TD – 02

–

Savoirs et compétences :

On a $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + 1$ avec $u_0 = u_1 = 1$ ($n \geq 2$). Soit $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$ avec $v_0 = 2$ $v_1 = 2$.

Montrons que $u_n = v_n - 1$ $\forall n \geq 2$

- **Initialisation :** au rang 2, on a d'une part $u_2 = u_1 + u_0 + 1 = 3$ et d'autre part $v_2 = v_1 + v_0 = 4$; donc $u_2 = v_2 - 1$.
- **Hypothèse de récurrence :** on suppose la relation de récurrence vraie jusqu'au rang n.
- **Vérifions que la relation est vraie au rang** $n+1$ **:** On a d'une part $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + 1$ et d'autre part, $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$.
  Montrons que $u_{n+1} - v_{n+1} = -1$.
  $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n + u_{n-1} + 1 - v_n - v_{n-1} = \underbrace{u_n - v_n}_{-1} + \underbrace{u_{n-1} - v_{n-1}}_{-1} + 1 = -1$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Recherchons le terme général de la suite v_n**.**

L'équation caractéristique associée à v_n est $x^2 - x - 1 = 0$.

On a alors $\Delta = 1 + 4 = 5$. En conséquence $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On peut donc écrire v_n sous la forme $v_n = \lambda\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \phi\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Pour $n = 0$, on a $2 = \lambda + \phi$. Pour $n = 1$ on a $2 = \lambda\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + \phi\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

En conséquence, on pose $\phi = 2 - \lambda$ et $2 = \lambda\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + (2-\lambda)\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 4 = \lambda(1-\sqrt{5}) + (2-\lambda)(1+\sqrt{5})$

$\Leftrightarrow 4 = \lambda - \lambda\sqrt{5} + 2 + 2\sqrt{5} - \lambda - \lambda\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 1 = -\lambda\sqrt{5} + \sqrt{5} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$

Au final, $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$ et $\phi = 2 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}$.

Retour à u_n

$u_n = v_n - 1$

$u_n = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1$

Or $\left|\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right| < 1$. Donc $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Au final, la complexité est donc exponentielle (u_n tend vers x_2^n).