Problème de Cauchy

Rappel — Problème de Cauchy. Le problème consiste à trouver les fonctions y de $[0,T] \to \mathbb{R}^n$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{avec } t_0 \in [0,T] \text{ et } y_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donnés} \end{array} \right. \quad \text{avec } t_0 \in [0,T] \text{ et } y_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donnés.}$$

L'existence et l'unicité de la solution peut se démontrer en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Définition Fonction lipschitzienne
f est lipschitzienne en y s'il existe un réel $k>0$ tel que $\forall y(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall z(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0,T]$, alors

$$||f(t,y(t)) - f(t,z(t))|| \leq k ||y(t) - z(t)||$$

Théorème Théorème de Cauchy – Lipschitz
Soit f une fonction de $[0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et lipschitzienne en y.
Alors, $\forall t_0 \in [0,T]$ et $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy admet une unique solution définie sur $[0,T]$.

Méthode d'Euler

Pour un temps de simulation compris entre t_0 et t_1, si on choisi un nombre n d'échantillons, alors le pas d'intégration est défini par $h = \dfrac{t_1 - t_0}{n}$. (On a donc $t_i = t_0 + h \cdot i$ avec $i \in [0,n]$.)

Résultat En intégrant l'équation du problème de Cauchy sur un intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, on a :

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \mathrm{d}y = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t \Longleftrightarrow y_{i+1} - y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t \text{ et donc : } y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t$$

R En utilisant la méthode des rectangles à gauche, $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y(t))\mathrm{d}t \simeq h \cdot f(t_i, y(t_i))$.

Méthode d'Euler explicite

À l'instant i, $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ peut être approximé par $\dfrac{\mathrm{d}y(t_i)}{\mathrm{d}t} \simeq \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$. Ainsi, $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$.

Méthode d'Euler implicite

À l'instant i, $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ peut être approximé par $\dfrac{\mathrm{d}y(t_i)}{\mathrm{d}t} \simeq \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}$. Ainsi, $y_i = y_{i-1} + hf(t_{i-1}, y_i)$ ou encore $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_{i+1})$.

Bibliothèque Python

Voir exemples : `http://python.physique.free.fr/outils_math.html`.

Exemples

Reformulation d'équations différentielles en vue de leur résolution numérique.

- Équation différentielle du premier ordre à coefficients constants : $\omega(t)+\tau\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}=\omega_c$:
  - schéma d'Euler explicite : on a $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}\simeq\dfrac{\omega_{k+1}-\omega_k}{h}\Rightarrow\omega_k+\tau\dfrac{\omega_{k+1}-\omega_k}{h}=\omega_c\Leftrightarrow\omega_{k+1}=\dfrac{h}{\tau}(\omega_c-\omega_k)+\omega_k$;
  - schéma d'Euler implicite : on a $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}\simeq\dfrac{\omega_k-\omega_{k-1}}{h}\Rightarrow\omega_k+\tau\dfrac{\omega_k-\omega_{k-1}}{h}=\omega_c\Leftrightarrow\omega_k=\dfrac{h\omega_c+\tau\omega_{k-1}}{h+\tau}$.
- Équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants : $\omega(t)f(t)+\tau\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}g(t)=\omega_c h(t)$:
  - Euler explicite : $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}\simeq\dfrac{\omega_{k+1}-\omega_k}{h}\Rightarrow\omega_k f_k+\tau\dfrac{\omega_{k+1}-\omega_k}{h}g_k=\omega_c h_k\Leftrightarrow\omega_{k+1}=\dfrac{h}{\tau g_k}(\omega_c h_k-\omega_k f_k)+\omega_k$;
  - Euler implicite : $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}\simeq\dfrac{\omega_k-\omega_{k-1}}{h}\Rightarrow\omega_k f_k+\tau\dfrac{\omega_k-\omega_{k-1}}{h}g_k=\omega_c h_k\Leftrightarrow\omega_k=\dfrac{h\omega_c h_k+\tau g_k\omega_{k-1}}{f_k h+\tau g_k}$.
- Équation différentielle du premier ordre $\sin(\omega(t))+\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}=K$:
  - Euler explicite : $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}\simeq\dfrac{\omega_{k+1}-\omega_k}{h}\Rightarrow\sin\omega_k+\dfrac{\omega_{k+1}-\omega_k}{h}=K\Leftrightarrow\omega_{k+1}=h(K-\sin\omega_k)+\omega_k$;
  - Euler implicite : $\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}\simeq\dfrac{\omega_k-\omega_{k-1}}{h}\Rightarrow\sin\omega_k+\dfrac{\omega_k-\omega_{k-1}}{h}=K\Leftrightarrow h\sin\omega_k+\omega_k-\omega_{k-1}=hK$. Dans ce cas, il faut utiliser la méthode de Newton ou de dichotomie pour déterminer ω_k.
- Équation différentielle du second ordre : $\ddot{s}(t)+\dfrac{2\xi}{\omega_0}\dot{s}(t)+\omega_0^2 s(t)=Ke(t)$. On pose :

