

1 Mise en situation**1.1 Équation gouvernant la température**

Question 1 En utilisant les hypothèses dimensionnelles, donner l'équation de la chaleur simplifiée.

Correction

$$\rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

1.2 Conditions aux limites

Question 2 Traduire chacune de ces conditions aux limites sur la fonction $T(x, t)$ et/ou sa dérivée.

Correction

- **cas 1** : $T(0, t) = T_{\text{int}}$ et $T(e, t) = T_{\text{ext}}$;
- **cas 2** : $T(0, t) = T_{\text{int}}$ et $\frac{\partial T}{\partial t}(e, t) = 0$.

Dans la suite, seul le premier cas sera étudié.

Question 3 Résoudre l'équation de la chaleur simplifiée **en régime permanent** dans les conditions suivantes :

- **conditions 1** : pour un instant particulier négatif $t_1 < 0$;
- **conditions 2** : pour un instant particulier positif $t_2 > 0$, très longtemps après la variation de température extérieure quand le régime permanent est de nouveau établi dans le mur.

Correction

En régime permanent, l'équation différentielle devient : $\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = 0$. On a donc : $T(x) = k_1 x + k_2$. Par suite :
 $T(0) = T_{\text{int}} = k_2$ et $T(e) = T_{\text{ext}} = k_1 e + k_2$. On a donc : $k_1 = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e}$. Au final : $T(x) = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} x + T_{\text{int}}$.

- **conditions 1** : lorsque $t_1 < 0$, $T_{\text{int}} = 20^\circ\text{C}$ et $T_{\text{ext},1} = 10^\circ\text{C}$. En conséquences, $T(x) = \frac{T_{\text{ext},1} - T_{\text{int}}}{e} x + T_{\text{int}}$.
- **conditions 2** : lorsque $t_2 > 0$, $T_{\text{int}} = 20^\circ\text{C}$ et $T_{\text{ext},2} = -10^\circ\text{C}$. En conséquences, $T(x) = \frac{T_{\text{ext},2} - T_{\text{int}}}{e} x + T_{\text{int}}$.

Question 4 Quelle est la nature des profils $T(x)$ obtenus (en régime permanent) à ces deux instants ? Tracer à la main les deux profils sur un même graphique sur la copie.

2 Résolution numérique : méthode des différences finies

Question 5 Quelle est l'expression de α en fonction des paramètres physiques du mur ?

Correction On a $\alpha = \frac{\rho c_p}{\lambda}$.

Question 6 Exprimer a et b en fonction de T_{int} , $T_{\text{ext},1}$ et e .

Correction On a, pour $t < 0$, $T(0, 0) = b = T_{\text{int}}$ et $T(e, 0) = a e + T_{\text{int}} = T_{\text{ext},1}$. On a donc : $a = \frac{T_{\text{ext},1} - T_{\text{int}}}{e}$. Au final :

$$T(x, 0) = \frac{T_{\text{ext},1} - T_{\text{int}}}{e} x + T_{\text{int}} \quad \text{pour } x \in [0, e].$$

2.1 Discrétisation dans l'espace et dans le temps

Question 7 Donner l'expression de Δx en fonction de N et de l'épaisseur du mur e .

Correction On a : $\Delta x = \frac{e}{N+1}$.

Question 8 Donner l'abscisse x_i du i^e point en fonction de i et Δx , sachant que $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = e$.

Correction On a : $x_i = i \Delta x$.

2.2 Méthode utilisant un schéma explicite

Question 9 En déduire une expression approchée à l'ordre 1 de $\left[\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right]_{x, t}$ (dérivée partielle spatiale seconde de T évaluée au point x à l'instant t) en fonction de $T(x + \Delta x, t)$, $T(x - \Delta x, t)$ et $T(x, t)$ et Δx .

Correction On additionne les deux lignes, on a directement :

$$T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) = 2T(x, t) + \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + o((\Delta x)^3)$$

puis on isole :

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{T(x + \Delta x, t) - 2T(x, t) + T(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + o(\Delta x)$$

On note T_i^k la température $T(x_i, t_k)$, évaluée au point d'abscisse x_i à l'instant t_k . De même, on note $T_{i+1}^k = T(x_i + \Delta x, t_k)$ et $T_{i-1}^k = T(x_i - \Delta x, t_k)$.

Question 10 Déduire de la question précédente que $\left[\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right]_{x_i, t_k} = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2}$ (dérivée partielle seconde de T évaluée en x_i à l'instant t_k).

Correction

$$\left[\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right]_{x_i, t_k} = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2}$$

Question 11 En utilisant les questions précédentes, montrer que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$T_i^{k+1} = r T_{i-1}^k + (1 - 2r) T_i^k + r T_{i+1}^k.$$

r sera explicité en fonction de Δx , Δt et α .

Correction $r = \frac{\Delta t}{\alpha \Delta x^2}$

Question 12 L'équation est-elle valable dans tout le domaine, c'est-à-dire pour toute valeur de i , $0 \leq i \leq N+1$? Que valent T_0^k et T_{N+1}^k ?

Correction Oui...

