{\text{int}}}{e}$. Au final :

$$T(x, 0) = \frac{T_{\text{ext},1} - T_{\text{int}}}{e} x + T_{\text{int}} \quad \text{pour } x \in [0, e].$$

2.1 Discrétisation dans l'espace et dans le temps

Correction Question 7 On a : $\Delta x = \frac{e}{N+1}$.

Question 8 On a : $x_i = i\Delta x$.

2.2 Méthode utilisant un schéma explicite

Correction Question 9 On additionne les deux lignes, on a directement :

$$T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) = 2T(x, t) + \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + o((\Delta x)^3)$$

puis on isole :

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{T(x + \Delta x, t) - 2T(x, t) + T(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + o(\Delta x)$$

Question 10

$$\left[\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right]_{x_i, t_k} = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2}$$

Question 11 En injectant les approximations dans l'EDP, nous obtenons $T_i^{k+1} - T_i^k = \frac{\Delta t}{\alpha \Delta x^2} (T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k)$.

Ainsi, $r = \frac{\Delta t}{\alpha \Delta x^2}$

Question 12 Pas pour $i = 0$ et $i = N + 1$. Pour ces valeurs nous avons : $T_0^k = 20^\circ C$ et $T_{N+1}^k = -10^\circ C$.

Question 13 On a, pour $i \in]0; N + 1[$:

$$\begin{array}{l} i \\ \hline T_i^{k+1} = r T_{i-1}^k + (1 - 2r) T_i^k + r T_{i+1}^k \\ \\ i = 1 \quad T_1^{k+1} = r T_0^k + (1 - 2r) T_1^k + r T_2^k \\ i = 2 \quad T_2^{k+1} = r T_1^k + (1 - 2r) T_2^k + r T_3^k \\ i = 3 \quad T_3^{k+1} = r T_2^k + (1 - 2r) T_3^k + r T_4^k \\ \\ i = N - 1 \quad T_{N-1}^{k+1} = r T_{N-2}^k + (1 - 2r) T_{N-1}^k + r T_N^k \\ i = N \quad T_N^{k+1} = r T_{N-1}^k + (1 - 2r) T_N^k + r T_{N+1}^k \end{array}$$

On a donc :

$$T^{k+1} = M \cdot T^k + r V$$

avec :

$$M = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 1-2r & r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1-2r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} T_0^k = T_{\text{int}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_N^k = T_{\text{ext},2} \end{pmatrix}.$$

Question 14 À l'instant $t = 0$, le flux de température dans le mur est connu. La température extérieure passe alors à $-10^\circ C$. On utilise alors l'équation de récurrence.

(Lors du codage de la méthode explicite, il faut faire attention à la divergence du schéma. Pour cela, il faut prendre des intervalles de temps « petits ».)

Question 15

```
def euler_explicite(M,T_0,r,V,k):
    if k==0:
        return T_0
    else:
        T=euler_explicite(M,T_0,r,V,k-1)
        return numpy.dot(M,T)+r*V
```

2.3 Méthode utilisant un schéma implicite

Correction Question 16 On peut utiliser l'algorithme du pivot de Gauss. Sa complexité est en $\mathcal{O}(n^3)$.

Question 17 Proposition de corrigé qui ne correspond pas exactement aux préconisations de l'énoncé :

```
def CalcTkpi(M,D):
    N=D.shape[0]
    Cp=[M[0,1]/M[0,0]]
    Dp=[D[0,0]/M[0,0]]
    U=numpy.zeros((N,1))
    for i in range(1,N-1):
        Cp.append((M[i,i+1]-M[i,i-1]*Cp[i-1]))
        Dp.append((D[i,0]-M[i,i-1]*Dp[i-1])/(M[i,i]-M[i,i-1]*Cp[i-1]))
    Dp.append((D[N-1,0]-M[N-1,N-2]*Dp[N-1])/(M[N-1,N-1]-M[N-1,N-2]*Cp[N-1]))
    U[N-1,0]=Dp[N-1]
    for j in range(2,N):
        U[N-j,0]=Dp[N-j]-Cp[N-j]*U[N-j+1,0]
    return U
```

Question 18 Cet algorithme contient deux boucles `for` indépendantes. Dans chacune de ces boucles, le nombre d'opérations est une constante. En dehors de ces boucles, il n'y a aussi que des opérations en temps constant. Ainsi la complexité de l'algorithme est linéaire (à comparer à une complexité cubique pour l'algorithme de Gauss).