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(t)=s(t)\\ y_2(t)=\dot{s}(t)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \dot{y}_1(t)=\dot{s}(t)=y_2(t)\\ \dot{y}_2(t)=\ddot{s}(t)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \dot{y}_1(t)=y_2(t)\\ \dot{y}_2(t)+\dfrac{2\xi}{\omega_0}y_2(t)+\omega_0^2y_1(t)=Ke(t)\end{array}\right.$$

Schéma d'Euler explicite : $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\simeq\dfrac{y_{k+1}-y_k}{h}$. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y_{1,k+1}-y_{1,k}}{h}=y_{2,k}\\ \dfrac{y_{2,k+1}-y_{2,k}}{h}+\dfrac{2\xi}{\omega_0}y_{2,k}+\omega_0^2y_{1,k}=Ke_k\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y_{1,k+1}=hy_{2,k}+y_{1,k}\\ y_{2,k+1}=hKe_k-\dfrac{2\xi h}{\omega_0}y_{2,k}-h\omega_0^2y_{1,k}+y_{2,k}\end{array}\right.$$

Schéma d'Euler implicite : $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\simeq\dfrac{y_k-y_{k-1}}{h}$. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y_{1,k}-y_{1,k-1}}{h}=y_{2,k}\\ \dfrac{y_{2,k}-y_{2,k-1}}{h}+\dfrac{2\xi}{\omega_0}y_{2,k}+\omega_0^2y_{1,k}=Ke_k\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y_{1,k}=hy_{2,k}+y_{1,k-1}\\ y_{2,k}=\dfrac{hKe_k+y_{2,k-1}-h\omega_0^2y_{1,k-1}}{1+h\dfrac{2\xi}{\omega_0}+\omega_0^2h^2}\end{array}\right.$$

- Équation différentielle du second ordre : $\ddot{\theta}(t)+k\sin\theta(t)=0$. On pose :

$$\left\{\begin{array}{l} y_0(t)=\theta(t)\\ y_1(t)=\dot{\theta}(t)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \dot{y}_0(t)=\dot{\theta}(t)=y_1(t)\\ \dot{y}_1(t)=\ddot{\theta}(t)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \dot{y}_0(t)=y_1(t)\\ \dot{y}_1(t)+k\sin y_0(t)=0\end{array}\right.$$

Schéma d'Euler explicite :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y_{0,k+1}-y_{0,k}}{h}=y_{1,k}\\ \dfrac{y_{1,k+1}-y_{1,k}}{h}+k\sin y_{0,k}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y_{0,k+1}=hy_{1,k}+y_{0,k}\\ y_{1,k+1}=y_{1,k}-kh\sin y_{0,k}\end{array}\right.$$

Schéma d'Euler implicite :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y_{0,k}-y_{0,k-1}}{h}=y_{1,k}\\ \dfrac{y_{1,k}-y_{1,k-1}}{h}+k\sin y_{0,k}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y_{0,k}=hy_{1,k}+y_{0,k-1}\\ y_{1,k}=y_{1,k-1}-kh\sin y_{0,k}\end{array}\right.$$

- Équation différentielle du second ordre : $(k_1+k_2\sin^2\theta(t))\ddot{\theta}(t)+(k_3\dot{\theta}(t)^2+k_4)\sin 2\theta(t)+C(t)=0$.