On a : $T_0^k = 20^\circ \text{C}$ et $T_{N+1}^k = -10^\circ \text{C}$.

Question 13 Montrer que pour tout instant k , le problème peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$T^{k+1} = M \cdot T^k + r V \quad \text{avec} \quad T^k = \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ \vdots \\ T_{N-1}^k \\ T_N^k \end{pmatrix}.$$

avec M une matrice carrée $N \times N$, V un vecteur de taille N que l'on explicitera.

Correction On a, pour $i \in]0; N + 1[$:

$$\begin{aligned} i & \quad T_i^{k+1} = r T_{i-1}^k + (1-2r) T_i^k + r T_{i+1}^k \\ i = 1 & \quad T_1^{k+1} = r T_0^k + (1-2r) T_1^k + r T_2^k \\ i = 2 & \quad T_2^{k+1} = r T_1^k + (1-2r) T_2^k + r T_3^k \\ i = 3 & \quad T_3^{k+1} = r T_2^k + (1-2r) T_3^k + r T_4^k \\ & \vdots \\ i = N-1 & \quad T_{N-1}^{k+1} = r T_{N-2}^k + (1-2r) T_{N-1}^k + r T_N^k \\ i = N & \quad T_N^{k+1} = r T_{N-1}^k + (1-2r) T_N^k + r T_{N+1}^k \end{aligned}$$

On a donc :

$$T^{k+1} = M \cdot T^k + r V$$

avec :

$$M = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 1-2r & r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1-2r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} T_0^k = T_{\text{int}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_N^k = T_{\text{ext},2} \end{pmatrix}.$$

Question 14 Expliciter succinctement comment déterminer la température dans le mur à chaque instant.

Correction À l'instant $t = 0$, le flux de température dans le mur est connu. La température extérieure passe alors à -10°C . On utilise alors l'équation de récurrence.

(Lors du codage de la méthode explicite, il faut faire attention à la divergence du schéma. Pour cela, il faut prendre des intervalles de temps « petits ».)

Question 15 On donne T_0 le vecteur température à l'instant $k = 0$. Écrire la fonction `euler_explicite(M, T0, V, k)` retournant le vecteur de température T^k à l'instant k . Cette fonction sera définie de manière **réursive**.

Correction

```
def euler_explicite(M, T_0, r, V, k):
    if k==1:
        return np.dot(M, T_0)+r*V
    else:
        T=euler_explicite(M, T_0, r, V, k-1)
        return np.dot(M, T)+r*V
```

2.3 Méthode utilisant un schéma implicite

Question 16 Pour obtenir T^{k+1} en fonction de T^k , il est nécessaire d'inverser le système matriciel à chaque pas de temps. Donner le nom d'un algorithme permettant de faire cela et donner sa complexité.

Correction On peut utiliser l'algorithme du pivot de Gauss. Sa complexité est en $\mathcal{O}(n^3)$.

Question 17 En utilisant l'algorithme de Thomas, écrire une fonction `CalcTkp1(M, D)` qui retourne le vecteur U , solution du système matriciel, à partir de la matrice M et du vecteur D .

On pourra commencer par créer des vecteurs contenant des zéros : A, B, C, C_p, D_p (pour C' et D') et U . Puis on pourra définir A, B et C à partir de la matrice M et ensuite calculer C_p et D_p puis U .

Correction

Proposition de corrigé qui ne correspond pas exactement aux préconisations de l'énoncé :

```
def CalcTkp1(M, d):
    N=d.shape[0]
```

```
c=[M[0,1]/M[0,0]]
d_prime=[d[0,0]/M[0,0]]
u=np.zeros((N,1))
for i in range(1,N-1):
    c.append(M[i,i+1]/(M[i,i]-M[i,i-1]*c[i-1]))
    d_prime.append((d[i,0]-M[i,i-1]*d_prime[-1])/(M[i,i]-M[i,i-1]*c[i-1]))
d_prime.append((d[N-1,0]-M[N-1,N-2]*d_prime[-1])/(M[N-1,N-1]-M[N-1,N-2]*c[-1]))
u[N-1,0]=d_prime[-1]
for j in range(2,N):
    u[N-j,0]=d_prime[N-j]-c[N-j]*u[N-j+1,0]
return u
```

Question 18 Donner la complexité de l'algorithme et comparer à celui de la question 16. On prendra en compte uniquement les tests, les affectations (même de tableaux) et les opérations élémentaires (+, -, *, /) qui compte chacune pour « un ».

Correction La complexité de l'algorithme est linéaire (à comparer à une complexité cubique pour l'algorithme de Gauss).

3 Résolution de l'équation différentielle implicite

Question 19 Écrire une fonction `calc_norme` qui calcule la norme d'un vecteur.

Correction

```
def calc_norme(v):
    res = 0
    for i in range(len(v)):
        res = res+v[i]**2
    return math.sqrt(res)
```

Question 20 Écrire la fonction `solution(M,T,V)`, d'arguments une matrice `M` tridiagonale et deux vecteurs `T` et `V` et retournant le vecteur `U` tels que $MU = T + rV$. On utilisera la fonction `CalcTkp1`.