3 Résolution de l'équation différentielle implicite

Correction Question 19

```
from math import sqrt

def calc_norme(v):
    res = 0
    for i in range(len(v)):
        res = res+v[i]**2
    return sqrt(res)
```

Question 20

```
def solution(M,T,V) :
    """
    Entrées :
        * M, numpy.array (N+1 x N+1) : matrice à inverser
        * T, numpy.array (N+1 x 1) : température à chaque abscisse du mur à l'instant k
        * V, numpy.array (N+1 x 1) : température imposée à chaque abscisse du mur à l'instant final
    Sortie :
        * TT, numpy.array (N+1 x 1) : température à chaque abscisse du mur à l'instant k+1
    """
    # On considère que r a été définie auparavant comme variable globale.
    D = T+r*V
    return CalcTkpi(M,D)
```

Question 21

```
ItMax = 2000
T_tous_k = numpy.zeros([N,ItMax])
```

Question 22 On a : $T(x_i, k=0) = \frac{T_{\text{ext},1} - T_{\text{int}}}{e} x_i + T_{\text{int}} = \frac{T_{\text{ext},1} - T_{\text{int}}}{e} \cdot i \cdot \frac{e}{N+1} + T_{\text{int}} = \frac{T_{\text{ext},1} - T_{\text{int}}}{N+1} \cdot i + T_{\text{int}}$.

```
def T0(Ti,Tf,N):
```

```
tt = numpy.zeros((N,1))
for i in range(N):
    tt[i] = ((Tf-Ti)/(N-1))*i+Ti #si il y a N points on a divisé l'intervalle en N-1
return tt
```

Question 23

```
t0 = T0(Tint,Text1,N)
for i in range(N):
    T_tous_k[i][0] = t0[i]
```

Question 24

```
M = numpy.zeros((N,N))
M[0][0]=1+2*r
M[0][1]=-r

M[N-1][N-1]=1+2*r
M[N-1][N-2]=-r
for i in range(1,N-1):
    M[i][i]=1+2*r
    M[i][i+1]=-r
    M[i][i-1]=-r

V = numpy.zeros((N,1))
V[0][0]=Tint
V[N-1][0]=Text2
```

Question 25

```
T1=solution(M,T0,V)
```

Question 26 Bloc d'instructions à intégrer dans la fonction euler_implicite(M,T0,V) :

```
v=numpy.zeros((T_tous_k.shape[0],1))
for i in range(T_tous_k.shape[0]):
    v[i,0]=T_tous_k[i,1]-T_tous_k[i,0]
k=1
T=T0(Tint,Text,N)
while calc_norme(v)>10**(-2) and k!=ItMax:
    k=k+1
    T=solution(M,T,V)
    for i in range(T_tous_k.shape[0]):
        T_tous_k[i,k]=T[i,0]
        v[i,0]=T_tous_k[i,k]-T_tous_k[i,k-1]
```

4 Analyse des résultats

Correction Question 27

```
k=[0,240,480,720,960,1200,1440]
les_X=[i*0.4/(N+1) for i in range(N+2)]
for i in k:
    plt.plot(les_X,T_tous_k[:,i])
plt.show()
```

Question 28 Le régime permanent est atteint au bout de 12 heures. Avec un pas temporel de 30 secondes, il y a donc 12×120 soit 2400 itérations. Si on considère que $It_{max} = 2400$, on aura donc 100×2400 valeurs. Pour l'estimation de la taille du fichier on fait ici l'abstraction du codage des espaces et des retours à la ligne. La taille du fichier est donc : $100 \times 2400 \times 10 \times 1 \simeq 2,4 \text{ Mo}$.