Correction

```
def solution(M,T,V) :
    """
    Entrées :
        * M, np.array (N+1 x N+1) : matrice à inverser
        * T, np.array (N+1 x 1) : température à chaque abscisse du mur à l'instant k
        * V, np.array (N+1 x 1) : température imposée à chaque abscisse du mur à l'instant final
    Sortie :
        * TT, np.array (N+1 x 1) : température à chaque abscisse du mur à l'instant k+1
    """
    # On considère que r a été définie auparavant comme variable globale.
    D = T+r*V
    return CalcTkp1(M,D)
```

Question 21 Affecter la valeur 2000 à `ItMax`. Créer la matrice `T_tous_k` de dimensions $N \times ItMax$ en la remplissant de zéros.

Correction

```
ItMax = 2000
T_tous_k = np.zeros([N,ItMax])
```

Question 22 D'après les questions précédentes la température T dans le mur vérifie la condition initiale $T(x,0) = ax + b$ où $a = \frac{T_{ext,1} - T_{int}}{e}$ et $b = T_{int}$. Écrire la fonction `T0(Tint,Text,N)` d'arguments la température intérieure T_{int} , la température extérieure T_{ext}

et l'entier N et retournant le vecteur T^0 , de taille N , contenant les températures en chaque point du mur lorsque $t = 0$.

Correction On a : $T(x_i, k=0) = \frac{T_{\text{ext},1} - T_{\text{int}}}{e} x_i + T_{\text{int}} = \frac{T_{\text{ext},1} - T_{\text{int}}}{e} \cdot i \cdot \frac{e}{N+1} + T_{\text{int}} = \frac{T_{\text{ext},1} - T_{\text{int}}}{N+1} \cdot i + T_{\text{int}}$.

```
def T0(Ti, Tf, N):
    tt = np.zeros((N,1))
    for i in range(N):
        tt[i] = ((Tf-Ti)/(N-1))*i+Ti #si il y a N points on a divisé l'intervalle en N-1
    return tt
```

Question 23 Écrire la suite d'instructions qui affecte à la première colonne de T_tous_k le vecteur des valeurs initiales T^0 . On utilisera la fonction $T0$.

Correction

```
t0 = T0(Tint, Text1, N)
for i in range(N):
    T_tous_k[i][0] = t0[i]
```

Question 24 Écrire les instructions permettant de définir M et le vecteur V qui interviennent dans l'équation ??.

Correction

```
M = np.zeros((N,N))
M[0][0]=1+2*r
M[0][1]=-r

M[N-1][N-1]=1+2*r
M[N-1][N-2]=-r
for i in range(1,N-1):
    M[i][i]=1+2*r
    M[i][i+1]=-r
    M[i][i-1]=-r

V = np.zeros((N,1))
V[0][0]=Tint
V[N-1][0]=Text2
```

Question 25 Donner la suite d'instructions permettant de calculer le profil de la température à l'instant $k = 1$ ($t = \Delta t$). C'est à dire le vecteur T^1 . On utilisera la fonction solution .

Correction $T1 = \text{solution}(M, T0, V)$

Question 26 Écrire la fonction $\text{euler_implicite}(M, T0, V)$ d'argument une matrice M et deux vecteurs $T0$ et V et renvoyant la matrice T_tous_k .

Cette boucle sera interrompue lorsque la norme du vecteur $T^k - T^{k-1}$ deviendra inférieure à 10^{-2} ou lorsque le nombre d'itérations atteindra la valeur $ItMax$ (prévoir deux cas). Utiliser pour cela les fonctions calc_norme et solution définies précédemment.

Correction Bloc d'instructions à intégrer dans la fonction $\text{euler_implicite}(M, T0, V)$:

```
v=np.zeros((T_tous_k.shape[0],1))
for i in range(T_tous_k.shape[0]):
    v[i,0]=T_tous_k[i,1]-T_tous_k[i,0]
k=1
T=T0(Tint, Text, N)
while calc_norme(v)>10**(-2) and k!=ItMax:
    k=k+1
```

```
T=solution(M,T,V)
for i in range(T_tous_k.shape[0]):
    T_tous_k[i,k]=T[i,0]
    v[i,0]=T_tous_k[i,k]-T_tous_k[i,k-1]
```

4 Analyse des résultats

Question 27 Le pas de discrétisation temporel est de 30 secondes. Les résultats de la simulation sont stockés dans la matrice `T_tous_k` définie précédemment. Écrire les instructions permettant de tracer le réseau de courbes précédentes.

Correction

```
k=[0,240,480,720,960,1200,1440]
les_X=[i*0.4/(N+1) for i in range(N+2)]
for i in k:
    plt.plot(les_X,T_tous_k[:,i])
plt.show()
```

Question 28 Quelle sera la taille du fichier texte généré?

Correction Si on considère que $It_{max} = 2000$, on aura donc 100×2000 valeurs. Pour l'estimation de la taille du fichier on fait ici l'abstraction du codage des espaces et des retours à la ligne. La taille du fichier est donc : $100 \times 2000 \times 10 \times 1 \simeq 2 \text{ Mo}$.